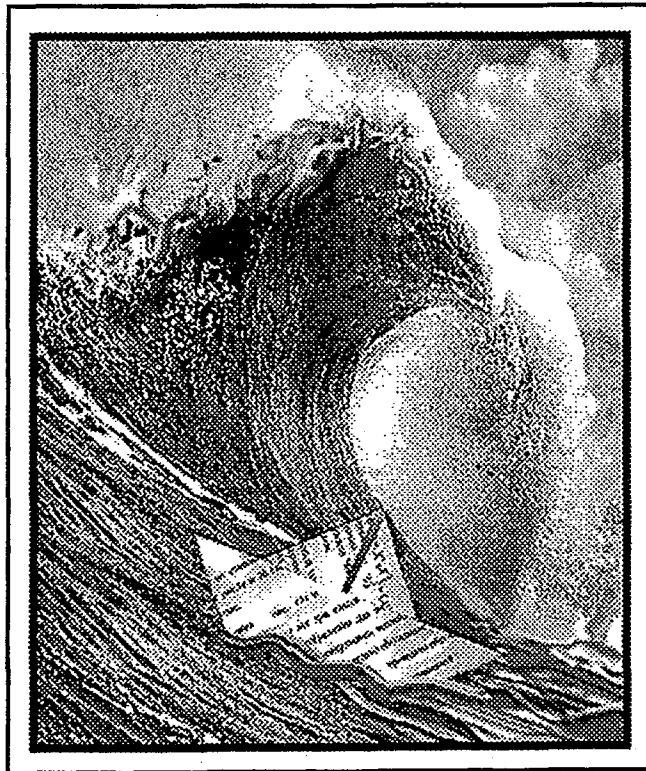


ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

# Трикладная Деловая Динамика



ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



**Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы**



**Обзоры актуальных проблем  
нелинейной  
динамики**



**Конференции, семинары, симпозиумы**



**детерминированный  
АОС**



**Авто-  
волны,  
самоорганизация**



**Прикладные задачи  
нелинейной  
теории  
колебаний  
и волн**



**Нелинейная  
динамика  
в  
лицах.  
История. Personalio**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*В.И. Крицкий*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет

*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

*В.К. Юлатов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

- Жусубалиев Ж.Т., Рудаков В.Н., Сухотерин Е.А.* К динамике отображения Хенона . . . . . 3
- Жалнин А.Ю.* Об инвариантных многообразиях устойчивых траекторий в квазипериодически возбуждаемых системах . . . . . 17

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

- Скрипаль А.В., Усанов А.Д.* Синхронизация движений глаза дафнии внешним электрическим полем. . . . . 27
- Перцев В.Т., Головинский П.А.* Структура двойного слоя вблизи фрактальной поверхности. . . . . 31
- Пономаренко В.П., Кузовкин С.А.* Моделирование асинхронных режимов в системе связанных генераторов с фазовым управлением . . . . . 37

**ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС**

- Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Специальные функции в теории детерминированного хаоса . . . . . 50

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ**

- Шараевский Ю.П., Малюгина М.А.* Моделирование нелинейных процессов на магнитостатических волнах в связанных ферромагнитных структурах. . 59

**НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ**

- Явчуновский В.Я.* Исследование физики процесса возбуждения субгармоник основного усиливаемого сигнала в широкополосных усилителях СВЧ-диапазона . . . . . 68
- Явчуновский В.Я.* Исследование нелинейных свойств эффекта Компфнера в режиме подавления больших сигналов и при наличии мощной встречной волны . . . . . 76

**КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА**

- Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны . . . . . 85
- Кузнецов А.П.* Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос . . . . . 91

**КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ . . . . . 94**

## CONTENTS

## BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- On dynamics of the Henon map. *Zh.T. Zhusubaliyev, V.N. Rudakov, E.A. Soukhoterin* . . . . . 3
- On invariant manifolds of stable trajectories in quasiperiodically forced nonlinear dynamical systems. *A.Y. Jalnina* . . . . . 17

## APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Synchronization of the eye movements of daphnia by external electric field. *A.V. Skripal, A.D. Usanov* . . . . . 27
- Double layer structure at the fractal surface. *V.T. Pertzhev, P.A. Golovinski* . . . . . 31
- Numerical simulation of asynchronous regimes in the system of coupled oscillators with phase control. *V.P. Ponomarenko, S.A. Kuzovkin* . . . . . 37

## DETERMINISTIC CHAOS

- Special functions in the theory of deterministic chaos. *A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin* . . . . . 50

## NONLINEAR WAVES. SOLITONS

- Modeling of nonlinear processes on magnetostatic waves in coupled ferromagnetic structures. *Yu.P. Sharaevsky, M.A. Malugina* . . . . . 59

## INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Investigation of physics of main signal subharmonics generation in wide band microwave amplifiers. *V.Y. Yavchunovsky* . . . . . 68
- Investigation of nonlinear properties of the Kompfner effect in the mode of high level signal reduction in the presence of powerful opposite wave. *V.Y. Yavchunovsky* . . . . . 76

## STUDENT'S BOOKSHELF

- Nonlinear waves. *N.M. Ryskin, D.I. Trubetskov* . . . . . 85
- Oscillations, catastrophes, bifurcations, chaos. *A.P. Kuznetsov* . . . . . 91

- CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS . . . . . 94



## К ДИНАМИКЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ХЕНОНА

*Ж.Т. Жусубалиев, В.Н. Рудаков, Е.А. Сухотерин*

Численно и аналитически изучается разбиение плоскости параметров двумерного отображения Хенона на области режимов периодических и хаотических колебаний. Анализируются закономерности возникновения различных движений и бифуркационные переходы. Показывается, что в плоскости параметров существуют области, где имеет место неединственность движений, вследствие чего при вариации параметров возможна резкая смена характера динамики, проявляющаяся во внезапном переходе от одних устойчивых циклов к другим либо в катастрофической хаотизации колебаний.

### Введение

Отображение Хенона – двумерное отображение, имеющее вид

$$\begin{aligned} X_k &= F(X_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad X = (x_1, x_2)', \quad F = (f_1, f_2)', \\ f_1 &= 1 - \alpha x_1^2 + x_2, \\ f_2 &= \beta x_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент нелинейности,  $\beta$  – коэффициент диссипации ( $|\beta| < 1$ ). Знак «штрих» означает операцию транспонирования.

Отображение (1) было введено М. Хеноном [1] в качестве отображения Пуанкаре для трехмерной дифференциальной системы. С тех пор оно интенсивно изучалось с различными целями многими авторами как численно, так и теоретически (см., например, [2–11]).

Разнообразие различных движений, порождаемых двумерным отображением Хенона [1,2], в зависимости от параметров является типичным для широкого класса динамических систем [3–17]. Например, в [6] и других работах показано, что отображение (1) хорошо демонстрирует типичные бифуркации и сценарии перехода к хаосу в трехмерной модели радиofизического генератора с инерционной нелинейностью. Подобная «эквивалентность» была обнаружена нами при рассмотрении моделей определенного класса систем автоматического управления, например, двух- и трехмерных моделей систем с широтно-импульсной модуляцией и четырехмерной модели релейной системы с гистерезисом [12–15]. Таким образом, значение отображения Хенона для многих приложений динамического хаоса и в изучении сложных нелинейных явлений в самых различных физических системах и их математических моделях является существенным.

Данная работа является обобщением результатов, представленных в [11].

Особый упор делается на детализации структуры и свойств разбиения плоскости управляющих параметров динамической системы (1) на области существования периодических движений и хаоса.

## 1. Разбиение плоскости параметров отображения Хенона на области различных режимов колебаний

Начнем с нескольких предварительных замечаний.

Пусть  $X_{c_i}, i=\overline{1, m}$  – периодическое движение ( $m$ -цикл) динамической системы (1). Очевидно, что все  $X_{c_i}, i=\overline{1, m}$  удовлетворяют уравнению

$$X_c - F^{(m)}(X_c) = 0, \quad F^{(m)} = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{m \text{ раз}}. \quad (2)$$

Локальная устойчивость  $m$ -цикла определяется условием

$$|\rho_k| < 1, \quad k = 1, 2,$$

где  $\rho_1, \rho_2$  – собственные значения (мультипликаторы) основной матрицы  $\Phi_m$ , являющиеся корнями уравнения

$$\det(\Phi_m - \rho E) = 0,$$

$$\Phi_i = \partial/\partial X_{c(i-1)}[F(X_{c(i-1)})]\Phi_{i-1}, \quad \Phi_0 = E, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\partial/\partial X_{c(i-1)}[F(X_{c(i-1)})] = \begin{vmatrix} -2\alpha x_{1c(i-1)} & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь  $E$  – единичная матрица.

Пусть  $P=(\alpha, \beta)$  – множество параметров динамической системы (1);  $P=(\alpha, \beta)$  – фиксированный набор значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$  (точка в этой плоскости  $P=(\alpha, \beta) \in \Pi$ );  $X_{c_i}(P), i=\overline{1, m}$  – локально устойчивый  $m$ -цикл, соответствующий точке  $P$ .

Пусть  $\Pi_{k,j}$  – односвязные множества параметров  $\Pi_{k,j} \subset \Pi, k \geq 1, j = \overline{1, 2, \dots, s}$  такие, что для любых  $P \in \Pi_{k,j}$  существует устойчивый  $m$ -цикл  $X_{c_i}(P), i=\overline{1, m}$ , непрерывный по параметрам в  $\Pi_{k,j}$ . Если в точке  $P$  существует несколько устойчивых периодических  $m$ -циклов, то разным движениям соответствуют разные  $\Pi_{k,j}$ . Для  $\Pi_{k,j}$   $k$ -цикл является минимальным, то есть в  $\Pi_{k,j}$  нет  $m$ -циклов с  $m < k$ . Индекс  $j$  введен для различения множеств с одинаковым  $k$ . Величина  $s$  может быть конечной или бесконечной.

Границы  $\Gamma_{k,j}$  множеств  $\Pi_{k,j}$  могут быть следующих типов:

- простые, то есть для любых точек  $P \in \Gamma_{k,j}$  существует устойчивый  $m$ -цикл, что связано с ограниченностью диапазонов вариации параметров;
- границы  $\Gamma_{k,j}$  образованы совокупностью бифуркационных значений параметров либо точек сгущения, отвечающих аperiodическим движениям.

Точка  $P_* \in \Pi$  является бифуркационной, если уравнение [15,16]

$$\chi(P, \rho) = \rho^2 + \xi_1 \rho + \xi_2 = 0,$$

$$\chi(P, \rho) = \det(\Phi_m - \rho E)$$

при  $P=P_*$  имеет хотя бы один корень, лежащий на единичной окружности.

Это случаи, когда наибольший по модулю мультипликатор  $m$ -цикла

обращается в 1 или  $-1$ . Соответствующие бифуркационные кривые в плоскости параметров определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\chi(P,1) &= 1 + \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ \chi(P,-1) &= 1 - \xi_1 + \xi_2 = 0.\end{aligned}$$

По аналогии с [15,16] эти кривые здесь и далее будем обозначать  $N_+$  и  $N_-$ , соответственно.

Интересным, с точки зрения понимания большого многообразия различных движений, порождаемых динамической системой (1), является изучение возможности непустых пересечений множеств  $\Pi_{k,j}$  и свойств  $\Pi_{k,j}$  в совокупности.

Пусть диапазон вариации параметров динамической системы (1) лежит в пределах  $\Pi = \{(\alpha, \beta): -1 < \alpha < 4; |\beta| < 1\}$ .

Рассмотрим сначала решения уравнения (2) для различных значений  $m$  и исследуем локальную устойчивость  $m$ -циклов.

Для  $m=1$  уравнение (2) имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha x_{1c}^2 + (1 - \beta)x_{1c} - 1 &= 0, \\ x_{2c} &= \beta x_{1c}\end{aligned}\tag{3}$$

Корни этого уравнения соответствуют устойчивому и неустойчивому 1-циклам отображения (1)

$$\begin{aligned}x_{1c} &= \{\beta - 1 \pm [(1-\beta)^2 + 4\alpha]^{1/2}\}/(2\alpha), \\ x_{2c} &= \beta x_{1c}.\end{aligned}$$

Область существования устойчивого 1-цикла ограничена бифуркационными кривыми  $N_+, N_-$

$$\beta^2 - 2\beta + 4\alpha + 1 = 0,\tag{4}$$

$$3\beta^2 - 6\beta - 4\alpha + 3 = 0,\tag{5}$$

соответственно. Обозначим эту область через  $\hat{\Pi}_{1,1}$

$$\hat{\Pi}_{1,1} = \{(\alpha, \beta): -1/4(\beta-1)^2 \leq \alpha \leq 3/4(\beta-1)^2, |\beta| < 1\}.$$

При  $P \in \hat{\Pi}_1$ ,  $\hat{\Pi}_1 = \{(\alpha, \beta): -1 < \alpha < -1/4(\beta-1)^2, |\beta| < 1\}$  уравнение (3) не имеет действительных корней. На кривой  $\alpha = -1/4(\beta-1)^2, -1 < \beta < 1$  уравнение (3) принимает вид

$$[x_{1c} - 2/(1-\beta)]^2 = 0$$

и имеет кратный корень. При движении по параметрам вдоль некоторой гладкой кривой (траектории деформации) внутрь области  $\alpha > -1/4(\beta-1)^2, -1 < \beta < 1$  от этого решения непрерывно ответвляются два действительных корня: один из них отвечает устойчивому, а другой – неустойчивому 1-циклу. При обратном переходе устойчивый 1-цикл исчезает, сливаясь с неустойчивым в точках пересечения траектории деформации с кривой (4).

Легко видеть, что  $\alpha = -1/4(\beta-1)^2 < 0$ . Проследим теперь за эволюцией устойчивого и неустойчивого 1-циклов при изменении  $\alpha$  от отрицательных значений к положительным при переходе через  $\alpha=0$ . Обозначим через  $X_c^s, X_c^u$  решения уравнения (2), соответствующие устойчивому и неустойчивому 1-циклу.

При  $\alpha=0$  уравнение (2) имеет единственное решение

$$x_{1c} = 1/(1-\beta), \quad x_{2c} = \beta/(1-\beta).$$

Очевидно, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm 0} x_{1c}^S = 1/(1-\beta), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pm 0} x_{2c}^S = \beta/(1-\beta).$$

Отсюда решение уравнения (2), отвечающее устойчивому 1-циклу, гладко зависит от параметров в  $\hat{\Pi}_{1,1}$ , тогда как  $X_c^U$  непрерывно в  $\hat{\Pi}_{1,1}$  за исключением точек, в которых  $\alpha=0$ . В точках  $\alpha=0$ ,  $|\beta|<1$  решение  $X_c^U$  терпит разрыв второго рода.

Различие в характере зависимости решений  $X_c^S$ ,  $X_c^U$  от параметров показано на рис. 1, а. Зависимости мультипликаторов устойчивого и неустойчивого 1-циклов приведены на рис. 1, б.

При пересечении траектории деформации с бифуркационной кривой (5) 1-цикл теряет устойчивость и мягко возникает устойчивый 2-цикл в результате бифуркации удвоения периода. Оба 1-цикла продолжают существовать как неустойчивые во всей области параметров за бифуркационной кривой (5).

Для  $m=2$  уравнение (2) принимает вид

$$\alpha^3 x_{1c}^4 - 2\alpha^2 x_{1c}^2 + (1-\beta)^3 x_{1c} - (1-\beta)^2 + \alpha = 0,$$

$$x_{2c} = \beta(1-\alpha x_{1c}^2)/(1-\beta).$$

В области  $\alpha > 3/4(\beta-1)^2$  это уравнение имеет четыре действительных корня. Два из них соответствуют двум неустойчивым 1-циклам. Нетрудно показать, что 2-цикл удовлетворяет уравнению

$$\alpha^2 x_{1c}^2 - \alpha(1-\beta)x_{1c} + (1-\beta)^2 - \alpha = 0, \quad (6)$$

$$x_{2c} = \beta(1-\alpha x_{1c}^2)/(1-\beta).$$

Множество  $\hat{\Pi}_{2,1}$ , на котором определен устойчивый 2-цикл, ограничено бифуркационной кривой (5) и кривой, определяемой уравнением

$$5\beta^2 - 6\beta - 4\alpha - 5 = 0, \quad (7)$$

то есть

$$\hat{\Pi}_{2,1} = \{(\alpha, \beta): 3/4(\beta-1)^2 \leq \alpha \leq 1/4(5\beta^2-6\beta-5), |\beta|<1\}.$$

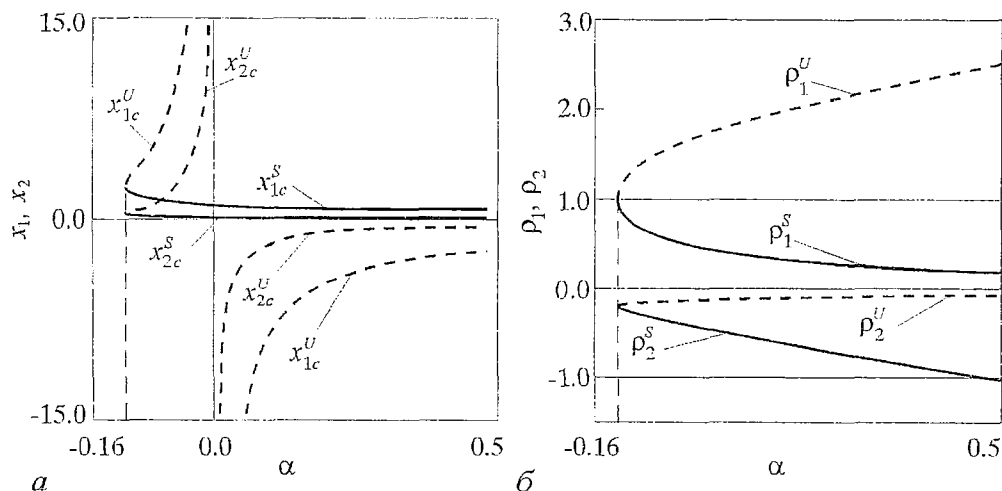


Рис. 1. а – зависимость устойчивого (индекс S) и неустойчивого (индекс U) однопериодных циклов от параметра  $\alpha$ ; б – изменение соответствующих мультипликаторов  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ; здесь  $\beta=0.2$



При переходе через границу (7) в область  $\alpha > 1/4(5\beta^2 - 6\beta - 5)$ ,  $|\beta| < 1$  мягко возникает устойчивый 4-цикл, а 2-цикл продолжает существовать, но становится седловым.

Для  $m=2^{i-1}$ ,  $i=3,4,\dots$  получение бифуркационных формул в явном виде становится все сложнее. Все остальные множества  $\hat{\Pi}_{2^{i-1},1}$ ,  $i=3,4,\dots$  строились численно. На рис. 2 приведена совокупность  $\hat{\Pi}_{2^{i-1},1}$ ,  $i=1,2,\dots$ , образующих  $\Pi_{1,1}$

$$\Pi_{1,1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{2^{i-1},1}.$$

Итак, множество  $\Pi_{1,1}$  состоит из областей существования устойчивых  $2^{i-1}$ -циклов,  $i=1,2,3,\dots$ . Границы, разделяющие указанные области в  $\Pi_{1,1}$ , соответствуют бифуркационным кривым удвоения периода. Множество  $\Pi_{1,1}$  слева ограничено бифуркационной кривой (4), а справа – кривой, образованной совокупностью точек сгущения.

Рассмотрим теперь  $\Pi_{k,j} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{k \cdot 2^{i-1},j}$  для  $k \neq 1$ . Для  $m=3$  из (2) находим

$$\begin{aligned} & \alpha^6 x_{1c}^6 - \alpha^5(1-\beta)x_{1c}^5 + \alpha^4[(1-\beta)^2 - 3\alpha]x_{1c}^4 - \alpha^3(1-\beta)(1 + \beta^2 - 2\alpha)x_{1c}^3 + \\ & + \alpha^2[\beta^4 - \beta^2 + 1 - (3\alpha + 2\beta)(1 - \alpha + \beta^2)]x_{1c}^2 + \alpha(\beta-1)[(1 + \beta + \beta^2)^2 + \alpha^2 - 2\alpha]x_{1c} + \\ & + 1 + \beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 - \alpha(1 - 2\alpha + \alpha^2 - 4\beta - 5\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4 - 2\alpha\beta^2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Корни этого уравнения можно найти только численно. Попытаемся определить уравнение бифуркационной кривой  $N_+$  для 3-цикла. Учитывая, что при значениях параметров, лежащих на кривой  $N_+$ , уравнение (8) имеет только кратные корни, получим

$$x_{1c}^3 - x_{1c}^2(1-\beta)/(2\alpha) + \sigma x + \vartheta = 0.$$

Здесь

$$\sigma = (2\alpha - \alpha^2 - 1 - \beta - \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta^3)/(2\vartheta^{1/2}),$$

где

$$\vartheta = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 - \alpha(1 - 2\alpha + \alpha^2 - 4\beta - 5\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4 - 2\alpha\beta^2).$$

Уравнение искомой бифуркационной кривой имеет вид

$$-8[\mu(\alpha,\beta)]^{1/2} + (1-\beta)(1+\beta)^2 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu(\alpha,\beta) = & 1 + \beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 - \\ & - \alpha(1 + \alpha^2 - 4\beta - 5\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4) + \\ & + 2\alpha^2(1+\beta^2). \end{aligned}$$

Остальные области  $\hat{\Pi}_{3 \cdot 2^{i-1},1}$ ,  $i=2,3,\dots$ , также как и  $\hat{\Pi}_{2^{i-1},1}$ ,  $i=3,4,\dots$ , были построены численно. На рис. 3 приведена совокупность областей

$$\Pi_{3,1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{3 \cdot 2^{i-1},1}; \quad \Pi_{k,1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{k \cdot 2^{i-1},1},$$

$$k = 5,6,7,8,10,12$$

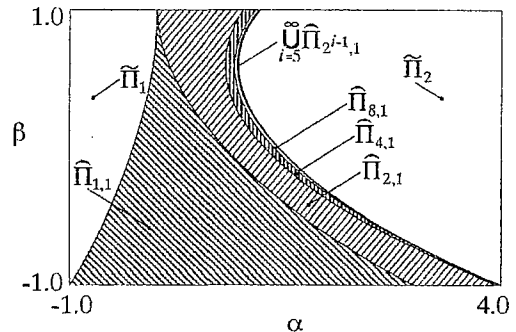


Рис. 2. Совокупность множеств  $\hat{\Pi}_{2^{i-1},1}$ ,  $i=1,2,\dots$ , образующих  $\Pi_{1,1}$ . Через  $\tilde{\Pi}_1$  и  $\tilde{\Pi}_2$  обозначены области расходимости отображения

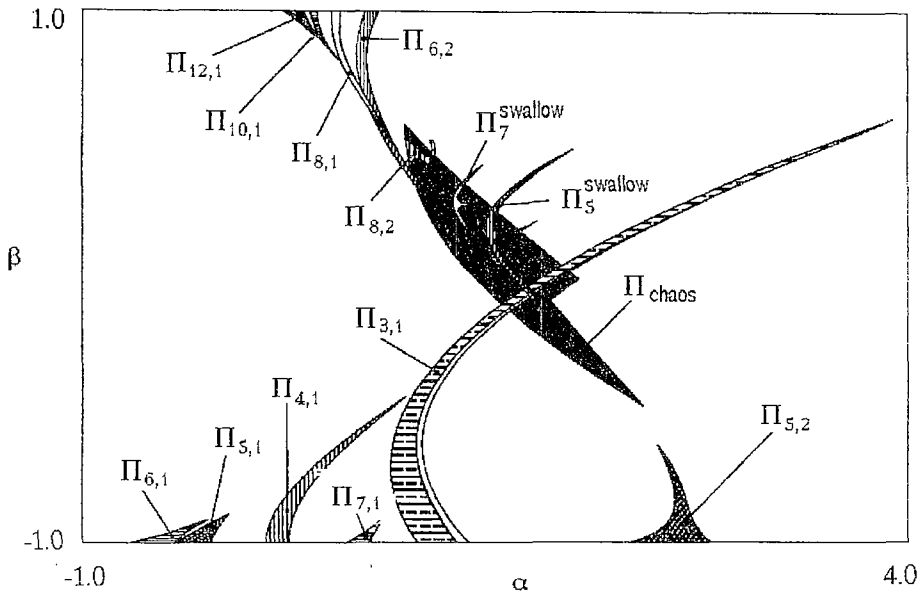


Рис. 3. Совокупность множеств  $\Pi_{3,1}$ ,  $\Pi_{k2^{i-1},1}$ ,  $i=1,2,\dots, k=5,6,7,8,10,12$  и  $\Pi_{k,2}$ ,  $k=5,6,8$ .  $\Pi_{\text{chaos}}$  – область хаотичности

и

$$\Pi_{k,2} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widehat{\Pi}_{k2^{i-1},2}, \quad k = 5,6,8,$$

которые удалось найти численно. Естественно, на рис. 3 показаны только относительно большие в  $\Pi$  множества.

Двухпараметрическая диаграмма разбиения плоскости параметров  $\Pi = \{(\alpha, \beta) : -1 < \alpha < 4; |\beta| < 1\}$  отображения Хенона на области различных режимов колебаний приведена на рис. 4. К участкам границ  $\Pi_{k,j}$ , образованных множеством точек сгущения, примыкают области хаотичности. На диаграмме выделена только наибольшая из них. Эта область на рис. 3, 4 показана сплошным черным цветом и обозначена  $\Pi_{\text{chaos}}$ . Остальные области являются очень узкими, ввиду чего они не нашли отражения на диаграмме. В области  $\Pi_{\text{chaos}}$  существует большое число окон с детерминированной динамикой, начинающихся с  $m$ -циклов, возникающих через седло-узловую бифуркацию. Внутренняя структура таких областей может быть аналогична приведенной для  $\Pi_{k,j}$ , а может и отличаться. На рис. 3 области, свойства которых отличаются от свойств  $\Pi_{k,j}$ , обозначены  $\Pi_k^{\text{swallow}}$ . Области  $\Pi_k^{\text{swallow}}$  имеют специфические особенности в структуре внутреннего устройства и известны как «ласточкин хвост» или «crossroad area». Структура этих областей и бифуркации являются характерными для многих нелинейных динамических систем и хорошо изучены (см., например, [18–22]).

Для любой точки  $P \in \Pi$  (за исключением точки  $P=(0,0)$ ) в фазовом пространстве динамической системы (1) существует односвязная либо не односвязная область  $D_*$  такая, что если  $X_0 \in D_*$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_k(X_0)\| = \infty, \quad X_k(X_0) = F^{(k)}(X_0). \quad (9)$$

На рис. 4 (см. также рис. 2) через  $\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2$  обозначены те области  $\Pi$  (незаштрихованная область), где для всех точек  $P \in \tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2$  имеет место (9) при любых  $X_0$  (в [8] эта область названа областью расходимости отображения (1)).

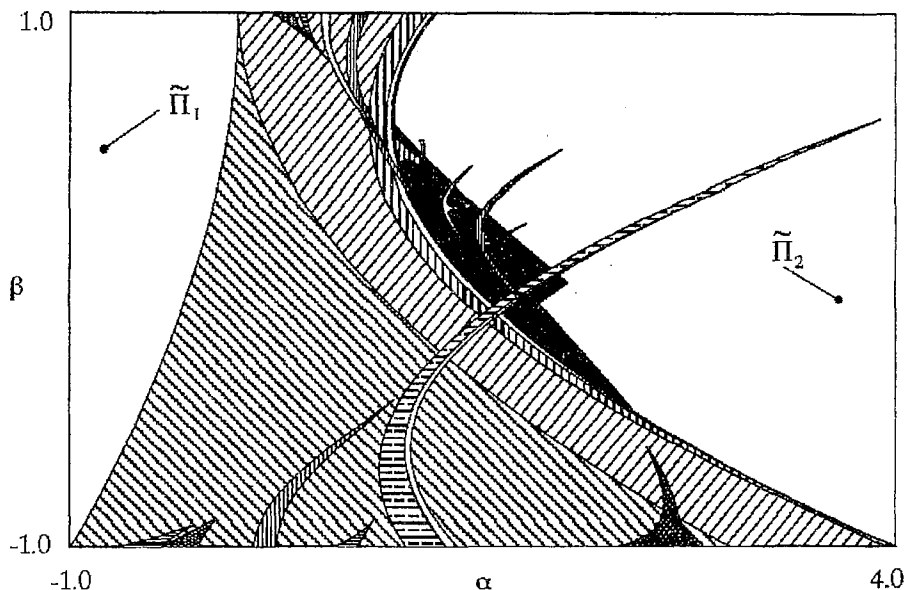


Рис. 4. Разбиение плоскости параметров отображения Хенона на области устойчивости различных колебательных режимов

Из рис. 3, 4 видно, что все множества  $\Pi_{k,j}$ , за исключением  $\Pi_k^{\text{swallow}}$ , пересекаются непусто с  $\Pi_{1,1}$ , причем  $\Pi_{i,l} \cap \Pi_{q,p} \neq \emptyset$  ( $i, q > 1, i \neq q$ ). Это означает, что для каждой  $P \in \Pi_{i,l} \cap \Pi_{q,p}$  существуют различные устойчивые  $m$ -циклы, соответствующие  $\Pi_{i,l}$  и  $\Pi_{q,p}$ .

Нетрудно видеть, что

$$\Pi_{3,1} \cap \Pi_5^{\text{swallow}} \neq \emptyset, \Pi_i^{\text{swallow}} \cap \Pi_j^{\text{swallow}} \neq \emptyset, i \neq j.$$

### 3. Бифуркационный анализ отображения Хенона

Опираясь на полученные результаты, остановимся несколько подробнее на анализе бифуркаций при движении по параметрам в области  $(\bigcup_{k,j} \Pi_{k,j}) \cup \Pi_{\text{chaos}}$ . Для определенности анализ проведем в сечении  $\beta=0.3$ , изменяя параметр  $\alpha$  в диапазоне

$$\Omega_\alpha = \{\alpha: -1/4(\beta-1)^2 < \alpha < v, |\beta| < 1, v < 4, (v, \beta = \text{const})\}.$$

На рис. 5, а приведена бифуркационная диаграмма, рассчитанная при указанном значении  $\beta$  и вариации  $\alpha$ . На этой диаграмме легко видеть, что усложнение колебаний при непрерывном изменении параметра  $\alpha$  в сторону возрастающих значений происходит путем сгущающейся последовательности бифуркаций удвоения периода, заканчивающейся при некотором критическом значении параметра  $\alpha$  установлением аperiodического движения. Затем следует область хаотичности. Диапазоны изменения  $\alpha$ , в которых наблюдаются хаотические колебания, разделены малыми интервалами, где существуют устойчивые циклы.

В области  $-1/4(\beta-1)^2 < \alpha < v, |\beta| < 1, v < 4, (v, \beta = \text{const})$  с изменением параметра  $\alpha$  жестко возникает множество других устойчивых движений, например, 3-, 6-, 8-, 18-циклы и другие, с последующими бифуркациями удвоения периода. В результате существенно усложняется общая картина ветвления циклов. Для того,

чтобы прояснить эту картину, проследим за эволюцией различных устойчивых циклов в зависимости от  $\alpha$ . Результаты расчетов сведены в табл. 1. Первый столбец таблицы указывает ветвь, второй – периодичность цикла, третий – номер цикла в пределах ветви, четвертый и пятый – границы диапазона существования локально устойчивого  $m$ -цикла. Последний столбец указывает величину этого диапазона.

Данные таблицы удобно представить в виде диаграммы (рис. 5, б), названной в [11,13] картиной ветвления. На этой диаграмме по оси абсцисс откладывается значение варьируемого параметра, а по оси ординат – величина  $m$ . На рисунке приведены не все ветви, указанные в табл. 1, а только те, область существования которых является относительно большой.

Таблица 1

$V_{k,j}$	$m$	$i$	$\alpha_{k,2^{i-1}j}$	$\alpha_{k,2^i j}$	$\Delta\alpha$
$V_{1,1}$	1	1	-0.1225	0.3675	0.49
	2	2	0.3675	0.9125	0.545
	4	3	0.9125	1.0258554050738	0.1133554050738
	8	4	1.0258554050738	1.0511256620352	0.0252702569614
	16	5	1.0511256620352	1.0565637581588	0.0054380961236
	32	6	1.0565637581588	1.0577304656609	0.0011667075021
	64	7	1.0577304656609	1.0579808932	0.0002255343391
	128	8	1.0579808932	1.0580344521	0.0000535589
	256	9	1.0580344521	1.0580459231	0.000011471
$V_{6,1}$	6	1	1.062372	1.0710703629071	0.0086983629071
	12	2	1.0710703629071	1.0750124047736	0.0039420418665
	24	3	1.0750124047736	1.0759204758	0.000908071087
	48	4	1.0759204758	1.0761186644	0.0001981886
	96	5	1.0761186644	1.0761612671	0.0000426027
$V_{7,1}$	7	1	1.2266174	1.2541834642429	0.0275660642429
	14	2	1.2541834642429	1.2600151726701	0.0058317084272
	28	3	1.2600151726701	1.2614289068416	0.0014137341715
	56	4	1.2614289068416	1.2617	0.0002710931584
$V_{9,1}$	9	1	1.293952248	1.2940570232	0.0001047748
	18	2	1.2940570232	1.2941079422	0.000050919
	36	3	1.2941079422	1.2941199612	0.000012019
	72	4	1.2941199612	1.2941226013	0.0000026401
$V_{12,1}$	12	1	1.0720080196	1.0728902059	0.0008821863
	24	2	1.0728902059	1.0733516722	0.0004614663
	48	3	1.0733516722	1.0734589837	0.0001073115
	96	4	1.0734589837	1.0734824547	0.000023471
$V_{20,1}$	20	1	1.0675791454	1.0677430954543	0.0001790954543
	40	2	1.0677430954543	1.0678313511	0.000088255646
	80	3	1.0678313511	1.0678520309	0.0000206798
$V_{20,2}$	20	1	1.10	1.1012085844	0.0012085844
	40	2	1.1012085844	1.1012928253	0.0000842409
	80	3	1.1012928253	1.1013113061	0.0000184808
$V_{21,1}$	21	1	1.26887	1.2692033433938	0.0003333433938

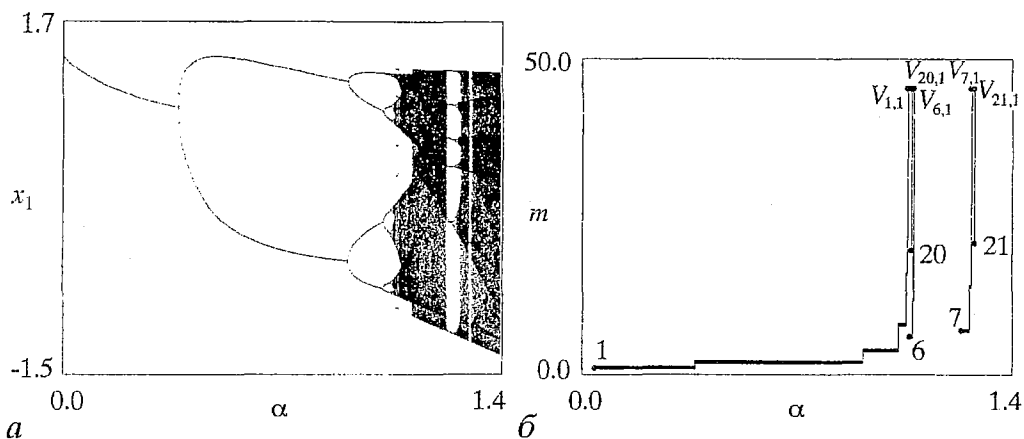


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма (а) и картина ветвления для  $0 \leq \alpha \leq 1.4$  (б); здесь  $\beta = 0.3$

Далее используются обозначения, принятые в [11,13]. Для ветвей введены обозначения  $V_{k,j}$ , где индекс  $k$  указывает, с какого  $k$ -цикла начинается ветвь. Максимальное значение  $j$  указывает на количество найденных ветвей, имеющих одно и то же значение  $k$ . Все ветви начинаются с  $k$ -циклов, возникающих жестко. Некоторые из  $V_{k,j}$  определены на множествах, которые не были указаны на рис. 4 в силу малости их размеров в  $\Pi$ .

Диапазон существования каждой ветви  $V_{k,j}$  представляется в виде совокупности интервалов

$$\{\alpha: \alpha_{k \cdot 2^{i-1}, j} < \alpha < \alpha_{k \cdot 2^i, j}\}, \quad i=1, 2, \dots$$

Здесь параметры  $\alpha_{k \cdot 2^i, j}$ ,  $i=1, 2, \dots$  соответствуют потере устойчивости  $k \cdot 2^{i-1}$ -цикла и мягкому возникновению  $k \cdot 2^i$ -цикла,  $\alpha_{k, j}$  – жесткому возникновению  $k$ -цикла. С увеличением  $i$  происходит сужение интервалов  $\Delta \alpha_{k \cdot 2^{i-1}, j} = \alpha_{k \cdot 2^i, j} - \alpha_{k \cdot 2^{i-1}, j}$  существования  $k \cdot 2^{i-1}$ -цикла (см. табл. 1), так что для каждой ветви имеется предельное значение  $\alpha_{k, j^*}$ , отвечающее аperiodическому движению

$$\alpha_{k, j} < \alpha_{k \cdot 2, j} < \dots < \alpha_{k \cdot 2^i, j} < \dots < \alpha_{k, j^*}.$$

Следуя [12], эти параметры назовем точками сгущения. Точки сгущения на рис. 5, б изображены в виде вертикальных линий. Начала окон периодичности на бифуркационных диаграммах совпадают с началом соответствующих ветвей. Некоторые из  $V_{k,j}$  ( $k \neq 1$ ) пересекаются с  $V_{1,1}$ -непусто. В тех диапазонах  $\alpha$ , где  $V_{1,1} \cap V_{k,j} \neq \emptyset$ ,  $k \neq 1$  кроме устойчивого  $2^i$ -цикла существуют и устойчивые  $k \cdot 2^d$ -циклы ( $i, d \geq 0$ ). Установление того или иного  $m$ -цикла определяется начальными условиями и свойствами области притяжения этого движения. Характер разбиения фазовой плоскости системы (1) на области притяжения различных циклов в точках  $P \in \Pi_{i,l} \cap \Pi_{q,p}$  проиллюстрирован на рис. 6, а численные данные приведены в табл. 2. Первый столбец таблицы содержит номера диаграмм с изображением областей притяжения, указанные на рис. 6. Во втором и третьем столбце табл. 2 приведены значения параметров, при которых рассчитывались области притяжения. В четвертом столбце приведены периоды сосуществующих устойчивых циклов (aperiodическим колебаниям соответствует  $m=0$ ). В последних столбцах указаны граничные значения переменных  $x_1, x_2$ .

Сопоставляя картины ветвления с бифуркационными диаграммами, легко заметить, что в пределах существования ветви  $V_{1,1}$  имеются интервалы, где наряду с периодическими существуют и хаотические движения. Здесь в зависимости от

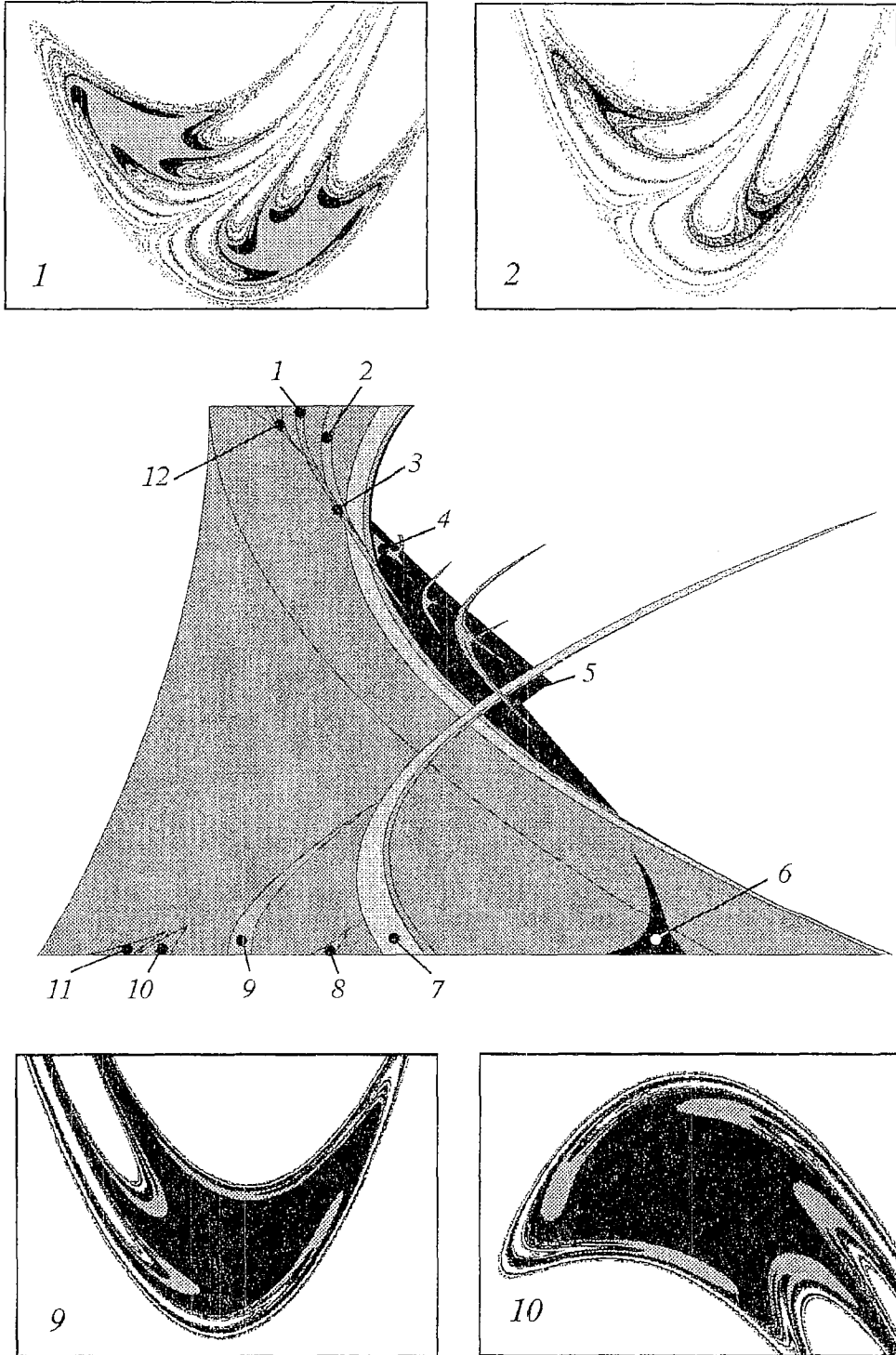


Рис. 6. Разбиение фазового пространства отображения Хенона на области притяжения различных колебательных режимов для некоторых точек плоскости параметров

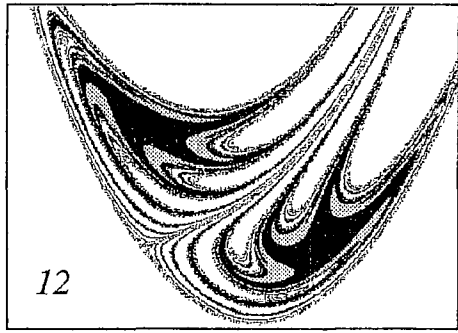
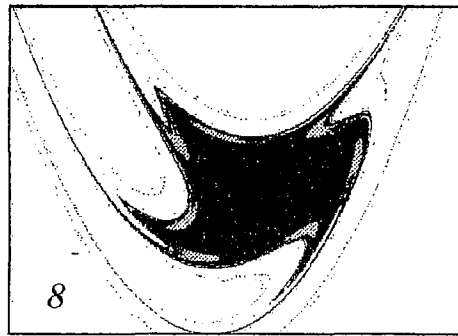
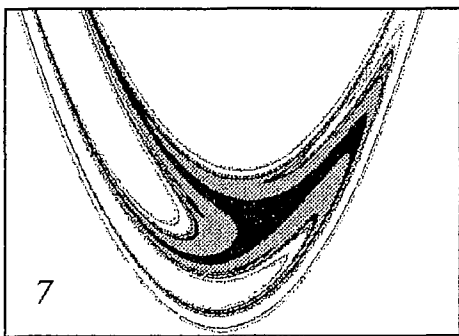
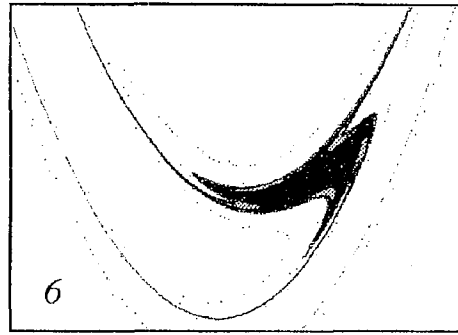
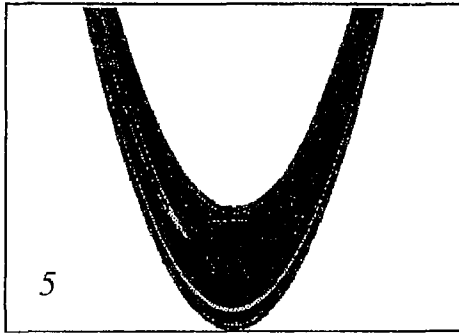
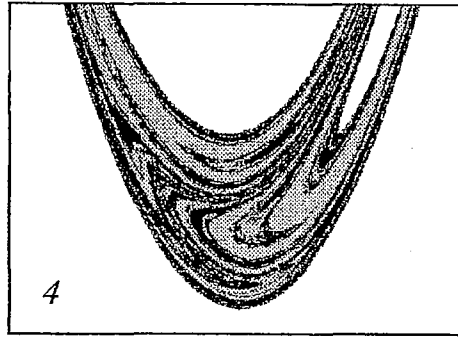
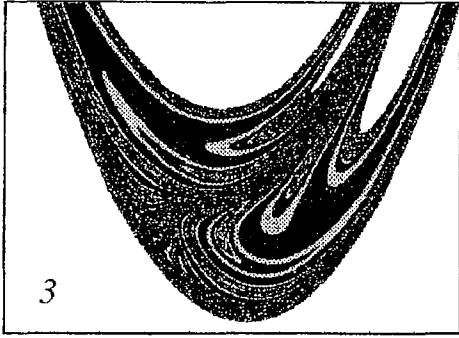


Таблица 2

№	$\alpha$	$\beta$	$m$	$x_{1min}$	$x_{1max}$	$x_{2min}$	$x_{2max}$
1	0.387	0.977	2.10	-4	4	-3.5	5
2	0.719	0.914	2.6	-3	3	-3	3
3	0.719	0.672	2.6,8	-3	3	-3	3
4	0.973	0.492	8.0	-3	3	-3	3
5	1.559	-0.086	3.0	-3	3	-2.2	4
6	2.613	-0.945	1.5	-1	1	-1.5	1
7	0.934	-0.805	1.3	-3	3	-3	4
8	0.66	-0.984	1.6	-3	3	-3	3
9	0.250	-0.820	1.4	-9.5	9	-8	12
10	-0.297	-0.969	1.5	-3.5	5	-6	3.5
11	-0.531	-0.984	1.6	-2	3.5	-4	2
12	0.504	-0.938	2.8	-3.5	3.5	-3.2	4

начальных условий может устанавливаться либо периодическое, либо хаотическое движение.

### Заключение

В заключение кратко сформулируем основные результаты, представленные в настоящей работе.

- В плоскости параметров отображения Хенона численно и аналитически построены области режимов периодических и хаотических колебаний. При этом выделены два типа областей устойчивости циклов:  $P_{k,j}$ ,  $P_k^{swallow}$ . Подробно описана структура множеств  $P_{k,j}$  и свойства их в совокупности.

- Показано, что движения, определенные на множествах  $P_{k,j}$ , гладко зависят от параметров. При непрерывном движении по параметрам в пределах  $P_{k,j}$  переход от одних устойчивых циклов к другим происходит мягко через последовательность прямых и обратных бифуркаций удвоения периода, тогда как в  $P_k^{swallow}$  наряду с мягкими возможны жесткие гистерезисные переходы.

- При пересечении границ  $P_{k,j}$ , отвечающих параметрам жесткого возникновения устойчивых циклов, возможны катастрофические переходы от одних устойчивых движений к другим, либо катастрофическая хаотизация колебаний. Однако такие переходы не являются гистерезисными.

- Множества  $P_{k,j}$  пересекаются непусто, причем некоторые из  $P_{k,j}$  имеют пересечения с областями, где реализуются хаотические колебания, вследствие чего возможно чрезвычайно большое многообразие бифуркационных переходов при вариации параметров.

### Библиографический список

1. Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы/ Под. ред. Я.Г.Синяя и О.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.
2. Hitzl D.L., Zele F. An exploration of the Henon attractors // J.Stat. Phys. 1981. Vol. 26, № 4. P. 683.
3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
4. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.



5. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 528 с.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
7. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
8. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Структура периодических орбит хаотической автоколебательной системы, описываемой разностными уравнениями второго порядка // РЭ. 1994, № 8–9. С. 1392.
9. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Kopeikin A.S. Chaotic attractors of two-dimensional invertible maps // Discrete Dynamics in Nature and Society. 1998. Vol. 2. P. 249.
10. Anishchenko V.S. and Strelkova G.I. Irregular attractors // Discrete Dynamics in Nature and Society. 1998. Vol. 2. P. 53.
11. Zhusubaliyev Zh.T., Rudakov V.N., Soukhoterina E.A., Mosekilde E. Bifurcation analysis of the Henon map // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2000 (to be published).
12. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1992, № 8. С. 47.
13. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Михальченко С.Г. Стохастичность в динамике стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1996, № 3. С. 69.
14. Жусубалиев Ж.Т. К исследованию хаотических режимов преобразователя напряжения с широтно-импульсной модуляцией // Электричество. 1997, № 6. С. 40.
15. Жусубалиев Ж.Т. Бифуркации и хаотические движения в динамике релейных систем автоматического регулирования // Сборник материалов 3-й Международной конференции «Распознавание-97». Курск, 1997. С. 25.
16. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
17. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 324 с.
18. Mira C., Carcasses J., Millerioux G. and Gardini L. Plane foliation of two-dimensional noninvertible maps // Int. J. Bifurc. and Chaos. 1996. Vol. 6, № 8. P. 1439.
19. Kuznetsov A., Kuznetsov S. and Sataev I. Variety of types of critical behavior and multistability in period-doubling systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // Int. J. Bifurc. and Chaos. 1993. Vol. 3, № 1. P. 139.
20. Barfred M., Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H. Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation // Chaos. 1996. Vol. 6, № 3. P. 280.
21. Mosekilde E. Topics in nonlinear dynamics. Applications to physics, biology and economic systems. World Scientific, 1996.
22. Gallas J. Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models // Physica A. 1994, № 202. P. 196.

Курский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию 10.06.99  
после доработки 22.05.00

## ON DYNAMICS OF THE HENON MAP

Z.T. Zhusubaliyev, V.N. Rudakov, E.A. Soukhoterina

Division of the parameter plane for the two-dimensional Henon mapping into domains of periodic and chaotic oscillations is studied numerically and analytically. Regularities in the occurrence of different motions and bifurcational transitions are analyzed. It is shown that there are domains in the plane of parameters, where non-uniqueness of motions exists. This may lead to abrupt changes of the character of the dynamics under variation in the parameters, that is, to a sudden transition from one stable cycle to another or to chaoticization of the oscillations.



*Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич* – родился в 1958 году в Ошской области Киргизской ССР, окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР, 1982). После окончания ТИАСУР работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. В настоящее время работает доцентом кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в Томском политехническом институте (1989) по электротехническим комплексам и системам, включая их управление и регулирование, применение математического моделирования и нелинейной динамики в системах автоматического управления. Область научных интересов: нелинейная динамика и хаос, математическое моделирование нелинейных динамических систем, бифуркации и хаотические колебания в динамических системах с разрывными

правыми частями, применение нелинейной динамики в теории импульсных и релейных автоматических систем управления. Опубликовал около 80 научных работ по указанным направлениям. E-mail: cct@cafct.kursk.ru



*Рудаков Вадим Николаевич* – родился в 1971 году в Курской области. Окончил Курский государственный технический университет (1993). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1998) в области применения нелинейной динамики в системах автоматического управления. Опубликовал 20 научных статей по направлению, указанному выше.



*Сухотерин Евгений Александрович* – родился в 1972 году в Алма-Атинской области Казахской ССР, студент-магистрант Курского государственного технического университета. Опубликовал 7 научных статей по нелинейной динамике в системах автоматического управления.



## ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ УСТОЙЧИВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ СИСТЕМАХ

*А. Ю. Жалнин*

На примере квазипериодически возбуждаемого отображения Хенона показано, что устойчивые двумерные многообразия узловой инвариантной кривой трехмерного отображения могут обладать как гладкой, так и фрактальной структурой. Фрактализация многообразий предшествует разрушению гладкой инвариантной кривой и возникновению странного нехаотического аттрактора. Для траекторий, принадлежащих узловой инвариантной кривой с фрактальными многообразиями и странному нехаотическому аттрактору, обнаруживается существование касаний устойчивых многообразий, соответствующих разным характеристическим показателям. Это ведет к нарушению параболической структуры многообразий в малой окрестности инвариантной кривой.

### Введение

Исследование путей разрушения регулярных квазипериодических движений представляет собой одну из актуальных проблем нелинейной динамики. Удобными моделями для исследования здесь являются системы, находящиеся под внешним квазипериодическим воздействием. Одной из эталонных систем среди них является квазипериодически возбуждаемое отображение Хенона [1]. Это простейшее трехмерное гладкое обратимое отображение, квазипериодическое по одной переменной. В силу этих свойств оно «моделирует» отображение Пуанкаре бигармонически возбуждаемого нелинейного осциллятора и должно описывать динамику достаточно широкого класса физических систем. Это отображение принадлежит к числу систем, для которых типичный сценарий разрушения регулярных квазипериодических движений и перехода к хаосу связан с возникновением странного нехаотического аттрактора (СНА) [1–6,7]. Оно послужит нам моделью для численного исследования.

В настоящей работе исследуются особенности разрушения регулярных квазипериодических движений с точки зрения структуры и трансформаций двумерных инвариантных многообразий притягивающего эргодического «тора» трехмерного гладкого обратимого отображения, а также динамика малых возмущений начальных условий вдоль траекторий на странном нехаотическом аттракторе. Под термином «эргодический тор трехмерного отображения» мы будем понимать гладкую замкнутую инвариантную кривую в фазовом пространстве

$$\{(x, y, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \mid x = x(\theta), y = y(\theta), \theta \in [0, 1]\}$$

модельной системы, а его двумерные многообразия представляют собой поверхности в фазовом пространстве. Исследование структуры многообразий важно для понимания механизмов бифуркаций, критических явлений [6] и глобальной структуры пространства параметров в квазипериодически возбуждаемых системах. Например, существование и гладкость двумерных многообразий эргодического «тора» является необходимым условием возможности таких основных бифуркаций, как удвоение «тора» [8], бифуркация потери симметрии «тора» и т.д.

В работе показано, что устойчивые двумерные многообразия притягивающей узловой инвариантной кривой могут обладать как гладкой, так и фрактальной структурой<sup>1</sup>. И тот и другой случаи существуют на множестве значений положительной меры в пространстве параметров модельной системы. Под «фрактализацией» многообразий понимается возникновение бесконечно изломанной зависимости параметрически заданной двумерной поверхности от фазовой координаты. В работе возникновение недифференцируемой структуры многообразий демонстрируется посредством вычисления касательных к многообразиям ведущего и неведущего устойчивых направлений вдоль инвариантной кривой. Возникновение недифференцируемой зависимости собственных направлений от фазовой координаты свидетельствует о недифференцируемости многообразий. Показательно, что фрактализация многообразий предшествует в системе Хенона разрушению эргодического «тора» и возникновению СНА.

В работе на основе численного анализа показано, что фрактализация многообразий происходит из-за возникновения плотного на инвариантной кривой множества нулевой меры точек, в которых имеет место касание устойчивых многообразий, соответствующих различным характеристическим показателям. Для остальных траекторий на «торе», не принадлежащих этому множеству и имеющих положительную меру на «торе», наблюдение угла между устойчивыми многообразиями показывает наличие ситуаций, сколь угодно близких к касанию<sup>2</sup>. В окрестности притягивающей узловой инвариантной кривой все многообразия являются устойчивыми, и структура многообразий в этой малой окрестности должна быть параболической. Наличие ситуаций, сколь угодно близких к касанию устойчивых многообразий, соответствующих разным характеристическим показателям (то есть к касанию ведущего и неведущего направлений), приводит к нарушению параболичности окрестности. Этот случай отличен от случая фокальной инвариантной кривой, в окрестности которой не существует устойчивых направлений и многообразия «закручиваются». Таким образом, в квазипериодической динамике возникает новый тип устройства окрестности устойчивой траектории: устойчивые многообразия нерегулярным образом зависят от координаты точки траектории на «торе», и угол между устойчивыми направлениями, соответствующими различным характеристическим показателям, может оказаться сколь угодно мал по мере того, как рассматриваются все более длинные участки траектории. После разрушения гладкого инвариантного «тора» аналогичная структура многообразий наблюдается для траекторий на СНА.

<sup>1</sup> Понятие «многообразия» обобщает в различных направлениях понятие линии и поверхности и относится к дифференцируемым (или кусочно дифференцируемым) объектам. Однако в силу сложившейся терминологии мы будем использовать данный термин по отношению к соответствующим инвариантным множествам, связанным с эргодическим «тором», и в случае их недифференцируемости.

<sup>2</sup> Эта ситуация весьма сходна с известными в хаотической динамике свойствами гиперболичности или негиперболичности седловых траекторий. Так, в работе [9] при численном исследовании свойств седловых траекторий на хаотическом аттракторе в автономной системе Хенона седловая траектория считается гиперболической, если существует отличный от нуля минимальный угол между устойчивым и неустойчивым многообразиями вдоль траектории, и негиперболической, если такого угла не существует и возможны ситуации, сколь угодно близкие к касанию.

## 1. Многообразие траекторий и их численный анализ

В этом разделе мы опишем процедуру численного анализа многообразий устойчивых фазовых траекторий в квазипериодически возбуждаемом отображении и их трансформаций. Рассмотрим гладкое обратимое двумерное отображение (в нашем случае отображение Хенона)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \tilde{f}(x_n, y_n) = \lambda - x_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= \tilde{g}(x_n, y_n) = by_n.\end{aligned}\tag{1}$$

Пусть точка  $(x_0, y_0)$  является неподвижной точкой отображения (1) и выполняется условие  $S^2 - 4J > 0$ , где  $J$  – определитель матрицы Якоби отображения (1) в этой точке,  $S$  – след этой матрицы. Это условие означает, что неподвижная точка имеет два действительных некрратных мультипликатора. Связанные с ними собственные векторы определяют направления, касательные к инвариантным многообразиям в неподвижной точке. Модифицируем теперь отображение (1) внесением квазипериодического возмущения

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n, \theta_n) = \lambda - x_n^2 + y_n + \varepsilon \cos 2\pi \theta_n, \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n, \theta_n) = by_n, \\\theta_{n+1} &= \theta_n + \omega, \text{ mod } 1,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\omega$  – иррациональное число, традиционно выбранное равным «золотому сечению»:  $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$ . При  $\varepsilon = 0$  отображение (2) обладает тривиальной инвариантной кривой

$$\{(x, y, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \mid x = x_0, y = y_0, \theta \in [0, 1]\}.$$

В том случае, если один из мультипликаторов отображения (1) по модулю больше единицы, а другой – меньше, инвариантная кривая является седловой и имеет устойчивое и неустойчивое двумерные инвариантные многообразия, представляющие собой гладкие поверхности в трехмерном фазовом пространстве, как это показано на рис. 1, а. Если же оба мультипликатора по модулю меньше (или больше) единицы, «тор» отображения (2) является устойчивым (или, соответственно, неустойчивым) узловым, и его окрестность состоит из континуального множества гладких двумерных инвариантных многообразий, имеющего параболическую структуру, как показано на рис. 1, б. Именно устойчивым узловым «торам», структуре их многообразий и ее трансформациям посвящены все наши дальнейшие рассуждения.

Пусть теперь параметр принимает достаточно малые, но отличные от нуля значения. В рассматриваемой нами динамической системе малые значения параметра внешнего воздействия не разрушают гладкой инвариантной кривой и его двумерных многообразий<sup>3</sup>, и при  $\varepsilon \neq 0$  и малом  $\varepsilon$  система (2) имеет гладкий инвариантный «тор»  $\{x(\theta), y(\theta), \theta \in [0, 1]\}$ . Его устойчивые инвариантные многообразия деформируются, но также остаются гладкими двумерными поверхностями в трехмерном фазовом пространстве. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  многообразия могут все более изламываться, пока при некотором критическом значении параметра не наступает их фрактализация. Фрактализация многообразий связана с негладкой зависимостью собственных направлений, касательных к

<sup>3</sup> Действительно, дальнейший численный анализ показывает, что разрушение гладкого «тора» и фрактализация его двумерных инвариантных многообразий в системе Хенона имеет место лишь при достаточно больших значениях параметра.

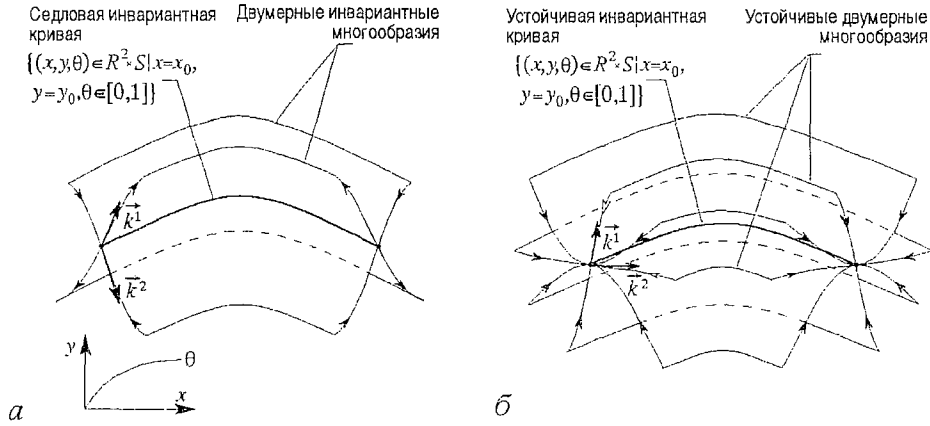


Рис. 1. Схематическое изображение гладких двумерных многообразий седловой (а) и устойчивой узловой (б) инвариантных кривых отображения (2) при  $\epsilon=0$

многообразиям в каждой точке на «торе» (то есть ведущего и неведущего направлений), от фазовой координаты. Поэтому для анализа гладкости или фрактальности многообразий нам будет достаточно ограничиться линейным приближением, то есть определить устойчивые направления, касательные к многообразиям в каждой точке траектории на «торе», как функции фазовой координаты.

Для этого рассмотрим эволюцию малого возмущения начальных условий. За одну итерацию она описывается матрицей  $\hat{A}^1 = \hat{J}(x_0, y_0, \theta_0)$  – матрицей Якоби отображения (2)

$$(\delta x_1, \delta y_1, \delta \theta_1)^T = \hat{J}(x_0, y_0, \theta_0) (\delta x_0, \delta y_0, \delta \theta_0)^T. \quad (3)$$

После  $n$  итераций матрица эволюции малого возмущения представляет собой

$$\hat{A}^n = \hat{J}(x_{n-1}, y_{n-1}, \theta_{n-1}) \hat{J}(x_{n-2}, y_{n-2}, \theta_{n-2}) \dots \hat{J}(x_0, y_0, \theta_0).$$

Матрица  $\hat{A}^n$  имеет вид

$$\hat{A}^n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Один собственный вектор матрицы  $\hat{A}^n$  соответствует тривиальному собственному числу (равному 1 и связанному с квазипериодичностью), а два других имеют вид  $\mathbf{k}^1 = (k_x^1, k_y^1, 0)$  и  $\mathbf{k}^2 = (k_x^2, k_y^2, 0)$ , то есть ортогональны оси фазовой переменной.

При движении по «тору» устойчивые направления, касательные к многообразиям в данной точке траектории, не могут быть найдены как собственные векторы матрицы  $\hat{A}^n$  после произвольных  $n$  итераций отображения (2), начиная с данной точки, нас интересующей, поскольку в общем случае через  $n$  итераций точка не возвращается в свою окрестность. Однако значение  $\omega$  было выбрано равным «золотому сечению», следовательно, последовательность точек с номерами – числами Фибоначчи – сходится к начальной точке, а в случае предположения о малости воздействия и дифференцируемости многообразий «тора» последовательность касательных направлений также сходится к касательным направлениям в начальной точке. Таким образом, направления в данной точке траектории, касательные к многообразиям в этой точке, могут быть определены как предельные значения собственных векторов матрицы  $\hat{A}_{F_m}$  при  $m \rightarrow \infty$ , где  $F_m = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  – числа Фибоначчи.

Этот способ отыскания касательных к многообразиям направлений был приведен в предположении их гладкой зависимости от фазовой координаты. Он

применим лишь в области дифференцируемости многообразий. Приведем другой способ отыскания касательных направлений, позволяющий анализировать структуру многообразий во всех областях существования инвариантного «тора». Произвольно заданный вектор малого возмущения после достаточно большого количества итераций в *типичном случае* стремится к направлению, соответствующему наибольшему показателю Ляпунова. В случае устойчивого «тора» это тривиальный (нулевой) показатель. Однако выше было показано, что устойчивые направления, соответствующие нетривиальным показателям, ортогональны оси фазовой переменной. Поэтому зададим произвольный вектор  $\mathbf{k}_0=(k_{x,0},k_{y,0},0)$  и будем следить за его эволюцией под действием линейного оператора, описывающего эволюцию малого возмущения в формуле (3). Напишем отображение эволюции в явном виде, внося при этом такое условие нормировки, чтобы модуль вектора всегда был равен единице

$$\begin{bmatrix} k_{x,n+1} \\ k_{y,n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{[(\partial f/\partial x k_{x,n} + \partial f/\partial y k_{y,n})^2 + (\partial g/\partial x k_{x,n} + \partial g/\partial y k_{y,n})^2]^{1/2}} \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{x,n} \\ k_{y,n} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega, \text{ mod } 1.$$

Все значения функций в формуле (4.1) берутся при соответствующем наборе координат  $(x_n, y_n, \theta_n)$ . При итерациях по траектории, принадлежащей инвариантной кривой, координаты  $x_n$  и  $y_n$  являются функциями фазовой координаты  $\theta_n$ :  $x_n=x(\theta_n)$ ,  $y_n=y(\theta_n)$ . Это позволяет рассматривать отображение (4.1) как обыкновенное отображение под квазипериодическим воздействием. Его прямые итерации дают предельные значения  $k_{x,n}=k_x^1(\theta_n)$ ,  $k_{y,n}=k_y^1(\theta_n)$ , определяющие с точностью до знака направление, соответствующее при данном  $\theta_n$  большему нетривиальному показателю Ляпунова (неведущее направление). Абсолютно аналогичным способом можно найти направление, соответствующее меньшему показателю Ляпунова (ведущее направление). Для этого надо взять отображение, обратное отображению (2) (тогда минимальный показатель станет максимальным) и повторить для него все приведенные выше рассуждения. Это даст отображение, аналогичное (4.1), которое мы в явном виде выписывать не будем, но будем ссылаться на него как на (4.2). Очевидно, что данные отображения будут обладать одинаковыми инвариантными решениями, но решение, устойчивое для (4.1), будет неустойчивым для (4.2), и наоборот.

Бифуркации и кризисы аттракторов отображений (4.1) и (4.2) соответствуют трансформациям многообразий «тора» отображения (2). Этим свойством мы и воспользуемся для дальнейшего анализа.

## 2. Фрактализация многообразий инвариантной кривой

Зафиксируем параметры  $b$  и  $\varepsilon$  отображения (2) на значениях  $b=0.5$  и  $\varepsilon=0.6$ . Изменяя  $\lambda$ , проследим эволюцию аттрактора отображения (2) и многообразий траекторий на этом аттракторе.

При  $\lambda=0.55$  аттрактором отображения (2) является гладкий эргодический «тор». Что представляют собой его многообразия? В предыдущем разделе было показано, что касательные к ним (и ортогональные к оси фазовой переменной) устойчивые направления определяются предельными значениями переменных отображений (4.1) и (4.2) при данном  $\theta$ :  $\mathbf{k}^{1,2}=(k_x^{1,2}(\theta), k_y^{1,2}(\theta), 0)$ . Аттрактором отображения (4.1) при данном  $\lambda$  является удвоенный «тор», а отображение (4.2) имеет два аттрактора – симметричных относительно фазовой оси «тора» (рис. 2, а, б). Все инвариантные кривые гладкие, и их гладкость говорит о том, что многообразия инвариантной кривой отображения (2), по крайней мере в первом,

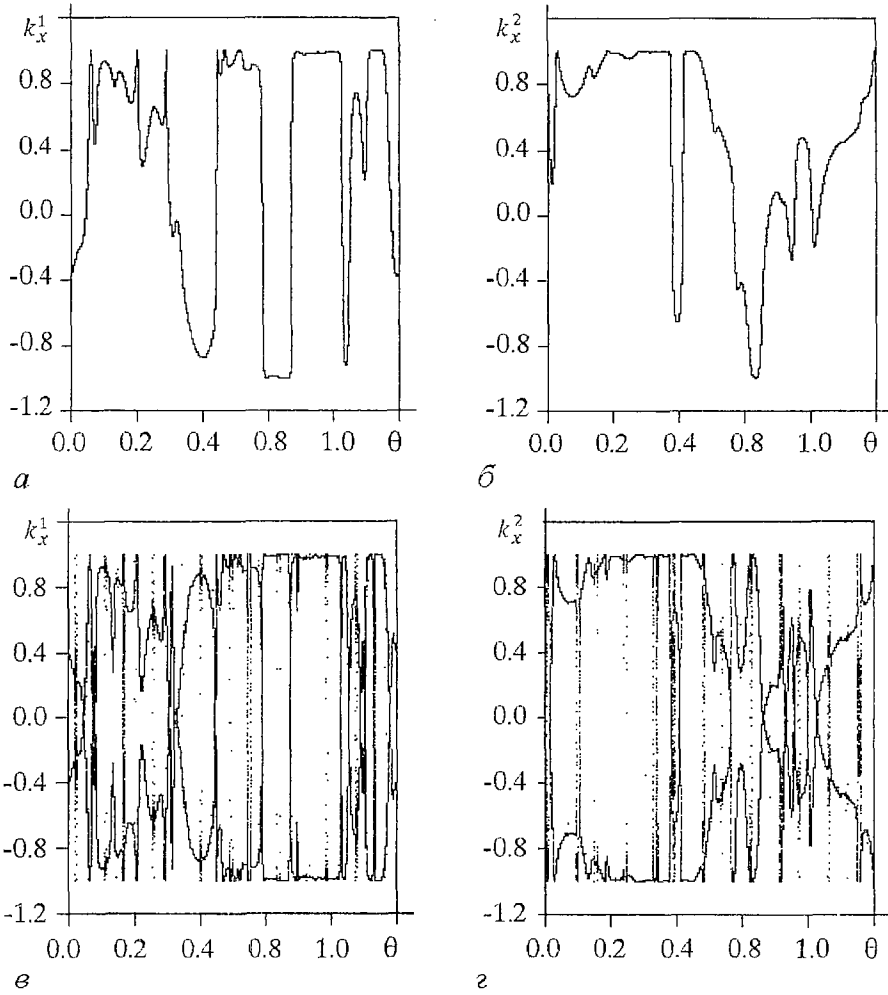


Рис. 2. Проекция аттракторов отображений (4.1) и (4.2):  $a$  – удвоенный «тор» отображения (4.1) (каждая вторая итерация);  $b$  – «тор» отображения (4.2) при значении параметра  $\lambda=0.55$ ;  $v, z$  – СНА отображений (4.1) и (4.2), соответственно, при  $\lambda=0.56$ . Здесь и на следующих рисунках значения остальных параметров –  $b=0.5, \epsilon=0.6$

то есть линейном, приближении в ее окрестности являются гладкими поверхностями. Увеличивая значение параметра  $\lambda$ , можно наблюдать, как инвариантные кривые отображений (4.1) и (4.2) все более изламываются, пока при  $\lambda_f \approx 0.559$  в обоих отображениях одновременно не возникает СНА (рис. 2,  $v, z$ ). Таким образом, множество устойчивых направлений, касательных к многообразиям, оказывается недифференцируемым, что свидетельствует о фрактальности самих многообразий. При этом аттрактор отображения (2) остается гладким «тором». Его фрактализация происходит лишь при  $\lambda_c \approx 0.656$ . На всем интервале значений параметра  $[\lambda_f, \lambda_c]$  аттрактором системы (2) является эргодический «тор» с фрактальными многообразиями. Факт фрактализации «тора» в отображении (2) и возникновения СНА в отображениях (4.1) и (4.2) может быть показан при помощи метода диагностики СНА, развитого в работе [7] и примененного при анализе многомерных систем в работе [1]. Отметим, что подобная структура многообразий наблюдается и при меньших значениях параметра  $\lambda$ , на интервалах  $\lambda \in [0.266, 0.416]$  и  $\lambda \in [0.484, 0.521]$ , что свидетельствует о ее типичности.



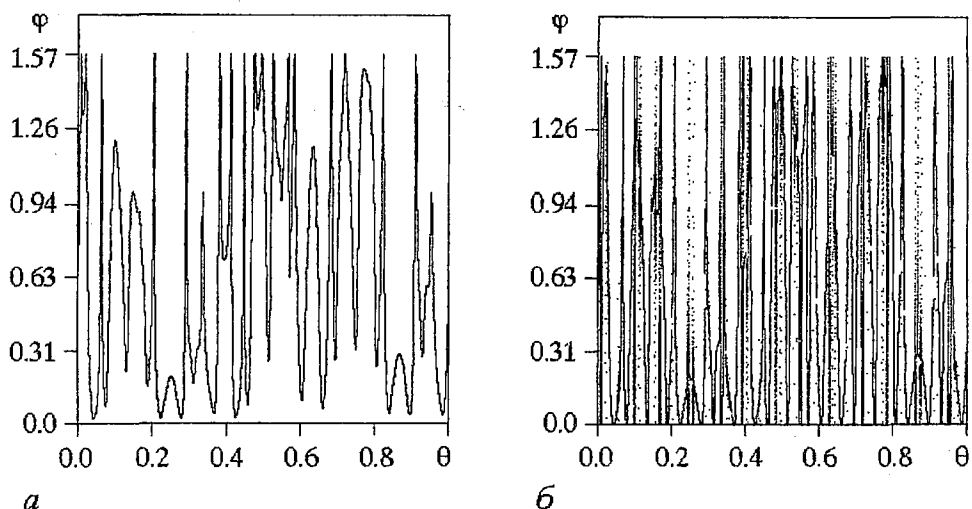


Рис. 3. Зависимость угла между многообразиями на узловой инвариантной кривой от фазовой координаты: *а* – вблизи критического значения при  $\lambda_f=0.556$ ; *б* – при критическом значении  $\lambda_f=0.559$

Рассмотрим процесс потери гладкости многообразиями эргодического «тора» отображения (2) более подробно. Как уже было отмечено, аттрактор отображения (4.1) является репеллером для отображения (4.2) и наоборот, поэтому можно рассматривать их эволюцию в одном и том же фазовом пространстве. По мере приближения к критическому значению  $\lambda_f$  можно наблюдать возникновение множества точек, в которых имеет место касание устойчивых и неустойчивых инвариантных решений. При критическом значении параметра это множество является плотным в силу эргодичности движения по оси фазовой переменной, а аттракторы систем становятся странными. Этот процесс аналогичен сценарию рождения СНА, описанному в работе [5]. Для исходного отображения (2) это означает возникновение плотного на «торе» множества точек, в которых имеет место касание многообразий, соответствующих разным характеристическим показателям. Проиллюстрируем это утверждение прямым вычислением угла между ведущим и неведущим устойчивыми направлениями. При фиксированных параметрах угол в данной точке траектории на «торе» или СНА является функцией фазовой переменной  $\varphi=\varphi(\theta)$ . Зная касательные направления  $k^1(\theta)$  и  $k^2(\theta)$  в данной точке, мы можем определить угол как

$$\varphi(\theta) = \arccos(k^1(\theta)k^2(\theta))/(|k^1||k^2|)$$

с дополнительным условием  $\varphi \in [0, \pi/2]$ . Вблизи критического значения параметра  $\lambda_f$  зависимость угла между многообразиями от фазовой координаты приведена на рис. 3, *а*. Функция является кусочно дифференцируемой (существующие на графике изломы связаны с нашим определением угла в интервале  $\varphi \in [0, \pi/2]$ ). В нижней части графика мы можем наблюдать множество точек, в которых график почти касается оси  $\varphi=0$ . Эти касания возникают при достижении критического значения  $\lambda_f$ , их множество становится плотным вследствие эргодичности движения по оси фазовой переменной, а сама зависимость  $\varphi(\theta)$  – фрактальной (рис. 3, *б*), поскольку наличие плотного множества точек, в которых  $\varphi(\theta)=0$ , делает график бесконечно изломанным.

### 3. Численное наблюдение нарушения параболической структуры окрестности инвариантной кривой

Множество точек, в которых имеет место точное касание многообразий, обладает на «торе» нулевой мерой, несмотря на свою плотность. В этом разделе

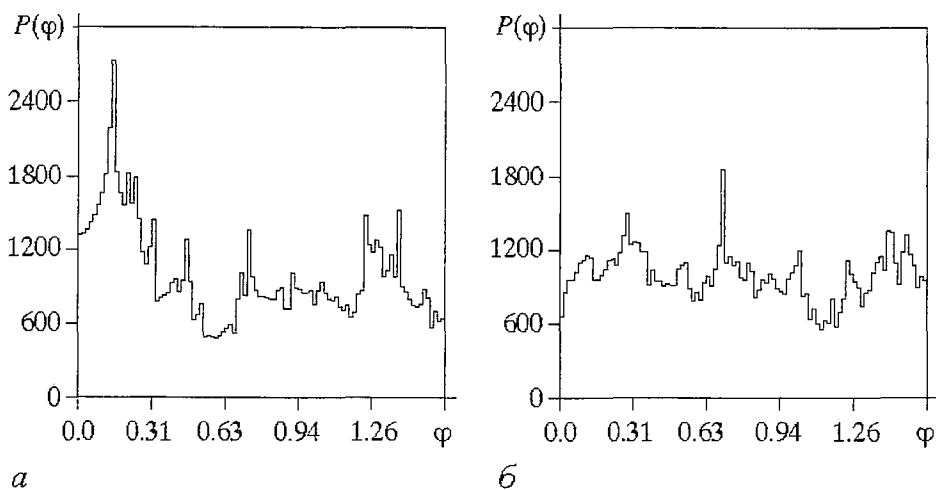


Рис. 4. Гистограммы вероятностных распределений угла между многообразиями для узловой инвариантной кривой с фрактальными многообразиями отображения (2) при  $\lambda=0.6$  (а), и для странного нехаотического аттрактора при  $\lambda=0.66$  (б), вдоль участка траектории длиной  $10^5$  точек

мы будем рассматривать типичные траектории, не принадлежащие этому множеству и имеющие положительную меру, и покажем, что в окрестности таких траекторий имеет место нарушение параболической структуры многообразий в соответствии с рассуждениями, предложенными во введении.

Для определения параболичности (или непараболичности) окрестности данной траектории нам необходимо определить нижнюю границу для угла между многообразиями вдоль траектории  $\varphi_{\min} = \inf_{n=0,1,2,\dots,\infty} \varphi(\theta_n)$ . В численном эксперименте мы имеем дело с участками траекторий конечной длины и поэтому будем исследовать  $\varphi_{\min}(\theta_0, M) = \min_{n=0,1,2,\dots,M} \varphi(\theta_n)$  при достаточно больших значениях  $M$ .

На рис. 4, а, б представлены гистограммы распределения угла вдоль типичных траекторий для «тора» в области недифференцируемости многообразий и для США. Из гистограмм видно, что вероятность отлична от нуля при значениях угла, сколь угодно близких к нулю. В пределе численного эксперимента не удастся обнаружить отличную от нуля нижнюю границу для угла, поскольку угол

$\varphi_{\min}(\theta_0, M)$  оказывается сколь угодно мал по мере того, как мы рассматриваем все более и более длинные участки траектории. Этот результат не зависит от выбора начальных условий. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим поведение функции  $\Phi_M = \max_{\theta_0 \in [0,1]} \varphi_{\min}(\theta_0, M)$ . График этой функции для 100 траекторий со случайным образом выбранными начальными условиями представлен на рис. 5. Из рисунка видно, что при больших  $M$  функция  $\Phi_M$  ведет себя как

$$\Phi_M \propto M^\gamma,$$

где  $\gamma \approx -1$ . Таким образом, типичность непараболических траекторий означает, что для многообразий всех (или почти всех) траекторий при данных значениях параметров возможны ситуации, сколь

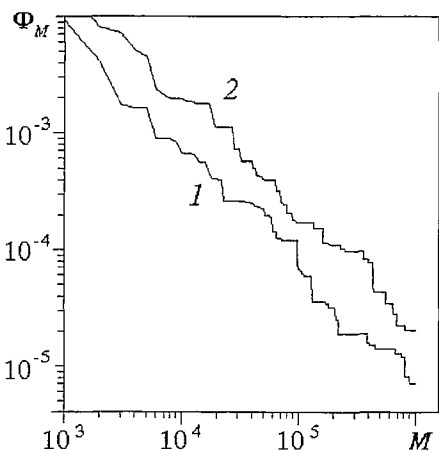


Рис. 5. Значения функции  $\Phi_M$  для системы (2) для 100 случайно выбранных начальных условий и различных  $\lambda$ : 1 – 0.6 (тор с фрактальными многообразиями); 2 – 0.66 (США)

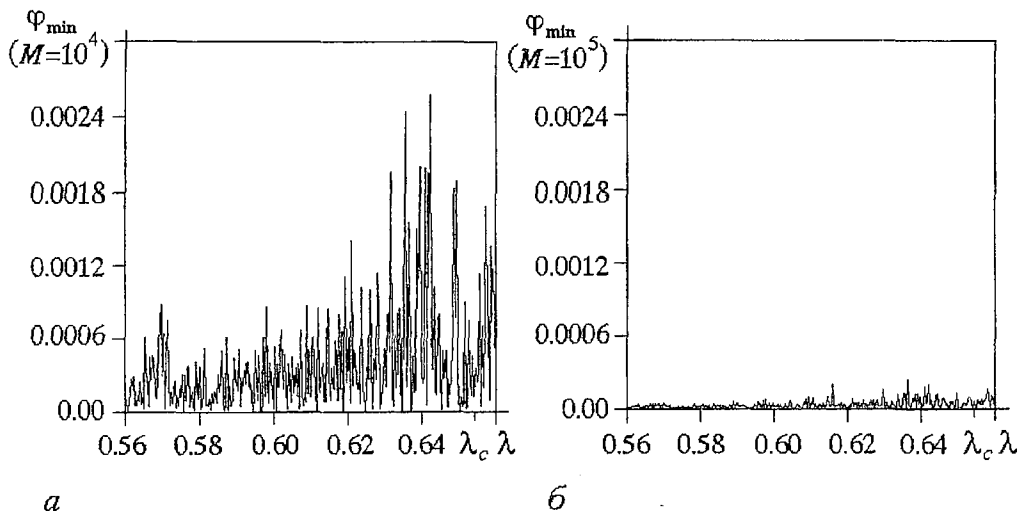


Рис. 6. Влияние увеличения длины рассматриваемого фрагмента траектории на величину минимального угла между многообразиями: зависимость  $\varphi_{\min}$  от  $\lambda$  при двух значениях  $M$

угодно близкие к касательным. Следовательно, теперь мы можем пренебречь зависимостью минимального угла от начальной фазы и писать просто  $\varphi_{\min} = \varphi_{\min}(M)$ .

Аналогичная картина наблюдалась при всех исследованных в работе значениях параметров, при которых аттрактором является узловый «тор» с фрактальными многообразиями или СНА. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим зависимость минимального угла  $\varphi_{\min}(M, \lambda)$  вдоль участка траектории от параметра  $\lambda$  в области существования данных видов аттракторов, и изменение этой зависимости при увеличении длины исследуемой траектории (рис. 6). Из рисунка видно, как существенно (на порядок) уменьшается этот угол при увеличении рассматриваемого количества итераций с  $M=10^4$  до  $M=10^5$ .

### Заключение

В заключение перечислим основные результаты приведенных в работе численных экспериментов.

- Устойчивые двумерные многообразия инвариантной кривой трехмерного гладкого обратимого отображения могут обладать как гладкой, так и фрактальной структурой. И тот и другой случаи существуют на множестве значений положительной меры в пространстве параметров квазипериодически возбуждаемого отображения Хенона. Фрактализация многообразий предшествует разрушению гладкой инвариантной кривой и образованию странного нехаотического аттрактора в системе Хенона.

- Исследование вероятностных распределений угла между устойчивыми многообразиями вдоль траекторий на узловом инвариантном кривой с фрактальными многообразиями и странном нехаотическом аттракторе показывает, что этот угол может быть сколь угодно мал и возможны ситуации, сколь угодно близкие к касанию. Таким образом, в квазипериодической динамике возникает новый тип устройства окрестности устойчивой траектории: устойчивые многообразия нерегулярным образом зависят от координаты точки траектории на «торе», и угол между устойчивыми направлениями, соответствующими различным характеристическим показателям, может оказаться сколь угодно мал по мере того, как рассматриваются все более длинные участки траектории.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17735) и Федеральной программы «Интеграция» (грант № 696.3)*

## Библиографический список

1. *Sosnovtseva O., Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.* Multiband strange nonchaotic attractors in quasiperiodically forced system // *Phys. Lett. A.* 1996. Vol. 128, № 3. P. 255.
2. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.* Strange attractors that are not chaotic // *Phys.* 1984. Vol. 13D. P. 261.
3. *Ding M., Grebogi C., Ott E.* Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // *Phys. Rev. A* 1989. № 39. P. 2593
4. *Heagy J.F., Hammel S.M.* The birth of strange nonchaotic attractors // *Phys. D.* 1994. Vol. 70. P. 140
5. *Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.* Strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced circle map. // *Phys.* 1995. Vol. D88. P. 176.
6. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Селезнев Е.П., Фойдель У.* О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 6. С. 3.
7. *Pikovsky A., Feudel U.* Characterizing strange nonchaotic attractors // *Chaos.* 1995. Vol. 5. P. 253.
8. *Kaneko K.* Doubling of torus // *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 1806.
9. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // *Nonlinearity.* 1993. 6. P.779.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.11.99  
после доработки 15.05.00

## ON INVARIANT MANIFOLDS OF STABLE TRAJECTORIES IN QUASIPERIODICALLY FORCED NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

*A.Y. Jalnina*

In terms of the quasiperiodically driven Henon map we show that two-dimensional stable invariant manifolds of the nodal invariant curve of a smooth invertible three-dimensional map can possess both differentiable and fractal structure. The fractalization of manifolds precedes the destruction of a smooth invariant curve and the birth of a strange nonchaotic attractor in modeling system. An observation of the angle between manifolds along trajectories that belong to the invariant curve after its manifolds fractalization and the strange nonchaotic attractor shows an existence of tangencies of the stable manifolds corresponding to different characteristic exponents. This fact means the violation of parabolic structure of manifolds in a small vicinity of the nodal invariant curve.



*Жалнин Алексей Юрьевич* – родился в Балашове (1977). Окончил факультет нелинейных процессов СГУ по специальности физика (2000), аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Автор нескольких публикаций по нелинейной динамике. Область научных интересов – численные методы в качественной теории динамических систем, странные нехаотические аттракторы, управление хаосом.



## СИНХРОНИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ГЛАЗА ДАФНИИ ВНЕШНИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

*А.В. Скрипаль, А.Д. Усанов*

Приведены результаты исследований явления синхронизации движений глаза пресноводного рачка дафнии внешним электрическим полем. Момент возникновения синхронизации проявлялся в том, что базовая частота колебаний глаза дафнии захватывалась частотой внешнего электрического сигнала. Исследована зависимость амплитуды переменного электрического напряжения, при котором наблюдался эффект синхронизации глаза дафнии, от состава водной среды, в которую дафния помещалась.

Явление синхронизации, хорошо известное в радиоэлектронике [1–3], наблюдалось также и у биологических объектов, в частности, с помощью генератора электрических сигналов удалось синхронизировать частоту биений сердца пресноводного рачка дафнии в диапазоне частот от 3 до 10 Гц при амплитудах внешнего электрического сигнала от 8 до 40 В [4].

Представляет интерес исследование возможности наблюдения эффекта синхронизации других органов биологических объектов, совершающих менее регулярные колебания. Таким объектом, например, является орган зрения пресноводного рачка дафнии, представляющий собой сложный непарный глаз [5], расположенный в передней части головы и обладающий значительными размерами и подвижностью (рис. 1). Последнее обусловлено тем, что к глазу прикрепляются специальные глазные мышцы (рис. 2). В результате сокращения этих мышц глаз совершает ротационные колебательные движения, обусловленные различной частотой сокращения глазных мышц. При нормальных условиях глаз дафнии совершает колебания в диапазоне частот  $6 \div 15$  Гц, причем отдельные гармоники колебаний глаза совпадают с частотой сердцебиения.

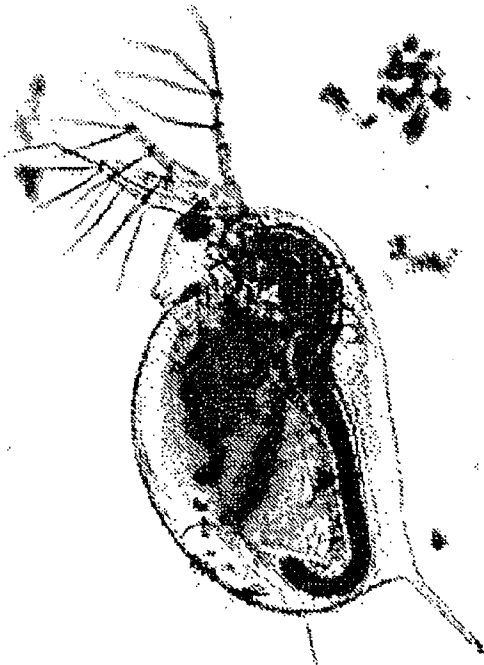


Рис. 1. Внешний вид пресноводного рачка *Daphnia magna* Straus

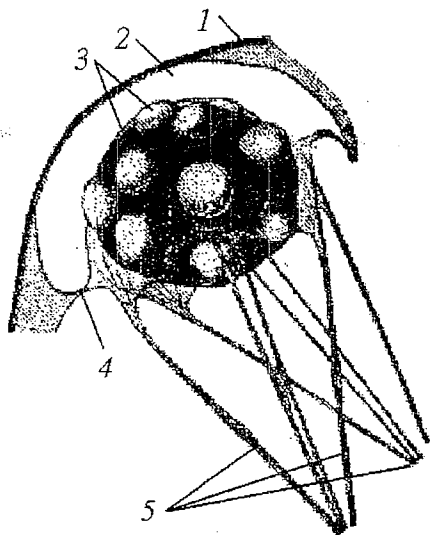


Рис. 2. Строение сложного непарного глаза: 1 – хитиновая кутикула, 2 – камера, окружающая глаз, 3 – хрустальные конусы омматидиев, 4 – лигаменты, на которых подвешен глаз, 5 – мышцы глаза

в стандартных лабораторных условиях. В экспериментах использовали особей размерами 0.7÷1.5 мм. Одиночную дафнию из аквариумной культуры перемещали в камеру, ограничивающую ее движения. Камеру фиксировали на предметном столике микроскопа.

В эксперименте использовалось переменное электрическое поле различной амплитуды и частоты. Момент возникновения явления синхронизации проявлялся в том, что основная гармоника колебаний глаза дафнии захватывалась частотой внешнего электрического сигнала, причем остальные гармоники движения глаза значительно подавлялись. Возникновение явления синхронизации наблюдалось

Экспериментальные исследования проводились на установке, схема которой приведена на рис. 3. Излучение источника света 1 фокусировалось линзой 2 в область глаза дафнии 3, помещенной в канал 4 на прозрачном столике 5. В стакан 6 заливалась водная среда обитания дафний, в которую опускались электроды 7, соединенные с источником напряжения  $U$ . Для фиксации момента захвата частоты колебаний глаза дафнии частотой внешнего электрического сигнала использовался микроскоп 8. Часть излучения, отраженная от светоделительной пластинки 13, направлялась на фотодетектор 9. Сигнал с фотодетектора поступал через усилитель 10 и аналого-цифровой преобразователь 11 в компьютер 12. После регистрации осциллограммы колебаний глаза дафнии вычислялся спектр протектированного сигнала с помощью метода быстрого преобразования Фурье.

Пресноводные рачки дафнии (*Daphnia magna* Straus) культивировались в стандартных лабораторных условиях. В экспериментах использовали особей размерами 0.7÷1.5 мм. Одиночную дафнию из аквариумной культуры перемещали в камеру, ограничивающую ее движения. Камеру фиксировали на предметном столике микроскопа. В эксперименте использовалось переменное электрическое поле различной амплитуды и частоты. Момент возникновения явления синхронизации проявлялся в том, что основная гармоника колебаний глаза дафнии захватывалась частотой внешнего электрического сигнала, причем остальные гармоники движения глаза значительно подавлялись. Возникновение явления синхронизации наблюдалось нами в диапазоне амплитуд воздействующего сигнала 5÷7 В. Существование порогового характера проявления эффекта синхронизации в зависимости от амплитуды воздействующего сигнала может быть, например, связано и с пороговой чувствительностью механической функции (движений глаза) к внешнему электрическому воздействию. Такой пороговой чувствительностью к внешнему электрическому воздействию обладают биологические мембраны [6]. При этом механизм преобразования электрического поля в механическую форму движений органов биологических объектов до настоящего времени не ясен.

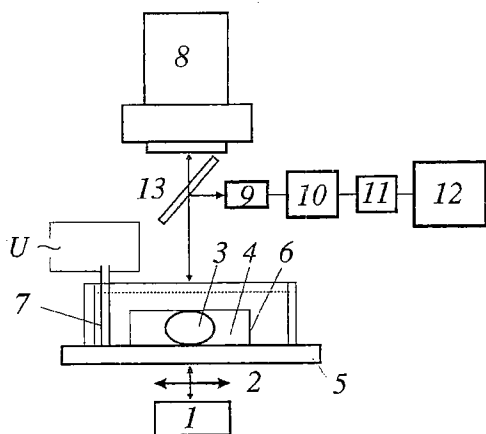


Рис. 3. Схема установки для проведения измерений: 1 – источник света, 2 – линза, 3 – дафния, 4 – канал для фиксирования дафнии, 5 – прозрачный столик, 6 – стакан с водной средой обитания дафний, 7 – электроды, 8 – микроскоп, 9 – фотодетектор, 10 – усилитель, 11 – аналого-цифровой преобразователь, 12 – компьютер, 13 – светоделительная пластинка

На рис. 4 приведены осциллограммы движений глаза дафнии и их спектры, полученные для случая собственных движений глаза (рис. 4, а) и при возникновении явления синхронизации (рис. 4, б). Как видно из рис. 4, а, в спектре сигнала выделяются гармоники с частотами 4.5 Гц, 9 Гц,

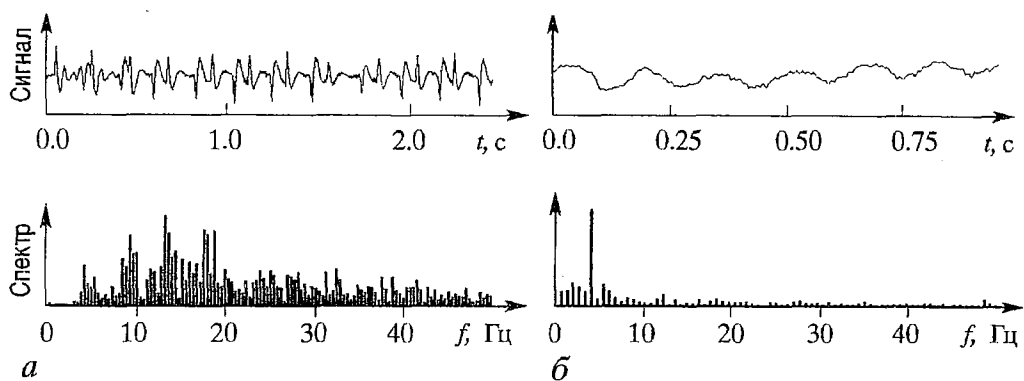


Рис. 4. Осциллограммы движений глаза дафнии и их спектры: *a* – для собственных движений глаза, *б* – при возникновении явления синхронизации

13 Гц и 18 Гц, причем максимальной амплитудой обладает гармоника с частотой 13 Гц. При возникновении явления синхронизации, как видно из рис. 4, *б*, характер движения глаза становится близким к гармоническому (с частотой синхросигнала, равной 8 Гц) с небольшой модуляционной составляющей, обусловленной, по-видимому, тремором.

Была обнаружена зависимость амплитуды колебаний глаза дафнии от частоты приложенного электрического поля при фиксированной амплитуде синхронизирующего сигнала. На рис. 5 приведены результаты измерений зависимости амплитуды колебаний глаза дафнии от частоты приложенного синхронизирующего электрического сигнала фиксированной амплитуды, равной 7 В.

Как следует из рис. 5, амплитуда колебаний глаза дафнии в режиме синхронизации имеет максимальное практически неизменное значение в диапазоне частот, приблизительно равном 4–15 Гц. В диапазоне частот приблизительно до 2 Гц и выше 20 Гц наблюдался срыв режима синхронизации колебаний глаза.

Нами была исследована также зависимость амплитуды переменного электрического напряжения, при котором наблюдался эффект синхронизации глаза дафнии, от состава водной среды, в которую дафния помещалась. Состав водной среды изменялся путем добавления фенола различной концентрации от 1 до 10 мг/л. На рис. 6 приведена зависимость величины напряжения синхронизации частоты колебаний глаза дафнии от концентрации фенола в водной среде.

Как следует из результатов, приведенных на рис. 6, при увеличении концентрации фенола  $N$  уменьшалась величина напряжения  $U$ , при котором происходила синхронизация частоты колебаний глаза дафнии частотой внешнего сигнала. Обнаруженная закономерность уменьшения напряжения синхронизации может являться свидетельством ухудшения жизненных показателей дафний, подверженных воздействию растворенных в воде токсикантов.

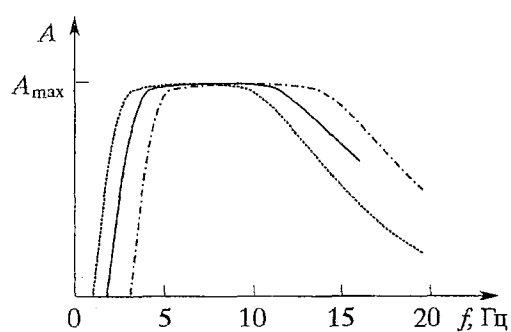


Рис. 5. Зависимости амплитуды колебаний глаза дафнии от частоты приложенного синхронизирующего электрического сигнала фиксированной амплитуды, равной 7 В, для трех особей (обозначены тремя типами линий)

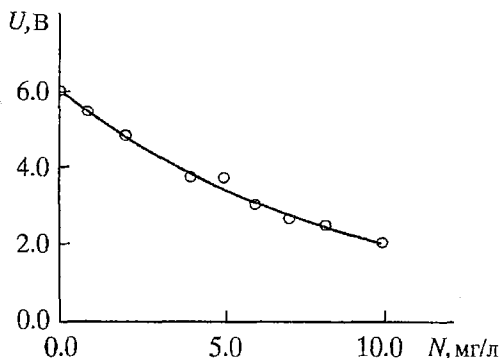


Рис. 6. Зависимость величины приложенного напряжения, при котором возникало явление синхронизации частоты колебаний глаза дафнии, от концентрации фенола в водной среде

Полученные результаты могут быть полезны для понимания результатов воздействия электромагнитных полей на колебательные процессы различных жизненных органов биообъектов.

### Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
2. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
3. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
4. Усанов Д.А., Скрипаль Ал.В., Скрипаль Ан.В. Эффект синхронизации внешним электрическим полем частоты сердцебиений дафнии // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25, вып.4. С. 74.
5. Иванов А.В., Мончадский, А.С., Полянский Ю.И., Стрелков А.А. Большой практикум по зоологии беспозвоночных. Типы: Кольчатые черви. Членистоногие. Ч.2. М.: Высш. школа, 1983. 543 с.
6. Бреслер С.Е. Биофизика мембран // Проблемы современной физики / Под ред. А.П. Александрова. Л.: Наука, 1980. С. 535.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 26.02.2000

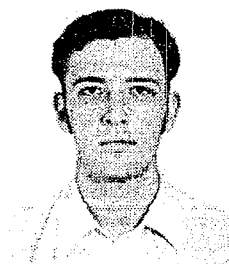
## SYNCHRONIZATION OF THE EYE MOVEMENTS OF DAPHNIA BY EXTERNAL ELECTRIC FIELD

*A.V. Skripal, A.D. Usanov*

The investigation results of eye movement synchronization of daphnia freshwater crayfish by external electrical fields have been presented. Moment of the synchronization appearance was associated with the capture of fundamental frequency of daphnia eye oscillations by the frequency of external electrical signal. Dependence of magnification of alternating electrical voltage for which synchronization effect of daphnia eye was observed, on composition of water environment in which daphnia was placed, has been investigated.



*Скрипаль Анатолий Владимирович* родился в 1960 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1982). С 1998 года доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твердого тела Саратовского государственного университета. Автор более 100 научных трудов в области когерентной оптики, лазерной физики, вибродиагностики, биофизики.



*Усанов Андрей Дмитриевич* – родился в Саратове (1978). Окончил Первую ступень Колледжа прикладных наук при Саратовском государственном университете (1997). Область научных интересов – биофизика, физика полупроводников.





## СТРУКТУРА ДВОЙНОГО СЛОЯ ВБЛИЗИ ФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*В.Т. Перцев, П.А. Головинский*

Показано, что явления на межфазных границах в реальных системах осложняются в ряде случаев фрактальностью поверхности твердой фазы. Рассмотрены поверхности, обладающие развитой шероховатостью и пористостью с фрактальной структурой. Развита представления об энергии связи воды в дисперсных системах с фрактальной поверхностью. Исследован двойной слой для этого случая. Сформулирован подход, основанный на дробном интегрировании по нормали к поверхности. Полученные выражения для массы жидкости и энергии двойного слоя в системах с фрактальной поверхностью сопоставлены с результатами calorиметрических измерений для влажного песка.

Межфазные границы в различных структурах представляют принципиальный интерес с точки зрения протекающих на них физико-химических процессов. Многие современные технологии зависят от процессов вблизи поверхности твердого тела. Область межфазных границ представляет собой самостоятельную форму существования материала с особыми физико-химическими характеристиками [1]. Межфазные границы обладают избыточной свободной энергией, которая проявляется в форме различных структурных перестроек. Этим объясняются большие изменения в многофазных системах при относительно слабых внешних воздействиях. Такие особенности являются предпосылками для возникновения эффектов самоорганизации в процессах формирования межфазных границ. Изучение подобных эффектов важно для целенаправленного формирования межфазных границ и управления их характеристиками [2].

Описание явлений на межфазных границах в реальных системах осложняется в ряде случаев фрактальностью поверхности твердой фазы. Наличие у твердой фазы нерегулярных поверхностей со сложной шероховатой структурой оказывает существенное влияние на кинетические параметры физико-химических процессов [3]. Предметом наших исследований являются процессы, протекающие на межфазных границах системы кварцевый песок – вода. Характерным для подобных систем является образование на межфазной границе двойного электрического слоя. Он во многом определяет протекание физико-химических процессов. Результаты выполненных нами ранее исследований [4] показали, что отличительная особенность молотого кварцевого песка заключается в проявлении его частицами фрактальных свойств. На рис. 1 приведена фотография частицы песка с характерной фрактальной структурой поверхности. Песок является достаточно типичной дисперсной системой. Подобно многим веществам песок

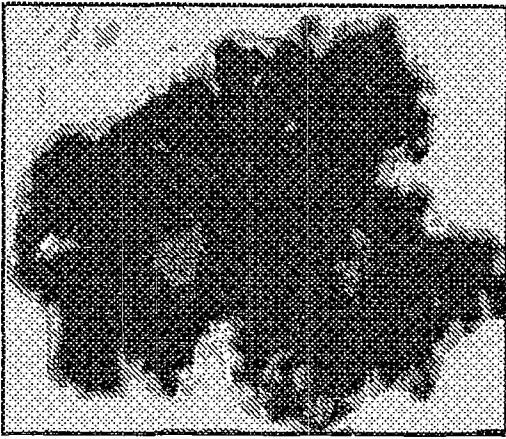


Рис. 1. Характерный вид поверхности частиц молотого кварцевого песка. Удельная поверхность молотого кварцевого песка 200 м<sup>2</sup>/кг

возникает необходимость проведения исследований двойного слоя для этого случая. В работе [7] показано, что фрактальные свойства объекта приводят к дробному интегрированию при описании интегрирования по структуре объекта, то есть при построении меры. Изложенный в ней вывод основан на рассмотрении канторова множества, однако полученные результаты имеют значительно более широкую применимость. Мы используем подход, основанный на дробном интегрировании в случае произвольной фрактальной поверхности с плоским основанием.

Шероховатая поверхность, покрывая электролитом, приобретает определенный заряд, который мы для определенности будем считать отрицательным. Тогда силовые линии электрического поля в образующемся двойном слое могут оканчиваться на разных выступах и впадинах рельефа поверхности. Вне фрактальной поверхности (в жидкой фазе) поле ведет себя обычным образом. Применим теорему Гаусса – Остроградского к области внутри поверхности. Будем считать, что фрактальная поверхность представляет собой рыхлую, сильно изрезанную структуру над плоской подложкой, как показано на рис. 2. Ее можно описать некоторой зависимостью  $z=z(x,y)$ , где  $z$  – вертикальная координата локальной точки поверхности над точкой подложки с координатами  $(x,y)$ . Выберем поверхность интегрирования в форме параллелепипеда, ориентированного двумя гранями вдоль поверхности так, что верхняя грань проходит в глубине тела, а нижняя прорезает рельеф параллельно подложке. Тогда

$$\int_S E dS = -4\pi \int \rho(z) dS dz, \quad (1)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля,  $\rho$  – объемная плотность заряда,  $S$  – разрывная поверхность. Интегрирование плотности заряда по фрактальной структуре вдоль оси  $z$  мы будем моделировать дробным интегрированием [7]. Такое интегрирование с дробным показателем учитывает появление дополнительного заряда по мере продвижения в глубь фрактальной поверхности (в твердую фазу). Напомним, что дробным интегралом порядка  $\lambda$  называется оператор, действующий на произвольную функцию  $g$  по правилу [8]

$$g_\lambda(x) = 1/\Gamma(\lambda) \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} g(t) dt, \quad (2)$$

где  $\Gamma(\lambda)$  – гамма-функция,  $t$  – переменная интегрирования. При целых значениях параметра интегрирования  $\lambda$  правило (2) порождает обычные операции дифференцирования и интегрирования.

имеет на поверхности активные центры, его можно довести до любой степени измельчения и он присутствует во многих композитных системах. Данная работа направлена на развитие представлений об энергии связи воды в дисперсных системах с фрактальными поверхностями.

Задача о поведении потенциала двойного слоя вблизи поверхности раздела твердое тело – электролит подробно исследована для случая гладкой границы [5,6]. Основу такого описания составляет представление об экранировании Дебая в электролитах. Поскольку поверхности частиц в исследуемой нами системе обладают заметной шероховатостью и пористостью с фрактальной структурой,

Введем связь между напряженностью поля и потенциалом  $\varphi$  в виде  $E = -d\varphi/dz$ , в соответствии с предположением о локально плоской геометрии поля. Изменение плотности заряда связано с потенциалом распределения Больцмана

$$\rho = \rho_0 \exp(-nq\varphi/T), \quad (3)$$

где  $n$  – кратность заряда иона для симметричных электролитов,  $q$  – единичный заряд,  $T$  – температура раствора по энергетической шкале. Для слабых электролитов в предположении малости изменения потенциала и концентрации  $\delta\rho \approx 4\pi\rho_0 nq\varphi/T$ . Переходя от интегрирования к дробному дифференцированию [7,8] вдоль единственного выделенного направления  $z$ , получим

$$d^\alpha\varphi/dz^\alpha = k\varphi, \quad (4)$$

где  $k = 4\pi\rho_0/T > 0$ ,  $2 < \alpha < 3$ . Введем новую переменную  $u = zk^{1/\alpha}$ , приводящую уравнение (4) к безразмерному виду

$$d^\alpha\varphi/du^\alpha = \varphi. \quad (5)$$

Вообще вопрос о размерности при применении операций дробного интегрирования и дифференцирования требует дополнительного обсуждения. Ситуация проясняется, если учесть, что плотность заряда  $\rho$  следует понимать как величину заряда, отнесенную к объему фрактального объекта, который имеет дробную размерность [9]. Задача Коши для уравнения (5) с граничными условиями

$$d^{\alpha-k}/du^{\alpha-k}\varphi(u)|_{u=0} = b_k, \quad k = 1, 2 \quad (6)$$

имеет решение [10]

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^2 b_k \sum_{j=1}^{\infty} u^{\alpha j - k} / \Gamma(\alpha j - k + 1) = \sum_{k=1}^2 b_k u^{\alpha - k} E_{\alpha, 1 + \alpha - k}(u^\alpha), \quad (7)$$

где  $E_{\alpha, \beta}(u)$  – функция Миттаг–Леффлера [11], определяемая рядом

$$E_{\alpha, \beta}(v) = \sum_{j=0}^{\infty} v^j / \Gamma(\alpha j + \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (8)$$

Функция  $E_{\alpha, \beta}(v)$  на действительной оси  $v$  имеет затухающее решение при уменьшении  $v$ , отвечающее экранировке заряда в электролите. При  $\alpha = 2$  возникает обычная экранировка Дебая  $\varphi_0 = A \exp(u)$  с экспоненциальным убыванием потенциала в области отрицательных  $u$ . Производя аналитическое продолжение (8) по  $\alpha$ , получим  $b_1 = b_2 = A$ . Решение с дробным показателем  $\alpha > 2$  обеспечивает более медленный, чем экспоненциальный, рост потенциала в глубь фрактальной поверхности, как это имеет место для потенциала вблизи гладкой заряженной поверхности.

Поскольку поверхность твердого тела мы считаем достаточно рыхлой, то при переходе за ее границу в жидкость потенциал ведет себя гладко и непрерывно. Решения вне и внутри поверхности можно сшить из условия равенства логарифмических производных. Точка гладкого сшивания (положение границы поверхность – жидкость) определяется из условия

$$d/dz\varphi(z)|_{z=0} = 1. \quad (9)$$

Как уже отмечалось, проведенные ранее исследования структуры поверхности частиц песка показали их фрактальность. Заполнение в частицах



Рис. 2. Схема обводненной фрактальной поверхности твердой фазы

поверхностных пор жидкостью мы также опишем на основе дробного интегрирования. Масса жидкости в порах

$$m = \int \rho_m d^\beta z, \quad (10)$$

где  $\rho_m$  – поверхностная плотность массы жидкости;  $\beta$  – дробный показатель интегрирования, соответствующий пространству пор. Принимая величину  $\rho_m = \text{const}$ , получим закон изменения массы поверхностного слоя в зависимости от его толщины  $z$  в виде

$$m = \rho_m z^\beta / [\beta \Gamma(\beta)]. \quad (11)$$

Отсюда следует, что

$$z = [m\beta\Gamma(\beta)/\rho_m]^{1/\beta} = (Bm)^{1/\beta}, \quad z \sim u.$$

Таким образом, дробное интегрирование воспроизводит фрактальный характер структуры поверхности со степенным показателем  $0 < \beta < 1$ . Между показателями  $\alpha$  и  $\beta$ , по всей видимости, существует связь. Однако в настоящее время она подробно не исследована. Если предположить на основании вложенности структур пор и выступов, что  $\alpha - \beta = 2$ , то можно связать увлажнение поверхности с электрической структурой образующегося на ней двойного слоя.

Определим электрическую энергию фрактального двойного слоя. Ее можно вычислить с помощью дробного интеграла

$$W = 1/2 \int_{z_0}^{\infty} \rho_c \varphi(u) d^\gamma u, \quad (12)$$

где  $\gamma = \beta + 1$ . Вынося постоянное значение плотности  $\rho_c$  за знак интеграла, получим

$$W = \rho_c / 2 \int_{z_0}^{\infty} \varphi(u) d^\gamma u = \rho_c / 2 \int_{z_0}^{\infty} d^\gamma u \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} u^{\lambda_j} / \Gamma(\lambda_j + 1), \quad \lambda_j = \alpha_j - k$$

Отсюда

$$W = \rho_c / 2 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} u^{\lambda_j} / \Gamma(\lambda_j + 1) * u^\gamma / \Gamma(\gamma + 1), \quad (13)$$

где знак «\*» означает свертку. Как показано в [8],

$$u^{\lambda_j} / \Gamma(\lambda_j + 1) * u^\gamma / \Gamma(\gamma + 1) = u^{\lambda_j + \beta} / \Gamma(\lambda_j + \beta + 1). \quad (14)$$

С учетом этого

$$W = \rho_c / 2 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} u^{\lambda_j + \beta} / \Gamma(\lambda_j + \beta + 1) \Big|_{z_0}^{\infty}, \quad \lambda_j = \alpha_j - k. \quad (15)$$

Полученные выражения для массы жидкости и энергии двойного слоя можно сопоставить с результатами калориметрических измерений, записав (15) в виде

$$W \sim \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} (Bm)^{\lambda_j + \beta + 1} / \Gamma(\lambda_j + \beta + 1), \quad \lambda_j = \alpha_j - k = (2 + \beta)j - k. \quad (16)$$

Таким образом, уравнение (16) позволяет установить зависимость между количеством воды и энергией ее связи в дисперсной системе.

В уравнении (16) имеется два неизвестных параметра  $B$  и  $\beta$ , зависящих от свойств фрактальной поверхности твердой фазы. Мы определяем их на основании экспериментальной зависимости  $W = f(m)$ , где  $m$  – масса воды. В исследованной системе кварцевый песок – вода присутствовала вода с несколькими видами связей, которые с некоторой долей условности можно представить как пленочную, формируемую главным образом адсорбционными силами, капиллярную и свободную воду [12], заключенную в межзерновом пространстве. Энергия этих связей определялась экспериментально методом дифференциально-термического анализа системы кварцевый песок – вода [13]. Расчеты, выполненные на основании (16) с учетом зависимостей, приведенных на рис. 3, позволили получить

Экспериментально определенные параметры уравнения (16)

№	$S_{уд}, м^2/кг$	$\beta$	$B$
1	35	0.780	2.8
2	100	0.805	4.8
3	300	0.810	5.1

значения параметров  $B$  и  $\beta$ , приведенные в таблице. Параметры  $\beta$  являются дробными для исследованного диапазона дисперсностей. Это подтверждает фрактальный характер поверхности твердой фазы.

Рис. 3 показывает, что первоначально при обводнении отмечается замедленный рост величины энергии связи по сравнению с классическим дебаевским слоем. Это подтверждает сделанное нами предположение, что силовые линии электрического поля в образующемся двойном слое оканчиваются на выступах и ребрах рельефа поверхности и соответственно происходит первичное заполнение водой впадин и пор фрактальной поверхности твердой фазы. По мере заполнения толщина водных пленок растет, и когда она достигает размеров, превышающих размеры самых крупных выступов поверхности твердой фазы, формируется гладкий дебаевский слой. С увеличением дисперсности твердой фазы в системах возрастает и энергия связи воды в них.

Таким образом, результаты проведенных исследований позволили уточнить энергетические характеристики формирования межфазной границы в исследуемой системе кварцевый песок – вода с учетом реальных свойств поверхности твердой фазы. Установлено, что в исследованных системах фрактальность поверхности твердой фазы оказывает существенное влияние на энергетические показатели межфазных границ. Полученные результаты дают основание полагать, что учет влияния фрактальности поверхности твердой фазы может значительно изменить существующие представления о процессах формирования структуры дисперсно-зернистых материалов. Мы полагаем также, что развитые представления могут быть использованы для объяснения свойств пористого кремния.

### Библиографический список

1. Boddy P.J. *Electroanal. Chem.*, 10. 1965. Vol. 50. P. 199.
2. Коноров П.П., Яфясов А.М., Божевольнов В.Б. Межфазная граница как самоорганизующаяся система // *Нелинейные процессы и проблемы самоорганизации в современном материаловедении*. Воронеж: ВГУ, 1999. С.14.
3. Калинин С.В., Томашевич К.В., Вертигел А.А. Новый критерий для описания пространственных структур и временных последовательностей // *Нелинейные процессы и проблемы самоорганизации в современном материаловедении*. Воронеж: ВГУ, 1999. С. 34.
4. Головинский П.А., Золототрубов Д.Ю., Золототрубов Ю.С., Перцев В.Т. Исследование распространения ультразвукового импульса в дисперсной фрактальной среде // *Письма в ЖТФ*. 1999. Т. 25, вып. 11. С.14.

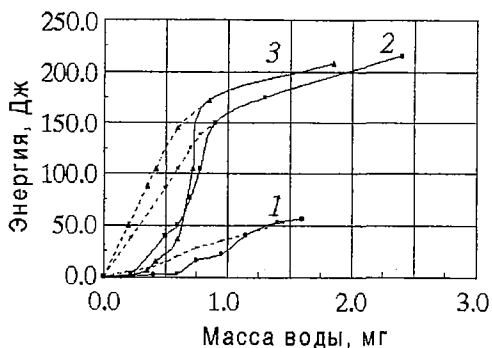


Рис. 3. Зависимость энергии связи в системе кварцевый песок – вода от массы поверхностного слоя воды для различной удельной поверхности песка: 1 – 35 м<sup>2</sup>/кг; 2 – 100 м<sup>2</sup>/кг; 3 – 300 м<sup>2</sup>/кг; пунктирная линия соответствует дебаевскому слою

5. Духин С.С. Электропроводность и электрические свойства дисперсных систем. Киев: Наукова думка, 1975. 246 с.

6. Дерягин Б.В., Ландау Л.Д. Теория устойчивости сильно заряженных лиофобных золь и слипания сильно заряженных частиц в растворах электролитов // Собрание трудов Л.Д.Ландау. М.: Наука, 1969. С.386.

7. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90, № 3. С.354.

8. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.

9. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.

10. Самко С.Л., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука, 1967. С.221.

11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.3. М.: Наука, 1967. С.221.

12. Лыков А.В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 480 с.

13. Горшков В.С., Тимашов В.В., Савельев В.Г. Методы физико-химического анализа вязущих веществ. М.: Высшая школа, 1981. 335с.

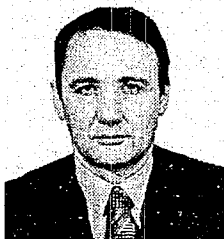
Воронежская государственная  
архитектурно-строительная  
академия

Поступила в редакцию 27.03.2000  
после доработки 25.05.2000

## DOUBLE LAYER STRUCTURE AT THE FRACTAL SURFACE

V.T. Pertzev, P.A. Golovinski

We demonstrate that inter surface processes becomes mere complex in the case of the fractal structure of solid state surface. We investigate surfaces with developed roughness. We derive new description of the bound energy for water in dispersed system. The double layer structure is investigated for this case. The approach based on the fractional integration along the normal to the surface was used. We obtained formulae for liquid mass and double layer energy in a system with fractal surface and compared them with the calorimetric analysis result for wet sand.



*Перцев Виктор Тихонович* – родился в Воронеже (1950), окончил Воронежскую государственную архитектурно-строительную академию (1972), там же работает до настоящего времени. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в Днепропетровском инженерно-строительном институте (1983) в области вибрационного формирования структуры дисперсных материалов. Опубликовал более 50 статей по данному направлению.



*Головинский Павел Абрамович* – родился в Ульяновске (1955), окончил физический факультет Воронежского государственного университета (1977). После окончания университета работал в вычислительном центре ВГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в институте теплофизики АН УзССР (1982) и доктора физико-математических наук по теоретической физике в Санкт-Петербургском государственном университете (1995). Основные научные интересы – в области теории взаимодействия сильных электромагнитных полей с веществом, оптики и спектроскопии, теории фрактальных структур и макромолкул. Автор монографии «Многочастичные процессы в атомах под действием сильного светового поля». Опубликовал более ста научных работ. Член ряда отечественных и зарубежных научных академических обществ.

E-mail: golovinski@node1.vgasa.voronezh.su



## МОДЕЛИРОВАНИЕ АСИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

*В.П. Пономаренко, С.А. Кузовкин*

Приведены результаты качественно-численного исследования асинхронных режимов и бифуркаций в динамической модели связанных генераторов с цепями автоматического управления частотой и задержкой, взаимодействующих через перекрестные обратные связи. Изучены особенности поведения системы при нарушении синхронного режима. Установлено существование квазисинхронного, сложнопериодических, квазипериодических и хаотических асинхронных режимов, не имеющих места в одиночных парциальных системах.

**1.** Изучение коллективного поведения связанных автогенераторных систем, имеющих локальные цепи управления частотой, фазой или задержкой генерируемых колебаний, составляет одно из важных направлений работ в области сложной динамики взаимодействующих активных элементов. Привлекательными свойствами таких систем являются их способность демонстрировать большое разнообразие динамических состояний и бифуркационных переходов при простой индивидуальной динамике одиночных подсистем и возможность обеспечить эффективное воздействие на характеристики формируемых колебаний с помощью изменения параметров цепей управления и связей. На поведение связанных систем с фазовым и частотным управлением существенное влияние оказывают их индивидуальные динамические свойства, определяемые структурой и параметрами цепей управления, а также типы и параметры связей. По этой причине важное значение приобретает исследование динамики разнообразных реализаций таких систем в целях выяснения роли связей и цепей управления в развитии динамических процессов.

Объектом исследования в данной работе является система двух связанных генераторов, один из которых охвачен петлей фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), а другой – петлей автоподстройки задержки во времени (АПЗ). Взаимодействие генераторов осуществляется через взаимные перекрестные обратные связи и однонаправленную связь по цепям управления. Происхождение и применение рассматриваемой системы связано с решением задач следящей оценки изменяющихся параметров – фазового угла  $\Theta(t)$  и задержки во времени  $T(t)$  – радиосигналов, сформированных на основе псевдослучайной последовательности, модулирующей по фазе синусоидальную несущую (так называемых псевдослучайных фазоманипулированных сигналов) [1,2]. Основными элементами подсистем ФАПЧ и АПЗ являются управляемые генераторы, при помощи

которых формируется опорный сигнал с параметрами  $\Theta^*(t)$  и  $T^*(t)$ , дискриминаторы рассогласований  $\varphi = \Theta(t) - \Theta^*(t)$  и  $\eta = T(t) - T^*(t)$ , цепи управления с фильтрами низких частот, типы которых определяются используемыми моделями динамики оцениваемых параметров  $\Theta(t)$  и  $T(t)$ . Взаимные перекрестные связи реализуются посредством перемножителей входного сигнала и сигналов управляемых генераторов. Через связь по цепям управления осуществляется передача сигнала о фазовом рассогласовании, образующемся в подсистеме ФАПЧ, в цепь управления подсистемы АПЗ. В такой системе процесс слежения за параметрами  $\Theta$  и  $T$  выполняется путем использования вырабатываемых дискриминаторами сигналов рассогласований фаз и задержек для коррекции параметров  $\Theta^*$  и  $T^*$  в сторону уменьшения рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$  до достижения стационарного состояния, в котором величины  $\varphi$  и  $\eta$  имеют минимальные значения. Это состояние принято называть состоянием (режимом) синхронизации опорного сигнала, формируемого с помощью подсистем ФАПЧ и АПЗ, по входному сигналу.

Специфика рассматриваемой двухпетлевой системы синхронизации (ДСС) псевдослучайного фазоманипулированного сигнала состоит в том, что характеристика дискриминатора подсистемы АПЗ имеет ограниченную рабочую область  $\Omega_\eta$  рассогласований  $\eta$ , в то время как раскрыв дискриминационной характеристики подсистемы ФАПЧ охватывает все возможные значения рассогласования  $\varphi$ . В начальный момент величина рассогласования  $\eta$  может выходить за пределы области  $\Omega_\eta$ , тогда петля управления задержкой оказывается разомкнутой и режим слежения невозможен. Для его реализации в этом случае обычно предусматривается режим поиска по задержке [1], в процессе которого частота колебаний управляемого генератора подсистемы АПЗ изменяется так, чтобы величина рассогласования  $\eta$  оказалась в пределах области  $\Omega_\eta$ . При этом переход к режиму слежения возможен, если после окончания режима поиска начальное состояние системы будет локализовано в области притяжения режима синхронизации. В противном случае в системе возникают асинхронные режимы с непостоянными величинами рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$ . Асинхронные режимы, являющиеся нежелательными для реализации слежения за параметрами  $\varphi$  и  $\eta$ , представляют непосредственный интерес для задач формирования сложных регулярных и хаотических колебаний управляемых генераторов. В связи с этим большое значение приобретает изучение механизмов перехода от асинхронного режима к режиму синхронизации и механизмов нарушения состояния синхронизации, исследование асинхронных движений и бифуркаций, развивающихся вне области параметров системы, соответствующей установлению синхронного режима.

2. Уравнения динамики рассматриваемой ДСС, записанные в операторной форме ( $p = d/dt$ ) для рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$ , имеют вид [1,3]

$$\varphi = \Theta - (k_1/p)F_1(p)R(\eta)\sin \varphi, \quad (1)$$

$$\eta = T - (k_2/p)F_2(p)[D(\eta)\cos \varphi + k_3R(\eta)\sin \varphi],$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты усиления цепей управления,  $k_3$  – степень связи через управляющие сигналы,  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  – коэффициенты передачи фильтра низких частот в цепях управления ФАПЧ и АПЗ,  $R(\eta)$  и  $D(\eta)$  – нелинейности, представляемые зависимостями



$$R(\eta) = \begin{cases} 1 + \eta/\Delta, & -\Delta \leq \eta \leq 0, \\ 1 - \eta/\Delta, & 0 \leq \eta \leq \Delta, \\ 0, & |\eta| \geq \Delta, \end{cases} \quad D(\eta) = \begin{cases} -2 - \eta/\Delta, & -2\Delta \leq \eta \leq -\Delta, \\ \eta/\Delta, & -\Delta \leq \eta \leq \Delta, \\ 2 - \eta/\Delta, & \Delta \leq \eta \leq 2\Delta, \\ 0, & |\eta| \geq 2\Delta. \end{cases}$$

Здесь  $\Delta$  – длительность одного элемента сигнала фазовой манипуляции. Уравнениям (1) можно поставить в соответствие структурную схему ДСС, приведенную на рис. 1. В этой схеме и уравнениях (1) функции  $\sin\varphi$  и  $D(\eta)$  описывают нелинейные характеристики дискриминаторов рассогласований фаз и задержек  $D(\eta)=R(\eta-\Delta)-R(\eta+\Delta)$ , а функции  $\cos\varphi$  и  $R(\eta)$  отражают взаимодействие подсистем ФАПЧ и АПЗ через взаимные перекрестные связи. Рабочая область  $\Omega_\eta$  дискриминационной характеристики  $D(\eta)$  ограничена значениями  $\eta=\pm 2\Delta$ , то есть  $\Omega_\eta=\{|\eta|<2\Delta\}$ .

Конкретный вид уравнений (1) определяется коэффициентами передачи  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$ . В данной работе мы рассмотрим модель ДСС в случае применения в цепи управления пропорционально интегрирующих фильтров низких частот первого порядка, когда  $F_1(p)=(1+mT_1p)/(1+T_1p)$ ,  $F_2(p)=(1+nT_2p)/(1+T_2p)$ , где  $T_1$  и  $T_2$  – постоянные времени,  $0 \leq m < 1$ ,  $0 \leq n < 1$ . Вводя безразмерные величины – время  $\tau=k_1t$ , переменную  $x=\eta/\Delta$ , параметры цепей управления  $\varepsilon_1=k_1T_1$ ,  $\varepsilon_2=k_1T_2$ ,  $b=k_2/(k_1\Delta)$ , степень связи  $\alpha=k_3b$ , начальные расстройки несущих  $\gamma=p\Theta/k_1$  и тактовых  $\beta=pT/(k_2\Delta)$  частот и вспомогательные переменные  $u$  и  $v$ , из уравнения (1) получим следующие уравнения динамики исследуемой ДСС:

$$\begin{aligned} d\varphi/d\tau &= u - mR(x) \sin\varphi, \\ \varepsilon_1 du/d\tau &= \gamma - u - (1-m)R(x) \sin\varphi, \\ dx/d\tau &= v - n(bD(x)\cos\varphi + \alpha R(x)\sin\varphi), \\ \varepsilon_2 dv/d\tau &= \beta - v - (1-n)(bD(x)\cos\varphi + \alpha R(x)\sin\varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $U=\{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, x, v\}$ .

Отметим основные особенности индивидуальной динамики одиночных систем ФАПЧ и АПЗ. Динамика системы ФАПЧ описывается двумя первыми уравнениями модели (3), если положить в них  $R(x)=1$ , то есть динамической системой на фазовом цилиндре  $\{\varphi(\text{mod } 2\pi), u\}$ . Для поведения системы ФАПЧ характерны синхронный режим, определяемый устойчивым состоянием равновесия, и асинхронный режим с вращением фазы и периодическими колебаниями разности частот  $y=d\varphi/d\tau$  относительно некоторого среднего значения. Асинхронному режиму на фазовом цилиндре отвечает устойчивый предельный цикл вращательного типа. Граница  $\gamma^*$  области существования такого цикла в пространстве параметров  $(\gamma, \varepsilon_1, m)$  является границей области захвата в синхронный режим. Если начальные значения параметров  $\gamma$ ,  $\varepsilon_1$  и  $m$  заданы в области захвата, то при увеличении начальной расстройки  $\gamma$  режим синхронизации сохраняется, пока  $\gamma < 1$ ; при  $\gamma > 1$  этот режим исчезает в результате седло-узловой бифуркации состояний равновесия, и система

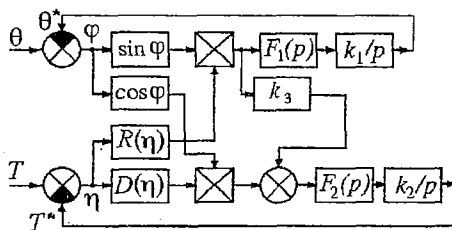


Рис. 1. Структурная схема ДСС

переходит в асинхронный режим. Если теперь уменьшать  $\gamma$ , то переход в режим синхронизации происходит при пересечении в пространстве параметров границы  $\gamma^*$  в результате бифуркации петли сепаратрис седла или двойного предельного цикла [4].

Поведение автономной парциальной системы АПЗ описывается двумя последними уравнениями модели (3), если положить в них  $\cos\varphi=1$ ,  $\alpha=0$ ,  $b=1$ , то есть динамической системой на плоскости  $(x,v)$ . Для динамики этой системы свойственны [5] движения, приводящие к синхронному режиму, определяемому устойчивым состоянием равновесия, и так называемые пролетные движения, ведущие к проскальзыванию рабочей области  $\Omega_x=\{|x|<2\}$  дискриминационной характеристики  $D(x)$ . Какое из этих движений реализуется в системе, зависит от начальных условий. Синхронный режим устанавливается, если начальные значения переменных  $x$  и  $v$  заданы в области притяжения устойчивого состояния равновесия системы. Создание таких начальных условий осуществляется в результате применения процедуры поиска по задержке. Если исходным состоянием системы АПЗ является синхронный режим, то при увеличении начальной расстройки  $\beta$  система остается в этом режиме, пока  $\beta<1$ . При  $\beta>1$  происходит срыв синхронного режима в результате седло-узловой бифуркации состояний равновесия, и в системе наблюдается выход величины рассогласования  $x$  за пределы области  $\Omega_x$ .

Таким образом, динамическая модель (3) описывает поведение ДСС, в которой взаимодействующие системы ФАПЧ и АПЗ в отдельности демонстрируют регулярную динамику. Важно отметить, что в областях  $x\text{sign}\beta>2$  фазового пространства  $U$  при возрастании времени  $\tau$  переменные  $u\rightarrow\gamma$ ,  $v\rightarrow\beta$ , а  $\varphi$  и  $x$  неограниченно растут. Следовательно, ограниченность рабочей области  $\Omega_x$  нелинейности  $D(x)$  исключает возможность глобальной устойчивости синхронного режима, характерной для одиночной системы ФАПЧ, и в автономной системе АПЗ, и при взаимодействии систем ФАПЧ и АПЗ.

**3.** Система (3) при значениях  $\alpha\gamma-b(1-\gamma^{2/3})^{3/2}<\beta<\alpha\gamma+b(1-\gamma^{2/3})^{3/2}$  имеет четыре состояния равновесия:  $A_1(\varphi_1, m\gamma, x_1, n\beta)$ ,  $A_2(\varphi_2, m\gamma, x_2, n\beta)$ ,  $A_3(\varphi_3, m\gamma, x_3, n\beta)$  и  $A_4(\varphi_4, m\gamma, x_4, n\beta)$  [3]. Координаты  $\varphi_i$  и  $x_i$ ,  $i=1,2,3,4$  определяются из уравнений

$$\gamma - R(x)\sin\varphi = 0, \quad \beta - \alpha\gamma - bD(x)\cos\varphi = 0.$$

Анализируя коэффициенты характеристических уравнений для этих состояний равновесия, устанавливаем, что состояние равновесия  $A_1$  устойчиво при значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам

$$p_1, p_2, p_3, p_4 > 0, \quad p_3(p_1 p_2 - p_3) - p_4 p_1^2 > 0,$$

где

$$p_1 = 1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 + m\Phi'_{1\varphi}(\varphi_1, x_1) + n[b\Phi'_{2x}(\varphi_1, x_1) + \alpha\Phi'_{1x}(\varphi_1, x_1)],$$

$$p_2 = 1/(\varepsilon_1 \varepsilon_2) + (1/\varepsilon_1 + m/\varepsilon_2)\Phi'_{1\varphi}(\varphi_1, x_1) + (n/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2)[b\Phi'_{2x}(\varphi_1, x_1) + \alpha\Phi'_{1x}(\varphi_1, x_1)] + m\varepsilon_1 n \varepsilon_2 p_4,$$

$$p_3 = 1/(\varepsilon_1 \varepsilon_2)[\Phi'_{1\varphi}(\varphi_1, x_1) + b\Phi'_{2x}(\varphi_1, x_1) + \alpha\Phi'_{1x}(\varphi_1, x_1)] + p_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (m/\varepsilon_2 + n/\varepsilon_1),$$

$$p_4 = b/(\varepsilon_1 \varepsilon_2)[\Phi'_{1\varphi}(\varphi_1, x_1)\Phi'_{2x}(\varphi_1, x_1) - \Phi'_{1x}(\varphi_1, x_1)\Phi'_{2\varphi}(\varphi_1, x_1)],$$

$\Phi_1(\varphi, x)=R(x)\sin\varphi$ ,  $\Phi_2(\varphi, x)=D(x)\cos\varphi$ , состояния равновесия  $A_2, A_3$  и  $A_4$  -

неустойчивые. Устойчивое состояние равновесия  $A_1$  соответствует режиму синхронизации ДСС с величинами установившихся ошибок по фазе  $\phi_1$  и  $x_1$ . Область значений параметров, в которой выполняются условия устойчивости состояния равновесия  $A_1$ , соответствует области удержания синхронного режима при изменении параметров.

Движения, развивающиеся в фазовом пространстве модели (3), зависят от восьми параметров. В данной работе мы рассмотрим динамические режимы и бифуркации, реализуемые в ДСС при изменении начальных расстройок  $\gamma$  и  $\beta$ . Предпринятое исследование проведено с помощью качественно-численных методов и компьютерного моделирования с использованием программно-методического обеспечения, предназначенного для изучения процессов нелинейной динамики в системах с фазовым и частотным управлением [6].

4. При численном исследовании модели (3) изучалась эволюция синхронного режима ДСС при изменении расстройки  $\gamma$  для ряда значений расстройки  $\beta$  на основе анализа временных реализаций, фазовых портретов аттракторов и построения однопараметрических бифуркационных диаграмм точечного отображения плоскости  $\phi=\phi^0$  в плоскость  $\phi=\phi^0+2\pi$ , порожденного траекториями модели. Обсудим результаты исследования, полученные при значениях параметров  $b=1$ ,  $\alpha=1$ ,  $\epsilon_1=2$ ,  $\epsilon_2=3$ ,  $m=n=0$ , обратившись к бифуркационным диаграммам  $\{\gamma, x\}$ .

На рис. 2, а приведена диаграмма  $\{\gamma, x\}$ , соответствующая расстройке  $\beta=0.025$ . Как показывает численное моделирование, синхронный режим существует, пока  $\gamma < 0.367$ . При  $\gamma=0.335$  в фазовом пространстве  $U$  формируется хаотический аттрактор  $P_1$ , локализованный в области  $x < 0$ , которому отвечает хаотический асинхронный режим ДСС. На рис. 2, б даны  $(\phi, x)$  и  $(v, x)$ -проекции фазового портрета и реализация  $x(\tau)$ , соответствующие этому режиму. Отметим, что хаотический аттрактор  $P_1$  появляется раньше, чем происходит исчезновение состояния равновесия  $A_1$ , следовательно, в интервале  $0.335 < \gamma < 0.367$  в ДСС сосуществуют синхронный и хаотический асинхронный режимы. Когда  $\gamma$  проходит через значение 0.367, реализуется бифуркация слияния устойчивого  $A_1$  и седлового  $A_2$  состояний равновесия, результатом которой является прекращение синхронного режима и жесткий переход системы к хаотическому асинхронному режиму. С ростом  $\gamma$  реализуется последовательность чередующихся регулярных и хаотических асинхронных режимов. Затем происходит мягкий переход от хаотических колебаний к режиму однооборотного ( $2\pi$ -периодического по  $\phi$ )

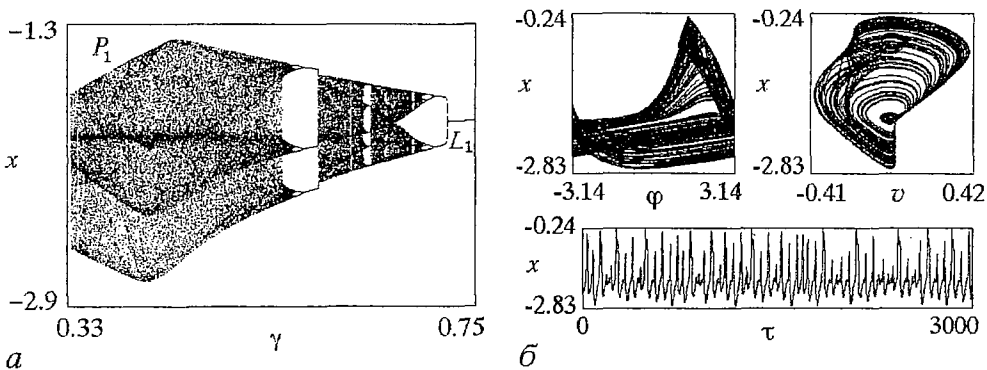


Рис. 2. Диаграмма развития асинхронных режимов при изменении  $\gamma$ , соответствующая  $\beta=0.025$  (а);  $(\phi, x)$  и  $(v, x)$ -проекции фазовых портретов и реализация  $x(\tau)$ , соответствующие хаотическому аттрактору при  $\gamma=0.335$  (б)

предельного цикла  $L_1$ , который поддерживается в системе до значения  $\gamma=2.972$ . С превышением параметром  $\gamma$  этого значения цикл  $L_1$  исчезает в результате седло-узловой бифуркации, и система переходит к режиму нарастания величины рассогласования  $x$ .

При увеличении расстройки  $\beta$  до значения 0.25 динамика системы с изменением расстройки  $\gamma$  носит качественно аналогичный характер, то есть развивается по схеме:

*синхронный режим  $\rightarrow$  асинхронные режимы  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  движения с нарастанием рассогласования  $x$ .*

При этом наблюдается сокращение интервала значений  $\gamma$ , соответствующих асинхронным режимам. На рис. 3, а приведена  $\{\gamma, x\}$ -диаграмма, соответствующая  $\beta=0.1$ . Здесь после прекращения синхронного режима система переходит к асинхронному режиму на четырехоборотном ( $8\pi$ -периодическом по  $\varphi$ ) предельном цикле  $L_2$ , который появляется из четырехободной петли сепаратрисы. На рис. 3, б даны  $(\varphi, x)$ -проекция и зависимость  $x(\tau)$ , соответствующие режиму цикла  $L_2$ . Асинхронные режимы реализуются в интервале  $0.4046 < \gamma < 1.606$ . При этом сложная динамика системы наблюдается в интервале  $0.4046 < \gamma < 0.7207$ , причем для большей части этого интервала имеют место хаотические асинхронные режимы; для значений  $0.7207 < \gamma < 1.606$  реализуется периодический асинхронный режим предельного цикла  $L_1$ . Переходы между регулярными и хаотическими режимами осуществляются как жестким образом, так и через прямые и обратные бифуркации удвоения периода.

Начиная со значения  $\beta=0.25$ , на  $\{\gamma, x\}$ -диаграммах в области асинхронных режимов появляется интервал  $\Gamma_0$  значений  $\gamma$ , соответствующих движениям системы с нарастанием рассогласования  $x$ . Эту особенность процесса преобразования режимов в ДСС иллюстрирует бифуркационная диаграмма  $\{\gamma, x\}$  при  $\beta=0.27$ , приведенная на рис. 4, а. На этой диаграмме интервал  $\Gamma_0 = \{0.6163 < \gamma < 0.7055\}$ . После

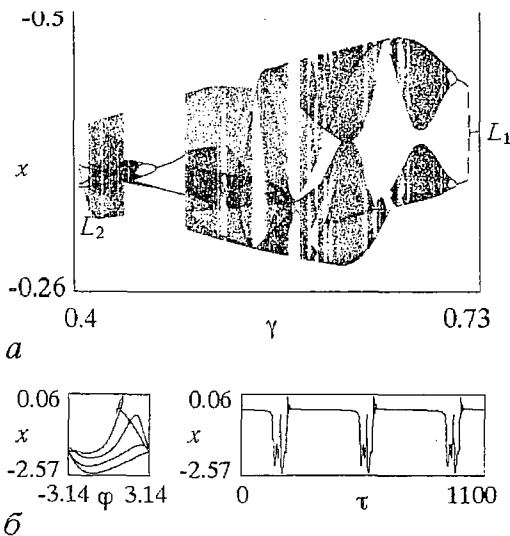


Рис. 3. Эволюция предельного цикла  $L_2$  при увеличении  $\gamma$ ,  $\beta=0.1$  (а); фазовый портрет и зависимость  $x(\tau)$ , соответствующие циклу  $L_2$ , при  $\gamma=0.405$  (б)

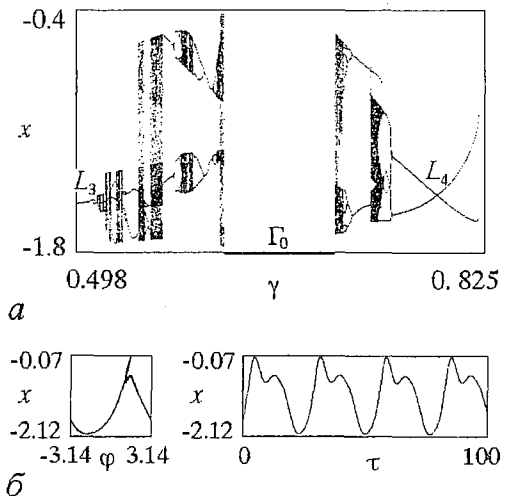


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма, характеризующая эволюцию предельного цикла  $L_3$  при  $\beta=0.27$  (а); фазовый портрет и зависимость  $x(\tau)$ , соответствующие циклу  $L_3$ , при  $\gamma=0.4617$  (б)

прекращения синхронного режима система переходит к асинхронному режиму однооборотного предельного цикла  $L_3$  (рис. 4, б), который появляется из петли сепаратрисы. С увеличением  $\gamma$  наблюдается чередование хаотических и периодических асинхронных режимов. При переходе через левую границу интервала  $\Gamma_0$  происходит прекращение хаотического режима, и система переходит в режим нарастания рассогласования  $x$ . Если при  $\gamma > 0.7055$  (справа от  $\Gamma_0$ ) вывести систему в хаотический асинхронный режим и уменьшать расстройку  $\gamma$ , то при переходе через правую границу интервала  $\Gamma_0$  система также переходит к нарастанию величины  $x$ . Если же от хаотического режима при  $\gamma > 0.7055$  двигаться по параметру  $\gamma$  в сторону его увеличения, то этот режим в итоге преобразуется в режим двухоборотного предельного цикла  $L_4$ , а затем в результате седло–узловой бифуркации этого цикла следует переход к режиму нарастания рассогласования  $x$ .

Результаты численного моделирования показывают, что с дальнейшим увеличением параметра  $\beta$  величина интервала  $\Gamma_0$  растет и наблюдается уменьшение интервалов значений  $\gamma$ , соответствующих хаотическим режимам. При  $\beta > 0.4$  хаотические режимы не реализуются.

Из сопоставления бифуркационных диаграмм  $\{\gamma, x\}$ , соответствующих различным значениям  $\beta$ , следует, что если при  $\beta < 0.25$  выбрать в качестве начального состояния системы асинхронный режим и уменьшать расстройку  $\gamma$ , то процесс преобразования исходного режима завершается установлением в системе синхронного режима после прекращения периодического или хаотического асинхронного режима. При значениях  $\beta > 0.25$  для установления синхронного режима с уменьшением  $\gamma$  нужно задавать стартовое значение  $\gamma$  слева от интервала  $\Gamma_0$ .

При значениях  $\beta > 0.45$  в ДСС при рассматриваемых значениях параметров наблюдается явление потери устойчивости состояния равновесия  $A_1$  при увеличении  $\gamma$  в результате бифуркации Андронова – Хопфа, когда в решении характеристического уравнения появляется пара комплексно–сопряженных корней с положительной реальной частью. Исследование знака первой ляпуновской величины  $L$ , вычисленной согласно [7], показывает, что эта бифуркация может быть как суперкритической (когда  $L < 0$ ), так и субкритической (когда  $L > 0$ ), то есть в системе реализуется как мягкий, так и жесткий переход к предельному циклу  $S_0$  колебательного типа в результате потери устойчивости состояния равновесия  $A_1$ . Циклу  $S_0$  соответствует квазисинхронный режим ДСС, для которого характерны периодические колебания фазовых переменных относительно состояния равновесия  $A_1$ .

При численном моделировании системы (3) установлены следующие характерные сценарии преобразования синхронного режима ДСС, связанные с увеличением параметра  $\gamma$ .

Первый сценарий, наблюдаемый при значениях  $0.45 < \beta \leq 0.65$ , можно представить в виде последовательности состояний:

*синхронный режим* → *квазисинхронный режим* → *синхронный режим* →  
→ *режим нарастания рассогласования  $x$* .

Во втором сценарии, более сложном, реализуемом при значениях  $\beta > 0.65$ , наблюдается следующая цепочка режимов и переходов:

*синхронный режим* → *квазисинхронный режим* → *удвоение периода цикла  $S_0$*  →  
→ *исчезновение двухоборотного цикла  $S_0^2$  в двухобходную петлю сепаратрисы* →  
→ *режим нарастания рассогласования  $x$* .

Результаты исследования динамики ДСС при изменении параметров  $\gamma$  и  $\beta$  дают основание сделать заключение о том, что граница области захвата системы в синхронный режим определяется бифуркациями, приводящими к возникновению (прекращению) сложнопериодических и хаотических асинхронных режимов и квазисинхронного периодического режима.

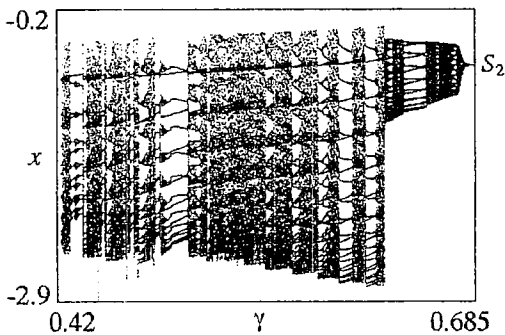


Рис. 5.  $\{\gamma, x\}$ -диаграмма, соответствующая значениям параметров  $\alpha=0.8$ ,  $b=1$ ,  $\beta=0.05$ ,  $\epsilon_1=2$ ,  $\epsilon_2=200$ ,  $m=0.8$ ,  $n=0$

Диаграмма  $\{\gamma, x\}$  показывает эволюцию асинхронного режима на 16-оборотном ( $32\pi$ -периодическом по  $\phi$ ) предельном цикле  $S_1$  (рис. 6, а) при изменении  $\gamma$  от 0.42 до 0.685. К режиму цикла  $S_1$  система переходит после прекращения синхронного режима, когда величина параметра  $\gamma$  превышает 0.422. В интервале  $0.422 < \gamma < 0.624$  процесс преобразования режима цикла  $S_1$  характеризуется нерегулярным чередованием хаотических и сложнопериодических асинхронных режимов (рис. 6, б-д), причем для большей части указанного интервала реализуются хаотические режимы (см. рис. 6, б, г, д). При  $\gamma=0.624$  происходит жесткий переход системы к режиму тор-хаоса. Соответствующая этому режиму  $(v, x)$ -проекция сечения Пуанкаре приведена на рис. 7, а. Отметим, что внутри хаотического множества на рис. 7, а существует неподвижная точка  $K$  с парой комплексно-сопряженных мультипликаторов, расположенных вне единичного круга. Точке  $K$  соответствует седловой предельный цикл  $S_2$  в фазовом пространстве системы (3).

С ростом  $\gamma$  в интервале значений  $0.624 < \gamma \leq 0.636$  структура отображения Пуанкаре постепенно эволюционирует к замкнутой кривой (рис. 7, б), то есть происходит постепенное вырождение тор-хаоса в тор  $T_1$ . На рис. 8 даны  $(\phi, x)$  и  $(v, x)$ -проекция фазового портрета и зависимости  $v(\tau)$  и  $u(\tau)$ , соответствующие квазипериодическому асинхронному режиму. При дальнейшем увеличении  $\gamma$  наблюдаются резонансные предельные циклы на торе  $T_1$ . Когда расстройка  $\gamma$  переходит через значение 0.66, пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла  $S_2$  пересекает единичную окружность, что приводит к превращению седлового предельного цикла  $S_2$  в устойчивый предельный цикл и рождению неустойчивого двумерного тора  $T_2$ . На рис. 7, в дана картина сечения Пуанкаре, соответствующая одновременному существованию в фазовом пространстве устойчивого  $T_1$  и неустойчивого  $T_2$  торов и устойчивого предельного цикла  $S_2$ . С ростом  $\gamma$  торы  $T_1$  и  $T_2$  сближаются (рис. 7, г) и исчезают при переходе  $\gamma$  через значение 0.672. В результате этой бифуркации происходит прекращение квазипериодического асинхронного режима в системе и жесткий переход к режиму

5. Численное исследование модели (3) показало возможность возникновения в рассматриваемой ДСС квазипериодического асинхронного режима. В фазовом пространстве  $U$  такому режиму соответствует устойчивый двумерный тор. Рассмотрим развитие динамических режимов при движении по параметру  $\gamma$ , установленное при значениях  $\alpha=0.8$ ,  $b=1$ ,  $\beta=0.05$ ,  $\epsilon_1=2$ ,  $m=0.8$ ,  $\epsilon_2=200$ ,  $n=0$ .

Бифуркационная диаграмма режимов  $\{\gamma, x\}$ , соответствующая этим значениям параметров, приведена на рис. 5, а на рис. 6 даны  $(v, x)$ -проекция фазовых портретов и сечения Пуанкаре аттракторов модели (3).

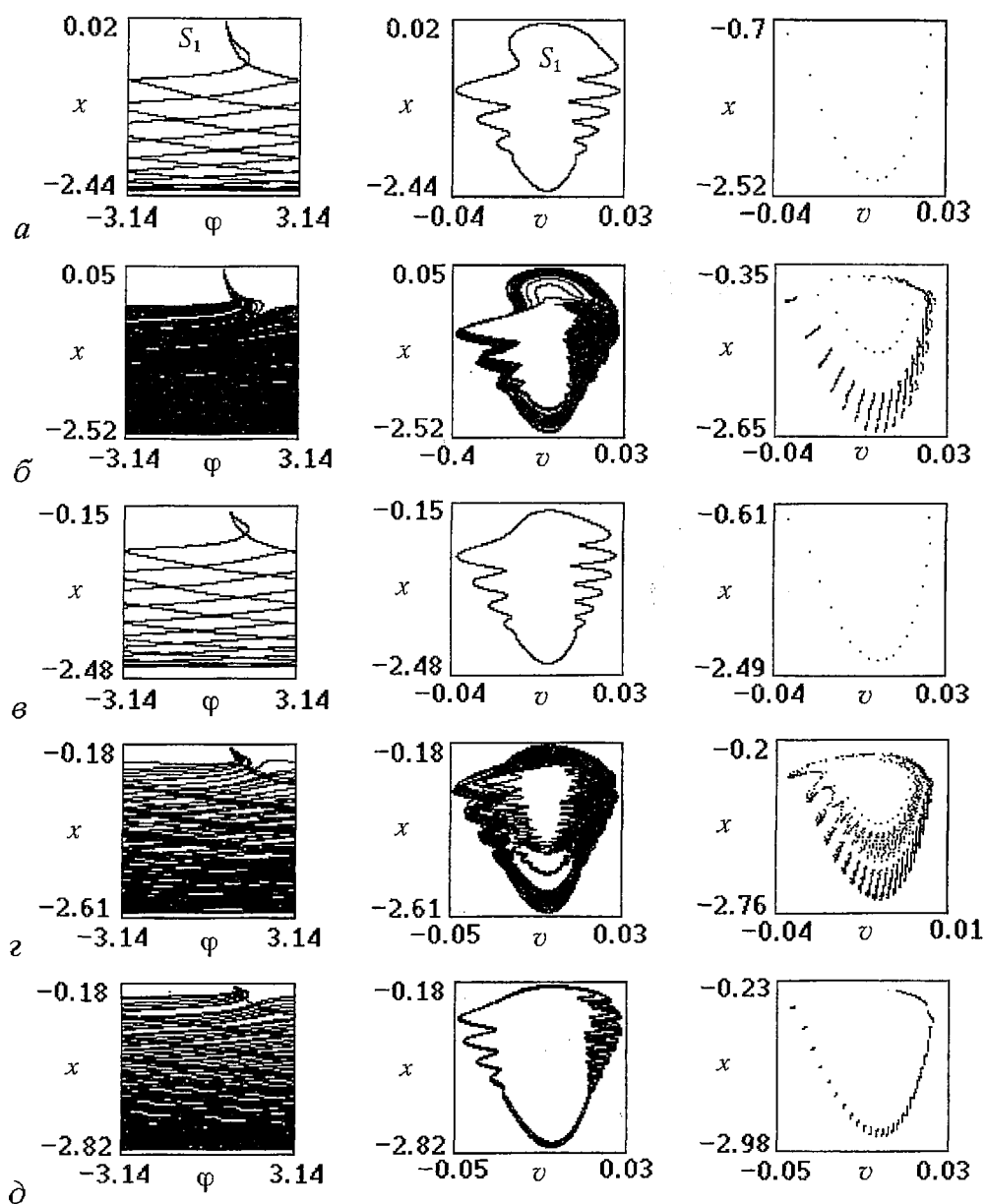


Рис. 6. Проекция фазовых портретов и сечения Пуанкаре, соответствующие аттракторам модели (3), при различных значениях  $\gamma$ : а - 0.423, б - 0.426, в - 0.5, г - 0.55, д - 0.623

цикла  $S_2$ , соответствующего устойчивой неподвижной точке  $K$  (рис. 7, д). Цикл  $S_2$  существует до значения  $\gamma=6.45$ , при  $\gamma>6.45$  он исчезает в результате седло-узловой бифуркации и система переходит к режиму нарастания рассогласования  $x$ .

При обратном изменении параметра  $\gamma$  (то есть его уменьшении от значения, соответствующего режиму предельного цикла  $S_2$ ) проявляется гистерезис, который приводит к несколько иному сценарию преобразования режимов. Колебания на цикле  $S_2$  затягиваются до значения  $\gamma=0.66$ . При этом, пока расстройка  $\gamma$  изменяется в интервале  $0.66<\gamma<0.672$ , в фазовом пространстве системы одновременно существуют цикл  $S_2$  и торы  $T_1$  и  $T_2$  (см. рис. 7, в, г). Когда параметр  $\gamma$  переходит через значение 0.66, происходит субкритическая бифуркация

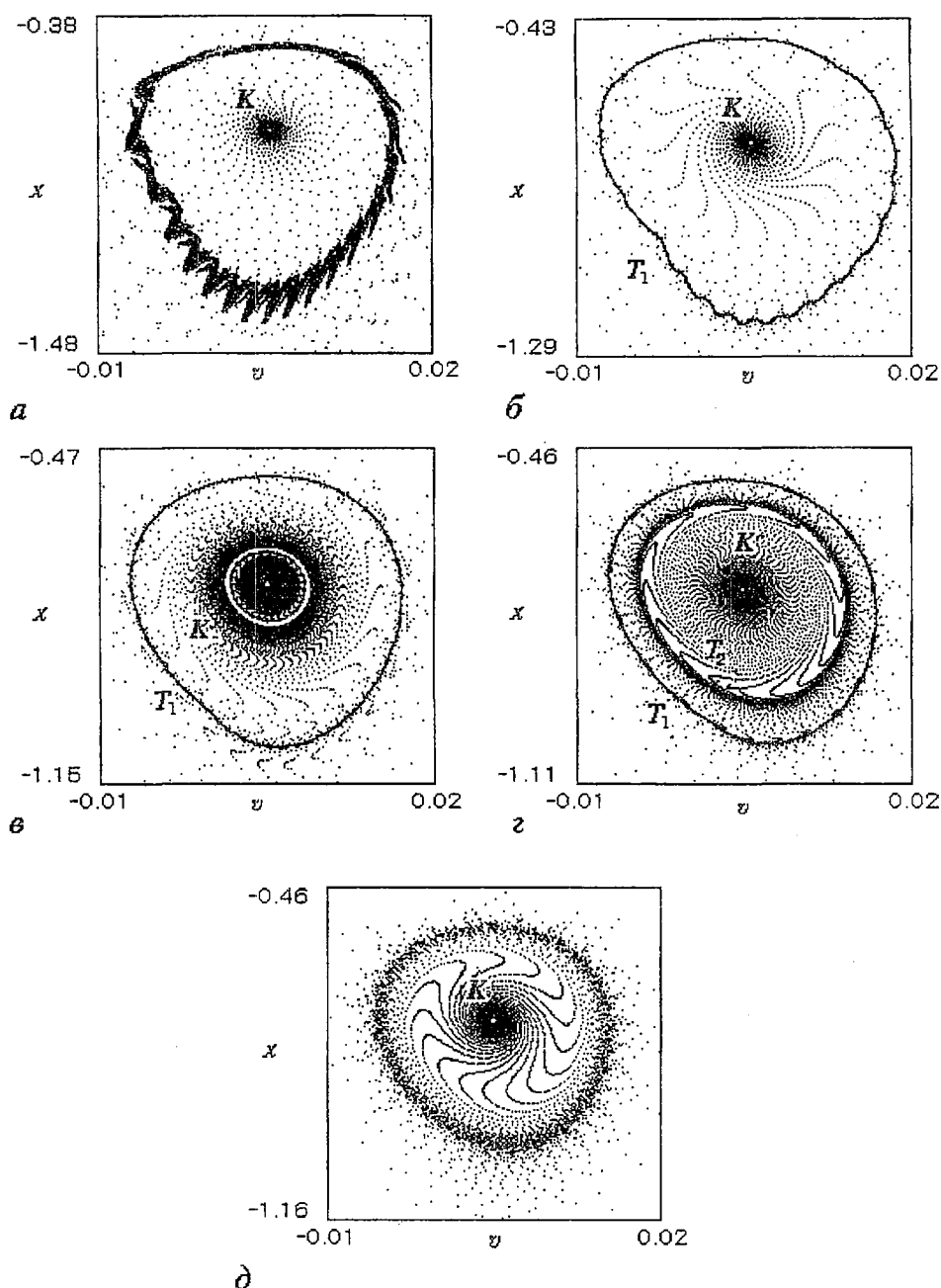


Рис. 7. Проекция сечения Пуанкаре при различных значениях  $\gamma$ .  $a - 0.626$ ,  $б - 0.636$ ,  $в - 0.662$ ,  $г - 0.669$ ,  $д - 0.673$

Андропова – Хопфа, в результате которой неустойчивый тор  $T_2$  исчезает, стягиваясь к устойчивому циклу  $S_2$ , а цикл  $S_2$  становится седловым, соответствующим ставшей неустойчивой седловой неподвижной точке  $K$  (см. рис. 7, б). В результате этой бифуркации система от сделавшегося неустойчивым режима цикла  $S_2$  жестко переходит к режиму тора  $T_1$ . В интервале значений  $0.628 < \gamma < 0.6504$  в системе реализуется асинхронный режим на 17-оборотном ( $34\pi$ -периодическом по  $\phi$ ) предельном цикле. При  $\gamma < 0.628$  возникает режим тор-хаоса (см. рис. 7, а), который при  $\gamma < 0.617$  жестко сменяется режимом 28-оборотного



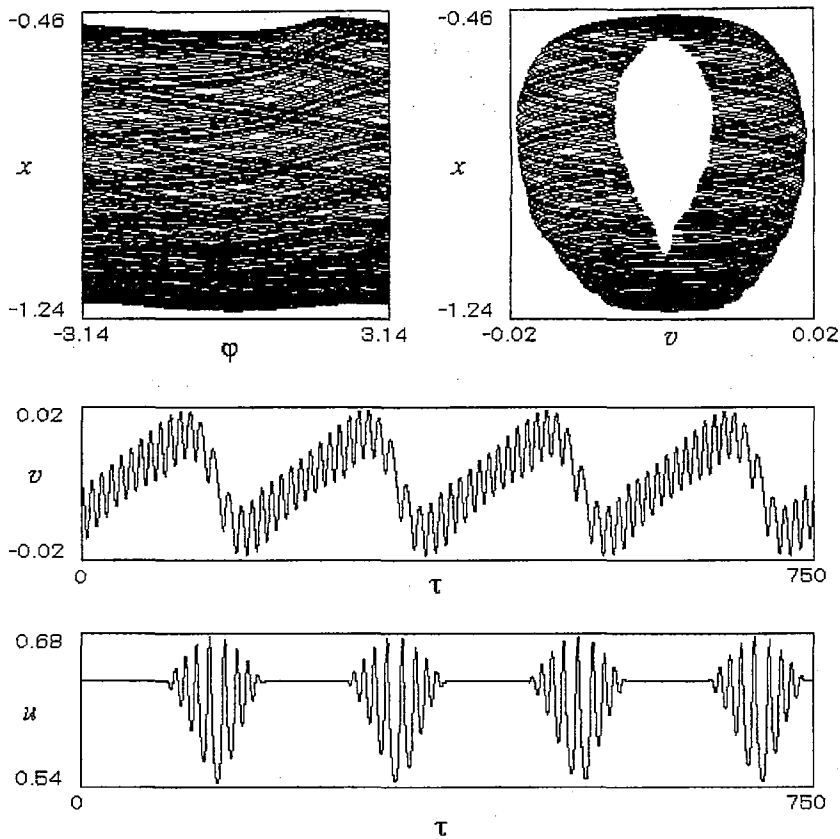


Рис. 8. Проекция фазового портрета и реализации  $v(\tau)$  и  $u(\tau)$ , соответствующие квазипериодическому асинхронному режиму, при  $\gamma=0.636$

( $56\pi$ -периодического по  $\phi$ ) предельного цикла. С дальнейшим уменьшением  $\gamma$  в системе наблюдается нерегулярное чередование хаотических и периодических режимов на многооборотных предельных циклах системы (3). При  $\gamma < 0.4167$  после прекращения хаотических колебаний система жестко переходит к синхронному режиму.

Таким образом, результаты моделирования системы (3) обнаруживают достаточно сложный характер динамических процессов, развивающихся в системе в зависимости от параметров  $\gamma$  и  $\beta$ , который обусловлен связями между взаимодействующими подсистемами ДСС.

**6.** Проведенное качественно-численное исследование динамической модели (3) с двумя степенями свободы позволило рассмотреть особенности поведения системы взаимосвязанных генераторов с цепями автоподстройки частоты и задержки в случае, когда парциальные генераторы индивидуально демонстрируют только регулярные колебательные режимы. Результаты исследования показывают, что в такой системе могут реализоваться как те динамические режимы, которые наблюдаются в парциальных генераторах с петлей автоподстройки (синхронный режим, асинхронный периодический режим, движения с нарастанием рассогласований), так и режимы и явления сложной динамики, обязанные своим происхождением наличию связей между парциальными генераторами (потеря устойчивости синхронного режима и появление квазисинхронного режима, сложные периодические и хаотические асинхронные режимы). Хаотические режимы формируются через бифуркации удвоения периода, в результате разрушения квазипериодических движений, а также жестким

образом при седло–узловых бифуркациях предельных циклов. Построенные бифуркационные диаграммы позволяют устанавливать значения параметров системы в области возбуждения желаемых типов асинхронных движений.

Полученные результаты исследования динамических состояний и бифуркационных переходов в модели (3) при изменении параметров  $\gamma$  и  $\beta$  вне области устойчивости состояния равновесия  $A_1$ , во–первых, дают представление о режимах и перестройках поведения исследуемой ДСС, возникающих при нарушении синхронного режима, а также в процессе ввода системы в синхронный режим, а во–вторых, указывают на возможности управления свойствами и областями существования формируемых в системе колебательных режимов. При этом вследствие одновременного существования различных аттракторов модели (3) в фазовом пространстве управление режимами поведения в ДСС возможно также и путем изменения начальных условий. Выявленные свойства поведения ДСС за пределами области существования синхронного режима, традиционно используемой в задачах синхронизации и слежения, открывают возможность применения системы для решения задач формирования и передачи широкополосных хаотических сигналов [8].

*Работа выполнена при поддержке научной программой Минобразования РФ «Университеты России» (код проекта 015.03. 01.33), ФЦП «Интеграция» (проект К0392) и РФФИ (грант № 99–02–17742).*

### Библиографический список

1. Тузов Г.И. Статистическая теория приема сложных сигналов. М.: Сов. радио, 1977.
2. Бабич О.А. Обработка информации в радионавигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.
3. Пономаренко В.П. Исследование динамики двухконтурной системы синхронизации псевдослучайного радиосигнала // РЭ. 1982. Т. 27, № 1. С.117.
4. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 3. С. 403.
5. Белюстина Л.Н., Пономаренко В.П., Шалфеев В.Д. О динамике системы слежения за задержкой бинарного псевдослучайного сигнала // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 11. С. 1669.
6. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне–Волжского отделения АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Н.Новгород, 1997. Вып. 2 (4). С. 15.
7. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.
8. Кислов В.Я., Кислов В.В. Новый класс сигналов для передачи информации. Широкополосные хаотические сигналы // РЭ. 1997. Т. 42, № 8. С. 962.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию 25.04.2000

### NUMERICAL SIMULATION OF ASYNCHRONOUS REGIMES IN THE SYSTEM OF COUPLED OSCILLATORS WITH PHASE CONTROL

*V.P. Ponomarenko, S.A. Kuzovkin*

Results of numerical simulations of asynchronous regimes and bifurcations are presented in the dynamical model of two coupled oscillation systems with phase and

delay control. Peculiarities of system's behaviour after disturbance of synchronous regime are studied. Complex periodical, quasi-periodical and chaotic asynchronous regimes are found, that are impossible in autonomous partial oscillators.



*Пономаренко Валерий Павлович* родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail: pmk@unn.ac.ru



*Кузовкин Сергей Александрович* – студент пятого курса факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета. Область научных интересов – динамика систем, математическое моделирование.



## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА

*А.Ф. Голубенцев, В.М. Аникин*

Рассматриваются хаотические отображения, характеристики которых выражаются через специальные функции – полиномы Чебышева и эллиптические функции. Проиллюстрирована топологическая эквивалентность полиномов Чебышева первого рода произвольной степени  $G$  кусочно–линейным эндоморфизмам, сохраняющим на интервале  $(0,1)$  меру Лебега. Найдены точные решения нестационарных уравнений Перрона – Фробениуса, отвечающих полиномам Чебышева, и исследована их сходимости к инвариантным распределениям. Показано, что показатель Ляпунова играет роль параметра, характеризующего скорость такой сходимости. Рассмотрены также сопряженные кусочно–линейным эндоморфизмам хаотические отображения, порождаемые изоморфными преобразованиями в форме эллиптических функций Якоби и лемнискатных функций Гаусса.

### Введение

Нелинейная монотонная дифференцируемая замена переменных, проводимая в хаотических разностных схемах, приводит к топологически эквивалентным (сопряженным) отображениям [1–5]. Изоморфные преобразования не изменяют фундаментальных свойств хаотических отображений (например, эргодичности и перемешиваемости). Инвариантом при обратимых преобразованиях является и такое число, как показатель Ляпунова [6]. В этом контексте говорят о тождественности двух динамических систем, действующих в различных фазовых пространствах. В то же время при координатных преобразованиях изменяются вероятностные характеристики, вводимые для описания эргодических систем. Это позволяет «конструировать» хаотические датчики псевдослучайных величин с заданными вероятностными плотностями на различных интервалах числовой оси (см., например, [7]). В качестве «базисных» при построении сопряженных отображений естественно использовать кусочно–линейные эндоморфизмы, фундаментальные хаотические свойства которых хорошо изучены (см. библиографию к [2–5]).

Полное аналитическое описание траекторных и вероятностных характеристик новых отображений достигается в случае использования в качестве сопрягающих функций монотонных ветвей периодических функций [7–10]. В статье мы проиллюстрируем методику построения сопряженных отображений, характеристики которых точно описываются некоторыми специальными функциями – полиномами Чебышева первого рода, эллиптическими функциями Якоби и лемнискатными функциями Гаусса. Любопытной особенностью

рассматриваемых разностных схем является то, что они могут включать как частный случай известное квадратичное отображение Улама – фон-Неймана [11].

## 1. Полиномы Чебышева первого рода как хаотические отображения

Эргодические и перемешивающие свойства полиномов Чебышева первого рода впервые были отмечены в [12]. Здесь мы покажем, что полиномы Чебышева любого порядка являются *точными* эндоморфизмами в силу существования изоморфной связи с точным же кусочно–линейным («пилообразным») эндоморфизмом

$$x_{n+1} = f_G(x_n) = 1/2[1 - (-1)^{\lfloor Gx_n \rfloor}] + (-1)^{\lfloor Gx_n \rfloor} \{Gx_n\}, x_n \in (0,1). \quad (1)$$

Отображение (1) на единичном интервале обладает равномерным инвариантным распределением [4] (квадратные скобки в данном случае означают целую часть числа, а фигурные скобки – дробную). В случае  $G=2$  (1) сводится к простейшему пирамидальному отображению (tent map).

В самом деле, проведем в (1) обратимую дифференцируемую замену переменных по правилу

$$x^* = h(x) = \cos \pi x, x = 1/\pi \cos^{-1}(x^*), x \in (0,1), x^* \in (-1,1). \quad (2)$$

Благодаря периодичности косинуса, кусочно–линейное отображение (1) интервала (0,1) в себя посредством (2) трансформируется в *непрерывное* отображение, определенное на интервале (-1,1)

$$x^*_{n+1} = \cos(G \cos^{-1} x^*_n) = T_G(x^*), x^* \in (-1,1), \quad (3)$$

где  $T_G(x^*)$  – многочлен Чебышева первого рода степени  $G$ . Таким образом, (2) обладает коммутационным свойством:  $h \circ f_G = T_G \circ h$ .

Взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое соотношением (2) между (1) и (3), позволяет точно вычислить важные характеристики полиномиальных отображений. Независимо от порядка все многочлены Чебышева как хаотические отображения обладают *одной и той же* инвариантной мерой

$$\rho^*(x^*) = |d/dx^* h^{-1}(x^*)| = 1/[\pi(1-x^{*2})^{1/2}], x^* \in (-1,1). \quad (4)$$

(Это соотношение следует из обычных правил преобразования вероятностных законов при монотонных координатных преобразованиях [13]). Но при этом каждый полином обладает *индивидуальной* динамикой, характеризуемой, в частности, явным представлением для текущей ( $n$ -й) итерации через начальное значение  $x^*_0$ . В самом деле, методом индукции легко показать, что

$$x^*_n = x^*_n(n, x^*_0) = \cos(G^n \cos^{-1} x^*_0) = T_{G^n}(x^*_0). \quad (5)$$

На основе (5), пользуясь общим выражением для показателя Ляпунова [14], найдем его значение для отображений (3) (и, естественно, для (1))

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \ln |d/dx^*_0 [x^*_n(n, x^*_0)]| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \ln [G^n |\sin(G^n \cos^{-1} x^*_0)| / (1-x^{*02})^{1/2}] = \ln G.$$

Конкретные выражения для итеративных функций (3) легко получаются из рекуррентного уравнения для полиномов Чебышева [15]

$$T_{k+1}(x^*) = 2x^* T_k(x^*) - T_{k-1}(x^*), k = 0, 1, \dots,$$

где полагают  $T_0(x^*)=1$ ,  $T_1(x^*)=x^*$ . Таким образом, к числу полиномиальных хаотических отображений интервала (-1,1) с инвариантной плотностью (4) принадлежат преобразования  $T_2(x^*)=2x^{*2}-1$ ,  $T_3(x^*)=4x^{*3}-3x^{*2}$ ,  $T_4(x^*)=8x^{*4}-8x^{*2}-1$ ,  $T_5(x^*)=16x^{*5}-20x^{*3}+5x^*$  и т.д.

Используя линейные замены переменных  $x^*=2x-1$  и  $x^*=1-2x$ , из (3) можно получить хаотические полиномиальные генераторы, определенные на единичном интервале

$$f_G(x) = 1/2[1 \pm T_G(\pm(2x-1))], \quad x \in (0,1). \quad (6)$$

Хаотические отображения (6) обладают инвариантной плотностью

$$\rho(x) = 2\rho^*(\pm(2x-1)) = 1/\{\pi[x(1-x)]^{1/2}\}, \quad x \in (0,1). \quad (7)$$

При  $G=2$  уравнение (6) сводится к отображению Улама – фон Неймана  $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$  [11] с инвариантной плотностью (7).

## 2. Эволюция решений уравнения Перрона – Фробениуса

Получим точные нестационарные решения уравнения Перрона – Фробениуса, отвечающего хаотическим отображениям в форме полиномов Чебышева, и выясним, как трансформируется начальное распределение, задаваемое в виде равномерного закона, под действием этого оператора.

Знание явных траекторных решений (5) для хаотических полиномиальных отображений интервала  $(-1,1)$  позволяет записать уравнение Перрона – Фробениуса [3,4], описывающее эволюцию вероятностных распределений под действием рассматриваемого преобразования, в виде

$$\rho^*_n(x^*) = \int_{-1}^1 \delta(x^* - x^*_n(n, x^*_0)) \rho^*_0(x^*_0) dx^*_0, \quad (8)$$

где  $\rho^*_0(x^*_0)$  – начальная плотность, а  $\rho^*_n(x^*)$  – преобразованная плотность после  $n$  итераций. Полагая, что начальное распределение на интервале  $(-1,1)$  является равномерным, то есть  $\rho^*_0(x^*_0)=1/2$ , получим для нестационарного решения эволюционного уравнения следующее представление:

$$\rho^*_n(x^*) = \pi/G^n \int_0^1 \delta(x^* - \cos \pi \xi) \cos(\pi(\xi-1)/G^n) \sum_{k=0}^{G^n-1} \sin(k\pi/G^{n-1} + \pi/G^n) d\xi. \quad (9)$$

Воспользовавшись формулой [16] для суммы

$$\sum_{k=0}^n \sin(ku+a) = \sin^{-1}(u/2) \sin((n+1)u/2) \sin(nu/2+a),$$

из (9) найдем

$$\rho^*_n(x^*) = \rho^*(x^*) (\pi/G^n) / \sin(\pi/G^n) \cos((\cos^{-1}x^*)/G^n - \pi/G^n) \sin^2(\pi/G), \quad x \in (-1,1) \quad (10)$$

где  $\rho^*(x^*)$  – инвариантная плотность (4). Полученный результат (10) интересен с различных позиций. Во-первых, он проясняет характер эволюции нестационарного решения к инвариантному распределению; легко видеть, что нестационарные решения сходятся к инвариантному по первому замечательному пределу математического анализа

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^*_n(x^*) = \rho^*(x^*).$$

Во-вторых, формула (10) верна для всех  $G \geq 2$ . В-третьих, из (10) следует, что скорость установления распределения, инвариантного относительно преобразований (3), зависит от величины  $G=e^{\lambda_G}$ , связанной с показателем Ляпунова ( $\lambda_G = \ln G$ ). Другими словами, (10) явно иллюстрирует тот факт, что положительный показатель Ляпунова служит не только мерой скорости разбегания (при итерациях) траекторий, стартующих из первоначально близких точек, но и мерой скорости установления инвариантного распределения в том случае, когда начальное распределение отлично от инвариантного: чем больше значение показателя Ляпунова, тем выше скорость сходимости.

Используя соотношение (7), мы можем записать нестационарные решения уравнения Перрона – Фробениуса и для топологически эквивалентных (3) полиномиальных отображений (6), определяемых на единичном интервале (0,1):

$$\rho_n(x) = 2\rho_n^*(1-2x) = \rho(x)(\pi/G^n) / \sin(\pi/G^n) \cos((\cos^{-1}x^{1/2})/G^{n-1}) \sin^2(\pi/G), \quad x \in (0,1), \quad (11)$$

где инвариантная плотность  $\rho(x)$  определяется формулой (7). В частном случае  $G=2$  из общей формулы (11) следует результат [17], относящийся к отображению Улама – фон Неймана.

Подытожим сказанное в форме следующей **теоремы**:

1. Кусочно–линейное «пилообразное» отображение (1) и полиномы Чебышева первого рода (3) для каждого целого  $G \geq 2$  являются тождественными точными эндоморфизмами. Соответствующий изоморфизм (2) удовлетворяет коммутационному соотношению

$$h \circ f_G = T_G \circ h.$$

2. Хаотические отображения на основе полиномов Чебышева любого порядка обладают единой инвариантной плотностью (4) (для интервала  $(-1,1)$ ) или (7) (для интервала  $(0,1)$ ).

3. Индивидуальная динамика каждого отображения описывается траекториями (5) и показателем Ляпунова  $\lambda = \ln G$ .

4. Для начального равномерного распределения сходимость нестационарных решений уравнения Перрона – Фробениуса для полиномов Чебышева как хаотических отображений к инвариантной плотности определяется первым замечательным пределом математического анализа.

### 3. Хаотические отображения с инвариантными законами распределения в форме эллиптических функций Якоби

В двух последующих разделах статьи приводятся некоторые результаты применения эллиптических функций Якоби и их частных представлений – лемнискатных функций Гаусса в качестве сопрягающих изоморфизмов при замене переменных в пирамидальном отображении

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & x_n \in (0, 1/2), \\ 2(1-x_n), & x_n \in (1/2, 1). \end{cases} \quad (12)$$

Новые, сопряженные (12) отображения характеризуются инвариантными законами распределения в форме эллиптических интегралов.

Напомним, что эллиптические функции Якоби  $\operatorname{sn}(u,k)$ ,  $\operatorname{cn}(u,k)$  и  $\operatorname{dn}(u,k)$  определяются обращением соответствующих эллиптических интегралов [18]

$$u = \int_0^{\operatorname{sn}(u,k)} dt / [(1-t^2)(1-k^2t^2)]^{1/2},$$

$$u = \int_{\operatorname{cn}(u,k)}^1 dt / [(1-t^2)(k'^2 - k^2t^2)]^{1/2},$$

$$u = \int_{\operatorname{dn}(u,k)}^1 dt / [(1-t^2)(t^2 - k'^2)]^{1/2}.$$

Здесь  $k$  – модуль эллиптического интеграла (рассматриваются действительные  $k$ ),  $k'^2 = 1 - k^2$ . При построении сопряженных отображений используются формулы удвоения аргумента для эллиптических функций, свойства их симметрии, в том числе периодичность. Период  $4K$  имеют, например,  $\operatorname{sn}(u,k)$  и  $\operatorname{cn}(u,k)$ , период

$2K - \text{dn}(u, k)$  и квадраты эллиптических функций;

$$K = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} d\psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2}$$

– полный эллиптический интеграл.

Сопряженные отображения, получаемые из (1) обратимой заменой переменных

$$x^* = h(x), \quad x = h^{-1}(x^*), \quad x \in (0, 1), \quad x^* \in (h(0), h(1)),$$

будем кратко описывать по плану:

- а) сопрягающая функция – *изоморфизм*;
- б) получаемое сопряженное хаотическое отображение – *сопряженный эндоморфизм*;
- в) явное представление для текущей итерации – *«точное решение»*;
- г) *инвариантная дифференциальная плотность и интегральный закон распределения*

$$\rho(x^*) = |d/dx^*[h^{-1}(x^*)]|, \quad \Phi(x^*) = \int_{h(0)}^{x^*} \rho(x^*) dx^* = h^{-1}(x^*).$$

Пример расчета названных характеристик приводится в Приложении. Данные, почерпнутые из литературы, отмечаются ссылкой на соответствующий источник.

### Отображение 1

а) *Изоморфизм*:  $x^* = \text{sn}^2(Kx, k)$ ,  $x = \text{sn}^{-1}(x^{*1/2}, k)/K$ ,  $x, x^* \in [0, 1]$ ;

б) *разностное уравнение* [9]:

$$x_{n+1}^* = 4x_n^* (1 - x_n^*) (1 - k^2 x_n^*) / (1 - k^2 x_n^{*2})^2, \quad x_n^* \in (0, 1), \quad k^2 \in (0, 1);$$

в) *точное решение* [9]:  $x_n^* = x_n^*(n, x_0^*) = \text{sn}^2(2^n \text{sn}^{-1}(x_0^{*1/2}, k), k)$ ;

г) *инвариантная плотность и закон распределения*:

$$\rho(x^*) = 1 / \{2K[x^*(1-x^*)(1-k^2x^{*2})]^{1/2}\}, \quad \Phi(x^*) = F(\text{sn}^{-1}(x^{*1/2}), k) / K.$$

### Отображение 2

а) *Изоморфизм*:  $x^* = \text{dn}^2(Kx, k)$ ,  $x = \text{dn}^{-1}(x^{*1/2}, k)/K$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $x^* \in [k'^2, 1]$ ,  $k'^2 \in [0, 1]$ ;

б) *разностное уравнение* [9]:  $x_{n+1}^* = [(k'^2 - 2k'^2 x_n^* + x_n^{*2}) / (k'^2 - 2x_n^* + x_n^{*2})]^2$ ,  $x_n^* \in [k'^2, 1]$ ;

в) *точное решение* [9]:  $x_n^* = \text{dn}^2(2^n \text{dn}^{-1}(x_0^{*1/2}, k), k)$ ;

г) *инвариантная плотность и закон распределения*:

$$\rho(x^*) = 1 / \{2K[x^*(1-x^*)(x^*-k'^2)]^{1/2}\}, \quad \Phi(x^*) = 1 - F(\text{sn}^{-1}((1-x^*)^{1/2}/K), k) / K.$$

### Отображение 3 [19]

а) *Изоморфизм*:  $x^* = 1/2[1 - \text{cn}(2Kx, k)]$ ,  $x = \text{cn}^{-1}(1 - 2x^*, k) / (2K)$ ,  $x, x^* \in [0, 1]$ ;

б) *разностное уравнение*:

$$x_{n+1}^* = 4x_n^* (1 - x_n^*) [1 - 4k^2 x_n^* (1 - x_n^*)] / \{1 - [4kx_n^* (1 - x_n^*)]^2\}, \quad x_n^* \in [0, 1], \quad k \in [0, 1];$$

в) *точное решение*:  $x_n^* = 1/2[1 - \text{cn}(2^n \text{cn}^{-1}(1 - 2x_0^*, k), k)]$ ;



г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*) = 1/\{2K[x^*(1-x^*)(k'^2+k^2(1-2x^*)^2)]\}, \quad \Phi(x^*) = \operatorname{cn}^{-1}(1-2x^*,k)/(2K).$$

#### Отображение 4

а) Изоморфизм:

$$x^* = \operatorname{cn}(2Kx,k), \quad x = \operatorname{cn}^{-1}(x^*,k)/(2K), \quad x \in [0,1], \quad x^* \in [-1,1]; \quad (13)$$

б) разностное уравнение:

$$x_{n+1}^* = [x_n^{*2} - (1-x_n^{*2})(k'^2+k^2x_n^{*2})]/[1-k^2(1-x_n^{*2})^2], \quad x_n^* \in [-1,1]; \quad (14)$$

в) точное решение:

$$x_n^* = \operatorname{cn}(2^n \operatorname{cn}^{-1}(x_0^*,k),k); \quad (15)$$

г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*) = 1/\{2K[(1-x^{*2})(k'^2+k^2x^{*2})]^{1/2}\}, \quad \Phi(x^*) = 1-\operatorname{cn}^{-1}(x^*,k)/(2K). \quad (16)$$

#### Отображение 5

а) Изоморфизм:  $x^* = \operatorname{dn}(Kx,k)$ ,  $x = \operatorname{dn}^{-1}(x^*,k)/K$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $x^* \in [k',1]$ ;

б) разностное уравнение:  $x_{n+1}^* = (k'^2 - 2k'^2x_n^* + x_n^{*4})/(k'^2 + 2x_n^{*2} - x_n^{*4})$ ,  $x_n^* \in [k',1]$ ;

в) точное решение:  $x_n^* = \operatorname{dn}(2^n \operatorname{dn}^{-1}(x^*,k),k)$ ;

г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*) = 1/\{K[(1-x^{*2})(x^{*2}-k'^2)]^{1/2}\}, \quad \Phi(x^*) = 1-\operatorname{dn}^{-1}x^*/K.$$

### 4. Лемнискатные функции Гаусса в теории одномерных отображений

Отображения, приводимые ниже, получены на основе изоморфизмов в форме лемнискатных функций Гаусса. Эти функции можно рассматривать как частный случай эллиптических функций Якоби для  $k^2=1/2$ , а именно: лемнискатные косинус и синус определяются соответственно как

$$\operatorname{cl} u = \operatorname{cn}(2^{1/2}u, 1/2^{1/2}),$$

$$\operatorname{sl} u = \operatorname{cl}(\omega^*/2 - u) = \operatorname{cn}(K_0 - 2^{1/2}u),$$

где  $\omega^* = 2^{1/2}K_0 = 2 \int_0^1 dt/(1-t^4)^{1/2}$  – полупериод лемнискатных функций  $\operatorname{cl}$  и  $\operatorname{sl}$ , являющийся периодом квадратов  $\operatorname{cl}^2$  и  $\operatorname{sl}^2$  этих функций.

#### Отображение 6 [20]

а) Изоморфизм:  $x^* = \operatorname{sl}(\omega^*x/2)$ ,  $x = 2\operatorname{sl}^{-1}(x^*)^{1/2}/\omega^*$ ,  $x, x^* \in [0,1]$ ;

б) разностное уравнение:  $x_{n+1}^* = 4x_n^*(1-x_n^{*2})/(1+x_n^{*2})^2$ ,  $x_n^* \in [0,1]$ ;

в) точное решение:  $x_n^* = \operatorname{sl}^2(2^n \operatorname{sl}^{-1}(x_0^*)^{1/2})$ ;

г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*) = 1/\{\omega^*[x^*(1-x^*)]^{1/2}\}, \quad \Phi(x^*) = 2\operatorname{sl}^{-1}(x^*)^{1/2}/\omega^*.$$

## Отображение 7 [20]

а) *Изоморфизм*:  $x^* = c1 \omega^* x$ ,  $x = 1/[\omega^*(1-x^{*4})^{1/2}]$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $x^* \in [-1,1]$ ;

б) *разностное уравнение*:  $x^*_{n+1} = [2x^{*2}_n - (1-x^{*2}_n)^2]/[2 - (1-x^{*2}_n)^2]$ ,  $x^*_n \in [-1,1]$ ;

в) *точное решение*:  $x^*_n = c1^2(2^n c1^{-1} x^*_0)$ ;

г) *инвариантные плотность и закон распределения*:

$$\rho(x^*) = 1/[\omega^*(1-x^{*4})^{1/2}], \quad \Phi(x^*) = c1^{-1} x^*/\omega^*.$$

## Заключение

Итак, хаотические отображения в форме полиномов Чебышева первого рода являются точными эндоморфизмами, обладающими инвариантными плотностями в форме (4) и (7), а также явными представлениями для итераций (5). Последнее позволяет записать соответствующее уравнение Перрона – Фробениуса в специфическом виде (8), найти его решения (10) и (11) (для различных интервалов задания полиномов), установить закономерности их асимптотического поведения. Полученное представление для решения эволюционного уравнения позволяет трактовать показатель Ляпунова как меру скорости сходимости нестационарного распределения к инвариантному.

Большинство рассмотренных выше нелинейных преобразований переменной в базисном пирамидальном отображении на основе эллиптических функций Якоби содержат зависимость от параметра – модуля эллиптического интеграла. Вариация этого параметра может влиять на границы отрезка задания нового отображения. Однако в силу взаимно однозначного соответствия с исходным хаотическим эндоморфизмом новое отображение может в определенном смысле только «копировать» поведение базисного эндоморфизма, то есть демонстрировать «чистый хаос» для некоторой области изменения параметра без проявлений качественного изменения динамики.

В примерах 1 и 2 мы, по существу, аналитически доказали хаотичность отображений, приведенных в [9] под номерами 10 и 11, «снабдив» их инвариантными распределениями.

Интересно и то, что известное отображение Улама – фон Неймана,  $x^*_{n+1} = 4x^*_n(1-x^*_n)$ , определенное на интервале (0,1), и его «перезапись» (посредством линейных преобразований) на интервал (-1,1), представляемая полиномом Чебышева второго порядка, включаются в семейство «параметрических» отображений 1, 3 и 4, отвечая критическому значению параметра  $k=0$ .

Авторы благодарят рецензента за обсуждение работы.

## Приложение

Рассмотрим более подробно, как рассчитываются характеристики сопряженных отображений на примере **отображения 4** (см. уравнения (13) – (16)). Функция  $x^* = \text{sp}(2Kx, x)$  на отрезке [0,1] является монотонно убывающей, принимая значение 1 при  $x=0$  и значение -1 при  $x=1$ . Поэтому, делая замену переменных в базисном отображении (12) согласно (13), получим

$$\text{sp}^{-1}(x^*_{n+1}, k)/(2K) = \begin{cases} 2[1-1/(2K)]\text{sp}^{-1}(x^*_n, k) & x^*_n \in (-1,0), \\ 2\text{sp}^{-1}(x^*_n, k)/(2K), & x^*_n \in (0,1). \end{cases}$$

Умножая полученное соотношение на  $2K$  и учитывая, что функция  $\text{sp}(u, k)$  имеет период  $4K$ , приходим от кусочно-линейного отображения (12) к отображению, описываемому *единым аналитическим выражением* для всего интервала его определения

$$x^*_{n+1} = \text{cn}(2\text{cn}^{-1}(x^*_n, k), k), \quad x^*_n \in (-1, 1). \quad (\text{A1})$$

Представление отображения в форме (A1) позволяет, во-первых, получить явное выражение для любой итерации через начальное значение и, во-вторых, переписать отображение в виде дробно-рациональной функции. В самом деле, методом математической индукции легко показать, что точное решение разностного уравнения (A1) имеет вид (15). Так, для  $n=0$  из (A1) имеем

$$x^*_1 = \text{cn}(2\text{cn}^{-1}(x^*_0, k), k), \quad x^*_0 \in (-1, 1). \quad (\text{A2})$$

Предполагая справедливость (15) для некоторого  $n=k$ , с учетом (A1) получим для  $n=k+1$

$$x^*_{k+1} = \text{cn}(2\text{cn}^{-1}(x^*_k, k), k) = \text{cn}(2\text{cn}^{-1}(\text{cn}(2\text{cn}^{-1}(x^*_0, k), k), k), k) \equiv \text{cn}(2^{k+1}\text{cn}^{-1}(x^*_0, k), k),$$

что и доказывает (15).

Применяя, далее, в (A1) формулу удвоения аргумента для функции  $\text{cn}(u, k)$  (параметр  $k$  при записи опускается)

$$\text{cn}2u = (\text{cn}^2u - \text{sn}^2u \cdot \text{dn}^2u) / (1 - k^2 \text{sn}^4u) = [\text{cn}^2u - (1 - \text{cn}^2u)(k'^2 + k^2 \text{cn}^2u)] / [1 - k^2(1 - \text{cn}^2u)^2],$$

получим представление отображения в виде дробно-рациональной функции (14).

Наконец, дифференцируя функцию

$$h^{-1}(x^*) = \text{cn}^{-1}(x^*) / (2K),$$

находим инвариантную плотность, ассоциированную с данным отображением, а затем и соответствующий закон распределения (см. (16)).

В результате аналогичных действий определяются характеристики и всех других дробно-рациональных хаотических отображений, представленных в статье.

### Библиографический список

1. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
2. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
3. Якобсон М.В. Эргодическая теория одномерных отображений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / Науч. ред. Р.В. Гамкрелидзе. Сер. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 2. С. 204.
4. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
5. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986.
6. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Ляпуновский характеристический показатель для динамических систем // Труды московского математического общества. 1968. Т. 19. С. 179.
7. Goloubentsev A.F., Anikin V.M. The explicit solutions of Frobenius - Perron equation for the chaotic infinite maps // Int. J. of Bifurc. and Chaos. 1998. Vol. 8, № 5. P. 1049.
8. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983.
9. Katsura Sh., Fukuda W. Exactly solvable models showing chaotic behavior // Physica. 1985. Vol. 130A, № 3. P. 597.
10. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М. Инвариантные меры для хаотических разностных уравнений с точными решениями // Вопросы прикладной физики: Межвузовский научный сборник. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1998. Вып. 4. С. 29.
11. Ulam S.M., von Neumann J. On combination of stochastic and deterministic processes // Bulletin of the American Mathematical Society. 1947. Vol. 53, № 11. P. 1120.
12. Adler R.L., Rivlin T.J. Ergodic and mixing properties of Chebyshev polynomials // Proceedings of the American Mathematical Society. 1964. Vol. 15, № 5. P. 794.

13. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.
14. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. С. 63.
17. Falk H. Evolution of the density for a chaotic map // Physics Letters. 1984. Vol. 105, № 3. P. 101.
18. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.
19. Tsuchiya T. An exactly solvable difference equation that give pure chaos for a continuous range of a parameter // Zeitschrift fur Naturforschung. 1984. Vol. A39, № 1. P. 80.
20. Goloubentsev A.F., Anikin V.M. Gauss lemniscate functions as exact solutions for chaotic maps // Nonlinear dynamics and chaos. Application in Physics, Biology and Medicine. Saratov: College, 1996. P. 75.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 19.01.2000  
после доработки 28.03.2000

## SPECIAL FUNCTIONS IN THE THEORY OF DETERMINISTIC CHAOS

*A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin*

It is illustrated the Chebyshev polynomials are the exact endomorphisms that are conjugated to the piecewise linear chaotic transformations. Explicit nonstationary solutions of the Perron – Frobenius equations for the chaotic Chebyshev maps are found. Their convergence to invariant densities is analyzed. The results allow one to treat the Lyapunov exponent as the rate of such convergence. Some chaotic maps that are monotonically related to the tent map by Jacobian elliptic functions and Gaussian lemniscate ones and characterized by invariant distributions in the form of elliptic integrals are constructed.



*Голубенцев Александр Федорович* – родился в Смоленске (1933). Окончил Саратовский университет (1956). С 1959 года работает в СГУ. Доктор физико–математических наук, профессор. С 1988 года – заведующий кафедрой вычислительной физики и автоматизации научных исследований. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Автор монографий «Шумы и флуктуации в электронных потоках», «Введение в статистическую электронику», «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», «Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Член диссертационных советов СГУ и СГТУ.



*Аникин Валерий Михайлович* – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил Саратовский университет (1970). После окончания СГУ работал в научно–исследовательском институте механики и физики СГУ, с 1984 года – на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Кандидат физико–математических наук, доцент. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Соавтор монографий «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Ученый секретарь докторского диссертационного совета СГУ по специальностям радиофизика, оптика, физика полупроводников и диэлектриков.

E–mail: Anikinvm@info.sgu.ru



## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В СВЯЗАННЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СТРУКТУРАХ

*Ю.П. Шараевский, М.А. Малюгина*

Сформулирована система нелинейных уравнений, описывающая процесс распространения прямых объемных магнитостатических волн в связанных ферромагнитных пленках. В рамках численного моделирования на основе полученной системы рассмотрены некоторые особенности, связанные с образованием солитонных формирований при различных параметрах структуры.

Нелинейные волновые явления в ферромагнитных пленках, связанные с возбуждением и распространением магнитостатических волн (МСВ), представляют интерес в плане как фундаментальных, так и прикладных исследований [1–3]. Прежде всего, это связано с тем, что МСВ обладают рядом уникальных свойств: легко возбуждаются и имеют сравнительно небольшие потери практически во всем СВЧ-диапазоне; характер их дисперсии существенно зависит от направления подмагничивающего поля и проводимости граничных слоев; характеризуются малыми пороговыми мощностями возбуждающего сигнала и т.д. [1]. К настоящему времени достаточно подробно как теоретически, так и экспериментально изучены эффекты самомодуляции, самофокусировки и образования солитонов огибающей для различных типов МСВ в однопленочных ферромагнитных структурах (см., например, [3–16]). В последние годы появился ряд работ по исследованиям указанных эффектов в связанных волноведущих системах, относящихся к различным дисперсионным средам (плазменным, оптическим и т.д.) [17–19]. Нелинейные волновые явления в многослойных ферритовых структурах практически не исследовались. Однако можно предположить, что наличие связи между слоями приведет к расширению возможностей таких нелинейных систем (в частности, можно указать на работу [20]). Цель данной работы – моделирование процессов автомодуляции, образования и распространения солитонов огибающей в двухслойной ферромагнитной структуре на основе системы связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) с учетом затухания в среде.

**Модель анализа и вывод основных уравнений.** Анализируемая структура представляет собой два ферромагнитных слоя толщиной  $D_1$  и  $D_2$ , разделенных диэлектрическим промежутком толщиной  $d$  (рис. 1). Постоянное магнитное поле  $H_0$  приложено вдоль оси  $z$  по нормали к поверхности слоев. При такой геометрии в безобменном приближении в каждом из слоев вдоль оси  $y$  распространяются

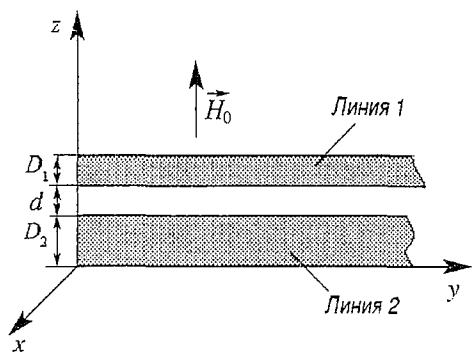


Рис. 1. Схема связанной системы

ности  $m_{x_{1,2}}$  и  $m_{y_{1,2}}$  каждого из слоев и уравнением для магнитостатического потенциала. Применительно к анализируемой схеме рис. 1 эти уравнения можно записать в следующем виде [1]:

$$\partial^2 m_{x_{1,2}} / \partial t^2 = -(\gamma H_0)^2 m_{y_{1,2}} + \gamma M_{z_{1,2}} \partial / \partial t (h_{y_{1,2}} + K_1 h_{y_{2,1}}), \quad (1a)$$

$$\partial^2 m_{y_{1,2}} / \partial t^2 = -(\gamma H_0)^2 m_{x_{1,2}} + \gamma M_{z_{1,2}} \partial / \partial t (h_{x_{1,2}} + K_2 h_{x_{2,1}}), \quad (1б)$$

$$\partial^2 \psi_{1,2} / \partial z^2 + \partial^2 \psi_{1,2} / \partial y^2 = -4\pi \partial m_{y_{1,2}} / \partial y, \quad (1в)$$

где индексы 1 и 2 относятся к переменным величинам в каждом из слоев, соответственно;  $m_{x_{1,2}}$  и  $m_{y_{1,2}}$  — компоненты переменной намагниченности;  $\psi_{1,2}$  — магнитостатический потенциал, определяющий компоненты высокочастотного магнитного поля ( $h_{x_{1,2}} = \partial \psi_{1,2} / \partial x$ ,  $h_{y_{1,2}} = \partial \psi_{1,2} / \partial y$ );  $M_{z_{1,2}}$  — продольная компонента намагниченности, связанная с поперечными соотношением:  $M_{z_{1,2}} = M_{0_{1,2}} [1 - (m_{x_{1,2}}^2 + m_{y_{1,2}}^2) / M_0^2]^{1/2}$ ,  $M_{0_{1,2}}$  — намагниченность насыщения для каждого из слоев;  $\gamma$  — гиромагнитное соотношение. Величины  $K_1$  и  $K_2$  в уравнениях (1a) и (1б) — феноменологические коэффициенты связи, определяющие электродинамическую связь по ВЧ-полно одного слоя с другим, соответственно. Для данных коэффициентов из решения электродинамической задачи для многослойной структуры путем «спивания» магнитных проницаемостей на границах слоев [1] можно получить следующее соотношение:

$$K_1 K_2 = 2 \exp(-2kd), \quad (1г)$$

где  $k$  — волновое число.

Используя соответствующие соотношения на границах ферромагнитных слоев и диэлектрика, соотношение для магнитостатического потенциала в случае рассматриваемой нормально намагниченной и безграничной в плоскости ( $x, y$ ) структуры ( $\partial / \partial x = 0$ ) можно представить в виде

$$\psi = \psi_0(y, t) [\cos k_z z + (k/k_z) \sin k_z z] \exp[j(\omega t - ky)], \quad (2)$$

где  $\psi_0(y, t)$  — медленно меняющаяся амплитуда магнитостатического потенциала, зависящая от координаты  $y$  и времени  $t$ ;  $k_z$  и  $k$  — поперечное и продольное волновые числа, соответственно;  $\omega$  — частота сигнала; индексы 1 и 2 в (2) опущены. Связь между  $k_z$ ,  $k$  и  $\omega$  определяется в каждом из слоев соответствующими дисперсионными соотношениями [1]:

$$\operatorname{tg} k_z D = 2k k_z / (k_z^2 - k^2), \quad (3)$$

$$k_z^2 = -(1 + \chi) k^2,$$

где  $\chi = \omega_M \omega_H / (\omega_H^2 - \omega^2)$ ,  $\omega_M = \gamma 4\pi M_0$ ,  $\omega_H = \gamma H_0$ .

медленные объемные электромагнитные волны с нормальной дисперсией. В тонких пленках для таких волн справедливо магнитостатическое приближение и поэтому в литературе они получили название: прямые объемные магнитостатические волны (ПОМСВ) [1,2]. Отметим, что в линейной системе характеристики этих волн в такой связанной ферромагнитной структуре достаточно хорошо изучены (см., например, [21]).

В качестве исходных соотношений воспользуемся уравнениями движения для поперечных компонент намагничен-

Если предположить, что  $k \ll k_z$  и  $k_z D \ll 1$ , то из (3) получаем

$$k_z^2 \approx 2k/D \text{ и } 2/(kD) = \omega_M \omega_H / (\omega^2 - \omega_H^2), \quad (4)$$

где последнее выражение представляет собой дисперсионное соотношение для ПОМСВ в длинноволновом приближении.

В длинноволновом приближении с учетом (2) применительно к анализируемой модели ( $\partial/\partial x = 0$ ) из уравнения (1в) для магнитостатического потенциала в слоях получим соотношение

$$\psi_{1,2} = 4\pi/k_{z,2}^2 \partial m_{y,2} / \partial y. \quad (5)$$

Используя (1а) и (1б), а также связь между компонентами  $m_{x,2}$  и  $m_{y,2}$ , для поперечных составляющих намагниченности в случае рассматриваемой связанной структуры с учетом затухания волн в ферромагнитной пленке можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial^2 m_1 / \partial t^2 = -\omega_H^2 m_1 + \gamma m_z \partial / \partial t (h_{y_1} + K_1 h_{y_2}) - 2\alpha_{0_1} \omega_H m_z \partial m_1 / \partial t, & (6a) \\ \partial^2 m_2 / \partial t^2 = -\omega_H^2 m_2 + \gamma m_z \partial / \partial t (h_{y_2} + K_2 h_{y_1}) - 2\alpha_{0_2} \omega_H m_z \partial m_2 / \partial t, & (6b) \end{cases}$$

где  $m_{1,2} = m_{x,2} / M_0$ ,  $m_{z,2} = M_{z,2} / M_0 = 1 - 1/2(1 + \omega_H^2 / \omega^2) |m_{1,2}|^2$  – безразмерная составляющая намагниченности,  $\alpha_{0,2} = 2\pi\gamma \Delta H_{1,2}$  – параметр диссипации в каждом из слоев [7], а  $\Delta H_{1,2}$  – ширина кривой ферромагнитного резонанса в соответствующей пленке.

С учетом (5) из (6а) и (6б) получаем систему связанных нелинейных волновых уравнений относительно  $m_1$  и  $m_2$ . В линейном случае ( $m_{z,2} = 1$ ) из полученной системы уравнений можно вывести дисперсионное соотношение, которое совпадает с дисперсионным соотношением для связанных МСВ в нормально намагниченных слоях ферромагнетика в длинноволновом приближении, то есть при  $k \ll k_z$  (см. [1,21]).

Для анализа системы нелинейных уравнений (6) используем метод возмущений [3,4,22], то есть решение будем искать в виде разложения по малому параметру  $\epsilon$  ( $\epsilon \sim |m|^2$ )

$$m_{1,2} = m_{1,2}^{(0)} + \sum_{v=1}^{\infty} \epsilon^v m^{(v)}, \quad (7)$$

$$m_{1,2}^{(v)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{n,2}^{(v)}(\tau, \xi) \exp[jn(\omega t - ky)], \quad v \geq 1,$$

где  $\tau = \epsilon(y/V_g - t)$ ,  $\xi = \epsilon^2 t V_g$  – медленно меняющиеся переменные;  $V_g$  – групповая скорость МСВ в линейном приближении, определяемая из дисперсионного соотношения  $\omega(k)$ . Предположим, что высшие гармоники, возникающие на нелинейности, малы и наличие дисперсии препятствует их резонансному возрастанию. Используя (7), для первой гармоники намагниченности ( $n=1$ ) в первом приближении можно записать

$$m_{1,2}^{(1)} = \phi_{1,2}(\tau, \xi) \exp[j(\omega t - k_{1,2}y)], \quad (8)$$

где  $\phi_{1,2}(\tau, \xi)$  – медленно меняющаяся комплексная амплитуда (огibaющая) первой гармоники, а  $k_{1,2}$  – постоянные распространения в слое 1 и 2, определяемые соотношением (4).

Подставляя (8) в систему уравнений (6) и предполагая, что  $|k_1 - k_2| = |\Delta k| \ll k_{1,2}$ , (или  $|\Delta k/k_{1,2}| \sim \epsilon^2$ ), с точностью до второго порядка малости ( $\sim \epsilon^2$ ) получаем систему для комплексных огibaющих волн  $\phi_{1,2}(\tau, \xi)$  в первом и втором слоях

$$\begin{cases} j \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} - A \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} - (B|\varphi_1|^2 + j\alpha_1)\varphi_1 - K_1 \left[ C \frac{D_1^2}{D_2^2} \frac{\omega_{M_2}}{\omega_{M_1}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} + \frac{\omega_{M_1}}{\omega_{M_2}} B|\varphi_1|^2 \varphi_2 \right] = 0, \\ j \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} - \left( C \frac{D_2^2}{D_1^2} \frac{\omega_{M_2}^2}{\omega_{M_1}^2} - \frac{1}{2\omega V_g} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} - (B|\varphi_2|^2 + j\alpha_2)\varphi_2 - K_2 \frac{\omega_{M_2}}{\omega_{M_1}} \left[ C \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + B|\varphi_2|^2 \varphi_1 \right] = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $C = \omega_{M_1}^2 D_1^2 / [8\omega V_g^3 (\omega^2/\omega_H^2 - 1)]$ ,  $A = C - 1/(2\omega V_g)$  – коэффициенты, характеризующие дисперсионное расплывание волны;  $B = \omega(1 - \omega_H^4/\omega^4)/(4V_g)$  – коэффициент нелинейности;  $V_g = \omega_{M_1} \omega_H D_1 / \omega$  – групповая скорость волны в слое  $I$ ;  $\alpha_{1,2} = \alpha_{01,2} (\omega^2/\omega_H^2 + 1)/V_g$ .

В отсутствие связи ( $K_{1,2} = 0$ ) уравнения (9) переходят в стандартные НУШ, которые описывают эволюцию комплексных огибающих в различных средах [23]. Знаки коэффициентов  $A$  и  $B$  в этом случае определяют устойчивость ( $AB < 0$ ) или неустойчивость ( $AB > 0$ ) модуляции амплитуды. Таким образом, как следует из (9), ПОМСВ в одиночной ферромагнитной пленке всегда являются неустойчивыми относительно продольных возмущений [3,5].

При  $K_{1,2} \neq 0$  уравнения (9) представляют систему связанных НУШ, которые описывают поведение комплексных амплитуд плоской волны в двухслойной ферромагнитной структуре. Из системы уравнений (9) также следует, что наличие связи не приводит к изменению знаков у дисперсионных и нелинейных коэффициентов в каждом из слоев, то есть в рассматриваемой структуре также возможна модуляционная неустойчивость МСВ относительно продольных возмущений. Ниже на основе численного решения системы (9) рассмотрены некоторые особенности поведения нелинейных МСВ в рассматриваемой двухслойной структуре.

**Результаты численного исследования.** При численном моделировании процессов распространения ПОМСВ использовались следующие параметры, соответствующие экспериментальным значениям работы [7]:  $H_0 = 875$  Э,  $M_0 = 140$  Гс,  $\Delta H_{1,2} \sim 0.1 \div 0.3$  Э (пленка железоиттриевого граната), толщины пленок  $D_{1,2}$  варьировались в пределах нескольких десятков микрометров.

Расчитанные значения коэффициентов системы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  при выбранных параметрах структуры в полосе частот  $f \sim 2.4 \div 2.8$  ГГц представлены на рис. 2. В целях нормировки полагалось, что в уравнении (9)  $\tau \rightarrow \tau A_0/B_0$ ,  $\xi \rightarrow \xi/B_0$ , где  $A_0$  и  $B_0$  – значения коэффициентов на одной из частот  $f_0 = 2.6$  ГГц.

Начальное возмущение при  $\xi = 0$  задавалось в виде  $\varphi_0(0, \tau) = \varphi_0 \exp(-\tau^2/T_0)$ , причем, как показывают расчеты, форма начального возмущения не оказывает существенного влияния на картину эволюции.

Так, для одиночного НУШ ( $K_{1,2} = 0$ ) показано [12,13], что образование солитонов происходит, если нелинейность компенсирует дисперсионное расплывание начального импульса, а именно:

$$A/|\varphi_0|^2 = V_g^2 T_0^2 B. \quad (10)$$

В таких условиях, образование хотя бы одного солитона в несвязанной линии происходит, в нашем случае, при частоте сигнала  $f > f_1$  (см. рис. 2). Наличие связи, как видно из уравнений (9), приводит в каждом из слоев к дополнительной дисперсии и дополнительной нелинейности.

Результаты численного решения системы уравнений (9) для случая, когда начальное возмущение в виде экспоненциального импульса задается на входе

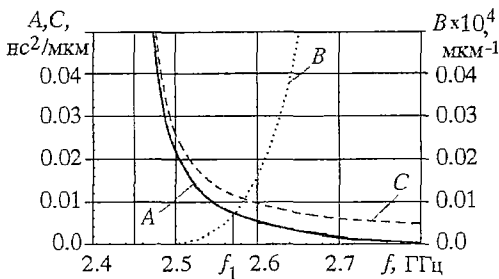


Рис. 2. Соотношение коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  системы уравнений (9) для ПОМСВ в двух связанных пленках железоиттриевого граната ( $D_1 = D_2 = 10$  мкм,  $M_{01} = M_{02}$ )



только одной из пленок (в частности, пленки 1), представлены на рис. 3 для различных величин связи  $K=K_1=K_2$ , которые определяются соотношением (1г). Расчеты проведены для  $\varphi_{01}=0.02$ ,  $\varphi_{02}=0.0$ ,  $T_0=100$  нс и частоты  $f=2.6$  ГГц, для которой, как следует из кривых рис. 2, должно выполняться условие модуляционной неустойчивости в одиночной линии передачи.

Как видно из данных, представленных на рис. 3, а, б, при небольшой величине связи в линиях 1 и 2 наблюдаются устойчивые образования в виде солитонов огибающей. Причем, при слабой связи (см. результаты на рис. 3, а,  $K=0.25$  или  $kd=1.7$ ) величина амплитуды солитонов в линии 2 мала (намного меньше, чем в линии 1), но с ростом связи (см. рис. 3, б) амплитуда солитона в линии 2 увеличивается и практически становится сравнимой с амплитудой солитона в линии 1. Однако с дальнейшим увеличением коэффициента связи (рис. 3, в) в линии 1 происходит дисперсионное расплывание начального возмущения, то есть связь приводит к уменьшению вклада нелинейности по сравнению с дисперсией. Таким образом, должно существовать некоторое критическое значение коэффициента связи, при котором нарушается условие стационарного существования солитонного решения. Расчеты показывают, что критическое значение  $K_{кр}$  прямопропорционально  $A/C$ , а это значение, как видно из

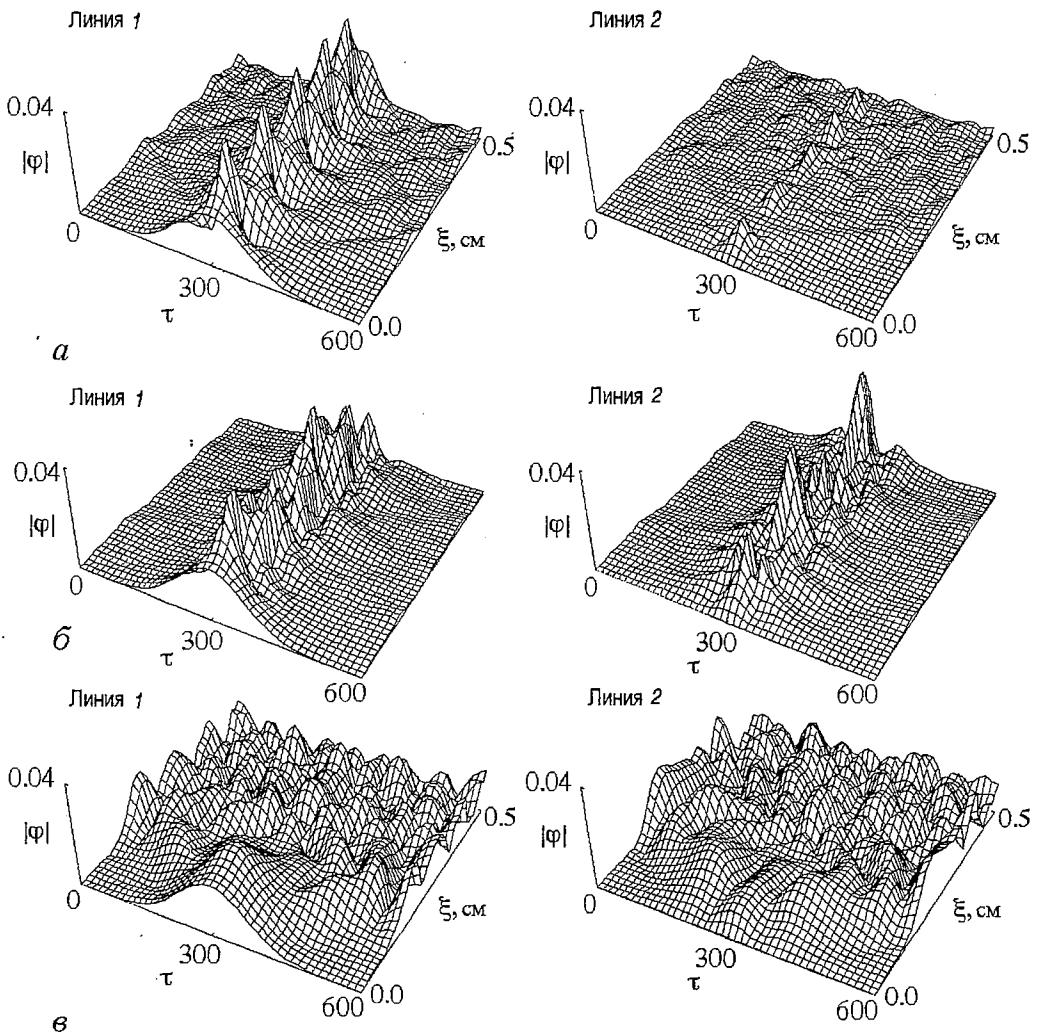


Рис. 3. Эволюция огибающей волнового фронта  $|\varphi|$  в связанной структуре ( $\varphi_{01}=0.02$ ,  $\varphi_{02}=0.0$ ,  $D_1=D_2=10$  мкм,  $M_{01}=M_{02}$ ) при различных  $K$ : а - 0.25; б - 0.5; в - 1

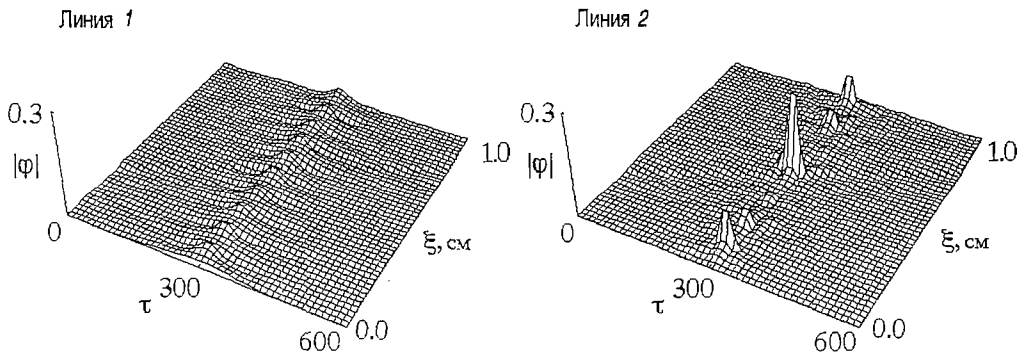


Рис. 4. Эволюция огибающей волнового фронта  $|\varphi|$  в связанной структуре:  $D_1=10D_2, K=0.5$

кривых рис. 2, уменьшается с ростом частоты сигнала, следовательно и  $K_{кр}$  должно уменьшаться с ростом частоты.

Интересным представляется также случай, когда ферромагнитные пленки в линиях 1 и 2 имеют различную толщину ( $D_1 \neq D_2$ ) или различную намагниченность ( $M_{01} \neq M_{02}$ ), так как при этом, как видно из уравнений (9), коэффициенты связи одной линии с другой будут иметь разные значения. В частности, если  $D_1 > D_2$ , то коэффициент связи в линии 1 будет меньше, чем в линии 2. В этом случае наличие связи будет способствовать установлению во второй линии солитонов огибающей значительно большей амплитуды. Это видно из результатов, представленных на рис. 4, причем величина амплитуды в линии 2 пропорциональна отношению толщин пленок. И наоборот, если  $D_1 < D_2$ , перекачка мощности из первой линии во вторую уменьшается; так, при  $D_2 = 10D_1$  наличие второй линии никак не проявляется, импульс практически не перекачивается в линию 2.

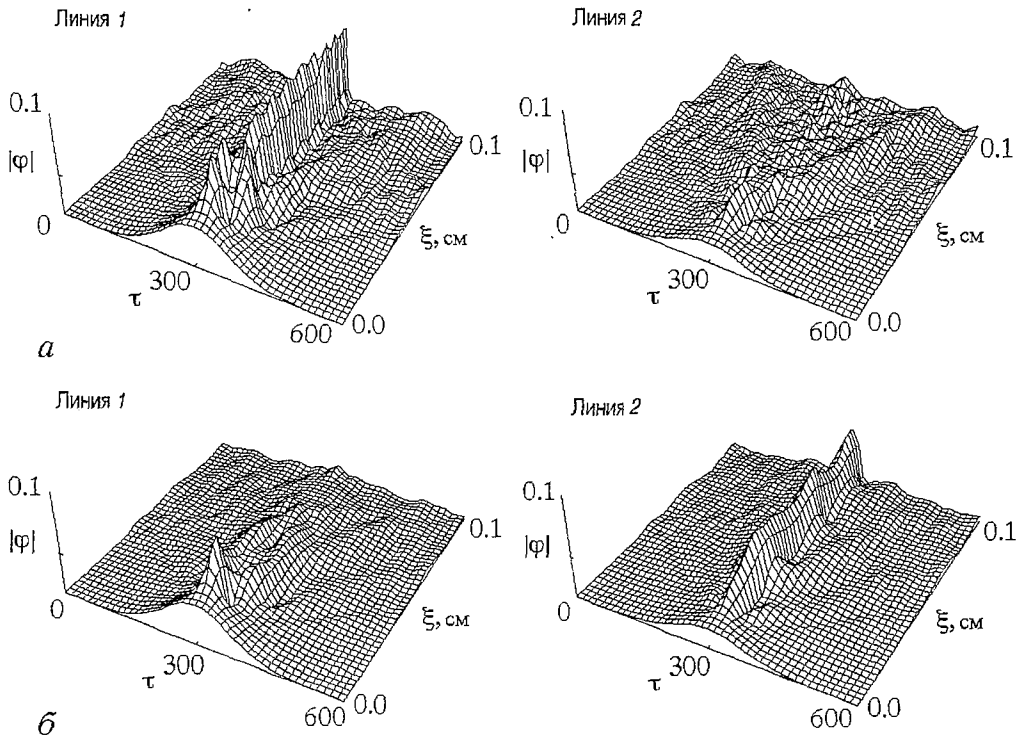


Рис. 5. Эволюция огибающей волнового фронта ( $\varphi_{01}=0.04, \varphi_{02}=0.02, D_1=D_2=10$  мкм,  $M_{01}=M_{02}, K=0.25$ ): а – в среде без потерь; б – в среде с потерями ( $\alpha_1=1 \cdot 10^9$  с $^{-1}$ ,  $\alpha_2=0$ )

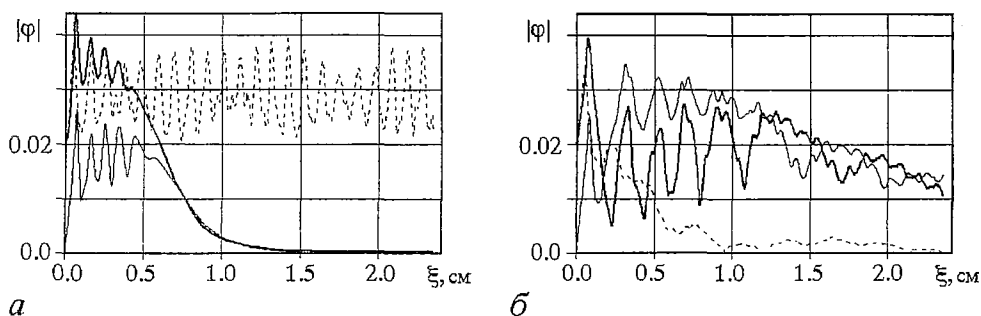


Рис. 6. Сечение волновой функции  $|\varphi|$  при  $\tau=300$  нс в одиночной линии (штриховая кривая) и связанной системе (пленка 1 – жирная кривая, пленка 2 – тонкая кривая) при  $K=0.5$ : а –  $\alpha_1=\alpha_{00}=0$ ,  $\alpha_2=5 \cdot 10^9$  с $^{-1}$ ; б –  $\alpha_1=\alpha_{00}=1 \cdot 10^9$  с $^{-1}$ ,  $\alpha_2=0$

Результаты моделирования процессов в связанных линиях передачи, когда начальные импульсы подаются на вход обеих линий, представлены на рис. 5. Характерной особенностью здесь является то, что в отличие от линейной системы [1] перекачка мощности происходит лишь на определенной длине системы. Если потери в пленках пренебрежимо малы ( $\alpha_1=\alpha_2=0$ ) и толщины пленок одинаковы ( $D_1=D_2$ ), то сигнал перекачивается в одну из линий, где амплитуда начального возмущения больше (рис. 5, а). Отметим, что возможен обратный эффект – перекачка сигнала в линию с меньшей амплитудой начального возмущения, например, в линию 2. Однако это возможно только в случае, если  $D_1 > D_2$ .

Наличие в уравнениях (9) линейных членов, пропорциональных потерям  $\alpha_{1,2}$ , приводит при  $\varphi_{01} \neq 0$  и  $\varphi_{02} \neq 0$  к затуханию амплитуды импульсов в обеих линиях. Поэтому рассмотрим случай, когда потери в линии 2 пренебрежимо малы, а начальный импульс большей амплитуды подается в линию с потерями ( $\varphi_{01} > \varphi_{02}$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ). Эволюция амплитуд огибающей сигнала в каждой из линий в этом случае представлена на рис. 5, б. Видно, что сигнал большей амплитуды из линии 1 за счет связи практически полностью перекачивается в линию 2, а из-за наличия больших потерь в линии 1 обратной перекачки не наблюдается. Таким образом, стационарное образование в форме солитона большой амплитуды устанавливается в линии 2, в которой  $\alpha_2 = 0$ .

На рис. 6 показано сечение функции при  $\tau=300$  нс в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью, в связанной диссипативной структуре (сплошные кривые). Рис. 6, а соответствует случаю, когда потери имеются в пленке, где сигнал вначале отсутствует. Наличие потерь в этой линии приводит к тому, что сигнал затухает в обеих пленках. Штриховая кривая соответствует случаю одиночной линии с  $\varphi_0=0.02$  без потерь ( $\alpha_{00}=0$ ). Связь диссипативной линии с линией, в которой потери и амплитуда начального возмущения равны нулю (рис. 6, б), приводит к тому, что затухание сигнала в такой структуре уменьшается (сплошные кривые) по сравнению с одиночной линией с потерями (штриховая кривая). Таким образом, связи с линией без потерь приводит к существенному уменьшению влияния потерь на распространение сигнала в связанной структуре.

## Заключение

Сформулирована система нелинейных уравнений в виде связанных нелинейных уравнений Шредингера, которая описывает процесс распространения огибающей прямой объемной магнитоэлектрической волны в структуре, состоящей из двух ферромагнитных слоев. В рамках численного моделирования на основе полученной системы рассмотрены некоторые особенности, связанные с образованием солитонных формирований в таких структурах. Рассмотрено

влияние связи, параметров ферромагнитных пленок и затухания на процесс распространения сигнала в каждой из линий. Основная особенность анализируемой системы заключается в том, что параметры связи одной линии с другой существенно зависят от параметров ферромагнитных пленок, а именно, от соотношения их толщин, намагниченности и затухания. Данное обстоятельство позволяет существенным образом изменять поведение системы, в частности, влиять на процесс установления стационарных состояний в каждой из линий.

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Интеграция» (грант № А0057) и программы «Университеты России – фундаментальные исследования» (грант № 990533).*

### Библиографический список

1. Ваишковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике СВЧ. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1993. 316 с.
2. Adam J.D., Daniel M.R., Emtage P.R., Tilisa S.N. Magnetostatic waves // *Thin Films Adv. Electron Devices*. Boston. 1991. P. 1.
3. Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в нелинейных средах. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (6-зимняя школа-семинар). Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. Кн. 5. С. 123.
4. Лукомский В.П. Нелинейные магнитостатические волны в ферромагнитных пластинах // *Укр. физ. журн.* 1978. Т. 23, № 1. С. 134.
5. Звездин А.К., Попов А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // *ЖЭТФ*. 1983. Т. 84, вып. 2. С. 606.
6. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г. Наблюдение спин-волновых солитонов в ферромагнитных пленках // *Письма ЖЭТФ*. 1983. Т. 38, вып. 7. С. 343.
7. Kalinikos B.A., Kovshikov N.G., Slavin A.N. Spin-wave solitons in thin ferromagnetic films (invited) // *J. Appl. Phys.* 1990. Vol. 67, № 9. P. 5633.
8. Dragoman M., Georgescu D. Experimental evidence of magnetostatic soliton propagation at microwave frequencies // *Appl. Phys. Lett.* 1991. Vol. 15, № 14. P. 1788.
9. Бордман А.Д., Гуляев Ю.В., Никитов С.А. Нелинейные поверхностные МСВ // *ЖЭТФ*. 1989. Т. 95, № 6. С. 2140.
10. Chen M., Tsankov M.A., Nach J.M., Patton C.E. Backward volume waves solitons in yttrium iron garnet films // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 49. P. 12773.
11. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г. Наблюдение столкновения солитонов огибающей спиновых волн в ферромагнитных пленках // *Письма ЖЭТФ*. 1994. Т. 60, вып. 4. С. 290.
12. Boardman A. D., Wang Q., Nikitov S.A. Nonlinear magnetostatic surface waves in ferromagnetic films // *IEEE Trans. in Mag.* 1994. Vol. 30, № 1. P. 14.
13. Boardman A. D., Nikitov S.A., Xie K., Mehta H. Bright magnetostatic spin-wave envelope solitons in ferromagnetic films // *J. MMM*. 1995. № 145. P. 357.
14. Dziarmaga J. Dissipative dynamics of solitons in planar ferromagnets // *Phys. Rev. B*. 1997. Vol. 79, № 11. P. 12173.
15. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Самофокусировка ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках: численный эксперимент // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1997. Т. 5, № 6. С. 29.
16. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Численное исследование явлений самовоздействия ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1999. Т. 7, № 2,3. С. 17.
17. Radhakrishnan R., Lakshmanan M. Exact solitons solutions to coupled nonlinear Schrodinger equations // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54, № 3. P. 2949.
18. Boardman A. D. Solutions to coupled Schrodinger equations in optical media // *Phys. Rev. A*. 1995. Vol. 50, № 3. P. 1800.

19. Рыскин Н.М. Связанные нелинейные уравнения Шредингера для описания распространения многочастотных волновых пакетов в нелинейной среде с дисперсией // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, вып. 5(11). С. 1542.

20. Киндяк А.С., Киндяк В.В. Солитонные режимы распространения поверхностных магнитостатических волн в структуре магнетик – полупроводник // ФТТ. 1999. Т. 41, вып. 7. С. 1272.

21. Вашковский А.В., Стальмахов А.В. Дисперсия магнитостатических волн в двухслойных структурах феррит – феррит // Р.Э. 1984. Т. 29, № 5. С. 901.

22. Taniuti T., Yajima N. Perturbation method for nonlinear wave modulation // J. Math. Phys. 1969. Т. 10, № 8. P. 1369.

23. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Наука, 1977.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 31.03.2000  
после доработки 10.05.2000

## MODELING OF NONLINEAR PROCESSES ON MAGNETOSTATIC WAVES IN COUPLED FERROMAGNETIC STRUCTURES

*Yu.P. Sharaevsky, M.A. Malugina*

System of nonlinear equations is obtained for the direct–volume–magnetostatic waves envelope solitons propagation in the coupling two–films ferromagnetic structure. Some features of soliton formation arising are considered in the framework of the numerical modeling at various structure parameters. The influence of the main structure parameters, pulse frequency and the dissipation on the process of the magnetostatic waves envelope soliton formation is examined.



*Шараевский Юрий Павлович* – родился в Николаевске–на–Амуре Хабаровского края (1942). Доктор физико–математических наук, профессор кафедры нелинейной физики Саратовского государственного университета. Работал в области вакуумной электроники сверхвысоких частот, в настоящее время область научных интересов – колебательные и волновые явления в магнитных пленках. Автор более 100 научных публикаций и учебных пособий соавтор монографии «Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот» (совместно с А.В. Вашковским и В.С. Стальмаховым). Имеет 14 авторских свидетельств и патентов на изобретения,  
E–mail: sharaevskyy@info.sgu.ru



*Малюгина Мария Александровна* – родилась в Саратове (1977), окончила Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета (1999). Аспирант кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – волновые явления в магнитных пленках. Имеет две публикации по данной тематике.



## **ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКИ ПРОЦЕССА ВОЗБУЖДЕНИЯ СУБГАРМОНИК ОСНОВНОГО УСИЛИВАЕМОГО СИГНАЛА В ШИРОКОПОЛОСНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ СВЧ-ДИАПАЗОНА**

*В.Я. Явчуновский*

Обнаружен и исследован эффект возбуждения субгармоник при подаче на вход широкополосного усилителя (усилительной схемы) СВЧ-сигнала основной частоты. Установлено, что причиной выполнения амплитудных условий генерации для субгармонического сигнала именно при подаче на вход усилителя полезного СВЧ-сигнала является специфика развивающегося в таких схемах бигармонического взаимодействия. Найдены эффективные средства обеспечения устойчивости широкополосных усилителей СВЧ-сигналов и усилительных схем.

### **Введение**

При работе широкополосных усилителей СВЧ-сигналов (в первую очередь сложных усилительных схем, работающих на реальную СВЧ-нагрузку) наблюдается целый ряд различных проявлений неустойчивости их функционирования. В частности, был обнаружен не сразу нашедший объяснение эффект возбуждения субгармоник при подаче на вход усилителя (усилительной схемы) сигнала основной частоты, в то время как в его отсутствие самовозбуждение не наблюдалось.

Объяснению физической природы этого явления, поиску эффективных средств борьбы с этим и другими проявлениями неустойчивой работы широкополосных усилителей СВЧ-диапазона посвящена настоящая работа.

### **1. Анализ процесса возбуждения субгармонических колебаний**

С целью выявления физических процессов, способных привести к возбуждению субгармоник, были, прежде всего, проанализированы причины, по которым обсуждаемый эффект наиболее часто регистрировался в широкополосных усилительных цепочках с мощными лампами бегущей волны (ЛБВ), характеризующимися малыми потерями для отраженного сигнала [1], в качестве выходного усилителя.

Проведенные ранее исследования [2] свидетельствуют о том, что основной причиной повышенной неустойчивости работы таких схем является взаимное влияние друг на друга усилительных каскадов. Рассматривая простейший вариант такой цепочки (рис. 1), несложно показать, что уровень рассогласования СВЧ-нагрузки для предусилителя такой схемы всегда существенно выше, чем для всей

схемы в целом. Приближенно фактический коэффициент стоячей волны (КСВН)  $\rho_{\text{факт}}$  предусилителя может быть записан в виде

$$\rho_{\text{факт}} = \frac{1 + \Gamma_{\text{ввых1}}^{1/2} \Gamma_{\text{вх2}}^{1/2} + (1 - \Gamma_{\text{ввых1}}^{1/2} \Gamma_{\text{вх2}}^{1/2}) \cdot 2 \cdot 10^{(K_y - \alpha_\Sigma)/20} \Gamma_{\text{ввых2}}^{1/2} \Gamma_A^{1/2}}{1 - \Gamma_{\text{ввых1}}^{1/2} \Gamma_{\text{вх2}}^{1/2} - (1 - \Gamma_{\text{ввых1}}^{1/2} \Gamma_{\text{вх2}}^{1/2}) \cdot 2 \cdot 10^{(K_y - \alpha_\Sigma)/20} \Gamma_{\text{ввых2}}^{1/2} \Gamma_A^{1/2}}, \quad (1)$$

где  $\Gamma_{\text{ввых1}}$ ,  $\Gamma_{\text{вх2}}$ ,  $\Gamma_{\text{ввых2}}$ ,  $\Gamma_A$  – модули коэффициента отражения (по мощности) соответственно выхода предусилителя, входа и выхода выходного усилителя, антенны;  $K_y$ ,  $\alpha_\Sigma$  – коэффициент усиления и суммарные распределенные ВЧ-потери выходного усилителя.

С учетом малости произведения  $\Gamma_{\text{ввых1}} \cdot \Gamma_{\text{вх2}}$  (в реальных схемах – от  $10^{-3}$  до  $10^{-2}$ ) выражение (1) может быть приближенно записано в виде

$$\rho_{\text{факт}} = \frac{1 + \Gamma_{\text{ввых2}}^{1/2} \Gamma_A^{1/2} \cdot 10^{(K_y - \alpha_\Sigma)/20}}{1 - \Gamma_{\text{ввых2}}^{1/2} \Gamma_A^{1/2} \cdot 10^{(K_y - \alpha_\Sigma)/20}}. \quad (2)$$

Подставляя вместо модулей коэффициентов отражения соответствующие КСВН, получим

$$\rho_{\text{факт}} = \frac{1 + [(\rho_{\text{ввых2}} + 1)/(\rho_{\text{ввых2}} - 1)]^{1/2} [(\rho_A + 1)/(\rho_A - 1)]^{1/2} \cdot 10^{(K_y - \alpha_\Sigma)/20}}{1 - [(\rho_{\text{ввых2}} + 1)/(\rho_{\text{ввых2}} - 1)]^{1/2} [(\rho_A + 1)/(\rho_A - 1)]^{1/2} \cdot 10^{(K_y - \alpha_\Sigma)/20}}. \quad (3)$$

Исходя из (3), несложно установить соответствие между фактическими и измеренными КСВН (рис. 2). Так, при величине  $(K_y - \alpha_\Sigma)$  выходного каскада порядка 10 дБ КСВН нагрузки выходного каскада  $\rho_H \sim 1.6$  преобразуется в КСВН, приближающийся по величине к бесконечности, что отнюдь не является результатом полного отражения в каком-либо из СВЧ-соединений схемы, а означает лишь то, что в предусилитель вернулась часть усиленной выходным усилителем и отраженной от общей СВЧ-нагрузки мощности, по уровню сравнимой с выходной мощностью входного каскада.

Естественно, что при работе в таких условиях устойчивость функционирования предусилителя снижается, что отражается и на устойчивости работы всего усилительного комплекса. Можно предположить, что если в таких

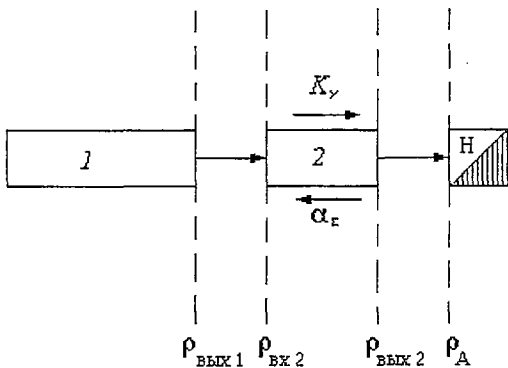


Рис. 1. Схематическое изображение простейшей усилительной цепочки, состоящей из предусилителя 1 с большим коэффициентом усиления и оконечной прозрачной ЛБВ 2, работающей на неидеально согласованную нагрузку Н

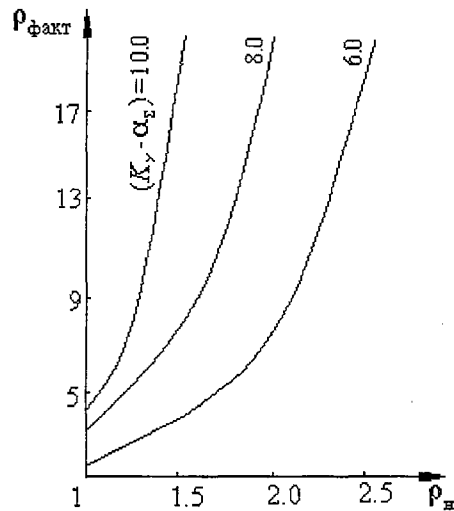


Рис. 2. Зависимость фактического КСВН нагрузки предусилителя от КСВН нагрузки усилительной цепочки  $\rho_H$  ( $\rho_{\text{ввых1}} = \rho_{\text{вх2}} = \rho_{\text{ввых2}} = 1.3$ ) при различных значениях параметра  $(K_y - \alpha_\Sigma)$

условиях самовозбуждения всей схемы в целом не наблюдается, что свидетельствует о невыполнении амплитудных условий генерации, то они, по крайней мере, достаточно близки к выполнению. В пользу этого свидетельствует и тот факт, что линейный коэффициент усиления, наиболее влияющий на склонность усилительных схем к самовозбуждению, увеличивается в соответствующих субгармоникам (половинной частоте усиливаемого сигнала – рис. 3) областях диапазона частот. В ЛБВ на низких частотах рабочего диапазона этому способствует уменьшение рассинхронизма электронного пучка с взаимодействующей с ним электромагнитной волной СВЧ. Это, в свою очередь, обусловлено снижением фазовой скорости волны в замедляющей системе (ЗС), типичным для ЗС в этих областях диапазона частот, и соответствующим уменьшением разницы скоростей электронов и волны. Все это в совокупности приводит к тому, что область за низкочастотным краем рабочего диапазона является наиболее потенциально опасной в плане возбуждения субгармоник с сопутствующим снижением эффективности взаимодействия на основном усиливаемом сигнале (см. рис. 3).

Однако изложенное выше не объясняет появления на выходе усилительной схемы субгармонических сигналов только при подаче на ее вход сигнала основной частоты. Объяснение этому факту, видимо, можно искать в природе бигармонического взаимодействия, наблюдаемого в широкополосных ЛБВ-усилителях.

Сущность этого явления [3] заключается в том, что в широкополосных (спиральных) ЗС ЛБВ в полосе частот от 2 до 3 октав скорости распространения СВЧ-сигналов достаточно близки (дисперсия фазовой скорости мала), и связь волны с пучком реализуется также в достаточно широком диапазоне частот. Вследствие этого для сигналов, являющихся второй (а иногда и третьей) гармоникой сигнала основной частоты (принадлежащего длинноволновому участку рабочего диапазона) также существуют удовлетворительные условия для взаимодействия с электронным пучком. Поэтому возникающие (за счет нелинейных эффектов взаимодействия основного сигнала с пучком) высшие гармоники электромагнитного поля также вступают в достаточно эффективное взаимодействие с высокочастотным током электронного пучка. При этом возможны ситуации [3], когда электронные сгустки, сгруппированные ВЧ-полем основной частоты, попадают в тормозящую фазу второй гармоники поля, отдадут гармонической составляющей поля свою энергию (одновременно усиливая гармонический сигнал), теряют скорость и попадают в ускоряющую фазу поля основной частоты. В результате эффективность взаимодействия и выходная мощность ЛБВ на основной частоте существенно снижаются, а сигнал второй

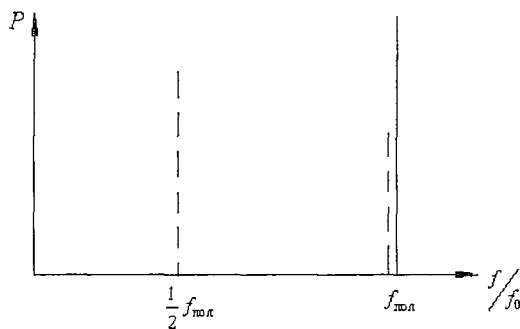


Рис. 3. Качественные характеристики паразитной генерации на первой субгармонике ( $1/2 f_{пол}$ ); сплошная линия соответствует работе на согласованную нагрузку (паразитная генерация отсутствует), штриховая линия – работе на неидеально согласованную нагрузку

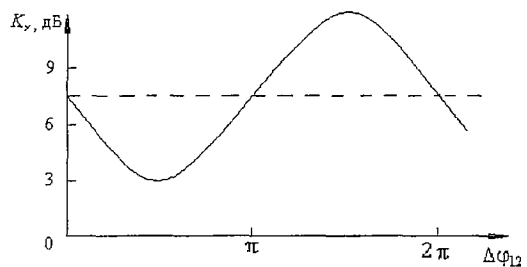


Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления  $K_u$  выходной прозрачной ЛБВ на частоте субгармоники от фазового соотношения  $\Delta\phi_{12}$  субгармоники и полезного сигнала (сплошная линия); для сравнения приведен коэффициент усиления на этой частоте в режиме монохроматического усиления (штриховая линия)



гармоники в спектре выходного сигнала лампы достигает значительной величины, в отдельных случаях сравнимой с уровнем основного сигнала.

Принципиально возможна и противоположная ситуация, когда соответствующая фазировка электронных сгустков, сигналов первой и второй гармоники приводит к снижению эффективности взаимодействия гармонической сигнала с одновременным увеличением эффективности взаимодействия на сигнале основной частоты.

В рассматриваемом случае, видимо, имела место фазировка именно такого рода. При подаче на вход схемы полезного сигнала, являющегося для субгармонического сигнала второй временной гармоникой, фазовое соотношение между ними  $-\Delta\varphi_{12} = \varphi_2 - 2\varphi_1$  (индекс означает номер гармоники) – было таково, что бигармоническое взаимодействие обеспечивало рост (по сравнению с монохроматическим режимом) коэффициента усиления субгармонического сигнала (рис. 4) и, как результат этого, приводило к выполнению амплитудных условий генерации на частоте субгармоники. В пользу предложенного объяснения физической природы данного эффекта говорит и тот факт, что к возбуждению субгармоник приводила подача на вход ЛБВ не любых сигналов, а лишь сигналов вполне определенных частот (на которых, видимо, и выполнялись фазовые условия бигармонического взаимодействия соответствующего типа). На других частотах, на которых указанные фазовые условия не выполнялись, эффект не наблюдался.

Количественный анализ описываемых явлений может быть проведен с помощью простых математических соотношений, полученных в работе [2]\*, основанных на представлении усилительной цепочки в виде совокупности последовательно соединенных четырехполосников, каждый из которых характеризуется коэффициентами передачи в прямом и обратном направлениях, а их взаимное согласование модулями коэффициентов отражения на границах между ними (рис. 5).

Излагаемая концепция основана на последовательном продвижении по схеме, начиная с любого ее участка, в направлениях к началу и концу схемы. Так, например, для рассматриваемой усилительной цепочки анализ целесообразно начать с выходного участка предусилителя, записав условие устойчивой работы усилительной схемы в виде

$$\rightarrow \leftarrow$$

$$r_{\Sigma} K_{\Pi} K_{\Pi} r_{\Sigma 1} < 1, \quad (4)$$

где  $\overrightarrow{K}_{\Pi}$ ,  $\overleftarrow{K}_{\Pi}$  – коэффициенты передачи прилегающей к локальному ВЧ-поглотителю выходной секции предусилителя в прямом и обратном направлениях;  $r_{\Pi}$  – модуль коэффициента отражения упомянутого ВЧ-поглотителя;  $r_{\Sigma 1}$  – суммарный модуль коэффициентов отражения всех элементов схемы, находящихся правее выходной секции предусилителя (от плоскости  $r_1$ ).

Проследив путь проходящих и отраженных сигналов, несложно, даже с учетом многократных (бесконечного

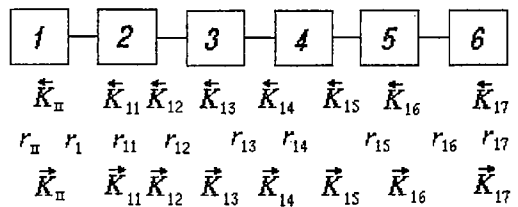


Рис. 5. Схематическое изображение усилительной цепочки в виде системы связанных четырехполосников, характеризующихся коэффициентами передачи  $K$  в двух направлениях и коэффициентами отражения на границах (модуль  $r$ ): 1 – выходная секция предусилителя; 2, 4 – соединительные СВЧ-тракты; 3 – развязывающее устройство; 5 – выходной усилитель; 6 – выходной тракт, заканчивающийся неидеально согласованной СВЧ-нагрузкой

\* В более общем виде методика анализа устойчивости сложных усилительных схем была предложена Г.Г.Моносовым [4]; в настоящей же работе автор использует свои подходы, на основе которых проводился анализ устойчивости и поиск путей ее обеспечения при работе конкретных усилительных цепочек дециметрового и сантиметрового диапазонов [2].

множества) отражений, перейти от  $r_1$  к следующей отражательной плоскости  $r_{11}$  (от  $r_{\Sigma 1}$  к  $r_{\Sigma 11}$ )

$$r_{\Sigma 1} = r_1 + (1-r_1)^2 r_{\Sigma 11} \vec{K}_{11} \overleftarrow{K}_{11} + (1-r_1)^2 r_1 r_{\Sigma 11} \vec{K}_{11}^2 \overleftarrow{K}_{11}^2 + \dots$$

$$\dots + (1-r_1)^2 r_1^{n+1} r_{\Sigma 11}^{n+1} \vec{K}_{11}^{2n+2} \overleftarrow{K}_{11}^{2n+2} + \dots \quad (5)$$

Поскольку в (5) правая часть представляет собой бесконечную сумму членов геометрической прогрессии, это выражение можно переписать в виде

$$r_{\Sigma 1} = (r_1 + r_{\Sigma 11} \vec{K}_{11} \overleftarrow{K}_{11} - 2r_1 r_{\Sigma 11} \vec{K}_{11} \overleftarrow{K}_{11}) / (1 - r_1 r_{\Sigma 11} \vec{K}_{11} \overleftarrow{K}_{11}). \quad (6)$$

Осуществляя и далее аналогичные переходы от одной отражающей плоскости к следующей, и т.д., получим систему, совместно с (4) полностью описывающую устойчивость схемы

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{\Sigma 1} = (r_1 + r_{\Sigma 11} \vec{K}_{11} \overleftarrow{K}_{11} - 2r_1 r_{\Sigma 11} \vec{K}_{11} \overleftarrow{K}_{11}) / (1 - r_1 r_{\Sigma 11} \vec{K}_{11} \overleftarrow{K}_{11}), \\ r_{\Sigma 11} = (r_{11} + r_{\Sigma 12} \vec{K}_{12} \overleftarrow{K}_{12} - 2r_{11} r_{\Sigma 12} \vec{K}_{12} \overleftarrow{K}_{12}) / (1 - r_{11} r_{\Sigma 12} \vec{K}_{12} \overleftarrow{K}_{12}), \\ \dots \\ r_{\Sigma 15} = (r_{15} + r_{\Sigma 16} \vec{K}_{16} \overleftarrow{K}_{16} - 2r_{15} r_{\Sigma 16} \vec{K}_{16} \overleftarrow{K}_{16}) / (1 - r_{15} r_{\Sigma 16} \vec{K}_{16} \overleftarrow{K}_{16}), \\ r_{\Sigma 16} = (r_{16} + r_{\Sigma 17} \vec{K}_{17} \overleftarrow{K}_{17} - 2r_{16} r_{\Sigma 17} \vec{K}_{17} \overleftarrow{K}_{17}) / (1 - r_{16} r_{\Sigma 17} \vec{K}_{17} \overleftarrow{K}_{17}). \end{array} \right. \quad (7)$$

По соотношениям (7) может проводиться, в частности, и анализ возбуждения на субгармонике; амплитудная характеристика субгармонического сигнала должна быть при этом рассчитана [3] с учетом реального бигармонического взаимодействия (см. рис. 4); рекомендуется достаточно подробно (с малой дискретностью) варьировать величину  $\Delta\phi_{12}$ .

Близкие по физической природе процессы, приводящие к возбуждению субгармоник усиливаемого сигнала и снижению КПД на его частоте, имели место и в коротковолновых широкополосных моноусилителях, нагрузкой которых служили волноводные тракты с ярко выраженной волноводной отсечкой вблизи длинноволнового края рабочего диапазона.

## 2. Возможные пути снижения склонности усилительных схем к возбуждению на субгармониках

Решение задачи подавления возбуждения на субгармониках строилось на сделанных ранее выводах и имело общую направленность на минимизацию величины линейного коэффициента усиления в областях частот, потенциально опасных в плане возбуждения субгармонических и других паразитных колебаний.

В качестве наиболее эффективного из предложенных решений можно считать метод, основанный на сочетании аномальной амплитудной характеристики усилителя и аномальной дисперсионной характеристики его замедляющей системы [5] и реализуемый, как правило, в мощных выходных каскадах усилительных схем.

Физическая природа лежащих в основе этого метода подходов сводится к реализации существенно нелинейного взаимодействия в мощных ЛБВ-усилителях. Известно [6], что чем больше рассинхронизм в ЛБВ (превышение начальной скорости электронов над скоростью распространения электромагнитной волны в ЗС), чем больше снизится скорость электронов в процессе «торможения» их ВЧ-полем, тем большей эффективности взаимодействия можно добиться. При этом существует единственное ограничение – сгруппированные ВЧ-полем «быстрые» электронные сгустки не должны «обогнать» волну и «перескочить» из тормозящей фазы поля в ускоряющую. Опасность этого тем меньше, чем выше мощность

входного сигнала ЛБВ. Таким образом, с ростом входного сигнала возможен и энергетически выгоден уход в режим больших рассинхронизмов пучка и волны, количественно задаваемых величиной параметра несинхронности  $b$ , пропорциональной разности скоростей электронов и волны ( $v_e - v_\phi$ ), нормированной на величину начальной скорости электронов  $v_0$ .

Указанный подход может быть реализован именно в мощных выходных усилителях [7] с относительно малыми коэффициентами усиления (8÷10 дБ). При свойственных этим лампам больших входных сигналах имеет место быстрый и «жесткий» захват электронного сгустка [7] полем большой амплитуды. Это позволяет резко увеличить рассинхронизм между волной и электронным пучком, что, собственно, и лежит в основе высоких энергетических характеристик этих приборов. Однако при снижении уровня входного сигнала и уходе от режима жесткого захвата сгустка сохранение больших параметров несинхронности ( $2.0 \leq b \leq 3.5$ ) приведет, в соответствии с изложенным выше, к тому, что не отдавший еще сколь-либо значительной энергии волне сгусток «обгонит» тормозящую фазу поля, «попадет» в ускоряющую фазу, в результате чего будет иметь место прямо противоположный энергообмен — от волны к пучку. В итоге резко ухудшаются энергетические характеристики, в том числе будет иметь место значительное уменьшение коэффициента усиления. Это явление на языке технических характеристик называется «жесткой» или аномальной амплитудной характеристикой.

Такая характеристика может быть использована для принципиального решения задачи обеспечения устойчивости работы усилителя и усилительной цепочки в целом. Процесс установления любого типа паразитной генерации в усилителе либо усилительной схеме начинает всегда развиваться с уровня флуктуаций, уровня самых слабых сигналов. Если на этом уровне (для определенного диапазона входных сигналов) амплитудные условия генерации ни на одной из частот, ни в каком из режимов не выполняются, можно быть уверенным, что генерация не возникнет и на более высоком уровне, для которого математически эти условия выполняются.

Рассмотрим конкретные зависимости коэффициента усиления типичной прозрачной ЛБВ от величины параметра несинхронности (рис. 6). Из представленных на нем кривых видно, что в зоне параметров несинхронности  $1.5 \leq b \leq 2.5$  наблюдается значительный спад коэффициента усиления на малых и средних сигналах ( $P_{ВЧ} = 10^{-4} P_{ном}$ ;  $10^{-2} P_{ном}$ ), а на номинальных рабочих сигналах ( $P_{ВЧ} = P_{ном}$ ) коэффициент усиления продолжает нарастать. При дальнейшем увеличении рассинхронизма ( $2.5 \leq b \leq 3.0$ ) коэффициент усиления больших сигналов практически не изменяется, а для малых (и средних) сигналов практически  $K_u$ , дБ

обращается в нуль. И, наконец, в зоне  $3.0 \leq b \leq 4.0$  наблюдается постепенный спад коэффициента усиления номинальных рабочих сигналов. Все это позволяет однозначно выбрать оптимальные в плане устойчивости значения параметра несинхронности (ускоряющего напряжения ЛБВ), при которых сколь-либо заметное ухудшение энергетических характеристик еще не наступает.

Однако здесь возникает естественный вопрос о возможности реализации требуемых значений в каждой точке рабочего диапазона и на потенциально опасных, в плане возбуждения, частотах за его границами. Результаты расчета реально получаемых (при

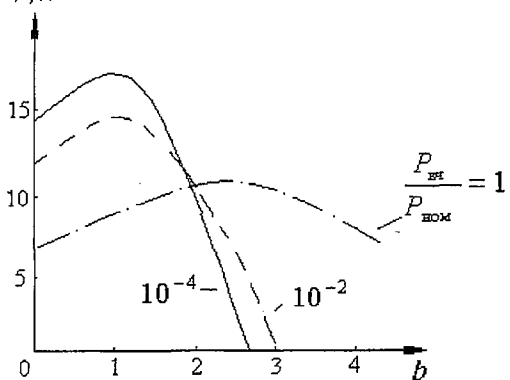


Рис. 6. Зависимость коэффициентов усиления в прозрачной ЛБВ сигналов разного уровня мощности  $P_{ВЧ}$  (нормировка на номинальную рабочую мощность входного сигнала  $P_{ном}$ ) от величины параметра несинхронности  $b$

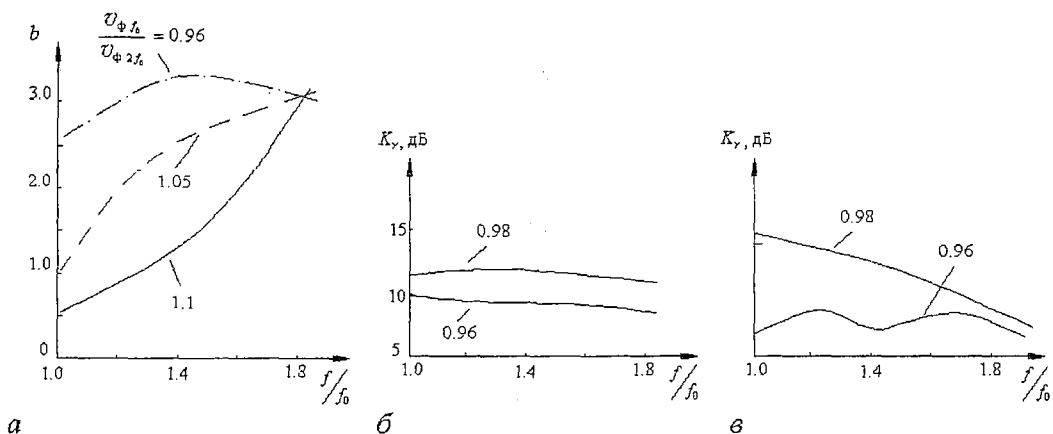


Рис. 7. Частотные зависимости параметра несинхронности  $b$  для нескольких значений дисперсии  $v_{\Phi f_0}/v_{\Phi 2f_0}=0.96, 1.05, 1.1$  (а); частотные зависимости коэффициента усиления больших (б) и малых  $P_{вч}/P_{ном}(в)$  сигналов в прозрачной ЛБВ для двух вариантов дисперсии ее ЗС:  $v_{\Phi f_0}/v_{\Phi 2f_0}=0.96, 0.98$

различных дисперсионных характеристиках ЗС прозрачной ЛБВ) частотных зависимостей параметра несинхронности представлены кривыми рис. 7, а. Видно, что постоянство параметра несинхронности во всем рабочем диапазоне частот и за его длинноволновой границей может быть обеспечено при небольшой аномальной дисперсии ЗС рассматриваемой ЛБВ. При этом обеспечивается постоянство коэффициентов усиления во всем диапазоне частот, как в номинальном режиме (рис. 7, б), так и в режиме малых выходных сигналов (рис. 7, в).

В качестве другого возможного подхода к решению этой задачи, пригодного для реализации как в прозрачных выходных каскадах усилительных цепочек, так и в моноусилителях, является описанный в [2,8] прием, основанный на синтезе в усилителе селективного (частотно-зависимого) локального ВЧ-поглотителя, характеризующегося крутым ростом локализованных ВЧ-потерь в длинноволновых областях рабочего диапазона и за его длинноволновой границей. В [2,8] эта задача решается согласованием конфигурации поглощающего покрытия с изменяющейся по частоте структурой высокочастотного поля в ЗС усилителя.

### Заключение

Обнаруженный и объясненный в настоящей работе эффект возбуждения субгармоник (в первую очередь половинной частоты усиливаемого сигнала) приводит к весьма нежелательным последствиям для работы усилителей и усилительных схем. Анализ причин развития этих физических процессов, понимание природы их возникновения, с одной стороны, позволило найти эффективные средства борьбы с этими явлениями, а с другой, создало предпосылки для поиска иных, возможно, еще более эффективных методов повышения устойчивости усилителей.

### Библиографический список

1. Ильина Е.М., Калинин Ю.А., Кац А.М. и др. Улучшение параметров усилительной цепочки, состоящей из входной ЛБВ с большим усилением и выходной ЛБВ без поглотителя с малым усилением // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1974. Вып. 8. С.34.
2. Гаврилов М.В., Явчуновский В.Я., Якунин А.Н. Поиск компромиссных решений при проектировании и разработке современных ЛБВ // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (8-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 3. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989. 152 с.

3. Кудряшов В.П. Оптимизация выходных параметров широкополосных ЛБВ // Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров). Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Кн. 3. С.70.

4. Моносов Г.Г. Анализ условий самовозбуждения усилительной цепочки // Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ. 1987. Вып. 3 (397) с.16.

5. А.с. 1200754 СССР, МКИ НОIj 25/34. Способ усиления электромагнитного сигнала СВЧ диапазона / В.Я. Явчуновский, С.М. Бондаренко, А.М. Кононов, А.В. Уповнев (СССР) // Открытия. Изобретения. Оpubл. 22.08.85, № 3734410 /24-21.

6. Шевчик В.Н, Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов.радио, 1970. С.584.

7. Винокурова Т.В., Перекупко В.А. Исследование ЛБВ, «прозрачных» для СВЧ сигналов//Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ. 1974. Вып. 1. С.12.

8. А.с. 1438516 СССР, МКИ НОIj 23/087. Мощный СВЧ прибор О-типа/ В.Я. Явчуновский, А.В. Уповнев, Д.Г. Щелканов, А.Г. Гехтерис, С.М. Орлов, С.М. Бондаренко, А.В. Перельгин (СССР) // Открытия. Изобретения. Оpubл. 15.07.88, № 4147685.

Корпорация «Диполь», Саратов

Поступила в редакцию 27.04.2000  
после доработки 12.05.2000

## INVESTIGATION OF PHYSICS OF MAIN SIGNAL SUBHARMONICS GENERATION IN WIDE-BAND MICROWAVE AMPLIFIERS

*V.Y. Yavchunovsky*

The effect of subharmonic generation in a wide-band amplifier (amplifying schemes) is discovered and explored when microwave signal of main frequency is fed to the amplifier input. It is determined that main reason of this effect is the specificity of beharmonical interaction in such schemes. The effective methods are found to provide stable operation of wide-band amplifiers of microwave signals and amplifying schemes.



Явчуновский Виктор Яковлевич родился в 1949 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1971), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1978) по специальности радиофизика. Область научных интересов – вопросы устойчивости сложных схем, проблемы проектирования электронных приборов и радиоэлектронного оборудования. Автор 127 научных работ, в том числе 2 монографий, 24 авторских свидетельств и патентов на изобретения.



## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ ЭФФЕКТА КОМПФНЕРА В РЕЖИМЕ ПОДАВЛЕНИЯ БОЛЬШИХ СИГНАЛОВ И ПРИ НАЛИЧИИ МОЩНОЙ ВСТРЕЧНОЙ ВОЛНЫ

*В.Я. Явчуновский*

Показана принципиальная возможность создания мощных широкополосных электронных развязывающих устройств на основе ЛБВ, работающих в режиме подавления, обеспечивающих устойчивую работу широкополосных усилительных схем. Отраженный на предусилитель сигнал попутен электронному пучку и взаимодействует с ним при скоростях электронов, меньших скорости распространения сигнала в замедляющей системе развязывающего устройства. Выходной сигнал предусилителя распространяется навстречу электронному пучку развязывающего устройства с минимальным затуханием, соответствующим собственным потерям электродинамической системы развязывающего устройства. Исследуются полосовые характеристики эффекта подавления мощных СВЧ-сигналов (нелинейного эффекта Компфнера); изучается негативное влияние на взаимодействие в развязывающем устройстве распространяющейся в нем навстречу электронному пучку сформированной извне мощной волны и предлагаются конкретные меры по снижению этого влияния.

### Введение

Одним из наиболее популярных усилителей СВЧ-диапазона является изобретенная Р.Компфнером в 1943 году [1] лампа бегущей волны (ЛБВ), в которой распространяющийся однонаправленно с электронным потоком и взаимодействующий с ним СВЧ-сигнал обуславливает торможение электронов, в результате чего кинетическая энергия электронов переходит в энергию высокочастотного сигнала. Известен и обратный эффект – Kompfner dip condition [2], заключающийся в том, что взаимодействие с СВЧ-сигналом приводит к ускорению электронов, при этом СВЧ-сигнал отдает им свою энергию и полностью подавляется. Этот эффект до последнего времени считался принципиально узкополосным и использовался специально в таких электродинамических измерениях, где его ярко выраженный резонансный характер позволяет добиться высокой точности измерений.

В настоящей работе делается попытка показать, что реализация нелинейных свойств упомянутого выше эффекта подавления СВЧ-сигналов делает этот эффект чрезвычайно широкополосным и позволяет использовать его для создания сверхширокополосных невзаимных развязывающих устройств, работающих при высоких уровнях проходящей и рассеиваемой мощности, получив при этом параметры, принципиально недостижимые на существующих ферритовых вентилях и циркуляторах [3,4].

## 1. Анализ полосовых свойств эффекта подавления

Полное подавление малого СВЧ-сигнала при его взаимодействии с электронным пучком, как уже указывалось во введении, имеет место при строго заданных условиях взаимодействия (Kompfner dip condition). Однако, если можно ограничиться подавлением 7÷10 дБ, то, как показано в [5], зоны изменения параметров  $\Phi_0$  и  $CN$  (соответственно, невозмущенного относительного угла пролета электронов и безразмерной длины пространства взаимодействия), в которых такое подавление реализуется, достаточно широки (рис. 1). Это видно и из представленных в [5] зависимостей коэффициента подавления  $B$  от геометрической длины пространства взаимодействия  $l$  (рис. 2).

Для определения полосовых свойств эффекта подавления в режиме больших сигналов необходимо учитывать возникающие при этом нелинейные эффекты и возможность возникновения бигармонического взаимодействия [6]. Последнее связано с использованием описываемых устройств (ЛБВ-подавителей, далее ЛБВП) в широкополосных усилительных схемах с высоким уровнем второй временной гармоники, которая, безусловно, будет присутствовать и в подавляемом СВЧ-сигнале. Кроме того, собственная широкополосность ЛБВП способствует появлению в сгруппированном электронном токе достаточно высокого уровня второй гармоники (особенно с учетом взаимодействия при скоростях электронов, существенно меньших скорости волны).

Анализ полосовых характеристик подавления проводился по нелинейным уравнениям ЛБВ, записанным аналогично полученным в [7]. При этом представлялось чрезвычайно важным исследовать амплитудные характеристики ЛБВП и установить динамику изменения ширины полосы подавления от уровня входного сигнала этих устройств. При очень малых сигналах ( $P_{вх}/P_0 \leq 10^{-4}$ ,  $P_0$  — мощность электронного пучка) результаты взаимодействия, рассчитанные по нелинейным уравнениям, достаточно хорошо совпадают с результатами расчета в линейном приближении (см. рис. 2); минимальное в октавной полосе частот значение коэффициента подавления  $B$  составляет всего 6÷8 дБ.

Однако уже из этих кривых видны и причины относительной узкополосности эффекта частичного подавления и перспективы получения существенно большей полосы рабочих частот. Основной причиной узкополосности

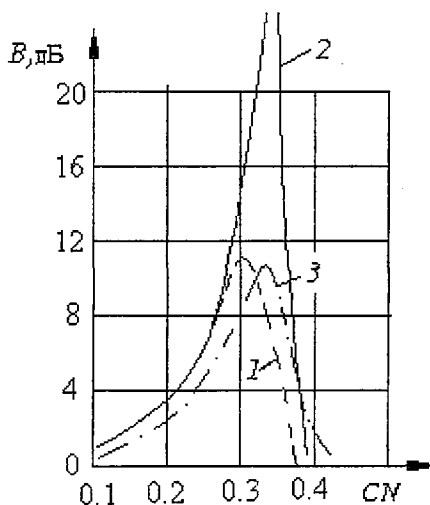


Рис. 1. Зависимость коэффициента подавления  $B$  от величины  $CN$  при фиксированных значениях параметра  $\Phi_0$ : 1 —  $0.8\pi$ ; 2 —  $\pi$ ; 3 —  $1.2\pi$

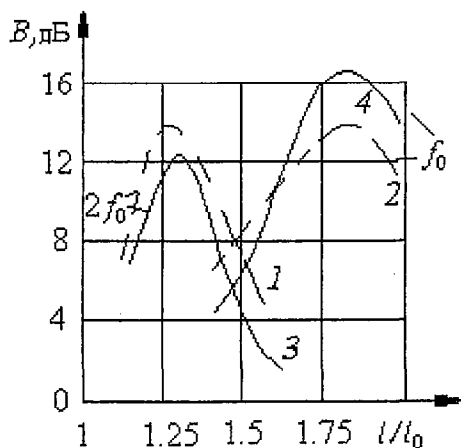


Рис. 2. Зависимости коэффициента подавления  $B$  от относительной геометрической длины пространства взаимодействия для двух крайних частот октавного диапазона  $f_0$  (кривые 2,4) и  $2f_0$  (кривые 1,3) и двух различных соотношений скоростей электронов  $v_e$  и волны  $v_\phi$  (для кривых 1,2 это соотношение по диапазону частот изменяется от 0.85 до 0.88; для кривых 3,4 — от 0.87 до 0.91) [5]

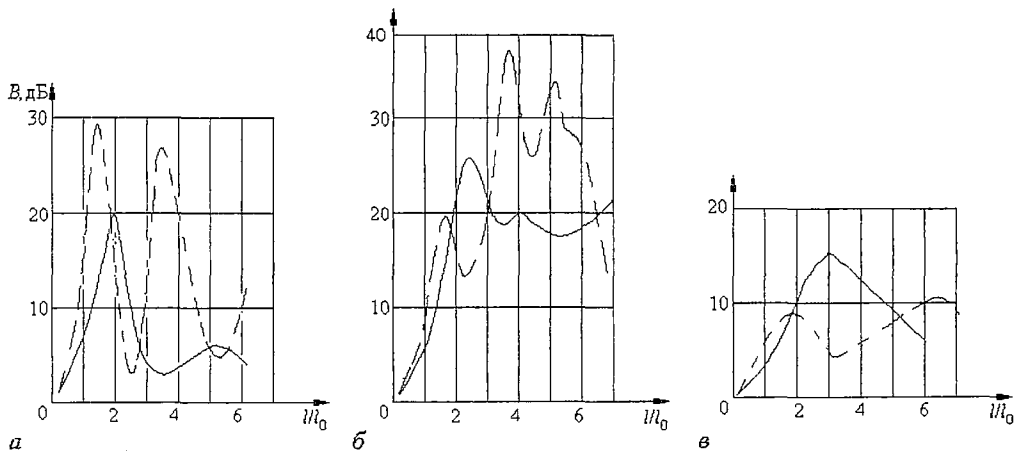


Рис. 3. Зависимость коэффициента подавления  $B$  от относительной геометрической длины пространства взаимодействия для двух крайних частот октавного диапазона  $f_0$  (здесь и далее – сплошная линия) и  $2f_0$  (здесь и далее – штриховая линия) и для различных соотношений входной ВЧ-мощности и постоянной мощности пучка  $P_{вх}/P_0$ : а – 0.05; б – 0.2; в – 0.5;  $v_{ф0}/v_{ф2f_0}=1.06$

эффекта является различие достаточно ярко выраженных длин максимального подавления. Физически это обусловлено тем, что в этой точке (для каждой частоты сигнала – своей) сгруппированный в процессе взаимодействия и практически не разрушенный электронный сгусток, получив дополнительную энергию от волны, переходит из ускоряющей фазы поля в тормозящую, и начинается процесс достаточно эффективного и быстрого усиления сигнала.

Можно предположить, что широкополосность эффекта будет возрастать с увеличением соотношения  $P_{вх}/P_0$ . По опыту усилительных ЛБВ, работающих с большими входными сигналами [8], известно, что с ростом величины  $P_{вх}/P_0$  растет различие длин, соответствующих насыщению первой гармоники высокочастотного тока электронного пучка и насыщению по выходному сигналу (коэффициенту усиления). Физически это означает, что в пике усиления сгусток уже достаточно разрушен и не пригоден для дальнейшего взаимодействия любого типа. Насыщение при этом не ярко выраженное, после точки максимума резкого спада кривой не наблюдается. Расчеты, проведенные по указанной выше математической модели для больших входных сигналов ( $P_{вх}/P_0=0.05, 0.2$  и  $0.5$ ), полностью подтвердили эту гипотезу (рис. 3), что и позволяет получать требуемые полосовые характеристики.

Следует отметить, что полосовые характеристики эффекта подавления весьма существенно связаны с электродинамическими характеристиками замедляющей системы (ЗС) ЛБВП, поскольку дисперсия фазовой скорости в ней определяет (при заданном ускоряющем напряжении электронного пучка) весьма значимое для эффективности реализации описываемого эффекта соотношение скоростей электронов и электромагнитной волны. Однако, в отличие от усилителей, оптимальной, с точки зрения полосовых свойств, является не anomальная дисперсия (при которой фазовая скорость волны с ростом частоты увеличивается), а нормальная дисперсия, так как при отношениях  $v_e/v_{ф}<1$ , необходимых для реализации эффективного подавления, постоянство соотношения  $v_e/v_{ф}$  по диапазону частот обеспечивается именно при нормальной дисперсии. Это можно проиллюстрировать зависимостями (рассчитанными по упомянутым выше нелинейным уравнениям) коэффициента подавления на краях октавного диапазона от скорости электронного пучка (соответствующего ему ускоряющего напряжения  $U_{зс}$ ) для ЗС с различной дисперсией, из которых следует, что при нулевой дисперсии (рис. 4, а) оптимальные напряжения ЗС существенно различны для частот  $f_0$  и  $2f_0$ . Для случая  $v_{ф0}/v_{ф2f_0}=1.04$  (рис. 4, б) максимальные значения  $B$  на частотах  $f_0$  и  $2f_0$  достигаются при практически одинаковых  $U_{зс}$ . Для  $v_{ф0}/v_{ф2f_0}=1.1$  (рис. 4, в) наблюдается сдвиг оптимальных ускоряющих напряжений, обратный сдвигу при нулевой дисперсии.



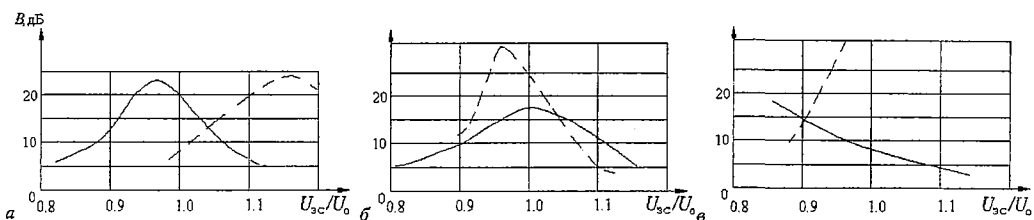


Рис. 4. Зависимость коэффициента подавления  $B$  на краях октавного диапазона частот от ускоряющего напряжения  $U_{зс}/U_0$  для трех различных величин дисперсии ЗС  $v_{ф1}/v_{ф2}$ :  $a - 1.0$ ;  $b - 1.04$ ;  $c - 1.1$ ;  $P_{вч}/P_0=0.2$ ; геометрическая длина в каждом случае оптимальная

## 2. Оценка влияния встречной волны на взаимодействие электронного пучка с ВЧ-полем в ЛБВ-подавителе

Описанный выше нелинейный эффект может найти широкое применение в усилительной технике СВЧ-диапазона. Одним из возможных путей получения высоких уровней мощности усиливаемого СВЧ-сигнала в широкой полосе частот является создание усилительных цепочек ЛБВ [9]. Такие схемы при их многочисленных достоинствах (высоких КПД, недостижимых в моноусилителях уровнях мощности и т.д.) имеют практически единственный недостаток — относительно низкий уровень устойчивости к самовозбуждению в отсутствие входного сигнала и возбуждению паразитных колебаний в режиме усиления полезного сигнала. Последнее связано с малыми потерями отраженного от общей нагрузки усилительной цепочки сигнала в оконечном усилителе, в результате чего на выход предусилителя приходит отраженный сигнал, сравнимый с уровнем его собственного выходного сигнала.

Представленные выше результаты исследований позволяют предположить, что описанный эффект подавления сигнала может быть использован для создания широкополосного развязывающего устройства, в котором (рис. 5) отраженный от оконечного усилителя сигнал будет направлен попутно с электронным пучком ЛБВП и существенно снижен по амплитуде за счет взаимодействия с ним. Прямой же сигнал, который будет распространяться при этом навстречу электронам, пройдет через ЛБВП практически без потерь и, на первый взгляд, не оказывая существенного влияния на подавление отраженного сигнала.

Однако сделанное выше предположение, что движущаяся в ЛБВП навстречу электронному пучку прямая волна не взаимодействует с ним, справедливо лишь отчасти. Действительно, если рассматривать исключительно прямую волну, то сколь-либо существенных изменений ее параметров за счет воздействия на нее потока электронов не наблюдается. Тем не менее, сами электроны, проходя через ускоряющие и тормозящие фазы поля движущейся ему навстречу волны, испытывают модуляцию по скорости. При этом в результате действия сил пространственного заряда и за счет того, что каждый электрон может пройти через поле нецелого числа длин волн, может иметь место кумулятивный модуляционный эффект, оказывающий влияние на взаимодействие с электронным пучком попутной ему встречной волны.

Исходной посылкой, на которой строилось исследование влияния встречной волны на электронный пучок и на его взаимодействие с попутной волной, являлось утверждение, что под действием встречной волны электроны пучка подвергаются дополнительной модуляции по скорости, амплитуду которой можно записать в виде



Рис. 5. Схема включения ЛБВП в качестве невязанного развязывающего устройства в усилительную цепочку между предусилителем (ПУ) и оконечным усилителем (ОУ); стрелками показаны направления скоростей движения электронов  $v_e$  во всех элементах усилительной схемы

$$\Delta v_e = -v_\Sigma + (v_\Sigma^2 + 4\eta E_{0z} v_\Sigma / \omega)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\eta = e/m$  – удельный заряд электрона;  $v_\Sigma = v_e + v_\phi$  – начальная скорость перемещения электронов относительно встречной волны;  $E_{0z}$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота встречной волны.

В предположении малости  $\Delta v_e$ , выражение (4) можно переписать в виде

$$\Delta v_e / v_e \approx 2\eta E_{0z} / (\omega v_e). \quad (2)$$

Оценки, проведенные для ЛБВ–подавителей 10–сантиметрового диапазона с уровнем мощности встречной волны 23÷27 дБ·Вт, показали, что амплитуда дополнительной модуляции составляет 4÷5 % от начальной скорости электронов.

Методика эксперимента по определению влияния встречной волны на спектр скоростей электронов основана на сравнении зависимостей тока коллектора ЛБВП от ее напряжения в отсутствие входного сигнала и при подаче ВЧ–сигнала большой амплитуды в направлении, противоположном движению электронов. Сравнение интегральных распределений электронов по энергиям позволяет определить изменение скорости электронов под действием встречной волны. При таких измерениях существует опасность регистрации дополнительного изменения коллекторного тока под действием и других факторов, например динамической расфокусировки, отраженных волн и т.п. Наиболее существенным из них представляется влияние волны, отраженной от ввода энергии ЛБВ, распространяющейся в одном направлении с электронами и модулирующей электронный пучок по скорости. Для предотвращения эффективного взаимодействия электронов с отраженным сигналом необходимо выбирать такое ускоряющее напряжение, при котором взаимодействие значительно слабее, чем в синхронных режимах, а фокусировка пучка еще не нарушается.

Дифференциация эффекта изменения продольной компоненты скорости электронов (под действием движущейся во встречном направлении электромагнитной волны) от результатов действия остальных возмущающих факторов основана на квазипериодической зависимости регистрируемой в эксперименте величины  $\Delta v_e$  от частоты сигнала. Действительно, регистрируемое изменение скорости электронов не является, в общем случае, максимально достижимым под действием встречной волны, а зависит от фазовой длины пространства взаимодействия на данной частоте сигнала. Для случая произвольной длины участка взаимодействия  $l$  выражение (1) запишется в виде

$$\Delta v_e = v_\Sigma + (v_\Sigma^2 + \alpha)^{1/2}, \quad (3)$$

где

$$\alpha = 2\eta \int_0^l E_{0z} \sin \beta z dz = 2\eta (E_{0z} / \beta) (\cos \beta l - 1). \quad (4)$$

Из (3), (4) видно, что максимальное изменение скорости будет зарегистрировано при  $\beta l = (2n+1)\pi$ , где  $n=1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta = \omega / v_\Sigma$ . В этом случае часть электронов пройдет кроме целого числа периодов всю тормозящую фазу встречной волны, и их скорость уменьшится на максимально достижимую для данной амплитуды ВЧ–поля величину  $\Delta v_e$ , что приведет к максимальному изменению интегральной кривой распределения электронов по энергиям. И наоборот, при  $\beta l = 2\pi n$  никакого изменения интегрального распределения электронов по энергиям на выходе из пространства взаимодействия по сравнению со случаем отсутствия встречного сигнала зарегистрировано не будет.

Если найти две соседние частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , для которых эффект не регистрируется, то для них можно записать

$$\omega_1 l / (v_{\phi 1} + v_e) = 2n\pi, \quad \omega_2 l / (v_{\phi 2} + v_e) = 2(n+1)\pi. \quad (5)$$

Отсюда находим

$$\Delta f = (v_{\phi} + v_e) / l. \quad (6)$$

Таким образом, получена квазипериодическая (ввиду наличия слабой дисперсии фазовой скорости  $v_{\phi 1} \approx v_{\phi 2}$  в спиральной ЗС) зависимость от частоты эффективности влияния встречной волны на скорость электронов. Регистрация подобной зависимости в эксперименте свидетельствовала бы о наличии эффекта влияния встречной волны на параметры электронного пучка.

Экспериментальное исследование влияния встречного сигнала на параметры электронного пучка и величину коэффициента подавления ЛБВП проводилось на установке, высокочастотная часть которой представлена на рис. 6. Сигнал с генератора 4, проходящий через усилитель 5 и ЛБВП 6, потери в котором минимальны, подается на вход ЛБВП 12. Мощность на входе  $P_1$  и выходе  $P_2$  ЛБВП 12 измеряется с помощью градуированных направленных ответвителей 7, 11. По соотношению измеренных значений мощности определяется коэффициент подавления

$$B = 10 \lg(P_1/P_2). \quad (7)$$

Встречный сигнал подается на ЛБВП 12 с генератора 8 и усилителя 9 и измеряется на входе усилителя с помощью направленного ответвителя 10. ЛБВП 6 предназначен для защиты усилителя 5 от мощного встречного сигнала, распространяющегося практически без потерь через устройство 12. В боковой канал направленного ответвителя 11, с помощью которого измеряется выходная мощность ЛБВП 12, попадает часть мощности встречного сигнала, отраженная от вывода энергии и следующих за ним ВЧ-элементов, и часть мощности с ответвителя 11, что обусловлено его неидеальной направленностью. Подавленный в ЛБВП 12 сигнал  $P_2$  значительно меньше по амплитуде, чем встречный сигнал  $P_1$ , поэтому погрешность измерений может оказаться значительной. В целях получения более точных результатов встречный сигнал подавался на частоте, отличной от частоты основного сигнала, а в канал, в котором измерялась  $P_1$ , вводился резонансный фильтр, настроенный на частоту основного сигнала и не пропускающий сигнал на частоте встречной волны. Изложенная методика представляется вполне правомерной, так как степень воздействия встречной волны на параметры ЛБВП практически не должна зависеть от частоты.

Вначале снималась зависимость токооседания от частоты встречной волны при фиксированной ее амплитуде. При подаче ВЧ-сигнала в направлении, противоположном направлению движения электронов, ток на ЗС увеличивался, причем его величина изменялась периодически с изменением частоты сигнала. Период изменения величины токооседания по частоте составлял  $5.4 \div 5.6\%$  по отношению к частоте  $f_1$ , что достаточно близко к расчетным результатам (около  $5.8\%$ ). Некоторое расхождение экспериментального и теоретического значений периода изменения величины

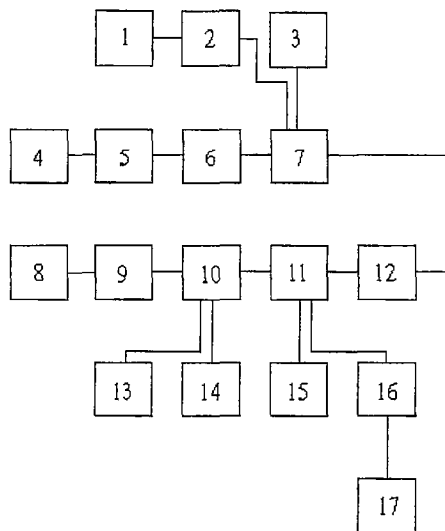


Рис. 6. Схема измерительной установки для оценки влияния встречного сигнала на параметры ЛБВП: 1, 13, 17 – измерители мощности; 2 – фильтр низких частот; 3, 14, 15 – согласованные нагрузки; 4, 8 – генераторы сигналов; 5, 9 – ЛБВ-усилители; 6 – ЛБВП, предназначенный для защиты ЛБВ-усилителя 5; 7, 10, 11 – направленные ответвители; 12 – испытуемый ЛБВП; 16 – резонансный фильтр

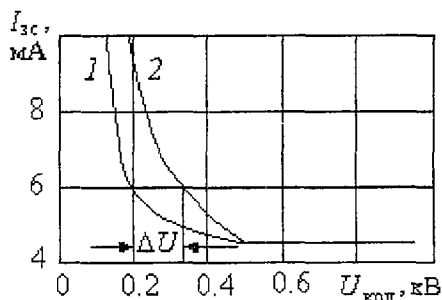


Рис. 7. Зависимости токооседания на ЗС от напряжения коллектора в отсутствие (кривая 1) и при наличии (кривая 2) встречной волны мощностью 20 дБ·Вт

$\Delta U$ ) самых медленных электронов, отнесенная к начальной энергии электронов, составляет (для уровня встречной волны 20 дБ·Вт)  $6 \div 7$  %, то есть примерно 3% по скорости, что хорошо согласуется с приведенными выше теоретическими оценками.

В отсутствие встречного сигнала коэффициент подавления исследуемого ЛБВП в октавном диапазоне частот составлял не менее 10 дБ в достаточно широком диапазоне изменения напряжений; оптимальное значение ускоряющего напряжения составляло примерно 3.9 кВ. Зависимость подавления в ЛБВП от уровня встречного сигнала исследовалась как для оптимального  $U=3.9$  кВ (в отсутствие встречной волны), так и для неоптимальных ускоряющих напряжений. Из анализа полученных кривых (рис. 8, а) следует, что при оптимальном (в отсутствие встречной волны) ускоряющем напряжении наблюдается значительное (на  $5 \div 7$  дБ) снижение коэффициента подавления ЛБВП с ростом амплитуды встречной волны. При отличных от оптимального ускоряющих напряжениях зависимость коэффициента подавления от уровня встречной волны становится слабее. Из рис. 8, б, в частности, видно, что при наличии встречного сигнала коэффициент подавления становится менее критичным к выбору ускоряющего напряжения. Это, очевидно, объясняется тем, что в случае эффективного взаимодействия при оптимальном ускоряющем напряжении электронный сгусток в конце пространства взаимодействия выходит к границе ускоряющей фазы поля. В этом случае при колебаниях по скорости под действием встречной волны большая часть электронов попадает в тормозящую фазу, что приводит к резкому снижению коэффициента подавления. В случае же менее эффективного взаимодействия при

$\Delta v_e$  можно объяснить неточностью измерения частоты и величины ускоряющего напряжения. Полученная квазипериодическая зависимость величины тока ЗС от частоты позволяет сделать вывод о справедливости выдвинутых предположений о характере действия встречной волны. Для определения величины  $\Delta v_e$  строились экспериментальные зависимости величины токооседания  $J_{ЗС}$  от напряжения коллектора в отсутствие и при наличии встречной волны (рис. 7). Разница в энергиях (тормозящих потенциалах –

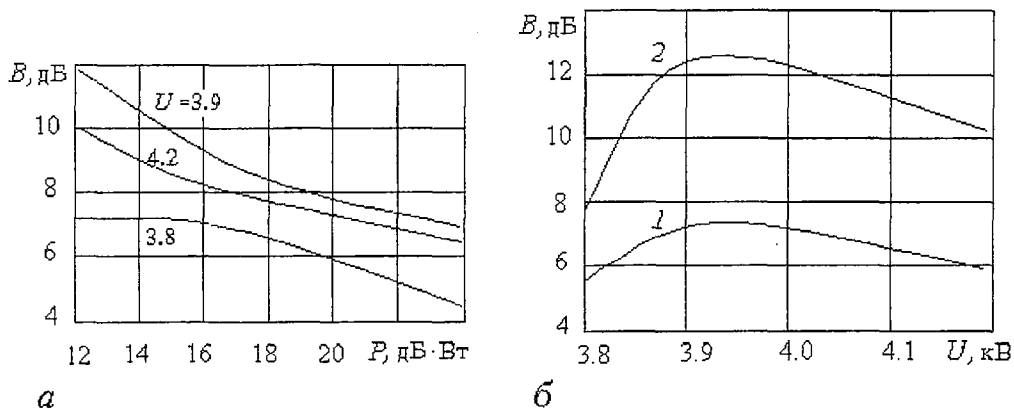


Рис. 8. Зависимости коэффициента подавления  $B$  от величины встречного сигнала при различных значениях ускоряющего напряжения  $U$ , кВ (а) и от ускоряющего напряжения ЛБВП (б) при наличии встречной волны мощностью  $P=24$  дБ·Вт (кривая 1) и в ее отсутствие (кривая 2)

неоптимальном ускоряющем напряжении большая часть электронов находится в середине ускоряющей фазы поля, и колебания под действием встречной волны приводят к переходу в тормозящую фазу поля лишь очень небольшой доли электронов.

### Заключение

Полученные результаты однозначно свидетельствуют о принципиальной возможности создания электронных развязывающих устройств, широкая полоса подавления отраженных сигналов в которых обеспечивается нелинейными свойствами в режимах, когда мощность взаимодействующего сигнала сравнима с мощностью электронного пучка. При расчете и проектировании таких устройств необходимо учитывать влияние (на взаимодействие электронного пучка с попутной ему волной) мощной встречной волны, существенно изменяющей спектр скоростей электронов и достижимые значения коэффициента подавления. Одной из наиболее эффективных мер, снижающих негативное влияние встречной волны, может являться отстройка ускоряющего напряжения от его значений, оптимальных в отсутствие встречной волны.

### Библиографический список

1. *Kompfner R.* On operation of the travelling wave tube at low level // J.Brit. IRE. 1950. Vol. 10, №7. P.283.
2. *Jonson H.R.* Kompfner dip condition // Proc.IRE.1955.Vol. 43, № 7. P. 874.
3. *Карбовский С.Б., Шахгеданов В.Н.* Ферритовые циркуляторы и вентили. М.: Сов.радио, 1970. 219 с.
4. *Серебряков А.Е. Свириденков В.С.* Результаты разработки широкополосных коаксиальных вентилей и дальнейшее совершенствование их технических характеристик. Радиоизмерения. Т.1. Измерения параметров СВЧ трактов // Труды IV Всесоюзной научно-технической конференции. Каунас, 1977. С. 116.
5. *Гаврилов М.В., Явчуновский В.Я., Якунин А.Н.* Поиск компромиссных решений при проектировании и разработке современных ЛБВ // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (8-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 3. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. 152 с.
6. *Кудряшов В.П.* Оптимизация выходных параметров широкополосных ЛБВ // Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 3. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1974. С.70.
7. Возможность улучшения частотных свойств ЛБВ / *Е.М.Ильина, А.М. Кац, В.П. Кудряшов, В.И. Миркин* // Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ. 1976. Вып.1. С.8.
8. *Калинин Ю.А., Кац А.М., Песин Б.В.* Исследование работы ЛБВ при больших входных сигналах // Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ. 1973. Вып.6. С.52.
9. *Ильина Е.М., Калинин Ю.А., Кац А.М. и др.* Улучшение параметров усилительной цепочки, состоящей из входной ЛБВ с большим усилением и выходной ЛБВ без поглотителя с малым усилением // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1974. Вып. 8. С.34.

Корпорация «Диполь», Саратов

Поступила в редакцию 27.04.2000  
после доработки 12.05.2000

# INVESTIGATION OF NONLINEAR PROPERTIES OF THE KOMPNER EFFECT IN THE MODE OF HIGH LEVEL SIGNAL REDUCTION IN THE PRESENCE OF POWERFUL OPPOSITE WAVE

*V.Y. Yavchunovsky*

The possibility of the powerful wide-band decoupler creation is shown, which provides stable operation of wide-band amplifying schemes. Reflected to the preamplifier microwave signal passes the decoupler in the same direction with the electron beam and interacts with it, when the electron rate is lower than the rate of signal propagation in the slow-wave structure and when the preamplifier output signal moves in opposite to electron beam direction with minimum attenuation, corresponding to own loss of electromagnetic system of the decoupler. Band characteristics of the Kompfner effect are investigated, negative influence to interactions in decoupler is studied of powerful wave which entered the decoupler and moved in opposite to electron beam direction. Specific ways to this effect reduction are proposed.



## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

*Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков*

Настоящее учебное пособие, выходящее в серии «Современная теория колебаний и волн», содержит последовательное изложение основ теории нелинейных волновых процессов. Подробно рассматриваются простые и ударные волны в средах без дисперсии, уединенные волны (солитоны) в диспергирующих средах, волны в активных средах. Наряду с изложением математического аппарата, книга содержит большое число примеров из различных областей физики, что подчеркивает междисциплинарный характер теории нелинейных волн. Приводится много различных задач.

Для студентов и аспирантов физических и физико-технических специальностей вузов, а также научных работников, интересующихся исследованиями нелинейных волновых процессов.

© Центр «Интеграция», 2000  
М.: Наука. Физматлит, 2000. 272 с.  
ISBN 5-02-15553-5

**ВОЛНА** (ж.) водяной гребень, гряда, долгий бугор, поднявшийся при всколыхании воды ветром или иною силою. Самые мелкие волны, *рябь*; крупная, отдельная, *волна*, *вал*; самая большая *колышень*, *взводень*; средняя, *плескун*; пенная, *завитки*, *кудрявка*, *барашек*, *зайчик*; крупная, *белоголовец*; прибрежная, в погоду, *прибой*, *бурун*; мелкая, крутая, на отмели, над камнями, *бурун*, *толкун*, *толчя*, *сутолока*; волна или волнение, противное течению или изменившемуся ветру, *спорная волна*, *чистоплеск*; набегающая на берег, *накатная волна*, *заплески*. Меж двух гряд волн образуется *хлябь*; вершина волны, *гребень*; снаветру *откос*; сподветру *круча волны*. *Девятым валом* или *волной зов*, по поверью, чередную, большую против прочих, роковую волну. *Вождь бурь полночного народа*, *девятый вал в морских волнах*, Суворов. || В переносном значении волною зовут движущуюся в одну сторону громаду, толпу. *Народ волна волной валит*.

*В.И. Даль*. Толковый словарь живого великорусского языка. М.: Русский язык, 1998. Том 1. С. 233, 234

### Предисловие

Предлагаемая читателю книга выходит в серии «Современная теория колебаний и волн», издаваемой в рамках программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 годы».

Книга во многом соответствует курсам лекций, которые читаются в Саратовском государственном университете по нелинейным процессам различной природы. В ней сочетаются стремление показать единство нелинейных волновых явлений на примерах из различных областей науки с изложением основ математического аппарата теории.

Такой подход определяется самой историей создания книги. Первоначально раздел «Нелинейные волны» входил в курс лекций «Теория волновых процессов» для студентов четвертого курса радиофизического отделения университета, который на протяжении многих лет читал чл.-корр. РАН Д.И.Трубецков. В основном его содержание соответствовало идеологии книги М.И. Рабиновича и Д.И. Трубецкова «Введение в теорию колебаний и волн» (М.: Наука, 1984 – первое издание, 1992 – второе издание)<sup>1</sup>. Отдельные лекции по нелинейным волнам читались Д.И. Трубецковым также в Самарском педагогическом институте, Ростовском государственном университете, Санкт-Петербургском техническом университете, Вайомингском университете (США). Затем им же был разработан и прочитан специальный курс лекций «Нелинейные волны» для третьекурсников факультета нелинейных процессов, в основу учебного плана которого положена нелинейная динамика. Соответственно все книги серии отражают этот учебный план и в той или иной мере соответствуют лекционным курсам. Параллельно чтению данного курса доцент Н.М.Рыскин проводил семинары по решению соответствующих задач. Наконец, он же стал читать курс и одновременно проводить семинары. Задачи частично включены в основной текст книги, а частично выделены самостоятельно.

Для одного из авторов (Д.И. Трубецкова) овладение теорией нелинейных волн связано, в первую очередь, с участием в уникальных горьковских (теперь нижегородских) школах «Нелинейные волны». Не было бы этих школ, возможно, не было бы и этой книги.

*Д.И. Трубецков  
Н.М. Рыскин*

## **Введение**

Я не знаю истинного автора выдающегося афоризма на эту тему. Сам я услышал его от одного научного работника, посещавшего мои еженедельные лекции. Он говаривал: «Все линейное от Бога, а нелинейное от Лукавого».

*М.А. Миллер. Волны, волны, волны...*

Теория нелинейных волн – все еще молодая наука, хотя исследования в этом направлении велись даже в прошлом веке, главным образом, в связи с задачами газо- и гидродинамики. Например, работы Дж. Скотта Рассела [1], который впервые наблюдал солитоны на поверхности жидкости, относятся к 1830–1840 гг.; уравнение Кортевега – де Вриза, представляющее основу математического описания солитонов, получено в 1895 г. [2]. Нелинейные волновые явления были предметом исследования таких ученых, как Пуассон, Стокс, Эйри, Рэлей, Буссинеск, Риман. Однако как единая наука теория нелинейных волн сложилась в конце 60–х начале 70–х годов, которые стали годами ее бурного развития.

Прежде всего, причина этого – в развитии вычислительной техники, позволившей подступиться к непосредственному численному решению уравнений в частных производных, которые описывают распространение волн в различных

---

<sup>1</sup> На английском языке книга имеет название: M.I. Rabinovich and D.I. Trubetskov. Oscillations and waves in linear and nonlinear systems. Kluwer Academic Publishers, 1989. 577 p.



средах. Так, исследования Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама [3], выполненные в 40-х годах на одной из первых ЭВМ, имели огромное значение для теории нелинейных волн (и вообще для нелинейной физики). Уникальные свойства солитонов, объясняющие результаты Ферми – Паста – Улама, были обнаружены Н.Забуски и М.Крускалом [4] также в ходе численного эксперимента.

Вторым толчком послужило создание мощного математического аппарата, позволяющего, в принципе, осуществить точное аналитическое решение ряда нелинейных уравнений в частных производных. Появление этих методов, в первую очередь, метода обратной задачи рассеяния, вызвало большой интерес у физиков и математиков. Во многом благодаря этому методу в настоящее время теория солитонов превратилась в самостоятельное научное направление в математической физике.

Третья причина состояла в расширении интереса к нелинейным явлениям в различных областях физики. Сформировались такие науки, как нелинейная акустика, нелинейная оптика; богатый материал для исследования нелинейных волновых процессов дали физика плазмы, радиофизика, электроника. С установлением глубокой общности между явлениями, наблюдаемыми в системах самой различной природы, пришло осознание того, что практически все многообразие нелинейных волновых процессов может быть сведено к небольшому числу типичных, канонических ситуаций, которые допускают описание при помощи одних и тех же уравнений (получивших название эталонных). Все это привело к становлению новой науки – теории нелинейных волн.

Эталонные уравнения играют в теории чрезвычайно важную роль. Как удачно выразился Ю.А. Данилов [5], они представляют собой не портрет физической системы, а, скорее, карикатуру: многие малосущественные детали опущены, а несколько наиболее характерных черт, наоборот, утрированы, выпячены, что и позволяет двумя–тремя штрихами создать узнаваемый образ. Наиболее удивительным является то, что большинство из этих уравнений относятся к числу полностью интегрируемых, т. е. разрешимых при помощи метода обратной задачи рассеяния. То, что большинство уравнений, важных с физической точки зрения, одновременно обладают весьма специфическими математическими свойствами – достаточно примечательный, хотя и необъяснимый на сегодняшний день факт.

В своей книге [6] Дж. Уизем предложил разделить все волновые процессы на два класса: гиперболические и диспергирующие. Название «гиперболические» происходит от того, что для определенных волн их распространение описывается по преимуществу гиперболическими уравнениями в частных производных. Впрочем, это определение не вполне корректно<sup>2</sup>, так как главным критерием является наличие или отсутствие дисперсии. Данную книгу также можно условно разделить на две части, первая из которых (главы 2–6) посвящена нелинейным волнам в средах без дисперсии, вторая (главы 7–12) – волнам в диспергирующих средах. Такое разделение представляется уместным с точки зрения как основных физических эффектов, так и методов исследования.

**Глава 1** является вводной. В ней при помощи эвристического подхода [7] получены основные эталонные уравнения. На основе качественных соображений и элементарных оценок выясняются наиболее принципиальные особенности распространения нелинейных волн. **Глава 2** посвящена уравнению простой волны, описывающему среду без дисперсии и диссипации. Подробно рассмотрен процесс опрокидывания волны; детально изучается задача о распространении гармонического сигнала, играющая важную роль в нелинейной акустике и электронике. Однако, полученные в этой главе решения, строго говоря, справедливы только до момента опрокидывания, поскольку в одних случаях неоднозначные решения не имеют физического смысла, в других – после

<sup>2</sup> Например, уравнение Бюргерса, очевидно, является параболическим, однако волны, описываемые им, относят к первому типу. С другой стороны, гиперболическое нелинейное уравнение Клейна – Гордона описывает по Уизему диспергирующие волны.

опрокидывания динамика волны приобретает чрезвычайно сложный характер, не допускающий аналитического описания (типичный пример – образование «барашков» на поверхности воды). В диссипативных средах процесс укрупнения останавливается и завершается образованием ударной волны. В случае, когда толщина фронта пренебрежимо мала, ударную волну можно заменить разрывом. Решения с разрывами рассматриваются в **главе 3**. В **главе 4** развитая теория обобщается на квазилинейные системы гиперболических уравнений. Приводятся примеры из газо- и гидродинамики, а также физики плазмы. Описать структуру фронта ударной волны позволяет уравнение Бюргерса, которому посвящена **глава 5**. **Глава 6** содержит разнообразные примеры ударных волн естественного и искусственного происхождения на Земле и в космосе.

Изучение нелинейных волновых процессов в средах с дисперсией начинается в **главе 7**, где изложена краткая история открытия солитонов. **Глава 8** посвящена стационарным нелинейным волнам – решениям наиболее простого типа, которые, однако, играют весьма важную роль. Особое внимание уделено уединенным волнам и солитонам. В **главе 9** описываются методы получения «длинноволновых» уравнений типа уравнений Kortewega – de Vries и Бюргерса в конкретных физических задачах. Глава содержит большое количество примеров из физики плазмы, газо- и гидродинамики, радиофизики. **Глава 10** посвящена точным методам интегрирования солитонных уравнений. Основное внимание уделено методу обратной задачи рассеяния, кроме того, обсуждаются метод Хироты и преобразования Бэклунда. В **главе 11** рассматриваются процессы распространения и взаимодействия квазигармонических волновых пакетов в нелинейной среде. Описывается метод многих масштабов, который позволяет получать уравнения для огибающей волнового пакета, среди которых наибольший интерес представляет нелинейное уравнение Шрёдингера. Подробно анализируются модуляционная неустойчивость и образование солитонов огибающей. Обсуждаются такие важные явления, как распространение солитонов в нелинейных оптических волноводах и самофокусировка света. Далее излагаются элементарные основы теории трехволнового резонансного взаимодействия в квадратично-нелинейной среде, которое приводит к таким процессам, как параметрическая и взрывная неустойчивости. Заключительная **глава 12** посвящена нелинейным волнам в активных средах. Здесь в качестве основных моделей служат уравнение Гинзбурга – Ландау, а также неустойчивое уравнение Клейна – Гордона (для описания взаимодействия волн с энергиями разных знаков). Обсуждаются автоколебательные процессы в распределенных системах.

Основная цель книги – дать представление о современной теории нелинейных волн как о единой науке, в основе которой лежит система универсальных понятий и представлений, своего рода «язык» теории нелинейных волн. Авторы старались подчеркнуть междисциплинарный характер этой науки, насытив книгу примерами из различных областей физики. Важным было также соблюсти баланс между изложением математических методов и физических примеров. Конечно, в рамках одной книги невозможно детально изложить все вопросы, связанные с распространением нелинейных волн. На сегодняшний день имеется обширная литература, посвященная как теории волн в целом, так и отдельным ее разделам. Для более углубленного изучения можно порекомендовать учебные пособия и монографии [6, 8–16].

### Список литературы

1. Scott Russel J., Report on waves. Rept. 14th meetings of the British Assoc. for the Advancement of Science. London: John Murray, 1844. P. 311–390.
2. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. V. 39. P. 422–443.
3. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems // Los Alamos Sci. Lab. Report LA–1940, 1955.

- Ферми Э. Научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647–657.
4. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15, № 6. P. 240–243.
5. Данилов Ю. А. Нелинейность // Знание – сила. 1982. № 11. С. 34.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
7. Корпел А., Банерджи П.П. Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям // ТИИЭР. 1984. Т. 72, № 9. С. 6–30.
8. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
9. Заславский Г.М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
10. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
11. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.
12. Руденко О.В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
13. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
14. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
15. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
16. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.

## Оглавление

### Предисловие авторов

#### Введение

**Глава 1. Основные модели эволюции нелинейных волн.** 1.1. Об эвристическом подходе к нелинейным волновым уравнениям. 1.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии и диссипации. 1.3. Волны в нелинейной среде с диссипацией. 1.4. Волны в нелинейных средах с дисперсией. 1.4.1. Среда с дисперсией в области высоких частот. 1.4.2. Среда с дисперсией в области низких частот. 1.4.3. Среда с дисперсией и диссипацией. 1.5. Распространение волновых пакетов. 1.6. Нелинейные волны в средах с неустойчивостью. 1.7. Обобщение на неоднородный случай. 1.8. Неполиномиальные дисперсионные соотношения.

**Глава 2. Простая волна.** 2.1. Уравнение простой волны и его решение методом характеристик. 2.2. Задача о распространении гармонического сигнала. О группировке электронов в пролетном клистроне. 2.3. Спектр опрокидывающейся волны.

**Глава 3. Образование разрывов в простой волне.** 3.1. Обобщенные решения и граничные условия на разрыве. 3.2. Распространение гармонического сигнала. Пилообразная волна и ее спектр. 3.3. Распространение треугольного и биполярного импульсов. 3.4. Возмущение от движущегося источника. 3.5. Слияние разрывов.

**Глава 4. Простые волны в примерах.** 4.1. Квазилинейные системы гиперболических уравнений. Критерий гиперболичности. 4.2. Простые волны в газовой динамике. 4.3. Гравитационные волны на «мелкой воде». 4.4. Ионно-звуковые волны в плазме. 4.5. Волны в автомобильном потоке. 4.6. Граничные условия на разрыве и их связь с законами сохранения.

**Глава 5. Нелинейные волны в средах с диссипацией.** 5.1. Точные решения уравнения Бюргерса. Преобразование Коула – Хопфа. 5.2. Поведение решений уравнения Бюргерса в пределе  $v \ll 1$ . 5.3. Стационарная ударная волна. 5.4. Распространение гармонического сигнала в нелинейной среде с диссипацией. 5.5. Взаим-

модействие ударных волн. 5.6. Распространение одиночного импульса в нелинейной среде с диссипацией. 5.6. Автомодельные решения уравнения Бюргерса.

**Глава 6. Примеры ударных волн.** 6.1. Сильный точечный взрыв. Качественная картина и анализ размерностей. 6.2. Ударные волны естественного происхождения на Земле. Гром, землетрясения, извержения вулканов, падение метеоритов. 6.3. Ударные волны, искусственно создаваемые на Земле. 6.4. Об ударных волнах в космосе.

**Глава 7. История открытия солитона.** 7.1. Дж. Скотт Рассел и открытие солитона. 7.2. Уравнения Буссинеска и Кортевега – де Вриза. 7.3. Проблема Ферми – Паста – Улама. 7.4. Взаимодействие солитонов и работа Забуски и Крускала.

**Глава 8. Стационарные нелинейные волны.** 8.1. Стационарные решения уравнения КдВ: кноидальные волны и солитоны. 8.2. Модифицированное уравнение КдВ. 8.3. Уравнение Буссинеска. 8.4. Стационарные ударные волны в среде с дисперсией и диссипацией. 8.5. Уравнение Син–Гордона. 8.5.1. Стационарные волны. 8.5.2. Физические примеры. 8.6. Стационарные ленгмюровские волны в холодной плазме. 8.7. Стационарные ионно–звуковые волны.

**Глава 9. Уравнение Кортевега – де Вриза в конкретных физических задачах.** 9.1. Ионно–звуковые волны в плазме. 9.2. Ленгмюровские волны в тонком плазменном цилиндре. 9.3. Гравитационные волны на мелкой воде. 9.4. Волны в нелинейной линии передачи. 9.5. Газовая динамика и уравнение Бюргерса.

**Глава 10. Точные методы интегрирования нелинейных волновых уравнений.** 10.1. Законы сохранения уравнения КдВ и преобразование Миуры. 10.2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдВ. 10.3. Многосолитонные решения. 10.4. Обратная задача рассеяния в формулировке Лакса. 10.5. Дальнейшее обобщение метода обратной задачи. 10.6. Метод Хироты и многосолитонные решения. 10.7. Преобразования Бэклунда.

**Глава 11. Модулированные волны в нелинейных средах.** 11.1. Теория Уизема. 11.2. Критерий Лайтхилла и модуляционная неустойчивость. 11.3. Нелинейное уравнение Шрёдингера и метод многих масштабов. 11.4. Неустойчивость пространственно–однородного решения. 11.5. Стационарные решения НУШ. «Светлые» и «темные» солитоны. 11.6. Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике. Солитоны в волоконных световодах. 11.7. Самофокусировка света. 11.8. Трехволновое взаимодействие в квадратично–нелинейной среде. 11.8.1 Параметрическая (распадная) неустойчивость. 11.8.2. Взрывная неустойчивость.

**Глава 12. Нелинейные волны в средах с неустойчивостями.** 12.1. Уравнение Гинзбурга – Ландау. 12.1.1. Анализ на абсолютную и конвективную неустойчивости. 12.1.2. Модуляционная неустойчивость. 12.2. Конвекция Рэлея – Бенара. 12.3. Об автоколебаниях в распределенных системах. Динамическая модель пространственного развития турбулентности. 12.4. Взаимодействие электромагнитного излучения со средой из двухуровневых частиц. 12.4.1. Двухуровневая среда. Уравнения Блоха. 12.4.2. Самоиндуцированная прозрачность. 12.4.3. Распространение импульсов в усиливающей среде. Автомодельные решения. 12.5. Волны в нелинейных активных линиях передачи.

## Список литературы



## КОЛЕБАНИЯ, КАТАСТРОФЫ, БИФУРКАЦИИ, ХАОС

*А.П. Кузнецов*

В сборнике представлено около 300 задач по нелинейным колебаниям, катастрофам, динамическим системам, бифуркациям, хаосу. Каждая глава содержит как теоретические задачи, так и задачи исследовательского характера, решаемые с использованием компьютера. Задачи апробированы на факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета.

Издание выполнено при поддержке ФЦП «Интеграция» и РФФИ (грант № 00-15-96673). Использованы результаты грантов РФФИ № 00-02-17509, 97-02-16414.

Рецензент: *чл.-корр. РАН, профессор Д.И. Трубецков.*

© А. П. Кузнецов, 2000

© Художник Д. В. Соколов, 2000.

Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. 98 с.

ISBN 5-900641-90-2

### Предисловие

Вынесенные в заголовок этой книги термины – колебания, катастрофы, бифуркации, хаос – стали основными для современного междисциплинарного подхода, известного как нелинейная динамика. Их можно услышать среди математиков, физиков, химиков, биологов, специалистов по экономике. Эти термины не только образовали основу нового «интернационального» языка науки, но стали элементами фундаментальных представлений о природе.

К сожалению, схемы образования более консервативны, чем живая наука. Поэтому современные концепции проникают обычно лишь на вершину «пирамиды» образовательной системы. В этом случае трудно говорить о раннем воспитании мышления, основанного на идеях нелинейной динамики. По мнению возглавляемого чл.-корр. РАН Д.И. Трубецковым авторского коллектива такое мышление можно воспитать не только у студентов старших курсов, но и у младшекурсников, и даже учащихся средних школ. О возможности этого говорят успехи системы непрерывного образования, состоящей из лицея Колледжа прикладных наук и Высшего колледжа прикладных наук (ныне факультет нелинейных процессов) Саратовского госуниверситета.

Автор принимал активное участие в становлении этой системы непрерывного образования. Для учащихся лицея был разработан четырехлетний курс, в рамках которого представлены такие понятия, как оценки, методы размерностей, подобия и другие. На основе этого курса была подготовлена и

издана книга «Как работают и думают физики»<sup>1</sup>. Настоящая же книжка явилась итогом создания соответствующей системы знаний на базе нелинейной динамики уже для студентов университета.

Педагогический опыт учит, что мало познакомить молодых людей с новыми понятиями. Надо, чтобы сформировался «активный» багаж знаний и навыков работы. Этому можно научиться, лишь решая задачи. В этой книге представлено около 350 задач, которые были разработаны для факультета нелинейных процессов как четыре последовательные ступеньки «нелинейного» образования. Они основываются на четырех учебных курсах: «Нелинейные колебания», «Теория катастроф», «Динамические системы и бифуркации», «Динамический хаос». Подавляющее большинство задач оригинальны.

Создавая задачник по нелинейной динамике, нельзя игнорировать использование компьютеров. Изобретение компьютера – одно из наиболее значительных интеллектуальных событий XX века. Сейчас уже ясно, что просто учить программированию, не решая задач, для которых характерно органичное использование компьютера, нельзя. Использование компьютера формируют новую сторону профессии ученого, которая дополняет традиционное деление на теоретиков и экспериментаторов. Успехи нелинейной динамики являются одним из наиболее ярких примеров синтеза математических, физических и компьютерных подходов. Поэтому каждую главу книги завершает подборка задач для решения с использованием компьютера. Все такие задачи имеют свое название. Подчеркну, что это задачи исследовательского характера, требующие соответствующей теоретической и компьютерной подготовки. В этом существенное отличие от компьютерных практикумов, в рамках которых студент фактически выполняет лабораторную работу на компьютере, не программируя сам в соответствии с логикой решения задачи.

Весьма существенной была необходимость глубокой взаимосвязи с курсом общей физики. Поэтому многие задачи имеют характерный для обычных физических задач антураж. Однако вопросы, которые ставятся, требуют решения в другом контексте, характерном именно для нелинейной динамики. Такой подход дал прекрасные результаты и обеспечил активность и заинтересованность студентов.

Ряд задач являются «информационными», то есть не просто содержат собственное условие, но и несут новую информацию, иногда опережающую лекционный материал, а иногда и совершенно новую. Это, по моему мнению, очень важно, поскольку услышать новую информацию, механически записывая лекцию или усвоить ее, интенсивно решая задачи, – существенно разные вещи. Думается, что такой подход весьма перспективен. Его развитие может дать большие резервы учебного времени, которого всегда не хватает в рамках традиционных учебных планов.

Несколько задач своим появлением обязаны научным исследованиям, проводимым в Саратовском отделении Института радиотехники и электроники РАН. Особенно это относится к задачам для компьютерного решения в главах «Бифуркации» и «Хаос». Структура же задачника обязана этим исследованиям еще в большей степени. Именно благодаря им понятия типичности, коразмерности, случая общего положения, универсальности приобретают статус общих для всей нелинейной теории. Эти понятия появляются очень рано и «отрабатываются» с помощью на первый взгляд привычных задач по физике и математике (начало главы «Катастрофы»).

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Д.И.Трубецкову за возможность реализации представленных задач в Саратовском госуниверситете, С.П. Кузнецову за многочисленные полезные обсуждения, он также выполнил рисунок кота и мыши, изучающих логистическое отображение,

---

<sup>1</sup> Читателям, интересующимся синергетикой на «школьном» уровне, рекомендуем книгу Д.И.Трубецкого «Колебания и волны для гуманитариев»: Учебное пособие для вузов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. 392 с. 6 с. илл.

Д.В. Соколову за рисунок на обложке – кота, путешествующего по многообразию катастрофы сборки, А.А. Короновскому, Н.М. Рыскину и Л.В. Красичкову за «апробацию» задач на семинарских и компьютерных занятиях, всем студентам факультета нелинейных процессов, принявших активное участие в этих занятиях, а также И.Р. Сатаеву и А.П. Широкову за помощь в подготовке компьютерного макета книги.

Компьютерные рисунки, представленные в начале каждой главы, демонстрируют соответственно конденсацию изображающих точек на фазовой плоскости на предельный цикл уравнения Ван дер Поля, многолистную поверхность, содержащую складки и сборки, бифуркационное дерево логистического отображения и карту ляпуновских показателей кубического отображения.

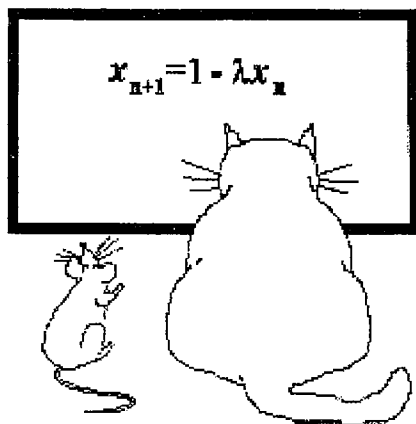
## Оглавление

**Глава 1. Колебания.** Линейность и нелинейность. Нелинейные элементы. Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды. Особенности спектров нелинейных систем. Мультистабильность и гистерезис. Динамические системы. Консервативные и диссипативные системы. Фазовые портреты нелинейных систем. Нелинейный осциллятор. Приближение слабой нелинейности. Нелинейный осциллятор. Движение вблизи сепаратрисы. Метод медленно меняющихся амплитуд. Быстрые и медленные движения в случае сильной диссипации. Автоколебательные системы. Уравнения Ван дер Поля и Рэля. Жесткое возникновение автоколебаний. Релаксационные колебания. Сечение Пуанкаре. Одномерные дискретные отображения. Нелинейные колебания. Задачи для компьютерного исследования.

**Глава 2. Катастрофы.** Ряд Тейлора и модели. Понятия типичности и коразмерности. «Игрушки» теории катастроф. Критические точки функций одной переменной. Критические точки функций двух переменных. Катастрофа коразмерности один – складка. Катастрофа коразмерности два – сборка. Катастрофа коразмерности три – ласточкин хвост. Каспидные катастрофы в двумерных системах. Катастрофа коразмерности три – эллиптическая омбилика. Катастрофа коразмерности три – гиперболическая омбилика. Катастрофы и теория упругости. Катастрофы и физика фазовых переходов. Каустики и волны. Колебания. Катастрофы. Задачи для компьютерных исследований.

**Глава 3. Бифуркации.** Классификация и примеры динамических систем. Бифуркации одномерных потоков. Бифуркация Андронова–Хопфа. Бифуркации предельных циклов. Бифуркации одномерных отображений коразмерности один. Бифуркации двух- и трехпараметрических одномерных отображений. Бифуркации двумерных отображений. Квазипериодические режимы и синхронизация в двумерных и одномерных отображениях. Динамические системы и бифуркации. Задачи для компьютерных исследований.

## Глава 4. Хаос.



*Заинтересованный читатель  
может заказать задачник:*

*по электронной почте  
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru*

*по телефону  
(845-2) 52-38-64*

*по почте  
410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ,  
редакция журнала «ПНД»*

*Стоимость наложенного платежа 30 руб.*



Изв.вузов «ПНД», т.8, № 3, 2000

*Первое сообщение*

Научная школа–конференция

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ 2000**

Саратов, октябрь 2000

### ***Организаторы и спонсоры***

Саратовский государственный университет  
Государственный учебно–научный центр «Колледж»  
Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
Министерство образования и науки Саратовской области  
при поддержке:  
U.S. Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the  
Former Soviet Union (CRDF), Award No REC–006  
Федеральная целевая программа «Интеграция»

### ***Программный комитет***

Трубецков Д.И.	председатель, чл.–корр. РАН, профессор, ректор СГУ
Кузнецов А.П.	зам. председателя, д.ф.–м.н., зав. базовой кафедрой динамических систем СГУ, в.н.с. СО ИРЭ РАН
Безручко Б.П.	д.ф.–м.н., профессор СГУ, в.н.с. СО ИРЭ РАН
Кузнецов С.П.	д.ф.–м.н., профессор СГУ, в.н.с. СО ИРЭ РАН
Левин Ю.И.	к.ф.–м.н., доцент, директор ГосУНЦ «Колледж», декан факультета нелинейных процессов СГУ
Рыскин Н.М.	к.ф.–м.н., доцент СГУ
Шараевский Ю.П.	д.ф.–м.н., профессор, зав. кафедрой нелинейной физики СГУ

### ***Оргкомитет***

Трубецков Д.И.	председатель, чл.–корр. РАН, профессор, ректор СГУ
Левин Ю.И.	к.ф.–м.н., доцент, директор ГосУНЦ «Колледж», декан факультета нелинейных процессов СГУ
Казаков Г.Т.	зам. председателя, к.ф.–м.н., доцент, директор СО ИРЭ РАН
Анфиногентов В.Г.	к.ф.–м.н., доцент СГУ
Красичков Л.В.	к.ф.–м.н., доцент СГУ
Короновский А.А.	к.ф.–м.н., доцент СГУ
Мчедлова Е.С.	к.ф.–м.н., доцент СГУ



Рыскин Н.М. к.ф.-м.н., доцент СГУ  
Храмов А.Е. к.ф.-м.н., доцент СГУ  
Шараевский Ю.П. д.ф.-м.н., профессор СГУ

На школе–конференции будут прочитаны лекции ведущими специалистами и известными популяризаторами науки в области нелинейной динамики и нелинейной физики из Саратова, Москвы и Нижнего Новгорода. Будут представлены доклады молодых исследователей, организованы дискуссии по вопросам науки и образования и вечер английского языка. Школа будет проходить в одном из пригородных пансионатов Саратова, что позволит сочетать интенсивную работу с отдыхом. Ориентировочная дата проведения школы 13–20.10.2000. Планируется издание сборника трудов школы–конференции.

В работе школы–конференции могут принять участие молодые исследователи трех возрастных уровней: учащиеся школ, лицеев и гимназий, студенты, а также аспиранты и молодые ученые без степени в возрасте до 30 лет. Для этого необходимо представить до 1.10.2000 текст научного сообщения объемом 4–5 стр., включая иллюстрации. Желательно использование текстового редактора MS WORD. Образец оформления прилагается. Текст должен быть подписан автором (авторами) и научным руководителем. Основное требование к работам – *самостоятельность и оригинальность исследования*. Для студентов, аспирантов и молодых ученых обязательным требованием является соответствие тематике школы–конференции. Для учащихся тематика может быть более широкой (физика, компьютерное моделирование и др.). Отбор участников школы будет осуществлен Программным комитетом по материалам представленных работ.

*Заявки и доклады присылать по адресам*

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83, ГосУНЦ «Колледж»  
Оргкомитет школы–конференции  
«Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2000»  
Тел.: (845–2)52–38–64  
E–mail: and@cas.ssu.runnet.ru

*Образец оформления доклада*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА**

**Ильин С.П.**

*Физико–технический лицей № 1, Саратов*

В настоящей работе проведено экспериментальное исследование маятников различной природы. Математический маятник, как известно [1]...

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. П. Берже, И. Помо, К. Видаль. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.

Подпись автора

Научный руководитель: преподаватель ФТЛ № 1 г. Саратова  
Иванов Андрей Семенович

Подпись научного руководителя

*Адрес для переписки*

410000, Саратов, ул. Смирновская, д. 43, кв. 133, Ильину С.П.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *Л.А. Сидорова, М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты  
р/с №40603810900000000378 ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

**Подписка на II-ое полугодие 2000 года**

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498  
и по заявочным письмам непосредственно в редакции  
Стоимость подписки на II полугодие 90 рублей

**Зарубежная подписка** оформляется через фирмы-партнеры ЗАО «Международная книга – Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК-Периодика» по адресу: 117049, Москва, ул. Б. Якиманка, 39, ЗАО «МК-Периодика» тел.: (095) 238-14-85, 238-49-67; факс: 238-46-34  
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address one of the partners of JSC «Mezhdunarodnaya Kniga-Periodica» in Your country or necessary to address JSC «МК-Periodica» directly  
Address: Russia, Moscow, 117049, ul. B. Yakimanka, 39, «МК-Periodica»  
Tel.: (095) 238-14-85, 238-49-67; Fax: 238-46-34  
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

Сдано в набор 3.05.00. Подписано к печати 10.07.00. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать плоская. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 8,40 (6,0). Уч.-изд. л. 8,3. Тираж 200 экз. Заказ 176

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.04.98

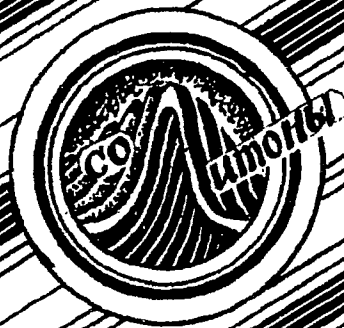
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864  
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

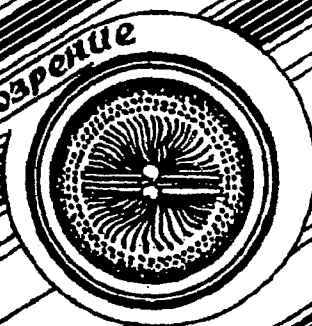
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 2000



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

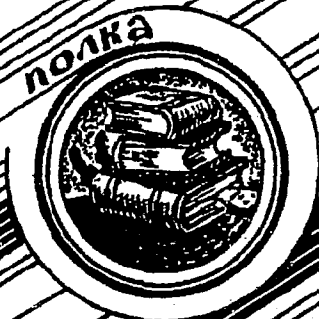
*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики



Аттракторы  
in  
NATURE



*The Lorenz  
Attractor*