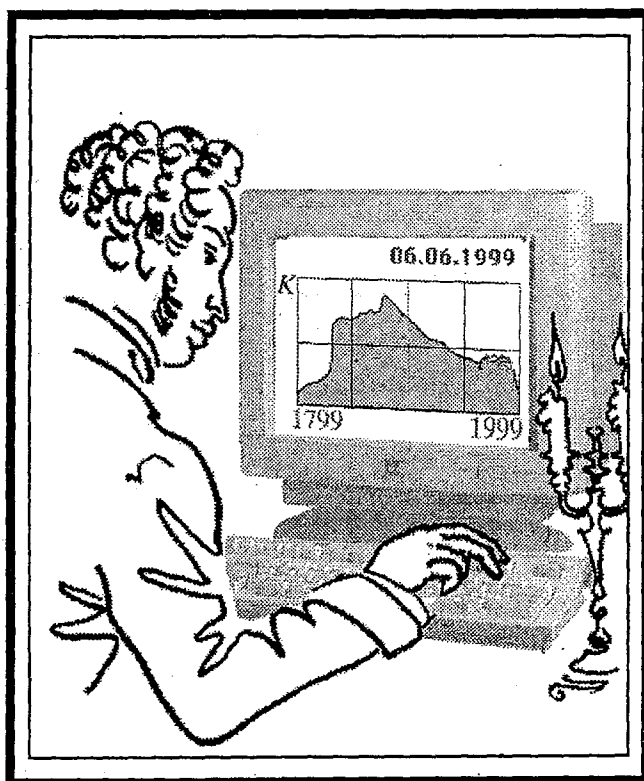


Трикладная Деловая Динамика

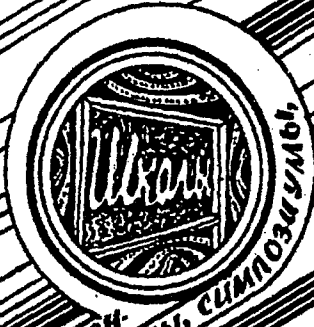




**Бифуркации
в динамических
системах различной природы**



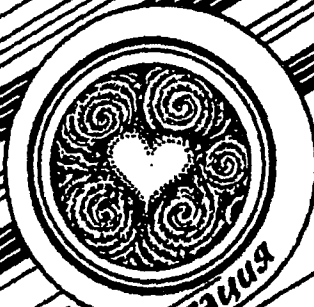
**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



Конференции, семинары, симпозиумы



**Детерминированный
хаос**

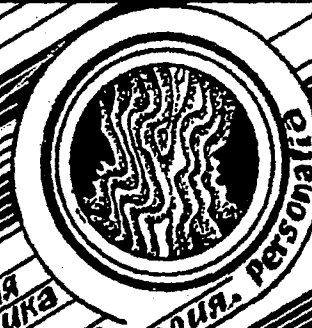


**Автоволны,
самоорганизация**

**Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн**



**Нелинейная
динамика
в лицах**



История персонала

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинико, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Кузнецов А.П., Широков А.П. Сложная динамика двухмодовой конечно-мерной модели лазера на свободных электронах 3

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Андреев Ю.В. Глобальная синхронизация в решетках хаотических отображений с ограниченным количеством связей 12

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

*Материалы V Международной школы
«Хаотические автоколебания и образование структур»
6–10.10.98, Саратов, Россия*

Блиох К.Ю., Блиох Ю.П., Любарский М.Г., Подобинский В.О. Авто-модуляционный режим линейного пучково-плазменного усилителя СВЧ-колебаний, вызванный возбуждением ионно-звуковых колебаний в плазме 29

Лоскутов А.Ю., Мушенков А.В., Одинцов А.И., Федосеев А.И. Хаотическая генерация в проточном лазере с пространственно неоднородной накачкой 40

Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А. Реконструкция уравнений неавтономного нелинейного осциллятора по временному ряду: модели, эксперимент 49

Козлов А. К., Суццик М. М., Мольков Я. И., Кузнецов А. С. Фазовая синхронизация, бистабильность и хаос в системе связанных генераторов Ван дер Поля – Дuffфинга 68

Рубчинский Л.Л., Суццик М.М. Прямая и обратная взаимосвязь между неупорядоченностью пространственных и временных паттернов в цепочках хаотических автогенераторов 81

Постнов Д.Э., Сосновцева О.В., Хан С.К. От противофазной к синфазной синхронизации в связанных моделях нейронов 88

К 90-ЛЕТИЮ САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Соломонов В.А. Саратовский университет как культурный центр Нижнего Поволжья 101

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

Миллер М. Об изобретении радио ... и не только 112

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Complex dynamics of twomode low-dimension model of free electron laser.
A.P. Kuznetsov, A.P. Shirokov 3

DETERMINISTIC CHAOS

- Global synchronization in lattices of chaotic maps with limited number of connections. *Yu.V. Andreyev* 12

JOURNAL IN JOURNAL

*Materials of the V International School on chaotic oscillations and pattern formation
October 6-10, 1998, Saratov, Russia*

- Automodulation regime of linear beam-plasma microwave amplifier caused by excitation of ion-sound waves in plasma. *K.Yu. Bliokh, Yu.P. Bliokh, M.G. Lyubarsky, V.O. Podobinsky* 29
- Chaotic generation in a crossflow laser with spatial nonuniform excitation. *A.Yu. Loskutov, A.V. Mushenkov, A.I. Odintsov, A.I. Fedoseev* 40
- Reconstructing equations of a nonautonomous nonlinear oscillator from a time series: models, experiment. *B.P. Bezruchko, Ye.P. Seleznev, D.A. Smirnov* 49
- Simmetry breaking, multistability and chaos in the system of two coupled identical Van der Pol – Duffing oscillators. *A. K. Kozlov, M. M. Sushchik, Ya. I. Molkov, A. S. Kuznetsov* 68
- Direct and reverse relationship between disordered spatial and temporal patterns in arrays of chaotic oscillators. *L.L. Rubchinsky, M.M. Sushchik* 81
- Transition from antiphase to inphase synchronization in coupled neuron models. *D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, Seung Kee Han* 88

TO THE 90th ANNIVERSARY OF SARATOV STATE UNIVERSITY

- Saratov University as a cultural centre of Nizhniye Povolzhje. *V.A. Solomonov* 101

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- On the invention of radio ...and something else. *M. Miller* 112



СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА ДВУХМОДОВОЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ЛАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

А.П. Кузнецов, А.П. Широков

Представлены результаты численного исследования конечномерной двухмодовой модели, приближенно описывающей сценарии перехода к многочастотному режиму в лазере на свободных электронах с низкодобротной электродинамической системой. Выявлены качественно разные механизмы потери устойчивости одночастотной генерации. Приведены карты динамических режимов и показателей Ляпунова на плоскости параметров коэффициент передачи – нормированная длина пространства взаимодействия.

Введение

При использовании лазера на свободных электронах (ЛСЭ) в качестве генератора когерентного электромагнитного излучения важным является вопрос о характере взаимодействия продольных мод, а также о различных путях возникновения многочастотного режима. Этой проблеме посвящен ряд работ [1–7], где исследуются генераторы как с высокодобротными, так и с низкодобротными электродинамическими системами. В случае ЛСЭ с низкодобротной электродинамической системой сильная связь мод может быть сведена к ситуации попарного взаимодействия основной и каждой из паразитных мод. В работе [8] для описания процессов в таком генераторе было предложено дискретное отображение. Оно получено в рамках хорошо известного в микроволновой электронике приближения, основанного на представлении взаимодействия в виде двух этапов: модуляции потока электронов на входе генератора и передачи на выходе системы энергии сгруппированными электронами обратной электромагнитной волне [3,5,9]. В настоящей работе приведены результаты исследования этого отображения методами нелинейной динамики, что позволяет продемонстрировать богатство возможных динамических режимов, обсудить различные пути возникновения многочастотного режима и тонкие детали перехода к хаосу.

Основные дифференциальные и разностные уравнения двухмодового приближения

Пусть в полосу усиления генератора попадает много неэквидистантно расположенных продольных мод. В этом случае можно считать, что усиление каждой паразитной моды определяется только полем основной и слабо зависит от

других паразитных мод. Подобное взаимодействие можно описать следующей системой уравнений [8]:

$$du/d\zeta = \chi_1(\zeta)\text{Im}\{\alpha_n \exp(i\varphi+i\Phi) + \tilde{\alpha}_n \exp(i\tilde{\varphi}+i\tilde{\Phi})\}, \quad d\Phi/d\zeta = u, \quad (1)$$

$$d\alpha_n/d\zeta + i\Delta\alpha_n = i/\pi \chi_2(\zeta) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\varphi-i\Phi) d\varphi d\tilde{\varphi}, \quad (2)$$

$$d\tilde{\alpha}_n/d\zeta + i\tilde{\Delta}\tilde{\alpha}_n = i/\pi \chi_2(\zeta) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\tilde{\varphi}-i\tilde{\Phi}) d\tilde{\varphi} d\varphi, \quad (3)$$

с граничными условиями:

$$u(\zeta=0, \varphi, \tilde{\varphi}) = 0, \quad \Phi(\zeta=0, \varphi, \tilde{\varphi}) = 0,$$

$$\alpha_{n+1}(0) = R \alpha_n(L), \quad \tilde{\alpha}_{n+1}(0) = R \tilde{\alpha}_n(L).$$

Здесь α и $\tilde{\alpha}$ – амплитуды основной и паразитной мод, Δ и $\tilde{\Delta}$ – их расстройки, $\varphi, \tilde{\varphi} \in [0, 2\pi)$ – независимые начальные фазы электрона относительно каждой из мод, $\Phi(\zeta, \varphi, \tilde{\varphi})$ – изменение фаз электронов, R – коэффициент передачи, равный произведению коэффициентов отражения от зеркал, L – нормированная длина пространства взаимодействия.

В правых частях уравнений (1) – (3) присутствуют множители $\chi_{1,2}(\zeta)$, описывающие связь пучка с электромагнитными волнами. Считая, вслед за [3,5,9], что взаимодействие происходит лишь на входе и выходе системы, положим $\chi_1(\zeta) = L[\delta(\zeta) + \delta(\zeta-L)]/2$, $\chi_2(\zeta) = L\delta(\zeta-L)$. В этом случае систему уравнений (1) – (3) можно проинтегрировать аналитически. Если расстройки мод подобраны таким образом, чтобы усиление их амплитуд было максимальным, то в результате нетрудно получить следующее дискретное отображение [8]:

$$R^{-1}x_{n+1} - x_n = L^3 |J_0(y_n)J_1(x_n)|, \quad (4)$$

$$R^{-1}y_{n+1} - y_n = L^3 |J_0(x_n)J_1(y_n)|,$$

где $x_n = \alpha_n(0)L^2/2$, $y_n = \tilde{\alpha}_n(0)L^2/2$ – приведенные амплитуды основной и паразитной мод, J_0 и J_1 – функции Бесселя. В рамках этой модели возбуждение основной моды в отсутствие конкурента описывается функцией J_1 , а влияние на нее конкурента – функцией J_0 .

Как показано в работе [8], на плоскости параметров «коэффициент передачи R – нормированная длина пространства взаимодействия L » существуют две линии: L_{st} – соответствует значениям параметра L , при которых происходит возбуждение генератора на одной основной моде, и L_{cr} – момент возбуждения паразитной моды, причем аналитически была получена следующая формула:

$$L_{cr} \approx 2.9(R^{-1} - 1)^{1/3}. \quad (5)$$

При небольшой надкритичности $L > L_{cr}$ имеет место установившийся режим с генерацией, главным образом, двух продольных мод.

Механизмы потери устойчивости одночастотного режима

С целью установления детальной картины динамических режимов, демонстрируемых отображением (4), нами было проведено его численное исследование. Оно выявило существенно более тонкую структуру существующих режимов.

Карта динамических режимов и три ее увеличенных фрагмента приведены на рис. 1–4. На этих рисунках различными оттенками серого цвета показаны периодические режимы, цифры означают период реализующегося цикла, а буквы «s» или «n» обозначают соответственно синфазный или несинфазный режим. Вид карт, как известно, в определенной мере зависит от способа сканирования плоскости параметров, поскольку в богатых мультистабильными состояниями системах изображающая точка может притягиваться к различным аттракторам. При построении карт на рис.1–4 сканирование осуществлялось снизу вверх (а затем – слева направо), что наиболее отвечает физическому смыслу задачи, так как интерес представляют режимы, возникающие при повышении тока пучка – безразмерной длины пространства взаимодействия L .

Перейдем к обсуждению полученных результатов. Отметим прежде всего,

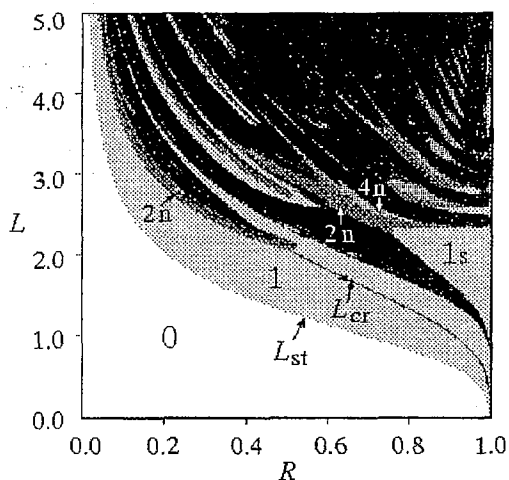


Рис. 1. Карта динамических режимов для отображения (4). Цифрами отмечены области: 0 – отсутствие колебаний, 1, 2, 4, 8 – циклы соответствующих периодов, буквами «s» и «n» отмечены синфазные и несинфазные режимы

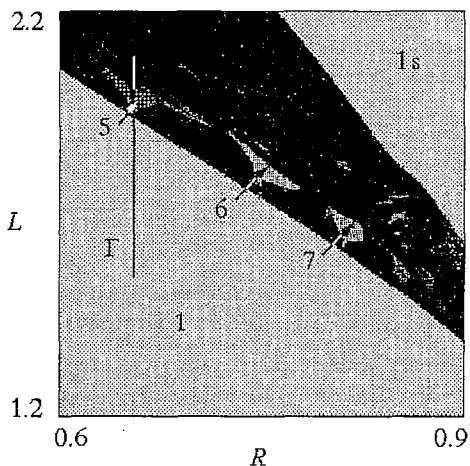


Рис. 2. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов, демонстрирующий расположение языков синхронизации. Цифрами отмечены периоды циклов

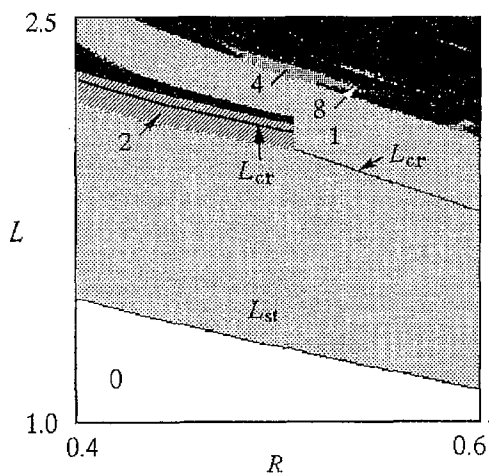


Рис. 3. Увеличенный фрагмент карты, иллюстрирующий режимы вблизи точки $R = 0.5$

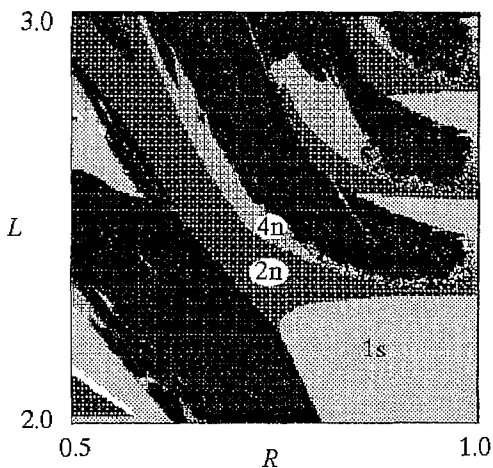


Рис. 4. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов, демонстрирующий многообразие синфазных и несинфазных циклов. Цифрами отмечены периоды циклов

что компьютерное моделирование выявляет линию L_{st} , которая на карте выглядит как граница окрашенных областей. Можно видеть также и линию L_{cr} , которая прорисовывается отдельными точками в наиболее светлой области серого цвета, отвечающей существованию устойчивой неподвижной точки отображения (4). В терминах дискретного отображения существование этих линий соответствует следующей смене режимов. При значениях $L < L_{st}$ существует единственная устойчивая неподвижная точка в начале координат фазовой плоскости $x = 0, y = 0$. На линии $L = L_{st}$ она становится неустойчивой, и возникает новая неподвижная точка, для которой $x > 0, y = 0$. При дальнейшем увеличении параметра L от L_{st} до L_{cr} величина x возрастает до определенного значения, и в момент $L = L_{cr}$ мягким образом появляется неподвижная точка, для которой $x > y > 0$. Это соответствует рождению второй паразитной моды.

Нетрудно видеть, однако, что такая картина, предсказанная в работе [8], имеет место лишь в правой части карты динамических режимов, то есть при достаточно больших значениях коэффициента отражения R . При небольших значениях R происходит следующее: неподвижная точка с координатами $x > 0, y = 0$ претерпевает бифуркацию удвоения периода, причем вторая мода остается по-прежнему невозмущенной, и лишь при дальнейшем увеличении параметра L происходит рождение паразитной моды. Рассмотрим условие осуществления каждого из описанных выше сценариев. Следуя авторам работы [8], предположим, что основная мода находится вблизи своего одномодового стационарного режима $x_{n+1} = x_n$, а паразитная мода возбуждается из шумов с малой амплитудой $y_n \ll 1$. Тогда амплитуду одномодовой генерации x^* (с учетом того, что функция J_0 почти равна единице) можно определить из первого уравнения системы (4)

$$(1-R)x^*/(RL^3) = |J_1(x^*)|, \quad (R \neq 0, L \neq 0). \quad (6)$$

Графическое решение уравнения (6) иллюстрируется с помощью рис. 5. Рассмотрим далее условие возбуждения паразитной моды $y_{n+1} > y_n$. Из второго уравнения системы (4) имеем

$$|J_0(x^*)J_1(y_n)| > y_n(1-R)/(RL^3).$$

Линеаризовав функцию Бесселя вблизи нуля ($J_1(y_n) \approx y_n/2, y_n > 0$), получим в окончательном виде условие возбуждения второй моды

$$2(1-R)/(RL^3) < |J_0(x^*)|. \quad (7)$$

На основании условия (7) в работе [8] и было получено уравнение (5) для критического значения параметра L . Нетрудно видеть, что оно определяет непрерывную линию на плоскости параметров. Однако условие (7) не является справедливым для всех значений параметра R из рассматриваемого диапазона. Оно было получено в предположении, что динамика отображения (4) определяется неподвижной точкой x^* . Если же при увеличении параметра L неподвижная точка

потеряет устойчивость и произойдет рождение 2-цикла раньше, чем возникнет генерация на второй частоте (то есть y_n станет больше нуля), то условие (7) теряет силу.

Рассмотрим возможность описанной ситуации, для чего исследуем неподвижную точку x^* уравнения (6) на устойчивость. Найдем её мультипликатор

$$\mu = RL^3 d/dx_n |J_1(x_n)| + R. \quad (8)$$

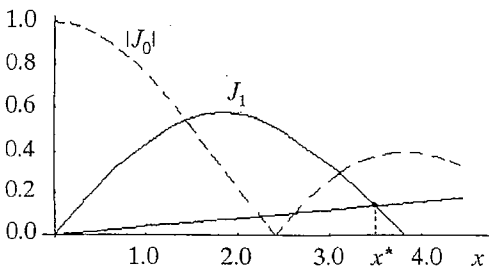


Рис. 5. Графическое решение уравнения (6) и нахождение условия возбуждения второй моды

В рассматриваемой области параметров функция Бесселя J_1 больше нуля и знак

модуля можно снять. Неподвижная точка теряет устойчивость и рождается 2-цикл, когда значение мультипликатора переходит через -1 . Полагая в уравнении (8) $\mu = -1$ и учитывая выражение (6), приходим к условию, определяющему момент рождения 2-цикла:

$$-2R/(RL^3) = J_0(x^*). \quad (9)$$

Как видно из уравнений (9), (7) в области параметра $R < 0.5$ неподвижная точка периода один x^* теряет устойчивость раньше, чем возникает паразитная мода ($u_n > 0$), и условие (7) заведомо является несправедливым¹. При значениях параметра $R > 0.5$ условие (7) корректно определяет зависимость (5).

Итак, в области параметров $R < 0.5$ из двух возможных механизмов потери устойчивости одночастотного режима – амплитудного (обусловленного модуляцией одной продольной моды) и частотного (вызванного конкуренцией разных мод) – в исследуемой двухмодовой модели ЛСЭ осуществляется первый.

Многочастотные режимы и переход к хаосу в двухмодовой модели

Рассмотрим теперь поведение отображения (4) при превышении параметром L критического значения L_{cr} . Как показывает компьютерное моделирование, в системе могут возникать различные периодические и квазипериодические колебания, а также хаос и гиперхаос.

В области параметра $R < 0.5$ с ростом L на фазовой плоскости x , у происходит рождение двух инвариантных кривых из двух точек, принадлежащих ранее циклу периода 2. (В терминах исходного генератора имеет место автомодуляция рассматриваемых мод с несоизмеримыми частотами.) Затем этот «2-тор» разрушается через потерю гладкости с образованием хаотического аттрактора.

Если увеличивать безразмерную длину пространства взаимодействия при $R > 0.5$, то мы обнаруживаем «линию нейтральности», к которой подходят многочисленные языки синхронизации. Их хорошо видно на увеличенном фрагменте карты на рис. 2. Представлены языки, которым отвечают числа вращения $1/5$, $1/6$, $1/7$. Первый из них выглядит «традиционно», а форма остальных языков искажается при подходе к значению $R = 1$. На рис. 6 показана эволюция фазового портрета при движении по плоскости параметров вдоль линии Γ , проходящей через язык синхронизации с числом вращения $1/5$. С ростом параметра L наблюдается синхронизация с образованием цикла периода 5 (рис. 6, б, в). Затем из каждой из пяти точек рождается инвариантная кривая (рис. 6, г). При дальнейшем увеличении параметра L на этих кривых образуются «углы» (рис. 6, д) и формируется сложно устроенный аттрактор (рис. 6, е–ж). Последнему рисунку серии (рис. 6, з) соответствуют два ляпуновских показателя, большие нуля, что свидетельствует о наличии в системе гиперхаоса.

При движении по плоскости параметров вблизи левой границы языка синхронизации с числом вращения $1/5$ наблюдается эволюция фазового портрета, иллюстрируемая рис. 7. Можно видеть инвариантную кривую, которая теряет гладкость и разрушается в соответствии с теоремой Афраймовича – Шильникова с образованием хаотического аттрактора. Заметим, что «линия нейтральности» уходит и в область $R < 0.5$, проходя выше соответствующих линий удвоения, рождения 2-тора и примыкающей к последней области сложной динамики. Ее можно видеть на фрагменте карты на рис. 3, где просматривается язык синхронизации с числом вращения $1/4$.

¹ $J_0(x^*)$ в рассматриваемой области меньше нуля, см. рис. 5.

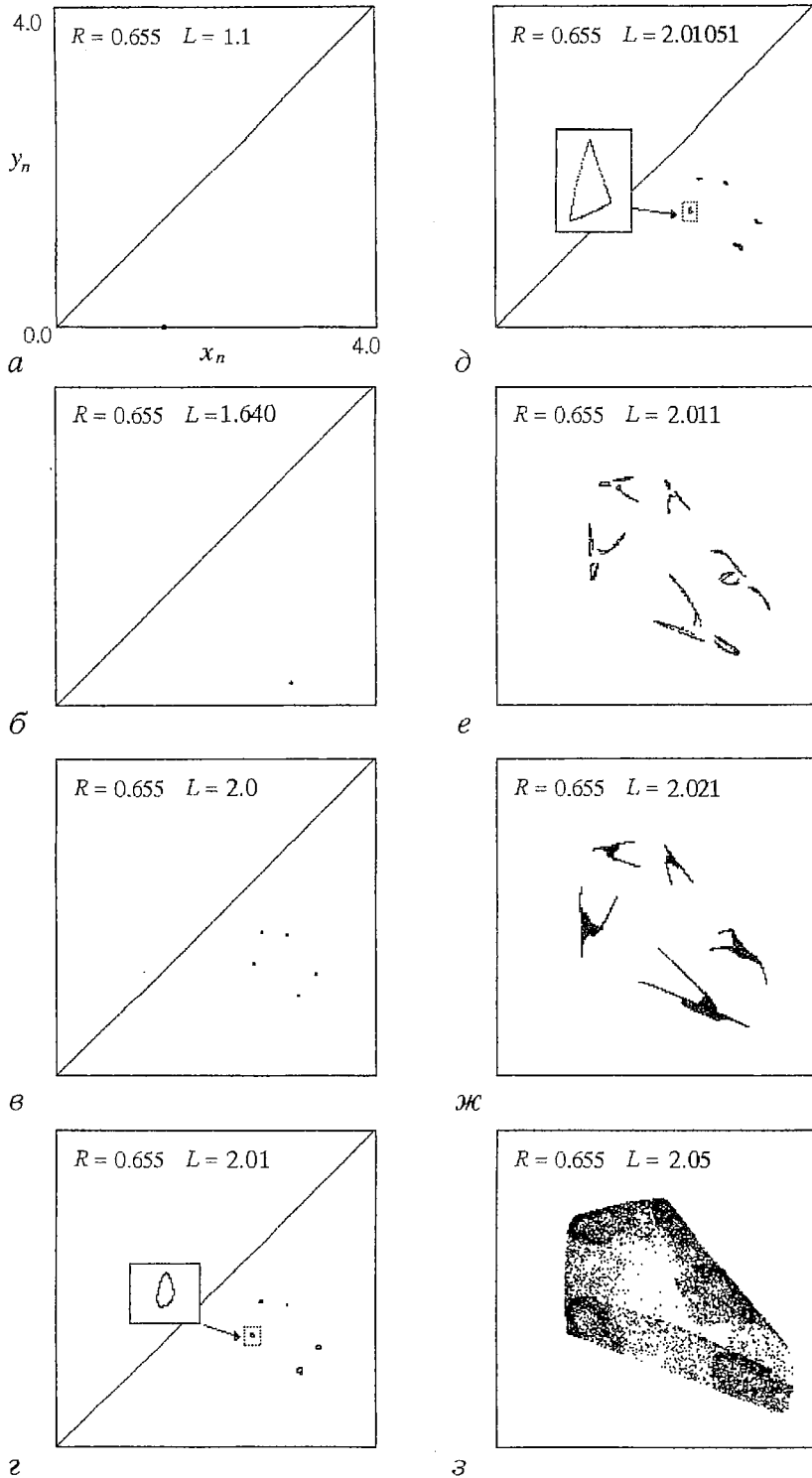


Рис. 6. Эволюция фазового портрета отображения (4) при движении вдоль линии Γ , указанной на рис. 2

На карте динамических режимов в ее правой части обнаруживается еще одна область существования устойчивой неподвижной точки. В этом случае реализуется режим синфазных колебаний, когда $x=y$ (то есть в терминах исходной

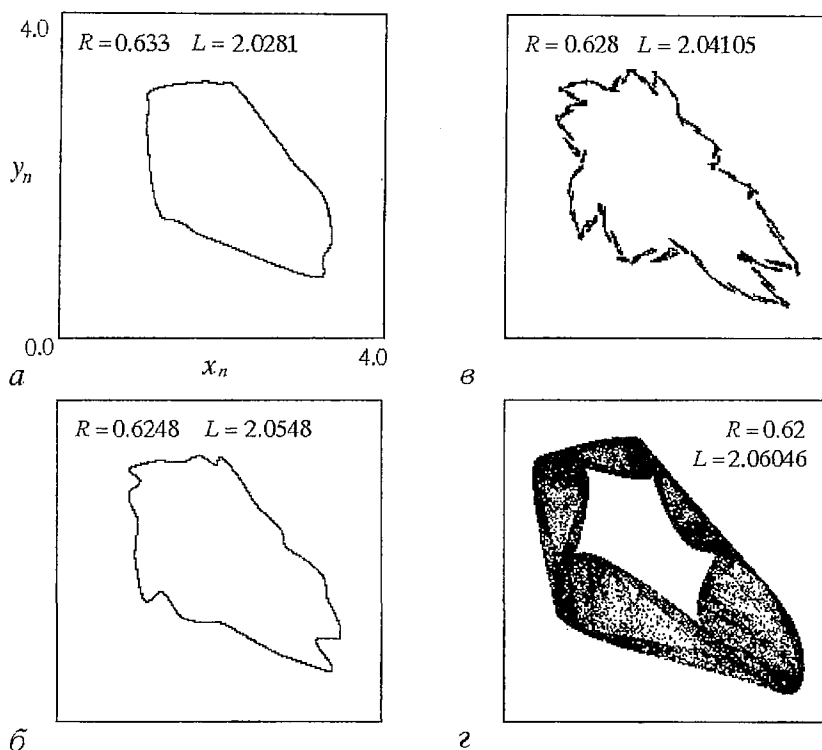


Рис. 7. Эволюция фазового портрета отображения (4) при движении вблизи левой границы языка синхронизации с числом вращения $1/5$

системы наблюдается генерация основной и паразитной мод с равными амплитудами). На рис. 1 и его фрагменте, рис. 4, эта область обозначена 1s. Такой режим при вариации параметров также становится неустойчивым, и происходит удвоение периода. Существенно, что рождающийся 2-цикл является несимметричным. Далее возникает несинфазный 4-цикл, 8-цикл, причем границы областей их устойчивости имеют сложную форму (см. рис. 4). После этого вновь возникают квазипериодические и хаотические режимы.

На рис. 8 представлены «карты» ляпуновских показателей отображения (4). Рис. 4, а соответствует первому, а 4, б – второму показателю. Видно, что в зависимости от параметра R квазипериодический режим может смениться либо

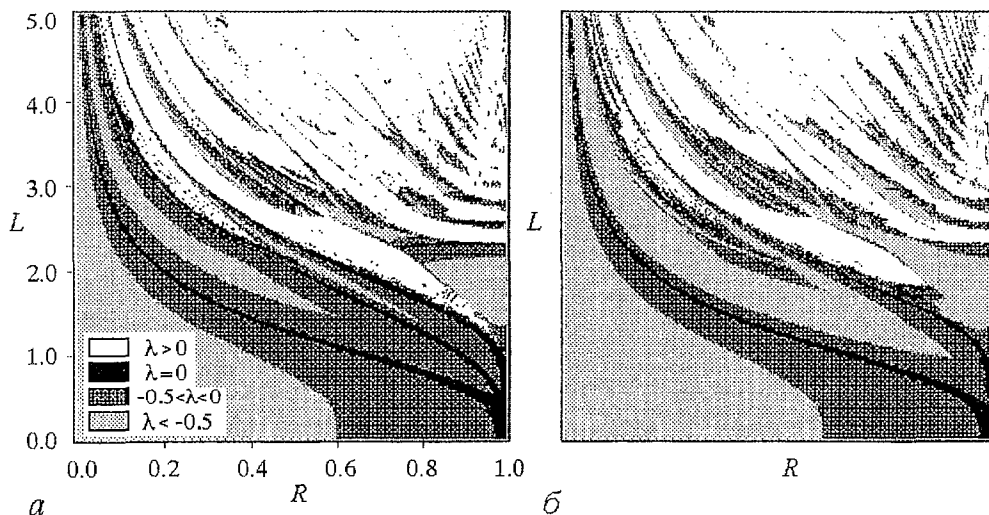


Рис. 8. Карты первого и второго показателей Ляпунова для отображения (4)

хаосом, либо гиперхаосом, которому отвечают два положительных показателя Ляпунова. Области гиперхаоса занимают значительную долю плоскости параметров, так что этот режим весьма типичен для отображения (4).

Заключение

Наше рассмотрение обнаружило тонкие детали и интересные особенности сложных режимов модельного отображения, описывающего динамику ЛСЭ с низкодобротной электродинамической системой. В какой мере соответствующие предсказания реалистичны? Это открытый вопрос, он требует существенно более серьезного компьютерного исследования исходных уравнений в частных производных. Однако представленные здесь результаты, особенно карта динамических режимов, могут служить полезным «путеводителем» для такого исследования. В любом случае, мы имеем дискретное отображение с интересным поведением, существенное преимущество которого состоит в том, что оно получено из «первых» принципов, из исходных уравнений, дополненных разумными физическими соображениями.

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и Д.И. Трубецкову за полезное обсуждение и внимание к работе.

Работа поддержана грантами РФФИ №96-15-96536 и 96-15-96921.

Библиографический список

1. Bogomolov Ya.L., Bratman V.L., Ginzburg N.S., Petelin M.I., Yunakovsky A.D. Nonstationary generation in free electron lasers // Optics Commun. 1981. Vol.36, № 3. P.209.
2. Ginzburg N.S., Petelin M.I., Shapiro M.A. Automodulation and stochastic oscillation regimes in resonant relativistic electron masers // Proc. 10th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Moscow, 1981. Vol.1. P. M2.
3. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Вып.2. Горький, 1981. С.101.
4. Ginzburg N.S., Petelin M.I. Multy-frequency generation in free electron lasers with quasi-optical resonator // Int. J. Electronics. 1985. Vol.59, № 3. P.291.
5. Antonsen T.M., Jr., Levush B. Mode competition and suppression in free electron laser oscillators // Phys. Fluids B. 1989. Vol.1, № 5, P.1097.
6. Гинзбург Н.С., Сергеев А.С. Динамика ЛСЭ генераторов с резонаторами произвольной добротности // ЖТФ. 1991. Т.61, № 6, С.133.
7. Блюх Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б. Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т.1, № 1-2. С. 34.
8. Братман В.Л., Савилов А.В. Сценарий перехода к многочастотному режиму в ЛСЭ-генераторе с низкодобротной электродинамической системой // Изв. вузов. ПНД. 1994. Т.2, № 6. С.27.
9. Кузнецов А.П., Широков А.П. Дискретная модель релятивистской лампы обратной волны // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т.5, № 6. С.76.

Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 21.12.98

COMPLEX DYNAMICS OF TWO-MODE LOW-DIMENSION MODEL OF FREE ELECTRON LASER

A.P. Kuznetsov, A.P. Shirokov

The results of numeric investigation of a low-dimension two-mode model, describing approximately scenario of transition to the multi-frequency regime in the free electron laser with a low-Q microwave system are presented. The qualitatively different mechanisms of stability loss of a one-frequency generation are revealed. The topographies of dynamical regimes and Lyapunov's exponents on a parameter plane: transmission coefficient – dimensionless space interaction length are presented.



Кузнецов Александр Петрович родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СФ ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и СФ ИРЭ РАН. Автор

нескольких оригинальных учебных курсов для Высшего колледжа прикладных наук СГУ и двух популярных книг. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su



Широков Андрей Петрович – родился в Ершове Саратовской области (1977). В настоящее время студент 5-го курса Высшего колледжа прикладных наук СГУ. Инженер Саратовского филиала Института радиофизики и электроники РАН. Соросовский студент (1998, 1999). Лауреат премии фонда им. Н.И. Вавилова. Занимается научной работой в студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор двух научных публикаций.



ГЛОБАЛЬНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В РЕШЕТКАХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ СВЯЗЕЙ

Ю.В. Андреев

Исследуется устойчивость глобального синхронного режима в решетках хаотических отображений путем непосредственного расчета условий устойчивости, а также путем численного моделирования. Показано, что для решеток с локальными связями существует предельное значение показателя Ляпунова отображений решетки, при превышении которого глобальный синхронный режим теряет устойчивость. Обнаружено, что синхронный режим становится невозможен в больших решетках вследствие локальности, то есть малой «длины» связей, и предложены подходы к модификации структуры динамической системы, которые могут обеспечить устойчивость синхронного режима: перестройка динамического режима отображений решетки, увеличение размера локальной окрестности, использование нелокальных статических или динамических связей и введение внешнего управляющего узла (пейсмейкера). В модели с пейсмейкером обнаружен пространственный синхронный режим решетки, отличный от режима пейсмейкера (явление «обобщенной» синхронизации).

Введение

Одним из удобных инструментов изучения разнообразных явлений в физике, биологии, экономике и других науках являются модели, состоящие из большого количества взаимодействующих элементов с простой или сложной внутренней динамикой, в том числе и хаотической. Одной из популярных моделей является ансамбль (решетка) отображений. Исследователями изучаются ансамбли отображений с регулярными и хаотическими режимами, глобальными и локальными связями и т.п. Исследования показывают, что поведение ансамбля как целого существенно отличается от динамики отдельных его элементов и определяется, помимо парциальной динамики, как видом, так и силой связей элементов ансамбля.

Особый интерес представляет динамика ансамблей отображений с хаотической динамикой. В них наблюдаются такие типы поведения, как пространственно-временной хаос, хаотические кластеры, пространственные синхронные режимы и т.д. (см., например, [1] и приведенный там список литературы). В последнее время исследователей привлекают интересные, сложные явления, происходящие на «кромке хаоса», то есть на границе между хаотическим и регулярным поведением [2–5]. Эта граница (кромка хаоса) определяется режимом глобальной синхронизации, при которой резко упрощается поведение хаотической системы за счет скачкообразного уменьшения размерности ее аттрактора.

В данной работе исследуются условия реализации режима глобальной синхронизации в решетках связанных отображений. Обычно в моделях решеток для связи узлов используют метод «среднего поля», то есть в уравнении для каждого узла воздействие остальных узлов решетки представляют взвешенной суммой состояний этих узлов [1, 6]. Как показывают исследования ансамблей отображений, условия устойчивости глобального синхронного режима существенно зависят от того, как это «среднее поле» в уравнении для узла складывается с «полем» самого узла.

Рассмотрим подробнее наиболее употребительные типы связи. Ансамбль P идентичных одномерных отображений вида $x(t+1)=f(x(t))$, где t – дискретное время, можно связать следующим образом:

$$x_i(t+1) = f(x_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [x_j(t) - x_i(t)]) = f(\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j(t)), \quad i = 1, \dots, P, \quad (1)$$

где α_{ij} – коэффициент связи i -го отображения с j -м, а $A = \|\alpha_{ij}\|$ – матрица связей ансамбля (1). Этот тип связи называют нелинейным, диссипативным и т.п. Среднее поле ансамбля здесь представлено нелинейным членом.

Другой тип связи – линейный (или диффузионный):

$$x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [x_j(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \dots, P, \quad (2)$$

где связь элементов ансамбля представлена линейным членом.

Иногда также применяется связь вида

$$x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [f(x_j(t)) - f(x_i(t))], \quad i = 1, \dots, P, \quad (3)$$

однако она эквивалентна типу связи (1) (см. Приложение), поэтому самостоятельного значения не имеет и в дальнейшем не рассматривается.

Можно непосредственно проверить, что в ансамблях (1)–(3) существует хаотический синхронный режим, при котором фазовые переменные всех отображений во все моменты времени совпадают друг с другом. Легко видеть, что этот режим совпадает с режимом парциального отображения. Целью данной статьи является исследование условий устойчивости этого синхронного режима в решетках идентичных одномерных отображений.

Известно, что одним из основных механизмов разрушения синхронного режима в связанных хаотических системах как с дискретным, так и с непрерывным временем при выполнении необходимых условий устойчивости является «on-off»-перемежаемость, проявляющаяся в виде нерегулярных всплесков (выбросов) разностного сигнала [7–9]. Было показано, что причиной «on-off»-перемежаемости является существование в хаотическом аттракторе неустойчивых периодических траекторий (например, неподвижных точек) с показателем Ляпунова, превышающим показатель Ляпунова самого хаотического аттрактора динамической системы [8, 10]. Мера таких траекторий на аттракторе нулевая. Однако в связанных системах они приводят к появлению в окрестности аттрактора синхронизации, расположенного на главной диагонали общего фазового пространства, узких областей с ненулевой мерой, из которых траектория может удаляться от аттрактора. При этом сам аттрактор синхронизации остается глобально притягивающим, и в поведении связанных систем наблюдается самосинхронизация, перемежающаяся время от времени срывами.

Однако «on-off»-перемежаемость наблюдается не во всех связанных системах. Наличие этого механизма зависит как от конкретного вида нелинейных систем, так и от типа связи между ними (например, см. [11]).

В данной работе используется диссипативная, нелинейная связь типа (1). Этот выбор обусловлен следующими причинами. Как было показано в [8], при линейной связи (2) «on-off»-перемежаемость неизбежна. В случае же нелинейной связи (1) «on-off»-перемежаемость в системе связанных отображений, по-видимому, тоже может иногда наблюдаться, однако в этом случае всегда можно

выбрать область параметров связи, при которой она исключена [12]. Сравнительный анализ условий устойчивости синхронного режима для типов связи (1) и (2), проведенный в [13] на модели из двух однонаправленно связанных отображений *tent map*, в подтверждение вышесказанного показал, что при связи типа (1) «on-off»-перемежаемость в рассмотренной системе не наблюдается в отличие от связи типа (2), что обеспечивает синхронный режим, более устойчивый по отношению как к малым возмущениям, так и к расстройкам параметров рассмотренных отображений.

Кроме этого, для нелинейной связи типа (1) можно провести более полный и строгий математический анализ и, в частности, получить в общем виде необходимое условие устойчивости синхронного режима в линейном приближении, что было впервые сделано в [14, 15]. Подробное изложение метода вычисления условий устойчивости вместе с обсуждением проблемы «on-off» перемежаемости дано в [12, 16].

Согласно этому методу, чтобы оценить устойчивость синхронного режима, необходимо оценить устойчивость движения, трансверсального к аттрактору синхронизации, расположенного на главной диагонали P -мерного гиперкуба, где P – размерность фазового пространства ансамбля отображений (1). Как показано в [14, 15], необходимое условие устойчивости можно вычислить непосредственно, зная спектр собственных чисел матрицы связей $A = \|a_{ij}\|$ ансамбля (1). Максимальный показатель Ляпунова движения в инвариантной плоскости, трансверсальной к главной диагонали, на которой расположен аттрактор синхронизации ансамбля, равен $\lambda_T = \lambda + \ln(|e_M|)$ и, соответственно, необходимое условие устойчивости имеет вид

$$\lambda_T = \lambda + \ln(|e_M|) < 0. \quad (4)$$

Здесь λ – показатель Ляпунова парциального отображения ансамбля, а e_M – одно из собственных чисел матрицы связей A . Чтобы получить e_M , из набора собственных чисел матрицы A отбрасывается одно число $e=1$ (с учетом кратности), а из оставшихся выбирается максимальное по модулю.

Условие (4) может быть получено в общем виде только для нелинейной связи типа (1). Для этого типа связи оно имеет универсальный характер, то есть не зависит от конкретного вида функции отображения f . Оно применимо и к многомерным отображениям, в этом случае λ имеет смысл максимального показателя Ляпунова парциальной системы.

В работах [12, 14–16] описанный метод расчета устойчивости синхронного режима был применен к ансамблям полностью связанных (каждый с каждым) отображений. Было показано, что в таких ансамблях синхронный режим всегда может быть реализован при достаточно сильной связи.

В данной работе исследуются условия устойчивости синхронного хаотического режима в двумерных решетках с небольшим количеством связей (решетки с локальными связями), и рассматриваются подходы, позволяющие реализовать такой режим за счет усложнения структуры решеток (решетки с нелокальными связями и решетки с внешним управлением).

1. Модель решетки с локальными связями

Концепция ансамбля хаотических элементов, приходящего в упорядоченное состояние вследствие локального взаимодействия, исследовалась на модели двумерной решетки с $M \times N$ локально связанными одинаковыми одномерными отображениями в узлах. В данной работе использовались 2 типа отображений: логистическое отображение $x(t+1) = f(x(t)) = \mu x(1-x)$ с параметром $\mu=4$ и кусочно-линейное отображение *Skew Tent*. При локальной связи узлы решетки x_{ij} , где (i,j) –

пространственные координаты узла, связаны только с ближайшими геометрическими соседями, то есть каждое отображение связано, например, с восемью ближайшими. Такая связь может быть описана следующим соотношением:

$$x_{ij}(t+1) = f((1-\alpha)x_{ij} + \alpha \sum_{m=1, n=1}^3 T_{mn} x_{i+m-2, j+n-2}), \quad (5)$$

где α – коэффициент связи. Поведение каждого узла помимо собственной динамики определяется взвешенным действием соседей. Условием существования синхронного режима является равенство суммы всех весов в (5) единице (это легко получить из основного соотношения (1)). Для простоты зададим периодические граничные условия: $x_{(M+1)j} = x_{1j}$ и $x_{i(N+1)} = x_{i1}$, то есть рассмотрим двумерную решетку на торе. Для описания связей будем использовать пространственные шаблоны весов, подобные тем, что применяются в клеточных нейронных сетях (CNN) [17]. Будем рассматривать только равные связи, при этом задавая тип окрестности шаблоном вида

$$T_{\text{Full}} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где центральная ячейка (0) соответствует узлу x_{ij} , а остальные (ненулевые) элементы – весам соседних узлов, действующих на узел x_{ij} . Сумма всех элементов любого шаблона T всегда устанавливается равной единице, что обеспечивает существование глобального синхронного режима. Данный шаблон отвечает окрестности 3×3 (окрестности радиуса 1), но можно рассматривать и большие окрестности, а также задавать сложные шаблоны с неравными элементами, которые отвечают неоднородным связям.

2. Устойчивость синхронного режима в решетках локально связанных отображений

Поведение системы будем исследовать численно путем моделирования решетки отображений и путем расчета условий устойчивости. При численном моделировании изучается поведение системы в зависимости от силы и вида локальной связи между узлами и от размеров решетки путем задания случайных начальных условий узлам решетки и итерирования системы. При визуализации значение переменной узла $x_{ij}(t)$, принимающей значения из диапазона $[0, 1]$, изображается оттенками серого, при этом черный цвет соответствует нулю, а белый – единице.

Прежде всего, хочется отметить, что «on-off»-перемежаемость не наблюдалась в экспериментах, описанных в данной статье.

Как показывают численные исследования, в достаточно больших решетках при ненулевой связи вида (5) глобальный синхронный режим является неустойчивым. Вместо него реализуется хаотическая во времени и пространстве кластерная структура. Наблюдаемые кластеры представляют собой локально синхронизированные участки решетки [18]. Узлы, принадлежащие одному кластеру, в течение некоторого времени движутся почти синхронно, хотя и хаотически во времени. Границы кластеров постоянно размываются, одни кластеры исчезают, другие появляются. Как следует из численного исследования, размеры кластеров зависят от величины связи между узлами – коэффициента α , что показано на рис. 1, где представлены мгновенные картины состояний решеток 32×32 , отличающихся силой связи α , в случайные моменты времени. При увеличении α средние размеры кластеров немного увеличиваются – от одного до

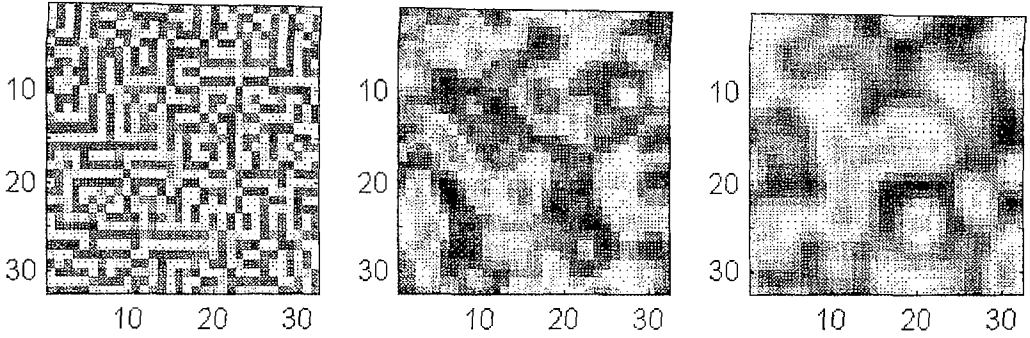


Рис. 1. Кластеры в решетках 32×32 с величиной внутренней связи $\alpha=0.2, 0.5$ и 0.9 , соответственно. Яркость ячеек пропорциональна значению переменной соответствующего отображения узла

приблизительно пяти, однако полной пространственной синхронизации в больших решетках не наблюдается ни при какой силе связи. Глобальная синхронизация узлов решетки наблюдается только в маленьких решетках – размера 5×5 и меньше, и при достаточно сильной связи. В этом случае решетка довольно быстро (быстрее, чем за 100 итераций) сходится к синхронному режиму с любых начальных условий.

Чтобы объяснить экспериментальные результаты, применим условие (4) к решеткам с локальными связями. Для расчета условий устойчивости синхронного режима прежде всего нужно построить матрицу связей A решетки $M \times N$ локально связанных отображений, для этого пронумеруем узлы решетки от 1 до $P=M \times N$ каким-либо регулярным образом, например, последовательно ряд за рядом сверху вниз. Можно показать, что порядок обхода узлов решетки может быть произвольным, поскольку это не меняет спектра собственных значений матрицы A . Матрица связей A для P узлов имеет размер $P \times P$. Вследствие локальности связей она содержит небольшое число ненулевых элементов, то есть является сильно разреженной для больших P . Каждому узлу решетки соответствует свой ряд матрицы A . Как следует из уравнения для локальной связи (5), на главной диагонали матрицы A находятся коэффициенты a_{ii} , описывающие воздействие узла на самого себя, то есть $(1-\alpha)$. Каждый ряд i матрицы A также содержит m коэффициентов $a_{ij}=\alpha/m$ связи соответствующего узла i с ближайшими соседями. Остальные элементы в ряду – нулевые.

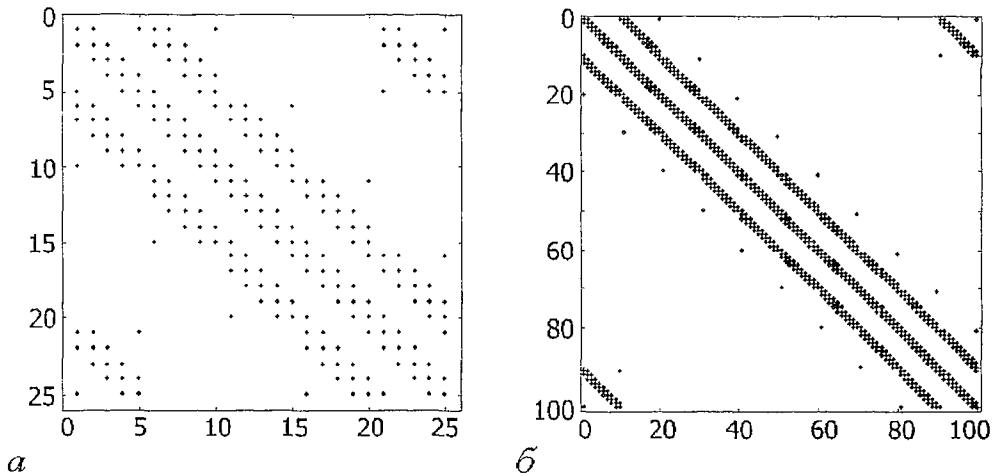


Рис. 2. Матрицы связей для решеток 5×5 (а) и 10×10 (б). Отмечены только ненулевые элементы

На рис. 2 схематически изображены матрицы связей для решеток 5×5 и 10×10 с шаблоном окрестности T_{Full} (6). Видно, как с увеличением размера решетки матрицы связей становятся все более разреженными. Отметим, что в случае ансамбля полносвязных отображений (каждый с каждым) в аналогичной матрице практически нет нулевых элементов.

Устойчивость синхронного режима вычислим согласно условию (2). В рассматриваемом случае парциальные логистические отображения решетки являются хаотическими, поэтому $\lambda > 0$. Численные расчеты показывают, что при слабой связи между узлами решетки синхронизация невозможна. При увеличении связи синхронный режим становится устойчивым в решетке размера 3×3 при $\alpha \approx 0.44$, в решетке 4×4 при $\alpha \approx 0.67$, и только при $\alpha \approx 0.96$ в решетке 5×5 (рис. 3). В решетках большего размера глобальная синхронизация невозможна при коэффициентах связи $\alpha \in [0, 1]$.

Сравнивая эти результаты с типичными картинками кластеров на рис. 1, можно сделать вывод, что характерный размер кластеров в решетках локально связанных отображений, по-видимому, близок (или равен) размеру наибольшей решетки, в которой возможен глобальный синхронный режим при данной величине связи α . Эта гипотеза подробнее проверяется в разделе 3.1.

3. Синхронный режим в больших решетках

Как было показано выше, в больших решетках хаотических отображений с локальными связями синхронный режим неустойчив. Однако, исходя из анализа условия устойчивости (2), можно предложить несколько подходов, которые могут обеспечить устойчивость глобального синхронного режима. Здесь мы рассмотрим четыре подхода. Первый связан с изменением динамики отображений решетки. Следующие три вытекают из отказа от идеи локальности связей: увеличение «глубины» связи, нелокальная связь и введение специального управляющего узла (пейсмейкера).

3.1. Перестройка хаотического режима. Этот способ достижения синхронного режима в больших решетках заключается в уменьшении степени хаотичности отображений ансамбля. В самом деле, из условия устойчивости (2) видно, что показатель Ляпунова λ_T для движения в плоскости, перпендикулярной аттрактору синхронизации, состоит из двух слагаемых: показателя Ляпунова парциального отображения λ и слагаемого $\ln(|e_M|)$, связанного с топологией связей элементов системы. Будем называть его топологическим, или связным фактором. Анализ показывает, что это слагаемое является отрицательным (или нулевым) практически для всех конфигураций связей между элементами решетки. Например, если из величины λ_T на рис. 3 вычесть постоянный уровень $\lambda \approx 0.7$, получим «чистые» зависимости топологического фактора от коэффициента связи. Как для полносвязных, так и для локально связанных решеток топологический фактор в диапазоне коэффициентов связи $\alpha \in [0, 1]$ отрицателен. При больших $\alpha \approx 1.5-2$ могут нарушаться условия применимости (4), поэтому этот диапазон не рассматривается.

Если режим парциального отображения является регулярным, то есть $\lambda < 0$,

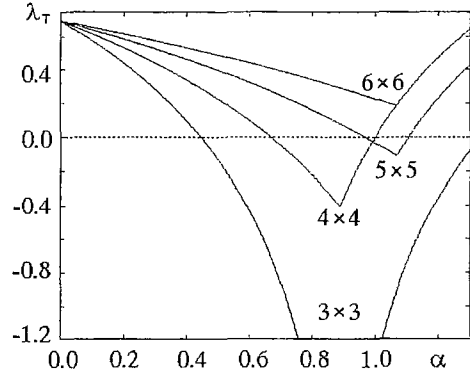


Рис. 3. Зависимость трансверсального показателя Ляпунова от коэффициента локальной связи α в решетках разного размера

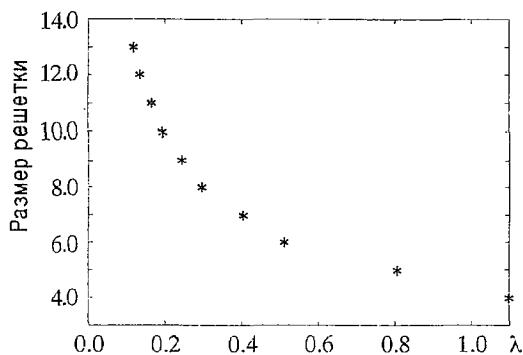


Рис. 4. Зависимость максимально допустимого показателя Ляпунова парциального отображения от размера решетки

синхронный режим будет устойчив в любых решетках. Если же элементы решетки являются хаотическими, то есть $\lambda > 0$, синхронный режим в решетке будет устойчив, только если коллективное взаимодействие узлов решетки при данной связи сможет компенсировать неустойчивость парциальной динамики узлов.

В больших решетках этого не происходит, поэтому для достижения пространственной синхронизации придется уменьшить λ — степень хаотичности узлов решетки, для чего требуется перестройка динамического режима.

На рис. 4 показана зависимость максимального показателя Ляпунова парциального отображения, при котором еще наблюдается устойчивый глобальный синхронный режим, от линейного размера решетки с окрестностью T_{Full} . Для квадратных решеток со стороной N эту зависимость можно аппроксимировать для больших N как $\lambda \propto N^{-1.9}$ или $N \propto \lambda^{-0.5}$. Из графика следует, что в случае хаоса с показателем Ляпунова $\lambda = \ln 2 \approx 0.69$, что соответствует, например, случаю одномерного логистического отображения с $\mu = 4$, синхронный режим возможен в решетке 5×5 , но чтобы получить его в решетке 9×9 , необходимо перестроить хаотический режим, скажем, до $\lambda = 0.2$.

Очевидно, что такой подход возможен не всегда, поскольку при перестройке динамического режима могут резко меняться статистические характеристики хаотического аттрактора, например такие, как инвариантная мера. К тому же, зависимость показателя Ляпунова от параметров парциального отображения может быть очень сложной или резкой, как это имеет место в логистическом отображении. В этом отношении интересным является кусочно-линейное отображение *Skew Tent*

$$x(t+1) = f(x(t), x_0) = \begin{cases} x(t)/x_0, & 0 \leq x(t) \leq x_0, \\ (1-x(t))/(1-x_0), & x_0 \leq x(t) \leq 1, \end{cases} \quad (7)$$

состоящее из двух сегментов, выходящих с концов единичного отрезка и пересекающихся в вершине с координатами $(x_0, 1)$ (рис. 5, а). Это отображение при всех значениях параметра имеет хаотический режим с равномерной инвариантной мерой на интервале $[0, 1]$, и при изменении параметра x_0 от 0 до 0.5 (или от 1 до 0.5) его показатель Ляпунова λ плавно меняется от 0 до $\ln 2 \approx 0.69$ (рис. 5, б).

Воспользуемся данными на графиках рис. 4 и 5, б для проверки гипотезы о том, что размеры кластеров в больших решетках определяются размером той решетки, в которой может наблюдаться глобальный синхронный режим при данном коэффициенте связи α и величине показателя Ляпунова λ парциального отображения. Для этого из рис. 4 найдем, что синхронный режим в решетке 5×5 достигается при $\lambda = 0.7$ (с небольшим запасом), в решетке 7×7 — при $\lambda = 0.3$, а в решетке 13×13 — при $\lambda = 0.1$. В отображении *Skew Tent* эти режимы наблюдаются при параметре x_0 , равном соответственно 0.5, 0.08 (или 0.92) и 0.02 (или 0.98).

На рис. 6 изображены типичные мгновенные картины состояний решеток 32×32 в случайные моменты времени, соответствующие режимам с показателями Ляпунова $\lambda = 0.7, 0.3$ и 0.1 . Как видно из рисунка, максимальные размеры наблюдаемых кластеров, приблизительно равные соответственно 5, 7 и 13,

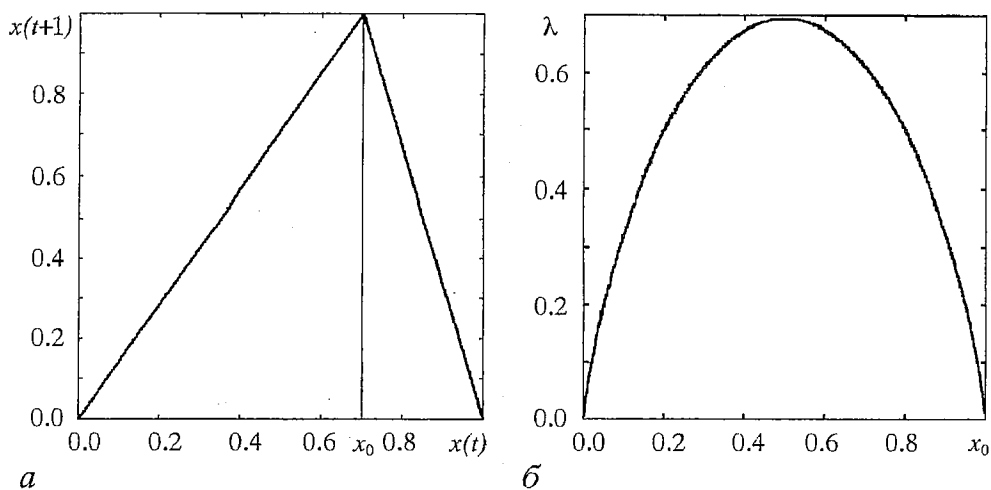


Рис. 5. Отображение *Skew Tent* и его показатель Ляпунова

подчиняются зависимости, приведенной на рис. 4, то есть максимальный размер кластера совпадает с максимальным размером той маленькой решетки, в которой еще возможен глобальный синхронный режим. Следует отметить также уменьшение «контраста» изображений с уменьшением λ , что фактически означает уменьшение дисперсии фазовых переменных отображений по узлам решетки.

Рассмотренный путь достижения глобального синхронного режима, по-видимому, может иметь место в естественных системах с пространственно-временным хаосом и объяснять внезапные переходы к синхронному режиму и обратно, к пространственному хаосу.

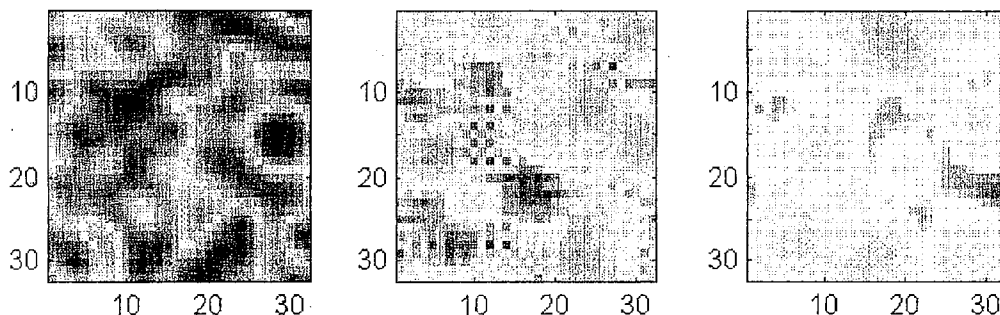


Рис. 6. Кластеры в решетках отображений 32×32 , с парциальными режимами с $\lambda=0.7, 0.3$ и 0.1 , соответственно; коэффициент связи $\alpha \sim 1$

3.2. Увеличение «глубины» связи. Известно, что в случае полностью связанных ансамблей (1) (каждый с каждым) всегда существует область коэффициента связи, обеспечивающая глобальную синхронизацию решетки хаотических систем (например, см. [12,14,16]). Можно предположить, что увеличение размера окрестности, а следовательно, и увеличение количества связей в системе должно привести к глобальной синхронизации.

Численные расчеты условий устойчивости больших решеток показали, что синхронный режим действительно становится возможным, начиная с некоторой величины локальной окрестности. Например, в случае решеток логистических отображений с $\lambda \approx 0.69$ синхронный режим становится возможным при величине стороны локальной окрестности, примерно равной половине стороны самой решетки. Эти результаты подтверждаются численным моделированием динамики решетки.

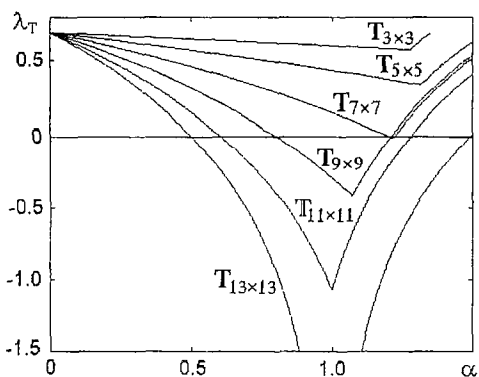


Рис. 7. Устойчивость синхронного режима в решетке 13×13 логистических отображений при различных размерах окрестности локальных связей. Синхронный режим устойчив при $\lambda < 0$

размеров окрестности, где $T_{n \times n}$ соответствует шаблону окрестности размера $n \times n$. Начиная с окрестности 7×7 , в решетке становится возможным синхронный хаотический режим, правда в очень узкой зоне параметра связи около $\alpha \approx 1.2$. При дальнейшем увеличении окрестности зона устойчивости режима по параметру связи α увеличивается, и при шаблоне окрестности $T_{13 \times 13}$, когда окрестность связи совпадает со всей решеткой, и система становится полностью связной, соответствующая кривая рис. 7 уходит на $-\infty$, то есть при коэффициенте связи $\alpha \sim 1$ решетка синхронизируется при любой величине показателя Ляпунова λ частичного отображения.

Эти численные результаты приведены для логистического отображения с $\lambda \approx 0.69$. Так как согласно формуле (4) необходимое условие устойчивости определяется суммой показателя Ляпунова частичного отображения и топологического фактора, соответствующего конкретной конфигурации связей узлов решетки. Для отображений с другим показателем Ляпунова λ' кривые на рис. 7 нужно всего лишь сдвинуть вверх или вниз, так чтобы пучок кривых при $\alpha = 0$ (что соответствует несвязанной решетке) сходил к точке λ' . Например, как можно определить из рисунка, для отображений с показателем Ляпунова $\lambda = 0.2$ решетка 13×13 в широком диапазоне параметра связи α синхронизируется уже при величине окрестности 5×5 .

Таким образом, в больших решетках синхронизация становится возможной при увеличении локальной окрестности, но при этом количество связей в системе с ростом размера окрестности стремительно нарастает, и говорить об ограниченности количества связей уже не приходится.

3.3. Статические и динамические нелокальные связи. Из анализа результатов исследования необходимых условий устойчивости (4) синхронного режима в решетках с большими окрестностями (п. 3.2) напрашивается вывод о том, что устойчивость такого режима обусловлена количеством связей в системе, то есть при уменьшении количества связей устойчивость синхронного режима должна ухудшаться, а при увеличении — улучшаться. В самом деле, в полностью связных системах, где каждый узел связан с каждым, синхронизация возможна при достаточно сильной связи (это подтверждает и рис. 7, кривая $T_{13 \times 13}$). В то же время, если количество связей в двумерных решетках уменьшить, например, используя шаблон окрестности вида

Рассмотрим эффект увеличения окрестности на примере решетки 13×13 путем постепенного увеличения размера окрестности от 3×3 до 13×13 (другими словами, увеличивая радиус окрестности от 1 до 6), используя при этом полностью связанные весовые шаблоны, то есть связывая каждый узел со всеми узлами из своей окрестности. Нетрудно убедиться, что увеличение «глубины» связи, то есть размера окрестности локальной связи, приводит к более полному заполнению матрицы связей A .

Результаты расчета устойчивости синхронного режима согласно условию (4), приведенные на рис. 7, показывают постепенное усиление топологического фактора $\ln(|e_M|)$ при увеличении

$$\mathbf{T}_+ = 1/4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то условия устойчивости глобального синхронного режима действительно заметно ухудшаются, в частности, для логистического отображения с $\mu=4$ синхронный режим возможен только в решетке 3×3 (рис. 8).

Для того чтобы полнее проверить эту гипотезу о количестве связей, также были рассчитаны условия устойчивости глобсинхронного режима в одномерных (цепочки) и объемных трехмерных решетках отображений с полными шаблонами окрестностей радиуса 1. В цепочках отображений на каждый узел приходится по две связи от ближайших соседей, что описывается шаблоном окрестности $\mathbf{T}=(1/2 \ 0 \ 1/2)$, то есть еще меньше, чем в предыдущем случае двумерной решетки с шаблоном \mathbf{T}_+ . В объемных трехмерных решетках на каждый узел уже приходится 26 связей от соседей (что гораздо больше, чем в двумерных решетках с полной окрестностью), а шаблон \mathbf{T} является матрицей $3 \times 3 \times 3$.

Логично было бы ожидать ухудшения устойчивости синхронного режима с увеличением размерности решеток, исходя, например, из относительной плотности ненулевых элементов матрицы связей. Для одномерной цепочки длины N матрица связей имеет N^2 элементов, из которых $3N$ ненулевых, то есть относительная плотность равна $p=3/N$; у двумерной решетки $N \times N$ (N^2 узлов) с окрестностью \mathbf{T}_{Full} матрица связей имеет N^4 элементов, из них $3 \times 3N^2$ ненулевых, что дает $p=9/N^2$; соответственно для трехмерных решеток с окрестностью $3 \times 3 \times 3$ доля ненулевых элементов в матрице связей составит $p=27/N^3$. Нетрудно видеть, что, несмотря на увеличение количества связей на один узел решетки, при $N > 3$ плотность ненулевых элементов p в матрице связей с увеличением размерности решеток D падает как $p=(3/N)^D$.

Однако расчеты необходимых условий устойчивости (4) синхронного режима в цепочке длины N , двумерной решетке $N \times N$ и трехмерной решетке $N \times N \times N$ с соответствующими полными окрестностями показали, что эти условия совпадают. Точнее, совпадают минимумы кривых трансверсального показателя Ляпунова λ_T , хотя эти минимумы достигаются при разных величинах коэффициента связи α . Этот результат проиллюстрирован на рис. 9, где в качестве примера приведены расчетные кривые топологического фактора для одно-, двух- и трехмерных решеток с линейными размерами 4 и 5.

Как показывают расчеты, для оценки необходимых условий устойчивости синхронного режима в одно-, двух- и трехмерных решетках с полной окрестностью можно использовать один и тот же график на рис. 4, который был

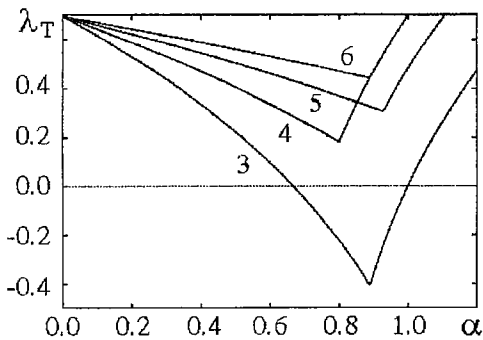


Рис. 8. Условия устойчивости синхронного режима в решетке с шаблоном \mathbf{T}_+

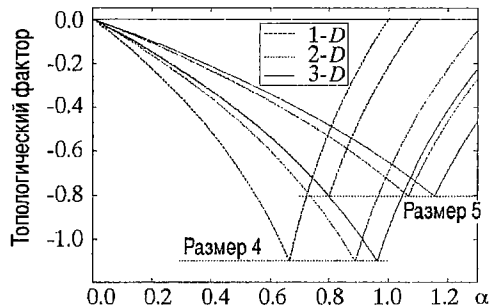


Рис. 9. Условия устойчивости синхронного режима в одно-, двух- и трехмерных решетках

ранее получен для двумерных решеток, если считать, что по ординате отложен линейный размер решетки.

Этот парадоксальный результат еще ждет своего объяснения. По-видимому, увеличение числа связей на узел с увеличением размерности решетки каким-то образом компенсирует экспоненциальное увеличение размера матрицы связей.

Расчеты приводят нас к следующему выводу: для синхронизации решетки хаотических элементов количество связей не является критическим параметром. В то же время, как следует из исследования (см. раздел 3.2), увеличение окрестности решеток приводит систему к синхронному режиму. Отсюда возникает предположение, что для устойчивости синхронного режима в хаотических решетках необходима достаточная «длина» связей, а не только их количество.

Для проверки этой гипотезы были исследованы условия устойчивости синхронного режима в решетках логистических отображений с небольшим числом нелокальных связей. Для этого фиксировалось количество связей на узел и выбирался шаблон связей по всей решетке, одинаковый для всех ее узлов. Это соответствовало шаблону окрестности T , увеличенному до размера решетки. Поскольку полный перебор всех возможных сочетаний связей немислим даже при небольших размерах двумерных решеток, исследовались условия устойчивости для какого-то количества вариантов шаблонов связей T , которые задавались случайным образом.

Численные эксперименты подтвердили эту гипотезу. Оказалось, что нелокальные «дальнодействующие» связи существенно улучшают устойчивость синхронного режима, позволяя заметно уменьшить количество связей в решетке. Проиллюстрируем эти выводы на примере решетки 16×16 с 16 связями на узел. На рис. 10 показаны расчетные кривые топологического фактора, соответствующие 10 различным шаблонам связей. Минимум топологического фактора в этих десяти случаях меняется в пределах от -0.56 до -0.81 . Это означает, что решетки отображений с показателями Ляпунова, меньшими соответствующих значений из диапазона $0.56 \div 0.81$, могут синхронизироваться. Например, для логистического отображения с $\mu=4$ показатель Ляпунова $\lambda \approx 0.7$, следовательно, в этих десяти случаях глобальный синхронный режим будет наблюдаться в решетке этих отображений только с теми шаблонами, у которых кривая топологического фактора проходит ниже уровня -0.7 .

Заметим, что в рассмотренном примере всего 16 связей на узел, что гораздо меньше, чем в случае решетки с широкой локальной окрестностью, рассмотренном выше. В самом деле, для стабилизации решетки 16×16 логистических отображений с $\lambda \approx 0.7$ методом широкой окрестности требуется окрестность размера как минимум 9×9 , что дает 80 связей на узел.

Шаблоны, которыми мы пользовались до сих пор, можно назвать статическими. Как видно из рис. 10, разные шаблоны связей дают очень разные

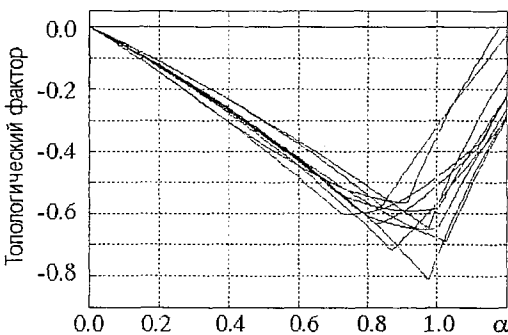


Рис. 10. Случайные шаблоны связей в решетке 16×16

минимумы топологического фактора. С некоторыми шаблонами связей условие устойчивости выполняется, а с некоторыми нет, то есть можно сказать, что есть «хорошие» и «плохие» шаблоны. Если же менять шаблон связей на каждом шаге итерирования, то можно попытаться обойти влияние «плохих» шаблонов, и таким образом, шаблоны становятся «динамическими». К сожалению, в этом случае уже нельзя применить подход [12,16] и формулу (4) для расчета необходимых условий устойчивости, поэтому решетка с динамическими шаблонами была

промоделирована численно. Как показали численные исследования, применение динамических шаблонов позволяет еще больше уменьшить количество связей, необходимых для синхронизации всей решетки, в частности, для решеток размером до 100×100 достаточно трех связей на узел.

Таким образом, отказ от идеи только локальных связей позволяет существенно уменьшить количество связей в большой решетке, необходимых для синхронизации. Например, для решетки 16×16 необходимо 80 локальных связей на узел (синхронизация методом широкой окрестности), или 16 статических нелокальных, или всего 3 динамические случайные связи.

3.4. Решетки с пейсмейкером. Как было показано выше, глобальный синхронный режим невозможен в больших решетках локально связанных хаотических отображений. Этот общий результат не зависит от вида отображений. Поэтому для достижения пространственной синхронизации необходимо как-то изменить систему.

Добавим к решетке еще один хаотический узел (назовем его пейсмейкером) и наделим его особой управляющей ролью, соединив его однонаправленно со всеми узлами решетки, как показано на рис. 11.

Динамика этого независимого узла описывается уравнением отображения f , а поведение узлов решетки – следующими выражениями:

$$x_{ij}(t+1) = f(\beta x_p + (1-\beta)[\alpha \sum_{m=1, n=1}^3 T_{mn} x_{i+m-2, j+n-2} + (1-\alpha)x_{ij}]), \quad (8)$$

где x_p – переменная пейсмейкера. Пейсмейкер одинаково связан со всеми узлами решетки с коэффициентом связи β . В отсутствие пейсмейкера, то есть при $\beta=0$, выражение (8) сводится к уравнению для решетки локально связанных отображений (5).

Как следует из результатов численного моделирования, в поведении решетки логистических отображений, управляемой пейсмейкером, в зависимости от параметра связи β можно выделить три различных типа движений: режим полной синхронизации при $\beta \in [0.5, 1]$, режим «синхронной решетки» при $\beta \in [0.332..., 0.5]$ и режим десинхронизации при малых β (рис. 12). При полной синхронизации режимы отображений решетки и пейсмейкера совпадают. Режим синхронной решетки отличается тем, что режимы отображений решетки совпадают между собой, но отличаются от режима пейсмейкера. Этот устойчивый хаотический режим, являющийся одним из проявлений феномена «обобщенной» синхронизации (например, см. [19–22]), существует при любых значениях коэффициента локальных связей α , и синхронное поведение узлов решетки оказывается обусловленным не их локальным взаимодействием, а побочным эффектом действия пейсмейкера. Наличие локальных связей сказывается только на скорости сходимости отображений решетки к синхронному режиму.

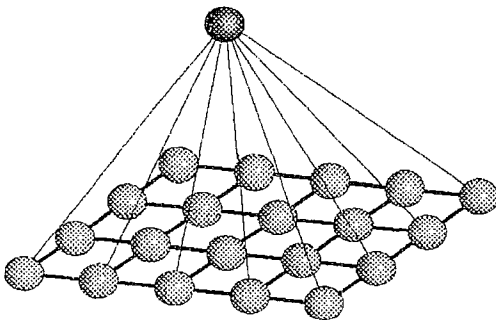


Рис. 11. Двумерная решетка с пейсмейкером

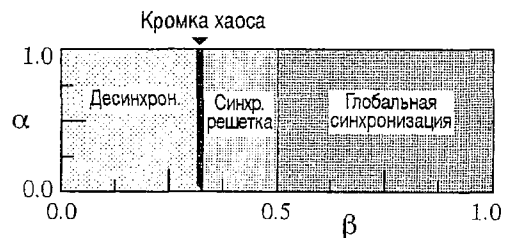


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма решетки

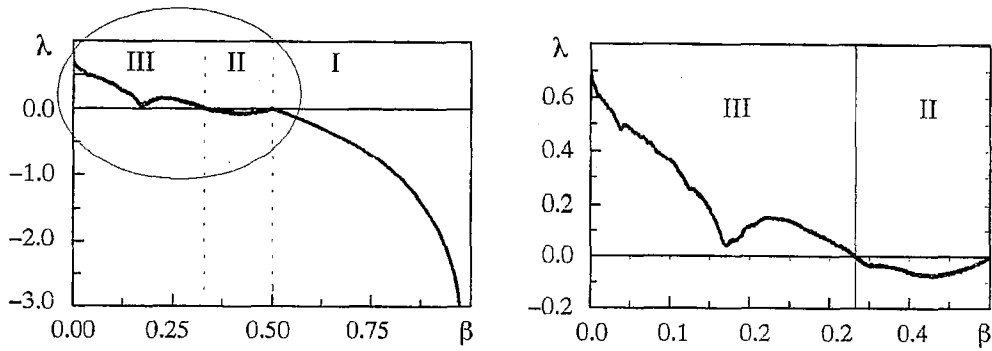


Рис. 13. Показатель Ляпунова колебаний, наведенных во втором отображении

Очевидно, что существование такого типа синхронизации в данном случае связано с тем, что вынужденные колебания в узлах решетки, наведенные пейсмекером, устойчивы по отношению к малым возмущениям в узлах. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим вынужденные колебания в системе двух идентичных логистических отображений с однонаправленной связью. Известно [12, 14–16], что в такой системе синхронный режим существует всегда, а условие его устойчивости по отношению к малым возмущениям в ведомом отображении в линейном приближении можно выразить неравенством

$$(1 - \beta) < \exp(-\lambda), \quad (9)$$

где λ – старший максимальный показатель Ляпунова первого отображения. В случае логистических отображений с $\mu=4$ и показателем Ляпунова $\lambda=\ln 2$ это дает условие устойчивости синхронного режима при $\beta \geq 0.5$. Данный теоретический результат подтверждается и численным моделированием решетки: при $\beta \geq 0.5$ и любом коэффициенте внутренней связи α наблюдается глобальный синхронный режим.

Вычислим показатель Ляпунова траектории второго отображения как вынужденных колебаний (наведенного движения), то есть в неавтономной системе

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \ln \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{k=1}^N \left| \frac{\partial}{\partial x_2} [f(\beta x_1(k)) + (1-\beta)x_2(k)] \right| \right]^{1/N} \right\} = \\ &= \ln \left\{ (1-\beta) \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{k=1}^N \left| \frac{\partial}{\partial x_2} [f(x_2(k))] \right| \right]^{1/N} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как траектории первого и второго отображений не совпадают, вычислить λ^* можно только численно. Зависимость показателя Ляпунова от коэффициента связи β приведена на рис. 13. Четко просматриваются три основные зоны по параметру β . Зона I, $\beta \in [0.5, 1.0]$, соответствует обычному синхронному режиму, показатель Ляпунова λ^* подчиняется закону $\lambda^* = \ln(1-\beta) + \lambda$. Этот режим устойчив, поскольку λ^* здесь отрицателен.

Когда β уменьшается и входит в зону II, $\beta \in [0.332\dots, 0.5]$, синхронные колебания разрушаются, однако движение во втором отображении не становится независимым. Вынужденные колебания во втором отображении устойчивы, что следует из отрицательного показателя Ляпунова. Таким образом, в фазовом пространстве полной динамической системы появляется новый аттрактор с корреляционной размерностью $D \approx 1.8$, который уже не лежит вдоль главной диагонали фазового пространства (рис. 14). Это режим «обобщенной» синхронизации, отвечающий за режим синхронной решетки отображений. Форма аттрактора во всей зоне II остается практически постоянной.

Наконец, третий тип движения реализуется в зоне III, $\beta \in [0, 0.332\dots]$. Показатель Ляпунова вынужденных колебаний становится положительным, и при $\beta \rightarrow 0$ движение системы быстро становится независимым.

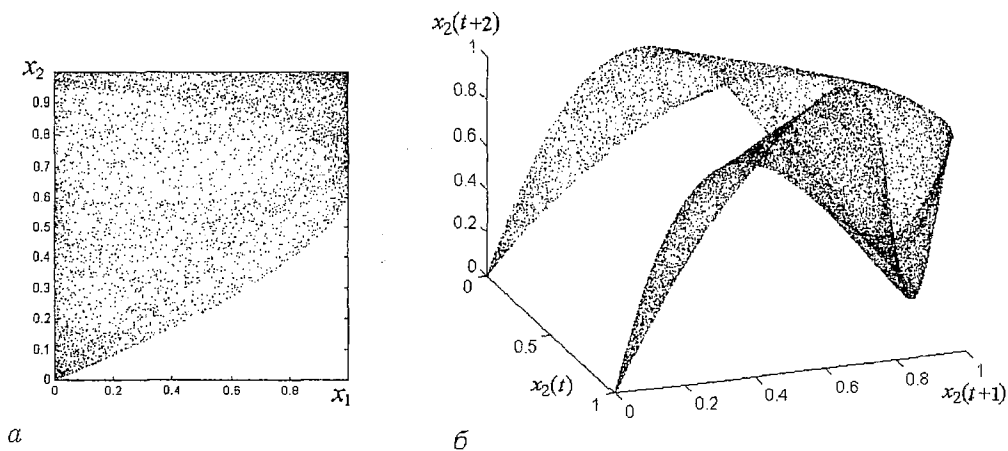


Рис. 14. Недиагональный аттрактор зоны II: *а* – фазовый портрет, *б* – реконструкция аттрактора по наблюдениям переменной второго отображения

Во время вычислений для каждого значения β задавались случайные значения x_1 и x_2 , затем система итерировалась 200000 раз, чтобы пропустить переходный процесс, и на следующих 200000 итерациях вычислялся показатель Ляпунова. Такая процедура гарантирует вычисления на аттракторе системы, а не на неустойчивых траекториях. (Если задать начальные условия системы в зоне III и итерировать систему, постепенно перестраивая (уменьшая) β , то система будет находиться на диагонали $x_1 = x_2$ и даже при $\beta < 0.5$ останется на этой траектории, хотя она станет неустойчивой.) К тому же, такая процедура позволит визуально выявить другие аттракторы в системе, если они существуют.

Экспериментально обнаружено, что в узкой зоне $\beta \in [0.31\dots, 0.332\dots]$, когда вынужденные колебания в системе двух отображений теряют устойчивость, в модели решетки с пейсмейкером режим синхронной решетки сохраняется при ненулевом α , то есть в ситуации, когда попарное взаимодействие узлов решетки с пейсмейкером более неспособно обеспечить устойчивость вынужденных колебаний, помогает наличие локальных связей (см. рис. 12). Чем ближе β к границе зон II и III, тем быстрее сходимость к синхронному режиму. Типичные времена переходного процесса порядка 100 шагов при силе локальных связей α около 1. При уменьшении α и приближении β к 0.31... времена сходимости увеличиваются до десятков тысяч. Ниже значения $\beta = 0.31\dots$ система становится десинхронизированной, хотя вблизи этой границы в решетке еще наблюдается перемежаемость между пространственным хаосом и синхронным режимом.

Таким образом, добавление пейсмейкера к двумерной решетке отображений с локальными связями позволяет обеспечить устойчивость синхронного режима в решетке. Наличие локальных связей при этом оказывается несущественным, а устойчивость синхронного режима решетки обеспечивается действием пейсмейкера. Зная показатель Ляпунова λ отображений системы, можно вычислить соответствующий диапазон (9) коэффициента связи β пейсмейкера с узлами решетки. В частном случае решетки логистических отображений даже при β , меньшем критического значения, обеспечивающего устойчивость глобального синхронного режима, существует зона по параметру связи β , в которой, благодаря явлению обобщенной синхронизации, наблюдается режим синхронной решетки. Однако следует заметить, что существование этого режима связано с динамическими свойствами логистического отображения, а для других типов отображений существование этого режима не гарантировано. В частности, в случае отображения «симметричный tent map» (отображение (7) с параметром $x_0 = 0.5$) этот режим невозможен, поскольку для любой траектории этого отображения показатель Ляпунова $\lambda = \ln 2$.

Выводы

Исследовалась устойчивость глобального синхронного режима в решетках отображений с локальными связями путем непосредственного расчета условий устойчивости по методу [12,14–16], а также путем численного моделирования. Обнаружено, что глобальный синхронный режим невозможен в больших решетках. Показано, что для каждой решетки существует критическое значение показателя Ляпунова составляющих решетку отображений, при превышении которого глобальный синхронный режим теряет устойчивость, то есть становится невозможным, и описана процедура его расчета.

Предложены четыре подхода к модификации структуры динамической системы, которые обеспечивают глобальный синхронный режим:

- перестройка динамического режима отображений решетки;
- увеличение локальной окрестности;
- нелокальные статические и динамические связи;
- введение управляющего узла (пейсмейкера).

В модели решетки с пейсмейкером обнаружена зона параметра, в которой наблюдается синхронный режим решетки, не совпадающий с режимом пейсмейкера (обобщенная синхронизация). Показано, что на границе зон синхронной решетки и десинхронизации наличие локальных связей позволяет сохранить устойчивость синхронного режима.

Автор выражает признательность А.С. Дмитриеву и М.Е. Широкову за ценные замечания и плодотворное обсуждение результатов работы.

Авторские программы для пакета MATLAB, использованные при работе над статьей, можно найти в Internet по адресу

<http://www.cplire.ru/win/InformChaosLab/people/Andreyev/lattices.html>

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 97-01-00800).

Приложение

Покажем, как из связи типа (1) получить связь типа (3) и обратно.

Введем новые переменные y_i , равные аргументу функции в правой части (1)

$$y_i(t) = x_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [x_j(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \dots, P. \quad (\text{П.1})$$

Тогда исходное выражение (1) можно переписать в виде

$$x_i(t+1) = f(y_i(t)), \quad i = 1, \dots, P. \quad (\text{П.2})$$

Чтобы получить уравнения эволюции для новых переменных, заменим t на $(t+1)$ в уравнении (П.1) и используем замену (П.2)

$$\begin{aligned} y_i(t+1) &= x_i(t+1) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [x_j(t+1) - x_i(t+1)] = \\ &= f(y_i(t)) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [f(y_j(t)) - f(y_i(t))], \quad i = 1, \dots, P, \end{aligned}$$

то есть приходим к связи типа (3).

Обратный переход осуществляется следующим образом. Пусть имеются уравнения связи отображений ансамбля типа (3)

$$y_i(t+1) = f(y_i(t)) + \sum_{j=1}^P \alpha_{ij} [f(y_j(t)) - f(y_i(t))]$$

или в векторной форме

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{y}(t)),$$

где A – матрица связей и одновременно матрица преобразования переменных, $A_{ij}=\alpha_{ij}$ для $i \neq j$ и $A_{ii}=1-\sum_j \alpha_{ij}$. Введем замену $y=Ax$ (иначе, $x=A^{-1}y$), тогда

$$y(t+1) = Ax(t+1) = AF(y(t)),$$

следовательно, получаем связь типа (1)

$$x(t+1) = F(y(t)) = F(Ax(t)).$$

Преобразование уравнений (1) в (3) является однозначным. Обратное преобразование, а значит, и эквивалентность типов связи (1) и (3) имеет место при условии существования A^{-1} , то есть при $\det(A) \neq 0$. В этом случае из равенства друг другу всех x_i (синхронный режим) следует и равенство всех y_i , и наоборот.

Если условие $\det(A) \neq 0$ не выполнено, то есть ранг R матрицы A меньше P , то из равенства друг другу всех y_i напрямую следует равенство друг другу только R переменных x_i . Пусть для определенности это переменные с индексами $i=1, \dots, R$. Так как матрица A недоопределена, уравнения системы (1) не являются независимыми, то есть правые части уравнений для x_j , $j=R+1, \dots, P$ совпадают. Соответственно, должны совпадать и значения переменных x_j , $j=R+1, \dots, P$. Таким образом, из равенства y_i следует равенство x_i даже при $\det(A)=0$, то есть хотя преобразование (3) в (1) может быть неоднозначным, условия устойчивости эквивалентны.

Библиографический список

1. Theory and applications of coupled map lattices / Ed. K. Kaneko. New York: Wiley, 1993.
2. Langton C. Studying artificial life with cellular automata // Physica D. 1986. Vol. 22. P. 120.
3. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38, № 1. P. 364.
4. Gell-Mann M. What is complexity? // Complexity. 1995. Vol. 1, № 1. P. 16.
5. Gutowitz H. Cellular automata and the sciences of complexity // Complexity. 1995/1996. Vol. 1, № 5. P. 16.
6. Sinha S. Implications of varying communication speeds in «globally» coupled maps // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57, № 4. P. 4041.
7. Alexander J.C., Yorke J.A., You Z. Riddled basins // Int. J. Bifurc. Chaos. 1992. Vol. 2. P. 795.
8. Maistrenko Yu., Kapitaniak T. Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3285.
9. Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L. Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. P. 3528.
10. Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L. Desynchronization by periodic orbits // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 2. P. R1253.
11. Kuzmin L.V., Panas A.I. Synchronization stability of drive-response systems with dynamical chaos // Proc. 5th Int. Spec. Workshop Nonlinear Dynamics Electronic Systems. 26–27 June, 1997. Moscow, Russia. 1997. P. 485.
12. Dmitriev A.S., Shirokov M.E., Starkov S.O. Chaotic synchronization in ensembles of coupled maps // IEEE Trans. on Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications. 1997. Vol. 44, № 10. P. 918.
13. Hasler M., Maistrenko Yu.L. An introduction to the synchronization of chaotic systems: Coupled skew tent maps // IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications. 1997. Vol. 44, № 10. P. 856.
14. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Синхронизация ансамблей диссипативно связанных отображений // Препринт ИРЭ РАН. М., 1994. 38 с.
15. Dmitriev A.S., Shirokov M.E., Starkov S.O. Chaotic synchronization of en-

sembles of locally and globally coupled discrete-time dynamical systems. Rigorous results and computer simulation // Proc. 3rd Int. Spec. Workshop Nonlinear Dynamics Electronic Systems. 28–29 July, 1995. Dublin, Ireland. University College Dublin. 1995. P. 287.

16. *Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е.* Синхронизация ансамблей связанных отображений // Изв. вузов. ПНД. 1996. Т. 4, №№. 4–5. С. 40.

17. *Chua L.O., Yang L.* Cellular neural networks: Theory // IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications. 1988. Vol. 35, № 10. P. 1257.

18. *Kaneko K.* Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // Physica D. 1989. Vol. 37. P.60.

19. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, № 2. P. 980.

20. *Kocarev L., Parlitz U.* Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 11. P. 1816.

21. *Stark J.* Invariant graphs for forced systems // Physica D. 1997. Vol. 109. P. 163.

22. *Hunt B.R., Ott E., Yorke A.* Differentiable generalized synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 55, №. 4. P. 4029.

*Институт радиотехники и
электроники РАН, Москва*

Поступила в редакцию 08.12.98

GLOBAL SYNCHRONIZATION IN LATTICES OF CHAOTIC MAPS WITH LIMITED NUMBER OF CONNECTIONS

Yu.V. Andreyev

Stability of the global synchronous mode of chaotic map lattices is investigated by means of direct calculation of the stability conditions, and by means of numerical simulation. The lattices with local connections are shown to have a limit value of the Lyapunov exponent of the lattice maps, above which the global synchronous mode loses stability. The synchronous mode in large lattices is found impossible due to the local nature, i.e., «short range» of the connections. We propose some approaches to modification of the dynamic system structure that can provide stability of the synchronous mode, such as tuning the dynamic mode of the lattice maps, extension of the local neighborhood, use of nonlocal static and dynamic connections, and introduction of an external control node (a pacemaker). In the model with the pacemaker, a spatial synchronous lattice mode is revealed, different from the pacemaker mode («generalized» synchronization).



Андреев Юрий Вениаминович – родился в Уфе (1960), окончил Московский физико-технический институт (1983). После окончания МФТИ работает в Институте радиотехники и электроники РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИРЭ РАН (1993) в области обработки информации методами нелинейной динамики. Опубликовал свыше 20 научных статей по этому направлению. E-mail: chaos@mail.cplire.ru



АВТОМОДУЛЯЦИОННЫЙ РЕЖИМ ЛИНЕЙНОГО ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННОГО УСИЛИТЕЛЯ СВЧ-КОЛЕБАНИЙ, ВЫЗВАННЫЙ ВОЗБУЖДЕНИЕМ ИОННО-ЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ

К.Ю. Блюх, Ю.П. Блюх, М.Г. Любарский, В.О. Подобинский

Построена теория линейного ЛБВ-усилителя с плазмонаполненной замедляющей структурой, в которой учтено возбуждение ионно-звуковых волн давлением усиливаемых СВЧ-колебаний. Распространяющиеся против электронного пучка ионно-звуковые волны организуют внутреннюю распределенную обратную связь, превращающую СВЧ-усилитель в генератор низкочастотных колебаний, модулирующих амплитуду выходного СВЧ-сигнала. В зависимости от тока пучка низкочастотная модуляция может быть как регулярной, так и стохастической.

Введение

Генерация и усиление СВЧ-колебаний является одним из основных направлений плазменной электроники. Электродинамические свойства плазмы позволяют существенно увеличить эффективность трансформации энергии электронного пучка в энергию электромагнитного излучения. Многолетние теоретические исследования (см. [1] и цитированную там литературу) привели к созданию ряда экспериментальных макетов СВЧ-устройств, использующих как релятивистские [2-4], так и нерелятивистские [5,6] электронные пучки. В ходе их исследований была подтверждена правильность основных теоретических посылок. Однако ряд данных указывает, что некоторые из существенных эффектов не учтены в теоретических моделях. К таким фактам следует отнести резкое падение мощности СВЧ-излучения при превышении некоторого значения плотности плазмы [7], аномально широкий и однородный спектр излучения генератора, работающего в режиме стохастической автомодуляции [7,8]. Как в первом, так и во втором случаях наблюдаются интенсивные низкочастотные колебания плазмы, что позволяет предположить наличие тесной взаимосвязи между этими явлениями. Возможный механизм возникновения такой связи, предложенный в работе [9], заключается в следующем.

Плазмонаполненная электродинамическая структура, в отличие от вакуумной, меняет свои параметры под воздействием распространяющегося в ней СВЧ-излучения. Причиной изменения может быть сила высокочастотного давления возбужденных пучком волн, выталкивающая плазму из области с повышенным значением поля СВЧ-волны. В частично ионизованной плазме СВЧ-разряд в полях возбужденных волн приводит к дополнительной ионизации нейтрального компонента и, тем самым, к изменению параметров плазмы. В устройствах с продольно неоднородным распределением поля возбуждаемой

пучком волны (ЛБВ, ЛОВ) указанные механизмы приводят к появлению неоднородности параметров плазмы, которые, определяя дисперсионные характеристики собственных волн структуры, приводят к частичному или полному нарушению условий синхронизма пучка с волной. Изменение условий синхронизма приводит к изменению пространственного распределения поля волны вдоль системы, меняя тем самым и источник возникновения неоднородности плазмы. Таким образом, поведение плазмы и возбуждение пучком СВЧ-волн в плазмонеполненной волноведущей структуре являются связанными, самосогласованными процессами.

Степень взаимного влияния возбуждаемых СВЧ-полей и распределения плотности плазмы в системе зависит от уровня СВЧ-мощности. Если мощность возбужденного излучения невелика, то наличием такой связи можно пренебречь. В устройствах, которые рассчитаны на получение большой мощности СВЧ-излучения, искажение профиля плотности плазмы может привести к существенному уменьшению эффективности взаимодействия.

Другим проявлением указанной взаимосвязи параметров плазмы и условий возбуждения волн пучком является возникновение низкочастотной автомодуляции выходного СВЧ-сигнала. Действительно, возмущения параметров плазмы распространяются от места своего возникновения – области с повышенным значением амплитуды СВЧ-волны – в виде собственных медленных (ионно-звуковых, магнито-звуковых и др.) волн. Такие возмущения сказываются на величине амплитуды возбуждаемой СВЧ-волны в течение длительного времени, пока они не покинут область взаимодействия, осуществляя таким образом *распределенную запаздывающую обратную связь*, превращающую даже линейный усилитель СВЧ-колебаний в *генератор* низкочастотных колебаний.

В предлагаемой работе определены условия возбуждения таких низкочастотных автоколебаний в линейной нерелятивистской ЛБВ, замедляющая структура которой частично заполнена плазмой. Показано, что условием возникновения низкочастотных колебаний является превышение некоторого порогового значения тока пучка, определяемого характеристиками замедляющей структуры. Низкочастотная автомодуляция является регулярной вблизи порога неустойчивости и сменяется стохастической по мере роста тока пучка.

1. Исходные уравнения

Рассмотрим нерелятивистский линейный ЛБВ-усилитель, замедляющая структура которого частично заполнена плазмой. В такой структуре возмущения δn плотности плазмы приводят к изменению δv_{ph} фазовой скорости усиливаемой волны:

$$\delta v_{ph} = \partial v_{ph} / \partial n_0 \delta n(t, z). \quad (1.1)$$

Линейные уравнения, описывающие усиление электронным пучком собственной волны замедляющей структуры с неоднородным продольным профилем плазмы $n_p(t, z) = n_0 + \delta n(t, z)$, имеют вид

$$\partial \epsilon / \partial \zeta + i \lambda (\eta - \nu) \epsilon = i \lambda \Psi, \quad (1.2)$$

$$\partial^2 \Psi / \partial \zeta^2 = 1/2 \lambda^2 \epsilon.$$

Здесь $\epsilon = e \omega_0 E_0 / (m v_b^3 k_0^2)$ – безразмерная амплитуда усиливаемой волны, v_b – скорость частиц пучка, k_0 и $\omega_0 = k_0 v_b$ – волновой вектор и частота синхронной волны в системе с однородной плотностью плазмы n_0 ; $\lambda = k_0 L$; $\zeta = z/L$, L – длина замедляющей структуры; $\nu = (\omega - \omega_0)(v_b - v_g) / (\omega_0 v_g)$ – безразмерная отстройка частоты ω усиливаемой волны от частоты ω_0 точного резонанса, v_g – групповая

скорость волны. Величина $I=(\delta k/k_0)^3$ пропорциональна току пучка, δk пространственный инкремент неустойчивости; $\psi=1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi_0\exp(-i\varphi_0)\delta\varphi$ – среднее значение фаз частиц пучка в волне, где $\delta\varphi$ – отклонение фазы частицы в волне от ее значения φ_0 в плоскости инжекции $\zeta=0$; $\eta=1/2(\delta n/n_0)(\omega_p/v_{ph})\partial v_{ph}/\partial\omega_p$ – безразмерное возмущение плотности плазмы, ω_p – плазменная частота.

Система (1.2) отличается от обычно используемой (см., например, [10,11]) только иным выбором безразмерных переменных, который представляется нам более удобным для решаемой ниже задачи.

Предположим, что возмущения плотности плазмы малы ($\delta n/n_0 \ll 1$) и вызываются силами высокочастотного давления $F \sim -\partial|e|^2/\partial\zeta$ возбуждаемой пучком волны. В замагниченной плазме такие возмущения распространяются в виде ионно-звуковых волн, уравнения возбуждения которых в длинноволновом приближении имеют вид

$$\partial\eta/\partial\tau + \partial u/\partial\zeta = 0, \quad (1.3)$$

$$\partial u/\partial\tau + \partial\eta/\partial\zeta = F,$$

$$F(\tau, \zeta) = -C\partial|e|^2/\partial\zeta, \quad (1.4)$$

где $C=(v_e^2/v_T^2)(\omega_p/v_{ph})\partial v_{ph}/\partial\omega_p$, $v_T=(T_e/m)^{1/2}$ – тепловая скорость электронов плазмы; $\tau=c_s t/L$, $c_s=(T_e/M)^{1/2}$ – скорость ионного звука, M – масса ионов плазмы; $u=1/2(v/c_s)(\omega_p/v_{ph})\partial v_{ph}/\partial\omega_p$, v – скорость движения плазмы в ионно-звуковой волне.

Уравнения (1.3) дополним линейными граничными условиями общего вида на левой ($\zeta=0$) и правой ($\zeta=1$) границах замедляющей структуры

$$(1+\gamma)\eta(0, \tau) + (1-\gamma)u(0, \tau) = 0, \quad (1.5)$$

$$(1+\gamma)\eta(1, \tau) + (1-\gamma)u(1, \tau) = 0,$$

где γ – коэффициент отражения ионно-звуковой волны от границы, который мы предполагаем одинаковым для обеих границ, $-1 < \gamma < 1$.

Уравнения (1.2)–(1.5) образуют замкнутую систему, исследование решений которой проведено ниже.

2. Критерий возникновения автомодуляционного режима

В этом разделе будет получено критическое значение величины $\delta k/k$ (тока пучка), при котором стационарное распределение амплитуды ВЧ-поля и плотности плазмы становится неустойчивым. Прежде всего убедимся, что при малых токах пучка возможны стационарные решения системы (1.2) – (1.5). Действительно, при $\delta k/k \rightarrow 0$ амплитуда поля и сила ВЧ-давления (1.4) стремится к нулю, а вызываемые ею малые изменения плотности имеют порядок $\delta k/k$ и, в свою очередь влияют только на фазу ВЧ-поля (влияние на амплитуду определяется реальной частью инкремента, которая квадратична по отклонению плотности). Таким образом, при малых токах пучка не возникает обратной связи для амплитуды ВЧ-поля, которая могла бы привести к росту возмущений и неустойчивости стационарного распределения. Однако, как будет показано ниже, начиная с некоторого критического значения тока пучка, обратная связь оказывается достаточно сильной, чтобы вызвать экспоненциальный рост возмущений стационарного распределения и установление нового режима автомодуляционных колебаний.

Укажем основную математическую идею, которая будет использована в этом разделе. Одновременное решение полной системы уравнений (1.2) – (1.5) для ВЧ-поля и ионно-звуковых волн плотности представляет собой трудную задачу. Поэтому вначале мы рассмотрим отдельно систему уравнений для ионно-звуковых волн с произвольной заданной внешней силой $F(\tau, \zeta)$ и отдельно систему уравнений пучковой неустойчивости для ВЧ-поля при произвольно заданном профиле плотности плазмы $\eta(\tau, \zeta)$. Решение первой системы позволит получить функциональную зависимость профиля плотности плазмы от амплитуды ВЧ-поля, решение второй – функциональную зависимость амплитуды поля от профиля плотности плазмы. Подставляя функционал плотности в функционал ВЧ-поля, мы получим функциональное отображение только для амплитуды поля, которое можно будет исследовать на устойчивость и определить условия возникновения автомодуляционного режима.

Ниже будут использованы следующие предположения:

- длина системы достаточно большая, $\delta kL \gg 1$, что означает большой коэффициент усиления сигнала;
- на вход системы подается широкополосный сигнал.

Наибольшие изменения плотности плазмы вызывает та волна, коэффициент усиления которой максимален. Нетрудно показать, что в линейном ЛБВ-усилителе таким является сигнал с частотой $\nu(\tau) = \int_0^1 \eta(\theta, \tau) d\theta$.

Пусть коэффициент отражения ионно-звуковой волны γ равен нулю. Это условие не является принципиальным, но позволяет значительно упростить формулы. Решая систему (1.3), (1.5) методом Фурье, получим

$$\eta(\tau, \zeta) = 1/2 \left[\int_0^{\zeta} F(\tau + \xi - \zeta, \xi) d\xi - \int_{\zeta}^1 F(\tau - \xi + \zeta, \xi) d\xi \right]. \quad (2.1)$$

Благодаря отсутствию отражений плотность зависит только от значений силы на двух приходящих в текущую точку характеристиках, то есть от значений силы в интервале времени $[\tau-1, \tau]$, и не зависит от всей предыстории процесса. Подставив выражение для силы (1.4) в (2.1), получим

$$\begin{aligned} \eta(\tau, \zeta) = & C/2 [|\varepsilon(\tau - \zeta, 0)|^2 + |\varepsilon(\tau + \zeta - 1, 1)|^2 - 2|\varepsilon(\tau, \zeta)|^2] + \\ & + C/2 [\partial/\partial\tau \int_0^{\zeta} |\varepsilon(\tau + \xi - \zeta, \xi)|^2 d\xi + \partial/\partial\tau \int_{\zeta}^1 |\varepsilon(\tau - \xi + \zeta, \xi)|^2 d\xi]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это и есть искомая функциональная зависимость плотности плазмы от амплитуды ВЧ-поля.

Аналитические решения уравнений (1.2) для ВЧ-поля при произвольном профиле плотности плазмы отсутствуют. Для получения приближенных решений воспользуемся ВКБ-приближением или приближением адиабатичности пространственных изменений плотности плазмы (необходимые для этого условия будут рассмотрены ниже). Опуская несущественную предэкспоненциальную зависимость поля от плотности и аппроксимируя зависимость инкремента неустойчивости от расстройки $\eta - \nu$ параболой вблизи резонанса $\eta - \nu = 0$, амплитуду ВЧ-поля можно записать в виде

$$|\varepsilon(\tau, \zeta)|^2 = |\varepsilon_0|^2 \exp \left\{ \beta \zeta - \alpha \int_0^{\zeta} [\eta(\tau, \xi) - \nu(\tau)]^2 d\xi \right\}, \quad (2.3)$$

где β – удвоенная реальная часть инкремента в однородной плазме:

$$\beta = (3^{1/2}/2^{1/3}) \lambda (\delta k/k), \quad (2.4)$$

$$\alpha = (2^{1/3}/3 \cdot 3^{1/2})\lambda(\delta k/k)^{-1}. \quad (2.5)$$

Сделанное выше предположение о большом коэффициенте усиления означает, что параметр $\beta \gg 1$.

Использование приближения адиабатичности прежде всего предполагает малость характерного обратного масштаба изменения параметра (в данном случае $\eta(\tau, \zeta)$) по сравнению с обратным масштабом изменения искомого решения (то есть $|\varepsilon(\tau, \zeta)|$). Из (2.3) видно, что характерным обратным масштабом изменения ВЧ-поля является инкремент β , а формула (2.2) показывает, что обратный масштаб изменения плотности $\eta(\tau, \zeta)$ имеет в стационаре такой же порядок. Таким образом, параметры находятся на границе применимости адиабатического приближения и решение (2.3) может быть неточным, но должно правильно отслеживать качественное поведение решения и совпадать по порядку величины с точным решением.

Кроме того, второй член в показателе экспоненты (2.3) был вычислен как поправка к первому, то есть должен быть много меньше его. В противном случае зависимость показателя экспоненты (2.3) от $\eta - \nu$ перестает быть квадратичной. Таким образом с учетом (2.4), (2.5) получаем условие

$$(\alpha/\beta)(1/\zeta) \int_0^\zeta [\eta(\tau, \xi) - \nu(\tau)]^2 d\xi \ll 1. \quad (2.6)$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что для стационарного решения значение интеграла $1/\zeta \int_0^\zeta [\eta(\tau, \xi) - \nu(\tau)]^2 d\xi$ не может по порядку величины превышать $C^2 |\varepsilon_0|^4 \exp(2\beta)/(2\beta)$, и условие (2.6) сводится к следующему:

$$\alpha C^2 |\varepsilon_0|^4 \exp(2\beta)/(8\beta^2) \ll 1. \quad (2.7)$$

Чтобы получить отображение для амплитуды ВЧ-поля, нужно подставить функционал (2.2) в (2.3). Перед этим сделаем некоторые упрощения. Предположим, что вблизи критического значения тока временные градиенты амплитуды ВЧ-поля много меньше пространственных

$$\partial/\partial\tau |\varepsilon(\tau, \zeta)| \ll \partial/\partial\zeta |\varepsilon(\tau, \zeta)|. \quad (2.8)$$

Это приближение очевидно верно для стационарного решения и, как будет показано, остается верным при возникновении слабой автомодуляции. Распределение поля по длине системы (2.3) является экспоненциальным с характерным показателем много большим единицы. Поэтому можно считать всю силу ВЧ-давления сосредоточенной в узкой области вблизи правой границы и пренебречь в (2.2) значением поля на левой границе. Таким образом, с учетом (2.8) функциональная зависимость плотности от амплитуды поля может быть приближенно записана как

$$\eta(\tau, \zeta) = (C/2)[|\varepsilon(\tau + \zeta - 1, 1)|^2 - 2|\varepsilon(\tau, \zeta)|^2]. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.3) и вводя обозначения

$$y(\tau, \zeta) \equiv |\varepsilon(\tau, \zeta)|^2, \quad y(\tau, 0) \equiv y_0 = |\varepsilon_0|^2, \quad (2.10)$$

получим искомое отображение

$$y(\tau, 1) = y_0 \exp\{\beta - \alpha(C^2/4) \int_0^1 [y(\tau + \xi - 1, 1) - 2y(\tau, \xi) - \int_0^1 (y(\tau + \xi' - 1, 1) - 2y(\tau, \xi')) d\xi']^2 d\xi\}. \quad (2.11)$$

Здесь мы положили $\zeta=1$, так как будем рассматривать временную эволюцию амплитуды поля на правой границе.

Пусть известно стационарное, близкое к экспоненциальному, распределение амплитуды поля

$$y^{(0)}(\zeta) \approx y_0 \exp(\beta\zeta). \quad (2.12)$$

Исследуем его на устойчивость относительно малого произвольного возмущения. Для этого положим

$$y(\tau, \zeta) = y^{(0)}(\zeta) + \delta y(\tau, \zeta). \quad (2.13)$$

Подставив (2.13) в (2.11) и сохранив только линейные по $\delta y(t, x)$ члены, получим

$$\delta y(\tau, 1) = \alpha C^2 y^{(0)}(1) \int_0^1 \delta y(\tau + \xi - 1, 1) [y^{(0)}(\zeta) - \int_0^1 y^{(0)}(\xi') d\xi'] d\xi. \quad (2.14)$$

При получении (2.14) также был использован экспоненциальный характер стационарного распределения (2.12), что позволило внести значительные упрощения в используемом приближении $\beta \gg 1$. В силу линейности отображения (2.14) будем искать решение в виде

$$\delta y(\tau, 1) \sim \exp(i\omega\tau). \quad (2.15)$$

Здесь ω , вообще говоря, комплексная величина. Положительная мнимая часть ω соответствует устойчивости, а отрицательная – неустойчивости стационарного состояния. Пограничный случай, когда ω – чисто действительная величина, отвечает искомому критическому значению параметров, при котором осуществляется переход от стационарных состояний к автомодуляции. Рассматривая мнимую и реальную части (2.14) при действительной ω с подстановкой (2.12), (2.15) получим

$$1 - \cos \omega = \omega^2 \beta / (\omega^2 + \beta^2), \quad (2.16)$$

$$1 = \alpha C^2 y_0^2 \exp(2\beta) (\omega - \sin \omega) / (\omega \beta).$$

Здесь, как и ранее, использовано приближение $\beta \gg 1$. Первое равенство (2.16) позволяет определить частоту возникающей автомодуляции, а второе – критические значения параметров. Первое уравнение (2.16) имеет два корня: $\omega=0$ и

$$\omega = \omega_c \in (\pi, 2\pi). \quad (2.17)$$

Нулевое значение частоты нужно отбросить, так как в этом случае заведомо не выполняется второе равенство (2.16). Из второго уравнения (2.16), пренебрегая множителями порядка единицы, с учетом (2.4), (2.5) получим

$$\delta k/k \approx (1/\lambda) \ln[1/(C|\varepsilon_0|^2)] + (1/\lambda) \ln(\delta k/k).$$

Поскольку λ – большой параметр (длина системы, измеренная в длинах ВЧ-волн), здесь можно отбросить второе слагаемое и записать критическое значение инкремента (тока) в виде

$$(\delta k/k)_c \approx (1/\lambda) \ln[1/(C|\varepsilon_0|^2)]. \quad (2.18)$$

Проверим выполнимость условий (2.7) и (2.8) в режиме автомодуляции. После подстановки второго уравнения (2.16) условие (2.7) принимает вид $1/(8\beta) \ll 1$ и, очевидно, выполняется. Подставив (2.12), (2.15) и (2.17) в условие (2.8), несложно убедиться, что оно выполняется, если частота автомодуляции ω много меньше инкремента β .

Численным решением полной системы исходных уравнений (1.2)–(1.5) была проверена справедливость всех сделанных предположений и точность полученных результатов. Так, например, пространственный профиль амплитуды ВЧ-поля действительно близок к экспоненциальному (2.12). Частота возникающей автомодуляции при различных параметрах задачи всегда лежит в интервале $(\pi, 2\pi)$ в соответствии с (2.17). И, наконец, зависимость критического значения тока от различных параметров задачи с хорошей точностью соответствует (2.18).

На рис. 1 показаны логарифмические зависимости $\lambda(\delta k/k)_c$ от $1/(C|\epsilon_0|^2)$, полученные при численном решении точных уравнений (точки) и следующие из формулы (2.18) (сплошная линия).

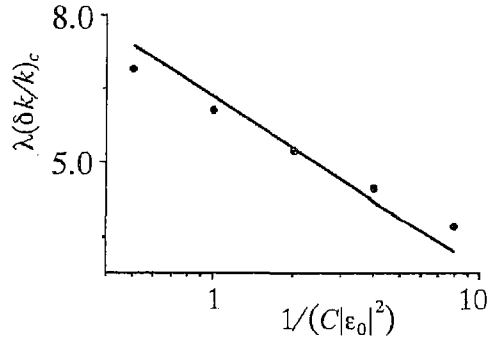


Рис. 1. Зависимости критического значения параметра $\lambda(\delta k/k)_c$ от $1/(C|\epsilon_0|^2)$

3. Численное моделирование

В предыдущем разделе было показано, что в линейном плазменно-пучковом усилителе стационарное пространственное распределение амплитуды ВЧ-поля и плотности плазмы становится неустойчивым при превышении критического значения тока пучка (2.18). В результате возникает слабая автомодуляция сигнала на частоте (2.17). Здесь мы рассмотрим как будет изменяться режим усилителя при дальнейшем увеличении тока пучка. Ввиду сложности системы, получить полную картину эволюции режимов усилителя удалось только с помощью численного решения исходных и упрощенных уравнений.

Рассмотрим основные возможности упрощения численного моделирования исходной системы (1.2)–(1.5). Поскольку известны точные решения (2.1), (2.2) уравнений в частных производных (1.3)–(1.5), исходную систему можно упростить, оставив обыкновенные дифференциальные уравнения плазменно-пучковой неустойчивости (1.2) с подстановкой плотности плазмы из (2.1) или (2.2). Это существенно упрощает и ускоряет численное решение исходных уравнений без потерь точности. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2) необходимо знать двумерный массив значений амплитуды ВЧ-поля на пространственном отрезке $\zeta \in [0, 1]$ и в интервале времени $[\tau - 1, \tau]$ (τ — текущее значение времени). Этот массив используется для определения текущего профиля плотности плазмы. Таким образом, нужно держать в памяти массив значений $|\epsilon(\tau, \zeta)|^2$ на единичной площади в плоскости (τ, ζ) . Этот метод можно упростить, воспользовавшись экспоненциальным характером пространственного распределения амплитуды поля. Амплитуду поля в (2.1) можно считать отличной от нуля лишь в узкой области порядка β^{-1} вблизи правой границы системы. Это позволяет сохранять в памяти двумерный массив значений $|\epsilon(\tau, \zeta)|^2$ при $\zeta \in [1 - \beta, 1]$, то есть только на площади $\beta^{-1} \ll 1$ в плоскости (τ, ζ) .

Можно еще существенно упростить численное решение задачи, если воспользоваться приближением (2.8). В этом случае плотность можно выразить через текущее значение амплитуды поля и значение поля на правой границе (см. (2.9)). Для численного моделирования необходимо держать в памяти одномерный массив значений $|\epsilon(\tau, \zeta)|^2$ на правой границе. Получаемые таким методом решения с хорошей точностью описывают все стадии перехода к стохастическому режиму. Однако затем становится неверным используемое приближение (2.8), поскольку в спектре стохастических решений появляются высшие гармоники.

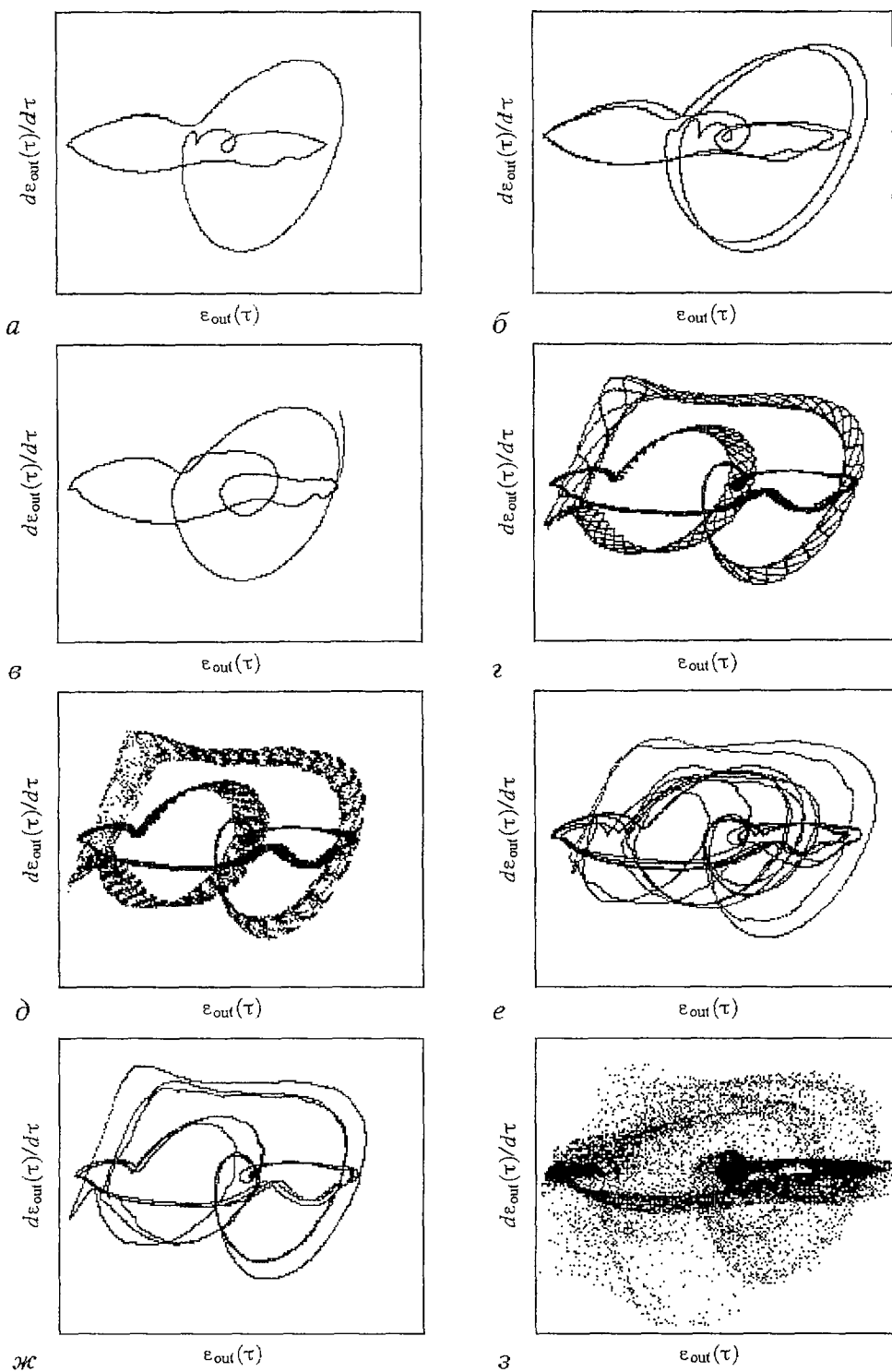


Рис. 2. Динамика изменений движения системы на плоскости $(\epsilon_{out}, d\epsilon_{out}/d\tau)$. Рисунки расположены в порядке возрастания параметра I (см. пояснения в тексте)

Численные решения, полученные указанными выше способами, показывают, что при увеличении тока пучка выше критического значения (2.18) решение (например, временная зависимость выходной амплитуды поля $\epsilon_{\text{out}}(\tau) \equiv |\epsilon(\tau, 1)|^2$) претерпевает сложные изменения. Чтобы наглядно проследить качественную эволюцию режимов, на рис. 2, а–з представлены траектории изображающей точки системы в плоскости $(\epsilon_{\text{out}}, d\epsilon_{\text{out}}/d\tau)$ при различных значениях параметра $I = (\delta k/k)^3$, пропорционального току пучка. При превышении критического значения параметра I возникает периодическая автомодуляция, приобретающая все более сложную форму по мере увеличения I (рис. 2, а). Затем происходит бифуркация удвоения периода (рис. 2, б, $I=0.03265$) и обратная бифуркация (рис. 2, в, $I=0.03370$). При значении параметра $I=0.03402$ движение системы представляет собой 6–цикл (рис. 2, г), разрушающийся при $I=0.03404$. Здесь следует отметить, что движение системы зависит, вообще говоря, от начальных условий. Пример другого конечного состояния, возникающего при одних и тех же значениях параметров, демонстрирует рис. 2, е (5–цикл). Параметр I имеет то же значение, что и на рис. 2, д. При дальнейшем увеличении параметра I наблюдается возникновение 3–цикла (рис. 2, ж, $I=0.03405$) и, наконец, хаотическое движение (рис. 2, з, $I=0.0361$).

Приведенные примеры демонстрируют разнообразие возможных состояний системы. Мы не исследовали детально тонкую структуру изменений вида движений при увеличении параметра I , поскольку рассматриваемая математическая модель СВЧ–усилителя является приближенной и ее небольшие модификации могут сильно изменить эту структуру. Однако такие грубые свойства, как возникновение регулярной и стохастической автомодуляции сохраняются при небольших изменениях исходной системы.

Заключение

Самосогласованная динамика плазмы и СВЧ–полей, возбуждаемых пучком в плазменнонаполненных замедляющих структурах, может играть определяющую роль в формировании энергетических и спектральных характеристик устройств СВЧ–электроники. Даже рассмотренный в работе простейший случай линейного усилителя показывает, что вызываемое высокочастотным давлением движение плазмы приводит к возникновению стохастических колебаний плотности плазмы в замедляющей структуре. Нестационарность плазмы, означающая нестационарность дисперсионных свойств структуры, приводит к искажению спектра усиливаемого сигнала. Спектр низкочастотных колебаний плотности определяет форму спектральной линии усилителя. Энергетические характеристики усиливаемого сигнала также связаны с динамикой плазмы в структуре, эта связь увеличивается по мере роста мощности СВЧ–сигнала.

Работа выполнена при поддержке Украинского научно–технического центра, проекты № 256, № 277.

Библиографический список

1. Файнберг Я.Б. Плазменная электроника и плазменные методы ускорения заряженных частиц // Физика плазмы. 1994. Т. 20, №7–8. С. 613.
2. Шкварунец А.Г., Рухадзе А.А., Стрелков Р.С. Широкополосный релятивистский плазменный СВЧ–генератор // Физика плазмы. 1994. Т. 20, №7–8. С. 682.
3. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Магда И.И. и др. Коллективные процессы при прохождении сильноточных релятивистских пучков через газ и плазму // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16, №7. С. 368.
4. Carmel Y., Lon W.R., Antonsen T.M. // Phys. Fluids. B.1992.Vol. 4. P. 2286.

5. Антонов А.Н., Блюх Ю.П., Дегтярь Ю.А. и др. Пучково-плазменный генератор, основанный на взаимодействии электронного пучка с плазменно-волноводной структурой, ограниченной цепочкой индуктивно связанных резонаторов // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 9. С. 777.

6. Zavjalov M.A., Mitin L.A., Perevodchikov V.I. // IEEE Trans. Pl. Sci. 1994. Vol. 22. P. 600.

7. Блюх Ю.П., Корнилов Е.А., Митин Л.А., Файнберг Я.Б. Экспериментальные исследования возбуждения мощных СВЧ-колебаний электронным пучком в гибридной замедляющей структуре с плазменным заполнением // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 9. С. 767.

8. Mitin L.A., Perevodchikov V.I., Shapiro A.L. Beam-plasma generators of stochastic microwave oscillations used for plasma heating in fusion and plasma-chemistry devices and ionospheric investigations // Proc. SPIE. Vol. 2843. Intense Microwave Pulses IV, 1996. P. 208.

9. Bliokh Yu.P., Fainberg Ya.B., Lyubarsky M.G., Podobinsky V.O. Self-consistent plasma motion as a possible mechanism of the power limitation and the pulse shortening in the plasma-filled TWT devices // Proc. SPIE. Vol. 3158. Intense Microwave Pulses V, 1997. P. 182.

10. Онищенко И.Н., Линецкий А.Р., Мацборко Н.Г. и др. К нелинейной теории возбуждения монохроматической волны электронным пучком // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 407.

11. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Ковалев Н.Ф. и др. Общие свойства коротковолновых приборов с длительной инерционной группировкой электронов // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, ИПФ АН СССР, 1979. С. 249.

Радиоастрономический институт
НАН Украины

Институт плазменной электроники
и новых методов ускорения НИЦ «ХФТИ»
Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 6.10.98
после переработки 29.12.98

AUTOMODULATION REGIME OF LINEAR BEAM-PLASMA MICROWAVE AMPLIFIER CAUSED BY EXCITATION OF ION-SOUND WAVES IN PLASMA

K.Yu. Bliokh, Yu.P. Bliokh, M.G. Lyubarsky, V.O. Podobinsky

A theory of the plasma-filled travelling-wave tube (TWT) linear amplifiers is developed in which the effect of ion-sound waves excited in plasma by the ponderomotive force of operating wave is taken into account. Ion-sound waves propagated against the beam form the distributed internal feedback which turns microwave amplifier into low frequency oscillator. Excited low frequency plasma variations lead to output microwave amplitude modulations. In dependence on the beam current this automodulation could be regular or stochastic.



Блюх Константин Юрьевич – 1976 года рождения, аспирант Радиоастрономического института НАН Украины. Окончил физический факультет Харьковского государственного университета (1998). Имеет 7 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



Блюх Юрий Павлович – 1946 года рождения. Окончил физико-технический факультет Харьковского государственного университета (1970). Начальник лаборатории Института плазменной электроники и новых методов ускорения Национального научного центра «ХФТИ». Область научных интересов – взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой, хаос в пучково-плазменных системах. Имеет более 90 публикаций в отечественных и зарубежных журналах. E-mail: bliokh@kipt.kharkov.ua



Любарский Михаил Григорьевич – 1947 года рождения. Окончил механико-математический факультет Харьковского государственного университета (1970), профессором которого является в настоящее время. Область научных интересов – теория дифференциальных уравнений и ее приложения к задачам СВЧ электроники. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



Подобинский Виталий Олегович – 1955 года рождения. Окончил физико-технический факультет Харьковского государственного университета (1981). Старший научный сотрудник Института плазменной электроники и новых методов ускорения Национального научного центра «ХФТИ». Область научных интересов – плазменная электроника, взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. Имеет около 40 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



ХАОТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ В ПРОТОЧНОМ ЛАЗЕРЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ НАКАЧКОЙ

А. Ю. Лоскутов, А. В. Мушенков, А. И. Одинцов, А. И. Федосеев

Численно исследуется динамика генерации быстропоточных лазеров с пространственно неоднородной стационарной накачкой внутри неустойчивого резонатора. Подробно изучены характеристики хаотической генерации и сценарий ее развития при изменении управляющего параметра системы. Расчеты включали построение проекций аттракторов, отображений Пуанкаре, определение корреляционной размерности и размерности вложения аттрактора. Найдено, что хаотическая генерация возникает путем разрушения квазипериодической динамики с двумя несонизмеримыми частотами. Посредством вычисления размерности аттрактора описаны перестройки хаотических режимов.

1. Введение

Лазер как нелинейная распределенная система является удобным средством для исследования нелинейных светодинамических явлений, таких как оптическая неустойчивость, автопulsации излучения, возникновение хаоса и др. [1–3]. Практический интерес к этим явлениям связан с возможностью создания на их основе новых эффективных методов управления временными характеристиками лазерного излучения [4], что в перспективе позволило бы разработать типы технологических лазеров с быстрым переключением режимов работы. В то же время хаотические режимы генерации могут найти применение в системах передачи информации [5].

Движение среды через оптический резонатор лазера приводит к специфическим механизмам неустойчивости, обусловленным нелокальным характером взаимодействия поля со средой и возникновением инерционной обратной связи между различными пространственными зонами системы. При этом сильное влияние на динамику генерации оказывают пространственные градиенты параметров системы в направлении потока.

Хаотическая генерация лазеров исследовалась в целом ряде работ (см., например, [6–8]). В большинстве случаев она получалась при внешней модуляции параметров лазера (добротности резонатора, скорости накачки и т.п.) или была вызвана конкуренцией встречных волн в кольцевом резонаторе. В работе [4] было показано, что в быстропоточном лазере (БПЛ) с неоднородной накачкой внутри неустойчивого резонатора при соответствующем выборе профиля накачки и других параметров системы могут наблюдаться различные динамические режимы генерации, включая разные виды автомодулированной генерации, а также

хаотическую генерацию. В такой системе хаотизация колебаний не связана с какой-либо внешней модуляцией параметров, а обусловлена взаимодействием двух конкурирующих механизмов образования инверсии – вноса возбужденных частиц потоком и внутренней, неоднородной по пространству накачки. Целью настоящей работы было детальное исследование хаотической динамики генерации БПЛ.

2. Физическая модель быстропроточного лазера с пространственно неоднородной накачкой

Рассматривалась идеализированная модель быстропроточных газовых лазеров с неустойчивым резонатором (НР), которые находят применение для обработки материалов (так называемые «технологические лазеры»). Расчеты выполнены для НР цилиндрической геометрии. На рис. 1 изображена верхняя (по потоку газа) часть такого резонатора. При этом ось резонатора совпадает с осью Z . Распределение накачки внутри НР характеризуется резким спадом скорости возбуждения вблизи оптической оси в зоне неоднородности шириной h_0 (на рис. 1 заштрихована).

В расчетной модели были сделаны следующие основные допущения.

1. Поле в НР описывалось в приближении геометрической оптики с использованием уравнений переноса для цилиндрических волн.

2. Для активной среды использовалось простейшее линейризованное кинетическое уравнение с одной релаксационной константой, соответствующее двухуровневой модели среды.

3. Принималась модель НР, в которой потери считаются равномерно распределенными по длине резонатора, что позволяет пренебречь изменением характеристик поля и среды вдоль оптической оси резонатора и рассматривать одномерную задачу для определения интенсивности поля $I(x,t)$ и коэффициента усиления среды $\alpha(x,t)$. Последнее допустимо для НР с небольшим увеличением $M \leq 2$, где M – коэффициент увеличения на двойной проход.

При сделанных предположениях система уравнений для поля и среды может быть записана как

$$\tau_c \partial I / \partial t + x \partial I / \partial x = [(\alpha - a) / \theta - 1] I, \quad (1)$$

$$\partial \alpha / \partial t - v \partial \alpha / \partial x = -(\sigma I + \tau_r^{-1}) \alpha + \sigma S, \quad (2)$$

где $\theta = \ln M / (2L)$ – распределенные потери на расширение пучка, L – длина резонатора, $\tau_c = (c\theta)^{-1}$ – время растекания поля в НР, a – распределенные диссипативные потери, v – скорость потока, σ – сечение оптического перехода, τ_r – время релаксации инверсии среды, S – скорость возбуждения (накачки).

В БПЛ с дозвуковой скоростью протока величина τ_c обычно на 3–4 порядка меньше других характерных времен – времени релаксации τ_r и времени пролета газа через резонатор $\tau_f = h/v$. Это дает основание пренебречь в уравнении (1) первым членом, считая, что процесс генерации является квазистационарным, и поле в каждый момент времени отслеживает адиабатически медленные изменения характеристик среды. Использование такого квазистационарного приближения позволяет значительно сократить объем вычислений. Условия применимости данного приближения к решению системы (1)–(2) имеют вид:

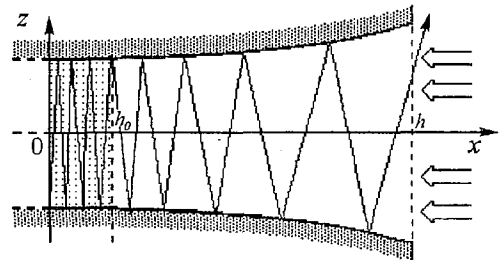


Рис. 1. Схема неустойчивого резонатора. Широкими стрелками показано направление движения активной среды

$$\sigma/\tau_c \ll 1, \quad v\tau_c \partial\alpha/\partial x \ll \alpha. \quad (3)$$

При заданном τ_c эти условия накладывают ограничения на максимальную интенсивность поля в резонаторе и на допустимую величину пространственных градиентов усиления. Однако как показывает более детальный анализ и численное моделирование, данное приближение в принятой модели может приводить к нефизичным решениям, характеризующимся неограниченным ростом величин I и $\partial\alpha/\partial x$, для которых условия (3) не выполняются ни для какого конечного τ_c . Их появление связано с наличием ступенчатого спада интенсивности поля на краю зеркал, что может приводить к образованию резких градиентов коэффициента усиления и неограниченному сужению импульсов генерации. Для устранения такого рода решений в модели НР производилось «сглаживание» края зеркал [9] путем специального выбора профиля потерь $a(x)$, входящих в (1). (В реальном резонаторе естественное сглаживание распределения поля на краю зеркал происходит благодаря дифракции излучения).

В численных расчетах использовались нормированные величины x/h , $t\tau_f$, τ/τ_f , τ_c/τ_f (для них сохраняются прежние обозначения), а также безразмерные величины интенсивности $w = \sigma/\tau_f$, коэффициента усиления $g = \alpha/\theta$, диссипативных потерь $\chi = a/\theta$ и скорости накачки $q = \sigma\tau_f/\theta$.

Таким образом, в нормированных величинах уравнения квазистационарной генерации можно записать в виде

$$x\partial w/\partial x = (g - \chi - 1)w, \quad (4)$$

$$\partial g/\partial t - \partial g/\partial x = -(w + \tau_r^{-1})g + q, \quad (5)$$

где функция $\chi(x)$ описывает дополнительные потери, вводимые в краевой зоне сглаженного зеркала. При этом интенсивность на оси резонатора определяется соотношением

$$w(0,t) = (\partial g/\partial x)_{x=0} - \tau_r^{-1} + q(0), \quad (6)$$

вытекающим из (5) с учетом условия квазистационарности $g(0,t)=1$, которое должно выполняться в НР при наличии генерации. Граничное условие для коэффициента усиления при $x=1$ имеет вид $g(1,t)=g_h$, где g_h – коэффициент усиления среды, поступающей на вход резонатора. В качестве начальных распределений $g(x,0)$ и $w(x,0)$ использовались стационарные решения системы (4)–(5). Профиль накачки имел следующий вид:

$$q(x) = q_m[1 - \exp(-x^4/h_0^4)], \quad (7)$$

где h_0 – ширина зоны неоднородности накачки вблизи оси НР ($h_0 \ll h$), q_m – максимальная скорость накачки вдали от оси.

Система, описываемая уравнениями (4)–(7), полностью определяется независимыми параметрами τ_r , h_0 , q_m , (профиль $\chi(x)$ считаем фиксированным), а также заданием входного усиления g_h . Большинство расчетов было выполнено для значения $h_0/h=0.1$. При этом величина g_h принималась равной $g_h = g_m = q_m\tau_r$, где g_m – максимальное значение коэффициента усиления, которое может быть достигнуто в неподвижной среде в отсутствие генерации. Приводимые ниже данные получены для значения $g_m=3.8$. При описании динамического поведения системы в качестве основного управляющего параметра использовалась величина τ , выражающая отношение времени релаксации к времени пролета.

3. Особенности хаотической динамики системы

Приводимые ниже результаты расчетов показали, что с изменением управляющего параметра τ наблюдается достаточно сложная картина смены

динамических режимов работы лазера. Стационарная генерация имеет место в диапазоне $0.2 < \tau < 1.7$. В области $\tau < 0.2$, где основной вклад в образование инверсии дает механизм внутренней накачки [4], наблюдаются регулярные автопульсации с периодом $T \approx 0.15\tau_f$. К противоположной границе устойчивости стационарной генерации ($\tau \approx 1.7$) примыкает область хаотической генерации. При дальнейшем увеличении τ , начиная со значения $\tau \approx 2.4$, вновь возникают регулярные автопульсации с периодом следования импульсов, близким к τ_f . Их возникновение обусловлено механизмом смены активной среды в резонаторе, который при больших τ становится доминирующим [4]. Таким образом, хаотическая динамика имеет место в промежуточной области значений управляющего параметра, в которой в образовании инверсии участвуют оба названных механизма.

В настоящей работе основное внимание уделено изучению хаотической генерации и сценария ее развития. Помимо пространственно-временных распределений $I(x,t)$ и $\alpha(x,t)$ исследовались также фурье-спектры интенсивности. Кроме того, для облегчения анализа динамики системы (4)–(5) были построены отображения Пуанкаре, а также проекции аттрактора на плоскости в фазовом пространстве. Сечения Пуанкаре соответствовали заданному уровню значений выходной интенсивности поля $I_{out} = x_0 = \text{const}$. В качестве двух других динамических переменных x_1 и x_2 были выбраны значения интенсивности на оси НР и величина коэффициента усиления в средней точке апертуры резонатора. Эти же переменные использовались при построении проекций аттракторов на плоскость $x_0 = \text{const}$. Рассчитывались также величины корреляционной размерности и размерности вложения аттракторов.

Расчеты показывают, что развитие хаоса из режима стационарной генерации происходит в узком диапазоне изменения управляющего параметра между значениями $\tau = 1.69$ и $\tau = 1.71$ и проходит несколько стадий. Непосредственно вблизи границы устойчивости при $\tau = 1.690$ наблюдалось появление слабой модуляции интенсивности генерации (с глубиной $\sim 0,3\%$) синусоидальным сигналом с частотой $\nu_m = 7.28\nu_f$ ($\nu_f = 1/\tau_f$ – пролетная частота). Динамический режим на этом этапе соответствует предельному циклу.

При $\tau = 1.693$ появляется вторая модуляционная частота $\nu'_m = 6.25\nu_f$ и модуляция интенсивности принимает вид биения двух частот. Разность частот $\Omega = \nu_m - \nu'_m$ близка к пролетной частоте ν_f . Соответствующее отображение Пуанкаре в форме замкнутой кривой отвечает квазипериодический динамике с двумя несоизмеримыми частотами. Вид проекции аттрактора показывает, что последний представляет собой двумерный тор с плотной обмоткой.

Начиная со значения $\tau = 1.696$, наблюдается усложнение отображений Пуанкаре и проекций аттракторов, которые принимают характерный вид, показывающий, что поверхность тора становится негладкой (рис. 2, а). В соответствии со сценарием разрушения квазипериодического движения на этой стадии тор начинает гофрироваться [10]. При этом происходит значительное усложнение фурье-спектра и пространственно-временной картины генерации. Дальнейшая стадия разрушения тора показана на рис. 2, б.

Разрушение тора и переход от квазипериодической динамики к хаотическим колебаниям завершается при $\tau = 1.71$. При последующем увеличении значения управляющего параметра вплоть до $\tau = 2.055$ происходит усложнение хаотической динамики, а временная картина генерации становится все более неупорядоченной. В фурье-спектрах появляется большое число уширенных спектральных компонент. Отображения Пуанкаре и проекции аттракторов состоят из множества нерегулярно расположенных точек и траекторий. На рис. 2, в в качестве примера показан вид проекции аттрактора для случая развитого хаоса, наблюдаемого при

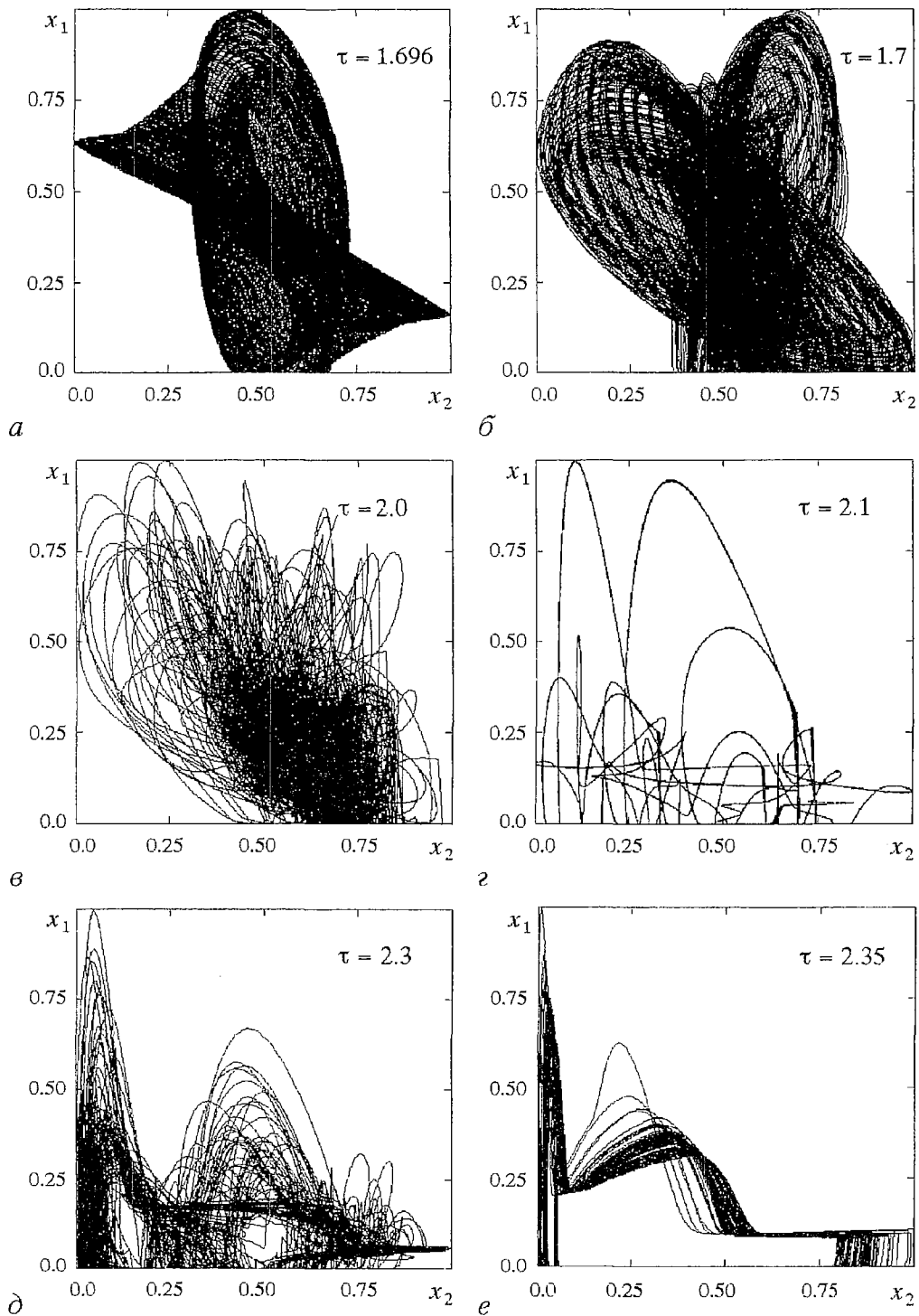


Рис. 2. Проекция аттракторов на плоскость $x_0 = \text{const}$ при различных значениях управляющего параметра τ

$\tau=2.0$, а на рис. 3 приведена соответствующая пространственно-временная картина генерации.

Однако в дальнейшем в результате бифуркации, происходящей вблизи значения $\tau=2.1$, динамический режим генерации резко упрощается. Отображения

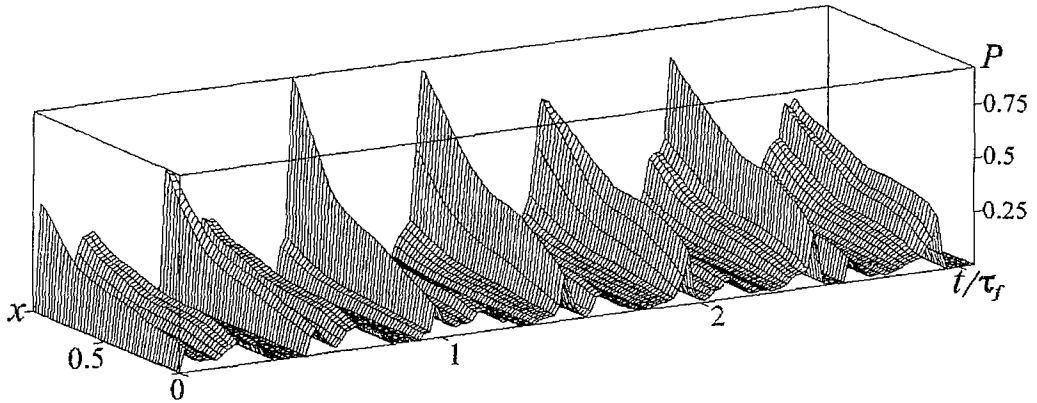


Рис. 3. Пространственно-временное распределение интенсивности генерации для значения управляющего параметра $\tau=2.0$

Пуанкаре и проекции аттракторов принимают вид, характерный для периодической динамики (рис. 2, г). В сложной временной картине генерации обнаруживается периодичность с величиной периода $T \approx 3.3\tau_f$. Наблюдается существенное упрощение фурье-спектров, обусловленное тем, что значения частот спектральных компонент становятся соизмеримыми. Можно предположить, что это является следствием захвата частот спектральных компонент и их фазовой синхронизации. Периодическая динамика сохраняется в относительно широком интервале вплоть до значения $\tau \approx 2.3$.

При $\tau=2.3$ хаотическая динамика вновь появляется (рис. 2, д), однако, как видно из рисунка, хаос в этой области является менее развитым, чем вблизи $\tau=2.0$ (см. рис. 2, в). Это связано с тем, что точка с $\tau=2.3$ находится близко к границе области существования хаоса. Уже при значении $\tau=2.35$ происходит вырождение хаотического аттрактора в тор (рис. 2, е), а в области $\tau > 2.4$ динамика генерации становится периодической.

Для систем, имеющих сложную, в том числе хаотическую динамику, количественной мерой неупорядоченности движения чаще всего служит спектр показателей Ляпунова. Однако для распределенных систем, которые описываются уравнениями в частных производных, расчет этих показателей затруднен. В то же время, для такого рода систем могут быть использованы другие количественные характеристики. Для того, чтобы установить число эффективных степеней свободы (это позволяет, по крайней мере принципиально, описать поведение распределенной системы с помощью соответствующего числа обыкновенных дифференциальных уравнений), нами проводились вычисления размерности вложения аттрактора. Параллельно рассчитывалась также корреляционная размерность самого хаотического аттрактора при различных значениях управляющего параметра. В этих расчетах использовался хорошо известный метод Грассбергера - Прокачиа, основанный на вычислении корреляционных интегралов. Этот метод позволяет определить обе указанные размерности по наблюдаемой временной зависимости всего одной из динамических переменных системы [11]. В качестве такой переменной выбиралась величина выходной мощности генерации. Данные расчетов представлены на рис. 4. Вблизи левой границы исследуемого диапазона, где динамической характеристикой системы является предельный цикл, размерность вложения минимальна и составляет $d_e=3$. По мере увеличения τ размерность вложения увеличивается сначала до $d_e=6$ (квазипериодическая генерация), затем достигает максимальной величины $d_e=8$ (хаотическая генерация в диапазоне $\tau=1.8 \div 2$). Приведенные данные позволяют считать, что возникновение хаоса связано с усложнением характера движения и

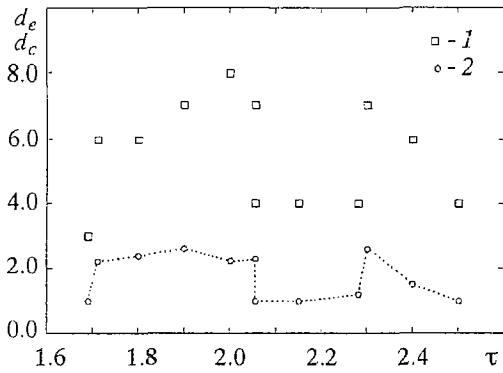


Рис. 4. Размерность вложения d_e (1) и корреляционная размерность аттрактора d_c (2), рассчитанные для различных значений управляющего параметра τ

исследуемой распределенной системы проточного лазера моделью, использующей систему из небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений.

В исследуемом диапазоне τ изменение корреляционной размерности аттрактора d_c в целом качественно повторяет изменение размерности вложения. По сравнению с квазипериодическим режимом вблизи границ диапазона, где $d_c \approx 2$, корреляционная размерность хаотического аттрактора заметно увеличивается и в области глубокого хаоса приближается к значению $d_c = 3$. Там, где происходит отмеченное выше упрощение динамики ($\tau = 2.1 \div 2.3$), полученные значения корреляционной размерности близки к единице. Изменения величины d_c внутри области хаотической генерации указывают на происходящую перестройку хаотического аттрактора.

4. Заключительные замечания

Результаты расчетов динамики БПЛ с неоднородной накачкой внутри неустойчивого резонатора позволили выяснить основные закономерности хаотических режимов генерации в лазерных системах данного класса. Найдено, что хаос возникает в результате потери устойчивости стационарной генерации. Сценарий его развития включает стадии предельного цикла и квазипериодической динамики с двумя несоизмеримыми частотами с последующим распадом двумерного тора. С увеличением управляющего параметра хаотическая динамика претерпевает качественные изменения, свидетельствующие о происходящей перестройке хаотического аттрактора. Это подтверждается данными расчетов размерности хаотического аттрактора и размерности его вложения. Внутри диапазона хаотической генерации существует область периодической динамики, которая возникает в результате захвата и фазовой синхронизации частотных компонент фурье-спектра генерации.

Физическая природа возникновения хаоса в рассматриваемой системе заключается в наличии в ней двух типов неустойчивости с разными характерными частотами возмущений. Они связаны с различными процессами восстановления инверсии в резонаторе лазера – вносом возбужденных частиц потоком и пространственно неоднородной накачкой внутри резонатора. Хаотическая генерация имеет место в промежуточной области значений управляющего параметра, в которой оба эти процесса играют заметную роль. Наблюдаемая эволюция динамических режимов в зависимости от τ отражает сложное

увеличением числа эффективных степеней свободы динамической системы.

Как видно из рисунка, с ростом управляющего параметра от значения $\tau = 2.1$ происходит падение размерности вложения, что соответствует вырождению хаотической динамики в периодическую. Восстановление хаотической динамики при $\tau = 2.3$ сопровождается увеличением размерности вложения ($d_e = 7$), а затем, при переходе к периодическому режиму генерации вблизи правой границы исследуемого диапазона величина d_e вновь уменьшается. Полученные данные по величинам размерностей вложения (см. рис. 4) указывают на принципиальную возможность адекватного описания динамики

взаимодействие указанных конкурирующих процессов в механизме генерации лазера.

Работа выполнена при поддержке Миннауки РФ по программе «Физика лазеров» (пр. № 1.60)

Библиографический список

1. Haken H. // Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47, № 1. P. 67.
2. Casperson L.W. // IEEE J. Quant. El. 1978. Vol. QE 14, № 10. P. 756.
3. Хакен Г. Лазерная светодинамика М.: Мир, 1988. 240 с.
4. Мушенков А.В., Одинцов А.И., Саркаров Н.Э., Федосеев А.И., Федянович А.В. // Квантовая электроника. 1997. Т. 24, № 5. С. 431.
5. Лоскутов А.Ю., Мищенко Ю.В., Рыбалко С.Д. // Физическая мысль России. 1997. Т. 23. С. 53.
6. Глова А.Ф., Козлов С.Н., Лиханский В.В., Ярцев В.П. // Квантовая электроника. 1990. Т. 17, № 7. С. 8946.
7. Dangoise D., Glorieux P., Hennequin D. // Phys. Rev. 1987. Vol. 36, № 10. P. 4775.
8. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. // Квантовая электроника. 1994. Т. 21, № 10. С. 903.
9. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения. М.: Наука, 1979. 285 с.
10. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Динамические системы. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5, 218 с.
11. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990, 280 с.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 6.10.98
после переработки 23.02.99

CHAOTIC GENERATION IN A CROSSFLOW LASER WITH SPATIAL NONUNIFORM EXCITATION

A. Loskutov, A.V. Mushenkov, A.I. Odintsov, A.I. Fedoseev

Dynamics of a model of the continuously pumped crossflow laser with the unstable cavity is investigated. Depending on the control parameter characteristics of the chaotic lasing and onset of chaos are described. Projection of the corresponding attractors, Poincare maps, correlation and embedding dimensions are presented. It is shown that the chaotic lasing appears via destruction of a quasiperiodic behaviour with two incommensurate frequencies. By calculation of the attractor dimension qualitative changing in the corresponding chaotic regimes is described.

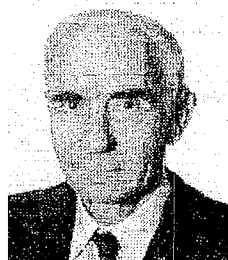


Лоскутов Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент физического факультета МГУ, автор более 80 научных статей и нескольких монографий, в том числе учебного пособия. Специалист в области физики нелинейных процессов, лауреат премии им.И.И.Шувалова (1998). Научный руководитель 14 диссертационных работ.

E-mail: loskutov@moldyn.phys.msu.su



Мушенков Андрей Викторович – аспирант кафедры оптики и спектроскопии физического факультета МГУ, автор 8 научных публикаций в области физики лазеров, нелинейной оптики.



Одинцов Анатолий Иванович – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры оптики и спектроскопии физического факультета МГУ, автор более 150 научных публикаций. Область научных интересов – оптическая спектроскопия, физика лазеров, нелинейная оптика. Научный руководитель 14 диссертационных работ.



Федосеев Анатолий Иванович – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры оптики и спектроскопии физического факультета МГУ, автор 58 научных публикаций в области физики лазеров, квантовой электроники.



РЕКОНСТРУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ НЕАВТОНОМНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ: МОДЕЛИ, ЭКСПЕРИМЕНТ

Б.П. Безручко, Е.П. Селезнев, Д.А. Смирнов

Предложена процедура конструирования по скалярному временному ряду дифференциальных уравнений модели колебательной системы, находящейся под действием гармонической внешней силы. В процедуре используется алгоритм глобальной реконструкции и учитывается априорная информация о виде воздействия. Процедура протестирована на нескольких эталонных системах – нелинейных осцилляторах с различным видом силы трения и потенциала. Ее работоспособность и эффективность демонстрируются на динамических системах с добавленными шумами и на примере построения модели реальной радиотехнической системы – нелинейной RLC -цепи с переключаемыми конденсаторами.

Введение

Возможности современной вычислительной техники позволили развить новые подходы к созданию эмпирических математических моделей объектов и явлений. Если раньше речь шла, в основном, об интерполяции (или аппроксимации) данных эксперимента и о получении функциональной зависимости наблюдаемых величин от времени или координаты, то сейчас разрабатывается техника построения модельных дифференциальных или разностных уравнений. Одним из способов является реконструкция¹ уравнений динамической системы по скалярному временному ряду – дискретной последовательности чисел, полученной стробированием временной реализации одной наблюдаемой переменной [1–7]. С ее помощью в последние годы решаются задачи прогнозирования [1–7], классификации систем [8,9], скрытой передачи информации [10].

Используемые методики обычно ориентированы на построение модели в универсальном виде (система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с правой частью в виде полинома) и реализуют алгоритм глобальной реконструкции² для определения значений параметров. Но такая

¹ В статье мы пользуемся общепринятым термином «реконструкция» (восстановление), хотя он полностью адекватен лишь ситуации, когда временной ряд получен путем численного решения уравнений. В приложении к реальным объектам и явлениям, для которых нет единственной или «истинной» математической модели, уместнее было бы говорить о «конструировании», а не о «реконструкции».

² Глобальной реконструкцией называют восстановление модели по *всему* временному ряду. Модель получают, например, в виде системы обыкновенных уравнений первого порядка. Альтернативой является построение локальных (например, кусочно-линейных) предсказательных моделей, которые выборочно используют для прогноза короткие (локальные) участки временного ряда [1,11,12]. Они реализуются алгоритмически, но не могут быть записаны аналитически в компактной форме (дифференциальных уравнений или отображений).

модель во многих случаях не обладает свойством глобальной устойчивости (фазовые траектории уходят на бесконечность); она пригодна, как правило, лишь для весьма краткосрочного прогноза, а ее параметры многочисленны, и им трудно придать физический смысл. Это практически неизбежная «плата» за общность исходного представления, за экономию сил и времени на выборе математической конструкции, наиболее удобной для наполнения конкретным физическим содержанием. Вероятность угадывания оптимальной структуры модельных уравнений без учета априорной информации или специального предварительного исследования объекта (если это возможно) в общем случае очень мала. Поэтому представляется целесообразным выделять некоторые классы движений и систем и разрабатывать для них специфические процедуры построения моделей. Успех моделирования при таком подходе зависит от набора базовых классов моделей, которыми располагает исследователь, и от их изученности, от надежности процедур распознавания подходящего класса по временному ряду, от способов определения оптимальных значений параметров.

Например, если размерность наблюдаемого движения мала (не выше 3) и известно о наличии внешнего воздействия на исследуемый объект, есть основания предполагать (гипотеза), что его поведение можно удовлетворительно описать уравнением неавтономного осциллятора. В данной статье предлагаются процедуры проверки этого предположения, а также конкретизации модельных уравнений в ситуации, когда воздействие силовое (не параметрическое) и гармоническое. Развиваемый подход модернизирует известный алгоритм глобальной реконструкции (раздел 1) путем учета априорной информации о внешнем воздействии (раздел 2). В разделе 3 подход тестируется на нескольких примерах восстановления по временному ряду уравнений осцилляторов с потенциальными функциями различного вида; анализируется влияние шумов. Окончательно работоспособность используемых процедур демонстрируется на примере конструирования по экспериментальному временному ряду модели реальной RLC -цепи с кусочно-линейной емкостью ³ (раздел 4). Моделируемый объект представляет собой радиотехническую систему с большим числом активных и пассивных элементов с присущими им шумами и неустойчивостями.

1. Универсальная процедура построения модели по скалярному временному ряду

1.1. Алгоритм глобальной реконструкции дифференциальных уравнений.

Стандартный подход к построению дифференциальных уравнений по экспериментальным данным опирается на теорему Такенса [13] (см. Приложение) и заключается в следующем. Пусть данные о моделируемой системе представляют собой скалярный временной ряд значений наблюдаемой величины $\{v_i\}$, $i = 1, \dots, N_S$, где $v_i = v(y(t_0 + (i-1)\tau))$, y – неизвестный вектор состояния объекта, t_0 – момент начала наблюдения, N_S – количество точек скалярного временного ряда, τ – интервал дискретизации (должен быть достаточно малым, чтобы получить хорошее приближение гладкой реализации). Сначала по $\{v_i\}$ одним из методов численного дифференцирования ⁴ составляются временные ряды из D -мерных векторов состояния $\{x_i\}$ и их производных $\{dx(t_i)/dt\}$, $i = 1, \dots, N$, $N = N_S - D + 1$ – количество точек векторного временного ряда, $D \geq 2d + 1$, где d обычно оценивается с помощью вычисления корреляционной размерности d_c . В последнее

³ Выбор объекта обусловлен: 1) низкочастотностью схемы, что позволяет использовать в эксперименте доступные аналого-цифровые преобразователи; 2) наличием для нее дедуктивной модели, полученной из уравнений Кирхгофа.

⁴ Так как численное дифференцирование усиливает роль шумовой составляющей, то при моделировании по зашумленным данным наблюдаемую $v(t)$ обычно подвергают фильтрации – сглаживают.

время при реконструкции стали использовать меньшее значение D , например, просто дополняя d_c до целого числа. Так, в [4,5] при восстановлении уравнений 3-мерной системы оказался удовлетворительным выбор $D = 3$. Модель ищется в виде

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= x_3, \\ &\dots \\ dx_D/dt &= f(x_1, x_2, \dots, x_D), \end{aligned} \tag{1}$$

где функция f является полиномом некоторой степени K от D переменных (согласно теореме Вейерштрасса, полиномом достаточно высокой степени можно сколь угодно точно приблизить гладкую функцию)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_D) &= \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K a_{l_1, l_2, \dots, l_D} \prod_{j=1}^D x_j^{l_j}, \\ \sum_{j=1}^D l_j &\leq K. \end{aligned} \tag{2}$$

Значения коэффициентов a_{l_1, l_2, \dots, l_D} выбираются так, чтобы минимизировать величину среднеквадратичного отклонения точек ряда от аппроксимирующей функции $f(x)$ (метод наименьших квадратов). То обстоятельство, что коэффициенты входят в выражение (2) линейно, позволяет вычислить их значения путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Меняя K и D , можно получить набор моделей.

1.2. Оценка качества модели. С помощью описанного подхода или других способов можно получить множество моделей. Но какая из них лучше? Ответ зависит от целей моделирования. Для целей прогноза естественной количественной характеристикой качества модели является ε – нормированная среднеквадратичная ошибка аппроксимации временного ряда производных

$$\varepsilon = \left(\frac{(1/N) \sum_{i=1}^N [dx_D(t_i)/dt - f(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_D(t_i))]^2}{(1/N) \sum_{i=1}^N [dx_D(t_i)/dt - (1/N) \sum_{i=1}^N dx_D(t_i)/dt]^2} \right)^{1/2} \tag{3}$$

Так, $\varepsilon = 1$ при аппроксимации полиномом нулевого порядка: $f(x) = \text{const}$ (среднее значение). При увеличении порядка полинома и размерности системы величина погрешности уменьшается, но при слишком больших значениях D и K этот эффект незначителен. Кроме того, возрастает количество коэффициентов модели и сложность истолкования их физического смысла. Целесообразно прекратить увеличение D и K , если скорость уменьшения ε становится достаточно малой (это можно оценить визуально по графику зависимости $\varepsilon(D, K)$).

В случаях, когда сложность модели мешает достижению целей моделирования, используют критерий, согласно которому лучшей является модель, имеющая наименьшее значение величины I : $I = \log_2 \varepsilon + M(D, K)$, где $M(D, K)$ – количество коэффициентов модели (в случае полинома $M(D, K) = (D+K)! / (D! \cdot K!)$). Эта величина названа в [1] энтропией модели. Первое слагаемое учитывает погрешность аппроксимации, а второе – сложность модели. Этим критерием удобно пользоваться, так как минимум на графике выявить легче, чем медленность изменения, но наш опыт показывает, что при моделировании реальных систем и некоторых эталонных математических объектов (раздел 3) энтропия модели зачастую имеет минимум при $K = 0$ и не помогает выявить

оптимальную модель. Для многих целей моделирования главным критерием, по всей видимости, остается качественное соответствие поведения объекта и модели (качественное совпадение видов временных реализаций, фазовых портретов и структуры бифуркационных множеств в пространстве параметров).

2. Восстановление уравнений неавтономного нелинейного осциллятора

2.1. Постановка задачи. Воспользуемся универсальной процедурой (п.1.1) и реконструируем с ее помощью модельные уравнения по скалярному временному ряду, полученному численным интегрированием уравнения нелинейного осциллятора с гармоническим силовым внешним воздействием

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2, \\ dy_2/dt &= -g_0(y_1, y_2)y_2 - f_0(y_1) + A_0 \cos(2\pi t/T_0), \end{aligned} \tag{4}$$

где функция g_0 описывает нелинейное затухание, f_0 – производная потенциала, A_0 и T_0 – амплитуда и период внешнего воздействия. Система (4) выступает в роли моделируемого объекта, в качестве наблюдаемой используем первую координату вектора состояния $v(y) = y_1$. Многочисленные компьютерные эксперименты, проведенные при различных видах функций g_0 и f_0 в (4) и значениях K в (2), показывают, что получающиеся с помощью универсальной процедуры трехмерные ($D = 3$) модели, как правило, глобально неустойчивы (фазовые траектории уходят на бесконечность). Фундаментальной причиной неэффективности модели (1) является то обстоятельство, что невозможно переписать уравнение (4) в виде (1) со стационарным полем скоростей. Эту трудность можно преодолеть, увеличив размерность модели с постоянными коэффициентами до $D = 4$, но при этом значительно увеличивается количество коэффициентов. Интервал времени до начала существенной расходимости (предсказательную способность модели) можно увеличить также и за счет увеличения K , но это приведет к увеличению числа коэффициентов модели, дополнительными трудностям с определением их физического смысла и необозримости структуры ее пространства параметров.

Качественного совершенствования модели можно добиться, отказавшись от постоянства коэффициентов – введя в правую часть мультипликативно или аддитивно явную зависимость от времени. Мы ограничимся рассмотрением второго варианта – аддитивного (силового) воздействия и воспользуемся априорной информацией о наличии гармонического внешнего воздействия. Не задаваясь пока вопросом об источнике информации и о процедуре выявления параметров воздействия из данных, будем строить модель в виде

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= f(x_1, x_2) + A \cos(2\pi t/T) + B \sin(2\pi t/T), \end{aligned} \tag{5}$$

где функция f – полином (2), а последние два слагаемых связаны с наличием и видом воздействия (T – предполагаемое значение периода воздействия). Специфической чертой модели вида (5) является то, что она содержит явные функции времени. Параметры A , B и коэффициенты функции f легко вычисляются (как указывалось в п.1.1, решением линейной системы уравнений), если определено значение периода воздействия T . Вычислить же T проблематично, поскольку этот параметр нелинейно входит в правую часть уравнений (5). Поэтому величина T либо должна быть известна заранее, либо следует указать процедуру ее определения по экспериментальным данным. Однако следует обратить внимание на допустимую погрешность задания величины T . Остановимся на этом подробнее.

2.2. Ограничение на длину временного ряда. Погрешность задания периода $\Delta T = T - T_0$, где T_0 – неизвестное реальное значение, при очень большой длине

временного ряда неизбежно ведет к «набегу фазы» и плохому описанию воздействия соответствующими слагаемыми в (5). Нормированная среднеквадратичная погрешность аппроксимации функции $A\cos(2\pi t/T_0)$ функцией $A\cos(2\pi t/T)$ дается формулой

$$\varepsilon_T = \left(\frac{(1/T_H) \int_{t_0}^{t_0+T_H} [\cos(2\pi t/T) - \cos(2\pi t/T_0)]^2 dt}{(1/T_H) \int_{t_0}^{t_0+T_H} \cos^2(2\pi t/T) dt} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

где T_H – время наблюдения. График этой зависимости приведен на рис. 1. Погрешность мала лишь на ограниченном интервале времени, а затем она возрастает и колеблется около величины $\varepsilon_T \approx 1.4$. Поэтому необходимо наложить ограничение на длину временного ряда в зависимости от величины относительной погрешности $\Delta T/T_0$.

Чтобы оценить, на каком промежутке времени аппроксимация внешнего воздействия достаточно точна, проинтегрируем (6) и разложим в ряд Тейлора по степеням $\Delta T/T_0$ (то есть считаем $\Delta T/T_0 < 1$). Предполагая затем, что $T_H/T_0 \gg 1$, получим искомую оценку

$$\varepsilon_T = 2\pi/3^{1/2} (\Delta T/T_0) (T_H/T_0). \quad (7)$$

Величина ε_T зависит только от отношений $\Delta T/T_0$ и T_H/T_0 , то есть ограничение накладываемое не на количество точек временного ряда, а на количество охватываемых периодов воздействия. Из (7) следует, что если требуется приблизить внешнее воздействие с погрешностью, не превышающей ε_0 , то нужно использовать временной ряд, содержащий не более $T_H/T_0 \approx 0.28\varepsilon_0(T_0/\Delta T)$ периодов воздействия (например, не более 28 периодов, если $\varepsilon_0 = 0.01$, и погрешность задания периода равна 0.0001). Следовательно, слишком длинная временная реализация становится помехой для восстановления по ней модели в виде (5)! Хорошего результата можно достичь, разбив эту реализацию на короткие ряды и усреднив полученные при анализе каждого из этих рядов значения коэффициентов. Соотношение (7) и ограничение на длину временного ряда используются нами во всех примерах, приведенных далее.

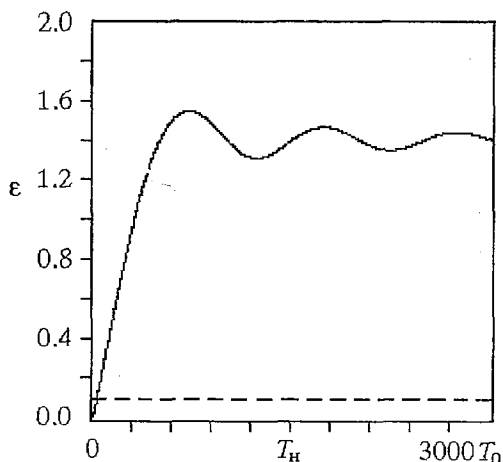


Рис. 1. График зависимости нормированной погрешности аппроксимации косинуса от времени наблюдения при $\Delta T/T_0 = 10^{-3}$ (пунктиром показан уровень $\varepsilon_0 = 0.1$)

2.3. Специальная процедура для реконструкции уравнений осциллятора под действием внешней гармонической силы. Опираясь на представленные результаты, можно предложить последовательность действий для конструирования эмпирической модели неавтономной системы. Каждый этап нашего алгоритма мы будем иллюстрировать на конкретном примере – восстановлении модельных уравнений по хаотическому временному ряду значений координаты y_1 осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2, \\ dy_2/dt &= 0.01(1-y_1^2)y_2 - y_1 - y_1^3 + 120\cos t. \end{aligned} \quad (8)$$

В данном случае $g_0(y_1, y_2) = -0.01(1 - y_1^2)$, $f_0(y_1) = y_1 + y_1^3$, $A_0 = 120$, $T_0 = 2\pi$. Временной ряд был получен интегрированием уравнения (8) методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 и содержал 10000 точек.

Алгоритм построения модели состоит из следующих 3 этапов.

1. Получить значение периода внешнего воздействия с достаточно малой относительной погрешностью⁵.

В некоторых случаях хорошую оценку можно получить как среднее расстояние между максимумами временной реализации (см. раздел 3). Для рассматриваемого примера (8) это значение оказалось равным 6.038, что существенно отличается от истинного $T_0 \approx 6.283185$. Будем считать, что нам известно приблизительное значение $T = 6.25$ (погрешность 1%).

2. Выяснить, можно ли описать наблюдаемый процесс уравнением вида (5); более точно определить период воздействия.

Фиксируем достаточно большое значение K и будем менять пробное значение периода T с некоторым шагом в окрестности сделанной оценки величины периода ($T = 6.25$), каждый раз восстанавливая уравнения и получая различные модели.

Для рассматриваемого примера достаточно выбрать $K = 3$. Временной ряд содержит примерно 16 периодов воздействия, поэтому, если мы хотим получить погрешность аппроксимации не больше $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, то, как следует из (7), шаг ΔT не должен превышать примерно 0.0001. Критерием того, что исследуемый объект можно описать уравнением неавтономного осциллятора, является наличие глубокого минимума на графике зависимости погрешности аппроксимации от T . График зависимости $\lg \varepsilon$ от T для иллюстрирующего примера представлен на рис. 2; по нему легко определяется искомое значение периода воздействия: $T \approx 6.2832$ (точка минимума близка к реальному значению $T_0 = 2\pi \approx 6.283185$).

3. Определить оптимальное значение порядка полинома K и вычислить соответствующие значения коэффициентов модели.

Строим модели в виде (5), увеличивая значение K от 0 до 10–20. На графике зависимости $\lg \varepsilon$ от K (рис. 3) видно, что погрешность перестает существенно уменьшаться при $K > 3$ (это значение K является и точкой минимума энтропии модели). Таким образом, оптимальная модель имеет вид (5) с $T = 6.2832$ и $K = 3$.

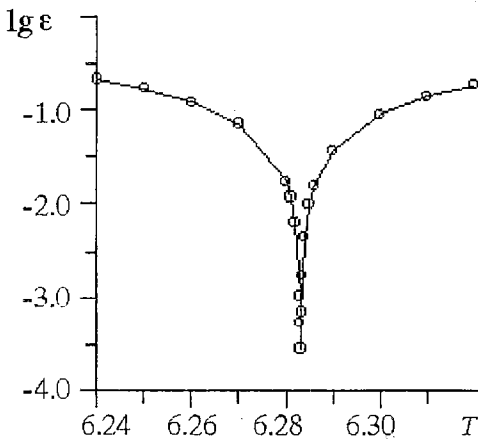


Рис. 2. График зависимости логарифма погрешности аппроксимации ε от пробного значения периода воздействия T при $K = 3$ для осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга (8)

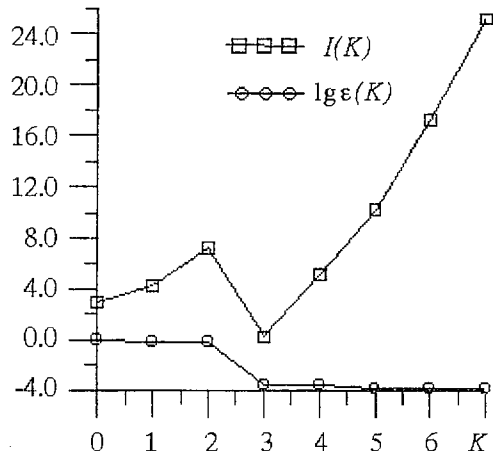


Рис. 3. График зависимости $\lg \varepsilon$ модели (5) и ее энтропии I от порядка полинома K для осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга (8)

⁵ В принципе, этот пункт можно опустить и перебирать все возможные диапазоны значений T .

Коэффициенты вычисляются методом наименьших квадратов, как в универсальной процедуре. Так как уравнение Ван дер Поля – Дуффинга и само имеет вид (5), то можно сравнить коэффициенты в правых частях уравнений исходной системы и полученной модели (табл. 1). Видно, что все коэффициенты вычислены с очень малой погрешностью (0.01%). Таким образом, уравнения восстановлены весьма успешно.

Таблица 1

Коэффициенты уравнений исходных систем и восстановленных уравнений вида (5)

Члены уравнений*	Осциллятор Ван дер Поля – Дуффинга		Осциллятор Дуффинга	
	объект	модель	объект	модель
1	–	–0.003121	–	0.000764
x_1	–1.0	–1.009530	–1.0	–0.998591
x_2	0.01	0.009844	–0.1	–0.099933
x_1^2	–	–0.000142	–	–0.000126
$x_1 x_2$	–	–0.000000	–	–0.000012
x_2^2	–	0.000018	–	–0.000005
x_1^3	–1.0	–0.999076	–1.0	–1.000310
$x_1^2 x_2$	–0.01	–0.009992	–	–0.000015
$x_1 x_2^2$	–	–0.000056	–	–0.000057
x_2^3	–	0.000000	–	–0.000001
$\cos t$	120.0	119.9712	35.0	34.99586

* Для удобства в левом столбце таблиц 1–4 для переменных, входящих в уравнения как объектов, так и моделей, используется обозначение x_i

2.4. Реконструкция уравнений строго диссипативного осциллятора. В ряде случаев модельные уравнения можно привести к более компактному виду. Например, если некоторые коэффициенты в модели (5) очень малы, то можно исключить из функции f соответствующие слагаемые (2) и построить новую модель с меньшим количеством коэффициентов. Для иллюстрации упростим объект (8), убрав нелинейность из силы трения. Получившаяся система строго диссипативна, то есть в ней не могут развиваться автоколебания (осциллятор Дуффинга «с жесткой пружиной»):

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2, \\ dy_2/dt &= -0.1y_2 - y_1 - y_1^3 + 35\cos t. \end{aligned} \quad (9)$$

В данном случае $g_0(y_1, y_2) = 0.1$, $f_0(y_1) = y_1 + y_1^3$, $A_0 = 35$, $T_0 = 2\pi$. Временной ряд был получен интегрированием уравнения (9) методом Рунге – Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 и содержал 10000 точек (примерно 16 периодов воздействия).

Следуя описанной специальной процедуре, с тем же начальным значением T , что и в п. 2.3, получаем, что оптимальная модель будет иметь вид (5) с $T=6.2832$ и

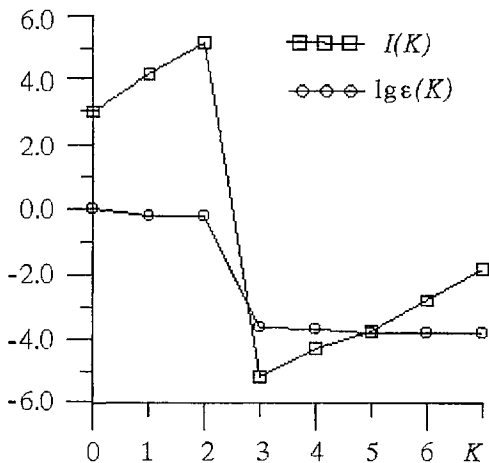


Рис. 4. График зависимости $\lg \varepsilon$ и энтропии I модели (10) от K для осциллятора Дуффинга (9)

$K = 3$ (рис. 4) с коэффициентами, приведенными в табл. 1 (последние два столбца). Все коэффициенты определены с погрешностью, не превышающей 0.1%. Однако многие коэффициенты практически равны нулю, значительны лишь амплитуда воздействия и коэффициенты при x_2 и различных степенях x_1 . Поэтому есть возможность, выбросив малые коэффициенты, повторить поиск модели в более компактной форме строго диссипативного осциллятора

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= -\gamma x_2 - f(x_1) + A \cos(2\pi t/T) + B \sin(2\pi t/T), \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(x_1)$ – полином степени K . Это позволяет при том же количестве коэффициентов использовать полином более высокого порядка и увеличить предсказательную способность модели. В табл. 2 приведены восстановленные значения коэффициентов. В целом они ближе к своим истинным значениям (по сравнению с табл. 1). Относительная погрешность не превышает 0.01% (уменьшилась в 10 раз).

Таблица 2

Коэффициенты уравнений Дуффинга (9) и восстановленных уравнений вида (10)

Члены уравнений	Объект (9)	Оптимальная модель (10)	Модель (10) без учета (7)
1	–	0.00160	0.03421
x_1	–1.0	–0.99979	8.37783
x_2	–0.1	–0.10001	0.05849
x_1^2	–	0.00003	0.01302
x_1^3	–1.0	–1.00048	–1.18254
$\cos t$	35.0	34.99646	7.07569

3. Примеры

Протестируем предложенную процедуру на примерах реконструкции уравнений по временным реализациям, генерируемым реальными и эталонными математическими объектами. В качестве таковых были выбраны уравнения нелинейных осцилляторов [14] и радиотехническая RLC -цепь с кусочно-линейной емкостью (схема с переключаемыми конденсаторами [15]). Этот выбор

продиктован принадлежностью объектов к рассматриваемому классу, а также их разнообразием и достаточной сложностью.

3.1. Нелинейные осцилляторы. В качестве тестовых математических объектов были выбраны осциллятор Тода (11), модифицированный осциллятор Тода (12), осциллятор Морзе (13) и мягкий симметричный осциллятор (14) (первое уравнение для всех примеров одинаково и записано лишь один раз – верхняя строка)

$$dy_1/dt = y_2,$$

$$dy_2/dt = -0.01y_2 - [1 - \exp(-y_1)] + 1.0\cos t, \quad (11)$$

$$dy_2/dt = -0.001y_2 - [1 + y_1 - \exp(-y_1)] + 5.0\cos t, \quad (12)$$

$$dy_2/dt = -0.5y_2 - [\exp(-y_1) - \exp(-2y_1)] + 1.0\cos t, \quad (13)$$

$$dy_2/dt = -0.001y_2 - y_1/(1+y_1^2)^{1/3} + 0.5\cos t. \quad (14)$$

Первое слагаемое в правой части каждого из уравнений (11) – (14) в механических системах описывает затухание (вязкое трение), коэффициент затухания γ (см. уравнение (10)) равен соответственно 0.01, 0.001, 0.5 и 0.001. Слагаемые, объединенные квадратными скобками, соответствуют функции $f_0(y_1)$ (производная потенциала); последнее слагаемое – внешнее воздействие с периодом $T_0 = 2\pi$ и амплитудой A_0 , равной соответственно 1.0, 5.0, 1.0 и 0.5.

Рассматриваемые осцилляторы имеют различный вид потенциальных функций (симметричный и несимметричный), демонстрируют различные типы зависимости периода собственных колебаний от полной энергии («жесткая» и «мягкая» пружина) и описывают множество реальных систем и процессов [14]. Исходные временные ряды представляли собой временные реализации координаты x_1 (для переходных процессов к периодическим режимам) длиной около 16 периодов воздействия, полученные интегрированием указанных уравнений методом Рунге–Кутты 4–го порядка с шагом 0.01 (содержали 10^4 точек). Далее к ним применялась изложенная в п.2.3 процедура; результаты представлены на рис. 5. Во всех случаях, кроме (12), начальное приближение для периода воздействия (этап 1 процедуры) удавалось получить с погрешностью 0.1–1% через оценку среднего расстояния между максимумами временной реализации. Во всех случаях график $I_{ge}(T)$ для модели в виде (5) имеет глубокий минимум при $T \approx 6.2832 \approx 2\pi$ (и тот же качественный вид, что и на рис. 2), а значения $I_{ge}(T)$ для моделей (5) и (10) одинакового порядка отличаются слабо, поэтому уравнения восстанавливались в виде (10). В первой колонке на рис. 5 приведены графики зависимости I_{ge} и I от K для таких моделей, оптимальные значения параметра K определяются визуально по графику $I_{ge}(K)$ и равны соответственно 10, 11, 10 и 17. Отметим, что в первых трех случаях при указанных значениях K имеется и минимум энтропии модели I , то есть эта величина помогает определить хорошую модель; но критерий минимума энтропии не работает в последнем случае, где минимум $I(K)$ приходится на $K = 0$, как и в случае экспериментальной системы (см. раздел 4).

При увеличении K от нуля до 10–20 коэффициенты модели сходятся с различной скоростью к своим оптимальным значениям. Табл. 3 позволяет сравнить соответствующие значения коэффициентов исходных систем и восстановленных при оптимальных значениях K моделей ($T = 6.2832$): коэффициент затухания γ (коэффициент при x_2) и амплитуду воздействия (при $\cos t$) – непосредственно, а коэффициенты функции $f(x_1)$ сравниваются с коэффициентами разложения функции $f_0(x_1)$ в ряд Тейлора. Все значимые для аппроксимации коэффициенты (первые десять строк) восстановлены с высокой точностью. Во второй колонке рис. 5 представлены графики функций $f_0(x_1)$ и $f(x_1)$. В той области,

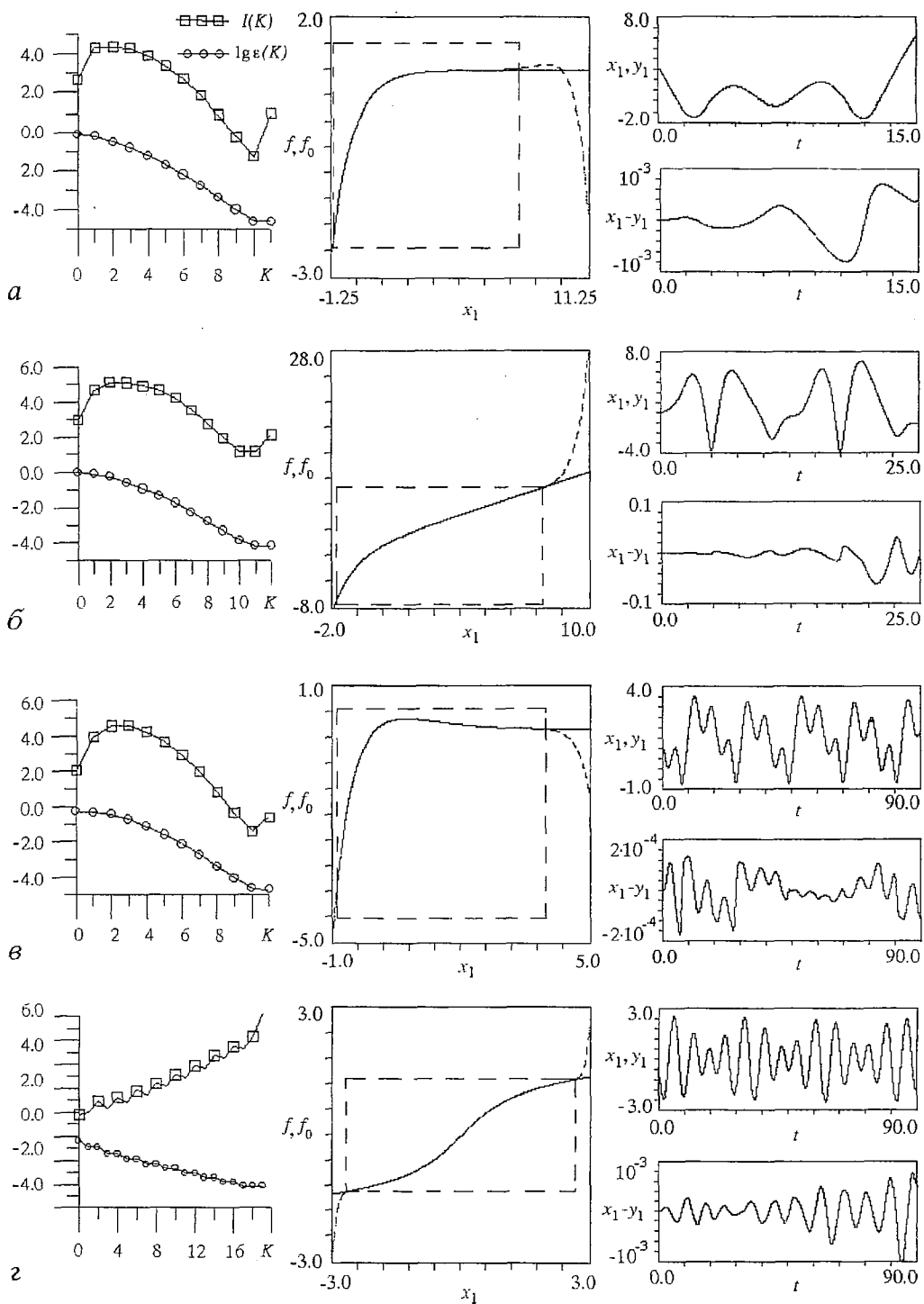


Рис. 5. Результаты моделирования по временным реализациям неавтономных осцилляторов: а – осциллятор Toda (11), б – модифицированный осциллятор Toda (12), в – осциллятор Морзе (13), г – мягкий симметричный осциллятор (14). Первая колонка: графики зависимости $I(K)$ и $\lg \epsilon(K)$ для моделей (10); вторая колонка: графики исходных возвращающих сил $f_0(x_1)$ – сплошные линии, и восстановленных $f(x_1)$ – штриховые; третья колонка: временные реализации объектов и моделей (практически совпадают) и разностные временные реализации объектов и моделей при одинаковых начальных условиях

Таблица 3

Коэффициенты исходных уравнений (11)–(14)* и
восстановленных уравнений вида (10)

Члены уравнения	Осциллятор Тода (11)		Модифицированный осциллятор Тода (12)		Осциллятор Морзе (13)		Мягкий симметричный осцил. (14)	
	Объект	Модель (K = 10)	Объект	Модель (K = 11)	Объект	Модель (K = 10)	Объект	Модель (K = 17)
x_2	-0.01	-0.01000	-0.001	-0.00100	-0.5	-0.49999	-0.001	-0.00100
$\cos t$	1.0	0.99998	5.0	4.99978	1.0	0.99998	0.5	0.49999
1	0.0	0.00006	0.0	0.00059	0.0	0.00004	0.0	$1.3 \cdot 10^{-6}$
x_1	-1.0	-1.00005	-2.0	-1.99981	-1.0	-1.00006	-1.0	-0.99882
x_1^2	0.5	0.49980	0.5	0.49865	1.5	1.49957	0.0	-0.00006
x_1^3	-0.16667	-0.16653	-0.16667	-0.16658	-1.16667	-1.16616	0.333330	0.32012
x_1^4	0.04167	0.04179	0.04167	0.04225	0.625	0.62626	0.0	0.00027
x_1^5	-0.00833	-0.00844	-0.00833	-0.00847	-0.25833	-0.26034	-0.22222	-0.17335
x_1^6	0.00139	0.00139	0.00139	0.00133	0.0875	0.08726	0.0	-0.00045
x_1^7	-0.00020	-0.00018	-0.00020	-0.00018	-0.02520	-0.02295	0.17284	0.07953
x_1^8	$2.48 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-5}$	$2.61 \cdot 10^{-5}$	0.00632	0.00433	0.0	0.00034
x_1^9	$-2.76 \cdot 10^{-6}$	$-8.66 \cdot 10^{-7}$	$-2.76 \cdot 10^{-6}$	$-3.59 \cdot 10^{-6}$	-0.00141	-0.00050	-0.14403	0.02598
x_1^{10}	$2.76 \cdot 10^{-7}$	$2.09 \cdot 10^{-8}$	$2.76 \cdot 10^{-7}$	$3.12 \cdot 10^{-7}$	0.00028	0.00003	0.0	-0.00013

Для уравнений (11)–(14) приведены коэффициенты разложения возвращающей силы в ряд Тейлора по степеням x_1 .

где происходит наблюдаемое движение (выделена пунктиром), имеет место очень хорошее совпадение. Прогностические возможности моделей проиллюстрированы в третьей колонке рис. 5, где показаны временные реализации объектов и моделей (в таком масштабе они практически совпадают) и (ниже) разностные сигналы объектов и моделей при одинаковых начальных условиях (на промежутке времени 5–10 периодов воздействия прогноз весьма точен).

3.2. Реконструкция уравнений осцилляторов при наличии шума.

Проверим работоспособность представленной процедуры при наличии шума на примере реконструкции уравнений по временной реализации осциллятора Тода из п.3.1 с добавленным к ней аддитивным шумом измерений. Исследуемый временной ряд – это значения величины $\{w_i\}$, где $w_i = v_i + \xi_i$, v_i – результаты численного интегрирования уравнения (11), ξ_i – независимые случайные величины, распределенные (одинаково) по нормальному закону с нулевым средним. Рассматривались

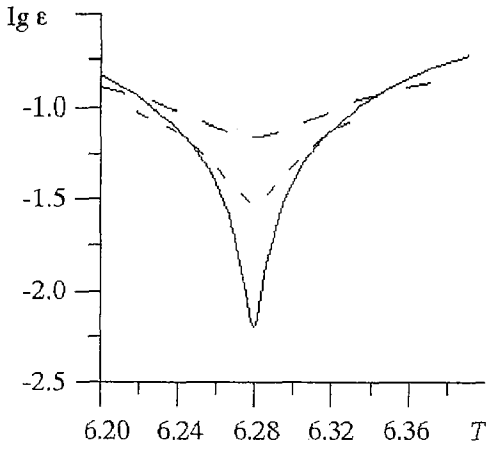
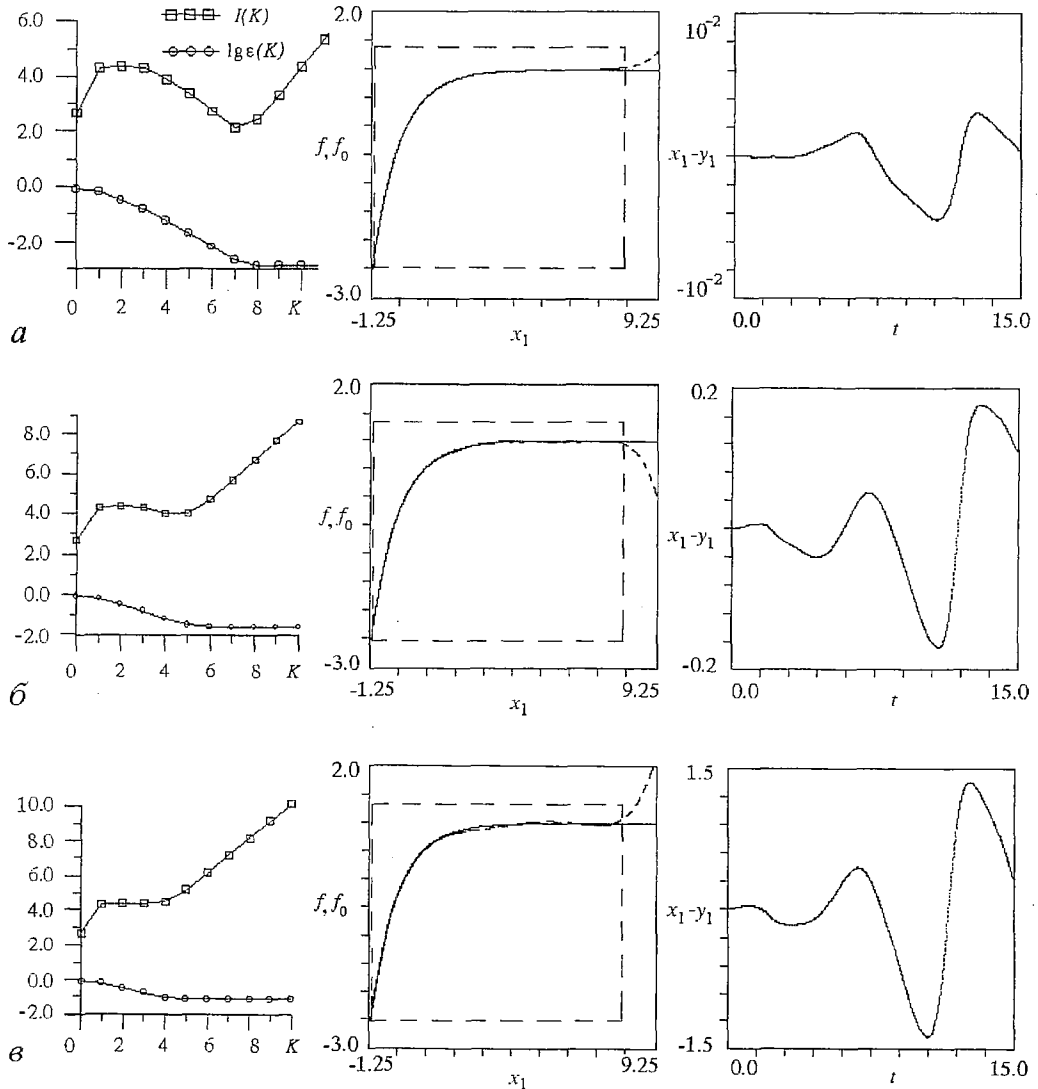


Рис. 6. График зависимости логарифма погрешности аппроксимации от T (пробного значения периода воздействия) при различных уровнях шума (сверху вниз - 10^{-6} , 10^{-10} и 10^{-14}) при $K = 5$ для осциллятора Тода

Рис. 7. Результаты моделирования по временной реализации неавтономного осциллятора Тода при различных уровнях измерительного шума. Отношение мощности шума к мощности сигнала равно 10^{-14} (а), 10^{-10} (б), 10^{-6} (в). Первая колонка: графики зависимости $I(K)$ и $\lg \epsilon(K)$ для моделей (10). Вторая: графики исходных возвращающих сил $f_0(x_1)$ - сплошные линии, и восстановленных $f(x_1)$ - штриховые. Пунктиром показана область, в которой они практически совпадают. Третья колонка: разностные временные реализации объектов и моделей при одинаковых начальных условиях



различные уровни шума: отношение $\langle \xi^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$ составляло 10^{-14} , 10^{-10} и 10^{-6} .

Основная трудность здесь состоит в том, чтобы достаточно точно вычислить значения первой и (особенно) второй производных. Мы использовали подход, изложенный в [6], включающий специфическую процедуру выделения главных компонентов и отбрасывания мелкомасштабных изменений (сглаживание). Для вычисления двух производных наблюдаемой временной реализации в данный момент времени используется достаточно много соседних точек скалярного временного ряда (по сути, используется специфическая процедура фильтрации). Для указанных уровней шума удовлетворительно вычислить значения производных удалось с использованием соответственно 7, 13 и 55 соседних точек, тогда как при отсутствии шума достаточно было 3-х точек.

Наличие шума приводит к следующим эффектам. Во-первых, минимум на графике зависимости $\lg \epsilon(T)$ (этап 2 процедуры) при том же масштабе по T оказывается тем более пологим, чем выше уровень шума (рис. 6). Теперь величина погрешности ϵ ограничена снизу достаточно большой величиной ϵ_0 , определяемой уровнем шума (равна 0.001, 0.02 и 0.05, соответственно). Из (7) при $T_H/T_0 > 16$ следует, что значение периода при наличии шума невозможно определить с погрешностью, меньшей $0.22\epsilon_0$. Во-вторых, оптимальное значение порядка полинома K уменьшается при увеличении уровня шума. Оно равно соответственно 8, 6 и 5 (рис. 7, первая колонка). Это понятно – шум мешает точной аппроксимации, поэтому использование полинома высокого порядка не дает эффекта. В связи с этим при большом уровне шума оказывается неработоспособным критерий минимума энтропии модели (рис. 7, в, первая колонка). Увеличение интенсивности шума приводит к тому, что значения коэффициентов восстанавливаются с большей погрешностью (табл. 4).

Графики исходных и восстановленных при оптимальном значении K возвращающих сил для различных уровней шума приведены на рис. 7 во второй колонке. В третьей колонке представлены временные реализации разности

Таблица 4

Коэффициенты уравнения осциллятора Тода (11) и восстановленных модельных уравнений (10)

Члены ур-ний	Объект (11)	Модель (10) при различных уровнях шума		
		10^{-14}	10^{-10}	10^{-6}
x_2	-0.01	-0.00999	-0.00943	-0.00864
$\cos t$	1.0	0.99992	1.00429	0.98691
1	0.0	0.00031	-0.01168	0.00057
x_1	-1.0	-0.99790	-1.00070	-1.06503
x_1^2	0.5	0.49915	0.53057	0.55203
x_1^3	-0.16667	-0.16917	-0.17735	-0.14639
x_1^4	0.04167	0.04300	0.03479	0.01835
x_1^5	-0.00833	-0.00801	-0.00353	-0.00086
x_1^6	0.00139	0.00098	0.00014	-
x_1^7	-0.00020	-0.00007	-	-
x_1^8	$2.48 \cdot 10^{-5}$	$0.21 \cdot 10^{-5}$	-	-

координат y_1 (объекта) и x_1 (модели), сама реализация y_1 приведена на рис. 5, а (третья колонка). При увеличении уровня шума уменьшается точность количественного прогноза и соответственно время предсказуемости. Но даже для уровня шума 10^{-6} модель дает достаточно точный прогноз (погрешность не выше 5%) на время около 11 периодов воздействия (900 отсчетов), что является очень хорошим результатом. Кроме того, модели демонстрируют качественно схожее с исходным объектом поведение.

4. Реконструкция динамической модели реальной неавтономной системы

Схема реального объекта – RLC -контур с переключаемыми конденсаторами, находящегося под гармоническим внешним воздействием амплитуды U_0 и частоты ω_0 , представлена на рис. 8. Здесь K – электронный ключ: микросхема, содержащая десятки транзисторов и других пассивных элементов, которая питается от специального источника постоянного напряжения. При малых значениях напряжения U на емкости C_1 происходят линейные колебания в контуре RLC_1 (сопротивление ключа очень велико), когда напряжение U достигает порогового значения $U_{пор}$, сопротивление ключа резко падает, он замыкает цепь и подключает емкость C_2 . Обратное переключение происходит при понижении U относительно $U_{пор}$, так как ключ обладает гистерезисом. Существенно также наличие определенного уровня шума.

Модель этой системы, полученная на основе законов Кирхгофа, имеет вид (4) с кусочно-линейной возвращающей силой. В безразмерных переменных $t' = t/(LC_1)^{1/2}$ – безразмерное время, $x_1' = q/C_2 U_{пор}$ – безразмерный суммарный заряд на емкостях C_1 и C_2 , это модельное уравнение (при $U_{пор} < 0$) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} dx_1'/dt' &= x_2', \\ dx_2'/dt' &= -\gamma x_2' - f_0'(x_1') + A_0 \cos(\omega' t'), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\gamma = R(C_1/L)^{1/2}$, $A_0 = C_1 U_0 / (C_2 |U_{пор}|)$, $\omega' = \omega_0 (LC_1)^{1/2}$,

$$f_0(x_1') = \begin{cases} x_1' - 1, & x_1' > -(1 + C_1/C_2), \\ C_1 x_1' / (C_1 + C_2), & x_1' < -(1 + C_1/C_2). \end{cases}$$

Измеренные временные ряды содержали значения величины, пропорциональной силе тока через резистор R , измеренные с интервалом $\tau = 4$ мкс с относительной погрешностью $\sim 2^{-12}$ при значениях параметров $C_1 = 0.1$ мкФ, $C_2 = 4.4$ мкФ, $L = 0.02$ Гн, $R = 10$ Ом, $U_{пор} = -0.2$ В, $T_0 \approx 84.02\tau$ (то есть $\gamma \approx 0.02$, $\omega' \approx 1.02$, $C_1/(C_1 + C_2) \approx 1/45$) и при различных значениях амплитуды воздействия. Дополнительный интерес, который вызывает этот пример (по сравнению с

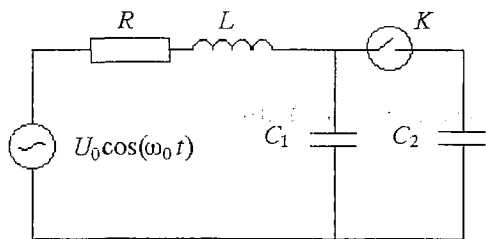


Рис. 8. Экспериментальная система – контур с переключаемыми конденсаторами

численными), обусловлен тем, что, во-первых, зависимость возвращающей силы от x_1' не является столь гладкой, во-вторых, даже уравнение (15) является лишь приближенной моделью системы (поскольку оно не учитывает, например, слабой нелинейности индуктивности, гистерезиса, связанного с переключением ключа K , наличия шума и т.д.), в-третьих, значения переменной измерены с указанной достаточно высокой погрешностью.

На рис. 9 представлены результаты моделирования по временной реализации хаотического режима ($U_0 = 2.344$ В). Временная реализация предварительно была подвергнута численному интегрированию (так как в роли координаты x_1 выступает заряд на емкостях, а измеренная сила тока – это его производная); таким образом, используемый для построения модели временной ряд содержал значения величины, пропорциональной заряду.

Графики представлены в соответствии с этапами применяемой процедуры: начальное приближение для T удается получить как среднее расстояние между максимумами временной реализации ($T \approx 84.21\tau$); график зависимости $\lg \epsilon(T)$ для модели (5) 5-го порядка имеет глубокий минимум при $T = 84.02\tau$ (рис. 9, а); значения $\lg \epsilon$ для моделей 5-го порядка в виде (5) и (10) равны соответственно -1.27 и -1.25 , поэтому модель строится в виде строго диссипативного осциллятора

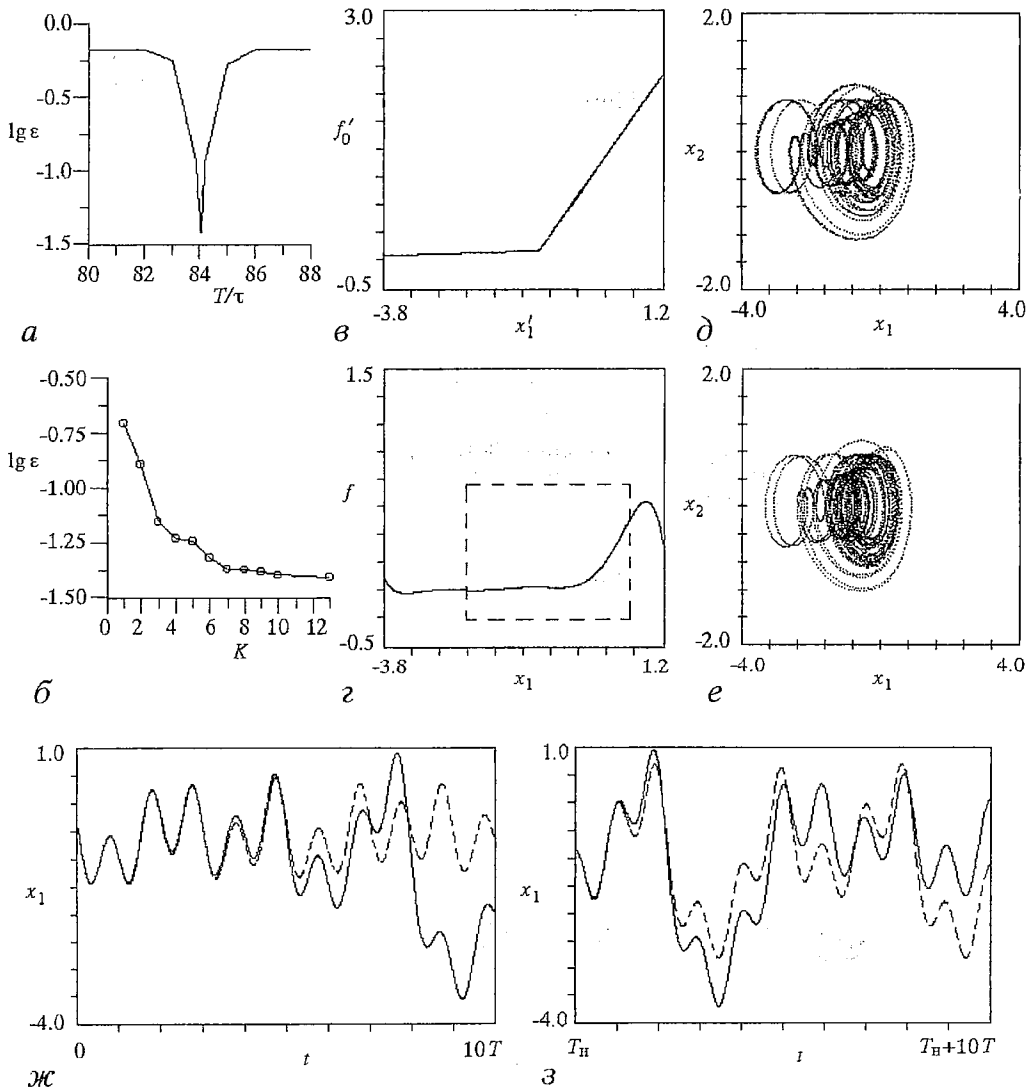


Рис. 9. Результаты моделирования по экспериментальному временному ряду: а, б – графики зависимости $\lg \epsilon$ от T и от K , соответственно; в, г – возвращающие силы модели (15) и восстановленной оптимальной модели (10); д, е – фазовые портреты исходной системы и модели (10); ж, з – временные реализации объекта (сплошная линия) и модели (штриховая линия) при одинаковых начальных условиях на примерах временного ряда, по которому производилось конструирование уравнений (ж), и его продолжения – «чистый прогноз» (з)

– на рис. 9, б представлен график зависимости $\lg \varepsilon$ от K , визуально определенное оптимальное значение $K = 7$. Рис. 9, в, г позволяют сравнить возвращающие силы в уравнении (15) и в восстановленной модели (10) 7-го порядка. Графики качественно схожи⁶, кроме того, наклоны линейных участков графика восстановленной функции равны соответственно 0.014 и 0.604, их отношение составляет примерно $1/45$.

Коэффициент затухания в восстановленных уравнениях равен примерно 0.09, это в 4.5 раза больше, чем коэффициент затухания в модели (15). Это может быть связано с уменьшением добротности при переключении емкости, что не заложено в (15). Кроме того, реальные потери в контуре определяются не только сопротивлением R , но и ключом. Фазовые портреты исходной системы и модели качественно совпадают (рис. 9, д, е).

Прогностические возможности модели иллюстрирует рис. 9, ж, з, где показаны временные реализации объекта и модели при одинаковых начальных условиях. На рис. 9, ж использован временной ряд, по которому производилась подгонка уравнений. Для удобства восприятия показан не весь ряд, а только его участок длиной в 10 периодов воздействия. На рис. 9, з использовано продолжение этого временного ряда – с момента времени T_H (более $100T$) до T_H+10T (это «чистый прогноз»). Время предсказания мы оценивали как среднее время, за которое временные реализации объекта и модели из одинаковых начальных условий расходятся более, чем на 5% размаха колебаний. Оно составляет примерно $5.1T$ (430 отсчетов) в первом случае – рис. 9, ж, и $2.5T$ (210 отсчетов) во втором – рис. 9, з.

Отметим, что при восстановлении модели по временной реализации, полученной при измененном в некоторое количество раз значении амплитуды воздействия U_0 , аналог амплитуды воздействия в модели меняется в то же количество раз, а остальные параметры остаются практически неизменными; это убедительно показывает, что модель имеет параметры, соответствующие параметрам исходной системы, и дает возможность численного исследования устройства пространства параметров моделируемой системы.

Заключение

В статье предложена процедура, которая по скалярному временному ряду значений наблюдаемой величины, характеризующей поведение автоколебательной или строго диссипативной системы, позволяет:

- проверить, может ли объект быть описан уравнением нелинейного осциллятора, находящегося под действием внешней гармонической силы;
- с фиксированной относительной погрешностью определить период воздействия;
- получить модельные уравнения.

Показано, что необходимо ввести ограничение на длину временного ряда. Конструирование модели целесообразно вести по его относительно коротким участкам, в то время как для оценки периода воздействия может пригодиться вся временная реализация. Для иллюстрации важности этого ограничения в последнем столбце табл. 2 приведены результаты моделирования без его учета. Модель строилась по очень длинной реализации осциллятора Дуффинга, содержащей приблизительно 80 периодов воздействия, при пробном $T = 6.25$ (погрешность в

⁶ Масштабы по оси ординат различаются, так как обрабатываемый временной ряд содержит величины, пропорциональные, а не в точности равные безразмерному заряду x_1' ; кроме того, графики несколько сдвинуты друг относительно друга, так как элементы временного ряда определены с точностью до аддитивной постоянной при интегрировании. Однако указанные количественные различия несущественны, так как моделируется именно измеренный ряд x_1 , а не истинные значения заряда x_1' .

значении периода ~ 0.01). Предсказываемая в (7) погрешность аппроксимации косинуса в этом случае примерно равна 0.2, то есть достаточно велика. Как видно из таблицы, вычисленные значения коэффициентов далеки от истинных – результат свидетельствует о том, что такой прямолинейный учет внешнего воздействия бесполезен.

Представлены соображения, позволяющие в ряде случаев свести модельные уравнения к более компактному виду (строго диссипативного осциллятора). Главными критериями качества модели выступают качественное соответствие поведения объекта и модели и наличие физического смысла ее параметров. Применение алгоритма на нескольких численных примерах и реальной радиотехнической схеме показывает его эффективность: параметры восстановленных моделей имеют прямые аналоги в эксперименте (численном и натурном), а модели демонстрируют качественно схожее с исходным объектом поведение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96–02–16755.

Приложение

Пусть имеется динамическая систем

$$dy/dt = F_0(y), \quad (\text{П.1})$$

где $y(t) \in \mathbf{R}^d$ – ее вектор состояния, и задана функция вектора состояния $v = v(y(t))$ – наблюдаемая. Пусть фазовая траектория $y(t)$ принадлежит некоторому аттрактору, и пусть размерность компактного многообразия \mathbf{M} , содержащего аттрактор, равна d_M . Рассмотрим векторы $x(t) \in \mathbf{R}^D$:

$$x_i = \left\{ \begin{array}{l} v(t_i) \\ dv(t_i)/dt \\ \dots \\ d^{D-1}v(t_i)/dt^{D-1} \end{array} \right\}. \quad (\text{П.2})$$

Формула (П.2) определяет функцию $\phi_0: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}^D$, однозначно отображающую многообразие \mathbf{M} на некоторое многообразие пространства \mathbf{R}^D ($x = \phi_0(y)$). Теорема Такенса [13] утверждает, что если функции $v(y)$ и $F_0(y)$ достаточно гладкие ($2d_M+1$ раз непрерывно дифференцируемые) и $D=2d_M+1$, то отображение ϕ_0 является, в общем случае, непрерывно дифференцируемым и взаимно однозначным (то есть существует гладкая обратная функция ϕ_0^{-1}).

Следовательно, уравнение (П.1) для движения на \mathbf{M} можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= x_3, \\ &\dots \\ dx_D/dt &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_D), \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где функция $f_0(x)$ выражается через $F_0(y)$, $\phi_0^{-1}(x)$ и ее первую производную.

Библиографический список

1. Crutchfield J.P., McNamara B.S. Equations of motion from a data series // Complex Systems. 1987. Vol. 1. P. 417.

2. *Cremers J., Hubler A.* Construction of differential equations from experimental data // *Z.Naturforschung A.* 1987. Vol.42. P.797.
3. *Breeden J.L., Hubler A.* Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.42, № 10. P.5817.
4. *Gouesbet G., Maquet J.* Construction of phenomenological models from numerical scalar time series // *Physica D.* 1992 Vol.5 8. P.202.
5. *Gouesbet G., Letellier C.* Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // *Phys.Rev. E.* 1994. Vol.49. P. 4955.
6. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // *Радиотехника и электроника.* 1994. Т. 39, В.2. С. 269.
7. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // *Письма в ЖТФ.* 1997. Т. 23. № 8. С. 7.
8. *Kadtke J.* Classification of highly noisy signals using global dynamical models // *Phys.Lett. A.* 1995. Vol. 203. P. 196.
9. *Kadtke J., Kremliovsky M.* Estimating statistics for detecting determinism using global dynamical models // *Phys.Lett. A.* 1997. Vol. 229. P. 97.
10. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N.* Global reconstruction in application to multi-channel communication // *Phys.Rev. E.* 1998. Vol.57, № 2. P. 2455.
11. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev.Lett.* 1987. Vol.59. P. 845.
12. *Casdagli M.* Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D.* 1989. Vol. 35. P. 335.
13. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics / Eds. D.Rang and L.S.Young.* Warwick, 1980. Vol. 898 (Springer, Berlin). P. 366.
14. *Scheffczyk G., Parlitz U., Kurz T., Knop W., Lauterborn W.* Comparison of bifurcation structures of driven dissipative nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol.43, № 12. P.6495.
15. *Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Сложная динамика возбуждаемого осциллятора с кусочно-линейной характеристикой // *Письма в ЖТФ.* 1994. Т. 20, №. 19. С. 75.

Саратовский государственный
университет
Высший колледж прикладных наук
Саратовский филиал ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 14.01.99
после переработки 19.02.99

RECONSTRUCTING EQUATIONS OF A NONAUTONOMOUS NONLINEAR OSCILLATOR FROM A TIME SERIES: MODELS, EXPERIMENT

B.P. Bezruchko, Ye.P. Seleznev, D.A. Smirnov

We present a procedure for constructing model differential equations of an oscillatory harmonically driven system from a scalars time series. The procedure uses a global reconstruction technique, and a priori information about the character of influence is taken into account. The procedure is tested using several well-known systems – nonlinear oscillators with different kinds of friction forces and potential functions. We demonstrate its effectiveness by applying it to several examples, including the dynamical systems with added noise and the real radioengineering system – nonlinear *RLC*-circuit with switched capacitors.



Безруко Борис Петрович – родился в 1946 году, окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1969). Профессор кафедры электроники и волновых процессов СГУ; ведущий научный сотрудник (по совместительству) Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН; доктор физико–математических наук. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментальной наблюдаемой. Имеет около 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Селезнев Евгений Петрович – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1990). Старший научный сотрудник Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН. Автор и соавтор 40 научных работ. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах.



Смирнов Дмитрий Алексеевич – родился в Ершове Саратовской области (1977). Студент 5–го курса Высшего колледжа прикладных наук СГУ, специализация – физика нелинейных динамических систем. Соросовский студент (1996 – 1999). Автор и соавтор 10 научных публикаций. Область научных интересов: конструирование динамических моделей по временным рядам.



ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ, БИСТАБИЛЬНОСТЬ И ХАОС В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ – ДУФФИНГА

А. К. Козлов, М. М. Суцук, Я. И. Мольков, А. С. Кузнецов

На основе анализа численных решений для системы двух генераторов Ван дер Поля – Дуффинга с нелинейной связью установлено наличие хаотических переключений (происходящих через нерегулярные интервалы времени) между двумя автоколебательными режимами, отличающимися друг от друга почти постоянными во времени значениями разности фаз колебаний взаимодействующих подсистем. Выполненный анализ включает в себя исследование бифуркаций периодических движений, соответствующих режимам синхронизации двух подсистем, построение границ областей устойчивости режимов синхронизации и установление сценариев перехода к хаосу.

Введение

Для описания качественных изменений поведения даже сравнительно сложных систем вблизи критических значений управляющих параметров во многих случаях используются модели малой размерности. Это выглядит вполне естественно с учетом теоремы о центральном многообразии и представлений о типичности, лежащих в основе синергетического подхода к моделированию коллективных эффектов в больших системах [1,2]. Существенно, что не только простые, но и сложно устроенные режимы в больших системах и переходы между ними зачастую могут адекватно описываться маломерными моделями. Поэтому детали их динамики привлекают сейчас внимание не только теоретиков, традиционно рассматривающих маломерные модели как испытательный полигон для строгих математических методов, но также исследователей, заинтересованных в решении прикладных задач. Именно прикладные аспекты играют существенную роль в выборе направлений исследований в тех случаях, когда даже маломерные модели оказываются слишком сложными для исчерпывающего анализа. В частности, они в значительной степени стимулировали исследования режимов, для которых определяющей переменной (параметром порядка) является разность фаз между взаимодействующими подсистемами. В последнее время особый интерес к таким исследованиям связан с изучением динамических механизмов координации ритмических движений и процессов в живых организмах, в частности, проявляющихся в психофизиологических опытах с человеком [3–8]. Так, более десяти лет назад была предложена и впоследствии развита модель Хакена – Келсо – Бунца, представляющая собой два автогенератора с нелинейным взаимодей-

ствием между ними, которое имитирует комбинированное влияние возбуждающей и тормозной синаптических связей в нейронных ансамблях. Использование комбинированной связи позволило осуществить динамическое моделирование особенностей координации движения пальцев руки человека относительно периодического внешнего стимула [9], взаимной координации движения разных конечностей (в частности, руки и ноги) [10], координации различных групп мышц одной и той же ноги при инициировании локомоторных движений человека нерезонансным вибрационным воздействием на мышцы [11,12]. Наиболее эффективным, с точки зрения разнообразия порождаемых динамических режимов, влияние такой связи оказывается в случае взаимодействия генераторов с сильной собственной нелинейностью и зависимостью частоты колебаний от амплитуды [11]. Именно эти факторы обеспечивают наличие широкой области значений параметров связи, в которой наблюдаются хаотические (то есть через нерегулярные промежутки времени) переходы между двумя достаточно протяженными во времени режимами с почти постоянными разностями фаз колебаний взаимодействующих автогенераторов. Как было недавно установлено [11], они качественно совпадают с наблюдаемыми произвольными переходами между шагательными движениями «вперед» и «назад» в экспериментах по инициированию локомоторных движений человека вибрационным воздействием на мышцы [12]. Исследованию режима таких переходов, именуемых в дальнейшем «переключениями», и приводящих к ним бифуркаций уделяется основное внимание в настоящей работе. Изучение роли комбинированной связи представляет интерес также и для многих других приложений, в частности, для моделирования феноменов динамического кодирования, запоминания и распознавания информации [13,14].

Основные уравнения

Рассматриваемая здесь динамическая система состоит из двух идентичных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга, связанных между собой нелинейной связью,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + F(x_1, x_2), \\ \dot{y}_1 &= \lambda(1-x_1^2)y_1 - \varepsilon x_1^3 - x_1, \\ \dot{x}_2 &= y_2 + F(x_2, x_1), \\ \dot{y}_2 &= \lambda(1-x_2^2)y_2 - \varepsilon x_2^3 - x_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Функция связи $F(x_1, x_2)$, как и в модели, представленной в [11], аппроксимирована кубической зависимостью

$$F(x_1, x_2) = \gamma(x_1 - x_2)[\alpha - (x_1 - x_2)^2] \quad (2)$$

и приближенно учитывает общие тенденции влияния синаптических связей, которые наиболее четко проявляются в следующих предельных случаях. При $\alpha \gg 1$ (здесь и далее $\gamma, \varepsilon, \lambda > 0$) линейное слагаемое в выражении (2) обеспечивает установление противофазных колебаний x_1 и x_2 , что имитирует действие тормозной связи. При $\alpha < 0$ или $0 < \alpha \ll 1$ устанавливаются соответственно синфазные или близкие к синфазным периодические колебания, что воспроизводит влияние возбуждающих связей (см., например, [15]). При конечных значениях $\alpha > 0$ кубическая нелинейность связи обеспечивает конкуренцию этих двух противоположных тенденций, которая и приводит к мультистабильности синхронизации и к перемежающейся смене режимов с почти постоянным сдвигом фаз на достаточно длинных интервалах времени.

Отмеченные выше тенденции становятся очевидными в квазигармоническом

приближении при $\gamma, \epsilon, \lambda \sim \mu \ll 1$, когда переменные x, y можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_j(t) &= a_j(t) \exp(i\varphi_j(t) + it) + \text{к. с.}, \\ y_j(t) &= i(a_j(t) \exp(i\varphi_j(t) + it) - \text{к. с.}), \end{aligned} \quad (3)$$

где a_j и φ_j — медленно меняющиеся во времени амплитуды и фазы колебаний связанных генераторов, которые в первом приближении по малому параметру μ удовлетворяют укороченным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1(1 - a_1^2) - \Gamma(a_1, a_2, \varphi)(a_1 - a_2 \cos \varphi), \\ \dot{a}_2 &= a_2(1 - a_2^2) - \Gamma(a_1, a_2, \varphi)(a_2 - a_1 \cos \varphi), \\ \dot{\varphi} &\equiv \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = C(a_2^2 - a_1^2) - \Gamma(a_1, a_2, \varphi)(a_1/a_2 + a_2/a_1) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Gamma(a_1, a_2, \varphi) = \gamma'(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \varphi - \alpha')$, $a_1a_2 \neq 0$, и введены новое время $t' = t\lambda/2$ и параметры $C = -3\epsilon/\lambda$, $\alpha' = \alpha/3$, $\gamma' = 3\gamma/\lambda$. В системе (4) тривиальное состояние равновесия $a_j = 0$ неустойчиво, а нетривиальные $a_j = a_j^*$, $\varphi = \varphi^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*$, обозначаемые в дальнейшем $S(a_1^*, a_2^*, \varphi^*)$, соответствуют периодическим решениям исходной системы (1), то есть синхронизации колебаний двух подсистем с постоянной разностью фаз $\varphi = \varphi^*$ между ними. При $\alpha' < 0$ система (4) имеет устойчивое состояние равновесия $S_0 = S(1, 1, 0)$ и седловое $S_\pi = S(a^\pi, a^\pi, \pi)$, которые соответствуют синфазным и противофазным колебаниям в исходной системе (1). При смене знака α' состояние равновесия S_0 становится седловым и от него рождаются два несимметричные ($\varphi^* = \pm\psi$, $\psi \neq 0, \pi$) устойчивые состояния равновесия $S_{+\psi} = S(1, 1, \psi)$ и $S_{-\psi} = S(1, 1, -\psi)$. При $\alpha^* = 4$ состояния равновесия $S_{+\psi}$ и $S_{-\psi}$ сливаются с состоянием равновесия S_π , которое при $\alpha' > 4$ становится устойчивым, как показано на рис. 1. Таким образом, даже в случае идентичных генераторов без частотной расстройки при малых надкритических значениях $\alpha' > 0$ нелинейность связи приводит после потери устойчивости режима синфазной синхронизации к

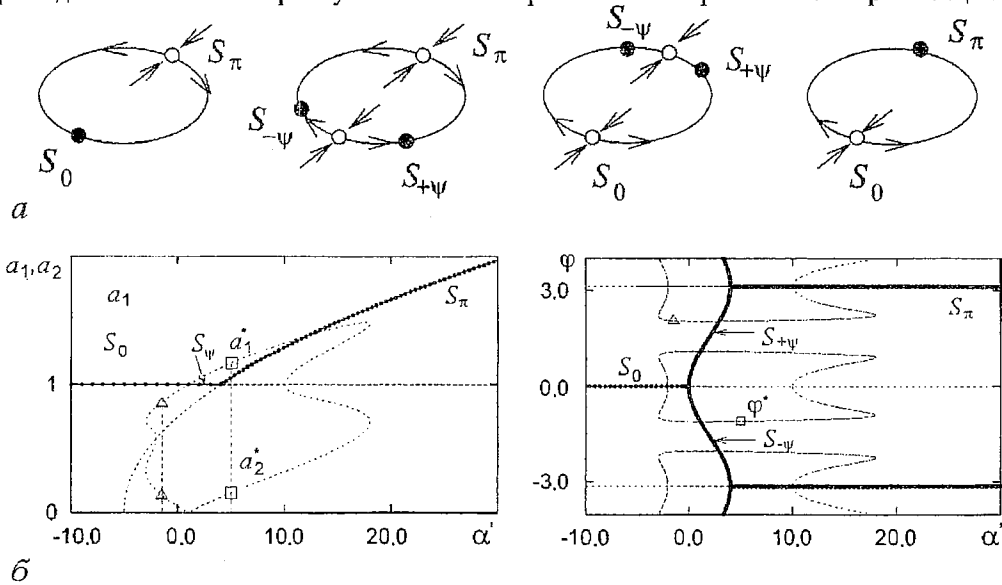


Рис. 1. *a* — последовательность бифуркаций в укороченной системе при изменении параметра α' ; *b* — зависимости амплитуд a_1, a_2 и фазы φ периодических решений от α' (черные точки — устойчивые ветви, пунктир — неустойчивые). При прохождении одной из амплитуд седлового решения через ноль происходит изменение фазы на π . Для иллюстрации этого на рисунке указаны значения a_1^*, a_2^*, φ^* одного из седловых решений для двух значений α' : 5.0 (квадраты), -1.5 (треугольники)

появлению режимов несимметричных колебаний с постоянным сдвигом фаз между подсистемами.

Бифуркации в исходной системе нелинейно взаимодействующих генераторов Ван дер Поля – Дуффинга

Конкретный анализ бифуркаций в настоящей работе проведен при фиксированных значениях параметров $\lambda=0.5, \epsilon=1$.

При малых значениях γ , то есть при слабой связи, исходная система (1) демонстрирует хорошее соответствие укороченной системе уравнений (4). А именно, с ростом α периодическое решение Γ_0 , соответствующее тождественной синхронизации подсистем, теряет устойчивость при $\alpha=0$ и становится седловым; от него рождаются два устойчивых периодических решения $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$, различающиеся в основном почти постоянным сдвигом фаз между реализациями $x_1(t), x_2(t)$, как видно из

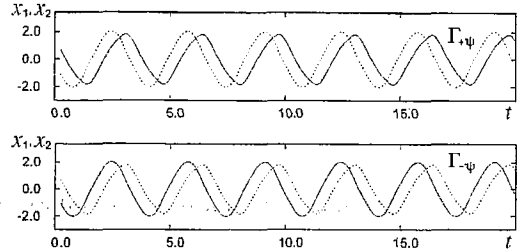


Рис. 2. Временные реализации, соответствующие периодическим решениям $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$: $x_1(t)$ – сплошные линии, $x_2(t)$ – пунктир

рис. 2. Эволюцию периодических решений $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$ с изменением α при различных значениях γ иллюстрируют бифуркационные диаграммы на рис. 3. На диаграмме построены ветви $X_1(\alpha)$, где X_1 – максимальные значения $x_1(t)$ на периоде колебаний для различных решений. Отметим, что (как и для укороченной системы (4)) наряду с решениями $\Gamma_0, \Gamma_\pi, \Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$ в фазовом пространстве системы (1) существуют

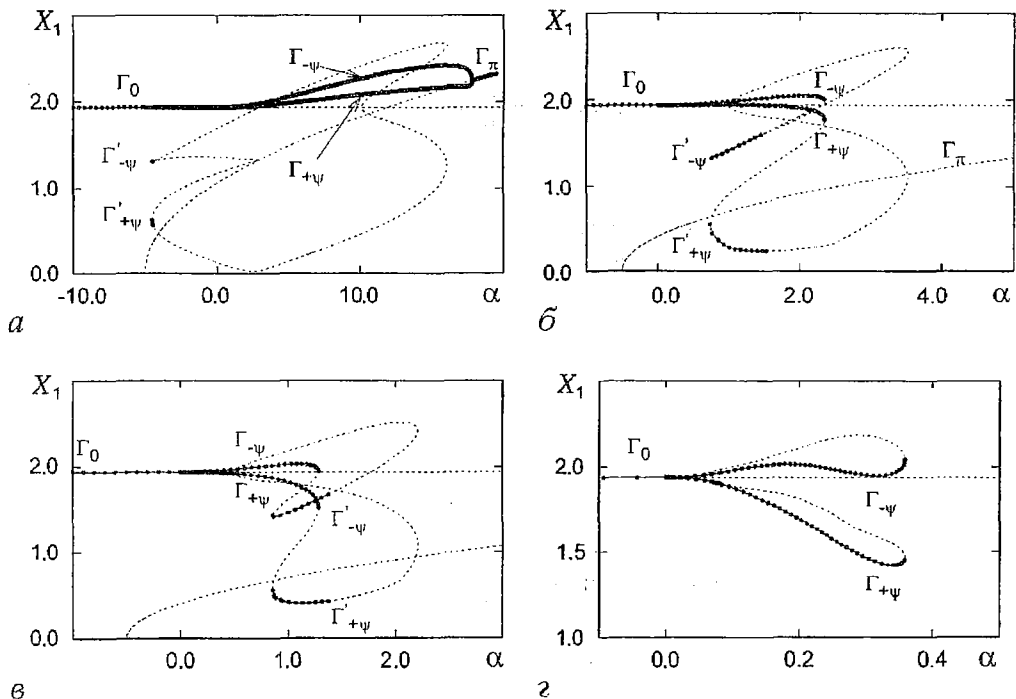


Рис. 3. Бифуркации периодических решений в системе (1) для различных значений γ : а – 0.05, б – 0.5, в – 1.0, г – 10.0 (жирными черными точками обозначены устойчивые ветви, пунктиром – неустойчивые)

несимметричные седловые решения. Кроме того, появляются устойчивые несимметричные решения $\Gamma_{+\psi'}$ и $\Gamma_{-\psi'}$.

Как видно из рис. 3, *a*, при малых значениях γ с ростом α периодические решения $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$ исчезают, сливаясь с седловым периодическим решением Γ_{π} , которое становится устойчивым (мультипликатор периодического решения Γ_{π} пересекает единичную окружность через +1). Этой бифуркации на двухпараметрической диаграмме, приведенной на рис. 4, соответствует отрезок кривой l_0 . Бифуркационный сценарий, предсказанный по укороченным уравнениям (4), реализуется в исходной системе (1) только при слабой связи $\gamma \ll 1$ (ср. рис. 1, *b* и рис. 3, *a*). В этом случае нелинейная связь существенно меньше собственной нелинейности генераторов $\gamma \ll \lambda \sim 1$. Увеличение связи γ приводит к качественному изменению бифуркационной диаграммы – теперь с ростом α периодические решения $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$ или $\Gamma_{+\psi'}$, $\Gamma_{-\psi'}$ могут терять устойчивость, не достигая решения Γ_{π} . При этом в системе могут наблюдаться хаотические колебания.

В точке *A* на рис. 4 при значениях γ чуть больше, чем $\gamma=0.05$, для которого приведен рис. 3, *a*, происходит слияние периодических решений Γ_{π} , $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$ и попарно двух седловых. Из точки *A* выходят две ветви l_0 , l_0' бифуркационной границы, отвечающей мультипликатору +1 периодического решения Γ_{π} , а также кривая m_0 , соответствующая бифуркации слияния устойчивых периодических решений $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$ с седловыми решениями. Точка *B* является точкой пересечения кривой l_0' с линией r_0 , соответствующей появлению у решения Γ_{π} пары комплексно-сопряженных мультипликаторов $\exp(\pm i\sigma)$. В точке *B* у решения Γ_{π} два мультипликатора переходят через +1. Кривая l_1 аналогична кривой l_0' , а точка *C* – точке *B*.

При достаточно больших значениях α , лежащих над кривой n_0 , в фазовом пространстве системы появляются две пары (с учетом инвариантности относительно замены $x_1 \leftrightarrow x_2$, $y_1 \leftrightarrow y_2$) состояний равновесия: O_1 (O_1') и O_2 (O_2'). Одна из них, O_1 (O_1'), устойчива в области на рис. 4, расположенной между кривыми h_1 и h_2 , являющимися соответственно опасной и безопасной границами устойчивости.

При достаточно сильной связи, то есть с ростом α внутри области устойчивости состояний равновесия, автоколебания в системе связанных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга прекращаются.

Область Ω_{π} существования устойчивого периодического решения Γ_{π} ограничена на рис. 4 линиями l_0 , l_0' , r_0 , l_1 .

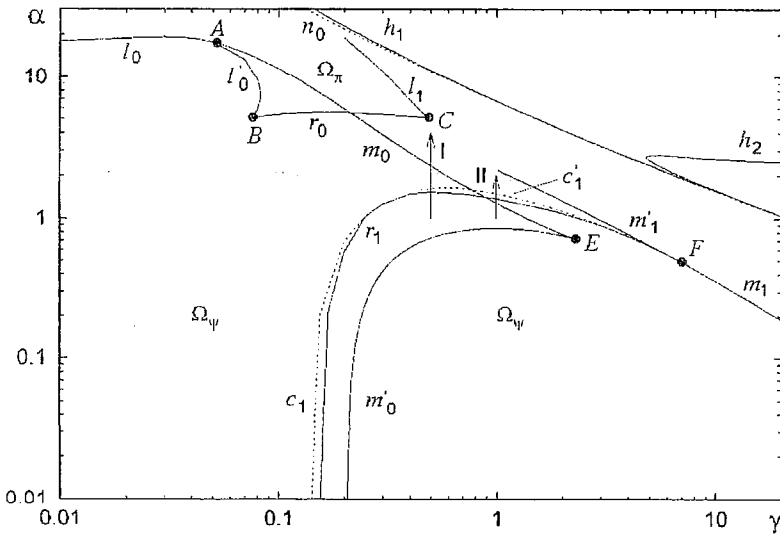


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров γ , α

Устойчивые несимметричные периодические решения могут существовать при достаточно малых положительных значениях α и с ростом α исчезают. Область Ω_ψ существования этих решений расположена ниже кривых l_0 и m_0 , описанных выше, или границы r_1 (при $\gamma \geq 1$), отвечающей рождению тора, и линии слияния устойчивых периодических решений с седловыми решениями — m_1 . Устойчивые решения $\Gamma_{+\psi'}$, $\Gamma_{-\psi'}$ (см. также рис. 3) сосуществуют с решениями $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$ в области ниже кривых r_1 , m_0 и выше m_0' в области сборки, берущей начало в точке E . Кривая рождения торов r_1 примыкает к бифуркационной границе m_1 в точке F , где у периодических решений $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$ два мультипликатора становятся равными +1.

Области Ω_π и Ω_ψ перекрываются между кривыми l_0' , r_0 , m_0 , где при варьировании параметра α наблюдается гистерезис между устойчивыми решениями Γ_π и $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$.

Сценарии переходов к хаосу и хаотические режимы

Основным предметом настоящих исследований являются нерегулярные переключения, о которых речь шла во Введении. Их возникновение практически совпадает с переходами к хаосу в исследуемой системе по сценариям, которые реализуются при потере устойчивости периодических решений $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$ или $\Gamma_{+\psi'}$, $\Gamma_{-\psi'}$. Если при этом состояние системы не оказывается в области притяжения другой траектории, то такие сценарии наблюдаются в численных экспериментах при пересечении границы m_0 на участке между линиями r_0 и r_1 (сценарий I) и границы r_1 на участке между линией m_0 и точкой F (сценарий II). Относительно этих сценариев на основе численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

Сценарий I. Однопараметрическая диаграмма состояний и отображения Пуанкаре, приведенные на рис. 5, отражают перестройки притягивающих

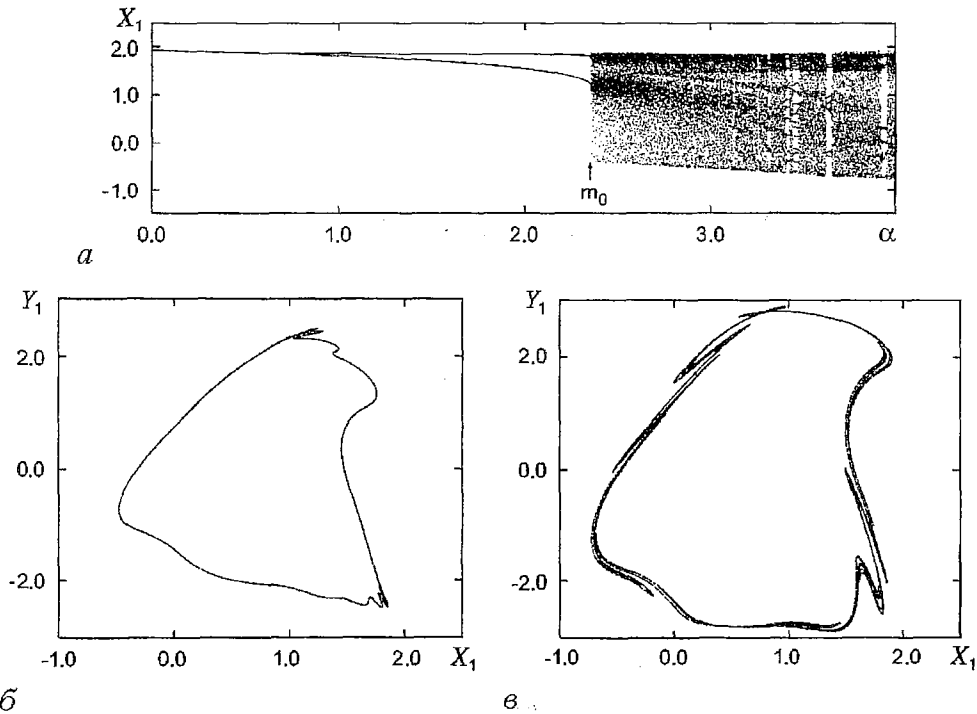


Рис. 5. Переход к хаосу через перемежаемость (сценарий I): а — диаграмма состояний при $\gamma=0.5$ (стрелкой указано бифуркационное значение параметра α , отвечающее границе m_0 на рис. 4); траектории отображения Пуанкаре при $\alpha=2.8$ (б) и $\alpha=3.8$ (в)

множеств в системе (1) при $\gamma=0.5$ и квазистатическом изменении параметра α . По осям отложены величины X_1, Y_1 – значения координат x_1, y_1 , взятые на пересечении решения с гиперплоскостью $\Pi: y_1+y_2=0$. На рис. 5, а совмещены две диаграммы, относящиеся к решениям $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$. Устойчивым периодическим решениям соответствуют на диаграмме сплошные линии, хаотическим колебаниям – диффузное распределение точек. Из рис. 5, а видно, что хаотические колебания устанавливаются сразу после пересечения границы m_0 и существуют в широком диапазоне значений α . Структура притягивающего множества в окрестности границы m_0 , сечение которого гиперплоскостью Π приведено на рис. 5, б, позволяет предположить, что хаотический аттрактор возникает при седло–узловой бифуркации периодических решений $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$, лежащих на поверхности негладкого тора [16]. Этот сценарий соответствует переходу к хаосу через перемежаемость типа I [17].

Сценарий II. При пересечении границы r_1 между кривой m_0 и точкой F с изменением параметра α в направлении, указанном на рис. 4 стрелкой II, от периодических решений $\Gamma_{+\psi'}, \Gamma_{-\psi'}$ или $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$ рождаются устойчивые торы. Торы существуют в малой окрестности бифуркационной границы r_1 . С увеличением α торы разрушаются на границе c_1' в результате образования резонансных периодических решений и прохождения комплекса связанных с ними бифуркаций до образования притягивающей гомоклинической структуры [18]. Однопараметрическая диаграмма состояний и характерные траектории отображений Пуанкаре при $\gamma=1.0$ приведены на рис. 6. Из рисунка видно, что с ростом α первоначальная гомоклиническая структура разрушается и в результате образуется хаотический аттрактор с качественно такими же свойствами диаграммы состояний и отображения Пуанкаре, как и в предыдущем сценарии.

Хаотические аттракторы, возникающие в системе (1) в результате сценариев I и II симметричны относительно замены переменных $x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2$ за счет симметрии самой системы. В отличие от [19], где были рассмотрены два генератора Ван дер Поля с неодинаковой нелинейной связью, в системе (1) нехаотические аттракторы, а предельные циклы претерпевали бифуркацию разрушения симметрии, и в рассмотренной области параметров мультистабильность на хаотических аттракторах не наблюдалась.

Хаотические колебания с двумя метастабильными состояниями

Из рассмотрения сценариев I, II перехода к хаосу видно, что в системе двух генераторов Ван дер Поля – Дуффинга (1) с нелинейной связью при исчезновении несимметричных устойчивых периодических решений с различными фазовыми соотношениями между колебаниями парциальных подсистем возможно установление хаотических движений которые сохраняются в обширной области значений параметров связи. Хаотический аттрактор, определяющий эти колебания, формируется вблизи границ, отвечающих слиянию устойчивых периодических решений с седловыми решениями или образованию притягивающей гомоклинической структуры. В обоих случаях рождается предельное множество, траектории на котором относительно большое время проводят в окрестностях потерявших устойчивость (или исчезнувших) периодических решений $\Gamma_{+\psi'}, \Gamma_{-\psi'}$ или $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$, отвечающих синхронным колебаниям парциальных подсистем с фазовыми сдвигами разного знака (рис. 7).

При вычислении разности фаз $\varphi(t)=\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$ колебаний $x_1(t), x_2(t)$ использовалось определение мгновенной (гильбертовой) фазы [20], что в случае

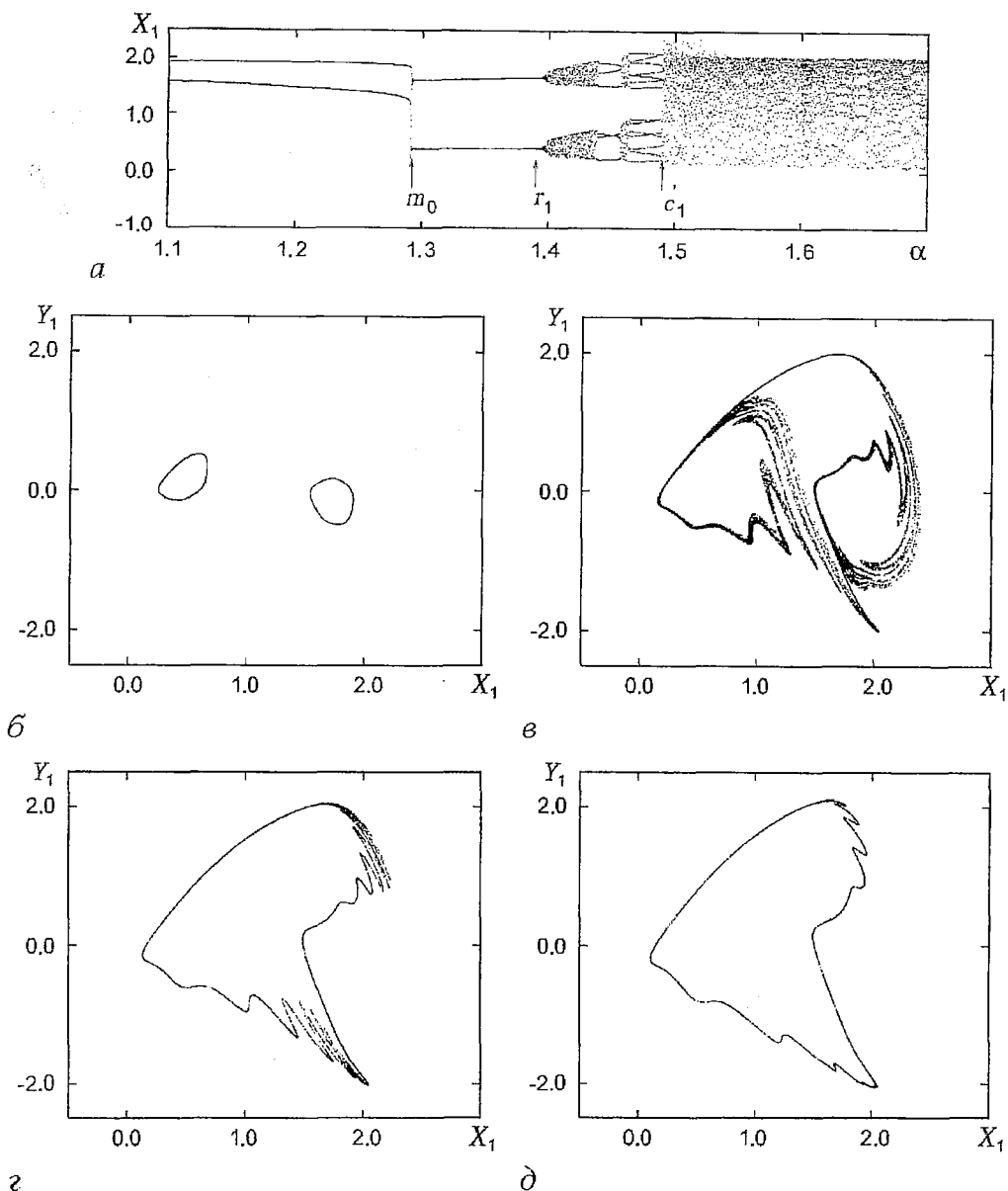


Рис. 6. Переход к хаосу через разрушение торов и образование притягивающей гомоклинической структуры (сценарий II): а – диаграмма состояний при $\gamma=1.0$ (стрелками указаны значения параметра α , соответствующие бифуркационным границам на рис. 4); траектории отображения Пуанкаре при различных α : б – 1.42; в – 1.494; г – 1.525; д – 1.6

хаотических колебаний с узким спектром вполне корректно [21]. Наиболее выраженные «переключения» между двумя хорошо различимыми почти периодическими метастабильными состояниями свойственны описанному выше сценарию I. Типичные реализации, включая вычисленную разность фаз между колебаниями подсистем, соответствующие такому режиму, приведены на рис. 7. В сценарии II реализуется подобное поведение, однако нерегулярные переходы осуществляются между двумя разными, но сложно изменяющимися во времени колебаниями, которые, вообще говоря, не ассоциируются с взаимно синхронизованным поведением.

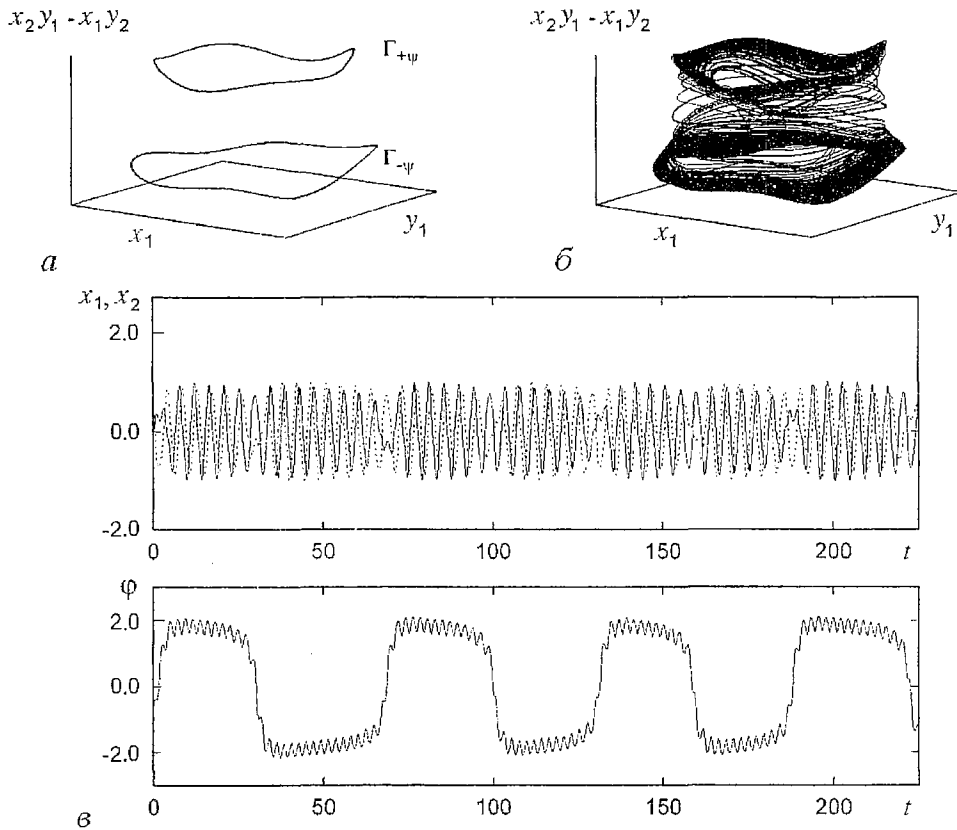


Рис. 7. Режим хаотических переключений между колебаниями с опережением и запаздыванием фазы: а – периодические решения Γ_0 , $\Gamma_{+\psi}$, $\Gamma_{-\psi}$ при докритических значениях параметров $\gamma=0.5$, $\alpha=2.3$; б – хаотический аттрактор при $\gamma=0.5$, $\alpha=2.5$; в – хаотические реализации $x_1(t)$ (сплошная линия), $x_2(t)$ (пунктир) и разность фаз между ними

Синхронизация в ансамбле нелинейно связанных осцилляторов

Заметим, что хаотические колебания в рассматриваемой системе вызваны нелинейным взаимодействием осцилляторов, демонстрирующих периодическую собственную динамику. Взаимные связи формируют замкнутый круг и играют роль цепи управления, с помощью которой осцилляторы обмениваются информацией об их фазовых соотношениях. Разность фаз пары осцилляторов может обладать хаотическим поведением, что позволяет нам рассматривать данную систему как хаотический генератор. Возможность воспроизведения хаотического сигнала такого типа в принимающей системе, то есть хаотическая синхронизация, недостаточно изучена и может иметь практический интерес [19].

По аналогии с системами фазовой синхронизации мы предлагаем простую технологию для построения схемы синхронного отклика, аналогичной предложенной в [22, 23]. Для достижения синхронности колебаний в случае двух пар связанных осцилляторов (два в управляющей системе и два в управляемой) одна из двух связей в управляемой системе должна быть разомкнута и заменена воздействием от управляющей системы, как это показано на рис. 8. Следовательно, уравнения для управляющей (x_1, y_1, x_2, y_2) и управляемой (x_1', y_1', x_2', y_2') систем записываются в форме

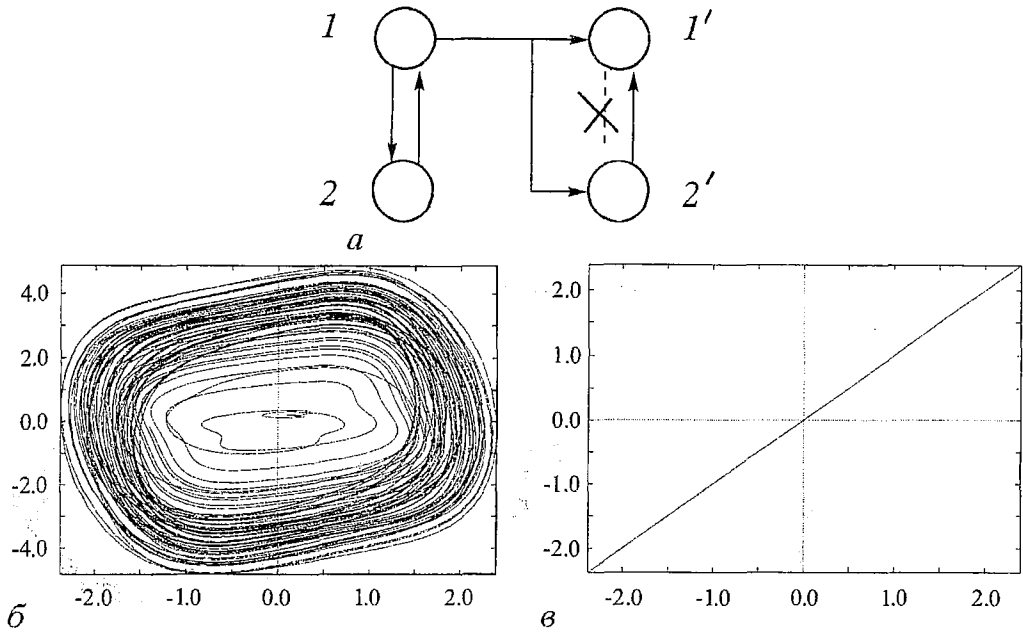


Рис. 8. Хаотическая синхронизация в системе двух связанных осцилляторов; *а* – схематическое представление управляющей и управляемой систем; *б* – проекция хаотической реализации на плоскость (x_2, y_2) ; *в* – проекция хаотической реализации на плоскость $(x_2'(t), x_2(t))$ (фигура Лиссажу)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1 + \gamma(x_1 - x_2)[\alpha - (x_1 - x_2)^2], \\
 \dot{y}_1 &= \lambda(1 - x_1^2)y_1 - \epsilon x_1^3 - x_1, \\
 \dot{x}_2 &= y_2 + \gamma(x_2 - x_1)[\alpha - (x_2 - x_1)^2], \\
 \dot{y}_2 &= \lambda(1 - x_2^2)y_2 - \epsilon x_2^3 - x_2, \\
 \dot{x}_1' &= y_1' + \gamma(x_1 - x_2')[\alpha - (x_1 - x_2')^2], \\
 \dot{y}_1' &= \lambda(1 - x_1'^2)y_1' - \epsilon x_1'^3 - x_1', \\
 \dot{x}_2' &= y_2' + \gamma(x_2' - x_1)[\alpha - (x_2' - x_1)^2], \\
 \dot{y}_2' &= \lambda(1 - x_2'^2)y_2' - \epsilon x_2'^3 - x_2'.
 \end{aligned}$$

Из рис. 8, *б*, *с* очевидно, что рассматриваемая схема демонстрирует строгую синхронизацию управляющей и управляемой систем.

Доказано, что аналогичную конструкцию полезно использовать для синхронизации двух ансамблей связанных осцилляторов. Мы используем тот факт, что хаотические колебания наблюдаются только при достаточно сильных связях в уравнении (1). Это обеспечивает быстрые переходные процессы и необходимую грубость синхронных решений для схемы синхронного отклика. Последнее свойство позволяет нам реализовать схему хаотической синхронизации для больших ансамблей, состоящих из N нелинейно связанных осцилляторов в управляющей системе и $N-1$ осцилляторов в управляемой, используя один единственный компонент решения управляющей системы (рис. 9). Колебания управляющей и управляемой систем в хаотическом режиме синхронизованы попарно: $2 - 2', \dots, (N-2) - (N-2)'$, тогда как колебания внутри каждого ансамбля остаются несинхронными.

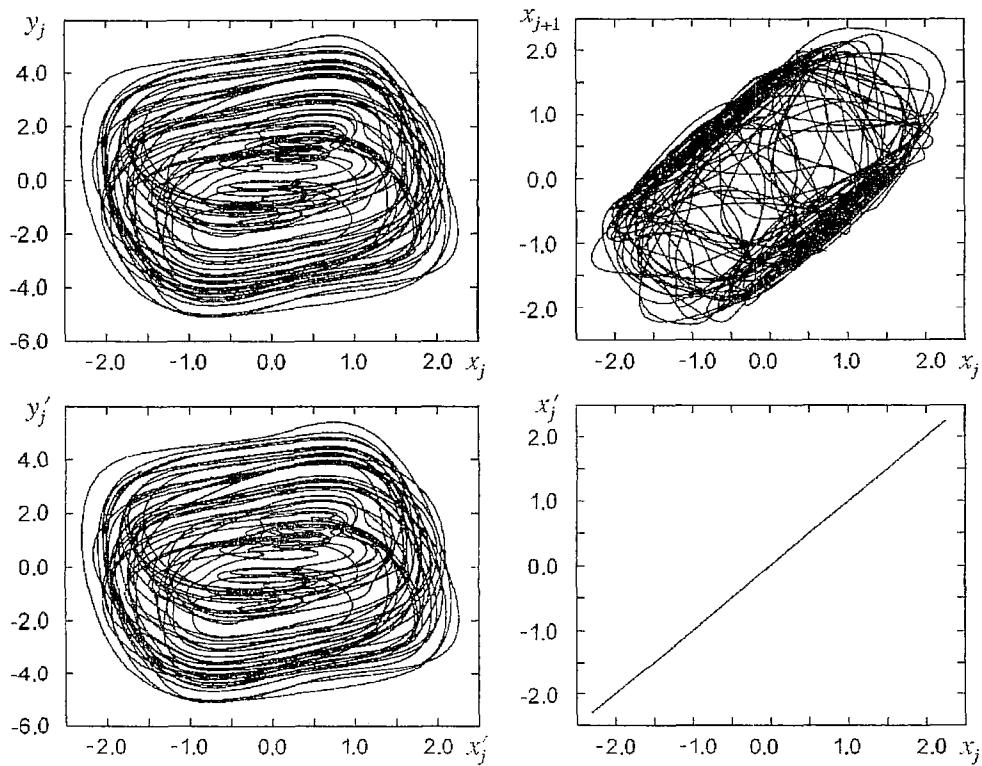
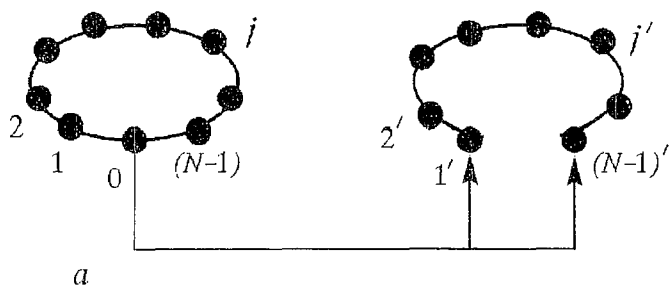


Рис. 9. Хаотическая синхронизация в большом ансамбле осцилляторов с нелинейными локальными связями: а – схематическое представление системы; б – проекция хаотической реализации ($N=11$)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-02-16559 и 97-02-17526), а также Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант 96-02-96593).

Библиографический список

1. Haken H. Advanced synergetics. 2nd edition. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1987.
2. Haken H. Information and Self-Organization. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1988.
3. Haken H., Kelso J.A.S., Bunz H. A theoretical model of phase transitions in human hand movements // Biol. Cybern. 1985. Vol. 51. P. 347.
4. Kelso J.A.S., Scholz J.P., Schönner G. Nonequilibrium phase transitions in coordinated biological motions: critical fluctuations // Phys. Lett. 1986. Vol. 118. P. 279.

5. *Schöner G., Kelso J. A.S.* Dynamic pattern generation in behavior and neural systems // *Science*. 1988. Vol. 239. P. 1513.

6. *Buchanan J.J., Kelso J.A.S., Fuchs A.* Coordination dynamics of trajectory formation // *Biol. Cybern.* 1995. Vol. 74, № 1. P. 41.

7. *Fuchs A., Jirsa V. K., Haken H., Kelso J. A. S.* Extending the HKB model of coordinated movement to oscillators with different eigen frequencies // *Biol. Cybern.* 1996. Vol. 74, № 1. P. 21.

8. *Sternad D., Turvey M. T., Schmidt R. C.* Average phase difference theory and 1:1 phase entrainment in interlimb coordination // *Biol. Cybern.* 1992. Vol. 67. P. 223.

9. *Kelso J. A. S., Delcolle J. D., Schöner G.* Action-perception as a pattern formation process / Ed. Jeannerod M. *Attention and Performance XIII*. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1990. P. 136.

10. *Kelso J. A. S., Jeka J. J.* Symmetry breaking dynamics of human multilimb coordination. // *J. Exp. Psychol. Hum. Percept. Perform.* 1992. Vol. 18. P. 645.

11. *Molkov Ya.I., Sushchik M.M., Kuznetsov A. S., Kozlov A. K., Zacharov D.G.* Dynamical model for locomotor-like movements of humans // *Proc. 1998. Int. Symp. on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98)*. Crans – Montana Switzerland. Sep. 14–17 1998. Vol. 3. P. 1325.

12. *Gurafinkel V. S., Levik Yu. S., Kazennikov O.V., Selinov V. A.* Locomotor-like movements evoked by leg muscle vibration in humans // *European J. Neuroscience*. 1998. Vol. 10. P. 1608.

13. *Козлов А.К., Хуэрта Р., Рабинович М.И., Абарбанель Г.Д.И., Баженов М.В.* Нейронные ансамбли с балансной связью как приемники информации // *Док. РАН*. 1997. Т. 357, № 6. С. 752.

14. *Козлов А.К., Баженов М.В., Хуэрта Р., Рабинович М.И.* Мультистабильность в нейронных ансамблях с балансной связью // *Вестник Нижегородского университета (принято в печать)*.

15. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суццик М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *УФН*. 1996. Т. 166. С. 363.

16. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций / *Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления*. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5. С. 32.

17. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.

18. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

19. *Pastor-Diaz I., Lopez-Fraguas A.* Dynamics of two Van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52(2). P. 1480.

20. *Panter P.* Modulation, Noise, and Spectral Analysis. New York: McGraw-Hill, 1965.

21. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // *Physica D*. 1997. Vol. 104. P. 219.

22. *Pekora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic system // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64(8). P. 821.

22. *Volkovskii A.R., Rulkov N.F.* Synchronous chaotic response of a nonlinear oscillator system as a principle for the detection of the information component of chaos // *Tech. Phys. Lett.* 1993. Vol. 19(2). P. 97.

23. *Kozlov A.K., Shalfeev V.D.* Selective suppression of deterministic chaotic signals // *Tech. Phys. Lett.* 1993. Vol. 19(12). P. 769.

Институт прикладной физики РАН Поступила в редакцию 5.01.99
Нижний Новгород

SIMMETRY BREAKING, MULTISTABILITY AND CHAOS IN THE SYSTEM OF TWO COUPLED IDENTICAL VAN DER POL – DUFFING OSCILLATORS

A. K. Kozlov, M. M. Sushchik, Ya. I. Molkov, A. S. Kuznetsov

The phase bistability occurring at synchronization of two identical Van der Pol – Duffing oscillators with cubic nonlinear coupling is considered. Two scenarios of the transition to chaos were revealed for finite values of the coupling nonlinearity. The chaos in the system is observed in a wide range of coupling parameters.



Козлов Александр Константинович – выпускник радиофизического факультета Нижегородского государственного университета (1989). Работал в НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ (с 1989 по 1998), а затем в Институте прикладной физики РАН (с 1995). Кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: нелинейная динамика автоколебательных систем, явления синхронизации, управление хаотическими динамическими системами в приложении к нейробиологическим и медицинским задачам.



Суицк Михаил Михайлович – родился в г. Городня Черниговской обл. (1941), окончил радиофизический факультет Нижегородского Государственного Университета (1965). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972). Заместитель директора Отделения нелинейной динамики и оптики Института прикладной физики РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика, синхронизация, когерентные структуры и модели нейродинамики.



Мольков Ярослав Игоревич – родился в Нижнем Новгороде (1974). Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1996). По окончании поступил в аспирантуру Института прикладной физики РАН. Работает в том же институте в должности младшего научного сотрудника. Область научных интересов: нелинейная динамика.



Кузнецов Алексей Сергеевич – родился в 1973 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского в 1996 году. По окончании поступил в аспирантуру того же университета на кафедру теории колебаний. С 1995 года работает в Институте прикладной физики РАН, с 1998 года в должности младшего научного сотрудника. Опубликовал около 20 работ. Занимается исследованием нелинейной динамики ансамблей связанных активных элементов, в том числе в приложении к биологическим задачам.



ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ НЕУПОРЯДОЧЕННОСТЬЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ ПАТТЕРНОВ В ЦЕПОЧКАХ ХАОТИЧЕСКИХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Л.Л. Рубчинский, М.М. Суцук

На примере цепочек, составленных из идентичных генераторов Чуа или идентичных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с гармонической внешней силой, продемонстрировано, что при нелинейности связи возможно возникновение такой мультистабильности, при которой более нерегулярные в пространстве паттерны обладают более простым поведением во времени.

1. Сложные пространственно–временные паттерны в распределенных системах формируются в результате развития иерархии неустойчивостей при увеличении надкритичности. На начальном этапе их формирования иногда удается выделить два крайних случая, обычно реализующихся в разных системах (см., например, [1]). В одном из них увеличение надкритичности приводит к усложнению пространственной структуры без существенного усложнения временной динамики. В частности, такой сценарий наблюдается в подогреваемом снизу слое жидкости при больших числах Прандтля. В другом случае сложное временное поведение, в том числе и хаотическое, может возникнуть практически без изменения упорядоченной пространственной структуры, как, например, в цилиндрическом течении Куэтта.

При дальнейшем увеличении надкритичности изменения пространственной структуры и временного поведения становятся взаимосвязанными. Как правило, для данной системы наблюдается прямая взаимосвязь – усложнение пространственной структуры ведет к усложнению временного поведения. Это выглядит вполне естественно с учетом зависимости размерности хаоса от числа коллективных возбуждений при больших значениях надкритичности [2]. В связи с этим возникает вопрос, а возможна ли ситуация, когда реализуется обратная взаимосвязь, когда в одной и той же системе более нерегулярным пространственным структурам соответствует более простое поведение во времени. В частности, могут ли в однородной системе при фиксированных значениях параметров сосуществовать два разных типа поведения: пространственно однородный режим, в котором возможна только хаотическая временная динамика, и пространственно неоднородные режимы (в том числе и пространственный беспорядок), в которых возможна регулярная временная динамика.

В настоящей работе приведены примеры сравнительно простых систем одномерных цепочек хаотических генераторов, для которых этот вопрос имеет положительный ответ, и на этих примерах проанализирован один из возможных

механизмов реализации обратной взаимосвязи между степенью неупорядоченности пространственных и временных паттернов. Мы исследуем обратную взаимосвязь паттернов (ОВП, Anomalous Relationship between spatial and temporal Patterns of behavior, ARP), обусловленную наличием мультистабильности (может быть, корректнее говорить – мультивариантности) режимов поведения отдельных элементов системы, и нами будут рассмотрены цепочки, составленные из идентичных генераторов Чуа [3–5] или идентичных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с внешней силой.

2. Генератор Чуа описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y. \end{aligned} \tag{1}$$

Для аппроксимации нелинейности схемы используется гладкая функция

$$h(x) = c_1 x^3 - 2c_0 x / (1 + c_0^2 x^2). \tag{2}$$

Бифуркации в такой форме схемы Чуа при интересующих нас значениях параметров исследовались в [6].

Цепочка таких элементов формируется с помощью нелинейной резистивной связи $D(\xi) = d \cdot \text{th}(\xi/\sigma)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \alpha(y_i - x_i - h(x_i)) + D(x_{i-1} - x_i) + D(x_{i+1} - x_i), \\ \dot{y}_i &= x_i - y_i + z_i, \\ \dot{z}_i &= -\beta y_i, \end{aligned} \tag{3}$$

где $i=1, \dots, N$; граничными условиями служат соотношения $(x_0, y_0, z_0) = (x_1, y_1, z_1)$ и $(x_N, y_N, z_N) = (x_{N+1}, y_{N+1}, z_{N+1})$ – цепочка со свободными концами.

В определенной области параметров (для определенности в дальнейшем $\alpha=6.32$, $\beta=10$, $c_0=0.65$, $c_1=0.05$, $d=0.2$, $\sigma=10^{-5}$) в системе имеется два пространственно однородных решения $(x_i, y_i, z_i)^{1,2} = \pm(x, y, z)$ с хаотической динамикой, совпадающей с динамикой индивидуального элемента (рис. 1), поскольку в этом

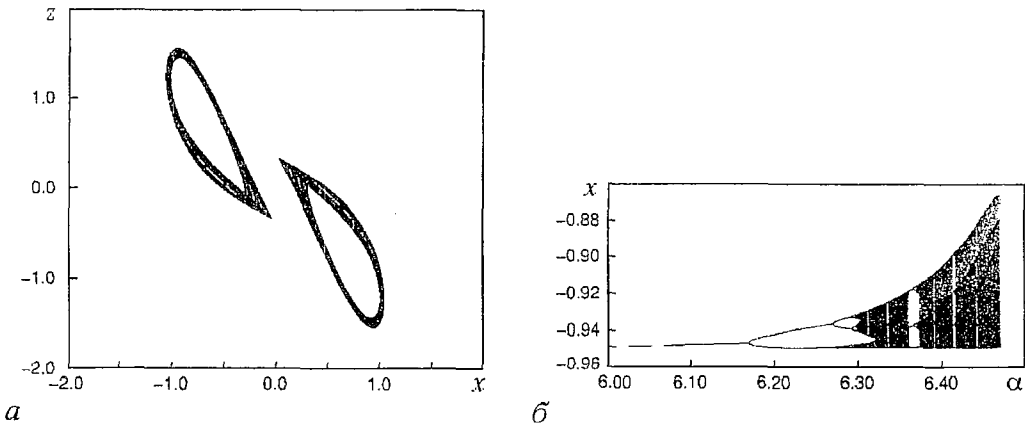


Рис. 1. Динамика изолированного элемента (1): а – странные аттракторы системы; б – каскад удвоений периода в (1), по вертикальной оси отложена x -координата пересечения траектории с плоскостью $y=0$

случае $D \equiv 0$. Эти два режима хаотической синхронизации являются устойчивыми по отношению к малым возмущениям и каждый из них обладает конечной, достаточно большой областью притяжения (по поводу хаотической синхронизации в цепочках генераторов Чуа см., например, [7,8]). Поскольку других нетривиальных однородных режимов в системе нет, то такая хаотическая синхронизация реализуется для большинства случаев, когда начальные значения всех переменных локализованы либо во втором, либо в четвертом квадранте.

Если же распределить начальные условия для различных элементов случайным образом во втором и четвертом квадрантах подобно тому, как на рис. 2,а, то в результате реализуется режим, качественно отличающийся от описанного выше. Пространственное распределение переменных станет неоднородным, а временное поведение элементов цепочки становится регулярным и генераторы Чуа генерируют периодические колебания (рис. 2). Недалеко отстоящие друг от друга генераторы в этом режиме часто оказываются взаимно синхронизованными. Далеко расположенные генераторы не синхронизованы (по крайней мере они не синхронизовались на временах проведения численного эксперимента, составлявших несколько тысяч единиц времени). Для иллюстрации на рис. 3 приведены фигуры Лиссажу для некоторых элементов. При других неоднородных начальных условиях опять устанавливается регулярный во времени режим с другой пространственной структурой. При соответствующем подборе начальных условий могут реализовываться и локально неоднородные режимы, в которых часть осцилляторов ведет себя хаотически, а часть – регулярно.

Полная система связанных осцилляторов Чуа обладает высокой степенью мультистабильности, но при случайном выборе начальных условий в рассматриваемом случае преимущественно реализуются регулярные во времени режимы.

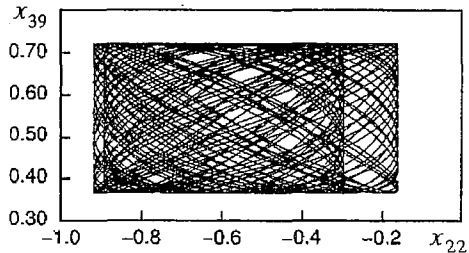
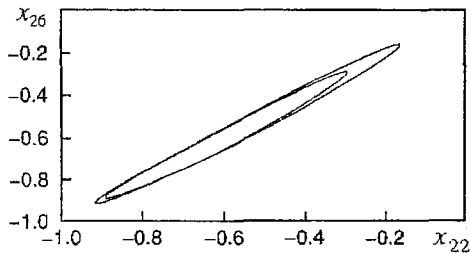


Рис. 3. Фигуры Лиссажу для нескольких элементов цепочки генераторов Чуа в неоднородном регулярном режиме

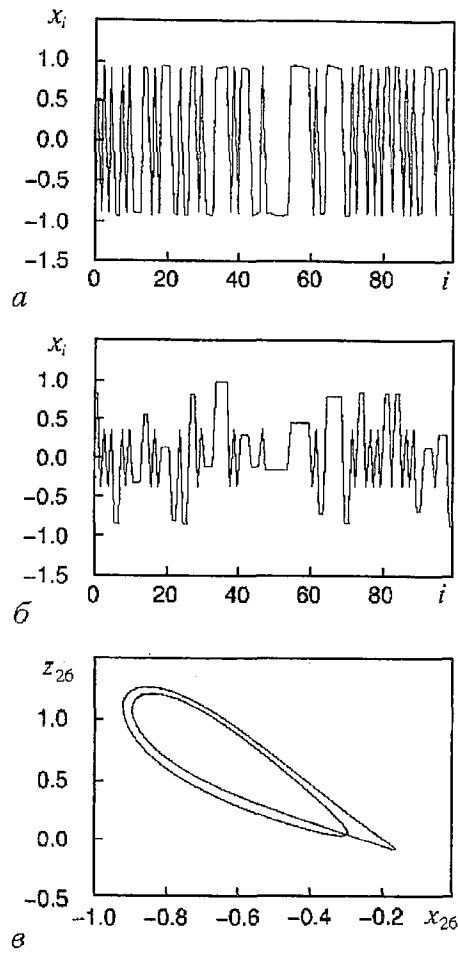


Рис. 2. Регулярный неоднородный режим в цепочке генераторов Чуа (3): а – начальные условия (для ясности рисунка изображены только x_i); б – пространственное распределение x_i в фиксированный момент времени в установленном режиме; в – проекция аттрактора (3) на плоскость (x_{26}, z_{26})

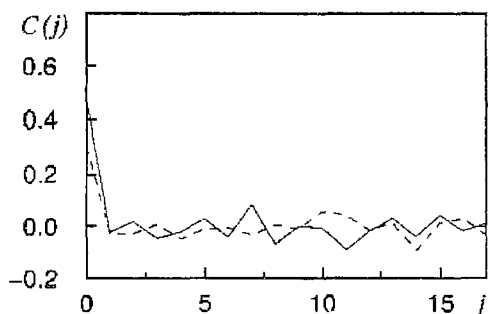


Рис. 4. Автокорреляционная функция пространственного распределения рис. 2, б (сплошная линия) и автокорреляционная функция последовательности чисел, сгенерированной генератором случайных чисел (штриховая линия)

Автокорреляционная функция пространственного распределения на рис. 2, б

$$C(j) = \langle (x_i - \langle x \rangle)(x_{i+j} - \langle x \rangle) \rangle,$$

где $\langle \rangle$ обозначает усреднение по массиву элементов, представлена на рис. 4 в сравнении с автокорреляционной функцией последовательности случайных чисел, полученных с помощью генератора случайных чисел нашего компьютера. Отсутствие корреляций между удаленными элементами указывает на наличие сравнительно беспорядочного пространственного паттерна.

3. Выше речь шла о цепочке, образованной с помощью диссипативных связей между элементами. Эффект ОВП может наблюдаться и в случае реактивной связи. Для примера рассмотрим цепочку осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x}_i - \mu(1-x_i^2)\dot{x}_i - \alpha x_i + \beta x_i^3 = f \cos \omega t + \tilde{D}(x_{i-1}-x_i) + \tilde{D}(x_{i+1}-x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

со свободными концами и функцией связи

$$\tilde{D}(\xi) = \begin{cases} a(\xi+a_1)/(a_0-a_1) & \xi < -a_0, \\ a\xi/a_0 & -a_0 \leq \xi \leq a_0, \\ a(\xi-a_1)/(a_0-a_1) & \xi > a_0, \end{cases}$$

где $\xi = x_{i+1} - x_i$, представляющей собой реактивное соединение с кусочно-линейной характеристикой. В качестве параметров связи в численных экспериментах с цепочкой из $N=100$ элементов мы полагали $a=0.2$, $a_0=5 \cdot 10^{-5}$, $a_1=0.7$.

Мы ограничимся рассмотрением случая $\mu=0.1$, $\alpha=\beta=0.5$, для которого динамика осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга была изучена достаточно подробно в зависимости от f и ω [9]. В частности, при $f=0.18$, $\omega=0.5$ система ведет себя хаотически [9] (рис. 5, а). При этих значениях параметров в изолированной системе нет мультистабильности, однако оказывается, что в цепочке связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга при одних и тех же параметрах возможны не только движения, охватывающие обе потенциальные ямы, но и движения, локализованные в каждой из потенциальных ям. Это и приводит к

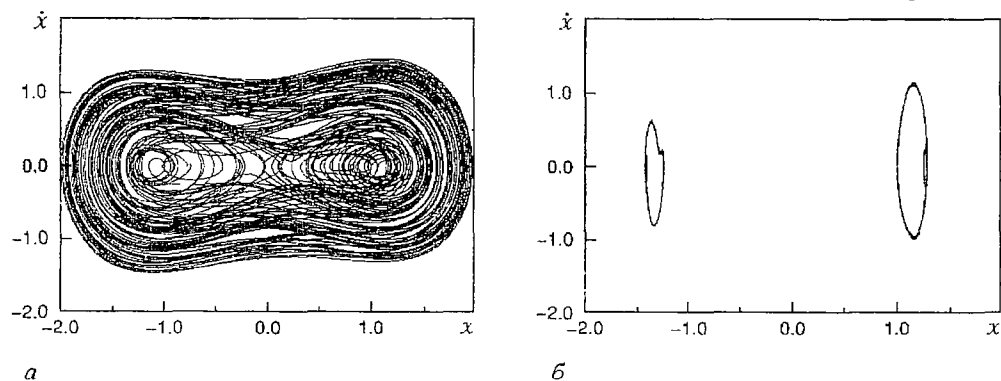


Рис. 5. а – фазовый портрет изолированного осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга с внешней силой; б – орбиты 22-го (слева) и 23-го (справа) элементов цепочки связанных осцилляторов в одних координатных осях

эффекту ОВП, когда пространственно однородное решение может быть только хаотическим во времени, а пространственно неоднородное может стать регулярным во времени.

Это проиллюстрировано рис. 5 и 6. При задании однородных начальных условий формируется хаотический во времени и однородный в пространстве устойчивый режим ($x_i(t)=x_j(t)$, $\dot{x}_i(t)=\dot{x}_j(t)$) в любой момент времени для любых i, j). Величина связи в этом режиме равна нулю и динамика каждого осциллятора совпадает с динамикой изолированного осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга (рис. 5, а). Задание неоднородных начальных условий (x_i такие же, например, как на рис. 2, а; y_i – в окрестности нуля) приводит к регуляризации движения – реализуется режим с нетривиальной пространственной структурой (см. рис. 6) и периодическим поведением во времени (динамика двух осцилляторов изображена на рис. 5, б).

Интересно отметить, что в отличие от случая с цепочкой генераторов Чуа, где удаленные друг от друга элементы хотя и обладали простой динамикой, но не были синхронизованы, в этом случае возможна их взаимная синхронизация (рис. 7). Причина такого различия требует специального рассмотрения, и здесь мы только отметим, что оно может быть вызвано качественным различием связей – диссипативных в первом случае и реактивных во втором.

4. Для иллюстрации возможного механизма ОВП рассмотрим вырожденный случай ОВП в цепочке генераторов Чуа, в которой каждый нечетный и четный элемент цепочки находится в своем парциальном фазовом пространстве в окрестности странных аттракторов системы SA_- и SA_+ (во втором и четвертом квадрантах (x, z) -плоскости – см. рис. 1, а), соответственно. Такой режим также реализуется при приведенных выше значениях параметров. Заметим, что если мы наложим периодические граничные условия на цепочку из нечетного числа элементов, мы будем иметь решение, эквивалентное соответствующему решению в системе двух связанных осцилляторов (хотя результаты относительно их устойчивости, разумеется, могут отличаться). Следовательно, можно один из возможных механизмов ОВП проиллюстрировать на примере двух связанных генераторов. Численное моделирование двух связанных генераторов (1) показало, что для SA_- начальных условий в одном из них и SA_+ – в другом, в определенном интервале d достигается регуляризация динамики. Влияние генератора на его соседа в асимптотике $(x_1-x_2) \gg \sigma$ эквивалентно появлению постоянного члена величины d в правой части уравнения для \dot{x} в (1). Это, как можно заключить из результатов [6], должно приводить к перемещению системы в пространстве параметров из области хаотического поведения в область каскада удвоения периода. В зависимости от величины d можно получить 1, 2, ..., n -периодические

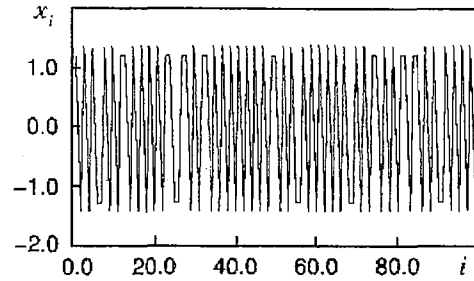


Рис. 6. Регулярный неоднородный режим в цепочке связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга (4): мгновенный снимок пространственного распределения x_i

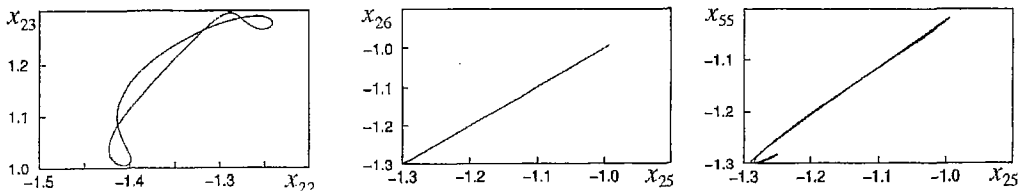


Рис. 7. Фигуры Лиссажу для нескольких элементов цепочки связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга в неоднородном регулярном режиме

движения (для малых d динамика будет хаотической). Аналогичная ситуация наблюдалась и в (3). Предложенный механизм ОВП может реализовываться в достаточно широком классе мультистабильных систем с хаотическим поведением.

5. В заключение сделаем два замечания. Во первых, в системах с ОВП задание неоднородных начальных условий (в частности, пространственного беспорядка) фактически приводит к регуляризации временной динамики. Такая регуляризация напоминает эффект, названный *taming spatiotemporal chaos with disorder* [10,11], в котором регуляризация изначально хаотической динамики цепочки осцилляторов достигается посредством неоднородного в пространстве разброса параметров осцилляторов цепочки. Очевидно, в этом случае система становится неоднородной. В отличие от этого, в описываемом нами случае сама система остается однородной, а пространственная неоднородность, которая и является первопричиной регуляризации динамики, формируется самосогласованным образом при соответствующем выборе начальных условий.

Второе замечание касается ограничения нашего рассмотрения предельной ситуацией, когда режимы хаотической синхронизации являются устойчивыми. Устойчивость достигается выбором большой крутизны функции связи D при нулевом аргументе. При уменьшении крутизны D синхронизация разрушается в первую очередь по отношению к длинноволновым возмущениям, так что пространственная упорядоченность сохраняется на достаточно больших расстояниях, динамика остается хаотической и, возможно, даже усложняется. Наряду с этим режимом, как и прежде, могут устойчиво существовать сильно неупорядоченные в пространстве режимы с более простой динамикой. Таким образом, качественное утверждение о наличии ОВП в рассматриваемых системах в отсутствие устойчивой хаотической синхронизации остается в силе, однако его конкретизация требует введения специальных количественных характеристик пространственно-временных паттернов, чему будет посвящено отдельное сообщение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 97-02-17526) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект 96-15-96593). Авторы признательны организаторам и участникам конференции Хаос-98 за интересные дискуссии.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Суцук М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. 1990. Т. 160, № 1. С.1.
2. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // ЖЭТФ. 1985. Т.89. С.92.
3. Чуа Л.О. Генезис схемы Чуа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 3-4. С. 4.
4. Chua's circuit: a paradigm for chaos. Singapore / Ed. Madan R.N. World Scientific. 1993.
5. Shilnikov L.P. Chua's Circuit: Rigorous results and future problems // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. Vol. 4, № 3. P. 489.
6. Кузнецов А.С. Динамика модифицированного осциллятора Чуа // Вестник ННГУ. Нелинейная динамика – Синхронизация и хаос. III. 1998.
7. Belykh V.N., Verichev N.N., Kocarev L., Chua L.O. On chaotic synchronization in a linear array of Chua's circuits // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 633.
8. Perez-Villar V., Munuzuri A.P., Munuzuri V., Chua L.O. Chaotic synchronization of a one-dimensional array of nonlinear active systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 4. P. 1067.
9. Venkatesan A., Lakshmanan M. Bifurcation and chaos in the double-well Duffing-Van der Pol oscillator: Numerical and analytical studies // Phys. Rev. E. 1997. Vol.56, № 6. P.6321.

10. Braiman Y., Lindner J.F., Ditto W.L. Taming spatiotemporal chaos with disorder // Nature. 1995. Vol. 378. P. 465.

11. Lindner J.F., Prusha B.S., Clay K.E. Optimal disorders for taming spatiotemporal chaos // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 231. P. 164.

Институт прикладной физики РАН
Нижний Новгород

Поступила в редакцию 29.12.98

DIRECT AND REVERSE RELATIONSHIP BETWEEN DISORDERED SPATIAL AND TEMPORAL PATTERNS IN ARRAYS OF CHAOTIC OSCILLATORS

L.L. Rubchinsky, M.M. Sushchik

An example of an array of identical Chua's circuits or identical Van der Pol – Duffing oscillators with external harmonic force is considered. It is established that, under nonlinear coupling, there occurs multistability at which the patterns that are more irregular in space possess simpler behaviour in time.



Рубчинский Леонид Львович – родился в 1974 году в Нижнем Новгороде. Окончил с отличием Нижегородский государственный университет (1995 бакалавр, 1997 магистр) и Калифорнийский университет, Сан Диего (1997 MS). В настоящее время аспирант Института прикладной физики РАН. Стипендиат Президента России и фонда Сороса. Область научных интересов – пространственно-временной хаос и структуры, синхронизация, нейронные сети, нелинейные динамические системы в биологии. Опубликовал ряд работ по вышеуказанным направлениям.

E-mail: leo@hale.appl.sci-nnov.ru



ОТ ПРОТИВОФАЗНОЙ К СИНФАЗНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СВЯЗАННЫХ МОДЕЛЯХ НЕЙРОНОВ

Д.Э. Постнов, О.В. Сосновцева, С.К. Хан

На языке бифуркационного анализа описаны наиболее важные переходы от противофазного резонанса, наблюдаемого при слабой связи к синфазной синхронизации при увеличении параметра взаимодействия. Исследована роль мультистабильности в устройстве области основного резонанса. Данная задача рассматривается на примере двух связанных моделей Мориса – Лекара.

Введение

Исследование малых нейронных ансамблей – одно из важных направлений обширной междисциплинарной области исследований по нейронам. В самом деле, первоначально чисто биологическая задача об особенностях функционирования нервной клетки оказалась удачной идеологической основой – парадигмой – для описания поведения самых разнообразных систем в терминах «воздействие – отклик». При этом в зависимости от конкретных задач уровень описания (сложность математической модели) отдельного нейрона варьирует от предельно упрощенных одномерных моделей «накопление – отклик», «integrate and fire» [1], до детально проработанных моделей конкретных типов нейронов. При этом число дифференциальных уравнений модели порой превышает два десятка!

Классической моделью одиночного нейрона принято считать четырехмерную модель Ходжкина – Хаксли [2]. Ее упрощением, а также путем феноменологического описания, было построено несколько различных моделей (для обзора см. [3]), общей чертой которых можно считать представление отдельного нейрона как осциллятора с некоторыми специфическими свойствами. На этом уровне рассмотрения главные свойства отдельного нейрона неплохо описываются двумерными моделями, наиболее известна из которых модель Мориса – Лекара [4].

В настоящей работе мы рассматриваем динамику двух связанных нейронов, базируясь на модели Мориса – Лекара. Рассмотрение динамики двух связанных осцилляторов неизбежно приводит к фундаментальной проблеме теории колебаний – синхронизации. В данном случае главным вопросом является следующий: каким образом особенности нейронного осциллятора (в сравнении, например, с классическим примером – генератором Ван дер Поля) отразятся на общей картине синхронных колебательных режимов и их бифуркаций? На данном этапе мы ограничимся областью основного резонанса 1:1.

1. Нейронный осциллятор

Важнейшей особенностью нейрона является наличие двух режимов функционирования: состояния с постоянным уровнем слабо отрицательного потенциала «resting state» и режима генерации коротких импульсов положительной полярности «spikes». Переход из одного состояния в другое обусловлен воздействием других нейронов посредством как электрической (синаптический ток), так и химической связи. В результате динамика упомянутых выше математических моделей нейронов характеризуется наличием двух сосуществующих аттракторов на фазовой плоскости. А именно, состояния равновесия и предельного цикла, бассейны притяжения которых разделены устойчивым многообразием седлового состояния равновесия. При изменении управляющего параметра (уменьшении синаптического тока) предельный цикл исчезает в результате нелокальной бифуркации – петли сепаратрисы седла [5]. Фазовый портрет описанного выше типа осциллятора приведен на рис. 1 и является типичным для двумерных моделей нейронов в некоторой области управляющих параметров.

Модель Мориса – Лекара демонстрирует несколько более сложную динамику: внутри устойчивого предельного цикла возможно наличие устойчивого состояния равновесия, отделенного неустойчивым предельным циклом. Уравнения модели записаны в переменных, соответствующих потенциалу мембраны и токам, проходящим через нее,

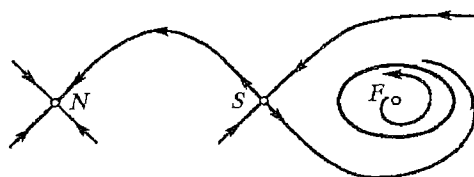


Рис. 1. Типичный фазовый портрет нейронного осциллятора

$$dv/dt = -J_{\text{ион}}(v, w) + J, \quad (1)$$

$$dw/dt = f(w_{\infty}(v) - w)/\tau_w(v), \quad (2)$$

где

$$J_{\text{ион}}(v, w) = \bar{g}_{\text{Ca}} m_{\infty}(v)(v - 1) + \bar{g}_{\text{K}} w(v - v_{\text{K}}) + \bar{g}_{\text{L}}(v - v_{\text{L}}), \quad (3)$$

$$m_{\infty}(v) = 0.5[1 + \tanh\{(v - v_a)/v_b\}], \quad (4)$$

$$w_{\infty}(v) = 0.5[1 + \tanh\{(v - v_c)/v_d\}], \quad (5)$$

$$\tau_w(v) = 1/[\cosh\{(v - v_c)/(2 v_d)\}]. \quad (6)$$

В приведенных уравнениях v обозначает потенциал клеточной мембраны. Ток через мембрану $J_{\text{ион}}(v, w)$ определяется вкладами ионов кальция (индекс Ca), калия (индекс K) и током утечки (индекс L). Выражения (5) и (4) описывают активацию калиевого и кальциевого каналов, соответственно. Уравнение (2) отражает характер релаксации w калиевого тока к стационарному значению $w_{\infty}(v)$. Время релаксации кальциевого тока принимается пренебрежимо малым, поэтому в (3) включено стационарное значение $m_{\infty}(v)$. В данной работе мы использовали стандартный набор параметров $v_a = -0.01$, $v_b = 0.15$, $v_c = 0.1$, $v_d = 0.145$, $\bar{g}_{\text{Ca}} = 1.0$, $\bar{g}_{\text{K}} = 2.0$, $\bar{g}_{\text{L}} = 0.5$, $v_{\text{K}} = -0.7$, $v_{\text{L}} = -0.5$ и $f = 1.15$, меняя лишь J . За исходный режим было принято значение $J = 0.075$, соответствующее сосуществованию состояния равновесия и предельного цикла вблизи точки гомоклинической бифуркации.

Внешний возбуждающий ток J традиционно используется как управляющий параметр. На рис. 2 приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма для системы (1)–(6) в зависимости от J . Как малому ($J < J_A$), так и большому ($J > J_D$) значениям тока отвечает единственный устойчивый режим – состояние равновесия.

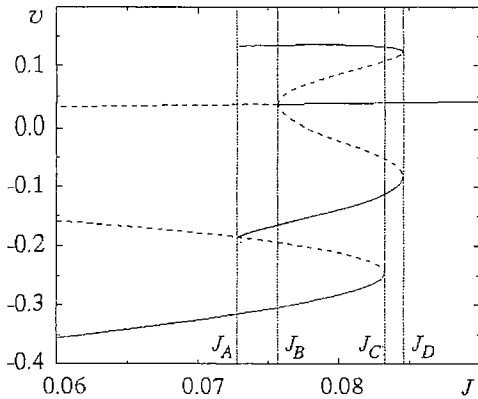


Рис. 2. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для модели Мориса – Лекара. Значению тока J_A соответствует гомоклиническая бифуркация – образование сепаратрисы седла, J_B – субкритическая бифуркация Хопфа, J_C – седло–узловая бифуркация для состояния равновесия, J_D – седло–узловая бифуркация для циклов

При уменьшении J , в точке $J=J_D$ через седло–узловую бифуркацию рождается пара предельных циклов (устойчивый и неустойчивый). При $J=J_B$ неустойчивый цикл касается устойчивого состояния равновесия, реализуя субкритическую бифуркацию Хопфа. Наконец, при достижении $J=J_A$ происходит нелокальная бифуркация, когда устойчивый предельный цикл исчезает с образованием петли сепаратрисы седла. При еще меньших значениях тока в системе продолжают существовать три состояния равновесия, из которых одно устойчиво (узел).

Для исследования динамики двух связанных моделей Мориса – Лекара использовались уравнения

$$\begin{aligned}
 dv_1/dt &= -J_{\text{ион1}}(v_1, w_1) + J_1 + K(v_2 - v_1), \\
 dw_1/dt &= f(w_{\infty 1}(v_1) - w_1)/\tau_w(v_1), \\
 dv_2/dt &= -J_{\text{ион2}}(v_2, w_2) + J_2 + K(v_1 - v_2), \\
 dw_2/dt &= f(w_{\infty 2}(v_2) - w_2)/\tau_w(v_2),
 \end{aligned} \tag{7}$$

соответствующие электрической связи двух нейронов через потенциалы мембран (здесь K – параметр связи).

2. Неустойчивость синфазного режима

Одной из главных отличительных особенностей нейронного осциллятора является наличие седлового состояния равновесия в окрестности устойчивого предельного цикла. Как было обнаружено в [6] и исследовано в [7–9], именно этот факт является причиной неустойчивости синфазных колебаний в системе из двух диффузионно связанных нейронных осцилляторов и во многом определяет своеобразие задачи о синхронизации таких систем.

Влияние седлового состояния равновесия может быть качественно рассмотрено в пределе слабой связи. При этом предполагается, что размер и конфигурация предельного цикла в каждой подсистеме остаются теми же, что и в автономном случае, а влияние связи проявляется как слабое силовое воздействие.

На рис. 3 качественно изображена проекция траекторий в обеих подсистемах на фазовую плоскость (v_i, w_i) в окрестности седла S а также изолинии модуля фазовой скорости $|V_{\phi 1,2}| = (\dot{v}_{1,2}^2 + \dot{w}_{1,2}^2)^{1/2}$.

Очевидно, что самой сингулярной точке S векторного поля соответствует минимум модуля фазовой скорости $|V_{\phi}|=0$, что и отражено концентрическими изолиниями $|V_{\phi}|$. Вводя в рассмотрение невозмущенную (в отсутствие связи) траекторию Γ и рассматривая воздействие связи как слабый сдвиг в направлении, задаваемом способом введения связи, можно заключить: 1) действие связи «сдвигает» точку состояния подсистемы либо в сторону «медленной» траектории Γ_s , либо в сторону быстрой Γ_f . 2) направление сдвига определяется

взаиморасположением точек состояния взаимодействующих подсистем и направлением воздействия связи.

Фактически, окрестность седлового состояния равновесия S действует как некая «линза», в зависимости от характеристик связи «рассеивающая» или же «фокусирующая» первоначально сдвинутые по фазе состояния двух подсистем. На рис. 3 показан случай, когда связь сдвигает траекторию отстающей подсистемы в область еще более медленного движения, тем самым увеличивая фазовый сдвиг. Для системы (7) данная ситуация имеет место при диффузионной связи через переменные мембранного потенциала v_1, v_2 .

Несмотря на локальный (окрестность седловой точки) характер описанного выше эффекта, он может приводить к потере устойчивости синфазного режима колебаний связанных нейронных осцилляторов [6]. При этом устойчивыми оказываются противофазные синхронные колебания связанных подсистем. Кроме того, в [8,9] было показано, что указанный механизм сохраняет свое значение и при конечной степени связи.

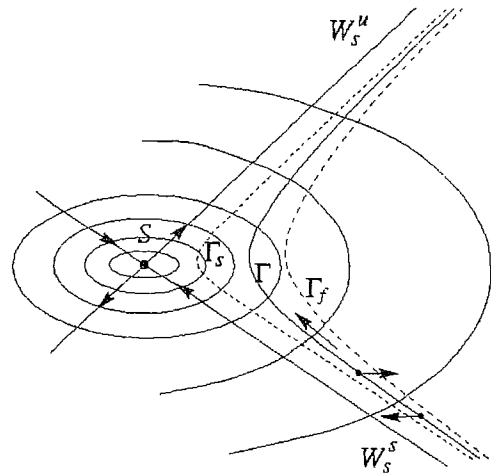


Рис. 3. Иллюстрации того, как диффузионная связь по одной переменной может вызвать увеличение фазового сдвига подсистем. S – седловое состояние равновесия с устойчивым W_s^s и неустойчивым W_s^u многообразиями. Γ, Γ_s и Γ_f обозначают невозмущенную, «медленную» и «быструю» траектории, соответственно

3. От противофазной к синфазной синхронизации

3.1. Общая характеристика динамики в области основного резонанса.

Ниже мы охарактеризуем типы наблюдаемых синхронных режимов и основные закономерности расположения их зон устойчивости на плоскости параметров (J_2, K) с тем, чтобы в дальнейшем сконцентрироваться на конкретных задачах в рамках общей проблемы.

Общий вид разбиения плоскости параметров (J_2, K) для двух связанных моделей Мориса – Лекара приведен на рис. 4. Центральная вертикальная линия $J_2=J_1=0.075$ соответствует симметричному случаю, когда связанные подсистемы идентичны. Поскольку параметр J в модели Мориса – Лекара управляет и частотой колебаний, то именно на точку $J_1=J_2, K=0$ опирается клон синхронизации 1:1. В отличие от сравнительно простого случая, когда взаимодействующие осцилляторы имеют по единственному состоянию равновесия, картина наблюдаемая на рис. 4, выглядит достаточно сложной и запутанной.

Для упрощения описания полезно ввести классификацию возможных синхронных режимов:

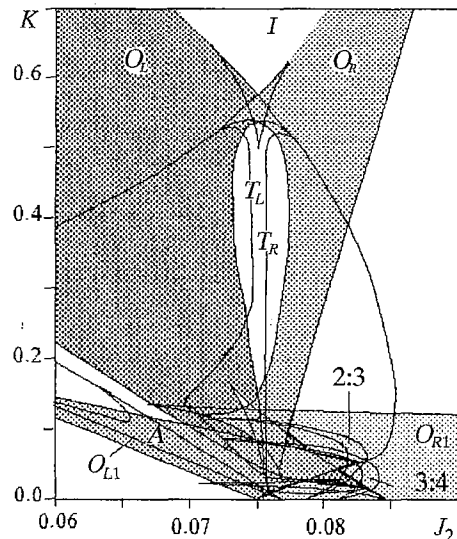


Рис. 4. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма для двух связанных моделей Мориса – Лекара

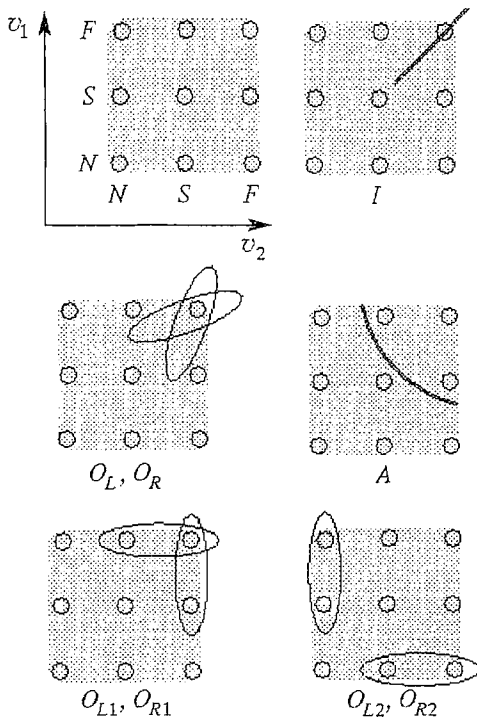


Рис. 5. Наличие девяти состояний равновесия в исследуемой системе и порождаемый ими набор возможных синхронных режимов

риваемой системе достигает 9. По этой причине, возможно дополнительное разнообразие O -циклов, вызванное различным расположением девяти состояний равновесия системы (рис. 5). Эти дополнительные пары циклов обозначены как $O_{L1,2}, O_{R1,2}$.

С использованием введенной классификации можно охарактеризовать эволюцию динамики связанных моделей Мориса – Лекара на рис. 4 по мере увеличения степени связи K . Общей тенденцией является смена противофазной синхронизации (резонансов на торе при $K < 0.1$) на перекрывающиеся зоны устойчивости O -режимов, претерпевающих разнообразные бифуркации, включая переходы к хаосу ($0.1 \leq K \leq 0.5$). Наконец, при $K > 0.5$ наблюдается переход к единственному устойчивому синфазному колебательному режиму.

Описанная картина порождает целый ряд конкретных вопросов – задач бифуркационного анализа.

- Какова структура противофазного резонанса с точки зрения топологии режимов на поверхности инвариантного тора? Каков типичный механизм исчезновения (разрушения) тора по мере увеличения связи?

- Каким образом осуществляется переход от противофазных колебаний к паре устойчивых зеркально-симметричных режимов? Каковы их типичные бифуркации при разрушении и переходе между ними?

- Каковы возможные сценарии перехода к хаосу в рассматриваемой системе? Реализуется ли типичный во многих случаях каскад удвоений периода или же специфика исходной модели (которая обсуждалась в предыдущем разделе) наложит свой отпечаток?

- Наконец, каков бифуркационный характер границы области O -режимов с областью единственного устойчивого синфазного I -режима?

В данной работе мы рассматриваем лишь ту часть проблемы, которая связана с устройством области противофазного резонанса и переходом к синхронному синфазному режиму, оставляя обсуждение путей развития хаоса для последующей публикации.

I – синфазный, «inphase», когда в симметричном случае $J_1 = J_2$ колебания в подсистемах совпадают по фазе и предельный цикл лежит в инвариантном подпространстве $v_1(t) \equiv v_2(t), \omega_1(t) \equiv \omega_2(t)$.

A – противофазный, «antiphase», при $J_1 = J_2$ колебания в подсистемах сдвинуты по фазе строго на половину периода.

O – зеркально-симметричный, «out-of-phase», при $J_1 = J_2$ существует пара периодических решений, сдвинутых по фазе на один и тот же угол вперед и назад относительно синфазного режима.

Разумеется, в общем случае $J_1 \neq J_2$ и указанные режимы в чистом виде не наблюдаются. Однако их основные характерные черты различимы в определенных пределах расстройки по параметрам, что позволяет сохранить за ними указанные названия. Поскольку при $J_1 \neq J_2$ пара O -циклов уже не зеркально симметрична, обозначим указанную пару режимов как O_L, O_R для удобства их различия.

Заметим, что каждая из связанных подсистем имеет по три состояния равновесия. Соответственно, общее число состояний равновесия в рассмат-

3.2. Структура области противофазного резонанса. Для связанных осцилляторов с собственной регулярной динамикой устройство области резонанса было объектом пристального изучения [5,10–16]. Типичная (несколько упрощенная) картина для области 1:1 представлена на рис. 6, где серым цветом дана область нерезонансного тора*, а линии обозначают бифуркации устойчивых и неустойчивых периодических решений.

В формировании области резонанса принимают участие три предельных цикла: устойчивый (синфазный) I , неустойчивый U и седловой A . Для облегчения восприятия картины бифуркаций, в обозначениях циклов будем использовать верхние индексы $()^+$, $()^{++}$, $()^{+++}$, отражающие наличие у него одного, двух или трех неустойчивых многообразий, соответственно.

Левая и правая граница клова образованы седло-узловой бифуркацией, при которой исчезают (рождаются) устойчивый I и седловой A^+ циклы. Сверху область резонанса на торе ограничена линией седло-седло-узловой бифуркации, на которой сливаются и исчезают седловой A^+ и неустойчивый U^{++} (дважды седловой) циклы. Выше линии SSN резонансный тор как инвариантная поверхность в фазовом пространстве уже не существует.

Упомянутые типы границ области синхронизации стыкуются в точках бифуркации коразмерности два – точках Богданова – Такенса (BT). Картину дополняют две точки сборки C (бифуркация коразмерности 2) и сопутствующие отрезки линий гомоклинической бифуркации H . Заметим, что вне области резонанса тор при увеличении параметра связи стягивается к неустойчивому предельному циклу и исчезает на линии T бифуркации Хопфа.

Описанная выше структура является настолько типичной для связанных осцилляторов без каких-либо аномалий векторного поля в окрестности предельного цикла, что представляется удобным все иные варианты описывать с точки зрения отличий от структуры области, изображенной на рис. 6.

На рис. 7 приведена часть бифуркационных линий общей диаграммы рис. 4, непосредственно связанная с областью противофазного 1:1 резонанса. Ключом к пониманию динамики исследуемой системы в пределах основного резонанса могут служить два факта.

- При слабой связи синфазные колебания неустойчивы вследствие описанного выше эффекта «dephasing» и связанные нейроны синхронизируются в противофазе.

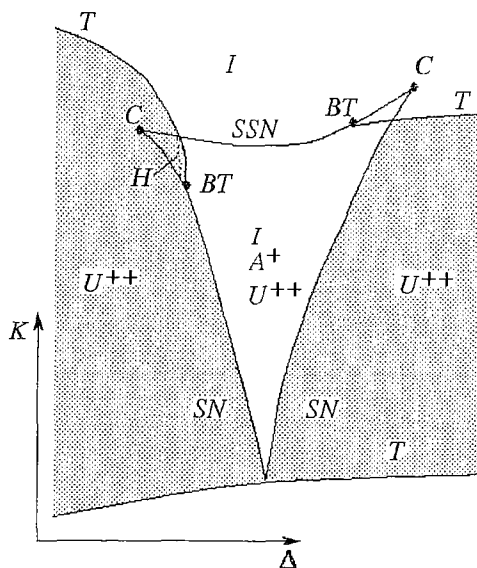


Рис. 6. Типичное устройство области основного резонанса на плоскости (расстройка, связь). Здесь I , A^+ и U^{++} обозначают устойчивый, седловой и неустойчивый (дважды седловой) циклы, соответственно; SN – седло-узловая бифуркация; SSN – седло-седло-узловая бифуркация; T – бифуркация рождения тора (бифуркация Андронова – Хопфа для цикла); BT – точки Богданова – Такенса (бифуркация коразмерности 2); C – точки трехкратного состояния равновесия (бифуркация коразмерности 2)

* Согласно строгим математическим результатам, эргодический (нерезонансный) тор структурно неустойчив. Таким образом, при вариации любого параметра мы должны иметь дело с резонансом на торе сколь угодно высокого порядка, но не с эргодическим тором. Однако, с точки зрения физика (конечная точность эксперимента или численного счета, конечный уровень шума), нерезонансный тор есть реальность. При этом неявно эксплуатируется тот факт, что сама инвариантная кривая в сечении тора структурно устойчива – малое шевеление управляющего параметра приводит к малой ее деформации.

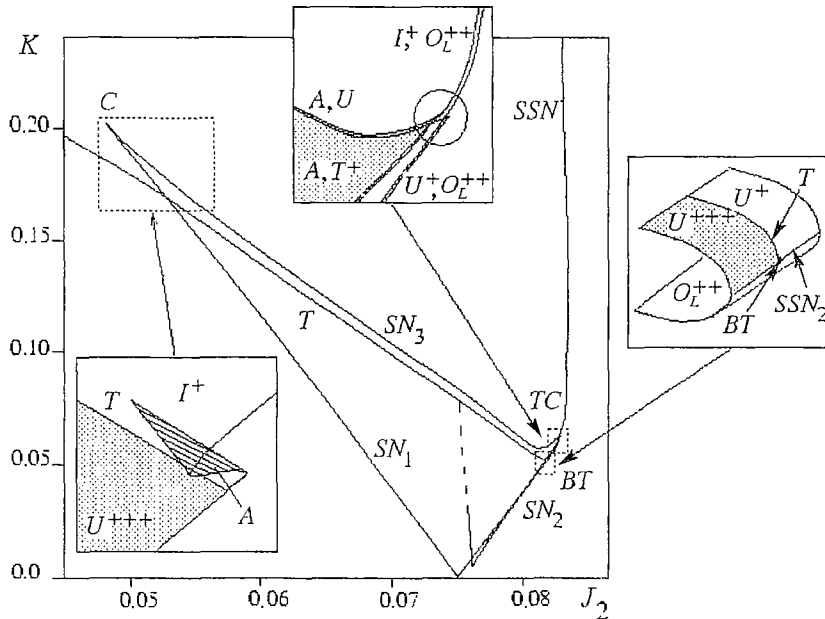


Рис. 7. Линии бифуркаций, формирующие область противофазного 1:1 резонанса

• В силу общих свойств диффузионной связи, стремящейся сблизить колебания связанных подсистем, область устойчивости противофазных колебаний ограничена сверху по связи.

Таким образом, картина бифуркаций, формирующих область основного резонанса, должна быть существенно сложнее классического случая, представленного на рис. 6.

Нижняя часть клова синхронизации, образованная двумя линиями седло–узловых бифуркаций, вполне соответствует классическим представлениям, за исключением того, что синфазный цикл I^+ является седловым, а противофазный A – устойчивым. Неустойчивый цикл U^{+++} также присутствует в этой области. При увеличении степени связи (движение вверх на рис. 7) он претерпевает обратную бифуркацию Хопфа на линии T и становится седловым, $U^{+++} \rightarrow U^+$. При этом он все более приближается по конфигурации и расположению к противофазному A -циклу и сливается с ним на линии седло–узловой бифуркации SN_3 .

Таким образом, в отличие от классического случая, верхняя граница резонансного клова является *кризисом*. При движении по параметру связи, выше линии SN_3 устойчивый противофазный режим колебаний исчезает, и траектория уходит на другой аттрактор. В нашем случае это один из четырех циклов O -семейства, сосуществующих в этой области параметров.

Седловой синфазный цикл I^+ существует и выше линии SN_3 . Справа и слева область его существования ограничена линиями седло–седло–узловой бифуркации SSN (на рис. 7 левая граница не показана). Им соответствует слияние I^+ с дважды седловыми циклами O_L^{++} и O_R^{++} .

Как и в классическом случае, разбиение плоскости параметров на режимы наиболее сложно устроено в верхних углах области синхронизации. Правый верхний угол соответствует точке транскритической бифуркации TC . В ней происходит перераспределение двух пар циклов, участвующих в седло–узловых бифуркациях. Очевидно, что на линиях SN_2 и SN_3 один и тот же противофазный цикл A сливается с различными седловыми циклами I^+ и U^+ . Также очевидно, что для двух линий седло–узловой бифуркации требуется четыре цикла. По этой причине к точке TC подходит также линия седло–седло–узловой бифуркации SSN_2 ,

соответствующая слиянию $O_{L^{++}}$ и U^+ (продолжение этой и связанных с ней линий нас пока не интересует и потому показано на рис. 7 пунктиром). Более детально устройство такой точки отображено на средней вставке рис. 7. Очевидно, что в самой точке TC четыре цикла одновременно сливаются, каждый имея по единичному мультипликатору.

Как упоминалось выше, при увеличении параметра связи K абсолютно неустойчивый цикл U^{+++} претерпевает обратную бифуркацию Хопфа на линии T , превращаясь в седловой цикл U^+ . Пересечению линий T и SSN_2 соответствует точка BT (коразмерности два), в которой каждый из двух циклов имеет по два действительных мультипликатора на единичной окружности (правая вставка на рис. 7).

Левый верхний угол области противофазного резонанса представляет собой классическую катастрофу сборки (по другой терминологии касп, точка трехкратного равновесия), осложненную линией бифуркации Хопфа T на одной из «поверхностей» (левая вставка на рис. 7). В таком строении усматривается определенное сходство с классическим случаем рис. 6, с тем отличием, что и неустойчивый цикл U и синфазный I имеют по одному дополнительному неустойчивому многообразию.

Несмотря на то, что описанная структура области противофазного резонанса получена для конкретной системы (7) – двух связанных моделей Мориса – Лекара, можно ожидать, что все ее элементы должны сохраниться и для иных типов осцилляторов, демонстрирующих синхронизацию в противофазе.

Важным вопросом является выяснение границы существования резонансного тора как инвариантной поверхности в пределах клова синхронизации. Так как цикл A изначально лежал на поверхности тора, то выше линии SN_3 его исчезновения тор существовать не может. Является ли SN_3 искомой границей? Для проверки этого предположения был использован численный метод отыскания замкнутых многообразий, предложенный Kevrekidis в [14]. На рис. 8, *a* изображена замкнутая кривая в сечении резонансного тора при относительно небольшой степени связи $K=0.025$ совместно с точками в сечении синфазного I^+ , противофазного A и неустойчивого U^{+++} циклов. Очевидно полное соответствие с классическими представлениями о гетероклинической поверхности, образующей резонансный тор. Линии неустойчивого многообразия седлового цикла замыкаются на устойчивом цикле, охватывая неустойчивый цикл.

При большем $K=0.080$ (рис. 8, *б*) картина заметно меняется: вместо гладкого замыкания линий, в окрестности точки A имеет место запутанная структура, в которой при увеличении масштаба (вставка на рис. 8, *б*) проявляется все больше и больше деталей. Такое изменение в сечении тора есть наиболее характерный

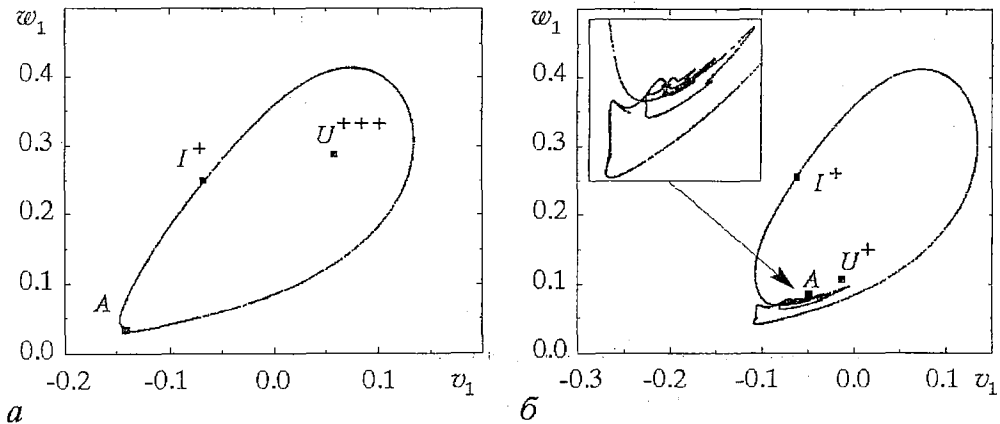


Рис. 8. Инвариантная кривая в сечении резонансного тора при $K = 0.025$ (*a*) и $K = 0.080$ (*б*). Видно образование складок на изначально гладкой гетероклинической поверхности, образованной многообразиями устойчивого A и седлового I^+ циклов

признак *потери гладкости* – одного из наиболее типичных механизмов разрушения тора. По мере увеличения параметра связи многообразия цикла A все более изгибаются в его малой окрестности. Точкой разрушения тора следует считать такое значение K , при котором замкнутая кривая в сечении теряет дифференцируемость. Согласно теореме Афраймовича – Шильникова [17,18], это один из путей разрушения тора, ведущий к возникновению хаоса на базе квазипериодических колебаний. В данном случае, однако, наблюдаются существенные отличия. В частности, при последующем исчезновении цикла A (через седло–узловую бифуркацию с циклом U^+) хаотического множества с возвращаемостью в область складок не образуется, поскольку седловой цикл I^+ все еще лежит на бывшей инвариантной кривой.

3.3. Переход к синфазной синхронизации. Из рис. 4 можно видеть, что область значений параметра связи $K < 0.15$ содержит, помимо клюва противофазной синхронизации, сложное сплетение большого количества бифуркационных линий. Причины такого многообразия уже обсуждались – это наличие 9 состояний равновесия и, как следствие, большое количество возможных синхронных режимов, сосуществующих в фазовом пространстве системы. Детальный анализ того, каким именно образом указанные режимы переходят один в другой и какие неустойчивые режимы участвуют в образовании складок и каспов, не входит в цели данной работы. Помимо очевидной громоздкости анализа и описания конкретное взаиморасположение бифуркационных линий существенно зависит от выбора параметров и едва ли носит общий характер.

Однако для $K > 0.15$ картина резко упрощается и в области $K \in [0.5, 0.6]$ наблюдается переход к единственному устойчивому режиму синфазных колебаний I . Соответствующая карта режимов приведена на рис. 9. Видно, что при относительно сильной связи и небольших отклонениях J_2 от 0.075 диаграмма практически симметрична относительно линии $J_2 = J_1 = 0.075$.

При движении к центру в нижней части диаграммы слева или справа соответствующий режим (O_L или O_R) из пары зеркально симметричных теряет

устойчивость на линии T бифуркации Хопфа, $O_{L,R} \Rightarrow O_{L,R}^{++}$. Родившийся при этом тор существует далее вплоть до линии H , где он разрушается, претерпевая кризис – касание с устойчивым многообразием седлового цикла I^+ . Неустойчивый же цикл существует вплоть до линии седло–седло–узловой бифуркации SSN , где он сливается с I^+ .

При увеличении параметра связи K синфазный режим обретает устойчивость в области звездообразной структуры, образованной четырьмя линиями SN седло–узловых бифуркаций и пятью точками бифуркаций коразмерности два, из которых три точки сборки (каспа) C и две точки BT . В двух верхних точках сборки C сливаются по два устойчивых и одному седловому циклу. Нижняя точка C при движении сверху по K может трактоваться как субкритическая бифуркация потери симметрии – в ней два зеркально симметричных седловых цикла касаются устойчивого синфазного цикла I , превращая его в седловой I^+ . В

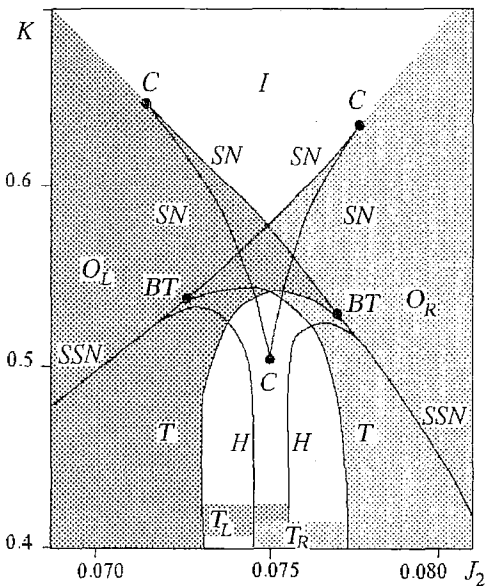


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма для области сильной связи. Обозначения соответствуют использованному ранее. T_L и T_R обозначают режимы квазипериодических колебаний, родившихся из O_L и O_R , соответственно

точках Богданова – Такенса происходит смена типа бифуркации с седло–узловой SN на седло–седло–узловую SSN , как это уже разбиралось для рис. 7.

При больших, чем это показано на рис. 9, значениях параметра связи K в системе (7) имеется единственный устойчивый режим с плавно изменяющимся в зависимости от значения J_2 сдвигом фаз.

Заключение

В данной работе рассмотрены особенности, которыми сопровождается синхронизация во взаимно связанных двумерных моделях Мориса – Лекара. Показано, что существенные отличия от классической картины порождаются наличием в фазовом пространстве каждого из нейронных осцилляторов седлового состояния равновесия, «возмущающего» векторное поле в непосредственной окрестности предельного цикла. Это приводит к неустойчивости синфазных колебаний при слабой связи. Как результат связанные системы демонстрируют противофазный резонанс, что и влечет за собой изменения в картине бифуркаций, формирующей область синхронизации. В такой ситуации верхняя граница клюва синхронизации является кризисом, при котором устойчивый резонансный цикл попросту исчезает. Область промежуточных значений связи характеризуется мультистабильным поведением, рождением и кризисами квазипериодических аттракторов *etc.*, и лишь при достаточно сильной связи становится устойчивым синфазный режим колебаний.

Исследования других подобных систем (феноменологическая модель на базе осциллятора Ван дер Поля [8,9], системы типа брюсселятора [19,20]) покажут, насколько общий характер носят выявленные нами (и выделенные из общей сложной картины) структуры из бифуркационных линий для противофазного резонанса вообще.

В данной статье практически не были затронуты вопросы об особенностях перехода к хаосу в исследуемой системе (а их, по меньшей мере, три) и о сопутствующих кризисах квазипериодических аттракторов. Авторы планируют сделать это в следующей публикации.

Со стороны Д.Э. Постнова и О.В. Сосновцевой работа была поддержана грантами РФФИ 98–02–16531 и 99–02–17732. С.К Хан благодарит за поддержку Министерство образования республики Корея, программа BSR(97–2436), а также Академию наук Халлум (Hallum University, Korea).

Библиографический список

1. *Arbib M.A.* // The handbook of brain theory and neural networks. Cambridge: MIT Press, 1995. P. 879.

2. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve// J. Physiol. London. 1952. Vol. 117. P. 500.

3. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях// УФН. 1996. Т. 166, № 4. С.365.

4. *Morris C., Lecar H.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber// Biophys. J. Vol. 35. 1981. P.193.

5. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций. В серии: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М:ВИНИТИ, 1986.

6. *Sherman A., Rinzel J.* Rhythmogenic effects of weak electronic coupling in neuronal models// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1992. Vol. 89. P.2471.

7. Han S.K., Kurrer C., Kuramoto Y. Dephasing and Bursting in Coupled Neural Oscillators// Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P.3190.
8. Постнов Д.Э., Хан С.К. Механизм противофазной синхронизации в моделях нейронов// Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25, вып.4. С.11.
9. Postnov D., Han S.K., Kook S. Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcations// Preprint of ABDUS SALAM International Centre for Theoretical Physics, IC/98/154. Available at: www.ictp.trieste.it/pub_off
10. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1983.
11. Rand R.H., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled Van der Pol oscillators// Int. J. Nonlin. Mech. 1980. Vol. 15. P. 387.
12. Aronson D.G., Doedel E.J., Othmer H.G. An analytical and numerical study of the bifurcation in a system of linearly-coupled oscillators // Physica D. 1987. Vol. 20.
13. Kevrekidis I.G., Schmidt L.D., Aris R. Some common features of periodically forced reacting systems// Chemical Engineering Science. 1986. Vol.41, № 5. P.1263.
14. Kevrekidis I.G., Aris R., Schmidt L.D. Forcing an entire bifurcation diagram: case studies in chemical oscillators// Physica D. 1986. Vol.23. P. 391.
15. Taylor M.A., Kevrekidis I.G. Some common dynamic features of coupled reacting systems// Physica D. 1991. Vol. 51. P. 2742.
16. Knudsen C., Sturis J., Thomsen J.S. Generic bifurcation structures of Arnol'd tongues in forced oscillators// Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44(6). P. 3503.
17. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность. Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во. ГГУ, 1983. С. 3.
18. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990.
19. Volkov E.I., Romanov V.A. Bifurcations In the System of Two Identical Diffusively Coupled Brusselators// Physica Scripta. 1995. Vol. 51. P.19.
20. Stolyarov M.N., Romanov V.A., Volkov E.I. Out-of-phase mixed-mode oscillations of two strongly coupled identical relaxation oscillators// Phys.Rev.E. 1996. Vol. 54. P. 163.

Саратовский государственный
университет
Национальный университет
области Чхонгбук, Республика Корея

Поступила в редакцию 15.03.99
после переработки 12.05.99

TRANSITION FROM ANTIPHASE TO INPHASE SYNCHRONIZATION IN COUPLED NEURON MODELS

D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, Seung Kee Han

Based on bifurcational analysis we describe the key transitions from antiphase resonance observed for a weak coupling, to inphase synchronization as the parameter of interaction is increased. Role of multistability in the structure of the main synchronization region is studied. Two coupled Morris – Lecar systems are used as a model.



Постнов Дмитрий Энгелевич в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года – инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 34 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

E-mail: Dima@chaos.ssu.runnet.ru



Сосновцева Ольга Владимировна – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Работала инженером в НИИ механики и физики при Саратовском университете (1989–1992). Защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1996) по структурам и свойствам аттракторов неавтономных и связанных динамических систем. Имеет 20 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



Сеунг Ки Хан – профессор Национального университета области Чхонгбук, Республика Корея. Работает в нейроработории физического факультета. Научные интересы – синхронизация нейронных ансамблей, анализ сигналов биологических систем.

90 лет Саратовскому университету



САРАТОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КАК КУЛЬТУРНЫЙ ЦЕНТР НИЖНЕГО ПОВОЛЖЬЯ

В. А. Соломонов

В статье раскрывается участие высшего учебного заведения в общественной и культурной жизни Саратовской губернии, в решении экономических и социальных проблем региона, акцентируя внимание на богатстве и разнообразии связей университета с местной и российской общественностью, на непрерывное их развитие, особенно в области научно-просветительской деятельности.

Учреждение в 1909 г. десятого русского университета, происходившее на фоне обострившихся в стране социально-классовых противоречий, связанных с революционными событиями 1905–1907 гг., передовой общественностью было встречено с радостью и ликованием. Подтверждением тому служат многочисленные восторженные отклики современников, в изобилии публиковавшиеся на страницах местной и центральной печати в дни торжественного открытия в Саратове Императорского Николаевского университета [1].

Величие и торжественность случившегося особенно остро сознавали, конечно, сами саратовцы. «Большое культурное будущее Саратова, – как отмечала пресса, – теперь уже не может возбуждать ни в ком ни споров, ни сомнений: с открытием университета он по праву входит в круг мировых просветительных центров, действительно становится «столицей Поволжья» [2].

Было бы неверно отождествлять почтительное, благоговейное отношение местных жителей к вновь открываемому университету лишь с сиюминутным эмоциональным порывом, вызванным конкретной ситуацией. Оно определялось всей предыдущей историей развития Российского государства. Общеизвестно, что в течение длительного времени высшие учебные заведения университетского типа осуществляли великую и весьма многоплановую миссию. Они давали возможность получать самое лучшее по тем временам образование; большинство выходящих из их стен студентов имели уже ученые степени кандидатов наук. С середины XIX в., по свидетельству Н. В. Шелгунова, «университет, как рассадник людей высшего образования, стоял высоко в общественном мнении, ... в провинции университетские играли ту же самую привилегированную роль, какую играли офицеры Генерального штаба в армии. Их было вообще мало, и ими очень дорожили» [3].

Не изменилось отношение к университетам и их питомцам и в начале XX столетия. Так, говоря об особенностях работы профессора в провинции, В. И. Разумовский, например, замечал: «профессор... стоит на «горке», у всех на виду» [4].

Помимо образовательных и научных функций университеты во все времена призваны были повышать общий культурный уровень населения. Именно они

занимались подготовкой основных кадров преподавателей для высшей и средней школ, формировали будущих врачей, ученых, литераторов и чиновников для государственной службы. Университетские профессора занимались широкой просветительской деятельностью: выступали с публичными лекциями, сотрудничали с местной прессой и участвовали в работе различных научных и общественных учреждений.

Именно таким научно-культурным центром желали видеть современники Саратовский университет. «Бывают моменты в общественной жизни, – писал по этому поводу «Саратовский вестник», – когда серую мглу будничного существования пронизывает блестящий луч, распространяющий вокруг себя свет и теплоту. Этот свет блеснул теперь и над Саратовом. Он проник в душу, согрел сердце и окрылил ум... В этот торжественный для Саратова и всего края момент, когда совершается великое таинство, пусть все сольются в одной мысли, на одном стремлении – видеть родной университет действительно умственным центром...» [5].

Но для осуществления этой мечты предстояло сделать еще немало. И надо воздать должное горожанам, вовремя осознавшим, что молодому университету не справиться в одиночку с поставленными перед ним сложными задачами. Только в тесном взаимодействии университетской и городской общности можно было действительно добиться серьезных результатов. «...И только при этих условиях сам университет не оскудеет и не захиреет, но, получая могучий приток сил из глубины, будет возвращать их обществу, возвращенными и удесятеренными» [2].

Как показывает дальнейший анализ событий, слова эти оказались пророческими. Ощутив моральную и материальную поддержку саратовцев в начальный период своей деятельности, университет в скором времени буквально слился с насущными проблемами и запросами местного региона. Ярким свидетельством этому может служить речь профессора В.А. Павлова, приветствовавшего в 1911 г. от лица всей университетской ученой коллегии 25-летний юбилей Саратовской ученой архивной комиссии (СУАК).

«Сделавшись, благодаря моей новой alma mater, постоянным жителем города Саратова, я счастлив, – признавался он, – что имею честь назвать себя новорожденным сыном Поволжья, и, как любящий сын, радуюсь радостями и печалюсь печальями этого края» [6].

Кроме В.А. Павлова в торжественном чествовании юбиляра приняли участие также: ректор университета профессор В.И. Разумовский, декан медицинского факультета профессор И.А. Чувевский и профессор православного богословия А.Ф. Пресображенский. Они поднесли имениннику коллективное поздравление в виде богато оформленного адреса*.

Наряду с признанием выдающейся роли и заслуг юбиляра, в университетском приветствии говорилось и о «сознании своей (то есть, университета. – В.С.) тесной связи с умственной жизнью края и его духовными интересами». «...Николаевский университет, – подчеркивалось в нем, – имеет свои особые побуждения к тому, чтобы принять самое живое участие в настоящем торжестве Ученой Комиссии. Много тревог и сомнений, много надежд и опасений пришлось испытать столице Поволжья прежде, чем она могла назвать себя отчиной нового «храма науки». Тернистым путем, долгими невзгодами и трудами подвижников культуры и просвещения создан настоящий облик края, определен характер и дух его населения, сделавший его достойным десятого русского университета [6, с. 30–31].

Возникшая с открытием в городе университета связь между его представителями и членами СУАК не исчерпывалась лишь дружеским общением в рамках разного рода торжественных мероприятий. Она опиралась на более

* Написанный золотыми буквами, текст адреса был заключен в кожаную папку, в верхнем левом углу которой красовались серебряные цифры: «XXV, 12/XII 1911», а в правом нижнем – дощечка с надписью: «Саратовской Ученой Архивной Комиссии. Императорский Николаевский Университет». Содержащееся в адресе приветствие было зачитано ректором университета профессором В.И. Разумовским [6, с. 30].

существенную и прочную основу, прежде всего на обоюдовыгодное научно-практическое сотрудничество обеих сторон.

Ни для кого давно уже не являлось секретом, что Саратовский край с его природными богатствами и культурными традициями так мало изучен, что для пытливого исследователя вполне мог бы превратиться в гигантскую научную лабораторию под открытым небом. Известный английский путешественник Джон Лесли, изучавший Россию и соседние с нею юго-восточные страны, в связи с этим писал: «В мире трудно найти другую страну, которая могла бы при таком невероятном богатстве объектов изучения до наших дней оставаться так мало исследованной и почти никем не описанной... Это живой, величайший в мире музей. Нужны десятки лет и сотни исследователей, чтобы выявить те богатства, которыми край обладает» [7].

Время доказало правоту английского ученого. Саратовская земля действительно имела несметные природные сокровища. В недрах ее на протяжении многих столетий таились огромные запасы мела и фосфоритов, залежи горючих сланцев и природного газа. Соляные озера и грязи (хакки), располагавшиеся в Заволжье и имевшие редчайшие лечебные свойства, открывали широкую перспективу для создания и развития в этих районах курортно-оздоровительных центров. Одно из первых мест в мире занимал край и по наличию в нем палеонтологических ископаемых. Исключительный интерес у ученых вызывал он и в качестве естественного хранилища культурно-бытовых памятников древних его обитателей, оставивших неизгладимый след в истории Юго-Востока России.

Изучением этих и многих других вопросов как раз и занимались члены СУАК. Однако при решении их они нередко нуждались в обстоятельной, научно достоверной экспертизе и консультациях высококвалифицированных специалистов. Тогда-то и приходили к ним на помощь университетские ученые, обладавшие обширными знаниями и богатым опытом в экспериментально-лабораторных исследованиях. Примеров тому в архивных материалах и публикациях прошлых лет сохранилось немало. Сошлось лишь на некоторые, наиболее яркие из них.

20 декабря 1910 г. в Совет университета поступило официальное письмо за подписью председателя СУАК Н.Н. Минха: «Комиссия имеет честь покорнейше просить Совет Университета, нельзя ли в лаборатории университета определить количественный и качественный анализ прилагаемых при сем древних зеркал и их фрагментов, а также не отказать в сообщении, как производить очистку зеркал и других металлических окисленных предметов древности, а если возможно, то и произвести в лаборатории опыт очистки хотя бы некоторых цельных зеркал» [8].

Реагируя на обращение своего «старшего союзника и товарища на научной ниве» [6, с. 31], Совет поручил выполнить эту работу профессору по кафедре химии В.В. Челинцеву.

Произведенные ученым лабораторные исследования археологических предметов, доказали, что «собрание... зеркал, подвергнутое... химическому анализу, по количеству экземпляров является едва ли не первым: оно состоит из 28 отчасти целых зеркал, отчасти — из крупных и мелких фрагментов». Что же касается их возраста, то, по мнению исследователя, они «не могут быть отнесены... ни к первой эпохе бронзового века, ни ко второй... Их изготовление, — предполагал В.В. Челинцев, — могло быть делом рук мастеров лишь третьей эпохи, характеризующейся типичными бронзами, и при этом, судя по большому содержанию олова и присутствию свинца, — более поздних ее моментов, относящихся, по всей вероятности, уже к железному веку» [9].

Аналогичные обстоятельства побудили 22 октября 1911 г. обратиться за помощью к университетским ученым и другого «выдающегося культурного деятеля, много потрудившегося в деле научного изучения обширного Саратовского края» [10], основателя и почетного члена СУАК, А.Н. Минха.

Адресуя свое личное послание на имя ректора университета и информируя его о переданных им в дар Архивной Комиссии собственных археологических и других коллекций, А.Н. Минх писал: «...Более всего интересует меня череп

животного, значащийся в моем списке... под № 30-м. Будучи совершенно слепым, я не могу определить на ощупь принадлежность его, почему не пожелает ли кто-нибудь из профессоров взглянуть на этот череп, найденный в имении К.П. Лециуса при селе Агаревки Аткарского уезда?» [10, л. 177].

Эта просьба так же, как и та, что исходила от его брата Н.Н. Минха, Саратовским университетом была исполнена.

Обращая внимание на активность университетской профессуры в решении означенных проблем, нельзя не заметить, что конечной их целью было: с одной стороны, желание пополнить научно-учебные музеи и лаборатории новыми ценными экспонатами, необходимыми для плодотворной исследовательской деятельности и практических занятий со студентами, а с другой – широко использовать возможность на практике проверить свои теоретические разработки с целью их дальнейшего углубления и совершенствования.

В связи с этим особо следует выделить деятельность химической лаборатории Саратовского университета и лично ее заведующего профессора В.В. Челинцева. Во многом лишь благодаря его неиссякаемой творческой энергии за те полтора года, что он возглавлял университетскую кафедру*, ее сотрудниками была проделана колоссальная научная и исследовательская работа.

В архивных материалах, освещающих дореволюционную историю Саратовского университета, сохранился один весьма примечательный в этом отношении документ. Им является обращение В.В. Челинцева в Совет университета с просьбой возбудить перед Управлением Рязано-Уральской железной дороги ходатайство о разрешении ему и его ближайшему помощнику «совершать безвозмездно экскурсии по железной дороге упомянутого Общества в пределах района: Уральск-Тамбов-Астрахань, в течение трех лет со дня получения разрешения». Причем, объясняя важность и целесообразность подобных экспедиций, ученый предупреждал, что к ним надобно относиться не только как к занятиям «...полезным, но и существенно необходимым – как в целях преподавания, так и в целях научного исследования – обставление химической лаборатории нашего университета коллекциями естественных химических образцов мела, фосфоритов, кремнистых глин, мергелей, песчаников, торфа, гипса, каменной соли и т.д. Саратовского края, а равно и препаратов, относящихся к местным химическим производствам – стеклянному, чугунно-плавильному, цементному, кожевенному, перегонки кости и т.д.». Вместе с тем, уверял он, «результаты исследования вышеизложенных богатств края могут быть полезны и для Рязано-Уральской железной дороги...» [10, л. 91].

История эта не только успешно завершилась, принесла неоспоримую выгоду как университету, так и местной экономике, но, что особенно ценно, вызвала ответную реакцию со стороны управляющего Рязано-Уральской железной дорогой. Дело в том, что весной 1912 г. он выступил с инициативой организации подобной экспедиции, но на этот раз исследовательской группе предстояло отправиться в Заволжье – к озеру Эльтон, окруженному «кольцом минеральных грязей, которые издавна среди кочевников заволжской полупустыни славилась лечебными свойствами» [11].

Руководитель кафедры физики Саратовского университета профессор В.Д. Зернов, участвовавший в этой поездке, характеризуя мотивы и конечную цель ее, писал: «Управление Рязано-Уральской железной дороги устроило для своих работников на берегу Елтона (так, по сведениям ученого, именовали озеро местные жители. – В.С.) очень скромную грязелечебницу, а чтобы обосновать

* Исполняющим должность экстраординарного профессора по кафедре химии Саратовского университета В.В. Челинцев был назначен 10 июня 1910 г., а 16 января 1912 г., после того, как со своего поста, в знак протеста против грубого вмешательства во внутриуниверситетскую жизнь министра народного просвещения Л.А. Кассо, ушел в отставку профессор Н.Д. Зелинский, он был переселен на вакантную должность в Московский университет. Обратившись в Саратов В.В. Челинцев вернулся лишь после февральских событий 1917 г. С этого времени, вплоть до кончины ученого в 1947 г., научно-педагогическая деятельность его неразрывно была связана исключительно с Саратовским университетом.

расходы на нее, просило представителей университета обследовать лечебные грязи и высказать свои заключения. Были приглашены, – замечал мемуарист, – почти все профессора университета – и хирурги, и гинекологи (Спасокукоцкий и Какушкин), и терапевты, из естественников – ботаник А.Я. Гордягин, химик Р.Ф. Холлман и я»*.

Что касается автора приведенных строк, то от него требовалось исследование эльтонской лечебной грязи на предмет присутствия в ней радиоактивных излучений.

Справиться с поставленной задачей в полевых условиях, да еще при отсутствии сложного лабораторного оборудования, было непросто. И тем не менее при помощи фонтаноскопа – удобного портативного аппарата для изучения радиоактивных изотопов (накануне поездки специально для этой цели выписанного из Германии), и некоторых других приспособлений, изготовленных по чертежам В.Д. Зернова талантливым механиком–самоучкой Федором Федосеевичем Троицким (1883–1953) в механической мастерской при Физическом институте Саратовского университета, удалось произвести все необходимые измерения. В результате выяснилось, что эльтонская грязь в ее сухом виде «...сильно ионизировала воздух, обнаруживая радиоактивность, значительно превышающую таковую одесских лечебных грязей» [11, с.131].

Опираясь на вышеизложенные факты, следует признать, что в деле изучения особенностей местного ландшафта – растительного и водного мира, природных сырьевых ресурсов края, необходимых для развития промышленного производства, научно–исследовательская база Саратовского университета, в отличие от других аналогичных структур, занимала одно из наиболее ключевых и привилегированных положений в регионе.

Говоря о влиянии университета на умственную и культурную жизнь Саратовского края, необходимо хотя бы в общих чертах охарактеризовать его связи с местным Физико–медицинским обществом. Начало их тесному сотрудничеству было положено еще в 1905 г., когда на заседании Общества выступил профессор Варшавского университета П.В. Никольский, сообщивший о цели своего приезда в Саратов – выяснение условий для возможного учреждения в нем университета. Тогда же члены Общества высказались за поддержку городских и земских представительных органов, выступивших с ходатайством по этому вопросу перед правительством. На том же заседании было одобрено решение, принятое на бюро Физико–медицинского общества совместно с правлением Санитарного общества и педагогических советов фельдшерской и повивальной школ, о временном предоставлении будущему университету здания фельдшерской школы, находившегося на углу Большой Сергиевской и Никольской улиц (ныне ул. Чернышевского и Радищева), в котором в настоящее время помещается областной медицинский колледж [12]. Однако более конкретные и практические формы взаимодействия между этими двумя научными организациями проявились лишь спустя четыре года после официального открытия Саратовского университета.

В знаменательные и памятные декабрьские дни 1909 г. неизменный председатель Физико–медицинского общества (с 1907 по 1931 г.), а впоследствии профессор Саратовского университета, доктор медицины Н.Е. Кушев, выражая чаяния всех членов Общества, выразил «...твердую уверенность, что приток научных сил внесет в среду общества струю оживления и явится могучим стимулом в работе его на пользу родного края» [13].

Надеждам этим суждено было сбыться. В первые годы существования университета ряды Общества действительно пополнились новыми членами и деятельность его заметно оживилась. Университетские ученые (В.И. Разумовский,

* До этого проф. В.В. Челинцев, по свидетельству автора его научной биографии В.И. Марьяина, «...выезжал со студентами университета в экспедицию на Эльтон с целью обследования соляных отложений рапы и грязей для бальнеологических целей» (Марьяин В.И. Владимир Васильевич Челинцев. Саратов, 1965. С. 29).

В.Д. Зернов, В.А. Павлов, Б.И. Словцов, В.В. Челинцев, И.А. Чуевский и др.) активно включились в работу Общества, участвуя в проводимых им научных дискуссиях и демонстрируя собственные достижения и открытия. Запись, сделанная в протоколе очередного заседания Общества от 30 апреля 1910 г., свидетельствует, например, о состоявшемся в этот день докладе профессора В.Д. Зернова на тему «Измерение силы человеческого голоса». В ней говорилось о том, что «в своем сообщении профессор В.Д. Зернов, изложив состояние вопроса об измерении силы звука, познакомил собрание с сконструированным им прибором для измерения силы человеческого голоса, представив теоретические соображения, лежащие в основу конструкции, и продемонстрировал изображение и функцию на экране эпидиаскопом» [14].

Другой гранью соприкосновения интересов двух учреждений явился библиотечный вопрос. Постоянно ощущая острую нужду в специальной научной литературе, члены Общества выступили с инициативой о слиянии двух библиотек – своей и университетской. «Когда мы теперь (1910 г. – В.С.) заговариваем о библиотеке, замечал по этому поводу секретарь Общества Э.Я. Катунский, – наши взоры невольно устремляются на наш юный университет. Но университет делает для нас все, что в его силах, что в силах еще неокрепшего и только развивающегося учреждения, а между тем нужда в библиотеке давно назрела» [14, с.52].

Известно, что университетская администрация с пониманием отнеслась к данному предложению. Более того, ректор университета профессор В.И. Разумовский лично заверил членов Общества о своем твердом намерении «...поднять этот вопрос в университетском Совете и выяснить взгляды последнего как на самое слияние, так и на те условия, при которых члены Общества могут пользоваться университетской библиотекой» [14, с.39].

Сохранившиеся источники, к сожалению, не позволяют установить с абсолютной точностью, каковым оказался итог начавшихся переговоров. Но даже сама констатация факта о их начале говорит уже о серьезном и вдумчивом отношении обеих сторон к заботам и нуждам друг друга.

О несомненном лидерстве университета в культурной жизни края можно судить и по его научно-популяризаторской деятельности. Заботясь о повышении общего образовательного уровня населения, на ежегодные открытые заседания университетского Совета (их еще называли – годовые акты 6-го декабря) в качестве почетных гостей приглашались представители губернской администрации, органов городского и земского самоуправления, научных, учебных и общественных учреждений Саратова. Главной отличительной особенностью таких мероприятий было выступление на них одного из членов профессорской корпорации с актовой речью, являвшейся по сути глубоко осмысленным научным докладом. Для более широкой аудитории устраивались публичные лекции, во время которых ученые мужи знакомили слушателей с теми же самыми фундаментальными научными проблемами, преподнося их, однако, в понятной, и для большинства доступной, форме. Вместе с тем отдельные члены саратовской ученой элиты (разумеется, с учетом личных интересов и пристрастий) принимали непосредственное участие в характерных для тогдашней городской жизни разного рода культурно-развлекательных и общественно-политических акциях: литературно-музыкальных вечерах и концертах, кампаниях по сбору всевозможных пожертвований, юбилейных чествованиях и т. п. [11, с. 123–126, 15]

Искреннее желание как можно глубже и прочнее соединиться с окружающей жизнью побудило университетское начальство с первых же месяцев существования вуза широко распахнуть двери учебных помещений, кабинетов и лабораторий перед всеми, кто хотел бы самолично удостовериться в его жизнеспособности*. В дальнейшем подобные экскурсии по университету

* Только за один день 7 декабря 1909 г., по сведениям И.А. Чуевского «в университете перебивало посетителей несколько тысяч человек» [13, с. 48].

организовывались довольно часто и в скором времени стали традиционными. Приведу только несколько впечатляющих эпизодов такого сотрудничества.

В начале апреля 1910 г. Саратовская уездная земская управа обратилась в администрацию университета с просьбой разрешить ученикам народных земских школ, прибывших в губернский центр «с целью ознакомиться с городом, его учебными и просветительными учреждениями и обществами», посетить первым делом главную достопримечательность столицы Поволжья, «...дабы тем самым непосредственно запечатлеть в их детских сердцах радостное для всех событие – открытие университета...» [16].

Отрадно при этом отметить, что маститые профессора не только выразили согласие на организацию экскурсии, но и лично позаботились о качественном ее содержании, взяв «на себя труд по объяснению и руководительству экскурсантами» [16, с.110]. По завершении же ее профессора В.Д. Зернов, А.Я. Гордягин, Б.И. Бируков и приват-доцент Д.Э. Янишевский, за проявленные ими отеческую заботу и опеку над юными посетителями университета, были особо выделены земским начальством и получили персональные благодарности.

Отмечая просветительскую роль Саратовского университета и личный вклад его представителей в дело популяризации научных знаний среди местного населения, В.Д. Зернов писал: «Громадным успехом пользовались лекции университетских профессоров и на учительских курсах, которые в начале лета устраивались земством для учителей сельских школ. Это была преинтересная аудитория, – вспоминал ученый. – Все для слушателей казалось чудесным. Некоторые из глуши впервые видели губернский город и с удивлением смотрели на единственный в то время в Саратове четырехэтажный дом Пташкиных на Константиновской улице (ныне ул. Советская. – В.С.)...» [11, с.128].

Весьма своеобразно и непредсказуемо реагировали слушатели не только на окружавшую их диковинную, непривычную для многих жизненную атмосферу, но и на то, что рассказывалось им во время лекций. Бывало даже встречи их с лекторами, заканчивавшиеся досадными происшествиями, оставляли в памяти последних мрачные воспоминания. Один из таких казусов описан в «Записках» профессора В.Д. Зернова.

«Последний раз, – вспоминал ученый, – Земские курсы были организованы в 1914 году. Я читал лекции в аудитории нового Физического института, куда мы перешли в конце 1913 года. Аудитория опять была полна восторженными слушателями, но воспоминание об этих курсах у меня было испорчено следующим происшествием.

Я рассказывал о восприятии цветностей и излагал теорию трехцветного зрения Юнга – Гельмгольца и показывал в проекции серию цветных фотографий, которые были сделаны мной на пластинках по способу Люмьера, основанному как раз на теории Юнга–Гельмгольца. Слушатели были в восторге, и это выразилось в том, что после лекции группа слушателей кинулась к лекционному столу, чтобы еще раз посмотреть фотографии, и, вырывая друг у друга целую стопу пластинок, бухнула их на пол, и пластинки вдребезги разбились» [11, с. 129].

Но к чести саратовской профессуры, следует признать, что даже такие печальные происшествия не оказали в целом негативного влияния на их дружеское участие в судьбах как самих слушателей, на долю которых выпало трудное и великое дело воспитания будущих граждан, так и отношение к идее организации и проведения на базе университета учительских курсов.

Наряду с обзорными общеобразовательными лекциями, бегло освещавшими главные достижения современной научной мысли, ученые университета время от времени устраивали и тематические научные конференции, приуроченные к юбилейным датам из жизни тех или иных выдающихся деятелей российской науки и просвещения. Одной из самых ярких и запоминающихся культурных акций, состоявшихся в этом ключе, следует, пожалуй, назвать проведение Ломоносовского дня 8 ноября 1911 г., посвященного 200-летию со дня рождения великого русского ученого.

В заранее разосланных приглашениях на это мероприятие сообщалось, что

«...в здании Императорского Николаевского университета (угол Никольской и Б. Сергиевской ул.) в 12^{1/2} час<ов> дня будет отслужена панихида, и, по окончании оной, произнесены соответствующие событию речи профессорами: В.И. Разумовским, Д.Ф. Преображенским, В.А. Павловым, В.Д. Зерновым и В.В. Челинцевым» [17].

На следующий день в «Саратовском листке» появилась заметка, в которой говорилось: «...8 ноября к часу дня главное помещение университета (актовый зал. – В.С.) наполнилось почетными гостями, профессорами, представителями города и учебных заведений, врачами, студентами... В числе почетных гостей, – отмечалось далее, – находились: начальник губернии П.П. Стремоухов, ректор духовной семинарии арх<имандрит> Серафим, городской голова В.А. Коробков, директора средних учебных заведений и мн<огие> др<угие>. Торжество открылось панихидой, после которой ректор университета В.И. Разумовский произнес речь о значении личности М.В. Ломоносова и его трудов в области русской науки и литературы» [18]. Завершал же газетное сообщение перечень имен остальных выступавших ученых.

Полные тексты прозвучавших в этот день докладов были напечатаны в университетских «Известиях» [19] и вышли в том же году в типографии Союза печатного дела в виде отдельного научного сборника [20], который мгновенно разошелся среди местной читающей публики*.

Из множества самых разных начинаний, инициаторами и основными действующими лицами которых являлись ученые Саратовского университета, в особую группу можно выделить их лекционную работу среди населения по углубленному освещению ряда проблем и сюжетов, касающихся конкретной научной отрасли, представленной в системе университетского курса обучения. Любопытно отметить, что лекции эти, несмотря на свою узкоспециальную направленность, пользовались у горожан большой популярностью. Нередко даже случалось, что помещения, в которых они проходили, не могли вместить в себя всех желающих.

Вспоминая о представленном 9 марта 1912 г. на суд широкой публики одного из вариантов своей лекции по физике – «Невидимые лучи», насыщенной различными опытами и демонстрациями, В.Д. Зернов впоследствии писал: «Актовый зал был переполнен слушателями. Были заняты не только все места, но публика стояла в боковых проходах плечом к плечу. Пришли ученики Саратовской католической семинарии, во главе их был преподаватель; он и его ученики в сутанях занимали целый ряд стульев. Были и все мои товарищи профессора» [11, с.128]. Как уточняли позже газетчики, лекция «привлекла более 400 человек слушателей», среди которых «было много учащих местных учебных заведений» [21].

Пропагандистом физиологических знаний был профессор И.А. Чуевский, с каковой целью он часто выступал с лекциями перед слушательницами медицинского отделения Саратовских высших женских курсов санитарного общества, слушателями Саратовских сельскохозяйственных курсов и первой Саратовской зубоврачебной школы. Чутко реагировал на запросы и нужды сельского населения профессор С.И. Спасокукоцкий, с именем которого по праву связывают многие успехи земской медицины. Зная о проблемах последней из личного опыта, он на протяжении всей своей жизни постоянно следил за тем, чтобы люди, посвятившие себя служению этому делу, как можно лучше были осведомлены в вопросах практической хирургии. Велики в научно-педагогическом и общественном плане и заслуги профессора В.И. Скворцова, являвшегося организатором и первым деканом Высших женских курсов в Саратове [22]. Атмосфера взаимного уважения и понимания друг друга царили на лекциях и

* О величине проблем, затронутых в выступлениях саратовских ученых, говорят сами названия их докладов: «Михаил Васильевич Ломоносов, его жизнь и деятельность» (Разумовский); «Духовный облик М.В. Ломоносова и некоторые основные черты его мировоззрения» (Преображенский); «М.В. Ломоносов как физик» (Зернов); «М.В. Ломоносов и его деятельность на поприще химии, минералогии и геологии» (Челинцев); «Некоторые черты характера М.В. Ломоносова» (Павлов).

других университетских ученых, жизнь и труды которых также навсегда останутся символом научного и культурного процветания края.

Стоит еще раз выделить главную особенность рассматриваемой проблемы, а именно: постоянное взаимовыгодное сотрудничество Саратовского университета со всеми научно-общественными учреждениями в городе. Во многом благодаря лишь такому взаимодействию, с каждым разом все больше и больше, проникал в народные массы свет знаний, а сам Саратов превращался в культурную столицу Среднего и Нижнего Поволжья.

Библиографический список

1. Подробнее об этом см.: *Чуевский И.А.* Торжество открытия Императорского Николаевского университета в г. Саратове 1909 года 6 декабря. Саратов, 1910; *Попкова Н.А.* Десятый русский университет. Саратов, 1990; *Она же.* «Праздник на саратовской улице» (Открытие университета в Саратове) // Опыт работы зональной научной библиотеки Саратовского университета. Саратов, 1992. № 32. С. 23–38.
2. Саратовский листок. 1909. 6 дек.
3. Шелгунов Н.В. Воспоминания // Шелгунов Н.В., Шелгунова Л.П., Михайлов М.И. Воспоминания: В 2-х тт. М., 1967. Т. 1. С. 143–144.
4. Зернов В.Д. Записки русского интеллигента // Волга. 1993. № 11. С. 137–138.
5. Саратовский вестник. 1909. 6 дек.
6. Празднование 25-летнего юбилея Саратовской Ученой Архивной Комиссии. Саратов, 1912. С. 28.
7. Цит. по: *Семичастнов М.* Саратовский университет как культурный центр Нижнего Поволжья // Нижнее Поволжье. Саратов. 1925. № 10 (17). Октябрь. С. 92.
8. ГАСО. Ф. 393. Оп. 1. Д. 273. Л. 286.
9. *Челищев В.В.* Химический анализ бронзовых зеркал // Труды Саратовской Ученой Архивной Комиссии. Саратов, 1913. Вып. 30. С. 149, 166.
10. ГАСО. Ф. 393. Оп. 1. Д. 157. Л. 179.
11. Зернов В.Д. Указ. соч. // Волга. 1994. № 2. С. 130.
12. См.: *Шамарин П.И.* Из истории научно-медицинских обществ в г. Саратове // Здоровье населения Саратовской области. Научно-тематический сборник. Ч. 2. Саратов, 1976. С. 118.
13. *Чуевский И.А.* Торжество открытия Императорского Николаевского университета в г. Саратове 1909 года 6 декабря. Саратов, 1910. С. 110.
14. Протоколы и труды Саратовского физико-медицинского общества за 1910 год. Саратов, 1911. С. IV–VI, 21.
15. ГАСО. Ф.393. Оп.1. Д. 157. Л. 6; Д. 163. Л.26; Д. 273. Л.147, 217; Оп.2. Д. 5. Л.21.
16. ГАСО. Ф. 393. Оп. 1. Д. 22. Л. 82.
17. ГАСО. Ф. 393. Оп. 1. Д. 166. Л. 7.
18. Саратовский листок. 1909. 9 нояб.
19. См.: Известия Императорского Николаевского университета. 1911. Т. III. Вып. 1.
20. Ломоносовский день в Императорском Николаевском университете. Саратов, 1911.
21. Саратовский вестник. 1912. 11 марта.
22. См.: *Демченко Т.* Дерзание // Непроторенными дорогами. Саратов, 1981. С. 32–41; *Розанова Л.* Действительный светоч науки // Там же. С. 77–79; *Георгиева С.А.* Профессор И.А. Чуевский // Саратовские ученые-медики. Страницы истории. 1909–1979. Саратов, 1982. С. 18; *Миленькая Ю.М.* Академик В.И. Скворцов // Там же. С. 13.

SARATOV UNIVERSITY AS A CULTURAL CENTRE OF NIZHNIYE POVOLZHJE

V.A. Solomonov

The article reveals participation of the high educational establishment in social and cultural life of the Saratov region in solving economical and social problems of the region. It stresses the wealth and variety of the university relations with local and Russian public, their continuous development, especially in the field of scientific and enlightening activity.

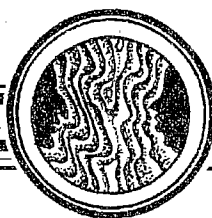


Соломонов Владимир Анатольевич – родился в 1962 году в Балашове Саратовской области. Окончив исторический факультет СГУ (1989), работал в Саратовском государственном техническом университете. В настоящее время – кандидат исторических наук, старший преподаватель кафедры истории России СГУ. Автор более 20 печатных работ по истории высшего университетского образования в России, специалист по вопросам дореволюционной истории Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского, активно занимающийся в этой области сбором и публикацией первоисточников.

М. Миллер

Об изобретении радио
...и не только





ОБ ИЗОБРЕТЕНИИ РАДИО ... И НЕ ТОЛЬКО
Лекция, прочитанная на открытии физматшколы
в Зеленом Городе 4 августа 1997 года*

М. Миллер

*Светлой, но трудной памяти Вити Гапонова,
трагически погибшего 4 августа 1977 года, день в
день 20 лет назад.*

Непонятно к чему вступление

Мое участие в летней зеленогородской физматшколе стало уже почти неизменной традицией. Наверное, я нахожу в этом определенный личный интерес. Но на сей раз впервые меня назначили выступать в начале – раньше бывало либо в середине, либо на исходе. А ведь вступительная лекция – это особый жанр. Она вроде увертюры: готовит слушателей к основным представлениям. Как бы!

Однако эта самая увертюрная задача – тоже на сей и тоже раз – неожиданно упростилась благодаря моей полной неосведомленности о содержании последующей лекционной программы всей школы в целом. Так что жанр получился сверхоригинальным – вроде написания введения к книге с заранее неизвестным текстом! Или заклинания против заранее неведомого недомогания!

Мои предыдущие «талалушки»

Сперва – для разминки – я решил повспоминать, о чем же говаривал предыдущие разы. Те лекции я обзывал ласковым словом «талалушки» в честь героя Талалушкина, именем которого назван этот самый пионер–когда–то–лагерь.

Веер заголовков. Помню, все началось с цикла лекций «о размышлениях над размышлениями», ибо мне казалось, что «ничего нельзя понять, не понимая, как мы понимаем», затем я приступил к рассказам–догадкам об общих принципах нашего понимания Природы, стараясь избегать безответственной категоричности. Кто–то как–то сказал, будто всякая наука начинается с сомнений и кончается верой. Думаю, она вообще никогда не кончается, просто в ней одни сомнения вытесняются подтверждениями, заменяясь другими, более свежими сомнениями, часто даже более изысканными, чем им предшествующие.

* © М. Миллер. Об изобретении радио ... и не только. Нижний Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997. 56 с.

Мне очень импонировала триада «команд научного исследователя»: to look! to put in order! to law! (сперва смотри и смотри вокруг! потом начинай приводить в порядок все увиденное! чтобы, наконец, научиться улавливать какие-то закономерности!)... и не забывай всю дорогу проверять! и не доверять! ...проверять! и не доверять! ...проверять себя! не отходя от фактов!

Интересно, что аналогичным триадам подчиняются даже «модельные миры», мысленно придуманные, воображенные, заполненные, как правило, упрощенными явлениями, но они – в отличие от тех, реальных (будто бы!) миров – оказываются как бы «прошпиганы» всевозможными вопросами и ответами. Наблюдая за этими умственно изготовленными мирами, можно предложить некую классификацию вопросно-ответных комбинаций, то есть разного толка задач. Одноходовых, двухходовых... этюдных... Одна из возможных комбинаций, которая очень мне нравится, состоит из таких (так вот озаглавленных) задач на *предсказания*, задач на *сходства* и задач на *свойства*. Тоже ведь своеобразная триада! Но уже триада тактик, а не явлений! Не вдаюсь в подробности, потому что сейчас я преследую цель только беглого ознакомления, ну, может быть, еще и подначки слушателей «на что-то такое этакое»!

Кстати сказать, почти все эти лекции были в свое время где-нибудь да опубликованы, а значит, при неукроцаемых любопытствах могут быть где-нибудь да отысканы.

Занимательная «право-лево́сть»

После этого из года в год я стал кидаться из одной темы в другую. Выделю, пожалуй, лишь два киданья. Первое досталось моему увлечению левой-правой симметрией... Увлечению страстному, навязчивому, почти параноидальному! Я норовил выискивать «лево-правость» всюду, где можно и где нельзя (нельзя – в смысле опасно можно): в жизни, в науке, в природе. Помните, как Чарли Чаплину, оторванному от конвейера, всюду продолжали мерещиться гайки, гайки, гайки... и он их откручивал, откручивал, откручивал. Так и мне всюду чудились левые и правые, правые и левые, левые и правые, правые и левые... Совершенно далекие... на первый, на второй, на третий взгляды... объекты (или понятия, или «еще что-то ни под какие слова не подлезющее») вдруг возобладали для меня таким объединяющим сходством – «лево-правостью».

Наверное, можно даже развлекаться с пользой для ума «игрой в породнения» или «в сближения дальноватых понятий»: называть два первых пришедших на ум предмета или явления и начинать выискивать в них какие-нибудь общие свойства, черты, характеристики, – фактические или формальные, все равно какие, лишь бы общие. Часто ответ находится не сразу, но в конце концов почти всегда беспроигрышно удачно, ибо все мы и все вокруг нас меж собою родня, близкая или дальняя, надо только искать и выискивать, тогда обрящешь!

Вот и я ухитрялся углядеть признаки право-лево́сти-лево-правости... всюду-превсюду: в математических и в физических пространствах, в химических соединениях, в биологических «живчиках», вроде нас с вами, в способах думанья, в социальных группированиях и даже... в потусторонних приговорах человечеству, выносимых (да будет так!) в Судный День?! (Да не будет Его!)

Я не сам, конечно, до всего додумывался: мне умело подсказывали напичканные всякими знаниями «наукоголики». В таком занятии есть, разумеется, элемент «подшучивания над истиной», но вполне суразный, здравости не противоречащий, и плюс к тому же педагогически завлекательный.

Помню, меня очень удивил Гарднер в своей патетической книге «Этот правый, левый мир» (загляните при случае, не раскаетесь!), так вот он обратил внимание, что наше представление о собственной внешности, выуженное из разглядывания себя в зеркалах или лужицах (однократно отражающих, а не как в трюмо), может раздражающе отличаться от фотографического, ибо у них

разная «лево–правость». Так что прихоращивающаяся женщина должна себя «подработать» еще и перед телевизором, а не то можно, понравившись самой себе в зеркальном отражении, ошарашить поклонников своей истинной (слева направо не переставленной!) красотой!

Экскурсы в историю

Второе мое киданье было посерьезнее. Я увлекся изучением особенностей интеллекта великих мыслителей прошлых лет. Великих, потому что, во–первых, они богаче свойствами, чем «обыкновенники», а во–вторых, после них остаются более обильные архивные следы (как правило), а значит, есть, с чем работать, есть возможность узнавать, что у них там упрятано в анамнезе.

Великие мира сего, как, впрочем, и все мы, обычные смертные, бывают (бывали и будут!) склонными или к строгому педантичному думанью (про математиков можно сказать – к алгебраическому), или к вольному образному, художественному (соответственно – к геометрическому), или в определенных пропорциях и к тому, и к этому.

Кстати, обычно это преобладание совмещается с функциями левых и правых полушарий человеческого мозга, то есть оказывается сродни той самой лево–правой симметрии, о которой я только что упоминал.

И мои исторические упражнения вдруг развернулись в увлекательную придумку: я составил эстафетную команду из четырех великих деятелей электромагнетизма – Фарадея, Максвелла, Герца и Хевисайда.

Представьте себе, мой компьютер в программе Word 7.0 первые три имени знает, а Хевисайда засчитывает за грамматическую ошибку... Догадайтесь, почему?... Два варианта!

Я приписал им «командную сыгранность» – будто они работали в одной лаборатории и последовательно развивали свои идеи, одну за другой, напрямик передавая из рук в руки, как это и полагается делать в эстафетных пробегах. Конечно, это было историческое надувательство, но надувательство полезное для понимания коллективных движений умов, происходивших некогда в реальном времени, хотя и разноместно. Дело в том, что идеи *право–мыслящего* Фарадея подхватывались *право–лево–мыслящим* Максвеллом, передавались затем *лево–право–мыслящему* Герцу и поступали на «вход» *право–мыслящему* Хевисайду – для придания им окончательного «общего вида» (так, кажется, говорят конструкторы изделий).

Я потом примеривал аналогичные подходы и к более близким историческим сближениям людей, даже совсем рядышным, в частности, к своим прямым учителям – М. А. Леонтовичу и М. Л. Левину, увы, уже ушедшим из жизни, – и даже к окружающим меня институтским коллективам, но вовремя опомнился, поняв, что живые бывают такими, мягко говоря, обидчивыми, что анализировать их свойства... лучше подождать.

А про связь Леонтович – Левин вы можете при желании прочитать в редкостной по интересности и жанру книге «Михаил Львович Левин. Жизнь. Воспоминания. Творчество», выпущенной нашим институтом. Вот–вот произойдет ее второе издание.

Итак, я перечислил некоторые темы своих предыдущих «талалушек», чтобы мое «введение непонятно к чему» хотя бы произрастало из «предшества, понятного про что»...

Лекционная эстафетность

Я понимаю, что те мои прежние лекции слушали «физматпионеры» разных наборов и даже (возможно) разных поколений, но не могу отстроиться от чувства присутствия всех вас на всех них. Это поразительный психологический казус,

видимо, чем-то полезный лектору, принуждающий его избегать повторов (вроде пения «под фанеру» – заядлую нынешнюю эстрадную охмуриловку, в основном российского злоупотребления!), а главное, – побуждающий к связности мыслей с несомненной выгодой для качества таковых. Ибо всегда существует разница между эпизодом из реально происходящей (или уже происшедшей!) жизни и какой-то отдельной, изолированной, случайно подвернувшейся историей. В общем, независимо от того, знаете ли вы об этом или нет, сам-то я проникнут связностью всего мною прочитанного, что отчасти сходно с той эстафетой классиков, о которой я только что распространялся выше. Ну, конечно, с поправкой на нескромность.

Две крайности в повествованиях

Задумывались ли вы когда-нибудь, как люди строят свои речи. И не только речи, а любые рассказывания, повествования и т. п. Существует целая наука, изучающая словесные структуры и смысловые изъявления. Зная о ней, я почти не знаю ее саму. Это обидное, но не безнадежное невежество, поскольку оно восполняется повседневными наблюдениями и самообразовательными упражнениями.

Поделюсь некоторыми из них.

Начну, пожалуй, с фривольного воспоминания. Как-то раз мы с моим другом – преподавателем нашего университета да плюс к тому же довольно крупным ученым и любознательным человеком – Д. А. Гудковым придумали такую «инспекторскую» игру: при посещении чужих лекций не обращать внимания на их содержание, а засекают только порядок меловых отметин, оставляемых лекторами на доске, и тем самым строить своеобразные маршрутные меловые карты прохождения лектором «досковой местности». (Это происходило еще в пещерную эпоху меловой лекционной цивилизации!) В результате у нас накапливались разнообразные картинки; разнообразные, но все же поддающиеся незамысловатой классификации. Обнаружилось несколько характерных манер. Ограничусь пояснениями крайностей. В первую крайность впадали природжденные педанты – они заполняли доску последовательно, как тетрадки по правописанию, строчку за строчкой, формулу за формулой, мысль за мыслью. За ними было легко записывать и уж совсем легко было потом их вызубривать.

Sic! А вам не приходило в голову, почему все (по крайней мере, западно-язычные) тексты именно так «педантично организованы»? Всегда в линию (их так и называют – линейная пропись), большей частью слева направо, с перескоком с конца одной строки в начало другой... причем эти тексты (по крайней мере, в печатном исполнении) дискретны, то есть представлены разреженной знаковой последовательностью – набором отдельных букв и разрывов, тогда как при чтении или при каком другом воспроизведении (иногда даже в скорописи от руки) они обретают по слову плавную непрерывность... Попробуйте помозговать над этим пассивно и/или активно, то есть находя не только объяснения, но и противопоставления!

Я буду часто обрывать свои высказывания, как бы оставляя их для размышлений, обобщений, подтверждений, и/или разоблачений... Причем, честно говоря, мне и самому иногда хочется поменяться с вами местами – в поисках удачного ответа, включая и безответность! Последнее требует особого мужества – не так-то легко дается понять, что некая поставленная задача вообще не имеет решения! Никакого!

Противоположно действующие исполнители лекций оставляли после себя случайно разбросанные по всей доске разноформенные и разномерные «ляпушки» (некоторые шутники склонны различать два вида таковых: либо козьи катыши, либо коровьи блины), так что зазевавшийся слушатель, руководствуясь лишь оставленными на доске следами, мог просто не суметь включиться в процесс понимания.

А ведь существует неписанный закон писания на доске, гласящий: чем важнее истина, тем более величественным и долее сохраняемым должно быть ее меловое отображение!..

Конечно, редко кому удается вдаваться безукоризненно в какую-нибудь одну из этих крайностей (хотя и такое бывает), обычно лекторы в определенной пропорции заимствуют что-то из той и этой, причем избираемое ими соотношение порой удивительно адекватно отражает их характеры и в какой-то мере способы производства мыслей, то есть манеры думанья. Получается своеобразная меловая графология! Всем бы нам и вам пройти через такую диагностику! Но и в этом тоже есть свои разнобои: одни жаждут самопознания, а другие – совсем нет, нет и нет!

Здесь я почувствовал, что наконец-то приступил к настоящему введению: вы можете теперь устраивать наблюдательное тестирование лекторов, вызывая их скрытые параметры. А что еще интереснее можно было придумать мне для увертоты, кроме как научение вас играм, скрашивающим время отсидки!

Возвращаясь к начальным словам этого раздела, можно попытаться расширить круг догадок, считая лекторские привычки лишь частными проявлениями неких общих свойств людей и их сотворений. И это действительно усматривается в текстах разных назначений – канцелярских, научно-технических, художественных... и даже, простите, ...баламутных. Да и не только в текстах, а пожалуй, в любых видах человеческого интеллекта, в музыке, в живописи, в архитектуре и в таком высшем пилотажном искусстве, как покладистость общения людей между собой!

Везде и всюду исполнители под напором своей природной сущности выкладываются между двумя предельными возможностями поведения: от монотонной выдачи «сюжетных линий», легко и прямолинейно воспринимаемых, до... скачкообразных, слабо предсказуемых туда-сюда-шараханий, когда только в целостном охвате, «усредненном» по всем побочностям, можно уловить общий смысл и настрой магистральных путей сообщений. Наглядный пример этого стиля «усвоения через мельтешение» являют собой, пожалуй, ультрасовременные видеоклипы, «раскручивающие» (какой удачный термин для обозначения умопомрачения!) очередную дарь или бездарь со скоростями мелькания, превышающими возможности вдумчивости!

Стиль свинга

Вот и мне тоже захотелось избрать такую двухплановую манеру лекционирования, где проступали бы оттенки обеих крайностей. И я включил свои мозги на изобретательское придумывание, то есть в отнюдь не простое (а иногда даже не безопасное) по нынешним временам занятие. Пусть, думаю, во мне воплотятся лекторы обеих крайностей враз: один будет играть роль «добропорядочного» повествователя, плавно, постепенно и, главное, более или менее предсказуемо ведущего свою версию, другой же будет учинять импровизационные сопровождения, содержащие «взгляды и нечто... вокруг и около...»

Но тут меня обуяла трезвость – ох, как трудно сейчас придумать что-то свое, никем еще не тронутое... Наша плотно набитая умами цивилизация (кто-то обозвал ее человеческим настилом земной поверхности) перенасыщена изобретениями всевозможных штучек-дрючек от детей-игрушек до идей-старушек. (У меня, думаю, еще будет случай потревожить эту тему.) Один мой умный учитель любил говаривать, что ноне проще додуматься до чего-нибудь нужного самому, чем отыскать это нужное во всемирно рассеянных «хранилищах и распространялищах идей», ибо природа становится доступнее (и ограниченной?) умственных из нее выжимок.

...Не знаю, сохранится ли этот совет в эпоху сплошного покрытия Земли информационными High-way'ями, Internet'ами и WWW'ами?! Думаю – да!! Но с оговорками... на непредсказуемость эволюции «человекейников»...

А другой мой знакомый знакомого, побывав в Штатах, сетовал на своё творческое скудоумие; стоит, говорит, предложить что-нибудь свеженькое (во всяком случае по бытовой части), шасть в ближайший супермаркет, а там уже это самое давно скучает в красивой упаковке и жаждет интимного сближения с тобой!.. Не зря же еще в прошлом веке один из клерков, отчаявшихся от изобилия заявок на патентные привилегии, предлагал вообще закрыть регистрационные «лавочки», считая, что всё путное на свете уже изобретено и далее пойдут одни повторы!

Пришлось, и мне вспомнить, что я где-то уже встречал такое соединение стилей... Боже мой! Так ведь это стиль джазового свинга; он у меня почему-то часто ассоциируется «с бередящим душу плачем одиночного саксофона под ритмический аккомпанемент сочувствующего ему оркестра». Но для уверенности я посмотрел в толковый словарь. Там поясняется: свинг – стиль джазовой музыки, характерной чертой которого является сольная импровизация на фоне заранее написанного аккомпанемента, обычно с большим составом исполнителей... Но это, я считаю, не так уж и обязательно – вполне годится и одиночный человек-оркестр. (Верно, там еще приводятся и другие пояснения, вроде «вливающей свинговой походки», но для моих аналогий почти все они идут в дело – продвижение к цели с вливающими отклонениями от прямой тропы и т.д., и т.п.)

Итак, мою лекцию, в известном смысле, можно было бы назвать свинговой: по замыслу она должна состоять из постоянно звучащего «введенчества», переходящего в небеспорочные рассуждения об изобретении радио, и импровизаций на попутно побуждаемые темы.

Упоминание о радио я даже вставил в заголовок, поскольку тема эта была заявлена мною, когда я еще не знал, что буду «брошен на всеобщее введение»! Однако, в последнее время отношение к названиям чего бы то ни было стало каким-то шатким – раньше, бывало, от любого заголовка требовалась прежде всего пояснительность, а теперь ее опережает критерий притягательной рекламности, пусть даже с ущемлением смыслового соответствия. Вот, например, сейчас по нашей непутевой стране мечется рок-ансамбль с жалобами на здоровье под кличкой «Ногу свело», и я, как-то наткнувшись на него по телеку, аж отпал от удивления – там этой самой ногой такое вытворяют, что она очень даже... совсем, совсем... здоровенька да плюс к тому же еще с модными агрессивно эротическими поползновениями... А название выполнило функцию приманки и пробралось в наше подсознание через ту самую «притягательность дури», которая будто бы спасает людей от скукоты однообразия.

Перевалка столетий

Ну, а теперь в духе свежесобещанного свингового влияния я совершу свой очередной (и, заметьте, уже не первый!) «закидон»: поделюсь – как бы невзначай – ожиданиями предстоящей смены столетий. А вы уж, пожалуйста, не забывайте следить за торжественным звучанием аккомпанемента.

Вот нам (вам) скоро предстоит переход в 21-й век. А вы... мы... люди... питаем слабость к круглым датам. Загадочную и непреодолимую. Объективно природного, внечеловеческого смысла они, по-видимому, не имеют. Ну и пусть не имеют, а иметь человеческий смысл – разве плохо! Существует даже такое захватывающее увлечение, как магия кабалистики, где каждому числу приписывается «сокровенное откровение». Не буду сейчас вдаваться в эти «игры», они весьма завлекательны, хотя и не совмещаются с наукой. Во всяком случае с нашей наукой. С той, которая

- а) оперирует причинно-следственными понятиями,
- б) повторяемо проверяема,
- в) системна,
- г) внутренне непротиворечива...

д)... (э, ю, я), – в столь торопливом изложении всего не перечислишь... а надо бы... а надо бы... надо бы... попытаться...

Тем более, что кроме нашей науки существуют еще и не! наши(!), да и вообще не! науки! или еще кошмарнее – лже! науки!

И все эти «разновидности» и «разнопородности» так, бывает, перепутываются в людском сознании, что нормальному уму, трусоватому перед стихиями, разобраться, что почем, зачем и почему, совсем не просто.

Кстати сказать, я знаю, что настоящая вводная лекция к школе этого сезона должна была бы быть прочитана именно о науках и лженауках, прочитана не мной, а другим «лекционером», более меня взволнованным этими делами. Впрочем, может, это все–таки произойдет в следующий лагерный цикл, так что не бойтесь записаться во второгодники, ведь так важно научиться избегать взглядового фальстарта и с раннего думательного возраста начать обзаводиться «чутьем на истинную науку», а значит, и средствами защиты от шарлатанства.

Вернусь, однако, к круглым датам, плюс к тому же записанным в привычной нам десятичной системе исчисления, благодаря которой мы будем иметь возможность вот–вот устроить себе Праздник Тысячелетия.

Откуда же возымело такую власть над обществом людей число ДЕСЯТЬ?

Скорее всего, его возвеличивание порождено десятерней пальцев наших рук, то есть все это «дело рук человеческих». (С ногами было бы 20; говорят, у каких–то культур как раз принята двадцатеричность счета.) И эти наши сорокалетия, столетия, тысячелетия... как и другие десятеричные круглолетия просто «высосаны из пальцев». (Кстати или некстати сказать, в том же ключе звучит жаргон физиков, когда они свои качественные теории иногда считают «пояснениями на пальцах»... Отчасти шутливо, а вдруг, не отдавая себе отчета, на полный «модельный серез»?)

Однако в силу своей природной беспокойности многие люди не терпят окончательных (и плюс к тому же безальтернативных!) взглядов, а потому стремятся выискивать соревнующиеся варианты. При таком особом желании нашей «ручной» десятичной системе исчисления можно придать «почти вселенский смысл», то есть смысл, независимый от человеческой телесности. (Ну, вроде бы независимый, потому что кто их знает, эти вселенские шашни?) Мы, как известно, ютимся в *трехмерном* пространстве и тянемся по жизни вдоль *одномерного* времени. Такое (три + один) обиталище допускает десять (именно 10!) независимых видов симметрии и соответственно десять законов сохранения (the conservation laws). Либо вы уже кое–что знаете про это, либо доверительно знакомитесь через меня сейчас. Так вот, «консерватисты» (сторонники законов сохранения, опирающихся на пространственно–временные свойства) в отличие от «фалангистов» (сторонников свойств, извлекаемых из фаланг *homosapiens'ов*) могут придать десятичной системе исчисления сакраментальное физическое обоснование. На самом деле число законов сохранения гораздо больше, но наш пространственно–временной мир держится именно на десяти. Земля на *трех* китах, а пространство–время – на *десяти* симметриях!

Поэтому даже в послание существам неземного происхождения можно вставить такой ряд чисел: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, выделив чем–то десятку, и те, неземные, уловят кое–что интересное про нас, земных (если, конечно, сумеют и захотят!). Узнают, в частности, что из 12–мерных пространств мы предпочли (3 + 1)–мерное! А почему? Мы и сами (пока?) не совсем понимаем (Запомните это место на всякий случай, вдруг кому–то из вас несказанно повезет!).

И еще одно пожелание. Сейчас как–то ослабло увлечение – оставлять послания, содержащие предельно сжатые и по возможности всеохватывающие сведения о нас, грешных, о царях и рабах нашей земной природы! В форме, доступной для понимания царями и рабами чужой, неземной, природы! Занятие, поистине способное взбадривать человеческий интеллект. Попробуйте! Поупражняйтесь! Тут и выбор языка общения, более того – даже логики думанья, тут и решение самой коварной задачи человека и человечества – определить, что чего

первичнее и что из чего само собой вытекающее. Информационная разновидность предприятия библейского Ноя – забрать все, невозполнимо нужное, но и не перегрузить Ковчег!

Итак, итак. При любом происхождении нашего пристрастия к десятичной системе мы готовимся к назначенному юбилею. Кончается век и тысячелетие одновременно. Между прочим, условность даты этого всемирного праздника показательна еще и тем, что рядовые члены (одночлены многочленов!) нашего общества уже заранее пугаются – то ли им возликовывать 1 января 2000 года, когда заканчивается отметинка 19.. (и все компьютерные сети – кхе! кхе! – должны быть перепрограммированы на новые двойные нули – кхе! кхе!), то ли терпеть до 1 января 2001 года, когда, строго говоря, как раз и начнется третье тысячелетие при отсчете от Рождества Христова!

Впрочем, ни советского, ни бывшего советского человека сие раздвоение совершенно не волнует – он безусловно будет праздновать все подряд в полную силу да плюс к тому же и по новому, и по старому стилю!

Но праздник есть праздник, и в преддверии такового принято подводить итоги; а в ознаменование такового строить прогнозы и, уж конечно, подносить подарки. Попробуем вовлечься в преддверие и в ознаменование.

Величие и отличие 20-го века

Когда кончался прошлый, 19-й век, в народах тоже царило предвкушение чего-то «этаконького». Земляне спешили (как бы!) досрочно выполнить план работ, утвержденный (как бы!) правителями 19-го века, и поднакопить всяческого задела на век 20-й!

Своеобразный синдром самоохмурения круглой датой! Гипнотизирующее действие людей на самих себя! И ведь не пустопорожнее, а очень даже продуктивное воодушевление!

Приведу несколько фактов, несколько сверхоткрытий, относящихся только к н а ш е й н а у к е, только к ней!

1895 год – рентгеновские лучи (Рентген);

1896 год – естественная радиоактивность урана (Беккерель);

1897 год – электрон (Дж. Дж. Томсон);

1900 год – фотон (Планк);

1888 – 1900 годы – электромагнитные волны... радио... (Герц, Лодж, Бранли, Юз, Тесла, Крукс, Попов, Маркони, Браун ... и др., и др.).

Все эти «эмбриончики» дали в 20-м столетии потомство, в значительной степени определившее ход развития человечества. И сейчас, на околице 20-го, естественно, хочется взглянуть в его содержательность – научную плюс техническую, плюс общеинтеллектуальную. Мне говорили, что какие-то современные «агитпропы» (думаю, далеко не все юные «физматчики» вашего поколения знакомы с этой аббревиатурой – на старосоветском языке она означала агитацию и пропаганду! – с элементами политшоу и промоушена – «полит-раскрутки», правда, скучноватыми, без эротики!) придумали даже такое конкурсное развлечение: установить призы за наиболее яркую, точную, выразительную характеристику 20-го века! По-моему, задача безответна, вернее, многоответна, так как у завершающегося века уйма всяческих характеристик, и все они стоят мессы.

Для кого-то век был «веком электроники» (всего лишь!), для кого-то – «веком информатики» (всего лишь!), для кого-то – «веком полимерики» (всего лишь!), для кого-то – «веком дезоксирибонуклеиники» (ох!), а еще и «веком проникновения в космос и микромир» (это уж точно!), для кого-то – «веком двух миров и двух культур», «авангардизма», «поп-арт'изма» и другого всяческого «изма», а еще и мракобесий, кровопролитий, разгула безнравственности и порчи...

Я попробовал наугад пооткрывать словарь и почти каждый раз попадал в подходящее для 20-го века определяющее слово! Надо же! Каким емким

вместилищем эпитетов оказался век, в котором нас угораздило побывать! И вдобавок он выдвинулся среди других веков, ему бесподобно-подобных, не только качествами, но и количествами – в нем буйствовал экспоненциальный рост многих значимых для цивилизации величин: например, число ученых, число инженеров, число артистов, художников, музыкантов... превысило число таковых людей, собранных со всей предыдущей истории... И еще много чего такого, только, пожалуй, без рекорда по числу негодяев, но с рекордом по числу ими невинно убиенных! Впрочем, я и в этом не уверен!

А для меня двадцатый век, прежде всего, представляется веком всемерного освоения электромагнетизма. **Веком электромагнитных колебаний и волн!!!**

Постараюсь привести доводы и вовлечь вас в свои взгляды. Один довод будет космический, а другие – нормальные, земные.

Ввиду изобилия предлагаемых характеристик я решил исхитриться, вывернув задачу наизнанку: а нельзя ли, сказал я себе, поставить вопрос так, чтобы ответ был только один. Заранее предусмотреть однозначность решения. И мне кажется, мое исхитрение удалось. (Кстати, это типичный педриём перехода от прямых задач к обратным – от известного ответа к искомому вопросу.)

Представим себе, будто «нечто оснащено наблюдательное» на протяжении многих столетий следит за нашей планетой Землей, следит издали, фиксируя все происходящее на Земле и исходящее от нее события. Что же оно – это «нечто» – обнаружит в 20-м веке такое, чего никогда раньше не наблюдалось? Пожалуй, только одно: Земля стала интенсивно излучать электромагнитные волны, преимущественно радиодиапазонов. Причем не какие-нибудь тепловые «шумы», а организованные (когерентные) излучения, несущие понятные (или нет), расшифровываемые (или нет), но «проблески разумности» (впрочем, и неразумности тоже!).

В 20-м веке планета Земля начала выдавать в космос электромагнитные сигналы искусственного происхождения – свидетельства интеллектуально развитой жизни!

По мере приближения этого «наблюдательного нечто» к Земле вплоть до проникновения в так называемую ноосферу количество признаков «человечинки» возрастает до непомерности, но по-прежнему отличительная роль электромагнитных излучений сохраняется на главных местах. И этому есть правдоподобное физическое обоснование.

«Общество невозможно без общения через сообщения между сообщниками!»

Наверное, только русский язык допускает такое удачное единение корней в таком единении значений!

Так вот, из всех физических средств обмена информацией в масштабах нашего макромира доступны и эффективны лишь два вида взаимодействий: гравитационное и электромагнитное. Лишь они макровездесущие и достаточно дальнедействующие... Остальные – слабое (примыкающее к электромагнитному) и сильное (из числа известных нашей науке... про разные там «торсионные» и «псевдо-псевдовые» говорить не будем, пока те не станут экспериментально обнаруживаемыми!) – «предназначены» в основном для обеспечения устойчивости материальных объектов. Природа хорошо, но не исчерпывающе хорошо распорядилась теми двумя вездесущими взаимодействиями для информационного общения между живыми существами: основными носителями сигналов стали механические и электромагнитные колебания звуковых (звук) и оптических (свет) частот.

Почему биологические объекты предпочли колебания и волны именно этих частот, как они выбирали средства получения и усвоения сигналов этих физических принадлежаний (выражаясь по-современному, – средства генерации, излучения, приема и расшифровки) равно и многие другие вопросы «истории естественного самосовершенствования естества» представляют отдельный интерес (да еще какой!), и поэтому они должны быть выделены в отдельное производство (так говорят «экономники!»). Может быть, кому-то из вас когда-нибудь повезет заниматься этим занятием, и я заранее наполняюсь завистью к этим вам, ибо такие исследования должны вбирать в себя поэзию и прозу, воображение и

разумение, физику, химию, биологию, социологию... и... почти все-все остальное!.. включая веру в бесполезность своего пребывания среди людей...

...Итак, величие и отличие 20-го века заведомо связано с исправлением недоработок Природы по части средств связи, то есть с освоением и широким использованием электромагнитных волн всех диапазонов, и особо тех, что были отставлены биосистемами в эпоху их доосознанного ими самими развития.

Пассивное и активное изобретательство

Как вы могли убедиться, в своем блуждании вокруг и около я наконец мотнулся в сторону исходного заголовка своей лекции, выйдя все-таки из сплошных «не только...» на «изобретение радио и только»... Манера свинга воистину полна ожидаемых неожиданностей! Но для того, чтобы войти в эти дела с приемлемой честностью, мне нужно слегка подготовить себя и вас по части изобретательства вообще.

Люди по своей природе тянутся к открытиям и придумываниям нового. Общество должно быть заинтересовано в этом и должно поощрять умельцев делать это. Для чего оно и устанавливает законы, защищающие открывателей и изобретателей от облапошивания и ограбления. Оно обязано гарантировать производителю интеллектуальной собственности свободное владение и распоряжение ею.

Между прочим, противоестественный «командный социализм» с его провозглашением равенства всего на свете – от мужей и жен... до мыслей – возможно, потерпел крах еще и потому, что отвергал защищенную самостоятельность интеллекта, тем способствуя обленению и прозябанию обладателей его!

Но для всего этого необходимо четко и непрерываемо установить границы понятий, надо знать, что есть и что не есть открытие и/или изобретение. Я не поленился заглянуть в соответствующие руководства и готов поделиться с вами своими «открытиями про открытия».

Начну с нашего отечественного уложения. Замечу, однако, сразу же, что законы, управляющие поведением людей, в отличие от законов, управляющих движением объектов неодушевленной Природы, обладают «словесной зависимостью» – в них часто (если не всегда!) присутствует еще и элемент неопределенности в трактовке используемых слов из-за их «обогащения» скрытыми интонациями и подраствованиями... Например, такие словесные формулы, как «закон есть закон» или «игра есть игра» и т. п., с точки зрения формальной логики не более, чем примитивная, бессодержательная тавтология, а «по-человечески» эти сентенции несут на себе вполне содержательные впечатления (не смыслы, а впечатления!), которые не могут быть истолкованы однозначно, но способны, однако, приближать «воспринимателя» к желаемому отклику на них! Это замечание может быть даже важнее того повода, из которого оно выросло, – оно должно повысить бдительность и разведческую недоверчивость ко многим словесно-текстовым «законам жития несвятых».

Итак, начну с отечественного уложения об изобретениях. Фрагментарно. Выборочно. В интересах собственных интересов.

«Изобретению предоставляется правовая охрана, если оно: а) новое, б) имеет изобретательский уровень, в) промышленно применимо...»

Вы почуствовали, как одни слова определяются через другие, оставляя простор для вмешательства «человеческого фактора»?!

Далее идет перечень тех достижений, которые не могут иметь патентной защиты от присвоения чужаками. В том числе и очень значимые для человечества достижения! Вот некоторые из них: а) научные теории и математические методы, б) методы умственных операций, в) методы управления, правила, программы на ЭВМ и т.д. ...г) эстетические новшества... и, наконец, д) самое вместительное неприятие патентности – «любые предложения, противоречащие интересам общества, принципам гуманности и морали»(?!).

Я преследовал три намерения, забираясь в дебри этого законодательского

крючкотворства. Во-первых, то, о котором я уже говорил, – отметить пресловутую *роль «истолкования слов словами»*, создающего кажущуюся объективность указания. Во-вторых, продемонстрировать тщетность справедливости законов, придумываемых людьми для людей, даже, казалось бы, в таком возвышенном занятии, как творчество. И наконец, познакомить вас с безвыходной запутанностью людей в поисках приемлемых соотношений между личными интересами и интересами общества, между личными и общественными моральями... Воистину безвыходной, если эта проблема забралась даже в изобретательский кодекс! Я, например, не знаю ни одного более или менее значимого для общества устройства, которое, будучи придуманным из добрых побуждений и для добрых целей, не могло бы при случае быть обращенным во зло. Даже электромагнитные волны радиодиапазона! Даже они! Сперва – даже, а потом – и тем более они!

Сперва я заподозрил, не усугублена ли вся эта словесная изощренность нашей российской тягой к невнятности формулировок. Но полистав аналогичную иностранщину, обнаружил, что мы по-ученически скрупулезно передрали основные места из других языков, так что многие отмеченные выше свойства, можно сказать, всенародны. Ну, с точностью до небольших, местами, правда, довольно странных, расхождений.

К примеру, у нас (еще в советскую бытность) придумали отличать изобретения от открытий (и даже выдавали на них отдельные документированные почести и денежные вознаграждения!), а в американских Штатах в соответствующем уложении специально указывается, что под термином «изобретение» следует понимать как изобретение, так и открытие, что, однако – с учетом перечисленных выше запретов на патентоспособность, – фактически закрывает аттестированное признание любого открытия явлений Природы, равно как и почти любое творение ума человеческого, не воплощенное в «предметы».

А вот еще одно американское чудо; не решаясь его комментировать, приведу прямо в цитатных кавычках. «При установлении приоритета изобретения должны учитываться не только соответствующие даты возникновения замысла и практического осуществления изобретения, но и *разумное прилежание лица*, который первым задумался и последним практически осуществил изобретение в течение времени, предшествовавшего возникновению замысла изобретения у другого лица». Не без претензии на правовой шедевр и такая директива: «Патент не выдается... на изобретение, которое было зарегистрировано или описано в печатной публикации в какой-либо стране *более чем за год до даты фактической подачи заявки в этой стране или продавалось в этой стране более чем за год до такой подачи*». Наконец, последняя цитатка. «Патент не может опровергаться на основании метода, которым изобретение создано». Попробуйте поизгаляться над этими замысловатостями, опираясь хотя бы на тот минимум сведений, который я уже привел выше. Попритираться к уставным руководствам «в порядке умственных тренировок».

Чтобы вы не подумали, будто я направленно «тяну на американцев» в духе нашей бездумной Думы, приведу несколько характерных извлечений из британского законодательства. «Патент может быть выдан только на изобретение, которое является новым, обладает изобретательским шагом (то есть не является *очевидным (!)* для лица, квалифицированного в данной области) и обладает возможным промышленным применением... однако использование которого *не поощряет (!)*, как можно предположить, оскорбительное, аморальное или антиобщественное поведение (!)...»

Я постарался наполнить этот фрагмент лекции казенными законодательными фразами, дабы продемонстрировать пеструю «непростоту правоты», любой правоты, даже такой, казалось бы, аполитичной, как изобретательство. Но была еще одна задумка – показать, как по мере «усовершенствования» законов управления обществом усложняется их исполнение, а следовательно, должна соответственно обуживаться специализация исполнителей. По-моему, изобретательный *т в о р е ц* не может быть вдобавок еще и пробивным *д е л ь ц о м*. Более того, такое совмещение должно мешать

ИСПОЛНЕНИЮ КАКОГО-ТО ОДНОГО ИЗ ЕГО ПРИЗВАНИЙ. Но есть и будут, конечно, исключения: время от времени появляются «люди без слабых мест», универсально способные; примеры таких исключений впечатляют, поскольку они на виду у всех: Эдисон... Нобель... Гейтс... Однако во всеобщем потоке развития человечества углубляющаяся специализация знаний и умений людей... все же, все же... неизбежна.

Вот потому-то встречается на белом свете как пассивное, так и активное изобретательство, впрочем, как и многое другое тоже – в соответствии с характерами участников и соучастников любого дела. «Активисты» норовят маячить всегда всем напоказ, а «пассивники», как правило, не очень приспособлены для самовыставлений. Но в любом деле, наверное, – в разумно пропорциональном представительстве – нужны и те, и эти. Иногда приходит в голову даже такая крамольная мысль – может быть, столь сложно сочиненные препоны законов как раз и воздвигаются для отфильтровывания творцов от менеджеров, то есть для затруднения людям делать дела, им природно не свойственные! Одним лепо, другим нелепо, а третьим, может быть, и благолепно!

Вероятно, мне затаенно хочется, чтобы большинство людей училось глядеть на жизнь с умеренным к ней недоверием, поощряющим наблюдательность и собирательность. И чтобы они умели, создавая – вопреки заветам пророка Моисея – себе кумиров (а куда ж денешься без этого!), почитать также тех трудяг и творяг, чьи жизни были «ухайдаканы» всего лишь на пьедесталы! (всего лишь!)

После этого можно безбоязненно переходить к истории появления радио!

(Окончание следует)

ON THE INVENTION OF RADIO ...AND SOMETHING ELSE

M. Miller

This lecture was delivered at the Summer Physical and Mathematical School in the Green Town (the neighbourhood of Nizhny Novgorod) on August 4, 1997. Its performance reminded a jazz style similar to swing music. The leit-motiv (the leading theme concerning invention and noninvention of radio) is accomplished with various improvisations – from diagnostics of peculiarities of natural or artificial thinking... up to some oddities of people customs. The problem of priority of an invention in the case of radio has a trivial solution (according to the author's opinion). Those were Faraday, Maxwell and Hertz who proclaimed the community of the whole electromagnetism (from statics to optics). So the following skilled scientists and engineers invented not more than technical methods and means of breaking-in intermediate frequencies. Therefore a plenty of claimants appeared to be «primary discoverers» (of wireless communication by means of electromagnetic waves). Thus a rare case takes place: in which it is simpler to establish «fatherhood» than «motherhood».



Миллер Михаил Адольфович родился 3 мая 1924 года в Нижнем Новгороде. Во время войны (1942) служил в рядах Красной Армии. Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1949). Некоторое время работал в промышленности, затем поступил в аспирантуру Горьковского университета к профессору М.Т. Греховой. Своим учителем считает также М.Л. Левина. Защитил кандидатскую диссертацию по поверхностным электромагнитным волнам (1953), затем докторскую диссертацию по взаимодействию заряженных частиц с высокочастотными электромагнитными полями (1960). Долго время читал лекции в Горьковском университете. В настоящее время работает главным научным сотрудником Института прикладной физики РАН в Нижнем Новгороде. Заслуженный Соросовский профессор.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина, М.В. Попова*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал–макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно–научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты –
р/с №4050381000000000378 ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

Подписка на II–ое полугодие 1999 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498
и по заявочным письмам непосредственно в редакции
Стоимость подписки на II полугодие 90 рублей

Сдано в набор 15.03.99. Подписано к печати 28.05.99. Формат 70x108/16
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 10,85 (7,75). Уч.–изд. л. 9,5. Тираж 200 экз. Заказ 108

Издательство ГосУНЦ «Колледж»

Лицензия ЛР №020773 от 15.04.98

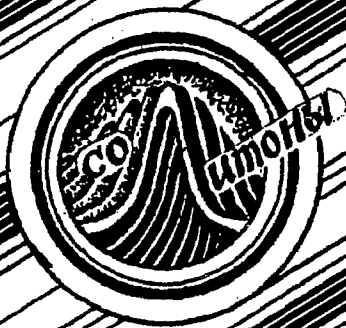
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845–2)514298, факс (845–2) 514298
E–mail:and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

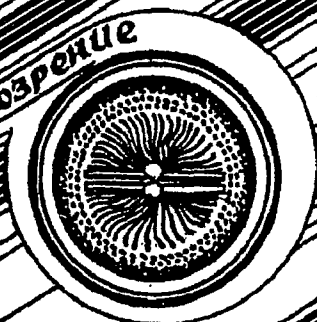
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1999



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для
студентов и
преподавателей



Современной
нелинейной
динамики

Проблематика и перспективы реконструкции динамической модели применительно к системам каллиграфической палеографии (на материале рукописей А.С.Пушкина)*

До сих пор изучение палеографических систем производилось, в основном, сочетанием лингвистико-статистических методов анализа текста с физико-химическими исследованиями материальных носителей. Однако любой рукописный текст можно рассматривать как временную реализацию некоего колебательного процесса, связанного, например, с движением пера, и как таковой он вполне подлежит анализу в рамках динамического подхода. В качестве исследуемого объекта был выбран (случайным образом) фрагмент рукописи А.С.Пушкина (АСП) (рис.1). Известно, что АСП-рукописи помимо собственно текста содержат разнообразные изобразительные элементы - рисунки, росчерки, виньетки. Как будет ясно из дальнейшего, это обстоятельство имеет принципиальный характер.

Для корректного проведения подобного анализа исследуемый текст должен быть сначала преобразован из вида $y(x)$ в $y(t)$ и подвергнут определенной модификации с целью исключения многозначности, обусловленной переменной толщиной линий, наличием клякс и натеков. Далее известными методами, восходящими к основополагающим работам Паккарда и Такенса, было проведено восстановление фазового портрета (ФП), рассчитаны его параметры и характеристики. Мы не будем здесь останавливаться на стандартных трудностях, связанных с подобным восстановлением и на стандартных же методах их преодоления; отметим только, что, как ни странно, наибольшую информативную ценность представляет не сам аттрактор, который имеет вид виньеток и росчерков различного типа (рис.2), а график корреляционной размерности (ГКР) как функции масштаба наблюдения (см. рис.на 1-й стр. обложки). Сравнение этого ГКР с автопортретом в исходном объекте (рис.1) указывает на их несомненное сходство. Таким образом, многочисленные рисунки в АСП-рукописях представляют собой либо ФП, либо ГКР. Более подробные исследования с различными текстовыми фрагментами показывают, что хотя буквально-смысловая корреляция между внешним видом ГКР и текстом не исключена, как правило, здесь имеет место соответствие на ассоциативно-подсознательном уровне.

Все вышесказанное позволяет говорить о необходимости совершенно нового подхода к исследованию рукописного наследия нашего великого поэта. Несомненно, что АСП-мозг был наделен уникальной (хотя и не осознаваемой им) способностью практически мгновенного проведения анализа текста как динамической системы (ДС), причем непосредственно в графической интерпретации. Также несомненно, что подобной способностью в той или иной степени обладает какая-то часть населения. Не ставя вопрос о механизме подобного явления, отметим только, что алгоритмы и методы анализа ДС, возможно, "зашиты" в "подсознательных" областях коры головного мозга. Выявляя носителей таких способностей и развивая их, мы сможем создать альтернативные системы информационной обработки на совершенно новой основе и, противопоставляя их тотальной внешней компьютерной наркотизации, преодолеть в конце концов наше вечное отставание в этой области.

В заключение отметим, что следующим необходимым шагом в развиваемом подходе является реконструкция математической модели исходной ДС и развитие методов преобразования генерируемых ею временных реализаций в пространственные текстовые последовательности. В первую очередь здесь должна быть исследована проблема адекватности сконструированной ДС исходной и аутентичности сгенерированных ею текстов. В случае положительного решения этой проблемы (здесь, конечно, должна быть учтена и ее этическая сторона) открываются необъятные горизонты лингвистико-математического клонирования ДС писателей и поэтов (если только имеется достаточное количество рукописного материала). Становится реальностью воссоздание неизвестных, но подлинных текстов АСП, Лермонтова, Булгакова, Марининой наконец... Еще более грандиозные перспективы открывает возможность синтеза связанных ДС.

* Работа выполнена в рамках подготовки к празднованию 200-летия со дня рождения А.С.Пушкина

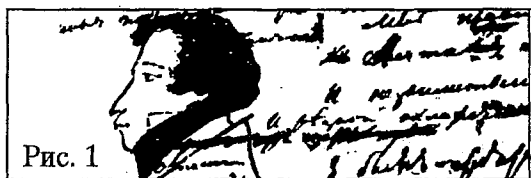


Рис. 1

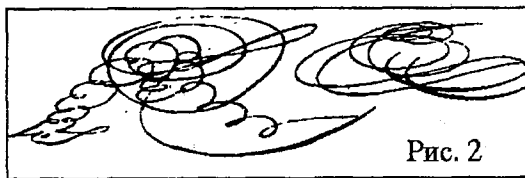


Рис. 2