

ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Трикладная Деллинейная Динамика



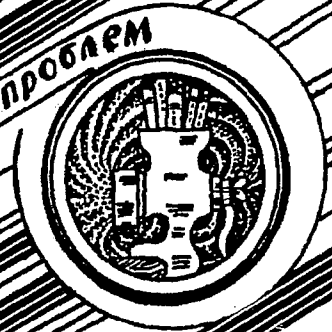
Умом Россию не понять...

4
2000

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



**Бифуркации
в динамических
системах различной природы**



**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



**Конференции, семинары, симпозиумы,
аос**



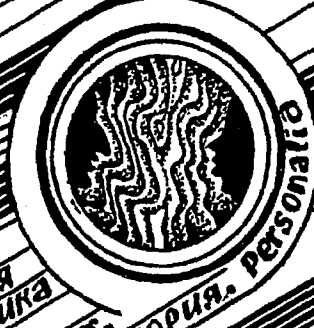
**Детерминированные
аос**



**Авто-
волны,
самоорганизация**



**Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн**



**Нелинейная динамика
в лицах.
История. Personalto**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлматов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 8, № 4, 2000, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

- Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Иванов Н.Ю., Осин А.А.* Скейлинг при переходе к хаосу через разрушение квазипериодического движения с отношением частот, заданным золотым средним 3

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Кузнецов А.П., Савин А.В.* О проблеме границы хаоса и типичных структурах на плоскости параметров неавтономных дискретных отображений с удвоениями периода 25
- Жусубалиев Ж.Т.* Хаотические колебания в кусочно-линейной модели релейной системы с гистерезисом 37
- Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Режимы поведения системы двух взаимосвязанных генераторов с фазовым управлением 52

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Скрипаль А.В., Усанов Д.А., Абрамов А.В.* Нелинейная динамика генератора на туннельном диоде при воздействии внешнего СВЧ-сигнала 66
- Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Некоторые модели класса решеточных газов, связанные с описанием численности популяций 74
- Трубецков А.Д., Мчедлова Е.С.* Количественная оценка производственно обусловленных нарушений биологических ритмов 85

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Астахов В.В., Шабунин А.В., Стальмахов П.А., Климишин А.В.* Управляемая противофазная синхронизация хаоса в связанных кубических отображениях 91
- Фомин А.И., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В., Анищенко В.С.* Вынужденная фазовая синхронизация цепочки хаотических осцилляторов . . . 103

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

- Мчедлова Е.С.* Влияние временного запаздывания на динамику взаимодействующих научных направлений 113

MINISTRY OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.8, №4, 2000, Saratov

C O N T E N T S

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

- Scaling at the transition to chaos via destruction of quasiperiodic motion at the golden mean frequency ratio. *A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.Yu. Ivankov, A.A. Osin* 3

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- About the problem of chaos boundary and typical structures at the parameter plane of non-autonomic discrete maps with period doubling. *A.P. Kuznetsov, A.V. Savin* 25
- Chaotic oscillation in piecewise-linear model of the relay system with hysteresis. *Zh. Zhusubaliyev* 37
- Regimes of behaviour in the system of coupled oscillators with phase control. *V.P. Ponomarenko, V.V. Matrosov* 52

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

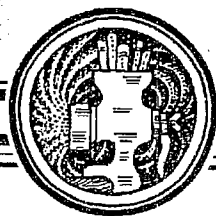
- Nonlinear dynamics of tunnel-diode oscillator at the influence of external microwave signal. *A.V. Skripal, D.A. Usanov, A.V. Abramov* 66
- Some models of lattice-gas class related with population number description. *V.G. Anfinogentov, A.A. Koronovskiy, A.E. Hramov* 74
- Numerical estimation of biological rhythms destruction coursed by labour regimes. *A.D. Trubetskov, E.S. Mchedlova* 85

DETERMINISTIC CHAOS

- Controlled antiphase chaotic synchronization in coupled cubic maps. *V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov, A.V. Klimshin* 91
- External phase synchronization of chaotic oscillators chain. *A.I. Fomin, T.E. Vaidivasova, O.V. Sosnovtseva, V.S. Anishchenko* 103

NONLINEAR DYNAMICS AND THE HUMANITIES

- The influence of time delay on interacting scientific fields dynamics. *E.S. Mchedlova* 113



СКЕЙЛИНГ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ХАОСУ ЧЕРЕЗ РАЗРУШЕНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ С ОТНОШЕНИЕМ ЧАСТОТ, ЗАДАНЫМ ЗОЛОТЫМ СРЕДНИМ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.Ю. Иваньков, А.А. Осин

Дан обзор результатов, касающихся перехода к хаосу через разрушение квазипериодических движений на двумерном торе и полученных на основании анализа модельной системы – синус-отображения окружности. Кратко изложен метод ренормализационной группы для случая, когда число вращения задано равным «золотому среднему», рассмотрена структура критического аттрактора, приведены иллюстрации скейлинга в пространстве параметров модельного отображения. Впервые обращено внимание на тот факт, что для наблюдения двумерного скейлинга необходимо выполнить нелинейную замену параметров, соответствующую переходу в специальную систему локальных координат вблизи критической точки.

Введение

Как известно, один из распространенных сценариев возникновения сложной динамики в многомерных нелинейных системах состоит в том, что хаосу предшествует несколько бифуркаций рождения колебательных составляющих, отношение частот которых, вообще говоря, зависит от параметров задачи. Когда оно иррационально, реализуются квазипериодические режимы. В фазовом пространстве им соответствуют аттракторы в виде торов, размерность которых определяется количеством основных частотных компонент. При отношениях частот близких к рациональным из-за присущей системе нелинейности эти компоненты взаимодействуют, обнаруживая тенденцию к взаимной синхронизации («захвату частот», *mode locking*) с возникновением периодических режимов. Квазипериодические и периодические режимы, в свою очередь, могут претерпевать различные бифуркации.

Общая картина перехода к хаосу через квазипериодичность сложна и многопланова. Начиная с основополагающих статей Ландау [1] и Рюэля и Такенса [2], ее обсуждению посвящено огромное количество работ разных авторов (см., например, [3–39]). Один из важнейших фрагментов этой картины составляет круг вопросов, касающихся разрушения двумерного тора. Модельная система, подходящая для детального исследования данной проблемы, – одномерное отображение окружности [9–39].

Одним из самых замечательных достижений в нелинейной динамике было открытие Фейгенбаумом закономерностей универсальности и скейлинга (масштабного подобия) при переходе к хаосу через удвоения периода в нелинейных диссипативных системах [40–42]. Для их объяснения в нелинейную динамику был

привнесен метод ренормгруппы (РГ), аналогичный тому, который ранее использовался в теории фазовых переходов. В случае перехода к хаосу по Фейгенбауму исчерпывающее представление о динамике системы достигается при ее исследовании в зависимости от *одного* управляющего параметра. Иными словами, критическое поведение на пороге хаоса, ассоциирующееся с каскадом удвоений периода по Фейгенбауму, есть *феномен коразмерности 1*. Характерные для этого сценария свойства скейлинга (на бифуркационном дереве, на графике ляпуновских показателей, в структуре аттрактора на пороге хаоса и др.) были представлены и обсуждались во многих работах [43–47].

Под влиянием результатов Фейгенбаума аналогичные по своей методологии исследования были предприняты также для перехода к хаосу через разрушение квазипериодичности в отображении окружности. По ряду причин, в том числе в силу удобства и прозрачности теоретического анализа, особое внимание было уделено рассмотрению специального отношения частот, заданного «золотым средним» – иррациональным числом $w=(5^{1/2}-1)/2$. Точку в пространстве параметров, отвечающую моменту разрушения квазипериодического режима с таким соотношением частот, будем называть *критической точкой* GM (от слов «golden mean» – золотое среднее). Закономерности универсальности и скейлинга, характерные для этой критической точки и ее окрестности, были обнаружены эмпирически в численных расчетах Шенкера [12] и получили теоретическое объяснение в рамках РГ-анализа, развитого в работах Фейгенбаума, Каданова и Шенкера [13] и Рэнда, Остланда, Сетна и Сиггиа [14,15]. В дальнейшем к вопросу о свойствах универсальности и скейлинга квазипериодической динамики на пороге разрушения двумерного тора обращались многие авторы [16–39].

Настоящая статья носит обзорно-методический характер и имеет целью представить достаточно полный набор графических иллюстраций свойств скейлинга, присущих критической точке GM. Статья содержит изложение наиболее существенных результатов, касающихся динамики отображения окружности, и доступна для широкого круга читателей, в том числе студентов и аспирантов, интересующихся проблемой перехода к хаосу.

В отличие от удвоений периода, критическое поведение, ассоциирующееся с точкой GM, есть *феномен коразмерности 2*, то есть для исчерпывающего исследования структуры окрестности критической точки необходим двухпараметрический анализ. Плоскость параметров должна характеризоваться свойством двумерного скейлинга, то есть воспроизводить себя при пересчете масштабов в определенное число раз по двум осям подходящей локальной системы координат¹. Выбор этой системы координат представляет собой, как мы увидим, нетривиальный момент. По-видимому, этим обусловлено то обстоятельство, что убедительных иллюстраций двумерного скейлинга в литературе до сих пор представлено не было.

Отображение окружности и критическая точка GM

К отображению окружности можно прийти, отправляясь от задачи о синхронизации автоколебаний периодической последовательностью импульсов. Пусть мы имеем нелинейную диссипативную систему, в фазовом пространстве которой присутствует аттрактор в виде предельного цикла, и на нее действует внешняя сила в виде периодических импульсных толчков (рис. 1, *a*). Каждый очередной толчок выводит систему из установившегося режима, после чего амплитуда колебаний постепенно возвращается к предельному циклу. Если частота колебаний зависит от амплитуды, то этот процесс релаксации сопровождается накоплением добавки к фазе. Реалистичные уравнения, описывающие динамику в промежутке времени между толчками, записываются в виде

¹ Другие примеры двумерного скейлинга см. в [48, 49].

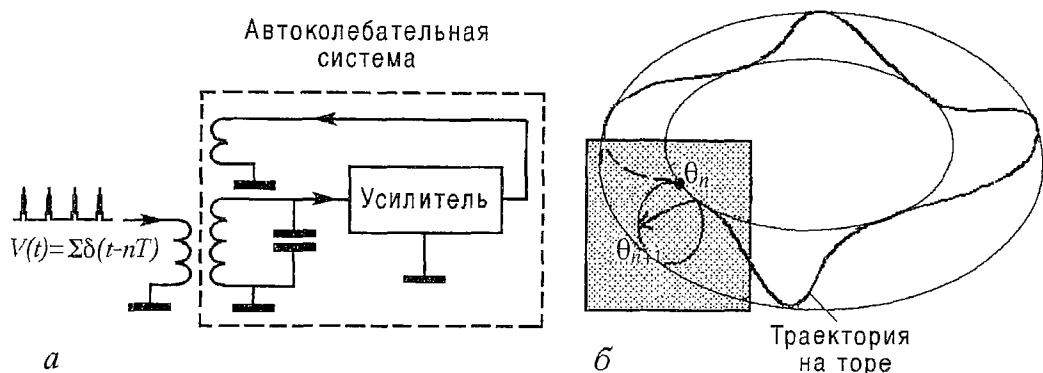


Рис. 1. К выводу отображения окружности применительно к задаче о динамике автоколебательной системы под действием периодической последовательности импульсов (а); описание динамики на двумерном торе с помощью этого отображения (б)

$$\dot{r} = -\gamma r, \quad \dot{\theta} = \omega + \nu r. \quad (1)$$

Здесь r – отклонение амплитуды от предельного цикла; γ – коэффициент затухания возмущения амплитуды, характеризующий скорость релаксации к предельному циклу; θ – фаза; ω – частота колебаний на предельном цикле, поправка к которой учитывается в уравнениях (1) в первом порядке по r ; коэффициент ν – некоторая константа.

Предположим, что перед очередным n -м толчком отклонение по амплитуде от предельного цикла отсутствовало, а фаза равнялась θ_n . В результате толчка возникнет добавка к амплитуде, и эта добавка обязана быть периодической функцией θ_n . Простейшее предположение состоит в том, что это просто синус, так что сразу после толчка имеем

$$r_n = A \sin \theta_n,$$

где A – параметр, характеризующий интенсивность толчков. Интегрируя уравнения (1) с начальными условиями r_n, θ_n , получаем

$$r(t) = (r_n + A \sin \theta_n) e^{-\gamma t}, \quad (2)$$

$$\theta(t) = \theta_n + \omega t + \nu \int_0^t (r_n + A \sin \theta_n) e^{-\gamma \tau} d\tau = \theta_n + \omega T + \nu (r_n + A \sin \theta_n) (1 - e^{-\gamma T}) / \gamma.$$

Если принять, что $\gamma T \gg 1$, то возмущение амплитуды практически полностью затухает за интервал времени между импульсами T . В этом случае к моменту очередного толчка будем иметь

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega T + \nu \int_0^T (r_n + A \sin \theta_n) e^{-\gamma t} dt \cong \theta_n + \omega T + \nu (r_n + A \sin \theta_n) / \gamma. \quad (3)$$

Вводя обозначения

$$\Delta = \omega T, \quad k = A(1 - e^{-\gamma T}) / \gamma,$$

получаем одномерное отображение

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta_n \pmod{2\pi}. \quad (4)$$

Значок $\pmod{2\pi}$ напоминает, что значения фазы θ , различающиеся на $2\pi m$, следует считать эквивалентными. Переменную θ можно трактовать как координату точки на окружности, поэтому о соотношении (4) говорят как об *отображении окружности (circle map)*. Это отображение содержит два

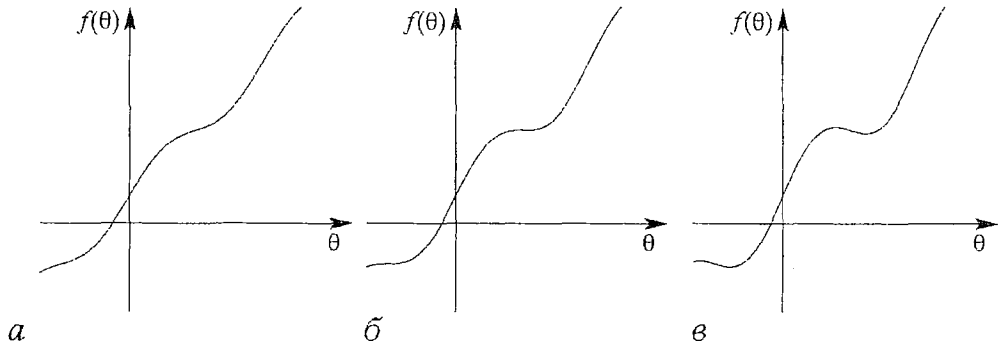


Рис. 2. График функции $f(\theta) = \theta + \Delta + k \sin \theta$ в докритической области $k < 1$ (а), при критическом значении параметра $k = 1$ (б) и в закритической области $k > 1$ (в)

управляющих параметра, k и Δ . В контексте задачи о периодическом импульсном воздействии на автоколебательную систему они характеризуют, соответственно, интенсивность толчков и расстройку частоты воздействия относительно частоты автоколебаний.

Поясним, как возникает отображение окружности в общем случае при рассмотрении динамики на двумерном торе. Имея тор-аттрактор в фазовом пространстве некоторой системы, мы можем рассмотреть его сечение площадкой S , расположенной, как показано на рис. 1, б. В сечении получится замкнутая кривая, точкам которой можно приписать угловую координату θ . Если выпустить траекторию из точки $\theta = \theta_n$, то, оставаясь на торе, она обойдет вокруг него и вновь пересечет поверхность S в какой-то другой точке $\theta = \theta_{n+1}$. Соотношение, связывающее θ_{n+1} и θ_n , будет иметь вид $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + f(\theta_n)$, где $f(\theta)$ – некоторая периодическая функция, а параметр Δ определяется отношением периодов обхода тора по параллели и меридиану. Функцию $f(\theta)$ можно представить в виде ряда Фурье. Если мы ограничимся первой гармоникой, обозначим ее амплитуду через k и примем за начало отсчета точку, где $f(\theta)$ обращается в нуль, то придем, очевидно, к отображению (4).

Как можно видеть из приведенных на рис. 2 графиков отображения (4), при $k < 1$ зависимость x_{n+1} от x_n монотонная и взаимно однозначная, при $k = 1$ отображение имеет кубическую точку перегиба, а при $k > 1$ – теряет свойство взаимной однозначности. В субкритической области $k < 1$ установившиеся режимы динамики могут быть периодическими или квазипериодическими, а в суперкритической области $k > 1$ – периодическими или хаотическими.

На рис. 3 показана карта динамических режимов отображения окружности. На плоскости параметров (Δ, k) периодические режимы обозначены оттенками серого цвета. На карте можно видеть известную структуру языков Арнольда (областей синхронизации), упирающихся своими остриями в линию $k = 0$. На рис. 4 показаны портреты аттракторов в виде итерационных диаграмм, которые относятся к некоторым определенным точкам плоскости параметров и соответствуют периодическим, квазипериодическим и хаотическим режимам.

Полезной характеристикой, позволяющей различать типы динамических режимов, служит число вращения

$$w(\Delta, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((\theta_n - \theta_0) / (2\pi n)). \quad (5)$$

Режим считается периодическим, если начальное значение θ через некоторое число шагов q воспроизводится с точностью до добавки целого числа полных периодов, то есть $\theta_{n+q} - \theta_n = 2\pi r$. Такому режиму отвечает рациональное число вращения $w = p/q$. Квазипериодические режимы характеризуются иррациональными числами вращения.

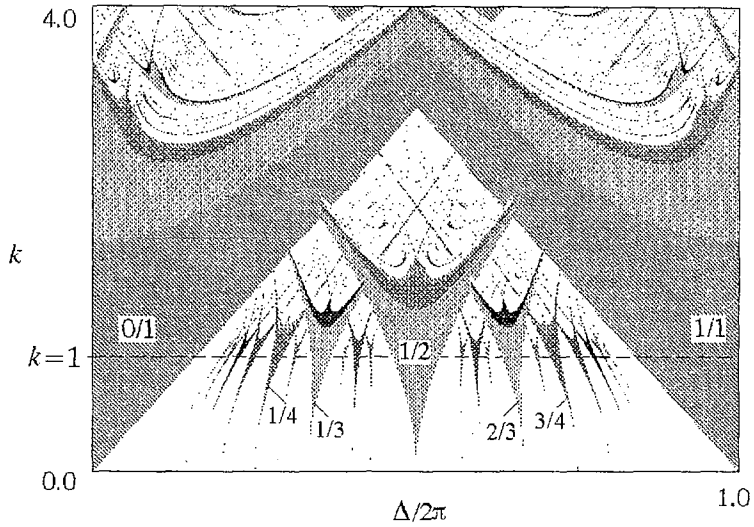


Рис. 3. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения окружности $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta_n$. Области, изображенные различными тонами серого цвета, отвечают периодическим режимам (языки Арнольда); для нескольких языков цифрами указано число вращения. Области квазипериодичности и хаоса показаны белым; $k=1$ – критическая линия

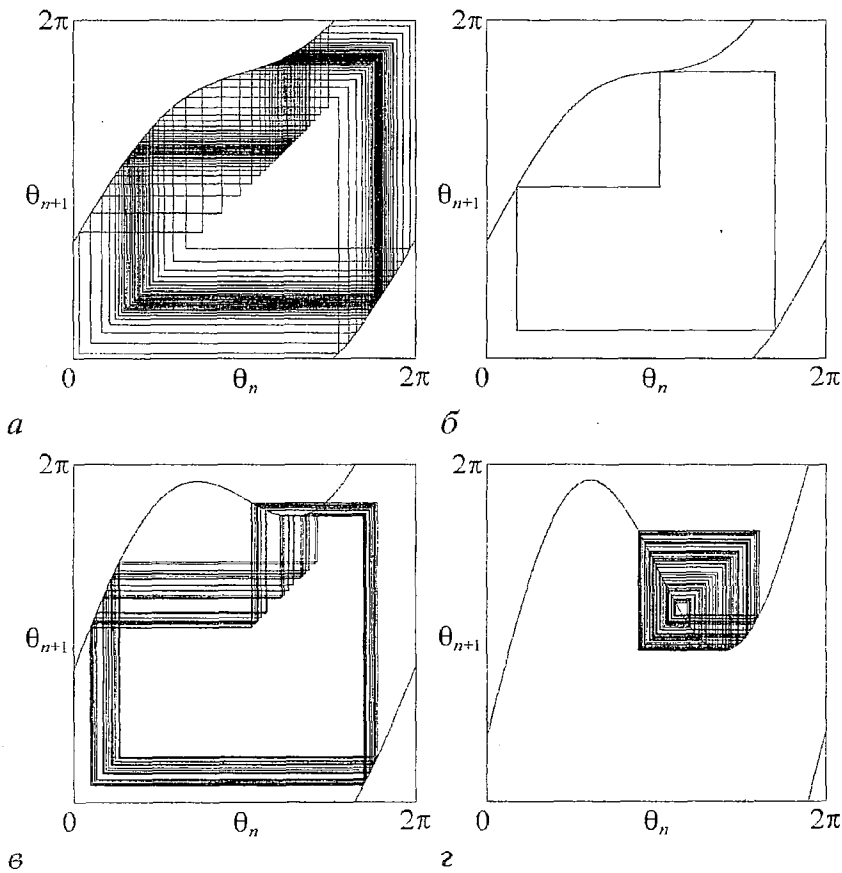


Рис. 4. Итерационные диаграммы, иллюстрирующие различные режимы динамики отображения окружности: а – квазипериодический, $k=0.7$, $\Delta/(2\pi)=0.35$; б – периодический, $k=0.9$, $\Delta/(2\pi)=0.35$; в – хаотический, $k=1.56$, $\Delta/(2\pi)=0.4$; г – хаотический, $k=3$, $\Delta/(2\pi)=0.2$

При $k=0$ число вращения выражается как $w=\Delta/(2\pi)$, поэтому при рациональных значениях $\Delta/(2\pi)$ имеют место периодические, а при иррациональных – квазипериодические режимы. Языки Арнольда имеют острия как раз рациональные точки оси абсцисс. Несмотря на то, что количество языков бесконечно, между ними остается место для квазипериодических режимов. Это очевидно при $k=0$, но оказывается справедливым и при конечных k , пока $k<1$. При фиксированном $0<k<1$ для каждого рационального числа p/q существует свой интервал значений параметра расстройки, в пределах которого число вращения фиксировано и равно p/q . Этот интервал определяется шириной соответствующего языка Арнольда при данном k . Зависимость числа вращения от параметра расстройки оказывается монотонной непрерывной функцией, содержащей бесконечное число горизонтальных ступенек (рис. 5). Ее называют «чертовой лестницей» (*Devil's staircase*). При $k\rightarrow 0$ суммарная длина всех ступенек чертовой лестницы стремится к нулю; при увеличении k она монотонно возрастает и при $k=1$ становится равной единице. Множество значений параметра $\Delta/(2\pi)$, не принадлежащих ступенькам, соответствует иррациональным числам вращения, то есть квазипериодическим режимам динамики. Мера этого множества равна единице при $k=0$ и убывает до нуля при $k=1$. В этом последнем случае чертову лестницу называют полной. Достаточно убедительные и аккуратные численные расчеты показывают, что при $k=1$ квазипериодическим режимам отвечает фрактальное множество значений параметра расстройки, которое имеет нулевую меру, а его размерность Хаусдорфа приблизительно равна 0.870 [17–19].

На рис. 6 зависимость числа вращения от k и $\Delta/(2\pi)$ показана в виде трехмерного графика. Проекция этого графика на плоскость (Δ, k) дает расположение языков синхронизации, а сечение плоскостью $k=1$ – полную чертову лестницу.

В закритической области $k>1$ языки Арнольда частично перекрываются, что говорит о наличии мультистабильности: при одних и тех же значениях параметров может сосуществовать несколько аттракторов, отвечающих разным динамическим режимам. Каждый из них реализуется при задании начальных условий в бассейне притяжения соответствующего аттрактора. Внутри языков можно видеть сложную картину областей, где имеет место переход к хаосу через каскад удвоений периода на базе основного для данного языка периодического режима, присутствуют структуры типа «crossroad» (перекресток), точки сборок, линии складок.

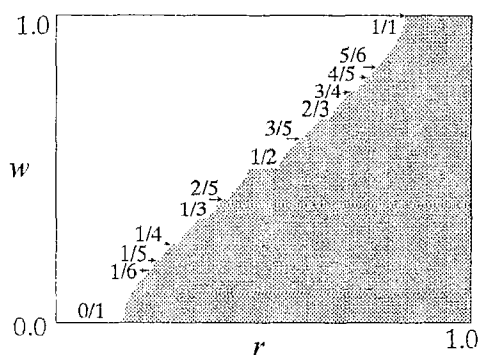


Рис. 5. «Чертова лестница» – зависимость числа вращения от параметра $r=\Delta/(2\pi)$ в критическом отображении окружности, $k=1$

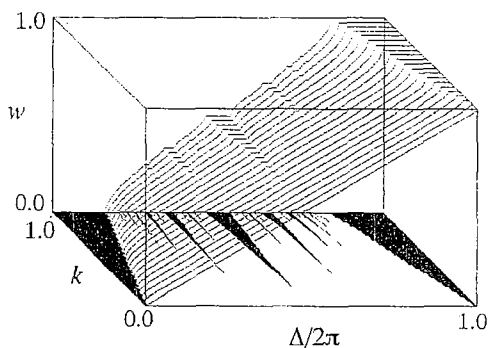


Рис. 6. Зависимость числа вращения от k и $\Delta/(2\pi)$ в виде трехмерного графика

Критическая точка GM и ренормгрупповой анализ

Представим себе, что мы движемся на плоскости параметров (Δ, k) от $k=0$ в сторону увеличения параметра k вдоль линии постоянного иррационального числа вращения w . При $k=1$ эта линия оканчивается: аттрактор перестает быть гладким тором и превращается в некоторый фрактальный объект. Это соответствует критической точке, ассоциирующейся с данным числом вращения w . С точки зрения фрактальных свойств критического аттрактора и устройства окрестности критической точки на плоскости параметров, существенной оказывается структура разложения иррационального числа w в цепную дробь.

Представление числа, принадлежащего интервалу $(0,1)$, цепной дробью имеет вид

$$w = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}}, \quad (6)$$

где элементы a_0, a_1, a_2, \dots – положительные целые. Для любого иррационального числа w цепная дробь бесконечна. Наилучшие рациональные аппроксиманты, или подходящие дроби, получаются путем обрыва цепной дроби на некотором конечном шаге номера m . Самую простую структуру представления цепной дробью имеет золотое среднее $w=(5^{1/2}-1)/2$: в этом случае все элементы a_i равны 1. Рациональные аппроксиманты золотого среднего даются отношениями последовательных чисел Фибоначчи

$$w_m = F_m/F_{m+1}, \quad w = \lim_{m \rightarrow \infty} w_m, \quad (7)$$

$$F_0=0, F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, \dots, F_{m+1}=F_m+F_{m-1}.$$

Критическую точку на плоскости (Δ, r) , отвечающую данному числу вращения, мы обозначили, как точку GM (рис. 7).

Изложим теперь вкратце содержание РГ-анализа, развитого в работах [13–16, 21, 22, 38, 39]. Для удобства введем вместо θ новую переменную $x=\theta/(2\pi)+1/2$ и нормируем параметр расстройки на 2π , положив $r=\Delta/(2\pi)$. Тогда отображение окружности (4) примет вид

$$x_{n+1} = x_n + r - k \sin(2\pi x_n)/(2\pi) \pmod{1}, \quad (8)$$

а точка перегиба окажется расположенной в начале координат.

Как показывают численные расчеты, критическая точка GM на плоскости параметров отображения (8) имеет координаты²

$$(r, k)_{GM} = (0.60666106347011201228\dots, 1). \quad (9)$$

Основная идея метода РГ состоит в том, чтобы рассмотреть последовательность операторов эволюции в критической точке, определенных на возрастающих временных интервалах, которые задаются последовательными знаменателями подходящих дробей. Для золотого среднего это числа Фибоначчи F_m .

Введем обозначение

$$f_m(x) = f^{F_m}(x) - F_{m-1} = \underbrace{f(f(f(\dots(x)\dots)))}_{(F_m \text{ раз})} - F_{m-1}, \quad (10)$$

² Процедура вычисления значения r , при котором число вращения равно заданному иррациональному числу, упрощается тем обстоятельством, что на линии $k=1$ число вращения еще является монотонной функцией параметра расстройки.

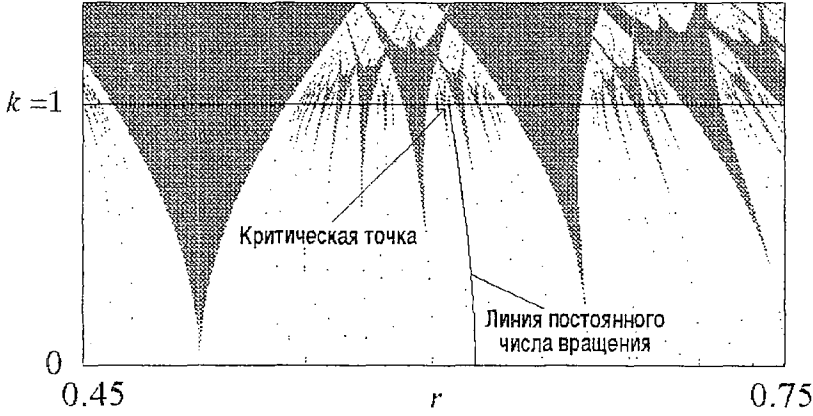


Рис. 7. Траектория на плоскости параметров (линия постоянного иррационального числа вращения $(5^{1/2}-1)/2$) и критическая точка, отвечающая моменту перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения

где $f(x)=x+r-k\sin(2\pi x)/(2\pi)$. Если известны $f_m(x)$ и $f_{m-1}(x)$, то в соответствии с (7) и (10) можно записать

$$f_{m+1}(x) = f_{m-1}(f_m(x)), \quad (11)$$

где принято во внимание, что для любого целого p функция $f(x)$ обладает тем свойством, что $f(x+p)=f(x)+p$.

Далее, на каждом шаге построения введем свою нормировку динамической переменной на фактор A_m , так что оператор эволюции за F_m шагов будет представлен функцией

$$g_m(x) = A_m f_m(x/A_m). \quad (12)$$

Этот фактор удобно выбрать так, чтобы $g_m(0)=1$, то есть положить

$$A_m = 1/f_m(0). \quad (13)$$

С использованием обозначения $\alpha_m = A_m/A_{m-1}$ можно переписать уравнения, определяющие последовательность функций g_m , в следующем виде:

$$\alpha_{m+1} = 1/[\alpha_m g_{m-1}(\alpha_m^{-1} g_m(0))], \quad (14)$$

$$g_{m+1}(x) = \alpha_{m+1} \alpha_m g_{m-1}(\alpha_m^{-1} g_m(x/\alpha_{m+1})).$$

Операция, позволяющая получить новую функцию g_{m+1} из пары старых – это и есть преобразование РГ. Для краткости его можно обозначить как

$$g_{m+1} = R_m[g_m, g_{m-1}]. \quad (15)$$

Альтернативная формулировка РГ-преобразования получается, если при построении оператора эволюции f_{m+1} вместо (11) использовать выражение

$$f_{m+1}(x) = f_m(f_{m-1}(x)). \quad (16)$$

В этом случае приходим к системе уравнений

$$\alpha_{m+1} = 1/g_m(\alpha_m), \quad (17)$$

$$g_{m+1}(x) = \alpha_{m+1} g_m(\alpha_m g_{m-1}(x/(\alpha_m \alpha_{m+1}))).$$

которая формально эквивалентна (14).

Можно составить программу для компьютера, которая строила бы графики

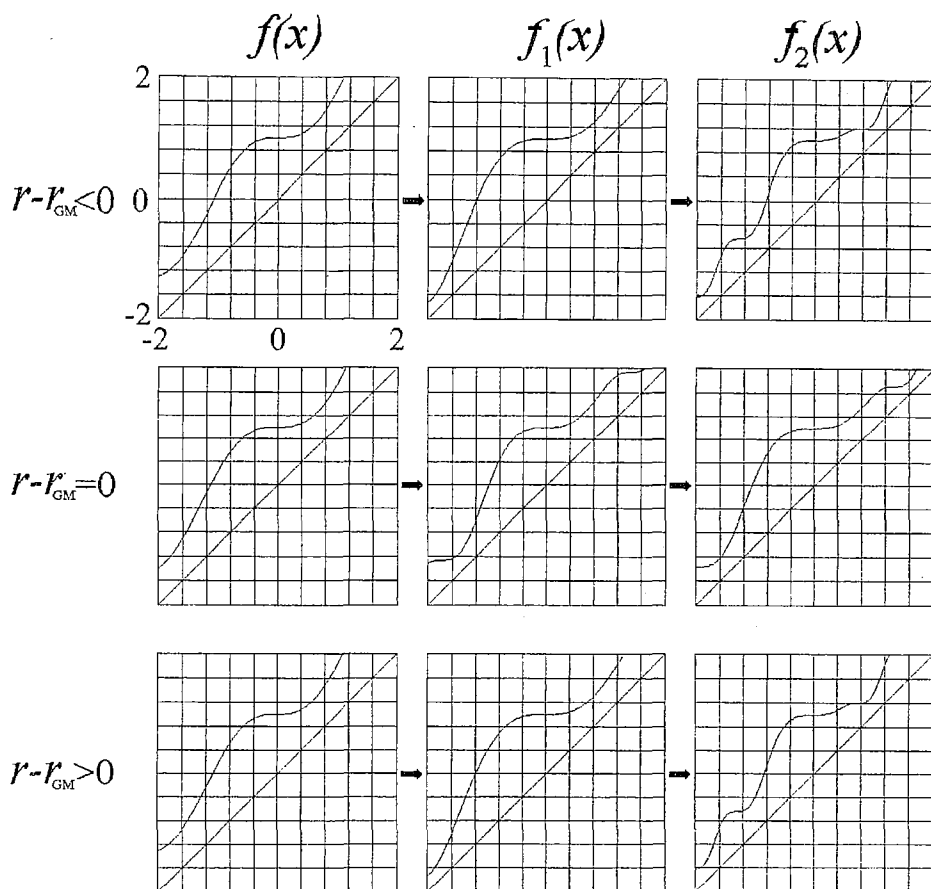


Рис. 8. Действие РГ-преобразования на функцию $f(x)$ при $k=1$ и значениях r , меньшем, равном и большем критического $r_{GM}=0.60666106\dots$

функций g_m при $m=1,2,3,\dots$ На рис. 8 показано, как они выглядят при $k=1$ и значениях r , немного меньшем, равном и немного большем критического r_{GM} . При $r=r_{GM}$ замечаем, что вид графика при итерациях не меняется. Это говорит о сходимости последовательности пар функций (g_m, g_{m-1}) к неподвижной точке РГ-преобразования. Факторы α_m также сходятся к определенному пределу α . При $r < r_{GM}$ и при $r > r_{GM}$ наблюдается уход от неподвижной точки.

Из (14) видно, что предельная функция, получаемая при $r=r_{GM}$, должна удовлетворять функциональному уравнению

$$g(x) = \alpha^2 g(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \quad (18)$$

Оно было получено в работе [13] и называется поэтому *уравнением Фейгенбаума – Каданова – Шенкера*. Решение этого уравнения, подчиненное дополнительному условию наличия кубической точки перегиба в начале координат, может быть найдено без апелляции к исходной форме «затравочного» отображения (8). Это означает универсальность рассматриваемого типа критического поведения. Полученное численно в виде полиномиальной аппроксимации решение имеет вид

$$\begin{aligned} g(x) = & 1 + 0.765184x^3 - 0.215464x^6 - 0.053469x^9 + 0.032921x^{12} + \\ & + 0.001231x^{15} - 0.004304x^{18} + 0.000668x^{21} + 0.000501x^{24} + \\ & + 0.000177x^{27} - 0.000042x^{30} + 0.000031x^{33} - 0.000004x^{39} \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Заметьте, что здесь представлены только степени, кратные трем. Попутно численное решение позволяет найти также масштабный фактор α , который оказывается равным

$$\alpha = -1.288574553954368866... \quad (20)$$

График универсальной функции $g(x)$ показан на рис. 9³.

Следующий шаг состоит в том, чтобы рассмотреть малое возмущение, соответствующее сдвигу из критической точки GM. Для упрощения рабочих соотношений полезен следующий трюк. Переопределим PG-преобразование, подставив в (17) вместо переменного масштабного фактора константу $\alpha = 1.28857...$ Полученное рекуррентное функциональное уравнение

$$g_{m+1}(x) = \alpha^2 g_{m-1}(\alpha^{-1} g_m(x/\alpha)) \quad (21)$$

имеет ту же неподвижную точку (19) и столь же правомерно, как исходное (действительно, правила перенормировки масштаба мы вправе установить по своему усмотрению, лишь бы было обеспечено существование неподвижной точки). Будем исходить из уравнения (21) и искать его решение в виде $g_m(x) = g(x) + \varepsilon h_m(x)$, $\varepsilon \ll 1$. В первом порядке по ε получаем

$$h_{m+1}(x) = \alpha^2 g'(\alpha^{-1} g(x/\alpha)) h_m(x/\alpha) + \alpha h_{m-1}(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \quad (22)$$

Относительно $h_m(x)$ это линейное разностное функциональное уравнение. Подстановка $h_m(x) = \delta^m h(x)$, где δ – константа, приводит к следующей задаче на собственные функции и собственные значения:

$$\delta^2 h(x) = \delta \alpha^2 g'(\alpha^{-1} g(x/\alpha)) h(x/\alpha) + \alpha h(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \quad (23)$$

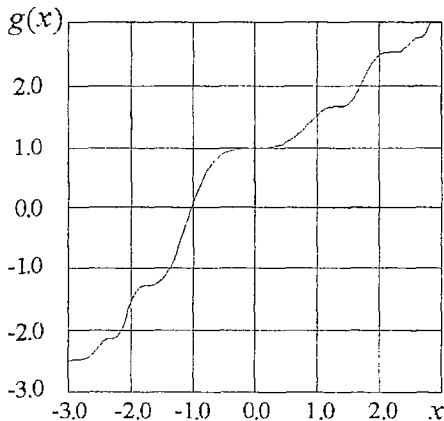


Рис. 9. График универсальной функции $g(x)$, являющейся неподвижной точкой уравнения PG (17)

Численное решение показывает, что имеется два существенных собственных числа⁴, превышающих по абсолютной величине единицу [13–15, 39]:

$$\delta_1 = -2.833610655891167799..., \quad (24)$$

$$\delta_2 = \alpha^2 = 1.660424381098700680...$$

Собственная функция, ассоциирующаяся с δ_1 , имеет разложение Тейлора вида $h_1(x) = 1 + \sum h_n x^{3n}$. Очевидно, она соответствует возмущению исходного отображения окружности, оставляющему его на критической линии $k=1$. Вторая собственная функция содержит в своем разложении все

³ Отметим, что представление (19) справедливо при $|k| \leq 1$. Универсальная функция определена и вне этой области, но для ее вычисления там следует привлекать функциональное уравнение (18) с тем, чтобы использовать (19) только в указанном интервале.

⁴ Кроме δ_1 и δ_2 , спектр собственных значений содержит несущественные числа, связанные с инфинитезимальными заменами переменной, а также с возмущениями, выводящими решение из подпространства коммутирующих функциональных пар. Чтобы пояснить последний момент, заметим, что все операторы эволюции f_m (см. (10), (11)) коммутируют, то есть результат их действия не зависит от порядка, поскольку они представляют собой многократные композиции одного и того же отображения. Например, $f_m(f_{m+1}(x)) = f_{m+1}(f_m(x))$. Это влечет за собой определенные ограничения и на вид функций h_m

степени x . Она включается при наличии возмущения, уводящего отображение с критической линии.

Итак, если слегка переместиться по параметрам из критической точки GM, то операторы эволюции для интервалов времени, заданных последовательными числами Фибоначчи F_m , будут вести себя асимптотически в зависимости от m следующим образом:

$$g_m(x) = g(x) + C_1 \delta_1^m h_1(x) + C_2 \delta_2^m h_2(x), \quad (25)$$

где коэффициенты C_1 и C_2 зависят от параметров исходного отображения и обращаются в нуль в критической точке.

В более общем случае, когда добавки малы в исходном отображении, но при итерациях PГ-преобразования становятся значительными, решение можно представить в виде

$$g_m(x) = G(x, C_1 \delta_1^m, C_2 \delta_2^m), \quad (26)$$

где функция трех аргументов $G(x, C_1, C_2)$ отвечает двумерному неустойчивому многообразию неподвижной точки функционального уравнения, причем $G(x, 0, 0) = g(x)$.

В следующем разделе мы рассмотрим и проиллюстрируем выводы, которые проведенный анализ позволяет сделать относительно свойств скейлинга в критической точке GM и в ее окрестности.

Критический аттрактор GM

Предположим сначала, что параметры исходного отображения выбраны точно соответствующими критической точке GM. Тогда, согласно результатам PГ-анализа, операторы эволюции в критической точке за интервалы времени, даваемые числами Фибоначчи F_m , определяются универсальной функцией, и при этом на каждом очередном шаге m пересчет масштаба динамической переменной производится на фактор $\alpha = -1.28857\dots$. Отсюда следует, что структура критического аттрактора в окрестности кубической точки перегиба должна воспроизводить себя при указанном изменении масштаба.

Попытка проиллюстрировать это свойство скейлинга на обычной итерационной диаграмме оказывается не очень удачной: траектория плотно заполняет критический аттрактор из-за присущей квазипериодической динамике эргодичности, и детали структуры становятся неразличимы. Используем поэтому диаграмму, выполненную в специальной технике кодирования тонами серого цвета (рис. 10). При выводе каждой точки на экран компьютера число, задающее яркость в данном пикселе, увеличивается на единицу. Более темные области на диаграмме соответствуют большему относительному времени пребывания, а более светлые – редкому посещению. По существу, картина отражает распределение инвариантной меры на критическом аттракторе.

Если выделить фрагмент картины вблизи точки перегиба, то можно убедиться, что структура полос в нем воспроизводит себя при изменении масштаба на фактор α (с изменением ориентации, поскольку масштабный фактор отрицателен).

Таким образом, фрактальные свойства критического аттрактора на пороге разрушения квазипериодичности проявляются в распределении на нем инвариантной меры. Эту меру можно исследовать с помощью следующего приема. Рассмотрим отображение окружности на себя, состоящее в повороте на фиксированный угол

$$y_{n+1} = y_n + w \pmod{1}, \quad (27)$$

где $w = (5^{1/2} - 1)/2$, и попытаемся найти такую функцию $\phi(y)$, чтобы соотношение $x_n = \phi(y_n)$ в точности давало последовательность итераций синус-отображения

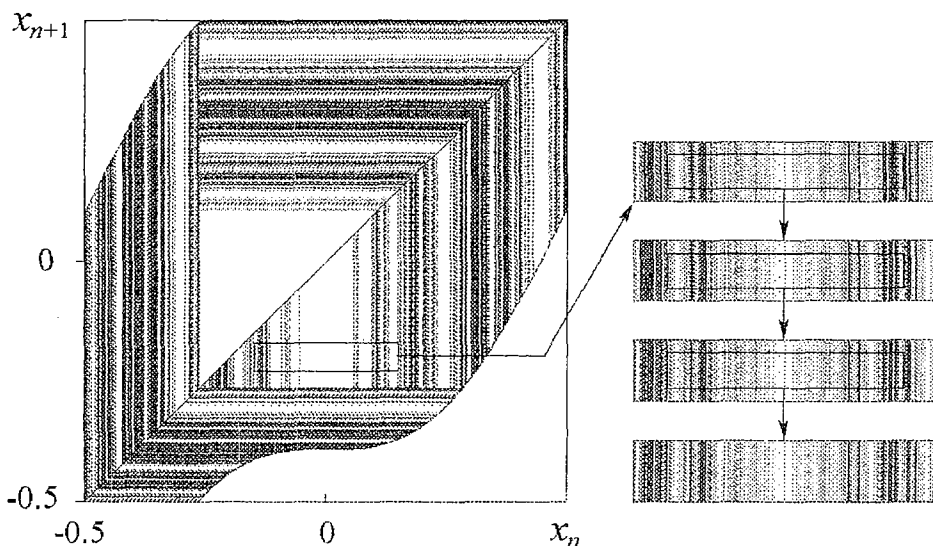


Рис. 10. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры на аттракторе отображения окружности в критической точке GM. При выводе каждой точки на экран компьютера число, кодирующее яркость в данном пикселе, увеличивается на единицу. Вставка показывает фрагмент изображения в окрестности точки перегиба отображения окружности и результат последовательного увеличения с изменением масштаба от уровня k уровню в α раз

окружности в критической точке GM. Функции $x=\varphi(y)$ и $y=\varphi^{-1}(x)$ будут определять замену, переводящую отображение поворота в критическое отображение окружности и обратно. Для y инвариантная мера отвечает, очевидно, равномерному распределению на единичном интервале $[0,1]$. Соответственно, плотность распределения для x будет получаться как $\rho(x)=\int \delta(x-\varphi(y))dy$.

График функции $\varphi(y)$ можно построить численно следующим образом: стартовав из точки $x=0, y=0$, будем итерировать одновременно критическое отображение окружности (8) и отображение поворота (27), откладывая получаемые пары величин в координатах (y,x) . Полученный таким образом график показан на рис. 11, и он выглядит как фрактальная кривая. Чтобы убедиться в наличии масштабного подобия, выделим фрагмент кривой в окрестности точки $(0,0)$. При пересчете масштаба по оси x на фактор α и по оси y на фактор $\beta=-(5^{1/2}+1)/2$ картина воспроизводит себя тем с большей точностью, чем глубже уровень разрешения.

Для анализа критического аттрактора можно привлечь мультифрактальный формализм [50, 51]. Построим последовательность x_n , порождаемую критическим отображением окружности при старте из $x_0=0$ для $n=1,2,\dots,F_{m+1}$, где F_{m+1} – некоторое достаточно большое число Фибоначчи. Пусть l_n обозначает длину интервала между точками x_n и $x_{n+F_{m-1}}$, вычисленную по модулю 1. Каждому интервалу $l_n, n=1,\dots,F_m$ припишем одинаковую меру (вероятность) $p=1/F_m$. Далее определим суммы вида

$$\Gamma_{q\tau}^{(m)} = \sum_{i=1}^{F_m} p^q |l_i|^\tau = F_m^{-q} \sum_{i=1}^{F_m} l_i^{-\tau} \quad (28)$$

и потребуем, чтобы при $k \rightarrow \infty$ они не убывали до нуля и не увеличивались до бесконечности. Для этого полагаем

$$q(\tau) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\log \Gamma_{q\tau}^{(m)} / \log F_m). \quad (29)$$

Имея функцию $q(\tau)$, строим график обобщенной размерности как зависимость

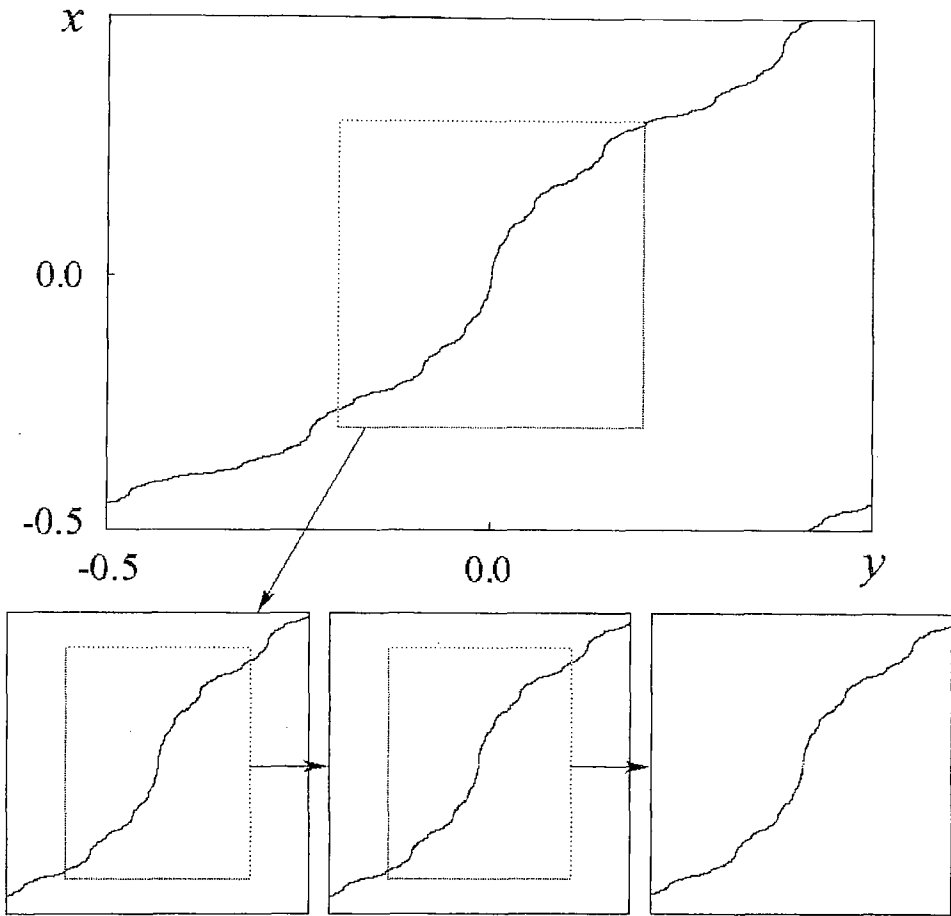


Рис. 11. Построенный численно график функции $x=\varphi(y)$, которая определяет замену, приводящую критическое отображение окружности к отображению поворота. Для иллюстрации свойства скейлинга, присущего этой фрактальной кривой, фрагмент графика воспроизводится на нескольких последовательных шагах пересчета масштаба по оси x на фактор $\alpha=-1.28857$ и по оси y на фактор $\beta=-(5^{1/2}+1)/2$

между величинами $q=q(\tau)$ и $D(q)=\tau/(q-1)$, а также скейлинг-спектр как зависимость между $\alpha=d\tau/dq$ и $f=\alpha q-\tau$ (рис. 12).

Как известно, $D(0)$ представляет собой размерность Хаусдорфа. Согласно результатам вычислений, в данном случае она равна 1. Так и должно быть, поскольку существует непрерывная замена, сводящая критическую динамику к отображению поворота (27). Однако критический аттрактор все же является фракталом, о чем говорит наличие нетривиальных дробных информационной и корреляционной размерностей $D(1)=0.9220$ и $D(2)=0.8664$. При $q \rightarrow \pm\infty$ имеем $D(-\infty)=\log w^{-1}/\log|\alpha|=1.8980$ (максимальная размерность) и $D(\infty)=\log w^{-1}/\log|\alpha|^3=-0.6326$ (минимальная размерность). Скейлинг-спектр располагается в интервале изменения α от $D(\infty)$ до $D(-\infty)$ и имеет экстремум, равный величине хаусдорфовой размерности аттрактора $f_{\max}=D(0)=1$.

Перейдем к обсуждению спектра Фурье критического аттрактора. Поскольку переменная x имеет смысл фазы, то все физически значимые величины должны зависеть от нее периодически. Следовательно, мы должны интересоваться спектральным составом не самой по себе последовательности x_n , а последовательностей вида $s_n=F(x_n)$, где F – некоторая гладкая функция периода 1.

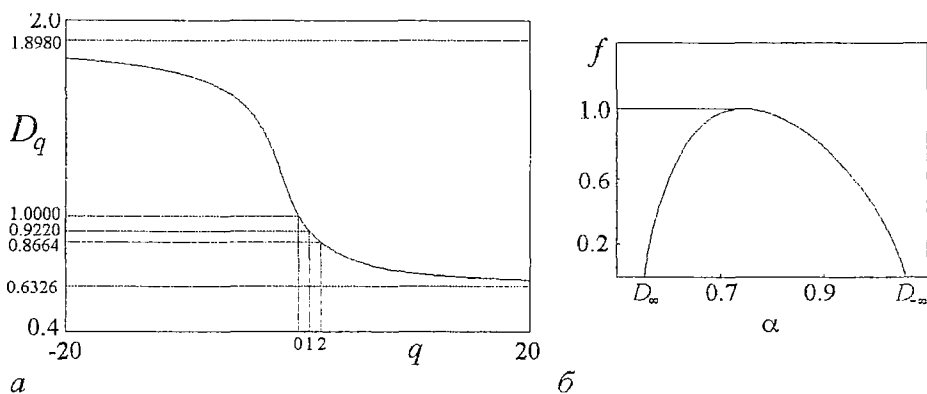


Рис. 12. Спектр обобщенных размерностей (а) и скейлинг-спектр (б) для критического аттрактора отображения окружности в точке GM

Для практического построения спектра возьмем близкое к критическому, но не равное ему значение параметра r в отображении окружности, так чтобы при $k=1$ реализовался стартующий из $x=0$ цикл с периодом, равным достаточно большому числу Фибоначчи, скажем, $N=F_{17}=1597$. Далее вычисляем амплитуды компонент Фурье стандартным образом

$$c_m = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} F(x_n) \exp(-2\pi i m n / N). \quad (30)$$

При этом $f=m/N$ есть частота m -ой компоненты, а квадрат модуля коэффициента – ее интенсивность $S(f)=S(m/N)=|c_m|^2$. Что касается функции F , то ее зададим просто в виде $F(x)=\sin 2\pi x$.

На рис. 13, а спектр показан в том виде, который обычно используется в экспериментальных исследованиях: по оси абсцисс отложена частота, а по оси

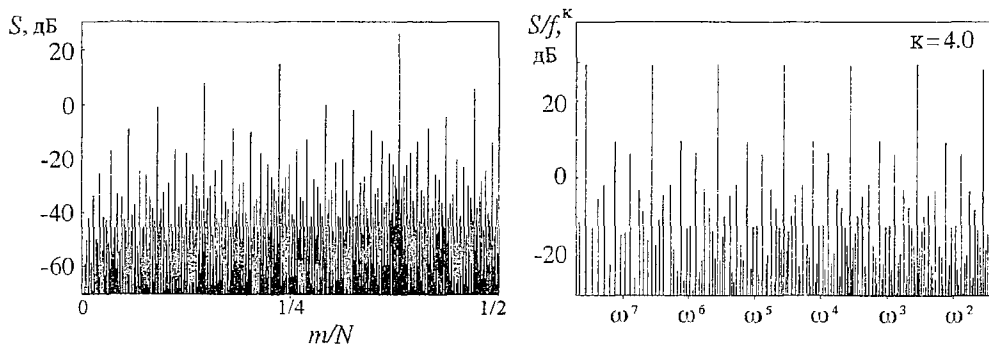


Рис. 13. Спектры Фурье для критической динамики отображения окружности (аппроксимация циклом периода $N=F_{17}=1597$). На левой диаграмме использован логарифмический масштаб по оси амплитуд и обычный пропорциональный по оси частот. На правой диаграмме использован логарифмический масштаб по обеим осям, и при этом спектральные интенсивности отнесены к f^k , где показатель $k \approx 4.0$ подобран эмпирически, $\omega=(5^{1/2}-1)/2$

ординат – амплитуда компонент в логарифмическом масштабе $S(\text{дБ})=10 \lg |c_m|^2$. Чтобы сделать видимыми присущие спектру свойства подобия, используем двойной логарифмический масштаб (рис. 13, б). Как можно заметить, относительная высота и взаимное расположение пиков воспроизводят друг друга с правильной периодичностью по оси логарифма частот.

Скейлинг на критической линии

Выведем отображение из критической точки изменением параметра расстройки r , оставив величину k неизменной и равной единице. При этом

отображение сохраняет кубическую точку перегиба с нулевой первой производной в ней. В решении линеаризованного уравнения РГ (25) коэффициент C_1 будет пропорционален $r-r_{GM}$, а коэффициент C_2 будет нулевым: наличие добавки $h_2(x)$ привело бы к «разрушению» кубической точки перегиба и уходу с критической линии. Таким образом, асимптотическое выражение для перенормированного оператора эволюции за F_m шагов принимает вид

$$g_m(x) = g(x) + \text{const}(r-r_{GM})\delta_1^m h_1(x). \quad (31)$$

Если уменьшить отклонение от критической точки в $\delta_1 = -2.8336\dots$ раз, то форма оператора эволюции за F_{m+1} шагов будет такой же, какой она была для F_m шагов при старом значении параметра. Следовательно, характер динамики должен быть аналогичным, но с временным масштабом в $F_{m+1}/F_m = -w^{-1} = 1.6180\dots$ раз больше. Соответственно, ляпуновский показатель будет в такое же число раз меньше.

На рис. 14 сверху показан график зависимости ляпуновского показателя отображения окружности от параметра расстройки вдоль линии $k=1$. «Провалы» ниже нуля соответствуют областям периодичности, то есть языкам Арнольда, а множество точек, где показатель нулевой, — множеству сохранившихся на критической линии квазипериодических режимов. В нижней части рисунка представлены диаграммы, показывающие детали структуры в окрестности точки $r=r_{GM}$, так что каждая последующая представляет собой увеличенный фрагмент предыдущей. При этом масштаб по оси ляпуновского показателя пересчитывается в w^{-1} раз, а по оси параметра r — в δ_1 раз относительно критической точки $r=r_{GM}$. Можно видеть, что вид графиков хорошо воспроизводится на разных уровнях разрешения. На более глубоких уровнях степень соответствия, как можно ожидать, будет еще выше.

Другим проявлением скейлинга служит масштабное подобие полной чертовой лестницы в окрестности той ее точки, где число вращения равно золотому среднему. Как известно, при переходе к аппроксимации золотого среднего очередной подходящей дробью погрешность уменьшается на фактор $v = (-w^{-2})$ (знак минус означает, что погрешность попеременно положительная или отрицательная). Это будет фактор скейлинга по вертикальной оси. По горизонтальной оси фактором скейлинга служит, как следует из (31), константа δ_1 . Если выделить фрагмент чертовой лестницы вблизи соответствующей точки и представить его с увеличением на указанные факторы по осям координат, то конфигурация ступеней воспроизведет себя (рис. 15).

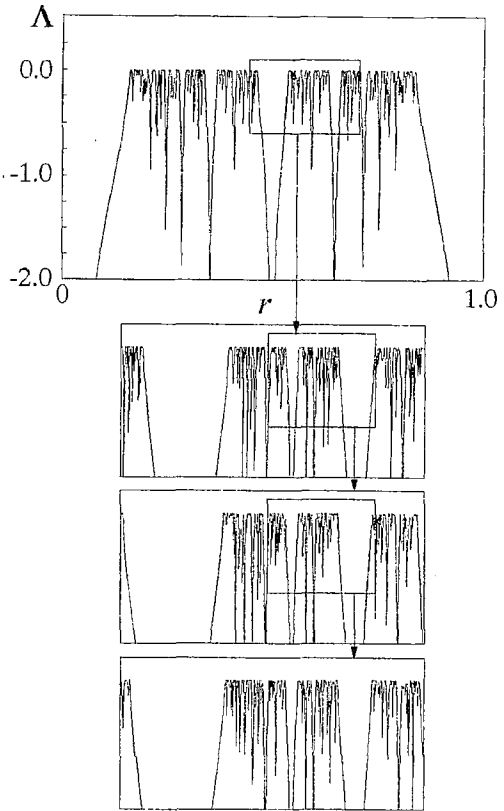


Рис. 14. Вверху — график зависимости ляпуновского показателя отображения окружности от параметра r при $k=1$. Каждый следующий рисунок представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. Пересчет масштаба по оси параметра r производится на фактор $\delta_1 = -2.8336\dots$, а по оси ляпуновского показателя — в $w^{-1} = 1.6180\dots$ раз

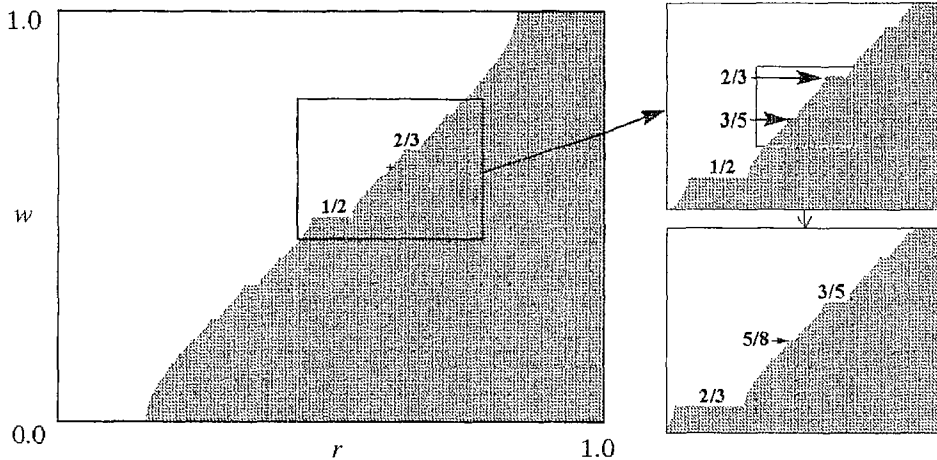


Рис. 15. Иллюстрация скейлинга чертовой лестницы в окрестности точки, где число вращения равно золотому среднему. Структура воспроизводит себя при пересчете масштаба на фактор $\delta_1 = -2.8336\dots$ по горизонтали и $\nu = (-w^{-2}) = -2.6180\dots$ по вертикали

Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров

Как следует из результатов РГ-анализа, вблизи критической точки GM выражение для оператора эволюции, получаемое при многократных итерациях РГ-преобразования, зависит от двух параметров – коэффициентов C_1 и C_2 (см. (25)). Если построить карту динамических режимов на плоскости этих параметров, то она должна обладать свойством *двумерного скейлинга*. Действительно, одновременный пересчет параметров по правилу $C_1' = C_1/\delta_1$, $C_2' = C_2/\delta_2$ и увеличение индекса m на единицу оставляет форму оператора эволюции неизменной. Поэтому в точке (C_1, C_2) и в точке (C_1', C_2') будут существовать подобные режимы, отличающиеся масштабом времени – во второй точке он в $(5^{1/2}+1)/2$ раз больше. Поскольку мы не имеем явного соотношения, связывающего коэффициенты C_1 и C_2 с параметрами исходного отображения, задача построения системы координат, подходящей для иллюстрации скейлинга, должна быть решена численно с достаточной степенью точности.

В качестве начала координат естественно выбрать саму критическую точку GM. Координатная ось C_1 должна быть направлена вдоль критической линии $k=1$, поскольку именно собственная функция h_1 отвечает возмущению, не разрушающему кубическую точку перегиба. Что касается второй координатной линии, то она, как можно сообразить, должна идти вдоль кривой на плоскости (r, k) , отвечающей постоянному числу вращения – золотому среднему (рис. 16). Эту кривую можно найти численно. Используем аппроксимацию полиномом:

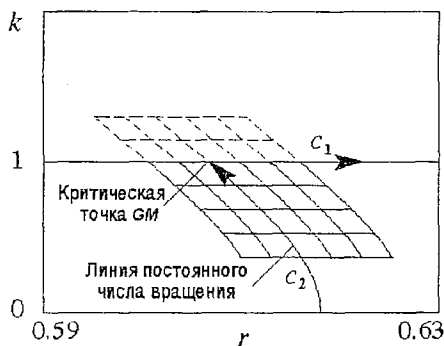


Рис. 16. К выбору «скейлинговых координат» вблизи критической точки GM для отображения окружности

где $\Delta r = r - r_{GM}$, $\Delta k = k - 1$. Тогда численные расчеты дают

$$\Delta r = ac_2 + bc_2^2 + o(c_2^2), \quad \Delta k = c_2, \quad (32)$$

где $\Delta r = r - r_{GM}$, $\Delta k = k - 1$. Тогда численные расчеты дают

$$a \cong -0.01749, \quad b \cong -0.00148. \quad (33)$$

С учетом сделанных замечаний, связь между «скейлинговыми координатами»

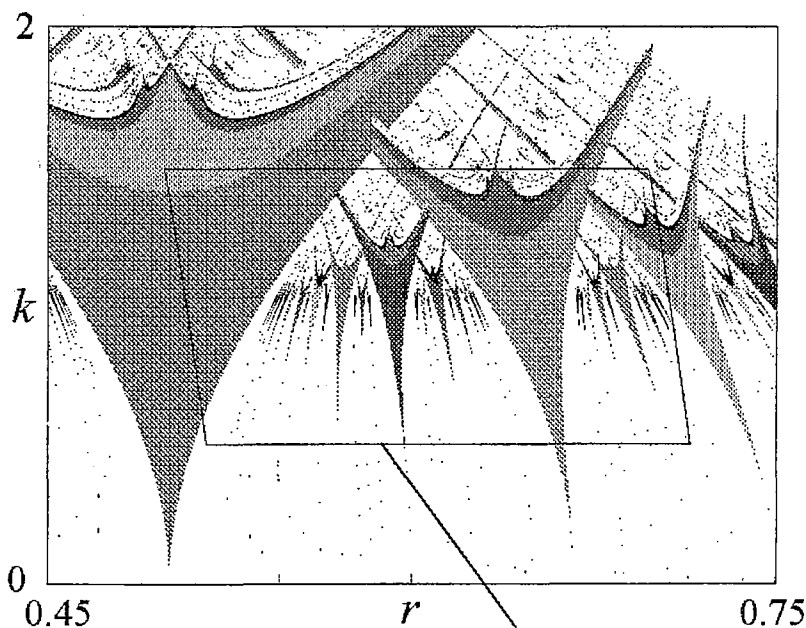


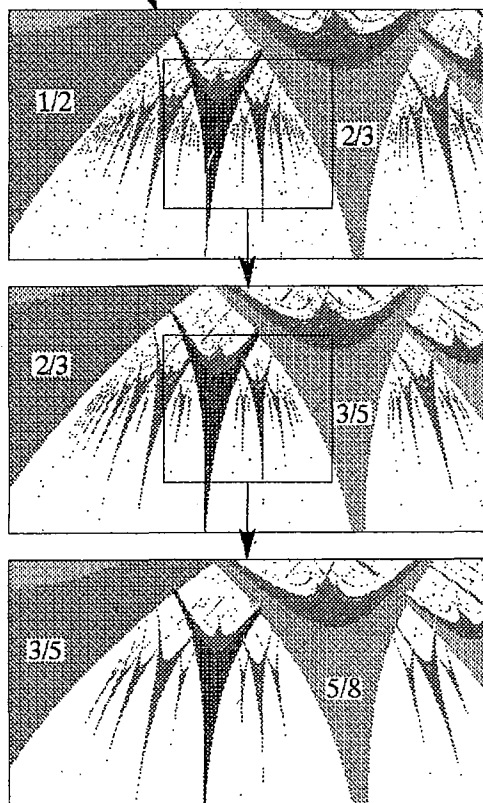
Рис. 17. Иллюстрация двумерного скейлинга картины языков Арнольда на карте динамических режимов отображения окружности вблизи критической точки GM. Криволинейный четырехугольник, в центре которого располагается критическая точка, образован координатными линиями $c_1 = \pm 0.1$ и $c_2 = \pm 0.5$. Попавшая внутрь этого четырехугольника часть плоскости параметров показана отдельно в координатах (c_1, c_2) . Пересчет масштаба на вставках от уровня к уровню производится на факторы $\delta_1 = -2.8336\dots$ и $\delta_2 = 1.6604\dots$, соответственно, по горизонтали и вертикали. Цифрами в основных языках Арнольда указаны числа вращения

(c_1, c_2) и параметрами исходного отображения можно определить как

$$\Delta r = c_1 + ac_2 + bc_2^2, \quad \Delta k = c_1. \quad (34)$$

Что принципиально, замена переменных, приводящая к скейлинговым координатам, получилась нелинейной. При этом учет квадратичных членов разложения Тейлора существен, а последующих – нет! Это связано с конкретным, присущим критической точке GM, соотношением факторов δ_1 и δ_2 . Чтобы разъяснить данный момент,

представим себе, что мы рассматриваем серию картинок, показывающих окрестность критической точки на плоскости параметров во все меньших и меньших масштабах, так что $c_1 \propto \delta_1^{-m}$, $c_2 \propto \delta_2^{-m}$. Если мы пренебрегаем коэффициентом разложения в ряд Тейлора при c_2^p , то в коэффициент при первом собственном векторе в формуле (25) будет внесена погрешность порядка δ_2^{-pm} .



Полный же вклад первого собственного вектора с учетом его нарастания по закону δ_1^m будет порядка $\delta_1^m \delta_2^{-pm}$. Этот вклад не опасен и исчезает при $m \rightarrow \infty$, если $|\delta_1| < |\delta_2|^p$. В нашем случае $\delta_1 = -2.83361$ и $\delta_2 = 1.66044$, так что $|\delta_2| < |\delta_1|$ и $|\delta_2|^2 < |\delta_1|$, но $|\delta_2|^p > |\delta_1|$ при $p \geq 3$. Следовательно, в (34) достаточно учитывать линейный и квадратичный члены по c_2 .

Рис. 17 иллюстрирует двумерный скейлинг картины языков Арнольда вблизи критической точки GM. На верхней диаграмме по осям координат отложены параметры исходного отображения, r и k . Криволинейный четырехугольник, в центре которого располагается критическая точка, образован координатными линиями $c_1 = \pm 0.1$ и $c_2 = \pm 0.5$. Часть плоскости параметров внутри этого четырехугольника показана отдельно, теперь уже в координатах (c_1, c_2) , а затем воспроизведена с пересчетом масштаба на факторы δ_1 и δ_2 по соответствующим осям координат. Поскольку фактор δ_1 отрицателен, картина инвертируется по горизонтали при каждом масштабном пересчете. Обратите внимание, как при этом *перенумеровываются языки Арнольда*: если число вращения было F_{m-1}/F_m , то для аналогичного языка на следующей картинке оно оказывается равным F_m/F_{m+1} .

Заключение

Как и универсальность Фейгенбаума, имеющая место при удвоениях периода, критическая точка GM может встречаться не только в одномерных отображениях, но и в многомерных нелинейных диссипативных системах при переходе к хаосу через квазипериодичность. С общей точки зрения, этот тип критического поведения следует рассматривать как ситуацию *коразмерности два*. Это значит, что она будет возникать в некоторой точке, если пространство параметров двумерное, на линии, если оно трехмерное и т.д. Действительно, чтобы реализовать критическую ситуацию, нужно обеспечить подбором параметров равенство нулю двух коэффициентов в (25); соответствующая система уравнений $C_1(A, B, C, \dots) = 0$ и $C_2(A, B, C, \dots) = 0$ и определит расположение критической точки, линии или поверхности в пространстве параметров исходной задачи (A, B, C, \dots) . В отличие от фейгенбаумовской критической точки, имеющей коразмерность один, критическое поведение типа GM труднее обнаружить и наблюдать. Тем не менее, в литературе описаны вполне успешные эксперименты, в которых удавалось реализовать критическое поведение типа GM, в частности, при конвекции Рэлея – Бенара, в электронных системах и др. Были оценены масштабные факторы α и δ , получены спектры Фурье и даже скейлинг–спектры в разумном соответствии с ожидаемыми на основании анализа одномерного отображения окружности (см. [52–54]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 00-02-17509 и Минобразования РФ, грант № 97-0-8.3-88.

Библиографический список

1. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.
2. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г.Синяя и Л.П.Шильникова, М.: Мир, 1981. С. 117.
3. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Attractors on an N-torus. Quasiperiodicity versus chaos // Physica. 1985. Vol. D15. P. 354.
4. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica. 1984. Vol. D13. P. 261.
5. Kim S-H., Ostlund S. Simultaneous rational approximations in the study of dynamical systems // Phys. Rev. 1986. Vol. A34. P. 3426.

6. *Rockmore D., Siegel R., Tongring N., Tresser C.* An approach to renormalization on the n -torus // *CHAOS*. 1991. Vol. 1, № 1. P. 25.
7. *Baladi V., Rockmore D., Tongring N., Tresser C.* Renormalization on the n -dimensional torus // *Nonlinearity*. 1992. Vol. 5. P. 1111.
8. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Physica*. 1991. Vol. D49. P. 387.
9. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *CHAOS*. 1991. Vol. 1, № 1. P. 20.
10. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
11. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
12. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results // *Physica*. 1982. Vol. D5. P. 405.
13. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // *Physica*. 1982. Vol. D5. P. 370.
14. *Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49, № 2. P. 132.
15. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica*. 1983. Vol. D8, № 3. P. 303.
16. *Daido H.* On the scaling behavior in a map of a circle onto itself // *Progr. Theor. Phys.* 1982. Vol. 68, № 6. P. 1935.
17. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in the circle map // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 1637.
18. *Bohr T., Bak P., Jensen M.H.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. II. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps. *Phys. Rev.* 1984. Vol. A30. P. 1970.
19. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. 1. Circle maps. *Phys. Rev.* 1984. Vol. A30. P. 1960.
20. *Bohr T., Gunaratne G.* Scaling for supercritical circle maps: numerical investigation of the onset of bistability and period doubling // *Phys. Lett.* 1985. Vol. A113. P. 55.
21. *Синай Я.Г., Ханин К.М., Шур Л.Н.* Новый подход к построению неподвижных точек ренормгруппы в динамических системах // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1986. Vol. 29, № 9. С. 1061.
22. *Rand D.* Fractal bifurcation sets, renormalization strange sets, and their universal invariants // *Proc. Roy. Soc. (London)*. 1987. Vol. A413. P. 45.
23. *Wang X.W., Mainieri R., Lowenstein J.H.* Circle map scaling in a two-dimensional setting // *Phys. Rev.* 1989. Vol. A40, № 9. P. 5382.
24. *Kim S., Ostlund S.* Universal scaling in circle map // *Physica*. 1989. Vol. D39, № 2-3. P. 365.
25. *Hu B., Valinia A., Piro O.* Universality and asymptotic limits of the scaling exponents in circle maps // *Phys. Lett.* 1990. Vol. A144, № 1. P. 7.
26. *Cvitanovic P., Gunaratne G.H., Vinson M.J.* On the mode-locking universality for critical circle map. *Nonlinearity* 3, 1990, 873.
27. *Fourcade B., Tremblay A.-M.S.* Universal metric properties of circle maps from the point of view of critical phenomena. I. Phenomenology // *J. Stat. Phys.* 1990. Vol. 61, № 3-4. P. 607.
28. *Fourcade B., Tremblay A.-M.S.* Universal metric properties of circle maps from the point of view of critical phenomena. II. Analytical results // *J. Stat. Phys.* 1990. Vol. 61, № 3-4. P. 639.
29. *Christos G.A., Chorghetta T.* Trajectory scaling functions for the circle map and the quasi-periodic route to chaos // *Phys. Rev.* 1991. Vol. A44, № 2. P. 898.
30. *Khanin K.M.* Universal estimates for critical circle mappings // *CHAOS*. 1991. Vol. 1, № 2. P. 181.

31. *Pikovsky A.S., Zaks M.A.* On the global scaling properties of mode-lockings in a critical circle map // *Phys.Lett.* 1991. Vol. A155, № 6–7. P. 373.
32. *Pikovsky A.S., Zaks M.A.* Farey level separation in mode-locking structure of circle mappings // *Physica.* 1992. Vol. D59. P. 255.
33. *Ketoja J.A.* Renormalization in a circle map with two inflection points // *Physica.* 1992. Vol. D55, № 1–2. P. 45.
34. *MacKay R.S.* Renormalization of bicritical circle maps // *Phys. Lett.* 1994. Vol. A187. P. 391.
35. *Campbell D.K., Galeera R., Tresser C., Uherka D.R.* Piecewise linear models for the quasiperiodic transition to chaos // *CHAOS.* 1996. Vol. 6, № 2. P. 121.
36. *De Spinadel V.W.* On characterization of the onset of chaos // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1997. Vol. 8, № 10. P. 1631.
37. *Ketoja J.A., Satija I.I.* Harper equation, the dissipative standard map and strange nonchaotic attractors: Relationship between an eigenvalue problem and iterated maps // *Physica.* 1997. Vol. D109, № 1–2. P. 70.
38. *Dixon T.W., Kenny B.G.* Transition to criticality in circle maps at the golden mean // *J.Math.Phys.* 1998. Vol. 39, № 11. P. 5952.
39. *Dixon T.W., Gherghetta T., Kenny B.G.* Universality in the quasiperiodic route to chaos // *CHAOS.* 1996. Vol. 6, № 1. P. 32.
40. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19. P. 1, 25.
41. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН.* 1983. Vol. 141, №2. С. 343.
42. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // *УМН.* 1984. Vol. 39, № 3. С. 3.
43. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть I. Сценарий Фейгенбаума // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Т. 1, № 1–2, 15.
44. *Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D.* *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.* Springer-Verlag, N.Y., Berlin, 1992.
45. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O.* Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: renormalization group, universality and scaling // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1993. Vol. 3, № 4. P. 943.
46. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O.* Multi-parameter criticality in Chua's circuit at period-doubling transition to chaos // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, № 1. P. 119.
47. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем.* Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999, 368 с.
48. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica.* 1997. Vol. D109. P. 91.
49. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // *Регулярная и хаотическая динамика.* 1997. Т. 2, № 3–4. С. 90.
50. *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // *Phys. Rev.* 1986. Vol. A33. P. 1141.
51. *Beck C., Schlögl F.* *Thermodynamics of chaotic systems* // Cambridge Univ. Press, 1993, 281 p.
52. *Stavans J., Helsot F., Libchaber A.* Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid // *Phys.Rev.Lett.* 1985. Vol. 55. P. 595.
53. *Леву Б.Г.* Новый глобальный фрактальный формализм описывает различные сценарии перехода к хаосу // *Физика за рубежом.* Вып. 87. М.: Мир, 1987, 263 с.

54. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

Саратовский государственный
университет
Институт радиотехники и
электроники РАН,
Саратовское отделение

Поступила в редакцию 1.06.2000

SCALING AT THE TRANSITION TO CHAOS VIA DESTRUCTION OF QUASIPERIODIC MOTION AT THE GOLDEN MEAN FREQUENCY RATIO

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.Yu. Ivankov, A.A. Osin

The paper reproduces basic results concerning transition to chaos via destruction of quasiperiodic motion in one-dimensional circle map. For the golden mean rotation number we present the renormalization group (RG) analysis, consider structure of the critical attractor, give illustrations of scaling in the parameter space of the model map.

We outline the fact that the two-parameter scaling can be observed only in a specially chosen local coordinates connected with the parameters of the original map via a nonlinear variable change; its form must account the concrete relation between two relevant eigenvalues of the linearized RG equation.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998). Соросовский профессор (2000), научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СО ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и СО ИРЭ РАН. Автор

нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и двух популярных книг.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений при переходе к хаосу. Занимается также исследованиями в области квантового хаоса. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Соавтор двух монографий и одной популярной книги. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники, радиофизики и факультета нелинейных процессов СГУ. Соросовский доцент (1998). Соросовский профессор (2000). Член американского физического общества. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su.



Иваньков Николай Юрьевич – родился в Саратове (1977). Закончил Колледж прикладных наук Саратовского университета (1998), в настоящее время – аспирант второго года обучения факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – физика нелинейных динамических систем.



Осин Алексей Андреевич – родился в Саратове (1979). Окончил лицей Колледжа прикладных наук СГУ. Участник Всероссийской олимпиады по физике. Студент пятого курса факультета нелинейных процессов СГУ. Участвовал в работах по грантам РФФИ и Минобрнауки РФ. Занимается компьютерным исследованием свойств скейлинга, характерных для перехода к хаосу через квазипериодические движения.



О ПРОБЛЕМЕ ГРАНИЦЫ ХАОСА И ТИПИЧНЫХ СТРУКТУРАХ НА ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ НЕАВТОНОМНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА

А.П. Кузнецов, А.В. Савин

Представлен ряд карт ляпуновских показателей для неавтономных систем с удвоениями периода под непериодическим воздействием. С их помощью обсуждается структура границы хаоса, обнаружены новый тип ветвящихся структур, характерный для случая воздействия самоподобных сигналов, а также явление кризиса критичности. Продемонстрирован скейлинг на ляпуновских картах в случае воздействия бинарного шума.

Введение

Развитие представлений о динамическом хаосе не только обогатило фундаментальные знания о свойствах нелинейных систем, но и дало новые методы их исследования. Одной из наиболее ценных и в то же время легко доступных характеристик сложных колебательных режимов стал ляпуновский показатель. Его положительные значения служат критерием хаотической динамики, а зависимость от параметра может быть использована для идентификации сценария перехода к хаосу, оценки сложности режимов, иллюстраций скейлинга (подобия) на границе хаоса и др. В работе [1] предложена весьма простая идея представления результатов двухпараметрического компьютерного исследования нелинейных систем в виде своего рода «карт» ляпуновских показателей, на которых каждая точка плоскости параметров окрашивается оттенком серого цвета в соответствии с его величиной. В этой работе представлена целая коллекция весьма эффектных подобных карт (названных автором «ляпуновскими пространствами»), относящихся к логистическому отображению при различных периодических воздействиях. Эти иллюстрации поражают тонкой и изысканной организацией даже воображение читателя, привыкшего к современным компьютерным иллюстрациям в области фракталов и хаоса. Однако они оказываются весьма удобными и для исследовательских целей наряду с традиционным бифуркационным анализом и ставшим уже весьма популярным методом построения карт динамических режимов, когда оттенком серого (или цветом) отмечены области с определенным периодом колебаний. Ляпуновские карты не только дополняют такие иллюстрации, но оказываются даже более эффективными в ряде случаев. Прежде всего это относится к весьма интенсивно изучаемым сейчас ситуациям непериодического внешнего воздействия, когда периодических режимов нет вообще и этот метод не имеет альтернативы. Он позволяет визуализировать

режимы максимальной устойчивости, которым отвечает большой по абсолютной величине отрицательный ляпуновский показатель и которые удобны и важны при анализе свойств отображений. (Достаточно сказать, что Фейгенбаум при обосновании своего знаменитого закона сходимости циклов удвоенных периодов к критической точке на границе хаоса существенно использовал свойства именно циклов максимальной устойчивости.) Наконец, он автоматически визуализирует тонкие структуры у порога хаоса, отвечающие очень долгопериодическим режимам, которые весьма непросто выявить бифуркационным анализом и которые не наглядны на картах динамических режимов.

Метод построения карт ляпуновских показателей уже успешно использовался в ряде работ. Так, в [2] в его терминах проведено детальное обсуждение структуры языков синхронизации и их внутреннего устройства для отображения окружности, в [3] даны иллюстрации скейлинга для логистического отображения при квазипериодическом воздействии и др. В настоящей статье представлены некоторые иллюстрации работоспособности этого метода в случае воздействия непериодических сигналов на канонические модельные дискретные отображения нелинейной динамики с удвоениями периода. В центре внимания свойства границы хаоса и типичные структуры на плоскости параметров. Показано, что в случае воздействия иерархически организованных сигналов неавтономные системы демонстрируют весьма интересные свойства.

1. Исследуемые системы

Рассмотрим следующие «эталонные» системы: логистическое отображение

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \epsilon y_n \quad (1)$$

и двухпараметрическое кубическое отображение

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 + \epsilon y_n. \quad (2)$$

Здесь x – динамическая переменная; λ , a , b – управляющие параметры; ϵ – амплитуда внешнего сигнала y_n .

Физически в силу известного свойства универсальности в качестве автономной может выступать любая система с удвоениями периода. Так, это может быть нелинейный осциллятор любой природы. В случае импульсного воздействия он описывается уравнением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_n (c + \epsilon y_n) \delta(t - nT_0). \quad (3)$$

Как показано в [4], динамика такого осциллятора может быть приближенно сведена к двумерному отображению вида

$$z_{n+1} = A_n + Bz_n \exp(i|z_n|^2 + \psi),$$

где

$$A_n = [(c + \epsilon y_n) / \omega_0] \{3/8\beta [1 - \exp(-\gamma T)] / (\omega_0 \gamma)\}^{1/2}, \quad B_n = \exp(-\gamma T/2), \quad \psi = \omega_0 T_0. \quad (4)$$

Отображение (4), в свою очередь, в определенной области параметров сводится к одномерному

$$\theta_{n+1} = \lambda_n \cos(\theta_n + \varphi_n), \quad \text{где } \lambda_n = 2A_n B, \quad \varphi_n = A_n^2 + \psi. \quad (5)$$

(Подробное обсуждение моделей (3)–(5) дано в [4].)

При фиксированном периоде воздействия T_0 в автономном режиме все эти три типа моделей демонстрируют удвоения периода. Кроме того, в силу расположения рядом максимума и минимума, одномерное отображение (5)

характеризуется устройством плоскости параметров (λ, φ) аналогичным кубическому отображению (2).

Заметим, что (4) представляет собой также и известное отображение Икеды, описывающее возбуждаемый лазером кольцевой оптический резонатор со средой с фазовой нелинейностью [5], а (5) – акустооптическую систему, описанную в [6]. Таким образом, модели (1) и (2) имеют соответствующие физические аналоги.

В качестве внешнего сигнала u_n мы выберем следующие варианты. Во-первых, это сигналы в виде бинарных последовательностей, составленных из нулей и единиц, которые, однако, позволяют ввести в рассмотрение все основные качественно разные ситуации: порядок (периодические последовательности), шум (случайные последовательности) и промежуточные ситуации (самоподобные последовательности с иерархической организацией). Дополнительным аргументом в пользу бинарных последовательностей могут служить мотивы теории информации, широко оперирующей с двоичными кодами. Во-вторых, мы рассмотрим введенные в [7–9] и названные фрактальными иерархически организованные сигналы, для которых изображающая точка движется по двумасштабному канторову множеству.

Случаи периодических и шумовых воздействий традиционны для нелинейной динамики, а случай самоподобных последовательностей представляется достаточно новым. Какие еще есть мотивы для рассмотрения воздействий в виде иерархически организованных сигналов? Развитие нелинейной динамики за последние годы убедительно свидетельствует, что новый тип внешнего сигнала приводит к новым интересным феноменам. Так, изучение квазипериодического воздействия на систему с удвоениями периода привело к широкому и объемному исследованию странных нехаотических аттракторов [10,11]. Хаотические внешние сигналы ассоциируются с весьма широко представленной в литературе проблемой хаотической синхронизации (см. [11] и представленную там литературу). В случае воздействия одной системы с удвоениями на другую обнаружено бикритическое поведение на пороге гиперхаоса [12,13]. Следует также отметить, что в работе [14] описано устройство генератора фрактальных сигналов, так что соответствующие явления допускают и экспериментальное исследование.

2. Периодические сигналы

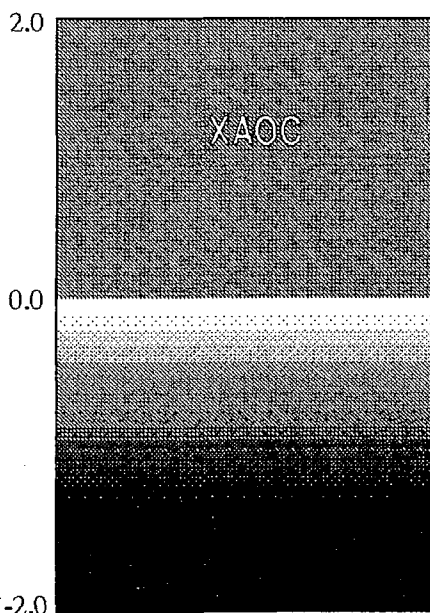
Ситуация чисто периодического сигнала достаточно тривиальна и используется нами только для демонстрации особенностей используемого метода и места представленных результатов. На рис. 1 для удобства восприятия дана цветовая палитра, с помощью которой на картах кодируется величина ляпуновского показателя

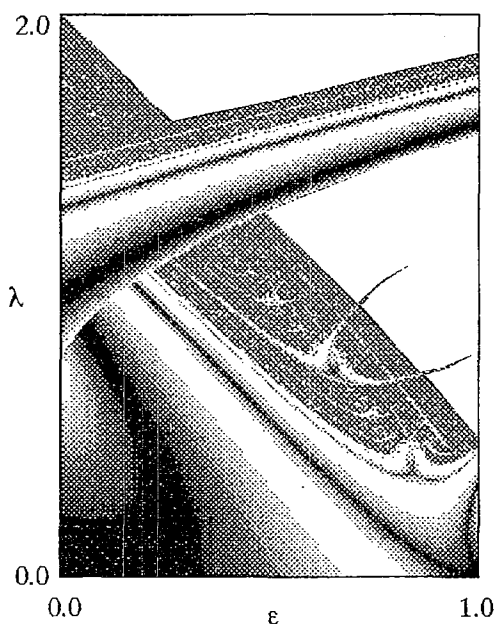
$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=1}^N \ln |df(x_i)/dx_i|. \quad (6)$$

В расчетах величина N выбиралась достаточно большой, так что вид карт не менялся при ее вариациях.

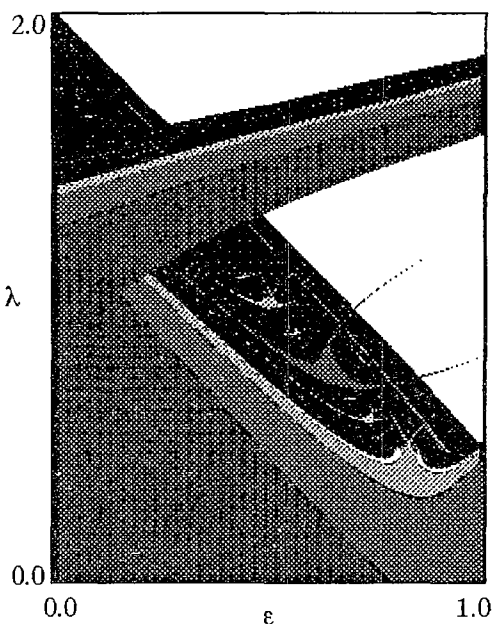
На рис. 2, а показана карта ляпуновского показателя для логистического отображения под действием 2-

Рис. 1. Соответствие значений показателя Ляпунова и оттенков серого цвета, принятое при построении карт ляпуновских показателей

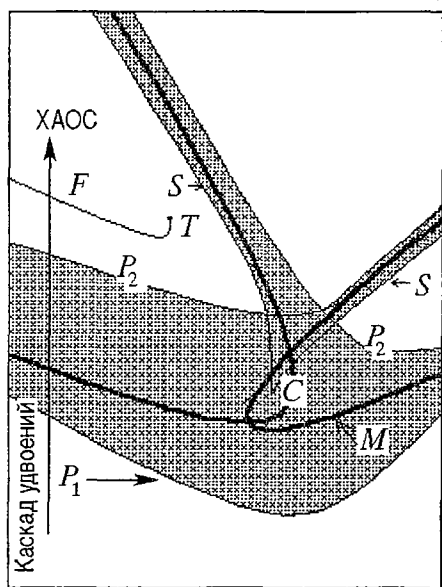




a



б



в

Рис. 2. *a* – карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием 2-периодического сигнала; *б* – карта динамических режимов для того же случая; *в* – характерные структуры на плоскости параметров. Заштрихована область crossroad area, образованная линиями складок S , сходящимися в точке сборки C , и линиями удвоений P_1 и P_2 . Линии циклов максимальной устойчивости M образуют характерную конфигурацию. Каскад удвоений завершается на фейгенбаумовской линии F , являющейся границей хаоса. Эта линия заканчивается в трикритической точке T

периодической бинарной последовательности вида $0, 1, 0, 1, \dots$ на плоскости амплитуда воздействия – управляющий параметр отображения. Для сравнения на рис. 2, *б* в тех же координатах и масштабах приведена карта динамических режимов, на которой оттенки серого цвета обозначают регулярные циклы фиксированных периодов. Эти рисунки демонстрируют известные черты устройства плоскостей парамет-

ров систем со сложной динамикой: гладкую границу хаотической области, характерную структуру областей устойчивости циклов и характерную конфигурацию линий циклов максимальной устойчивости. На рис. 2, *в* показано схематическое изображение взаимного расположения соответствующих объектов. Дадим к этим рисункам несколько комментариев. Структуры в виде областей устойчивости циклов (подобные заштрихованной на рис. 2, *в*) образованы линиями удвоений P_1 и P_2 , линиями жестких переходов S и содержат точку сборки C . К настоящему времени хорошо осознаны их значение как элементарных объектов на плоскости параметров и универсальность как для одномерных отображений, так и для нелинейных систем общего вида. Как можно заключить из анализа литературы, многие исследователи, по-видимому, «переоткрывали» для себя

подобные структуры, поэтому общепринятого в мировой литературе названия для них нет. Мы используем термин «crossroad area», отдавая дань работам французского математика Кристиана Мира, в которых наиболее глубоко исследованы такие (и подобные им) структуры и изучены их трансформации при вариации третьего параметра [15,16]. Внутри структуры crossroad area для одномерных отображений можно видеть характерные «петли» линий циклов максимальной устойчивости, которые пересекаются в точках, отвечающих суперустойчивым орбитам. На базе каждой ситуации crossroad area реализуется каскад удвоений, приводящий к гладкой фейгенбаумовской критической линии, являющейся границей хаоса (см. рис. 2, в). Вблизи нее наблюдается известный однопараметрический скейлинг (то есть подобие вдоль любой пересекающей ее линии) с универсальной константой $\delta=4.6692\dots$. Для одномерных отображений фейгенбаумовские линии обрываются в так называемых трикритических точках T (см. рис. 2, в), вблизи которых наблюдается уже двухпараметрический скейлинг (подобие «плоских» областей) с универсальными константами $\delta_1=2.8571\dots$ и $\delta_2=7.2847\dots$. Эти особенности плоскости параметров выявлены многими авторами и широко использовались и используются при анализе нелинейных систем (Chang et al. [17], Mackay et al. [18], Komuro et al. [19], Parlitz et al. [20, 21], Ringland et al. [22], Gallas et al. [23, 24]).

3. Шумовые сигналы

Перейдем теперь к случаю непериодических сигналов. На рис. 3 показана карта ляпуновских показателей системы (1) в тех же координатах и масштабах, когда внешний сигнал u_n является бинарным шумом. Мы видим, что четкие структуры бесследно исчезли, нет ничего, что напоминало бы ситуацию crossroad area. Режимы же максимальной устойчивости образовали бесформенные пятна с центрами на вертикальной оси $\epsilon=0$, локализованные вблизи соответствующих точек автономного отображения. Существенные трансформации претерпела и граница хаоса, которая стала теперь «диффузной»: область хаоса вторгается в область регулярных режимов в виде «снежной пелены», не имеющей четкого края.

Тем не менее на плоскости параметров логистического отображения (1) при воздействии бинарного шума можно наблюдать двухпараметрический скейлинг. В качестве центра подобия выберем критическую точку фейгенбаумовского перехода к хаосу автономного отображения: $\epsilon=0$, $\lambda=\lambda_c=1.4011552\dots$. Пересчет параметров произведем по следующему правилу:

$$\Delta\lambda \rightarrow \Delta\lambda/\delta, \quad \Delta\epsilon \rightarrow \Delta\epsilon/\mu.$$

Это отвечает тому, что некоторый выбранный прямоугольник растягивается в $\delta=4.669\dots$ раз по оси управляющего параметра λ и в $\mu=6.618\dots$ раз по оси амплитуды шума ϵ . Здесь μ – константа, относящаяся к шумовому воздействию и полученная методом ренормгруппы в [25]. Кроме того, цветовая палитра изменялась так, чтобы после преобразования подобия тот же цвет отвечал удвоенному

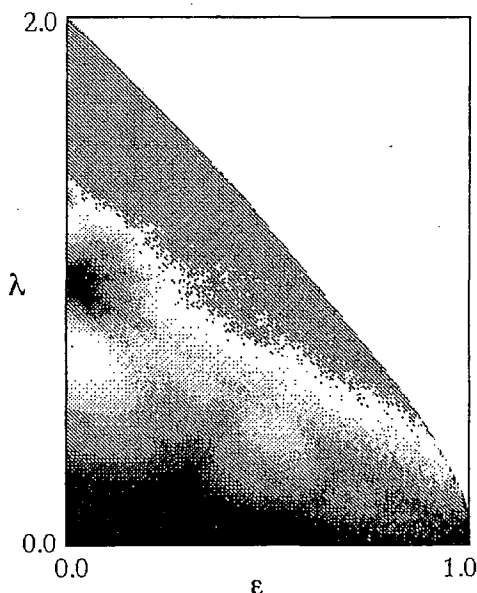


Рис. 3. Карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием бинарного шума

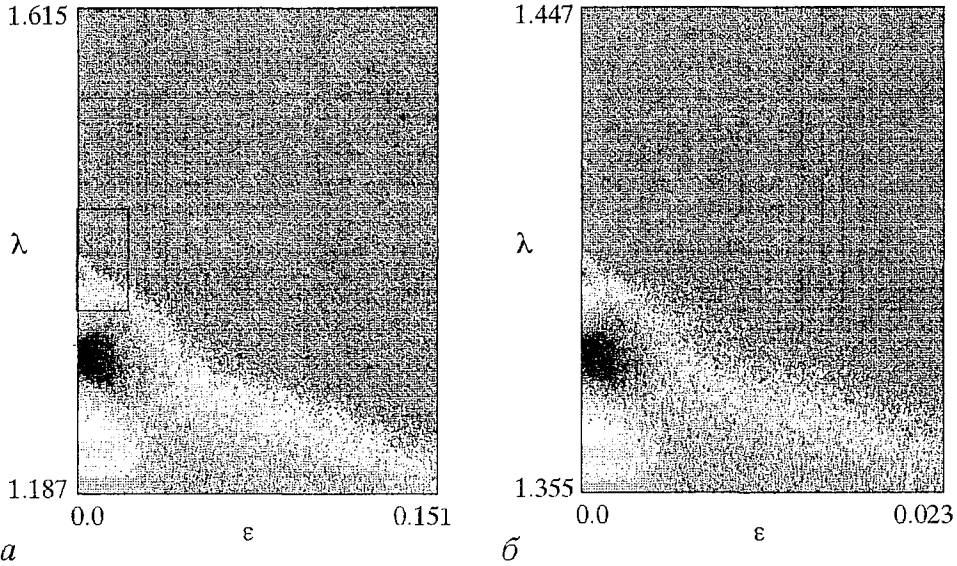


Рис. 4. Скейлинг на карте ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием бинарного шума. На рис. б увеличенный фрагмент рис. а

значению показателя Ляпунова. Полученные результаты представлены на рис. 4. Можно видеть, что исходная и преобразованная картинка хорошо совпадают. Замечательно, что скейлинг выполняется для бинарного шума. При исследовании проблемы воздействия шума, как правило, делаются иные предположения о его природе. Наши результаты говорят о более широкой применимости гипотезы универсальности.

4. Самоподобные сигналы

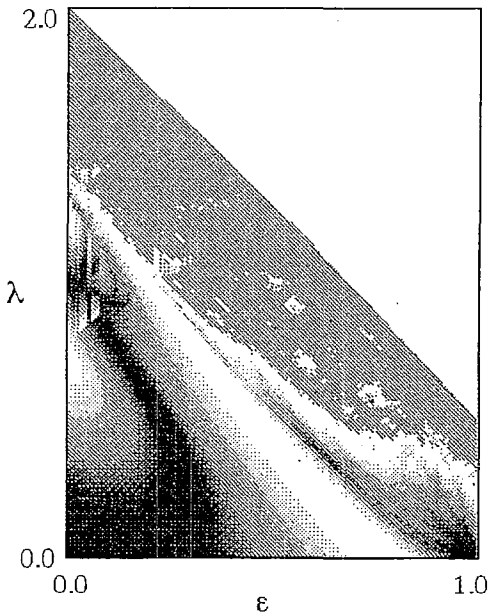


Рис. 5. Карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием логистической сигнум-последовательности

Итак, шум радикально изменил картину структур и границы хаоса на ляпуновских картах. Поэтому очень интересно исследовать промежуточные между регулярными и случайными сигналами ситуации. Теория бинарных последовательностей предоставляет для этого замечательную возможность в виде так называемых самоподобных последовательностей [26], которые можно получить из некоторого начального фрагмента многократной заменой каждого из его символов на некоторый фрагмент по так называемому правилу подстановки. Мы выберем две из них: логистическую сигнум-последовательность и известную «последовательность кроликов». Первая представляет собой последовательность знаков динамической переменной логистического отображения при критическом значении параметра λ , причем знаку «+» должна соответствовать единица, а знаку «-» — нуль. Правило подстановки для нее имеет

вид: $1 \rightarrow 10$; $0 \rightarrow 11$, а начальный фрагмент $y_n = 101110101111011 \dots$ «Последовательность кроликов» можно получить из известной задачи Фибоначчи о размножении кроликов, если единицей обозначить взрослую пару кроликов, а нулем – молодую [26]. Для нее правило подстановки: $0 \rightarrow 1$; $1 \rightarrow 10$, а начальный фрагмент $y_n = 101101011011010 \dots$

Ляпуновские карты для случая воздействия внешних сигналов в виде этих последовательностей представлены на рис. 5 и 6, соответственно. Сравнивая их с рис. 2 и 3, можно убедиться, что воздействие самоподобных последовательностей в самом деле приводит к некоторому промежуточному результату по сравнению с регулярными и шумовыми сигналами: Любопытно, что ситуация логистической

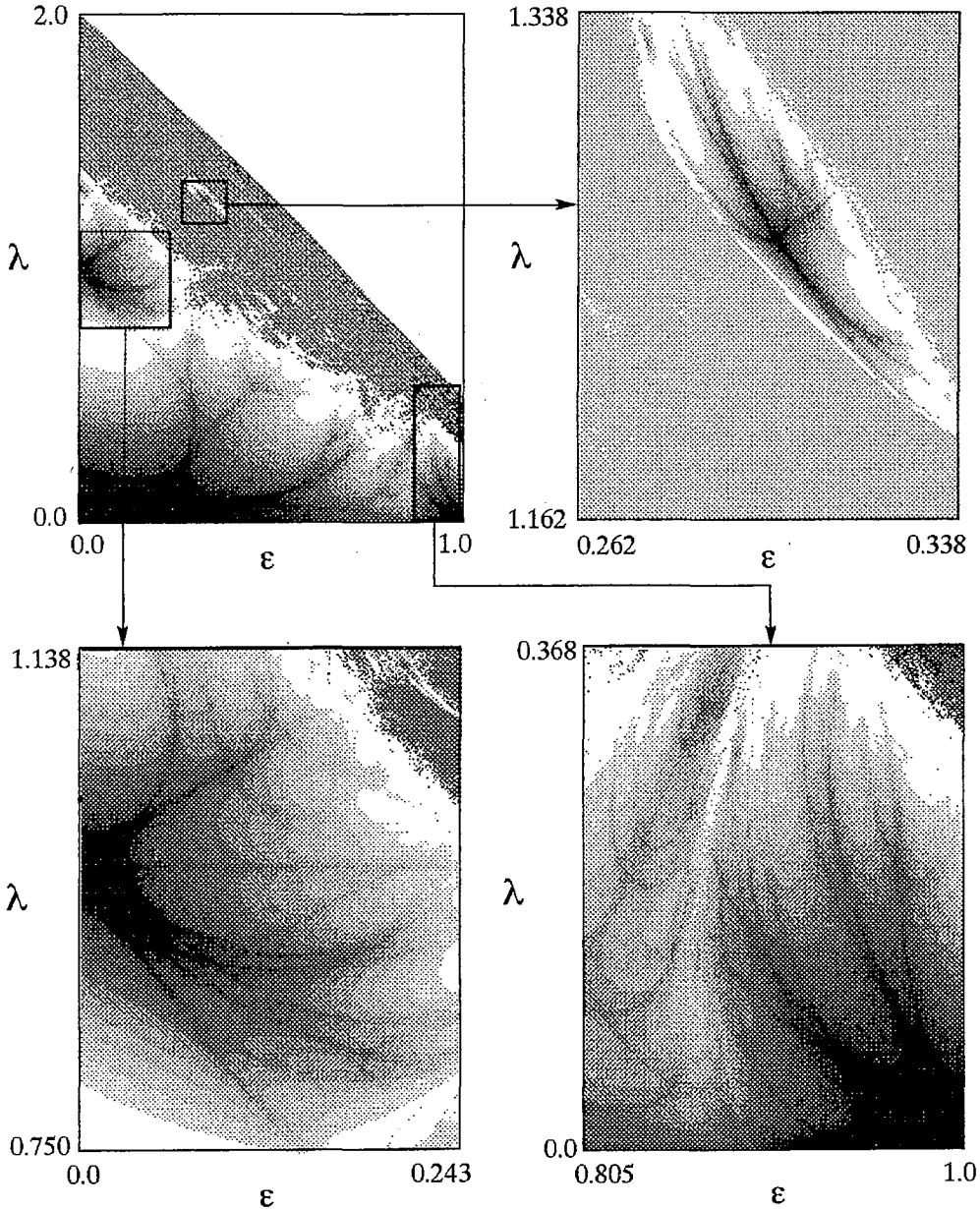


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием «последовательности кроликов». Новый тип ветвящихся структур типа «рисунки на листе» на плоскости параметров

сигнум–последовательности ближе к регулярному, а «последовательности кроликов» – к шумовому воздействию.

Обращаясь к рис. 6, видим, что на плоскости параметров реализуется некоторый новый тип структур, представляющих собой систему ветвящихся темных (большой отрицательный ляпуновский показатель) лучей, глубоко внедряющихся в светлые области. Эти структуры своей причудливой формой напоминают рисунки на листе деревьев (см. увеличенные фрагменты ляпуновской карты на рис. 6). Интересно, что по сравнению со случаем регулярного воздействия (см. рис. 2) структуры типа «рисунки на листе» развиваются в поперечном линиям циклов максимальной устойчивости направлению – именно так вытягиваются их ветвящиеся лучи.

Далее, граница хаоса явно не выглядит гладкой линией, но она уже и не столь диффузно устроена, как в случае шума. Теперь она содержит более крупные фрагменты, придающие ей изрезанный характер. Отрываясь от границы, подобные фрагменты образуют «островки» регулярных режимов в области хаоса. Один из них показан на рис. 6 в увеличенном виде. Видно, что он весь пронизан структурами типа «рисунки на листе». Наличие таких островков – еще одна характерная черта устройства плоскости параметров в рассматриваемом случае.

Рис. 5 демонстрирует аналогичные особенности, хотя ветвящиеся структуры наблюдаются хорошо лишь при больших амплитудах воздействия, а граница хаоса менее изрезана.

5. Фрактальные сигналы

Приведенные результаты компьютерного исследования заставляют задаться вопросом: какова может быть геометрия границы хаоса? Является ли она гладкой, как в случае периодического сигнала, или «диффузной», как в случае шума? Возможно ли превращение этих двух случаев друг в друга? Это весьма сложный

вопрос, полное теоретическое рассмотрение которого пока недоступно. По-видимому, граница может быть и гладкой, и не гладкой, в зависимости от устройства внешнего сигнала. Приведем некоторые аргументы в пользу этого утверждения. Для этого рассмотрим специальный иерархически организованный сигнал следующего вида:

$$y_{2n} = \beta(1+y_n), \quad (8)$$

$$y_{2n+1} = -\alpha(1+y_n), \quad y_0 = \beta/(1-\beta).$$

Здесь α и β – параметры сигнала. В процессе динамики переменная y_n совершает движение по двухмасштабному канторову множеству с параметрами α и β в соответствии с правилом обхода в критической точке. В частности, при $\alpha = -1/a_F$ и $\beta = \alpha^2$, где $a_F = -2.5029...$ – вторая константа Фейгенбаума, сигнал (8) с очень высокой точностью аппроксимирует динамику логистического отображения в

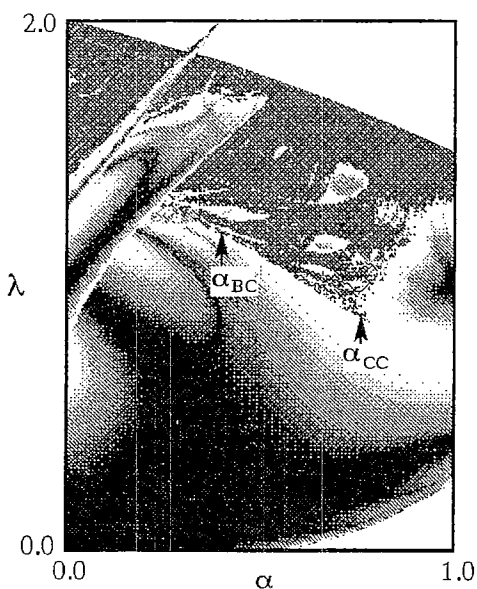


Рис. 7. Карта ляпуновских показателей для логистического отображения под воздействием сигнала (8). $\alpha_{VC} = -1/a_F = 0.3995...$ – значение параметра фрактального сигнала, отвечающее бифуркации критичности [7–9]; $\alpha_{CC} = 0.77...$ – значение параметра, соответствующее кризису критичности (потере гладкости границы хаоса)

критической точке. Он моделирует и другие типы критического поведения (подробности см. в [7–9]).

Для простоты фиксируем параметр $\beta=0$, амплитуду сигнала $\epsilon=1$ и обратимся к карте ляпуновского показателя на плоскости (α, λ) . Таким образом, мы изучаем теперь трансформацию структур при вариации масштабного фактора сигнала α , то есть в зависимости от свойств сигнала, а не его амплитуды.

Результат представлен на рис. 7. Сначала, при небольших α , граница хаоса является гладкой. Более того, случай умеренных α исследован в [7–9], где показано, что вплоть до значения $\alpha_{BC}=-1/a_F$ она является фейгенбаумовской линией с характерным классическим скейлингом. При $\alpha=\alpha_{BC}$ происходит бифуркация в соответствующем уравнении ренормгруппы и скейлинг становится нефейгенбаумовским с константой, зависящей от фактора α . Рассмотрение рис. 7 убеждает, что этим трансформации критической динамики не исчерпываются. Действительно, при $\alpha_{CC}\approx 0.77\dots$ гладкая граница хаоса обрывается. Справа от этой точки возникает область диффузно устроенной границы, содержащей в то же время и множество «островков». В ее направлении также вытянуты лучи структуры типа «рисунки на листе».

Таким образом, при $\alpha=\alpha_{CC}$ граница хаоса теряет гладкость. Мы назвали это явление *кризисом критичности*, поскольку в отличие от обсуждавшегося в [7–9] случая бифуркации критичности, последняя здесь исчезает вообще. Мы не имеем адекватного математического аппарата для описания этого явления, ибо даже традиционная ренормгруппа здесь, надо полагать, не эффективна. Кризис критичности, сопровождающийся столь резкой трансформацией границы хаоса, представляется феноменом нового плана, который заслуживает пристального внимания.

6. Двухпараметрическая система под действием шума и самоподобных последовательностей

Наконец, дадим несколько иллюстраций для кубического отображения (2). Оно является двухпараметрическим, и плоскость (a, b) автономной системы (рис. 8) содержит все характерные элементы, представленные на рис. 2, в: структуры crossroad area, фейгенбаумовские линии, трикритические точки.

Рис. 9 демонстрирует трансформацию карты при воздействии бинарного шума (левая колонка) и «последовательности кроликов» (правая колонка) с ростом амплитуды сигнала ϵ . В первом случае можно наблюдать развитие диффузной структуры границы хаоса и весьма причудливые трансформации режимов максимальной устойчивости. Во втором случае наблюдаем развитие ветвящихся структур, а также, в отличие от случая шума, потерю симметрии на карте. При этом при небольшой амплитуде сигнала ($\epsilon=0.1$ и $\epsilon=0.25$) ляпуновские карты для первого и второго случаев достаточно похожи (рис. 9, а, б), а при ее дальнейшем увеличении (рис. 9, в, г) наблюдается сильное различие.

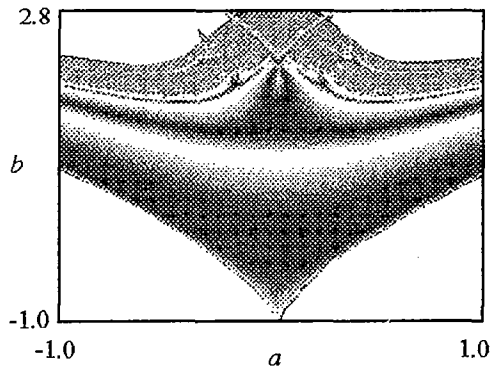


Рис. 8. Карта ляпуновских показателей для автономного кубического отображения

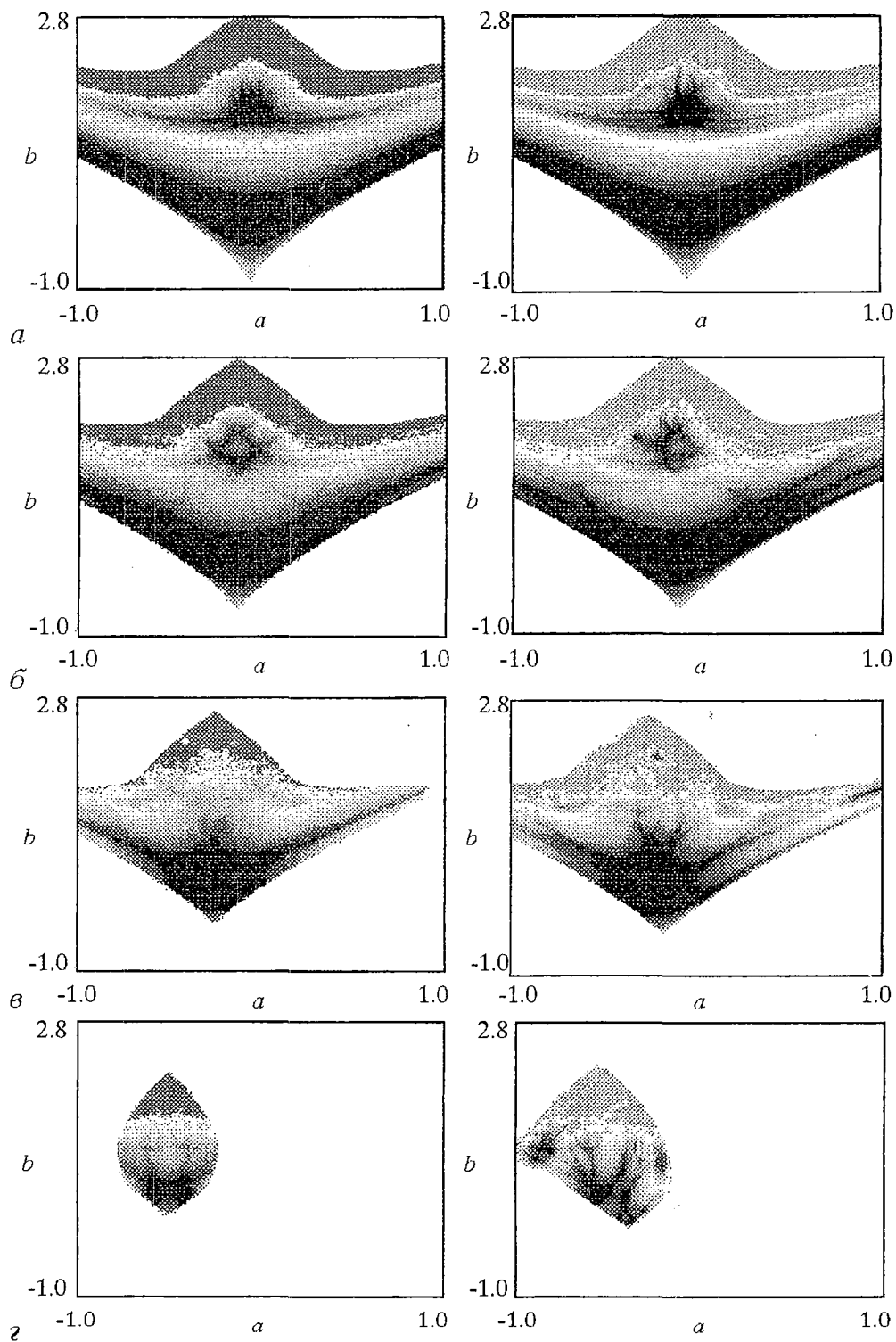


Рис. 9 Карта ляпуновских показателей для кубического отображения (2) под воздействием бинарного шума (слева) и «последовательности кроликов» (справа) при различных интенсивностях сигнала ϵ : $a - 0.1$; $b - 0.25$; $v - 0.5$; $z - 1.0$

Заключение

Итак, мы представили и обсудили ряд ляпуновских карт для неавтономных систем с удвоениями периода. Приведенные результаты убедительно говорят, что этот метод эффективен для случая непериодических сигналов. Действительно, с его помощью мы имели возможность сделать определенные выводы об устройстве границы хаоса и продемонстрировать двухпараметрический скейлинг в системах с шумом, обнаружить новый тип ветвящихся структур («рисунки на листе»), которые оказались типичными для сигналов с самоподобной организацией, и, наконец, обнаружить феномен кризиса критичности, при котором гладкая граница хаоса скачком разрушается, превращаясь в «диффузную», «островную» структуру. Конечно, наше рассмотрение было основано на чисто визуальной оценке карт и не дает исчерпывающих ответов на целый ряд возникающих вопросов о природе обнаруженных закономерностей. Но нельзя и приуменьшать роль визуальных методов (достаточно указать фазовые портреты). В конечном итоге, именно они и позволяют поставить вопросы для более глубокого теоретического анализа. В этой работе, как мы надеемся, намечено достаточно интересное поле для дальнейших исследований.

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и И.Р. Сатаеву за полезное и плодотворное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-02-17735).

Библиографический список

1. Marcus M. Chaos in maps with continuous and discontinuous maxima // *Computers in Physics*, 1980, Sept/Oct. P. 481
2. Bastos de Figueiredo J.C., Malta C.P. Lyapunov graph for two-parameter map: application to the circle map // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1998. Vol. 8, № 2. P. 281.
3. Иваньков Н.Ю. Свойства скейлинга пространства параметров логистического отображения под внешним воздействием // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1997. Т. 5, №2-3. С. 118.
4. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2000. Т. 8, № 2. P. 31.
5. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 709.
6. Valley R., Delisle C., Chrostowski J. Noise versus chaos in acousto-optic bistability // *Phys. Rev.* 1984. 30A, № 1. P. 336.
7. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Period doubling system under fractal signal. Bifurcation in the renormalization group equation // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1991. Vol. 1, №4. P. 355.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Воздействие фрактального сигнала на систему Фейгенбаума и бифуркация в уравнении ренормгруппы // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1991. Т. 34, № 6. С. 661.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Фрактальный сигнал и динамика систем, демонстрирующих удвоения периода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, №5. С. 64.
10. Grebogy C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // *Physica D*. 1984. Vol. 13. P. 261.
11. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999. 368 с.
12. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Динамика однонаправленно связанных систем у порога гиперхаоса. Бикритический аттрактор // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1992. Т. 35, № 5. С. 398.
13. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Bicritical dynamics of two period-doubling systems with unidirectional coupling // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1991. Vol. 1, № 4. P. 839.

14. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Генератор фрактального сигнала // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, вып. 24. С. 19.

15. Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C. and Tatjer J.C. Crossroad area – spring area transition. (1) Parameter plane representation // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1. P. 183.

16. Mira C., Carcasses J. On the crossroad area – saddle area and spring area transition // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1, № 3. P. 641.

17. Chang S.J., Pendley P.R. Scaling and universal behavior on the bifurcation attractor // Phys. Rev. 1986. Vol. A33, № 6. P. 4092.

18. Mackey R.S., Tresser C. Some flesh on the bifurcation structure of bimodal maps // Physica 1987. Vol. 27D. P. 412.

19. Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L., Hotta A. Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1. P. 139.

20. Parlitz U. Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative oscillators // J. of Bif. and Chaos. 1993. Vol. 3, № 3. P. 703.

21. Scheffczyk C., Parlitz U., Kurz T., Knop W., Lauterborn W. Comparison of bifurcation structures of driven dissipative nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43, №12. P. 6495.

22. Ringland J., Schell M. Universal geometry in the parameter space of dissipative dynamical systems // Europhys. Lett. 1990, № 12. P. 595.

23. Gallas J.A.C., Catarina S. Structure of the parameter space of Henon map // Phys. Rev. Lett.. Vol. 70, №18. P. 2714.

24. Gallas J.A.C. Structure of the parameter space of a ring cavity // Appl. Phys. 1995. Vol. B60. P. 203.

25. Shraiman B., Wayne C., Martin P. Scaling theory for noisy period–doubling systems // Phys. Rev. Lett.. 1981. Vol. 46. P. 935

26. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. New York: W.H. Freeman and Company, 1990.

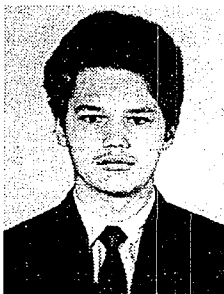
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 2.02.2000
после доработки 20.04.2000

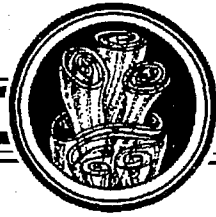
ABOUT THE PROBLEM OF CHAOS BOUNDARY AND TYPICAL STRUCTURES AT THE PARAMETER PLANE OF NON–AUTONOMIC DISCRETE MAPS WITH PERIOD DOUBLING

A.P. Kuznetsov, A.V. Savin

The series of Lyapunov graphs for non–autonomic systems with period doubling under non–periodical influence is shown. With its help the structure of chaos boundary is discussed, the new type of branching structures, which are typical for self–similar signals, and the phenomenon of criticality crisis are found. Scaling at Lyapunov graph for map under noise influence are demonstrated



Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1980). В 1997 году поступил на физический факультет СГУ. В настоящее время является студентом 4 курса. Участвует в работе студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Область научных интересов – компьютерное моделирование сложной динамики модельных нелинейных систем.



ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

Ж.Т. Жусубалиев

Исследуется динамика четырехмерной релейной системы с гистерезисом. В плоскости параметров определены области режимов периодических и хаотических колебаний. Изучаются закономерности возникновения периодических движений, устанавливаются возможные их бифуркации. Анализируются причины возникновения недетерминированных режимов

Введение

Релейные системы с гистерезисом представляют важный класс нелинейных автоматических систем, широко применяемых в различных областях техники [1–11]. Основным режимом работы систем указанного класса является режим автоколебаний, которые поддерживаются не внешним периодическим воздействием, а определяются свойствами самой системы [1].

Исследованию колебательных свойств релейных систем с гистерезисом посвящены многочисленные работы. В большинстве публикаций основное внимание уделяется изучению лишь периодических движений. Результатов, относящихся к релейным системам со сложной динамикой, значительно меньше. Некоторые данные можно найти в работах [2,3,5–9], в которых изучались конкретные системы управления. К числу первых работ, где были обнаружены аperiodические колебания, соответствующие хаотическому поведению, как указано в [12], следует отнести работы А.С. Алексеева [2,3]. В работе [3] методом точечных отображений исследовалась динамика релейного регулятора температуры с зоной опережения. Были найдены области параметров, где существуют сложные периодические колебания, которые при изменении параметров претерпевают бесконечное число бифуркаций удвоения периода, завершающихся установлением аperiodического движения. В [12] показано, что диапазон изменения параметра, в котором наблюдается хаотическое поведение, прорежен интервалами, где реализуются периодические колебания, причем области периодичности расположены всюду плотно, то есть в любой сколь угодно малой окрестности параметров, соответствующих хаотическим колебаниям, имеются устойчивые предельные циклы. Такое поведение, в частности, является типичным для систем, движение которых точно или приближенно описывается одномерным точечным отображением с гладким максимумом [12–14].

В работах [5,6] исследуется процесс стабилизации космического аппарата относительно заданного положения оси его ориентации, осуществляемой с

помощью релейной системы управления. В [5] показано, что управляющее воздействие может возбуждать упругие колебания конструкции, «в результате чего возникает взаимосвязь системы с упругими колебаниями, а при существенной взаимосвязи динамика становится хаотической».

Работы Н.С. Постникова [7–9] посвящены исследованию динамики ядерных реакторов с релейной системой управления. В этих работах показано, что в случае, когда объект управления колебательно–неустойчивый, в релейных системах с гистерезисом наряду с периодическими могут возникать и хаотические колебания. В работе [9] для систем второго и третьего порядка с колебательно–неустойчивой линейной частью в плоскости параметров построены области периодичности и хаоса. Рассмотрена задача выбора закона управления обратной связи, обеспечивающего в системах произвольного порядка хаотические колебания с такой же средней частотой переключения релейного элемента, что и в двумерной или трехмерной системе, выбранной в качестве эталона.

Можно ожидать, что в релейных системах с гистерезисом и колебательно–неустойчивой линейной частью возникновению хаоса предшествуют сложные бифуркационные переходы аналогичные тем, что изучались в [12–14] при анализе автоколебательных систем с хаотической динамикой. Однако подробное изучение бифуркаций и механизмов хаотизации колебаний в работах [7–9] проведено не было. По–видимому, в [7–9] неявно предполагалось, что усложнение предельных циклов при изменении параметров происходит по типичным сценариям [12–14].

Надо заметить, что в релейных системах с гистерезисом и зоной нечувствительности переходы к хаосу могут иметь некоторые особенности, связанные с S –бифуркациями [15,16]. Это следует из того факта, что правые части уравнений, описывающих поведение таких систем, являются разрывными. Как известно, в динамических системах с разрывными правыми частями возможны специфические нарушения условий существования периодического движения, связанные с изменением числа участков фазовых траекторий, из которых сшивается траектория этого движения. Подобные нарушения топологической структуры фазового пространства получили название S –бифуркаций периодических решений [15,16] («border–collision bifurcations» [17]).

Возможность таких бифуркаций в двумерной и трехмерной модели релейной системы с гистерезисом и зоной нечувствительности усматривается при анализе фазовых траекторий, приведенных в [7–9]. Исследование S –бифуркаций в релейных системах с гистерезисом наталкивается на серьезные математические сложности. В конкретных прикладных задачах можно воспользоваться результатами, приведенными в [15,16].

С другой стороны, как будет показано ниже (см. также [18,19]), в релейных системах с гистерезисом типичной является ситуация, когда в широких диапазонах изменения параметров существует множество локально–устойчивых предельных циклов с различными динамическими характеристиками. Они возникают жестко, например, через седло–узловую бифуркацию, при изменении параметров могут претерпевать конечную либо бесконечную последовательность прямых и обратных бифуркаций удвоения, завершающихся переходом к хаосу. Кроме того, хаотизация колебаний может происходить через возникновение и последующее разрушение квазипериодического движения, соответствующего в фазовом пространстве двумерному тору. В результате чего имеются области параметров, где наряду с локально–устойчивыми предельными циклами существуют режимы хаотических или квазипериодических колебаний.

При таких условиях воздействие внешнего шума, даже сколь угодно малого, может привести к внезапному переходу от одного динамического состояния к другому с различными характеристиками, в частности, от детерминированной динамики к хаотической [20,21].

В представленной работе исследуются динамические свойства релейной системы с гистерезисом, описываемой четырехмерной кусочно–линейной автономной динамической системой. Цель настоящей работы состоит в детальном изучении закономерностей возникновения различных типов движений, установле–

нии возможных бифуркаций и анализе сценариев усложнения колебаний, приводящих к хаотизации движений.

1. Постановка задачи

В качестве конкретного примера релейной системы с гистерезисом рассмотрим преобразователь постоянного напряжения, схема замещения которого приведена на рис. 1. Энергетическая часть системы содержит транзисторный преобразователь (ТП) постоянного напряжения, работающий в ключевом режиме, и сглаживающие LC -фильтры. Сигнал обратной связи ξ , несущий информацию об отклонении выходного напряжения U_1 от заданного значения U_{ref} , подается на релейный элемент с гистерезисом, который формирует прямоугольные импульсы для управления ключевыми элементами преобразователя. Такие преобразователи широко применяются в технике, например, в системах энергообеспечения космических и летательных аппаратов, испытательных стендах для экспериментального исследования низкотемпературных и высокотемпературных сверхпроводников, в электротехнологии, во вторичных источниках электропитания радиотехнических и вычислительных комплексов, в усилителях низкой частоты, электроприводах постоянного и переменного тока [22,23].

Рассматриваемая система описывается системой кусочно-линейных автономных дифференциальных уравнений вида [18]

$$dX/dt = G(X), \quad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)', \quad G = (g_1, g_2, g_3, g_4)' \quad (1)$$

Здесь

$$g_1 = \eta(-x_1 - x_2 + \Omega),$$

$$g_2 = \gamma[x_1 - 1/2[1 + K_k^{(F)}(\xi(X))]x_3],$$

$$g_3 = \mu/2[1 + K_k^{(F)}(\xi(X))]x_2 - \nu x_3 - \mu x_4,$$

$$g_4 = \lambda(x_3/\alpha - x_4/\beta),$$

$$K_k^{(F)} = K_{k-1}^{(F)} \text{sign}[\chi_0 + (-1)^{N_k-1} \xi(X)], \quad K_0^{(F)} = -1,$$

$$N_k = N_{k-1} + 1/2[1 - \text{sign}(K_k^{(F)} K_{k-1}^{(F)})], \quad N_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

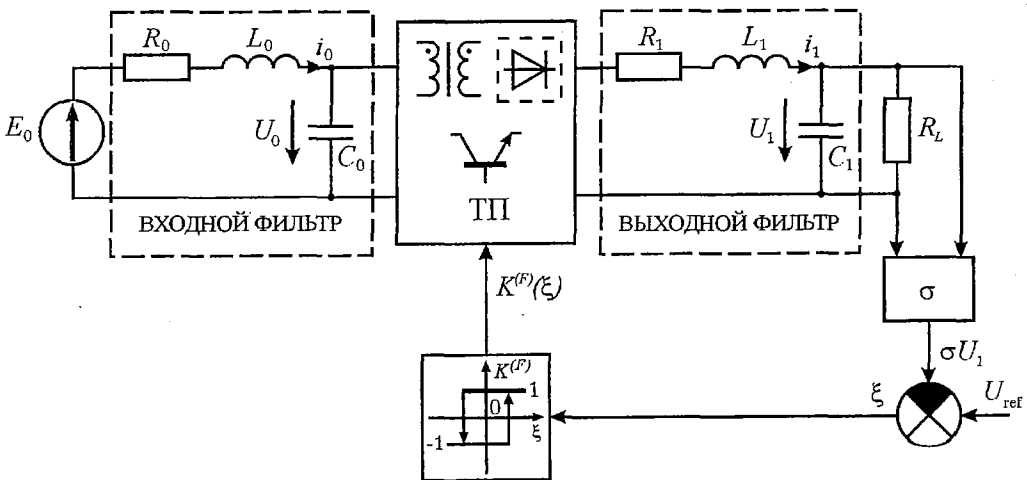


Рис. 1

$$\xi(X) = \sigma x_4 - \vartheta,$$

где

$$x_1=R_0 i_0/E_*, x_2=U_0/E_*, x_3=R_0 i_1/E_*, x_4=U_1/E_*, \eta=R_0/L_0, \Omega=E_0/E_*,$$

$$\gamma=1/(C_0 R_0), \mu=R_0/L, \nu=R_1/L, \lambda=1/(C R_*), \beta=R_L/R_*, \alpha=R_1/R_*, \vartheta=U_{ref}/E_*.$$

Здесь i_0, i_1, U_0, U_1 – токи в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах входного и выходного фильтров; L_0, L_1, C_0, C_1 – индуктивности и емкости фильтров; R_0, R_1 – сопротивления, характеризующие потери в фильтрах и преобразователе; E_0, R_L – входное напряжение и сопротивление нагрузки; σ – коэффициент передачи датчика обратной связи по выходному напряжению; $K_{k-1}^{(F)}, K_k^{(F)}$ – значения сигнала ($K^{(F)}=-1$ или $K^{(F)}=1$) на выходе релейного элемента соответственно в областях $t_{k-1}<t<t_k$ и $t_k<t<t_{k+1}$, где $t_k, k=1,2,\dots$ – моменты переключения релейного элемента, соответствующие переходу сигнала ошибки $\xi(X)$ через пороговые значения $+\chi_0$ или $-\chi_0$ в одном направлении. Знак штрих «'» в (1) обозначает операцию транспонирования.

В исследованиях варьировались величины E_0, R_L , соответствующие нормированным параметрам Ω, β динамической системы (1), а остальные параметры полагались фиксированными: $R_0=0.5$ Ом, $R_1=2.1$ Ом, $L_0=10^{-3}$ Гн, $L_1=6 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C_0=3 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_1=2.5 \cdot 10^{-5}$ Ф, $U_{ref}=2.4$ В, $\chi_0=0.25$, $\sigma=0.1$. Базовые величины E_*, R_* при нормировании динамических переменных и варьируемых параметров принимались равными $E_*=1$ В и $R_*=1$ Ом.

Величина гистерезиса релейного элемента и параметры фильтра выбираются из условий обеспечения заданной точности регулирования, малого уровня амплитуды переменной составляющей тока и напряжения силовых фильтров, высокого быстродействия [22, 23]. С другой стороны, параметры фильтра оказывают существенное влияние на массогабаритные и энергетические показатели, а минимальное значение гистерезиса релейного элемента ограничивается максимально допустимой частотой переключения преобразователя из-за увеличения динамических потерь в ключевых элементах с ростом частоты [22, 23].

Выбор из всей совокупности параметров тех, которые являются варьируемыми, определялся тем, что основными дестабилизирующими факторами, влияющими на динамические характеристики системы в процессе эксплуатации, обычно являются изменение тока нагрузки (величины R_L) и вариации входного напряжения. Диапазон изменения тока нагрузки зависит от режимов работы устройств, получающих питание от преобразователя [22, 23].

Исследование динамической системы (1) было сведено к изучению свойств четырехмерного отображения [18]

$$X_k = F(\tau_k, X_{k-1}), \quad (2)$$

где $X_k=X(t_k)$, $\tau_k=t_k-t_{k-1}$ – наименьший корень уравнения

$$(-1)^{k-1} \chi_0 + \vartheta - U X_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad U = (0, 0, 0, \sigma). \quad (3)$$

Совокупность рекуррентных соотношений (2) и уравнение (3) определяют отображение сдвига в пространстве той же размерности, что и фазовое пространство.

Введем некоторые понятия. Пусть $X_c(t)$ – периодическое движение автономной системы (1) с периодом T

$$X_c(t+T) \equiv X_c(t). \quad (4)$$

В силу (4) с ростом t функция $\xi(X_c(t))$ будет также изменяться периодически

$$\xi(X_c(t+T)) \equiv \xi(X_c(t)),$$

проходя пороговые значения $+\chi_0$ и $-\chi_0$ в моменты $t=t_k$

$$(-1)^{k-1}\chi_0 + \xi(X_c(t_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом выходной сигнал релейного элемента $K_c^{(F)}(\xi(X_c(t)))$ представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов. Период T периодического движения $X_c(t)$ определяется как сумма промежутков времени τ_k движения изображающей точки между последовательными переключениями релейного элемента

$$T = \sum_{k=1}^m a_k, \quad a_k = \tau_{2k-1} + \tau_{2k}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь число переключений s релейного элемента на периоде T четно и равно $2m$, а τ_{2k-1} , τ_{2k} – длительности соответственно положительного (отрицательного) и отрицательного (положительного) импульсов. Движение с таким периодом здесь и далее будем называть m -циклом.

Предельные циклы при анализе бифуркаций находились численно из решения системы трансцендентных уравнений относительно $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$

$$\Phi_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (5)$$

полученной на основе (2), (3) и условия периодичности аналогично тому, как это делалось в [20, 21, 24]. Такой алгоритм позволяет находить как устойчивые, так и неустойчивые m -циклы. Однако решение системы (6) представляет трудную задачу. Здесь лишь отметим, что автор не ограничился только одним методом. Получение информации, приведенной в статье, потребовало привлечения широкого набора методов вычислительной математики. В частности, так как указанный алгоритм является локальным, то пришлось его дополнять итерационной процедурой поиска устойчивых предельных циклов, являющейся, по существу, модификацией метода установления, которая оказалась наиболее эффективной, если не единственной, при анализе эволюции предельных циклов с большим периодом.

Устойчивость предельных циклов исследовалась на основе теории, изложенной в [24]. Как известно, исследование локальной устойчивости периодических решений динамических систем с разрывными правыми частями сводится к рассмотрению линеаризованных уравнений относительно малых возмущений с разрывным решением [25]. Величина скачка в точках разрыва определяется матрицей пересчета [24–26]. Однако получение матрицы пересчета является сложной задачей. В некоторых случаях можно использовать результаты, приведенные в работах М.А. Айзермана, Ф.Р. Гантмахера [25] и А.Ф. Филиппова [26], где при выводе матрицы пересчета применен геометрический подход. В отличие от [25, 26], в [24] для этой цели был использован аналитический подход, основанный на применении обобщенных функций. В [24] было показано, что формирование матрицы пересчета в общем случае некорректно, на что многие авторы при анализе динамических систем с разрывными правыми частями не обращают внимания. При этом в [24] было найдено условие, определяющее применимость матрицы пересчета, полученной в [25]. Методология, использованная в [24] для неавтономных динамических систем, автором обобщена на случай автономных динамических систем с разрывной правой частью.

Заметим, что в автономной системе с n -мерным фазовым пространством один из мультипликаторов ρ_k , $k = \overline{1, n}$ основной матрицы Φ_n , то есть корней уравнения

$$\det(\Phi_m - \rho E) = 0,$$

всегда равен единице. Поэтому число мультипликаторов, определяющих локальную устойчивость предельных циклов, будет равно $n-1$.

2. Бифуркации и хаотические колебания в релейной системе с гистерезисом

Пусть $\Pi = \{(\Omega, \beta) : \Omega_{\min} < \Omega < \Omega_{\max}, \beta_{\min} < \beta < \beta_{\max}\}$ – диапазон вариации параметров Ω, β динамической системы (1). Пусть $P = (\Omega, \beta), P \in \Pi$ – фиксированный набор параметров (точка в Π). Разбиение плоскости параметров Π динамической системы (1) на области различных режимов колебаний приведено на рис. 2. Здесь $\Pi_k^m \subset \Pi, k=0,1,2,\dots; m \geq 1$ – односвязные множества, такие что при любых $P \in \Pi_k^m$ существует локально устойчивое периодическое движение $X_c(t, P)$ (m -цикл), непрерывное по параметрам в Π_k^m . Индекс k введен для различия множеств, которым отвечают движения с одинаковой периодичностью. Разным движениям, одновременно существующим при фиксированных P , соответствуют разные Π_k^m . На рисунке отражены только те области, которые являются относительно большими в Π . Область хаотичности обозначена через $\tilde{\Pi}$. Периодическое движение, соответствующее рабочему режиму колебаний, назовем основным движением [27], а то множество из Π_k^m , на котором определено это движение – основным

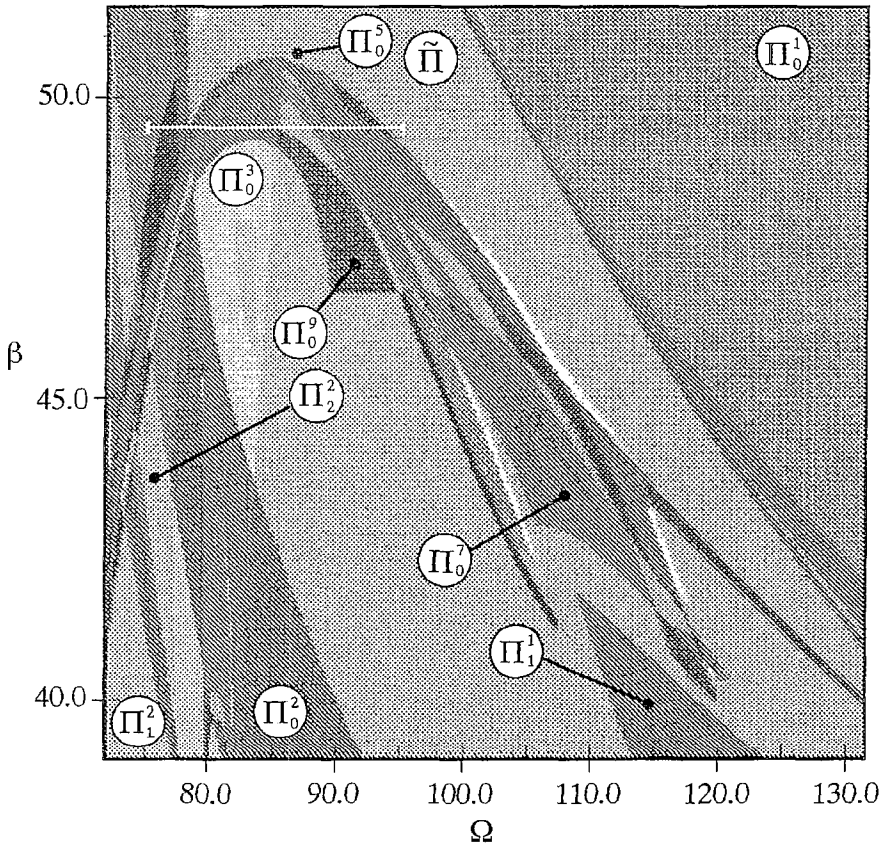


Рис. 2

множеством Π_0 . Выбор основного множества Π_0 определяется требованиями к качеству функционирования системы [27]. Не исключен вариант, когда основной может являться область, отвечающая режиму хаотических колебаний. Так, например, в работах [7–9] на ряде конкретных примеров указан случай, когда использование в качестве рабочего режима хаотических колебаний (вместо периодических) существенно улучшает показатели качества функционирования системы. На рисунке хорошо видно, что почти все Π_k^m взаимно пересекаются, следовательно, некоторые из них пересекаются непусто с Π_0 : $\Pi_k^m \cap \Pi_0 \neq \emptyset$, $k=1,2,\dots; m \geq 1$.

В работах [28,29], как обобщение исследований [20,21], было введено понятие нормальных структур объектов. Пусть S – структура релейной системы с гистерезисом (см. рис.1), поведение которой описывается динамической системой (1). Структура S нормальна, если

$$\Pi_0 \cap \left[\bigcup_{k,m} \Pi_k^m \setminus \Pi_0 \right] = \emptyset, \quad \bigcap_{k,m} \Pi_k^m \neq \emptyset \quad (6)$$

или

$$\Pi_0 \cap \left[\bigcap_{k,m} \Pi_k^m \right] = \emptyset, \quad \bigcup_{k,m} \Pi_k^m \neq \emptyset. \quad (7)$$

Выполнение условия (6) или (7) означает, что для любых $P \in \Pi_0$ существует единственное устойчивое движение и, следовательно, это движение глобально устойчиво.

Как видно из рис. 2, структура объекта, на которой определена динамическая система (1), является аномальной. Представим множество Π_0 в виде $\Pi_0 = \Pi_{\text{conv}} \cup (\Pi_0 \setminus \Pi_{\text{conv}})$. Здесь Π_{conv} – та часть Π_0 , где существует единственное движение. Множество Π_{conv} называют областью конвергентности. Оно может быть односвязным, не односвязным или пустым [29]. Для практических приложений важно не столько знание всей области конвергентности, сколько оценка ее радиуса. Пусть Π_{conv} – непустое множество и $P_0 \in \Pi_{\text{conv}}$ – базовые (номинальные) значения параметров [27]. Под *радиусом области конвергентности* r_{conv} понимается минимальное расстояние от базовой точки P_0 до границы Π_{conv} [29].

Если радиус конвергентности мал, то даже незначительные вариации параметров или малые внешние случайные воздействия могут привести к катастрофической смене характера динамики, например, к внезапному переходу от одних устойчивых циклов к другим с различными динамическими характеристиками, либо к катастрофической хаотизации колебаний, что чрезвычайно опасно для функционирующей системы.

Опираясь на двухпараметрическую диаграмму (см. рис. 2), несколько подробнее остановимся на анализе бифуркаций при движении по параметрам. Для определенности анализ проведем в сечении $L = \{(\Omega, \beta): 72.0 < \Omega < 110.0; \beta = 49.5\}$. Выбор конкретной траектории деформации системы (1) в плоскости параметров Π связан с тем, что сечение L пересекает большинство областей, составляющих диаграмму, приведенную на рис. 2. На рис. 3 изображена бифуркационная диаграмма, качественно иллюстрирующая особенности переходов от движений одного типа к движениям другого при непрерывном изменении параметра Ω .

Бифуркационная диаграмма строилась с помощью специального алгоритма. Для каждого значения параметра производился поиск движений с начальных условий, генерируемых многократно случайным образом, а также с начальных условий, отвечающих точкам фазового пространства динамической системы (2), лежащим на траекториях движений, найденных при предыдущем значении параметра. В алгоритме использованы эвристические процедуры определения направления движения по параметру в пределах заданного диапазона его вариации и динамического изменения числа начальных условий, генерируемых случайно, учитывающие информацию, полученную на предыдущих шагах.

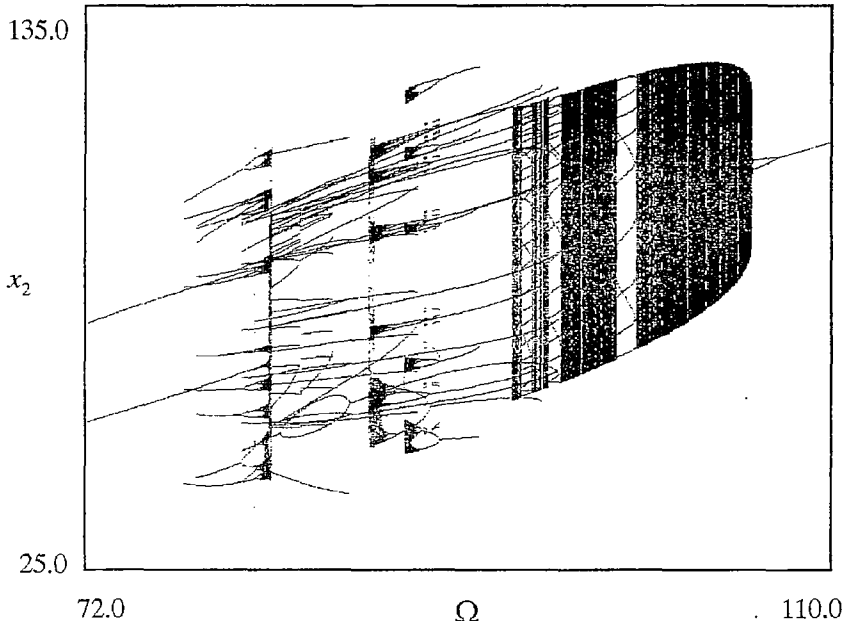


Рис. 3

Результаты бифуркационного анализа для участка $\hat{L} = \{(\Omega, \beta): 75.0 < \Omega < 95.0; \beta = 49.5\}$, $\hat{L} \subset L$, обозначенном на рис. 2 отрезком прямой, сведены в таблицу. В первом столбце таблицы приведено обозначение ветви, к которой относятся устойчивые m -циклы, указанные во втором столбце; в третьем – приведены диапазоны изменения Ω , в которых существуют локально-устойчивые m -циклы, составляющие ветвь. Последние два столбца содержат информацию о поведении системы в точках границ ветвей, где используются следующие обозначения: «+» – точки, отвечающие параметрам седло-узловой бифуркации; «-» – точки, к которым при движении по параметру сгущается последовательность бифуркаций удвоения периода; через «*» обозначены два особых случая поведения системы на границах соответствующих ветвей, которые подробно рассматриваются далее. Данные этой таблицы представлены на рис. 4 в виде диаграммы, названной в [20,21] картиной ветвления. Заметим, что на рис. 4 и в таблице указаны не все ветви. В частности, на рис. 4 не приведены ветви, соответствующие областям существования резонансных циклов, и ветвь, начинающаяся с 2-цикла (см. рис. 3).

Все ветви, составляющие эту диаграмму, обладают некоторыми общими свойствами, а именно:

- каждая ветвь $V_{m,k}$ представляет собой совокупность диапазонов существования устойчивых $2^n m$ -циклов, $n=0, 1, \dots, p$. Величина p может быть конечной или бесконечной;

- если ветвь состоит более чем из одного такого диапазона, то есть $p \geq 1$, то во всех внутренних граничных точках диапазонов существования устойчивых $2^n m$ -цикла и $2^{n+1} m$ -цикла, $n=0, 1, \dots, p-1$ происходит потеря устойчивости $2^n m$ -цикла и мягкое возникновение $2^{n+1} m$ -цикла через бифуркацию удвоения периода.

Помимо количественных показателей m и k ветви $V_{m,k}$ качественно отличаются по характеру потери устойчивости во внешних граничных точках – точке возникновения предельного цикла с минимальным m и точке исчезновения цикла с максимальным m в пределах существования ветви. По этому признаку все рассматриваемые ветви можно разбить на несколько классов.

1. Ветви $V_{9,2}$, $V_{15,1}$, $V_{21,1}$, $V_{27,1}$ и $V_{36,1}$ начинаются с циклов, возникающих через седло-узловую бифуркацию. При уменьшении параметра Ω m -цикл претерпевает

последовательность бифуркаций удвоения периода, заканчивающуюся установлением апериодического движения.

Таблица

Ветви	m	Ω	Характер потери устойчивости на границах ветвей	
			Правая граница	Левая граница
$V_{3,1}$	3	$67.36 < \Omega < 84.97732$	*	+
	6	$84.97732 < \Omega < 84.97745$		
$V_{5,1}$	5	$76.01 < \Omega < 79.76$		
	10	$79.76 < \Omega < 80.39$		
	20	$80.39 < \Omega < 80.57$	*	-
	40	$80.57 < \Omega < 80.61$		
$V_{5,1}^*$	5	$89.21 < \Omega < 91.17$		
	10	$88.36 < \Omega < 89.21$	-	+
	20	$88.14 < \Omega < 88.36$		
$V_{7,1}$	7	$77.31 < \Omega < 79.65$		
	14	$79.65 < \Omega < 80.41$	+	-
	28	$80.41 < \Omega < 80.59$		
$V_{7,1}^*$	7	$88.73 < \Omega < 94.18$		
	14	$87.11 < \Omega < 88.73$	-	+
	28	$86.74 < \Omega < 87.11$		
$V_{9,1}$	9	$84.84 < \Omega < 94.92$		
	18	$81.53 < \Omega < 84.84$	+	+
	9	$78.54 < \Omega < 81.53$		
$V_{9,2}$	9	$80.17 < \Omega < 80.32$		
	18	$80.11 < \Omega < 80.17$	-	+
	36	$80.09 < \Omega < 80.11$		
$V_{11,1}$	11	$79.44 < \Omega < 88.68$	+	+
$V_{13,1}$	13	$79.87 < \Omega < 84.13$	+	+
$V_{15,1}$	15	$88.43 < \Omega < 88.49$	-	+
	30	$88.40 < \Omega < 88.43$		
$V_{21,1}$	21	$88.68 < \Omega < 89.24$	-	+
$V_{27,1}$	27	$82.34 < \Omega < 83.96$	-	+
$V_{36,1}$	36	$87.32 < \Omega < 87.62$	-	+

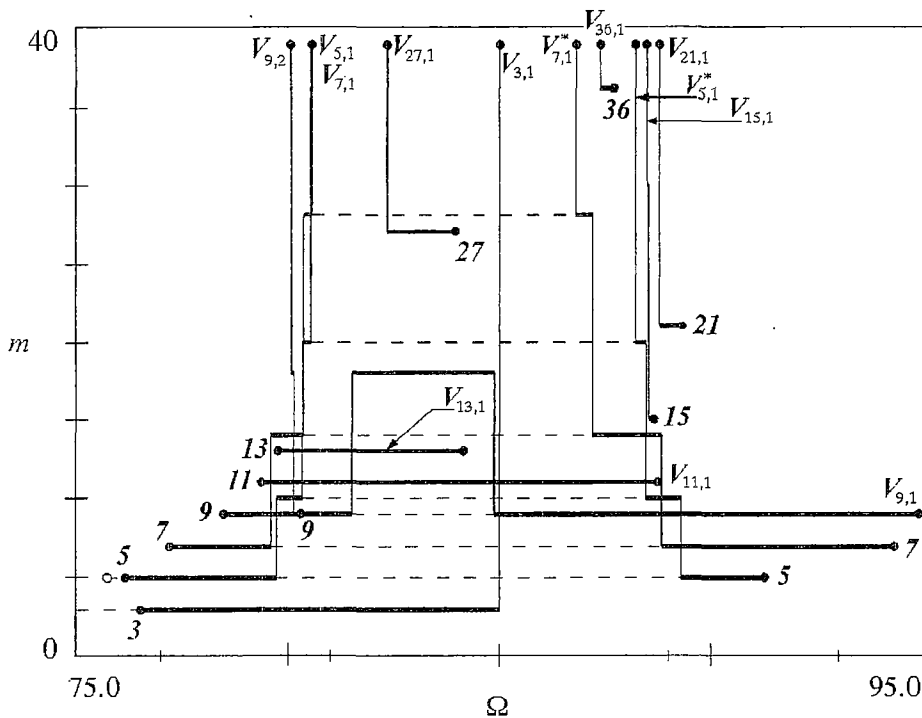


Рис. 4

2. Ветви $V_{11,1}$ и $V_{13,1}$ начинаются и заканчиваются при значениях параметров, соответствующих исчезновению устойчивого цикла, его слиянию с неустойчивым в результате седло–узловой бифуркации.

3. Ветвь $V_{9,1}$, как и ветви $V_{11,1}$ и $V_{13,1}$, начинается и заканчивается при параметрах, при которых 9–цикл возникает (исчезает) через седло–узловую бифуркацию. Однако, в отличие от предыдущего случая, этот режим при изменении параметра Ω испытывает две бифуркации удвоения периода, сначала прямую, а затем обратную. На рис. 5 приведены зависимости мультипликаторов 9–цикла от параметра Ω , наглядно иллюстрирующие динамику изменения его характера. При $\Omega \approx \Omega_{9,1}$, $\Omega_{9,1} = 78.5385$ жестко возникает пара 9–циклов – устойчивого и неустойчивого – через седло–узловую бифуркацию (максимальный по модулю мультипликатор 9–цикла в точке $\Omega_{9,1} = 78.5385$ обращается в +1). В точке $\Omega \approx \Omega_{18,1}$, $\Omega_{18,1} = 81.5327$ 9–цикл теряет устойчивость (максимальный по модулю мультипликатор устойчивого 9–цикла выходит из единичного круга через -1) и мягко возникает 18–цикл через бифуркацию удвоения периода. При дальнейшем увеличении параметра Ω в точке $\Omega \approx \Omega_{18,1}^*$, $\Omega_{18,1}^* = 84.8455$ 9–цикл становится вновь устойчивым через «обратную» бифуркацию удвоения периода

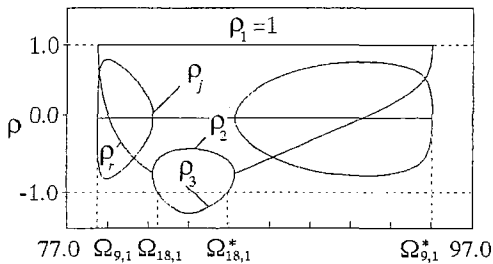


Рис. 5

(мультипликаторы 9–цикла входят внутрь единичного круга через -1), а в точке $\Omega \approx \Omega_{9,1}^*$, $\Omega_{9,1}^* = 94.9232$ устойчивый 9–цикл исчезает, сливаясь с неустойчивым 9–циклом через седло–узловую бифуркацию. Таким образом, ветвь $V_{9,1}$ как бы состоит из двух симметричных полуветвей (симметричных не по параметру Ω , а по своей структуре, то есть совокупности составляющих их диапазонов существования m –циклов),

состоящих из единственных отрезков существования 9-циклов и соединяющихся отрезком, отвечающим области существования 18-цикла.

С этой ветвью связана еще одна особенность, которая состоит в том, что ветви $V_{9,1}$ и $V_{9,2}$ пересекаются непусто, вследствие чего в диапазоне $80.1733 < \Omega < 80.3162$ существуют два типа 9-циклов с различными динамическими характеристиками.

4. Ветви $V_{5,1}$ и $V_{5,1}^*$, а также $V_{7,1}$ и $V_{7,1}^*$ попарно представляют собой скорее одну ветвь, состоящую из двух симметричных полуветвей (см. рис. 4). Здесь, как и выше, под симметричностью имеется в виду не симметричное расположение соответствующих бифуркационных значений параметра, а симметричность структуры полуветвей, то есть тот факт, что обе ветви состоят из диапазонов существования одних и тех же m -циклов и переходы, возникновение и исчезновение m -циклов происходят одинаковым образом. Так, обе пары ветвей состоят из областей существования жестко возникающего (за исключением ветви $V_{5,1}$, которая будет рассмотрена ниже) базового m -цикла ($m=5$ и $m=7$, соответственно) и областей существования $2^n m$ -циклов, $n=1,2,\dots$, мягко возникающих в результате бифуркаций удвоения периода. Весьма примечателен тот факт, что соответствующие m -циклы из левой и правой полуветви не просто совпадают по периодичности, но являются одним и тем же режимом, претерпевающим в области своего существования две бифуркации удвоения периода – прямую и обратную. На рис. 4 области существования неустойчивых циклов изображены пунктирными линиями. Эволюция каждого m -цикла повторяет эволюцию 9-цикла ветви $V_{9,1}$, описанную ранее. Как мы видим, ветвь $V_{9,1}$ можно считать вырожденным случаем слияния полуветвей той же структуры, что и рассматриваемые в этом пункте за счет неполного каскада бифуркаций удвоения периода. Поскольку в пределах ветвей $V_{5,1}$, $V_{5,1}^*$, $V_{7,1}$, $V_{7,1}^*$ происходит бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода, сгущающаяся к аperiodическому движению, можно сказать, что как полуветви ветви $V_{9,1}$ соединяются через область существования устойчивого 18-цикла, так и полуветви $V_{5,1}$ и $V_{5,1}^*$, $V_{7,1}$ и $V_{7,1}^*$ соответственно соединяются отрезками существования аperiodических колебаний. Ветвь $V_{5,1}$ полностью соответствует вышеприведенному описанию, за одним исключением: базовое движение отвечает резонансному циклу, возникающему вследствие синхронизации квазипериодического движения.

5. Ветвь $V_{3,1}$ начинается с 3-цикла, возникающего жестко. Характер возникновения 3-цикла имеет некоторые особенности по сравнению с теми циклами, которые были рассмотрены ранее. В точке $\Omega_{3,1} \approx 67.3586$ возникает пара неустойчивых 3-циклов. При увеличении Ω один из них становится устойчивым (величина максимального по модулю мультипликатора становится меньше единицы при $\Omega_{3,1} \approx 76.8338$), а мультипликаторы другого все больше удаляются от границы единичного круга, и это движение остается неустойчивым во всей области своего существования. Первый 3-цикл при $\Omega_{6,1} \approx 84.97732$ претерпевает бифуркацию удвоения, что приводит к мягкому возникновению 6-цикла, исчезающего в результате седло-узловой бифуркации при $\Omega \approx 84.97745$.

В других сечениях картины ветвлений могут отличаться от той, что приведена на рис. 4. Для примера на рис. 6, 7 приведены бифуркационные диаграммы, построенные в сечениях $L = \{(\Omega, \beta): 57.0 < \Omega < 132.0, \beta = 31.15\}$ и $L = \{(\Omega, \beta): \Omega = 82.85149, 48.0 < \beta < 52.0\}$, соответственно, на которых легко видеть (см. также рис. 3), что хаотизация колебаний может происходить как через каскады прямых и обратных бифуркаций удвоения периода, так и через возникновение и последующее разрушение двумерного тора. На рис. 8, 9 приведены вид фазовых траекторий в проекции на трехмерное пространство и спектры колебаний, соответствующие режимам квазипериодических и хаотических колебаний. Приведенные на рис. 3, 4, 6, 7 результаты дают достаточно общую картину в

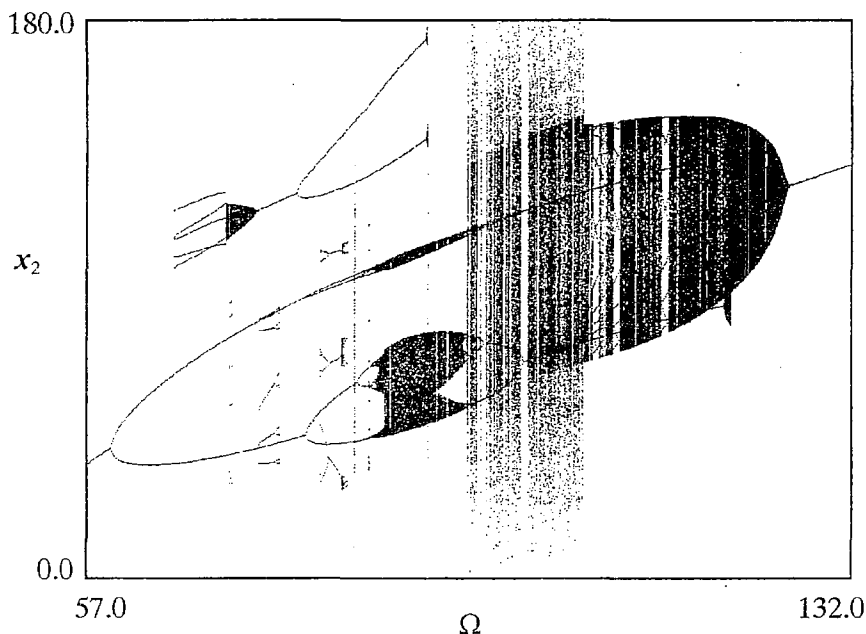


Рис. 6

отношении возможных типов движений и сценариев смены колебательных режимов при изменении параметров (см. также [18,19]).

Как видно из рис. 4, ветви $V_{m,k}$ взаимно пересекаются (см. также рис. 3,6,7). В областях их пересечений в зависимости от начальных условий могут реализоваться различные движения, а при определенных соотношениях радиусов областей притяжения локально-устойчивых циклов и величины случайных помех либо возникает хаотическая динамика, либо возможен катастрофический переход от детерминированной динамики к хаотической и обратно [21]. В [19] было выявлено, что в релейных системах недетерминированные режимы могут возникать и в случае существования единственного устойчивого периодического движения. Показано, что это происходит за счет перескока фазовой точки, при

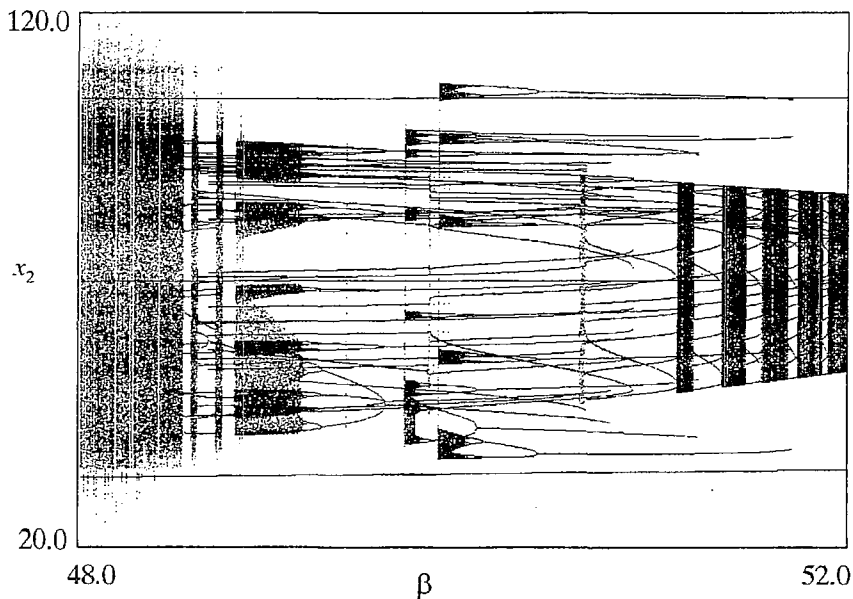


Рис. 7

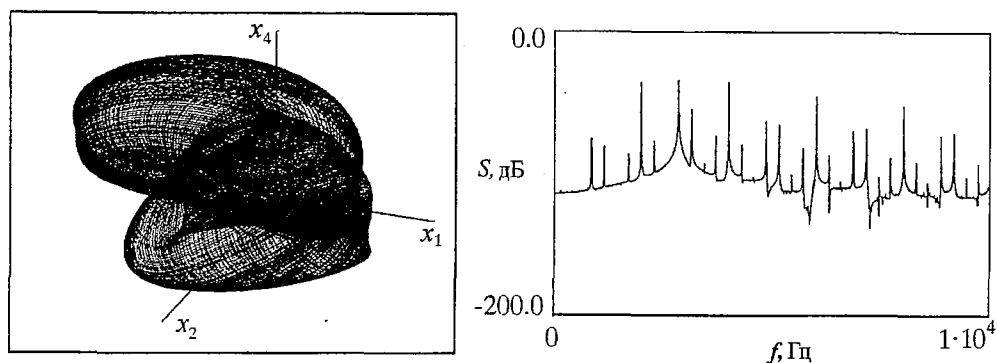


Рис. 8

наличии внешних возмущений, с одной части траектории одного и того же устойчивого периодического движения на другую вследствие малости радиуса внутренней области притяжения [12,21].

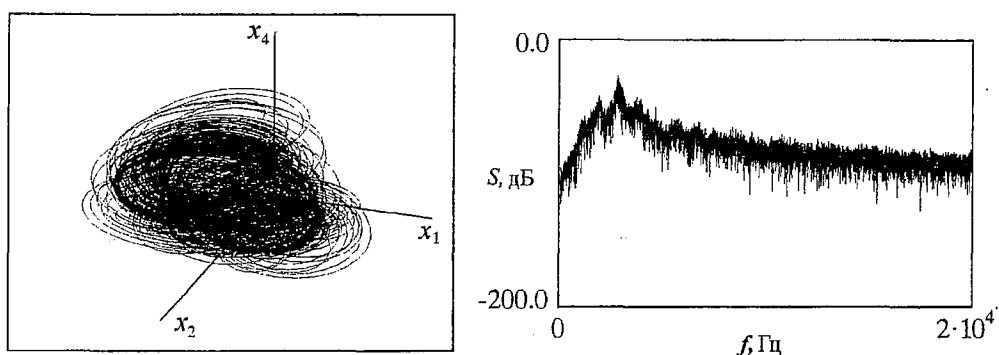


Рис. 9

Заключение

- Показано, что в релейных системах в широких диапазонах изменения параметров имеет место неединственность движений. Это является причиной функционирования системы в различных режимах, а при наличии случайных внешних воздействий возможен либо резкий (катастрофический) переход от одного динамического состояния к другому с различными динамическими характеристиками, в частности, от одного периодического движения к другому, либо чередование двух крайних типов движений — детерминированного и хаотического. Следствием последних является не только значительное увеличение динамических ошибок и ухудшение качественных показателей системы, но и внезапные отказы. Установлено, что катастрофические явления характерны для объектов с аномальной структурой.

- При проектировании сложных технических систем проблема различения структур приобретает большое значение. Так, например, Ю.И. Неймарк [30] обращает внимание на тот факт, что «в свое время были интересные и отчасти забытые работы И.И. Гальперина по выделению структурных схем линейных систем, устойчивых при любых значениях параметров, устойчивых в силу своей структуры. Сегодня во всем мире ищутся системы управления, малочувствительные к изменениям своих параметров или грубые, по терминологии Андронова — Понтрягина. В этом вопросе более важным является отыскание систем, робастных в силу своей структуры». Концепция нормальных структур [28,29], с позиций

которой рассмотрены динамические особенности релейной системы с гистерезисом, является важным шагом в этом направлении. Как указано в работе [29], дальнейшее развитие этой концепции связано, прежде всего, с исследованием множеств P_k^m и свойств полноты их в совокупности.

Автор выражает благодарность профессору Э. Мосекильде за поддержку и помощь в проведении исследований, за плодотворное сотрудничество, и профессору В.С. Анищенко за возможность обсуждения результатов и искренний интерес к представленной работе.

Библиографический список

1. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
2. Алексеев А.С. Электронная модель двухпозиционного регулятора температуры с зоной опережения // ДАН СССР. 1952. Т. 57, № 3. С. 393.
3. Алексеев А.С. Двухпозиционный регулятор температуры с зоной опережения // Памяти А.А. Андропова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С.45.
4. Митришкин Ю.В. Минимизация амплитуды автоколебаний в релейной системе управления с устойчивой линейной динамической частью // АиТ. 1989. № 9. С. 91.
5. Крутова И.Н. Исследование процесса стабилизации многомерной динамической системы с релейным управлением // АиТ. 1999. № 4. С. 27.
6. Крутова И.Н. Об устойчивости режима стабилизации космического аппарата с учетом уругих колебаний // АиТ. 1999. № 7. С. 44.
7. Постников Н.С. Стохастические колебания в ядерном реакторе с релейной системой регулирования // Атомная энергия. 1994. Т. 76, вып. 1. С. 3.
8. Postnikov N.S. Dynamic chaos in relay system with hysteresis // Computational Mathematics and Modeling. 1997. Vol. 8, № 3. P. 62.
9. Постников Н.С. Стохастичность релейных систем с гистерезисом // АиТ. 1998. № 3. С. 57.
10. Palmor Z.J. A general and exact method for determining limit cycles in decentralized relay systems // Automatica. 1995. № 31. P. 1333.
11. Holzhueter Th. Simulation of relay control systems using MATLAB/SIMULINK // Control Engineering Practice. 1998. № 6. P. 1089.
12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
13. Анищенко В.С. Сложные колебания простых систем. М.: Наука, 1990.
14. Mosekilde E. Topics in nonlinear dynamics: applications to physics, biology and economics systems. World Scientific, Singapore, 1996.
15. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
16. Жусубалиев Ж.Т., Емельянова Е.Ю. Анализ структуры С-бифуркационных границ кусочно-сшитой модели системы управления с широтно-импульсной модуляцией // Информационные технологии моделирования и управления: Межвуз. сб. науч. тр. Воронежский гос. техн. ун-т, 1999. С.68.
17. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-collision bifurcations including «period two to three» for piecewise smooth systems // Physica. 1992. D57. P.39.
18. Жусубалиев Ж.Т. Бифуркации и хаотические движения в динамике релейных систем автоматического регулирования // III Международная конференция «Распознавание-97»: Сборник докладов. Курск, 1997. С. 25.
19. Жусубалиев Ж.Т., Сухотерин Е.А., Рудаков В.Н. О бифуркациях и хаотических колебаниях в релейной системе автоматического регулирования с гистерезисом. М., 1999. 54 с. Деп. в ВИНТИ 20.08.1999, № 2698-B99.
20. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1992. № 8. С. 47.
21. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Михальченко С.Г. Стохастичность в

динамике стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // *Электричество*. 1996. № 3. С. 69.

22. Глазенко Т.А., Томасов В.С. Состояние и перспективы применения полупроводниковых преобразователей в приборостроении // *Изв. вузов. Приборостроение*. 1996. Т. 39, № 3. С. 6.

23. Кобзев А.В., Михальченко Г.Я., Музыченко Н.М. Модуляционные источники питания РЭА. Томск: Радио и связь, Томский отдел, 1990.

24. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Колоколов Ю.В., Терехин И.В. К расчету локальной устойчивости периодических режимов в импульсных системах автоматического регулирования // *АиТ*. 1992. № 6. С. 93.

25. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // *ПММ*. 1957. Т. 21. С. 658.

26. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

27. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.

28. Баушев В.С., Кобзев А.В., Михальченко Г.Я. Нормальные структуры устройств преобразования электрической энергии и автоматизация проектирования // *Проблемы преобразования электрической энергии: Тезисы докладов международной конференции*. М.: МЭИ, 1993. С. 38.

29. Баушев В.С., Кобзев А.В., Тановицкий Ю.Н. Нормальные структуры динамических объектов // *Аппаратно-программные средства автоматизации технологических процессов*. Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1997. С. 146.

30. Неймарк Ю.И. Динамическая система как основная модель современной науки // *АиТ*. 1999. № 3. С. 196.

*Курский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 14.02.2000
после доработки 6.06.2000*

CHAOTIC OSCILLATION IN PIECEWISE-LINEAR MODEL OF THE RELAY SYSTEM WITH HYSTERESIS

Zh.T. Zhusubaliyev

Dynamics of the relay system with hysteresis is investigated. Fields of periodic and chaotic oscillation in the parameter space are determined. Regularities of periodic motion arising are studied and associated bifurcations are determined.



Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – родился в Ошской области Киргизской ССР (1958). Окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР, 1982). После окончания ТИАСУР работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. В настоящее время работает доцентом кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в Томском политехническом институте (1989) по электротехническим комплексам и системам, включая их управление и регулирование, применение математического моделирования и нелинейной динамики в системах автоматического управления. Область научных интересов: нелинейная динамика и хаос, математическое моделирование нелинейных динамических систем, бифуркации и хаотические колебания в динамических системах с разрывными правыми частями, применение нелинейной динамики в теории импульсных и

релейных автоматических систем управления. Опубликовал около 80 научных работ по указанным направлениям. E-mail: cct@cafct.kursk.ru



РЕЖИМЫ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко, В.В. Матросов

Рассмотрена динамическая система на торе, описывающая поведение двух взаимосвязанных систем фазовой синхронизации. Исследуются режимы поведения систем в зависимости от начальных расстроек частот, отношения коэффициентов усиления цепей управления и степени связи через управляющие сигналы. Получены оценки бифуркационных значений этих параметров, позволяющие определить границы области захвата в режим синхронизации.

1. Данная работа является результатом продолжения исследований [1–5] динамических режимов при взаимодействии двух генераторов, управляемых с помощью систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Взаимодействие осуществляется через взаимные перекрестные связи и однонаправленную связь по цепям управления. Актуальность проводимого исследования определяется, с одной стороны, широким применением таких систем в задачах синтеза частот [6], синхронизации при приеме сложных сигналов [7,8], одновременной оценки фазы и угла поляризации линейно поляризованной электромагнитной волны в коммуникационных системах [9] и пр., а с другой стороны, связью с проблемами динамики нейронных сетей фазовых осцилляторов с центральным элементом [10] и связанных джозефсоновских переходов [11].

Рассматривается предельный случай, когда цепь фазового управления частотой каждого из парциальных генераторов не содержит фильтров низких частот. В этом случае динамика взаимодействующих генераторов с фазовым управлением описывается следующими уравнениями [2]:

$$d\varphi/d\tau = \gamma - \sin\varphi\cos\psi, \quad d\psi/d\tau = \beta - b\cos\varphi\sin\psi - \alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad (1)$$

в которых τ – безразмерное время; φ и ψ – рассогласования фаз, а γ и β – относительные начальные расстройки частот входного сигнала и колебаний парциальных управляемых генераторов; $b = k_2/k_1$, k_1 и k_2 – коэффициенты усиления цепей управления; α – параметр, характеризующий степень связи через сигналы рассогласований. Система (1) является динамической системой на двумерном торе $T = \{(\varphi, \psi) | -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq \pi\}$. Основная задача исследования модели (1) состоит в определении областей пространства параметров, в которых реализуется режим синхронизации с соответствующим ему устойчивым состоянием равновесия и асинхронные режимы, определяемые колебательно-вращательными и вращательными предельными циклами на торе T . Эта задача рассмотрена в [1,2] для значений параметров в области S_0 существования состояния равновесий

системы (1), где $C_0 = \{\max(\alpha\gamma - b(1-\gamma), \alpha\gamma - b(1+\gamma)) < \beta < \min(\alpha\gamma + b(1-\gamma), \alpha\gamma + b(1+\gamma))\}$. Целью данной работы является, во-первых, получение оценок областей значений параметров с различными движениями системы (1) в случаях $b \ll 1$ и $b \gg 1$, а во-вторых, изучение асинхронных движений при значениях α, β, γ, b вне области C_0 . Исследование проведено с помощью качественно-численных методов и моделирования с использованием комплекса программ, предназначенного для исследования процессов нелинейной динамики в моделях систем с фазовым и частотным управлением [12].

2. Система (1) при значениях $\alpha, \beta, \gamma, b \in C_0$ имеет на поверхности тора T восемь состояний равновесия: $A_1(\varphi_1, \psi_1), B_1(\varphi_1 - \pi, \psi_1 - \pi), C_1(\pi - \varphi_1, -\psi_1), D_1(-\varphi_1, \pi - \psi_1), A_2(\pi/2 - \psi_1, \pi/2 - \varphi_1), B_2(-\psi_1 - \pi/2, -\varphi_1 - \pi/2), C_2(\psi_1 + \pi/2, \varphi_1 - \pi/2), D_2(\psi_1 - \pi/2, \varphi_1 + \pi/2)$, где величины φ_1 и ψ_1 определяются равенствами

$$\varphi_1 = 1/2(\arcsin \delta_1 + \arcsin \delta_2), \quad \psi_1 = 1/2(\arcsin \delta_1 - \arcsin \delta_2),$$

в которых $\delta_1 = \gamma + (\beta - \alpha\gamma)/b, \delta_2 = \gamma - (\beta - \alpha\gamma)/b$. Анализируя корни соответствующих характеристических уравнений, устанавливаем, что состояния равновесия A_2, C_2, B_2 и D_2 являются седловыми. При значениях $\beta \leq \alpha\gamma$, а также при $\beta > \alpha\gamma$ в случае

$$\sigma = (1+b+\alpha)(1-\delta_1^2)^{1/2} + (1+b-\alpha)(1-\delta_2^2)^{1/2} > 0,$$

состояния равновесия A_1 и B_1 устойчивые, а состояния равновесия C_1 и D_1 неустойчивые; при значениях $\beta > \alpha\gamma, \sigma < 0$ состояния равновесия A_1 и B_1 неустойчивые, а состояния равновесия C_1 и D_1 устойчивые. Далее будем рассматривать систему (1) при значениях $\alpha < b$, когда $\sigma > 0$ и состояния равновесия A_1 и B_1 являются устойчивыми, а состояния равновесия C_1 и D_1 — неустойчивыми при всех значениях $\alpha, \beta, \gamma, b \in C_0$.

Каждому из устойчивых состояний равновесия A_1 и B_1 отвечает режим стационарной генерации управляемых генераторов. Реализация этих режимов означает установление состояния синхронизации в перекрестно связанных системах ФАПЧ, область C_0 соответствует области удержания этого состояния при изменении параметров α, β, γ, b ($\alpha < b$).

3. Рассмотрим систему (1) при значениях $b < 1$. На рис. 1 представлен качественный параметрический портрет системы на плоскости параметров γ, β^* ($\beta^* = \beta/b$), построенный по результатам численного исследования системы (1). Кривые 1 и 2 отвечают бифуркациям совпадения сепаратрис седел с образованием на торе T сепаратрисных связок (при этих бифуркациях предельные циклы не образуются, изменяются лишь области притяжения $\Pi(A_1)$ и $\Pi(B_1)$ состояний равновесия A_1 и B_1). Линии 3 и 4 — это границы области C_0 , штриховой линией проведена прямая $\beta^* = \alpha^*\gamma$ ($\alpha^* = \alpha/b$). Кривая 5 ($\beta^* = \beta_p^*$), берущая свое начало из точки М пересечения кривых 1 и 2, отвечает образованию на торе T четырех петель сепаратрис седел A_2, B_2

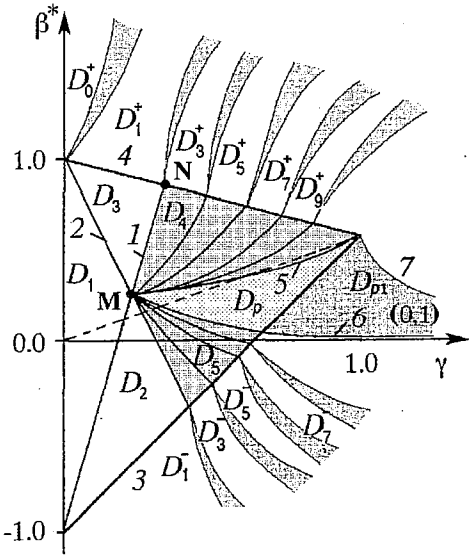


Рис. 1. Параметрический портрет системы (1) при $b < 1$

(неустойчивых), C_2, D_2 (устойчивых), охватывающих тор в направлении φ (φ -петель). Кривая 6 ($\beta^* = \beta_{c^*}$), также исходящая из точки M , и кривая 7 ($\beta^* = \beta_{c0^*}$) соответствуют двойным предельным циклам колебательно-вращательного типа. Заметим, что предельные циклы на торе принято характеризовать парой чисел (k, l) , где k и l – число оборотов, совершаемых изображающей точкой за один период цикла, по переменным ψ и φ , соответственно. Предельные циклы, образующиеся при $\beta^* = \beta_{c^*}$ и $\beta^* = \beta_{c0^*}$, имеют числа $k=0, l=1$ (такие циклы называют φ -циклами).

Бифуркационные кривые 1, 2, 5 и 6 выделяют в C_0 области D_1, \dots, D_5 и D_p . Фазовый портрет системы (1), соответствующий области D_1 , приведен на рис. 2, а; рис. 2, б, в показывают изменение этого фазового портрета при переходе через кривую 1 в область D_2 (б) и при переходе через кривую 2 в область D_3 (в). В области D_p на торе T существуют четыре предельных цикла с $k=0, l=1$: устойчивые L_1 и L_2 и неустойчивые Γ_1 и Γ_2 (г). Циклы L_1 и L_2 определяют асинхронные режимы перекрестно связанных систем ФАПЧ, при которых разность фаз φ неограниченно нарастает, а разность фаз ψ периодически изменяется относительно некоторого среднего значения.

Области D_4 и D_5 примечательны тем, что здесь на торе T реализуются бифуркации сепаратрисных связей, при которых сепаратрисы-седла охватывают тор в направлении φ . Численное исследование этих бифуркаций показывает, что соответствующие им бифуркационные кривые на плоскости (γ, β^*) исходят из точки M и оканчиваются в точках кривых 3 и 4. На рис. 1 изображено качественно расположение некоторых бифуркационных кривых сепаратрисных связей в областях D_4 и D_5 .

Для значений параметров из области $D_s = C_0 \setminus D_p$ единственным стационарным движением связанных систем является состояние синхронизации, которое в

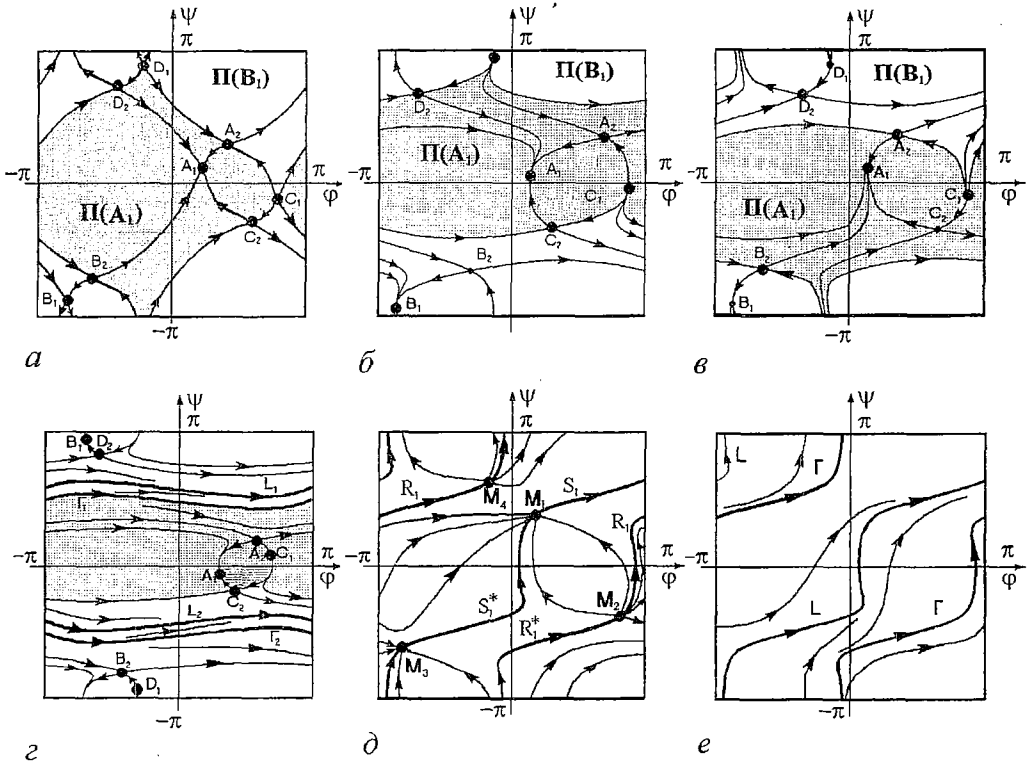


Рис. 2. Фазовые портреты при $b < 1$

соответствии с фазовыми портретами, приведенными на рис. 2, а–в, реализуется при любых начальных условиях. Для значений параметров из области D_p состояние синхронизации сосуществует с асинхронными режимами ϕ -циклов L_1 и L_2 (рис. 2, з). Какой из режимов при этом устанавливается в системе, зависит от начальных условий и определяется тем, какой из областей притяжения (состояний равновесия A_1 и B_1 или ϕ -циклов L_1 и L_2) принадлежит начальное состояние системы. Отметим, что причиной появления в C_0 области D_p является связь через управляющие сигналы систем ФАПЧ.

Численное исследование системы (1) при значениях параметров вне области C_0 показывает, что на линии 3 и 4 (границы области C_0) в точках их смыкания с кривыми сепаратрисных связей опираются клиновидные области квазипериодических движений. Эти области ограничены бифуркационными кривыми, соответствующими двойным предельным циклам системы (1). На рис. 1 штриховкой приблизительно отмечено расположение некоторых областей с квазипериодическими движениями на торе T . Области D_0^+ , D_{2i+1}^+ , D_{2i+1}^- , ($i=1,2,3,\dots$), расположенные между областями квазипериодических движений, и область D_{p1} , ограниченная частями линий 3 и 6 и кривой 7, соответствуют существованию на торе T предельных циклов системы (1): при значениях параметров из области D_{p1} существуют предельные циклы L_1 , Γ_1 , L_2 и Γ_2 с $k=0$, $l=1$; в областях D_{2i+1}^+ существует пара предельных циклов (устойчивый и неустойчивый), которые характеризуются значениями $k=1$, $l=2i+1$; в областях D_{2i+1}^- существуют устойчивый и неустойчивый циклы с $k=-1$, $l=2i+1$ (знак минус означает изменение на противоположное направления движения фазовой точки на цикле по переменной ψ); в области D_0^+ существуют четыре предельных цикла (два устойчивых и два неустойчивых) с $k=1$, $l=0$, то есть четыре ψ -цикла.

При переходе с увеличением (с уменьшением) параметра β^* из области C_0 через границу 4 (через границу 3) в области D_{2i+1}^+ (в области D_{2i+1}^-) предельные циклы с $k=1$, $l=2i+1$ (с $k=-1$, $l=2i+1$) образуются в результате бифуркаций сепаратрисных контуров седло–узлов состояний равновесия. В качестве примера на рис. 2 приведены фазовые портреты системы (1) для части линии 4 (см. рис. 1) слева от точки N (рис. 2, д) и для области D_1^+ (рис. 2, е). Рис. 2, д иллюстрирует сепаратрисные контуры седло–узлов M_1 и M_3 и седло–узлов M_2 и M_4 с $k=l=1$, а на рис. 2, е показаны устойчивый L и неустойчивый Γ предельные циклы с $k=l=1$, родившиеся из этих петель.

Пересечение с изменением γ и β левых границ областей квазипериодических движений при переходе на параметрическом портрете $\{\gamma, \beta^*\}$ (см. рис. 1) из области D_{2i+1}^+ (из области D_{2i+1}^-) в область D_{2i+3}^+ (в область D_{2i+3}^-) приводит к исчезновению пары предельных циклов (устойчивого и неустойчивого) с $k=\pm 1$, $l=2i+1$. При пересечении с изменением γ и β в указанном направлении правых границ областей квазипериодических движений на торе T образуется пара предельных циклов (устойчивый и неустойчивый) с $k=\pm 1$, $l=2i+1$. При продолжении движения по параметрам γ и β и пересечении бифуркационных линий β_{c0}^* или β_c^* происходит рождение предельных ϕ -циклов L_1 , Γ_1 , L_2 и Γ_2 с $k=0$, $l=1$. На рис. 3 даны фазовые портреты системы (1), построенные при значениях $\gamma=1.05$, $b=0.1$, $\alpha=0.025$ и при изменении β^* от 10 до 0.2, иллюстрирующие устойчивые предельные циклы с $(k, l)=(1,1)$; (1,3); (1,5); (1,7); (1,9); (1,11) и (0,1) и квазипериодические движения, наблюдаемые при значениях параметров вне области C_0 .

Численное исследование системы (1) в областях квазипериодических движений показывает, что эти области неоднородны. В них содержатся как точки, соответствующие квазипериодическим движениям, так и точки, отвечающие предельным циклам, индексы вращения которых отличны от $(\pm 1, 2i+1)$.

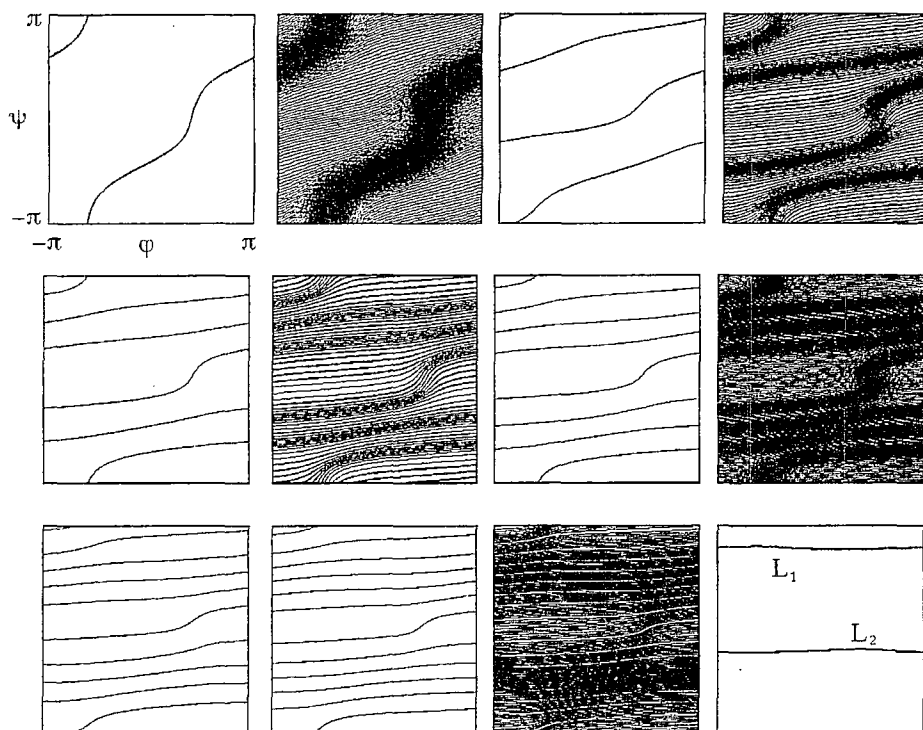


Рис. 3. Периодические и квазипериодические движения, наблюдаемые вне области C_0

4. Рассмотрим асимптотическое поведение кривых β_p^* , β_c^* и β_{c0}^* при значениях $b \ll 1$. При помощи замены $d\tau_1 = (\gamma - \sin\phi \cos\psi) dt$ систему (1) преобразуем к системе

$$d\phi/d\tau_1 = 1 = \partial H(\phi, \psi) / \partial \psi + \mu p(\phi, \psi), \quad (2)$$

$$d\psi/d\tau_1 = \mu(\beta^* - \cos\phi \sin\psi - \alpha^* \sin\phi \cos\psi) / (\gamma - \sin\phi \cos\psi) = -\partial H(\phi, \psi) / \partial \phi + \mu q(\phi, \psi),$$

где $H(\phi, \psi) = \psi$, $p(\phi, \psi) = 0$, $q(\phi, \psi) = (\beta^* - \cos\phi \sin\psi - \alpha^* \sin\phi \cos\psi) / (\gamma - \sin\phi \cos\psi)$, $\mu = b$. Исследование системы (2) проведем методом малого параметра (методом Понтрягина [13]). При $\mu = 0$ система (2) является консервативной, ее фазовые траектории определяются уравнением $H(\phi, \psi) = h$ ($h = \text{const}$) и представляют собой замкнутые кривые, охватывающие тор T в направлении ϕ (при $0 < \gamma < 1$ эти кривые для значений $h_1 < h < h_2$, $-h_2 < h < -h_1$, где $h_1 = \arccos \gamma$, $h_2 = \pi - h_1$, расположены в области $\gamma - \sin\phi \cos\psi > 0$). Значения h , соответствующие замкнутым кривым консервативной системы, от которых при малых $\mu > 0$ рождаются ϕ -циклы системы (2), находятся из уравнения

$$\Psi_1(h) = \int_{\psi=h} [q(\phi, \psi) - p(\phi, \psi)] d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} (\beta^* - \cos\phi \sin\psi - \alpha^* \sin\phi \cos\psi) / (\gamma - \sin\phi \cos\psi) d\phi = 0.$$

Функция $\Psi_1(h) = 2\pi(\alpha^* + (\beta^* - \alpha^* \gamma) / (\gamma^2 - \cos^2 h)^{1/2})$. При $\beta^* < 0$ функция $\Psi_1(h) < 0$, а при $\beta^* > \alpha^* \gamma$ функция $\Psi_1(h) > 0$, следовательно, при этих значениях β^* , γ , α^* уравнение $\Psi_1(h) = 0$ не имеет корней. При значениях $0 < \beta^* < \min[\alpha^* \gamma, \alpha^* (\gamma - (\gamma^2 - 1)^{1/2})]$ существует четыре корня уравнения $\Psi_1(h) = 0$:

$$h_1^* = \arccos[\gamma^2 - (\beta^* - \alpha^* \gamma)^2 / \alpha^{*2}]^{1/2}, \quad h_2^* = \pi - h_1^*,$$

$$h_3^* = -h_1^*, \quad h_4^* = -h_2^* \quad (h_2^* < h_1^* < \pi/2).$$

Значениям h_1^* , h_2^* , h_3^* и h_4^* соответствуют четыре ϕ -цикла Γ_1, L_1, L_2 и Γ_2 . Циклы L_1 и L_2 устойчивые, так как $\Psi_{1h}'(h_{2,3}^*) < 0$, а циклы Γ_1 и Γ_2 неустойчивые, так как $\Psi_{1h}'(h_{1,4}^*) > 0$. При значениях $\beta^* = \alpha^* \gamma$, $\gamma < 1$ происходит стягивание предельных циклов L_1, L_2, Γ_1 и Γ_2 к петлям сепаратрис седел D_2, C_2, A_2 и B_2 , соответственно. При $\beta^* = 0$ на торе T существуют два двойных предельных цикла, один из которых образуется в результате слияния ϕ -циклов L_1 и Γ_1 , а другой – в результате слияния циклов L_2 и Γ_2 . При $\beta^* = \alpha^*(\gamma - (\gamma^2 - 1)^{1/2})$, $\gamma > 1$ система (2) также имеет два двойных предельных цикла: один из них возникает при слиянии ϕ -циклов L_2 и Γ_1 , а другой – при слиянии ϕ -циклов L_1 и Γ_2 .

На рис. 4 приведены бифуркационные кривые $\beta^* = \alpha^* \gamma$ (кривая 5), $\beta^* = 0$ (кривая 6) и $\beta^* = \alpha^*(\gamma - (\gamma^2 - 1)^{1/2})$ (кривая 7), выделяющие на плоскости параметров (γ, β^*) области D_{s0}, D_{p0}, D_{p1}^* и D_0 . Область D_{s0} , в которой отсутствуют предельные циклы системы (2), соответствует состоянию синхронизации связанных систем ФАПЧ. В области D_{p0} в зависимости от начальных условий реализуются либо состояние синхронизации, либо асинхронные режимы ϕ -циклов L_1 и L_2 . В области D_{p1}^* существуют только асинхронные режимы циклов L_1 и L_2 . В области D_0 реализуются периодические и квазипериодические движения. Области D_{s0}, D_{p0} и D_{p1}^* дают асимптотическое представление изображенных на рис. 1 областей D_s, D_p и D_{p1} , соответственно, при $b \ll 1$ ($D_s > D_{s0}$, при $b \rightarrow 0$ $D_s \rightarrow D_{s0}$, $\beta_p^* \rightarrow \alpha^* \gamma$, $\beta_c^* \rightarrow 0$, $\beta_{c1}^* \rightarrow \alpha^*(\gamma - (\gamma^2 - 1)^{1/2})$; $D_p < D_{p0}$, $D_p \rightarrow D_{p0}$ при $b \rightarrow 0$; $D_{p1} < D_{p1}^*$, $D_{p1} \rightarrow D_{p1}^*$ при $b \rightarrow 0$). Области D_{s0}, D_{p0} и D_{p1}^* могут использоваться в качестве аналитических оценок областей D_s, D_p и D_{p1} , тем более точных, чем меньше b .

5. Численное исследование системы (1) показывает, что при увеличении параметра b до значения $b=1$ бифуркационные кривые 1 и 2 (см. рис. 1) приближаются к границам области C_0 – кривым 3 и 4, область D_p уменьшается и исчезает; при $b=1$ область D_s совпадает с областью C_0 .

Рассмотрим систему (1) при значениях $b > 1$. На рис. 5 приведен качественный параметрический портрет $\{\gamma, \beta^*\}$, построенный по результатам численного исследования системы (1) при $b > 1$. Кривые 1, 2, 3 отвечают сепаратрисным связкам, не охватывающим тор T . На рис. 6 даны фазовые портреты системы (1) для областей D_6, \dots, D_9 , выделяемых кривыми 1, 2 и 3, при значениях $\gamma > 0$. В этих областях система (1) не имеет предельных циклов. Рис. 6

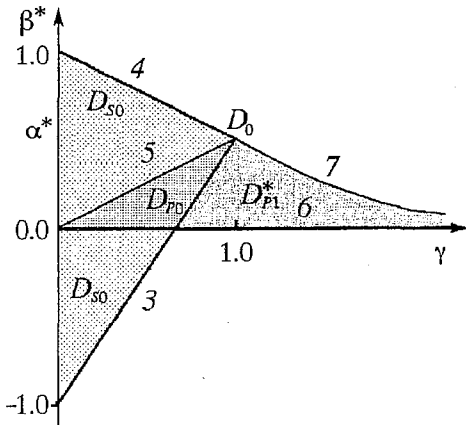


Рис. 4. Расположение бифуркационных кривых при значениях $b \ll 1$

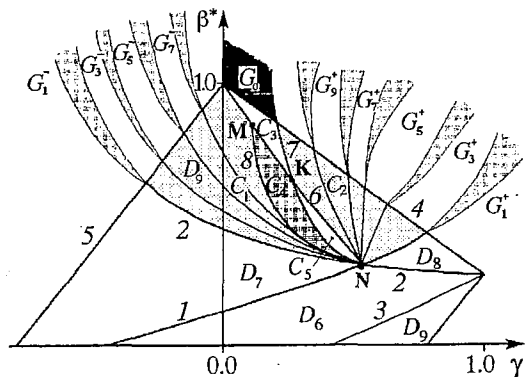


Рис. 5. Параметрический портрет системы (1) при $b > 1$

показывает изменение областей притяжения $\Pi(A_1)$ и $\Pi(B_1)$ состояний равновесия A_1 и B_1 в результате бифуркаций сепаратрисных связок.

В области D_α , заключенной между частями линий 1, 3, 4 и 5, установлено существование еще трех бифуркационных кривых: $\beta^* = \beta_{p1}^*$ (кривая б), $\beta^* = \beta_{c2}^*$

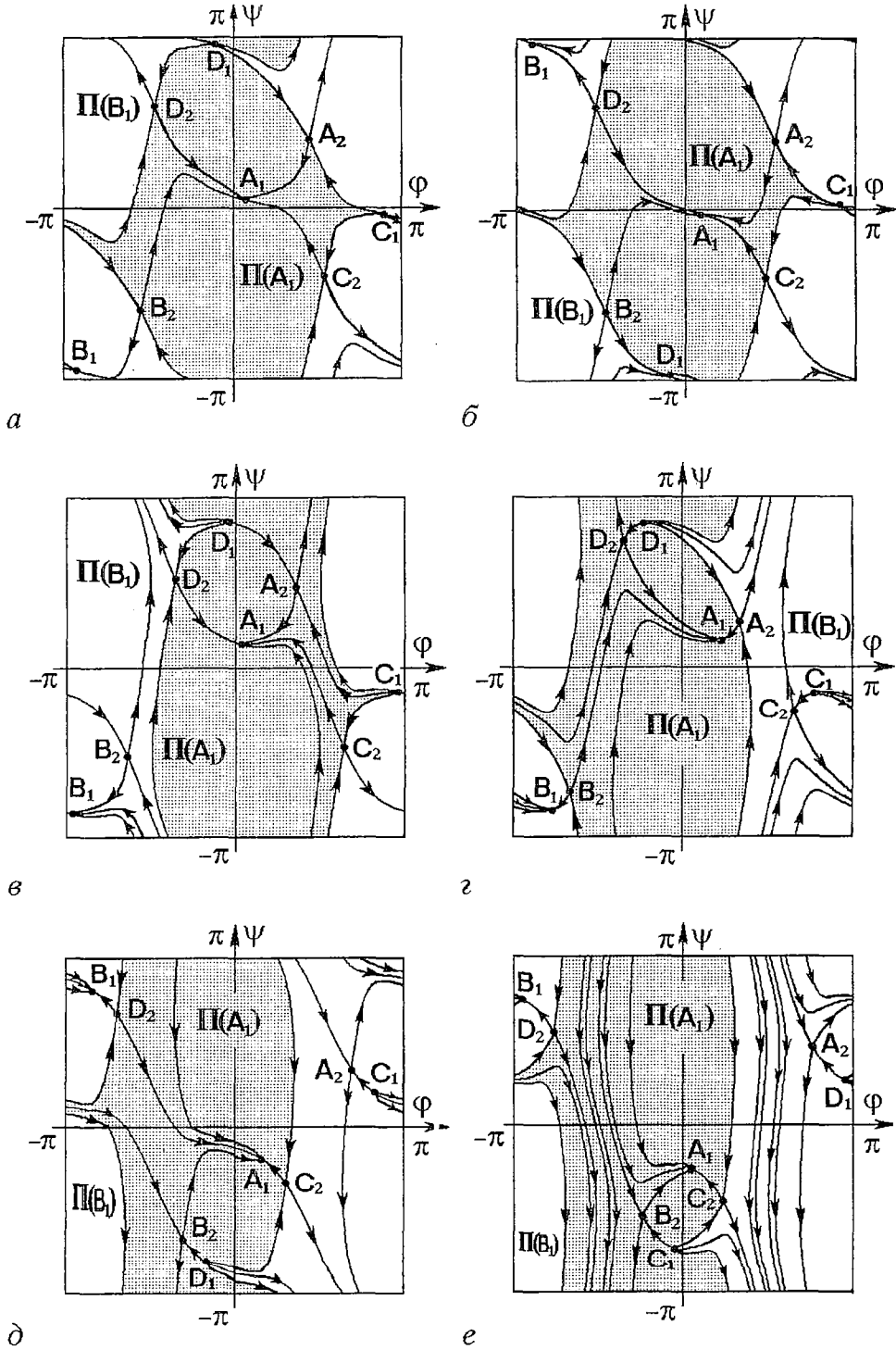
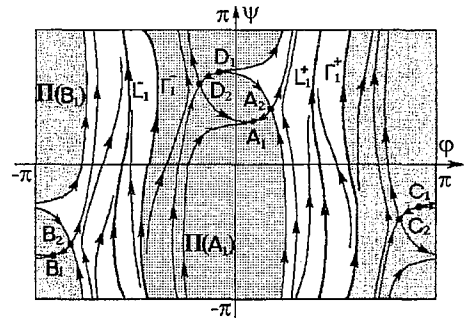


Рис. 6. Фазовые портреты, соответствующие значениям параметров из области C_s .

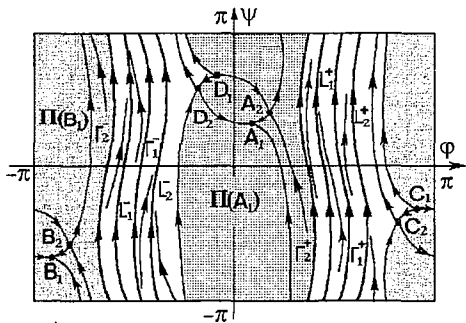
(кривая 7), $\beta^* = \beta_{c3}^*$ (кривая 8), исходящих из точки N пересечения кривых 1 и 2. Кривая β_{p1}^* соответствует образованию на торе T четырех петель сепаратрис седел A_2, B_2, C_2 и D_2 , охватывающих тор в направлении ψ (ψ -петель). Петли сепаратрис седел A_2 и B_2 устойчивы при $\beta_{p1}^* > \beta_{p0}^*$ и неустойчивы при $\beta_{p1}^* < \beta_{p0}^*$, петли сепаратрис седел C_2 и D_2 устойчивы при $\beta_{p1}^* < \beta_{p0}^*$ и неустойчивы при $\beta_{p1}^* > \beta_{p0}^*$, где β_{p0}^* находится из условия обращения в ноль седловой величины седел A_2, B_2, C_2 и D_2 , которое записывается в виде $(1+b+\alpha)(1-\delta_1^2)^{1/2} - (1+b-\alpha)(1-\delta_2^2)^{1/2} = 0$ [2]. Кривые β_{c2}^* и β_{c3}^* отвечают двойным предельным циклам на торе T , характеризующимся числами $k=1, l=0$ (ψ -циклам). При $\beta^* = \beta_{c2}^*$ существуют два таких цикла (один в области $0 < \varphi < \pi$, другой в области $-\pi < \varphi < 0$), а при $\beta^* = \beta_{c3}^*$ — четыре (два в области $0 < \varphi < \pi$ и два в области $-\pi < \varphi < 0$). На рис. 5 расположение бифуркационных кривых $\beta_{p1}^*, \beta_{c2}^*$ и β_{c3}^* дано в случае, когда точка К пересечения кривых β_{p1}^* и β_{c2}^* находится на кривой β_{p1}^* ниже точки М, соответствующей $\beta^* = \beta_{p0}^*$. На части кривой β_{p1}^* выше (ниже) точки М петли сепаратрис седел A_2 и B_2 устойчивы (неустойчивы), а петли сепаратрис седел D_2 и C_2 неустойчивы (устойчивы).

Кривые 6, 7 и 8 определяют в области D_α области C_1, \dots, C_5 (см. рис. 5). В областях C_1 и C_2 система (1) не имеет предельных циклов. При переходе с изменением параметров через часть кривой 6 выше точки М из области C_1 в область C_3 возникают четыре предельных ψ -цикла (c $k=1, l=0$): устойчивые L_1^+ и L_1^- и неустойчивые Γ_1^+ и Γ_1^- ($L_1^+, \Gamma_1^+ \in \{0 < \varphi < \pi\}, L_1^-, \Gamma_1^- \in \{-\pi < \varphi < 0\}$). Фазовый портрет системы (1) в области C_3 приведен на рис. 7, а. Его особенностью является наличие на торе T четырех областей притяжения: $\Pi(A_1)$ и $\Pi(B_1)$ состояний равновесия A_1 и B_1 , $\Pi(L_1^+)$ и $\Pi(L_1^-)$ ψ -циклов L_1^+ и L_1^- . Циклы L_1^+ и L_1^- определяют асинхронные режимы связанных систем ФАПЧ, в которых ψ неограниченно нарастает, а φ периодически изменяется относительно некоторого среднего значения. С приближением в области C_3 к кривой 7 ψ -циклы L_1^+ и Γ_1^+ , а также ψ -циклы L_1^- и Γ_1^- сближаются. При пересечении линии 7 и переходе в область C_2 эти циклы исчезают в результате слияния L_1^- и Γ_1^- , L_1^+ и Γ_1^+ .

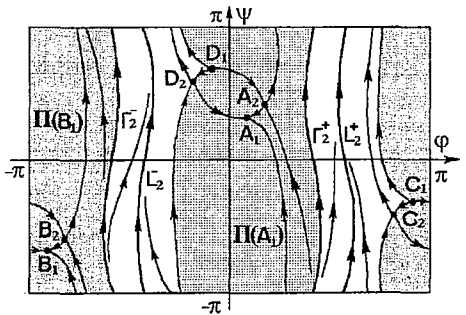
При переходе из области C_3 в область C_4 через часть МК кривой 6 на торе T при наличии циклов L_1^+, Γ_1^+, L_1^- ,



а



б



в

Рис. 7. Фазовые портреты для параметров из области C_p

Γ_1^- возникают еще четыре ψ -цикла: устойчивые L_2^+ и L_2^- и неустойчивые Γ_2^+ и Γ_2^- из петель сепаратрис седел C_2, D_2 и A_2, B_2 . Фазовый портрет системы (1) в области C_4 изображен на рис. 7, б; он стал сложнее, чем в области C_3 – теперь на торе T имеется шесть областей притяжения: $\Pi(A_1)$ и $\Pi(B_1)$ состояний равновесия A_1 и B_1 , $\Pi(L_1^+)$, $\Pi(L_2^+)$, $\Pi(L_1^-)$ и $\Pi(L_2^-)$ ψ -циклов L_1^+, L_2^+, L_1^- и L_2^- . При приближении с изменением параметров в области C_4 к кривой δ сближаются ψ -циклы L_1^+ и Γ_2^+ , L_2^+ и Γ_1^+ , L_1^- и Γ_2^- , L_2^- и Γ_1^- . При пересечении линии δ и переходе в область C_1 эти циклы исчезают в результате слияния L_1^+ и Γ_2^+ , L_2^+ и Γ_1^+ , L_1^- и Γ_2^- , L_2^- и Γ_1^- .

При переходе с изменением γ и β^* из области C_4 в область C_5 через часть НК кривой 7 исчезают ψ -циклы L_1^+, Γ_1^+, L_1^- и Γ_1^- , в области C_5 на торе T существуют ψ -циклы L_2^+, Γ_2^+, L_2^- и Γ_2^- (рис. 7, в). С приближением в области C_5 к линии δ ψ -циклы L_2^+ и Γ_2^+ , а также ψ -циклы L_2^- и Γ_2^- удаляются один от другого. При пересечении с изменением γ и β^* части НК кривой δ предельные циклы L_2^+, L_2^-, Γ_2^+ и Γ_2^- исчезают, сливаясь с соответствующими петлями сепаратрис седел C_2, D_2, A_2 и B_2 . В результате фазовый портрет, приведенный на рис. 7, в, преобразуется в фазовый портрет, качественно аналогичный показанному на рис. 6, в.

Для значений параметров из области $C_s = C_0 \setminus C_p$, где $C_p = C_3 \cup C_4 \cup C_5$, в системе при любых начальных условиях реализуется состояние синхронизации. Для параметров из области C_p состояние синхронизации сосуществует с асинхронными режимами ψ -циклов L_1^+, L_1^-, L_2^+ и L_2^- .

В области D_α существуют еще бифуркационные кривые, соответствующие сепаратрисным связкам, охватывающим тор T в направлении ψ . Как показали результаты численного исследования системы (1), эти линии исходят из точки N , проходят в областях C_1 и C_2 и оканчиваются в точках границ 4 и 5 области C_0 . На рис. 5 изображено качественно расположение некоторых из этих линий. Из точек смыкания кривых сепаратрисных связок и границ 4 и 5 берут начало проходящие вне области C_0 бифуркационные кривые, соответствующие двойным предельным циклам на торе T . Вид некоторых из них показан на рис. 5. Эти кривые, кривая 7 и часть линии $\gamma=0$ при $\beta^* > 1$ выделяют вне C_0 области G_0, G_{2i+1}^+ и G_{2i+1}^- ($i=0,1,2,3,\dots$) существования предельных циклов и области квазипериодических движений системы (1), отмеченные на рис. 5 штриховкой.

В области G_0 на торе T существуют ψ -циклы L_1^+, Γ_1^+, L_1^- и Γ_1^- (рис. 7, а). В областях G_{2i+1}^+ и G_{2i+1}^- на торе T существует по паре предельных циклов (устойчивого и неустойчивого), которые характеризуются значениями $k=2i+1, l=1$ в областях G_{2i+1}^+ и значениями $k=2i+1, l=-1$ в областях G_{2i+1}^- . Пересечение с изменением параметров γ и β^* левых (правых) границ областей квазипериодических движений при переходе из области G_{2i+3}^+ в область G_{2i+1}^+ (из области G_{2i+3}^- в G_{2i+1}^-) приводит к исчезновению предельных циклов с $k=2i+3, l=1$ (с $k=2i+3, l=-1$). При пересечении с изменением γ и β^* в указанном направлении правых (левых) границ областей квазипериодических движений на торе T образуется пара предельных циклов (устойчивый и неустойчивый) с $k=2i+1, l=\pm 1$.

Установленные свойства движений системы (1) вне области C_0 иллюстрирует приведенная на рис. 8 бифуркационная диаграмма $\{\gamma, \phi\}$, соответствующая значениям $b=10.0, \beta^*=1.1, \alpha^*=0.25$. Стартовым состоянием системы при $\gamma=0.1$ (то есть в области G_0) является ψ -цикл L_1^- , параметр γ изменяется от 0.1 до 5.0. Диаграмма $\{\gamma, \phi\}$ характеризует процесс преобразования ψ -цикла L_1^- в устойчивый предельный цикл с $k=1, l=1$ при переходе с увеличением γ из области G_0 в область G_1^+ . На рис. 9 показаны фазовые портреты системы (1), иллюстрирующие некоторые из устойчивых предельных циклов и квазипериодические движения.

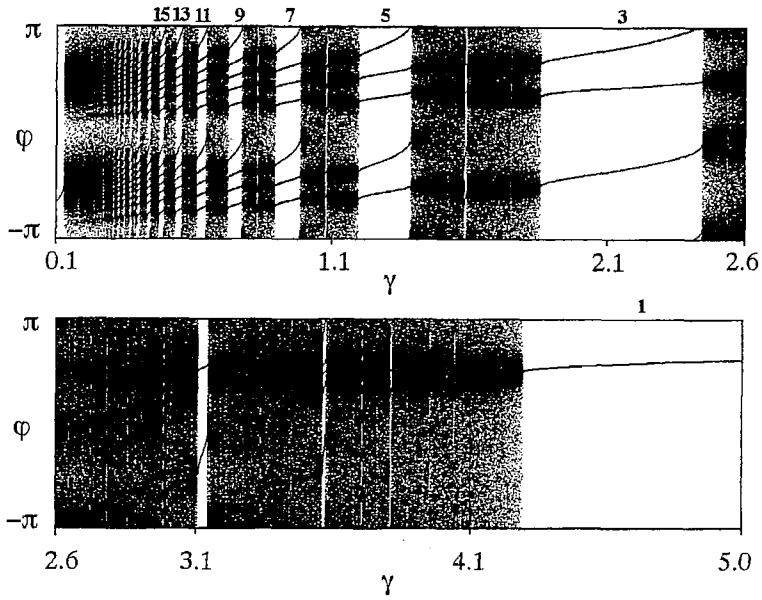


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма $\{\gamma, \varphi\}$

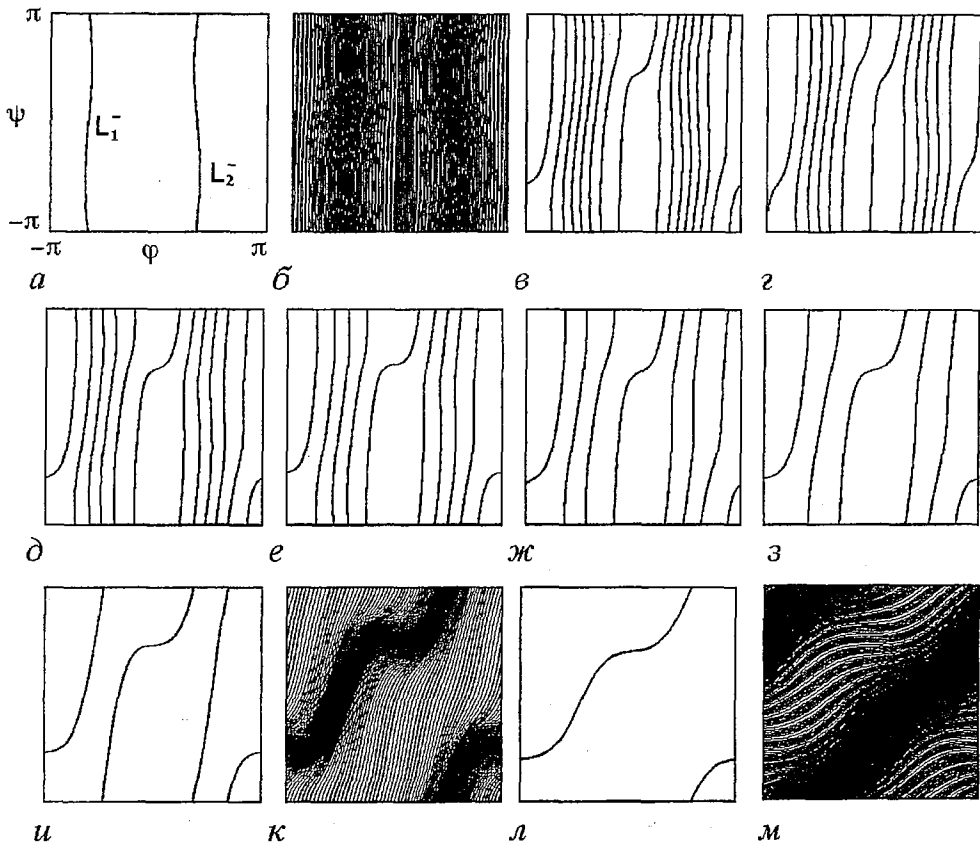


Рис. 9. Периодические (а, в-и, л) и квазипериодические (б, к, м) движения, реализуемые вне области S_0 со значениями (k, l) : а - (1, 0); в - (15, 1); г - (13, 1); д - (11, 1); е - (9, 1); ж - (7, 1); з - (5, 1); и - (3, 1); л - (1, 1)

6. Рассмотрим асимптотическое поведение бифуркационных кривых β_{p1}^* , β_{c2}^* и β_{c3}^* при значениях $b \gg 1$. Производя замену $d\tau_2 = (\beta - b \cos \psi \sin \psi - \alpha \sin \psi \cos \psi) \text{sign} \beta d\tau$, не изменяющую направление движения по траекториям в области $(\beta - b \cos \psi \sin \psi - \alpha \sin \psi \cos \psi) \text{sign} \beta > 0$, получим вместо системы (1) систему с малым параметром $\mu_1 = 1/b \ll 1$

$$d\psi/d\tau_2 = -\text{sign} \beta, \quad d\phi/d\tau_2 = -\mu_1 (\gamma - \sin \phi \cos \psi) \text{sign} \beta / (\beta^* - \cos \phi \sin \psi - \alpha \sin \phi \cos \psi). \quad (3)$$

Исследование системы (3) проведем методом малого параметра аналогично тому, как было выполнено исследование системы (2).

При $\mu_1 = 0$ система (3) является консервативной, ее фазовые траектории определяются уравнением $\phi = h$ ($h = \text{const}$) и представляют собой замкнутые кривые, охватывающие тор T в направлении ψ . Функция Понтрягина для системы (3) имеет вид

$$\Psi_2(h) = 2\pi \alpha^* \sin^2 h \text{sign} \beta / (\alpha^{*2} \sin^2 h + \cos^2 h) + \\ + 2\pi [\gamma - \alpha^* \beta^* \sin^2 h / (\alpha^{*2} \sin^2 h + \cos^2 h)] / (\beta^{*2} - \alpha^{*2} \sin^2 h - \cos^2 h)^{1/2},$$

где $h \in (h_3 \leq h \leq h_4) \cup (-h_4 \leq h < -h_3)$ при $\alpha^* < \beta^* < 1$; $h \in [-\pi, \pi]$ при $\beta^* > 1$; $h_3 = \arcsin[(1 - \beta^{*2}) / (1 - \alpha^{*2})]^{1/2}$, $h_4 = \pi - h_3$.

Уравнение $\Psi_2(h) = 0$ не имеет корней, а система (3) не имеет ψ -циклов при следующих значениях параметров: при $\alpha^* < \beta^* < \beta_{01}^*$, где $\beta_{01}^* = \{\beta^* = \beta_{02}^*, 0 \leq \gamma < \alpha^*\} \cup \{\beta^* = \beta_{03}^*, \alpha^* \leq \gamma < 1\}$, $\beta_{02}^* = 1 - \gamma(1 - \alpha^{*2}) / (2\alpha^*)$, $\beta_{03}^* = \alpha^*(1 + \gamma^2) / (2\gamma)$, когда $\Psi_2(h) < 0$; при $\beta^* > \max(\beta_{03}^*, \beta_{04}^*)$, при $-1 < \beta^* < -\alpha^*$, $\gamma \leq 0$ и при $\beta^* \leq -1$, $\gamma > 0$, где $\beta_{04}^* = \{\beta^* = \beta_{05}^*, 0 \leq \gamma < 1\} \cup \{\beta^* = \alpha^*, \gamma \geq 1\}$, $\beta_{05}^* = -\gamma(1 - \alpha^{*2}) / (2\alpha^*) + [\gamma^2(1 - \alpha^{*2}) / (4\alpha^{*2}) + 1]^{1/2}$, когда $\Psi_2(h) > 0$.

При значениях $\beta_{02}^* < \beta^* < \min(\beta_{03}^*, \beta_{05}^*)$ уравнение $\Psi_2(h) = 0$ имеет восемь корней:

$$h_{1,2}^* = \arcsin[\gamma / (2\alpha^{*2}(2\alpha^*\beta^* + \gamma(1 - \alpha^{*2}))) \mp [(2\alpha^*\beta^* + \gamma(1 - \alpha^{*2}))^2 \mp 4\alpha^{*2}]^{1/2}]^{1/2},$$

$$h_{3,4}^* = \pi - h_{2,1}^*, \quad h_{5,6}^* = -h_{1,2}^*, \quad h_{7,8}^* = -h_{3,4}^*.$$

При этом производная $\Psi'_{2h}(h_j^*) < 0$ для $j = 2, 4, 5, 7$, $\Psi'_{2h}(h_j^*) > 0$ для $j = 1, 3, 6, 8$. Корни h_2^* , h_4^* , h_5^* и h_7^* соответствуют устойчивым предельным циклам L_1^+ , L_2^+ , L_2^- и L_1^- , а корни h_1^* , h_3^* , h_6^* и h_8^* — неустойчивым предельным циклам Γ_2^+ , Γ_1^+ , Γ_1^- и Γ_2^- системы (3), которые характеризуются значениями $k=1$, $l=0$ (рис. 7, б).

При значениях $\beta_{03}^* < \beta^* < \beta_{05}^*$ уравнение $\Psi_2(h) = 0$ имеет четыре корня h_1^* , h_4^* , h_5^* и h_8^* , которым соответствуют предельные циклы Γ_2^+ , L_2^+ , L_2^- и Γ_2^- (рис. 7, в). При $\beta_{05}^* < \beta^* < \beta_{03}^*$, $\gamma > 0$ также существуют четыре корня уравнения $\Psi_2(h) = 0$ — h_2^* , h_3^* , h_6^* и h_7^* , которым соответствуют предельные циклы L_1^+ , Γ_1^+ , Γ_1^- и L_1^- (рис. 7, а).

Значения $\beta^* = \beta_{02}^*$, $\beta^* = \beta_{03}^*$ и значения $\gamma = 0$, $|\beta^*| \geq 1$, соответствующие существованию двойных корней уравнения $\Psi_2(h) = 0$, отвечают бифуркациям двойных предельных циклов системы (3). При $\beta^* = \beta_{02}^*$ система (3) имеет четыре двойных предельных ψ -цикла, которые образуются в результате слияния циклов L_1^+ и Γ_2^+ , L_2^- и Γ_1^- , L_2^+ и Γ_1^+ , L_1^- и Γ_2^- . При $\beta^* = \beta_{03}^*$ существуют два двойных ψ -цикла, которые образуются в результате слияния циклов L_1^+ и Γ_1^+ , L_1^- и Γ_1^- . Значениям $\beta^* = \beta_{05}^*$ соответствует стягивание циклов L_2^+ , Γ_2^+ , L_2^- и Γ_2^- к петлям сепаратрис седла, охватывающих тор T в направлении оси ψ .

На рис. 10 приведен качественный вид бифуркационных кривых β_{02}^* , β_{03}^* и

β_{05}^* и областей C_3^*, C_4^* и C_5^* на плоскости (γ, β^*) , в которых система (3) при $\mu_1 \ll 1$ имеет предельные циклы. Области C_3^*, C_4^* и C_5^* дают асимптотическое представление областей $C_3 \cup G_0, C_4$ и C_5 (см. рис. 5), соответственно. При $b \rightarrow \infty$ область $C_3 \cup G_0 \rightarrow C_3^*$, область $C_4 \rightarrow C_4^*$, область $C_5 \rightarrow C_5^*$. Следовательно, значения $\beta_{02}^*, \beta_{03}^*$ и β_{05}^* можно использовать в качестве аналитических оценок области захвата C_s и области асинхронных режимов C_p , соответствующих существованию периодических асинхронных режимов перекрестно связанных систем ФАПЧ.

7. Проведенное исследование динамических состояний и бифуркаций в модели (1) позволило получить достаточно полное описание возможных режимов поведения перекрестно связанных систем фазовой автоподстройки с единичными фильтрами в цепях управления. Основным результатом исследования является выясненное сильное влияние связи по цепям управления. В отсутствие этой связи (то есть при $\alpha=0$) коллективное поведение взаимодействующих систем ФАПЧ в области C_0 качественно подобно поведению одиночной системы ФАПЧ первого порядка: состояние синхронизации является единственным стационарным режимом системы; область захвата в состояние синхронизации совпадает с областью C_0 существования этого режима. Введение связи по цепям управления ($\alpha \neq 0$) приводит к появлению в области C_0 области параметров, соответствующей одновременному существованию режима синхронизации и асинхронных режимов предельных циклов модели (1). Получены аналитические оценки границ областей параметров, отвечающих существованию предельных циклов модели (1) с индексами вращения (0,1) в случае достаточно малой величины отношения коэффициентов усиления по цепям управления и (1,0) в случае достаточно большой величины этого отношения.

Возможность существования таких предельных циклов позволяет реализовать автомодуляционные режимы связанных систем ФАПЧ, в которых частота колебаний каждого из управляемых генераторов периодически изменяется относительно некоторого среднего значения; при этом колебания одного из генераторов совершаются без набегов фазы на 2π , а колебания другого генератора — с вращением фазы. Установлена достаточно сложная структура областей притяжения стационарных режимов на фазовом торе, определяющая финальный результат в зависимости от начальных условий. Выяснено существование периодических и квазипериодических движений модели (1) при значениях параметров вне области C_0 , которым отвечают периодические и квазипериодические автомодуляционные режимы управляемых генераторов.

Из полученных результатов следует, что систему перекрестно связанных колец ФАПЧ, не содержащих фильтров низких частот в цепях управления, можно рассматривать как генератор сложнопериодических автомодуляционных колебаний, если выбрать значения параметров систем, соответствующие существованию предельных циклов модели (1). При этом, изменяя степень связи по цепям управления, можно эффективно воздействовать на свойства таких колебаний. Включение фильтров в цепях управления позволяет обеспечить в рассматриваемой системе, как показано в [3–5], генерацию хаотических автомодуляционных колебаний.

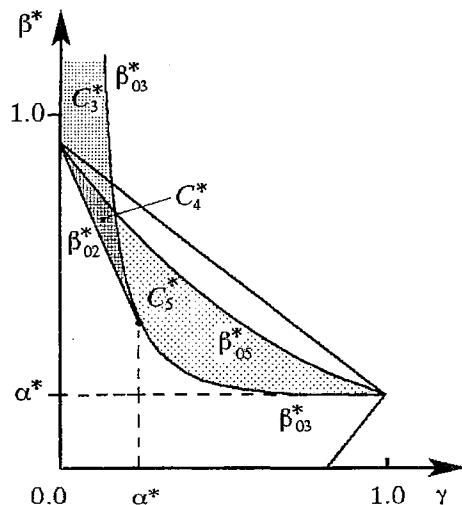


Рис. 10. Расположение бифуркационных кривых при значениях $b \gg 1$

Полученные оценки областей существования предельных циклов модели (1) типа (0,1) и (1,0) могут представить интерес и для теории сетей фазовых осцилляторов [10] при определении областей существования режимов полной и частичной синхронизации.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России» (проект 03.01.33) и РФФИ (проект 99-02-17742).

Библиографический список

1. Пономаренко В.П. К теории систем синхронизации с перекрестными связями // Известия вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 11. С.1728.
2. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Динамические свойства двухконтурной взаимосвязанной системы фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1984. Т.29, № 6. С.1125.
3. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Нелинейные явления в системе взаимосвязанных устройств фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38, № 4. С. 711.
4. Пономаренко В.П., Матросов В.В. О динамике инерционной взаимосвязанной системы фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 4. С.721.
5. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Сложные колебания в системе взаимодействующих автогенераторов с фазовым управлением // Известия вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 12. С. 1604.
6. Федосова Т.С. Анализ систем фазовой синхронизации с двумя периодическими нелинейностями // Радиотехника. 1986. № 6. С. 46.
7. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Бакаева, М.В. Капранова. М.: Сов.радио, 1978.
8. Yuen J.H. A double-loop tracking system // IEEE Trans. on Commun. 1972. Vol. Com.-20. December. № 6. P.1142.
9. Ohlson J.E. Polarization tracking of a partially coherent signal using a double loop // IEEE Trans. on Commun. 1975. Vol.Com.-23. № 9. P.859.
10. Казанович Я.Б., Борисюк Р.М. Изучение режимов синхронизации в нейронных сетях фазовых осцилляторов с центральным элементом // Исследования по математической биологии. Сб. научных трудов, посвященный памяти А.Д.Базыкина / Под ред. Э.Э. Шноля. Пущино, 1996. С.124.
11. Белых В.Н., Веричев Н.Н. О динамике взаимосвязанных ротаторов // Известия вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 6. С.688.
12. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Н.Новгород, 1997. Вып. 2(4). С.15.
13. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.

*Нижегородский государственный
университет*

Поступила в редакцию 13.06.2000

REGIMES OF BEHAVIOUR IN THE SYSTEM OF COUPLED OSCILLATORS WITH PHASE CONTROL

V.P. Ponomarenko, V.V. Matrosov

The dynamical system on phase torus is considered which describe the behaviour of the coupled phase locked loops. Possible regimes of the system's behaviour depending

on initial frequency mismatch, control circuit coefficients of amplification and coupling extent through controlling signal are investigated. Evaluations of capture range are obtained.



Пономаренко Валерий Павлович – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail: pmk@unn.ac.ru



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1961 году, окончил факультет прикладной математики и кибернетики Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1982), кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ. Область научных интересов – теория синхронизации, математическое моделирование нелинейных систем, автоматизация научных исследований. Имеет более 30 публикаций в отечественных и иностранных журналах.



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ГЕНЕРАТОРА НА ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО СВЧ-СИГНАЛА

А.В. Скрипаль, Д.А. Усанов, А.В. Абрамов

Построена модель генератора на туннельном диоде, учитывающая изменение вида вольт-амперной характеристики диода при воздействии внешнего СВЧ-сигнала вследствие разогрева свободных носителей заряда и появления протектированного сигнала. Описана динамика перехода от режима автоколебаний через режим асинхронных колебаний к режиму подавления автоколебаний при относительно низких уровнях мощности внешнего СВЧ-сигнала.

Показано, что учет изменения вида вольт-амперной характеристики туннельного диода при воздействии внешнего СВЧ-сигнала позволяет адекватно описать наблюдавшиеся экспериментально уменьшение генерируемой мощности и последующий срыв автоколебаний в генераторе на туннельном диоде с ростом уровня мощности внешнего СВЧ-сигнала.

Введение

К настоящему времени с помощью твердотельных приборов можно реализовать большинство радиотехнических функций в диапазоне СВЧ. Одной из особенностей микроэлектронных СВЧ-устройств является зависимость характеристик полупроводниковых приборов, входящих в их состав, от уровня мощности воздействующего сигнала [1]. В результате такого воздействия полупроводниковые приборы могут существенным образом изменять режим своей работы вплоть до полного выхода их из строя. В этой связи теоретические и экспериментальные исследования характера нелинейной динамики полупроводниковых СВЧ-приборов при изменении уровня воздействующего сигнала представляют значительный интерес.

Одним из наиболее изученных полупроводниковых СВЧ-приборов является туннельный диод. В том числе известны работы, в которых приведены результаты теоретических исследований нелинейной динамики устройств на туннельных диодах [2]. Одно из предположений, которое обычно принимается при моделировании работы устройств на туннельных диодах, состоит в том, что его вольт-амперная характеристика (ВАХ) содержит участок отрицательного дифференциального сопротивления N -типа и при увеличении уровня воздействующего на диод внешнего сигнала остается неизменной.

В результате проведенных экспериментальных исследований было установлено, что воздействие СВЧ-излучения на туннельный диод может приводить к изменению его ВАХ от N -образной до приближающейся к экспоненциальной, характерной для ВАХ обычного невырожденного p - n -перехода [3,4]. Теоретическое описание явления изменения вида вольт-амперных

характеристик туннельных диодов под действием СВЧ-сигнала высокого уровня [5] показало, что исчезновение участка с отрицательным дифференциальным сопротивлением связано с уменьшением туннельной и резким увеличением диффузионной компоненты полного тока вследствие разогрева свободных носителей заряда и появления протектированного сигнала.

Экспериментальные исследования показали, что в случае использования туннельного диода в качестве активного элемента СВЧ-генератора при увеличении мощности подводимого внешнего сигнала наблюдается уменьшение генерируемой мощности и последующий срыв автоколебаний [4]. Однако теоретического описания динамики этого процесса проведено не было.

В настоящей работе представлены результаты компьютерного моделирования работы генератора на туннельном диоде при воздействии на него внешнего СВЧ-сигнала с учетом изменения вида ВАХ туннельного диода вследствие разогрева свободных носителей заряда и появления протектированного сигнала.

Модель, используемая при расчете

Теоретический анализ работы генератора на туннельном диоде основывался на математическом описании процессов в эквивалентной схеме, представленной на рис. 1. Элементы эквивалентной схемы в виде параллельного соединения емкости C , нелинейного сопротивления R , зависящего от уровня внешнего СВЧ-сигнала, и последовательного сопротивления R_1 моделируют полупроводниковую структуру. Корпус диода моделировался элементами L_K и C_K , генератор тока I_Γ моделирует внешний СВЧ-сигнал. СВЧ-схема генератора на туннельном диоде моделировалась последовательными L_1C_1 , L_2C_2 , L_3C_3 и параллельным $L_fC_fR_f$ колебательными контурами. Эквивалентная схема описывалась системой из двенадцати дифференциальных уравнений, составленных с использованием законов Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
 dV_{ab}/dt &= (I_d - I(V_{ab}))/C, & dI_0/dt &= (E_0 - V_{cd} - I_0R_0)/L_0, \\
 dV_{cd}/dt &= (I_0 - I_d - I_1 - I_2 - I_3 - I_\Gamma)/C_K, & dI_d/dt &= (V_{cd} - V_{ab} - I_dR_1)/L_K, \\
 dV_{df}/dt &= (I_1 + I_2 + I_3 - I_f - V_{df}/R_f)/C_f, & dI_f/dt &= V_{df}/L_f, \\
 dV_{C_1}/dt &= I_1/C_1, & dI_1/dt &= (V_{cd} - V_{df} - V_{C_1})/L_1, \\
 dV_{C_2}/dt &= I_2/C_2, & dI_2/dt &= (V_{cd} - V_{df} - V_{C_2})/L_2, \\
 dV_{C_3}/dt &= I_3/C_3, & dI_3/dt &= (V_{cd} - V_{df} - V_{C_3})/L_3.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Ток I_Γ , наведенный внешним СВЧ-сигналом мощностью P_0 , задавался в виде

$$I_\Gamma = I_{\Gamma 0} \sin \omega t,$$

где $I_{\Gamma 0} = (2P_0 Y_0)^{1/2}$, Y_0 – входная проводимость в плоскости включения туннельного диода.

Нелинейное сопротивление R определялось как среднее сопротивление р-п-перехода по первой гармонике СВЧ-тока

$$R = V^-/I^-, \text{ где } I^- = (A^2 + B^2)^{1/2},$$

$$A = 2/T \int_0^T I(V) \sin \omega t dt, \quad B = 2/T \int_0^T I(V) \cos \omega t dt, \quad V = V_0 + V^- \sin(\omega t + \varphi).$$

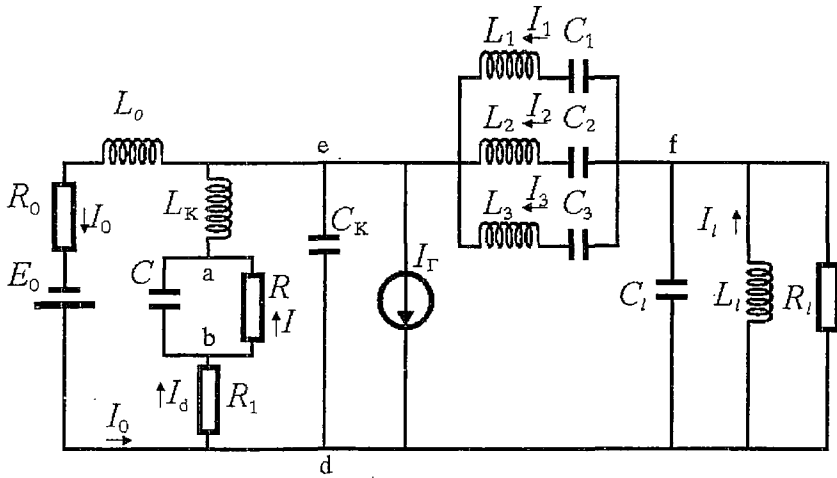


Рис. 1. Эквивалентная схема генератора на туннельном диоде

Здесь V_0 и V – величина постоянного напряжения и амплитуда переменного напряжения на полупроводниковой структуре, I – ток через активное сопротивление R , φ – фазовый сдвиг между током I_T и переменным напряжением на полупроводниковой структуре, $T=2\pi/\omega$ – период СВЧ-колебаний.

При математическом моделировании протекания тока через туннельный диод использовалось выражение для ВАХ, полученное с учетом изменения туннельной I_T , избыточной I_X и диффузионной I_D компонент полного тока I вследствие разогрева свободных носителей заряда [5,6]

$$I(V) = I_T + I_X + I_D. \quad (2)$$

Здесь

$$I_T = AT_T \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_v} [f_{cT}(\epsilon) - f_{vT}(\epsilon)] g_c(\epsilon) g_v(\epsilon) d\epsilon,$$

$$I_X = A_1 D_x \text{Sexp}(-\alpha_x \epsilon_v),$$

$$I_D = \frac{qSD_n n_{p0}}{L_n} \times$$

$$\times \left\{ \frac{kT_n [\zeta_n(T_0) - \epsilon_c]}{[\zeta_n(T_n) - \epsilon_c] kT_0} \exp\left(\frac{qV_k}{kT_0} - \frac{\zeta_n(T_0) - \epsilon_c}{kT_0}\right) \ln\left[1 + \exp\left(\frac{\zeta_n(T_n) - \epsilon_c}{kT_n} - \frac{qV_k}{kT_n} + \frac{qV}{kT_n}\right)\right] - 1 \right\} +$$

$$+ \frac{qSD_p p_{n0}}{L_p} \times$$

$$\times \left\{ \frac{kT_p [\epsilon_v - \zeta_p(T_0)]}{[\epsilon_v - \zeta_p(T_p)] kT_0} \exp\left(\frac{qV_k}{kT_0} - \frac{\epsilon_v - \zeta_p(T_0)}{kT_0}\right) \ln\left[1 + \exp\left(\frac{\epsilon_v - \zeta_p(T_p)}{kT_p} - \frac{qV_k}{kT_p} + \frac{qV}{kT_p}\right)\right] - 1 \right\},$$

где $f_{cT}(\epsilon)$ и $f_{vT}(\epsilon)$ – функции распределения Ферми – Дирака электронов в зоне проводимости и в валентной зоне с электронной температурой T_n ; T_p – температура дырок; T_0 – температура решетки; A , A_1 , α_x – константы; T_T – вероятность туннельного перехода через потенциальный барьер между p- и n-областями; $g_c(\epsilon)$ и $g_v(\epsilon)$ – плотности энергетических состояний в зоне проводимости и в валентной зоне; ϵ_c и ϵ_v – уровни энергии, соответствующие дну зоны проводимости и потолку валентной зоны; ϵ_g – ширина запрещенной зоны; ζ_n и ζ_p – квазиуровни Ферми в полупроводниках n- и p-типа; D_x – плотность заполненных состояний, расположен-

ных в запрещенной зоне выше потолка валентной зоны на величину ϵ_x , определяемую выражением

$$\epsilon_x \approx \epsilon_g - qV + (\zeta_n(T_n) - \epsilon_c) + (\epsilon_v - \zeta_p(T_p)),$$

D_n и D_p – коэффициенты диффузии электронов и дырок; S – площадь поперечного сечения р–п–перехода; V – напряжение, приложенное к диоду; V_k – контактная разность потенциалов.

Расчет ВАХ диода проводился с учетом детекторного эффекта с использованием соотношения

$$I_c = 1/T \int_0^T I(V) dt. \quad (3)$$

Амплитуда СВЧ–напряжения определялась по величине поглощенной диодом СВЧ–мощности P из соотношения

$$P = (V^-)^2 / (2R). \quad (4)$$

Величина поглощенной диодом мощности определялась из выражения [7]

$$P = P_0(1 - |N|^2), \quad (5)$$

где $N = (Y - Y_0) / (Y + Y_0)$ – коэффициент отражения СВЧ–сигнала от диода, $Y = j\omega C_K + [R / (1 + j\omega RC) + j\omega L_K]^{-1}$ – комплексная проводимость туннельного диода.

В результате численного решения системы дифференциальных уравнений (1) методом Рунге – Кутты четвертого порядка определялась зависимость мгновенных значений тока $i_i(t)$ в ряд Фурье были рассчитаны гармонические составляющие тока, определены их амплитуды и рассчитаны мощности гармоник P_k на выходе генератора с использованием соотношения $P_k = i_{kl}^2 R_l / 2$, где i_{kl} – амплитуды гармонических составляющих тока через активное сопротивление R_l .

Результаты расчета

Расчеты, выполненные с использованием вышеприведенной модели, показали, что в отсутствие внешнего СВЧ–сигнала спектр выходного сигнала генератора на туннельном диоде определяется параметрами эквивалентной схемы и режимом питания активного элемента. Рассчитанное значение частоты основной гармоники выходного сигнала составляло 1.5 ГГц. Отклонение формы СВЧ–тока в нагрузке от гармонического закона (рис. 2, а) вызывает присутствие в спектре выходного сигнала достаточно большой по амплитуде второй гармоники (рис. 2, б). Соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 2, в.

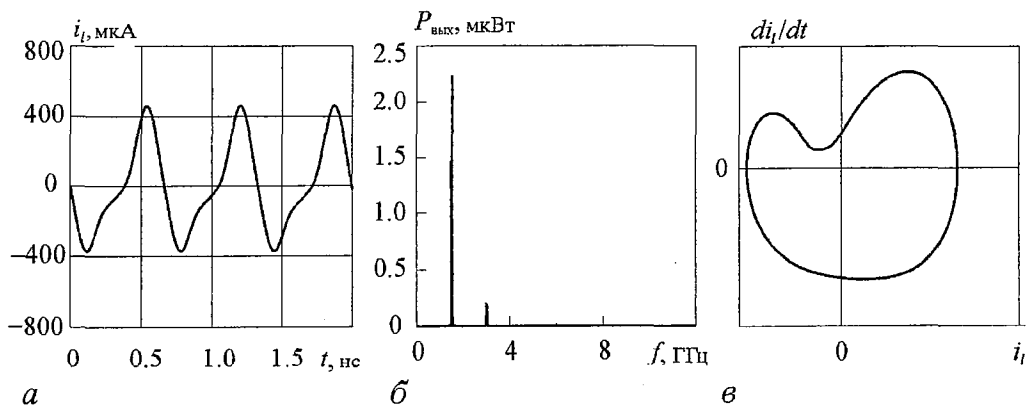


Рис. 2. Форма (а), спектр (б) и фазовый портрет (в) выходного сигнала генератора в отсутствие внешнего СВЧ–сигнала

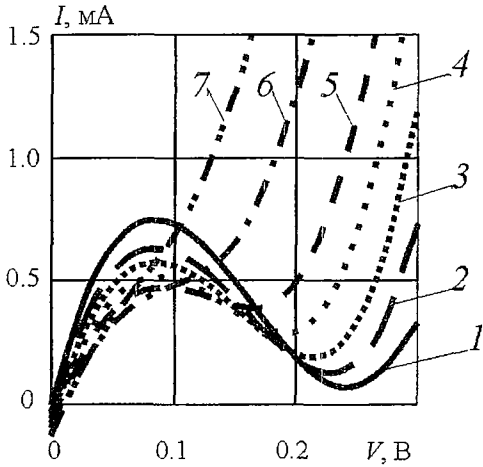


Рис. 3. Вольт-амперные характеристики туннельного диода при различных уровнях мощности внешнего СВЧ-сигнала P_0 , мВт: кривая 1 - 0.0, 2 - 0.3, 3 - 0.5, 4 - 0.75, 5 - 1.0, 6 - 1.5, 7 - 2.0

порядка 0.5 мВт форма СВЧ-тока в нагрузке усложняется (рис. 4, а), наблюдается монотонное перераспределение мощности автоколебаний между основной и второй гармониками при некотором уменьшении суммарной выходной мощности (рис. 4, б), отображение последования Пуанкаре образует на фазовой плоскости замкнутую кривую (рис. 4, в).

При дальнейшем увеличении мощности внешнего СВЧ-сигнала на ВАХ туннельного диода (см. рис. 3, кривые 5, 6, 7) наблюдается постепенное исчезновение участка с отрицательным дифференциальным сопротивлением, приводящее к резкому уменьшению амплитуд как первой, так и второй гармоник выходного сигнала. При уровне мощности внешнего СВЧ-сигнала $P_0 \sim 1.0$ мВт автоколебательный режим генератора на туннельном диоде исчезает, а в спектре выходного сигнала на нагрузке присутствуют только составляющие, обусловленные воздействием внешнего СВЧ-сигнала.

Поскольку известны работы, в которых моделирование нелинейной динамики устройств на туннельных диодах проводится в предположении, что ВАХ диода остается неизменной при увеличении уровня воздействующего на диод внешнего сигнала [8], то представляется интересным сравнить выходные характеристики генератора, рассчитанные с учетом изменения вида ВАХ

При подаче на туннельный диод СВЧ-сигнала с частотой, существенно превышающей частоту собственных колебаний, наблюдается изменение его ВАХ, связанное с уменьшением туннельной, резким увеличением диффузионной и незначительным увеличением избыточной компоненты полного тока диода вследствие разогрева свободных носителей заряда [1,5,6].

Результаты расчета ВАХ туннельного диода при различных уровнях мощности P_0 внешнего СВЧ-сигнала с частотой $f=10$ ГГц приведены на рис. 3.

Численное моделирование динамики генератора показало, что при воздействии на туннельный диод внешнего СВЧ-сигнала с частотой, не кратной частоте автоколебаний, наблюдается режим асинхронных колебаний.

При увеличении мощности внешнего СВЧ-сигнала до значений

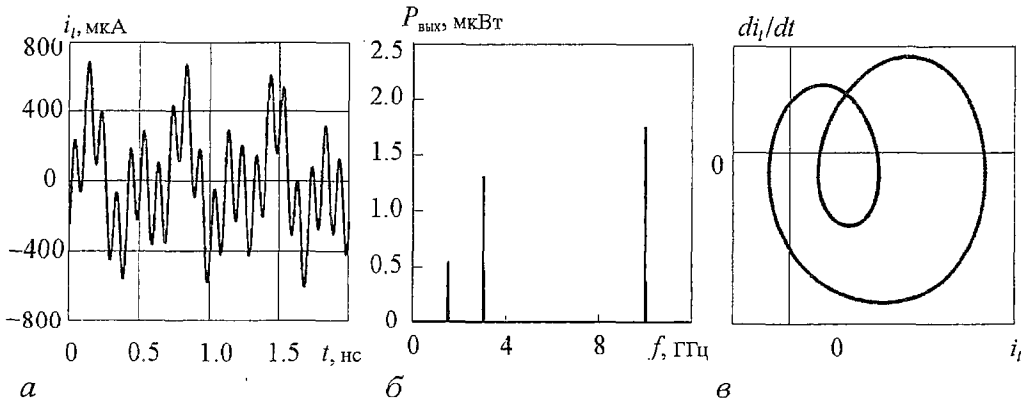


Рис. 4. Форма (а), спектр (б) и отображение последования Пуанкаре (в) выходного сигнала генератора при воздействии внешнего СВЧ-сигнала

туннельного диода под воздействием внешнего СВЧ-сигнала, с характеристиками, рассчитанными без учета этого эффекта.

На рис. 5 представлены зависимости мощности основной гармоники P_1 выходного сигнала генератора на туннельном диоде от мощности внешнего СВЧ-сигнала, рассчитанные с учетом (кривая 1) и без учета (кривая 2) изменения ВАХ туннельного диода.

Проведенные исследования показали, что в случае предположения о неизменности ВАХ туннельного диода спектральные составляющие, обусловленные наличием автоколебательного режима, не претерпевают никаких изменений до значений мощности внешнего СВЧ-сигнала $P_0 \sim 10 \div 20$ мВт (см. рис. 5, кривая 2). Следует отметить, что дальнейшее увеличение мощности внешнего СВЧ-сигнала примерно до 50 мВт приводило к уменьшению амплитуды собственных колебаний, известному как режим асинхронного подавления вследствие снижения средней крутизны характеристики активного элемента [9].

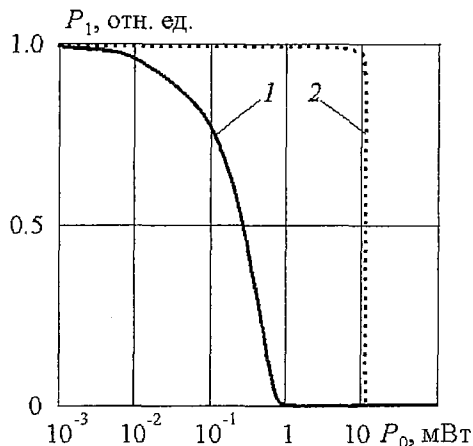


Рис. 5. Зависимости мощности основной гармоники P_1 выходного сигнала генератора на туннельном диоде от мощности внешнего СВЧ-сигнала P_0

Заключение

Таким образом, в результате построения модели генератора на туннельном диоде, учитывающей изменение вида ВАХ диода при воздействии внешнего СВЧ-сигнала вследствие разогрева свободных носителей заряда и появления продетектированного сигнала, описана динамика перехода от режима автоколебаний через режим асинхронных колебаний к режиму подавления автоколебаний при относительно низких уровнях мощности внешнего СВЧ-сигнала.

Показано, что учет изменения вида ВАХ туннельного диода при воздействии внешнего СВЧ-сигнала позволяет адекватно описать наблюдавшиеся экспериментально уменьшение генерируемой мощности и последующий срыв автоколебаний в генераторе на туннельном диоде с ростом уровня мощности внешнего СВЧ-сигнала.

Работа выполнена в рамках научной программы «Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России».

Библиографический список

1. Усанов Д.А., Скрипаль А.В. Физика работы полупроводниковых приборов в схемах СВЧ. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 376 с.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. Усанов Д.А., Коротин Б.Н., Орлов В.Е., Скрипаль А.В. Снятие вырождения в р- и п-областях туннельного диода внешним СВЧ-сигналом // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16, вып.8. С.50.
4. Усанов Д.А., Орлов В.Е., Коротин Б.Н., Скрипаль А.В. Влияние внешнего СВЧ-сигнала на работу СВЧ-генератора на туннельном диоде // Изв.вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 1. С. 81.

5. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Коротин Б.Н., Орлов В.Е. Влияние греющего СВЧ-поля на вид вольт-амперной характеристики туннельного диода // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, вып.7. С.81.

6. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Угрюмова Н.В., Вениг С.Б., Орлов В.Е. Возникновение режима отрицательного дифференциального сопротивления и переключения в туннельном диоде под действием внешнего СВЧ-сигнала // ФТП. 2000. Т. 24, вып.5. С. 567.

7. Хелзайн Дж. Пассивные и активные цепи СВЧ / Пер. с англ. под ред. А.С. Галина. М.: Радио и связь, 1981. 200 с.

8. Карташов В.М., Котов А.Ф., Решетняк С.А., Филимонов Ю.С. Исследование стохастического резонанса в электрической цепи с туннельным диодом // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, вып. 5. С. 67.

9. Минакова И.И. Неавтономные режимы автоколебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1987. 168 с.

Саратовский государственный
университет

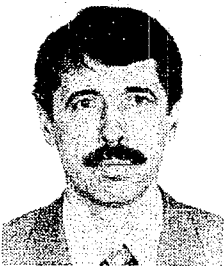
Поступила в редакцию 30.03.2000

NONLINEAR DYNAMICS OF TUNNEL-DIODE OSCILLATOR AT THE INFLUENCE OF EXTERNAL MICROWAVE SIGNAL

A.V. Skripal, D.A. Usanov, A.V. Abramov

The model tunnel-diode oscillator was built, in which the change of the tunnel diode I - V -characteristic because of heating of free charge carriers and the appearance of detected signal under the influence of external microwave signal is taken into account. Dynamics of the transition from self-oscillation mode through asynchronous oscillation mode to mode of the oscillation suppression at comparatively low levels of an external microwave signal power was described.

It was shown that account of tunnel diode I - V -characteristic change under the influence of external microwave signal allows to describe adequately the effect of output power observed in experiments reduction and following destruction of self-oscillation in the tunnel-diode oscillator with the increase of external microwave signal power.



Скрипаль Александр Владимирович – родился в 1954 году в городе Уч-Арал Талды-Курганской области, республика Казахстан. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1988), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1972) и доктора (1998) физико-математических наук. С 1998 года по настоящее время – профессор кафедры физики твердого тела Саратовского государственного университета. Автор монографии, более 100 научных трудов в области твердотельной электроники, физики полупроводников, радиоволнового контроля.



Усанов Дмитрий Александрович – родился в 1943 году в Менделеевске, республика Татария. Окончил Саратовский государственный университет (1965). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1972) и доктора (1989) физико-математических наук. С 1990 – профессор кафедры физики твердого тела, с 1989 по 2000 – проректор по НИР СГУ, с 1985 по настоящее время – заведующий кафедрой физики твердого тела. Автор монографий, большого числа статей и изобретений по твердотельной электронике и радиофизике. Заслуженный деятель науки РФ, член IEEE, МАН ВШ. E-mail: usanovda@info.sgu.ru



Абрамов Антон Валерьевич – родился в 1979 году в Куйбышеве. В настоящее время студент четвертого курса кафедры физики твердого тела Саратовского госуниверситета. Область научных интересов – физика полупроводников, твердотельная электроника.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

1. Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

Бумажный вариант должен быть напечатан на белой бумаге через два интервала и представлен в 2 экз. Рисунки выполняются на отдельных страницах в 2 экз. Под рисунком (или на оборотной стороне листа) указывается его номер, фамилии авторов, название статьи. Подрисовочные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

Электронный вариант статьи представляется на 3.5" дискете или присылается по электронной почте (E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru) в следующих кодировках: ASC II, Word, Tex, LaTeX. Рисунки в виде отдельных файлов в формате PCX, TIFF или GIF.

2. Требования к оформлению текста.

На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ «Физика», издаваемый **ВИНИТИ**.

К статье прилагаются в 1 экземпляре:

а) перевод на английский язык: названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации;

б) краткие сведения об авторах с фотографиями любого формата.

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и соавтор учебника «Волны в экологии». Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

Адрес редакции указан на последней странице журнала



НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ КЛАССА РЕШЕТОЧНЫХ ГАЗОВ, СВЯЗАННЫЕ С ОПИСАНИЕМ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИЙ

В.Г. Анфиногентов, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

В работе делается попытка сконструировать модель класса решеточных газов применительно к задачам популяционной экологии. Результаты модели сравниваются с решениями уравнения Ферхюльста, нелинейного уравнения диффузии (уравнения Колмогорова – Петровского – Пискунова) и реальными демографическими данными по США.

Sailors must know the sea well, before they can sail. It has two faces one bright, one dark. The bright is blinding, but it lacks depth.

Yes, sire.

What is the depth of darkness?

Sire?

How deep is the sea?

I do not know, sire.

Shouldn't you?

...

From Ref. [1]

Вопросы применения и построения моделей типа клеточных автоматов к анализу реальных, порой достаточно сложных, систем в последнее время привлекают большое внимание исследователей. Под клеточными автоматами понимаются системы, в которых время и пространство дискретны и все величины принимают значения из конечного (обычно небольшого, хотя это и не обязательно) набора значений [2,3]. Круг задач, для решения и анализа которых делаются попытки привлечения данного аппарата, чрезвычайно широк – это гидродинамика и газодинамика [1,3,4], статистическая физика [5], электроника [6], имеются также попытки привлечения клеточных автоматов к описанию типично биологических и эпидемиологических задач [7,8].

Одним из классов моделей типа клеточный автомат являются решеточные газы. Впервые понятие решеточного газа появляется в 1963 году в учебнике по статистической механике [5], где оно формулируется следующим образом:

... Решеточный газ есть набор «атомов», положение в пространстве каждого из которых может принимать только дискретные значения. Это дискретное положение атома на каждом последующем дискретном шаге во времени определяется геометрией решетки, которая в свою очередь определяется ближайшими γ соседями каждой клетки решетки. В каждой клетке может находиться не более одного атома...

Понятно, что такое определение не позволяет говорить о реально сопоставимых моделям решеточных газов физических (или, в более широкой трактовке, природных) систем. Однако уникальность данного класса моделей в том, что при соответствующем выборе правил эволюции клеток (атомов в терминологии [5]) в дискретном пространстве (на решетке) удается с помощью решеточного газа с высокой степенью точности смоделировать интегральные характеристики поведения реальных систем. Не останавливаясь подробно, лишь перечислим некоторые задачи, которые были успешно решены с привлечением аппарата решеточных газов: моделирование двух- и трехмерных гидродинамических потоков [4], течения со свободной границей [9], распространение тепловых потоков [10], критические явления в несмешиваемых жидкостях [11], процессы, протекающие в различных химических реакциях [12], солитонная турбулентность [13], диффузионные процессы [14], рост и динамика доменов [15], рост дендритов [16], описание движения толпы [17] и многое другое. Более того, последние исследования в данной области затрагивают вопросы построения квантовых решеточных газов.

Все это позволяет говорить о решеточных газах как о мощном и гибком инструменте исследований сложных распределенных систем. Основным моментом построения решеточного газа является правильный выбор закона эволюции клеток на решетке. Сложность состоит в том, что не существует универсального алгоритма построения решеточного газа, хотя и здесь имеется ряд общих подходов, по крайней мере, применительно к задачам гидро- и газодинамики (см., например, работу Г.Г. Малинецкого и М.Е. Степанцова [18]). Вместе с тем наиболее известные и удачные модели такого рода (HPP-газ [19] и FHP-газ¹ [20], для которых макроскопические уравнения не отличаются от уравнений Навье – Стокса) строились эвристически: правила эволюции формулировались феноменологически, исходя из тех или иных аналогий с моделируемыми явлениями. Правильность модели затем доказывалась сравнением с результатами эксперимента над исходной системой. Последнее особенно ценно – существует возможность построения математической (численной) модели для процессов, строгое и формализованное с математической точки зрения описание которых затруднено или, более того, на данный момент вообще невозможно. Видимо, последнее замечание относится, главным образом, к биологическим и биосоциальным моделям, где в связи со спецификой предмета исследования построение формальных математических моделей порой затруднено.

В данной работе делается попытка построения простейшей модели подобной решеточному газу, которая позволяла бы моделировать явления в системах, описываемых нелинейным уравнением диффузии. Интерес к данной проблеме обусловлен, в первую очередь, вопросами качественного и количественного описания особенностей динамики численности различных популяций.

Формулировка модели

Рассмотрим двухмерную ортогональную решетку (i,j) , $i,j=1,\dots,N$. На ней в начальный момент дискретного времени $T=0$ задается некоторое множество клеток $\{p\}_{i,j}^0$. Каждая из клеток кроме своих координат i_p, j_p характеризуется также временем жизни $P_{i,j}$ на решетке. Если проводить аналогии с биологической популяцией, то координаты клетки соответствуют местоположению данной особи в ареале проживания, а время жизни – возрасту особи. При превышении времени жизни T_L клетка исчезает с решетки (особь, соответственно, умирает). В этом случае на месте элемента возникает свободная клетка. Динамика клетки решетки на каждом шаге T во времени заключается в следующей процедуре.

¹ Модели получили название по первым бувам имен их создателей: HPP – J.Hardy, Y.Pomeau и O. de Pazzis и FHP – U.Frish, B.Hasslacher и Y.Pomeau.

1. «Смерть особи», занимающей клетку решетки с координатами (i,j) , если $P_{i,j}=T_L$.
2. «Взросление особи»:

$$P_{i,j}[T+1] = P_{i,j}[T]+1.$$

3. «Передвижение» по ареалу:

$$p_{i,j} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_{i+1,j} \\ P_{i-1,j} \\ P_{i,j+1} \\ P_{i,j-1} \end{bmatrix},$$

причем каждый из четырех возможных путей полностью равновероятен. Движение не происходит лишь в том случае, когда все из четырех соседних клеток заняты другими элементами. В данном случае мы рассматриваем так называемую окрестность фон Неймана (von Neumann neighborhood), когда для каждой клетки соседними считаются лишь ближайшие четыре, которые примыкают к ней справа, слева, снизу и сверху. Четыре других клетки, находящиеся рядом с рассматриваемой клеткой «по диагонали», соседними не являются.

4. «Рождение новой особи»: около каждого элемента $p_{i,j}$ на каждом шаге T с вероятностью α возможно возникновение нового элемента с координатами $(l,k) \in \{(i+1,j), (i-1,j), (i,j-1), (i,j+1)\}$ со значением $P_{l,k}=1$. Причем каждая из координат полностью равновероятна. Рождение не происходит в том случае, когда все из четырех соседних клеток заняты другими элементами.

Можно ввести величину R , которая характеризует насколько быстро перемещается клетка по решетке, которую можно назвать максимальным радиусом дрейфа (или просто радиусом дрейфа). Очевидно, что чем больше радиус дрейфа, тем выше коэффициент диффузии D системы. Вышеописанная процедура соответствует решеточному газу с радиусом дрейфа $R=1$. Несложно модифицировать процедуру эволюции клетки для произвольного R . В последнем случае изменится только третий пункт, его в этом случае необходимо сформулировать следующим образом

- 3'. «Передвижение» по ареалу:

$$p_{i,j} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_{i+R,j} \\ P_{i+R-1,j} \\ \dots \\ P_{i-R,j} \\ P_{i,j+R} \\ \dots \\ P_{i,j-R} \end{bmatrix},$$

причем каждый из $4R$ возможных путей эволюции клетки полностью равновероятен. Движение не происходит лишь в том случае, когда все из $4R$ соседних клеток заняты другими элементами.

Таким образом, на каждом шаге в дискретном времени T происходит преобразование множества $\{p\}_{i,j}^T \Rightarrow \{p\}_{i,j}^{T+1}$ в соответствии с вышеформулированными правилами 1–4. Понятно также, что данные правила получены полностью эмпирически, вместе с тем результаты численного моделирования продемонстрировали достаточно интересную динамику численности такой «клеточной» популяции.

Результаты численного моделирования и их обсуждение

Рассмотрим динамику числа клеток нашего решеточного газа (численности популяции) с $R=1$, $T_L=10$ на решетке (300×300) с течением времени. Зададим

равномерное начальное распределение элементов $\{p\}_{i,j}^0$ по следующему закону:

$$P_{i,j}^0 = \begin{cases} 5, & \text{если } i/20 \text{ и } j/20 \text{ целые,} \\ 0, & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

На рис. 1 показана пространственная динамика решеточного газа для этого случая (на рисунке черными точками обозначены «живые» клетки), а на рис. 2 сплошной линией указано соответствующее полное число клеток (численность популяции) в зависимости от дискретного времени T . На рис. 1 каждая из пространственных диаграмм соответствует фиксированному моменту времени.

Обсудим вопрос: какому закону подчиняется динамика нашего решеточного газа? Оказывается, что эволюция числа клеток описывается хорошо известным в математической экологии уравнением Ферхюльста [21]. Уравнение Ферхюльста (или логистическое уравнение) описывает качественно, а в некоторых случаях и количественно [22] динамику численностей различных биологических популяций. Данная модель имеет вид

$$dN/dt = \mu N(K-N)/K, \quad (1)$$

где N есть численность популяции, K — емкость ареала проживания (то есть максимальное число особей, которые могут прожить на данной территории) и μ — скорость роста численности популяции. Решением данного уравнения является логистическая кривая [21].

Наложение на «экспериментальную» кривую (сплошная линия на рис. 2) логистической кривой (штриховая линия) показало, что динамика сконструированного решеточного газа с высокой степенью точности описывается логистической зависимостью. Вместе с тем совпадение двух кривых неидеально.

Для того, что бы разобраться с причинами несовпадения рассмотрим следующий эксперимент: начальное распределение сильно неоднородно и представляет собой некоторую малочисленную начальную популяцию, расположенную в окрестности точки (40,40). Кривая численности такой популяции и наиболее близко лежащая к ней логистическая зависимость показаны на рис. 3. Из последнего видно, что различие между кривыми в данном случае существенно выше: на начальном этапе развития популяции скорость роста неоднородной популяции превышает скорость роста «логистической» популяции, а при приближении

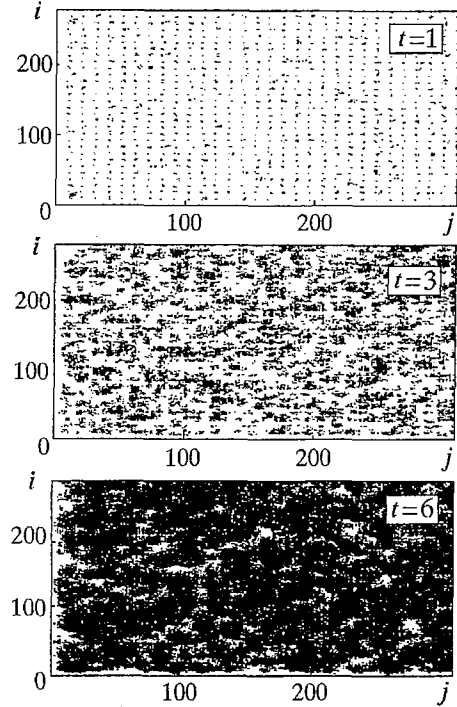


Рис. 1. Пространственные распределения «клеточной» популяции в различные моменты времени t ; $R=1$

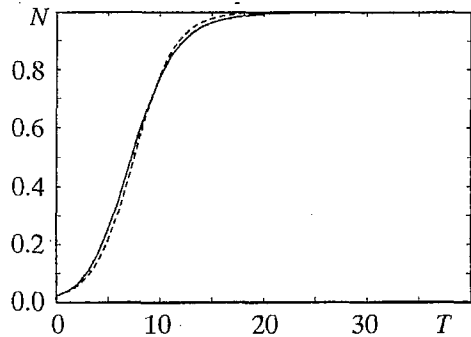


Рис. 2. Динамика суммарной численности «клеточной» популяции (сплошная линия) и сравнение ее с решением уравнения Ферхюльста (штриховая линия) в случае однородного начального распределения популяции

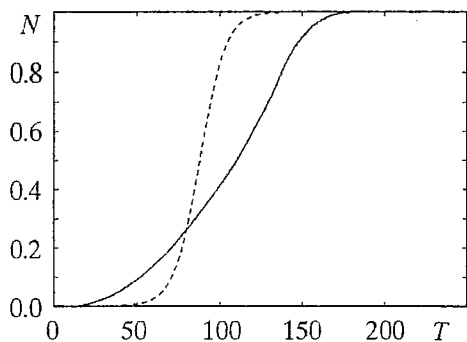


Рис. 3. Динамика суммарной численности «клеточной» популяции (сплошная линия) и сравнение ее с решением уравнения Ферхюльста (штриховая линия) в случае сильно неоднородного начального распределения популяции

площади ареала в 1.8 раза в момент времени $T=7$. Рис. 4, б иллюстрирует случай медленного увеличения площади ареала, причем на «новой» территории существует популяция со значительно меньшей плотностью и способностью воспроизводства по сравнению с исходной. И в том и другом случае наблюдается существенное отклонение кривой от логистической зависимости (которая выбрана так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать «экспериментальные» данные по методу наименьших квадратов), причем на начальном этапе скорость роста популяции превосходит скорость роста «эталонной» логистической популяции, а затем резко падает. Заметим, что на последнем участке и в первом и во втором случае наблюдается участок почти линейного роста численности. Вместе с тем во втором случае степень отличия зависимости численности от предсказываемой уравнением Ферхюльста существенно меньше.

Таким образом, можно сделать вывод, что пространственно-неоднородное распределение «особей популяции» приводят к отличию динамики рассматриваемой «клеточной популяции» от предсказываемой уравнением Ферхюльста. Следовательно, необходимо рассмотреть модель популяции, учитывающую не только временную, но и пространственную динамику.

к насыщению скорость падает по сравнению с решением уравнения Ферхюльста. Аналогично ведет себя и кривая на рис. 2, однако, в первом случае эффект, связанный с рассинхронизмом и неоднородностью, существенно меньше.

В этом контексте интересно исследовать случай, когда начальная популяция занимает некоторую область – ареал проживания, который в какой-то момент времени значительно увеличивается. На рис. 4 показаны соответствующие кривые численностей популяций (числа активных клеток в решеточном газе). Рис. 4, а соответствует случаю равномерно заполненной исходной территории и резкого скачка

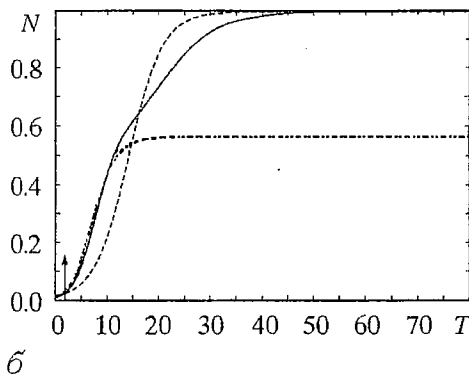
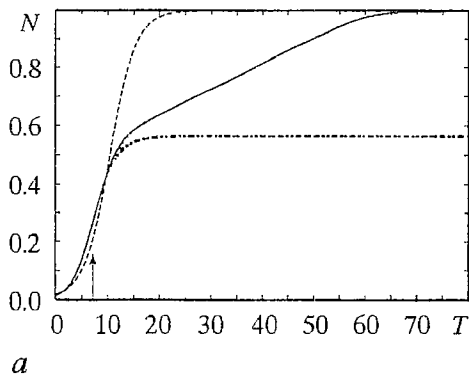


Рис. 4. Динамика суммарной численности «клеточной» популяции и сравнение ее с решением уравнения Ферхюльста в случае изменения размера ареала проживания. Штрихпунктирная линия соответствует решеточному газу без увеличения площади. а – $T=7$ момент увеличения площади в 1.8 раз; б – $T=2$ момент начала плавного увеличения площади в 1.8 раз, длительность увеличения $\Delta T=10$

Решеточный газ и уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова

Одной из классической моделей популяционной экологии является нелинейное уравнение диффузии, которое в одномерном случае имеет вид

$$\partial u/\partial t = D\partial^2 u/\partial x^2 + F(u), \quad (2)$$

где x – координата точки на плоскости, t – время, u – плотность особей в точке x в момент времени t . Здесь первое слагаемое в правой части определяет диффузию организмов из очага расселения вида. Коэффициент диффузии D определяется как $D=\rho^2/4$, где

$$\rho = [\int_0^\infty x^2 p(x) dx]^{1/2} \quad (3)$$

есть среднеквадратичное перемещение за поколение – радиус индивидуальной активности. Функция $p(x)$ является плотностью вероятности перемещения особи на расстояние, лежащее между x и $x+dx$, за единицу времени, измеряемого в поколениях популяции. Второе слагаемое в правой части уравнения (2) отражает рост плотности населения: функция $F(u)$ является скоростью этого роста и зависит от уже существующей плотности населения. Условия налагаемые на F приведены, например, в работе [23]. Данное уравнение (уравнение КПП) было впервые предложено Колмогоровым, Петровским и Пискуновым в работе [24] применительно к вопросам эволюции и расселения в пространстве нового хорошо приспособленного вида организмов. Частным случаем уравнения КПП является уравнение с квадратичной нелинейностью

$$\partial u/\partial t = D\partial^2 u/\partial x^2 + \mu u(1-u), \quad (4)$$

исследованное Рональдом Фишером [25]. Последнее уравнение представляет особь интерес, так как его можно рассматривать как «пространственно» распределенный аналог уравнения Ферхюльста [26], в котором учитывается миграция популяции, а также рассинхронизм развития популяции по ареалу проживания, связанный с неодинаковой начальной численностью в различных местах проживания.

Структурно устойчивым решением уравнения (4) является решение типа бегущей волны, которая распространяется вдоль оси координат x с постоянной скоростью

$$c = 2(\mu D)^{1/2} = \rho \mu^{1/2}. \quad (5)$$

Любое возмущение, внесенное в среду, описываемую уравнением (4), эволюционирует в волновое решение постоянной формы [23].

Построим феноменологическую модель нелинейного уравнения диффузии с квадратичной нелинейностью (4), используя вышеописанный решеточный газ.

Рассмотрим, как и в предыдущем случае, решетку (i,j) , где $i=1, \dots, N_i; j=1, \dots, N_j$, причем $N_i \gg N_j$. Тем самым мы приближаемся к одномерной задаче², причем тем точнее, чем N_i больше N_j . Правила динамики каждой клетки на нашей решетке полностью аналогичны предыдущим.

Начальные условия задавались в виде некоторой заполненной активными клетками области в начале координат, например,

$$P_{i,j}^0 = \begin{cases} 5, & \text{если } j < 20 \\ 0, & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Далее анализировалась динамика нашего решеточного газа в течении времени.

² Заметим, что условие одномерности не принципиально, но в данном случае это упрощает анализ результатов.

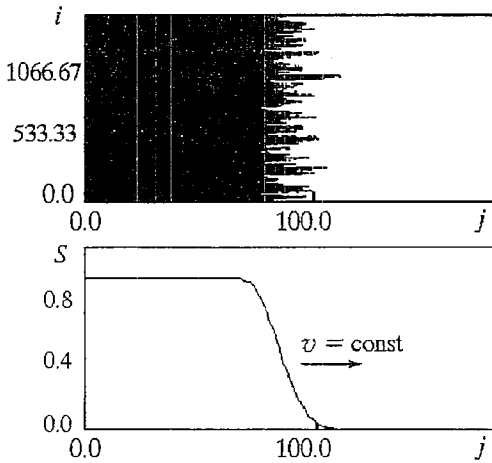


Рис. 5. Пространственное распределение популяции и вид профиля волны в случае моделирования уравнения КПП

Величина μ может быть определена из проведения расчета с равномерным распределением активных клеток по решетке и затем нахождения логистической кривой, наиболее близко лежащей к получившейся (см. рис. 2). Коэффициент μ соответствующей логистической кривой и будет искомым коэффициентом. Менять его можно путем изменения времени жизни клетки T_L (рис. 6, а). Радиус индивидуальной активности ρ , как несложно видеть из определения (3), оценивается величиной $(RT_L)^{1/2}$. Тогда, исходя из выражения (5) для скорости автоволны, являющейся решением уравнения КПП, можно записать

$$v = [RT_L\mu(T_L)]^{1/2}. \quad (6)$$

На рис. 6, б приведена зависимость скорости волны v в зависимости от комплекса параметров μRT_L , измеренная в численном эксперименте с решеточным газом, а также теоретическая кривая, построенная в соответствии с соотношением (6) и использованием данных относительно зависимости $\mu = \mu(T_L)$. Видно, что скорость распространения автоволны в модели решеточного газа зависит от параметров исследуемой системы так же, как и скорость автоволны, являющейся решением уравнения КПП с квадратичной нелинейностью.

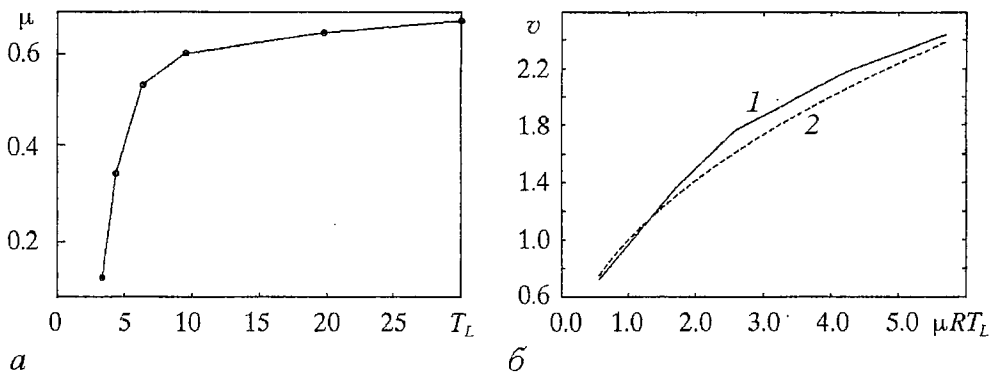


Рис. 6. а – зависимость параметра μ от времени жизни T_L ; б – зависимость скорости распространения волны от параметра μRT_L в решеточном газе: 1 – численный эксперимент; 2 – теоретический расчет

Оказалось, что профиль s волны, распространяющейся вдоль оси j , определяемый как

$$s_j = [\sum_{i=1}^{N_j} H(P_{i,j})] / N_j$$

($H(x)$ – функция Хевисайда), не зависит от вида начального возмущения и не меняется после переходного процесса с течением времени. Соответствующий вид волны s и пространственное распределение популяции показаны на рис. 5.

Наиболее интересным является то, что и скорость v распространения этой волны подчиняется соотношению (5). Здесь возникает вопрос, как определить для нашего решеточного газа величины скорости роста популяции μ и коэффициента диффузии D .

Таким образом, феноменологически построенная модель развития и роста популяции в виде решеточного газа соответствует таким известным в популяционной экологии моделям, как модель Ферхюльста роста популяции и модель Колмогорова – Петровского – Пискунова распространения популяции по ареалу проживания.

Вместо заключения

Интерес к построенной модели решеточного газа и результатам, полученным с помощью нее, объясняется возможностью качественного (а в перспективе и количественного) описания особенностей динамики численности «реальных» популяций. Здесь нас, в первую очередь, интересуют проблемы демографии и, в частности, динамика численности народонаселения тех или иных локальных областей. В качестве примера приведем некоторые демографические данные численности населения США за последние 200 лет³.

Если рассмотреть динамику численности населения различных американских штатов, то можно заметить, что наблюдается разделение штатов на две большие группы. У первой группы штатов, которые входили в состав США с самого момента образования (их территории начали заселяться с самого начала колонизации американского континента), – Флорида, Алабама, Южная и Северная Каролина, Нью-Йорк, Коннектикут и др. – численность населения как функция времени хорошо описывается логистической кривой (рис. 7, а). Заметим также, что у этих штатов наибольшая плотность населения и, как следствие, наиболее равномерное распределение населения по территории. Вторую группу составляют штаты, присоединенные существенно позже. Это внутренние территории, которые вначале были свободными (на них проживали индейские племена), затем начиналась колонизация, на них появлялись переселенцы, земли получали статус территорий, на которые правительство США заявляло свои претензии, и затем соответствующие территории получали статус штатов. Это, например, Айова, Миннесота, Колорадо, Канзас, Оклахома и т.д. Для этих штатов типична динамика численности населения приведенная на рис. 7, б. Рисунок иллюстрирует изменение численности народонаселения штата Миннесота, который до 1849 года был так называемой неорганизованной территорией, затем получил статус территории и только в 1858 году стал полноправным штатом. В штатах, для которых характерно постепенное заселение (обусловленное, с одной стороны, большим числом

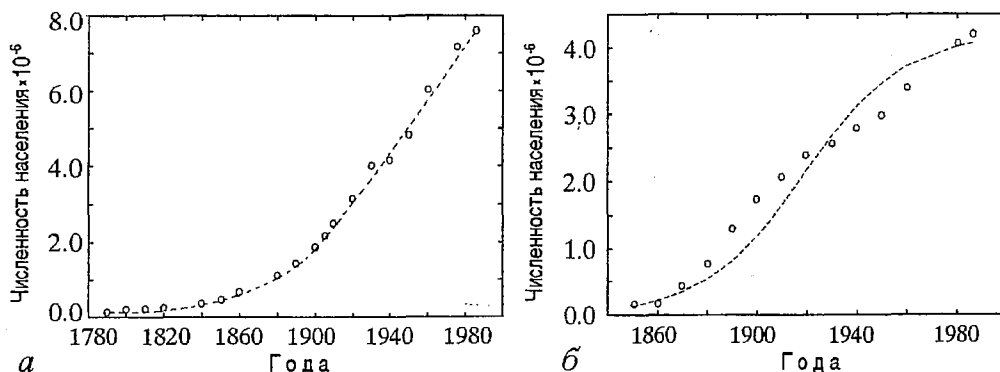


Рис. 7. Динамика численности народонаселения: а – штат Нью-Йорк; б – штат Миннесота. Пунктиром показаны соответствующие логистические кривые, наилучшим образом аппроксимирующие исходные демографические данные, отмеченные точками. Параметры логистической кривой подбирались с помощью метода наименьших квадратов

³ Данные взяты из базы данных Университета Вирджинии (Historical United States Census Data Browser, University of Virginia, <http://fisher.lib.Virginia.edu/census>).

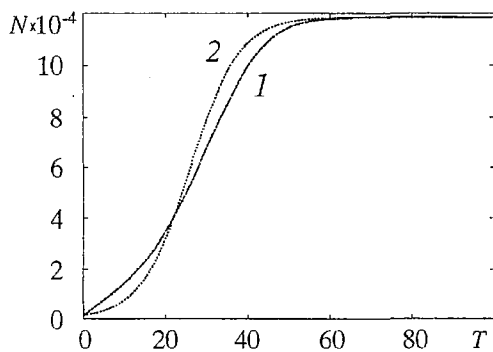


Рис. 8. Динамика численности «клеточной» популяции, описываемой уравнением КПП, которое моделируется решеточным газом. Анализируется распространение популяции на территорию, на которой уже есть население с небольшой плотностью расселения: 1 – решеточный газ; 2 – уравнение Ферхюльста

подобна.

Таким образом, следует признать, что «клеточная» популяция может оказаться весьма эффективным инструментом для исследования задач популяционной динамики. С одной стороны, подобная модель весьма проста в реализации (хотя не исключено, что некоторые эволюционные правила должны быть уточнены, модифицированы, а может быть и заменены), а, с другой стороны, ее поведение находится в хорошем соответствии с эталонными моделям популяционной экологии и имеет качественные аналогии в реальных системах. По сути дела, модели типа решеточного газа являются непривычными, но вполне равноправными динамическими системами, точно такими же, как системы с дискретным (отображения) или непрерывным (поток) временем. Вместе с тем, широкие возможности эмпирического конструирования таких моделей делают решеточные газы особенно привлекательными для моделирования биологических и социологических задач. Например, было бы очень интересно проанализировать «возрастную» стратификацию «клеточной популяции» и сравнить ее с реальными демографическими данными.

Работа поддержана грантом РФФИ «Ведущие научные школы» (00-15-96673) и ФЦП «Интеграция», проект А0057/2000.

Библиографический список

1. Himanshi A. Construction of molecular dynamics Like cellular automata models for simulation of compressible fluid dynamic systems, preprint in Internet: <http://xxx.lanl.gov/e-print/comp-gas/9905002>, May 13, 1999. 275 p.
2. Гоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991.
3. Wolfram S. Cellular automation fluids 1: Basic Theory// Journal of Statistical Physics. 1986. Vol. 45. P. 471.
4. Frish U., d'Humieres D., Hasslacher B., Lallemand P., Pomeau Y., Rivet J.-P. Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions// Complex Systems. 1987. Vol. 1. P. 649.
5. Huang K. Statistical Mechanics. John Wiley and Sons, Inc., 1963.
6. Короновский А.А., Храмов А.Е., Анфиногентов В.Г. Феноменологическая модель электронного потока с виртуальным катодом // Изв. РАН. Сер. Физическая. 1999. Т.63, № 12. С.2355.
7. Csahòk Z., Vicsek T. Lattice gas model for collective biological motion // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 5. P. 5297.

8. *Shönfish B.* Propagation of fronts in cellular automata // *Phys. D.* 1995. Vol. 80. P. 433.
9. *Clavin P., Lallemand P., Pomeau Y., Searby G.* Simulation of free boundaries in flow system by lattice-gas models // *J. of Fluid Mechanics.* 1988. Vol. 188. P. 437.
10. *Chopard B., Droz M.* Cellular automata model for heat conduction in a fluid // *Phys. Lett. A.* 1988. Vol. 126, № 8/9. P. 476.
11. *Chan K.C., Liang N.Y.* Critical phenomena in an immiscible lattice-gas cellular automata // *Europhys. Lett.* 1990. Vol. 13, № 6. P. 495.
12. *Gerhardf M., Shuster H., Tyson J.J.* A cellular automation model of excitable media III. Fitting the Belousov – Zhabotinskii reaction // *Phys. D.* 1990. Vol. 46. P. 416.
13. *Aizawa Y., Nishikawa I., Kaneko K.* Solution turbulence in one-dimensional cellular automata // *Phys. D.* 1990. Vol. 45, № 1–3. P. 307.
14. *Qian Y.H., d'Himieres D., Lallemand P.* Diffusion simulation with a deterministic one-dimensional lattice-gas model // *J. of Stat. Phys.* 1992. Vol. 68, № 3/4. P. 563.
15. *Jacobs D.J., Masters A.J.* Domain growth in one-dimensional diffusive lattice gas with short-range attraction // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 4. P. 2700.
16. *Plap M., Gouyet J.-E.* Dendritic growth in a mean-field lattice-gas model // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, № 1. P. 45.
17. *Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.* Моделирование движения толпы при помощи клеточных автоматов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 5. С. 75.
18. *Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.* Построение моделей класса решеточных газов для решения задач газодинамики // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1996. Т. 4, № 4, 5. С. 59.
19. *Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O.* Time evolution of a two-dimensional model system // *J. of Mat. Phys.* 1973. Vol. 14, № 12. P. 1746.
- Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O.* Molecular dynamics of a classical lattice gas: Transport properties and time correlation functions // *Phys. Rev. A.* 1976. Vol. 13, № 5. P. 1949.
20. *Frish U., Hasslacher B., Pomeau Y.* Lattice-gas automata for Navier – Stokes equation // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56, № 14. P. 1694.
21. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.
22. *Смит Дж.М.* Модели в экологии. М.: Мир, 1976.
- Allee W.C., Emerson A.E., Park O., Park T., Shmidt K.P.* Principles of animal ecology. Philadelphia. W.B. Saunders, 1949.
23. *Трубецков Д.И.* Колмогоров, Петровский, Пискунов, Фишер и нелинейное уравнение диффузии // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 6. С. 85.
24. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // *Бюлл. МГУ: Сек. А.* 1937. Т. 1, сер. А, 16. С. 1.
25. *Fisher R.A.* The wave of advance of advantageous genes // *Ann. Eugenics.* 1937. Vol. 7. P. 355.
26. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* К вопросу об описании численности народонаселения нелинейным уравнением диффузии. ДАН. 2000. Т. 372, № 3. P. 397.

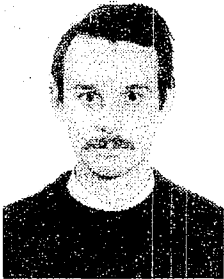
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 7.03.2000
после доработки 28.06.2000

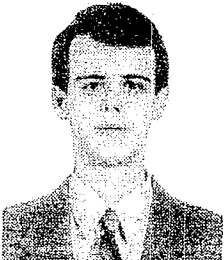
SOME MODELS OF LATTICE-GAS CLASS RELATED WITH POPULATION NUMBER DESCRIPTION

V.G. Anfinogentov, A.A. Koronovskiy, A.E. Hramov

In this work we have proposed the model for population dynamics problems analysis. This model belongs to lattice-gas class models. The results of investigations are compared with the logistic equation solution, the nonlinear diffusion equation one and real demographic statistical data of USA.



Анфиногентов Василий Геннадиевич – родился в 1968 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1991). После окончания университета работает на кафедре электроники, колебаний и волн СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) по специальности радиофизика. Область научных интересов – сложная динамика в распределенных системах электронной природы, мощная СВЧ-электроника.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996). Автор ряда статей в центральной печати.



Храмов Александр Евгеньевич – окончил Саратовский госуниверситет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ-электроника.

E-mail: ach@cas.ssu.runnet.ru



Изв.вузов «ПНД», т.8, № 4, 2000

УДК 616-057-037+577.8:51+681.3

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ПРОИЗВОДСТВЕННО ОБУСЛОВЛЕННЫХ НАРУШЕНИЙ БИОЛОГИЧЕСКИХ РИТМОВ

А.Д. Трубецков, Е.С. Мчедлова

На основе анализа практических биомедицинских данных и результатов компьютерного моделирования изучаются последствия влияния сменного труда на организм человека. Вводятся и сравниваются характеристики, позволяющие оценить степень неблагоприятности для организма того или иного графика сменного труда.

Изучение последствий сменного труда для организма человека связано со многими методическими сложностями. Во-первых, большой проблемой является подбор сопоставимых популяций работающих, имеющих близкими все основные характеристики трудового процесса, кроме графика чередования смен. Во-вторых, известно, что около 10–20% людей не приспособлены для работы в ночное время. Из-за этого в трудовых коллективах возникает естественный самоотбор, при котором на рабочих местах остаются только те, кто способен продолжать трудиться в нетрадиционное время. Чем больше стаж труда, тем меньше остается в рабочей популяции лиц, не способных к адаптации. Поэтому при длительном наблюдении одной группы рабочих число наблюдаемых ежегодно снижается. Заметим, что определенный интерес представляют исследования, связанные с изучением состояния здоровья уволившихся (drop-outs). В-третьих, результаты физиологических и клинических исследований могут не совпадать с точкой зрения самих рабочих, поскольку для них важны не только медицинские последствия сменного труда (которые могут быть значительно отсрочены), но и социальные преимущества того или иного графика. В-четвертых, и это представляется наиболее важным, отсутствует *система сравнения* сменных графиков между собой.

Идеалом изучения воздействия любого неблагоприятного фактора на организм служит выявление зависимости по типу «доза – эффект». В отношении сменного труда до настоящего времени подобные исследования являются изначально неосуществимыми, так как отсутствует количественный критерий, характеризующий неблагоприятность для организма человека того или иного графика.

Ранее была предложена математическая модель циркадианной системы человека, позволяющая численно представить выраженность десинхронизации биологических ритмов при различных изменениях внешних воздействий на систему. Детальное описание, обоснование и исследование модели содержится в работе [1]. Математически модель представлена решеткой взаимно связанных автоколебательных элементов под внешним воздействием. Особенность заключалась в том, что периоды колебаний отдельных элементов решетки

несколько отличались друг от друга и от периода внешнего воздействия, а внешнее воздействие представляло собой гармонический сигнал, в который в отдельные моменты времени вносились сдвиги фазы, то есть фаза внешнего воздействия могла меняться скачком, что в контексте рассматриваемой биомедицинской проблематики соответствует изменению временной организации внешних условий: сменный труд либо трансмеридианный перелет из одного часового пояса в другой. Были приведены примеры, подтверждающие соответствие работы модели реальным физиологическим явлениям. Следует отметить, что при создании моделей взаимодействий в живых системах разумно придерживаться известного для исследователей в области хронобиологии мультиосцилляторного принципа [2], согласно которому циклические процессы в организме осуществляются относительно независимыми пейсмекерами, синхронизированными по фазе и периоду. Данный принцип, с одной стороны, позволяет организму эффективно приспосабливаться к изменениям временной организации окружающей среды; с другой стороны, в нем заложено патологическое начало, так как относительная независимость отдельных элементов биоритмологической структуры может при определенных условиях приводить к десинхронизации внутренних циклических процессов и быть причиной патологии.

Настоящее исследование посвящено оценке и сравнению с помощью предложенной в [1] модели некоторых сменных графиков, использующихся на практике в производстве.

Одной из наиболее актуальных проблем подбора смен является выбор скорости ротации. Под скоростью ротации понимают количество дней, которые рабочий трудится подряд в одни и те же часы до выходного дня (дней) или перехода в другую смену. Различают быструю (1–4 дня) и медленную (5 и более дней) скорости ротации. Отмечено, что рабочие часто предпочитают быструю ротацию графиков, в то же время есть данные, что именно такой график является наиболее неблагоприятным для организма. С точки зрения биоритмологии наиболее физиологичен режим труда, при котором возникает меньшее количество перестроек циркадианной системы, то есть медленная ротация или даже постоянный ночной труд [3]. Однако то, что рабочие стараются придерживаться традиционного режима в дни отдыха, не позволяет считать постоянный ночной труд действительно постоянным, так как каждый выходной происходит новая перестройка циркадианной системы.

В связи с этим были проанализированы изменения предложенного ранее в работе [1] показателя неблагоприятности сменного графика S_1 в зависимости от скорости ротации (от 1 до 14 дней) при моделировании двухсменного и трехсменного труда. Если дневной труд моделируется как естественное течение ритма при отсутствии какого-либо сдвига внешнего ритма, то ночной труд (наиболее выраженное нарушение естественного ритма сон – бодрствование) как максимальное изменение времени адаптации $T_{ад}$ – на $1/2$ периода. Под ночным трудом в медицине труда принято понимать рабочий период продолжительностью не менее 7 часов, занимающий время от 0.00 до 5.00 часов. Этот период для большинства людей противоположен времени наибольшей физической и психоэмоциональной активности. При моделируемых режимах сменного труда период ночных смен предшествует аналогичному по длительности периоду дневных. Скорость ротации обозначается как n и колеблется от 1 до 14 дней.

При трехсменном труде всегда имеется дневная смена, когда ритм жизнедеятельности работающего приближен к физиологическому (отсутствие сдвига внешнего ритма). Две оставшиеся смены (утренняя и вечерняя) при любом варианте их организации во времени носят промежуточный характер, приближающийся к воздействию ночного труда. Они захватывают только часть периода от 0.00 до 5.00 часов, поэтому возможно их моделирование при введении сдвига периода внешнего воздействия на $1/3$ и $2/3$, соответственно. Результаты представлены на рис. 1. Видно, что показатель десинхронизации циркадианных ритмов S_n , в целом, выше при трехсменной форме труда. При однодневной ротации показатели S_n имеют близкие значения в обоих случаях, причем единственный раз

S_i , несколько выше применительно к двухсменной форме труда. При двухсменном труде более физиологичной представляется медленная ротация (свыше четырех суток), при трехсменном – быстрая. В последнем случае зависимость от числа последовательных дней работы в одну смену имеет несколько меньшее значение. Обобщая полученные данные, можно сказать, что при необходимости использования трехсменного труда (обязательность восьмичасового рабочего дня) следует рекомендовать скорость ротации 1–3 дня; при возможности использования двенадцатичасового рабочего дня следует составлять график со скоростью ротации в четверо суток и более, но могут возникать проблемы с социальными аспектами данного режима труда.

Однако наиболее важным практическим приложением модели является анализ конкретных графиков чередования смен. В данном случае мы попытались сравнить несколько показателей, характеризующих неблагоприятное воздействие сменного графика на организм. Кроме показателя S_i , определялось число ночных смен в пересчете на один месяц N_n , что соответствует методике, предложенной в [4]. Также определялось время, за которое система возвращается в исходное состояние после внесения всего цикла возмущений (T_{ad}). Этот показатель близок к используемому на практике так называемому основному периоду сменного графика. Хрономедицина под периодом сменной системы понимает продолжительность ритма, которая необходима для циркадианной системы, чтобы вернуться в синхронизированное состояние [5].

Рассматривалось восемь режимов труда, использующихся на различных предприятиях. В таблице представлены соответствующие сменные графики с

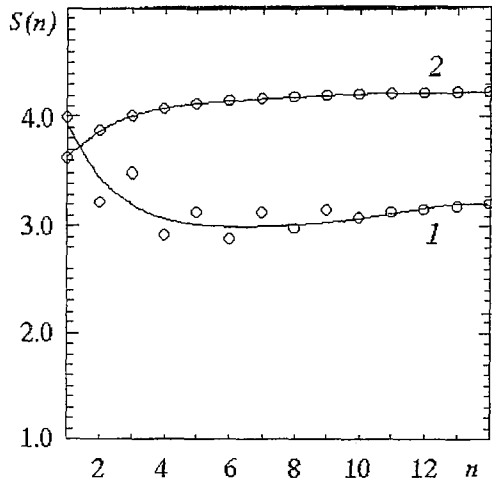


Рис. 1. Зависимость выраженности степени десинхронизации от скорости ротации n сменного графика: 1 – двухсменный график: сдвиг фазы внешнего воздействия на $1/2$ периода в течение nT периодов и затем nT периодов нормальной активности; 2 – трехсменный график: сдвиг фазы внешнего воздействия на $2/3$ периода в течение nT периодов, затем сдвиг фазы на $1/3$ периода в течение nT периодов и далее nT периодов нормальной активности

Таблица

Сменный график		N_n	T_{ad}	S_i
Обозначение	Вид			
ЭВ1	Экспедиционно–вахтовый труд в 1 смену	0	12.95	0.3
В	Вахтовый труд (местная вахта) в 2 смены	7.5	17.5	1.49
ЭВ2	Экспедиционно–вахтовый труд в 2 смены	7.5	18.50	1.73
С1	Суточное дежурство и 3 дня выходных (с–о–о–о)	7.5	24.0	2.0
С2	Двухсменный труд с ротацией в 1 день (д–н–о–о)	6.0	24.0	1.61
С3	Двухсменный труд с ротацией в 1 день и двумя выходными (д–н–о–о+Сб–Вс)	5.5	23.5	1.35
С4	Двухсменный труд с ротацией в 2 дня (д–д–о–н–н–о–о–о)	7.5	13.95	1.49
С5	Трехсменный труд с ротацией в 5 дней и двумя выходными (5у–о–о–5в–о–о–5н–о–о)	7.1	20.7	1.53

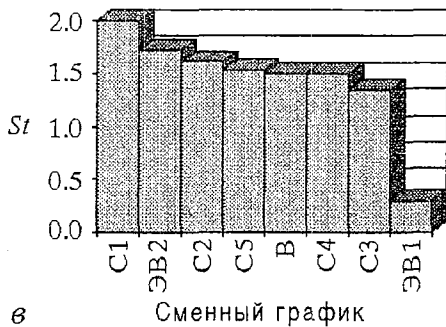
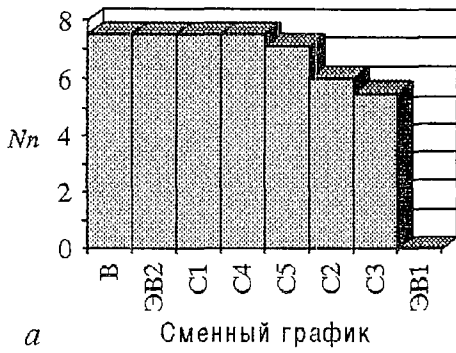


Рис. 2. Гистограммы, соответствующие исследованным сменным графикам, построенные тремя способами: смены упорядочены по убыванию каждого из характеризующих их параметров

указанием способа чередования смен. Экспедиционная вахта продолжалась 14 дней с аналогичным периодом отдыха, местная вахта – 8 дней. При всех видах двухсменного труда длительность рабочего дня составляла 12 часов. При трехсменном труде использовались смены различной продолжительности

(утренняя – 9, вечерняя – 8, ночная – 7 часов).

Из представленных в таблице результатов расчета видно, что показатели характеризуют сменные графики различным образом. Для определения этих различий мы расположили сменные графики тремя способами, в порядке убывания каждого из параметров (рис. 2), после чего были сопоставлены полученные результаты с общепринятыми литературными данными и данными клинических исследований.

При использовании показателя N_n , его величина для односменного труда экспедиционно-вахтовым способом равна 0. Остальные графики характеризуются близкими значениями N_n : от 5.5 до 7.5, причем в четырех случаях значения показателя одинаковы. Нет зависимости от длительности смены (8 и 12 часов, суточное дежурство). Величина показателя $T_{ад}$ достаточно ровно нарастает от 12.95 при экспедиционно-вахтовом труде в одну смену до значения 24, характеризующего работу по двум весьма различным графикам. Обращает на себя внимание практическое равенство показателей $T_{ад}$ в группах С2 и С3, которые различает наличие двух дополнительных выходных на неделе во втором случае.

То, что это различие минимально и величина показателей в обоих случаях больше, чем в группе ЭВ2, как и при трехсменном труде с недельной ротацией ($T_{ад}=20.7$), делает возможность использования показателя $T_{ад}$ на практике весьма сомнительной.

Самое низкое значение S_t , как и N_n , при графике труда ЭВ1, что следует признать закономерным. Кроме того, низкое значение S_t отличается при 12-часовом графике работы и при трансмеридианном перелете ($S_t=0.3$). Значительное количество выходных дней (в том числе и традиционных – суббота, воскресенье) ставит на второе место график С4. Далее следует местная вахта (без пересечения часовых и климатических поясов) и трехсменный труд с недельной ротацией. Одинаковое значение показателя S_t при двухсменном труде со скоростью ротации в 1 и 2 дня не противоречит опубликованным данным. Замыкают список вахтовый труд по экспедиционно-вахтовому графику и суточные дежурства (с тремя последующими выходными).

Данный вариант расположения сменных графиков позволяет количественно

осуществить оценку степени их неблагоприятного воздействия на организм работающих и соответствует современным научным представлениям о рациональном подборе режимов труда. Таким образом, показатель S_t , полученный с помощью математического моделирования, наиболее обоснован с точки зрения хронобиологии и в то же время не противоречит общей практике подбора сменных графиков по степени их влияния на организм человека. Именно его целесообразно предложить для использования на практике при нормировании сменного и/или ночного труда.

Работа выполнена при поддержке гранта Минобразования РФ, а также гранта РФФИ № 99-02-16016.

Библиографический список

1. Мchedлова Е.С., Трубецков А.Д. Процессы самоорганизации как результат нелинейных взаимодействий в системах биологических осцилляторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1. С. 73.
2. Деряпа Н.Р., Мошкин М.Н., Посный В.С. Проблемы медицинской биоритмологии. М.: Медицина, 1985. 208 с.
3. Навакатикян А.О., Сытник Н.И., Кальниш В.В. Оптимизация сменного труда: графики сменности (обзор литературы) // Медицина труда и промышленная экология. 1995. № 1. С.22.
4. Cervinka R. Night shift dose and stress at work // Ergonomics. 1993. Vol. 36, № 1-3. P. 155.
5. Folkard S., Minors S., Waterhous J.M. Chronobiology and shift work: Current issues and trends // Chronobiologia. 1985. № 12. P. 31.

*Саратовский государственный
медицинский университет
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 30.11.1999
после доработки 11.07.2000*

NUMERICAL ESTIMATION OF BIOLOGICAL RHYTHMS DESTRUCTION COURSED BY LABOUR REGIMES

A.D. Trubetskov, E.S. Mchedlova

On the base of biomedical data analysis and numerical simulation results the consequence of the shift work effect on human organism are investigated. It is introduced and compared the characteristics allowed to estimate the degree of harm to the health induced by a shift work schedule.



Трубецков Алексей Дмитриевич – родился в 1964 году. Закончил Саратовский медицинский институт (1988). Защитил диссертацию на соискание звания кандидата медицинских наук (1992) и доктора медицинских наук (1999). Работает заведующим кафедрой профпатологии и гематологии СГМУ. Научные интересы – профессиональная и профессионально обусловленная патология. Автор более 50 печатных работ.



Мчедлова Елена Сумбатовна – окончила Саратовский государственный университет (1993). Кандидат физико–математических наук (1996). Работает научным сотрудником ГосУНЦ «Колледж» Саратовского госуниверситета. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, компьютерное моделирование в физике и биология, методы анализа динамических систем. Автор ряда работ по построению и исследованию моделей структурированных потоков со сверхизлучением, изучению взаимодействий в больших ансамблях связанных автоколебательных систем. E-mail: esm@cas.ssu.runnet.ru



В редакции имеется в наличие сборник

Фундаментальные проблемы физики: Материалы Второй международной конференции. Саратов, Россия, 9–14 октября 2000 года. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. 208 с.

Материалы сборника отражают тематику исследований, проводимых в рамках Программы «Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России». Более чем в 200–х тезисах и докладах излагаются результаты работ по следующим актуальным направлениям физики:

- ядро и элементарные частицы, космические излучения и космос
- атомы и молекулы, оптические явления
- конденсированное состояние вещества, полупроводники, микроэлектроника, магнитные явления
- кинетические явления, плазма, открытые системы
- биофизика, медицинская физика, экология
- физика Земли и планет, атмосферы и околоземного космического пространства, астрономия и астрофизика
- акустические и гидродинамические волновые процессы, радиоволны
- теоретическая и математическая физика.

*Заинтересованный читатель может приобрести
сборник материалов наложенным платежом.
Стоимость наложенного платежа 50 руб.*

Заказы принимаются

*по почте: 410026 Саратов, Астраханская ул., 83
по электронной почте E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
по телефону: (845–2)52–38–64*





УПРАВЛЯЕМАЯ ПРОТИВОФАЗНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА В СВЯЗАННЫХ КУБИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов, А.В. Климишин

Изучается явление противофазной синхронизации во взаимодействующих хаотических системах с симметрией на примере диссипативно связанных кубических отображений. Исследованы движения в симметричном подпространстве, получены условия устойчивости режима управляемой противофазной синхронизации хаоса, рассмотрен процесс десинхронизации хаоса: описаны колебательные режимы и изменение структуры бассейна притяжения хаотического аттрактора при выходе из области синхронизации.

Введение

Исследование явления синхронизации в связанных хаотических системах является одной из важных задач нелинейной динамики, имеющих большое фундаментальное и прикладное значение во многих областях науки и техники.

Одним из простейших видов взаимного согласования движений взаимодействующих хаотических систем является так называемая полная синхронизация хаоса [1] – [6]. В связанных идентичных колебательных системах возможна ситуация, когда выше некоторого порогового значения коэффициента связи колебания подсистем полностью совпадают, $x=y$, где x , y – векторы динамических переменных первого и второго осциллятора, соответственно. То есть режиму полной синхронизации соответствует хаотический аттрактор, расположенный в симметричном подпространстве $x=y$ полного фазового пространства связанных систем. Однако существует класс хаотических динамических систем (например, связанные кубические отображения, осцилляторы Дуффинга, генераторы Чуа), обладающих симметрией не только по отношению к замене $x \rightarrow y$, но и к замене $x \rightarrow -y$. В подобных системах существует два симметричных подпространства $x=y$ и $x=-y$. Поэтому возможны два вида полной синхронизации хаоса, каждому из которых соответствует движение в своем симметричном подпространстве. Движения в первом из них соответствуют режиму полной синфазной синхронизации, а во втором – режиму полной противофазной синхронизации. Противофазная синхронизация хаоса в однонаправленно связанных системах в виде дискретных отображений и обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в работе [7]. В ней, следуя [8], рассматривалась «master-slave»-синхронизация хаоса. Следует отметить, что эффект противофазной синхронизации хаоса имеет большое прикладное значение: появляются новые возможности при разработке методов скрытой передачи информации, что подробно обсуждается в [7].

Хорошо известно, что устойчивые и грубые режимы синфазной синхронизации хаоса могут быть реализованы только при определенных типах связи выше некоторого порогового значения. Однако при многих видах взаимодействия, в широкой области значений коэффициента связи в системе существуют синфазные и противофазные синхронные хаотические движения, но они являются неустойчивыми к возмущениям, направленным трансверсально к симметричному подпространству. В подобных случаях в системе можно осуществить переход из режима несинхронных хаотических колебаний к режиму синхронизации, используя методы управления хаосом. С их помощью определенные хаотические множества, соответствующие синфазным или противофазным синхронным движениям, можно превратить в устойчивые по одним собственным направлениям, оставляя неустойчивыми по другим.

В данной работе рассматривается задача об управляемой противофазной синхронизации хаоса в связанных кубических отображениях. В качестве управляющего воздействия используется цепь обратной связи. Построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от величины параметра управления. Определена область устойчивости противофазного синхронного хаоса. Показано, что разрушение режима управляемой противофазной синхронизации сопровождается явлением пузырения хаотического аттрактора (bubbling attractor) [9] и изрешечиванием его бассейна притяжения (riddled basins) [10].

Исследуемая система

Будем рассматривать систему связанных отображений вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma \{f(y_n) - f(x_n)\}, \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma \{f(x_n) - f(y_n)\},\end{aligned}\tag{1}$$

где x_n , y_n – динамические переменные первой и второй подсистемы, γ – коэффициент связи. Динамика парциальной системы описывается отображением

$$x_{n+1} = f(x_n) = (a-1)x_n - ax_n^3,\tag{2}$$

a – управляющий параметр парциальной системы.

В отсутствие связи ($\gamma = 0$) в парциальном отображении (2) при $0 < a < 2$ существует устойчивая неподвижная точка C_0 с координатой $x=0$. С ростом управляющего параметра при $a=2$ ее собственное значение $\mu=a-1$ становится равным $+1$, и C_0 претерпевает бифуркацию потери симметрии (или бифуркацию вил), в результате которой она становится неустойчивой, а в ее окрестности рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек C_1 и C_2 с координатами $x_1 = \{(a-2)/a\}^{1/2}$ и $x_2 = -\{(a-2)/a\}^{1/2}$, соответственно. При дальнейшем увеличении a на базе неподвижных точек C_1 и C_2 происходит каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при $a=3.3$ возникновением хаотических аттракторов. При $a=3.6$ два симметричных друг другу хаотических аттрактора объединяются в один.

При введении связи динамика системы (1) существенно усложняется. Отметим, что данная система является симметричной по отношению к заменам переменных $x \leftrightarrow y$ и $x \leftrightarrow -y$. Симметричное подпространство, определяемое уравнением $x=y$, будем в дальнейшем называть «антисимметричным», чтобы отличать его от симметричного подпространства, задаваемого уравнением $x=-y$. Движения в симметричном подпространстве $x=y$ полного фазового пространства взаимодействующих систем соответствуют режиму полной синфазной синхронизации, а движения в антисимметричном подпространстве $x=-y$ соответствуют режиму полной противофазной синхронизации.

В системе связанных отображений при $0 < a < 2$ существует устойчивая неподвижная точка $C_{00}: \{x=0, y=0\}$. С увеличением параметра a на линии $a=2$ (l_{sp}^{00} , рис. 1) ее собственное значение $\mu_{\perp} = a-1$ становится равным $+1$. Точка C_{00} претерпевает бифуркацию потери симметрии (бифуркацию вил). В ее окрестности в симметричном подпространстве рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{01}: \{x=y=[(a-2)/a]^{1/2}\},$$

$$C_{02}: \{x=y=-[(a-2)/a]^{1/2}\}.$$

Неподвижная точка C_{00} становится седловой, неустойчивой в симметричном подпространстве, но остается устойчивой в антисимметричном подпространстве.

При дальнейшем увеличении a на линии

$$a = 1 + 1/(1-2\gamma)$$

(l_{ap}^{00} на рис. 1) седловая точка C_{00} претерпевает вторую бифуркацию потери симметрии. Ее второе собственное значение $\mu_{\perp} = (1-2\gamma)(a-1)$ становится равным $+1$. В окрестности C_{00} в антисимметричном подпространстве $x=-y$ рождается пара седловых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{10}: \{x=-y=[1-(1-\gamma)/[a(0.5-\gamma)]]^{1/2}\}, \quad C_{20}: \{x=-y=-[1-(1-\gamma)/[a(0.5-\gamma)]]^{1/2}\}.$$

Точка C_{00} становится репеллером.

Регулярные и хаотические режимы синфазной синхронизации формируются на базе неподвижных точек C_{01} и C_{02} . При изменении управляющего параметра a наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода синфазных периодических орбит, который приводит к появлению двух хаотических аттракторов A_{01} и A_{02} в симметричном подпространстве в окрестности точек C_{01} , C_{02} . При дальнейшем увеличении a происходит объединение двух синхронных хаотических аттракторов в один. Режимы синфазной синхронизации хаоса и бифуркационные механизмы десинхронизации синфазных хаотических движений в данной системе детально описаны в работе [6]. В настоящей работе исследуются движения в противофазном симметричном подпространстве.

Противофазная синхронизация в системе (1)

Противофазные режимы формируются на базе неподвижных точек C_{10} и C_{20} . Предельные множества, сформированные на базе этих двух точек, идентичны с точностью до преобразования симметрии. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только одного семейства режимов (например, сформированного около точки C_{10}).

Седловая неподвижная точка C_{10} рождается из седловой неподвижной точки C_{00} . Она является неустойчивой по отношению к возмущениям, трансверсальным к антисимметричному подпространству. На линии бифуркации вил l_{rp}^1 (рис. 1) точка

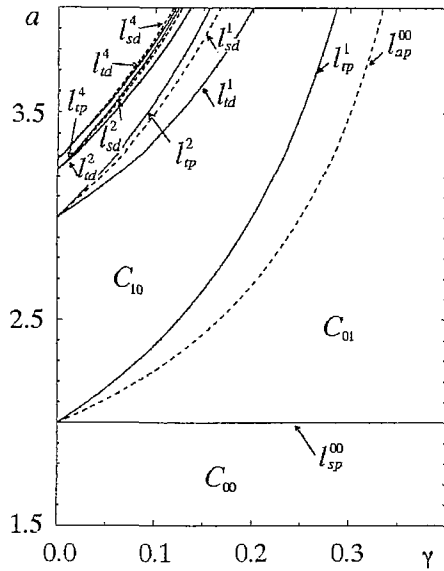


Рис. 1. Области существования режимов на плоскости параметров γ, a

C_{10} становится устойчивой. Данная неподвижная точка соответствует регулярным противофазным колебаниям с наименьшим периодом. На базе этой точки при изменении параметров a и γ наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Каждая из орбит, участвующих в каскаде, претерпевает бифуркацию удвоения периода дважды. Вначале, будучи устойчивой, – по одному направлению, затем, уже став седловой, – по второму. В результате первого удвоения орбита теряет устойчивость в направлении, трансверсальном к антисимметричному подпространству. В ее окрестности вне антисимметричного подпространства рождается устойчивая орбита удвоенного периода. В результате второго удвоения седловая орбита теряет устойчивость в тангенциальном к подпространству направлении. Она становится репеллером, и в ее окрестности, внутри антисимметричного подпространства рождается седловая орбита удвоенного периода. На рис. 1 линии первого удвоения обозначены: l_{id}^1 – для орбиты периода 1, l_{id}^2 – для орбиты периода 2 и l_{id}^4 – для орбиты периода 4, а линии вторых удвоений (штриховые линии): l_{sd}^1 – для орбиты периода 1, l_{sd}^2 – для орбиты периода 4 и l_{sd}^4 – для орбиты периода 2. Затем, при изменении параметров появившиеся внутри антисимметричного подпространства седловые орбиты становятся устойчивыми через субкритические бифуркации вил. Линии этих бифуркаций обозначены соответственно l_{p}^2 , l_{p}^4 . Таким образом, на плоскости параметров в области между линиями l_{p}^1 и l_{id}^1 существует устойчивая противофазная орбита периода 1, между линиями l_{p}^2 и l_{id}^2 – устойчивая противофазная орбита периода 2, между линиями l_{p}^4 и l_{id}^4 – устойчивая противофазная орбита периода 4. Бифуркации орбит более высокого периода нами не рассматривались, но можно предположить, что они происходят подобным образом. Следовательно, до перехода к хаосу на плоскости параметров существуют полосы устойчивости для противофазных периодических орбит, все более и более сужающиеся с ростом периода орбиты. Эти области разделены полосами неустойчивости для тех же орбит.

Похожий бифуркационный сценарий наблюдался в ряде систем для случая синфазной синхронизации [11, 12]. Однако в случае синфазной синхронизации бифуркации удвоения внутри симметричного подпространства предшествовали бифуркациям удвоения в трансверсальном направлении. Вследствие этого:

- области устойчивости синфазных орбит не разделялись областями трансверсальной неустойчивости;

- в результате каскада удвоений внутри симметричного подпространства, при большой связи в симметричном подпространстве формировался хаотический аттрактор.

Таким образом, численные исследования динамики системы в антисимметричном подпространстве и бифуркационный анализ периодических орбит, участвующих в каскаде бифуркаций удвоения периода, показали, что в системе существуют противофазные периодические движения с любым конечным периодом. Области существования этих колебаний на плоскости параметров сужаются при увеличении периода орбиты. Противофазные хаотические колебания в ходе исследования обнаружены не были.

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о возможности существования противофазной синхронизации хаоса в системе. Для решения этой задачи удобнее перейти к новым переменным

$$u=(x+y)/2, \quad v=(x-y)/2.$$

Запишем полусумму и полуразность уравнений системы (1)

$$(x_{n+1}+y_{n+1})/2=1/2(f(x_n)+f(y_n)), \quad (3)$$

$$(x_{n+1}-y_{n+1})/2=1/2((1-2\gamma)(f(x_n)-f(y_n))). \quad (4)$$

Полагаем, что изображающая точка находится в окрестности антисимметричного подпространства:

$$x=(x-y)/2+\Delta x, y=(y-x)/2+\Delta y,$$

где Δx и Δy малы. В этом случае можно разложить $f(x)$ и $f(y)$ в ряд Тейлора в окрестности $(x-y)/2$, ограничившись линейными членами разложения

$$f(x)=f[(x-y)/2]+f'[(x-y)/2][x-(x-y)/2],$$

$$f(y)=-f(-y)=-f[(x-y)/2]-f'[(x-y)/2][-y-(x-y)/2].$$

Подставив полученные соотношения в (3),(4), получим

$$u_{n+1}=f'(v_n)u_n, \quad (5)$$

$$v_{n+1}=(1-2\gamma)f(v_n). \quad (6)$$

В новых переменных вектор $(1;0)$ направлен перпендикулярно антисимметричному подпространству, а вектор $(0;1)$ – тангенциально к нему. Уравнение (6) задает движение внутри антисимметричного подпространства. Независимость этого уравнения от переменной u отражает факт инвариантности антисимметричного подпространства относительно оператора эволюции исходной системы (1). В отличие от случая синфазной синхронизации [6], форма синхронных колебаний

зависит от коэффициента связи γ . Для определения устойчивости колебаний внутри антисимметричного подпространства (для возмущений, направленных тангенциально) можно ввести «тангенциальный показатель Ляпунова»

$$\Lambda_1=\lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{n=1}^N \ln|(1-\gamma)f'(v_n)|. \quad (7)$$

На рис. 2 представлена зависимость тангенциального показателя Ляпунова от коэффициента связи при фиксированном значении параметра $a=3.8$ и построена соответствующая бифуркационная диаграмма режимов внутри антисимметричного подпространства.

Уравнение (5) определяет движение в нормальном направлении к антисимметричному подпространству. Параметр связи не входит в него явным образом, однако зависимость от v_n предполагает неявную зависимость от коэффициента связи. Нулевое решение уравнения (5) $u=0$ соответствует противофазным колебаниям. Устойчивость этого решения определяет устойчивость противофазных колебаний к трансверсальным возмущениям. Эта устойчивость определяется «трансверсальным показателем Ляпунова»

$$\Lambda_{\perp}=\lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{n=1}^N \ln|f'(v_n)|. \quad (8)$$

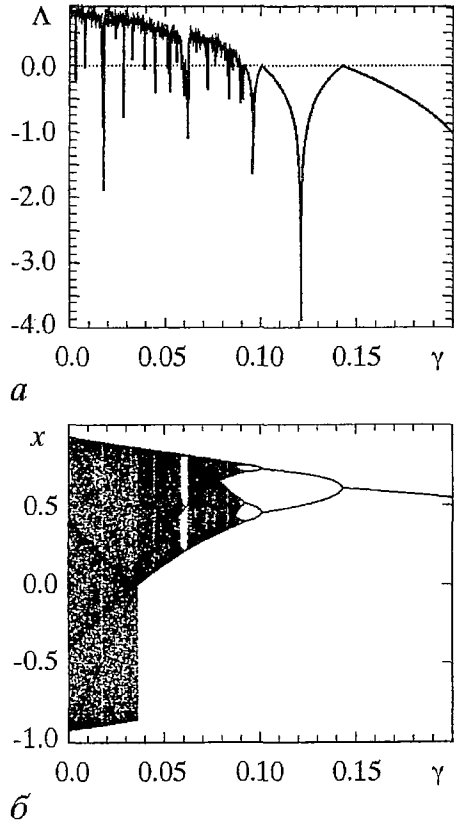


Рис. 2. Тангенциальный показатель Ляпунова (а) и бифуркационная диаграмма (б) для режимов в антисимметричном подпространстве в зависимости от значений коэффициента связи γ при $a=3.8$

Из выражений (7) и (8) видно соотношение между тангенциальным и трансверсальным показателями Ляпунова:

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} - \ln|1 - 2\gamma|. \quad (9)$$

В наших исследованиях мы ограничиваемся случаем малых положительных γ ($0 \leq \gamma \leq 0.5$). При этом $\ln|1 - 2\gamma| \leq 0$ и, следовательно,

$$\Lambda_{\perp} \leq \Lambda_{\parallel}.$$

Следствием данного соотношения является тот факт, что на плоскости параметров линии потери устойчивости в трансверсальном направлении идут ниже линий потери устойчивости в тангенциальном направлении. Выше линии перехода к хаосу в антисимметричном подпространстве формируется хаотическое предельное множество, тангенциальный показатель Ляпунова для которого всегда больше нуля. При этом, согласно соотношению (9), трансверсальный показатель Ляпунова также больше нуля. Поэтому противофазные хаотические колебания в системе диффузионно связанных отображений не могут быть трансверсально устойчивыми. Режим противофазной самосинхронизации хаоса в них не существует.

Управляемая синхронизация

Для того чтобы стабилизировать изначально неустойчивый режим противофазной синхронизации хаоса, можно использовать дополнительную обратную связь. Добавим в правую часть первого уравнения системы (1) слагаемое обратной связи вида $r(f(x_n) + f(y_n))$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma[f(y_n) - f(x_n)] + r(f(x_n) + f(y_n)), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma[f(x_n) - f(y_n)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Данное воздействие выбрано таким образом, чтобы при достижении целей управления, то есть режима противофазной синхронизации, дополнительное слагаемое обращалось в нуль. Вследствие этого управляющее воздействие оказывает влияние не на форму противофазных колебаний, а только на их устойчивость по отношению к трансверсальным возмущениям.

Перейдя к новым переменным u и v , запишем линеаризованные уравнения

$$u_{n+1} = (1+r)f'(v_n)u_n, \quad (11)$$

$$v_{n+1} = (1-2\gamma)f(v_n) + rf'(v_n)u_n. \quad (12)$$

В случае противофазных колебаний $u_n = 0$ и уравнение (12) переходит в уравнение (6). Из уравнения (11) определяется трансверсальный показатель Ляпунова для системы с управлением

$$\Lambda_{\perp \text{ управ.}} = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{n=1}^N \ln|(1+r)f'(v_n)| \quad (13)$$

или

$$\Lambda_{\perp \text{ управ.}} = \Lambda_{\perp} + \ln|1+r|. \quad (14)$$

Выбирая r достаточно близким к минус единице, можно сделать трансверсальный показатель Ляпунова сколь угодно малым и, следовательно, сделать противофазный режим устойчивым.

На рис. 3, а построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от управляющего параметра r . Значения других параметров системы

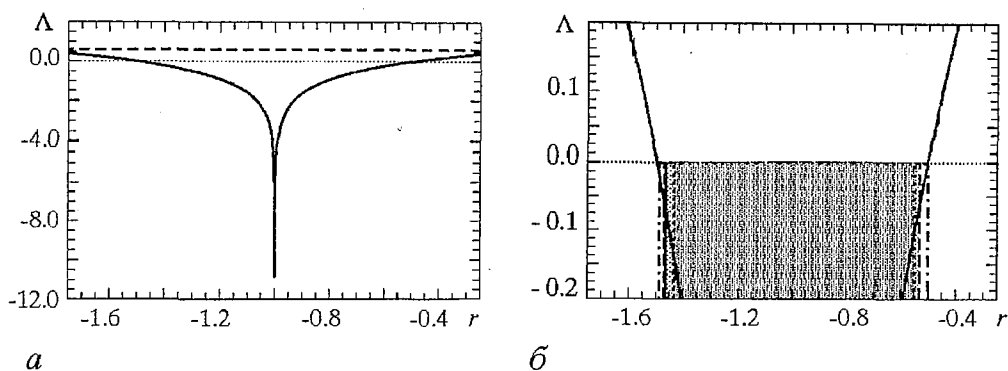


Рис. 3. *a* – зависимость трансверсального показателя Ляпунова от параметра управления при $a=3.8$, $\gamma=0.04$. Штриховая линия – значения тангенциального показателя Ляпунова. *б* – фрагмент рисунка в увеличенном масштабе с нанесенными областями управляемой синхронизации при различных уровнях шума: 0.0 (—); $1 \cdot 10^{-4}$ (---); $1 \cdot 10^{-3}$ (....)

соответствуют (при $r=0$) режиму несинхронного объединенного хаотического аттрактора, $a=3.8$, $\gamma=0.04$. Для перехода от несинхронного хаоса к режиму противофазной синхронизации использовалась следующая процедура управления. Выбирались указанные выше значения параметров, соответствующие режиму несинхронного хаоса (рис. 4, *a*), и начальные значения из бассейна притяжения хаотического аттрактора. В каждый момент времени отслеживалась близость изображающей точки к антисимметричному подпространству. Для этого величина $\rho=|x+y|$ сравнивалась с выбранным пороговым значением δ . Если $\rho > \delta$, то изображающая точка находится далеко от антисимметричного подпространства и управление не включается. Если $\rho \leq \delta$, то изображающая точка находится в малой окрестности антисимметричного подпространства и управляющее воздействие включается. При этом, если выбранное значение r попадает в диапазон, где $\Lambda_{\text{управ.}} < 0$, хаотическое множество внутри антисимметричного подпространства становится устойчивым к трансверсальным возмущениям и траектория втягивается в антисимметричное подпространство. Управляющее воздействие в этом случае стремится к нулю. В наших численных экспериментах значение δ выбиралось равным 0.01 . На рис. 4 представлены фазовые портреты системы без управления (*a*), с управлением (*в*, *д*), а также соответствующие им временные реализации *и* (*б*, *з*, *е*). При отсутствии управления траектория равномерно покрывает область, по форме близкую к квадрату $[-1;1] \times [-1;1]$ (*a*). Хаотический аттрактор соответствует режиму объединенного хаоса. При введении управляющего воздействия на указанной области начинает прорисовываться диагональ $x=-y$ (*в*). Во временной реализации появляются интервалы синхронного поведения (*з*). Наконец, если мы выбираем коэффициент r таким, что трансверсальный показатель Ляпунова становится отрицательным, система переходит к режиму полностью синхронного хаоса. Хаотический аттрактор при этом представляет собой одноленточный аттрактор, сформированный около одной из неподвижных точек C_{10} или C_{20} . На рис. 3, *б* представлены интервалы параметра r , обеспечивающие управляемую синхронизацию, при различных уровнях шума. Усилению шума соответствует более темный цвет области. При полном отсутствии шума область управляемой синхронизации полностью совпадает с интервалом параметра r , где трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен. При добавлении шума зона управляемости сужается к центру.

В ряде работ, исследующих механизмы разрушения полной синфазной синхронизации хаоса в симметрично связанных системах с удвоениями периода [3 – 6], было показано, что потеря синхронизации происходит по определенному сценарию. Разрушение хаотической синхронизации сопровождается явлениями пузырения хаотического аттрактора (bubbling attractor), которое заключается в

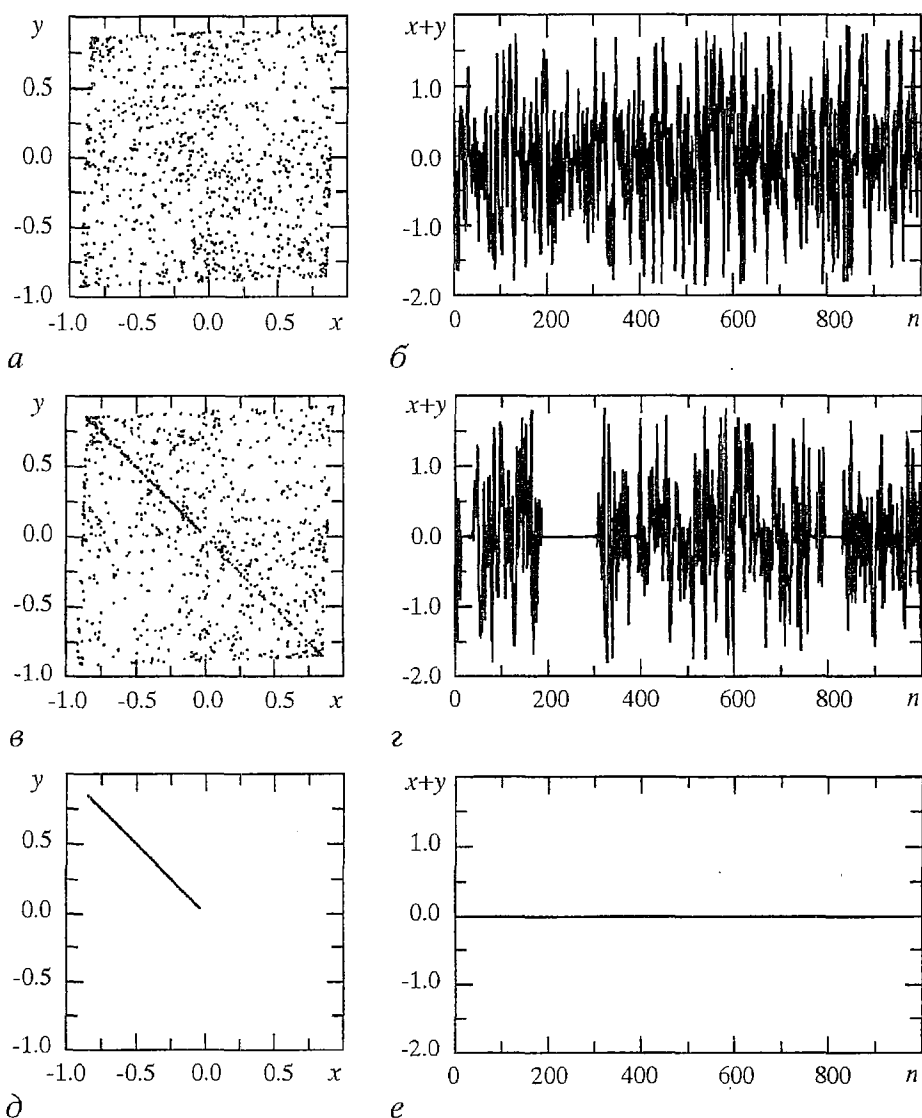


Рис. 4. Фазовые портреты и временные реализации колебаний при отсутствии управления $r=0$ (а, б), при частичном управлении $r=-0.48$ (в, з) и в режиме управляемой синхронизации $r=-0.5$ (д, е)

том, что устойчивый хаотический аттрактор, располагающийся в симметричном подпространстве, в присутствии сколь угодно малого шума «вскипает» (траектория время от времени выбрасывается в сторону от симметричного подпространства) [9], и изрешечиванием его бассейна притяжения (riddled basins), когда в непосредственной близости от аттрактора появляются области из бассейнов притяжения других аттракторов [10]. Закономерным является вопрос, присутствуют ли данные явления при разрушении управляемой противофазной синхронизации хаоса. Для ответа на этот вопрос мы проследили за изменениями хаотического аттрактора при изменении коэффициента r . В ходе численного эксперимента начальные условия выбирались вблизи антисимметричного подпространства, управляющее воздействие было включено во все время исследования независимо от того, находится ли изображающая точка вблизи антисимметричного подпространства или нет. Коэффициент управления r выбирался первоначально внутри интервала, где трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен. При значениях управляющего параметра $-1 < r < -0.525$ хаотический аттрактор, располагающийся в антисимметричном подпространстве,

является устойчивым к трансверсальным возмущениям. Первоначально выбранное возмущение затухает во времени и изображающая точка втягивается в антисимметричное подпространство. Добавление в систему малого шума (интенсивностью порядка $1 \cdot 10^{-5}$) не приводит к заметным изменениям в ее поведении. При увеличении управляющего параметра, $r > -0.525$, в системе наблюдается пузырящийся аттрактор. Хаотический аттрактор в антисимметричном подпространстве остается устойчивым к трансверсальным возмущениям, но время переходного процесса к нему становится очень большим (сотни тысяч итераций) и оно чувствительным образом зависит от выбранных начальных условий. Добавление в систему малого шума приводит к существенной перестройке фазового портрета аттрактора. Аттрактор приобретает конечную толщину. Начинаются перескоки между хаотическими множествами в окрестности точек C_{10} и C_{20} . Соответствующая пузырящемуся аттрактору временная реализация имеет характер on-off перемежаемости [13]. На рис. 5 изображены фазовые портреты

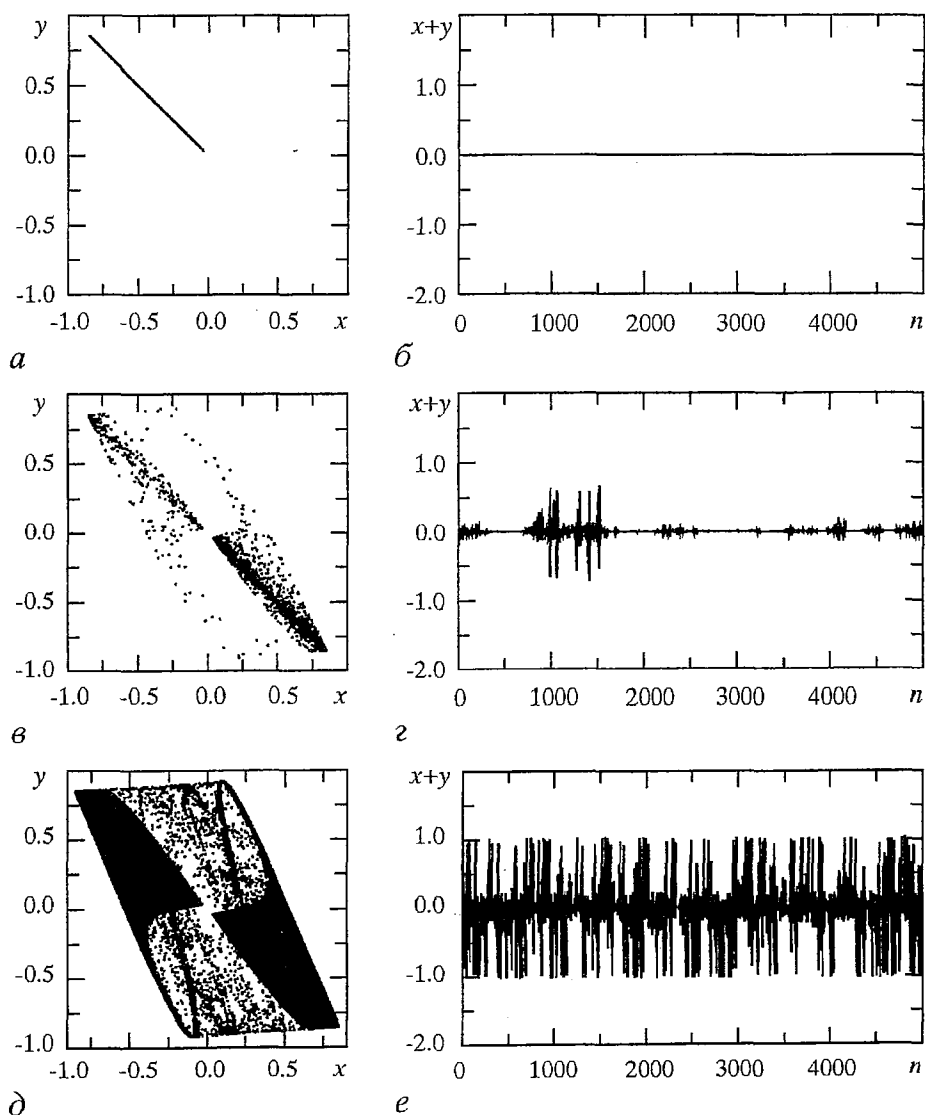


Рис. 5. Фазовые портреты и временные реализации в отсутствие шума (а, б) и при добавлении малого шума в систему (в, г). На рис. д, е представлен аттрактор, сформированный в результате бифуркации прорыва

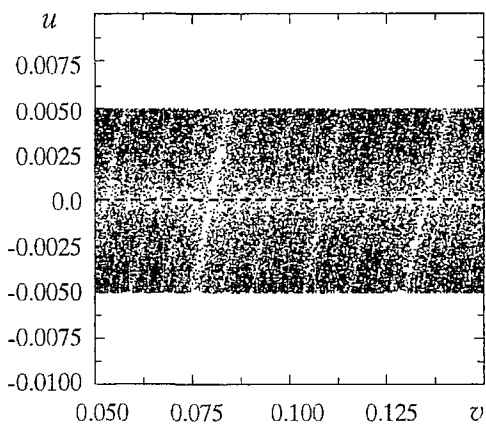


Рис. 6. Фрагмент бассейна притяжения хаотического аттрактора из антисимметричного подпространства при $r=-1.485$. Черным цветом обозначены точки, относящиеся к бассейну аттрактора на бесконечности

трансформируется в хаотическое седло [14]. Синхронные колебания перестают наблюдаться в системе как при наличии шума, так и при его отсутствии. Хаотический аттрактор имеет фазовый портрет, сходный с портретом пузырящегося аттрактора (рис. 5, д). Явления изрешечивания бассейна притяжения аттрактора из антисимметричного подпространства при разрушении режима синхронизации не наблюдалось. При изменении управляющего параметра в сторону уменьшения, при $r < -1.46$ также наблюдается переход от грубого устойчивого режима противофазной синхронизации к пузырящемуся аттрактору. Затем, при $r < -1.472$ бассейн притяжения хаотического аттрактора, располагающегося в антисимметричном подпространстве, изрешечивается областями из бассейна притяжения аттрактора на бесконечности. На рис. 6 представлен фрагмент бассейна притяжения хаотического аттрактора в антисимметричном подпространстве (белый цвет) с вкрапленными в него областями из бассейна притяжения аттрактора на бесконечности (черный цвет). Для большей наглядности область построена в координатах (v, u) , антисимметричное подпространство ($u=0$) обозначено штриховой линией. Результаты получены для значений параметров $a=3.8$, $\gamma=0.04$, $r=-1.485$. Несмотря на кажущееся обилие черных точек, точек из бассейна притяжения хаотического аттрактора в рассматриваемом регионе гораздо больше.

Заключение

В работе была рассмотрена управляемая противофазная синхронизация хаоса в связанных кубических отображениях. Построены области устойчивости регулярных синхронных режимов. Найдена связь между тангенциальным и трансверсальным показателями Ляпунова. Показано, что в любых дискретных отображениях с диффузионной связью собственная противофазная синхронизация хаоса невозможна. На примере связанных кубических отображений продемонстрирован способ управляемой противофазной хаотической синхронизации для подобных систем. Установлено, что добавление в систему дополнительного слагаемого обратной связи может стабилизировать противофазные хаотические колебания в ограниченной области значений управляющего параметра. При выходе из этой области происходит разрушение режима синхронизации, сопровождающееся в одном случае (при $r > -1$) явлением пузыряния хаотического аттрактора и завершающееся бифуркацией прорыва, в

аттрактора в отсутствие шума (а) и при добавлении шума интенсивностью $1 \cdot 10^{-5}$ (в). На рис. 5, б, г представлены соответствующие временные реализации $u(t)$. При наличии малого шума изображающая точка в течение долгого времени движется в окрестности антисимметричного подпространства, затем следует короткий «выброс» в сторону от него, после чего траектория возвращается снова в окрестность антисимметричного подпространства. Средняя частота выбросов увеличивается при приближении параметра r к границе области синхронизации. Наконец, при $r=-0.406$ происходит «бифуркация прорыва» (blowout bifurcation), когда хаотический аттрактор внутри антисимметричного подпространства перестает быть притягивающим в трансверсальном направлении и

другом случае (при $r < -1$) – явлением пузырения аттрактора, а затем изрешечиванием его бассейна притяжения. Бифуркационные механизмы указанных явлений пока не вполне ясны и требуют дальнейших исследований.

Работа была поддержана грантом РФФИ 00–02–17512 и Фондом развития гражданских исследований (CRDF, грант № REC–006).

Библиографический список

1. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of theoretical physics. 1983. Vol. 9. P. 32.
2. Afraimovich V.S., Verichev N.N., Rabinovich M.I. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems // Radiofizika. 1986. Vol. 29. P. 1050.
3. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. P. 1014.
4. Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V. Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 5620.
5. Kapitaniak T., Maistrenko Y. Riddling bifurcations in coupled piecewise linear maps // Physica D. 1998. Vol. 126. P. 18.
6. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Механизмы разрушения хаотической синхронизации в системе связанных кубических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Vol. 7. P. 3.
7. Cao L.-Y., Lai Y.-C. Antiphase synchronism in chaotic systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 382.
8. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
9. Ashvin P., Buescu J., Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 193. P. 126.
10. Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Venkataramani S.C. Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 55.
11. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Vol. 15. P. 60.
12. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L. Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5. P. 1677.
13. Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. On-off intermittency: a mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 279.
14. Ashvin P., Buescu J., Stewart I. From attractors to chaotic saddle: a tale of transverse instability // Nonlinearity. 1996. Vol. 9. P. 703.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 7.04.2000
после доработки 14.06.2000*

CONTROLLED ANTIPHASE CHAOTIC SYNCHRONIZATION IN COUPLED CUBIC MAPS

V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov, A.V. Klimshin

Antiphase synchronization is studied in interacting chaotic systems with symmetric coupling. A system of two diffusively coupled cubic maps is chosen as a model. Motion in symmetric subspace are investigated. Conditions of stability for antiphase oscillations

are obtained. We considered the controlled antiphase chaotic synchronization and process of synchronization loss with the parameter decreasing.



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1983) и доктора (1999) физико–математических наук. Работает доцентом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 50 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



Шабунин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1966). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизика (1990). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1998) по синхронизации и управлению хаосом в связанных колебательных системах. Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос. Автор 18 опубликованных работ.

E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru



Стальмахов Петр Андреевич – родился в Саратове (1979). Окончил Физико–технический лицей №1 (1996). В настоящее время – студент 5–го курса Саратовского государственного университета. Область научных интересов – теория динамического хаоса, синхронизация хаоса.



Климшин Александр Викторович – окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний.



ВЫНУЖДЕННАЯ ФАЗОВАЯ синхронизация цепочки хаотических осцилляторов

А.И. Фомин, Т.Е. Вадивасова, О.В. Сосновцева, В.С. Анищенко

Численно исследуется вынужденная частотно-фазовая синхронизация цепочки однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера. Синхронизирующий гармонический сигнал подается на первый осциллятор цепочки. Определена область синхронизации на плоскости параметров «частота воздействия – коэффициент связи», в которой исследованы особенности динамического режима цепочки.

Введение

В настоящее время в нелинейной динамике внимание исследователей все больше переключается от маломерных нелинейных систем к изучению ансамблей, состоящих из большого количества элементов, объединенных локальной или глобальной связью. Интерес к динамике ансамблей связан с их большой теоретической и практической значимостью, с одной стороны, и все возрастающими возможностями компьютерного моделирования, с другой. Цепочки и решетки, состоящие из элементов с локальной связью, служат дискретными аналогами активных распределенных сред [1–3]. Кроме того, различного рода ансамбли нелинейных подсистем интересны и сами по себе, так как широко распространены в природе и технике. Системы взаимосвязанных осцилляторов служат моделями многих физических [4–6], химических [7] и радиотехнических систем [8–10]. Особенно широкое распространение ансамбли осцилляторов нашли при математическом моделировании биологических объектов, таких как нейронные сети, тонкие мембраны, взаимодействующие популяции и др. [11–14].

В основе многих механизмов самоорганизации ансамблей осцилляторов лежит явление синхронизации колебаний парциальных систем, составляющих ансамбль. Теория синхронизации, первоначально развитая для квазигармонических осцилляторов [7,15–17], была обобщена на широкий круг систем, включая хаотические [18–26] и даже стохастические [27,28] системы. Для хаотических осцилляторов различают полную синхронизацию, соответствующую полному совпадению колебаний парциальных систем [19,22], обобщенную синхронизацию, означающую топологическую эквивалентность парциальных колебаний [21,26], и частотно-фазовую (синхронизацию по Гюйгенсу), проявляющуюся в захвате мгновенных фаз и характерных частот хаотических колебаний [20,23–25,29].

Исследования фазовой синхронизации в ансамблях взаимодействующих периодических осцилляторов с различными типами связи начали проводиться достаточно давно, но до настоящего времени не утратили своей актуальности [7,8,30–35]. В последнее время появилось много работ, посвященных изучению

ансамблей хаотических осцилляторов [1–3,9,10,36–43]. В ансамблях хаотических систем обнаружены все те эффекты синхронизации, которые ранее были установлены для двух взаимодействующих хаотических осцилляторов: полная синхронизация (в однородных ансамблях [10,39,40]), обобщенная синхронизация [21] и частотно–фазовая синхронизация [42,43].

Естественно ожидать, что, подобно вынужденной синхронизации одного хаотического осциллятора гармоническим внешним воздействием [23,25,29], можно наблюдать вынужденную синхронизацию в виде захвата частот и фаз в ансамбле хаотических осцилляторов. При этом вынуждающая сила может быть приложена к какому–то одному элементу ансамбля. В данной работе исследуется цепочка хаотических осцилляторов Ресслера с однонаправленной связью «вниз по потоку» (то есть на данный осциллятор оказывает воздействие только предыдущий осциллятор). Цепочка осцилляторов с однонаправленным взаимодействием может рассматриваться как модель активной среды в случае, когда связь между элементами среды определяется наличием потока, а диффузией можно пренебречь. Все осцилляторы исследуемой цепочки полагаются идентичными (однородная цепочка). Рассматривается фазовая синхронизация осцилляторов цепочки внешним гармоническим воздействием, подаваемым на первый элемент.

1. Исследуемая модель

Исследуемая модель представляет собой цепочку хаотических осцилляторов Ресслера в форме записи, обсуждаемой в работе [43],

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1 + C \sin \omega_{ex} t, \\
 \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + \alpha y_1, \\
 \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\
 \dot{x}_j &= -\omega_j y_j - z_j + g(x_{j-1} - x_j), \\
 \dot{y}_j &= \omega_j x_j + \alpha y_j, \\
 \dot{z}_j &= \beta + z_j(x_j - \mu), \quad j = 2, 3, \dots, m,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где j – номер осциллятора цепочки (дискретная пространственная координата), m – длина цепочки. Граничные условия соответствуют свободным концам цепочки. Параметры α , β , μ определяют динамический режим, одинаковый для всех элементов цепочки. Выбранные нами значения $\alpha=0.2$, $\beta=0.2$, $\mu=4.0$ соответствуют колебаниям парциальных осцилляторов в режиме спирального хаоса [44,45]. Параметры ω_j управляют характерными частотами осцилляторов. Параметр g регулирует степень связи элементов. В отличие от случая, рассмотренного в [43], в данной работе связь является однонаправленной, частоты парциальных систем полагаются одинаковыми ($\omega_j=\omega_1=0.924$, $j=1,2,\dots,m$), а на первый осциллятор цепочки действует гармоническая вынуждающая сила с амплитудой C и частотой ω_{ex} . Начальные состояния всех ячеек выбирались близкими к однородным, но со слабым случайным отклонением от однородности. Длина исследуемой цепочки m была ограничена пятьюдесятью осцилляторами, что обусловлено быстродействием используемых компьютеров.

Мгновенные амплитуды ρ_j и фазы Φ_j хаотических колебаний вводились с помощью замены переменных

$$\begin{aligned}
 x_j &= \rho_j \cos \Phi_j, \\
 y_j &= \rho_j \sin \Phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Средние частоты парциальных осцилляторов рассчитывались как

$$\langle \omega_j \rangle = (1/T) \lim_{T \rightarrow \infty} |\Phi_j(t_0+T) - \Phi_j(t_0)|, \quad j=1,2\dots m. \quad (3)$$

Время T в численных экспериментах, разумеется, является ограниченным, но оно должно быть достаточно велико. В проведенных нами экспериментах время T выбиралось в пределах $10^5 \div 2 \cdot 10^5$ безразмерных единиц, что соответствует приблизительно $16 \cdot 10^3 \div 32 \cdot 10^3$ оборотам фазовой траектории вокруг седло-фокуса.

2. Область фазового захвата

В отсутствие внешнего сигнала средняя частота всех хаотических осцилляторов, вычисляемая по формуле (3), была одинакова и равна $\omega_0 \approx 0.9981$. Частота главного максимума в спектре мощности хаотических колебаний осцилляторов в пределах точности численного эксперимента совпадает со средней частотой ω_0 . Воздействуя на первый элемент цепочки гармоническим сигналом с частотой ω_{ex} , близкой к ω_0 , и вводя связь между элементами, можно наблюдать явление вынужденной частотно-фазовой синхронизации цепочки хаотических осцилляторов. Захват фазы хаотических колебаний j -го осциллятора диагностировался на основе выполнения условия

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |\Phi_j(t) - \Phi_{ex}(t)| < \infty, \quad (4)$$

где $\Phi_{ex} = \omega_{ex} t$ – фаза воздействия, а $\Phi_j(t)$ определяется в соответствии с (2). Захват мгновенной фазы $\Phi_j(t)$ одновременно сопровождается захватом средней частоты колебаний j -го осциллятора: $\langle \omega_j \rangle = \omega_{ex}$. Отношение частот определяет число вращения для каждого осциллятора цепочки

$$\Theta_j = \langle \omega_j \rangle / \omega_{ex}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

В численных экспериментах мы считали элемент цепочки с номером j синхронизованным, если для него выполнялось условие $|\Theta_j - 1| \leq \epsilon$, где погрешность ϵ полагалась равной 10^{-4} .

Рассмотрим, как происходит синхронизация элементов цепочки при вариации параметров ω_{ex}, g и фиксированном значении амплитуды воздействия $C=0.1$. При данном значении C область синхронизации первого осциллятора в пределах указанной погрешности есть $\omega_{ex} \in [0.9823; 1.0168]$. Области синхронизации остальных осцилляторов определяются значением параметра связи g . Границы областей для разных $j \geq 2$ располагаются так близко, что их невозможно достоверно различить в пределах точности численных экспериментов. Вид области синхронизации цепочки из 50-ти осцилляторов на плоскости управляющих параметров ω_{ex}, g представлен на рис. 1. Сплошной линией обозначены границы глобальной синхронизации (то есть синхронизации всех элементов цепочки), штриховой линией отмечены границы синхронизации первого элемента. Вопрос о том, имеется ли область захвата при любом, сколь угодно малом, значении связи g или существует порог синхронизации [25], в настоящей работе специально не исследовался. Если такой порог существует, то при выбранных значениях параметров он неразличимо мал, поэтому на рис. 1 область синхронизации выглядит опирающейся своим острым концом на ось абсцисс. Зависимость числа вращения Θ_j от параметра ω_{ex} при фиксированном значении связи для осциллятора с любым номером j характеризуется наличием горизонтального участка (ступеньки), соответствующей значению $\Theta_j=1$ (рис. 2). Рис. 3 иллюстрирует переход цепочки длиной $m=50$ к режиму синхронизации. На рисунке представлены

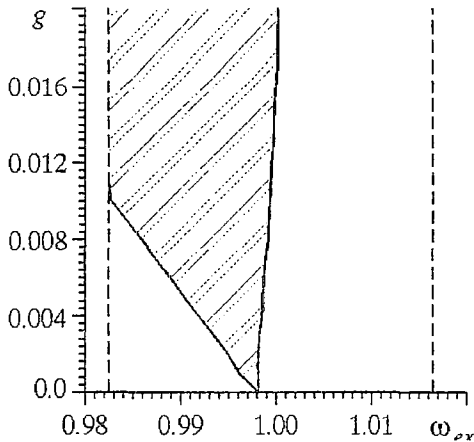


Рис. 1. Границы области синхронизации хаотических колебаний на плоскости управляющих параметров для осцилляторов цепочки с номерами $j \geq 2$ (сплошная линия). Штриховой линией отмечены границы синхронизации первого элемента цепочки ($j=1$)

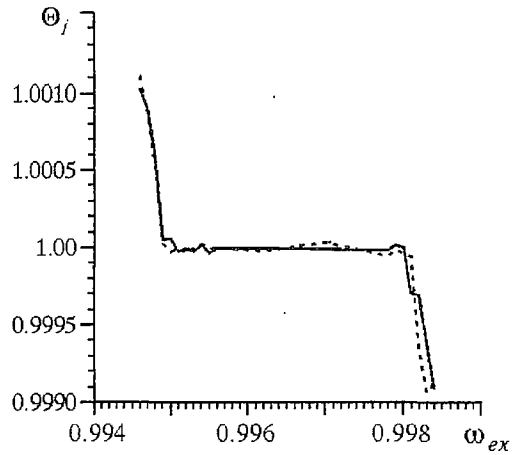


Рис. 2. Зависимость числа вращения Θ_j от частоты воздействия ω_{ex} для осцилляторов с номерами $j=2$ (сплошная линия) и $j=10$ (пунктир) при значении параметра связи $g=0.002$

кривые зависимости числа вращения от номера осциллятора в цепочке, полученные при фиксированном значении частоты воздействия $\omega_{ex}=0.992$ и различных значениях параметра связи g . Можно видеть, что синхронизация происходит практически одновременно для всех пятидесяти элементов цепочки.

Рассмотрим, как эффект синхронизации исследуемой цепочки зависит от

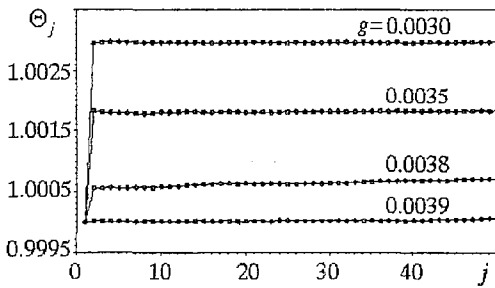


Рис. 3. Зависимости числа вращения от номера осциллятора в цепочке, полученные при $\omega_{ex}=0.992$ для различных значений параметра связи g

амплитуды вынуждающей силы C . При фиксированном значении частоты воздействия ω_{ex} , отличном от значения ω_0 , глобальная синхронизация цепочки на частоте ω_{ex} возможна, если только произошел захват частоты первого осциллятора. Соответствующее значение амплитуды C в силу однонаправленного характера связи не зависит от значения g . Синхронизация всех последующих осцилляторов (с номерами $j \geq 2$) происходит, как уже отмечалось, практически одновременно при значении параметра связи g , которое слабо зависит от амплитуды C . На рис. 4 представлена область глобальной синхронизации цепочки на частоте вынуждающей силы $\omega_{ex}=0.992$ при вариации параметров g и C .

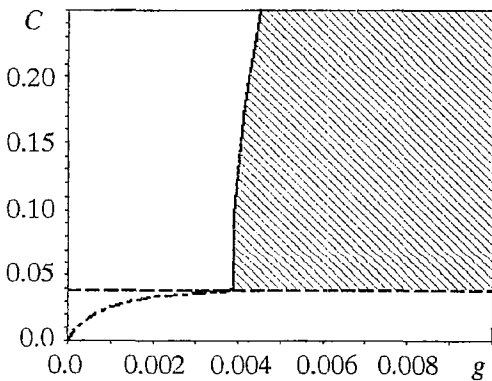


Рис. 4. Область глобальной синхронизации цепочки (отмечена штриховкой) на плоскости параметров g, C при частоте воздействия $\omega_{ex}=0.992$. Горизонтальная штриховая линия – граница синхронизации первого осциллятора на частоте ω_{ex} ; сплошная линия – граница синхронизации всех последующих осцилляторов цепочки на частоте ω_{ex} ; штрихпунктирная линия – граница синхронизации осцилляторов цепочки на частоте первого осциллятора $\langle \omega_1 \rangle \neq \omega_{ex}$

Она ограничена двумя линиями: строго горизонтальной (штриховая) и почти вертикальной (сплошная). Горизонтальная линия соответствует синхронизации первого осциллятора, а почти вертикальная – синхронизации всех последующих осцилляторов цепочки на частоте ω_{ex} . Штрихпунктирной линией на рисунке отмечена граница синхронизации всех осцилляторов цепочки на частоте первого осциллятора $\langle \omega_1 \rangle$, которая при $C \neq 0$ уже не совпадает с ω_0 , но еще не захвачена частотой воздействия.

3. Характеристики динамического режима цепочки в области фазового захвата

В рассматриваемой цепочке без внешнего воздействия (случай $C=0$) реализуется грубый пространственно однородный хаотический во времени режим колебаний, для которого $x_j(t)=x_k(t)$, $y_j(t)=y_k(t)$, $z_j(t)=z_k(t)$, $j,k=1,2,\dots,m$. Воздействие на первый осциллятор цепочки приводит к возникновению неоднородности. Если $\omega_{ex} \neq \omega_0$ и параметр связи g мал, то средняя частота первого осциллятора отличается от частот последующих осцилляторов. В области фазового захвата средние частоты всех осцилляторов цепочки равны частоте воздействия, а мгновенные фазы захвачены, то есть выполнено условие (4). Однако, полной синхронизации хаоса, означающей возникновение грубого пространственно однородного хаотического режима, не наблюдается. На рис. 5 приведены (x_1, x_j) -проекции синхронных и несинхронных колебаний для нескольких различных значений пространственной координаты j . Группы рисунков (а) и (б) соответствуют режиму глобальной фазовой синхронизации цепочки на частоте воздействия $\omega_{ex}=0.992$. Можно отметить, что средний по времени фазовый сдвиг $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$ между синхронными хаотическими колебаниями первого и j -го осцилляторов цепочки конечен, но при этом различен для различных j . Так, проекции для $j=9,11,13$, объединенные в группу (а), отражают наличие среднего фазового сдвига, близкого к $\pm 2\pi k$, $\pi/2 \pm 2\pi k$, $\pi \pm 2\pi k$, $k=0,1,2,3,\dots$, соответственно. Вид проекций для $j=42,44,47$, приведенных в группе (б), качественно повторяет вид проекций группы (а). Такое поведение объясняется наличием монотонного роста или уменьшения (в зависимости от значения ω_{ex}) среднего фазового сдвига $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$ вдоль цепочки. Проекции несинхронных колебаний, полученные при $\omega_{ex}=1.025$, представлены в группе (в). Они заметно отличаются от проекций синхронных колебаний.

На рис. 6 представлены зависимости $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$ от j , полученные для различных значений частоты ω_{ex} и параметра связи g . Можно видеть (рис. 6, а, б), что начиная со второй ячейки, средний фазовый сдвиг с ростом j изменяется практически линейно. Это свидетельствует о том, что вдоль цепочки распространяется бегущая волна, длина которой может быть определена как

$$\Lambda = 2\pi(j-1) / \langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle. \quad (6)$$

С ростом g фазовый сдвиг вдоль пространственной координаты j изменяется медленнее, соответственно длина волны возрастает. Таким образом, длиной волны Λ можно управлять, меняя коэффициент связи g и частоту воздействия ω_{ex} . Для любого фиксированного g можно подобрать значение частоты воздействия (оно будет близко к ω_0) так, что средний фазовый сдвиг $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$ будет практически одинаковым для всех осцилляторов цепочки, начиная со второго (рис. 6, в). Однако хаотические колебания цепочки и в этом случае не будут полностью пространственно однородными, так как $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle \neq 0$. Соответствующие проекции колебаний на плоскость x_1, x_j для нескольких различных значений пространственной координаты j представлены на рис 7.

Режим хаотической динамики элементов цепочки диагностировался как по виду фазовых проекций, так и с помощью ляпуновских характеристических

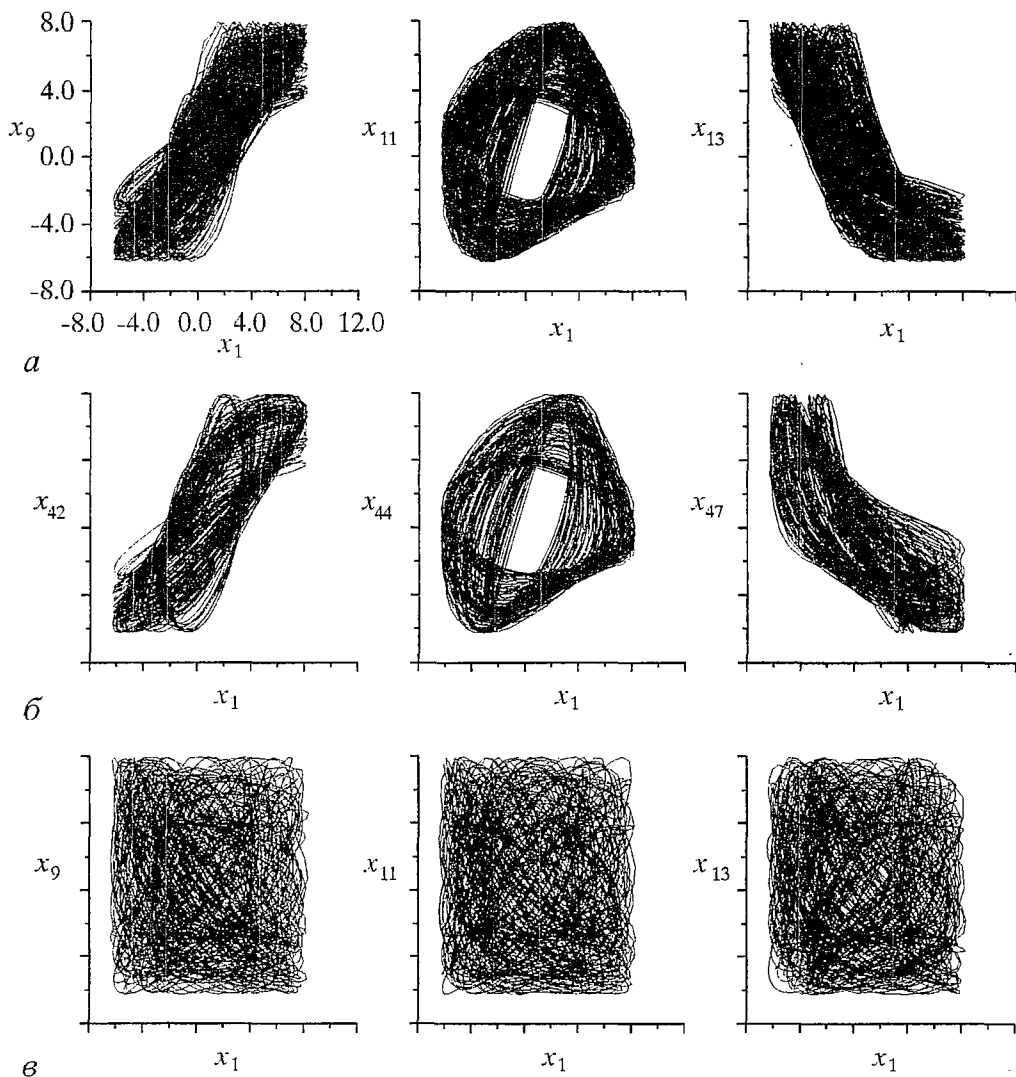


Рис. 5. Проекция синхронных (группы (а) и (б)) и несинхронных (группа (в)) колебаний для нескольких различных значений пространственной координаты j , полученные при $C=0.1$, $g=0.006$

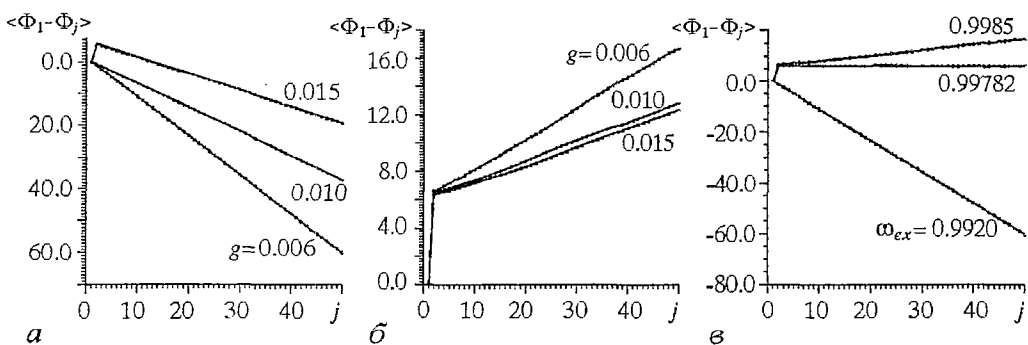


Рис. 6. Зависимости средней разности фаз $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$ от j при различных значениях параметра связи g и фиксированной частоте воздействия ω_{ex} : а - 0.992; б - 0.9985; в - при фиксированном значении $g=0.006$ и различных ω_{ex}

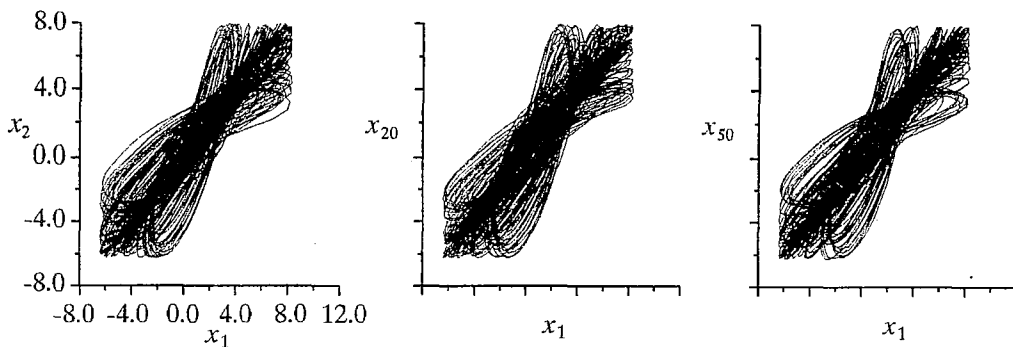


Рис. 7. Проекции колебаний для нескольких различных значений пространственной координаты j , полученные при $C=0.1$, $g=0.006$, $\omega_{ex}=0.99782$

показателей. В случае однонаправленной связи элементов цепочки, каждый последующий элемент можно рассматривать отдельно как неавтономный осциллятор, находящийся под воздействием сложного сигнала. Таким образом, совокупный спектр ляпуновских характеристических показателей (спектр ЛХП) разбивается на парциальные спектры показателей, вносимых отдельными элементами цепочки. Наличие положительного показателя в спектре первого осциллятора уже обеспечивает хаотическое поведение всех последующих осцилляторов. Они, в свою очередь, могут добавлять в совокупный спектр ЛХП свои положительные показатели (режим гиперхаоса), а могут и не добавлять (в случае полной или обобщенной синхронизации [20,21,26]). При выбранных значениях параметров в исследуемой цепочке наблюдается режим гиперхаоса как в случае частотно-фазовой синхронизации всех элементов, так и вне области синхронизации. Каждый элемент цепочки добавляет свой положительный характеристический показатель в совокупный спектр ЛХП. В области синхронизации всех элементов цепочки в совокупном спектре ЛХП кроме m положительных показателей имеется $2m$ отрицательных и только один нулевой показатель, связанный с периодическим сигналом воздействия.

Выводы

Проведенные численные эксперименты выявили эффект вынужденной частотно-фазовой синхронизации цепочки хаотических осцилляторов с однонаправленной диффузионной связью. Показана возможность управления частотными характеристиками динамического режима цепочки с помощью локального периодического воздействия. Установлено существование области глобального фазового захвата цепочки произвольной длины на плоскости управляющих параметров «частота воздействия – коэффициент связи». Можно отметить, что аналогичные результаты были получены авторами также для цепочки периодических осцилляторов Ван дер Поля и цепочки отображений окружности (в обоих случаях связь элементов была также однонаправленной). Предварительные расчеты показывают, что включение влияния последующих элементов цепочки на предыдущие может значительно затруднить наблюдение эффекта фазового захвата для достаточно длинных цепочек. Однако этот случай нуждается в дальнейшем специальном исследовании.

Данная работа частично поддержана грантом Фонда гражданских исследований и развития США (CRDF) и Министерства образования РФ, а также ONR № REC-006 (Contract № N68171-00-M-5430) и РФФИ (№ 00-02-17512).

Библиографический список

1. *Garopov–Grekhov A.V., Rabinovich M.I.* Dynamic chaos in ensembles of structures and spatial development of turbulence in unbounded systems/ Ed. W.Ebeling. N.Y.: Springer, 1986.
2. *Kaneko K.* Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // *Physica D.* 1989. Vol. 32. P. 60.
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079.
4. *Winful H.G., Rahman L.* Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers// *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 13. P. 1575.
5. *Braiman Y., Linder J.F., Ditto W.L.* Taming spatiotemporal chaos with disorder // *Nature.* 1995. Vol. 378. P. 465.
6. *Braiman Y., Ditto W.L., Wiesenfeld K., Spano M.L.* Disorder-enhanced synchronization // *Phys. Lett A.* 1995. Vol. 206. P. 54.
7. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984.
8. *Малафеев В.М., Полякова М.С., Романовский Ю.М.* О процессе синхронизации в цепочке автогенераторов, связанных через проводимость // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1970. Т. 13, вып.6. С. 936.
9. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // *ДАН СССР.* 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.
10. *Belykh V.N., Verichev N.N., Kocarev L.J., Chua L.O.* On chaotic synchronization in a linear array of Cua's circuits // *J. of Circuits, Systems, and Computers.* 1993. Vol. 3, № 2. P. 579.
11. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
12. *Murray J.D.* Mathematical biology. Heidelberg: Springer, 1989.
13. *Modelling the dynamics of biological systems / Eds E.Mosekilde and O.G. Mouritsen.* Berlin: Springer, 1995.
14. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Сильверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суэцк М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *УФН.* 1996. Т. 166, № 4. С. 365.
15. *Van der Pol B.* Theory of the amplitude of free and forced triode vibration // *Radio Rev.* 1920. Vol. 1. P. 701.
16. *Андронов А.А., Витт А.А.* К теории захватывания Ван дер Поля // *Собр. тр. А.А.Андропова.* М.: Изд-во АН СССР, 1956.
17. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
18. *Fujisaka H., Yamada Y.* Stability theory of synchronized motions in coupled oscillators systems // *Progr. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.
19. *Pikovsky A.S.* On the interaction of strange attractors // *Z. Phys. B.* 1984. Vol. 55. P. 149.
20. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14, вып.6. С. 569.
21. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах// *Изв. вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29, № 9. С. 1050.
22. *Pecora L. and Carroll T.* Synchronization of chaotic systems// *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821.
23. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos// *Int. J. of Bif. and Chaos.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
24. *Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
25. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving// *Physica D.* 1997. Vol. 104. P. 219.

26. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic system // *Phys.Rev.E.* 1995. Vol. 51. P. 980.
27. *Neiman A.B.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3484.
28. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский–Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *УФН.* 1999. Т. 169, № 1. С. 7.
29. *Vadivasova T.E., Balanov A.G., Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., Mosekilde E.* Synchronization in driven chaotic systems: diagnostics and bifurcations // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 253. P. 66.
30. *Aizawa Y.* Synergetic approach to the phenomena of mode-locking in nonlinear systems // *Progr. Theor. Phys.* 1976. Vol. 56, № 3. P. 703.
31. *Ermentrout G.B., Kopell N.* Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators // *SIAM J. Math. Anal.* 1984. Vol. 15. P. 215.
32. The presence of native frequency distribution and external noises // *Physica D.* 1984. Vol. 11. P. 212.
33. *Ermentrout G.B., Troy W.C.* Phaselocking in a reaction-diffusion system with a linear frequency gradient // *SIAM J. Appl. Math.* 1986. Vol. 39. P. 623.
34. *Matthews P.C., Mirollo R.E., Strogatz S.H.* Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators // *Physica D.* 1991. Vol. 51. P. 293.
35. *Osipov G.V., Sushchik M.M.* Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 6. P. 7198.
36. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // *Письма в ЖТФ.* 1983. Т. 9, вып.2. С. 94.
37. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering and control in a network of chaotic elements // *Physica D.* 1990. Vol. 41. P. 137.
38. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.* Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фрейгенбаумовских системах // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 1. С. 35.
39. *Belykh V.N., Mosekilde E.* One-dimensional map lattice: Synchronization, bifurcations, and chaotic structures // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 4. P. 3196.
40. *Pecora L.M.* Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems // *Phys. Rev.E.* 1998. Vol. 58, № 1. P. 347.
41. *Kocarev L., Paralitz U.* Synchronizing spatiotemporal chaos in coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, № 11. P. 2206.
42. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators // *Europhys. Lett.* 1996. Vol. 34, № 3. P. 16.
43. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. P. 2353.
44. *Arneodo A., Collet P., Tresser C.* Possible new strange attractors with spiral structure // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 79. P. 573.
45. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
после доработки

18.05.2000
21.08.2000

EXTERNAL PHASE SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC OSCILLATORS CHAIN

A.I. Fomin, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva, V.S. Anishchenko

External synchronization of a chain of chaotic Rössler' oscillators with unidirectional coupling is studied numerically. Synchronizing harmonic signal is applied to the first oscillator of chain. The region of synchronization is obtained on the plane of pa-

rameters «external frequency – coupling». Peculiarities of dynamical regimes of the chain in this region are analyzed.



Фомин Антон Игоревич – родился в 1976 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1998). Работает инженером–программистом на ЗАО «САЗ». Учится в заочной аспирантуре кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – динамика ансамблей нелинейных осцилляторов, распределенных сред и их дискретных аналогов; эффекты синхронизации ансамблей периодических и хаотических осцилляторов.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), доцент, кандидат физико–математических наук. В настоящее время – докторант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 40 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



Сосновцева Ольга Владимировна – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время является докторантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов. Имеет около 30 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1966), защитил диссертацию на звание кандидата физико–математических наук (1970) и доктора физико–математических наук (1986). С 1988 года заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член–корреспондент РАЕН, Заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, Лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

E–mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru



ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕННОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА ДИНАМИКУ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Е.С. Мчедлова

Представлена математическая модель двух взаимодействующих научных направлений с учетом эффектов запаздывания. На основе результатов численного моделирования и представлений синергетики проводится сравнительный анализ и качественное сопоставление с явлениями в реальных системах.

Известно, что учет конечности времени распространения сигналов и информации при моделировании процессов в реальных системах представляется немаловажным. Данный подход становится особенно актуальным в тех случаях, когда это время соизмеримо с какими-либо характерными временными масштабами исследуемой системы, или если есть принципиальная необходимость сконструировать систему, управляемую временными задержками.

В настоящей работе в центре внимания находится моделирование систем, возникающих и эволюционирующих по законам природы и самоорганизации, являющихся по отношению к исследователю объективной реальностью. Очевидно, что вопрос об управлении такими системами или о «конструировании» новых остается открытым до тех пор, пока не проанализированы основные закономерности и не выяснены факторы, влиянием которых можно, либо нельзя пренебречь.

Очевидно, тем фактом, что скорость протекания процессов в научном сообществе как социальной системе является конечной величиной, зачастую значительной и соизмеримой с временными масштабами взаимодействий и эволюции самой системы, в большинстве случаев пренебречь нельзя [1–3]. Основываясь на уравнениях из работы [4], рассмотрим, каким образом можно учесть указанный эффект при взаимодействии двух научных направлений, а затем обратимся к результатам численного моделирования и их качественной интерпретации.

Классификация запаздываний при взаимодействии научных направлений и способы математического описания

Сохраняя концепцию экспоненциального роста научных достижений, ограниченного нелинейностью, остановимся на возможных способах учета инерции процессов при взаимодействии двух научных школ или направлений.

Классифицируя возможные запаздывания в подобной системе, приходим к выводу, что по своему происхождению они могут быть двух типов: так называемое

запаздывание в связях и собственное запаздывание – в каждом из взаимодействующих направлений. Первое происходит за счет того, что информация между направлениями, распространяется не мгновенно, а за конечный интервал времени, который и определяет величину запаздывания. То, что информация спустя некоторое время достигла системы–«адресата», совсем не означает, что она будет принята во внимание немедленно, как и всё, на текущий момент времени происходящее в самой системе. Именно этим обусловлены запаздывания второго типа. Их изначальные причины, по всей видимости, имеют глубокие социальные и психологические корни.

Структура уравнений, используемых в [4] для описания взаимодействия двух научных направлений, позволяет на формальной основе разделить факторы экспоненциального роста достижений, нелинейных ограничений и взаимного влияния, что дает возможность непосредственно учесть оба типа запаздываний. Таким образом, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_1 x y_{\tau_{xc}} - c_2 x - b_1 x x_{\tau_x}, \\ \dot{y} &= c_3 y x_{\tau_{yc}} - c_4 y - b_2 y y_{\tau_y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где τ_{xc} и τ_{yc} – величины запаздываний в связях, τ_x и τ_y – собственные запаздывания каждого направления. Вводя запаздывания таким образом, мы полагаем их постоянными во времени, так как скорость хождения информации между двумя научными направлениями в среднем одинакова и мало изменяется с течением времени, а направления не изменяются по своей организации в ходе взаимодействия.

Обратим внимание, что только данный способ учета запаздывания в системе (1) не нарушает формальной структуры системы уравнений. В противоположность этому можно, например, все переменные в правой части системы (1) снабдить запаздывающим аргументом. Тогда запись (1) теряет смысл, поскольку дифференциальные уравнения вырождаются в некие функциональные зависимости, а с точки зрения моделирования система никак не будет связана с текущим моментом: в правой части уравнений будут фигурировать только значения x и y , зависящие от $(t-\tau)$, и не останется переменных, зависящих от t .

Влияние разномасштабного запаздывания на динамику двух развивающихся научных направлений в случае их сотрудничества

Рассмотрим научные направления с изначально положительной динамикой (собственной тенденцией к развитию), оказывающие друг на друга положительное воздействие. Этот случай не рассматривался нами ранее из-за относительной тривиальности по сравнению с остальными типами взаимодействия, но сейчас он представляет полезный тестовый материал для изучения влияния запаздываний. Следует также отметить, что именно такой тип взаимодействия лежит в основе систем интеграции, о которых мы будем говорить несколько позже.

В отсутствие запаздываний в системе (1) ее решения через некоторый интервал времени достигают стационарного значения, величина которого зависит от параметра нелинейности (скорости потери актуальности научных результатов), величины коэффициентов связи и не зависит от начального состояния каждого из направлений. Система имеет четыре особые точки с неотрицательными координатами

$$1) x^* = y^* = 0; \quad 2) x^* = 0, y^* = 1/b_2; \quad 3) y^* = 0, x^* = 1/b_1;$$

$$4) x^* = (1+b_2)/(b_1 b_2 - 1), y^* = (1+b_1)/(b_1 b_2 - 1),$$

из которых первые три являются неустойчивыми, а последняя соответствует стационарному решению.

Решения системы (1) при наличии собственного запаздывания в каждом из научных направлений и в отсутствие запаздывания в связях представлены на рис. 1. Из сравнения серии графиков *а-ж* видно, что по мере увеличения запаздывания $\tau_x = \tau_y$, стационарное решение сменяется синхронными колебаниями; затем полный синхронизм нарушается, но колебания макропеременных во времени остаются синфазными, с существенно разной амплитудой; и, наконец, при $\tau_x = \tau_y = 1.6$ поведение решений $x(t)$, $y(t)$ носит нерегулярный, хаотический характер. Дальнейшее увеличение $\tau_x = \tau_y$ при данных значениях нелинейностей $b_1 = b_2 = 5.0$ приводит к потере системой устойчивости и является некорректным в контексте рассматриваемой модели.

Чтобы представлять, при каких соотношениях нелинейности и собственных запаздываний решения системы (1) остаются устойчивыми, а также определять их тип, была построена карта режимов системы в пространстве параметров b – τ , изображенная на рис. 2. По данной карте можно не только судить о характере решений в зависимости от «управляющих параметров», но и произвести условную классификацию собственных запаздываний по их относительной величине. По причине отсутствия нормировки модели по конкретным числовым данным (что вообще весьма затруднительно для социальных систем), представляется необходимым определить количественную меру «много – мало» в отношении величин запаздываний. Следуя границам режимов, построенным на карте, относительно малыми будем считать значения, при которых в системе еще реализуется стационарное решение либо синхронные колебания. Верхняя граница значений запаздывания τ соответствует границе, разделяющей области устойчивых и неустойчивых решений, и поэтому, если τ близко к граничному, будем считать, что оно относительно велико. Следуя данным рассуждениям и обращаясь к рис. 2, нетрудно объяснить, почему решения системы, представленные на рис. 1, были построены при $b_1 = b_2 = 5$. Так, например, в достаточно большом диапазоне нелинейностей b при малых изменениях τ система быстро выходит в режим неустойчивых решений; богатство динамики системы может наблюдаться только при существенно больших значениях параметров нелинейности ($b > 4 \div 5$).

В случае, если начальные условия одинаковы и вносится малая расстройка собственных запаздываний (см. рис. 2, *и-л*), это приводит к существенной десинхронизации решений, которые имеют сильно нерегулярный характер. В совокупности с результатами, изображенными на рис. 1, *а-ж*, это приводит к выводу о том, что сравнительно небольшая разница в собственных запаздываниях научных направлений при одинаковых начальных состояниях оказывает не меньший эффект, чем достаточно большие, но идентичные запаздывания при относительно большой разнице в начальных условиях.

Большая разница в масштабах запаздывания в направлениях X и Y при разных начальных условиях приводит к установлению в системах периодических колебаний с разной амплитудой, причем колебания в системе с большим запаздыванием имеют большую амплитуду (см. рис. 1, *з, и*)

Если в системе двух взаимодействующих научных направлений присутствует только запаздывание в связях и нет других временных задержек (рис. 3), то с течением времени решения $x(t)$, $y(t)$ обязательно примут синхронный, а затем и стационарный характер, с той лишь разницей, что при увеличении запаздывания в связях время переходного процесса увеличивается.

И, наконец, на рис. 4 представлены зависимости переменных $x(t)$, $y(t)$ при наличии запаздывания как в самих системах, так и в связях. Из сравнения рис. 1, *г* и рис. 4, *а, б* следует, что при $\tau_x = \tau_y = 1.3$ добавление одностороннего запаздывания в связь приводит к тому, что колебания переменных, оставаясь регулярными, оказываются сдвинутыми по фазе друг относительно друга. Относительно

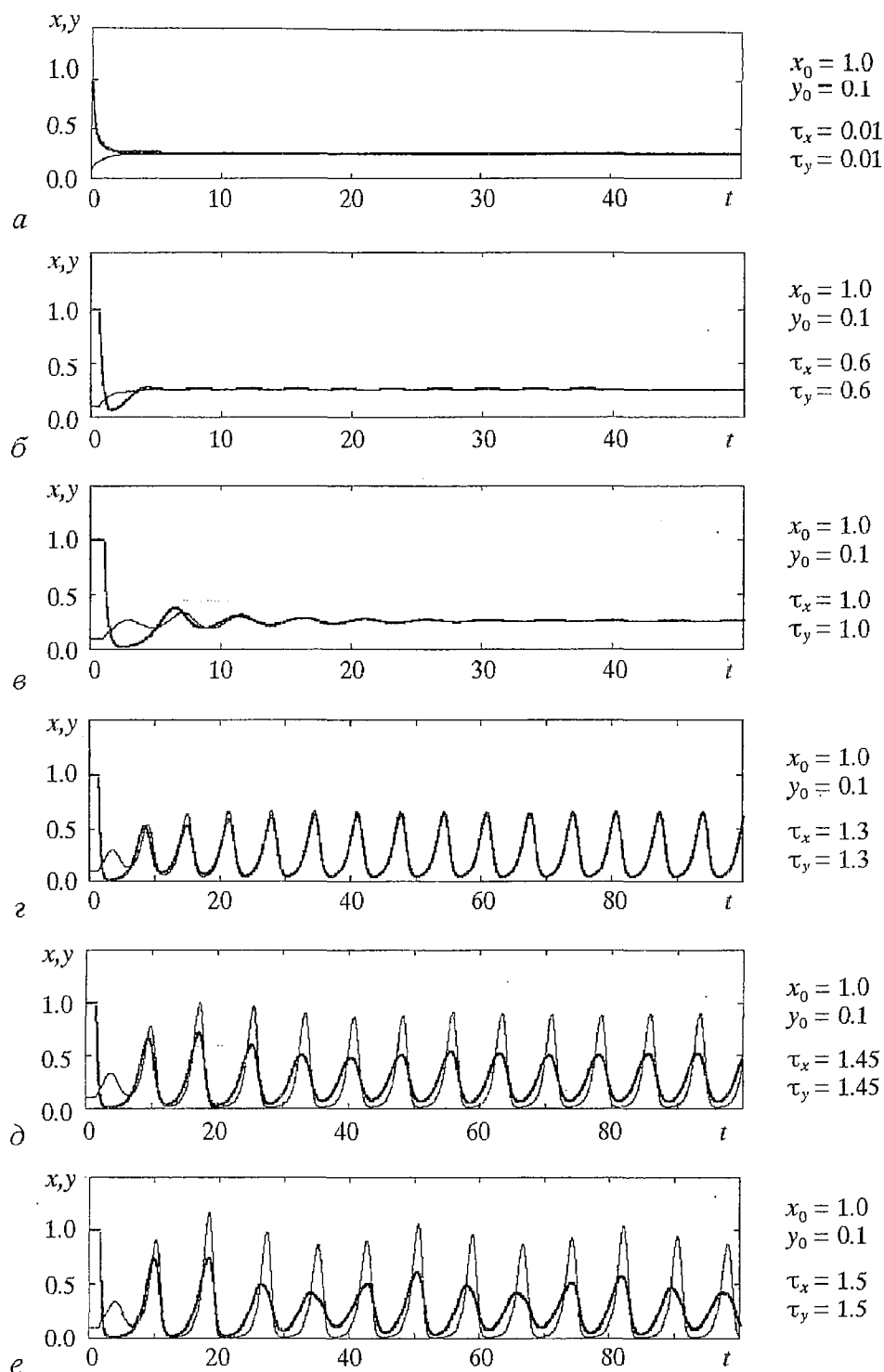


Рис. 1. Зависимости переменных $x(t)$, жирная линия, и $y(t)$, светлая линия: для случая $b_1=b_2=5$, $c_1=c_3=1$, $c_2=c_4=-1$; в отсутствие запаздывания в связях $\tau_x=\tau_y=0.01$; для разных значений начальных условий x_0, y_0 ; при наличии запаздывания в каждой из взаимодействующих систем τ_x, τ_y

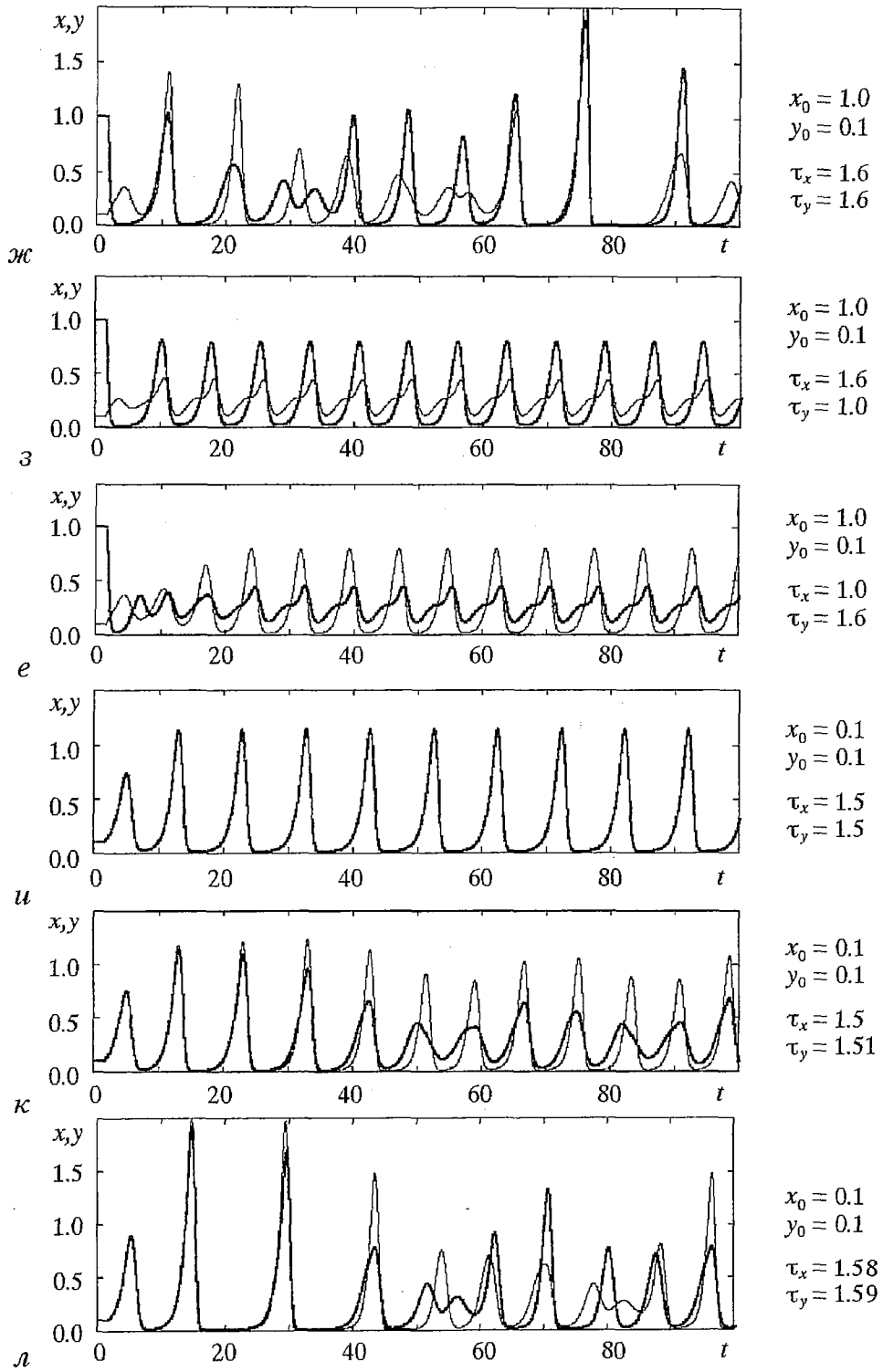


Рис. 1. Продолжение

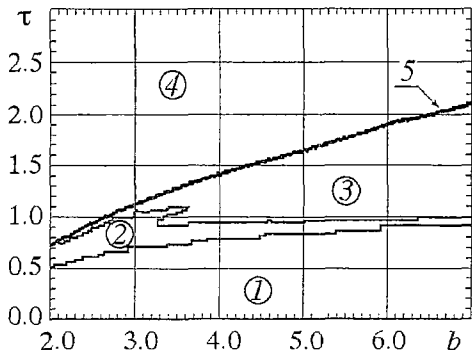


Рис. 2. Карта режимов системы (1) в пространстве параметров τ, b , где $\tau = \tau_x = \tau_y$, $b = b_1 = b_2$, запаздывание в связях отсутствует, $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = c_4 = -1$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.1$. Цифрами обозначены различные режимы колебаний, реализующиеся в системе при указанных значениях параметров: 1 – стационарный режим; 2 – синхронные колебания; 3 – периодические и сложные несинхронные колебания; 4 – решения системы неустойчивы; 5 – граница, разделяющая области устойчивых и неустойчивых решений

большие одинаковые запаздывания в связях при наличии собственных запаздываний $\tau_x = \tau_y = 1.3$ при разнице в начальных условиях приводят к противофазным колебаниям $x(t)$, $y(t)$ (см. рис. 4, в-д). Малая расстройка запаздываний в связи при одинаковых начальных условиях и $\tau_x = \tau_y = 1.5$ приводит к десинхронизации решений с течением времени и установлению достаточно сложного режима колебаний, когда изменения переменных нерегулярно и противофазно.

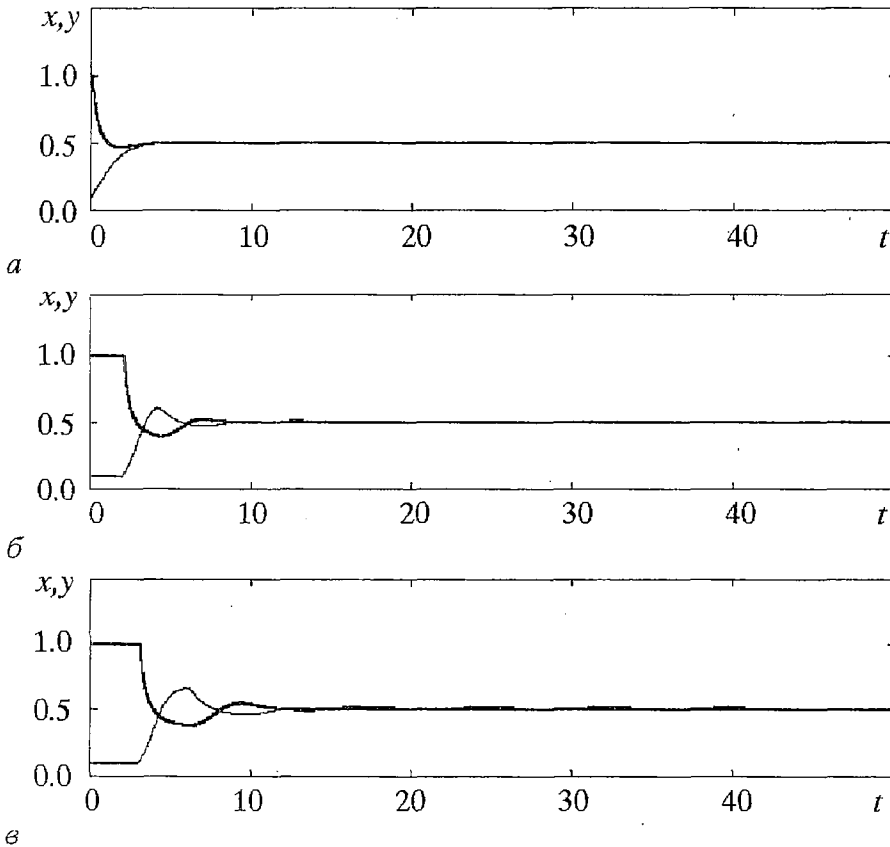


Рис. 3. Зависимости переменных $x(t)$, жирная линия, и $y(t)$, светлая линия: для случая $b_1 = b_2 = 3$, $x_0 = 1.0$, $y_0 = 0.1$, $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = c_4 = -1$; в отсутствие запаздывания в системах, при наличии запаздывания в связях $\tau_x = \tau_y$: а – 0.01; б – 2.0; в – 3.0

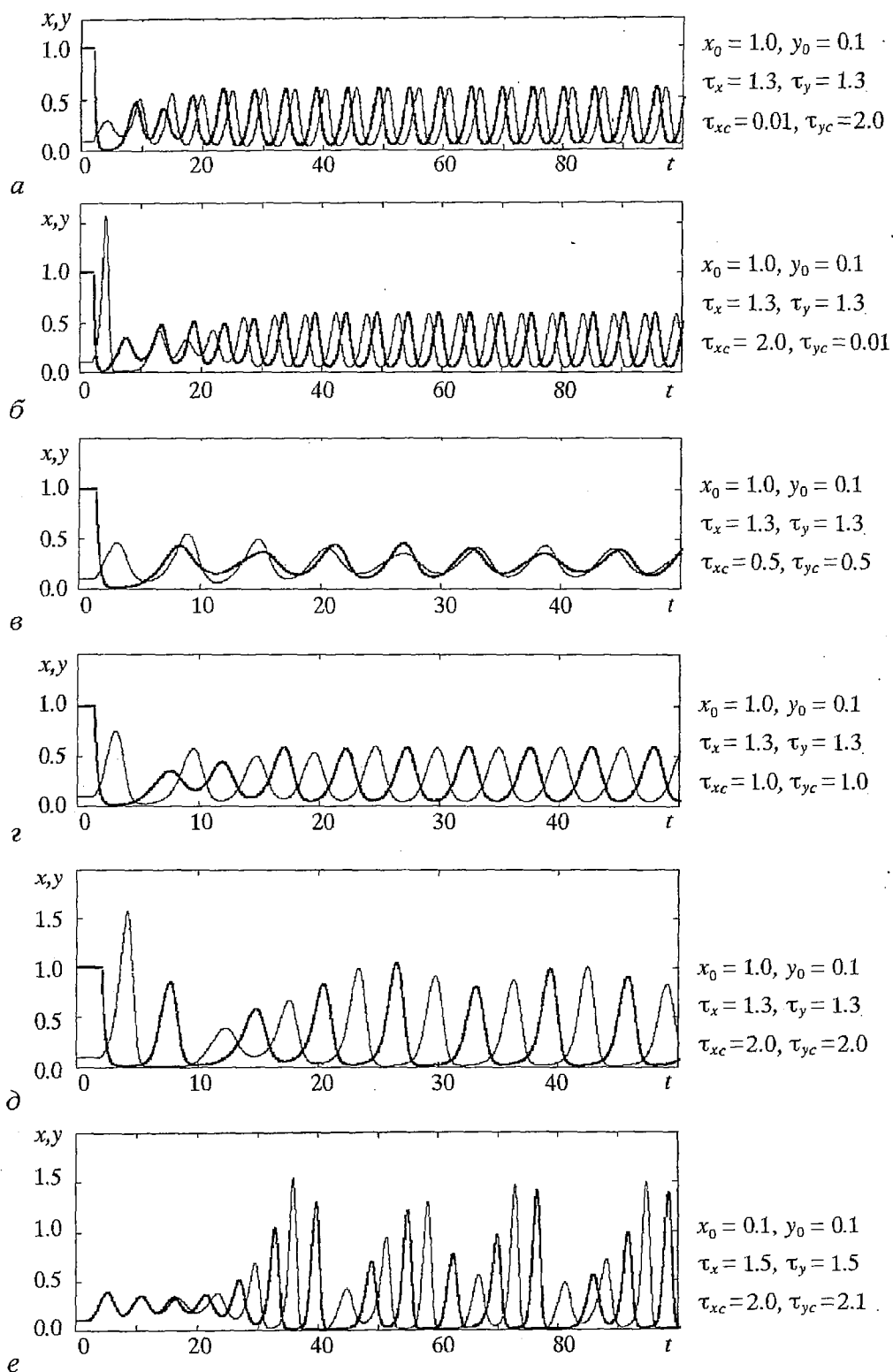


Рис. 4. Зависимости переменных $x(t)$, жирная линия, и $y(t)$, светлая линия: для случая $b_1=b_2=5.0$, $c_1=c_3=1, c_2=c_4=-1$; различных начальных условий x_0 и y_0 , запаздывания в связях τ_{xc} и τ_{yc} , различных уровней запаздывания в самих системах $\tau_x=\tau_y$

Заключение

Обращаясь к исследованиям модельных систем, предложенных в настоящей работе, проанализируем полученные результаты в контексте тенденций объединения и взаимодействия – интеграционных процессов в науке и высшей школе.

Оказалось, что учет конечности времени распространения информации между научными направлениями дает возможность увидеть совершенно новые аспекты взаимодействий в научном сообществе. Так, величина запаздывания в связях может служить показателем «объединенности» (разобщенности) научных школ или направлений: малое запаздывание, как правило, характерно для научных направлений, локализованных в рамках одной организации.

Запаздывания, учтенные в модели, позволили уйти от стационарных решений, когда показатели научных направлений оставались постоянными с течением времени. Отдавая себе отчет в том, что такое постоянство есть следствие идеализации, мы внесли в модель фактор, который позволил перейти к колебательным процессам, гораздо в большей степени соответствующим природе моделируемых взаимодействий. Выяснилось, что относительно небольшие временные запаздывания приводят к колебаниям макропеременных, характеризующих состояние научных направлений.

Так, при рассмотрении сотрудничества развивающихся направлений, увеличение времен запаздываний приводит к изменению динамики системы от синхронных периодических до нерегулярных и хаотических несинхронных колебаний научных показателей. Нерегулярный, сложный характер изменения макропеременных во времени при больших временных задержках делает практически невозможным поиск закономерностей в поведении реальной системы, процессы становятся непредсказуемыми. Возникают проблемы с управлением и прогнозированием поведения таких систем.

В противоположность этому, периодические и синхронные изменения макропеременных, характеризующих уровень развития взаимодействующих научных направлений, позволяют делать прогнозы и представляются выгодными с точки зрения управления. Для класса моделируемых нами систем синхронные процессы хороши, прежде всего, тем, что взаимодействующие системы ведут себя как одна, а это означает интеграцию двух направлений в полном смысле этого слова. Синхронизированные системы ведут себя как единое целое, и в дальнейшем могут рассматриваться как элементарные структуры систем более высокого уровня иерархии. Время, за которое достигается синхронное состояние, является, по сути, показателем эффективности взаимодействия и, как выяснилось, зависит от запаздываний (как в связях, так и в самих системах). Тогда общая тенденция такова: чем больше запаздывание при взаимодействии научных направлений, тем дольше в такой системе не устанавливается синхронный режим (либо он не установится вообще), что отдаляет ее от систем интеграции. Поскольку запаздывание в связях напрямую зависит от скорости распространения информации между научными направлениями или школами, то можно заключить, что данное запаздывание есть эквивалент расстояния между системами. Обобщая сказанное, приходим к выводу, что взаимодействие будет более эффективным, если интегрируемые системы локализованы в одном месте (например, в научно-исследовательском комплексе).

Практическое подтверждение выводов, сделанных на основании моделирования системы взаимодействующих научных направлений, представлено в работах [5,6], в которых наглядно демонстрируются преимущества объединения исследовательских коллективов и учебных заведений в рамках крупных университетских центров с большим числом научных лидеров, сформировавшихся школ и эффективных научных связей.

Автор выражает благодарность профессору Д.А. Усанову за плодотворные обсуждения, без которых данная работа вряд ли была бы возможна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 000-06-00268а) и гранта Министерства образования РФ (проект 97-0-8.3-41).

Библиографический список

1. Качак В.В., Мчедлова Е.С. Нелинейная система с запаздывающим аргументом применительно к моделированию взаимодействий в науке // 5-я Международная школа ХАОС'98. Саратов, 6 – 10 октября 1998. С.111.
2. Mchedlova E.S. The model of two time-delayed systems: from periodicity to chaos // 5th International School on Chaotic Oscillations and Pattern Formation. Saratov, Russia. October 6 – 10.1998. P.109.
3. Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н., Раводин В.О. Модель взаимодействия двух развивающихся научных направлений с учетом ограничения роста достижений и запаздывания // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С.70.
4. Качак В.В., Мчедлова Е.С. Модель взаимодействия двух научных направлений с учетом ограничения экспоненциального роста достижений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 85.
5. Качак В.В., Усанов Д.А. К вопросу о взаимодействиях научных школ или об одном аргументе «за» интеграции образовательных структур // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С.95.
6. Трубецков Д.И., Кузнецов Н.И., Усанов Д.А. Интеграция – бремя ожиданий: Социально-экономические аспекты интеграции в системе образования и науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1998. 72 с.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 7.09.2000

THE INFLUENCE OF TIME DELAY ON INTERACTING SCIENTIFIC FIELDS DYNAMICS

E.S. Mchedlova

The mathematical model of two interacting scientific fields with time delays is presented. On the base of numerical simulation results and with synergetic approach the comparative analysis and qualitatively comparison with real systems behaviour is performed.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с №40603810900000000378 ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

Подписка на I-ое полугодие 2001 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498
и по заявочным письмам непосредственно в редакции
Стоимость подписки на I полугодие 90 рублей

Зарубежная подписка оформляется через фирмы-партнеры ЗАО «Международная книга – Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК–Периодика» по адресу: 117049, Москва, ул. Б. Якиманка, 39, ЗАО «МК–Периодика» тел.: (095) 238–14–85, 238–49–67; факс: 238–46–34
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address one of the partners of JSC «Mezhdunarodnaya Kniga-Periodica» in Your country or necessary to address JSC «МК–Periodica» directly
Address: Russia, Moscow, 117049, ul. B. Yakimanka, 39, «МК–Periodica»
Tel.: (095) 238–14–85, 238–49–67; Fax: 238–46–34
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

Сдано в набор 1.09.00. Подписано к печати 23.10.00. Формат 70x108/16.
Бумага сыктывкарская. Печать плоская. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 10,50 (7,5). Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 200 экз. Заказ 184
Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.04.98

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845–2)523864, факс (845–2) 523864
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
http://cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

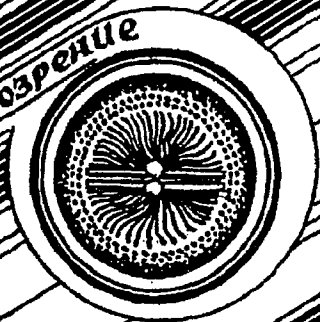
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 2000



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

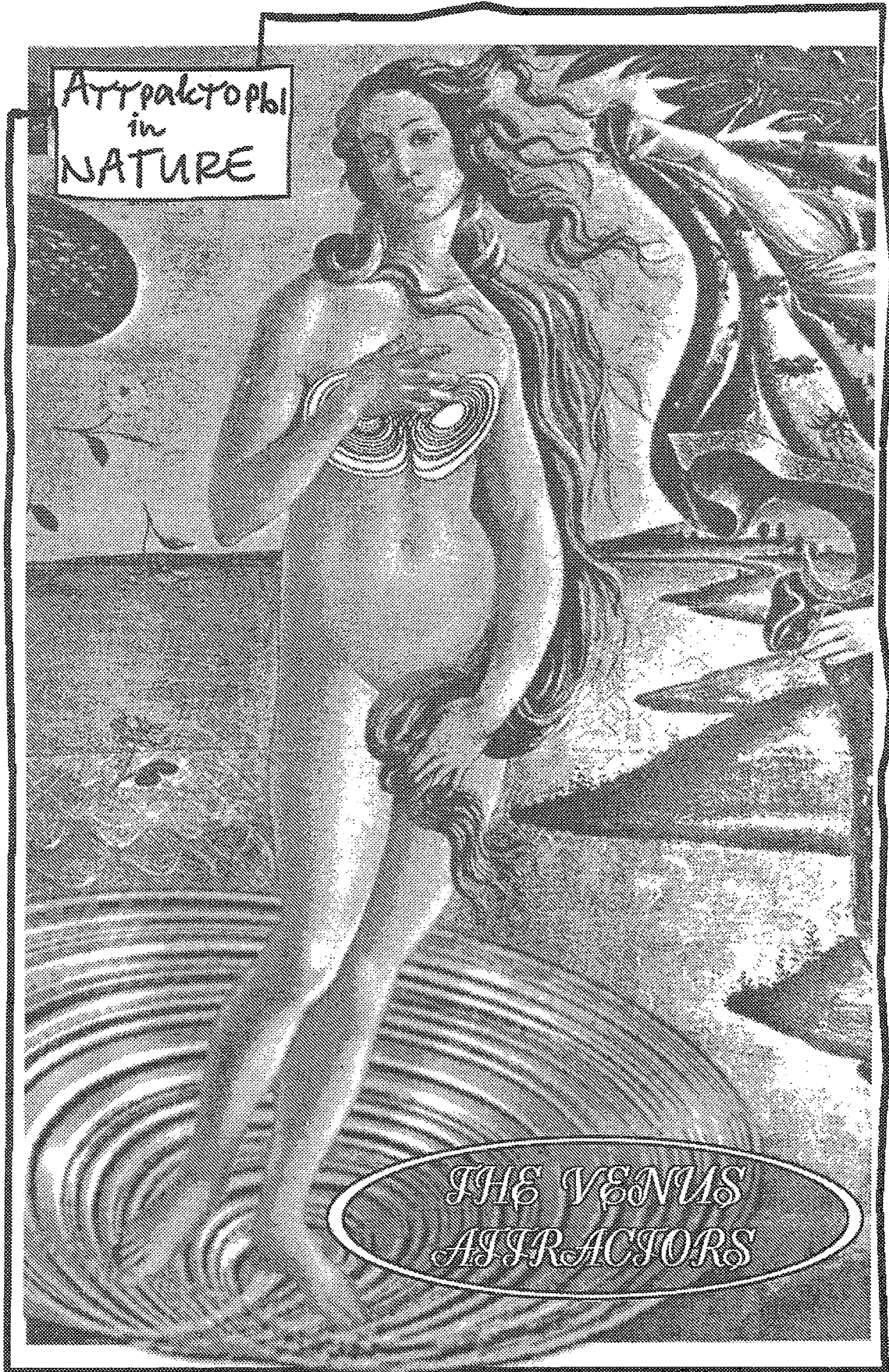


Вопросы преподавателей



Современной квантовой динамики

Attractions
in
NATURE



THE VENUS
ATTRACTORS