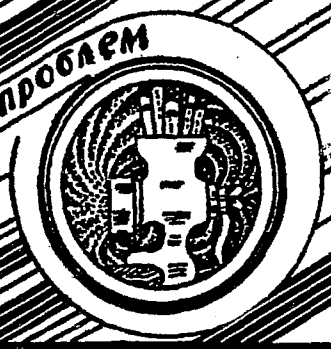


Трикладная Деловая Динамика





**Бифуркации
в динамических
системах различной природы**



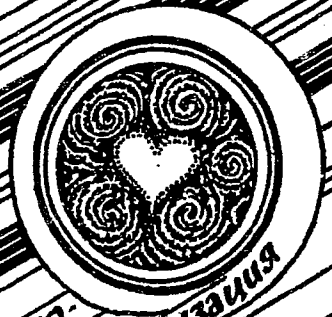
**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



Конференции, семинары, симпозиумы



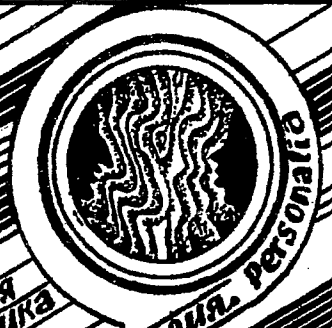
Детерминированный хаос



Авто-волны, самоорганизация



**Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн**



Нелинейная динамика в лицах. История персоналий

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФирЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлматов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

<i>Красичков Л.В., Рыскин Н.М.</i> Усиление детерминированного хаотического сигнала в системе электронный поток – обратная электромагнитная волна	3
<i>Вениг С.Б., Семенов А.А., Усанов Д.А., Захарова Т.Г.</i> Эффект синхронизации мод в СВЧ-генераторе на диоде Ганна, работающем в много-частотном режиме	10
<i>Селезнев Е.П., Дудова А.С.</i> Виды симметрии циклов в связанных системах с удвоением периода	16
<i>Фельдштейн И.В., Ногі Н.</i> О выборе параметров при молекулярно-динамическом моделировании	24

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

<i>Кузнецов А. П., Тюрюкина Л.В.</i> Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием	31
---	----

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

<i>Афенченко В.О., Езерский А.Б.</i> Динамика топологических дислокаций в гексагональной решетке, возникающей при термоконвекции Марангони – Бенара	43
---	----

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

<i>Акчурин Г.Г., Акчурин А.Г.</i> Оптический хаос в одномодовом частотно-стабилизированном лазере	57
<i>Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С.</i> О некоторых свойствах оператора Фробениуса – Перрона для сдвигов Бернулли	67

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

<i>Данилов Ю.А.</i> Джеймс Клерк Максвелл	74
---	----

КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА

<i>Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.</i> Синергетика: Учебная программа	83
<i>Трубецков Д.И.</i> Самоорганизация в открытых системах: Учебная программа	87
<i>Трубецков Д.И., Храмов А.Е.</i> Электроника сверхвысоких частот: Учебная программа	89
<i>Павлов Б.М., Новиков М.Д.</i> Автоматизированный практикум по нелинейной динамике (синергетике)	95

АНОНС	99
------------------------	----

CONTENTS

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Amplification of deterministic chaotic signal in system «electron beam-backward electromagnetic wave». *L.V. Krasichkov, N.M. Ryskin* 3
- Locked modes effect in a microwave Gunn diode oscillator, working in a multi-frequency mode. *S.B. Wenig, A.A. Semenov, D.A. Usanov, T.G. Zacharova* 10
- Types of cycles symmetry in coupled period doubling systems. *Ye.P. Seleznev, A.S. Dudova* 16
- On the choice of parameters in molecular-dynamic simulation. *I.V. Feldshtein, H. Hori* 24

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Dynamical systems of different classes as models of the kicked non-linear oscillator. *A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina* 31

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Dislocation's dynamics in hexagonal lattices arising in Benard - Marangoni convection. *V.O. Afenchenko, A.B. Ezersky* 43

DETERMINISTIC CHAOS

- Optical chaos in a single-mode frequency-stabilized laser. *G.G. Akchurin, A.G. Akchurin* 57
- On some properties of the Frobenius - Perron operator for the Bernoulli shifts. *A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin, S.S. Arkadaksky* 67

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- James Clerk Maxwell. *Yu. A. Danilov* 75

STUDENT'S BOOKSHELF

- Synergetics (for humanitarians): educational program. *B.P. Bezruchko, A.A. Koronovskiy, D.I. Trubetskov, A.E. Hramov* 83
- Self-organization in open systems: educational program. *D.I. Trubetskov* 87
- Microwave electronics: educational program. *D.I. Trubetskov, A.E. Hramov* 89
- Automational practice on non-linear dynamics (synergetics) *B.M. Pavlov, M.D. Novikov* 95

- ANNOUNCEMENTS 99



УСИЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОТИЧЕСКОГО СИГНАЛА В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК – ОБРАТНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА

Л.В. Красичков, Н.М. Рыскин

Проведены численные исследования особенностей усиления детерминированного хаотического сигнала, генерируемого системой Рёсслера, в системе электронный поток – обратная электромагнитная волна (СВЧ–усилитель на основе лампы обратной волны). Показано, что в процессе усиления сигнала происходит его усложнение, которое выражается в искажении структуры аттрактора и увеличении корреляционной размерности при распространении сигнала от входа системы к выходу. Обнаружено, что сигнал искажается аналогично тому, как это происходит при прохождении хаотических сигналов через линейные фильтры.

В последние годы проблема фильтрации детерминированных хаотических сигналов привлекла большое внимание. Было выяснено, что низкоразмерные хаотические колебания усложняются при прохождении через линейные фильтры. Это усложнение выражается в искажении структуры аттрактора и увеличении его размерности [1–4]. Аналогичные эффекты были обнаружены при распространении хаотических сигналов в линейных диспергирующих средах [5,6]. Однако наибольший интерес, очевидно, представляет исследование прохождения подобных сигналов через активные нелинейные среды и системы, применяемые в радиофизике и электронике для усиления и обработки информационных сигналов. Результаты подобных исследований на сегодняшний день отсутствуют. С другой стороны, при анализе характеристик приборов вакуумной и плазменной электроники, действие которых основано на распределенном взаимодействии электронного потока с электромагнитной волной, представляется важным решить вопрос о том, как искажается сложный информационный сигнал в процессе усиления.

В настоящей работе представлены результаты численного моделирования процесса прохождения детерминированного хаотического сигнала через усилитель на основе лампы обратной волны (ЛОВ), который относится к числу наиболее известных приборов электроники СВЧ [7,8]. Из-за узкой полосы усиления ЛОВ–усилитель нередко сравнивают с активным СВЧ–фильтром.

Для численного моделирования использовались традиционные уравнения нестационарной нелинейной теории ЛОВ [9–12], которые имеют вид

$$\partial^2 \theta_\alpha / \partial \xi^2 = -L^2 \operatorname{Re}(F \exp(i\theta_\alpha)), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -L/\pi \int_0^{2\pi} \exp(-i\theta_\alpha) d\alpha \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\theta_\alpha|_{\xi=0} = \alpha, \quad \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \xi}|_{\xi=0} = 0, \quad F|_{\xi=1} = F_{in}(t). \quad (3)$$

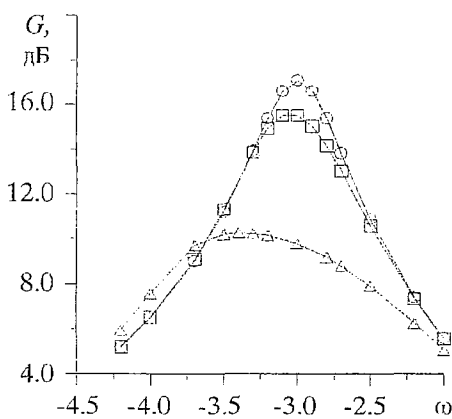
Уравнение (1) представляет собой уравнение движения электронов в поле синхронной электромагнитной волны, в нем θ_α – фаза электрона относительно волны; $\alpha \in [0; 2\pi]$ – начальная фаза; ξ – координата, нормированная на длину пространства взаимодействия; F – медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля волны; L – безразмерный параметр, пропорциональный току электронного пучка [7–9]. Уравнение (2) является уравнением возбуждения обратной пространственной гармоники электромагнитной волны током электронного пучка, в нем t имеет смысл безразмерного времени. Первые два соотношения в граничных условиях (3) отражают отсутствие модуляции электронного потока по плотности и скорости на входе в систему, третье соотношение означает, что на правую границу системы подается усиливаемый входной сигнал $F_{in}(t)$.

Решение уравнений (1–3) осуществлялось с помощью хорошо зарекомендовавшей себя разностной схемы второго порядка точности, подобной описанной в [11], с шагами по координате и времени 0.01 и 0.005, соответственно.

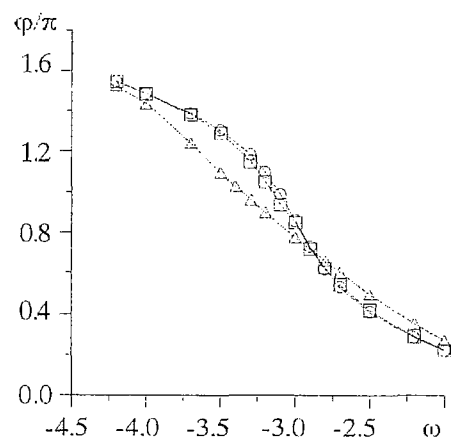
Согласно результатам линейной теории ЛОВ [9,10], самовозбуждение усилителя происходит при $L=L_{st} \approx 1.98$. Поэтому моделирование проводилось при $L < L_{st}$. На рис. 1 приведены амплитудно–частотные и фазо–частотные характеристики системы в режиме усиления гармонического сигнала с амплитудой A_0 и частотой ω

$$F_{in} = A_0 \sin(\omega t)$$

при $L=1.9$, что соответствует равному 0.88 отношению тока пучка к стартовому. Отметим их совпадение с известными результатами, полученными в стационарной нелинейной теории ЛОВ–усилителя [8]. Когда A_0 мало, то есть усилитель работает в линейном режиме, максимальный коэффициент усиления G составляет примерно 17 дБ на частоте $\omega_{max} \approx -3.0$. В используемой нормировке переменных ω равна относительному невозмущенному углу пролета электронов. В соответствии с линейной теорией ЛОВ [7–9] генерация возникает с частотой $\omega_{st} = -\pi$. Таким образом, максимум коэффициента усиления наблюдается на частоте, близкой к ω_{st}



а



б

Рис. 1. Амплитудно–частотные (а) и фазо–частотные (б) характеристики ЛОВ–усилителя при $L=1.9$: $A_0=0.01$ (○), $A_0=0.1$ (□), $A_0=0.5$ (△)

($\omega_{\max} \rightarrow \omega_{st}$ при $L \rightarrow L_{st}$). По мере перехода в нелинейный режим (с ростом A_0) коэффициент усиления падает, а полоса усиливаемых частот расширяется.

При моделировании усиления хаотического сигнала входной сигнал $F_{in}(t)$ выбирался в виде модулированного по амплитуде гармонического колебания

$$F_{in} = A_0(1 + mx(t))\sin(\omega t), \quad (4)$$

где m – глубина модуляции, а $x(t)$ – детерминированный хаотический сигнал, порождаемый системой Рёсслера [13]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + 0.2y, \\ \dot{z} &= 0.2 - 4.6z + xz. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (5) точка обозначает дифференцирование по t . Отметим, что система Рёсслера является одной из наиболее известных и изученных конечномерных моделей со сложной динамикой. Выбранные значения ее параметров соответствуют режиму хаотических колебаний.

Результаты численного моделирования прохождения сигнала вида (4) через ЛОВ–усилитель при $L=1.9$ представлены на рис. 2. Амплитуда несущего сигнала $A_0=0.01$, что соответствует линейному режиму работы усилителя, а частота выбиралась равной частоте максимального усиления $\omega=\omega_{\max} \approx 3.0$ (см. рис. 1, а). На рис. 2 изображены проекции фазовых портретов и отображения последования в различных сечениях системы. Видно, что искажения сигнала увеличиваются по мере распространения от входа усилителя к выходу, причем этот процесс качественно аналогичен трансформации сигнала при линейной фильтрации [1–3]. Фазовые портреты рассчитывались для огибающей сигнала $|F(t)|=|F(t_n)|$ по методу Такенса [14], при этом реконструированный аттрактор в d_E -мерном псевдофазовом пространстве задается набором векторов состояний

$$|F_n| \equiv |F(t_n)| = \{|F(t_n)|, |F(t_n+\tau)|, \dots, |F(t_n+\tau(d_E-1))|\}, \quad (6)$$

где $n=1, \dots, N$; N – длина реализации $|F(t_n)|$; τ – постоянная времени восстановления. Отображения последования (P_i, P_{i+1}) получены из последовательности локальных минимумов ($\{P_i\}_{i=1}^M = \min\{|F(t)|\} = \min\{|F(t_n)|\}_{n=1}^N$).

При переходе в нелинейный режим с ростом амплитуды A_0 ширина полосы усиления растет (см. рис. 1). Поэтому узкополосный хаотический сигнал искажается слабее. Соответствующие отображения последования представлены на рис. 3. Однако при этом падает коэффициент усиления, который, например, при $A_0=0.5$ не превышает 11 дБ.

Численное моделирование при других значениях L , не превышающих L_{st} , дает аналогичные результаты. По мере приближения к порогу самовозбуждения максимальный коэффициент усиления возрастает и полоса усиления сужается. Поэтому искажения сигнала становятся более заметными.

Для количественной оценки степени усложнения хаотического сигнала в системе (1)–(3) был проведен расчет корреляционной размерности по методу Грассбергера и Прокаччиа [15], основанный на вычислении корреляционной суммы

$$C(\varepsilon) \approx 1/[N(N-1)] \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N \theta(\varepsilon - \| |F_i| - |F_j| \|), \quad (7)$$

где ε – масштаб наблюдения; N – число точек, по которым производится расчет размерности; θ – функция Хевисайда ($\theta(x)=0$, если $x<0$; $\theta(x)=1$, если $x \geq 0$) и $\|\cdot\|$ – максимальная норма. Корреляционная размерность представлена функцией $D_C(E)$ ($C(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D_C}$), где $E=20 \cdot \log_{10}(\varepsilon/\varepsilon_0)$, ε_0 – размер аттрактора. Результаты оценки $D_C(E)$

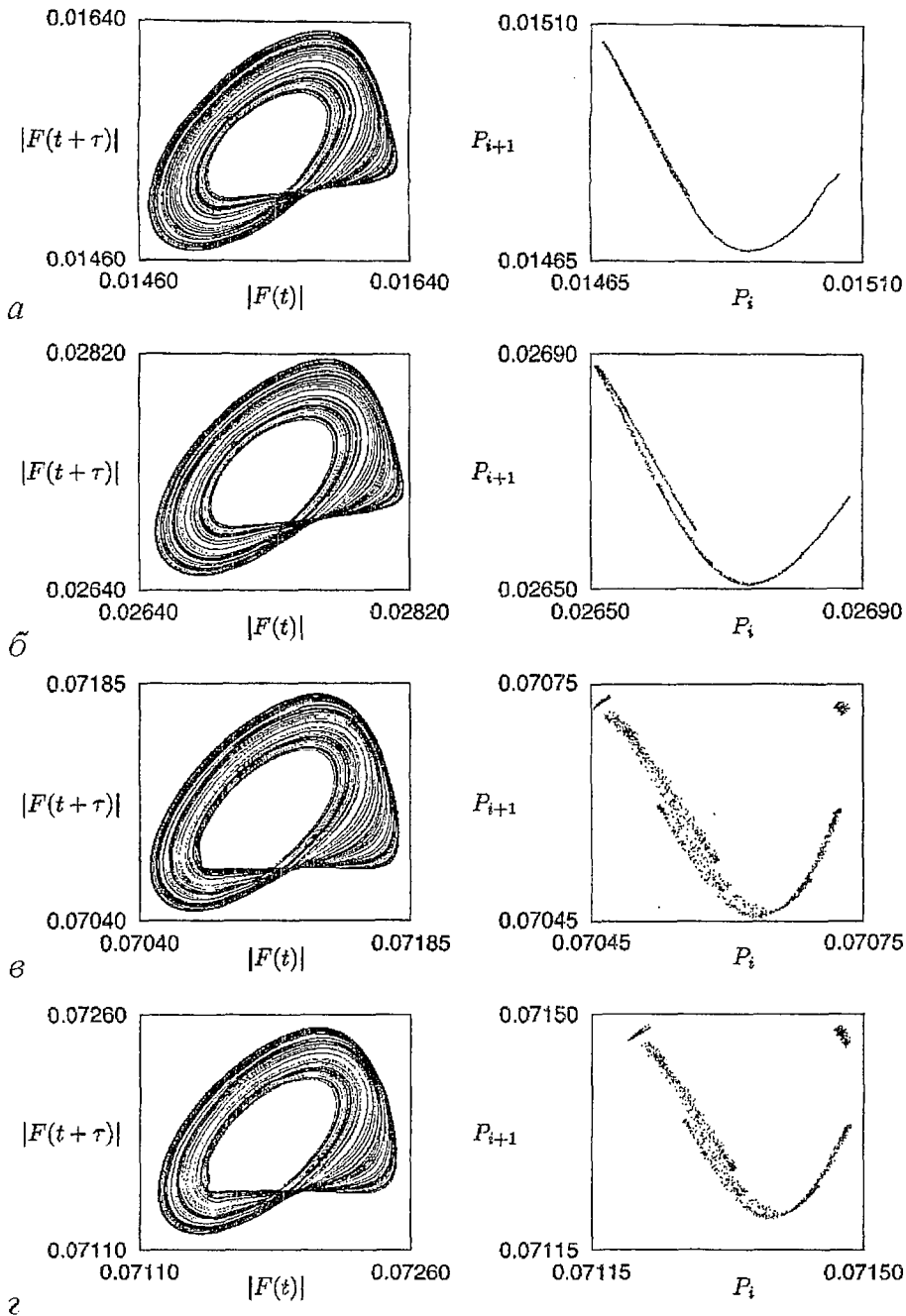


Рис. 2. Восстановленные фазовые портреты (левая колонка) и отображения последования при $M=1200$ (правая колонка) сигнала в различных сечениях ЛОВ-усилителя: $\xi=0.9$ (а), 0.7 (б), 0.2 (в), 0.0 (г). Амплитуда входного сигнала $A_0=0.01$

приведены на рис. 4 для $A_0=0.01$ в различных сечениях системы при $N=2 \cdot 10^4$, $\tau=0.375$, $d_E=2 \div 8$. Из рисунка видно, что значение размерности в диапазоне масштабов наблюдения $-50 \text{ dB} < E < -40 \text{ dB}$ возрастает в направлении от входа усилителя к выходу. Представленные изменения отображения последования и корреляционной размерности как функции масштаба наблюдения для системы (1-3) при изменении ξ качественно подобны изменениям данных характеристик при прохождении низкоразмерного хаотического сигнала через линейный фильтр низких частот [1,16].

В настоящей работе впервые рассмотрено прохождение детерминированного хаотического сигнала через активное нелинейное устройство СВЧ-электроники – усилитель обратной волны. Наблюдается усложнение хаотических колебаний, выражающееся в усложнении структуры аттрактора и увеличении корреляционной размерности при распространении сигнала от входа системы к

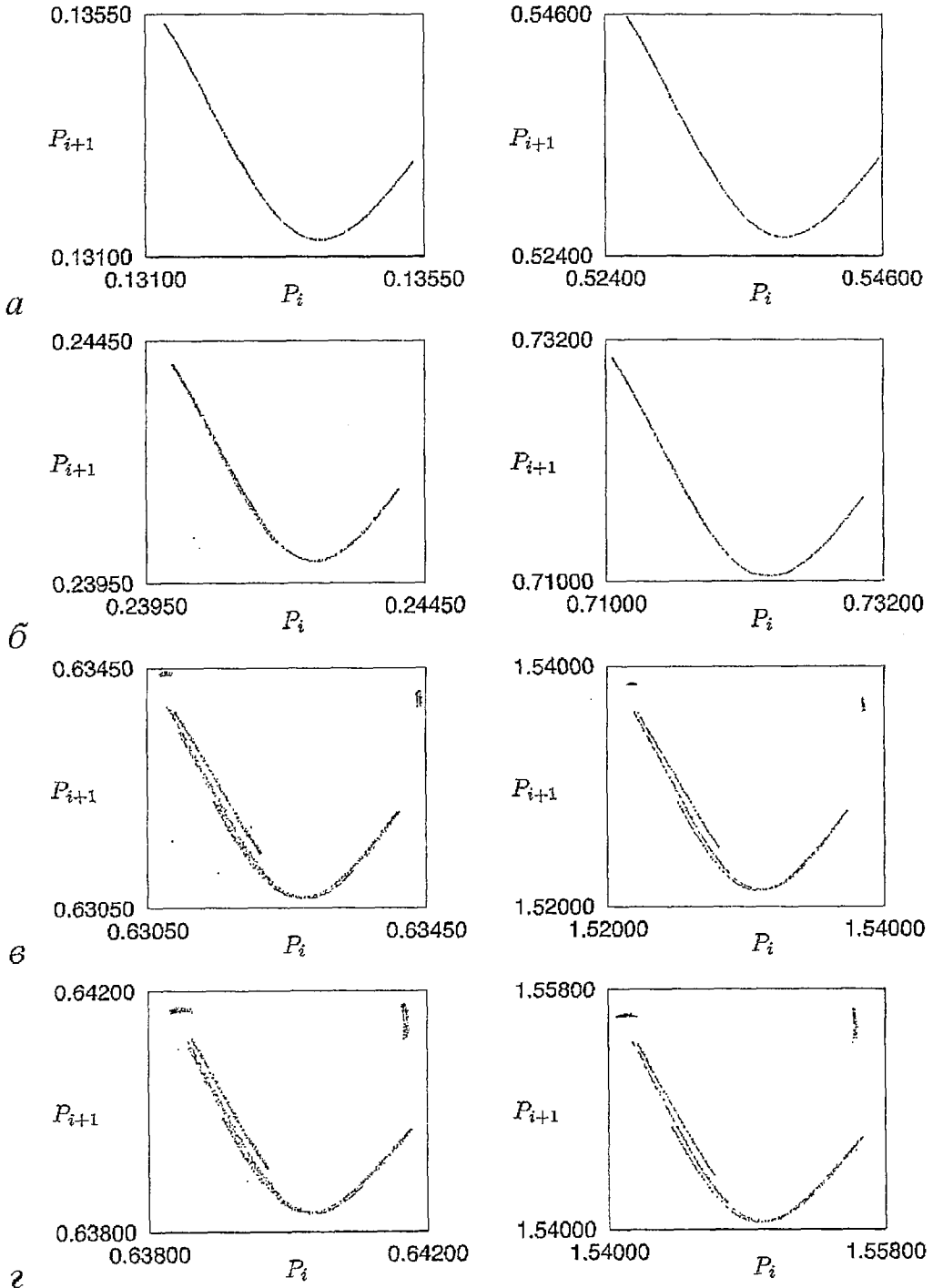


Рис.3. Отображения последования ($M=1200$) сигнала в различных сечениях ЛОВ-усилителя: $\xi=0.9$ (а), 0.7 (б), 0.2 (в), 0.0 (г). Амплитуда входного сигнала $A_0=0.1$ (левая колонка) и $A_0=0.5$ (правая колонка)

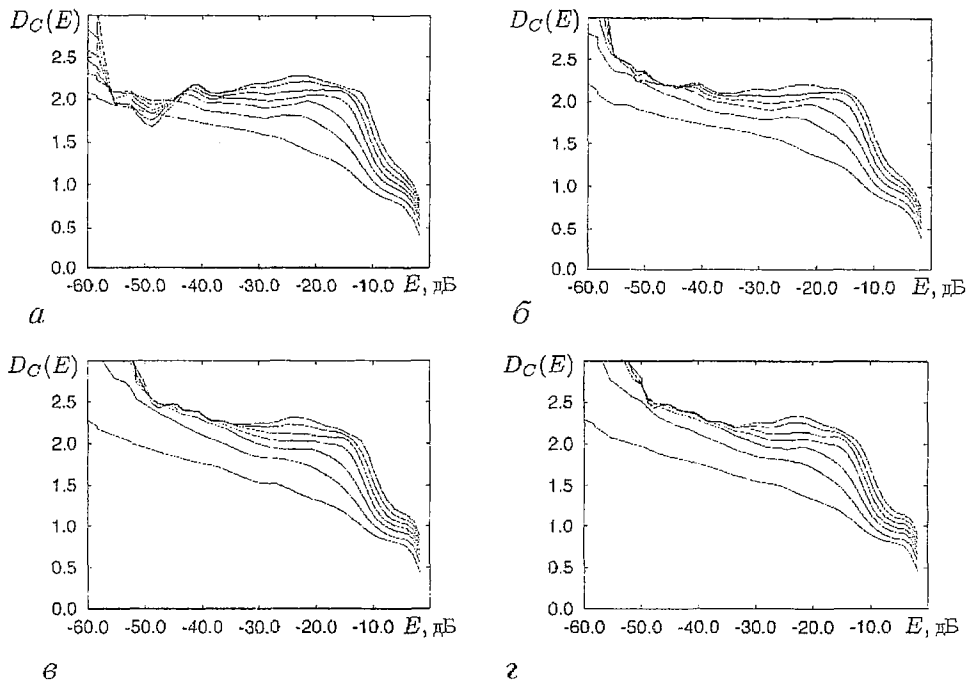


Рис. 4. Корреляционная размерность как функция масштаба наблюдения для сигнала в различных сечениях ЛОВ–усилителя: $\xi=0.9$ (а), 0.7 (б), 0.2 (в), 0.0 (г). Амплитуда входного сигнала $A_0=0.01$. Нижняя кривая получена для $d_E=2$, верхняя – для $d_E=8$

выходу. Важно отметить, что протекающие при этом процессы качественно подобны искажению сигнала, прошедшего через линейные фильтры, и определяются главным образом видом амплитудно–частотной и фазо–частотной характеристик усилителя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–02–16016).

Библиографический список

1. Badii R., Broggi G., Derighetti B., Ravani M., Cliberto S., Politi A., Rubio M.A. Dimension increase in filtered chaotic signals // Phys.Rev.Lett. 1988. Vol. 60, № 11. P.979.
2. Mitschke F., Möller M., Lange W. Measuring filtered chaotic signals // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37, № 11. P. 4518.
3. Кипчатов А.А., Красичков Л.В. Изменение структуры странного аттрактора при полосовой фильтрации хаотических колебаний // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, вып.17. С. 68.
4. Кипчатов А.А., Красичков Л.В. Суперфрактализация хаотического аттрактора при линейной фильтрации // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, вып. 4. С. 1.
5. Gaponov–Grekhov A.V., Rabinovich M.I., Starobinets I.M., Tsimring M.Sh., Chugurin V.V. Ω –dimension of chaotic time series // CHAOS. 1994. Vol. 4, № 1. P.55.
6. Krasichkov L.V., Kipchatov A.A. On high–dimensional oscillations from lattice of linear elements // Nonlinear Waves. Synchronization and Patterns / Eds M.I. Rabinovich, M.M. Sushchik, V.D. Shalfeev. Nizh. Novgorod Univ. Press, 1995. Vol. 1. P.69.
7. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1971.
8. Кац А.М., Ильина Е.М., Манькин И.А. Нелинейные явления в приборах О–типа. М.: Сов. радио, 1971.
9. Электроника ламп с обратной волной / Под. ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд–во Саратов. ун–та, 1975.

10. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.

11. Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн.5. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. С. 25.

12. Трубецков Д.И., Четвериков А.П. Автоколебания в распределенной системе электронный поток – обратная (встречная) электромагнитная волна // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, № 5. С.9.

13. Rössler O.E. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57, № 5. P.397.

14. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence. Lect. Notes in Math. Vol. 898. Berlin – Heidelberg – N.Y.: Springer, 1981. P. 366.

15. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, № 5. P. 346.

16. Красичков Л.В. Влияние амплитудных и фазовых свойств линейного фильтра на преобразование хаотических колебаний // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 22. С. 72.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 21.12.99

AMPLIFICATION OF DETERMINISTIC CHAOTIC SIGNAL IN SYSTEM «ELECTRON BEAM – BACKWARD ELECTROMAGNETIC WAVE»

L.V. Krasichkov, N.M. Ryskin

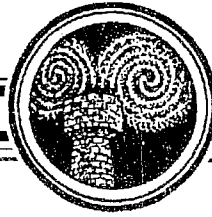
Numerical simulations of amplification of deterministic chaotic signal originated from Rössler system in «electron beam – backward electromagnetic wave» system (microwave backward wave amplifier) were carried out. It is shown that during the amplification the signal complicates that is demonstrated by distortion of the attractor structure and by increasing of correlation dimension from input to output of the amplifier. It was found that the chaotic signal is distorted in the same manner as when it passes through the linear filters.



Красичков Леонид Валерьевич – окончил физический факультет Саратовского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика. Работал в Научно-исследовательском институте механики и физики Саратовского государственного университета. Доцент факультета нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. Область научных интересов – нелинейная динамика, количественные характеристики сложнопериодического и хаотического поведения динамических систем, преобразование хаотических колебаний цепями и средами. Автор и соавтор более 24 научных работ. E-mail: lvk@cas.ssu.runnet.ru



Рыскин Никита Михайлович родился в Саратове в 1966 г. После окончания физического факультета Саратовского университета (1991) работал в НИИ механики и физики СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «радиофизика» (1996). Доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные явления в приборах СВЧ-электроники, вакуумная микроэлектроника. Автор и соавтор более 50 научных работ, в том числе учебного пособия «Нелинейные волны» (М.: Наука, Физматлит, 2000, совместно с Д.И. Трубецковым). E-mail: ryskinm@info.sgu.ru



ЭФФЕКТ синхронизации мод в СВЧ-генераторе на диоде Ганна, работающем в многочастотном режиме

С.Б. Вениг, А.А. Семенов, Д.А. Усанов, Т.Г. Захарова

С помощью математической модели СВЧ-генератора на диоде Ганна, основанной на эквивалентной схеме, в которой учтены особенности включения коаксиального держателя диода и разделение резонансной и выходной цепей, описаны известные экспериментальные закономерности, в том числе эффекты многочастотной генерации и синхронизации мод. Полученные результаты расчета хорошо коррелируют с экспериментальными данными.

Введение

Известно, что твердотельные СВЧ-генераторы на диодах Ганна способны демонстрировать широкий диапазон колебательных режимов: от периодических и сложнопериодических до квазипериодических и хаотических [1–3]. В частности, было обнаружено, что СВЧ-генераторы на диодах Ганна могут работать в многочастотном режиме, при котором спектральные компоненты не связаны целочисленными соотношениями между собой [2]. При подаче синхронизирующего сигнала на такой генератор в нем возникает эффект синхронизации мод, заключающийся в том, что в спектре выходного сигнала каждая мода занимает положение, характерное для ближайшей в ней гармоники синхронизирующей частоты [4]. Этот режим работы СВЧ-генератора на диоде Ганна был обнаружен экспериментально, и его теоретического описания проведено не было.

Представляет интерес создание модели, описывающей обнаруженные экспериментальные эффекты и объясняющей физические причины их возникновения. Сложность теоретического описания колебательных режимов в подобных устройствах состоит в том, что необходимо учитывать влияние на импеданс диодов Ганна режима питания, типа электродинамической системы, в которую помещен диод, конструктивного исполнения элементов генератора и других факторов [1]. Математическое моделирование режимов работы твердотельного генератора на диоде Ганна оказывается возможным в результате численного интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эквивалентную схему генератора, при заданных начальных условиях.

В настоящей работе представлены результаты компьютерного моделирования сложных колебательных процессов в СВЧ-генераторе на диоде Ганна, в том числе с учетом воздействия на генератор внешнего синхронизирующего сигнала.

Модель СВЧ-генератора

В качестве объекта моделирования был выбран СВЧ-генератор волноводно-коаксиальной конструкции (рис. 1), часто применяемый на практике [5], который представляет собой отрезок прямоугольного металлического волновода 1 с короткозамыкающим поршнем 2, который используется для перестройки частоты генератора. Диод 3 устанавливается в разрыве стержневого держателя 4, являющегося продолжением центрального проводника коаксиала 5. Внешний проводник коаксиальной линии изолирован от волновода диэлектрической прокладкой 6. Напряжение смещения от источника питания подается на диод через фильтр низкой частоты 8 по центральному проводнику коаксиала, который выполняет не только роль проводника в цепи питания, но и осуществляет связь активного элемента с резонатором. Роль резонатора выполняет отрезок волновода, заключенный между диодом и короткозамыкающим поршнем. Отрезок волновода, подключенный к держателю с диодом с другой стороны, и следующая за ним волноведущая линия исполняют роль нагрузки.

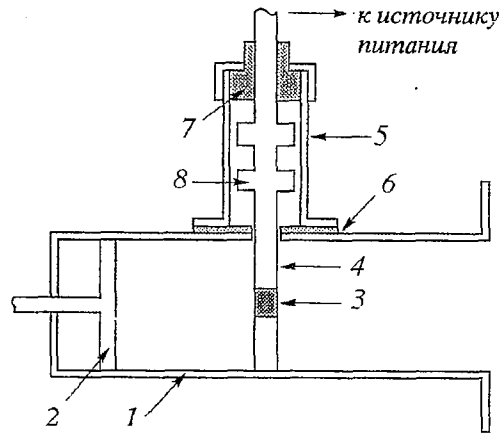


Рис. 1. Конструкция СВЧ-генератора на диоде Ганна: 1 – отрезок прямоугольного металлического волновода, 2 – короткозамыкающий поршень, 3 – диод Ганна, 4 – стержневой держатель, 5 – коаксиальная линия, 6, 7 – диэлектрические прокладки, 8 – фильтр НЧ

Эквивалентную блок-схему диодного генератора такой конструкции можно представить следующим образом: источник питания через цепь питания соединен с диодом Ганна и элементом связи. Последний обеспечивает связь активного элемента с резонансным контуром и нагрузкой. Такое представление отличается от известных [1,2] тем, что разделены резонансная и нагрузочная цепи и дополнительно учтены особенности включения диода в волновод с помощью коаксиального элемента связи.

Эквивалентная схема генератора для этого случая с обозначениями токов и напряжений представлена на рис. 2. В ее состав входят источник питания (напряжения) E_0 , подключенный через сопротивление R_b и блокировочную емкость C_b к диоду Ганна. Диод представлен в виде соединенных параллельно нелинейного сопротивления R_j и емкости C_j активной структуры с подключенными к ним элементами, отражающими сопротивление потерь в контактах R_s , емкость C_s и индуктивность L_s корпуса диода. Элемент связи L_c через разделительные емкости C_c подсоединен к последовательному резонансному контуру R_k, L_k, C_k и сопротивлению нагрузки внешней цепи R_n . Разделение резонансной и нагрузочной цепей позволило ввести в эквивалентную схему источник синхронизирующего сигнала E_c . Нелинейное сопротивление диода в описываемой модели задавалась его вольт-амперной характеристикой [6]:

$$i(U) = enS[\mu(U+D)/L + V_s[(U+D)/V_p]^4]/\{1 + [(U+D)/V_p]^4\},$$

где e – заряд электрона; $n=10^{15}$ см³ – концентрация электронов; $S=10^{-4}$ см² – площадь структуры; $L=10$ мкм – длина структуры; $\mu=6000$ см²/(В·с) – подвижность носителей заряда; $V_s=8.5 \cdot 10^6$ см/с – скорость носителей заряда; $V_p=4$ В, $D=2$ В – коэффициенты с размерностью напряжения.

Система дифференциальных уравнений для напряжений и токов в рассматриваемой эквивалентной схеме, составленная методом переменных

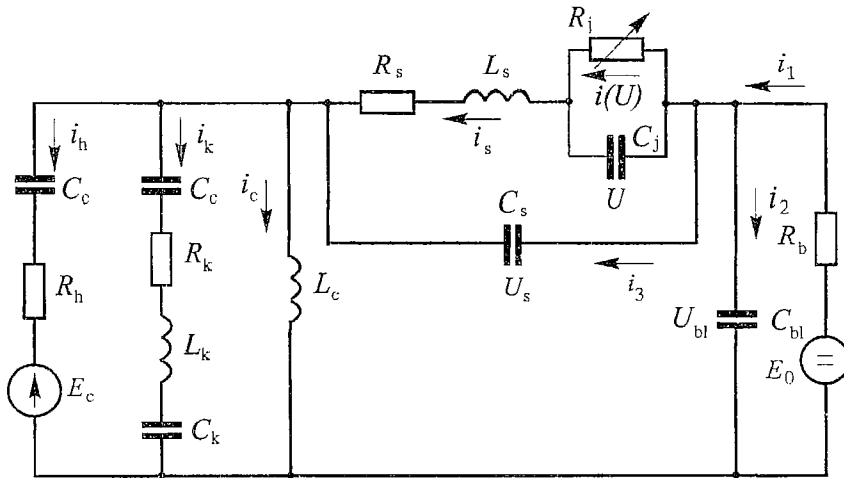


Рис. 2. Эквивалентная схема СВЧ-генератора на диоде Ганна

состояния и представляющая собой математическую модель генератора на диоде Ганна, имеет в этом случае следующий вид:

$$dU/d\tau = [i_s - i(U)]/(\omega C_j), \quad dU_s/d\tau = [J_0 - i_s]/(\omega C_s), \quad dU_{bl}/d\tau = [(E_0 - U_{bl})/R_b - J_0]/(\omega C_{bl}),$$

$$di_s/d\tau = [U_s - U - i_s R_s]/(\omega L_s), \quad di_c/d\tau = [U_{bl} - U_s]/(\omega L_c), \quad di_k/d\tau = V,$$

$$dV/d\tau = [J_0/\omega + i_s]/(\omega C_s) - \omega L_k i_k - R_h V]/(\omega L_k), \quad di_h/d\tau = [\omega dE_c/d\tau + i_s/C_s - i_k/C_c + J_0]/(\omega R_h).$$

где $J_0 = i_c + i_k + i_h$, $\tau = \omega t$.

При проведении интегрирования системы дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты четвертого порядка для эквивалентной схемы были выбраны следующие значения параметров:

- диода Ганна $R_s = 1$ Ом – сопротивление выводов, $C_s = 2 \cdot 10^{-11}$ Ф – емкость корпуса, $L_s = 5 \cdot 10^{-10}$ Гн – индуктивность выводов, $C_j = 8 \cdot 10^{-13}$ Ф – емкость диода;
- схемы питания $E_0 = 1 \div 10$ В, $R_b = 3$ Ом, $C_{bl} = 10^{-10} \div 10^{-6}$ Ф;
- резонансного контура $R_k = 50$ Ом, $C_k = 5 \cdot 10^{-12}$ Ф, $L_k = 10^{-9}$ Гн;
- нагрузки и цепи связи $R_h = 50$ Ом, $C_c = 10^{-12} \cdot 10^{-10}$ Ф, $L_c = 2 \cdot 10^{-9}$ Гн;
- синхронизирующего сигнала $E_c = 0 \div 5$ В – амплитуда, $f_c = 10^8 \div 10^{11}$ Гц – частота.

Результаты численного моделирования

Результаты численного исследования эквивалентной схемы при заданных параметрах и отключенном источнике синхронизирующего сигнала свидетельствуют о том, что в рассматриваемой модели могут быть реализованы различные режимы работы, хорошо известные на практике. В частности, при значениях величин емкостей $C_c > 5.54 \cdot 10^{-12}$ Ф и $C_{bl} > 10^{-9}$ Ф наблюдаются одночастотные колебания, при этом временная зависимость колебаний на нагрузке совпадает по форме с колебаниями на диоде Ганна и имеет гармонический вид. Уменьшение блокировочной емкости C_{bl} при фиксированных остальных параметрах приводит к возбуждению низкочастотных колебаний ($\sim 1 \div 10$ МГц) в цепи питания диода. В зависимости от значений напряжения питания E_0 , величин C_{bl} , R_b и C_c возможна реализация сложных динамических режимов работы.

Если для значений емкости C_{bl} , при которых происходит подавление колебаний в цепи питания диода, уменьшать значение емкости C_c , то при ее

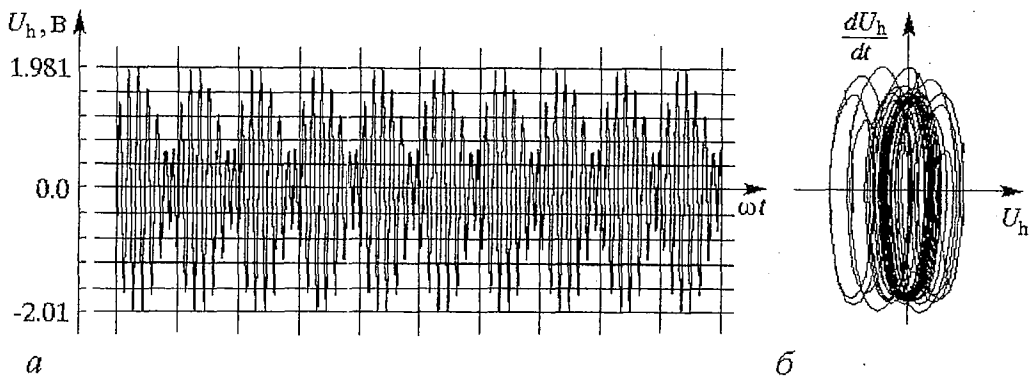


Рис. 3. Временная реализация (а) и проекция фазового портрета (б) колебаний в режиме многочастотной генерации

значениях менее $5.54 \cdot 10^{-12}$ Ф в схеме наблюдаются многочастотные квазипериодические колебания. Для такого режима работы при соответствующих параметрах эквивалентной схемы характерно существование независимых колебаний на частотах менее 1 ГГц в контуре коаксиального держателя, включающем элемент связи L_c и емкость C_c , и более высокочастотных колебаний в резонаторе. Временная реализация и проекция фазового портрета таких колебаний на нагрузку при напряжении источника питания $E_0=6$ В и значении емкости $C_c=5 \cdot 10^{-12}$ Ф представлены на рис. 3. Особенностью такого режима колебания является то, что через элементы связи в резонансном контуре, помимо основных колебаний, возбуждаются гармоники низкочастотных колебаний контура коаксиального держателя, причем 10-я и 11-я гармоники имеют амплитуды, близкие к амплитуде основной низкочастотной составляющей и в несколько раз превышающие амплитуды остальных гармонических составляющих. Такой режим работы СВЧ-генератора на диоде Ганна рассматриваемой конструкции, с учетом частотной полосы пропускания металлического волновода, объясняет известный экспериментальный факт существования в спектре выходного сигнала составляющих, не связанных целочисленными соотношениями, и подтверждает предположения о природе наблюдаемой многочастотной генерации, сделанные в работе [2].

Введение в расчёт внешнего сигнала ($E_c > 0$) с частотой, близкой либо к основной частоте генерации, либо к частоте колебаний в контуре коаксиального держателя, позволило исследовать следующие режимы.

При расстройке частоты внешнего сигнала $\Delta f > 200$ МГц от основной частоты генерации $f_0=7$ ГГц, при работе схемы в режиме одночастотных колебаний реализуется режим биений. В этом случае спектр выходного сигнала имеет набор комбинационных составляющих, что, в частности, наблюдалось экспериментально и описано в работе [7], а характер временных зависимостей колебаний свидетельствует о том, что основной высокочастотный сигнал модулируется колебаниями низкой частоты. Причем вид огибающей этих колебаний зависит как от расстройки частоты внешнего сигнала, так и от его амплитуды, что подтверждает выводы приведенного в [7] качественного анализа подобного режима работы и предположение о возможности его использования для обеспечения амплитудной модуляции выходного сигнала СВЧ-генератора на диоде Ганна. При величине расстройки $\Delta f < 200$ МГц схема работает в режиме синхронизации внешним сигналом.

Для частот синхросигнала, близких к собственной частоте колебаний в контуре коаксиального держателя и на порядок меньших частоты колебаний генератора, результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что наблюдается реализация режима синхронизации на субгармонике высокой кратности (более 10). Реализация такого режима синхронизации в СВЧ-

генераторе на диоде Ганна рассматриваемой конструкции наблюдалась экспериментально [8]. Эффективность синхронизации на субгармонике обусловлена рассмотренным выше механизмом взаимодействия между контуром коаксиального держателя и резонатором.

Для случая многочастотной генерации при подаче внешнего сигнала с частотой f_c , близкой к частоте колебаний в контуре коаксиального держателя, наблюдается захват основной частоты генератора синхронизирующим сигналом. При этом сигналы с частотами колебаний, в отсутствие синхросигнала не связанными целочисленными соотношениями, захватываются наиболее близко расположенными гармоникам синхросигнала. Причем с увеличением амплитуды синхросигнала E_c расширяется полоса синхронизации. Так, для внешнего сигнала с частотой 0.7 ГГц и амплитудой 5 В полоса синхронизации составляет 400 МГц.

Выводы

Таким образом, математическая модель СВЧ–генератора на диоде Ганна, основанная на эквивалентной схеме, в которой учтены особенности включения коаксиального держателя диода и разделение резонансной и выходной цепей, позволяет описать известные экспериментально закономерности, в том числе эффекты многочастотной генерации и синхронизации мод. Полученные результаты расчёта хорошо коррелируют с известными экспериментальными данными, что свидетельствует о верности выбранной модели и корректности сделанных допущений.

Библиографический список

1. Влияние нелинейного характера импеданса диодов Ганна на работу СВЧ–генераторов на их основе / Д.А.Усанов, С.Б.Вениг, С.С.Горбатов, А.А.Семенов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 355.
2. Усанов Д.А., Горбатов С.С., Семенов А.А. Особенности многочастотной генерации СВЧ диодов Ганна // РЭ. 1993. Т. 36, № 3. С. 64.
3. Бочаров Е.П., Коростелев Г.Н., Хрипунов М.В. К модели стохастической автогенерации в генераторах на диодах Ганна // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 1. С. 96.
4. Синхронизация мод в СВЧ–генераторах на диодах Ганна / Д.А.Усанов, С.Б.Вениг, С.С.Горбатов, А.А.Семенов // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, № 10. С. 26.
5. Давыдова Н.С., Данюшевский Ю.З. Диодные генераторы и усилители СВЧ. М.: Радио и связь, 1986. 184 с.
6. Murayama K., Ohmi T. Static negative resistance in highly doped Gunn diodes and application to switching and amplification // Japan. J. Appl. Phys. 1973. Vol. 12, № 12. P. 1931.
7. Модуляция выходного сигнала генератора на диоде Ганна воздействием на него внешнего СВЧ–сигнала / Д.А. Усанов, С.Б.Вениг, С.С. Горбатов, А.А.Семенов // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 9. С. 982.
8. Синхронизованный на субгармонике сверхвысокочастотный генератор на диоде Ганна / С.С. Горбатов, Д.А. Усанов, С.Б.Вениг и др. // Приборы и техника эксперимента. 1993. № 3. С. 136.

LOCKED MODES EFFECT IN A MICROWAVE GUNN DIODE OSCILLATOR, WORKING IN A MULTIFREQUENCY MODE

S.B. Wenig, A.A. Semenov, D.A. Usanov, T.G. Zacharova

With the help of a mathematical model of a microwave Gunn diode oscillator grounded on the equivalent network, in which one the features of actuation of the diode coaxial keeper and the separation of resonant and output circuits are taken into account, known experimental regularity, including effects of a multiple oscillation and modes synchronization are described. The obtained calculation results well correlate with experimental data.



Вениг Сергей Борисович – родился в 1957 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1979). Кандидат физико-математических наук (1988), доктор физико-математических наук по специальностям радиофизика и физика полупроводников (1999), доцент кафедры физики твердого тела. Область научных интересов, по направлениям которой опубликовано около 60 научных работ – физика полупроводников, твердотельная электроника, применение нелинейной динамики в полупроводниковой электронике, радиофизика,



Семенов Андрей Андреевич – родился в 1965 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского государственного университета в 1987 году. Окончил Саратовский государственный университет (1987), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика, включая квантовую радиофизику (1994), с 1998 года – докторант кафедры физики твердого тела. Область научных интересов – твердотельная электроника, микросхемотехника, применение нелинейной динамики в полупроводниковой электронике, радиофизика.



Усанов Дмитрий Александрович родился в 1943 году в Менделеевске (Татария). Окончил Саратовский госуниверситет (1965). Кандидат физико-математических наук (1972), доктор физико-математических наук (с 1989), с 1990 – профессор кафедры физики твердого тела. Область научных интересов – твердотельная электроника СВЧ, радиоволновые и оптические методы контроля, применение нелинейной динамики в полупроводниковой электронике. Академик МАН ВШ, заслуженный деятель науки РФ. Автор многих статей, патентов и изобретений по указанным выше направлениям.



Захарова Татьяна Григорьевна – окончила механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1977), в настоящее время работает старшим преподавателем кафедры системного анализа СГУ. Область научных интересов – теория функций и приближений, вычислительные методы решения дифференциальных уравнений.



ВИДЫ СИММЕТРИИ ЦИКЛОВ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

Е.П. Селезнев, А.С. Дудова

Рассматриваются виды симметрии различных циклов в связанных системах с удвоением периода и анализируется связь между видом симметрии цикла и характером его эволюции при изменении управляющих параметров. Полная симметрия циклов ведет к появлению нового, не имеющего места в парциальной подсистеме, сценария перехода к хаосу. Показано, что при вынужденном нарушении полной симметрии для некоторых циклов имеет место локальная симметрия, которая как и полная, ведет к рождению квазипериодических движений и переходу к хаосу через их разрушение.

Пути эволюции нелинейных динамических систем при изменении управляющих параметров во многом определяются их свойствами симметрии. Так, в неавтономных нелинейных осцилляторах с асимметричным потенциалом переход к хаосу, например, при последовательном увеличении амплитуды воздействия, происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода, которому в случае симметричного потенциала предшествует бифуркация потери симметрии (бифуркация вилки) [1–4]. В данных случаях симметрия систем проявляется в инвариантности решений к замене знака динамической переменной. Более общий подход на основе теории групп позволяет выделить различные группы симметрии циклов и связать их эволюцию с типом бифуркаций [5,6]. В данной работе проводится анализ связи между свойствами симметрии циклов и бифуркационным сценарием в уже ставшей классической системе, представляющей собой две диссипативно связанные идентичные подсистемы, демонстрирующие переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода [7,8].

Экспериментально исследуется система двух резистивно связанных идентичных RL -диод цепей с синфазным возбуждением (рис. 1), численно – система диссипативно связанных [7] квадратичных отображений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) = \lambda_1 - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n) = \lambda_2 - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2), \end{cases} \quad (1)$$

где x_n, y_n – динамические переменные, $n=1,2,3,\dots$ – дискретное время, λ_1 и λ_2 – параметры нелинейности, k – параметр связи. Аналогом параметров λ и k в эксперименте были амплитуда внешнего воздействия V и проводимость резистора связи $G=1/R_{св}$. Анализ режимов проводился в численном эксперименте по фазовым портретам на плоскости (x_n, y_n) , в физическом – по стробоскопическим сечениям

проекций фазовых портретов на плоскость (U_1, U_2) , где U_1 и U_2 – напряжения на диодах D_1 и D_2 (см. рис. 1). Результаты численных и экспериментальных исследований в рамках разрешимости последних качественно соответствуют друг другу, поэтому в дальнейшем они будут преподноситься как единое целое.

Система (1) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ инвариантна по отношению к замене x_n на y_n , а с изменением параметра нелинейности демонстрирует множество различных периодических, квази-периодических и хаотических режимов. В [9] дана их классификация, в основе которой используется временной сдвиг между колебаниями подсистем.

Рассмотрим влияние свойств симметрии на эволюцию циклов системы (1) на примере циклов различного периода. Начнем с циклов периода 2, которых существует два типа: синфазный и несинфазный. Для всех синфазных циклов справедливо тождество $x_n = y_n$, соответственно, эти циклы инвариантны к замене переменных x_n на y_n , а их портрет располагается на диагонали фазовой плоскости. Такая симметрия цикла ведет к тому, что эволюция всей системы в целом эквивалентна эволюции отдельной подсистемы. Рассмотрим это с помощью мультипликаторов системы (1), которые можно найти из решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} \mu^2 - S\mu + J &= 0, \\ \mu_{1,2} &= [S \pm (S^2 - 4J)^{1/2}] / 2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mu_{1,2}$ – мультипликаторы, S – след, а J – детерминант матрицы линеаризации системы (1). Для циклов периода 2

$$\begin{cases} J = 16x_1x_2y_1y_2[(1-k)^2 - k^2]^2, \\ S = 4[(1-k)^2x_1x_2 + k^2x_2y_1 + k^2x_1y_2 + (1-k)^2y_1y_2], \end{cases} \quad (3)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – решения системы (1), выражения для мультипликаторов имеют громоздкий вид. Однако используя свойство симметрии $x_n = y_n$, можно значительно их упростить:

$$\begin{cases} \mu_1 = 4x_1x_2, \\ \mu_2 = 4x_1x_2(1-2k)^2. \end{cases}$$

Первый мультипликатор μ_1 равен мультипликатору цикла того же периода изолированной подсистемы и при $0 < k < 1$ с увеличением параметра λ характер бифуркаций будет определяться именно им, так как второй мультипликатор будет всегда меньше: $\mu_1 > \mu_2$. Для синфазного цикла периода N мультипликаторы равны:

$$\begin{cases} \mu_1 = (-2)^N x_1 x_2 \dots x_N, \\ \mu_2 = (-2)^N (1-2k)^N x_1 x_2 \dots x_N, \end{cases} \quad (4)$$

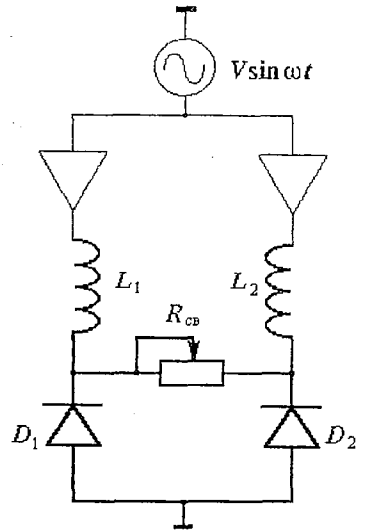


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

а система (1) при задании синфазных начальных условий с ростом параметра λ демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, подобно изолированной подсистеме. Таким образом поведение связанной системы тождественно поведению изолированной подсистемы.

Несинфазный цикл периода 2 (номер 2_1 в соответствии с системой обозначений [9]) также обладает свойствами симметрии, которые можно представить в виде системы равенств

$$\begin{cases} x_1 = y_2, \\ x_2 = y_1. \end{cases} \quad (5)$$

При этом реализации подсистем сдвинуты относительно друг друга на половину периода цикла (в данном случае на 1), а сам цикл симметричен относительно диагонали фазовой плоскости (x_n, y_n) . Подстановка (5) в (3) и (2) позволяет получить следующее выражение для мультипликаторов цикла 2_1 :

$$\mu_{1,2} = 2[2(1-k)^2 x_1 x_2 + k^2(x_1^2 + x_2^2)] \pm k(x_1 + x_2)[4(1-k)^2 x_1 x_2 + k^2(x_1 - x_2)^2]^{1/2}, \quad (6)$$

где x_1, x_2 – решения системы (1). Для цикла 2_1 (1) представляет собой систему двух уравнений четвертого порядка и в общем случае решается в радикалах, однако (5) позволяет упростить (1) и аналитически решить ее. В итоге выражения для мультипликаторов цикла 2_1 получаются достаточно громоздкими:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} = & \{2(1-k)^2[8k + 4 - 4\lambda(1-2k)^2] + k^2[6 + 8k^2 - 4\lambda(1-2k)^2] \pm \\ & \pm [(1-k)^2[8k + 4 - 4\lambda(1-2k)^2] + k^2\{(1-2k)^2 + 4 - 4\lambda(1-2k)^2\}]^{1/2}\} / (1-2k)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Анализ (9) показывает, что существует диапазон значений параметров λ и k , при которых мультипликаторы становятся комплексно сопряженными. Полагая модуль мультипликаторов равным 1 и решая систему (7), можно получить зависимость $\lambda(k)$, а на плоскости параметров линию, соответствующую бифуркации Хопфа [10]. Таким образом условие симметрии несинфазного цикла позволяет аналитически решить систему (1) и определить бифуркационные значения управляющих параметров, при которых происходит рождение тора, а в целом комплексность мультипликаторов и рождение тора следует из условия симметрии.

Рассмотрим структуру области пространства управляющих параметров, в которой эволюционирует цикл 2_1 . В общем случае ее удобно представить в виде листов [9]. Рис. 2, а иллюстрирует бифуркационные линии цикла 2_1 (и ряда последующих режимов) полученные в результате численных исследований системы (1). Цифрами на рис. 2 отмечен период циклов, жирной линией обозначена граница области (листа) где эволюционирует цикл 2_1 , светлые области соответствуют периодическим режимам, различной штриховкой отмечены области квазипериодических и хаотических колебаний. Сопоставление результатов численного и аналитического расчетов для бифуркации Хопфа указывает на их совпадение с машинной точностью. Численные исследования показывают [9], что циклы, для которых временной сдвиг между динамическими переменными равен половине периода с изменением управляющих параметров, демонстрируют бифуркацию Андронова – Хопфа.

В области существования квазипериодических движений наблюдаются резонансные циклы на торе. Период этих циклов четный, а области их существования – клювы синхронизации – имеют подобную структуру. На рис. 2, б приведен увеличенный фрагмент рис. 2, а, иллюстрирующий структуру клюва, где эволюционирует резонансный цикл периода 22. Этот цикл является симметричным и с изменением параметров демонстрирует бифуркацию Хопфа, в результате

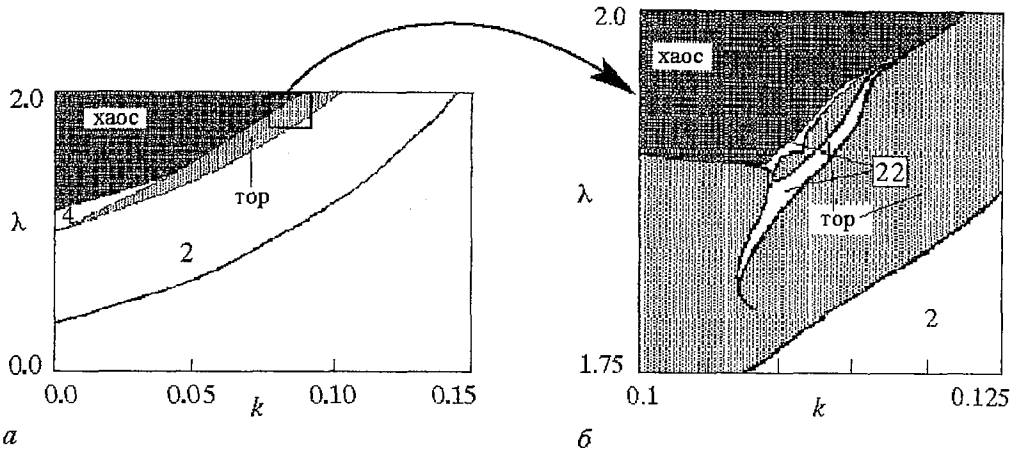


Рис. 2. *a* – область существования и эволюции цикла 2_1 ; *б* – структура выделенного фрагмента

которой происходит рождение тора из резонансного цикла. Рис. 3 иллюстрирует фазовые портреты цикла 2_1 , тора, резонансного цикла и тора, родившегося из резонансного цикла (вторичный тор). Внутри области существования вторичного тора существует множество резонансных областей. В частности, сравнительно широкая область, в которой сосуществуют два резонансных асимметричных (но симметричных друг другу) цикла периода 22. Эти циклы с изменением параметров демонстрируют последовательность удвоения периода, завершающуюся переходом к хаосу. В некотором смысле синхронизацию на вторичном торе можно рассматривать как бифуркацию нарушения симметрии в данной системе, аналогично потере симметрии циклом в осцилляторе с симметричным потенциалом. И в том, и в другом случае исходное симметричное множество становится неустойчивым, а в его окрестности рождается пара асимметричных, но симметричных друг другу циклов. В свою очередь, бифуркацию Хопфа можно

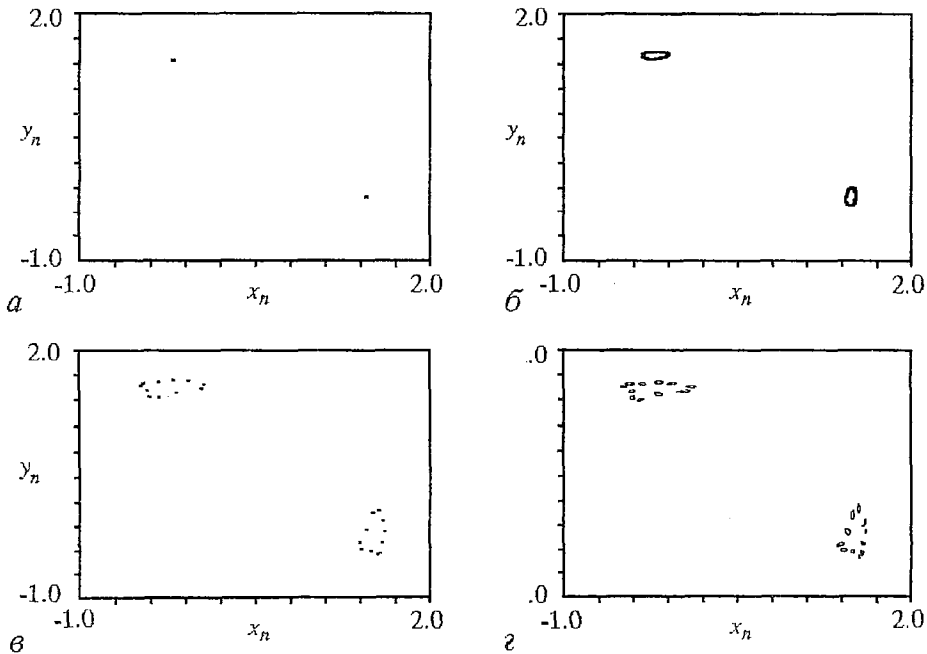


Рис. 3. Фазовые портреты: *a* – цикл 2_1 ; *б* – тор; *в* – резонансный цикл на торе периода 22; *г* – тор, родившийся из резонансного цикла

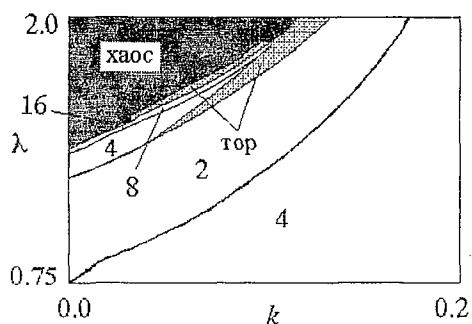


Рис. 4. Структура плоскости параметров (λ, k) при $\delta=0.97$

длинную последовательность переходов типа «резонансный цикл – тор» [11–13]. Является ли эта последовательность переходов конечной или бесконечной, доказать не представляется возможным. Но опираясь на тот факт, что период резонансных циклов четный, то существуют циклы, у которых переменные x_n, y_n сдвинуты относительно друг друга на половину периода, а они симметричны относительно диагонали $x_n=y_n$ и демонстрируют бифуркацию Хопфа. Можно предположить, что данная последовательность переходов является бесконечной и в конечном итоге приводит к формированию фрактального множества и, соответственно, – разрушению тора. В итоге рассмотренный вид симметрии цикла привносит качественно новый вид поведения, не наблюдаемый в изолированной системе.

Рассмотрим несимметричные циклы. Таких циклов периода 4 существует два вида: 4_1 и 4_3 (в соответствии с системой обозначений [9]), реализации subsystem для каждого из них сдвинуты относительно друг друга на 1 и на 3, соответственно, а сами циклы с ростом параметра λ демонстрируют последовательность удвоений периода, завершающуюся переходом к хаосу. В результате последовательности бифуркаций удвоения периода устойчивых и неустойчивых циклов количество циклов в системе увеличивается. В частности, из 4_1 и 4_3 рождаются асимметричные циклы $8_1, 8_5, 8_3, 8_7$, демонстрирующие с изменением параметров удвоение периода. Рассмотрим, как влияет асимметрия системы на эволюцию симметричных и асимметричных циклов.

При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ нарушается глобальная симметрия системы (1). Положим $\lambda_1 = \lambda$, а $\lambda_2 = \delta\lambda$, где δ – параметр асимметрии. Рис. 4 иллюстрирует структуру листа цикла 2_1 при $\delta=0.97$. Введение асимметрии приводит к сужению области существования тора, родившегося из цикла 2_1 , то есть нарушение полной симметрии приводит к подавлению квазипериодических движений. Однако на этом листе появляется дополнительная область квазипериодических движений, родившихся из несинфазного цикла 8_7 . Следуя от оси λ вдоль линии бифуркации удвоения периода цикла 8_7 , легко обнаружить точку на плоскости параметров, где эта линия расщепляется на две – линию рождения тора и резонанса на торе. Проанализируем влияние параметра асимметрии на сам цикл 8_7 и на его эволюцию при изменении параметров. Рис. 5, а–в иллюстрируют изменения фазового портрета цикла 8_7 , наблюдаемые при движении вдоль линии бифуркации удвоения периода, а рис. 5, г – тор, родившийся из этого цикла. Из анализа фазовых портретов видно, что точки 1 и 4 на фазовом портрете стремятся расположиться симметрично относительно прямой, параллельной диагонали фазовой плоскости и проходящей через середину отрезка, соединяющего эти точки, рис. 5, в получен вблизи точки расщепления. Введем замену переменных:

рассматривать как индикатор симметрии устойчивого множества. Численные исследования показывают, что структура резонансных областей не является тривиальной. Например, имеется область резонанса, в которой сосуществуют два асимметричных цикла периода 154. С изменением параметров в пределах области один из них демонстрирует захват симметрии [5]. В свою очередь, симметричный цикл демонстрирует рождение тора. Таким образом, двигаясь в пространстве параметров по некоторой сложной траектории, можно наблюдать

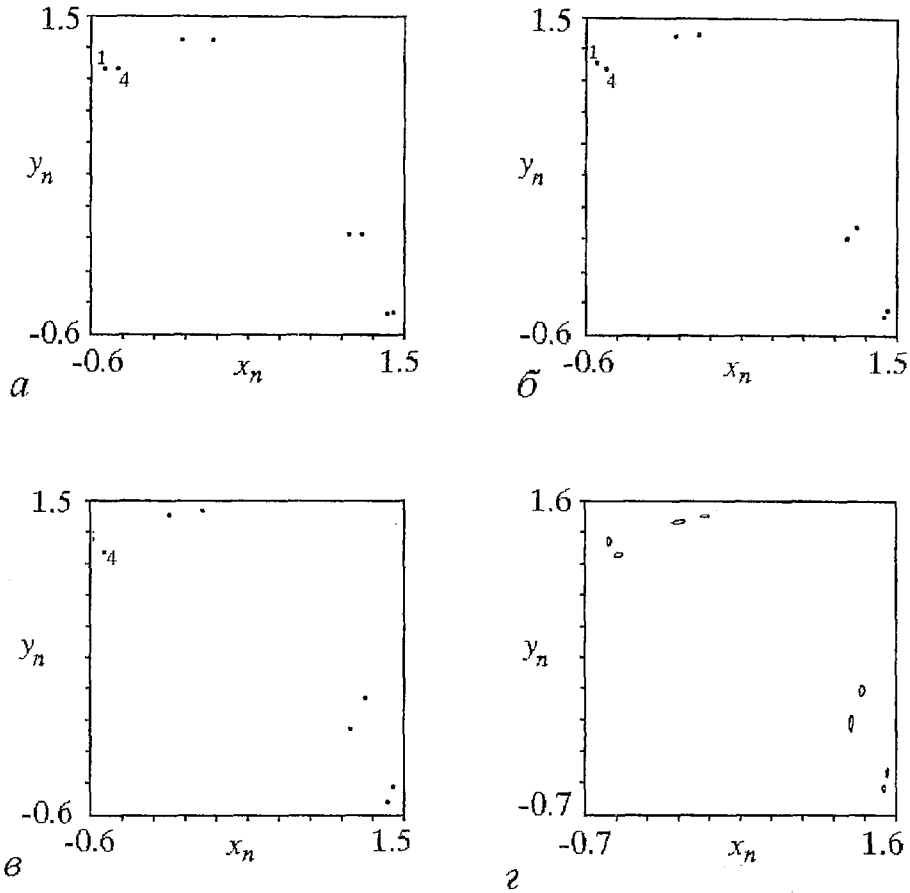


Рис. 5. Фазовые портреты цикла 8_7 при значениях управляющих параметров: а - $\lambda=1.39, k=0$; б - $\lambda=1.46, k=0.02$; в - $\lambda=1.54, k=0.0304$ и г - тора при $\lambda=1.61, k=0.05$

$$v_n = x_n - (x_1 + x_4)/2,$$

$$v_n = y_n - (y_1 + y_4)/2.$$

Данная замена переменных соответствует переносу начала координат плоскости (x_n, y_n) в середину отрезка, соединяющего точки (x_1, y_1) и (x_4, y_4) . Таким образом уменьшение параметра δ приводит к тому, что точки (v_1, v_1) и (v_4, v_4) стремятся расположиться симметрично относительно диагонали фазовой плоскости. В новых переменных система (1) будет иметь вид:

$$v_{n+1} = g(v_n, v_n),$$

$$v_{n+1} = \psi(v_n, v_n),$$

где функции $g(v_n, v_n)$ и $\psi(v_n, v_n)$ выражаются через $f(x_n, y_n)$ и $\phi(x_n, y_n)$. Учитывая, что (v_1, v_1) и (v_4, v_4) связаны соотношением

$$v_4 = g(g(g(g(v_1, v_1))))), \tag{8}$$

$$v_4 = \psi(\psi(\psi(\psi(v_1, v_1))))),$$

а условие инвариантности имеет вид

$$\vartheta_4 = \nu_1, \quad (9)$$

$$\nu_4 = \vartheta_1,$$

то в итоге система (8) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= g(g(g(g(\nu_1, \vartheta_1))),), \\ \nu_1 &= \psi(\psi(\psi(\psi(\nu_1, \vartheta_1))). \end{aligned} \quad (10)$$

В общем случае система (10) аналитически не решается, но решение существует и его можно найти численно. Таким образом можно утверждать, что для исходной системы отображений (1) при нарушении глобальной симметрии для локальной области некоторых несимметричных устойчивых множеств можно найти инвариантное преобразование. В данном конкретном примере таким устойчивым множеством является цикл 8_7 , и для локальной области этого цикла (пара решений (x_1, y_1) , (x_4, y_4)) или в новых переменных (ϑ_1, ν_1) , (ϑ_4, ν_4)) существует инвариантное преобразование, связанной с заменой переменных. Данный вид инвариантности можно назвать локальной симметрией, так как в данном случае весь цикл асимметричен, а найденное преобразование применимо лишь к локальной его области.

Таким образом, выделены три типа симметрии* циклов:

- в случае тождественного поведения subsystem динамике связанной системы тождественна динамике изолированной subsystemы;
- в случае полной симметрии появляется новый тип (по сравнению с изолированной subsystemой) поведения и сценарий перехода к хаосу;
- асимметричные циклы демонстрируют такой же сценарий перехода к хаосу, как и в случае тождественного поведения subsystem;
- нарушение симметрии системы приводит к появлению в определенных диапазонах значений управляющих параметров и для некоторых циклов локальной симметрии, которая также приводит к появлению нового типа поведения и сценария перехода к хаосу (через разрушение тора).

Авторы выражают благодарность профессору Б.П. Безручко за плодотворное обсуждение работы и критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 99–02–17735 и ФЦП «Интеграция», грант № 696.3.

Библиографический список

1. Holmes P. A nonlinear oscillator with strange attractor // *Phylos. Trans.* 1979. Vol. 292. P. 419.
2. Sato S., Sano M., Sawada Y. Universal scaling property in bifurcation structure of Duffing's and generalized Duffing's equation // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 28, № 3. P. 1654.
3. Parlitz U., Lauterborn W. Superstructure in bifurcation set of the Duffing's equation // *Phys. Lett.* 1985. Vol.107A, №8. P.351.
4. Englisch V., Lauterborn W. Regular window structure of a double-well Duffing's oscillator // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 44, № 2. P. 916.
5. Krupa M., Roberts M. Symmetry breaking and symmetry locking in equivariant circle maps // *Physica.* 1992. Vol. 57D. P.417.
6. Bressloff P.C., Coombes S. Symmetry and phase-locking in a ring of pulse-coupled oscillators with distributed delays // *Physica.* 1999. Vol. 126D. P. 99.

* В данном случае сознательно используется термин «тип симметрии», а не «группа симметрии», используемый в теории групп. Это связано с тем, что во всех случаях рассматривается одна и та же инвариантность циклов к замене динамических переменных. То есть, с позиции теории групп – группа симметрии во всех случаях одна и та же.

7. *Gu Y., Tung M., Yuan J.-M., Feng D.H., Narducci L.M.* Crisis and hysteresis in coupled logistic maps // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol.52, № 9. P.701.

8. *Кузнецов С.П.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28. С.991.

9. *Селезнев Е.П., Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н.* Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *ЖТФ.* 1990. Т. 60, вып. 10. С.19.

10. *Прохоров М.Д.* Виды колебаний диссипативно связанных систем с удвоением периода при сильной связи // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1996. Т. 4, № 4,5. С. 99.

11. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.И.* Эффекты синхронизации и бифуркации синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. XXVIII, № 9. С. 1112.

12. *Анищенко В.С.* Разрушение квазипериодических колебаний и хаос в диссипативных системах // *ЖТФ.* 1986. Т. 56, вып. 2. С.225.

13. *Кипчатов А.А., Короновский А.А.* Тонкие эффекты самоподобного поведения в кусочно-линейной системе вблизи линии бифуркации рождения тора // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 2-3. С.17.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 31.01.2000

TYPES OF CYCLES SYMMETRY IN COUPLED PERIOD DOUBLING SYSTEMS

Ye.P. Seleznev, A.S. Dudova

Types of symmetry of various cycles and their evolution in coupled period doubling systems are discussed. Full symmetry leads to formation of new scenario transition to chaos. It is shown that at driven loss of full symmetry for several cycles local symmetry takes place. As well as full symmetry cycles the local one demonstrates quasiperiodic route to chaos.



Селезнев Евгений Петрович – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990). Старший научный сотрудник Саратовского отделения института радиотехники и электроники РАН, доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Автор и соавтор более 50 научных работ. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах.



Дудова Анастасия Сергеевна – родилась в Саратове (1978). Студентка факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика – исследование сценариев перехода к хаосу и видов симметрии циклов в системах связанных квадратичных отображений. Принимала участие в трех студенческих конференциях, в двух школах-конференциях и двух международных конференциях.



О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ ПРИ МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

И. В. Фельдштейн, Н. Ногі

В работе рассмотрен подход к выбору параметров межчастичного потенциала, используемого при молекулярно-динамическом моделировании. Подход основан на анализе зависимости такой термодинамической характеристики, как уравнение состояния от параметров потенциала и выборе тех из них, которые дают результат, наиболее близкий к экспериментальным данным. Продемонстрировано применение подхода для аргона и неона при высоких (сотни МПа) давлениях.

Введение. Метод молекулярной динамики

Одним из наиболее эффективных методов моделирования поведения и свойств самых разных сред – газов, жидкостей, твердых тел – получающим все большее распространение с развитием вычислительной техники, является молекулярно-динамическое моделирование [1,2] (о некоторых приложениях см., например, [3]). Суть его состоит в представлении рассматриваемой среды в виде ансамбля взаимодействующих частиц. Динамика частиц описывается в рамках ньютоновской механики, а взаимодействие определяется парным потенциалом (иногда вводят более сложные, например, трехчастичные потенциалы). То есть, если задан потенциал взаимодействия частиц U , то динамика i -й частицы описывается следующим уравнением:

$$m d^2 \mathbf{r}_i / dt^2 = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \partial U(r_{ij}) / \partial \mathbf{r}_i, \quad (1.1)$$

где m – масса частицы; N – количество частиц; \mathbf{r}_i – радиус-вектор i -й частицы, $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Или

$$m d^2 \mathbf{r}_i / dt^2 = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{f}_{ij}, \quad \text{где } \mathbf{f}_{ij} = - \partial U(r_{ij}) / \partial \mathbf{r}_i. \quad (1.2)$$

Таким образом, процедура молекулярно-динамического моделирования заключается в решении системы уравнений (1.2). Выбор начальных данных представляется собой задание координат и скоростей. Координаты частиц часто выбирают равномерно распределенными в некоторой пространственной ячейке (размер ячейки определяется количеством частиц и заданной плотностью). Дополнительно требуется задание граничных условий. Это может быть: условие «твердых стенок» – на границе ячейки происходит упругое отражение частицы; периодические граничные условия – наряду с пространственной ячейкой,

поведение частиц в которой моделируется уравнением (1.2), рассматриваются фиктивные ячейки, получающиеся из исходной сдвигом (двумерный случай представлен на рис. 1). При вычислении сил, действующих на частицу, принимают во внимание влияние, оказываемое фиктивными частицами. Начальные скорости задаются случайным образом с учетом двух условий: средняя скорость должна равняться нулю, а средний квадрат скорости – соответствовать выбранной температуре.

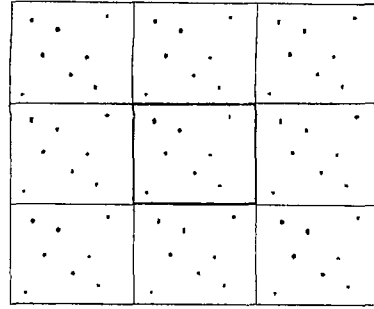


Рис. 1. Периодические граничные условия в двумерном случае

На основе решения системы уравнений (1.2) могут быть оценены некоторые характеристики среды – давление, коэффициенты переноса, корреляции скоростей и т.д. В настоящей статье мы рассматриваем влияние параметров межчастичного потенциала на точность оценки уравнения состояния при фиксированной температуре – то есть зависимость давления от плотности $P=P(\rho)$. Выражение для давления имеет вид

$$PV = NkT + 1/d \langle \sum_{ij, i < j}^N \mathbf{r}_{ij} \mathbf{f}_{ij} \rangle. \quad (2)$$

Здесь P – давление; V – объем, занимаемый N частицами; k – постоянная Больцмана; T – температура; d – размерность системы (в дальнейшем всегда $d=3$); скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по времени. При отсутствии взаимодействия выражение (2) приобретает форму уравнения состояния идеального газа $PV=NkT$.

Выбор формы потенциала зависит от конкретной задачи. Так, свойства газов (включая некоторые фазовые переходы) могут быть описаны с помощью потенциала в форме «жесткой стенки», равного нулю при расстояниях, больших некоторого критического, и бесконечности при меньших [4]. В случае ионизированного газа необходимо учитывать кулоновское взаимодействие, пропорциональное $1/r_{ij}$. Малые колебания атомов в узлах кристаллической решетки могут быть описаны упругим потенциалом, пропорциональным $|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{ij}^0|^2$ (\mathbf{r}_{ij}^0 – расстояние между i -й и j -й частицами в равновесии) и т.д.

Выбор потенциала должен отражать взаимодействие двух систем зарядов. Это взаимодействие может быть представлено в форме ряда по обратным степеням расстояния r [5, 6]

$$U = \sum_k a_k / r^k.$$

Для электрически нейтральных систем первый ненулевой член пропорционален шестой степени $1/r$ и определяет диполь – дипольное взаимодействие $U_{\text{dipol-dipol}} \sim 1/r^6$. Как правило, этот член присутствует во всех аппроксимациях межчастичного потенциала и описывает его притягивающую часть, действующую на больших расстояниях. Наряду с ним требуется задание отталкивающей компоненты. Полный вид потенциала может быть определен, исходя из экспериментальных данных или прямых квантовых вычислений (так называемого *ab initio* моделирования [7,8]). Любой из этих подходов дает некоторое приближение и, соответственно, приближенными являются результаты молекулярно-динамического моделирования. Точность приближения зависит как от выбора функциональной зависимости, так и параметров, в нее входящих.

Вопрос выбора параметров потенциала для различных видов функциональных зависимостей рассматривается в целом ряде работ (см., например, [7,9–11] и ссылки в этих работах). Однако параметры, как правило, оцениваются по косвенным показателям, например, таким как определяемый в экспериментах минимум потенциала и его положение (межчастичное расстояние,

при котором он достигается). В настоящей работе мы не рассматриваем вопрос выбора функциональной зависимости, а ограничиваемся анализом влияния параметров в случае потенциала Леннарда–Джонса (Lennard–Jones), введенного в 1924 году [12,13] и имеющего следующий вид:

$$U(r) = k\varepsilon[(\sigma/r)^n - (\sigma/r)^m], \quad k = n/(n-m)(n/m)^{m/(n-m)}.$$

Особое место (по частоте использования) в молекулярно–динамическом моделировании занимает его частная реализация при $n=12, m=6$

$$U(r) = 4\varepsilon[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6].$$

Такой вид потенциала приводит к следующему выражению для силы взаимодействия двух частиц i и j :

$$f_{ij} = 48\varepsilon/\sigma[(\sigma/r_{ij})^{13} - 0.5(\sigma/r_{ij})^7](r_{ij}/r_{ij}).$$

В отличие от ряда работ, рассматривающих вопрос выбора параметров, в данной работе рассматривается подход, основанный на непосредственном анализе влияния параметров нелинейной среды на ее интегральные характеристики, оцениваемые при молекулярно–динамическом моделировании (см. также [14]). В такой постановке задача является разновидностью обратных задач.

Как правило, при проведении вычислений используют безразмерные переменные $r \rightarrow r\sigma, \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}A$ ($A = \varepsilon/\sigma$), $t \rightarrow t(m\sigma/A)^{1/2}$. В этих переменных уравнение (1.2) имеет вид

$$d^2\mathbf{r}_i/dt^2 = \sum_{j=1, j \neq i}^N 48(1/r_{ij}^{14} - 0.5/r_{ij}^8)\mathbf{r}_{ij}. \quad (3)$$

В данной работе для интегрирования уравнения (3) использовался явный метод Адамса 5–го порядка. Для уравнения $\dot{y}=f$ его конечно–разностная формула записывается следующим образом [15]:

$$y_{n+5} = y_{n+4} + 1/720 h(1901f_{n+4} - 2774f_{n+3} + 2616f_{n+2} - 1274f_{n+1} + 251f_n),$$

где h – шаг интегрирования (в работе $h=0.001$). Нами рассматривалась система, состоящая из 1000 частиц при периодических граничных условиях. Точность оценки давления для разных расчетов варьировалась в пределах $0.1 \div 1\%$ и в среднем составляла 0.2% .

Выбор параметров потенциала

Рассмотрим возможность оценки параметров потенциала межчастичного взаимодействия, исходя из сопоставления экспериментальных данных и результатов численного моделирования. Целью такого подхода является получение параметров, при которых результаты молекулярно–динамического моделирования наиболее близки к наблюдаемым в экспериментах. В качестве анализируемой зависимости рассматривается уравнение состояния, то есть зависимость давления от плотности частиц $P=P(\rho)$, $\rho=N/V$, при фиксированной температуре.

Пусть $P^{\text{exp}}(\rho)$ – экспериментально полученная зависимость, а $P^{\text{num}}(\rho, \alpha)$ – результат вычислений при параметре α (выбор параметров рассматривается далее). Введем «расстояние» между P^{exp} и P^{num} (зависящее от α) следующим образом:

$$\Delta(\alpha) = \int (P^{\text{exp}}(\rho) - P^{\text{num}}(\rho, \alpha))^2 d\rho$$

или для M дискретно заданных значений P_k^{exp} и P_k^{num} при ρ_k

$$\Delta(\alpha) = \sum_{k=1}^M (P_k^{\text{exp}} - P_k^{\text{num}})^2. \quad (4)$$

Будем называть «оптимальным» то значение α , которое соответствует минимуму $\Delta(\alpha)$.

В данной работе в качестве первого параметра рассматривается величина σ , определяющая характерное расстояние в системе (при $r=\sigma$ потенциал равен нулю). Для того, чтобы ввести другой параметр, обобщим потенциал Леннарда–Джонса следующим образом:

$$U(r) = 4\epsilon[(\sigma/r)^{12} - 2a(\sigma/r)^6].$$

В «классическом» потенциале $a=0.5$. В качестве второго параметра будем рассматривать a . Эта величина определяет соотношение притягивающей и отталкивающей компонент потенциала.

Величины σ и a при заданной форме потенциала и значениях плотности и температуры полностью определяют динамику частиц и величин, оцениваемых на ее основании, в том числе давления. Выбор начальных данных после переходного процесса не сказывается на оценках давления. Конец переходного процесса может быть определен, например, из анализа функции распределения по скоростям – из начального равномерного распределение становится максвелловским.

Отметим, что при изучении зависимости $\Delta(\sigma)$ нет необходимости проводить молекулярно–динамическое моделирование для каждого значения σ . Если значения давления P_k рассчитаны для значений плотностей ρ_k при $\sigma=\sigma_0$, то результаты для $\sigma=\sigma_1$ получаются следующим образом:

$$\rho_k \rightarrow \rho_k \sigma_0^3 / \sigma_1^3, \quad P_k \rightarrow P_k \sigma_1^3 / \sigma_0^3. \quad (5)$$

Получить значения давлений при исходных значениях плотностей (для дальнейшего сравнения с данными экспериментов) можно путем интерполяции пересчитанных в соответствии с (5) результатов.

Результаты

Предложенный подход применен к оценке оптимальных параметров σ и a для аргона и неона при высоких давлениях (сотни МПа) и температурах в интервале 148÷298 К (для аргона) и при 298 К (для неона). Экспериментальные данные взяты из [16] и [8].

На рис. 2 представлены результаты расчета расстояния Δ в зависимости от σ

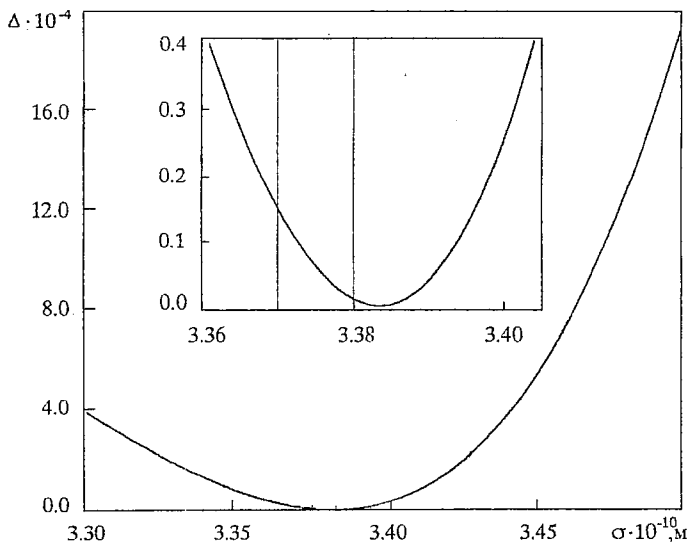


Рис. 2. Зависимость расстояния Δ от параметра σ для аргона

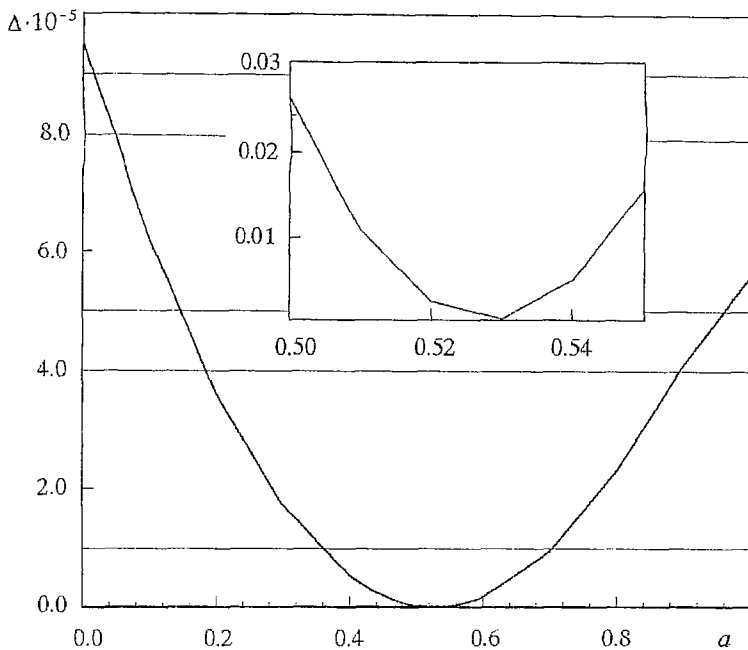


Рис. 3. Зависимость расстояния Δ от параметра a для аргона

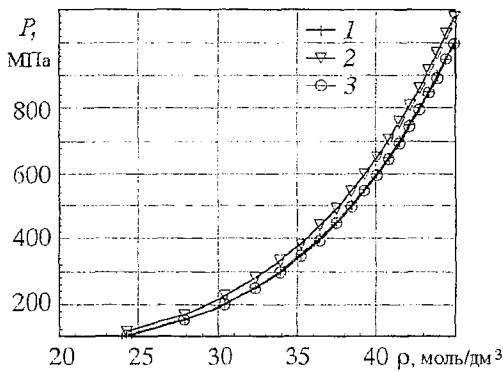


Рис. 4. Зависимость давления P от плотности ρ для аргона. Кривая 1 – результаты эксперимента; 2 – результаты расчета при $\sigma=3.4 \cdot 10^{-10}$ м, $a=0.5$; 3 – результаты расчета при $\sigma=3.384 \cdot 10^{-10}$ м, $a=0.53$

для аргона (ϵ соответствует 120 К). Минимум достигается при $\sigma=3.384 \cdot 10^{-10}$ м. Как правило, при расчетах для аргона σ принимается равной $3.4 \cdot 10^{-10}$ м [1]. Расстояние Δ при $\sigma=3.384 \cdot 10^{-10}$ м меньше, чем при $\sigma=3.4 \cdot 10^{-10}$ м, примерно в 43 раза.

Еще большего приближения к экспериментальным данным можно достичь, варьируя параметр a . На рис. 3 представлена зависимость $\Delta(a)$ для аргона. Минимум достигается при $a=0.53$ и его значение в 140 раз меньше расстояния при $a=0.5$.

Кривые зависимостей $P(\rho)$ для аргона при 298 К показаны на рис. 4. Видно, что кривая, полученная при оптимальных параметрах σ и a , почти точно ложится на экспериментальные данные. Результаты подбора параметров при других температурах (148–273 К) дают те же значения оптимальных параметров.

Аналогичные расчеты были проведены для неона. Оптимальными параметрами для него являются $\sigma=2.278 \cdot 10^{-10}$ м, $a=0.53$. Выбор этих величин дает повышение точности до 30 раз. Интересно отметить, что для двух разных газов оптимальной является одна и та же величина $a=0.53$.

Выводы

Рассмотрен вопрос о влиянии выбора параметров межчастичного потенциала на точность результатов молекулярно-динамического моделирования.

Показано, что незначительное (на доли процента) изменение параметров может многократно (в некоторых случаях до ста раз) повысить точность при оценке уравнения состояния газов при высоких давлениях. Приведены примеры выбора оптимальных параметров (величины σ , имеющей смысл характерного масштаба, и a – коэффициента, входящего в обобщенный потенциал Леннарда–Джонса и определяющего соотношение отталкивающей и притягивающей компонент потенциала) для аргона и неона при давлениях в сотни МПа и температурах в интервале 148÷298 К (для аргона) и при 298 К (для неона).

Одним из наиболее перспективных направлений дальнейших исследований представляется анализ зависимостей других характеристик среды, моделируемой методами молекулярной динамики (таких, например, как коэффициенты переноса), от параметров межчастичного потенциала и аналогичный приведенному в статье выбор оптимальных параметров. Другим направлением является выбор оптимальной формы потенциала (например, оптимальной степени $1/r$ для отталкивающей компоненты).

Библиографический список

1. *Rapaport D.C.* The art of molecular dynamics simulation. Cambridge University Press, 1995.
2. *Лагарьков А.Н., Сергеев В.М.* Метод молекулярной динамики в статистической физике // УФН. Т. 125, № 3. С. 400.
3. *Плохотников К.Э.* Математическое моделирование. М.: Изд-во Московского Университета, 1993.
4. *Haile J.M.* Molecular dynamics simulation. Elementary methods. A Wiley interscience publication, 1992.
5. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория поля // Теоретическая физика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.
6. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
7. Molecular Dynamics Simulation / Ed. F. Yonezawa. Springer Series in Solid-State Sciences 103, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
8. *Eggenberger R., Gerber S., Huber H., Searles D., Welker M.* Thermodynamical and structural properties of neon in the liquid and supercritical states obtained from *ab initio* calculations and molecular dynamics simulation // J.Chem.Phys. 1993. Vol. 99 (11). P. 9163.
9. *Hoang P.N.M., Picaud S., Girardet C., Meredith A.W.* Structure of CO monolayer absorbed on NaCl(100) from molecular dynamics // J.Chem.Phys. 1996. Vol. 105 (18). P. 8453.
10. *Van der Pol A., van der Avoird A., Wormer P.E.S.* An *ab initio* intermolecular potential for the carbon monoxide dimer (CO)₂ // J.Chem.Phys. 1990. Vol. 92 (12). P. 7498.
11. *Barrat J.-L., Vos W.L.* Stability of van der Waals compounds and investigation of the intermolecular potential in helium-xenon mixtures // J.Chem.Phys. 1992. Vol. 97 (8). P. 5707.
12. *Lennard-Jones J.E.* The determination of molecular fields. I. From the variation of the viscosity of a gas with temperature // Proc. Roy. Soc. (London). 1924. Vol. 106A. P. 441.
13. *Lennard-Jones J.E.* The determination of molecular fields. II. From the equation of state of a gas // Proc. Roy. Soc. (London). 1924. Vol. 106A. P. 463.
14. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Фельдштейн И.В.* Новый подход к оценке коэффициентов переноса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 6. С. 82.
15. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране. М.: Изд-во Московского Университета, 1990.

16. *Seldam C.A., Biswas S.N.* Determination of the equation of state and heat capacity of argon at high pressures from speed-of-sound data // *J.Chem.Phys.* 1991. Vol. 94 (3). P. 2130.

*Japan Advanced Institute of Science
and Technology*

*Поступила в редакцию 4.11.1999
после доработки 9.02.2000*

ON THE CHOICE OF PARAMETERS IN MOLECULAR-DYNAMIC SIMULATION

I.V. Feldshtein, H. Hori

This paper considers an approach to the choice of optimal parameters of interparticle potential in molecular-dynamic simulation. The approach proposed is based on the analysis of equation of state dependence on the potential parameters. The optimal choice is the one giving the best fit to the experimental data. The applications of the approach in the cases of argon and neon at high pressures (hundreds MPa) are presented.



Фельдштейн Илья Валериевич – родился в 1969 году. Окончил Московский физико-технический институт (1993). Кандидат физико-математических наук – в 1998 году защитил диссертацию на тему «Применение методов нелинейной динамики к анализу распределенных систем». В настоящее время работает в Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST). Область интересов – моделирование сложных систем и оценка их параметров, анализ временных рядов. Количество публикаций – 21. E-mail: ilya@jaist.ac.jp



Hori Hidenobu. Graduated from Graduate Course School of Science, Osaka University in 1973. Professor of Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST). Area of interests – solid-state physics. Number of publications – more than 100. E-mail: h-hori@jaist.ac.jp



ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ РАЗНЫХ КЛАССОВ КАК МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина

Обсуждается соответствие моделей в виде динамических систем разных классов на примере нелинейного диссипативного осциллятора с импульсным воздействием. Проведено детальное исследование одномерного отображения: изучены фейгенбаумовские удвоения периода и продемонстрирована возможность нефейгенбаумовских удвоений, даны соответствующие иллюстрации в виде бифуркационных деревьев и итерационных диаграмм, найдены трикритические точки на плоскости параметров (концевые точки фейгенбаумовских линий). Проведено сопоставление со свойствами двумерного отображения, причем показано, что феномен трикритической динамики оказывается адекватным лишь в определенной области параметров.

Введение

При описании сложных колебательных режимов и хаоса в конкретных физических системах возникает проблема выбора класса динамической системы, которая будет моделью исходной. Успехи концепции универсальности в нелинейной динамике отчасти заслонили эту проблему, поскольку исследователи привыкли, что реальные системы и широкий спектр математических моделей демонстрируют такие же закономерности, что и простейшие формальные модели типа логистического отображения. Как оказалось, не все феномены одномерных отображений переносятся на двумерные и далее на потоки и наоборот [1–3]. Таким образом, исследование конкретной системы требует тщательного отслеживания работоспособности той или иной динамической модели и обсуждения вопроса о соответствии описаний на «разных уровнях». Удобным объектом для изучения названной проблемы являются физические системы с импульсным воздействием, поскольку для них удается получить ряд результатов аналитически. К ним относятся шарик на вибрирующем столе [4,6], ротатор под действием импульсной силы [5], математический маятник с затуханием, находящийся между полюсами электромагнита, периодически включаемого на короткое время [7,8], нелинейный контур под импульсным воздействием [9] и др. В настоящей работе в этом контексте изучен неавтономный нелинейный диссипативный осциллятор.

1. От трехмерного потока к двумерному отображению

Рассмотрим осциллятор с кубической нелинейностью, совершающий колебания в вязкой среде, на который действует внешняя периодическая

импульсная сила. Поведение такой системы описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = \Sigma C\delta(t-nT), \quad (1)$$

где x – координата осциллятора, γ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота, T – период следования внешних импульсов, C – их амплитуда.

Получим сначала для рассматриваемой системы двумерное отображение. В промежутке между импульсами правая часть уравнения (1) обращается в ноль. В этом случае можно получить приближенное аналитическое решение, используя метод медленно меняющихся амплитуд. С этой целью представим координату x в виде

$$x = 1/2a \exp(i\omega_0 t) + 1/2a^* \exp(-i\omega_0 t). \quad (2)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), с учетом традиционного дополнительного условия

$$\dot{a} \exp(i\omega_0 t) + \dot{a}^* \exp(-i\omega_0 t) = 0, \quad (3)$$

после усреднения по времени получим «укороченное» уравнение вида

$$\dot{a} = -1/2\gamma a + 3/8i\beta|a|^2a/\omega_0. \quad (4)$$

Введем действительную амплитуду R и фазу ϕ с помощью соотношения $a = R \exp(i\phi)$. Отделив в уравнении (4) действительную и мнимую части, получим

$$\dot{R} = -1/2\gamma R, \quad \dot{\phi} = 3/8\beta R^2/\omega_0. \quad (5)$$

Решая уравнения (5), найдем следующие зависимости амплитуды и фазы от времени в промежутке между n -м и $(n+1)$ -м импульсами

$$R(t) = R_n \exp(-1/2\gamma t), \quad (6)$$

$$\phi(t) = 3/8\beta R_n^2/\omega_0 [1 - \exp(-\gamma t)]/\gamma + \phi_n, \quad (7)$$

где R_n и ϕ_n – начальные амплитуда и фаза сразу после n -го импульса. Если подставить их в вытекающие из (2), (3) соотношения

$$x(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)], \quad (8)$$

$$v(t) = -\omega_0 R(t) \sin[\omega_0 t + \phi(t)], \quad (9)$$

то мы найдем временные зависимости координаты и скорости осциллятора на рассматриваемом промежутке времени.

К моменту начала $(n+1)$ -го импульса проходит время, равное периоду воздействия T . Соответственно, координата осциллятора и скорость равны $x(T)$ и $v(T)$. В силу дельта-образного характера воздействия сразу после этого импульса координата не изменится, а скорость получит добавку C . Поэтому для координаты и скорости после $(n+1)$ -го импульса из (6)–(9) получаем выражения

$$x_{n+1} = R_n \exp(-1/2\gamma T) \cos\{\omega_0 T + 3/8\beta|R_n|^2/\omega_0 [1 - \exp(-\gamma T)]/\gamma + \phi_n\}, \quad (10)$$

$$v_{n+1} = -\omega_0 R_n \exp(-1/2\gamma T) \sin\{\omega_0 T + 3/8\beta|R_n|^2/\omega_0 [1 - \exp(-\gamma T)]/\gamma + \phi_n\} + C. \quad (11)$$

Эти соотношения удобно записать в комплексной форме, введя комплексную переменную

$$z = (ix + v/\omega_0) \{3/8\beta/\omega_0 [1 - \exp(-\gamma T)]/\gamma\}^{1/2}. \quad (12)$$

Тогда относительно этой переменной из (10), (11) с учетом (8), (9) получаем искомое отображение

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp[i(|z_n|^2 + \psi)], \quad (13)$$

где новые параметры A , B и ψ определяются через параметры исходной системы следующим образом:

$$A = C/\omega_0 \{3/8\beta/\omega_0 [1 - \exp(-\gamma T)]/\gamma\}^{1/2}, \quad B = \exp(-1/2\gamma T), \quad \psi = \omega_0 T. \quad (14)$$

Заметим, что точно такое же отображение было получено Икедой [10] для оптического кольцевого резонатора со средой с фазовой нелинейностью. Таким образом, отображение (13) допускает разнообразные физические интерпретации, что неудивительно в силу весьма общих предположений, использованных при его выводе.

Отображение (13) является одной из эталонных моделей нелинейной динамики. Например, в [14] можно найти его детальный бифуркационный анализ. В дополнение к этим результатам мы представляем на рис. 1, а карту динамических режимов для значения фазы $\psi=0$. На карте оттенками серого цвета отмечены области существования циклов различных периодов, обозначенных соответствующими цифрами. Черный цвет отвечает хаосу. На картах располагаются многочисленные точки сборки с отходящими от них линиями касательных бифуркаций, а также разнообразные по форме области циклов удвоенного периода. Область хаоса насыщена типичными для двухпараметрических систем структурами «crossroad area»*, представляющими характерные композиции линий касательных бифуркаций и удвоений периода. Несколько таких композиций на базе долгопериодических циклов показаны на рис. 1, б в увеличенном масштабе. Заметим, что карты для других значений ψ качественно не отличаются.

Рассмотрим вопрос о соответствии описания исходной системы с помощью дифференциального уравнения (1) и двумерного отображения (13). Для этого построим карты (рис. 2) динамических режимов для осциллятора и отображения

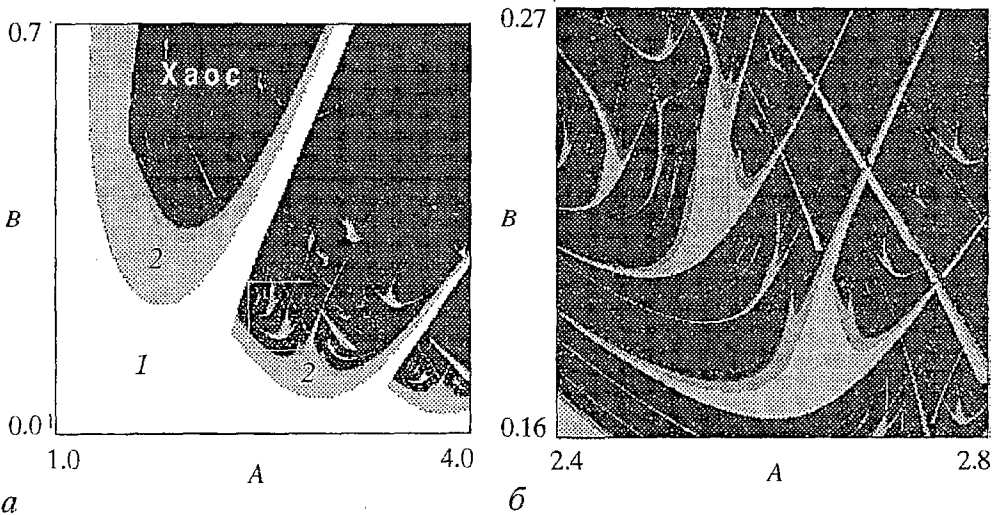


Рис. 1. а – карта динамических режимов на плоскости параметров для отображения Икеды при $\psi=0$; б – увеличенный фрагмент

* Термин «crossroad area» – перекресток – принадлежит Миру [11] и отвечает тому, что область устойчивости цикла имеет два характерных пересекающихся отростка. Некоторые исследователи называют такие композиции «ласточками», ассоциируя расходящиеся области удвоений с «крыльями».

(13) в пространстве параметров осциллятора (W, C) , где $W=2\pi/T$ – частота внешних импульсов, C – амплитуда импульсов. В верхнем ряду – карты исходной дифференциальной системы, полученные с помощью метода сечений Пуанкаре; в нижнем – отображения (13). Пересчет параметров отображения осуществлен с помощью соотношений (14), причем собственная частота осциллятора ω_0 положена равной единице, что всегда можно сделать перенормировкой.

На картах в области существования неподвижной точки располагаются точки сборки с отходящими от них линиями касательных бифуркаций. Теперь они отвечают резонансу в неавтономном осцилляторе на его собственной частоте и на ее субгармониках. В окрестности каждого резонанса реализуется сложная картина различных динамических режимов.

Можно видеть, что при значении параметра диссипации $\gamma=0.2$ соответствие карт неудовлетворительное. Это означает, что такая диссипация слишком велика для работоспособности метода медленно меняющихся амплитуд. При значении $\gamma=0.05$ уже наблюдается достаточно хорошее сходство картинок. Особенно это относится к области резонанса на далеких субгармониках, то есть к области малых частот W . Причина состоит в том, что чем меньше частота воздействия, тем дольше осциллятор колеблется в промежутке между импульсами, и тем эффективнее метод медленно меняющихся амплитуд.

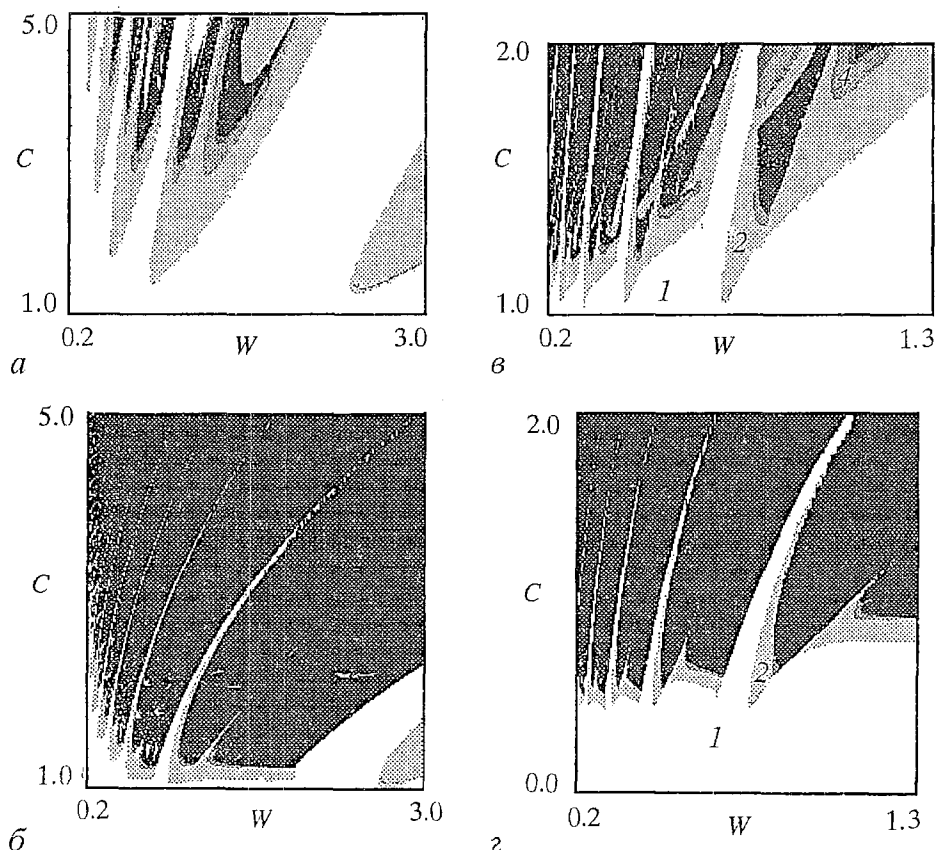


Рис. 2. Сопоставление карт динамических режимов дифференциальной системы (а, в) и двумерного отображения Икеды (б, з) на плоскости параметров (амплитуда – частота внешнего воздействия) при $\beta=1, \gamma=0.2$ (а,б) и $\gamma=0.05$ (в,з)

2. Одномерное необратимое отображение

Для того чтобы двумерное отображение адекватно аппроксимировалось одномерным, необходимо сильное сжатие облака изображающих точек в фазовом пространстве, то есть сильная диссипация. На первый взгляд, это противоречит условию применимости использованного в предыдущем разделе метода медленно меняющихся амплитуд. Однако в соответствии с (14) параметр B уменьшается при продвижении в область субгармонических резонансов, то есть как раз в область эффективности метода медленно меняющихся амплитуд. Кроме того, как мы покажем в разделе 3, для работоспособности одномерного отображения есть более глубокие основания.

Построим соответствующее одномерное отображение. Вслед за [12] предположим, что параметр B мал, и что переменную z можно представить в следующем виде: $z_n = A + \tilde{z}_n$, где \tilde{z}_n – малая добавка. Для величины \tilde{z}_n из соотношения (13) получим

$$\tilde{z}_{n+1} = AB \exp[i(A^2 + A(\tilde{z}_n + \tilde{z}_n^*) + \psi)]. \quad (15)$$

Полагая $x = A(\tilde{z} + \tilde{z}^*) + A^2 + \psi$, приходим к следующему одномерному отображению для переменной x

$$x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi, \quad (16)$$

где новые параметры λ и φ выражаются через параметры отображения (13) следующим образом:

$$\lambda = 2A^2B, \quad \varphi = A^2 + \psi. \quad (17)$$

Переход к одномерному отображению привел к уменьшению числа существенных параметров с трех до двух.

Заметим, что отображение (16) описывается очень простым выражением и неудивительно, что оно представляет интерес и само по себе. Например, им описывается акустооптическая система с запаздыванием [17].

Обсудим теперь подробнее сложную динамику отображения (16). На рис. 3, *a* показана соответствующая карта динамических режимов. На ней можно видеть объекты, аналогичные имеющимся на карте для отображения Икеды, а именно, линии касательных бифуркаций, области режимов с удвоенным периодом, а также области типа «crossroad area».

Отображение (16) демонстрирует переход к хаосу по Фейгенбауму [4–6], что иллюстрируется бифуркационным деревом (рис. 4, *a*), построенным вдоль линии $\varphi=0$, и серией итерационных диаграмм, демонстрирующих удвоенные циклы максимальной устойчивости, опирающиеся на экстремум отображения (рис. 4, *b–d*). Соответствующая последовательность значений λ накапливается по закону геометрической прогрессии с фейгенбаумовской универсальной константой $\delta=4.669\dots$

Отображение (16) демонстрирует, однако, и нефейгенбаумовские каскады удвоений. Один из них наблюдается вдоль линии $\lambda=\pi-\varphi$, которая отвечает дополнительному условию, что максимум отображается точно в минимум. Бифуркационное дерево в этом случае (рис. 5, *a*) отличается от фейгенбаумовского случая, в частности, имеются более широкие окна периодичности. Циклы же максимальной устойчивости опираются не на один, а сразу на два экстремума (рис. 5, *b–d*). Соответствующие значения параметра λ накапливаются с другой универсальной константой $\delta=7.28469$ к точке $\lambda_T=2.18603861533$. Подобные точки в [13] названы трикритическими и являются концами фейгенбаумовских линий на плоскости параметров [1–2].

Отметим также, что отображение (16) демонстрирует нефейгенбаумовский каскад удвоений и вдоль линии $\lambda=\varphi$, для которой выполняется условие отображения минимума в максимум. На рис. 6 показаны «портреты» аттракторов в трикритических точках для двух рассмотренных случаев.

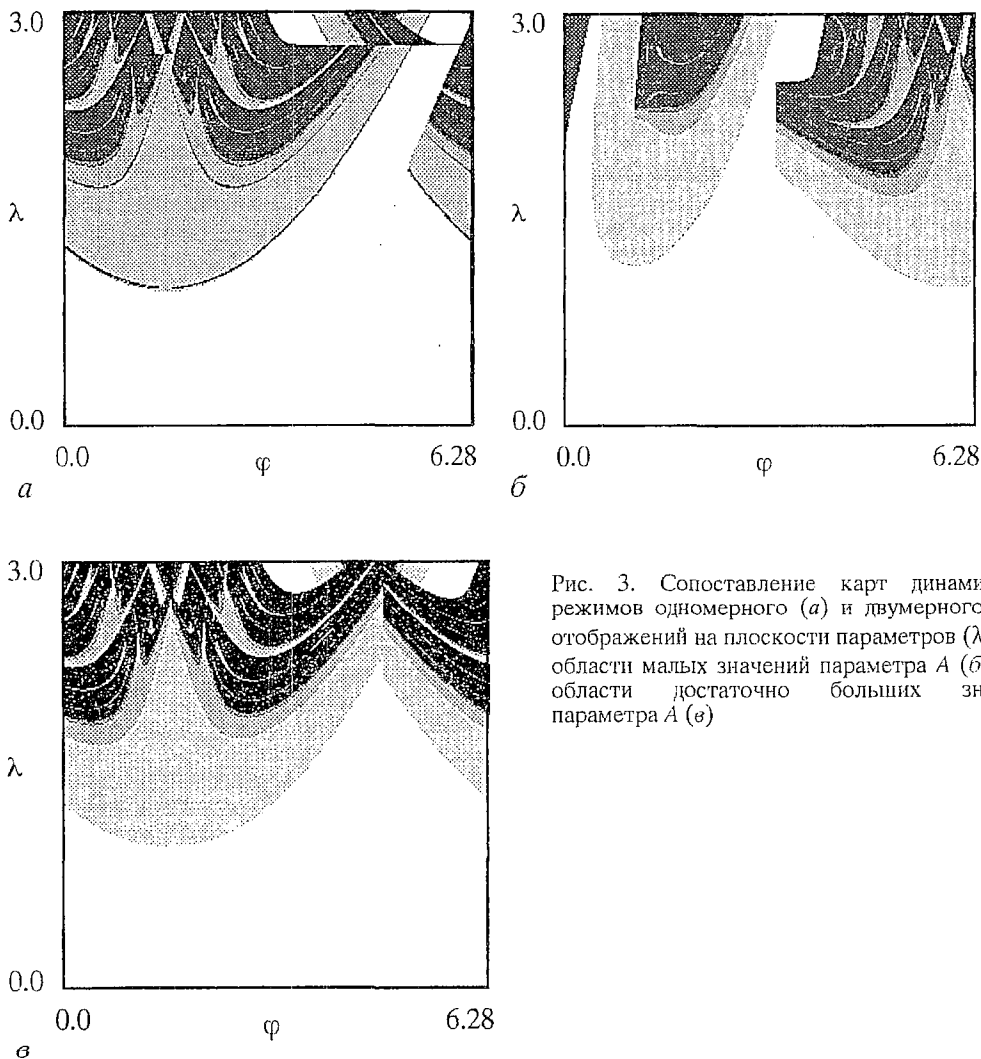


Рис. 3. Сопоставление карт динамических режимов одномерного (а) и двумерного (б, в) отображений на плоскости параметров (λ, φ) для области малых значений параметра A (б) и для области достаточно больших значений параметра A (в)

3. От одномерного к двумерному отображению

Рассмотрим подробнее вопрос о соответствии описания в терминах одномерного отображения (16) и двумерного отображения (13). Прежде всего сравним карты динамических режимов на *плоскости параметров одномерного отображения* (λ, φ) для этих двух случаев. Заметим, что косинус периодическая функция, поэтому плоскость параметров отображения (16) будет иметь периодическую структуру. (На рис. 3, а представлена ее часть, отвечающая вариации фазы φ в пределах одного периода, от нуля до 2π .) На карте динамических режимов для отображения Икеды это позволяет выделить элементарные «ячейки» (рис. 7, а). Они представляют собой области, ограниченные линиями $B = \lambda / (2A^2)$ ($\lambda = 3$ – отвечает верхней границе карты одномерного отображения), $A = [2\pi(n-1)]^{1/2}$ и $A = (2\pi n)^{1/2}$ (n – номер ячейки).

Теперь более подробно рассмотрим область 1, соответствующую малым значениям параметра A , и область 3, соответствующую достаточно большим значениям A . Трансформируем эти области в переменные λ, φ и сравним их с картой динамических режимов для отображения (16) (см. рис. 3). Из этого

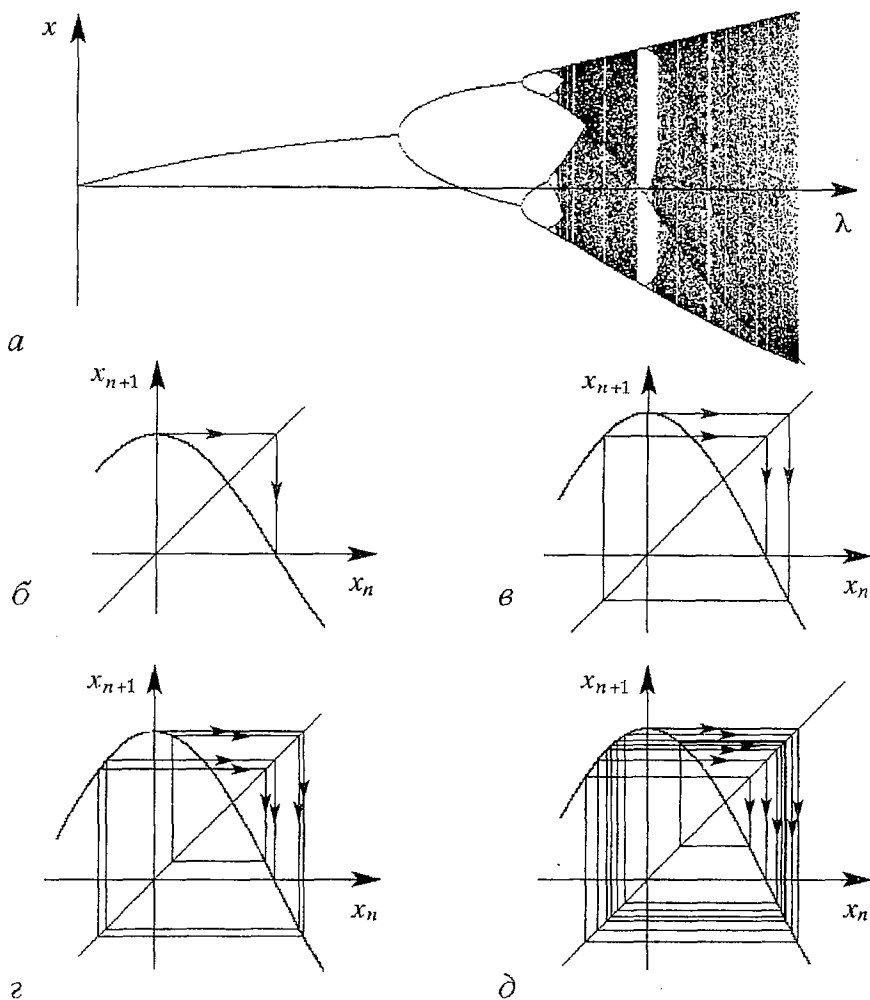


Рис. 4. *a* – бифуркационное дерево для отображения (16) в случае $\varphi=0$; *б-д* – итерационные диаграммы циклов максимальной устойчивости периода 2–16 для различных значений параметра λ : *б* – 1.57079633, *в* – 1.88740798, *г* – 1.95565631, *д* – 1.99763129

сравнения следует, что полученная для области *I* картинка (рис. 3, *б*) мало похожа на карту динамических режимов для одномерного аппроксимирующего отображения (рис. 3, *а*), а картинка (рис. 3, *в*) для области *З* демонстрирует существенно большее сходство.

Как ясно из вывода одномерного отображения, эффективность соответствующего приближения определяется степенью выполнения условия $B \ll A$. При переходе к «ячейкам» со все более высокими номерами параметр *B* падает, а параметр *A* увеличивается, так что возрастание эффективности одномерной аппроксимации понятно. Для случая, отвечающего рис. 3, *б*, мы имеем значения $B \sim 0.3$, $A \sim 1.5$, а для рис. 3, *в* – $B \sim 0.05$, $A \sim 5.0$. Степень соответствия картинок для одномерного и двумерного отображений находится в разумном соответствии с соотношением этих величин.

Как мы отмечали, для одномерного отображения характерны трикритические точки, являющиеся концевыми для фейгенбаумовских линий перехода к хаосу, и были найдены две из них, отвечающие отображению максимума в минимум и наоборот. С помощью соотношений (17) мы можем определить, какие точки отвечают им на плоскости параметров (*A, B*) двумерного

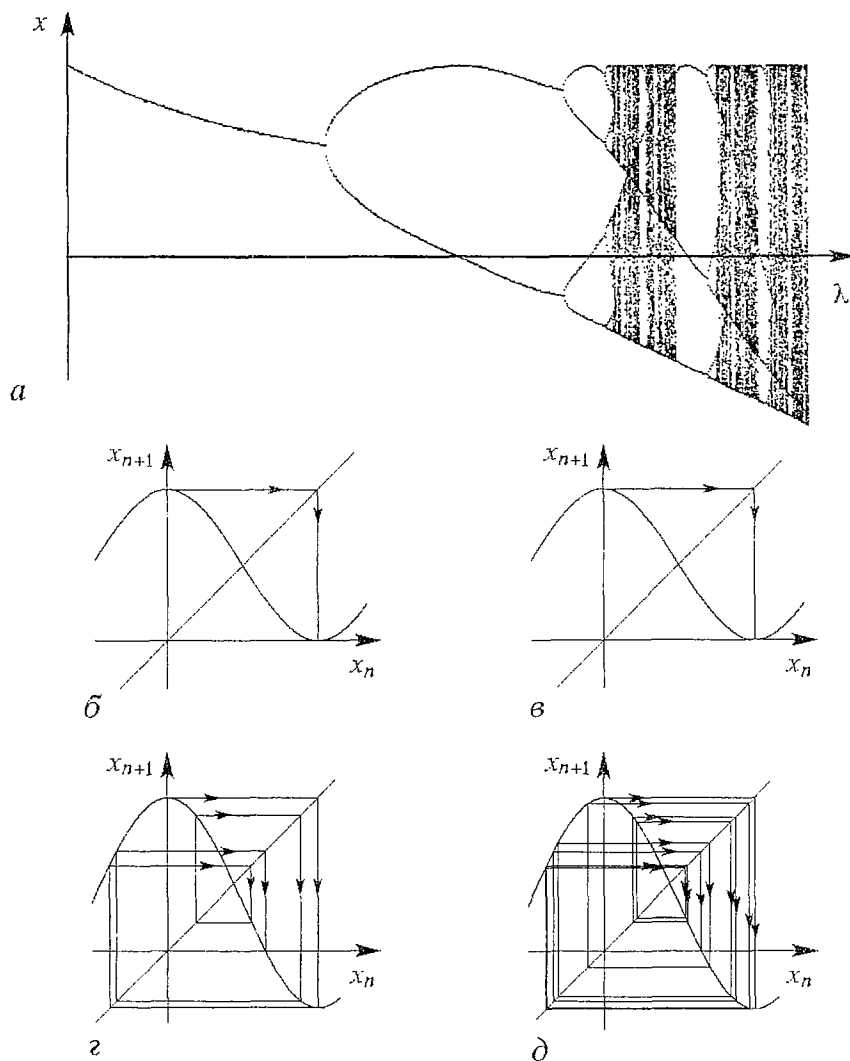


Рис. 5. *a* – бифуркационное дерево для отображения (16) в случае $\lambda = \pi - \varphi$; *б–д* – итерационные диаграммы циклов максимальной устойчивости периода 2–16 для различных значений параметра λ : *б* – 1.57000100, *в* – 2.09330461, *г* – 2.17229248, *д* – 2.18319192

отображения. Соответствующая конфигурация показана на рис. 7, б. В силу периодичности косинуса мы вместо двух исходных точек имеем целую систему. Окрестность каждой пары из них в рамках одномерной аппроксимации дается рис. 3, а. Сопоставление рис. 7, б, 3, а и рис. 1 говорит о том, что такая конфигурация с характерным устройством плоскости параметров проявляется в двумерном отображении.

С помощью ренормгруппового анализа, однако, установлено, что трикритические точки на плоскости параметров при введении второго измерения не выживают, а реализуются лишь приближенно, причем тем лучше, чем лучшую аппроксимацию обеспечивает одномерное отображение [1–3]. Таким образом, на глубоких уровнях разрешения карты двумерного отображения в окрестности точки, отвечающей трикритической, соответствующая универсальная структура плоскости параметров все равно разрушится. Когда это произойдет – зависит от степени эффективности аппроксимации одномерного отображения. Так, сопоставление рис. 3, а и б говорит о том, что для первой «ячейки» эта структура разрушена уже полностью.

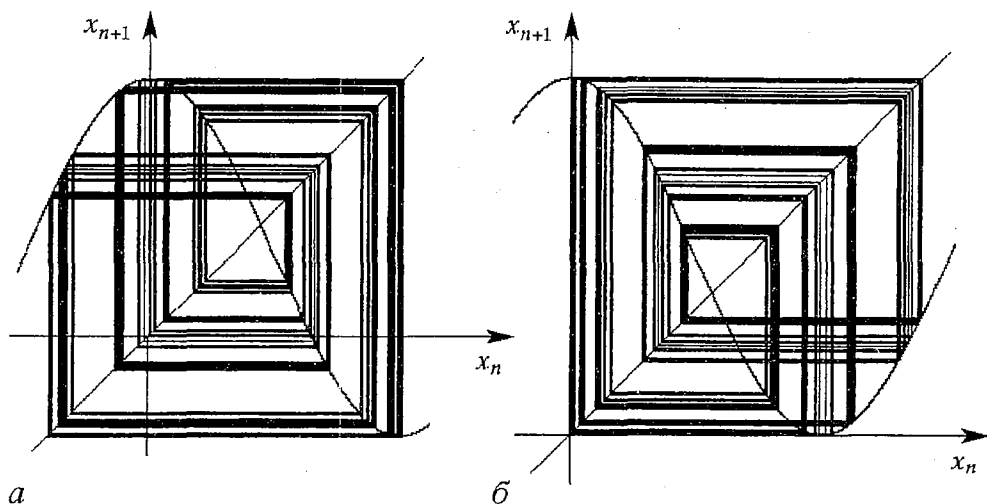


Рис. 6. «Портреты» аттракторов в трикритической точке $\lambda_T=2.18603861533$ для отображения (16) в случае $\lambda=\pi-\varphi$ (а) и $\lambda=\varphi$ (б)

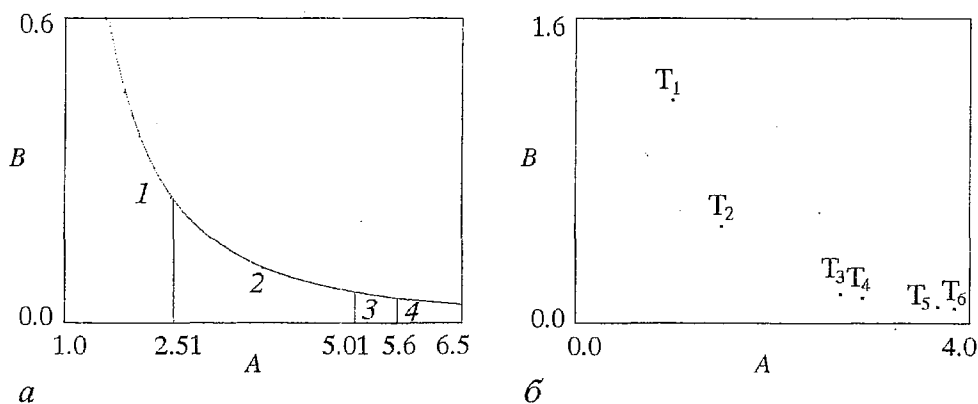


Рис. 7. а – плоскость параметров для отображения Икеды (каждая выделенная область отвечает фрагменту плоскости параметров одномерного отображения рис. 3, а); б – множество трикритических точек на плоскости параметров (A, B) , предсказанное на основе одномерной модели

Заключение

В настоящей работе были введены в рассмотрены все три класса динамических систем, получены двумерное и одномерное необратимые отображения для нелинейного диссипативного осциллятора с кубической нелинейностью под импульсным воздействием. Для всех моделей были построены карты динамических режимов и проведено обсуждение их соответствия.

Мы констатируем, прежде всего, что в случае систем со сложной динамикой работоспособность тех или иных приближений требует обсуждения не только с позиций физических мотивов, но и с позиций самих феноменов сложной динамики (особенно это относится к глобальной бифуркационной картине, точкам и линиям накопления бифуркаций). Ситуация усложняется тем, что когда речь идет о наиболее сложно устроенных областях на плоскости параметров, присущая феноменам нелинейной динамики универсальность оказывается не столь простой, как при однопараметрическом анализе.

В рассмотренном случае эффективность приближенного подхода при переходе от описания в терминах дифференциальных уравнений к двумерным отображениям оказывается ниже, нежели в аналогичной ситуации при переходе от двумерного отображения к одномерному. Так, для осциллятора тонкая структура долгопериодических областей на плоскостях параметров (частота – амплитуда воздействия) в окрестностях резонансов (точек сборки) передается все же плохо. В то же время, тонкая структура в окрестности точек сборки для двумерного отображения превосходно описывается одномерным.

Проведенное исследование подтверждает выводы ренормгруппового анализа о том, что соотношение одномерных и двумерных отображений тривиально только при однопараметрическом анализе. Так, фейгенбаумовская универсальность «одинакова» в обоих случаях. С другой стороны, для одномерных отображений характерны точки накопления ситуаций типа «crossroad area» на базе циклов возрастающих периодов со своей универсально устроенной окрестностью, которые являются концевыми точками фейгенбаумовских линий на плоскости параметров. Для двумерных отображений соответствующая картина имеет место как некоторая промежуточная асимптотика, работоспособность которой, однако, может быть весьма высокой. Поэтому даже «беглый» взгляд на карту динамических режимов двумерного отображения может выявить соответствующие области на плоскости параметров и позволяет судить о возможности одномерной аппроксимации. При исследовании новых систем это, конечно, важная качественная информация.

В рамках настоящей работы нелинейный осциллятор был скорее инструментом, нежели предметом исследования. Тем не менее, скажем несколько слов о моделировании осцилляторов дискретными отображениями. В работах Б.П. Безручко с соавторами развивается интересный и продуктивный подход к такому моделированию [9]. В его рамках рассматривается дискретное воздействие на осциллятор, состоящее в том, что координата периодически получает фиксированную по величине добавку. В этом случае, однако, дискретная модель принципиально одномерна, и рассмотренные в настоящей статье вопросы выпадают из поля зрения. Для описания осцилляторов с гармоническим возбуждением Парлитц с соавторами в серии очень интересных работ [15,16], посвященных сложной динамике осциллятора с гармоническим возбуждением, предлагает модель в виде двумерного отображения «twist-and-kick map» (отображение с закручиванием и ударами). Фактически, это отображение (13). Авторы, однако, исследуют другие проблемы и не проводят никакого сопоставления по параметрам, ограничиваясь констатацией самого факта существования структур типа «crossroad area» и подобных им структур «spring area» [11] для осциллятора и модели. В контексте сопоставления динамических систем разных классов такой подход, как мы видели, недостаточен. Необходимо более детальное двухпараметрическое исследование.

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову за плодотворное обсуждение работы.

Работа поддержана грантами РФФИ № 97-02-16414, ФЦП «Интеграция» № 696.3 и Министерства образования РФ № 97-0-8.3-88.

Библиографический список

1. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 91.
2. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Коразмерность и типичность

в контексте проблемы описания перехода к хаосу // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2, № 3/4. С. 90.

3. *Kuznetsov S.P.* Tricriticality in two-dimensional maps // *Phys. Lett.* 1992. Vol. A169. P. 438.

4. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.

5. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990. 240 с.

6. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.

7. *Кузнецов С. П., Ерастова Е. Н.* Теория Фейгенбаума // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Кн. 2. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. С. 3

8. *Heagy J.F.* A physical interpretation of the Henon map // *Physica.* 1992. Vol. 57, № 3–4. P. 436.

9. *Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П.* Модель диссипативного нелинейного осциллятора в виде одномерного отображения с тремя параметрами // Письма в ЖТФ. 1994. Вып. 11.

10. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 709.

11. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* Crossroad area – spring area transition (1) Parameter plane representation // *Int. J. Bifurc. & Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 183.

12. *Carr Y., Eilbech Y.C.* One-dimensional approximations for a quadratic Ikeda map // *Phys. Lett.* 1984. Vol. 104A. P. 592.

13. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behaviour // *Phys. Rev.* 1981. Vol. A24, № 5. P. 2669.

14. *Mosekilde E.* Topics in Nonlinear dynamic. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1996. 380 p.

15. *Parlitz U.* Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative oscillators // *Int. J. Bifurc. & Chaos.* 1993. Vol. 3. P. 7035.

16. *Parlitz U. et al.* Two-dimensional maps modelling periodically driven strictly dissipative oscillator // *Int. ser. of Numerical Math.* 1991. Vol. 97. P. 283.

17. *Vallee R., Delisle C., Chrostowski J.* Noise versus chaos in an acousto-optic bistability // *Phys. Rev.* 1984. Vol. 30A, № 1. P. 336.

18. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Multi-parameter criticality in Chua's circuit at period-doubling transition to chaos // *Int. J. Bifurc. & Chaos.* 1996. Vol. 6. P. 119.

*Саратовский государственный
университет*

*Саратовское отделение Института
радиотехники и электроники РАН*

Поступила в редакцию 25.09.99

DYNAMICAL SYSTEMS OF DIFFERENT CLASSES AS MODELS OF THE KICKED NON-LINEAR OSCILLATOR

A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

Correspondence between the models as dynamical systems of different classes is discussed by the example of nonlinear dissipative kicked oscillator. 1D map is investigated in details: Feigenbaum's period doubling is studied and the possibility of non-Feigenbaum's period doubling is shown, corresponding illustration in the form of bifurcation diagrams and set of iteration diagrams are given, tricritical points (terminal points of the Feigenbaum's critical curves) are found in parameter space. The correlation with the properties of 2D map, the phenomenon of tricritically dynamics was demonstrated to take place only on definite areas of the parameter space.

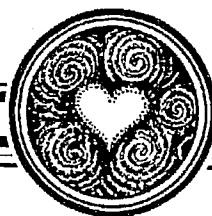


Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СО ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и

СО ИРЭ РАН. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и двух популярных книг. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. В настоящее время учится на 5 курсе факультета нелинейных процессов СГУ. Инженер Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Занимается научной работой в студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, трикритическая динамика. Автор четырех публикаций. Принимала участие в четырех международных научных конференциях, в частности, Nonlinear Dynamics of Electronic Systems – 99, Дания. В 1999 году работала в Датском техническом университете. Удостоена гранта ФЦП «Интеграция» для поездки на научную конференцию NOLTA-2000, Дрезден, Германия. Соросовский студент (1998, 1999), стипендиат Президента Российской Федерации.



ДИНАМИКА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ДИСЛОКАЦИЙ В ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ МАРАНГОНИ – БЕНАРА

В.О. Аффенченко, А.Б. Езерский

Экспериментально исследовано взаимодействие двух точечных дислокаций, искусственно введенных в совершенную шестигранную структуру, возникающую при конвекции Марангони – Бенара в тонком слое жидкости. Выяснено, что движение дислокаций происходит вдоль узких коридоров в поле суммы фаз трех мод, образующих шестигранную структуру, внутри которых наблюдались большие градиенты фазового поля. Установлено, что в зависимости от значения начальных фаз дислокации либо притягивались друг к другу и образовывали устойчивое связанное состояние – пенто-гепто-дефект, либо расходились к границам кюветы. Проведено сравнение траекторий дислокаций с расчетными.

Введение

Гексагональные структуры являются важным объектом исследования в теории самоорганизации неравновесных сред. Гексагональные ячейки наблюдаются в термокапиллярной конвекции Марангони – Бенара [1–5], в конвекции Рэлея – Бенара в небуссиновских жидкостях [6–9], автокаталитических реакциях [10] и т.д. (см. обзор [11]). В протяженных системах, однако, совершенная гексагональная структура практически не наблюдается. Типичной является ситуация, когда различные точечные и протяженные дефекты возникают на фоне идеальной структуры [2,12].

Среди точечных дефектов наиболее типичным в гексагональных структурах является пенто-гепто-дефект, когда в пространственно-периодической структуре, состоящей из ячеек, имеющих шесть соседей, существует пара ячеек с пятью и семью соседями. Возникнув, эти дефекты устойчиво существуют длительное время. Численные исследования показали [13], что пенто-гепто-дефект возникает в результате взаимодействия двух точечных дислокаций, принадлежащих разным модам и имеющих разные знаки топологических зарядов. Характер взаимодействия дислокаций определяется начальной фазой мод, образующих шестигранную структуру: они либо притягиваются и образуют устойчивое состояние, либо расходятся к границам области интегрирования.

В данной работе представлено экспериментальное исследование динамики двух точечных дислокаций в термокапиллярной конвекции Марангони – Бенара в слое жидкости. При этом начальная структура конвективных ячеек задавалась так, что мы имели две точечные дислокации на фоне совершенной гексагональной структуры.

Идеальную шестигранную решетку образуют, как известно, три резонансно связанные моды

$$A_j \exp[i\mathbf{k}_j \mathbf{r}], \quad j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

с волновыми векторами, удовлетворяющими резонансному условию

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0,$$

где $A_j = \rho_j \exp[i\theta_j]$ – комплексная амплитуда моды и \mathbf{k}_j – волновой вектор. Каждая мода может содержать дислокации. Под дислокацией в данном случае понимается нарушение пространственной периодичности, обладающее следующими свойствами: в двумерном поле $A_j \exp[i\mathbf{k}_j \mathbf{r}]$ амплитуда ρ_j и фаза θ_j изменяются таким образом, что величина $\rho_j(0,0) = 0$ и интеграл от градиента фазы $\{\int_L \nabla \theta_j d\mathbf{l}\}$ по замкнутому контуру L , охватывающему точку $x=0, y=0$, равен $\pm 2\pi$. В этом случае говорят, что в моде в точке $x=0, y=0$ расположена дислокация с зарядом ± 1 . Дислокация в точке $x=0, y=0$ в моде соответствует появлению липнего ролика в этой точке, аналогично краевой дислокации в твердом теле. Только единицами структуры здесь выступают не атомы, а конвективные ячейки.

В [13] численно показано, что две дислокации, принадлежащие разным модам и имеющие разные знаки, могут притягиваться друг к другу и образовывать пенто–гепто–дефект. При этом начальные амплитуды выбирались в виде

$$\rho_1 = \tanh[(X_1 - X_1^0)^2 + (Y_1 - Y_1^0)^2]^{1/2}, \quad (2)$$

$$\theta_1 = \arctan[(Y_1 - Y_1^0)/(X_1 - X_1^0)] + \theta_0, \quad (3)$$

$$\rho_2 = \tanh[(X_2 - X_2^0)^2 + (Y_2 - Y_2^0)^2]^{1/2}, \quad (4)$$

$$\theta_2 = -\arctan[(Y_2 - Y_2^0)/(X_2 - X_2^0)], \quad (5)$$

$$\rho_3 = 1, \quad \theta_3 = 0, \quad (6)$$

где X_j, Y_j – координаты, параллельные и перпендикулярные волновому вектору \mathbf{k}_j ; $X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0$ – координаты дислокаций. В численном эксперименте [13] динамика дислокаций существенным образом зависела от начальной фазы θ_0 . При определенных значениях фазы ($\theta_0 = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$) дислокации притягивались друг к другу и формировали пенто–гепто–дефект, при других ($\theta_0 = -\pi/4, -\pi/2$) они притягивались к границам области интегрирования и аннигилировали. Поскольку динамика дислокаций изучалась в рамках градиентной системы (три связанных уравнения Ньюэлла – Уайтхеда – Сегалья), начальные возмущения эволюционировали к минимуму ляпуновского функционала. В [13] было показано, что этот минимум достигается, когда синхронизация фаз мод ($\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$) имеет место. Как мера синхронизации в [13] использовалась функция $P = -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$. В случае идеальной структуры функция $P(x, y) = -1$ во всем пространстве. Если же в начальный момент времени в структуре есть две дислокации, заданные по формулам (2)–(6), то функция $P(x, y)$ равномерно принимает в пространстве все значения от -1 до 1 . С течением времени фазы синхронизируются, так что в большей части пространства $P(x, y) = -1$ за исключением узких коридоров, исходящих из центров дислокаций, где наблюдаются большие градиенты в поле $P(x, y)$. В центре коридора значение $P(x, y) = 1$. В зависимости от начальной фазы θ_0 эти коридоры замыкаются либо на границах области интегрирования, либо на других дислокациях. Дислокации двигались вдоль коридора, тем самым увеличивая пространство синхронизма фаз $P(x, y) = -1$. В зависимости от начальной фазы θ_0 дислокации либо притягивались друг к другу и образовывали пенто–гепто–дефект (так как дислокации, принадлежащие разным модам, не могли аннигилировать друг

на другие), либо расходились к границам области интегрирования, так что устанавливалась совершенная гексагональная структура.

В нашей работе мы исследовали взаимодействие дислокаций в реальном физическом эксперименте. Используя процедуру демодуляции [14,15], мы определяли фазы мод, координаты дислокаций и поле параметра P . Нами были построены траектории дислокаций для разных начальных фаз θ_0 и проведено сравнение с результатами работы [13].

1. Эксперимент

Схема эксперимента представлена на рис. 1. Конвекция реализовалась в круглой кювете **1**, диаметром 18 см, температура дна которой поддерживалась постоянной за счет прокачки термостатированной жидкости **2**. Кювета заполнялась силиконовым маслом ПМС-100 с динамической вязкостью $\eta=88.6$ [г/(см·с)] 10^2 , плотностью $\rho_0=0.963$ г/см³, температуропроводностью $k=0.001098$ см²/с и коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma=19.7$ дин/см (все данные соответствуют температуре 25° С). При нагреве дна кюветы в слое жидкости возникает вертикальный градиент температуры. Для измерения разности температур использовалась дифференциальная медьконстантановая термопара **3**. Напряжение, возникающее на термопаре, измерялось с помощью вольтметра постоянного тока **4**. При критической разности температур верхней и нижней границ в слое возникла конвективная неустойчивость. Для визуализации конвективных структур в эксперименте использовалась алюминиевая пудра.

Толщина слоя силиконового масла составляла $d=4.4$ мм, разница температур между дном и поверхностью жидкости составляла $\Delta T=5^\circ$, при этом число Марангони составляло $Ma=\alpha\Delta Td/(\eta\kappa)=190$, а число Рэлея $Ra=\rho g\beta\Delta Td^3/(\eta\kappa)=415\pm 20$, здесь g – ускорение свободного падения. При этом критические значения составляли: $Ma_{кр}=140\pm 20$ и $Ra_{кр}=310\pm 20$, так что надкритичность равнялась $\varepsilon=Ma/Ma_{кр}-1=Ra/Ra_{кр}-1=0.34$.

Для создания структуры требуемого вида нами использовалась методика термопечати [16]. Слой силиконового масла нагревался в течение двух минут лампой накаливания **5** мощностью 100 Вт сквозь экран с отверстиями **6**, находящийся на расстоянии 1 см от свободной поверхности жидкости. Происходящий при этом неоднородный нагрев жидкости порождал конвективные ячейки под каждым отверстием. Положение отверстий в экране совпадало с максимумами функции $V=\text{Re}\{\sum_{j=1}^3 A_j \exp[i\mathbf{k}_j \mathbf{r}]\}$, где амплитуды A_j выбирались в форме (2)–(6). При таком выборе функций ρ_j , θ_j поле функции V будет содержать две дислокации разных знаков в 1-й и 2-й модах, локализованных в точках X_1^0 , Y_1^0 и X_2^0 , Y_2^0 , соответственно. Нами использовался набор экранов для пяти различных начальных фаз.

Эволюция начальных возмущений записывалась в течение 15 минут VHS видеокамерой, находящейся на расстоянии 140 см над поверхностью жидкости. Отдельные кадры вводились в компьютер с частотой два кадра в минуту при помощи платы захвата видеосигнала, при этом получались файлы размером 768×576 пикселей (точек) с яркостью каждого пикселя 0÷255 оттенков серого (формат РСХ grayscale). Далее из этого файла

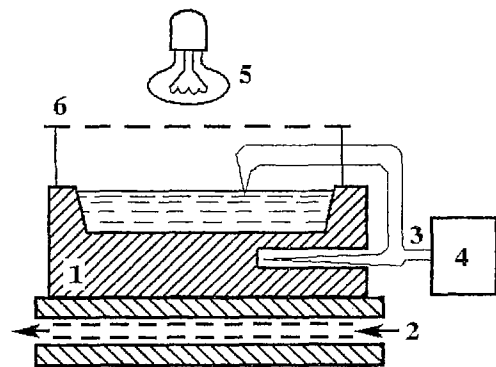


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

вырезалась область, содержащая двумерное поле конвекции размером 512×512 пикселей для дальнейшей обработки.

2. Обработка изображений

Так как непосредственно полученное в эксперименте изображение не обладало необходимой контрастностью, предварительно оно обрабатывалось программой¹, которая позволяла четко идентифицировать отдельные конвективные ячейки. Данная программа использовала процедуры контрастирования, выделения контура и скелетизации для выделения из паттерна объектов определенного размера (в данном случае указывался размер конвективной ячейки в пикселях). Алгоритм работы программы подробно описан в [17]. Полученное в результате обработки данной программой изображение показано на рис. 2, а. Изображение представлялось в виде двумерного массива данных из 512×512 элементов. Каждый элемент массива принимал значение от 0 до 255 в зависимости от яркости соответствующего ему пикселя изображения.

Для определения пространственного периода структуры, реализующейся в эксперименте, по полю яркости изображения методом быстрого дискретного преобразования Фурье вычислялся двумерный пространственный спектр. Предварительно, чтобы нейтрализовать разрыв поля на границе изображения, поле умножалось на колоколообразную функцию $F(r)$

$$F(r) = 1/2\{1 - \cos[\pi(R-r)/H]\}, \quad R-H < r < R;$$

$$F(r) = 1, \quad 0 < r \leq R-H.$$

Здесь r – радиус-вектор из центра координат, $r=R$ – граница изображения, H – глубина действия сглаживания поля. В программе использовалось значение $H=64$ пикселя при размере массива 512×512 пикселей. В размерных единицах $H=2.25$ см и $R=9$ см.

Пространственный спектр для шестигранной решетки, образованной тремя резонансно связанными стоячими волнами (см. рис. 2, а), состоит из набора более или менее размытых пичков (рис. 2, б)²:

1 – пичка в центре, образованного гармониками, располагающимися в окрестности начала координат;

2 – пичков, образованных гармониками, располагающимися в окрестности векторов \mathbf{k}_j (пички 1, 2, 3 и симметричные им); данные пички соответствуют основному периоду структуры λ ($\lambda \approx 2\pi/|\mathbf{k}_j|$);

3 – пичков, образованных гармониками, располагающимися в окрестности комбинационных векторов более высоких порядков $\mathbf{K} = \sum \xi_j \mathbf{k}_j$, где ξ_j целые числа.

Для изучения динамики отдельных дислокаций необходимо иметь регулярную процедуру, позволяющую проводить их идентификацию в полях яркости. Для этой цели необходимо определить комплексные амплитуды мод (огibaющие) $A_j = r_j \exp[i\theta_j]$, аналогичные исследованным численно в [13]. Нами использовалась процедура, предложенная в [14] и незначительно модифицированная в [15]. Для выделения комплексной амплитуды огibaющей необходимо, прежде всего, определить волновые числа заполнения \mathbf{k}_j . Пички могут содержать несколько максимумов, поэтому определялись средневзвешенные волновые векторы

$$\mathbf{k}_j = \sum_{n_i, m_i} G_{n_i, m_i} \mathbf{k}_{n_i, m_i} / \sum_{n_i, m_i} G_{n_i, m_i}, \quad j = 1, 2, 3.$$

¹ Программа любезно предоставлена В. Яхно и И. Нудель.

² Пространственный спектр, рассчитанный по полю размером 512×512 пикселей, также будет иметь размер 512×512 пикселей. На рис. 2, б показана центральная часть спектра размером 160×160 пикселей, содержащая все основные гармоники.

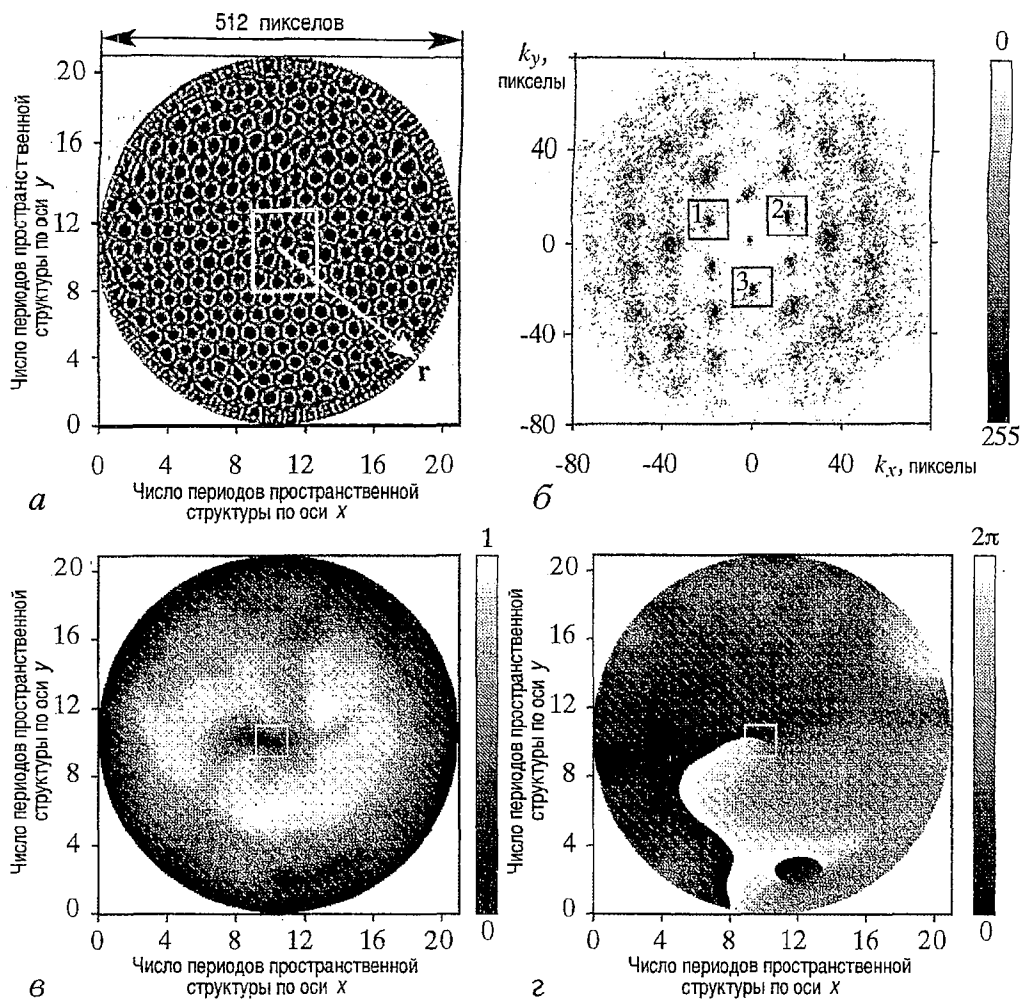


Рис. 2. Демодуляционная процедура получения комплексной амплитуды $A_j = \rho_j \exp[i\theta_j]$: а – обрабатываемое изображение; б – пространственный фурье-спектр; в, г – амплитуда ρ_2 и фаза θ_2 комплексной огибающей второй моды

Здесь n_j, m_j – координаты пространственных гармоник в окрестности пичка j , а G_{n_j, m_j} – амплитуды соответствующих фурье-гармоник (области суммирования выделены на рис. 2, б квадратами). Как показали расчеты, при размере области усреднения 21×21 гармоник мы получали наиболее точные результаты определения среднего волнового вектора k_j . Такой размер области усреднения позволял учесть все гармоники пичка, имевшие существенную амплитуду. Увеличение же области усреднения привело бы к тому, что в нее попали бы составляющие других пичков, и мы получили бы неверные координаты волновых векторов k_j .

Если теперь по гармоникам, принадлежащим окрестности этих пичков, с волновыми векторами k_j ($j=1, 2, 3$) рассчитать обратное преобразование Фурье, принимая, что k_j является нулевой пространственной частотой, то тем самым можно получить комплексные огибающие A_j мод.

Пример такого расчета показан на рис. 2. Обрабатываемое поле, представленное на рис. 2, а, содержит две дислокации, принадлежащие модам k_1 и k_2 . Фурье-спектр, рассчитанный по этому полю, показан на рис. 2, б. Поле амплитуды огибающей, полученной при расчетах обратного преобразования Фурье по гармоникам из области пичка 2, показано на рис. 2, в, а поле фазы – на рис. 2, г.

Дислокации соответствует спадание амплитуды (см. рис. 2, в) и интегральный набег градиента фазы при обходе по замкнутому контуру вокруг дислокации 2π (см. рис. 2, г). Минимум амплитуды принимался за координаты дефекта.

Следует отметить, что визуализация конвективных ячеек при помощи алюминиевой пудры не дает правильного поля скоростей в конвективной ячейке. Однако мы и не пытались установить соответствие между полями температуры и скорости конвекции и изображением, получаемым в эксперименте при помощи пудры. Нашей целью было определение дислокаций – топологических особенностей пространственного распределения конвективных ячеек, для чего достаточно просто любым способом идентифицировать каждую ячейку, а затем, применив описанную выше демодуляционную процедуру, выделить комплексную огибающую A_j . Проведенные нами сравнения обработки одного и того же изображения конвекции при разных способах контрастирования индивидуальной ячейки показали, что координаты дислокаций определялись нами с точностью не ниже $\pm\lambda$ (в эксперименте период пространственной структуры составлял приблизительно 0.9 см).

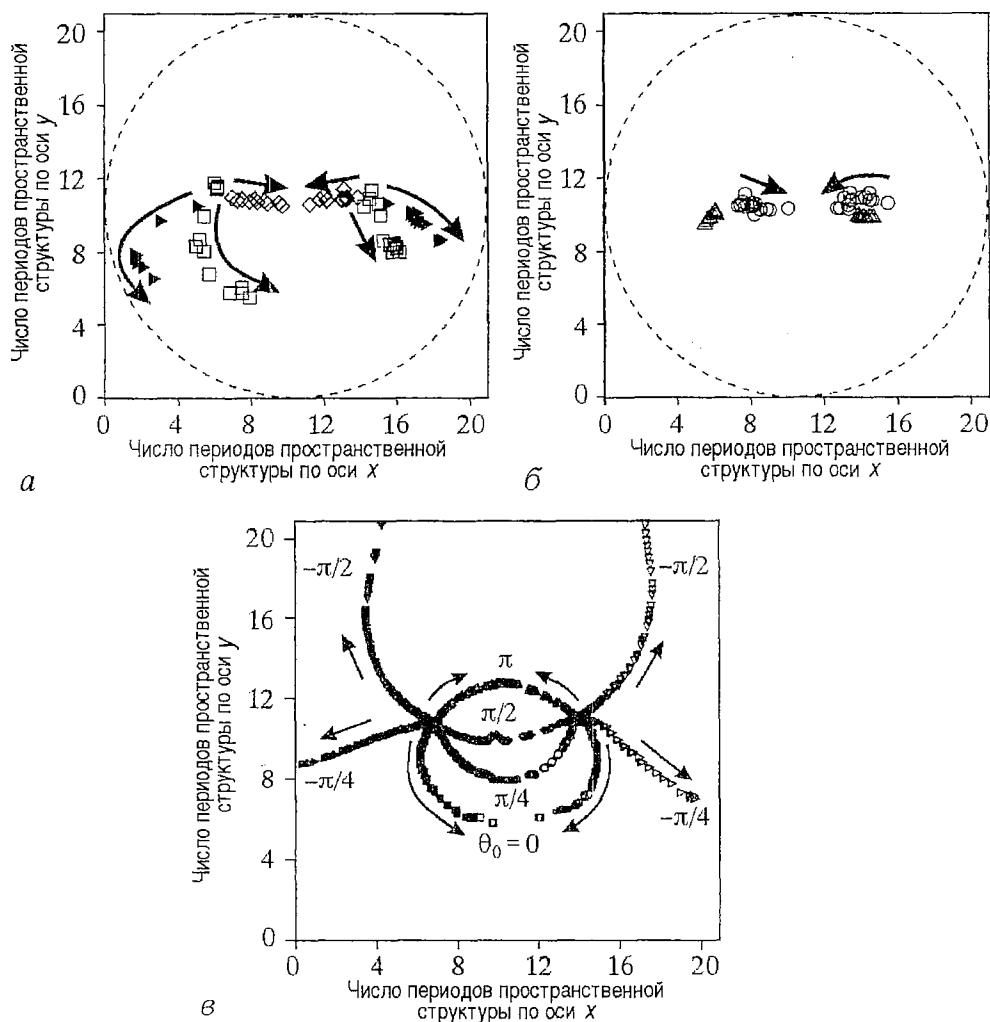


Рис. 3. а, б – траектории дислокаций для разных начальных фаз θ_0 , полученные в эксперименте: \square – 0, \blacktriangle – $(-\pi/4)$, \circ – $\pi/4$, \diamond – $2\pi/3$, \triangle – π ; в – траектории дислокаций для разных начальных фаз θ_0 , полученные в численном эксперименте [13]. Направления движения дислокаций показаны стрелками

3. Динамика искусственно заданных дислокаций в гексагональной структуре

Мы использовали термопечать [16] в эксперименте для того, чтобы получить различные случаи взаимодействия дислокаций. Безусловно, мы не могли гарантировать, что заданные нами начальные возмущения после неоднородного нагрева жидкого слоя через экран будут в точности соответствовать распределениям, задаваемым с помощью формул (2)–(6). Тем не менее, наблюдения показали, что траектории дислокации в эксперименте достаточно близки к полученным численно в [13]. Мы исследовали траектории для начальных фаз $\theta_0 = -\pi/4, \pi/4, 2\pi/3, \pi, 0$. Траектории дислокаций в нашем эксперименте представлены на рис. 3, а, б в сравнении с траекториями, полученными численно в [13] (рис. 3, в). Поле параметра синхронизма P через одну минуту после начала эксперимента представлено на рис. 4. Во всех пяти случаях формировался узкий коридор рассинхронизма в поле параметра P , и дислокации имели тенденцию двигаться вдоль коридора. В случае начальной фазы $\theta_0 = 2\pi/3$ формировался практически прямой коридор (см. рис. 4, а), так что в этом случае дислокации эффективно притягивались друг к другу и формировали пенто–гепто–дефект. Примерно так же происходило взаимодействие дислокаций в случае фазы $\theta_0 = \pi/4$, и пенто–гепто–дефект также образовывался. Очень близкие к этим результаты были получены в численном эксперименте [13] для начальных фаз $\theta_0 = \pi/2$ и $\theta_0 = \pi/4$, соответственно. Движение дислокаций вдоль траекторий, предсказанных в [13], происходило в случае начальной фазы $\theta_0 = 0$. Для начальной фазы $\theta_0 = -\pi/4$ дислокации двигались к границам кюветы, что также хорошо совпадает с расчетом [13].

Однако существует значительная разница между компьютерным и реальным экспериментами. В компьютерном [13] число дислокаций было постоянным, у нас же в течение эксперимента иногда происходило рождение пар дислокаций разных знаков, принадлежащих одной моде, и движение начальных (глобальных) дислокаций могло происходить через взаимодействие с этими локальными дислокациями. Под глобальной дислокацией здесь мы понимаем дислокацию, которая соответствует началу лишнего ролика в структуре (рис. 6, а', б' – правая дислокация; на рис. 6, а' изображено поле фазы θ_1 моды A_1 , а на рис. 6, б' – соответствующее поле отфильтрованной моды³ $A_1 \exp[i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}]$, оба рисунка соответствуют эксперименту при $\theta_0 = \pi$ и моменту времени $t = 600$ с). При обходе по сколь угодно большому контуру вокруг этой дислокации набег фазы будет 2π . В нашем эксперименте и в [13] изначально задаются именно глобальные дислокации. В отличие от глобальных дислокаций пара родившихся дислокаций соответствует просто локальному разрушению одного из роликов моды (см. рис. 6, а', б' – пара дислокаций слева), и при обходе по достаточно большому контуру, охватывающему обе дислокации, мы не заметим нарушения числа роликов до и после этих дислокаций (соответственно набег фазы будет равен 0). Такие дислокации мы будем называть локальными.

Пример движения глобальной дислокации через взаимодействие с рождающимися парами локальных дислокаций продемонстрирован на рис. 5, где представлено поле фазы второй моды для случая начальной фазы $\theta_0 = 0$ в последовательные моменты времени. Движение начальной дислокации 1 (рис. 5, а) происходило через взаимодействие с рождающимися в последовательные моменты

³ Отфильтрованные моды получались нами при помощи фурье–фильтрации, во многом аналогичной описанной в разделе 2 демодуляционной процедуре: от исходного изображения брался фурье–спектр, из него вырезалась окрестность пика, соответствующего моде A_j ($j = 1, 2, 3$), однако в отличие от демодуляционной процедуры обратное преобразование Фурье делалось без переноса окрестности пика в начало координат, тем самым мы получали каждую из трех роликовых мод, образующих гексагональную структуру (1).

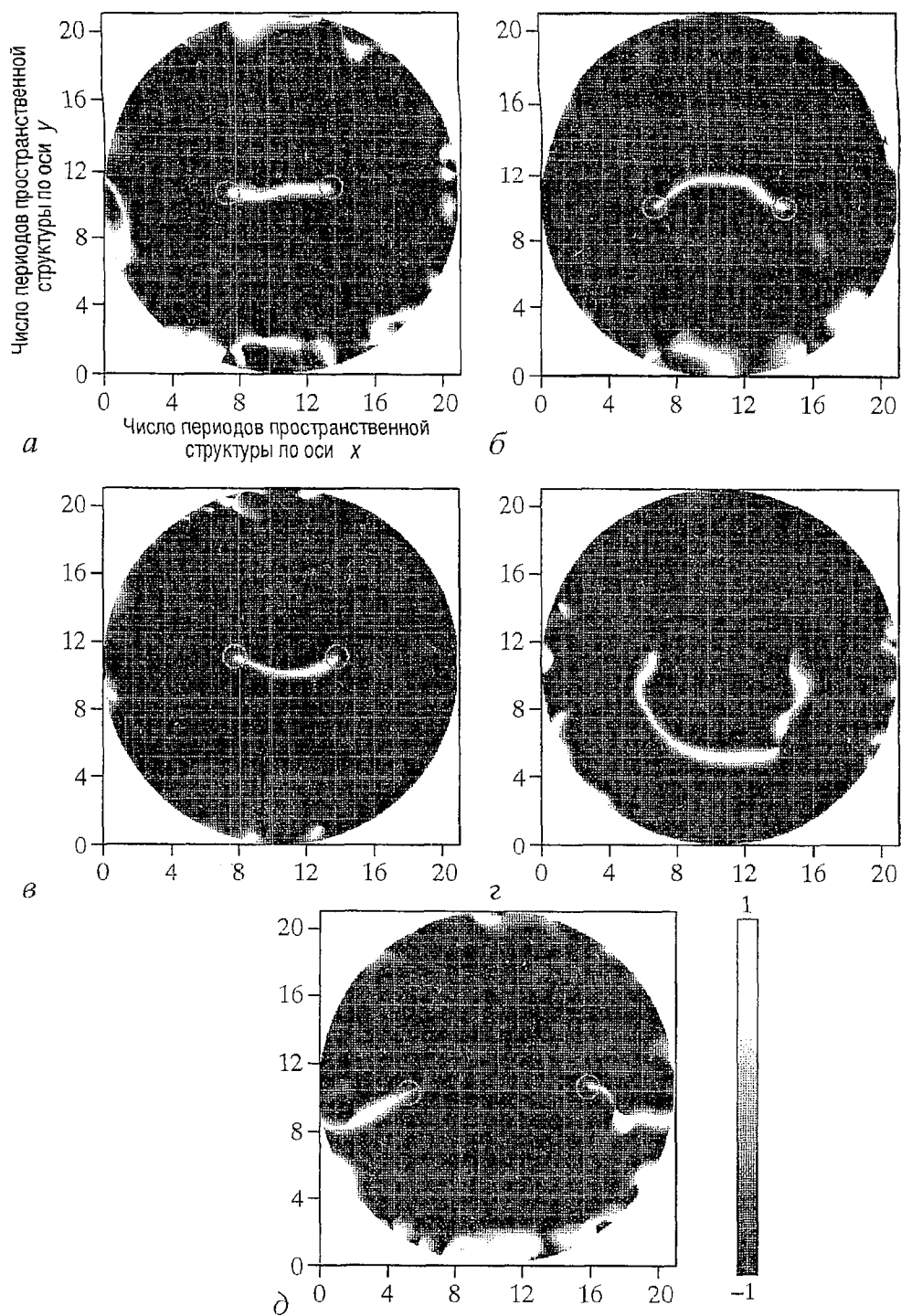


Рис. 4. Поле параметра P через 60 с после начала эксперимента для разных начальных фаз θ_0 :
 а - $2\pi/3$, б - π , в - $\pi/4$, г - 0, д - $(-\pi/4)$

времени парами дислокаций 2, 3 (рис. 5, б) и 4, 5 (рис. 5, в). Далее 1-я дислокация аннигилирует со 2-й, затем 3-я дислокация - с 4-й, так что в результате остается лишь дислокация 5.

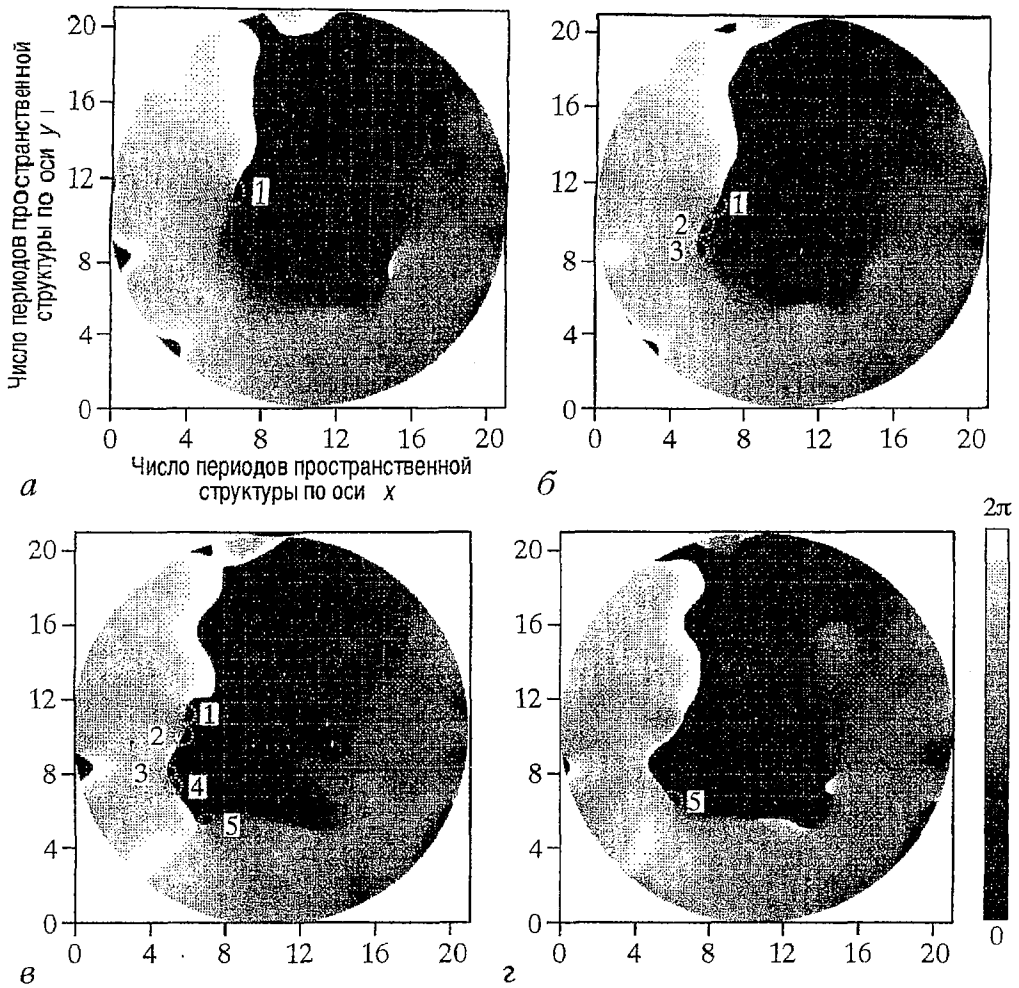


Рис. 5. Поле фазы θ_2 второй моды для случая $\theta_0=0$ в моменты времени: *а* – 120 с, *б* – 180 с, *в* – 240 с, *г* – 300 с

В подобной ситуации возникает вопрос, за какой дислокацией следить на графике или, иначе, какую дислокацию считать глобальной? Мы следили за той дислокацией, которая оставалась после акта взаимодействия. Таким образом, после аннигиляции 1-й дислокации со 2-й, 3-я дислокация рассматривалась как глобальная, и мы следили за ней, а после ее аннигиляции с 4-й глобальной становилась 5-я дислокация. Этим объясняются скачки на графике движения дислокаций. При рожденьях и аннигиляциях дислокации подчиняются закону сохранения суммарного топологического заряда дислокаций, то есть дислокации рождаются парами разных знаков и обязательно в одной моде.

Случай фазы $\theta_0=\pi$ следует обсудить подробно. В расчете [13] дислокации притягивались и образовывали пенто-гепто-дефект, в эксперименте же дислокации оставались практически неподвижными (см. рис. 3, б), несмотря на образование коридора рассинхронизма (рис. 6, д). Чтобы разобраться в том, что происходит, мы построили поля фаз и отфильтрованные роликовые моды для первой и второй моды (рис. 6) в начальный и конечный момент времени. Как видно из этих картинок, в эксперименте произошло рождение двух пар дислокаций: в первой моде дислокации появились в окрестности изначальной дислокации во второй моде (рис. 6, а, а') и наоборот, во второй моде пара дислокаций появилась в окрестности изначальной дислокации в первой моде (рис. 6, в, в'). Таким образом

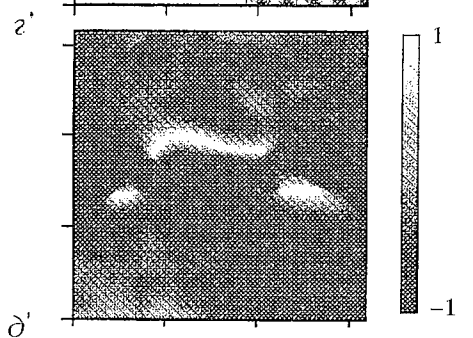
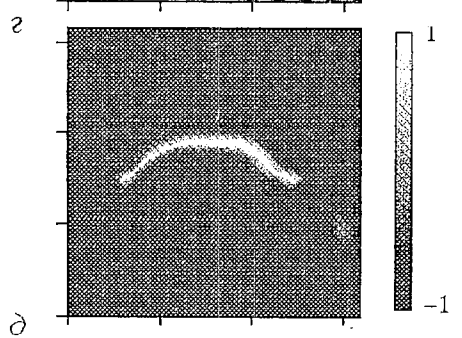
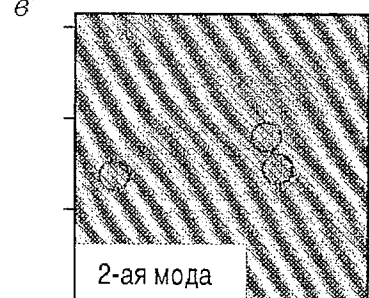
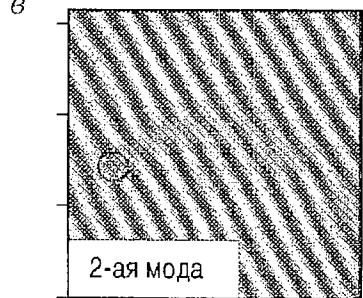
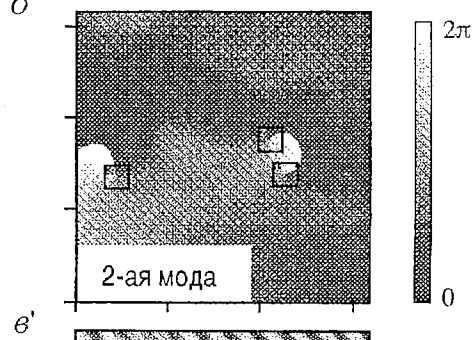
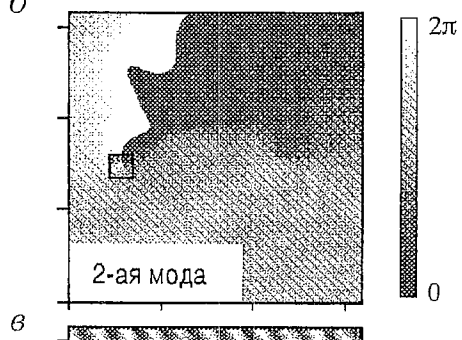
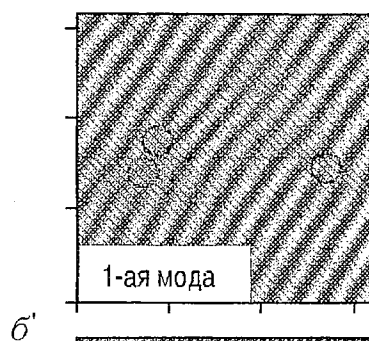
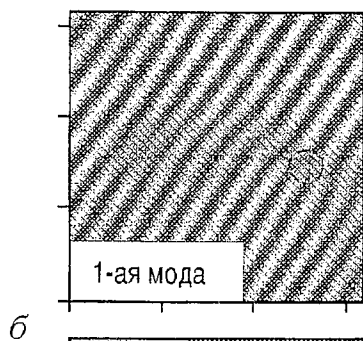
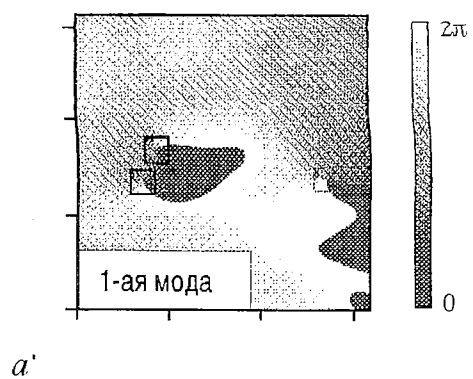
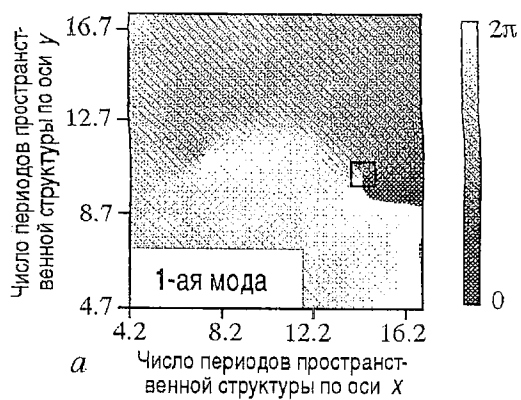


Рис. 6. Расположение дислокаций в случае $\theta_0 = \pi$. Левый столбец соответствует моменту времени 60 с, правый – 600 с; a, a' и b, b' – поле фазы первой и второй мод, соответственно; δ, δ' – отфильтрованные ролики первой и второй мод, соответственно; γ, γ' – разрушение коридора рассинхронизма

изначально заданная дислокация инициирует рождение пары дислокаций в другой моде, и такая структура оказывается устойчивым связанным состоянием. Рождение дислокаций также видно на отфильтрованных роликовых модах (на рис. 6, b, b' и γ, γ' дислокации обведены кружочками). На рис. 7 показана данная структура, причем по аналогии с пенто-гепто-дефектом ее можно назвать двойным пенто-гепто-дефектом (7-7-5-5), так как структура состоит из двух ячеек, имеющих семь соседей, и двух ячеек, имеющих пять соседей, в то время как остальные ячейки в окрестности имеют по шесть соседей. Итак, в эксперименте вместо рождения одного пенто-гепто-дефекта произошло рождение двух двойных пенто-гепто-дефектов на месте изначально заданных в каждой моде дислокаций. Двойной пенто-гепто-дефект образуется одной глобальной дислокацией и двумя локальными дислокациями разных знаков, принадлежащих другой моде. Интересно заметить, что несмотря на то, что родившиеся локальные дислокации принадлежат одной моде и имеют разные знаки, они не аннигилируют на протяжении длительного времени и остаются практически неподвижными, что резко отличается от описанного выше случая рождения и аннигиляции локальных дислокаций при движении глобальной дислокации через коридор рассинхронизма (см. рис. 5).

По-видимому, двойной пенто-гепто-дефект является формой существования одиночной глобальной дислокации в шестигранной структуре. В компьютерном эксперименте [13] одиночная дислокация, задаваемая в центре поля, быстро притягивалась к границе и аннигилировала. Однако вполне возможно, что такая структура будет устойчива, если в другой моде родится пара локальных дислокаций. Таким образом, устойчивость родившихся в нашем случае пар локальных дислокаций объясняется устойчивостью двойного пенто-гепто-дефекта в целом: каждая пара локальных дислокаций как бы «держится» на находящейся рядом глобальной. Мы планируем в дальнейшем провести экспериментальное исследование существования одиночной дислокации в шестигранной структуре и дать точный ответ на вопрос о ее устойчивости.

В качестве объяснения, почему в случае начальной фазы $\theta_0 = \pi$ не происходило сближение изначально заданных дислокаций и образование пенто-гепто-дефекта, несмотря на образование коридора рассинхронизма, можно выдвинуть две гипотезы.

Во-первых, можно предположить, что для дислокаций имеет значение направление движения относительно волнового вектора k . В чисто роликовых структурах выделяют движение дислокации поперек волнового фронта – «glide» и вдоль – «climb». При этом скорости движения «climb»-дислокаций, как правило, больше, чем «glide»-дислокаций (см., например, [14], где исследовались траектории движения дислокаций в электродинамической конвекции). В шестигранной структуре, которая состоит из трех резонансно связанных роликовых мод, нами наблюдались движения дислокаций, принадлежащих моде j , под любыми углами к волновому

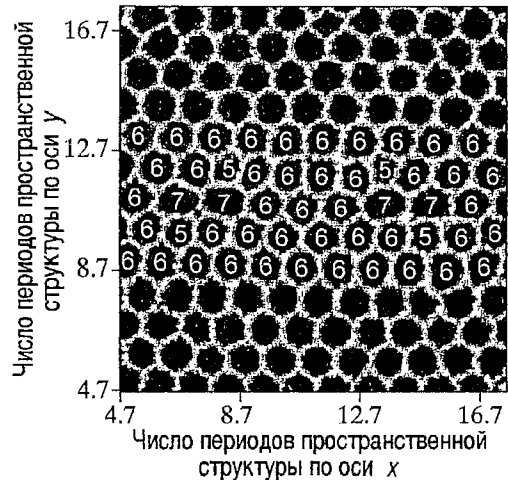


Рис. 7. Двойной пенто-гепто-дефект. Цифры соответствуют числу соседей каждой из ячеек

вектору k_j . При этом при разных начальных фазах дислокации двигались под разными углами к k_j . Траектории дислокаций, по существу, определялись формой коридора рассинхронизма (см. рис. 3, 4). Как видно из рис. 3, б, наибольший путь за время эксперимента совершили дислокации при начальной фазе $\theta_0=0$, когда коридор рассинхронизма (см. рис. 4, з) имел такую форму, что дислокации (каждая в своей моде) двигались вдоль него по типу «climb». В случае же начальной фазы $\theta_0=\pi$ коридор формируется таким образом, что касательная к нему в точках нахождения изначальных дислокаций параллельна вектору k_j (см. рис. 4, б). Таким образом, дислокации должны двигаться строго поперек волнового фронта, то есть по типу «glide». Если предположить по аналогии с чисто роликowymi структурами, что дислокации двигаются по типу «glide» значительно медленнее, чем по типу «climb», то мы приходим к выводу, что при начальной фазе $\theta_0=\pi$ изначальные дислокации оставались неподвижными, так как они не могли двигаться поперек волнового фронта, как навязывал им коридор рассинхронизма. Так как дислокация не может существовать одна в шестигранной структуре, произошло рождение пары дислокаций в соседней моде, и образовавшееся связанное состояние – двойной пенто–гепто–дефект – оказалось устойчивым. Данное объяснение полностью основано на неподтвержденной гипотезе о разных скоростях «glide»– и «climb»–дислокаций в шестигранной структуре. К сожалению, авторам неизвестны эксперименты, в которых бы исследовались скорости движения дислокаций в шестигранной структуре в зависимости от угла наклона траекторий к волновому вектору.

Во–вторых, можно предположить, что изначально заданные дислокации могли бы сойтись вместе, но этому помешало рождение в их окрестностях пар дислокаций в соседних модах, так как эти родившиеся дислокации образовали с изначально заданными дислокациями два двойных пенто–гепто–дефекта, которые также являются устойчивыми образованиями. Рождение дислокаций разрушило коридор рассинхронизма (см. рис. 6, д'), причем все три образовавшихся коридора не могут исчезнуть через аннигиляцию образующих их дислокаций, так как эти дислокации принадлежат разным модам.

В целом (за исключением одного случая из пяти), движения дислокаций проходили аналогично расчету [13]. Для случая начальной фазы $\theta_0=2\pi/3$, когда формировался практически прямой коридор рассинхронизма, нами был построен график зависимости расстояния между дефектами от времени [18]. Сближение дефектов происходит по закону, близкому к $r \sim 1/t$. Сблизившись, они образуют пенто–гепто–дефект. Некоторое время структура с дефектом остается стабильной, при этом дефекты, принадлежащие разным модам, совершают небольшие флуктуации, перемещаясь один относительно другого. В дальнейшем (на временах, больших времени проведения эксперимента) происходит разрушение структуры.

Заключение

Нами была изучена динамика двух дислокаций разных знаков, принадлежащих разным модам совершенной шестигранной структуры. Экспериментальное моделирование было проведено для пяти разных начальных фаз θ_0 . Для четырех из них траектории движения дислокаций качественно совпали с теоретическим расчетом [13]. В случае начальной фазы $\theta_0=\pi$ дислокации не притягивались с образованием пенто–гепто–дефекта, как это было в [13], а оставались практически неподвижными на протяжении всего эксперимента. При этом в области изначально заданных глобальных дислокаций происходило рождение пары локальных дислокаций разных знаков, принадлежащих другой моде. Вместе с родившимися дислокациями изначально заданные дислокации образовывали устойчивое связанное состояние типа 7–7–5–5, названное нами по

аналогии с пенто-гепто-дефектом двойным пенто-гепто-дефектом. Выяснено, что в отличие от численного эксперимента в области коридора рассинхронизма, по которому происходит движение дислокаций, могут рождаться пары дислокаций, зачастую существенно усложняющие процесс взаимодействия дислокаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 99-02-16493, и Международного центра фонда перспективных исследований в Нижнем Новгороде, грант № 99-2-02.

Библиографический список

1. *Koschmieder E.L.* Bénard cells and Taylor vortices. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
2. *Velarde M.G., Normand Ch.* // *Sci. Am.* 1980. Vol. 243. P. 79.
3. *Bragard J., Velarde M.G.* // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 1997. Vol. 22. P. 1.
4. *Bragard J., Velarde M.G.* // *J. Fluid Mech.* 1998. Vol. 368. P. 165.
5. *Ceriser P., Perez-Garcia C., Jamond C., Pantaloni J.* // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 35. P. 1949.
6. *Walden R.W., Ahlers G.* // *J. Fluid. Mech.* 1981. Vol. 109. P. 89.
7. *Ciliberto S., Pampaloni E., Perez-Garcia C.* // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61. P. 1198.
8. *Ciliberto S., Couillet P., Lega J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. P. 2370.
9. *Bodenschatz E., de Bruyn J.R., Ahlers G., Cannell D.S.* // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67. P. 3078.
10. *Vigil R.P., Ouyang Q., Swinney H.L.* // *Physica A.* 1992. Vol. 188. P. 1725.
11. *Perez-Garcia C., Cerisier P., Ocelli R.* Propagation in systems far from equilibrium / Ed. by J.E. Westfreid. Berlin: Springer-Verlag, 1988. P. 232.
12. *Cross M., Hohenberg P.* // *Rev. Mod. Phys.* 1991. Vol. 65. P. 851.
13. *Rabinovich M., Tsimring L.* // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 35.
14. *Rasenat S., Steinberg V., Rehberg I.* // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 42. P. 5998.
15. *Ezersky A.B., Ermoshin D.A., Kiyashko S.V.* // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51. P. 4411.
16. *Busse F.H.* // *Rep. Prog. Phys.* 1978. Vol. 41. P. 1929.
17. *Belliustin N.S., Kuznetsov S.O., Nuidel I.V., Yakhno V.G.* // *Neurocomputing.* 1991. Vol. 3. P. 231.
18. *Афенченко В.О., Езерский А.Б., Ермошин Д.А.* Динамика дислокаций в пространственно-периодических структурах // *Изв. РАН. Сер. Физ.* 1996. Т. 60, № 12. С. 146.

*Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород*

*Поступила в редакцию
после доработки*

*7.12.99
4.02.00*

DISLOCATION'S DYNAMICS IN HEXAGONAL LATTICES ARISING IN BÉNARD – MARANGONI CONVECTION

V.O. Afenchenko, A.B. Ezersky

It is shown in experiments that the penta-hepta-defect in a Bénard convective hexagonal lattice arises as a result of the attraction of two dislocations having opposite topological charges and belonging to different modes. It is elucidated that the rapprochement of dislocations occurs along a corridor connecting these topological charges. Inside the corridor large gradients of the field summed of phases of the modes organised into hexagonal structure are registered. It is shown that depending on the initial phase dislocations either attracted to each other or went toward boundaries. Comparison of dislocation's trajectories in experiment and numerical calculations is done.



Афенченко Владимир Олегович – родился в 1973 году в Горьком, Окончил Радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Лобачевского (1995). После окончания работает в ИПФ РАН, младший научный сотрудник. Область научных интересов – формирование структур, пространственная когерентность. Имеет 12 публикаций. E-mail: avo@hale.appl.sci-nnov.ru



Езерский Александр Борисович, доктор физико–математических наук, заведующий лабораторией Института прикладной физики РАН. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1976). Область научных интересов – гидродинамические неустойчивости, взаимодействие вихрей с акустическими волнами, формирование структур. Имеет более 100 публикаций. В соавторстве с М.И. Рабиновичем опубликована книга «Динамическая теория формообразования» (1998), в соавторстве с М.И. Рабиновичем и П. Уэйдманом – английский вариант этой книги – «The dynamics of patterns». World Scientific, 2000.



ОПТИЧЕСКИЙ ХАОС В ОДНОМОДОВОМ ЧАСТОТНО-СТАБИЛИЗИРОВАННОМ ЛАЗЕРЕ

Г.Г. Акчурин, А.Г. Акчурин

Исследованы сценарии перехода от стационарного состояния в режим генерации нерегулярных пульсаций выходной оптической мощности, которые могут возникать в одномодовом лазере с активной системой стабилизации частоты. В зависимости от таких управляющих параметров как коэффициент усиления обратной связи, превышение лазерного усиления над потерями, отношение однородной ширины линии к доплеровской, исследованы особенности перехода в режим динамического хаоса. Показана возможность возникновения хаотических режимов в лазерах с нелинейно поглощающей ячейкой, на основе которых реализуются международные эталоны длины.

Введение

Известно, что частота излучения одночастотного лазера, генерирующего на низшей поперечной моде определяется, в основном, частотой продольной моды «холодного» резонатора, так как эффекты «затягивания» и «выгаликивания» частоты, обусловленные линейной и нелинейной дисперсией активной среды, вызывают частотные сдвиги, достигающие $\delta\nu = 10^{-6} \div 10^{-8} \nu$ [1]. При изменении длины резонатора в пределах половины длины волны излучения $\lambda/2$ происходит частотная перестройка с ν_n -моды на ν_{n+1} , составляющая величину $\Delta\nu = c/2L$ (L – длина резонатора). Типичная величина частотной перестройки для газоразрядных лазеров может достигать сотен мегагерц и единиц гигагерц, зависит от ширины линии излучения и добротности резонатора и определяется уровнем превышения усиления над потерями. Вследствие дрейфа длины резонатора и соответствующей перестройки частоты генерации выходная мощность одночастотных лазеров может практически изменяться от максимума до нуля, поэтому в одночастотных лазерах для стабилизации частоты и, соответственно, мощности применяют активные системы с обратной связью. В таких системах обычно в качестве частотного дискриминатора используется провал Лэмба, возникающий в центре кривой зависимости выходной мощности от частоты генерации. Типичный вид зависимости выходной мощности от частоты генерации для доплеровски уширенной линии излучения и соответствующая функциональная схема стабилизации частоты одномодового лазера показаны на рис. 1, а. Ширина провала Лэмба, обусловленного взаимодействием встречных когерентных оптических волн в резонаторе с активными движущимися атомами, определяется временами жизни на лазерных уровнях, а также процессами столкновений атомов и достигает величин от десятков до сотен мегагерц. Характерное значение нестабильности

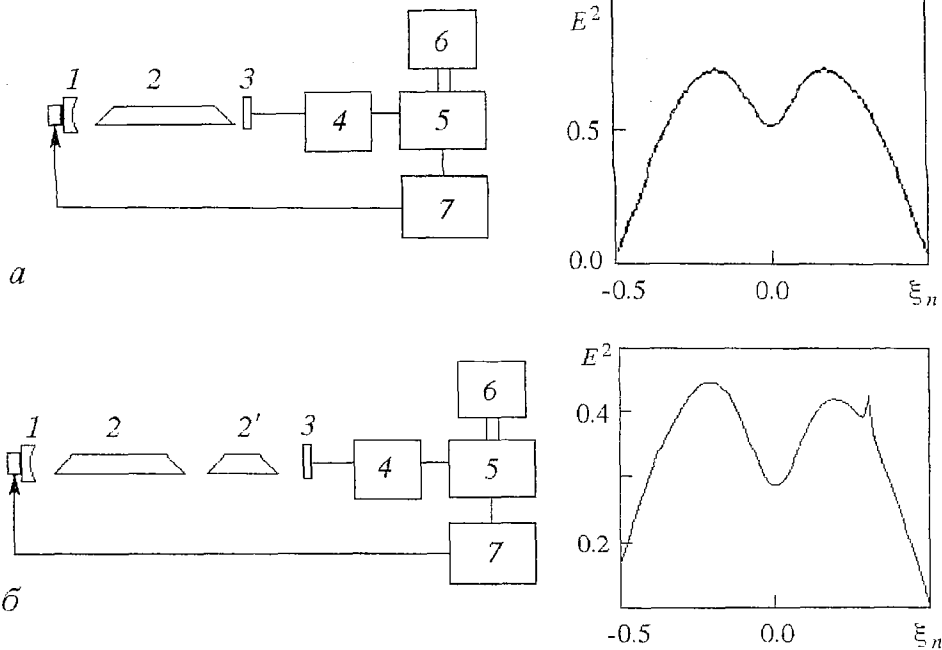


Рис. 1. Блок-схема одномодового частотно-стабилизированного лазера, в которой в качестве частотного репера используется провал Лэмба (а) и инвертированный провал Лэмба (б), а также соответствующие зависимости выходной оптической мощности лазера E^2 от нормированной частотной расстройки ξ_n ; 1 – лазерное зеркало на пьезокорректоре, 2 – активный элемент, 2' – нелинейно поглощающая ячейка J_2 , 3 – выходное зеркало резонатора, 4 – фотодетектор, 5 – цифро-аналоговый и аналогово-цифровой преобразователь, 6 – персональный компьютер, 7 – усилитель

частоты, например, в He-Ne-лазере с $\lambda=632.8$ нм ($\nu=473.61254$ ТГц) достигает единиц мегагерц для систем стабилизации, использующих провал Лэмба [1,2].

В настоящее время международный эталон длины реализован на He³-Ne²⁰-лазере ($\lambda=632.991399$ нм) с внутренней йодной (J_2^{127}) нелинейно поглощающей ячейкой (рис. 1, б). Кратковременная нестабильность частоты в такой системе может достигать $10^{-11} \div 10^{-13}$ [1].

Для активного управления частотой генерации используются компьютеры с цифро-аналоговыми преобразователями, в которых в зависимости от их быстродействия происходит определенная временная задержка сигнала обратной связи. Кроме того, для повышения уровня стабильности частоты в таких системах стараются увеличить величину сигнала обратной связи, подаваемого на корректор зеркала лазерного резонатора. При этом в описании ряда экспериментов указывалось на возникновение при определенных условиях нестационарных режимов, когда в системе возбуждались хаотические пульсации выходной мощности и соответственно возникала шумовая девиация частоты.

Известно, что нелинейные уравнения Максвелла – Блоха для когерентного оптического поля, поляризации и населенности, описывающие динамические процессы генерации в одномодовых лазерах в автономном режиме для медленно меняющихся амплитуд, формально совпадают с уравнениями Э. Лоренца, посвященными анализу процессов термоконвекции в атмосфере [3]. В этих работах впервые методами численного анализа удалось обнаружить хаотические режимы в нелинейных детерминированных системах [4–6]. Однако, как показали численные и аналитические исследования лазерных нелинейных динамических уравнений, для экспериментального наблюдения режимов динамического хаоса в одномодовых лазерах необходимо, чтобы ширина моды резонатора превосходила ширину линии люминесценции активной среды (низкодобротный резонатор), и при

этом превышение усиления над потерями должно быть очень значительным [7,8]. В традиционно используемых газоразрядных или твердотельных лазерах эти условия практически трудновыполнимы. Лишь целенаправленный поиск активных сред и резонатора, удовлетворяющих необходимым условиям возникновения сложных непериодических колебаний интенсивности излучения, предсказанных динамической теорией одномодового лазера, позволил наблюдать хаотические пульсации мощности излучения в He–Xe газоразрядном лазере с неоднородно уширенной линией и в молекулярном лазере на NH_3 с однородно уширенной линией с лазерной оптической накачкой [9,10]. Особенности возникновения автомодуляционных и хаотических явлений в лазерах с нелинейно поглощающей ячейкой исследовались в [11–13]. Менее жесткие требования к активной среде и резонатору, определяющие условия возникновения динамического хаоса в лазерах, реализуются при модуляции параметров (неавтономный режим). В частности, экспериментально наблюдались режимы перехода от регулярных колебаний к хаотическим через последовательность бифуркаций удвоения периода при изменении таких управляющих параметров, как частота модуляции в области релаксационного резонанса, глубина модуляции и частотная расстройка резонатора в CO_2 -лазере с длиной волны 10.6 мкм [14,15]. Достаточно детально условия возникновения динамического хаоса в одномодовых лазерах обсуждаются в обзоре [16].

Для используемых в экспериментальных установках и измерительных комплексах одномодовых частотно–стабилизированных лазеров видимого или инфракрасного диапазона указанные механизмы возникновения нерегулярных пульсаций мощности не реализуются. (Лазеры оптимизируются для получения максимальной выходной мощности, при этом ширина полосы резонатора, определяемая, в основном, коэффициентом отражения зеркал, существенно меньше ширины линии усиления.)

По–видимому, механизм возникновения таких нерегулярных пульсаций выходной мощности в одномодовых частотно–стабилизированных лазерах связан с проявлением нелинейных динамических процессов в оптических системах с запаздывающей обратной связью.

Особенности динамических режимов в частотно–стабилизированных лазерах

Известно, что в нелинейных оптических системах с обратной связью возможно возникновение сложных динамических режимов, таких как периодические осцилляции, самопульсации и оптический хаос [17,18].

Один из механизмов неустойчивости обнаружен Икедой и проанализирован в [19] в приближении, когда характерное время отклика активной среды значительно короче, чем время обхода светом дисперсионного кольцевого резонатора. В настоящее время существует достаточно много конкретных оптоэлектронных устройств, демонстрирующих этот тип неустойчивости и характерный сценарий перехода в оптический хаос. Например, гибридное устройство, в котором излучение лазера проходит через оптическую систему, состоящую из поляризатора, анализатора и электрооптического кристалла между ними. На кристалл подается сигнал обратной связи, пропорциональный выходной оптической мощности [20]. В зависимости от уровня обратной связи наблюдается сценарий перехода в режим динамического хаоса через последовательность удвоения периода, определяемого временем задержки сигнала, экспериментально осуществляемой с помощью компьютера.

Оптические неустойчивости могут возникать и в лазерных системах с запаздывающей обратной связью [21–25]. Бистабильность и хаотические режимы были обнаружены при исследовании динамики полупроводниковых лазеров с быстрой оптической обратной связью, когда временные задержки меньше времени установления поля в резонаторе или времени жизни носителей [22,23]. Для анализа

использовались уравнения Максвелла – Блоха в приближении безинерционности поляризации и с учетом временного запаздывания. Особенности в динамическом поведении возникают, когда время задержки сравнимо с периодом релаксационных колебаний, природа которых обусловлена процессом взаимодействия поля и инверсной среды, обладающих различными временами релаксации. Следует отметить, что механизмы динамических неустойчивостей в лазерных системах с запаздывающей обратной связью определяются соотношениями между временем задержки в цепи обратной связи и характерными временами релаксационных процессов в активной лазерной среде и резонаторе [21,24]. Характерное время релаксации оптического поля в лазерном резонаторе определяется его добротностью и коэффициентом усиления. Типичное значение времени релаксации – от единиц микросекунд до сотен наносекунд для газовых и твердотельных лазеров и единицы пикосекунд для полупроводниковых лазеров. Возникновение неустойчивостей в лазерах с отрицательной обратной связью исследовалось в работах группы Самсона [21]. Анализировались скоростные уравнения для плотности излучения и инверсной населенности в модели лазера с модулятором потерь в резонаторе, на который поступает сигнал обратной связи, пропорциональный выходной мощности лазера. Динамические режимы протекали в масштабах времени, много больших времени двойного обхода резонатора, но меньших времени установления инверсной населенности. Возможность возникновения режимов динамического хаоса в такой реальной схеме на основе одномодового молекулярного CO₂-лазера с электрооптическим модулятором потерь в резонаторе была экспериментально установлена в работе [25].

Нами исследовалась модель одномодового лазера с запаздывающей обратной связью, когда сигнал, пропорциональный продетектированному выходному лазерному излучению, перестраивал частоту генерации лазера через изменение длины резонатора. Для анализа использовались нелинейные одномодовые динамические уравнения Лэмба, описывающие дипольное взаимодействие оптического поля в резонаторе с ансамблем двухуровневых атомов и имеющие следующий вид [26]:

$$dE/dt = \alpha E - \beta E^3, \quad (1)$$

где E – амплитуда электрической компоненты лазерного поля в резонаторе, α – разность ненасыщенного коэффициента усиления и потерь, β – коэффициент насыщения собственным полем.

Когда время задержки в цепи обратной связи много больше времени установления поля в активном резонаторе, определяемого величиной 2α (что может быть в реальной компьютерно-управляемой лазерной системе связано с временами оцифровки в АЦП и ЦАП), а оптоэлектронная обратная связь использует дисперсионную зависимость лазерной мощности от настройки резонатора, то в зависимости от степени нелинейности в такой системе возможно возникновение режима нерегулярных пульсаций и динамического хаоса. При указанных условиях, когда переходные процессы, связанные с временем установления поля в активном резонаторе закончились, динамические уравнения (1) могут быть приведены к разностным уравнениям с дискретным временем, масштаб которого задается величиной задержки. В случае неоднородно уширенной линии (движущиеся атомы), например в газоразрядном лазере, явный вид одномерного разностного уравнения может быть представлен следующим образом:

$$\xi_{n+1} = K\alpha(\xi_n)/\beta(\xi_n) = [\chi \exp(-\xi_n^2) - 1]K/\{B\chi[1+L(\xi_n)]\}, \quad (2)$$

где $\xi_n = 2(\ln 2)^{1/2}(\nu_n - \nu_0)/\Delta\nu_D$ – нормированная частотная расстройка, ν_n – частота генерации, ν_0 – частота, соответствующая центру линии атомного перехода, $\Delta\nu_D$ – доплеровская ширина линии излучения; $\alpha(\xi_n) = \Delta\nu_R(\chi \exp(-\xi_n^2) - 1)/2$ – разность ненасыщенного коэффициента усиления и потерь в резонаторе; $\beta(\xi_n) = B \Delta\nu_R \chi (1 + L(\xi_n))/2$

– коэффициент насыщения собственным полем излучения; $L(\xi_n)=[1+(\xi_n/\eta)^2]^{-1}$ – лоренцевская функция; $\Delta\nu_R$ – ширина полосы резонатора; χ – относительное возбуждение (параметр превышения усиления над потерями); $\eta=2\gamma(\ln 2)^{1/2}/\Delta\nu_D$ – нормированная лоренцевская ширина спектральной линии; $B=\wp^2/(8\gamma_a\gamma_b h^2)$ – параметр, определяющий насыщение рабочего перехода, \wp^2 – квадрат матричного элемента дипольного момента перехода, γ_a, γ_b – ширина верхнего и нижнего лазерных уровней, соответственно; K – коэффициент обратной связи (лазерное излучение детектируется фотоприемником и сигнал, пропорциональный выходной оптической мощности $(E_n)^2=\alpha(\xi_n)/\beta(\xi_n)$, подается на пьезокорректор зеркала резонатора, изменяющий его длину). Уравнения (2) решались итерационным методом для дискретных моментов времени $t_n=n\tau$ (τ – время запаздывания).

Уравнения (2) получены в так называемом доплеровском пределе, когда лоренцевская ширина линии, обусловленная спонтанным излучением и столкновениями атомов, значительно меньше, чем доплеровская (типичный случай для He–Ne–лазера, генерирующего на красной линии с $\lambda=633$ нм или инфракрасной с $\lambda=1.15$ мкм).

Результаты исследования динамических режимов генерации в одномодовом лазере с неоднородной линией излучения (движущиеся атомы) при наличии запаздывающей обратной связи, изменяющей длину резонатора, представлены на рис. 2. Показаны временная реализация, фазовый портрет и спектр мощности.

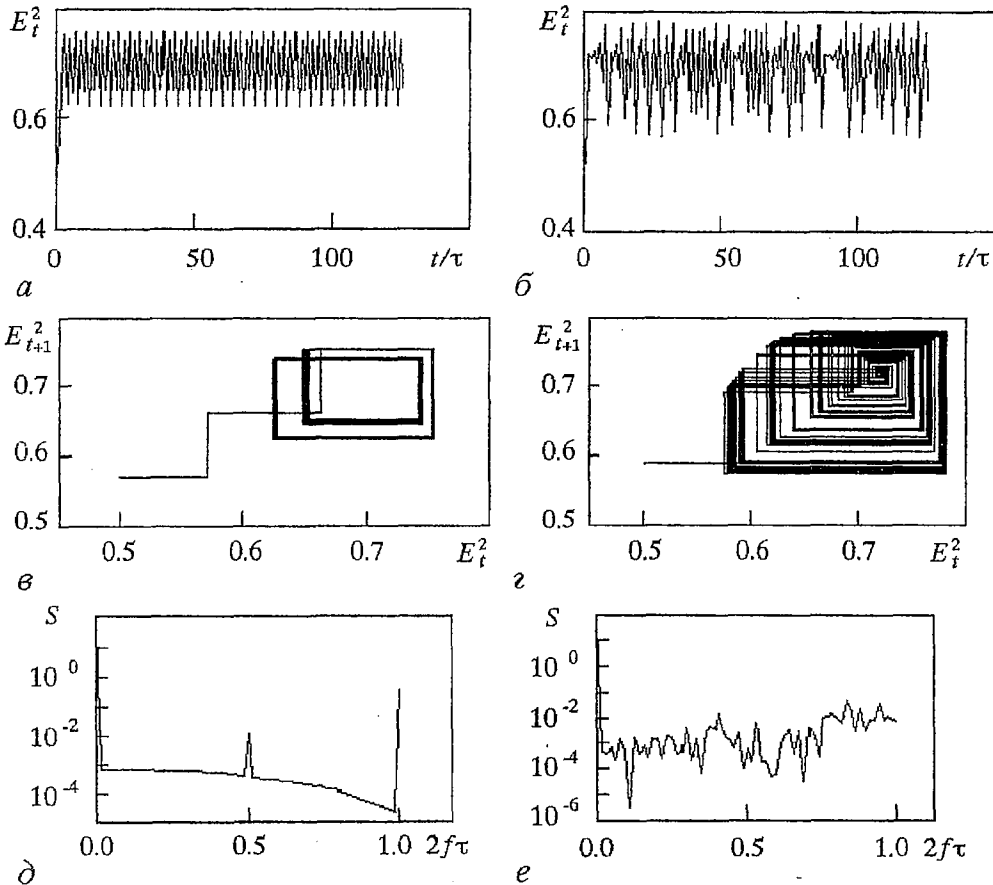


Рис. 2. Сценарии перехода в режим динамического хаоса через последовательность бифуркаций удвоения периода для неоднородно уширенного одночастотного лазера при изменении коэффициента обратной связи: $K=1.14$ (а, в, д – режим удвоения периода); $K=1.18$ (б, г, е – режим хаотических колебаний излучения лазера); $\chi=1.2$, $\eta=0.1$; а, б – временная реализация (ось абсцисс нормирована на время задержки в цепи обратной связи τ); в, г – фазовый портрет; д, е – спектр мощности

Управляющими параметрами в таких системах являются усиление в лазере или потери в резонаторе, давление газа в активном элементе и величина обратной связи. Численные эксперименты показали, что типичный переход от устойчивого режима в режим динамического хаоса осуществляется через последовательность бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума [26]. При этом период определяется временем задержки в цепи обратной связи. Расчеты корреляционной размерности, основанные на алгоритме Грассбергера – Прокаччия, показали, что в режиме развитого динамического хаоса размерность может составлять 1.23.

Карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров (χ , K) показана на рис. 3, а. В области малых значений превышения усиления над потерями наблюдаются особенности, связанные с сильным изменением формы кривой зависимости мощности от частоты генерации при исчезновении провала Лэмба. Динамические режимы чувствительны также к величине давления, определяющего частотную ширину провала Лэмба и, соответственно, степень нелинейности, что нетрудно видеть из рис. 3, б.

Следует отметить, что при экспериментальной реализации систем стабилизации частоты излучения одноимодовых газовых лазеров применяются также модуляционные методы, когда в качестве частотного репера используется не провал Лэмба, а его производная по частоте. Как показали проведенные нами расчеты, и в этом случае могут реализоваться хаотические режимы, причем при меньших значениях коэффициента обратной связи.

Для твердотельных или полупроводниковых лазеров с внешним резонатором с однородной линией излучения также могут наблюдаться режимы динамического хаоса в системах с запаздывающей обратной связью. При этом разностные уравнения имеют вид

$$\xi_{n+1} = [L(\xi_n)\chi - 1]K/[BL^2(\xi_n)\chi]. \quad (3)$$

Результаты расчета в соответствии с отображением (3) показаны на рис. 4. Хотя сценарий перехода в режим динамического хаоса при изменении усиления или величины обратной связи также осуществляется через последовательность бифуркаций удвоения периода, степень нелинейности для зависимости мощности от частоты генерации в данном случае существенно меньше, чем при провале Лэмба, и хаотические режимы наблюдаются при больших значениях параметра превышения усиления над потерями и коэффициента обратной связи.

Особый практический интерес представляет случай лазера с нелинейно поглощающей ячейкой. Детально проанализированы динамические режимы для частотно-стабилизированного гелий-неонового лазера с йодной ячейкой поглощения. В настоящее время в таких эталонах получена максимальная кратковременная стабильность частоты. Параметры для расчета удовлетворяют

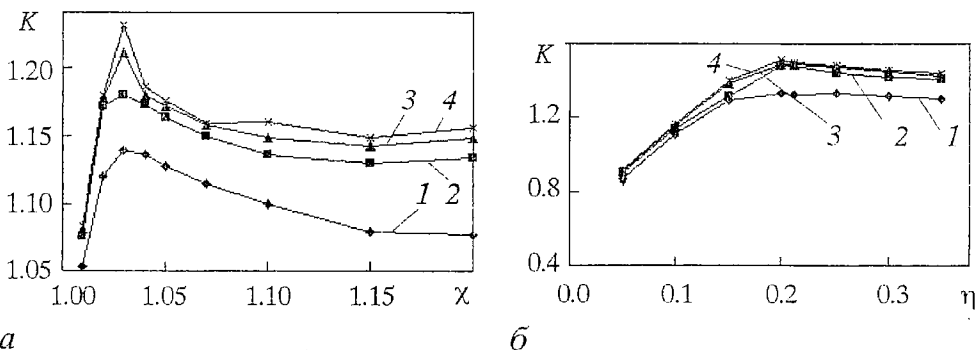


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы, характеризующие переход в режим динамического хаоса через последовательность удвоения периода для неоднородно уширенного одночастотного лазера на плоскости параметров (χ , K) при $\eta=0.1$ (а); (η , K) при $\chi=1.2$ (б). 1 – порог возникновения периодических колебаний, 2 – порог режима удвоения периода, 3 – порог режима учетверения периода, 4 – возникновение хаотических колебаний

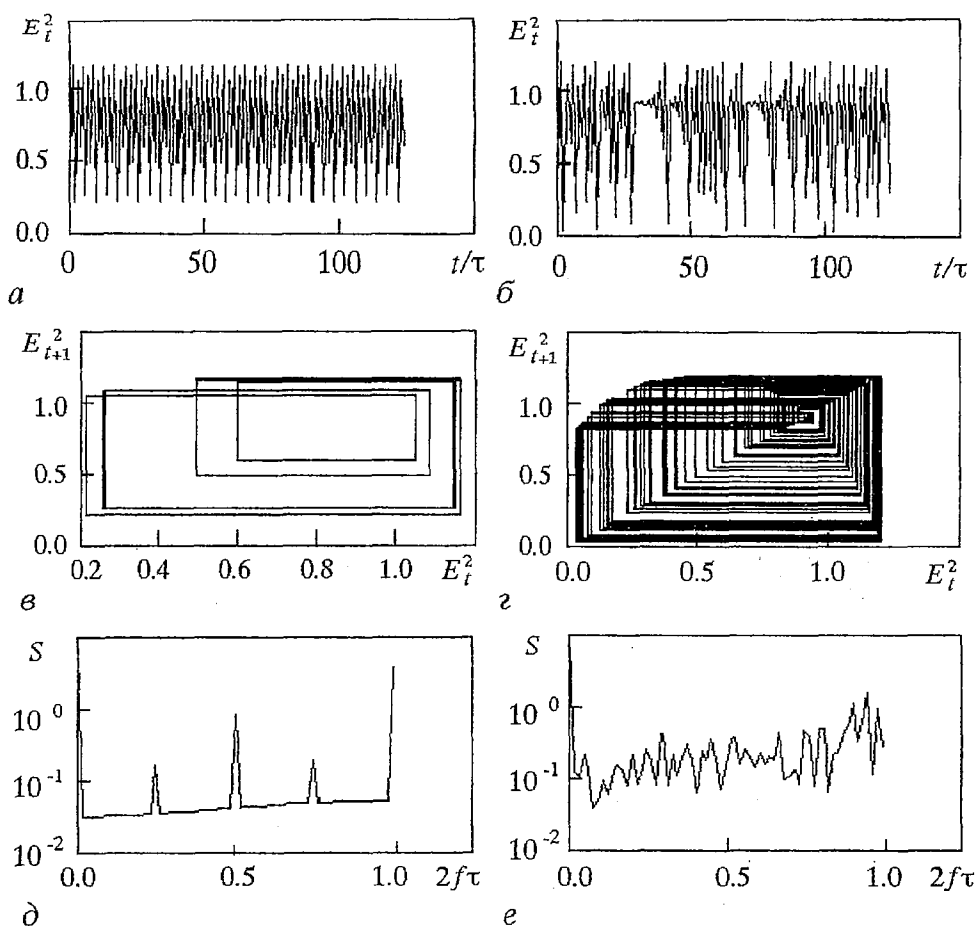


Рис. 4. Сценарий перехода в режим динамического хаоса через последовательность бифуркаций удвоения периода для однородно уширенного одночастотного лазера при изменении коэффициента усиления обратной связи: $K=1.16$ ($a, в, д$ – режим учетверения периода); $K=1.2$ ($б, г, е$ – режим хаотических колебаний); $\chi=1.5, \eta=1$; $a, б$ – временная реализация; $в, г$ – фазовый портрет; $д, е$ – спектр мощности

условиям эксперимента, при этом контрастность резонансного пика поглощения не превышает нескольких процентов, а ширина меньше мегагерца. Разностное уравнение для лазера с неоднородной линией усиления с нелинейно поглощающей ячейкой имеет следующий вид

$$\xi_{n+1} = \frac{\chi_L \exp[-(\xi_n)^2] - \chi_a \exp[-(\xi_n - 0.3)^2] - 1}{\chi_L B_L [1 + \eta_L^2 / (\eta_L^2 + \xi_n^2)] - \chi_a B_a [1 + \eta_a^2 / (\eta_a^2 + (\xi_n - 0.3)^2)]} K, \quad (4)$$

где χ_L, χ_a – относительное возбуждение в активной и поглощающей ячейке; η_L, η_a – нормированная лоренцевская ширина линии усиления и поглощения; B_L, B_a – параметр насыщения усиливающего и поглощающего перехода.

Вследствие очень сильной нелинейности частота генерации захватывается на склоне резонансного пика, и происходит жесткий скачкообразный переход в хаотический режим. На рис. 5 показана зависимость мощности от частоты генерации, временная реализация, фазовый портрет, спектр мощности.

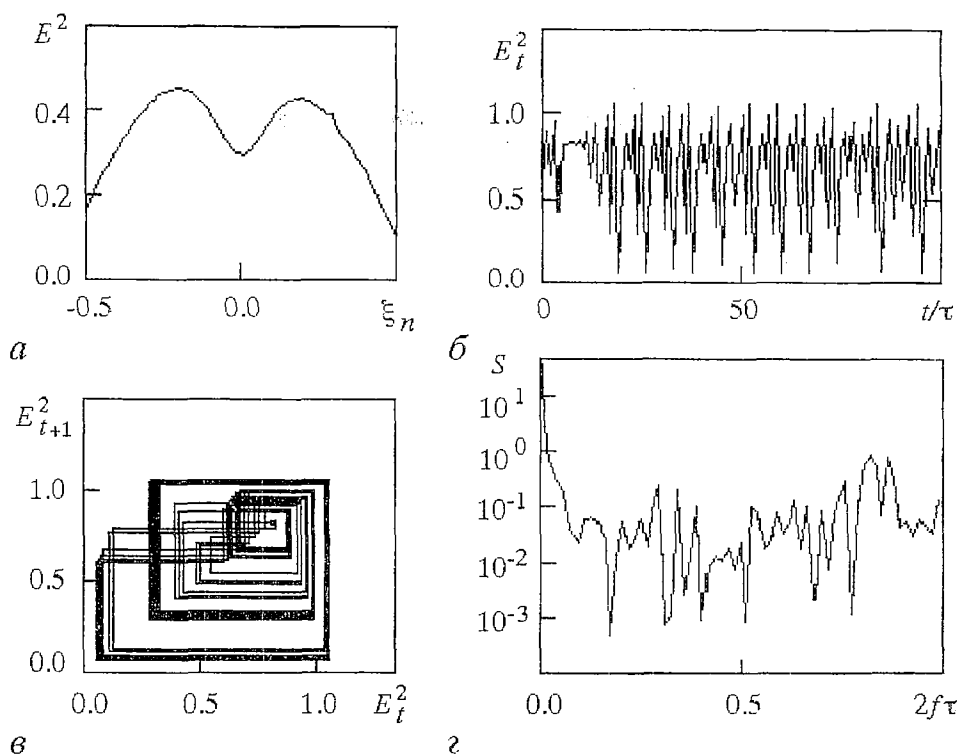


Рис. 5. Зависимость выходной оптической мощности от частоты генерации для одномодового He-Ne-лазера с нелинейно поглощающей J_2 -ячейкой (а), и режим хаотических пульсаций мощности при следующих значениях управляющих параметров: $K=0.7$, $\chi_L=1.5$, $\chi_a=0.1$, $\eta_L=0.1$, $\eta_a=0.02$; б – временная реализация; в – фазовый портрет; г – спектр мощности

Заключение

Таким образом проведенные численные эксперименты позволили установить, что в одномодовых лазерах с активной системой стабилизации частоты необходимо тщательно следить за такими управляющими параметрами, как усиление в системе цепи обратной связи и степень нелинейности в частотном дискриминаторе активного или пассивного элемента лазера, иначе частотно-стабилизированный лазер может превратиться в оптический генератор шума.

Работа поддержана программой РФФИ Ведущие научные школы (проект № 96-15-96389).

Библиографический список

1. Летохов В.С., Чеботаев В.П. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии. М.: Наука, 1975; Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения. М.: Наука, 1989.
2. Optics and Optical Instruments. Catalog of Edmund Scientific Co. 1998. P. 202.
3. Haken H. Analogy between higher instabilities in fluids and laser // Phys. Lett. A. 1975. Vol. 53, №1. P. 77.
4. Grasiuk A.Z., Oraevsky A.N. Transient processes in a molecular-beam maser // Proc. IV Int. Cong. of Microwave Tubes. 1962. September. Scheveningen. Holland. P. 446.
5. Грасюк А.З., Ораевский А.Н. Переходные процессы в молекулярном генераторе // РЭ. 1964. Т.9, №3. С. 524.

6. Лоренц Э. Детерминированное неперiodическое течение // Странные аттракторы / Пер.с англ. под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 88 с.

7. Ораевский А.Н. Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130.

8. Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А., Григорьева Е.В. Регулярная и хаотическая динамика лазеров // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1987. Т. 53, № 6. С. 1076.

9. Gioggia R.S., Abraham N.B. Routes to chaotic output from a single-mode dc-excited laser // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51, № 8. P. 650.

10. Abraham N.B., Dangoisse D., Glorieux P., Mandel P. Observation of un-damped pulsation in a low-pressure far-infrared laser and comparison with a simple theoretical model // JOSA-B. 1985. Vol. 2. P. 23.

11. Arimondo E., Casagrande F., Lugiato L.A., Glorieux P. // Appl. Phys. B. 1983. Vol. 30, № 2. P. 57.

12. Самсон А.М., Котомцева Л.А., Григорьева Е.В. Динамический хаос в лазере с просветляющим фильтром и его размерность // Квантовая электроника. 1989. Т. 16, № 2. С. 222.

13. Tatarkova S.A., Tuchin V.V. Multistability and chaos in laser with saturable absorber // Laser Physics. 1992. Vol. 2, № 4. P. 482.

14. Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G.P., Tredicce J.R. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability and turbulence in a Q-switched gas laser // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, № 17. P. 1217.

15. Акчурун Г.Г. Экспериментальное исследование перехода в хаос в CO₂-лазере при модуляции добротности и в He-Ne (0.63, 1.15, 3.39 мкм) в автономном режиме // Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по нелинейной и когерентной оптике. Москва, 1985. С. 304.

16. Ораевский А.Н. Динамика одномодовых лазеров и динамический хаос // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 1. С. 3.

17. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. М.: Мир, 1988.

18. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных системах. М.: Наука, 1997.

19. Ikeda K., Dsibo H. Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, P. 709.

20. Gibbs H.M., Hopf F.A., Kaplan D.L., Shoemaker R.L. Observation of chaos in optical bistability // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, P. 474.

21. Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А. Автоколебания в лазерах. Минск, 1990.

22. Lang R., Kabayshi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE J. Quantum Electronics. 1980. Vol. 16. P. 347.

23. Mork J., Tromborg B., Christiansen P. Bistability and low-frequency fluctuations in semiconductor laser with optical feedback // IEEE J. Quantum Electronics. 1988. Vol. 24, № 2. P. 123.

24. Акчурун Г.Г., Мельников Л.А. Лазерный генератор шума. А.С. № 1441215 СССР. 1988.

25. Arecchi F.T., Gadomski W., Meucci R. Generation of chaotic dynamics by feedback on a laser // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 4, № 2. P. 1617.

26. Lamb Jr. W.E. Theory of an optical maser // Phys. Rev. A. 1964. Vol. 134, № 6. P. 1429.

27. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 3.02.2000
после доработки 17.03.2000

OPTICAL CHAOS IN A SINGLE-MODE FREQUENCY-STABILIZED LASER

G.G. Akchurin, A.G. Akchurin

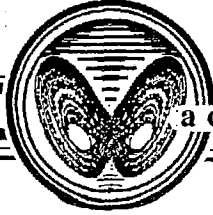
Scenario of transition from stationary state to regime of generation with irregular pulsations of output optical power is explored, which can arise in a single-mode laser with active system of frequency stabilization. Particularities of transition to dynamic chaos mode are explored, depending on such control parameters as a feedback gain factor, ratio of laser gain to loss, ratio of homogeneous line width to Doppler's one. Possibility of chaotic behaviour arising in lasers with nonlinear-absorbing cell is shown, on the basis of which international standards of length are realized.



Акчури́н Гари́ф Гази́зови́ч – родился в Бресте (1949). Окончил Саратовский государственный университет (1971). Работал в НИИ механики и физики СГУ. Защитил кандидатскую диссертацию по исследованию динамических и флуктуационных процессов в многоволновых газоразрядных лазерах (1979). В настоящее время – доцент кафедры оптики СГУ, докторант. Область научных интересов: динамические и нелинейные процессы в полупроводниковых, твердотельных и газоразрядных лазерах; пикосекундная оптоэлектроника и когерентные оптические методы диагностики в микроэлектронике и медицине. Автор (соавтор) более 50-ти публикаций и 10-ти авторских свидетельств и патентов. Член международного оптического общества SPIE и BIOS.



Акчури́н Алекса́ндр Гари́фови́ч – родился в Саратове (1982). Студент факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика и пространственно-временной хаос в оптических и биологических системах. Соавтор 2-х публикаций в SPIE Proceedings и 4-х докладов на международных конференциях.



О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ФРОБЕНИУСА – ПЕРРОНА ДЛЯ СДВИГОВ БЕРНУЛЛИ

А.Ф. Голубенцев, В.М. Аникин, С.С. Аркадакский

Проводится разложение решений уравнения Фробениуса – Перрона для сдвигов Бернулли и связанных с ними обратимыми дифференцируемыми преобразованиями хаотических отображений в ряд по собственным функциям одноименного оператора, и на этой основе анализируется процесс эволюции вероятностных распределений. Отмечена роль показателя Ляпунова как меры скорости сходимости решений к инвариантному распределению. Даны примеры элементов нуль-пространства оператора Фробениуса – Перрона.

Введение

Преобразования, определяющие представление числа в G -ичной системе (сдвиги Бернулли)

$$x_{n+1} = Gx_n \text{ mod } 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $G \geq 2$ – целая константа, являются важным объектом эргодической теории и ее приложений [1]. В частности, на основе (1) строятся мультипликативные датчики псевдослучайных чисел Д. Лемера [2]¹. Посредством нелинейных дифференцируемых обратимых замен переменных вида

$$x^* = h(x), \quad x = h^{-1}(x^*), \quad x \in (0, 1), \quad x^* \in (h(0), h(1)) \quad (2)$$

разностное уравнение (1) переводится в топологически эквивалентные (сопряженные) отображения

$$x^*_{n+1} = h(Gh^{-1}(x^*_n) \text{ mod } 1), \quad (3)$$

характеризуемые непрерывной инвариантной плотностью

$$\rho^*(x^*) = |dh^{-1}(x^*)/dx^*|. \quad (4)$$

Таким образом, отображение (1) может рассматриваться как базисное для построения хаотических генераторов с вероятностными законами, отличными от равномерного распределения и заданными на разнообразных интервалах числовой

¹ А. Реньи [3] изучал случай нецелых G в контексте рассмотрения f -представлений действительных чисел.

оси (см., например, [4]). С.Улам относил построение и исследование сопряженных отображений к числу значимых математических задач [5]².

Ниже рассматриваются некоторые полезные в практических приложениях особенности операторов и уравнений Фробениуса – Перрона, описывающих эволюцию вероятностных распределений под действием отображений (1) и (3).

1. Собственные функции и собственные числа оператора Фробениуса – Перрона

Оператор Фробениуса – Перрона определяют из интегральных уравнений, выражающих сохранение при преобразованиях (1) и (3) меры Лебега (меры, непрерывной относительно нее) [7], или эквивалентных функциональных уравнений (см., например, [8]). Для сопряженных отображений оператор Фробениуса – Перрона P^* можно также записать, исходя из вида этого оператора для базисного отображения [7]

$$P^* = P_{h^{-1}} P P_h, \quad (5)$$

где введены операторы

$$P_h \varphi^* = \varphi^*(h(x)) / \rho^*(h(x)), \quad \varphi^* \in L^1(h(0), h(1)),$$

$$P_{h^{-1}} \varphi = \varphi(h^{-1}(x^*)) \rho^*(h^{-1}(x^*)), \quad \varphi \in L^1(0, 1).$$

Для сдвига Бернулли (1) оператор Фробениуса – Перрона имеет вид [7]

$$P\varphi(x) = (1/G) \sum_{p=0}^{G-1} \varphi((p+x)/G), \quad (6)$$

а для сопряженного отображения (3) он согласно (5) записывается в виде

$$P^* \varphi^*(x^*) = (\rho^*(x^*)/G) \sum_{p=0}^{G-1} \varphi^*(h((p+h^{-1}(x^*))/G)) / \rho^*(h((p+h^{-1}(x^*))/G)). \quad (7)$$

Если $P1=1$, то $P^* \rho^*(x^*) = \rho^*(x^*)$.

Решение спектральной задачи (собственные функции $\Psi_k(x)$ и собственные числа Λ_k) для оператора (6) известно [9]

$$\Psi_k(x) = B_k(x), \quad \Lambda_k = 1/G^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $B_k(x)$ – полином Бернулли степени k . Результат (8) в работе [9] получен на основе соотношения вида оператора (6) с теоремой умножения для полиномов Бернулли [10].

Продемонстрируем прием решения спектральной задачи, который основан на определении результата действия оператора Фробениуса – Перрона на функцию, являющуюся *производящей* для собственных функций эволюционного оператора. В рассматриваемом случае такой функцией является производящая функция для полиномов Бернулли

$$B(x, t) = te^{xt} / (e^t - 1) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) t^n / n!, \quad |t| < 2\pi. \quad (9)$$

Итак, действуя (по переменной x) оператором (6) на функцию (9), получим

² Наряду со сдвигами Бернулли при построении сопряженных отображений весьма эффективно использование в качестве базисных и таких кусочно-линейных отображений, как, например, пирамидальное и аддитивное [2]. Достаточно вспомнить, что знаменитое отображение Улама – фон Неймана $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$, $x_n \in (0, 1)$ топологически эквивалентно кусочно-линейному пирамидальному отображению. Сопряженные разностные схемы, генерирующие хаос, используются при моделировании в различных областях естествознания (см., например, [6]).

$$\begin{aligned}
 PV(x,t) &= t/(e^t-1) \sum_{p=0}^{G-1} \exp((p+x)t/G) = (t/G) \exp(xt/G) / [\exp(t/G) - 1] = \\
 &= B(x,t/G) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (B_n(x)/G^n) t^n/n!.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Отсюда непосредственно и следует решение (8) спектральной задачи для оператора Фробениуса – Перрона сдвигов Бернулли³.

Производящая функция для собственных функций сопряженного отображения

$$V^*(x^*,t) = \rho^*(x^*)B(h^{-1}(x^*),t)$$

дает, естественно, решение спектральной задачи в форме

$$\Psi_k^*(x^*) = \rho^*(x^*)B_k(h^{-1}(x^*)), \quad \Lambda_k = 1/G^k \tag{11}$$

(собственные числа Λ_k при обратимых преобразованиях являются инвариантами). Значения собственных чисел определяются величиной G в базисном отображении (6). Отображения с различными значениями G обладают одним и тем же набором собственных функций. Собственное значение $\Lambda_0=1$ отвечает инвариантной плотности.

2. Разложение решений уравнения Фробениуса – Перрона в ряды по собственным функциям. Анализ сходимости к инвариантной плотности

Предположим, что на аттракторе отображения (1) задано некоторое начальное вероятностное распределение $\rho_0(x)$, отличное от инвариантного. Сопряженному отображению (3) будет соответствовать начальное распределение $\rho_{0^*}^*(x^*) = \rho_0(h^{-1}(x^*))\rho^*(x^*)$. Проанализируем эволюцию «нестационарных» (то есть отвечающих n -й итерации) плотностей

$$\rho_n(x) = P^n \rho_0(x), \quad x \in (0,1),$$

$$\rho_n^*(x^*) = P^{*n} \rho_{0^*}^*(x^*), \quad x^* \in (h(0), h(1)),$$

происходящую под действием соответственно операторов (6) и (7). На самом деле можно ограничиться рассмотрением эволюции нестационарных плотностей к инвариантному распределению лишь для *базисного* распределения в силу следующего из (5) равенства норм интегрируемых функций

$$\|P^{*n} \rho_{0^*}^*(x^*) - \rho^*(x^*)\|_{L^1(h(0), h(1))} = \|P^n \rho_0(x) - 1\|_{L^1(0,1)}.$$

При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n \rho_0(x) - 1\| = 0,$$

так как операторы (6) и (7) обеспечивают сходимость к инвариантным распределениям для *любой* начальной плотности $\rho_0(x) \in L^1(0,1)$ [7]. Однако ответ на вопрос о *скорости* такой сходимости не всегда является очевидным. Чтобы до какой-то степени осветить его, мы рассмотрим эволюцию начального распределения, представленного в виде ряда по собственным функциям оператора Фробениуса – Перрона. Коэффициенты такого разложения следует искать с учетом того факта, что полиномы Бернулли не образуют ортогональной системы функций. Тем не

³ Авторами найдены производящие функции для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса, отвечающего различным обобщениям пирамидального отображения («пилы» с произвольным числом «зубьев»), и на этой основе определены решения соответствующих спектральных задач. Пример с отображением Бернулли здесь рассматривается как методический и тестовый.

менее, такое разложение для вполне определенного класса начальных распределений возможно. Оно базируется на формуле суммирования Эйлера – Маклорена [11] и требует знания значений производных разлагаемой функции в граничных точках 0 и 1

$$\rho_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k B_k(x), \quad (12)$$

где $C_k = [\rho_0^{(k-1)}(1) - \rho_0^{(k-1)}(0)]/k!$. Применяя преобразования координат (и, соответственно, плотностей), получим разложение начальной плотности для сопряженного отображения

$$\rho^*_0(x^*) = \rho^*(x^*) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Psi^*_k(x^*)/k!. \quad (13)$$

Таким образом, посредством (12)–(13) начальная плотность распределения представляется в виде суммы инвариантного распределения и некоторого его «возмущения»⁴.

Для сходимости рядов (12) – (13) необходимо и достаточно [11], чтобы разлагаемая функция являлась целой порядка 1 и типа, меньшего чем $2\pi^5$. Поэтому при использовании (12) – (13) начальные распределения необходимо задавать в виде, скажем, полиномиальных аппроксимаций (при этом на скорость сходимости будут, очевидно, влиять *величины коэффициентов* полинома) или в форме целых функций, включающих, в частности, дифференцируемые элементы нуль–пространства линейного оператора эволюции (если, конечно, они известны!).

Рассмотрим результат n -кратного действия оператора (6) на разложение (12)

$$\rho_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k B_k(x)/G^{kn}. \quad (14)$$

Аналогично представляется нестационарная плотность для сопряженного отображения при действии на (13) оператора (7)

$$\rho^*_n(x^*) = \rho^*(x^*) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Psi^*_k(x^*)/G^{kn}. \quad (15)$$

Соотношения (14) – (15) иллюстрируют эффект, достигаемый повторением действия оператора Фробениуса – Перрона на нестационарную плотность, – подавление (за счет увеличивающихся степеней числа $G \geq 2$, стоящего в знаменателе) в разложениях по собственным функциям всех членов в суммах, начиная с $k \geq 1$. «Интенсивность» такого подавления возрастает с номером k «моды» – собственной функции. В асимптотике уменьшение вклада отдельных слагаемых в представлении плотностей обуславливает сходимость решения к инвариантному распределению, хотя динамика этого процесса, определяемая также и характером начального распределения, в конкретных случаях может быть и непростой.

Поскольку показатель Ляпунова для сдвигов Бернулли и сопряженных им отображений суть $\lambda = \ln G$, собственные числа оператора Фробениуса – Перрона

⁴ И.Р. Пригожин и его соавторы (см. библиографию в работе [9]) интерпретируют коэффициенты C_k как функционалы, определенные в оснащем гильбертовом пространстве. В самом деле, продолжая преобразования, для этих коэффициентов можно получить представление

$$C_k = (b_k, \rho_0) = \int_0^1 b_k(x) \rho_0(x) dx,$$

где введена обобщенная функция $b_k(x) = (-1)^k \Theta_{0,1}^{(k)}(x)/k!$, $k=0,1,2,\dots$ ($\Theta_{0,1}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0,1]$). Соответственно разложения (12) и (13) интерпретируются как разложения по биортогональной системе функций B_k и b_k .

⁵ Данный класс целых функций находит важные прикладные применения при построении математических моделей явлений и процессов в радиофизике, оптике, теории связи, теории управления динамическими системами, в частности, при рассмотрении функций с финитным спектром, для которых сформулирована знаменитая теорема В.А. Котельникова [12].

могут быть выражены через этот показатель: $\Lambda_k = e^{-k\lambda}$. И тогда выражения (14) – (15) иллюстрируют такое качество ляпуновского показателя (в дополнение к «привычной» его роли характеристики функции чувствительности итераций) как своего рода меры скорости установления инвариантного распределения: чем больше показатель Ляпунова, тем быстрее происходит установление инвариантного распределения.

3. Элементы нуль-пространства оператора Фробениуса – Перрона

Пусть начальное распределение задано в форме

$$\rho_0(x) = 1 + f_0(x). \quad (16)$$

В этом разделе мы рассмотрим такие «возмущения» начальной плотности $f_0(x)$, которые в отличие от вышерассмотренной ситуации принадлежат к нуль-пространству оператора Фробениуса – Перрона (6). В этом случае действие (6) означает перевод f_0 в нуль: $Pf_0=0$. Очевидно, что условие нормировки вероятностной плотности требует обращения в нуль интеграла от f_0 на промежутке $(0,1)$, или равенства значений соответствующей первообразной на границах единичного интервала. Для $G=2$ элемент нуль-пространства определяется функциональным уравнением

$$f_0(1/2 + x/2) = -f_0(x/2). \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что решением (17) является целая функция

$$f_0(x) = \pm \cos 2p\pi x, \quad x \in (0,1), \quad p = 1,3,5,\dots, \quad (18)$$

которая входит, в частности, в определения:

- кардиоидного распределения [13]

$\rho_3(x) = 1 + 2r \cos 2\pi(x-x_0)$, где r ($|r| < 1/2$) и x_0 ($|x_0| < \infty$) – параметры распределения;

- намотанного распределения Коши [14]

$$\rho_3(x,r) = 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} r^p \cos 2p\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1;$$

- кусочно-линейной функции

$$f_0(x) = 4x\Theta_{0,1/2}(x) + 4(1-x)\Theta_{1/2,1}(x) = (2/\pi) \arccos(\cos 2\pi x).$$

Все эти распределения под действием оператора Фробениуса – Перрона «эволюционируют» к равномерному закону за один шаг.

Заключение

На примере со сдвигами Бернулли (и сопряженных к ним отображений) показано, что с оператором Фробениуса – Перрона хаотического отображения может быть соотнесена специально построенная функция двух переменных, преобразование которой эквивалентно решению спектральной задачи для этого оператора. Указывается на возможность построения подобных производящих функций для других базовых эндоморфизмов.

Представление начального распределения в виде суммы инвариантной плотности и некоторого ее «возмущения» (в частности, при разложении начального распределения в ряд по собственным функциям оператора Фробениуса – Перрона) позволяет наглядно проанализировать процесс установления

инвариантного распределения в результате действия эволюционного оператора (в частности, большие значения показателя Ляпунова отвечают и большей скорости сходимости).

Полиномы не входят в число элементов нуль–пространства эволюционного оператора для сдвигов Бернулли. Таковым является целая функция вида (18).

Авторы признательны С.В. Ершову за обсуждение работы и стимулирующие замечания.

Работа поддержана грантом ФЦП «Интеграция» (проект № А0057/1999).

Библиографический список

1. Орнштейн Д. Эргодическая теория, случайность и эргодические системы. М.: Мир, 1978.
2. Гренандер У., Фрайбергер В. Краткий курс вычислительной вероятности и статистики. М.: Наука, 1978.
3. Renyi A. Representations for the real numbers and their ergodic properties // Acta Mathematica (Acad. Sc. Hung.). 1957. Vol. 8. P. 477.
4. Goloubentsev A.F., Anikin V.M. The explicit solutions of the Frobenius – Perron equation for the chaotic infinite maps // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8, № 5. P. 1049.
5. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
6. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Богомолов А.В. Хаотические генераторы биологических ритмов // Биомедицинская радиоэлектроника. 2000. № 2.
7. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
8. Ершов С.В., Малинецкий Г.Г. О решении обратной задачи для уравнения Фробениуса – Перрона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. Т. 28, № 10. С. 1491.
9. Antoniou I., Tasaki S. Spectral decomposition of the Renyi map // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. Vol. 26. P. 73.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
11. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностранной литературы, 1951.
12. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
13. Jeffreys H. Theory of probability. Oxford University Press, 1948. 2nd ed.
14. Winter A. On the shape of the angular case of Cauchy's distribution curves // Ann. Math. Statist. 1947. Vol. 18. P. 589.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 7.09.99
после переработки 6.04.2000*

ON SOME PROPERTIES OF THE FROBENIUS – PERRON OPERATOR FOR THE BERNOULLI SHIFTS

A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin, S.S. Arkadaksky

The expansion of solutions of Frobenius – Perron equations of the Bernoulli shifts and conjugate maps in terms of the eigenfunctions of the same name operators are presented. The convergence of nonstationary solutions to the invariant density is discussed. It is marked that the Lyapunov exponent may be considered as a measure of the speed of convergence. The entire function as an element of Frobenius – Perron operator kernel is found.

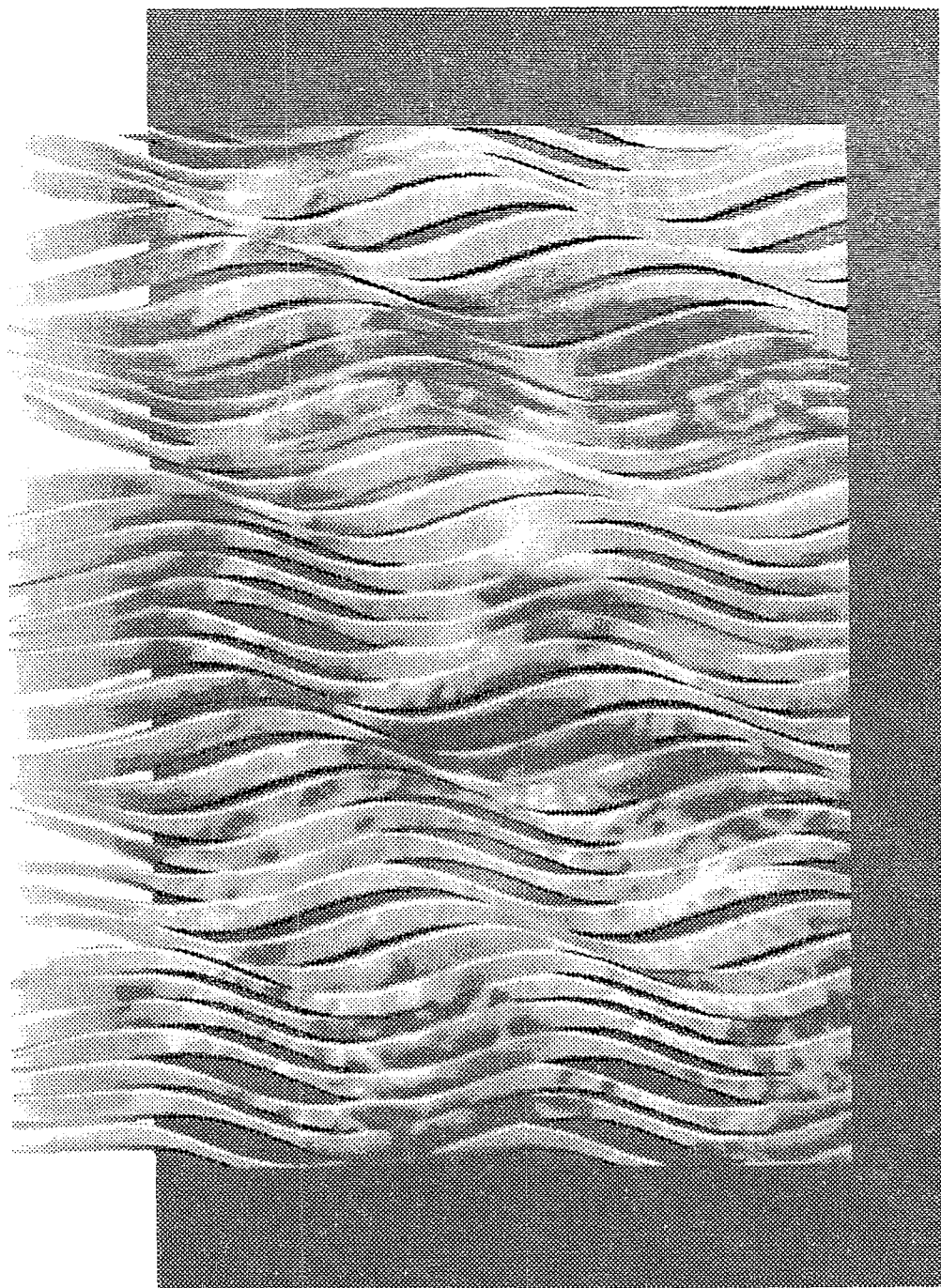


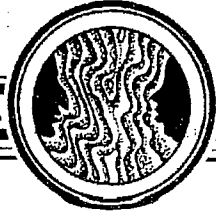
На фото (слева направо): С.С. Аркадакский, А.Ф. Голубенцев, В.М. Аникин

Аркадакский Сергей Сергеевич – родился в Саратове (1949). Окончил Саратовский университет (1971). После окончания СГУ работал в научно – исследовательском институте механики и физики СГУ, с 1994 года – на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Кандидат физико–математических наук. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов.

Голубенцев Александр Федорович – родился в Смоленске (1933). Окончил Саратовский университет (1956). С 1959 года работает в СГУ. Доктор физико–математических наук, профессор. С 1988 года – заведующий кафедрой вычислительной физики и автоматизации научных исследований. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Автор монографий «Шумы и флуктуации в электронных потоках», «Введение в статистическую электронику», «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», «Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Член диссертационных советов СГУ и СГТУ.

Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил Саратовский университет (1970). После окончания СГУ работал в научно–исследовательском институте механики и физики СГУ, с 1984 года – на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Кандидат физико–математических наук, доцент. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Соавтор монографий «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Ученый секретарь докторского диссертационного совета СГУ по специальностям радиофизика, оптика, физика полупроводников и диэлектриков.



**ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ***Ю.А. Данилов*

Он родился в тот самый год, когда Майкл Фарадей открыл электромагнитную индукцию. Впоследствии он перевел на привычный для физиков со времен Ньютона и Лейбница язык дифференциальных уравнений картину пространства, пронизанного силовыми линиями электрических и магнитных полей, которую прозрел своим внутренним взором великий экспериментатор. Благодарные потомки навсегда связали его имя с выведенными им уравнениями электромагнитного поля, поражались их глубине и смелости его мысли, восхищались их красотой. Людвиг Больцман предпослал своим лекциям об этих уравнениях эпитафию из своего любимого Шиллера: «Уж не Бог ли начертал эти строки?» Человек, о котором идет речь, оставил глубокий след во всех областях физической науки, к которым успел прикоснуться за свою яркую, насыщенную великолепными свершениями, но – увы! – столь непродолжительную жизнь: в теории упругости, статистической механике, кинетической теории газов и, как уже говорилось, теории электромагнитного поля. Его звали Джеймс Клерк Максвелл. (Шотландцы произносят его имя несколько иначе: Джеймс Кларк Максвелл, но мы будем следовать исторически сложившейся в русской литературе транскрипции великого имени).

Детские годы

В столице Шотландии Эдинбурге на стене дома № 4, что по улице Индии, можно увидеть скромную мемориальную доску с лаконичной надписью:

*Джеймс Клерк Максвелл
Естествоиспытатель
Родился здесь 13 июня 1831 года*

Клерк–Максвелл фамилия двойная и обязана своим происхождением шотландскому обычаю присоединять к фамилии нового владельца поместья фамилию его предшественника. У деда великого физика со стороны отца, капитана дальнего плавания, состоявшего на службе в Ост–Индской компании, был старший брат, баронет сэра Джон Клерк из Пеникуика. После смерти сэра Джона, у которого не было прямых наследников, два принадлежавших ему поместья отошли по наследству двум сыновьям капитана Джорджу и Джону. Раздел наследства был произведен в соответствии с правом майората: титул и основную часть владений получал старший из наследников. Большое поместье

Пеникуик покойного сэра Джона и титул баронета отошли старшему сыну его брата, капитана, который стал сэром Джорджем, баронетом Пеникуикским, а меньшее поместье Миддлби в Южной Шотландии досталось младшему сыну капитана Джону, будущему отцу нашего героя. Владельцами Миддлби до Клерков были Максвеллы, и Джон Клерк, вступив во владение Миддлби, по шотландскому обычаю присоединил к своей фамилии фамилию прежних владельцев. Не будь имени Миддлби, замечает один из биографов Максвелла, «нам пришлось бы писать о человеке по имени Джеймс Клерк и говорить об «уравнениях Клерка» вместо знаменитых на весь мир уравнений Максвелла». В поместье Миддлби новый владелец построил дом «Гленлейр», что означает по-гэльски (на языке шотландцев кельтского происхождения) «Берлога в узкой долине», неподалеку от речки, носившей громкое название «Воды Урра». В имении Миддлби Джеймс Клерк Максвелл провел значительную часть своего детства.

Стремление доходить до сути вещей проявилось у Максвелла очень рано. Сохранилось письмо его матери к одной из родственниц, написанное, когда Максвеллу не исполнилось и трех лет: «Сей муж очень счастлив. Он немного поправился с тех пор, как погода стала умеренной, у него много работы с дверями, замками, ключами и т.д., а слова «покажи мне, как это делается» он произносит на каждом шагу. Он исследует тайные ходы для проволок от звонков и путь, по которому вода течет из пруда через плотину вниз по канаве в Воды Урра... Что касается звонков, то они не заржавеют. Он стоит на часах в кухне... или звонит сам, посылая наблюдать и кричать ему, что при этом происходит, заставляя показывать отверстия, сквозь которые проходят проволоки».

По свидетельству близких Максвелл в детстве то и дело задавал окружающим вопрос: «Как это происходит?» и если объяснение его не удовлетворяло, настойчиво добивался ясности, спрашивая: «А в чем здесь особенность?»

Годы учения

Когда Максвеллу исполнилось десять лет, отец отправил его учиться в Эдинбургскую академию, где тот пробыл шесть лет – до поступления в Эдинбургский университет. В академии Максвелл учился прилежно и ровно, не проявляя особых способностей и интересов, но и не вызывая нареканий со стороны преподавателей. Самым ярким событием тех лет стало знакомство с Питером Гутри Тэйтом, впоследствии написавшим с Уильямом Томсоном, будущим лордом Кельвином, двухтомный «Трактат по натуральной философии». Дружеские отношения с Тэйтом Максвелл сохранил на всю жизнь.

Когда Максвеллу исполнилось шестнадцать лет, он поступил в Эдинбургский университет, где его основными предметами изучения стали математика, физика и химия. Наряду с основными предметами студенты Эдинбургского университета в обязательном порядке изучали «посторонние предметы», не относящиеся непосредственно к выбранной специальности. Наибольшей популярностью у будущих естественников пользовалась философия. По свидетельству биографов Максвелла, «лекции по философии очень интересовали его... Хотя ему было всего шестнадцать лет, когда он начал слушать курс логики, он с большим трудолюбием изучал этот предмет, ... а из курса метафизики вынес много устойчивых представлений. Его не ведающая границ любознательность находила пищу в неистощимой эрудиции профессора».

В ту пору в университетах Германии существовало две свободы: свобода учиться и свобода учить. Первая означала, что студент мог по собственному выбору переходить из университета в университет. Отголоски студенческих странствий по университетским центрам Германии запечатлены в биографиях многих немецких физиков прошлого века. Свобода учить означала, что профессор может по собственной воле назначать тот курс, чтение которого представлялось ему наиболее желательным, интересным и целесообразным. Не ограничивалась ничем, кроме финансовых возможностей студента (за право учиться было

необходимо платить), и продолжительность пребывания на студенческой скамье. Но для получения диплома, давшего право занимать должность учителя, адвоката, судьи, священника или врача, необходимо было пройти через горнило так называемого «государственного экзамена». В Англии господствовали иные порядки, но и там при желании переход из одного университета в другой не наталкивался на непреодолимые препятствия.

Первым по уровню математического образования по праву считался Кембриджский университет. Пробыв с 1847 по 1850 год студентом Эдинбургского университета, Максвелл перевелся в колледж Св. Петра Кембриджского университета – знаменитый Питерхаус, откуда вскоре перешел в колледж Св. Троицы – Тринити-колледж (того же университета).

Требования к математической подготовке студентов и выпускников Кембриджского университета были выше, чем в Эдинбургском университете. Возможно, этим (по крайней мере отчасти) объясняется, почему Максвеллу в урочное время не удалось занять первое место на знаменитом публичном экзамене по математике на соискание степени бакалавра по математике с отличием «Трайпос», что по-гречески означает «треножник» в память о тех временах, когда старший экзаменатор грозно восседал перед экзаменуемым на табурете с тремя ножками. Занявший на «Трайпос» первое место удостоивался почетного титула «Сениор Ренглер», о чем оповещалось на торжественной церемонии под колокольный звон, его имя заносилось в анналы университета, а по окончании полного курса ему было уготовано место члена колледжа. Увы, Максвелл занял в свой год лишь второе место. Помимо разницы в уровне математической подготовки студентов Эдинбургского и Кембриджского университетов тому могла быть еще одна причина. Для успешного участия в «Трайпос» требовалась особая подготовка: виртуозное владение методами решения нарочито трудных задач «олимпиадного» типа. К участию в «Трайпос» готовили (или, если угодно, натаскивали) специальные репетиторы. Максвелл такой подготовкой не обладал. Победа в «Трайпос», трудная и почетная, свидетельствовала не столько о творческом складе ума и оригинальности мышления «Сениор Рэнглера», сколько о его трудолюбии, крепких нервах и великодушном владении математической техникой, в частности, знании специальных функций математической физики, что называется, не понаслышке.

В 1854 году Максвелл выдержал не менее трудное состязание по математике на соискание премии Смита, которую разделил с будущим известным специалистом по теории устойчивости движения Э.Дж.Раусом.

Первые шаги на научном поприще

Свою первую научную работу Максвелл написал в бытность свою учеником Эдинбургской академии, когда ему исполнялось четырнадцать лет. Краткое изложение первой работы было опубликовано в апрельском номере «Трудов Эдинбургского королевского общества» за 1846 год, а полностью работа юного автора была зачитана на заседании почтенного Общества проф. Форбсом: согласно господствовавшим тогда представлениям, выступать перед учеными мужами четырнадцатилетнему юнцу было неприлично.

Работа Максвелла была посвящена геометрии овальных кривых – обобщению всем известного эллипса, одно из определений которого гласит: эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек (фокусов эллипса) постоянна. Юный Максвелл построил геометрическое место точек, для которых постоянна сумма расстояния до одной из заданной точки и утроенного расстояния до другой заданной точки.

В «Трудах Эдинбургского королевского общества» были опубликованы и две следующие научные работы, выполненные семнадцати- и восемнадцатилетним Максвеллом. Первую из этих работ (о кривых качения) доложил Обществу проф. Келланд, вторую (об упругих свойствах твердых тел), более обширную, впервые представил Обществу сам повзрослевший автор.

Профессор физики

Вскоре после того, как Максвелл разделил с Раусом премию Смита, в его жизни произошло важное событие: он успешно закончил полный курс обучения и был избран членом Тринити-колледжа Кембриджского университета, став «доном», как было принято называть членов колледжа. В то время обязанности «дона» не были особенно обременительными. Студентов было мало, поэтому преподавательская нагрузка и административные обязанности оставляли немало времени для научных исследований, занятий спортом (например, игры в крикет), фотографией в т.п. В Кембридже среди «донов» было немало выдающихся людей, и ежевечерние трапезы за «высоким» столом (для господ членов колледжа), прекрасная кухня и отличный портвейн, запасы которого пополнялись попечением особо уполномоченного «дона», способствовали установлению особо доверительной атмосферы. Тем не менее Максвелл вскоре покинул гостеприимный Кембридж и отправился в родную Шотландию. Дело в том, что от проф. Форбса (того самого, который представил его первую работу Эдинбургскому королевскому обществу) Максвеллу стало известно, что в Абердине, в Маршалловском колледже, открылась вакансия профессора физики, и у него имеются все шансы занять ее. Максвелл принял предложение, и в апреле 1856 года было объявлено о его вступлении в должность профессора физики. Максвеллу тогда исполнилось двадцать четыре года. К сожалению, его отец не успел порадоваться за сына: он скончался за несколько дней до радостного события. За год до этого, в 1855 году, Максвелл был избран членом Эдинбургского королевского общества.

В Абердине Максвелл пробыл с 1856 по 1860 год, когда три колледжа были объединены в Абердинский университет. В результате объединения несколько кафедр были упразднены. Среди попавших под сокращение профессоров оказался и Максвелл, судя по всему, не очень огорчившийся такому повороту событий, которые он в какой-то мере предвидел. Еще в декабре 1857 года Максвелл сообщил в письме своему будущему биографу Льюису Кемпбеллу: «Снова встает вопрос о слиянии колледжей. Всем известно, что я не сторонник слияния и, стало быть, противник «юнионистов» (то есть всех тех, кто желает объединить три естественно-научных факультета и в то же время считает целесообразным сохранить две гуманитарные кафедры). Не хочу описывать Вам их теории. Они хотят иметь профессорами угодных им людей, заинтересованных в преподавании того, что выгодно определенному узкому кругу лиц. Их легче подчинить влиянию родителей и местной прессы, чем более образованных и более высокооплачиваемых преподавателей».

В том же 1860 году Максвелл принимает приглашение стать профессором физики Лондонского королевского колледжа и пребывает в этом качестве до 1865 г.

Судя по отзывам тех, кто слушал его лекции, Максвелл не был блестящим лектором и, по-видимому, не особенно стремился к чтению лекций, поэтому последовавший затем перерыв в академической деятельности был для него скорее желанным, чем досадным и огорчительным, поскольку позволил с головой уйти в решение увлекательнейших проблем из различных областей физики. Впрочем, с тех пор, как четырнадцатилетним мальчиком Максвелл опубликовал свою первую работу об овальных кривых, он не переставал заниматься научными исследованиями.

Кольца Сатурна и многое другое

Еще в бытность свою студентом кембриджского Тринити-колледжа Максвелл занялся решением проблемы, интересовавшей многих исследователей и сохранившей свою привлекательность и в наше время, — строением колец Сатурна. «Этюд» Максвелла, посвященный этой проблеме, в 1856 году был удостоен премии Смита (которую Максвелл, как уже говорилось, разделил с Раусом). Над проблемой структуры колец Сатурна Максвелл продолжал работать

в течение двух лет и в свой абердинский период. Итоги своих изысканий Максвелл подвел в монографии, изданной в 1859 году Кембриджским университетом. Максвелл установил (и в то время это было новацией), что кольца Сатурна не были ни жидкими, ни сплошными твердыми, а представляли собой рой твердых глыб, обращающихся вокруг тела планеты. События Крымской войны 1853 – 1856 годов навеяли Максвеллу сравнение с воздухом осажденного города, в котором носятся пушечные ядра. В письме из отчего дома «Гленлейр» от 28 августа 1857 года Максвелл сообщал Льюису Кемпбеллу: «Я снова обрушился на Сатурн... Мне уже удалось пробить несколько брешей в твердом кольце, а теперь я окунулся в жидкую среду, погрузившись в мир поистине удивительных символов и обозначений. Вскоре я углублюсь в туманность, чем-то напоминающую состояние воздуха, скажем, во время осады Севастополя. Лес пушек, расположенных в прямоугольнике со сторонами 100 и 30000 миль (Максвелл имеет в виду английские мили, равные 1609.315 м), изрыгает ядра, которые не останавливаются ни на миг, а вращаются по кругу радиусом 170000 миль».

В абердинский период Максвелл занимался решением и некоторых других проблем. По значимости, разнообразию и обилию полученных им результатов Аббердинское пятилетие можно сравнить с болдинской осенью в жизни и творчестве А.С. Пушкина.

Максвелл берется за решение проблемы цветного зрения и создает свою теорию восприятия цвета, которую замечательный физик и математик сэръ Джордж Габриэль Стокс в письме от 7 ноября 1857 г. оценил следующим образом: «Полученные Вами результаты – наиболее замечательное и серьезное доказательство концепции трех основных цветовых ощущений, теории, которой Вы и только Вы смогли дать точное количественное истолкование».

Не менее высоко отзывался о работах Максвелла физик Джон Тиндаль в письме, также датированном 7 ноября 1857 года: «Весьма признателен за любезное внимание, которое Вы оказали мне, прислав Ваши статьи о динамическом волчке, восприятии цвета, а также работу о силовых линиях, которую я получил несколько раньше. Я никогда не сомневался в возможностях математического описания открытых Фарадеем явлений, и Вы, вероятно, один из тех, кто отрицает какой-нибудь другой, отличный от этого подход».

Вопрос о математическом описании электромагнитного поля волновал Майкла Фарадея, гениального самоучку, ставшего одним из величайших экспериментаторов в истории физики и совершившего целую вереницу замечательных открытий. Не владея современным ему аппаратом математической физики, он был лишен возможности описать на языке дифференциальных уравнений то, что отчетливо видел мысленным взором, – картину распределения в пространстве силовых линий, и, чуждый всякой спеси, почтительно спрашивал у молодого коллеги (Максвелл был на сорок лет моложе Фарадея), возможно ли математическое описание силовых линий и возможен ли обратный перевод математических формул на язык, доступный пониманию экспериментатора, не искушенного в тонкостях математической физики. Вот что говорилось об этом в письме Фарадея Максвеллу от 13 ноября 1857 года: «Мне очень хотелось бы задать Вам один вопрос. Предположим, математик занимается исследованием некоторого физического явления и приходит, наконец, к каким-то определенным выводам. Нельзя ли выразить их в общедоступной форме не менее полно, ясно и конкретно, чем с помощью математических формул? Если можно, то для таких, как я, было бы великим благом получить их переведенными с языка иероглифов, чтобы мы могли оперировать ими в процессе эксперимента. Думаю, это можно сделать, так как идея Ваших выводов мне совершенно ясна, хотя я не всегда могу проследить за ходом Ваших рассуждений. Результаты, полученные на основании Ваших формул, неизменно лежат не выше и не ниже истинных, и смысл их вполне очевиден, так что я могу работать с ними. Если это так, то математики могли бы сослужить нам хорошую службу, представляя свои результаты не только в удобном, но и в более доступном, рабочем, виде».

Максвелл по праву считается одним из основоположников кинетической

теории газов: в 1859 года он представил Британской ассоциации поощрения наук статью, в которой из теоретических соображений вывел функцию, описывающую распределение молекул газа по скоростям. – знаменитое ныне распределение Максвелла. Позднее (в 1866 году) Максвелл предложил еще один вывод распределения, носящего его имя, рассмотрев прямые и обратные столкновения молекул газа. Распределение Максвелла – выдающийся результат, позволяющий считать Максвелла наряду с Людвигом Больцманом одним из создателей статистической механики. Распределение Максвелла – один из примеров статистических законов, описывающих не индивидуальное поведение какой-то одной частицы, а поведение в среднем огромного количества («роя», или «ансамбля») частиц. В 1867 году с помощью мысленного эксперимента – бестелесного существа, способного сортировать молекулы газа по скоростям и получившего впоследствии название «демон Максвелла», Максвелл показал, что второе начало термодинамики имеет статистическую природу. В наше время после появления понятия «информация» (точнее говоря, «количество информации по Шеннону») демон Максвелла неизменно фигурирует во всех книгах по теории информации.

Электродинамика Максвелла

Но сколь ни велики научные достижения Максвелла в абердинский период, его высшим достижением принято считать теорию электромагнитного поля, окончательно сформулированную в лондонский период с 1860 по 1865 год.

Нам, стоящим, по выражению Ньютона, «на плечах гигантов», получившим на правах наследников электродинамику Максвелла в готовом виде, а знаменитые уравнения Максвелла – в форме, доведенной до совершенства Генрихом Герцем и сонмом более поздних исследователей, трудно представить себе, сколь новаторской была теория Максвелла, изложенная в двухтомном «Трактате об электричестве и магнетизме» (1873) в глазах тех, кто мыслил старыми, домаксвелловскими, категориями.

По своему значению «Трактат» Максвелла (при всем различии манеры изложения и задач, стоявших перед авторами) стоит рядом с «началами» Ньютона, хотя и уступает последним в блеске отделки. Простые и изящные уравнения Максвелла описывают богатейший мир электромагнитных явлений. В своей теории Максвелл ввел такие новые понятия, как ток смещения и электромагнитное поле, предсказал существование электромагнитных волн и их распространение со скоростью света (что позволило ему считать свет одним из видов электромагнитного излучения).

О том, насколько непривычными и трудными для восприятия казались представителям старой, домаксвелловской, школы введенные Максвеллом новшества, красноречиво говорит эпизод, о котором упоминает в своей «Истории физики» лауреат Нобелевской премии Макс фон Лауэ. Некий немецкий профессор физики, упорно, но – увы! – безуспешно пытаясь разобраться в «Трактате» Максвелла, довел себя до нервного расстройства. Врач рекомендовал ему на время забыть о физике и подлечиться на водах. Когда же накануне отъезда родные открыли чемодан профессора, чтобы убедиться, что он ничего не забыл взять с собой в дорогу, поверх вещей они обнаружили «Трактат» Максвелла.

Разумеется, у Максвелла были предшественники – те, кто по словам редакторов великолепного русского перевода «Трактата» М.Л. Левина, М.А. Миллера и Е.В. Суворова, «инициировал максвелловские раздумья над явлениями электромагнетизма ... и по существу снабдил его удобным для описания этих явлений инструментарием.

Максвелла – за редчайшими исключениями – отличала тактичность и уважительность ко всем предшественникам. Но одного он выделял особо как образец Научного Величия и Научного Ясновидения. Речь идет, конечно же, о Фарадее. Вряд ли в те времена существовал какой-либо другой ученый, кроме

Максвелла, проштудировавший «Труды» Фарадея так тщательно, так проникновенно и так благожелательно к ним. А ведь многим ревнителям строгих правил некоторые содержащиеся в них умозаключения казались, мягко говоря, не совсем вразумительными. Это какой-то парадоксальный стереотип «непризнания признанного». Человек, уже прославившийся Великим Исследователем Природы, казалось бы, должен был хотя бы настораживать людей каждым своим размышлением, намерением, поступком. А они, как замороженные, отметают их, не вникнув, будто руководствуются какими-то тягостными соображениями типа «он так долго был прав, что когда-то должен начать быть неправым».

Фарадей, по-видимому, был человеком, которому нет и не может быть объяснений, если под таковыми понимать логические доводы. Он соединял в себе дотошную приверженность фактам, подкорковую бдительность к отвлекающим случайностям с симфоническим воображением, позволявшим ему составлять правильное представление о свойствах ответов без решения задач и без умения репашать их в общепринятом понимании. По-видимому, он действительно приводил в состояние раздражения немалое число «аналитиков» (Максвелл называет их «professed mathematicians», возможно, используя двусмысленность слова «professed» – профессиональный и считающий себя таковым), вынужденных признавать его Великие Открытия и не признавать свою неспособность проникнуться его образным мышлением. А ведь такие люди, как Фарадей, принадлежат сами к странным («аномальным») явлениям природы, именно потому и могли столь непринужденно просто углядывать не менее странные явления в Природе вообще. Вероятно, кое-что свойственное Фарадею, относится и к самому Максвеллу, открывшего *этого* Фарадея, то есть прочитавшему и расшифровавшему фарадеевские «письмена» с доверием к ним. Максвелл скромно сводит свою заслугу к переизложению идей Фарадея на язык математических соотношений. Но его показания не должны нас дезориентировать: мы понимаем, что само по себе открытие этого Фарадея потребовало от Максвелла не меньшего преодоления инерционности мышления, чем когда дело касалось явлений, причисляемых к неодушевленным».

Одним из тех, кто по достоинству оценил не только глубину идей Максвелла, но и красоту уравнений, носящих ныне его имя, был Людвиг Больцман. Знаток и тонкий ценитель поэзии Шиллера, Больцман нашел у любимого поэта строки (они процитированы в начале нашей статьи), как нельзя лучше выражавшие его, Больцмана, восхищение красотой уравнений Максвелла.

Математическим облачением понятия красоты, или гармонии, служит понятие группы, ставшее одним из самых мощных инструментов познания мира. В 1910 году Гарри Бейтмен придал красоте уравнений новый блеск. Бейтмен нашел преобразования, сохраняющие вид уравнений Максвелла, и по существу показал, что эти преобразования образуют группу (так называемую 15-параметрическую конформную группу). Часть этих преобразований (линейные преобразования) образуют группу Лоренца. Они были открыты в 1904 году старейшиной физиков-теоретиков того времени Хендриком Антоном Лоренцом и названных в честь Лоренца Анри Пуанкаре. Подобно тому, как преобразования Галилея легли в основу классической механики, частичная симметрия уравнений Максвелла – преобразования Лоренца – легла в основу релятивистской физики.

Кавендишская лаборатория

Генри Кавендиш (1731 – 1810) был одной из самых эксцентрических фигур в истории науки. Современники отзывались о нем как о «самом мудром из богачей и самом богатом из мудрецов». Он вел образ жизни отшельника, с увлечением предаваясь научным исследованиям (Кавендиш окончил Кембриджский университет). Совершенные им открытия намного опередили современную ему науку, но поскольку Кавендиш весьма неохотно соглашался на публикацию своих результатов, они оставались неизвестными научному сообществу. Так, в 1771 году Кавендиш открыл основной закон электростатики, известный ныне как закон

Кулона (Кулон открыл закон, носящий ныне его имя, в 1785 году), установил влияние среды на емкость конденсатора и измерил диэлектрическую постоянную некоторых веществ. В 1778 году Кавендиш подтвердил закон всемирного тяготения Ньютона, измерив с помощью чувствительных крутильных весов силу гравитационного притяжения двух шаров, измерил величину гравитационной постоянной, массу и среднюю плотность Земли. В 1766 году Кавендиш получил водород, установил его свойства и определил химический состав воды.

В 1871 году потомки Кавендиша решили построить в Кембридже Кавендишскую лабораторию в память о своем выдающемся предке. Максвелл получил приглашение стать первым директором Кавендишской лаборатории в ранге профессора экспериментальной физики и оставался на этом высоком посту до самой смерти. Заложенные им традиции были подхвачены и развиты его преемниками на посту директора Кавендишской лаборатории Рэлсем, Дж. Дж. Томсоном, Э. Резерфордом, У. Брэггом. В стенах Кавендишской лаборатории выросла целая плеяда замечательных физиков, в том числе лауреат Нобелевской премии академик П.Л. Капица.

В 1879 году Максвелл предпринял первое издание рукописей Генри Кавендиша.

Безвременная кончина

Первые симптомы болезни появились у Максвелла в 1877 году. Он бывал в Кавендишской лаборатории, но силы быстро покидали его. Изменилась даже походка. В сентябре 1879 года во время пребывания в Гленлейре Максвелл почувствовал себя так плохо, что без уговоров согласился отбыть в Кембридж, где ему могла быть оказана более квалифицированная медицинская помощь. В Кембридж Максвелл прибыл 8 октября. Он знал, что болен той самой неизлечимой болезнью, от которой в том же возрасте умерла его мать. Диагноз не оставлял никаких надежд на исцеление: рак.

Пользовавшийся Максвелла врач Пэджет вспоминал впоследствии: «Во время болезни, лицом к лицу со смертью, он оставался таким же, как прежде. Спокойствие духа никогда не покидало его. Через несколько дней после возвращения в Кембридж его страдания приняли очень острый характер. Но он никогда не жаловался... Даже близость смерти не лишала его самообладания... За несколько дней до смерти он спросил у меня, сколько ему осталось жить... Казалось, он беспокоится только о своей жене, здоровье которой за последние несколько лет пошатнулось... Его ум оставался ясным до конца... Никто из моих многочисленных пациентов не сознавал свою обреченность так трезво и не встречал смерть более спокойно. 5 ноября (1879 г.) он тихо отошел».

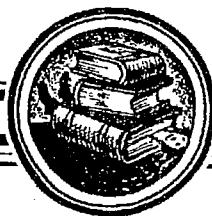
В памяти всех, кому выпало счастье знать Максвелла лично и косвенно, «по индукции», потомкам, которые могут судить о его жизни и деяниях по письменному наследию, воспоминаниям и работам биографов, остались не только его блестящий интеллект, но и высокие человеческие качества. В науке и жизни Максвелл был и навсегда останется образцовым английским джентльменом.

РНЦ «Курчатовский институт»

Поступила в редакцию 15.05.00



Данилов Юлий Александрович – родился в 1936 году в Москве. Окончил физический факультет МГУ (1963). Старший научный сотрудник РНЦ «Курчатовский институт». Область интересов – симметрия в физике, нелинейная динамика. Имеет более 50 научных публикаций по этим направлениям. Много лет занимается переводами трудов А. Эйнштейна, Г. Кирхгофа, А. Пуанкаре, В. Паули, И. Пригожина, которые выходят в свет в серии «Классики науки».



СИНЕРГЕТИКА

Учебная программа *

Б.П. Безручко, А.А. Короновский, Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов

Специальность – 06070 «Национальная экономика»

Факультет – Социальных и гуманитарных наук, д/о; кафедра электроники, колебаний и волн; курс – 1; семестр – 2

Лекции – 17 час., семинары – 17 час., зачет

Современная образовательная концепция, предусматривающая сближение и интеграцию подходов, типичных для рационального и интуитивно-образовательного способов познания мира, естественным образом поставила в центр внимания новое междисциплинарное направление – синергетику. Она вносится в программы курсов современного естествознания или составляет содержание специальных курсов синергетики. Преподавание этой дисциплины, имеющей своей основой достижения точных естественных наук и математики, студентам гуманитарных специальностей сталкивается с определенными трудностями. Основная трудность заключается в том, что для рассказа о том или ином аспекте рассматриваемой дисциплины необходимо привлечь математический аппарат, который оказывается сложным для студента-гуманитария. В то же время, отказ от использования строгого аппарата математики приводит к выхолащиванию сути предмета: в этом случае лекции становятся описательными, не затрагивающими основ и причин описываемых явлений. Перед студентом оказывается набор фактов (без сколько-нибудь серьезных объяснений и обобщений), которые он благополучно заучивает (как правило, без понимания) накануне экзамена или зачета и столь же благополучно забывает на следующий день.

Учитывая различный стиль мышления представителей естественно-научного и гуманитарного направления, нами разработана и реализована программа комбинированного курса «Синергетика», включившего в себя как формализованную лекционную часть, так и практическую часть (физическую и компьютерную лаборатории). Курс лекций, подчеркивающий единство окружающего нас мира, общность колебательных и волновых процессов, процессов самоорганизации и структурообразования в системах самой различной природы, лавирует между описательным стилем (что-то наподобие «Синергетика

* © **Сборник программ курсов лекций**, разработанных и читаемых преподавателями факультета нелинейных процессов на физическом факультете, факультете нелинейных процессов и факультете гуманитарных и социальных наук Саратовского государственного университета: Учебно-методическое издание / Под ред. Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. 104 с.

в картинках») и математическим ликбезом. В практические занятия входит: (1) посещение учебной лаборатории «Волны, структуры, самоорганизация» Саратовского госуниверситета (кафедра электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов), где можно непосредственно в эксперименте увидеть такие классические примеры самоорганизации в гидродинамических системах как ячейки Бенара, рябь Фарадея, дорожка Кармана, полюбоваться колебательной химической реакцией, познакомиться с электронными системами, демонстрирующими сложную пространственно–временную динамику; (2) самостоятельные упражнения в компьютерном классе с использованием программ, имеющих удобный для пользователя интерфейс и красочное представление информации на экране. В конце семестра проводится компьютерное тестирование студентов (задается около тридцати вопросов по всему курсу, к каждому вопросу предлагается несколько вариантов ответов, из которых следует выбрать один, правильный с точки зрения отвечающего). На основе анализа протоколов тестирования делаются заключения о том, какие части курса вызывают у студентов наибольшие затруднения, и, соответственно, проводится корректировка материалов лекций и практических занятий.

Тематический план учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	Максимальная учебная нагрузка студента, час.	Количество аудиторных часов при очной форме обучения					Самостоят. работа студентов
		Всего	Лекц.	Лаб. раб.	Практ. занятия	К/раб.	
1	2	3	4	5	6	7	8
1. Проблемы, стоящие перед человеком и человечеством, необходимость научного прогноза	3	1	1				2
2. Синергетика как междисциплинарное научное направление	3	1	1				2
3. Колебания, волны и паттерны как универсальные явления, свойственные системам самой различной природы	7	4	2		2		3
4. Структуры	9	6	2		3	1	3
5. Что общего находит синергетика в экологии, экономике, биологии, физике и других науках	5	2	2				3
6. Клеточные автоматы как простейшая модель процессов самоорганизации	10	7	2		4	1	3
7. Динамическая система и фазовое пространство	4	1	1				3
8. Способы описания динамических систем	6	3	1		2		3
9. Сложная динамика и хаос в простых системах	6	3	1		2		3

1	2	3	4	5	6	7	8
10. Другой подход к описанию динамики систем – вероятностный	5	2	2				3
11. Возможность прогнозирования	5	2	2				3
12. Знаете ли Вы синергетику?	5	2				2	3
Всего:	68	34	17		13	4	34

Содержание учебной дисциплины

1. Проблемы, стоящие перед человеком и человечеством, необходимость научного прогноза. Общность закономерностей, которым подчиняются процессы в различных системах. Характерные масштабы и масштабы наблюдения (масштабы процессов в физических и социальных системах; почему при изучении синергетики не обойтись без физики).

2. Синергетика как междисциплинарное научное направление. Синергетика как междисциплинарное научное направление (дифференциация науки; претензии и место синергетики в науке). Что такое «синергетика»? (Различные определения). История возникновения синергетики (этимология, научная основа и основоположники). Роль развития вычислительной техники на формирование синергетики.

3. Колебания, волны и паттерны как универсальные явления, свойственные системам самой различной природы. Переменные и параметры. Что такое колебания? Маятники, колебания цен на рынке, циклы Кондратьева, динамика численности биологических популяций, мода, землетрясения. Автоколебания: часы, колебания сердца, колебательные химические реакции (Линдса – Раушера). Волновые процессы: волны на воде и песке, волны в автомобильных потоках. Системы с диффузией: перенос тепла, перенос вещества. Автоволны: волны эпидемий и слухов, огонь распространяющийся по степи, свертывание крови.

4. Структуры. Структуры (различные определения). Возможность образования структур, открытые и закрытые системы. Эволюция структур при изменении параметра (устойчивость и неустойчивость, бифуркация). Параметры порядка. Статические структуры: ячейки Бенара, пестрая шкура леопарда. Динамические структуры: неустойчивость Тейлора, атмосферные вихри, рябь Фарадея, химическая реакция Белоусова – Жаботинского. Свободные структуры: вихри за движущимся объектом, обтекание предмета жидкостью. Примеры процессов самоорганизации в человеческом обществе: выработка группового мнения, поведение в толпе, установление равновесной цены на однородные товары.

Лаборатория «Волны, структуры, самоорганизация» Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского:

- ячейки Бенара;
- капиллярная рябь;
- колебательные химические реакции;
- солитоны;
- лампа обратной волны;
- дорожка Кармана.

Контрольная работа по теме «Структуры».

5. Что общего находит синергетика в экологии, экономике, биологии, физике и других науках: универсальные математические модели – «инструменты» синергетики. Почему при изучении синергетики не обойтись без математики. Понятие модели (определение, активная роль, примеры).

6. Клеточные автоматы как простейшая модель процессов самоорганизации. Игра «жизнь». Периодические и непериодические пространственно–временные структуры. Artificial Life. Моделирование динамики толпы с помощью клеточных автоматов. Спиральные волны в сердечной мышце.

Контрольная работа по теме «Клеточные автоматы».

7. Динамическая система и фазовое пространство. Размерность фазового пространства. Классификация динамических систем: с дискретным и непрерывным временем (отображения: что это такое, примеры (линейный банковский процент, численность популяций); системы с непрерывным временем); сосредоточенные и распределенные (примеры); диссипативные и консервативные (примеры); линейные и нелинейные (основные особенности; примеры).

8. Способы описания динамических систем. Пространство параметров. Устойчивость и неустойчивость. Аттракторы. Размерность аттракторов. Мультистабильность, бассейны притяжения аттракторов.

9. Сложная динамика и хаос в простых системах. Сценарии перехода к динамическому хаосу. Динамический хаос и предсказуемость. Климат и погода; можно ли предсказать погоду. Примеры из медицины (сердечные ритмы, динамические болезни). Фракталы.

10. Другой подход к описанию динамики систем – вероятностный. Понятие сложной системы (Система, состоящая из подсистем). Системный подход. Микро–, мезо– и макроподходы к описанию объектов. Случайность, детерминированность, частичная детерминированность. Статистические характеристики (распределение вероятностей, средние значения, дисперсия). Отличие динамического хаоса от стохастических процессов.

11. Возможность прогнозирования. Управление системами. силовое воздействие, обратная связь. Теория рисков, самоорганизованная критичность.

12. Знаете ли Вы синергетику? Итоговая контрольная работа.

Требования к занятиям. Занятия проводятся в девятом семестре после смены расписания по две лекции в неделю.

Требования к умениям студентов. Студент обязан знать основные понятия и модели синергетики; иметь представление о самоорганизации и структурообразовании, линейности и нелинейности.

Перечень литературы

1. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов.: Изд–во ГосУНЦ «Колледж». 1997.
2. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир. 1980.
3. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Мир, 1986. 430 с.
Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение. М.: Мир, 1990. 342 с.
4. Самоорганизация и наука: опыт философского осмысления. М.: «Арго», 1994.
5. Информация в Internet по адресу <http://www.iph.ras.ru/~mifs/>

6. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука, 1997.

7. Моисеев Н.Н. Расставание с простым. М., 1998. 480 с.

8. Моисеев Н.Н. Быть или не быть... человечеству? М., 1999. 288 с.

Заинтересованный читатель может заказать сборник программ

по электронной почте: E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

по телефону: (845-2) 52-38-64

по почте: 410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ
редакция журнала ПНД

Стоимость наложенного платежа 30 руб.

САМООРГАНИЗАЦИЯ В ОТКРЫТЫХ СИСТЕМАХ

Учебная программа *

Д.И. Трубецков

Специальности – 071500 «Радиофизика и электроника» и 010400 «Физика»

Факультет – физический, д/о; кафедра электроники, колебаний и волн; курс – 4;
семестр – 8.

Лекции – 34 час., экзамен

Дисциплина «Самоорганизация в открытых системах» является специальным курсом, в котором излагаются современные представления физики открытых систем – одного из базовых направлений современной науки. Анализируются основные модели самоорганизации (автоструктуры и ансамбли структур, автоволны), тесно связанные с нелинейными задачами теории волновых процессов, рассматриваемыми в базовом лекционном курсе «Теория волновых процессов».

Тематический план учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	Максимальная учебная нагрузка студента, час.	Количество аудиторных часов при очной форме обучения					Самостоят. работа студентов
		Всего	Лекц.	Лаб. раб.	Практ. занятия	К/раб.	
1	2	3	4	5	6	7	8

1. Физика открытых систем	4	2	2				2
2. Эволюция и развитие науки как открытой системы	8	4	4				4

* © **Сборник программ курсов лекций**, разработанных и читаемых преподавателями факультета нелинейных процессов на физическом факультете, факультете нелинейных процессов и факультете гуманитарных и социальных наук Саратовского государственного университета: Учебно-методическое издание / Под ред. Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. 104 с.

1	2	3	4	5	6	7	8
3. Классификация структур. Определения и примеры	12	8	8				4
4. Колмогоров, Петровский, Пискунов, Фишер и нелинейное уравнение диффузии	6	4	4				2
5. Нелинейные температурные волны	4	2	2				
6. О некоторых базовых моделях самоорганизации	10	6	6				4
7. Аксиоматические модели активных сред. Автоволны	12	8	8				4
Всего:	54	34	34				20

Содержание учебной дисциплины

1. Физика открытых систем (вводные замечания). Немного истории: почему Больцман определил XIX век как век Дарвина, а Анри Пуанкаре полностью отвергал теорию Больцмана. Диссипативные структуры Ильи Пригожина. Сложность открытых систем и синергетика. Роль энтропии в открытых системах. Процесс эволюции в открытых системах. Самоорганизация и деградация. Хаос и порядок. Неравновесные фазовые переходы и условия образования диссипативных структур. О понятии управляющих параметров. Динамическое и статистическое описание сложных движений.

2. Эволюция и развитие науки как открытой системы. Нелинейная динамика и развитие науки. Научное сообщество как диссипативная структура. Аналогия с экосистемами. Некоторые общие модели.

3. Классификация структур. Определения и примеры. Паттерны – это структуры, которые можно классифицировать подобно колебаниям. Свободные структуры. Вынужденные структуры. Автоструктуры (статические, стационарные и динамические). Структуры и их ансамбли в картинках (вихри в идеальных течениях жидкости, дымовые кольца, кольцевые конвективные валы в цилиндрическом контейнере, ячейки Бенара, цепочки вихрей Тейлора в течении Куэтта и др.) Немного о распределенных автоколебательных системах.

4. Колмогоров, Петровский, Пискунов, Фишер и нелинейное уравнение диффузии. Биологическая задача Колмогорова – Петровского – Пискунова (КПП): постановка задачи и основные результаты. Решение задачи КПП в интерпретации Фишера. Уединенный фронт. Бегущий фронт и бегущий импульс.

5. Нелинейные температурные волны. Существуют ли тепловые волны? Нелинейная теплопроводность. Задача Зельдовича и Франк–Каменецкого о нелинейной температурной волне в веществе, выделяющем тепло. Установление стационарного распространения пламени как пример возникновения уединенного фронта.

6. О некоторых базовых моделях самоорганизации (статические, стационарные автоструктуры и ансамбли автоструктур). Структуры Тьюринга. Почему у леопарда пятна на шкуре? Брюсселятор – важнейшая методическая модель в теории самоорганизации. Реакция Белоусова – Жабогинского и орегонатор. Проблема морфогенеза и модель Гирера – Мейнхарда. Ячейки Бенара. Ансамбли автоструктур (основные уравнения, модели, коллективная динамика в одноронних ансамблях невзаимно связанных структур).

7. Аксиоматические модели активных сред. Автоволны. Аксиоматика модели: возбуждение, рефрактерный период, покой. «Возбудимая среда» Винера и Розенблюта. Применение аксиоматических моделей для анализа режимов работы сердечной мышцы (патологические режимы, фибрилляция). Ревербератор – спиральная автоволна. Ведущий центр – источник концентрически расходящихся автоволн. Клеточные автоматы. Игра «Жизнь».

Требования к занятиям. Лекции проводятся в 8 семестре один раз в неделю по два часа.

Требования к умениям студентов. Студент обязан знать основные понятия физики открытых систем, классификацию и определения различных видов структур, уметь привести примеры их возникновения в системах различной природы, знать основные результаты и методику решения нелинейного уравнения диффузии, иметь представление об автоволнах и свойствах активной среды, необходимых для их возбуждения.

Перечень литературы

1. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
3. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Мир, 1992.
4. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992.
5. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997.
6. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Т.1, М.: Янус-К, 1995.
7. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Т.2, М.: Янус-К, 1999.

Заинтересованный читатель может заказать сборник программ

по электронной почте: E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
по телефону: (845-2) 52-38-64
по почте: 410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ
редакция журнала ПНД

Стоимость наложенного платежа 30 руб.

ЭЛЕКТРОНИКА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

Учебная программа *

Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов

Специальность – 071500 «Радиофизика и электроника»
Факультет – физический, д/о; кафедра электроники, колебаний и волн; курс – 4;
семестр – 7, 8
Лекций – 72 час., лабораторий – 72, экзамен, зачет

* © Сборник программ курсов лекций, разработанных и читаемых преподавателями факультета нелинейных процессов на физическом факультете, факультете нелинейных процессов и факультете гуманитарных и социальных наук Саратовского государственного университета: Учебно-методическое издание / Под ред. Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. 104 с.

Дисциплина «Электроника СВЧ» является в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования обязательным курсом для студентов, обучающихся по специальности 071500 «Радиофизика и электроника».

Тематический план учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	Максимальная учебная нагрузка студента, час.	Количество аудиторных часов при очной форме обучения					Самостоят. работа студентов
		Всего	Лекц.	Лаб. раб.	Практ. занятия	К/раб.	
1	2	3	4	5	6	7	8
Введение	4	4	4				
1. Приборы с дискретным взаимодействием (временной резонанс в СВЧ электронике)	28	28	4	24			
2. Гидродинамическое описание электронного потока. Волны пространственного заряда	8	4	4				4
3. Индуцированное излучение в генераторах типа О	6	6	4			2	
4.1. Элементарная теория магнетрона	4	4	4				
4.2. Пространственный заряд в скрещенных полях	16	16	4	12			
5.1. Взаимодействие электронного потока с бегущей прямой электромагнитной волной	20	16	4	12			4
5.2. Нелинейная теория ЛБВО	4	4	4				
5.3. ЛБВО с цепочкой связанных резонаторов	2	2	2				
6.1. Взаимодействие электронного потока с обратной электромагнитной волной	16	16	4	12			
6.2. ЛОВ как эталонная модель распределенной автоколебательной системы	16	16	4	12			
6.3. Методы численного исследования приборов О типа	2	2	2				
6.4. Оротрон	2	2	2				
7. Плазменная сверхвысокая электроника	8	4	2			2	4
8. Взаимодействие криволинейных электронных потоков с электромагнитными волнами	4	4	4				

1	2	3	4	5	6	7	8
9. Сверхизлучения и генерация сверхкоротких импульсов мощного СВЧ излучения	4	4	4				
10. Лазер на свободных электронах или параметрический способ управления электронным потоком	10	6	4			2	4
11. Современная релятивистская сверхвысокочастотная электроника	2	2	2				
12. Нелинейная динамика приборов сверхвысокочастотной электроники	2	2	2				
13. Вакуумная СВЧ микроэлектроника	6	2	2				4
Всего:	164	144	66	72		6	20

Содержание учебной дисциплины

Введение. Основные особенности сверхвысокочастотной электроники. Пять идей, которые создали СВЧ электронику. Наука о колебаниях и волнах, теория излучения и СВЧ электроника. Индивидуальное излучение заряженных частиц (спонтанное излучение классических осцилляторов). Механизм группировки и индуцированное излучение. Линейная и квадратичная группировка. Фазовая селекция и излучение при линейной группировке. Пространственная неоднородность высокочастотного поля и пространственная группировка. Возбуждение резонаторов и волноводов заданными токами.

1. Приборы с дискретным взаимодействием (временной резонанс в СВЧ электронике). Модуляция электронов по скорости и группирование электронов в пространстве дрейфа. «Инерционная группировка»; ее особенности. 100\$ идея братьев Вариян и Хансена. Физические процессы в двухрезонаторном клистрон-усилителе (кинематическое приближение). Трехрезонаторный клистрон (качественное описание). Многорезонаторные клистроны-усилители (телевизионные клистроны). Теория резонансных автогенераторов. Элементарная теория отражательного клистрона: пусковой режим, выходная мощность и к.п.д., зоны колебаний и электронная перестройка частоты. Элементарная теория клистрона-генератора с обратной запаздывающей связью: от режимов монохроматических колебаний до режимов динамического хаоса.

Лабораторные работы на тему «Теория отражательного клистрона» и «Исследование нагрузочных характеристик отражательного клистрона».

2. Гидродинамическое описание электронного потока. Волны пространственного заряда. Гидродинамическое описание электронного потока. Вывод гидродинамических уравнений электроники. Волны пространственного заряда и группирование в пространстве дрейфа. Волны с положительной и отрицательной энергией. Учет влияния пространственного заряда в теории прелетных клистронов. Двухлучевая неустойчивость (абсолютная и конвективная неустойчивость; глобальная неустойчивость). Резистивный усилитель. Неустойчивость Гельмгольца и об одной гипотезе образования спиц в кольцах Сатурна (многопучковая неустойчивость). Неизлучательная неустойчивость Пирса. Диод Пирса (схема численного моделирования, нестационарная динамика и сценарий перехода к хаосу, переход от гидродинамических уравнений к системе интегральных уравнений Годфри, вывод логистического отображения). Оптимальные длины пространства дрейфа клистрона (вычислительный эксперимент). Нелинейные волны пространственного заряда. Циклотронные волны. Связанные волны. Теорема Чу о кинетической мощности.

3. Индуцированное излучение в генераторах типа О. Индуцированное излучение в генераторах типа О. Спонтанное излучение электрона при произвольном движении через резонатор. Связь между индуцированным и спонтанным излучением в резонансных автогенераторах. Сравнение классического и квантового подхода.

Контрольная работа по темам 1, 2.

4. Взаимодействие высокочастотных полей с электронами в скрещенных электрическом и магнитном полях.

4.1. Элементарная теория магнетрона. Кинематическая дрейфовая теория группирования электронов в скрещенных статических электрическом и магнитном полях и в поле бегущей волны. Пространственный резонанс. Силовая группировка. Расчет мощности взаимодействия и к.п.д. применительно к плоского магнетрона. Цилиндрический магнетрон: история создания от Хэлла до Бута и Рэндала. Качественное описание и характеристики современных магнетронов. Что вносит цилиндричность в физику магнетрона. Амплитрон.

4.2. Пространственный заряд в скрещенных полях. Пространственный заряд в скрещенных полях и три загадки магнетрона (свойства магнетрона при магнитном поле больше критического, когда генерации нет; начало генерации в магнетроне; есть ли вообще стационарный режим генерации в магнетроне). Вычислительная физика и магнетрон. Неустойчивость электронного потока в скрещенных полях. Связь с проблемой турбулентности в электронном потоке.

Лабораторная работа на тему «Экспериментальное исследование магнетрона».

5. Лампы с бегущей волной типа О.

5.1. Взаимодействие электронного потока с бегущей прямой электромагнитной волной. Взаимодействие электронного потока с бегущей электромагнитной волной. Лампа бегущей волны (ЛБВ). История изобретения Р. Компфнером ЛБВ. Роль Пирса. Применение метода последовательных приближений к анализу взаимодействия электронного потока с электромагнитными волнами. Качественное описание процесса группирования электронов в бегущей волне. Квадратичная группировка. Принципы подбора для приборов с длительным взаимодействием (нерелятивистские и ультра-релятивистские пучки).

Лабораторная работа на тему «Теория лампы бегущей волны».

5.2. Нелинейная теория ЛБВО. Вывод нелинейных уравнений ЛБВО. Линеаризация нелинейных уравнений ЛБВ. Дисперсионное уравнение ЛБВ. Законы сохранения энергии. Механизм фазировки и ограничения мощности в ЛБВО. Особенности и результаты решения задачи на ЭВМ. О шумах в ЛБВ. Спиральная ЛБВ. Способы повышения к.п.д. ЛБВО.

Лабораторная работа на тему «Исследование шумов в ЛБВ».

5.3. ЛБВО с цепочкой связанных резонаторов. Особенности физических процессов в ЛБВО с цепочкой связанных резонаторов (ЦСР). О дискретном и волновом подходе к анализу взаимодействия в ЛБВО с ЦСР. Об особенностях физических процессов вблизи границ пропускания замедляющей системы. Линейные ускорители заряженных частиц.

6. Лампы с обратной волной.

6.1. Взаимодействие электронного потока с обратной электромагнитной волной. Карсинотрон. «Чужие следы на песке...» – история изобретения лампы обратной волны (ЛОВ) Компфнером и Эпштейном. Теория пускового режима ЛОВ в приближении заданного поля. Лампа обратной волны магнетронного типа.

Лабораторная работа на тему «Теория лампы обратной волны».

6.2. ЛОВ как эталонная модель распределенной автоколебательной системы. Нестационарная теория возбуждения волновода (вывод уравнений, законы сохранения, линеаризация уравнений). Нестационарная теория ЛОВ: от монохроматических автоколебаний через автомодуляцию к динамическому хаосу. Релятивистский карсинотрон: нестационарная теория. Роль пространственного заряда (численный эксперимент). РЛОВ и миллиметровая радиолокация.

6.3. Методы численного исследования приборов О типа. Методы численного решения нелинейных нестационарных задач применительно к приборам с длительным взаимодействием О-типа. Метод «частиц в ячейке». Учет влияния пространственного заряда. Методы расчета полей в замедляющей системе: метод эквивалентных схем и уравнение возбуждения. Конечно-разностный метод решения нестационарных уравнений релятивистского карсинотрона в лагранжевых координатах.

6.4. Оротрон. Взаимодействие электронного потока с полями открытых резонаторов. Излучение Смитта – Парселла. Оротрон. Основные уравнения оротрона. Некоторые результаты теории оротрона. Нестационарные процессы в оротроне. Модификации оротрона.

7. Плазменная сверхвысокочастотная электроника. Плазменно-пучковая неустойчивость и плазменная сверхвысокочастотная электроника. Релятивистский виток. Плазменно-заполненные периодические замедляющие системы. Пазотрон. Методы ускорения ионных пучков.

Контрольная работа по теме 4, 5.

8. Взаимодействие криволинейных электронных потоков с электромагнитными волнами. Взаимодействие криволинейных электронных потоков с незамедленными электромагнитными волнами. Гироприборы. Краткая история. Теория гиротронов. Краткое описание конструкции. Резонаторы гиротронов: свободные колебания, вынужденные колебания. Уравнения стационарных колебаний. Укороченные уравнения автоколебаний в гиромонотроне. Интегрирование укороченных уравнений автоколебаний в гиромонотроне (слаборелятивистское приближение). Пусковой режим гиромонотрона. Мазеры на циклотронном резонансе. Гироклистроны. Гиро-ЛБВ. Гиrolампы со встречной волной. Пениотрон – эталонная модель распределенной системы с силовой группировкой электронов.

9. Сверхизлучение и генерация сверхкоротких импульсов мощного СВЧ излучения. Кооперативное излучение из малых объемов в вакуумной электронике. Сверхизлучение Дике на примере возбужденных двухуровневых атомов. Ближнее поле элементарного электрического диполя. Кооперативное излучение осциллирующих электронов (линейная теория, численные результаты). Феноменологическая модель электронной турбулентности, возникающей в структурированных электронных потоках. Индуцированное излучение, имитирующее кооперативное. Экспериментальные работы последних лет.

10. Лазер на свободных электронах или параметрический способ управления электронным потоком. Нерелятивистские предшественники ЛСЭ – параметрические усилители на волнах пространственного заряда, лампа Адлера и др. Некоторые исторические факты. Убитрон – первый ЛСЭ. «Странная» история его создания. Линейная теория ЛСЭ. Нелинейная одночастичная модель ЛСЭ. Подход, основанный на введении сил Миллера. Семейство ЛСЭ: от микротрона до накопительных колец. Методика и результаты численного моделирования нестационарных процессов в ЛСЭ.

Контрольная работа по теме 6, 7.

11. Современная релятивистская сверхвысокочастотная электроника. Получение сильноточных релятивистских пучков. Уровни мощности. Приборы: аналоги классических устройств (ЛОВ, ЛБВ, клистрон, магнетрон) и "неаналоги" (приборы с вращающимися магнитными полями (гирокон), семейство вириатороподобных приборов, цепочки связанных релятивистских генераторов). Релятивистские генераторы поверхностных волн.

12. Нелинейная динамика приборов сверхвысокочастотной электроники. Некоторые результаты численных и натуральных экспериментов с различными СВЧ приборами. Особенности механизмов перехода к хаосу в СВЧ

генераторах: перекрытие нелинейных резонансов; автомодуляционная неустойчивость; обратная связь, образование и взаимодействие структур в электронном потоке.

13. Вакуумная СВЧ микроэлектроника. Автоэлектронная эмиссия и катоды Спиндта. Закон Фаулера – Нордгейма. Триоды возвращаются? Распределенный усилитель с автоэмиссионными катодами. Гигатрон. О возможностях вакуумной СВЧ микроэлектроники.

Требования к занятиям. Лекции проводятся в 7-м семестре два раза в неделю (по два часа) в течении всего семестра, а лабораторные работы – в 8-м семестре один раз в неделю по четыре часа. Форма отчетности: контрольные работы и экзамен в 7-м семестре; зачет в 8-м семестре.

Требования к умениям студентов. Студент обязан знать основные понятия, модели и методы сверхвысокочастотной электроники; механизм взаимодействия волн пространственного заряда с электромагнитным полем и устройство основных СВЧ генераторов (лампы с бегущей и обратной волной, магнетроны, клистроны, лазеры на свободных электронах, гиротроны); спонтанное и вынужденное излучение потоков заряженных частиц; формирование пучков большой плотности, ограничение тока пространственным зарядом, неустойчивость Пирса.

Перечень литературы

1. *Шевчик В.Н.* Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959.
2. *Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.В.* Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. Саратов: Изд-во СГУ, 1963.
3. *Шевчик В.Н.* Взаимодействие электронных пучков с электромагнитными полями. Саратов: Изд-во СГУ, 1963.
4. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
5. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.
6. Электроника ламп обратной волны / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд-во СГУ, 1975.
7. *Рухадзе А.А. и др.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980.
8. Электронные приборы сверхвысоких частот / Под ред. В.Н. Шевчика и М.А. Григорьева. Саратов: Изд-во СГУ, 1983.
9. *Бедселл Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Атомиздат, 1985.
10. *Цимринг Ш.Е.* Мазеры на циклотронном резонансе. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1988.
11. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. 2-е изд. М.: Наука, 1991.
12. *Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В.* Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.

Заинтересованный читатель может заказать сборник программ

по электронной почте:
по телефону:
по почте:

E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
(845-2) 52-38-64
410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ
редакция журнала ПНД



АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ПРАКТИКУМ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ (СИНЕРГЕТИКЕ)

Б.М. Павлов, М.Д. Новиков

- © Павлов Б.М., Новиков М.Д.
© Издательский отдел факультета вычислительной математики
и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2000
М.: МГУ, 2000. 115 с., 59 илл.
ISBN 5-89407-077-5

Описаны структура и возможности применения автоматизированного практикума, предназначенного для численного исследования математических моделей из предметной области «нелинейная динамика и синергетика». Изучаемые модели описываются *обыкновенными дифференциальными уравнениями, разностными уравнениями* (итерированными отображениями) и могут иметь запаздывающие аргументы. Основу автоматизированного практикума составляет специальная среда решения задач в форме интерактивного программного комплекса с дружественным интерфейсом. Программный комплекс реализован для персональных компьютеров типа IBM PC; в нем широко используются встроенная компьютерная графика в средства анимации графических образов. Программный комплекс удобен для пояснения на лекциях и практических занятиях особенностей нелинейных колебаний и демонстрации различных свойств рассматриваемых моделей, пригоден для самообразования, в том числе дистанционного. Приведены наборы систем дифференциальных и разностных уравнений, которые могут быть исследованы с помощью программного комплекса.

Учебное пособие предназначено студентам университетов и вузов, специализирующимся в области прикладной математики и синергетики, а также может быть полезно студентам других специальностей, изучающим математическое моделирование с помощью компьютеров.

Содержание

Предисловие

Раздел 1. Основные понятия. 1.1. Нелинейная динамика и синергетика. 1.2. Математическая формулировка типового задания для точечных динамических систем. 1.3. Цели обучения в автоматизированном практикуме по нелинейной динамике (синергетике). 1.4. Проведение ВЭ в рамках АП.

Раздел 2. Архитектура программного комплекса в составе автоматизированного практикума. 2.1. Краткая характеристика программного комплекса. 2.2 Архитектура пакета. 2.3. Организация диалога «пакет – исследователь». Основные меню. 2.4. Вычислительные алгоритмы. 2.5. Особенности АП по нелинейной динамике (синергетике) и его место среди компьютерных средств обучения.

Раздел 3. Набор математических моделей с заданиями для ВЭ. 3.1 Системы ОДУ без запаздываний. 3.2. ОДУ с запаздывающими аргументами. 3.3 Системы РУ.

Раздел 4. Ответы к заданиям для ВЭ.

Раздел 5. Теоретические факты и эвристики, полезные в компьютерном практикуме по нелинейной динамике. 5.1. Классификация динамических систем. 5.2. Основные элементы теории устойчивости и бифуркаций систем ОДУ. 5.3. Нелинейные системы, имеющие точные решения. 5.4. Типы и формы колебаний у ДС. 5.5. Катехизис по нелинейной динамике.

Литература

Посвящается
Самарскому
Александрю Андреевичу

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено описанию компьютерного учебного средства – автоматизированного практикума (АП), поддерживающего обучение по дисциплине «нелинейная динамика» (синергетика).

Употребление в заглавии и тексте пособия термина *синергетика* наряду или вместо термина *нелинейная динамика* подчеркивает их определенное родство, так как синергетика является молодой ветвью современной нелинейной динамики, а основные изучаемые понятия, категории и образы (например, бифуркация, аттрактор, диссипативность, стохастичность, динамический хаос) характерны для «нелинейного» языка обеих наук и одинаково в них понимаются.

В обучении нелинейной динамике (синергетике) большая роль отводится компьютерным программам, ибо без вычислений на компьютере практически невозможно «преодоление» нелинейностей, всегда присутствующих в изучаемых математических моделях. Работа по созданию таких программ (демонстрирующих, обучающих и др.) ведется в ряде учебно–научных центров мира, в том числе и на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского университета им. М.В. Ломоносова.

Создание АП по нелинейной динамике (синергетике) было продиктовано двумя причинами:

- необходимостью привлечь внимание студентов и преподавателей к **синергетике**, ставшей популярной благодаря междисциплинарному подходу к изучению эволюции и самоорганизации сложных систем живой и неживой природы, что, в свою очередь, позволяет сблизить естественные и гуманитарные науки и помогает создать современную (постнеклассическую) картину мира;
- необходимостью предоставить студентам и преподавателям **удобную среду** с необходимым набором исследовательских инструментов для проведения на компьютере вычислительных экспериментов с нелинейными математическими моделями.

Практикум назван **автоматизированным** потому, что позволяет решать учебно–исследовательские задачи в **диалоговом режиме без программирования**. причем в диалоге активная роль принадлежит обучаемому и преподавателю, а не пакету прикладных программ в составе АП.

Разработанный автоматизированный практикум состоит из трех компонент: (1) программного комплекса – пакета «Нелинейные динамические системы», (2) наборов нелинейных математических моделей; (3) информационно–методических материалов, облегчающих процесс обучения.

Описываемая версия АП позволяет эффективно решать исследовательские учебные задачи из рассматриваемой предметной области для двух классов **точечных** (то есть эволюционирующих и самоорганизующихся только во времени, а не во времени и пространстве) детерминированных математических моделей. Модель может описываться *обыкновенными дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями* (итерируемыми отображениями). В общем случае в уравнениях допустимы запаздывающие аргументы, то есть некоторые переменные в правых частях уравнений могут явно зависеть от «прошлого».

Программный комплекс реализован в виде интерактивного пакета прикладных программ для персонального компьютера типа IBM PC и ориентирован на знакомство с нелинейными моделями, на исследование динамических режимов их поведения и на освоение студентами технологии вычислительного эксперимента (ВЭ). Среда программного комплекса позволяет в комфортных условиях проводить полноценные вычислительные эксперименты с любой математической моделью указанных выше классов: можно не только получать численное решение на любом достаточно протяженном временном интервале, но и анализировать промежуточные результаты и идентифицировать асимптотические режимы поведения конкретной модели – регулярные и хаотические (стохастические). Для целей анализа и идентификации широко используются встроенные в пакет специальные средства, в том числе иллюстративно–когнитивная компьютерная графика и средства анимации возникающих в ходе ВЭ математических образов. Индивидуальное задание, выполняемое в рамках АП, является, по существу, небольшим исследовательским проектом, побуждающим студента к самостоятельной творческой работе.

В качестве основного учебного руководства для практикума рекомендуется книга [1, §§ 14–20]. Дополнительной учебной литературой по теории уравнений с запаздываниями являются книги [2, 3]. Точечные динамические системы без запаздывающих аргументов, отобранные для практикума по нелинейной динамике, методические указания и необходимые теоретические сведения описаны в учебных пособиях [4, 5]. Приведем краткое содержание данного учебного пособия.

В **первом разделе** описывается предметная область автоматизированного практикума, формулируются цели обучения, дается математическая постановка типовых заданий, поясняется процесс проведения ВЭ. Во **втором разделе** описываются архитектура программного комплекса, применяемые в нем вычислительные алгоритмы и процедуры обработки численных решений, особенности и место АП среди компьютерных средств обучения. В **третьем разделе** представлены модели в форме дифференциальных и разностных систем, не вошедшие в [4, 5]. **Четвертый раздел** включает в себя иллюстративный материал – копии графических экранов, полученных с помощью программного комплекса для приведенных в предыдущем разделе математических моделей. В **пятом разделе** приведены некоторые полезные сведения по нелинейной динамике. В конце пособия дается список литературы.

Б.М. Павлов написал части 1.1, 1.2, 1.3 раздела 1, части 2.1 и 2.5 раздела 2, разделы 3 и 5, составил примеры иллюстраций и список литературы. М.Д. Новиков написал часть 1.4 раздела 1, части 2.2, 2.3 и 2.4 раздела 2, подготовил весь иллюстративный материал и набрал текст оригинал–макета учебного пособия.

Авторы выражают благодарность кафедре исследования операций (зав. кафедрой – акад. П.С. Краснощеков) и вычислительных методов (зав. кафедрой – акад. А.А. Самарский) за предоставленную возможность использования в течение ряда лет в кафедральных практикумах студентов 3–го курса составленных нами наборов математических моделей и пакета «Нелинейные динамические системы». Благодарим также проф. Н.Х. Розова за постоянное внимание к работе авторов, проф. А.П. Кузнецова за предоставление материалов с интересными результатами Саратовской школы нелинейной динамики, М.В. Уфимцева и А.Н. Дойникова за консультации по вопросам спектрального анализа временных рядов и Е.С. Куркину за предоставление программы вычисления показателей Ляпунова.

Литература

1. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. – М.: Наука, 1990.
2. Хейл Дж. Теория функционально–дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984.
3. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978.
4. Павлов Б.М. Вычислительный практикум по исследованию нелинейных динамических систем (самоорганизация во времени). М.: МГУ, 1996.

5. Павлов Б.М., Новиков М.Д. Вычислительный практикум по исследованию нелинейных разностных систем (итерлируемых отображений). – М.: МГУ, 1998.
6. Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур / Колл. авторов. – М.: Наука, 1996.
7. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Наука, 1997.
8. Синергетика. Труды семинара. – М.: Изд-во МГУ, вып.1, 1998; вып. 2, 1999.
9. Труды семинара «Время, хаос и математические проблемы». – М.: Книжный дом «Университет», вып.1, 1999.
10. Zhang S.Y. Bibliography of Chaos. – Singapore, 1991.
11. Самарский А.А., Михайлов А.Г. Математическое моделирование. Иден. Методы. Примеры. – М.: Наука, 1997.
12. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. – М.: Наука, 1983.
13. Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии. – Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. – М.: Наука, 1993.
14. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. – М.: Наука, 1994.
15. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1982, т. 25, с. 1410–1428.
16. Каданов Л.П., Пути к хаосу // Физика за рубежом. 85. – М.: Мир, 1985, с. 9–32.
17. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987.
18. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985.
19. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987.
20. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990.
21. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990.
22. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. – М.: Мир, 1991.
23. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984.
24. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.: Наука, 1997.
25. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1984.
26. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
27. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. – М.: Наука, 1991.
28. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1963.
29. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985, v. 16, № 3, p. 285–317.
30. Залманзон П.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989.
31. Шикин Е.В., Боресков А.В., Зайцев А.А. Начала компьютерной графики. – М.: Диалог-МИФИ, 1993.
32. Довгялло А.М., Ющенко Е.Л. Обучающие системы нового поколения // Управляющие системы и машины. 1988, № 1, с. 83–86.
33. Galloupoulos E., Sameh A. CSE: Content and Product // IEEE Computational Science & Engineering. 1997, v. 4, № 2, p. 39–43.
34. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco; Freeman, 1982.
35. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991.
36. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Красота фракталов. – М.: Мир, 1993.
37. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983, т. 143, с. 343–374.
38. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980.
39. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов / Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1993.
40. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975.
41. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – М.: Физматлит, 1995.
42. Mackey M., Glass L. Oscillation and Chaos in physiological control systems // Science, 1977, 197, p. 287–289.
43. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optional Turbulence: Chaotic Behavior of Transmitted Light from a Ring Cavity // Phys.Rev.Lett. – 1980, v. 45, № 9, p. 709–712.
44. Кан В.А. Возникновение и эволюция хаоса в распределенном генераторе с запаздыванием // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1985, т. 28, № 2, с. 161–176.
45. Ikeda K., Kendo K., Akimoto O. Successive Higher-Harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback // Phys.Rev.Lett. –1982, v. 49, № 20, p. 1467–1470.
46. Shibata A., Saito N. Time delays and Chaos in two Competing Spaces // Math. Bioscience. 1980, v. 51, № 3/4, p. 199–211.



В Издательстве СГУ вышла в свет монография

Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / Под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с. Илл.
ISBN 5-292-02285-3

Изложены фундаментальные основы нелинейной динамики, включающие элементы теории динамических систем, теорию устойчивости, бифуркаций и теорию детерминированного хаоса. Представлены новые результаты по проблемам синхронизации и управления хаосом, реконструкции динамических систем, стохастическому резонансу и синхронизации стохастических колебаний. Для научных работников, аспирантов, докторантов и преподавателей, специализирующихся в области теории нелинейных колебаний, статистической радиофизики и математического моделирования, а также для студентов старших курсов вузов соответствующих специальностей.

Содержание

Предисловие
Глава 1. Динамические системы
Глава 2. Устойчивость, бифуркации, катастрофы
Глава 3. Детерминированный хаос
Глава 4. Аттракторы динамических систем
Глава 5. Базовые модели динамического хаоса
Глава 6. Бифуркационные механизмы перехода к хаосу
Глава 7. Синхронизация хаоса
Глава 8. Управление хаосом
Глава 9. Реконструкция динамических систем
Глава 10. Стохастический резонанс
Глава 11. Синхронизация стохастических систем
Предметный указатель
Лаборатория нелинейной динамики СГУ

Заинтересованный читатель может заказать монографию

по электронной почте: and@cas.ssu.runnet.ru
wadim@chaos.ssu.runnet.ru

по телефонам: (845-2) 51-45-49; 52-38-64

по почте: 410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ
редакция журнала «ПНД»

Стоимость наложенного платежа – 75 руб.



Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136

Банковские реквизиты
р/с №40603810900000000378 ЗАО АКБРиР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

Подписка на II-ое полугодие 2000 года

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498

и по заявочным письмам непосредственно в редакции

Стоимость подписки на II полугодие 90 рублей

Зарубежная подписка оформляется через фирмы-партнеры ЗАО «Международная книга – Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК–Периодика» по адресу: 117049, Москва, ул. Б. Якиманка, 39, ЗАО «МК–Периодика» тел.: (095) 238–14–85, 238–49–67; факс: 238–46–34
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address one of the partners of JSC «Mezhdunarodnaya Kniga–Periodica» in Your country or necessary to address JSC «МК–Periodica» directly

Address: Russia, Moscow, 117049, ul. B. Yakimanka, 39, «МК–Periodica»

Tel.: (095) 238–14–85, 238–49–67; Fax: 238–46–34

E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

Сдано в набор 3.02.00. Подписано к печати 25.05.00. Формат 70x108/16
Бумага финская. Печать плоская. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 8,75 (6,25). Уч.-изд. л. 8,9. Тираж 200 экз. Заказ 173

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.04.98

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845–2)523864, факс (845–2) 523864
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

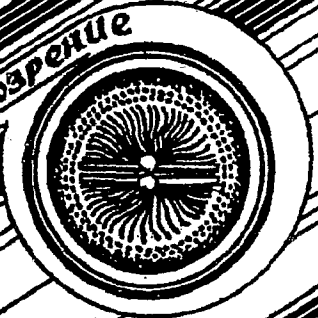
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 2000



Книжное обозрение



студентов и преподавателей



Современной кинематической динамики

EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University
D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

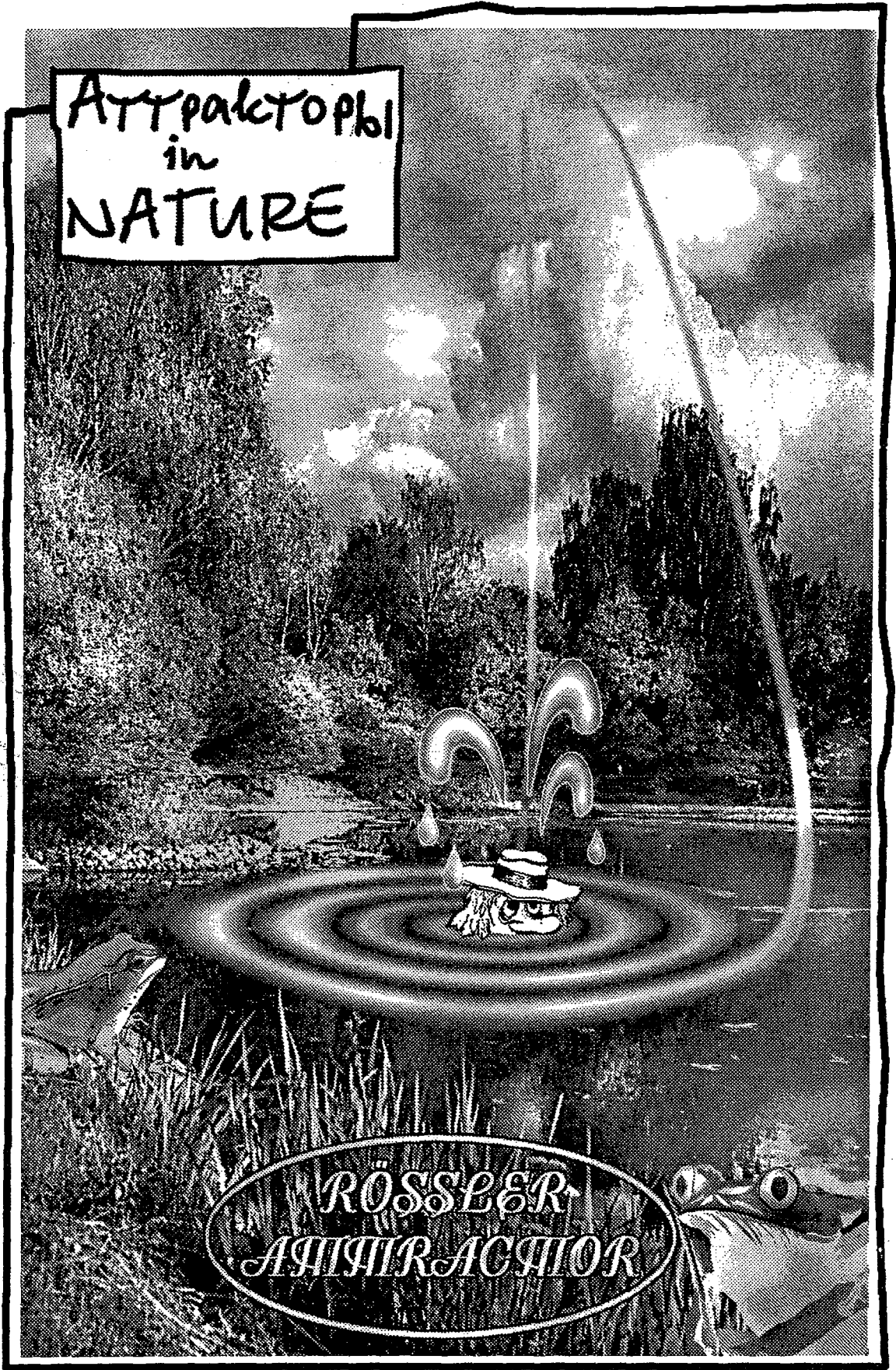
B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

- V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University
- Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow
- B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University
- V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino
- S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov
- P.S. Landa*, Professor, Moscow University
- L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod
- Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University
- E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny
- V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University
- V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University
- V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



Аттракцион
in
NATURE



RÖSSLER
ATTRAKTION