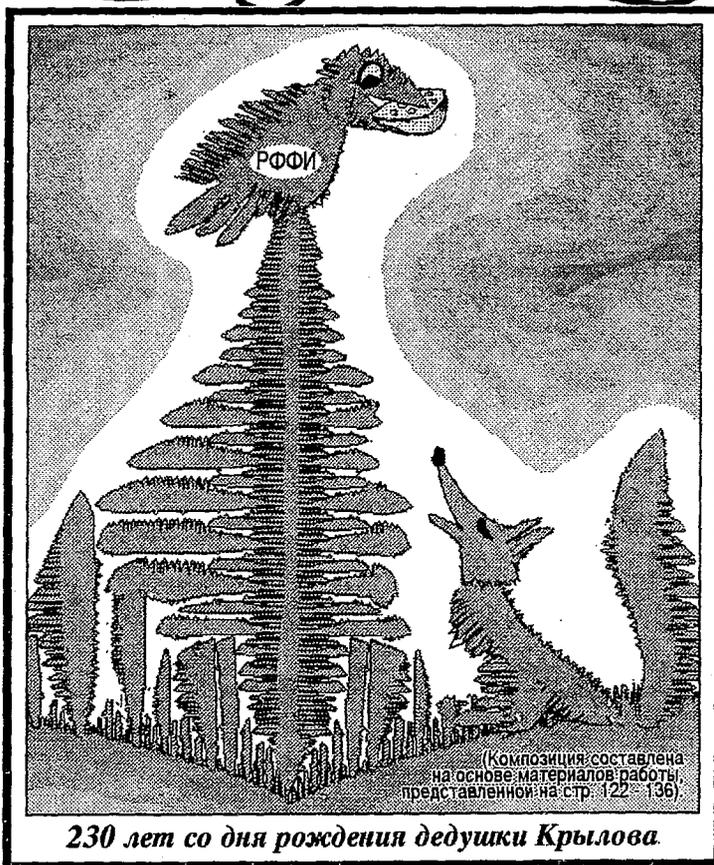


# Трикладная Деловая Динамика

23  
1999



230 лет со дня рождения дедушки Крылова

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



БИФУРКАЦИИ  
В ДИНАМИЧЕСКИХ  
СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ



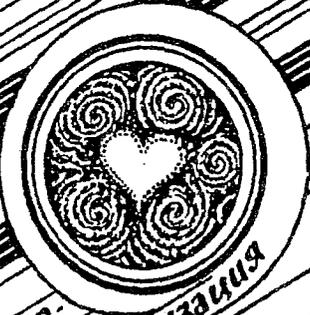
ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ  
НЕЛИНЕЙНОЙ  
ДИНАМИКИ



КОНФЕРЕНЦИИ, СЕМИНАРЫ, СИМПОЗИУМЫ



ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ



АВТОБОЛЬШИЕ САМООРГАНИЗАЦИЯ

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
НЕЛИНЕЙНОЙ  
ТЕОРИИ  
КОЛЕБАНИЙ  
И ВОЛН



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА



ЛИЦА. ИСТОРИЯ. PERSONA

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*В.И. Крицкий*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пуццано

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет

*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

*В.К. Юматов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

**СОДЕРЖАНИЕ**

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

*Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Механизмы разрушения хаотической синхронизации в системе связанных кубических отображений . . . 3

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

*Усанов Д.А., Вениг С.Б., Скворцов С.И.* Генератор с магниточувствительной инерционной нелинейностью . . . 12

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ**

*Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Численное исследование явлений самовоздействия ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках . . . 17

*Землянухин А.И.* Точное солитоноподобное решение нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка . . . 29

**НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ**

*Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Исследование колебаний в электронном потоке с виртуальным катодом в виркаторе и виртоде . . . 33

**ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ**

*Материалы V Международной школы  
«Хаотические автоколебания и образование структур»,  
6–10.10.98, Саратов, Россия*

*Блиох Ю.П., Любарский М.Г., Нусинович Г.С., Подобинский В.О.* Влияние нелинейности плазмы на процесс стохастизации колебаний, возбуждаемых в пучково-плазменных СВЧ-генераторах . . . 56

*Беляев Р.В., Кальянов Э.В., Кислов В.Я., Кяргинский Б.Е., Лебедев М.Н.* Автостохастическая система связанных генераторов СВЧ . . . 69

*Кузьмин Л.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Прецизионный генератор хаотических колебаний с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента . . . 81

*Емец С.В., Старков С.О.* Применение цифровых сигнальных процессоров для генерации хаотических сигналов и передачи информации с использованием хаоса . . . 95

*Мольков Я.И., Сушик М.М., Кузнецов А.С., Козлов А.К., Захаров Д.Г.* Динамическая модель локомоторных движений человека, вызванных вибрационным воздействием на мышцы . . . 107

*Галенко П.К., Кривилев М.Д., Емельянов К.В.* Бифуркации в структуре свободно растущего дендрита при затвердевании бинарной системы . . . 122

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA**

*Миллер М.* Об изобретении радио ... и не только . . . 137

*К 120-летию со дня рождения Л.И. Мандельштама. Трубецков Д.И.* . . . 153

**К 90-ЛЕТИЮ САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

*Письма профессора В.Д. Зёрнова периода открытия и становления Саратовского университета. 1909 – 1914. Соломонов В.А.* . . . 156

## CONTENTS

## BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Mechanisms of chaotic synchronization loss in the system of coupled cubic maps.  
*V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, V.S. Anishchenko.* . . . . . 3

## APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- The generator with magnetosensitive inertial nonlinearity. *D.A. Usanov, S.B. Wenig,  
 S.I. Skvortsov.* . . . . . 12

## NONLINEAR WAVES. SOLITONS

- Numerical investigation of self-action effects of backward volume magnetostatic waves  
 confined beams in ferromagnetic films. *G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov* . . . . . 17
- Exact soliton-like solution of the fifth-order nonlinear evolution equation.  
*A.I. Zemlyanukhin* . . . . . 29

## INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Investigation of oscillations of electron beam with virtual cathode in vircator and  
 virtod. *V.G. Anfinogentov, A.E. Hramov* . . . . . 33

## JOURNAL IN JOURNAL

*Materials of the V International School on chaotic oscillations and pattern formation  
 October 6–10, 1998, Saratov, Russia*

- Influence of plasma nonlinearity on process of radiation stochastization in beam-  
 plasma microwave oscillators. *Yu.P. Bliokh, M.G. Lyubarsky, G.S. Nusi-  
 novich, V.O. Podobinsky.* . . . . . 56
- Autostochastic system of coupled microwave oscillators. *R.V. Belyaev, E.V. Kal'y-  
 anov, V.Ya. Kislov, B.É. Kyarginskii, M.N. Lebedev* . . . . . 69
- Precision chaotic oscillator with piecewise-linear characteristic of nonlinear ele-  
 ment. *L.V. Kuzmin, N.A. Maximov, A.I. Panas* . . . . . 81
- Using of digital signal processors for chaos generation and chaotic communication.  
*S.O. Starkov, S.V. Emetz* . . . . . 95
- The dynamical model of locomotor-like movements evoked by muscle vibration in  
 humans. *Ya.I. Molkov, M.M. Sushchik, A.S. Kuznetsov, A.K. Kozlov, D.G. Zak-  
 harov* . . . . . 107
- Bifurcations in a structure of a free growing dendrite during solidification of a bi-  
 nary system. *P.K. Galenko, M.D. Krivilyov, K.V. Emelyanov* . . . . . 122

## HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- On the invention of radio ...and something else. *M. Miller* . . . . . 137
- To the 120th anniversary L.I. Mandelshtam *D.I. Trubetskov* . . . . . 153

## TO THE 90th ANNIVERSARY OF SARATOV STATE UNIVERSITY

- Professor V.D. Zernov letters of the period of foundation and development of  
 Saratov university. 1909–1914. *V.A. Solomonov* . . . . . 156



## МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ КУБИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*В.В. Астахов, А.В. Шабунин, В.С. Анищенко*

Исследуются бифуркационные механизмы разрушения режима синхронного хаоса. В работе приведены результаты численного эксперимента по изучению синхронизации хаоса в системе симметрично связанных кубических отображений. Показано, что разрушение режима синхронизации хаоса обуславливается бифуркациями основного семейства седловых периодических орбит, встроженных в хаотический аттрактор.

### Введение

Вопросы хаотической синхронизации находятся в центре внимания многих исследователей. В последние годы появились работы, в которых изучаются характерные бифуркации, в результате которых разрушается режим синхронных колебаний [1–8]. Представляется, что сценарий выхода из режима синхронизации должен быть тесно связан с бифуркационным механизмом, приводящим к формированию хаотического аттрактора, соответствующего синхронному режиму. Одним из таких механизмов, реализующихся для большого числа систем, является каскад бифуркаций удвоения периода. Хаотический аттрактор, возникший на базе каскада субгармонических бифуркаций, содержит счетное множество седловых предельных циклов, формирующих «скелет» данного аттрактора. В работах по исследованию синхронизации в связанных логистических отображениях [7,8] было обнаружено, что десинхронизация хаоса в них обуславливается бифуркациями основного семейства седловых периодических орбит, на базе которых хаотический аттрактор был сформирован. Рассмотрение других динамических систем со сходным сценарием перехода к хаосу позволяет проследить общность выявленных закономерностей, а также различия, определяемые динамикой конкретной системы.

В случае режима полной хаотической синхронизации аттрактор, соответствующий синхронным колебаниям в системе двух связанных идентичных осцилляторов, располагается в симметричном подпространстве ( $x_1=x_2$ ) полного фазового пространства системы, где  $x_1$  и  $x_2$  – векторы идентичных динамических переменных взаимодействующих подсистем. Если хаотическое множество является притягивающим в нормальном к симметричному подпространству направлении, то есть в том случае, когда старший ляпуновский показатель в этом направлении отрицателен, синхронные хаотические колебания будут наблюдаться в

эксперименте. При смене знака данного показателя на положительный, хаотический аттрактор перестает быть притягивающим в нормальном направлении и превращается в «хаотическое седло». Синхронные колебания теряют устойчивость и в эксперименте не наблюдаются. Возможен, однако, случай, когда знак старшего «нормального» показателя Ляпунова, усредненного по хаотическому аттрактору, отрицателен, а знак соответствующего показателя по одному или нескольким предельным циклам, встроенным в аттрактор, положителен. В этом случае синхронный режим остается устойчивым, но перестает быть грубым. Ничтожно малый шум или расстройка по параметрам может привести к «пузырению» аттрактора (bubbling attractor). Временная реализация, соответствующая разности колебаний в подсистемах  $x_1-x_2$ , представляет собой перемежающийся процесс, когда изображающая точка длительное время движется в окрестности симметричного подпространства («ламинарная фаза») и время от времени хаотически отбрасывается в сторону от него («турбулентные всплески»). Пузырение аттрактора есть первый шаг на пути десинхронизации хаоса. Затем, при изменении управляющих параметров, все большее число встроенных предельных циклов могут терять устойчивость в нормальном к симметричному подпространству направлении, что усиливает явление пузырения и может привести к тому, что и усредненный по аттрактору нормальный ляпуновский показатель станет положительным. Данное явление называется «бифуркацией прорыва» (blowout bifurcation) [2]. За пузырением аттрактора может следовать явление «изрешечивания» бассейна притяжения хаотического аттрактора, когда в его сколь угодно малой окрестности появляются области, относящиеся к бассейну притяжения другого аттрактора. Наличие малого шума или расстройки по параметрам приведет к тому, что изображающая точка перейдет со временем на другой аттрактор. Процесс потери синхронизации в связанных логистических отображениях подробно описан в [9,7,8].

В настоящей работе проводится бифуркационный анализ системы связанных дискретных отображений и анализируется совокупность наблюдаемых явлений, сопровождающих эти бифуркации. В качестве исследуемой модели используется система двух идентичных связанных кубических отображений. Полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами для других систем.

## 1. Исследуемая система

Рассмотрим связанные кубические отображения вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (a-1)x_n - ax_n^3 + \gamma[(a-1)y_n - ay_n^3 - (a-1)x_n + ax_n^3], \\ y_{n+1} &= (a-1)y_n - ay_n^3 + \gamma[(a-1)x_n - ax_n^3 - (a-1)y_n + ay_n^3], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a$  – параметр неравновесности парциальной системы,  $\gamma$  – коэффициент связи.

Одиночное кубическое отображение

$$x_{n+1} = (a-1)x_n - ax_n^3, \quad (2)$$

обладает симметрией относительно преобразования координат

$$I: x \leftrightarrow -x,$$

поэтому все его предельные множества либо самосимметричны относительно этого преобразования, либо имеют симметричные себе множества.

При любых значениях параметра  $a$  в системе существует неподвижная точка  $x=0$  кратности 1. При  $a < 2$  эта точка устойчива; при  $a = 2$  ее мультипликатор  $\mu = a - 1$  становится равным по модулю единице, в результате чего точка становится неустойчивой, и в ее окрестности рождается пара устойчивых неподвижных точек кратности 1, симметричных друг другу,

$$C_1: x = [(a-2)/a]^{1/2} \text{ и } C_2: x = -[(a-2)/a]^{1/2}.$$

С увеличением параметра  $a$  на базе каждой из точек  $C_1$  и  $C_2$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при  $a=3.3$  возникновением хаотических аттракторов. При  $a=3.6$  они объединяются в один аттрактор.

Система связанных отображений наследует свойство симметрии одиночного отображения по отношению к преобразованию

$$I: x \leftrightarrow -x, \quad y \leftrightarrow -y,$$

а также вследствие симметричной связи и идентичности подсистем обладает симметрией по отношению к преобразованию

$$R: x \leftrightarrow y.$$

Поскольку  $I$  и  $R$  коммутируют друг с другом, их комбинация также является преобразованием симметрии для системы (1)

$$I \circ R: x \leftrightarrow -y, \quad y \leftrightarrow -x.$$

Следствием симметрии системы относительно преобразования  $R$  является возможность существования в ней синфазных синхронных колебаний, удовлетворяющих условию  $x=y$ . Следствием симметрии системы относительно преобразования  $I \circ R$  является возможность существования в ней противофазных синхронных колебаний, удовлетворяющих условию  $x=-y$ .

## 2. Результаты бифуркационного анализа и численного эксперимента

В системе связанных отображений при изменении управляющего параметра  $a$  переход к хаосу происходит через каскад бифуркаций удвоения периода. В результате около точек  $1C_1^0$  и  $1C_2^0$  формируются хаотические аттракторы, соответствующие синхронному хаосу, которые располагаются в подпространстве  $x=y$ . На рис. 1 построены линии, соответствующие бифуркациям в симметричном подпространстве:  $l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{04}$  — линия бифуркации удвоения периода для периодических орбит  $C^0, 2C^0, 4C^0, 8C^0$ , соответственно, в результате которых данные орбиты становятся седловыми и в их окрестности появляются устойчивые периодические орбиты удвоенного периода, также располагающиеся в симметричном подпространстве  $x=y$ . Для каждой из указанных бифуркаций старший мультипликатор орбиты становится равным  $-1$ , а соответствующий ему собственный вектор матрицы линеаризации направлен тангенциально к симметричному подпространству. В непосредственной окрестности линии  $l_{04}$  происходит переход к синхронным хаотическим колебаниям. В закритической области, до линии  $l_{05}$  в симметричном подпространстве существуют многоленточные хаотические аттракторы  $2^N A^0$ , для которых наблюдаются бифуркации слияния лент. Выше линии  $l_{05}$  существует одноленточный хаотический аттрактор  $A^0$ . На линии  $l_{06}$  происходит объединение хаотических множеств, сформированных на базе циклов  $C_1^0$  и  $C_2^0$  с образованием объединенного синхронного хаотического аттрактора. Расположение периодических орбит  $C^0, 2C^0$  и  $4C^0$  представлено на рис. 2 для значения параметров  $a=3.65, \gamma=0.15$ . Симметричное подпространство обозначено на этом рисунке штриховой линией. Рассмотрим теперь бифуркации, которые ведут к возникновению новых предельных множеств, располагающихся вне симметричного подпространства. На линии  $l_1$  (см. рис. 1) седловая точка  $C^0$  претерпевает бифуркацию удвоения периода по второму мультипликатору. Данный мультипликатор становится равным  $-1$ , причем соответствующий ему собственный вектор направлен перпендикулярно к симметричному подпространству  $x=y$ . В результате неподвижная точка теряет

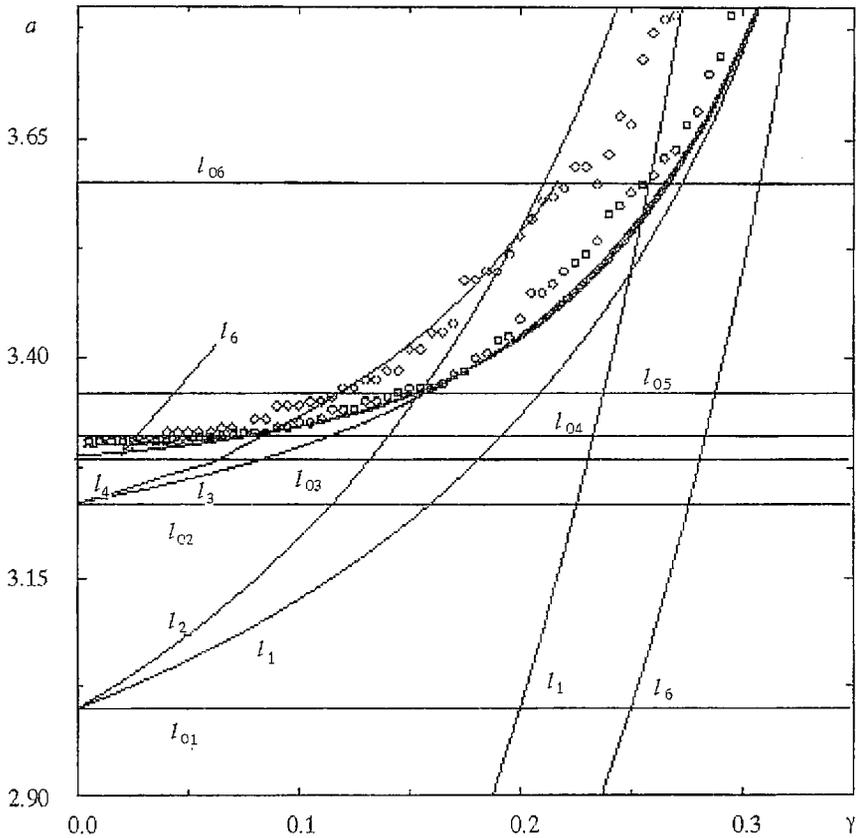


Рис. 1. Бифуркационные линии периодических орбит, а также экспериментально определенная граница области негрубой (o) и грубой (diamond) синхронизации хаоса на плоскости параметров  $\gamma$ - $a$

устойчивость по направлению, трансверсальному к симметричному подпространству, и становится репеллером, а около нее образуется седловая орбита удвоенного периода  $2C^1$ , располагающаяся вне симметричного подпространства (см. рис.2). На линии  $l_2$  ее старший мультипликатор входит в единичную окружность через значение  $+1$ , в результате чего эта орбита становится устойчивой.

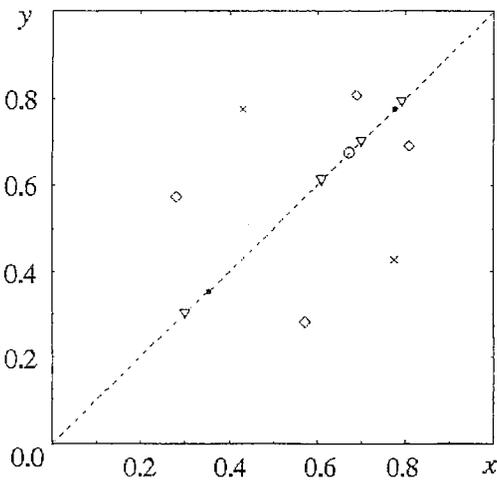


Рис. 2. Расположение периодических орбит, участвующих в разрушении синхронизации хаоса:  $C^0$  (o),  $2C^0$  (•),  $4C^0$  (▽),  $2C^1$  (\*),  $4C^2$  (diamond)

На линии  $l_3$  бифуркация удвоения периода происходит для седловой орбиты  $2C^0$ . Второй мультипликатор орбиты становится равным  $-1$ , в результате седло становится репеллером, а в его окрестности появляется седловая орбита  $4C^2$  периода 4 (см. рис. 2), которая на линии  $l_4$  становится устойчивой. На линиях  $l_4$  и  $l_5$  вторые бифуркации удвоения периода имеют место для орбит  $4C^0$  и  $8C^0$  с образованием около них седел  $8C^4$  и  $16C^8$ , соответственно.

На линии  $l_6$  неподвижная точка  $C^0$ , расположенная в начале координат ( $x=0, y=0$ ), теряет устойчивость (значения мультипликатора  $+1$ ). В результате в

ее окрестности рождается пара неподвижных точек,  $C_1^-$  и  $C_2^-$ , симметричных друг другу относительно преобразования  $x \leftrightarrow -y$ , располагающихся в симметричном подпространстве  $x = -y$ . На линии  $l_7$  данные неподвижные точки становятся устойчивыми.

Каждая бифуркация удвоения седловых периодических орбит  $2^N C^0$ , сопровождающаяся превращением их в репеллер, означает, что в хаотическом аттракторе  $A^0$  появились точки локальной трансверсальной неустойчивости, траектории из которых при определенных возмущениях будут покидать симметричное подпространство. Для ряда систем было показано [2, 6, 7], что наличие таких «дефектов» в аттракторе приводит к явлению пузырения аттрактора. В этом случае режим синхронных колебаний становится негрубым. Добавление в систему сколь угодно малого шума, или неидентичность подсистем приводят к явлению перемежаемости, когда движение в симметричном подпространстве прерывается хаотическими выбросами изображающей точки в сторону от него.

Негрубость синхронного хаоса приводит к тому, что граница области синхронизации системы со сколь угодно малым шумом оказывается существенно сдвинутой на плоскости параметров относительно границы области синхронизации идеальной системы. В нашей работе проведены численные исследования по определению границы области синхронизации хаоса. В численном эксперименте синхронными полагались колебания, для которых временные реализации подсистем равны с точностью до  $\varepsilon$  во время всего интервала наблюдений:

$$\max |x_n - y_n| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N_{\text{набл.}}$$

Мы выбирали значение  $\varepsilon = 0.0001$ ,  $N_{\text{набл.}} = 2000000$  итераций. На рис. 1 кружочками обозначены границы области синхронизации. Правее нее в системе наблюдаются устойчивые синхронные хаотические колебания. Ниже линии  $l_{05}$  – это многоленточные хаотические аттракторы  $2^N A^0$ , между линиями  $l_{05}$  и  $l_{06}$  – одноленточный хаотический аттрактор  $A^0$ , выше линии  $l_{06}$  – объединенный аттрактор, возникший в результате объединения множеств, образованных на базе точек  $C_1^0$  и  $C_2^0$ . Добавление в систему малого шумового воздействия интенсивностью порядка 0.00001 не приводит к десинхронизации (с точки зрения указанного выше экспериментального критерия).

Левее данной границы и правее границы, обозначенной на рис.1 квадратами, располагается область негрубого синхронного хаоса. При полном отсутствии шума наблюдается режим синхронного хаоса. Переходный процесс к этому режиму имеет вид перемежаемости, и его длительность чувствительным образом зависит от начальных условий. Добавление в систему сколь угодно малого шума (в эксперименте использовался шум интенсивностью приблизительно  $10^{-5}$ ) разрушает синхронный режим. В системе наблюдается так называемый пузыряющийся аттрактор (bubbling attractor). На рис. 3 представлен фазовый портрет хаотического аттрактора в системе без шума и с малым шумом, показана временная реализация, соответствующая пузыряющемуся аттрактору.

В области левее границы, обозначенной на рис.1 квадратами, синхронные колебания в системе не наблюдаются. Происходит переход на один из устойчивых режимов, существующих в системе при данных значениях параметра. Ниже точки пересечения линий  $l_2$  и  $l_4$ , то есть в том случае, когда при уменьшении связи первой становится устойчивой несинфазная орбита  $2C^1$ , происходит переход системы на этот режим. Выше точки пересечения и до линии  $l_{06}$  при потере синхронизации происходит переход на орбиту  $4C^2$ . Выше линии  $l_{06}$ , то есть в случае объединенного хаоса, потеря устойчивости синхронным режимом приводит к переходу на неподвижную точку  $C^-$ , расположенную в другом симметричном подпространстве  $x = -y$ .

Вблизи линии  $l_{03}$  наблюдается явление изрешеченности бассейна притяжения хаотического аттрактора  $A^0$ . Оно заключается в том, что в непосредственной близости от самого аттрактора, в его область притяжения вклиниваются области

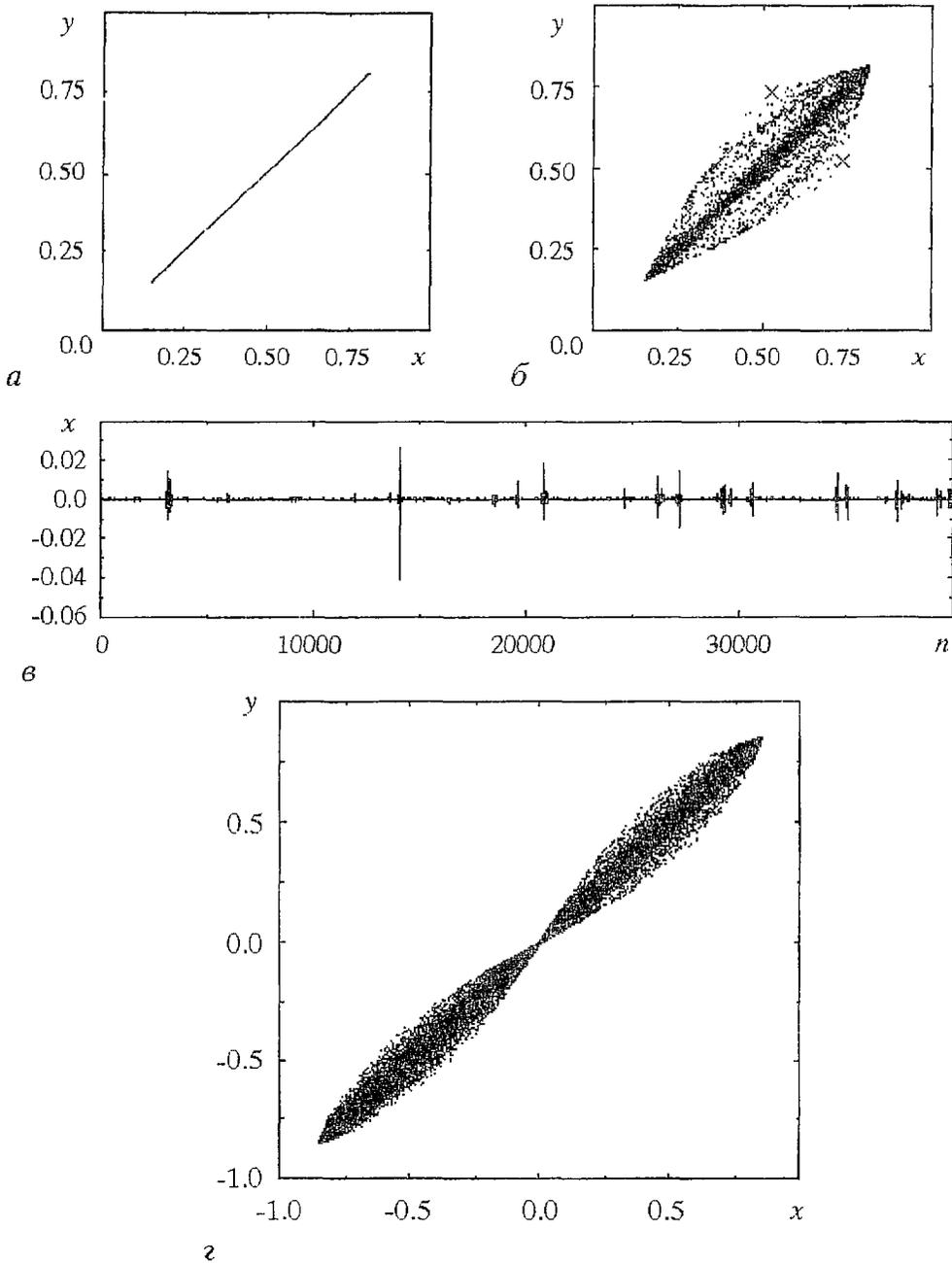


Рис. 3. Фазовый портрет хаотических колебаний в отсутствие шума (а), при наличии малого шума (б); временная реализация, соответствующая пузырящемуся аттрактору (в); фазовый портрет пузырящегося аттрактора в случае объединенного хаоса (г)

из бассейнов притяжения других аттракторов. На рис. 4 представлена область притяжения аттрактора  $A^0$ , содержащая область притяжения периодической орбиты  $2C^1$  (отмечена черным цветом). При добавлении в систему малого шума изображающая точка при любом выборе начальных условий из окрестности  $A^0$  рано или поздно покидает окрестность симметричного подпространства и уходит на  $2C^1$ . Однако в этом случае вместо явления изрешеченности бассейна притяжения аттрактора  $A^0$  наблюдается чувствительная зависимость длительности переходного процесса на аттрактор  $2C^1$  от выбора начальных условий.

Естественно, что полученная картина областей полной синхронизации носит

грубый характер. В область существования хаотического аттрактора на плоскости параметров вклиниваются окна периодичности и области существования аттракторов, образованных на основе этих периодических режимов. Границы зон синхронизации для таких режимов будут существенно иными. В нашей работе мы намеренно не приводим данные результаты и ограничиваемся построением области полной синхронизации только для хаотических аттракторов, построенных на базе основного семейства циклов  $2^N C^0$ .

Сопоставление экспериментальных наблюдений и бифуркационных линий циклов, формирующих скелет аттрактора, позволяет проследить механизм разрушения хаотической синхронизации. В отличие от описанных в литературе случаев (см. например [6,7]), бифуркация седловой точки  $C^0$ , в результате которой она становится репеллером, не приводит сразу к появлению в системе пузырящегося аттрактора. Пузырящееся поведение возникает при меньших значениях коэффициента связи после того, как соответствующие бифуркации удвоения периода претерпели остальные седловые орбиты из аттрактора  $A^0$ :  $2C^0$ ,  $4C^0$ ,  $8C^0$ ,.... В области объединенного хаоса, выше линии  $l_{06}$  наличие в аттракторе репеллера  $C^{00}(0,0)$  также не вызывает в системе пузырящегося поведения. Оно появляется здесь также после бифуркаций остальных орбит. Таким образом, хотя внутри хаотического аттрактора появляются «дефектные точки», из которых траектории могут выбрасываться в сторону от симметричного подпространства, в эксперименте за конечное, хотя и продолжительное время наблюдения ( $\sim 10^7$  итераций), подобные всплески не наблюдаются. Пузырящееся поведение появляется в системе уже после того, когда другие рассмотренные в работе орбиты  $2^N C^0$  потеряли устойчивость в нормальном к симметричному подпространству направлении. Размеры образованного при введении шума малой интенсивности пузырящегося аттрактора определяются расположением точек седловой орбиты  $2C^1$ , которые расположены на его границе (на рис. 3, б точки орбиты  $2C^1$  обозначены знаком  $\times$ ). Это свидетельствует о том, что орбита  $2C^1$  и ее многообразия играют существенную роль в формировании пузырящегося аттрактора. Дальнейшее уменьшение связи усиливает пузырение аттрактора, что проявляется в учащении всплесков  $x_n - y_n$  и увеличении их «амплитуды». Последнее объясняется отходом, при уменьшении связи, точек орбиты  $2C^1$  от симметричного подпространства. Учащение выбросов, по-видимому, связано с увеличением числа «дефектных точек» в аттракторе  $A^0$ , что означает превращение в репеллеры все большего числа встроенных седловых орбит и уширение «клювов», опирающихся на эти орбиты, по которым траектория покидает симметричное подпространство. На рис. 5 построена зависимость «толщины» хаотического аттрактора (то есть

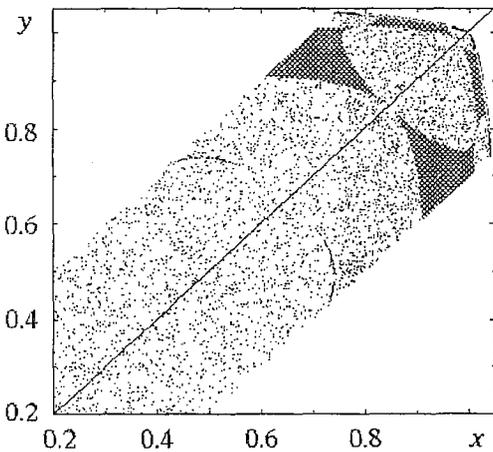


Рис. 4. Бассейны притяжения хаотического аттрактора, соответствующего синхронным колебаниям (белый цвет) и периодической орбиты  $2C^1$  (черный цвет);  $a=3.5$ ,  $\gamma=0.17$

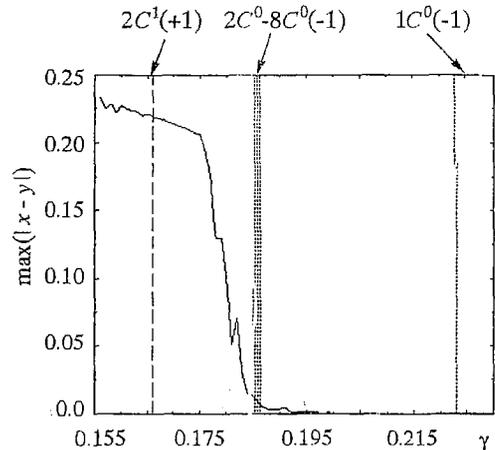


Рис. 5. Зависимость «толщины» хаотического аттрактора ( $\max|x_n - y_n|$ ) от значения коэффициента связи;  $a=3.4$

$\max(|x_n - y_n|)$ ) от коэффициента связи при значении параметра  $a=3.4$ . Колебания системы исследовались на очень длительном временном интервале ( $\sim 10^7$  итераций). Из рисунка видно, что самое начало «пузырения» аттрактора возникает еще до бифуркаций седловых орбит  $2C^0-8C^0$ , однако данные бифуркации резко усиливают это явление.

### Заключение

В работе рассмотрен бифуркационный механизм, лежащий в основе разрушения режима грубой синхронизации в системе связанных кубических отображений. Как и для других связанных систем с удвоениями периода, выход из режима синхронизации сопровождается пузырением аттрактора, а затем изрепечиванием его бассейна притяжения. Исследования системы связанных логистических отображений [7,8], а также настоящая работа свидетельствуют о том, что основную роль в разрушении синхронных колебаний играют бифуркации основного семейства седловых циклов, встроенных в хаотический аттрактор, то есть тех циклов, на основе которых данный аттрактор был сформирован. В дальнейшем разрушении режима синхронизации (изрепечивание бассейна притяжения) существенную роль играют бифуркации циклов, не содержащихся в хаотическом аттракторе, но появившихся в результате бифуркаций циклов основного семейства  $2^N C^0$ . В то же время, в отличие от других подобных систем, экспериментально наблюдаемый выход из режима синхронизации происходит при меньших значениях параметра связи, чем первая из бифуркаций седловых циклов аттрактора. Таким образом, существует некоторая «задержка» по параметру связи между бифуркациями, обуславливающими десинхронизацию в системе, и непосредственно наблюдаемыми явлениями. Причины, вызывающие такую задержку, требуют дальнейшего рассмотрения.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 98-02-16531).*

### Библиографический список

1. *Pikovsky A.S., Grassberger P.* Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // *J. Phys. A: Math.* 1991. Vol. 24. P. 4587.
2. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 193. P. 126.
3. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* From attractors to chaotic saddle: a tale of transverse instability // *Nonlinearity.* 1996. Vol. 9. P. 703.
4. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Venkataramani S.C.* Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, № 1. P. 55.
5. *Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J.* Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 79, 1997.
6. *Sushchik M.M., Rulkov N.F., Abarbanel H.D.I.* Robustness and stability of synchronized chaos: an illustrative model // *IEEE Transactions on circuits and systems.* 1997. Vol. 44, № 10. P. 866.
7. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 6. P. 1014.
8. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 5. P. 5620.
9. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 10-12. С. 1079.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 4.03.99  
после переработки 17.05.99

## MECHANISMS OF CHAOTIC SYNCHRONIZATION LOSS IN THE SYSTEM OF COUPLED CUBIC MAPS

*V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, V.S. Anishchenko*

Bifurcational mechanisms of chaotic synchronization loss are investigated in the paper. We demonstrate numerical experiments results of investigation of chaos synchronization in the system of the symmetrically coupled cubic maps. We show that loss of the chaotic synchronization is conditioned by bifurcations of the main family of saddle periodic orbits embedded in the chaotic attractor.



*Астахов Владимир Владимирович* окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую (1983) и докторскую диссертацию (1999). Работает доцентом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 50 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



*Шабунин Алексей Владимирович* родился в Саратове (1966). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизика (1990). Защитил кандидатскую диссертацию (1998) по синхронизации и управлению хаосом в связанных колебательных системах. Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос. Автор 18 опубликованных работ.



*Анищенко Вадим Семенович* защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук (1970) и докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики Саратовского университета. Автор более 200 научных работ, среди которых 7 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Читает общие курсы лекций по статистической радиофизике, теории колебаний и теории информации и ряд спецкурсов, из которых наиболее важные: устойчивость и бифуркации динамических систем, детерминированный хаос, специальные проблемы нелинейной динамики. Под его руководством успешно защищены 15 кандидатских и 2 докторских диссертации. В настоящее время готовят свои работы два докторанта кафедры радиофизики, у которых он является научным консультантом. Соросовский профессор (1994). Заслуженный деятель науки РФ (1995). Член редколлегии журналов «Прикладная нелинейная динамика» и «Discrete Dynamics in Nature and Society».



## ГЕНЕРАТОР С МАГНИТОЧУВСТВИТЕЛЬНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*Д. А. Усанов, С. Б. Вениг, С. И. Скворцов*

Показано, что введение в генераторную схему цепи обратной связи, включающей в себя магнитодиод, расположенный в зазоре управляемого электромагнита, позволяет реализовать в таких генераторах сложные динамические режимы работы. Представлены результаты экспериментального исследования динамики режимов работы в зависимости от напряжения питания активного элемента и величины индукции магнитного поля.

Для экспериментальной реализации сложной динамики поведения нелинейных систем широко используются радиотехнические устройства, в частности, генераторы с инерционной нелинейностью [1]. В известных генераторах специально вводимая инерционная нелинейность определяется процессами разогрева термосопротивления под действием протекающего по нему тока или зарядом и разрядом емкостей в диодных цепях, а нелинейность преобразования сигнала обуславливается либо экспоненциальной зависимостью сопротивления полупроводникового материала от температуры, либо нелинейностью вольт-амперных характеристик диодных структур. Параметры цепей, ответственных за инерционную нелинейность в таких генераторах, могут регулироваться внешним электрическим полем. Представляет интерес исследование возможностей реализации новых типов инерционной нелинейности, в частности, управляемых магнитным полем. Это позволяет расширить круг исследуемых систем, в которых могут наблюдаться сложные динамические процессы.

Исследуемая схема (рис. 1) представляла собой низкочастотный генератор на составном транзисторе I, собранном на транзисторах КТ315 и К361 (VT1 и VT2), обладающем S-образной вольт-амперной характеристикой, принцип работы которого аналогичен работе p-n-p-n-структуры с отрицательной обратной связью по напряжению [2]. Генераторная схема содержала цепь обратной связи, включающую в себя усилитель II, делитель частоты D1, электромагнит TP1 со схемой управления III, между полюсами которого включен кремниевый магнитодиод КД301Г (МД). В такой цепи происходит инерционное преобразование электрического сигнала в магнитный, и обратное преобразование магнитного сигнала в электрический, которое благодаря особенностям явлений, происходящих в магнитодиоде при воздействии на него магнитного поля, является существенно нелинейным [3]. Усилитель и делитель частоты включены в цепь обратной связи для обеспечения необходимых значений уровня сигнала для управления

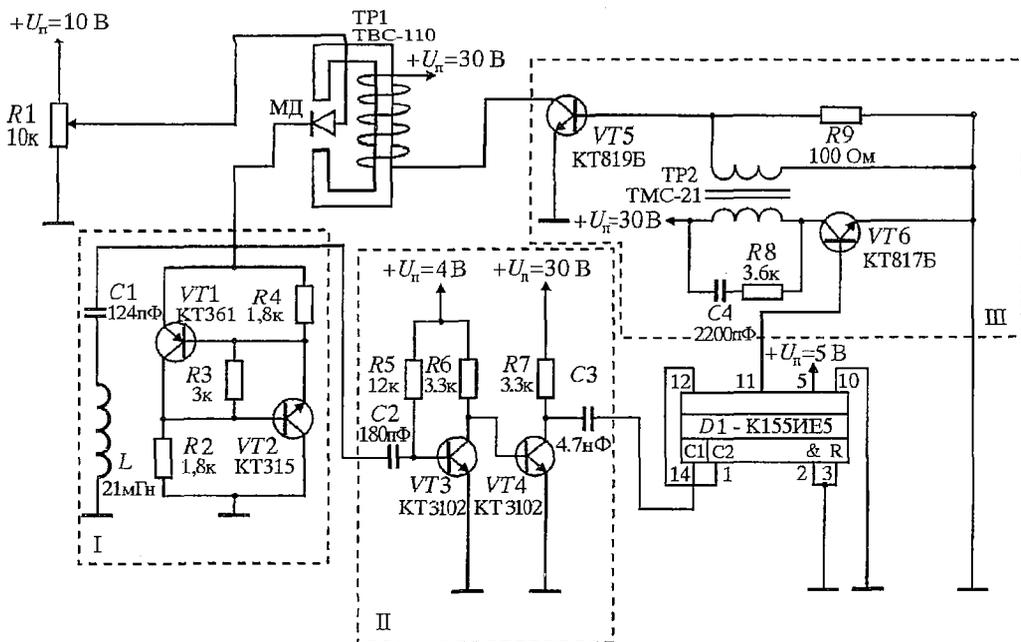


Рис. 1. Электрическая принципиальная схема генератора

источником магнитного поля и времени переключения магнитного поля, соответствующего времени переключения магнитодиода.

Как показали результаты исследований, при соответствующем подборе значений элементов генераторной схемы, а именно емкости  $C2$ , типов транзисторов  $VT3$  и  $VT4$ , коэффициента усиления усилителя III, в отсутствие сигнала в цепи обратной связи с управляемым источником магнитного поля в ней возможно возбуждение как квазигармонических колебаний, так более сложного периодического режима колебаний, представляющих собой периодическую последовательность треугольных импульсов, на которую накладываются более высокочастотные квазигармонические колебания.

При работе генератора в режиме квазигармонических колебаний в интервале напряжений на активном элементе  $0.95 \div 1.3$  В включение сигнала обратной связи приводит к возникновению хаотических колебаний. Экспериментально наблюдалось, как с ростом напряжения питания на активном элементе периодические квазигармонические колебания скачкообразно переходят в хаотические. На рис. 2 представлены временная зависимость амплитуды и проекция фазового портрета наблюдаемых хаотических колебаний. При дальнейшем увеличении напряжения питания происходит обратный переход «хаос – периодические колебания». В рассматриваемом интервале напряжений питания

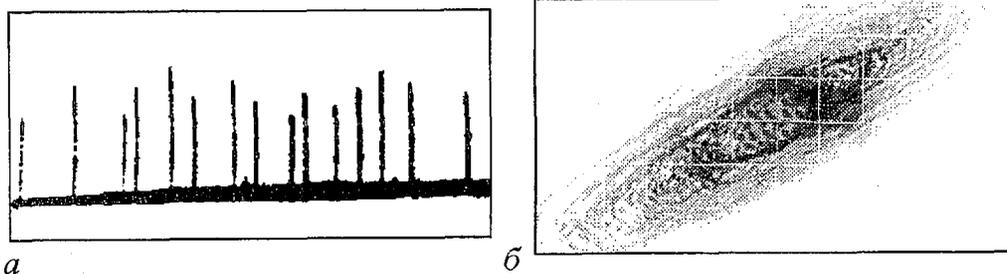


Рис. 2. Временная зависимость амплитуды колебаний (а) и проекция фазового портрета (б) выходного сигнала генератора в режиме хаотических колебаний

наблюдалось несколько подобных бифуркаций режимов работы генераторного устройства. Изменение величины индукции магнитного поля от 0 до 90 мТл качественно не изменяло картины бифуркаций исследуемой системы.

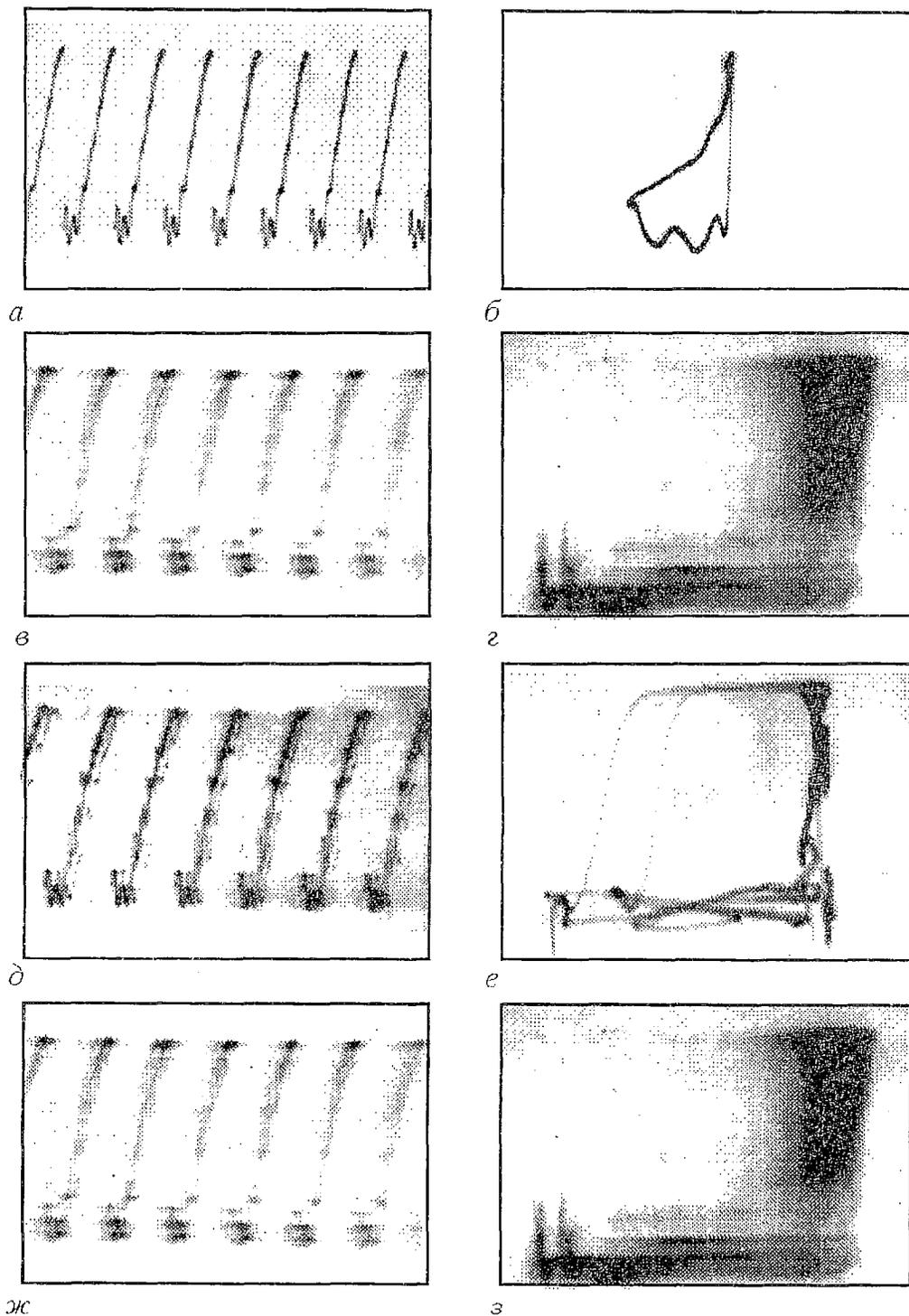


Рис. 3. Временные зависимости амплитуды (а, в, д, ж) и проекции фазовых портретов (б, г, е, з) колебаний в генераторе при фиксированном напряжении смещения 1 В в зависимости от величины индукции магнитного поля: а, б – 5 мТл; в, г – 20 мТл; д, е – 56.2 мТл; ж, з – 70 мТл

В режиме возбуждения в генераторе периодических колебаний сложной формы изменения напряжения питания активного элемента и величины индукции магнитного поля по-разному влияют на сценарий перехода от периодических к хаотическим режимам. При фиксированной величине магнитного поля в пределах 0-90 мТл периодические колебания в генераторной схеме возбуждаются при величине напряжения питания на активном элементе, превышающей 0.95 В. Увеличение напряжения питания приводит к незначительным изменениям частоты колебаний (в пределах 10%), а при достижении значения 1.1 В происходит жесткий переход от периодических к хаотическим колебаниям, которые представляют собой случайные последовательности импульсов. При напряжении на активном элементе свыше 1.3 В рабочая точка на вольт-амперной характеристике составного транзистора покидает падающий участок, и происходит срыв колебаний.

Если зафиксировать напряжение питания на активном элементе и изменять величину магнитного поля, то сценарий изменения режимов работы существенно изменяется. Например, для напряжения на активном элементе 1 В, при изменении индукции магнитного поля от 0 до 8.8 мТл в генераторе существуют устойчивые периодические колебания, временная реализация и проекция фазового портрета которых представлены на рис. 3, а, б. Увеличение магнитного поля приводит к срыву низкочастотной составляющей периодических колебаний и возникновению хаотических колебаний (рис. 3, в, г). При достижении значения индукции магнитного поля 54 мТл колебания становятся снова периодическими, но при этом высокочастотная составляющая сигнала существенно искажается и имеет сложный спектральный состав (рис. 3, д, е). При величине индукции магнитного поля, превышающей 58 мТл, происходит срыв высокочастотных колебаний и возникновение хаотического режима, временная реализация которого представляет собой случайные последовательности импульсов (рис. 3, ж, з).

Таким образом, введение в генераторную схему цепи обратной связи, включающей в себя магнитодиод и управляемый источник магнитного поля, позволяет реализовать в таких генераторах сложные динамические режимы работы. Анализ полученных экспериментальных результатов позволяет предположить, что наблюдаемые в генераторной схеме переходы от периодических к хаотическим колебаниям происходят через разрушение квазипериодических колебаний. При этом возникновение чередующихся режимов периодических и хаотических колебаний возможно как при фиксированных значениях величины магнитного поля вследствие изменения напряжения смещения на активном элементе, так и при фиксированном напряжении питания в результате изменения величины индукции магнитного поля.

Авторы выражают благодарность А.П. Кузнецову и В.В. Астахову за полезные советы при обсуждении работы.

## Библиографический список

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит., 1990. 312 с.
2. Арефьев А.А., Серьезнов А.Н., Степанова Л.Н. Эквиваленты приборов с отрицательным дифференциальным сопротивлением. М.: Знание, 1987. 87 с.
3. Егизарян Г.А., Стафеев В.И. Магнитодиоды, магнитотранзисторы и их применение. М.: Радио и связь, 1986. 72 с.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 17.05.99

## THE GENERATOR WITH MAGNETOSENSITIVE INERTIAL NONLINEARITY

*D.A. Usanov, S.B. Wenig, S.I. Skvortsov*

Is shown, that introduction in the generating scheme of a feedback circuit including magnetodiode, located in a clearance of a controlled electromagnet, allows to realize in such generators complicated dynamic operational modes. The experimental investigation results of operational modes dynamics depending on power supply voltage of an active element and magnitude of a magnetic field induction are presented.



*Усанов Дмитрий Александрович* родился в 1943 году в Менделеевске (Татария). Окончил Саратовский госуниверситет (1965). Кандидат физико-математических наук (1972), доктор физико-математических наук (с 1989), с 1990 – профессор кафедры физики твердого тела, с 1985 по настоящее время – заведующий кафедрой физики твердого тела, с 1989 – проректор по НИР СГУ. Автор большого числа статей и изобретений по твердотельной электронике и радиофизике. Заслуженный деятель науки РФ, академик МАН ВШ, член IEEE.



*Вениг Сергей Борисович* – родился в 1957 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1979). После окончания работал инженером ОКБ ПО «Тантал». С 1981 года работает в СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1988) по специальности «радиофизика, включая квантовую радиофизику», доцент кафедры физики твердого тела СГУ. Область научных интересов, по направлениям которой опубликовано более 50 научных работ, – физика полупроводников, твердотельная электроника и радиофизика.



*Скворцов Сергей Игоревич* – родился в 1974 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1996). После окончания СГУ учится в очной аспирантуре на кафедре физики твердого тела. Опубликована статья в центральной печати и получено положительное решение о выдаче свидетельства на полезную модель. Область научных интересов: твердотельная электроника, схемотехника, прикладная нелинейная динамика.



**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ  
САМОВОЗДЕЙСТВИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКОВ ОБРАТНЫХ  
ОБЪЕМНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН  
В ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ**

*Г.М. Дудко, Ю.А. Филимонов*

В численном эксперименте, основанном на решении двумерного нестационарного нелинейного уравнения Шредингера, исследованы особенности развития эффектов самофокусировки и самоканализации ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в зависимости от вида функции начального распределения амплитуды волны в поперечном сечении пучка. Наблюдались эффекты взаимодействия пространственных солитонов.

**Введение**

Магнитостатические волны (МСВ), распространяющиеся в ферромагнитных пленках, являются удобным объектом для исследования нелинейных эффектов, вызванных четырехмагнонными процессами самовоздействия. С одной стороны, это обусловлено существованием в магнитных пленках таких типов МСВ [1], для которых выполняются необходимые условия возникновения модуляционной неустойчивости относительно продольных

$$\beta\gamma < 0 \tag{1}$$

и поперечных возмущений

$$\beta\gamma < 0, \tag{2}$$

где  $\beta_{l,t} = \partial^2\omega / \partial^2k_{l,t}$  – характеризуют дисперсионное и дифракционное расплывание волны,  $\omega$  – частота МСВ,  $k_{l,t}$  – продольная и поперечная составляющие волнового вектора МСВ,  $\gamma = \partial\omega / \partial|\phi|^2$  – коэффициент нелинейности,  $\phi$  – безразмерная комплексная амплитуда волны, связанная с переменной намагниченностью  $m$  и намагниченностью пленки  $M_0$  соотношением  $|\phi|^2 = |m|^2 / (2M_0^2)$ . С другой стороны, при использовании в качестве волноводов МСВ высококачественных эпитаксиальных пленок железоиттриевого граната (ЖИГ) пороговые мощности возбуждающего сигнала  $P_{th}$ , при которых начинают проявляться эффекты самовоздействия МСВ, легко достигаются в эксперименте и для пленок толщинами  $d \leq 100$  мкм составляют, как правило,  $P_{th} \leq 1$  Вт [2–8].

До сих пор наиболее активно исследовались эффекты самовоздействия МСВ, обусловленные неустойчивостью волны относительно продольных

возмущений (1). Как в нормально, так и в касательно намагниченных пленках ЖИГ были обнаружены эффекты самомодуляции [2,3], образования «светлых» [4–6] и «темных» [7] солитонов огибающей, а также эффект столкновения солитонов огибающей [8], которые нашли свое объяснение на основе нелинейного уравнения Шредингера [1,9–13].

В то же время, явления самофокусировки и самоканализации МСВ\*, обусловленные неустойчивостью волны относительно поперечных возмущений (2), изучены гораздо меньше [1,14–16]. В работе [1] было показано, что эффекты самофокусировки и самоканализации могут демонстрировать так называемые обратные объемные магнитостатические волны (ОМСВ), распространяющиеся вдоль касательного к пленке ЖИГ магнитного поля  $H_0$ . В работах [14,15] были проведены наблюдения эффектов самофокусировки и самоканализации ОМСВ. Численное исследование явлений самовоздействия ОМСВ, выполненное в работах [16,15], показало, что в целом результаты численных и физических экспериментов [14,15] согласуются. Однако целый ряд вопросов до сих пор остается неизученным. Например, эффекты самофокусировки и самоканализации волн в численных экспериментах [16,15] изучались лишь для случая, когда функция начального распределения амплитуды волны на входном преобразователе  $\eta$  имела вид  $\eta(y) = \cos(\pi y/a)$ , где  $a$  – длина преобразователя,  $|y| \leq a/2$ . Представляет интерес выяснение вопроса, насколько результаты численного моделирования зависят от вида функции начального распределения амплитуды волны в пучке  $\eta$ , а также определение требований к виду функции  $\eta$ , при которой процесс самоканализации может сопровождаться эффектами «столкновения» пространственных солитонов. Цель данной работы – изучение влияния начального распределения амплитуды волны вдоль поперечного сечения пучка на развитие эффектов самофокусировки и самоканализации ОМСВ.

### Постановка численного эксперимента

На рис. 1 показана геометрия задачи. Считалось, что пленка ЖИГ имеет длину  $L_x = 2$  см, ширину  $L_y = 4$  см. Длина антенны  $a = 1$  см.

Исследование эффектов самовоздействия ОМСВ при распространении ее в пленке ЖИГ проводилось с помощью нестационарного двумерного нелинейного уравнения Шредингера

$$i(\partial\phi/\partial t + V_g \partial\phi/\partial x) + 1/2\beta_1 \partial^2\phi/\partial x^2 + 1/2\beta_2 \partial^2\phi/\partial y^2 - \gamma|\phi|^2\phi + i\alpha\phi = 0. \quad (3)$$

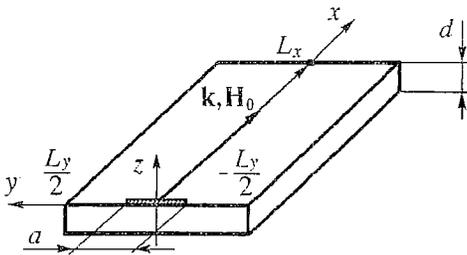


Рис. 1. Геометрия задачи

Здесь,  $\phi$  – комплексная амплитуда волны, которую можно представить в виде  $\phi = F(x, y, t) \exp(i\Psi(x, y, t))$ , где  $F$  – действительная амплитуда ОМСВ,  $\Psi$  – фаза комплексной амплитуды, являющаяся добавкой к фазе ОМСВ,  $V_g = \partial\omega/\partial k_x$  – групповая скорость волны в направлении оси  $x$ ,  $\alpha$  – диссипативный коэффициент. Были выбраны следующие значения коэффициентов уравнения:  $V_g = -3.5 \cdot 10^6$  см/с,  $\beta_1 = 1.72 \cdot 10^3$  см<sup>2</sup>/с,  $\beta_2 = 2.13 \cdot 10^5$  см<sup>2</sup>/с,  $\gamma =$

\* В связи с различными толкованиями в научной литературе терминов «самофокусировка» и «самоканализация» заметим здесь, что мы используем понятие «самофокусировка» для такого явления самовоздействия волнового пучка, когда в процессе его распространения как целого размер поперечного сечения пучка не увеличивается. Для процесса разбиения отдельного волнового пучка на систему волновых каналов мы применяем понятие «самоканализация».

$=-7.3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha=3.5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Эти значения соответствуют случаю возбуждения ООМСВ на частоте  $f=5.82 \text{ ГГц}$  с волновым вектором  $k=63 \text{ см}^{-1}$  в пленке ЖИГ толщиной  $d=7.2 \text{ мкм}$ , намагниченностью насыщения  $4\pi M_0=1750 \text{ Гс}$ , шириной линии ферромагнитного резонанса  $\Delta H=0.2 \text{ Э}$ , намагниченной касательно в поле  $H_0=1391 \text{ Э}$  [14,16].

Решение (3) находилось численно при начальных и граничных условиях, указанных в работе [16].

Приведенные ниже результаты получены для нескольких различных функций распределения  $\eta(y)$  амплитуды волны на антенне ( $|y| \leq a/2$ ), имеющих вид:

1) прямоугольника

$$\eta_1(y) = \begin{cases} 1, & |y| < a/2, \\ 0, & |y| = a/2; \end{cases}$$

2) «гауссианы» с размером  $a/3$

$$\eta_2(y) = \exp(-y^2/(a/3)^2);$$

3) равнобедренного треугольника

$$\eta_3(y) = 1 - 2|y|/a;$$

4) прямоугольного треугольника

$$\eta_4(y) = y/a + 1/2;$$

5) двух осесимметричных друг другу прямоугольных треугольников

$$\eta_5(y) = 2|y|/a;$$

6) последовательности двух идентичных прямоугольных треугольников

$$\eta_6(y) = \begin{cases} -2y/a, & -a/2 \leq y < 0, \\ -2y/a+1, & 0 \leq y \leq a/2. \end{cases}$$

### Обсуждение результатов численного эксперимента

Перед тем как приступить к обсуждению результатов, исследуем на устойчивость простейшее однородное решение нелинейного уравнения Шредингера [17]

$$A_0(t) = a_0 \exp(-i\gamma|a_0|^2 t). \quad (4)$$

Запишем неоднородное решение в виде

$$A(x,y,t) = A_0(t)(1+B(x,y,t)). \quad (5)$$

Здесь  $B(x,y,t)$  – малое возмущение однородного решения  $A_0(t)$ . Подставив (5) в уравнение Шредингера, линеаризуем последнее, пренебрегая членами порядка  $B^2$  из-за их малой величины. В результате получим уравнение для возмущения  $B(x,y,t)$

$$i(\partial B/\partial t + V_g \partial B/\partial x) + 1/2 \beta_1 \partial^2 B/\partial x^2 + 1/2 \beta_2 \partial^2 B/\partial y^2 - \gamma|a_0|^2 (B+B^*) = 0. \quad (6)$$

Поскольку уравнение (6) линейно, можно искать его решение в виде

$$B = B_1 \exp(i(-Q_x x - Q_y y + \Omega t)) + B_2 \exp(-i(-Q_x x - Q_y y + \Omega^* t)). \quad (7)$$

В выражениях (6) и (7) знаком \* обозначена комплексно-сопряженная величина.

Для волн модуляции малой амплитуды (7) получаем из (6) закон дисперсии

$$\Omega(Q_x, Q_y) = |V_g| Q_x \pm 1/2 [(\beta_l Q_x^2 + \beta_r Q_y^2)(4\gamma|a_0|^2 + \beta_l Q_x^2 + \beta_r Q_y^2)]^{1/2}. \quad (8)$$

Здесь  $\Omega$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  – частота, продольное и поперечное волновые числа волн модуляции, соответственно.

Дисперсионное уравнение (8) позволяет получить представление об условиях появления и начальной стадии развития модуляционной неустойчивости однородного решения (4) относительно малых продольных и поперечных возмущений этого решения. Из уравнения (8) видно, что в случае, когда подкоренное выражение становится отрицательным, у волн модуляции появляется параметрический инкремент  $\Gamma = 1/2 \text{Im} \Omega$ .

Использовать уравнение (8) для анализа развития модуляционной неустойчивости ограниченных волновых пучков в пленках конечных размеров следует с некоторыми оговорками. Во-первых, необходимо учесть, что волновые числа  $Q_x$ ,  $Q_y$  волн модуляции, входящие в (8), могут принимать значения, определяемые неравенствами

$$\pi/L_x < |Q_x| \ll k, \quad (9)$$

$$\pi/a < |Q_y| \ll k. \quad (10)$$

Правая часть неравенств определяется приближением медленно меняющейся амплитуды, использованным при выводе нелинейного уравнения Шредингера, а левая часть диктуется граничными условиями рассматриваемой задачи и отражает тот факт, что характерные минимальные размеры продольных и поперечных возмущений не должны превышать, соответственно, длины и ширины волнового пучка. Во-вторых, из-за неоднородности начального распределения амплитуды волны в поперечном сечении необходимо амплитуду  $a_0$  однородного решения, входящую в (8), заменить на некоторую усредненную амплитуду  $\varphi^{eff}$ , определяемую размерами возбуждающей антенны и видом функции начального распределения амплитуды волны в поперечном сечении пучка. Как будет показано ниже, уравнение (8) можно использовать для анализа модуляционной неустойчивости ограниченных волновых пучков, если усредненную амплитуду взять в виде

$$\varphi^{eff} = 1/a \int_0^a \eta(y) dy \quad (11)$$

С учетом сказанного, а также того обстоятельства, что для ООМСВ имеет место  $\beta_l > 0$  и  $\gamma < 0$ , условие появления модуляционной неустойчивости ограниченного волнового пучка можно записать в виде

$$4\gamma|\varphi^{eff}|^2 + \beta_l Q_x^2 + \beta_r Q_y^2 < 0. \quad (12)$$

Среди всех возможных волн модуляции с  $\Omega(Q_x, Q_y)$ , для которых имеет место положительный инкремент нарастания  $\Gamma$ , есть волны  $\Omega(Q_x^*, Q_y^*)$  с максимальным инкрементом  $\Gamma_{max} = |\gamma| |\varphi^{eff}|^2$ . Для них верно равенство

$$\beta_l Q_x^{*2} + \beta_r Q_y^{*2} = -2\gamma|\varphi^{eff}|^2. \quad (13)$$

Воспользовавшись неравенствами (9), (10) и выражением (13), можно оценить пороговые значения величины  $|\varphi^{eff}|$ , необходимые для возникновения модуляционной неустойчивости ограниченных волновых пучков относительно продольных

$$|\varphi^{eff}|_{th,x} = \pi / (2^{1/2} L_x) (-\beta_l / \gamma)^{1/2} \quad (14a)$$

и поперечных возмущений

$$|\varphi_{th}^{eff}|_y = \pi/(2^{1/2}a)(-\beta, l\gamma)^{1/2}. \quad (146)$$

На рис. 2–5 представлены результаты численного исследования уравнения (3). Показано распределение величины  $|\varphi(x,y)|^2$ , характеризующей интенсивность волнового поля ООМСВ в некоторый фиксированный момент времени  $t>0$ , взятый после того, как все переходные процессы в пленке после включения источника МСВ завершились, и режим распространения волны на изображенном участке пленки установился.

Следует заметить, что для всех результатов численного эксперимента в установившемся режиме характерна стационарность во времени, что соответствует отсутствию эффекта самомодуляции ООМСВ. То есть в процессе развития неустойчивости дипольной ООМСВ нарастают только поперечные возмущения ( $Q_x=0$ ), в результате чего происходят самофокусировка и самоканализация волновых пучков.

На рис. 2 показана зависимость распределения линий равного уровня величины  $|\varphi|^2$  в плоскости пленки от значений усредненной по ширине антенны начальной амплитуды  $\varphi^{eff}$  волнового пучка на входе для четырех различных апертурных функций  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  и  $\eta_4$  без диссипации ( $\alpha=0$ ). Слева от каждой строки рисунка указаны значения  $\varphi^{eff}$ , одинаковые для всех четырех изображений. Числа в левом верхнем углу каждого клипа соответствуют значениям  $\varphi^0$ , обеспечивающим для конкретной функции  $\eta(y)$  указанное значение  $\varphi^{eff}$ .

При одинаковых значениях  $\varphi^{eff}$  для пучков с различными апертурными функциями наблюдается совпадение значений спектральной плотности амплитуды волновых пучков на антенне

$$|\Phi(k_y)| = \varphi^0 \int_{-\infty}^{\infty} \eta(y) \exp(-jk_y y) dy$$

в точке  $k_y=0$ . Здесь  $k_y$  – поперечная составляющая волнового числа ООМСВ. Это позволяет предположить, что развитие модуляционной неустойчивости ООМСВ относительно малых поперечных возмущений и связанные с этой неустойчивостью процессы самофокусировки и самоканализации будут проходить без существенных отличий для волновых пучков с рассматриваемыми  $\eta(y)$ , поскольку при фиксированных  $\varphi^{eff}$  энергия пучков в узкой полосе углового спектра вблизи  $k_y=0$ , которая служит источником параметрической накачки волн модуляции, приблизительно одинакова для всех волновых пучков.

Действительно, как видно из рис. 2, наблюдающиеся режимы самовоздействия различных волновых пучков с одинаковыми значениями  $\varphi^{eff}$  качественно подобны друг другу. При  $\varphi^{eff}=0.02$  хорошо заметно явление самофокусировки. При  $\varphi^{eff}=0.04$  все волновые пучки разбиваются на два самоподдерживающихся канала. Дальнейшее увеличение уровня  $\varphi^{eff}$  приводит к тому, что число каналов увеличивается, и начинают проявляться отличия между пучками, связанные с тем, что условия конкурентной борьбы между волнами модуляции с положительным инкрементом в ходе развития модуляционной неустойчивости специфичны для пучков с разными начальными формами распределения амплитуды в поперечном сечении. В основном отличия проявляются в количестве сформировавшихся в процессе самоканализации волновых пучков при высоких уровнях мощности на входной антенне.

В подтверждение тому, что в качестве величины  $|\varphi^{eff}|$ , введенной в (12), можно использовать усредненную по ширине антенны начальную амплитуду волнового пучка (11), следует сказать также, что рассчитанное по формуле (146) значение  $|\varphi_{th}^{eff}|_y$  для пучка ООМСВ с указанными параметрами и полученные в численном эксперименте значения порогов самофокусировки по  $|\varphi^{eff}|$  для волновых пучков с различными функциями  $\eta$  отличаются друг от друга не более чем на 8%.

Несимметричность начального распределения амплитуды волны в

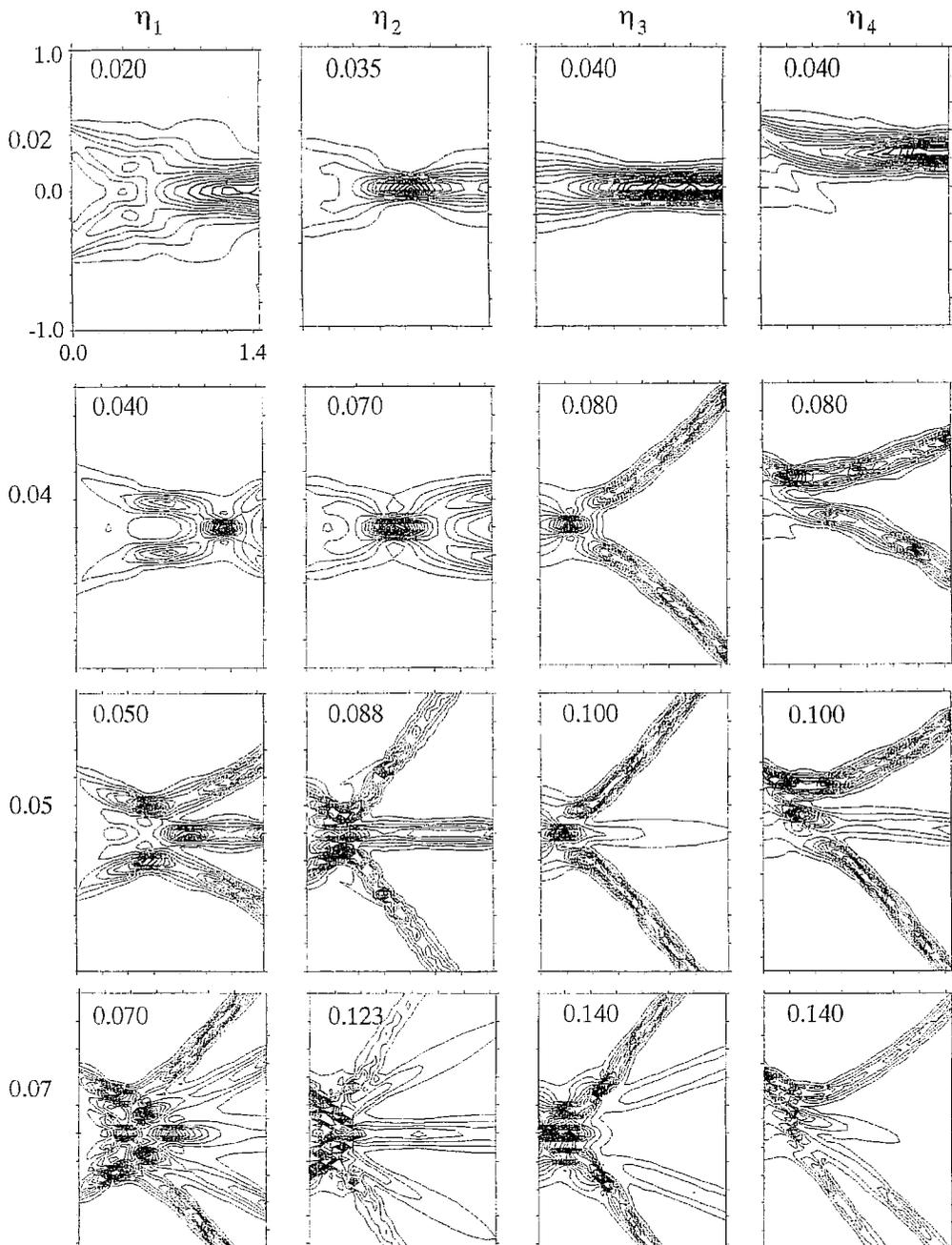


Рис. 2. Зависимость распределения линий равного уровня квадрата модуля комплексной амплитуды ООМСВ от значений усредненной по ширине антенны начальной амплитуды волнового пучка на входе для четырех апертурных функций  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  и  $\eta_4$  без диссипации

поперечном сечении пучка, как видно из рис. 2 (правая колонка), влечет за собой несимметричность решений уравнения (3), но не изменяет характер зависимости результатов самовоздействия волнового пучка от величины  $\varphi^{eff}$ , наблюдающийся для пучков с симметричными функциями  $\eta$ .

Из рис. 2 можно заметить также, что, хотя качественная картина самоканализации пучков с разными  $\eta(y)$  полностью определяется значениями  $\varphi^{eff}$ , расстояние от антенны до области разбиения пучков на систему каналов существенно зависит от начальных амплитуд  $\varphi^0$  этих пучков. Чем выше уровень  $\varphi^0$

при одинаковых  $\phi^{eff}$ , тем ближе к входной антенне происходит разбиение. Это хорошо видно на рис. 2 при  $\phi^{eff}=0.04$ .

Последнее замечание может иметь значение при планировании физического эксперимента по наблюдению самоканализации МСВ. Как было показано в нашей предыдущей работе [16], при наличии диссипативных эффектов, существенно влияющих на развитие процессов самовоздействия волновых пучков, критическим параметром, определяющим возможность наблюдения самоканализации пучков, является расстояние от антенны до местонахождения области разбиения пучка на несколько каналов в бездиссипативном случае. Чем меньше это расстояние при фиксированной мощности пучка, тем больше вероятность наблюдения хорошо выраженного разбиения волнового пучка на сформировавшиеся каналы. Из рассмотрения результатов настоящей работы следует, что для достижения условий наиболее уверенного наблюдения эффекта самоканализации в реальных условиях предпочтительнее формировать волновые пучки с остроконечной вершиной в распределении амплитуды волны поперечного сечения пучка. В качестве иллюстрации к сказанному на рис. 3 приведены решения нелинейного уравнения

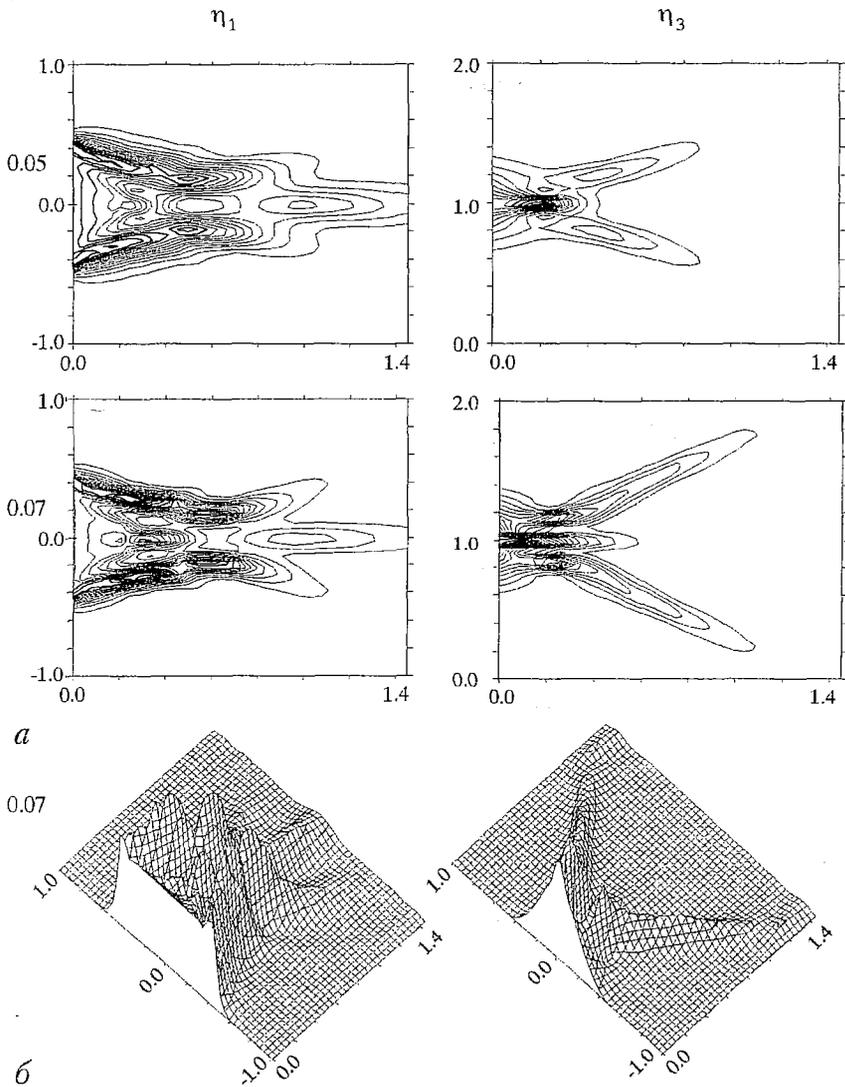


Рис. 3. Решения нелинейного уравнения Шредингера для апертурных функций  $\eta_1$  (левая колонка) и  $\eta_3$  (правая колонка) при наличии диссипации: а – линии равного уровня; б – трехмерная картина распределения величины  $|\phi|^2$

Шредингера для апертурных функций  $\eta_1$  и  $\eta_3$  с учетом диссипации. Показаны линии равного уровня величины  $|\varphi(x,y)|^2$  при  $\varphi^{eff}=0.05$  и  $\varphi^{eff}=0.07$  (рис. 3, а) и трехмерная картина распределения этой величины при  $\varphi^{eff}=0.07$  в плоскости пленки (рис. 3, б). Видно, что, действительно, при одинаковых значениях  $\varphi^{eff}$  процесс разбиения волнового пучка на систему каналов намного лучше наблюдается в случае пучка с апертурной функцией  $\eta_3$ , имеющей вид треугольника, по сравнению с пучком, у которого амплитуда равномерно распределена вдоль антенны.

### Взаимодействие пространственных солитонов

Рис. 4 демонстрирует решения уравнения (3) для пучков с начальным

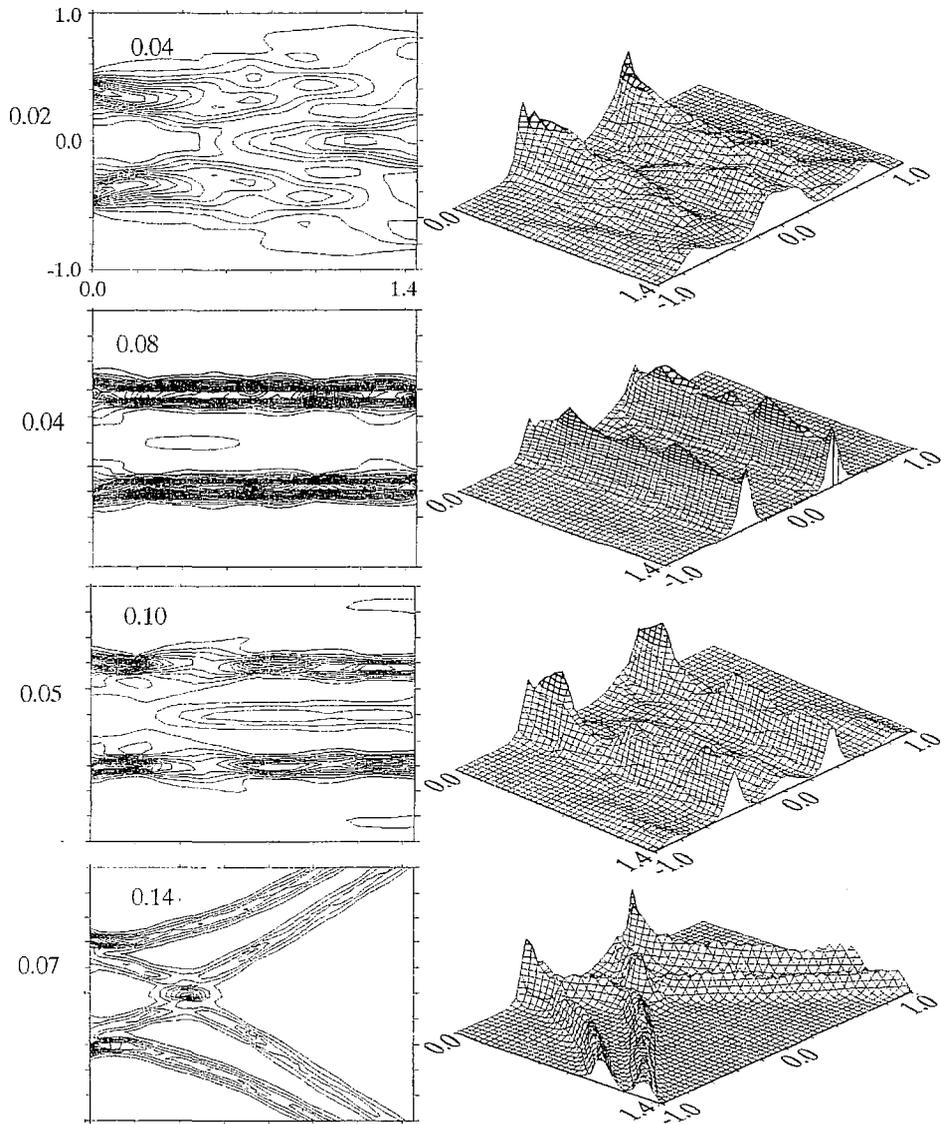


Рис. 4. Зависимость распределения величины  $|\varphi(x,y)|^2$  от значений  $|\varphi^{eff}|$  волнового пучка ООМСВ с апертурной функцией  $\eta_3$  без диссипации

распределением амплитуды в поперечном сечении, имеющем вид совокупности двух осесимметричных друг другу прямоугольных треугольников  $\eta_5$ . В каждой из четырех строк рисунка показаны линии равного уровня величины  $|\phi|^2$  в плоскости пленки без диссипации и, для наглядности, трехмерная картина распределения этой величины. Числа слева от каждой строки рисунка соответствуют значениям  $\phi^{eff}$ . Поведение волновых пучков с  $\eta_5(y)$  при различных  $\phi^{eff}$ , как видно из рис. 4, похоже на результат распространения двух независимых волновых пучков, сформированных на двух рядом расположенных антеннах с шириной  $a/2$  и апертурной функцией, имеющей вид отдельного прямоугольного треугольника. Так, при  $\phi^{eff}=0.02$  каждый из таких независимых пучков расплывается за счет дифракции,

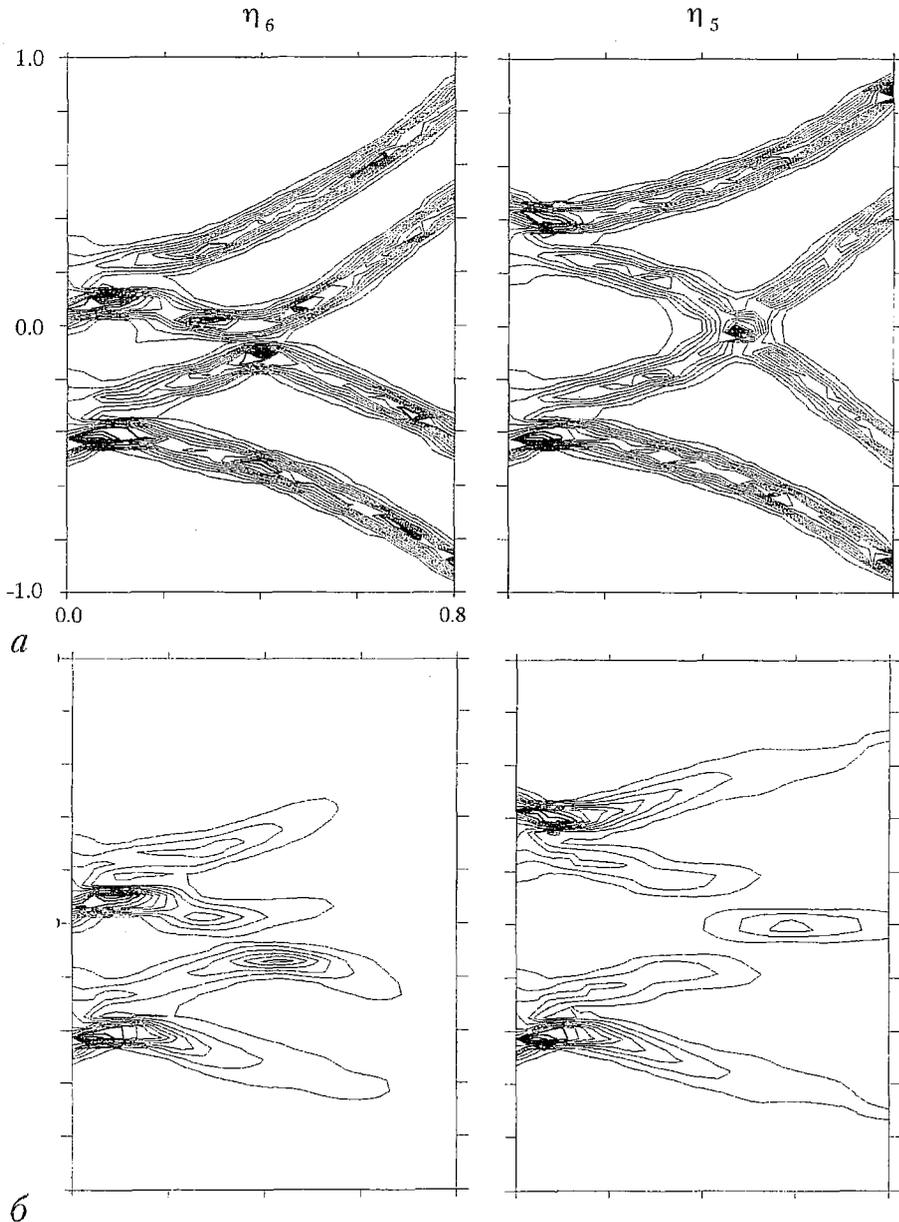


Рис. 5. Эффекты расталкивания (левая колонка) и пересечения (правая колонка) волноводных каналов в процессе самоканализации волновых пучков с апертурными функциями  $\eta_6$  и  $\eta_5$  без диссипации (а), при наличии диссипации (б)

поскольку его усредненная амплитуда равна по величине  $1/2\varphi^{eff}$ , что оказывается ниже порога самофокусировки. При  $\varphi^{eff}=0.04$  сфокусированные самоподдерживающиеся пучки распространяются параллельно друг другу. Режим распространения волнового пучка с  $\eta_5(y)$  при  $\varphi^{eff}=0.05$  интересен тем, что ранее рассеивающаяся в пространстве между двумя существующими параллельными каналами часть энергии собирается в пределах третьего волноводного канала, параллельного первым двум. В результате картина распределения  $|\varphi|^2$  в плоскости пленки имеет вид системы трех сфокусированных параллельных пучков. Следует отметить, что, как видно из сравнения рис. 2 и 4, при значениях  $\varphi^{eff}$  от 0.04 до 0.05 количество сфокусированных пучков в решениях нелинейного уравнения Шредингера в случае апертурной функции с двумя максимумами не отличается от количества сфокусированных пучков в соответствующих решениях для  $\eta(y)$  с одним максимумом. При  $\varphi^{eff}=0.07$  каждый из пары ранее существовавших каналов разбивается на два. Получается система четырех сфокусированных пучков. Причем два внутренних волновых пучка пересекаются друг с другом. Область пересечения характеризуется ярко выраженным максимумом величины  $|\varphi|^2$ . За областью пересечения пучки сохраняют свою форму и совсем незначительно меняют направление распространения. Наблюдаемое явление представляет собой пространственный аналог процесса столкновения временных солитонов, когда последние «проходят» друг через друга без заметного изменения скорости и формы.

Совершенно другой характер взаимодействия волноводных каналов, а именно, расталкивание каналов, с которым можно провести аналогию «упругого» столкновения временных солитонов, можно пронаблюдать для волнового пучка с апертурной функцией  $\eta_6$ . На рис. 5 показаны для сравнения два упомянутых качественно различающихся типа взаимодействия при столкновениях пространственных солитонов в бездиссипативном процессе (а) и диссипативном (б). Видно, что наличие потерь не нарушает характер взаимодействия волноводных каналов.

### Заключение

Таким образом, в рамках подхода, основанного на численном решении нестационарного двумерного нелинейного уравнения Шредингера, изучены явления самовоздействия ограниченных волновых пучков дипольных ООМСВ в пленках ЖИГ в зависимости от начального распределения амплитуды волны в поперечном сечении.

Показано, что при значениях коэффициентов уравнения и уровнях мощности, типичных для дипольных ООМСВ в пленках ЖИГ, характер решений отвечает поперечной неустойчивости рассматриваемых волн и проявляется в виде самофокусировки и самоканализации волновых пучков. Причем поведение волновых пучков с различными апертурными функциями в процессе самофокусировки и самоканализации качественно подобно при одинаковых значениях усредненной по ширине антенны начальной амплитуды волновых пучков. Пучки с апертурными функциями, имеющими несколько максимумов, демонстрируют в процессе самоканализации эффекты столкновения пространственных солитонов.

*Работа поддержана грантами РФФИ № 96-02-16168 и Федеральной программой «Интеграция», проект № 696.3.*

### Библиографический список

1. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, вып. 2. С. 606.

2. Nikitov S.A., Su Jun, Marcelli R., De Gasperis P. Modulation instability of surface magnetostatic waves in ferromagnetic films // J. MMM. 1995. Vol. 145. P. 6.
3. Дудко Г.М., Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. Удвоение периода и хаос при четырехмагнотном распаде магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. С. 736.
4. De Gasperis P., Marcelli R., Miccoli G. Magnetostatic soliton propagation at microwave frequency in magnetic garnet films // Phys.Rev.Lett. 1987. Vol. 59. P. 481.
5. Kalinikos B.A., Kovshikov N.G., Kolodin P.A., Slavin A.N. Observation of dipole-exchange spin wave solitons in tangentially magnetised ferromagnetic films // Sol.St.Com. 1990. Vol. 74, № 9. P. 989.
6. Chen M., Tsankov M.A., Nash J.M., Patton C.E. Backward volume wave solitons in a yttrium iron garnet film // Phys.Rev.B. 1994. Vol. 49. P. 12773.
7. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Паттон К.Е. Наблюдение автогенерации темных солитонов огибающей спиновых волн в ферромагнитных пленках // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 68, вып. 3. С. 229.
8. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г. Наблюдение столкновения солитонов огибающей спиновых волн в ферромагнитных пленках // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 60, вып.4. С. 290.
9. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Развитие модуляционной неустойчивости магнитостатических волн (МСВ) в ферритовых пленках // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 2. С. 55.
10. Славин А.Н., Дудко Г.М. Переход от модуляционной неустойчивости к хаосу в пленках железиттриевого граната // ЖТФ. 1989. Т. 31, вып. 6. С. 114.
11. Boardman A.D., Nikitov S.A., Xie K., Mehta H. Bright magnetostatic spin-wave envelope solitons in ferromagnetic films // J. MMM. 1995. Vol. 145. P. 357-378.
12. Slavin A.N., Dudko G.M. Numerical modelling of spin wave soliton propagation in ferromagnetic film // J. MMM. 1990. Vol. 86. P. 15.
13. Chen M., Nash J.M., Patton C.E. A numerical study of nonlinear Schrodinger equation solutions for microwave solitons in magnetic thin films // J. Appl.Phys. 1993. Vol. 73. P. 3906.
14. Boyle J.W., Nikitov S.A., Boardman A.D., Booth J.G. Self-channeling and nonlinear beam shaping of magnetostatic waves in ferromagnetic films // Phys.Rev.B. 1996. Vol. 53, № 18. P. 12173.
15. Bauer M., Mathieu C., Demokritov S.O., Hillebrands B., Kolodin P.A., Sure S., Dotsch H., Grimalski V., Rapoport Yu., Slavin A.N. Direct observation of two-dimensional self-focusing of spin waves in magnetic films // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 56, № 14. P. 8483.
16. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Самофокусировка ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках: численный эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997, № 6. С. 29.
17. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения // М.: Мир, 1988.

Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники РАН

Поступила в редакцию 06.01.99

## NUMERICAL INVESTIGATION OF SELF-ACTION EFFECTS OF BACKWARD VOLUME MAGNETOSTATIC WAVES CONFINED BEAMS IN FERROMAGNETIC FILMS

G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov

Self-action effects of backward volume magnetostatic waves confined beams in ferromagnetic films were studied numerically in the framework of nonstationary

two-dimensional nonlinear Shrodinger equation. It was found, that for equation coefficients and power levels typical for dipole waves the character of numerical solution corresponds to transverse instability of waves in the form of self-focusing and self-canalization effects. Self-focusing and self-canalization effects of wave beams with different aperture function are quality similar for equal levels of average input power. In case of aperture functions with several local extreme, wave beams self-canalization leads to spatial solution collision effects.



*Дудко Галина Михайловна* – родилась в 1961 году. Окончила физический факультет СГУ (1983). Работает в Саратовском филиале ИРЭ РАН. Область научных интересов – волновые явления в магнитных пленках.



*Филимонов Юрий Александрович* – родился в 1955 году. Окончил МФТИ (1979). Работает в Саратовском филиале ИРЭ РАН. Область научных интересов – волновые явления в магнитных пленках.



## ТОЧНОЕ СОЛИТОНОПОДОБНОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

*А.И. Землянухин*

Исследовано неинтегрируемое эволюционное уравнение пятого порядка, моделирующее волновой процесс в нелинейно-упругой диспергирующей среде с моментными напряжениями. Показано, что рассматриваемое уравнение имеет преобразование Бэклунда, позволяющее получить точное решение в виде уединенной волны.

Хорошо известно, что в деформируемых системах возможно распространение солитонов деформации [1]. Продольные волны, изученные наиболее полно, обычно анализируются на основе уравнений Кортевега де Вриза и модифицированного уравнения Кортевега де Вриза. Эти солитонные уравнения моделируют волновой процесс в упругих и нелинейно-упругих конструкциях, соответственно [2]. Совместный учет геометрической и физической нелинейностей приводит к эволюционному уравнению вида

$$U_t + c_1 U U_x - c_2 U^2 U_x + c_3 U_{xxx} = 0, \quad (1)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – коэффициенты, характеризующие нелинейность и дисперсию системы,  $U$  – компонента продольной деформации.

Интегрируемые модели являются идеализированными. Стремление к большей адекватности при описании волновых явлений приводит к необходимости исследования неинтегрируемых уравнений, точные решения которых зачастую не известны. В данной работе анализируется нелинейное эволюционное уравнение пятого порядка, возникающее в динамических задачах механики деформируемого твердого тела. При анализе композиционных и конструктивно неоднородных материалов существенным может оказаться вклад моментных напряжений в волновой процесс. Это возможно, если жесткость включений значительно превосходит жесткость материала конструкции. В случае, когда модель системы основывается на гипотезах Кирхгофа [3], в уравнении (1) появляется дополнительный член с пятой производной

$$U_t + c_1 U U_x - c_2 U^2 U_x + c_3 U_{xxx} + c_4 U_{xxxxx} = 0, \quad (2)$$

где  $c_4$  – коэффициент, учитывающий влияние моментных напряжений.

Если в уравнении (2)  $c_2=0$ , то получается уравнение Кавахары, описывающее течение жидкости под ледяным покровом, магнитоакустические

волны в плазме и т.д. Это уравнение имеет точные решения в виде периодических и уединенных волн [4]. В литературе по нелинейным волнам уравнение (2) не упоминается.

Для решения уравнения (2) будем использовать «метод сингулярного многообразия», предложенный в [5] и используемый в [4,6]. Данный метод связывает свойство Пенлеве дифференциального уравнения в частных производных [7] с возможностью представления решения в виде ряда в окрестности многообразия, на котором лежат все сингулярности рассматриваемого уравнения. В случае интегрируемых уравнений этот метод позволяет получать преобразования Бэклунда, пары Лакса и точные решения. Для неинтегрируемых уравнений в ряде случаев удастся найти форму преобразования решений (нестандартное преобразование Бэклунда) и построить классы точных решений.

Метод сингулярного многообразия обладает рядом преимуществ по сравнению с прямыми методами построения солитонных решений (метод Хироты [7]). Основная проблема прямых методов состоит в отсутствии систематической процедуры вывода той или иной формы преобразования зависимой переменной, необходимой для приведения исходного уравнения к билинейной форме. Более того, даже в случае успеха, прямые методы не позволяют выявить физически важные классы точных решений, кроме солитонных.

Решение уравнения (2) представим в форме ряда [4–6]

$$U = \sum_0^{\infty} U_j F^{j-2}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим цепочку равенств:

$$U_0 = \pm 6(10c_4/c_2)^{1/2} F_x^2, \quad (4)$$

$$U_1 = \mp 6(10c_4/c_2)^{1/2} F_{xx}, \quad (5)$$

$$U_2 = \pm 2(10c_4/c_2)^{1/2} F_{xxx}/F_x \mp 3/2(10c_4/c_2)^{1/2} F_{xx}^2/F_x^2 \pm c_3/(10c_2c_4)^{1/2} + c_1/(2c_2). \quad (6)$$

Отметим, что  $U_2$ , согласно (3), удовлетворяет (2), то есть

$$U_{2t} + c_1 U_2 U_{2x} - c_2 U_2^2 U_{2x} + c_3 U_{2xxx} + c_4 U_{2xxxx} = 0.$$

Полагая  $U_j=0$  для  $j \geq 3$ , получаем преобразование Бэклунда решений уравнения (2) в форме

$$U = \mp 6(10c_4/c_2)^{1/2} \partial^2/\partial x^2(\ln F) + U_2. \quad (7)$$

Функция  $F$  должна удовлетворять переопределенной системе нелинейных уравнений, первые из которых имеют вид (остальные не приводим ввиду их громоздкости)

$$F_{xxx}/F_x - 4F_{xx}F_{xx}/F_x^2 + 3F_{xx}^3/F_x^3 = 0, \quad (8)$$

$$F_t/F_x + 135/2c_4 F_{xx}^4/F_x^4 + 15c_4 F_{xx}F_{xx}^2/F_x^3 - 15c_4 F_{xxx}F_{xx}/F_x^2 + 21c_4 F_{xxxx}/F_x - \\ - 90c_4 F_{xx}^2/F_x^2 + 1/4c_1^2/c_2 - 1/10c_3^2/c_4 = 0. \quad (9)$$

Выбирая  $F$  в виде  $F=1+\exp(k_1x-\omega_1t)$ , находим, что (8), (9) и остальные уравнения системы удовлетворяются тождественно, если зависимость  $\omega_1$  от  $k_1$  имеет вид

$$\omega_1 = (1/4c_1^2/c_2 - 1/10c_3^2/c_4)k_1 - 3/2c_4k_1^5. \quad (10)$$

С помощью (7) можно получить точное солитоноподобное решение уравнения (2). Для этого нужно подставить в (7)  $F=1+\exp(k_1x-\omega_1t)$  и положить  $U_2=0$ . Из (6) определяется

$$k_1^2 = \mp c_1 / (10c_2c_4)^{1/2} - c_3 / (5c_4), \quad (11)$$

Выберем для определенности в (11) нижний знак. Тогда при выполнении соотношения (10) получается искомое точное решение в виде уединенной волны

$$U = (3k_1^2/2)(10c_4/c_2)^{1/2} \operatorname{sech}^2 \xi, \quad \xi = (k_1x - \omega_1 t) / 2. \quad (12)$$

Ясно, что физически достоверному решению соответствует положительная правая часть равенства (11). Например, при  $c_1 = \dots = c_4 = 1$ ,  $k_1$  и  $\omega_1$  – положительны.

Заметим, что с учетом (11), соотношение (10), связывающее скорость волны с ее характерной шириной, принимает вид

$$\omega_1 = c_3 k_1^3 + c_4 k_1^5.$$

Последнее соотношение свидетельствует о том, что уединенная волна (12) распространяется быстрее линейных волн.

Преобразование (7) имеет стандартный вид для потенциала задачи рассеяния уравнения Кортевега – де Вриза [7]. С точки зрения группового анализа, правая часть (7) при  $U_2 = 0$  представляет собой второй дифференциальный инвариант оператора растяжения  $F\partial_F$ , трансформирующий линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка в уравнение Риккати [8].

Пространственно–двумерный аналог уравнения (2) имеет вид

$$\partial/\partial x [U_t + c_1 U U_x - c_2 U U_x^2 + c_3 U_{xxx} + c_4 U_{xxxx}] = c_5 U_{yy}. \quad (13)$$

Уравнение (13) также допускает преобразование решений вида (7) с функцией  $F = 1 + \exp(k_1x + k_2y - \omega_1 t)$ . В этом случае  $k_1$  определяется из выражения (11), а зависимость  $\omega_1$  от  $k_1$  и  $k_2$  имеет вид

$$\omega_1 = (1/4 c_1^2 / c_2 - 1/10 c_3^2 / c_4) k_1 - 3/2 c_4 k_1^5 - c_5 k_2^2 / k_1.$$

Точное солитоноподобное решение уравнения (13) имеет вид, совпадающий с (12):

$$U = (3k_1^2/2)(10c_4/c_2)^{1/2} \operatorname{sech}^2 \eta, \quad \eta = (k_1x + k_2y - \omega_1 t) / 2.$$

Проведенный анализ показал, что уравнение (2), несмотря на неинтегрируемость, обладает преобразованием Бэклунда и точным решением в виде уединенной волны. Таким образом, в нелинейно–упругих диспергирующих средах с моментными напряжениями возможно образование и распространение локализованных возмущений.

## Библиографический список

1. Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К. Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981.
2. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, № 1. С. 52.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
4. Кудряшов Н.А. Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике // ПММ. 1990. Т. 54, вып.3. С. 450.
5. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys. 1983. Vol. 24, № 3. P. 522.
6. Kudryashov N., Zargaryan E. Solitary waves in active–dissipative media // J. Phys. A. 1996. Vol. 29, № 4. P. 8067.
7. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

8. Олвер П. Приложения группы Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

Саратовский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию 14.01.99  
после переработки 26.03.99

## EXACT SOLITON-LIKE SOLUTION OF THE FIFTH-ORDER NONLINEAR EVOLUTION EQUATION

*A.I. Zemlyanukhin*

Non-integrable fifth-order evolution equation, modelling wave process in nonlinear elastic dispersive media with moment stresses is investigated.

The Bäcklund transformation and exact soliton-like solution are obtained for this equation.



*Землянухин Александр Исаевич* – родился в 1967 году в Саратове. Окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1989) по специальности «механика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995). С 1996 года докторант СГТУ. Подготовил к защите диссертацию на тему: «Моделирование волновых процессов в цилиндрических оболочках и нелинейные эволюционные уравнения». Область научных интересов – нелинейная волновая динамика деформируемых систем, качественные методы исследования нелинейных уравнений в частных производных, групповой анализ дифференциальных уравнений. Имеет 25 публикаций и монографию «Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция» (СГТУ, 1999, совместно с Л.И. Могилевичем).



## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ С ВИРТУАЛЬНЫМ КАТОДОМ В ВИРКАТОРЕ И ВИРТОДЕ

*В.Г. Анфиногентов, А.Е. Храмов*

В работе представлены результаты численного моделирования нелинейной динамики электронного потока с виртуальным катодом в вакуумной трубе дрейфа. Демонстрируется динамическая природа сложных колебаний виртуального катода. Показано, что один из механизмов возникновения хаотической динамики связан с нелинейным взаимодействием между образующимися в потоке электронными структурами – виртуальными катодами. Воздействие на процессы структурообразования путем подключения внешней запаздывающей обратной связи (виртуодная схема) позволяет управлять переходами между режимами генерации.

### Введение

Значительные успехи релятивистской СВЧ-электроники во многом обусловлены развитием техники формирования и транспортировки сильноточных релятивистских электронных пучков (РЭП) [1,2]. Однако, успехи в развитии ускорительной техники не могут быть в полной мере использованы в приборах пролетного типа, являющихся аналогами классических СВЧ-устройств (клистроны, ЛОВ, ЛБВ, МЦР и т.д.), так как ток пучка в них ограничен. По мере приближения тока к определенному уровню эффективность взаимодействия электронов с электромагнитными полями резко падает из-за влияния пространственного заряда РЭП. Вместе с тем, оказалось возможным использовать энергию собственных электромагнитных полей РЭП в режиме сверхпределных токов [3–6]. Из оценок стационарной теории известна предельная величина тока электронного пучка  $I_{SCL}$ , пропускаемого через дрейфовую вакуумную камеру [7,8]

$$I_{SCL} = (m_e c^3 / e) (\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2} / (\Delta / r_b + 2 \ln R / r_b), \quad (1)$$

где  $\gamma_0 = 1 / (1 - v_0^2 / c^2)^{1/2}$  – релятивистский фактор потока на входе в систему;  $R$  и  $r_b$  – соответственно, радиус дрейфовой камеры и потока,  $\Delta$  – толщина пучка. При превышении током пучка предельного вакуумного тока  $I_{SCL}$  невозможно существование стационарного состояния в системе. Часть электронного потока останавливается в некоторой области пространства взаимодействия и отражается обратно к плоскости инжекции. Эта область называется виртуальным катодом (ВК); потенциал поля пространственного заряда в области ВК имеет значение равное величине ускоряющего потенциала.

Виртуальный катод в пространстве взаимодействия ведет себя существенно

нестационарным образом, колеблясь как во времени, так и в пространстве. В последние десятилетия было предложено практическое применение этого явления в новых мощных СВЧ-приборах – виркаторах. В них в качестве активной среды используется электронный пучок с виртуальным катодом. В связи с этим исследование спектрального состава излучения и динамики потока с ВК занимают важное место в поиске путей управления параметрами сверхмощных генераторов на базе виркаторных систем.

Еще в 1985 году Н.Е. Brandt [9], исследуя так называемый турбутрон, высказал идею о нелинейности динамики прибора с ВК. Работы многих групп исследователей выявили различные проявления нелинейной динамики электронного потока с ВК, например, синхронизацию колебаний ВК внешними сигналами [10–14], взаимную синхронизацию связанных виркаторов [15–17] или хаотическое поведение потока с ВК [18–20]. Экспериментальные данные, полученные с помощью как натуральных, так и вычислительных экспериментов, свидетельствуют о том, что электронный поток с ВК обладает сложной нерегулярной динамикой. Спектр излучения виркаторных систем может быть близок к сплошному с типичной шириной полосы  $\Delta f/f$  порядка 50%. В работе [21] было высказано предположение о детерминированной природе хаоса в приборе с ВК. Вместе с тем, сложная пространственная и временная динамика в распределенных системах электронной природы связывается с взаимодействием возникающих когерентных пространственно-временных структур (см., например, [22–28]). Понимание внутренней динамики потока позволяет выработать эффективные способы управления колебаниями ВК, и, как следствие, повысить КПД и мощность генерации в приборах с ВК.

В работах [29,30], посвященных исследованию скомпенсированного электронного потока с ВК в диоде Пирса в квазипотенциальном приближении, показано, что хаотическая динамика в этой системе определяется формированием и нелинейным взаимодействием в потоке двух электронных сгустков. Это сам ВК и сгустки, образующиеся в результате распада ВК. Данные объекты представляют собой автоструктуры, возникающие в результате насыщения неустойчивости Пирса и кинематической неустойчивости. Однако, традиционные виркаторы работают обычно без нейтрализации электронного потока. Поэтому особый интерес вызывает выяснение физических процессов, сопровождающих нерегулярное поведение электронного потока с ВК в вакуумной дрейфовой камере с учетом непотенциальных эффектов, ограничивающих скорость распространения электромагнитных волн в системе [31].

Одним из наиболее перспективных методов управления динамикой потока с ВК является введение в виркаторную систему внешней запаздывающей обратной связи (ОС). Такая схема, предложенная и экспериментально исследованная в НИЦ ХФТИ [32], получила название виртода. Применение ОС позволило повысить уровень мощности излучения по сравнению со свободными колебаниями ВК на 5 дБ. Перестройка фазы в цепи обратной связи позволила управлять как величиной генерируемой мощности, так и спектральным составом излучения. В работах [33,34] в рамках простейшей нерелятивистской диодной модели виртода демонстрируется сильное влияние параметров ОС (в первую очередь длительности задержки) на нелинейную динамику ВК. Однако, в рамках диодной модели можно говорить лишь о качественных закономерностях в системе «электронный поток с ВК и внешней ОС». Поэтому представляет значительный интерес исследование характеристик генерации в виртодной системе в рамках полномасштабного численного моделирования.

В данной статье с помощью разработанной математической модели вакуумного СВЧ-генератора на виртуальном катоде, основанной на решении самосогласованной системы кинетических уравнений, описывающих динамику потока, совместно с полной нестационарной системой уравнений Максвелла для эволюции электромагнитного поля [35,36], решаются следующие задачи: 1) исследуется нелинейная динамика электронного потока с виртуальным катодом в ограниченном пространстве дрейфа; 2) рассматриваются физические процессы,

сопровождаящие усложнение режимов колебаний виртуального катода; 3) анализируется динамика системы с точки зрения образования и взаимодействия когерентных структур; 4) применяется метод вейвлет-преобразования к рассмотрению нестационарной динамики виртуального катода; 5) исследуется влияние параметров внешней обратной связи на характеристики генерации виркатора.

В 1 разделе кратко обсуждается математическая модель и некоторые конкретные особенности ее реализации. В разделах 2–5 рассматривается нелинейная динамика виртуального катода в системе без ОС, а также анализируются физические процессы, сопровождающие усложнение динамики системы. Раздел 6 содержит результаты исследования влияния параметров внешней ОС на характеристики генерации ВК.

## 1. Математическая модель

В настоящем разделе исследуется система, представляющая собой замкнутый отрезок цилиндрического волновода длиной  $L$  и радиусом  $R$ , помещенный в сильное продольное магнитное поле. Через сечение  $z=0$  (плоскость инжекции) внутрь системы поступает моноскоростной электронный поток с релятивистским фактором  $\gamma_0=2.3$ . В предположении, что фокусировка пучка осуществляется сильным продольным магнитным полем, рассматривается одномерное движение потока в направлении оси  $z$ .

Для описания эволюции электромагнитного поля рассматривается полная нестационарная система уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = (1/c)\partial\mathbf{E}/\partial t + 4\pi\mathbf{j}/c. \quad (3)$$

В силу аксиальной симметрии системы имеет место возбуждение только ТМ волн, сильно связанных с пучком; при этом компоненты поля будут иметь вид

$$\mathbf{E} = (E_r, 0, E_z), \quad \mathbf{H} = (0, H_\theta, 0), \quad (4)$$

а плотность тока, благодаря замагниченности пучка, будет иметь одну компоненту  $\mathbf{j}=(0,0,j_z)$ .

Динамика заряженных частиц описывается бесстолкновительным кинетическим уравнением Власова

$$\partial f/\partial t + v_z \partial f/\partial z + eE_z \partial f/\partial p_z = 0, \quad (5)$$

$$j_z = e \int f v_z dp. \quad (6)$$

Здесь  $f(t,z,p_z)$  – функция распределения электронов пучка,  $p_z$  – релятивистский импульс,  $v_z = p_z/m(1+p_z^2/m^2c^2)^{1/2}$ .

Решение уравнения Власова базируется на методе крупных частиц, который сводит (5) к системе из  $N$  ( $N$  – число макрочастиц) обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$dv_{zk}/dt = (1-v_{zk}^2)^{3/2} E_{zk}, \quad (7)$$

$$E_{zk} = (1/\Delta V_k) \iint E_z(r,z) h(|r-r_k|, |z-z_k|) r dr dz, \quad (8)$$

$$k = 1, \dots, N.$$

Здесь  $h$  – нормированная функция «вклада».

Консервативная разностная схема для решения задачи строится в соответствии с работами [35,37].

Уравнения движения макрочастиц (7) решаются с помощью явной двухшаговой схемы предиктор – корректор [38], которая существенно точнее интегрирует уравнения движения частиц, чем традиционно используемая схема «leap-frog» [35].

Нестационарные уравнения Максвелла аппроксимируются разностными операторами [39–41], причем для получения центральных пространственных разностей различные компоненты полей рассматриваются на сдвинутых относительно друг друга пространственно–временных сетках. Операторы  $\partial/\partial r$ ,  $\partial/\partial z$ ,  $\partial/\partial t$  в используемой схеме аппроксимируются центральными разностями

$$\partial/\partial \zeta \rightarrow \Delta/\Delta \zeta : [\Delta/\Delta \zeta] \mathcal{F}(\zeta_{j+1/2}) = [\mathcal{F}(\zeta_{j+1}) - \mathcal{F}(\zeta_j)]/\Delta \zeta,$$

где  $\zeta = \{r, z, t\}$ ;  $\Delta \zeta$  и  $\zeta_j$  – шаг и координата  $j$ -го узла соответствующей пространственной сетки;  $\zeta_{j+1/2} = \zeta_j + \Delta \zeta/2$ . Кроме этого используется оператор

$$(\cdot)^{(1/2)} : \mathcal{G}^{(1/2)}(t^{n+1/2}) = [\mathcal{G}(t^{n+1}) - \mathcal{G}(t^n)]/2.$$

Тогда система уравнений Максвелла для компонент полей (4) в конечно-разностном представлении запишется в виде

$$\Delta H_\theta/\Delta t = -c(\Delta E_r/\Delta z - \Delta E_z/\Delta r)^{(1/2)}, \quad (9)$$

$$\Delta E_r/\Delta t = -c\Delta H_\theta^{(1/2)}/\Delta z, \quad (10)$$

$$\Delta E_z/\Delta t = (c/r)(\Delta r H_\theta/\Delta r)^{(1/2)} - 4\pi j_z. \quad (11)$$

Получившаяся система уравнений (9)–(11) решается неявными методами интегрирования [40,42].

Использование полунявной схемы интегрирования самосогласованной системы Максвелла – Власова, то есть явного интегрирования уравнений движения и неявного интегрирования уравнений полей, обладает рядом преимуществ. Являясь, за счет модификации плотностей тока и заряда [42], консервативной разностной схемой, в отличие от явных схем [38], она позволяет проследить динамику системы для реальных длительностей импульсов тока. С другой стороны, по сравнению с полностью неявными схемами [42], она требует значительно меньших затрат машинного времени. Это связано с тем, что за счет интегрирования исходной задачи в два этапа наиболее критичный по затратам машинного времени расчет полей может

проводиться с шагом по времени большим, чем шаг интегрирования уравнений движения макрочастиц. Кроме того, такой подход совместно с использованием цифровой фильтрации пространственных распределений полей [35,43] позволяет эффективно подавить коротковолновые нефизические осцилляции радиального поля  $E_r$ , обусловленные неявным интегрированием уравнений Максвелла.

Проверка правильности работы программы проводилась путем моделирования линейного этапа развития электростатической неустойчивости. На рис. 1 приведены результаты расчета предельного вакуумного тока для аксиальной геометрии в зависимости от ско-

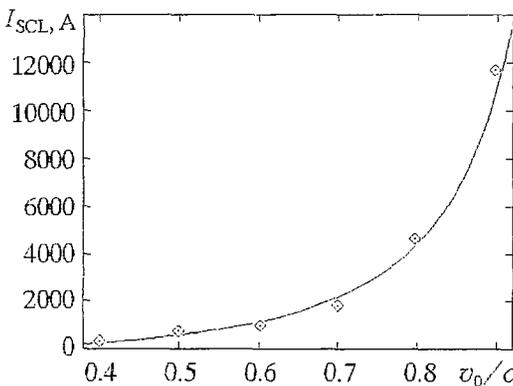


Рис. 1. Зависимость предельного тока ограниченного пространственным зарядом пучка от скорости инжектируемого потока. Сплошная линия – теоретическая кривая,  $\diamond$  – численный эксперимент

рости инжектируемого потока. Расчетное значение сравнивалось с теоретической зависимостью (1). Видно хорошее совпадение результатов, что подтверждает применимость развитой математической модели.

## 2. Общая характеристика поведения системы при изменении управляющих параметров

При заданных геометрических параметрах дрейфовой камеры<sup>1</sup> основным управляющим параметром, от которого зависит поведение исследуемой системы, является отношение тока пучка к предельному вакуумному току, обозначаемое в настоящем разделе через  $\alpha$ .

Анализ и диагностика динамических режимов при различных значениях безразмерного тока пучка  $\alpha$  в исследуемой системе проводились по временным реализациям тока из области ВК. По ним строились спектры мощности и восстанавливались фазовые портреты колебаний (рис. 2). Для восстановления фазовых портретов использовался метод Такенса [45], сводящийся к построению фазовых векторов вида

$$\mathbf{R}(t) = \{I(t), I(t+T), \dots, I(t+(m-1)T)\}, \quad (12)$$

где  $I(t)$  – ток пучка в области ВК в момент времени  $t$ ;  $T$  – время задержки;  $m$  – размерность вложения ( $m=2$  соответствует проекции аттрактора на плоскость). Было выделено три качественно отличающихся режима колебаний ВК с увеличением тока пучка.

При малых значениях  $\alpha$  ( $\alpha < 1.7$ ) в системе устанавливаются регулярные колебания релаксационного типа (рис. 2, а). Спектр мощности содержит узкие пики, являющиеся кратными гармониками основной частоты  $\omega_0 \approx 2.6\omega_p$ , где  $\omega_p$  – плазменная частота электронного потока. Отметим, что значение частоты

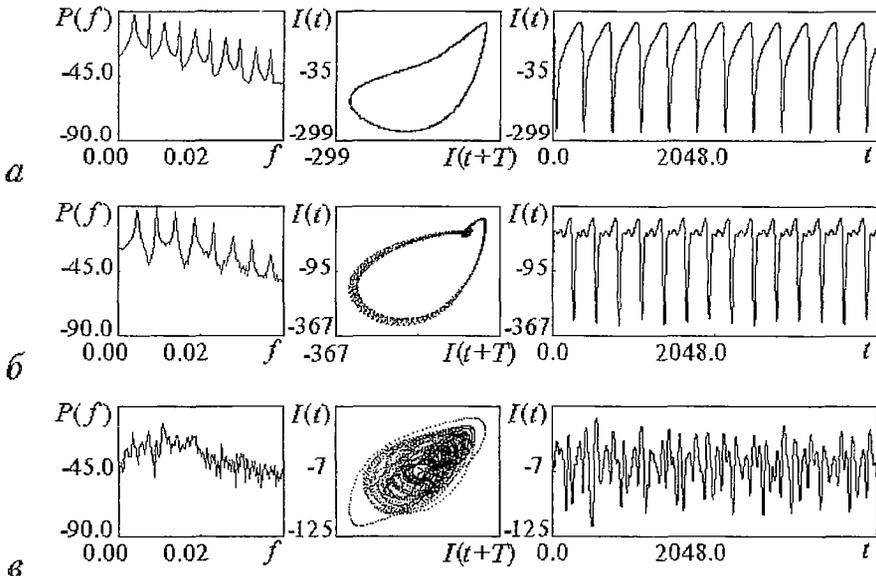


Рис. 2. Спектры мощности, фазовые портреты и временные реализации колебаний тока пучка из области ВК для различных динамических режимов: а –  $\alpha < 1.7$ ; б –  $1.7 < \alpha < 3$ ; в –  $\alpha > 3$

<sup>1</sup> Влияние геометрических параметров дрейфовой камеры на динамику виртуального катода подробно исследовано в работе [44], и здесь этот вопрос не затрагивается.

генерации в численном эксперименте близко к наблюдаемому в физических экспериментах [46]. Проекция аттрактора соответствует однократному предельному циклу. С увеличением  $\alpha$  происходит разрушение периодических колебаний, и с ростом надкритичности появляются два типа хаотического поведения. Так, при  $1.7 < \alpha < 3$ , как видно из рис. 2, б, хаотический аттрактор появляется на базе одного неустойчивого предельного цикла, соответствующего притягивающему множеству периодических движений при  $\alpha < 1.7$ . С увеличением тока пучка,  $\alpha > 3$  (рис. 2, в), фазовый портрет более однороден; спектр мощности сильно зашумлен, в нем нет четко выраженных пиков.

Анализ размерности аттракторов, проведенный с помощью расчета корреляционной размерности по алгоритму Грассбергера – Прокаччиа [47], свидетельствует о детерминированной природе сложных колебаний ВК. На рис. 3 приведены зависимости наклона корреляционного интеграла от нормированного на размер аттрактора  $\epsilon_0$  масштаба наблюдения  $\epsilon$  в двойной логарифмической шкале для различных значений размерности пространства вложения  $m$  [48]. По оси абсцисс отложен масштаб наблюдения  $\ln(\epsilon/\epsilon_0)$ , по оси ординат – размерность аттрактора  $D_C$ .

На рис. 3, а представлены результаты расчета размерности для слабохаотических колебаний в потоке ( $\alpha=2.0$ ), на рис. 3, б – для развитого хаоса ( $\alpha=4.0$ ). Из рисунка видно, что характерной особенностью аттракторов является сильная неоднородность, о чем свидетельствует отсутствие плато на графиках  $D_C(\epsilon)$ . С ростом  $\alpha$  аттрактор усложняется, что проявляется в появлении двух характерных областей – области малых масштабов наблюдения, где  $D_C$  порядка  $1.2 \div 1.5$ , и области больших масштабов, где  $D_C$  порядка 4.5. Во всех хаотических режимах размерность насыщается с ростом размерности пространства вложения. Это свидетельствует о детерминированности хаотических режимов, так как для шумовых колебаний величина корреляционной размерности не насыщается с ростом  $m$  [49].

При небольшой надкритичности насыщение происходит при малых значениях размерности пространства вложения ( $m=3 \div 4$ ). Для второго хаотического режима размерность пространства вложения существенно выше:  $m=7 \div 9$ , что соответствует возникновению более сложных колебаний ВК. Число возбуждаемых степеней свободы  $d$  в системе может быть оценено по верхней границе размерности фазового пространства  $m_s$ :  $d = m_s/2$  [50], где  $m_s$  равна

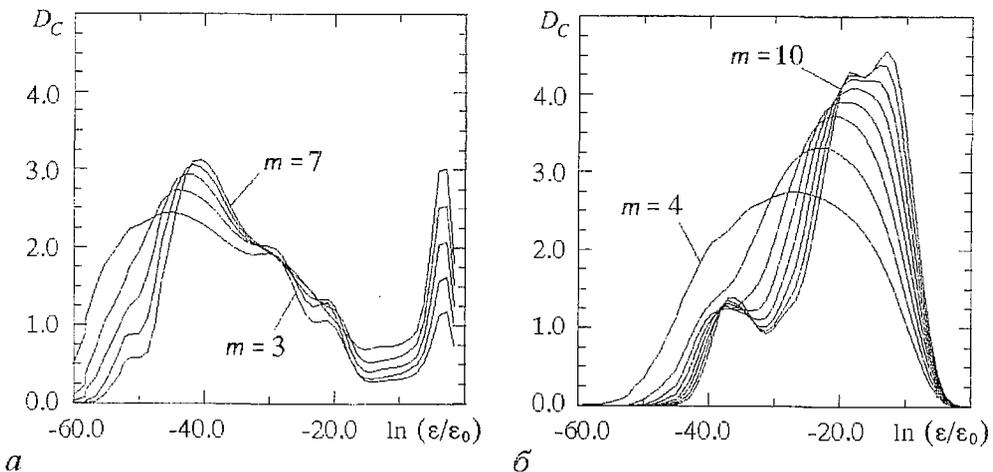


Рис. 3. Зависимости корреляционной размерности аттрактора  $D_C$  от масштаба наблюдения  $\epsilon$  для различных значений размерности пространства вложения  $m$  для следующих значений параметра  $\alpha$ : а – 2.0; б – 4.0

размерности пространства вложения, при которой происходит насыщение размерности аттрактора. Анализ размерности, как и вид спектра и фазового портрета, свидетельствует об увеличении с ростом  $\alpha$  числа степеней свободы, вовлекаемых в колебательное движение в системе.

Из вышесказанного видно, что в системе возбуждается только небольшое число активных степеней свободы, хотя электронный поток в пространстве дрейфа представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. С увеличением  $\alpha$  число степеней свободы, вовлекаемых в колебательное движение, растет. Тем не менее оно остается достаточно малым, что является косвенным свидетельством возможности описания внутренних движений в потоке на основе анализа взаимодействия ограниченного числа структур.

### 3. Формирование структур в электронном потоке

Характерным признаком наличия в распределенной потоковой системе сложной пространственно–временной динамики является формирование и взаимодействие когерентных структур. Мы выделяли внутренние структуры электронного потока с ВК с помощью декомпозиции пространственно–временных данных по алгоритму Карунена – Лозва [51–53].

Задача выделения набора базисных функций  $\{\Psi_i\}$  по Карунену – Лозву сводится к решению интегрального уравнения следующего вида:

$$\int K(z, z^*) \Psi(z^*) dz^* = \Lambda \Psi(z), \quad (13)$$

где ядро  $K$  является двухточечной корреляционной функцией:

$$K(z, z^*) = \langle \xi(z, t) \xi(z^*, t) \rangle_t, \quad (14)$$

$$\langle s(t) \rangle_t = (1/T) \int_0^T s(t) dt. \quad (15)$$

В качестве  $\xi(z, t)$  может быть взят набор пространственно–временных данных с нулевым средним, описывающих динамику системы. В данном случае в качестве  $\xi(z, t)$  были выбраны распределения плотности тока пучка  $j_z(z, t)$  в пространстве взаимодействия.

Собственные функции  $\Psi_i(z)$ , являющиеся решением уравнения (13), обычно называют модами Карунена – Лозва. Собственные числа  $\Lambda_i$ , соответствующие модам  $\Psi_i(z)$ , пропорциональны энергии, заключенной в этой моде. Мерой относительной энергии моды  $\Psi_i(z)$  может служить величина

$$W_i = (\Lambda_i / \sum_j \Lambda_j) \times 100\%. \quad (16)$$

Отметим, что набор  $\{\Psi_i\}$  является оптимальной системой координат в смысле наибольшего сжатия информации, то есть имеющей минимальное число базисных функций, необходимых для описания исследуемого процесса. Это означает, что основная энергия физического процесса при описании его функциями, полученными из решения задачи (13), сосредоточена в нескольких высших модах, а не разбросана по большему их числу.

Метод численного определения наборов  $\{\Psi_i\}$  и  $\{\Lambda_i\}$  базируется на том, что задача (13)–(14) является однородным линейным интегральным уравнением 2–го рода, которое, как известно, представляет собой задачу о собственных значениях. Соответствующее интегральному уравнению (13) матричное уравнение имеет вид

$$[k_{kl}] \{\Psi_l\} = \Lambda \{\Psi_k\}, \quad (17)$$

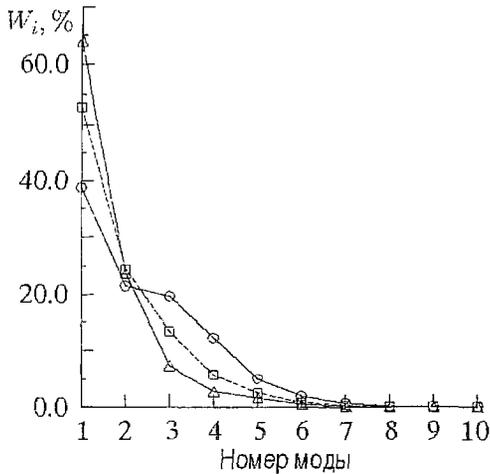


Рис. 4. Распределение энергии  $W_i$  по модам Карунена – Лозва для следующих значений параметра  $\alpha$ :  $\Delta$  – 1.4,  $\square$  – 2.0,  $\circ$  – 4.0

где, как нетрудно видеть из (14),  $[k_{kl}]$  есть действительная симметричная матрица. Для нахождения ее собственных чисел и собственных векторов можно воспользоваться любым из известных численных методов линейной алгебры (см., например, [54]).

На рис. 4 приведены зависимости энергии первых десяти мод  $W_i$  для различных значений надкритичности. В регулярном режиме ( $\alpha=1.4$ ) порядка 90% энергии потока заключено в первых двух модах  $W_1$  и  $W_2$ . С ростом  $\alpha$  спектр энергий мод уширяется, энергия из первой моды постепенно перекачивается в высшие моды, и при  $\alpha$  порядка 4 основная энергия (порядка 90%) заключена уже в первых четырех модах  $W_1, \dots, W_4$ , причем энергии второй, третьей и четвертой мод примерно одинаковы. Вместе с тем во всех режимах, как периодических, так и со сложной динамикой, число мод с энергией большей, чем 1% от общей энергии потока, невелико (порядка 5–7), что согласуется с выводами раздела 2 о небольшом числе степеней свободы, возбуждаемых в системе.

Пространственные распределения мод характеризуются сложной многогорбой формой, причем с ростом номера моды они усложняются, теряя симметричность, свойственную высшей моде.

На рис. 5 приведены временные реализации амплитуд первых двух мод  $A_1(t)$  (сплошная линия) и  $A_2(t)$  (штриховая линия), полученные как

$$A_i(t) = \int \xi(z,t) \Psi_i(z) dz. \quad (18)$$

При малой надкритичности (рис. 5, а) поведение мод имеет достаточно регулярный характер. Можно выделить интервалы времени, когда на временной реализации наблюдается всплеск амплитуды  $A$ , связанный с формированием в потоке ВК и его распадом, и когда амплитуды мод  $A_1 \approx A_2 \approx 0$  (в потоке отсутствуют структуры; ВК

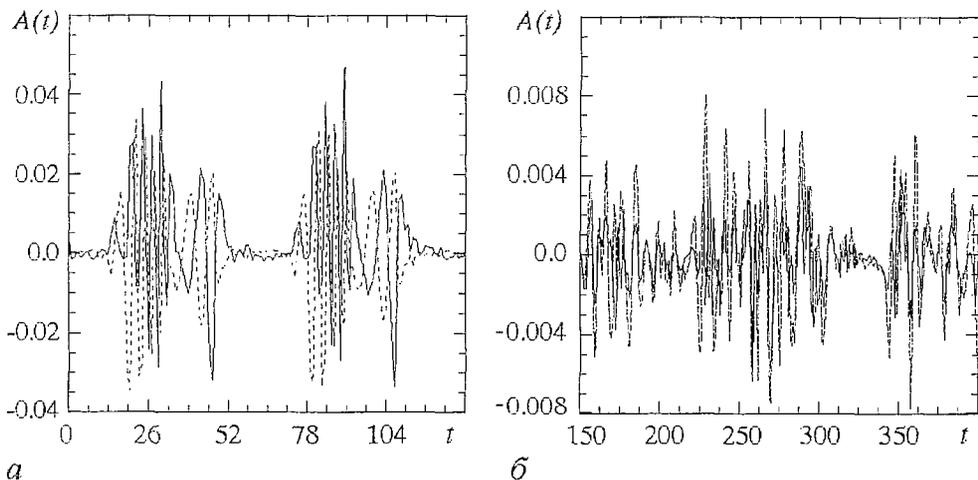


Рис. 5. Зависимость амплитуды первой (сплошная линия) и второй (штриховая линия) мод Карунена – Лозва от времени для режима регулярных колебаний (а) и развитого хаоса (б)

«открыт» и в системе наблюдается пролетный к коллектору ток). Учитывая, что колебания первой и второй мод происходят с постоянным сдвигом фаз  $\pi/2$ , можно предположить [55], что они описывают динамику одной пространственно-временной структуры.

Развитый хаос (рис. 5, б) характеризуется сложной нерегулярной динамикой мод, структуры в потоке существуют постоянно. Следует обратить внимание, что амплитуды мод в этом случае меньше амплитуд мод в регулярном режиме. Взаимная корреляционная функция процессов  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  быстро спадает к нулю. Корреляция между временным поведением высших мод Карунена – Лозва не наблюдается, что позволяет связать с каждой модой собственную структуру в потоке.

Таким образом, переход от регулярных движений к хаотическим и последовательное усложнение хаотических режимов сопровождается увеличением числа возбуждающихся внутренних структур в потоке, причем с ростом параметра надкритичности  $\alpha$  энергии колебаний отдельных мод выравниваются.

#### 4. Физические процессы в электронном потоке с виртуальным катодом

В работах [34,53,56,57] типичные моды, полученные с помощью разложения Карунена – Лозва, связываются с характерными электронными структурами (сгустками заряженных частиц) скомпенсированного потока в пространстве взаимодействия. Такой подход является весьма плодотворным и применительно к электронному потоку с ВК в вакуумной трубе дрейфа. Однако, если в потоке с полной нейтрализацией формирование второго сгустка связано либо с развитием кинематической неустойчивости электронного потока в меняющемся тормозящем поле «открывающегося» ВК [30,56,57], либо с группировкой предварительно промодулированного сигналом обратной связи потока [33,34], то в нашем случае можно говорить о формировании в пространстве дрейфа нескольких областей отражения (нескольких ВК), взаимодействием между которыми может быть объяснена хаотическая динамика в электронном потоке без нейтрализации его пространственного заряда.

Это хорошо иллюстрирует функция распределения  $\Phi(\tau_i)$  заряженных частиц по временам жизни  $\tau_i$  в пространстве взаимодействия (рис. 6). В регулярном режиме (рис. 6, а, сплошная линия)  $\Phi(\tau_i)$  имеет двугорбый вид. Площадь под кривой пропорциональна числу существующих в потоке пролетных и отраженных к

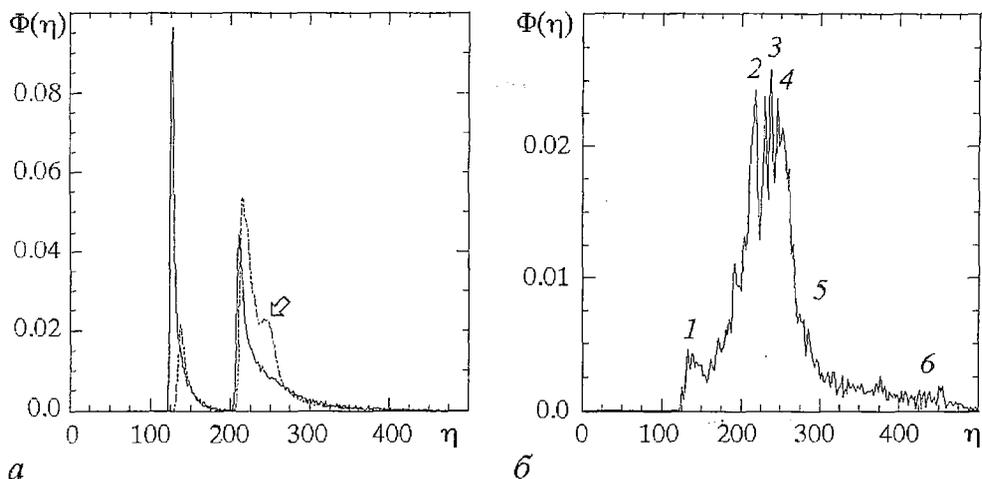


Рис. 6. Распределение заряженных частиц по временам жизни в пространстве взаимодействия для следующих значений параметра  $\alpha$ : а – 1.4 (сплошная линия), 2.0 (штриховая линия); б – 4.0

плоскости инъекции частиц. Характерные траектории заряженных частиц в координатах  $(z, t)$  и  $(v, z)$  с временами жизни, соответствующими максимумам  $\Phi(\tau_i)$ , приведены на рис. 7, а. Видно, что в потоке имеется одна структура – ВК и, соответственно, два характерных типа частиц – пролетные и отраженные от ВК частицы.

С увеличением  $\alpha$  отраженные частицы начинают доминировать в общем числе инжектируемых частиц (рис. 6, а, штриховая линия); область возможных времен жизни отраженных частиц увеличивается. За счет появления долгоживущих частиц в потоке возникает внутренняя распределенная обратная связь, обеспечивающая взаимодействие между основной структурой (виртуальным катодом) и возникающей вторичной структурой, которой соответствует третий максимум на кривой  $\Phi(\tau_i)$  (отмечен стрелкой). Однако, при небольшой надкритичности эффективность этой связи мала (общее количество частиц, отраженных от вторичного виртуального катода, мала) и движение слабонерегулярно (в фазовом пространстве наблюдается размытый предельный цикл).

Для развитого хаоса (рис. 6, б) характерна сильно изрезанная форма  $\Phi(\tau_i)$ , которая позволяет выделить несколько примерно равных по массе групп заряженных частиц с различными временами жизни. В этом случае в потоке нет хорошо сформированного виртуального катода (ср. пространственно–временные

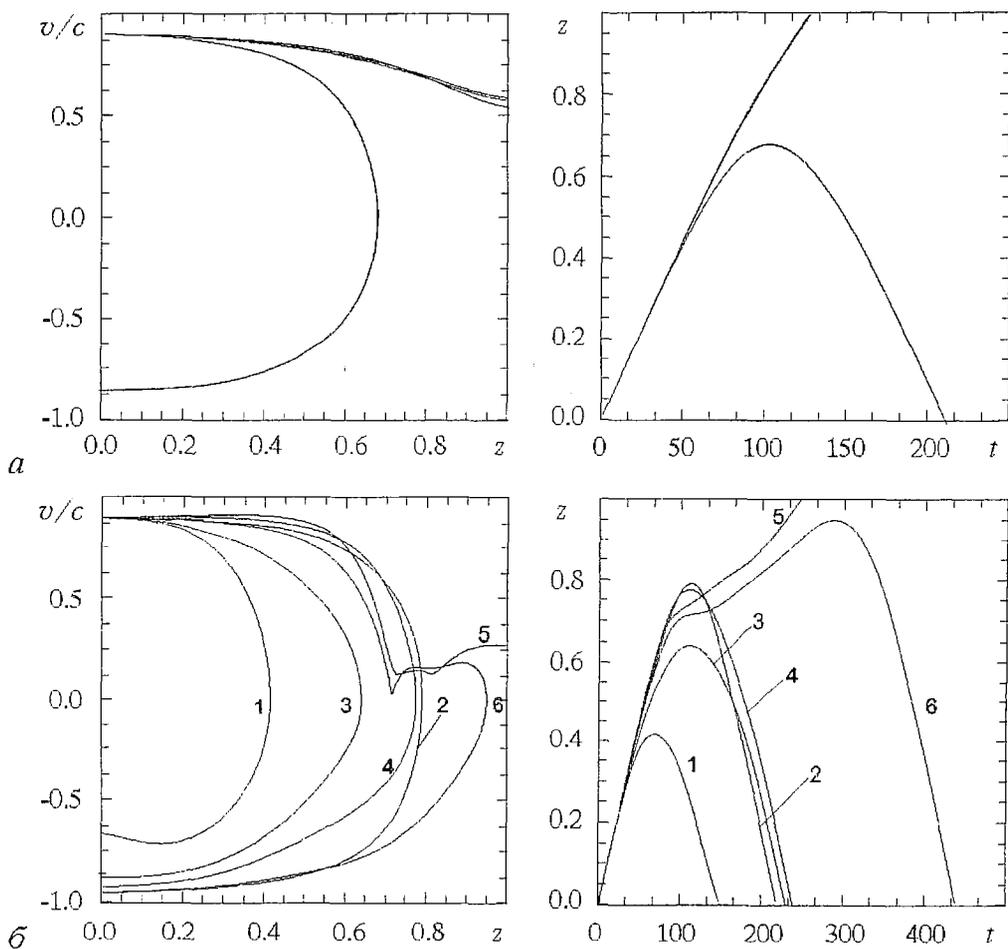


Рис. 7. Характерные траектории заряженных частиц для режима регулярных колебаний (а) и развитого хаоса (б)

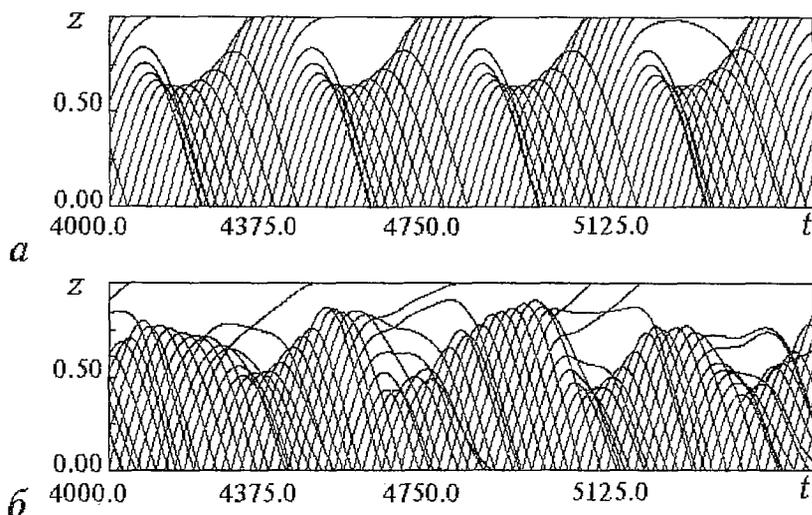


Рис. 8. Пространственно-временные диаграммы электронного потока для режима регулярных колебаний (а) и развитого хаоса (б)

диаграммы электронного потока в пространстве дрейфа для регулярных (рис. 8, а) и хаотических (рис. 8, б) движений). Процессы в потоке могут быть интерпретированы как формирование нескольких виртуальных катодов (нескольких колебательных структур) на различном расстоянии от плоскости инжекции. В качестве иллюстрации на рис. 7, б изображены траектории частиц, времена жизни которых соответствуют максимумам  $\Phi(\tau_i)$ , отмеченным цифрами на рис. 6, б и 7, б. Это также подтверждается приведенными на рис. 9 распределениями плоскостей, в которых наблюдается отражение заряженных частиц, по продольной координате. Видно, что в случае регулярных движений функция распределения имеет ярко выраженный максимум, соответствующий тому, что в потоке существует единственная отражающая плоскость (виртуальный катод), которая четко локализована в пространстве. Рост тока приводит к уширению функции распределения, причем в режиме слабого хаоса на кривой выделяется два глобальных максимума, соответствующих двум структурам в потоке, а в режиме развитого хаоса форма распределения сильно изрезана, при этом каждый максимум соответствует своему виртуальному катоду. Отметим, что графики распределения плоскостей отражения имеют один или несколько максимумов, расположенных на высоком пьедестале, поскольку каждый виртуальный катод колеблется как во времени, так и в пространстве. Наиболее вероятные места локализации отражающих плоскостей соответствуют максимумам распределения.

Отражение части потока от каждого из ВК оказывает влияние на условия формирования других структур в потоке, что обеспечивает несколько петель внутренней обратной связи с различными временами запаздывания. Такая распределенная связь между

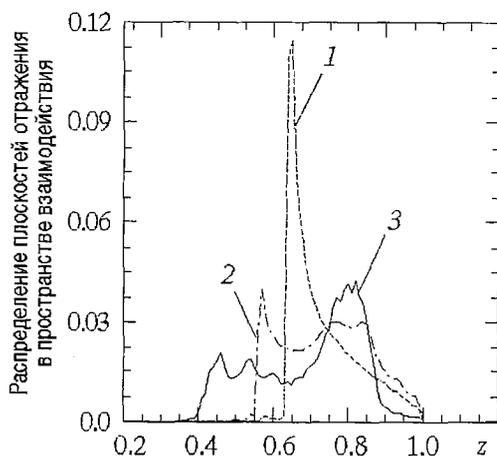


Рис. 9. Распределение плоскостей отражения электронов в пространстве взаимодействия при различных значениях параметра надкритичности  $\alpha$ : 1 – 1.4; 2 – 2.0; 3 – 4.0

всеми структурами в потоке приводит к сильно нерегулярной динамике системы при большой надкритичности  $\alpha$ .

Подчеркнем, что в системе появляются и метастабильные частицы (траектория  $b$  на рис. 7,б) [21], однако их влияние на динамику потока не велико. Учет расслоения потока по продольной координате (поток представляется набором колец различного диаметра) показал, что развитый метастабильный сгусток, живущий в пространстве взаимодействия примерно  $1.5 \div 2$  периода колебаний ВК, формируется в удаленном от оси волновода слое, и его воздействие на динамику системы подобно описанному в [44,58].

В заключение заметим, что взаимодействие и конкуренция возбуждаемых в потоке мод является одной из причин понижения эффективности генерации при токах пучка значительно превышающих стартовых. Действительно, с увеличением  $\alpha$  от 1.4 до 5.0 электронный КПД исследуемого генератора уменьшается более чем в пять раз (см. также [37,59–61]).

## **5. Анализ нелинейной динамики потока с позиций формирования и взаимодействия разномасштабных локальных временных возмущений**

В предыдущих разделах результаты численного моделирования сложной динамики потока с виртуальным катодом анализировались с применением таких методов, как выделение базисных функций (когерентных структур) с помощью ортогональной декомпозиции из наборов пространственно–временных данных и построение различных функций распределения электронов (заряженных крупных частиц) в пространстве дрейфа. Данные методы, являясь традиционными в электронике и вообще в задачах, требующих обнаружения и выделения тех или иных структур (например, распознавания образов), имеют ряд недостатков. Так, метод Карунена – Лозва может строго применяться только к стационарным полям [51], что требует специальной процедуры подготовки данных для алгоритма (см. (14), (15)). Кроме того, что более важно, возникают сложности в интерпретации временной динамики внутренних структур электронного потока. Анализ функций распределения электронов также проводится по усредненным во времени характеристикам. Поэтому для обнаружения разномасштабных нестационарных во времени структур в электронном пучке необходимо использовать базис, приспособленный для описания нестационарных взаимодействий в широких диапазонах масштабов.

В качестве метода, удовлетворяющего вышесказанному, можно предложить использование вейвлет–преобразования (*wavelet transform*), находящего в последнее время все большее применение при решении подобных задач (см., например, обзоры [62–65]). Базис, называемый также масштабно–временным спектром, получающийся в результате вейвлет–преобразования, позволяет выделить информацию о динамике структур разного масштаба во времени, а следовательно проанализировать влияние и взаимодействие разномасштабных структур в исследуемой системе. Отметим, что вейвлет–преобразование было предложено впервые J.Morlet (1980) для анализа сейсмических данных [66], и в дальнейшем методы вейвлет–анализа нашли широкое применение для обработки сложных графических изображений, сжатия информации, выделения структур [67]. Однако в области физики и, в частности, электронике и физике плазмы, насколько известно из доступной авторам литературы, этот аппарат обработки данных только начинает находить свое применение (см. [68,69]). В связи с этим, кратко остановимся на некоторых особенностях вейвлет–метода.

Идеи вейвлет–преобразования во многом базируются на гармоническом анализе, поэтому логично для введения вейвлет–преобразования основываться на фурье–преобразовании. Последнее корректно применяется только для анализа периодических сигналов и его обобщение на интегральное фурье–преобразование имеет некоторые недостатки. Так, интегральное фурье–преобразование  $\psi(\omega)$  функции  $u(t)$  определяется как

$$\psi(\omega) = 1/(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (19)$$

Положим, что  $u(t)$  ограничена и не равна нулю только в интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Так как преобразование (19) взаимно однозначно (то есть, зная  $\psi(\omega)$  можно восстановить вид  $u(t)$ ), информация о том, что  $u(t) \neq 0$  при  $t \in [t_1, t_2]$ , должна быть каким-то образом заключена в комплексной функции  $\psi(\omega)$ . Представим ее в виде амплитуды и фазы:  $\psi(\omega) = \psi_A(\omega) \exp(i\psi_{PH}(\omega))$ , где фаза  $\psi_{PH}(\omega)$  содержит информацию о сигнале на конечном временном интервале, а амплитуда  $\psi_A(\omega)$  инвариантна относительно произвольного временного сдвига. Таким образом, информация о поведении  $u(t)$  на конечном временном интервале оказывается рассредоточенной по бесконечному набору фазовых углов. Другими словами, преобразование Фурье позволяет, увеличивая длину временной реализации, как угодно точно определить спектральный состав сигнала, но при этом теряется информация о временной динамике каждой спектральной компоненты (*локализация частоты без временного разрешения* [64]). Вместе с тем существует возможность включить информацию о временной динамике в амплитуду  $\psi_A(\omega)$  путем применения оконного фурье-преобразования. В последнем случае проводится фурье-анализ, локализованный во времени коротким временным окном, сдвигаемым по длинной временной реализации. Однако в таком подходе, близком по своей идее к вейвлет-анализу, имеется следующий существенный недостаток. Рассмотрим прямоугольную оконную функцию и будем анализировать частоту  $f_0$ . Положив ширину окна  $T = N/f_0$ , где  $N$  – целое, получим, что анализ частоты  $nf_0$  ( $n$  также целое) осуществляется по  $nN$  периодам. То есть, в последнем случае разрешающая способность метода в  $n$  раз выше, чем при анализе частоты  $f_0$ . И наоборот, разрешающая способность метода на частоте  $f_0/n$  в  $n$  раз меньше. Этот недостаток полностью преодолевается при применении вейвлет-анализа [66]. Определим функцию (Морлет-вейвлет)

$$\phi(\omega_0, \eta) = \pi^{-1/4} \exp(i\omega_0 \eta) \exp(-\eta^2/2), \quad (20)$$

которая представляет собой быстро затухающую гармоническую волну (рис. 10). Теперь для анализа произвольного временного ряда необходимо покрыть всю ось  $R \in (-\infty, +\infty)$ , имея единственный базовый вейвлет (20). Это достигается путем масштабных преобразований  $s$  и сдвигов  $t'$ , которые приводят к следующему выражению для семейства, базирующегося на Морлет-вейвлете:

$$\phi_{s,t'}(t) = \phi((t-t')/s). \quad (21)$$

Тогда вейвлет-преобразование запишется в виде

$$W(s, t') = s^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \phi_{s,t'}(t) dt. \quad (22)$$

Отсюда видно, что в отличие от оконного фурье-преобразования, для вейвлет-преобразования число периодов, использованных для анализа той или иной частоты, не зависит от ее значения. Более того, если при фурье-анализе (19) находится функция только частоты  $f$ , вейвлет-анализ позволяет определить и локализацию во времени процесса с тем или иным временным масштабom  $s$ . Здесь мы не останавливаемся на конкретных особенностях и

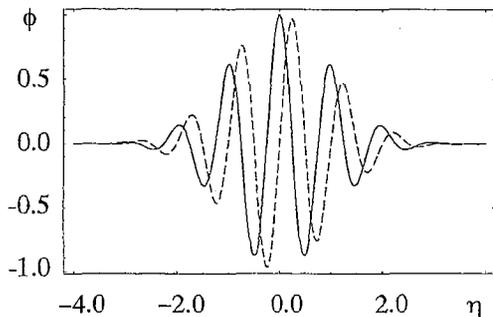


Рис. 10. Реальная (сплошная линия) и мнимая (штриховая линия) части Морлет-вейвлета

свойствах вейвлет-преобразования (интересующимся можно порекомендовать вышеупомянутые обзоры, а также [70,71]). Кратко затронем вопрос численной реализации вейвлет-преобразования (22).

Представим (22) в виде операторной формы. Пусть  $F$  и  $F^{-1}$  есть операторы прямого и обратного фурье-преобразования, тогда (22) по теореме свертки запишется в виде

$$F(W(s,t')) = s^{-1/2} F(u(t))F(\varphi_{s,t}(t)). \quad (23)$$

То есть в операторной форме вейвлет преобразование записывается как простое умножение в фурье-пространстве, а с помощью обратного преобразования из (23) можно получить выражение для  $W$

$$W(s,t') = s^{-1/2} F^{-1}[F(u(t)) \cdot F(\varphi_{s,t}(t))]. \quad (24)$$

Из выражения (24) видно, что требующее небольших затрат машинного времени нахождение поверхности  $W(s,t')$  возможно с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье функции  $u(t)$ . В этом случае она должна быть задана временным рядом длиной  $2^N$  с эквидистантными временными отсчетами. Фурье-образ Морлет-вейвлета (20) имеет вид [72]

$$F(\varphi) = \hat{\varphi} = \pi^{-1/4} H(u) \exp[-s(\omega - \omega_0)^2/2], \quad (25)$$

где  $H(u)$  – функция Хевисайда.

Мы будем производить вейвлет-анализ с базовым Морлет-вейвлетом, используя, как и в разделе 2, временные реализации величины тока пучка  $I(t)$  из области ВК, полученные при различных значениях  $\alpha$ . На рис. 11 представлены линии уровня модулей коэффициентов  $W(s,t)$  (по оси ординат выбран логарифмический масштаб для визуализации широкого диапазона масштабов  $s$ ) и соответствующие анализируемые сигналы, построенные для трех значений надкритичности  $\alpha$ . U-образная линия ограничивает область влияния краевых эффектов.

Обсудим теперь вопрос, что происходит с видом поверхности  $W(s,t)$  с увеличением надкритичности  $\alpha$ . Рис. 11, а демонстрирует периодический характер динамики системы при небольшой надкритичности, причем конфигурация распределения линий уровня свидетельствует о наличии единственного временного масштаба, ответственного за динамику модели. Действительно, поверхность имеет единственный максимум на масштабах  $s$  порядка 80. С ростом  $\alpha$  (рис. 11, б) на поверхности  $W$  появляется второй локальный максимум, расположенный на шкале масштабов вблизи первого и имеющий высоту порядка в 7-9 раз меньше максимума, соответствующего основному временному масштабу  $s_0$ , который несколько меньше, чем величина  $s_0$  в предыдущем случае (это связано с тем, что базовая частота в спектре растет с ростом тока пучка). Второй временной масштаб наблюдается на протяжении всей постоянно анализируемой временной реализации тока пучка. Данный эффект связан с уже описанным выше явлением формирования вторичной относительно виртуального катода электронной структуры в пучке. Вернувшись к рис. 6, а (штриховая линия), отметим, что наблюдающийся на функции распределения отраженных электронов по временам жизни второй максимум (указан стрелкой) соответствует второму временному масштабу, обнаруженному в результате вейвлет-преобразования.

Ситуация меняется с дальнейшим ростом тока пучка. Как уже обсуждалось, в этом случае в потоке формируется на каждом характерном временном масштабе несколько электронных структур, которые сильно связаны друг с другом, что было интерпретировано нами как несколько петель обратной связи с различными временами запаздывания: такая ситуация приводит к установлению развитых хаотических колебаний. Вейвлет-анализ демонстрирует эту же картину: на распределении коэффициентов  $W(s,t)$  (рис. 11, в) в диапазоне временных масштабов

$s_0 \in [3, 26]$  наблюдается сложная нерегулярная структура локальных максимумов. Вместе с тем была обнаружена и другая «глобальная» структура линий уровня на плоскости  $(s, t)$ . Особенно хорошо это видно на рис. 11, г, где показаны результаты вейвлет-преобразования небольшого отрезка временного ряда, изображенного на рис. 11, в. В системе достаточно долго (в течение трех-пяти периодов колебаний) наблюдается динамика с одним временным масштабом, а затем происходит появление другого временного масштаба (большего или меньшего по величине в зависимости от предыстории), сильно разнесенного по шкале масштабов с предыдущим. Такая разномасштабная динамика с сильно локализованными характерными временными масштабами не может быть на данном этапе объяснена

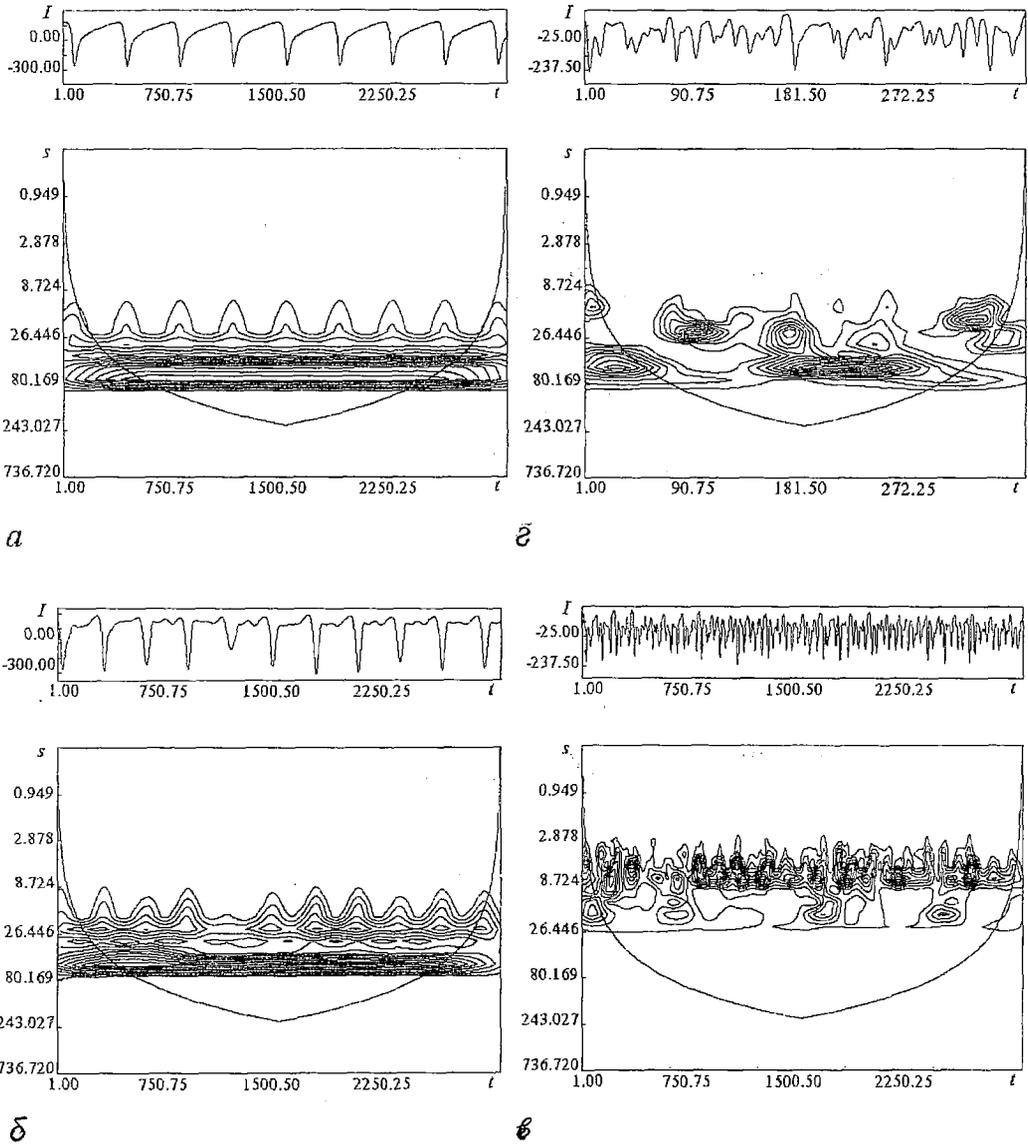


Рис. 11. Результаты вейвлет-анализа временных реализаций тока пучка из области виртуального катода для различной надкритичности  $\alpha$ : а - 1.4; б - 2.0; в - 4.0; г - увеличенный фрагмент в

с предыдущих позиций формирования вторичных структур (см. разделы 3, 4). Можно предполагать, что данные эффекты определяются динамикой основной структуры потока – виртуального катода, однако вопрос о причинах «переключения» его колебаний с одного режима на другой остается открытым (при этом качественный вид пространственно–временных диаграмм, мод Карунена – Лозва и т.п. не меняется).

Таким образом, применение вейвлет–преобразования к таким сильно нестационарным временным данным, как колебания тока пучка в генераторе на виртуальном катоде, позволило как подтвердить некоторые ранее полученные результаты другими методами, так и обнаружить некоторые новые моменты, не выявленные другими методами диагностики нестационарных колебаний.

## 6. Влияние запаздывающей обратной связи на динамику потока

Введение внешней ОС в исследуемую систему проводилось за счет отвода части мощности колебаний из пространства взаимодействия в область ускорения РЭП с помощью волноводной линии с задержкой. В этом случае инжектируемый в дрейфовую камеру ток пучка модулируется с частотой осцилляций ВК сигналом, прошедшим по цепи ОС. Поведение потока в этом случае определяется безразмерным током пучка  $\alpha$  и параметрами ОС: временем задержки сигнала  $\tau$  и точкой подключения ОС в пространстве взаимодействия. Глубина модуляции потока на входе пространства дрейфа не превышала 15÷20%. Мы рассматривали два случая подключения внешней ОС. В первом случае точка подключения ОС в пространстве взаимодействия располагалась перед ВК, где амплитуда колебания тока электронного потока существенна, а сами колебания близки к регулярным. Во втором случае точка подключения имела координату  $z=0.95L$ , то есть располагалась на правой границе пролетной трубы дрейфа (в области коллектора, на котором электронный пучок поглощался).

Влияние параметров ОС на характеристики генерации ВК исследовалось при фиксированном значении величины безразмерного тока  $\alpha=2.0$ . Данное значение тока соответствует максимальному значению КПД в системе (см. раздел 4, а также [61]).

Рассмотрим случай, когда сигнал ОС снимается в области ВК. На рис. 12 приведены характеристики колебаний в системе для различных  $\tau$ . Исследования показали, что динамика системы определяется соотношением между временем задержки  $\tau$  и характерным масштабом колебаний в системе  $T_{VC}$ , который приблизительно равен среднему времени жизни в пространстве взаимодействия электрона, отраженного от ВК. Введение ОС с малым временем задержки  $\tau < T_{VC}/2$  приводит к усложнению динамики системы: в спектре поднимается шумовой пьедестал, увеличивается ширина полосы генерации, растет размерность аттрактора (рис. 12, а). При увеличении  $\tau$  сложность колебаний уменьшается, и при  $\tau > T_{VC}/2$  в системе наблюдается установление регулярных колебаний (рис. 12, б), которому предшествует длительный переходный процесс. Его длительность уменьшается с ростом длительности задержки  $\tau$ .

На рис. 12, в показаны характеристики колебаний в системе для случая подключения ОС в области коллектора. Колебания сильно нерегулярны, спектр мощности сплошной и близок к шумовому. Это связано с тем, что в области правой границы пролетной трубы дрейфа колебания в системе более нерегулярны, чем в области ВК, за счет сильной термализации потока после прохождения через ВК [21,75,76]. Поэтому поток перед поступлением в камеру дрейфа модулируется сигналом близким к шумовому, что и приводит к развитию сильнонерегулярных, шумоподобных колебаний в системе. Такой режим работы генератора может использоваться для получения сверхмощного широкополосного излучения.

Как было видно из рис. 12, а и б, при помощи изменения времени задержки.

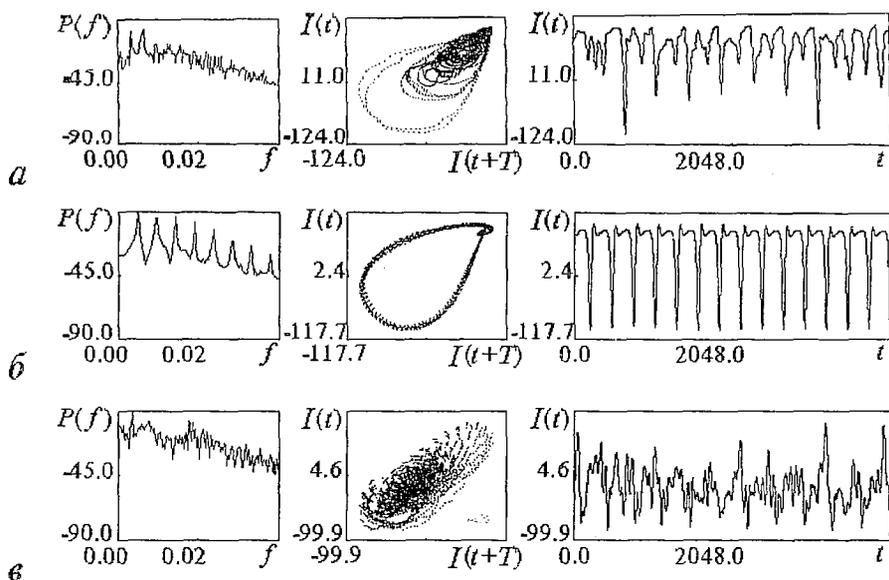


Рис. 12. Спектры мощности, фазовые портреты и временные реализации колебаний тока пучка из области ВК для различных параметров обратной связи:  $\tau=0.2$  нс (а);  $\tau=0.6$  нс (б); и в случае подключения ОС в области коллектора (в)

ОС возможно управление амплитудными характеристиками генерации. На рис. 13 представлена зависимость генерируемой мощности в исследуемой системе от времени задержки ОС. Горизонтальная линия на рисунке соответствует уровню мощности в системе без ОС при том же токе  $\alpha$ . Видно, что при оптимальном  $\tau$  мощность возрастает более чем в 1.5 раза. Отметим, что полученная зависимость согласуется с результатами натурального эксперимента на макете виртода в ХФТИ [32].

Изменение времени задержки  $\tau$  при фиксированном токе приводит также к перестройке частоты генерации системы в достаточно широких пределах (рис. 14). Этот эффект<sup>2</sup> может быть проиллюстрирован на простейшей феноменологической модели. В работе [10] для описания фазовой синхронизации генератора на ВК внешним сигналом предложена феноменологическая модель, основанная на уравнении типа Ван дер Поля. В нашем случае для описания стабилизации генератора собственным сигналом, воздействующим на систему после прохождения линии задержки, эта модель может быть записана в виде

$$d^2E/dt^2 - 2\delta(1 - E_0^2/E_{NL}^2)dE/dt + \omega_0^2 E = (2\omega_0^2/Q)ME(\omega_0(t-\tau)). \quad (26)$$

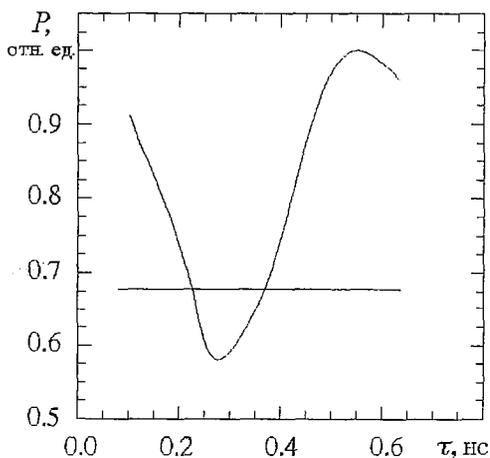


Рис. 13. Зависимость мощности генерации от времени запаздывания ОС: горизонтальная линия – уровень мощности свободных колебаний ВК

<sup>2</sup> Отметим, что подключение внешней ОС широко используется для управления частотными характеристиками нерезонансных генераторов (см., например, [73,74]).

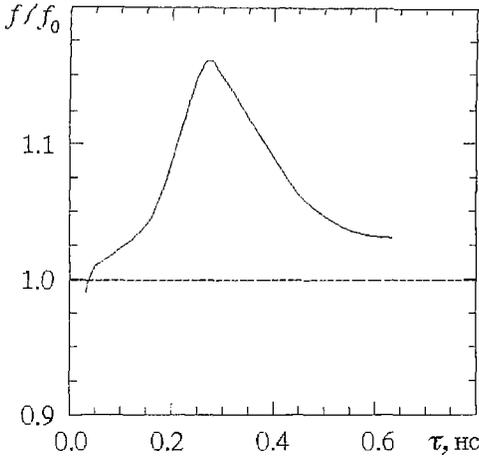


Рис. 14. Зависимость характерной частоты генерации от времени запаздывания ОС

Здесь  $E$  – поле в системе;  $E_0$  – амплитуда поля;  $E_{NL}$  – величина нелинейного ограничения амплитуды поля;  $\delta$  – инкремент колебаний;  $\omega_0$  и  $Q$  – соответственно «холодная» резонансная частота и добротность резонансной системы;  $M$  – коэффициент ослабления в цепи ОС.

Для решения уравнения (26) полагаем, что  $E$  имеет вид:  $E = E_0(t) \cos(\omega_0 t - \theta(t))$ , где  $E_0$  и  $\theta$  медленно меняющиеся функции. Применяя метод усреднения Ван дер Поля можно показать, что динамика фазы в первом приближении (то есть в предположении  $E_0(t) = \text{const}$ ) описывается уравнением

$$d\theta/dt = M\omega_0 \sin\beta/Q, \quad \beta = \omega_0 \tau, \quad (27)$$

решение которого  $\theta(t) = [M\omega_0 \sin\beta/Q]t + \theta_0$ . Тогда зависимость  $E$  от времени будет иметь следующий вид:  $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 [1 + M \sin\beta/Q]t - \theta_0)$ .

Таким образом, изменяя задержку  $\beta$ , можно добиться перестройки частоты генерации прибора, причем максимальный сдвиг частоты

$$\Delta\omega/\omega_0 = M/Q. \quad (28)$$

Видно, что чем меньше коэффициент ослабления  $M$  в цепи ОС и чем больше добротность  $Q$ , тем меньше сдвиг частоты. Оценка сдвига частоты по формуле (28) согласуется по порядку величины со значением, полученным из численного эксперимента (см. рис. 14).

### Выводы

При помощи численного моделирования с помощью  $1.5D$  электромагнитного кода изучены нелинейные колебания электронного потока с виртуальным катодом в ограниченном пространстве дрейфа, а также влияние внешней запаздывающей обратной связи на характеристики генерации виркаторной системы. Выявлены различные динамические режимы, включая хаотические колебания виртуального катода. Получена количественная характеристика сложности (корреляционная размерность) хаотических колебаний в потоке.

Исследованы физические процессы в потоке со сверхкритическим током в ограниченном пространстве дрейфа. С ростом тока пучка в системе формируется несколько областей, отражающих электроны – несколько виртуальных катодов. Один из механизмов возникновения хаотической динамики связан с сильно нелинейным взаимодействием между формирующимися виртуальными катодами, что приводит к образованию нескольких петель обратной связи с различными временами запаздывания. С помощью ортогональной декомпозиции проанализирована динамика структур потока и показана тесная связь процессов взаимодействия и образования когерентных структур с возникновением сложного поведения виртуального катода.

Введение в систему внешней обратной связи позволяет эффективно управлять выходными характеристиками виркаторной системы. При подключении обратной связи в области виртуального катода с длительностью запаздывания, превышающей время пролета электрона от плоскости инжекции до виртуального катода, наблюдается режим близкий к одночастотной генерации. Уменьшение

длительности запаздывания, либо подключение обратной связи на выходе из пространства дрейфа приводит к появлению многочастотных и шумоподобных режимов генерации. Изменение параметров обратной связи оказывает управляющее воздействие на характерную частоту и мощность генерации прибора на виртуальном катоде.

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 98-02-16541, а также грантом INCAS-S.*

### Библиографический список

1. Физика и техника мощных импульсных систем / Под ред. Е.П. Велихова. М.: Энергатоиздат, 1987.
2. *Бабькин М.В.* Генерация и фокусировка сильноточных релятивистских электронных пучков / Под ред. Л.И. Рудакова. М.: Энергатоиздат, 1990.
3. *Mahaffey R.A., Sprangle P.A., Golden J., Kapetanacos C.A.* High-power microwaves from a non-isochronous reflecting electron system // *Phys.Rev.Lett.* 1977. Vol. 39, № 13. P. 843.
4. *Kapetanacos C.A., Sprangle P.A., Mahaffey R.A., Golden J.* High-power microwaves from a non-isochronous reflecting electron system (NIRES). US Patent 4150340, 17.04.79. H 01 J 25/74.
5. *Диденко А.Н., Красик Я.Е., Перельгин С.Ф., Фоменко Г.П.* Генерация мощного СВЧ-излучения релятивистским электронным пучком в триодной системе // *Письма в ЖТФ.* 1979. Т. 5, вып. 6. С. 321.
6. *Sullivan D.J.* High-power microwave generator using relativistic electron beam in waveguide drift tube. US Patent 4345220, 17.08.82. H 03 B 9.01.
7. *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980.
8. *Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Плазменная СВЧ электроника // *УФН.* 1981. Т. 133, № 1. С. 3.
9. *Brandt H.E.* The turbutron // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1985. Vol. PS-13, № 6. P. 513.
10. *Woo W., Benford J., Fittingoff D., Harteneck B., Price D., Smith R., Sze H.* Phase locking of high-power microwave oscillators // *J.Appl.Phys.* 1989. Vol. 65, № 2. P. 861.
11. *Sze H., Price D., Woo W., Benford J.* Priming and phase locking of high power vircators // *Book of Abstracts of the 7th Int. Conference on High Power Particle Beams (BEAMS'88).* Karlsruhe, 1988. P. 328.
12. *Hramov A.E.* Influence of external action on chaotic dynamics of virtual cathode oscillations // *Proc. of 5th Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, NDES'97, June 26-27, 1997, Moscow, Russia.* P.443.
13. *Anfinogentov V.G., Hramov A.E.* Virtual cathode oscillation driven by the external signal // *Proc. of 6th Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, NDES'98, July 16-18, 1998, Budapest, Hungary.* P. 307.
14. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Неавтономные колебания электронного потока с виртуальным катодом в плоском диодном промежутке // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 6. С. 61.
15. *Hendricks K., Richard A., Noggle R.* Experimental results of phase locking two virtual cathode oscillator // *J.Appl.Phys.* 1990. Vol. 68, № 2. P. 820.
16. *Sze H., Price D., Harteneck B.* Phase locking of two strongly coupled vircators // *J.Appl.Phys.* 1990. Vol. 67, № 5. P. 2278.
17. *Храмов А.Е.* Колебания системы связанных генераторов на виртуальном катоде виртодного типа // *РЭ.* 1999. Т. 44, вып. 2. С. 225.
18. *Афонин А.М., Диденко А.Н., Пауткин А.Ф., Рошаль А.С.* Нелинейная динамика виртуального катода в триодных системах // *РЭ.* 1992. Т. 37, вып. 10. С. 1889.

19. Привезенцев А.П., Саблин Н.И., Филипенко Н.М., Фоменко Г.П. Нелинейные колебания виртуального катода в триодной системе // РЭ. 1992. Т. 37, вып. 7. С. 1242.
20. Привезенцев А.П., Фоменко Г.П. Сложная динамика потока заряженных частиц с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 56.
21. Селемир В.Д., Алехин Б.В., Ватрунин В.Е., Дубинов А.Е., Степанов Н.В., Шамро О.А., Шибалко К.В. Теоретические и экспериментальные исследования СВЧ-приборов с виртуальным катодом // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 7,8. С. 689.
22. Trubetskov D.I., Mchedlova E.S., Anfinogentov V.G., Ponomarenko V.I., Ryskin N.M. Nonlinear waves, chaos and patterns in microwave devices // CHAOS. 1996. Vol. 6, № 3. P. 358.
23. Трубецков Д.И., Анфиногентов В.Г., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Храмов А.Е. Сложная динамика электронных приборов СВЧ (нелинейная нестационарная теория с позиций нелинейной динамики) // Радиотехника. 1999. Т. 68, № 4. С. 68.
24. Madon A., Klinger T. A model for the bifurcations in plasma drift-waves // Physica D. 1997. Vol. 102. P. 335.
25. Афанасьева В.В., Трубецков Д.И. Динамический хаос в электронных сверхвысокочастотных приборах. Часть II. Релятивистские электронные приборы / / Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ. Вып. 3(1614). М.: ЦНИИ «Электроника», 1991.
26. Привезенцев А.П., Фоменко Г.П. Нелинейные когерентные структуры в колебаниях виртуального катода // Лекции по СВЧ-электронике и радиофизике: 9-я зимняя школа семинар, Саратов, 1993. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж»; 1993. С. 130.
27. Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И. Детали перехода к хаосу в системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // ДАН. 1998. Т.358. С.620.
28. Рыскин Н.М., Титов В.Н. Нелинейная динамика релятивистской лампы обратной волны // Труды VII Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн». Красновидово, Московская область. 24–30 мая 1999. Т.1. С.126.
29. Анфиногентов В.Г. Взаимодействие когерентных структур и хаотическая динамика в электронном потоке с виртуальным катодом // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, вып. 8. С. 70.
30. Анфиногентов В.Г. Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
31. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
32. Гадецкий Н.Н., Магда И.И., Найстетер С.И., Прокопенко Ю.В., Чумаков В.И. Генератор на сверхкритическом токе РЭП с управляемой обратной связью – виртод // Физика плазмы. 1993. Т. 19, вып. 4. С. 530.
33. Anfinogentov V.G. Chaotic dynamics of electron beam with virtual cathode in the bounded system // Proc. 11th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS'96) (Prague, Czech Republic, 1996), Prague: 1996, Vol. 1. P. 381.
34. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. Сложное поведение электронного потока с виртуальным катодом и генерация хаотических сигналов в виртодных системах // Известия РАН. Сер. Физическая. 1997. Т. 61, № 12. С. 2391.
35. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma physics, via computer simulation. NY: McGraw-Hill, 1985.
36. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
37. Свешников А.Г., Якунин С.А. Численные модели бесстолкновительной плазмодинамики // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 4. С. 1.
38. Березин Ю.А., Вишицов В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980.

39. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шапков М.Ю. О представлении разностных схем в операторной форме // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 5. С. 1092.
40. Свешиников А.Г., Якунин С.А., Майков А.Р. О численном моделировании физических процессов в плазменном генераторе СВЧ-излучения // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 3. С. 597.
41. Майков А.Р., Поезд А.Д., Якунин С.А. Применение консервативных разностных схем // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, № 7. С. 1237.
42. Майков А.Р., Свешиников А.Г., Якунин С.А. Математическое моделирование плазменного генератора сверхвысокочастотного излучения // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, № 6. С. 883.
43. Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer simulation using particles. NY: McGraw-Hill, 1981.
44. Анфиногентов В.Г. Нелинейная динамика электронного потока с виртуальным катодом в ограниченном пространстве дрейфа // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 3/4. С. 268.
45. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence: Lect. Notes in Math. / Eds R.A. Rand and L.S. Young. Warwick: Springer-Verlag, 1980. Vol. 898. P. 366.
46. High Power Microwave Sources / Eds V.L. Granatstein and I. Alexeff Boston: Artech House, 1987. Ch. 13-14.
47. Grassberger P., Procaccia J. On the characterization of strange attractors // Phys.Rev.Lett. 1983. Vol. 50. P. 346.
48. Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Андрушкевич А.В. Диагностика сложных колебаний по корреляционной размерности // Докл. междунар. семинара «Нелинейные цепи и системы» (16-18 июня 1992, Москва, Россия). Т. 2. М., 1992. С. 308.
49. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
50. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценка их параметров // УМН. 1983. Т. 38, вып. 4. С. 133.
51. Lumley J.L. The structure of inhomogeneous turbulent flows // Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation: Proc. of the Int. Colloquium / Eds A.M. Yaglom and V.I. Tatarsky. Moscow: Nauka, 1967. P. 166.
52. Ватанабе С. Разложение Карунена – Лозва и факторный анализ. Теория и приложения // Автоматический анализ сложных изображений / Под ред. Э.М. Бравермана. М.: Мир, 1969. С. 310.
53. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. Нелинейные явления в потоке со сверхкритическим током в неоднородном ионном фоне // Известия РАН. Сер. Физическая. 1998. Т. 62, № 12. С. 2428.
54. Уилкинсон Д. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
55. Aubry N., Holmes P., Lumley J., Stone E. Application of dynamical system theory to coherent structures in the wall region // Physica D. 1989. Vol. 37. P. 1.
56. Anfinogentov V.G. Nonlinear dynamics and chaotic behaviour of electron beam with virtual cathode in the Pierce diode // Proc. 3rd Int. Specialist Workshop on Non-linear Dynamics in Electronic Systems (NDES'95), July 28-29, 1995, Dublin, Ireland. Dublin, 1995. P. 79.
57. Anfinogentov V.G. Chaotic dynamics and structure formation in the plasma diode with virtual cathode // Proc. 24th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Berchtesgaden, Germany, 9-13 June 1997. Vol. 3. Berchtesgaden, 1997. P. 1293.
58. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. Влияние распределенной обратной связи на хаотические колебания виртуального катода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 93.
59. Поезд А.Д., Якунин С.А. Програмный комплекс для численных расчетов самосогласованных нелинейных нестационарных задач сильноточной СВЧ электроники // Численные методы, алгоритмы и программы. М., 1988. С. 102.

60. Поезд А.Д., Якунин С.А. Численное моделирование СВЧ генератора на сверхпределных релятивистских электронных пучках // Численные методы, алгоритмы и программы. М., 1988. С. 117.

61. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ генераторе на виртуальном катоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 9. С. 1137.

62. Wavelets / Eds J.M. Combes, A. Grossman, P. Tchamitchian. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

63. Wavelet analysis and its applications. San Diego: Academ. Press, Inc., 1992. Vol. 1, 2.

64. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 2. С. 3.

65. Lewalle J. Tutorial on Continuous Wavelet Analysis of Experimental Data // <http://www.amara.com/current/wavelet.html>.

66. Morlet J. // Issues in Acoustic Signal-Image Processing and Recognition / Ed C.H. Chen. Berlin: Springer-Verlag, 1983. P. 233.

67. Daubechies I. Wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992.

68. Ватрунин В.Е., Дубинов А.Е., Селемир В.Д. Самоподобие и ветвление вейвлет-образов СВЧ-сигналов, генерируемых виркатором // Письма в ЖТФ. Т.22, вып.24, С.92.

69. Dose V., Venus G., Zohm H. Wavelet analysis of fusion plasma transient // Phys. Plasmas. Vol. 4, № 2. P. 323.

70. Amara Graps. An Introduction to Wavelets // IEEE Computational Science and Engineering. 1995. Vol. 2, № 2.

71. Chui C.K. An Introduction to Wavelets. San Diego, CA: Academic Press, 1992.

72. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. Vol. 79, № 1. P. 61.

73. Железовский Б.Е., Кальянов Э.В. Многочастотные режимы работы в приборах СВЧ. М.: Связь, 1978.

74. Кудрявцева Л.А., Куликов М.Н. Управление частотной характеристикой нерезонансных СВЧ автогенераторов с помощью регулируемой внешней обратной связью // Матер. междунар. научно-технической конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП'98), 7-9 сентября 1998, Саратов, Россия. Саратов: Изд-во СГТУ, 1998. Т. 1. С. 80.

75. Селемир В.Д., Дубинов А.Е., Степанов Н.В. Динамика термализации электронного потока в камере дрейфа виркатора. Препринт ВНИИЭФ. Арзамас-16, 1994.

76. Matsumoto H., Yokoyama H., Summers D. Computer simulation of the chaotic dynamics of the Pierce beam-plasma system // Phys. Plasmas. 1996. Vol. 3, № 1. P. 177.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.12.98  
после переработки 8.06.99

## INVESTIGATION OF OSCILLATIONS OF ELECTRON BEAM WITH VIRTUAL CATHODE IN VIRCATOR AND VIRTOD

V.G. Anfinogentov, A.E. Hramov

Nonlinear dynamics of the electron beam with virtual cathode in the vacuum drift tube is investigated with the aid of numerical simulation. Deterministic nature of the complex virtual cathode oscillations is demonstrated. It is proved, that one of the mechanisms of the chaotic dynamics origin is connected with nonlinear interaction between forming structures in the electron beam (virtual cathodes). Inner structures in the beam are analyzed by the orthogonal decomposition by Karunen - Loeve method and the wavelet transform method. Effect of external delay feedback (virtod scheme) on

processes of structures formation in the electron beam with virtual cathode is analyzed, and it is shown, that feedback delay time variation allows controlling characteristics of high power microwave generation in vircator systems.



*Анфиногентов Василий Геннадиевич* – родился в 1968 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1991). После окончания университета работает на кафедре электроники и волновых процессов СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1997) по специальности радиофизика. Область научных интересов – сложная динамика в распределенных системах электронной природы, мощная СВЧ электроника. E–mail: vga@cas.ssu.runnet.ru



*Храмов Александр Евгеньевич* – окончил Саратовский госуниверситет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности радиофизика (1999). Работает на кафедре электроники и волновых процессов СГУ и в НИИ механики и физики при СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ электроника.



## **ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПЛАЗМЫ НА ПРОЦЕСС СТОХАСТИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ В ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СВЧ-ГЕНЕРАТОРАХ**

*Ю.П. Блюх, М.Г. Любарский, Г.С. Нусинович, В.О. Подобинский*

Рассмотрен ЛБВ-генератор с замедляющей структурой, частично заполненной плазмой, плотность которой меняется под воздействием возбужденной волны. Причиной изменения плотности является поперечная компонента силы высокочастотного давления. Показано, что дополнительный набег фазы волны, связанный с возникающей таким образом неоднородностью плотности плазмы, приводит к существенному понижению порогового значения тока пучка, при котором возникает стохастическая автомодуляция выходного сигнала генератора.

### **Введение**

В 1998 году исполнилось пятьдесят лет открытию пучково-плазменной неустойчивости<sup>1</sup> [1], послужившей основой плазменной электронике. Одним из направлений плазменной электроники является генерация и усиление мощного СВЧ-излучения в электродинамических структурах, заполненных плазмой – гибридных структурах. В этой области достигнуты значительные успехи, позволившие создать ряд мощных импульсных (с использованием релятивистских электронных пучков) [2,3] и непрерывных (с использованием нерелятивистских пучков) [4,5] источников СВЧ-излучения. На протяжении полувека интенсивного развития плазменной электроники получены многочисленные экспериментальные и теоретические результаты, позволяющие сейчас довольно глубоко понимать физику взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой. Однако один существенный аспект такого взаимодействия – влияние нелинейности плазмы на характер взаимодействия пучка с собственной волной гибридной структуры – остался, на наш взгляд, мало изучен.

Одним из проявлений нелинейности плазмы является изменение ее параметров, в частности, плотности, под воздействием распространяющейся в ней волны. Причиной этого может быть сила высокочастотного давления [6], вытесняющая плазму из области с высокой напряженностью высокочастотного поля, либо высокочастотный разряд, возникающий в области с достаточно большой амплитудой волны. Поскольку в плазменной электродинамической

<sup>1</sup> Впервые работа А.И.Ахизера и Я.Б.Файнберга была помещена в отчет Украинского физико-технического института (УФТИ) в 1948 году.

структуре дисперсия собственных волн определяется параметрами плазмы, то как в первом, так и во втором случаях фазовая скорость волны зависит от ее амплитуды.

Изменение параметров среды под действием распространяющегося в ней излучения является предметом изучения нелинейной оптики. В указанном выше примере среда (плазма) также меняет свои свойства (плотность) под действием высокочастотного излучения. Однако радикальным отличием данной задачи от рассматриваемых в нелинейной оптике является то, что изменяются те свойства среды, которые влияют не столько на процесс *распространения* излучения, сколько на процесс его *возбуждения*. В пучково–плазменном взаимодействии этот элемент является наиболее чувствительным к вариациям параметров среды, что связано с его резонансным характером.

Нелинейность плазмы, пронизываемой электронным пучком, характеризуется *нелокальностью* и *распределенной обратной связью*, превращающей рассматриваемую систему в генератор низкочастотных колебаний плазмы. Действительно, возникающие в области максимума СВЧ–поля возмущения параметров плазмы распространяются в виде собственных низкочастотных (ионно–звуковых, магнитозвуковых и др.) плазменных волн и влияют на условия возбуждения СВЧ–волн пучком, меняя тем самым величину поля в области возникновения возмущения. «Память» о возникшем возмущении параметров плазмы сохраняется в системе до тех пор, пока возмущение не покинет пространство взаимодействия.

Если кроме указанной выше распределенной обратной связи существует и цепь обратной связи для возбуждаемых пучком высокочастотных колебаний, то задача описания нестационарных процессов в такой системе сильно усложняется. Основной трудностью является наличие нескольких сильно различающихся временных масштабов: время установления продольного распределения амплитуды волны, время пробега сигнала по цепи высокочастотной обратной связи и время распространения низкочастотных медленных плазменных волн. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть различные более простых предельных случаев. Так, в работе [7] показано, что возбужденные продольной пондеромоторной силой распространяющиеся ионно–звуковые волны в системе без высокочастотной обратной связи приводят к ограничению мощности СВЧ–излучения и развитию низкочастотной автомодуляции. Влияние продольной пондеромоторной силы на работу устройства с внутренней высокочастотной обратной связью – в плазмонаполненной ЛОВ – рассмотрено в [8]. Однако специфические условия (генерация вблизи частоты отсечки, низкая плотность плазмы) не позволили обнаружить здесь сколько–нибудь значительного эффекта. В работе [9] рассмотрен другой предельный случай: система с высокочастотной обратной связью (ЛБВ–генератор), в которой поперечная составляющая высокочастотного давления приводит к появлению нераспространяющихся возмущений параметров плазмы.

Ниже, в продолжение работы [9], более подробно исследовано влияние нелинейности плазмы такого типа на процесс стохастизации сигнала ЛБВ–генератора с плазмонаполненной замедляющей структурой.

## 1. Исходные уравнения

Отсылая читателя за подробностями к работе [9], изложим здесь схематически вывод исходных уравнений.

Рассмотрим нерелятивистский ЛБВ–генератор, замедляющая структура которого частично или полностью заполнена плазмой. Исходными уравнениями, описывающими работу такого генератора, являются уравнения возбуждения собственных высокочастотных волн структуры электронным пучком и уравнения, связывающие возмущения параметров плазмы с амплитудой возбужденных волн.

В отсутствие пучка распространение волны в продольно неоднородной волноведущей структуре описывается уравнением

$$\partial E_0/\partial t + v_g \partial E_0/\partial z + i(kv_g/v_{ph})(\partial v_{ph}/\partial n)\delta n(z)E_0 = 0. \quad (1)$$

Здесь  $v_g = \partial\omega/\partial k$  – групповая скорость волны;  $\delta n(z)$  – возмущение некоторого усредненного по поперечному сечению структуры значения плотности плазмы;  $v_{ph} = \omega/k$  – фазовая скорость волны;  $E_0$  – ее комплексная амплитуда. Предполагается, что характерный масштаб  $L$  изменения плотности велик по сравнению с длиной волны, то есть  $kL \gg 1$ .

Если неоднородность плотности плазмы является заданной функцией координаты, то уравнения, описывающие возбуждение волны электронным пучком, ничем не отличаются от аналогичных уравнений для продольно неоднородной вакуумной структуры. Последние в модели «жестких дисков» имеют следующий вид:

$$\partial a/\partial \tau + \partial a/\partial \zeta - ik\xi a = -1/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi_0, \quad (2)$$

$$\partial^2 \varphi/\partial \zeta^2 = -\text{Re}(ae^{-i\varphi}). \quad (3)$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные:  $\varphi = \omega t - kz$  – текущая фаза частиц пучка в поле волны,  $\varphi_0$  – ее значение в плоскости инжекции  $z=0$ ;  $\zeta = Ckz$  – безразмерная координата, нормированная на пространственный инкремент неустойчивости  $Ck$ ;  $\tau = C[v_g/(v_0 - v_g)]\omega(t - z/v_0)$ ,  $v_0$  – скорость пучка;  $a = (2/C^2)[eE_0/(mv_0\omega)]$  – безразмерная амплитуда волны,  $C$  – параметр Пирса, хорошо известный в теории ЛБВ и определяющий эффективность взаимодействия пучка с синхронной волной;  $\xi = \delta n/n$  – безразмерное возмущение плотности плазмы; параметр  $k \sim C^{-1}(n/v_{ph})dv_{ph}/dn$  описывает чувствительность фазовой скорости волны к изменению плотности плазмы в структуре.

Уравнения (2) и (3) следует дополнить граничными условиями, описывающими состояние пучка в плоскости инжекции  $\zeta=0$ , и условиями прохождения сигнала по цепи обратной связи, которую будем считать линейной,

$$\varphi(0) = \varphi_0 \in [0, 2\pi), \quad \partial\varphi/\partial\zeta|_0 = 0, \quad (4)$$

$$a(\tau, 0) = qa(\tau - \theta, \zeta_{out}).$$

Здесь  $q$  – коэффициент обратной связи;  $\theta$  – безразмерное время прохождения сигнала по цепи обратной связи;  $\zeta_{out}$  – безразмерная длина пространства взаимодействия.

Предположим, что возмущения плотности плазмы обусловлены только силой высокочастотного давления  $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ . В конечном магнитном поле с напряженностью  $H_0$  высокочастотный потенциал  $\Phi$  определяется следующим выражением [6]:

$$\Phi = e^2/(4m\omega^2)[|E_z|^2 + \omega^2/(\omega^2 - \omega_H^2)|E_\perp|^2]. \quad (5)$$

Здесь  $E_z$  и  $E_\perp$  – продольная и поперечная компоненты высокочастотного электрического поля;  $\omega_H = eH_0/(mc)$  – электронная циклотронная частота.

Пусть плазма и пучок расположены вблизи оси структуры. В этой области поперечная компонента поля возбуждаемой пучком симметричной моды мала по сравнению с продольной компонентой. Предполагая, что частота  $\omega$  достаточно далека от циклотронной частоты  $\omega_H$ , выражение (5) можно упростить

$$\Phi \cong e^2/(4m\omega^2)|E_z|^2. \quad (6)$$

В рамках сделанных предположений продольную компоненту силы высокочастотного давления можно оценить как

$$F_{\parallel} \sim \partial|E_z|^2/\partial z \sim |E_z|^2/L_{\parallel},$$

где характерный масштаб  $L_{\parallel}$  продольной неоднородности поля связан с пучковой неустойчивостью  $L_{\parallel} \sim (Ck)^{-1}$ .

Поперечный масштаб неоднородности поля волны в области распространения пучка и расположения плазмы по порядку величины совпадает с радиусом пролетного канала  $R_p$ . Предположим, что выполняется неравенство

$$R_p Ck \ll 1, \quad (7)$$

которое позволит учитывать только поперечную компоненту ponderomotorной силы, приводящую к возбуждению поперечных колебаний плазменного столба. Минимальная частота таких колебаний  $\omega_{\min} \sim C_A/R_p$ . Здесь  $C_A = H_0/(4\pi n_0 M)^{1/2}$  – альфвеновская скорость,  $M$  – масса ионов плазмы. Характерное время изменения силы – изменения амплитуды возбужденной волны – определяется временем запаздывания  $T$ . Предположим, что время запаздывания намного превышает период основной моды собственных колебаний плазменного столба

$$\omega_{\min} T \gg 1. \quad (8)$$

В этом случае собственные колебания плазмы не возбуждаются и плотность плазмы пропорциональна силе высокочастотного давления

$$\delta n \sim |E_z|^2. \quad (9)$$

Связь (9) амплитуды волны с вариацией плотности плазмы позволяет записать (2) в окончательном виде

$$\partial a/\partial \tau + \partial a/\partial \zeta - i\gamma |a|^2 a = -1/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi_0, \quad (10)$$

где

$$\gamma \sim \kappa \sim C^3(n_0/v_{ph})dv_{ph}/dn_0. \quad (11)$$

Полученные уравнения представляют простейшую модель ЛБВ–генератора с плазмонаполненной замедляющей структурой, которая учитывает нелинейность плазмы – изменение ее параметров под воздействием распространяющегося в ней излучения. Возможность описания такой нелинейности введением только одного добавочного слагаемого и одного параметра  $\gamma$  обусловлена приведенными выше условиями, которые позволили связать локальные значения плотности и амплитуды волны. Условие (8) позволило исключить возбуждение распространяющихся в продольном направлении возмущений, сделав связь между амплитудой волны и плотностью плазмы локальной в пространстве. Локальность связи во времени обеспечивается условием (9), позволяющим исключить поперечные колебания плазменного столба.

Заметим, что в работе [7] рассмотрено возбуждение распространяющихся возмущений плотности плазмы продольной компонентой силы ВЧ–давления и их влияние на свойства СВЧ–усилителя. Естественно, такие возмущения появляются и в генераторе, но их роль в формировании спектра и мощности СВЧ–излучения теоретически еще не исследована. По–видимому, оба механизма – исследованный в данной работе и в [7] – действуют в реальных устройствах одновременно. В настоящее время мы не можем указать параметры (ток пучка, длина структуры, плотность плазмы и т.д.), при которых тот или иной механизм превалирует. Эта задача будет темой дальнейших исследований.

## 2. Механизм стохастизации

В отсутствие силы высокочастотного давления ( $\gamma=0$ ) уравнения (4), (10) с соответствующими граничными условиями описывают вакуумный ЛБВ-генератор. Аналитические и численные решения этой системы представлены в [10,11]. Поведение такой системы аналогично поведению вакуумной ЛОВ, исследованной в [12,13], и поведению гиротрона, исследованного в [14]. При постоянном малом коэффициенте обратной связи  $q$  по мере возрастания тока пучка  $I_b$  (увеличение безразмерной длины  $\zeta_{out} \sim I_b^{1/3}$ ) сначала возникает генерация монохроматического сигнала, затем возникает регулярная и, наконец, стохастическая автомодуляция выходного сигнала генератора. Общая картина поведения системы (4), (10) при  $\gamma=0$  представлена на плоскости параметров  $(q, \zeta_{out})$  (рис. 1, а.)

Отметим, что стохастическая автомодуляция возникает только при достаточно больших токах пучка, то есть при  $\zeta_{out} \geq 5 \div 6$ . Поэтому область значений  $\zeta_{out}$  на рисунке начинается с  $\zeta_{out}=8$ , где стохастическая автомодуляция присутствует при достаточно малых  $q$ .

Аналогичная область параметров для системы с  $\gamma=0.1$  приведена на рис. 1,б. Легко видеть, что порог самовозбуждения остается тем же, но область монохроматической генерации во втором случае существенно уже. Для объяснения такого влияния нелинейности плазмы на динамику системы рассмотрим кратко процесс стохастизации в вакуумном ЛБВ-генераторе.

**2.1. Механизм стохастизации вакуумного ЛБВ-генератора.** Нестационарные уравнения ЛБВ-усилителя содержат два семейства характеристик. Информация со входа усилителя передается на его выход частицами пучка и синхронной волной, имеющими скорости распространения  $v_0$  и  $v_g$ , соответственно. Поэтому значение выходного сигнала определяется значениями входного сигнала на отрезке времени  $\Delta t = L(v_0 - v_g)/(v_0 v_g)$ , где  $L$  - длина пространства взаимодействия. Если этот отрезок времени мал по сравнению со временем  $T$  прохождения сигнала по цепи обратной связи, то, казалось бы, его величиной можно пренебречь и считать, что выходной сигнал  $E_{out}(t)$  является некоторой функцией от входного сигнала  $E_{in}$  в момент времени  $t - L/v_g$  (или, с точностью до  $\Delta t$ ,  $t - L/v_0$ ). В безразмерных переменных  $\zeta, \tau$  интервалу  $\Delta t$  соответствует интервал  $\Delta \tau = \zeta_{out}$ . Включив  $\Delta t$  в общее время запаздывания  $\theta$ , запишем уравнение, описывающее динамику генератора, в виде

$$a(\tau + \theta, 0) = F(a(\tau, 0)). \quad (12)$$

Уравнение (12) представляет собой точечное отображение функции  $a(\tau, 0)$  через дискретные промежутки времени. Свойства такого отображения

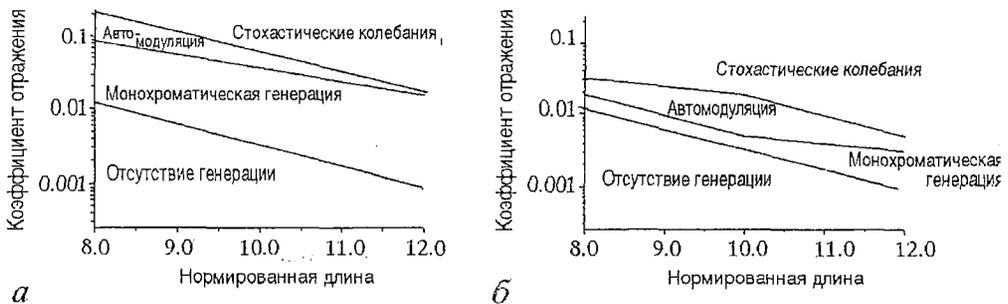


Рис. 1. Карта решений уравнений (4), (10) на плоскости параметров  $(q, \zeta_{out})$  при  $\gamma=0$  (а); при  $\gamma=1$  (б)

тождественны свойствам отображения  $x_{n+1}=F(x_n)$ . При изменении параметров функции  $F$  (ток пучка и коэффициент обратной связи) неподвижная точка отображения  $x^*$ , определяемая уравнением  $x^*=F(x^*)$ , может потерять устойчивость и возникнет периодическая автомодуляция, которая при дальнейшем изменении параметров через цепочку удвоений периода сменяется стохастической автомодуляцией – известный сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу [15].

Вернемся теперь к уравнениям (3), (10). Нетрудно видеть, что система уравнений допускает монохроматические решения вида

$$a(\tau, \zeta) = a_v(\zeta)e^{i\nu\tau}. \quad (13)$$

Если амплитуда  $a_v$  и частота  $\nu$  удовлетворяют граничным условиям (4), то функции вида (13) являются решениями рассматриваемой задачи и описывают монохроматический режим генерации, являющийся аналогом неподвижной точки отображения (12). Функция отображения  $F$  определяется связью между величинами амплитуд выходного и входного сигналов. Таким образом можно перейти от системы уравнений в частных производных к точечному отображению.

Существуют, однако, две трудности на этом пути. Во-первых, уравнения (3), (10) для решений вида (13) переходят в уравнения в полных производных, содержащих частоту  $\nu$  в качестве параметра. Это означает, что не существует единой функции отображения  $F$  для всех монохроматических решений. Во-вторых, функции отображения  $F$ , полученные численным решением уравнений для  $a_v(\zeta)$  при всех значениях  $\nu$ , при изменении параметров задачи  $\zeta_{out}$  и  $q$  меняются таким образом, что монохроматическое решение либо остается устойчивым, либо возникает только периодическая автомодуляция, не переходящая в стохастическую. Это находится в противоречии с описанным выше поведением системы (см. рис. 1, а). Следовательно, описанный переход от уравнений в частных производных к точечному отображению приводит к потере механизма возникновения стохастических решений.

Учтем теперь, что для вычисления значения выходного сигнала необходимо знание входного сигнала на малом, но конечном интервале времени  $\Delta\tau \ll \theta$ . Другими словами, учтем, что значение выходного сигнала  $a(\tau, \zeta_{out})$  является не функцией, как это предполагается в точечных отображениях, а функционалом от значения входного сигнала  $a(\tau, 0)$ . Предполагая, как и ранее, что цепь обратной связи линейна, мы приходим к функциональному отображению

$$a(\tau+\theta, 0) = \hat{F}_{\Delta\tau}\{a(\tau, 0)\}, \quad (14)$$

где  $\hat{F}_{\Delta\tau}$  – нелинейный функционал с носителем  $\Delta\tau$ . Функциональное отображение (14) – это просто сокращенная запись решений уравнений в частных производных с граничными условиями, описывающими цепь обратной связи.

При  $\Delta\tau \rightarrow 0$  отображение (14) переходит в точечное отображение (13). Поэтому динамическую систему (14) при  $\Delta\tau \ll \theta$  естественно назвать распределенной системой, близкой к дискретной [16].

В общем виде найти явный вид функционала  $\hat{F}_{\Delta\tau}$  невозможно, но в представляющем практический интерес случае малого коэффициента обратной связи ( $|q| \ll 1$ ) и  $\Delta\tau \ll \theta$  можно найти приближенное выражение для  $\hat{F}_{\Delta\tau}$ . Общие свойства решений, описывающих пучковую неустойчивость (инвариантность относительно начальной фазы, принцип причинности), в этом случае приводят к следующему выражению для  $\hat{F}_{\Delta\tau}$  [11]:

$$\hat{F}_{\Delta\tau}\{a(\tau)\} = F(|\hat{G}_{\Delta\tau}\{a(\tau)\}|) \exp(i \arg \hat{G}_{\Delta\tau}\{a(\tau)\}). \quad (15)$$

Здесь  $\hat{G}_{\Delta t}$  – линейный функционал, совпадающий с функцией Грина линеаризованных уравнений ЛБВ–усилителя,  $F$  – комплексная функция.

Сравнение функций  $a(\tau, 0)$ , полученных решением уравнений в частных производных и с помощью отображения (15), показало их хорошее качественное и количественное совпадение.

Решения вида (13) являются инвариантами отображения (14) с функционалом (15). При изменении параметров функции  $F$  решение (13) может потерять устойчивость и возникнут нарастающие во времени возмущения. Существуют два различных механизма потери устойчивости, которым соответствуют различные виды нарастающих возмущений. Первому механизму соответствуют нарастающие возмущения *амплитуды* решения при постоянной фазе, а второму – возмущения *фазы* при постоянной амплитуде. Будем называть эти механизмы потери устойчивости соответственно *амплитудным* и *фазовым*. Амплитудный механизм потери устойчивости является естественным обобщением на распределенные динамические системы механизма потери устойчивости неподвижной точки точечного отображения. Он определяется видом модуля функции  $F$  и слабо зависит от свойств функционала  $\hat{G}_{\Delta t}$ . Фазовый механизм, наоборот, слабо зависит от вида  $|F|$  и определяется амплитудно–частотной характеристикой линейного функционала и зависимостью фазы функции  $F$  от амплитуды  $a_n$ .

Двум механизмам потери устойчивости соответствуют различные сценарии возникновения хаоса в динамической системе (14). Для амплитудного механизма – это переход к хаосу через бесконечную цепочку бифуркаций удвоения периода автомодуляции. Фазовый механизм характеризуется переходом к хаосу через перемежаемость: участки квазирегулярного поведения решения  $a(\tau, 0)$  сменяются участками со случайным, хаотическим поведением. По мере роста параметра надкритичности доля участков с хаотическим поведением возрастает.

Динамическая система, описываемая отображением (14) с восстановленным по решениям уравнений (3), (10) при  $q=0$  функционалом (15), устойчива относительно амплитудного и неустойчива относительно фазового механизма потери устойчивости [11]. Этим же свойством обладают и полученные численно решения уравнений: при увеличении параметра надкритичности режим монохроматической генерации сменяется регулярной автомодуляцией, которая при дальнейшем росте параметра надкритичности переходит в стохастическую. Переход к стохастической автомодуляции имеет вид перемежающейся турбулентности. Такое совпадение свойств динамических систем, задаваемых функциональным отображением (14) и системой уравнений (3), (10), позволяет утверждать, что именно фазовый механизм неустойчивости ответственен за стохастизацию сигнала вакуумного ЛБВ–генератора.

Рассмотрим теперь, как влияет содержащее  $\gamma$  слагаемое в (10) на поведение системы. В ЛБВ–усилителе влияние этого члена на динамику взаимодействия пучка с волной существенно, если  $\gamma \geq 1$ . Если  $\gamma < 1$ , то слагаемое, содержащее  $\gamma$ , может быть опущено. Действительно, амплитуда насыщения неустойчивости  $|a_{\max}| \sim 1$ , а указанное слагаемое описывает отстройку фазовой скорости волны от резонансного значения. Поскольку инкремент неустойчивости вблизи своего максимума квадратично зависит от расстройки, последняя сказывается на зависимости амплитуды от длины только при  $\gamma \sim 1$ .

В генераторе роль этого слагаемого может проявиться и при существенно меньших значениях  $\gamma$ . Фазовый механизм стохастизации связан с наличием нелинейного набега фазы  $\Delta\phi(|a|^2)$  функции отображения  $F$  или, что то же самое, выходного сигнала  $a(\tau, \zeta_{\text{out}})$ . Третье слагаемое в (10) при  $\gamma < 1$  меняет существенно именно эту зависимость, не затрагивая зависимость  $|a(\zeta)|$ . Действительно,

дополнительный набег фазы, обусловленный нарушением точного синхронизма, линейно зависит от величины расстройки

$$\Delta\phi \approx \gamma \int_0^{\zeta_{\text{out}}} |a^2(\zeta)| d\zeta \quad (16)$$

и при достаточно большой длине области взаимодействия может быть порядка единицы даже при  $\gamma < 1$ .

Нелинейный набег фазы, связанный с нелинейной стадией взаимодействия пучка с волной, является основной причиной стохастизации сигнала ЛБВ-генератора. Поэтому добавочный набег фазы (16), обусловленный нелинейностью плазмы, влияет именно на механизм стохастизации и может сильно изменить пороговый ток возникновения хаотической автомодуляции и спектры генерации в этом режиме. То, что при малых  $\gamma$  именно добавочный набег фазы, а не изменение зависимости  $|a(\zeta)|$  влияет на процесс стохастизации, проверялось следующим образом. Граничное условие  $a(\tau, 0) = qa(\tau - \theta, \zeta_{\text{out}})$  заменялось на условие  $a(\tau, 0) = |qa(\tau - \theta, \zeta_{\text{out}})|$  и система, демонстрировавшая стохастическое поведение, быстро переходила в режим монохроматической генерации.

Таким образом, рассматриваемая нелинейность плазмы, имеющая вид простейшей нелинейной реактивности, в первую очередь влияет на механизм стохастизации сигнала ЛБВ-генератора, не меняя его энергетические характеристики. Отметим, что по мере роста параметра  $\gamma$ , описывающего чувствительность фазовой скорости волны замедляющей структуры к изменениям плотности плазмы в ней, начинают меняться и энергетические характеристики генератора или усилителя (см., например, [7]). Зависимость фазовой скорости от плотности плазмы увеличивается по мере роста последней. Ограничение случаем низкой плотности плазмы, возможно, является основной причиной, по которой в [8] не обнаружено существенного влияния пондеромоторных сил на работу плазмоннаполненной ЛОВ.

**2.2. Влияние нелинейности плазмы на спектральные характеристики стохастического излучения ЛБВ-генератора.** Как было сказано выше, стохастическая динамика ЛБВ-генератора имеет вид перемежающейся турбулентности и может быть описана как нерегулярные переходы между собственными частотами генератора. Этот результат был первоначально получен в [11] с использованием функционального отображения вида (14) и означает следующее. Собственные частоты  $\nu_n$  определяются условием

$$\nu_n \theta = 2\pi n + \arg F(|a_n|) + \arg g(\nu_n) + \alpha, \quad (17)$$

означающего, что полный набег фазы в цепи обратной связи кратен  $2\pi$ . Здесь  $g(\nu) = e^{-i\nu\tau} \hat{G}\{e^{i\nu\tau}\}$  – амплитудно-частотная характеристика линейного функционала  $\hat{G}$ ;  $\alpha$  – фаза коэффициента обратной связи  $q$ . Если система неоднородна в продольном направлении, то к  $\alpha$  следует добавить набег фазы  $\beta$ , связанный с изменением фазовой скорости волны при ее распространении вдоль структуры. Равенство абсолютных величин правой и левой частей (14) совместно с (17) позволяет найти как собственные частоты  $\nu_n$ , так и амплитуды  $a_n$  монохроматических решений. При  $\theta \gg \Delta t$  собственные частоты расположены почти эквидистантно, положение «решетки» частот определяется величиной  $\alpha + \beta$ .

При превышении параметром надкритичности порогового значения монохроматические решения теряют устойчивость и возникают нарастающие во времени возмущения. Спектр нарастающих возмущений состоит из частот, расположенных на расстоянии  $2\pi k/\theta$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots, K$  от частоты  $\nu_n$  потерявшего устойчивость монохроматического решения. Когда возмущение дорастает до достаточно большой величины, система после сильно нерегулярного переходного процесса оказывается вблизи монохроматического решения на одной из

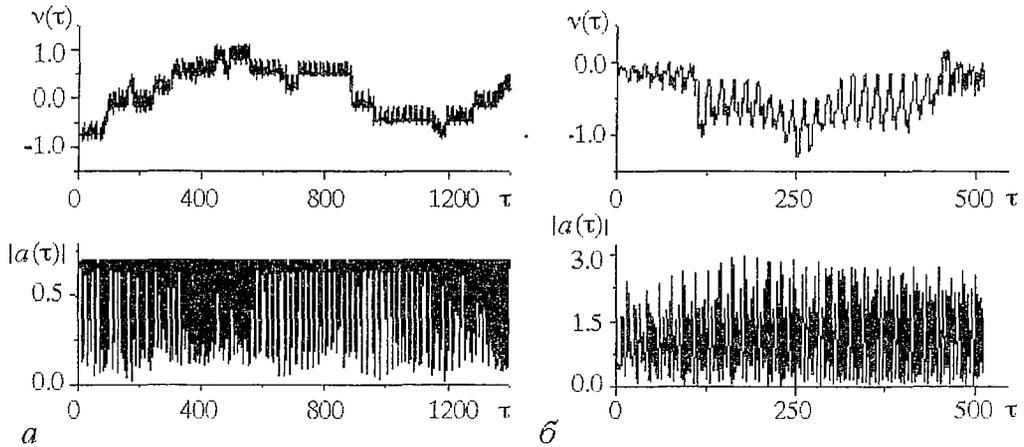


Рис. 2. Зависимости безразмерной мгновенной частоты  $v(\tau) \equiv d \arg a(\tau) / d\tau$  и амплитуды  $|a(\tau)|$  выходного сигнала от времени  $\tau$ , полученные итерацией функционального отображения (15) с квадратичной функцией  $F$  (а) и решением уравнений (4), (10) (б)

собственных частот и весь процесс повторяется. Наиболее наглядно такой сценарий представляется зависимостью мгновенной частоты сигнала от времени. В качестве примера на рис. 2, а изображены зависимости мгновенной частоты (верхняя кривая) и амплитуды (нижняя кривая) решения от времени, полученные с помощью отображения (14). В качестве функции  $F$  использовалась стандартная функция логистического отображения с таким значением параметра, при котором устойчива неподвижная точка соответствующего точечного отображения, то есть наблюдаемая неустойчивость связана только с фазовым механизмом.

Вблизи максимума коэффициента усиления  $\arg g(v)$  линейно зависит от  $v$  и неэквидистантность системы частот  $\nu_n$ , обусловлена только слагаемым  $\arg F(|a_n|)$  в (17). Как правило, в описанном выше движении системы эффективно принимают участие только несколько потерявших устойчивость монохроматических решений, для которых коэффициент усиления близок к максимальному. Например, на приведенном на рис. 2, а фрагменте реализации видно присутствие пяти таких решений. При  $\Delta\tau \ll \theta$  расстояние между соответствующими им частотами  $\nu_n$  мало. Мало и различие между амплитудами  $|a_n|$ . Последнее же означает, что неэквидистантность частот  $\nu_n$  слабо проявляется в результирующем спектре движения системы и даже в сильно стохастическом режиме собственные частоты сильно выделены. В качестве примера на рис. 3, а представлен спектр решения, изображенного на рис. 2, а. Линейчатый вид спектра объясняется тем, что в использованной модели неэквидистантность собственных частот генератора мала. Поэтому колебания вблизи различных частот имеют разную форму, но близкие периоды. Кроме того, при малом превышении порога хаотизации (рис. 2, а соответствует именно этому случаю) система довольно длительное время находится вблизи одной из собственных частот.

Если изменить значение набега фазы  $\beta$  в (17), то это никак не скажется на характере развития неустойчивости, на величине порогового значения параметра надкритичности и на расстоянии между собственными частотами, но положение собственных частот изменится: вся «решетка» частот сместится как целое. Поэтому изменение неоднородности будет приводить к смещению спектра сигнала как целого.

В рассматриваемой задаче неоднородность создается самой волной и  $\beta$  в (17) определяется набегом фазы  $\Delta\phi(|a|^2)$  (16), а именно,  $\beta = \Delta\phi(|a|^2)$ . Для каждого монохроматического режима характерно свое продольное распределение амплитуды поля и, следовательно, своя неоднородность плазмы. Поскольку  $\Delta\phi(|a|^2)$

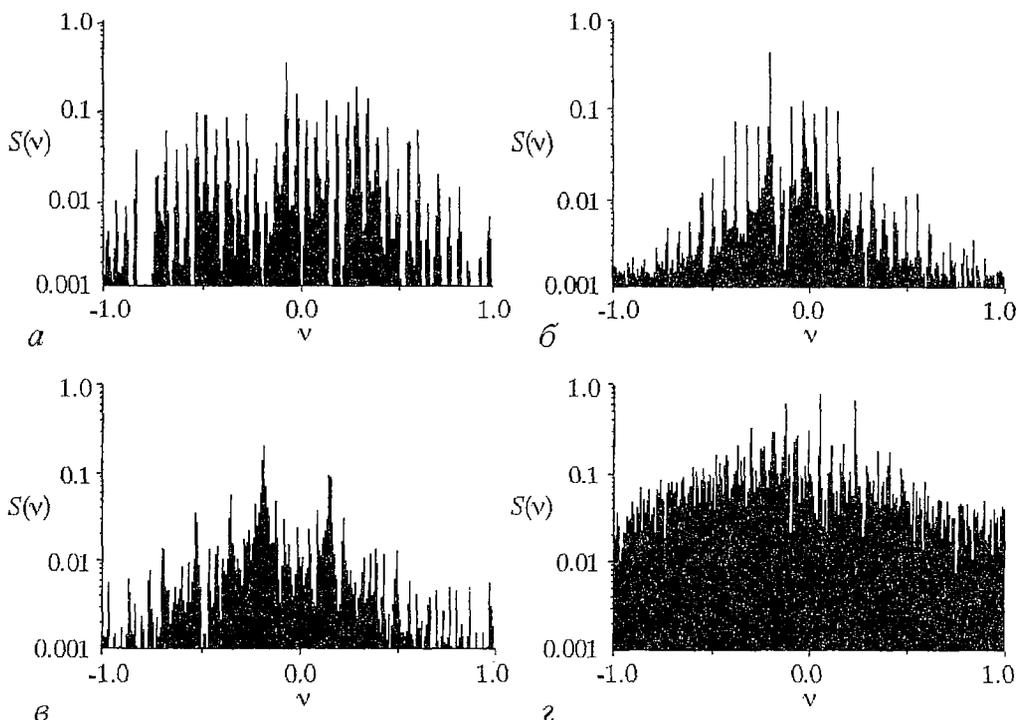


Рис. 3. Спектры сигналов: *a* – изображенного на рис. 2, *a*; *б-г* – полученных решением уравнений (4), (10) при  $\gamma=0, 0.08$  и  $0.12$  соответственно. Амплитуды спектральных компонент  $S(v)$  представлены в логарифмическом масштабе

определяется интегральным распределением амплитуды вдоль системы, то даже малая разница в зависимостях  $|a_n(\zeta)|$  при  $\zeta_{out} \gg 1$  может привести к значительному (порядка единицы) изменению  $\Delta\phi$ .

При описанных выше движениях системы как переходах от одного монохроматического решения к другому меняется и положение доминирующих спектральных компонент. Поэтому спектр достаточно длинной реализации сигнала, содержащей большое число переходов с одной собственной частоты на другую, можно представить как сумму сдвинутых друг относительно друга спектров вида изображенного на рис. 3, *a*. Если сдвигка таких спектров достаточно велика (разница в величинах  $\beta=\Delta\phi$  для разных монохроматических решений порядка 1), то выделенные частоты отсутствуют в результирующем спектре. Таким образом, по мере роста нелинейного набега фазы  $\Delta\phi$ , определяемого формулой (16), происходит сглаживание спектра стохастического сигнала. Эту динамику демонстрируют рис. 3, *б-г*, на которых представлено изменение спектров стохастических решений уравнений (4), (11) при росте параметра  $\gamma$  и неизменных других параметрах задачи.

То, что возникновение стохастической автомодуляции в системе, описываемой уравнениями (4), (11), связано именно с фазовым механизмом неустойчивости, как и в модельной динамической системе (14), подтверждается приведенными на рис. 2, *a* зависимостями мгновенной частоты  $d \arg a(\zeta_{out}, \tau) / d\tau$  и амплитуды  $|a(\zeta_{out}, \tau)|$  выходного сигнала от времени. На верхнем рисунке отчетливо видно, что мгновенная частота колеблется в разные моменты времени относительно различных средних значений, которые совпадают с собственными частотами генератора, и совершает нерегулярные переходы от одной собственной частоты к другой.

### 3. Обсуждение результатов

Представленная простейшая математическая модель описывает ЛБВ–генератор с плазмонаполненной замедляющей структурой. В модели учтено взаимное влияние магнитозвуковых колебаний, вызванных радиальной неоднородностью полей собственных волн структуры, и возбуждаемых пучком высокочастотных волн. В рамках сделанных предположений удалось исключить распространяющиеся возмущения плазмы, сделав локальной связь амплитуды волны с плотностью плазмы, и описать изменения в процессе возбуждения волны пучком введением только одного добавочного слагаемого – реактивной нелинейности. Степень влияния возмущений плотности плазмы на процесс возбуждения волны определяется одним параметром  $\gamma$ , характеризующим чувствительность фазовой скорости возбужденной волны к величине плотности плазмы.

Несмотря на ряд сделанных ограничений, полученные результаты качественно согласуются с рядом экспериментальных данных. В первую очередь это относится к спектральным характеристикам генерируемого сигнала. В работах [4,18] приведены спектры стохастического сигнала плазмонаполненных ЛБВ–генераторов, которые отличаются сильной однородностью от спектров аналогичных вакуумных устройств. Вторым экспериментальным фактом, согласующимся с приведенной теорией, является наличие развитых низкочастотных колебаний в плазме замедляющих структур [4]. Частотный диапазон таких колебаний меняется в зависимости от мощности СВЧ–излучения: от десятков кГц при относительно малых мощностях до десятков МГц при больших мощностях. Первый диапазон хорошо согласуется с ионно–звуковыми колебаниями, второй – с магнитозвуковыми. Проведенные в последнее время в Институте плазменной электроники (Харьков) детальные исследования<sup>2</sup> показали, что  $\gamma$ –быстрые изменения плотности плазмы (длительностью несколько микросекунд и меньше) характеризуются своим одновременным появлением вблизи входного и выходного торцов структуры, что может служить косвенным подтверждением локального характера связи таких вариаций плотности с СВЧ–полями и отсутствием распространяющихся низкочастотных плазменных волн.

*Работа выполнена при поддержке Украинского научно–технического центра (проект 256), NATO ISCL Grant № HTECHLG951541, DoD MURI program (Grant № AFOSR F496209510358).*

#### Библиографический список

1. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой // ДАН СССР. 1949. Т. 69, № 4. С. 555. Bohm D., Gross E.P. Theory of plasma oscillations // Phys. Rev. 1949. Vol. 75, № 12. P.1851.
2. Carmel Y., Lou W.R., Antonsen T.M. Relativistic plasma microwave electronics: Studies of high–power plasma–filled backward oscillators // Phys. Fluids B. 1992. Vol. 4. С. 2286.
3. Шкварунец А.Г., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Широкополосный релятивистский плазменный СВЧ–генератор // Физика плазмы. 1994. Т. 20, №7–8. С. 682.
4. Блюх Ю.П., Корнилов Е.А., Митин Л.А., Файнберг Я.Б. Экспериментальные исследования возбуждения мощных СВЧ–колебаний электронным пучком в гибридной замедляющей структуре с плазменным заполнением // Физика Плазмы. 1994. Т. 20, № 9. С. 767.
5. Zavjalov M.A., Mitin L.A., Perevodchikov V.I. et al. Powerful wideband amplifier based on hybrid plasma–cavity slow–wave structure // IEEE Trans. Plasma Sci. 1994. Vol. 22. P. 600.

<sup>2</sup> Экспериментальные исследования проведены в лабораториях Е.А.Корнилова и Н.М.Землянского.

6. Гапонов А.В., Миллер М.А. Об использовании движущихся высокочастотных потенциальных ям для ускорения заряженных частиц // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, вып. 3. С. 715.
7. Bliokh Yu.P., Fainberg Ya.B., Lyubarsky M.G., Podobinsky V.O. Self-consistent plasma motion as a possible mechanism of the power limitation and the pulse shortening in the plasma-filled TWT devices // SPIE Proc. 1997. Vol. 3158, Intense Microwave Pulses V. P. 182.
8. Miller S.M., Antonsen T.M., Jr., Levush B. Ponderomotive effects in plasma-filled backward-wave oscillators // IEEE-PS. 1998. Vol. 26. P. 680.
9. Granatstein V.L., Carmel Y, Nusinovich G.S. Chaotic oscillations enhanced by magnetosonic waves in plasma-filled traveling-wave tubes // Physics of Plasmas. 1998. Vol. 5, № 11. P. 4061.
10. Гинзбург Н.С., Сергеев А.С. Динамика ЛСЭ генераторов с резонаторами произвольной добротности // ЖТФ. 1991. Т. 61, № 6. С. 133.
11. Блюх Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г. и др. Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1-2. С. 34.
12. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв.вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.
13. Levush B., Antonsen T.M., Jr., Bromborsky A., Lou W.-R., Carmel Y. Theory of relativistic backward-wave oscillators with end reflections // IEEE Trans. Plasma Sci. 1992. Vol. 20. P. 263.
14. Ginzburg, Nusinovich G.S, Zavolsky N.A. Theory of non-stationary processes in gyrotrons with low Q resonators // Int. J. Electron. 1986. Vol. f 61. P. 881.
15. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J.Stat.Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 252.
16. Bliokh Yu.P., Lyubarsky M.G., Podobinsky V.O. About chaotization mechanisms of the distributed dynamical systems which are close to discrete // Discrete Dynamics in Nature and Soc. 1997. Vol. 1. P. 233.
17. Mitin L.A., Perevodchikov V.I., Shapiro A.L. Beam-plasma generators of stochastic microwave oscillations used for plasma heating in fusion and plasma-chemistry devices and ionospheric investigations // Intense Microwave Pulses IV, SPIE 1996. Vol. 2843. P. 208.

Радиоастрономический институт  
НАН Украины

Поступила в редакцию 29.12.98  
после переработки 12.05.99

Институт плазменной электроники  
и новых методов ускорения НИЦ «ХФТИ»  
Харьковский государственный университет

## INFLUENCE OF PLASMA NONLINEARITY ON PROCESS OF RADIATION STOCHASTIZATION IN BEAM-PLASMA MICROWAVE OSCILLATORS

Yu.P. Bliokh, M.G. Lyubarsky, G.S. Nusinovich, V.O. Podobinsky

A plasma-filled traveling-wave tube with a feedback is considered. The effect of the transverse component of the ponderomotive force on plasma density causes an additional phase shift of the wave which in a system with feedback significantly decreases the threshold for appearance of stochastic oscillations.



*Блюх Юрий Павлович* – 1946 года рождения. Окончил физико-технический факультет Харьковского государственного университета (1970). Начальник лаборатории Института плазменной электроники и новых методов ускорения Национального научного центра «ХФТИ». Область научных интересов – взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой, хаос в пучково-плазменных системах. Имеет более 90 публикаций в отечественных и зарубежных журналах. E-mail: bliokh@kipt.kharkov.ua.



*Любарский Михаил Григорьевич* – 1947 года рождения. Окончил механико-математический факультет Харьковского государственного университета (1970), профессором которого является в настоящее время. Область научных интересов – теория дифференциальных уравнений и ее приложения к задачам СВЧ-электроники. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



*Нусинович Григорий Семенович* – 1946 года рождения. Окончил Горьковский государственный университет (1968). Работал в НИИ Радиофизики (Горький). Научный сотрудник и руководитель группы Института прикладной физики АН СССР (с 1977 по 1990), занимался разработкой мощных миллиметровых и субмиллиметровых гиротронов. В 1991 году эмигрировал в США и поступил на работу в Лабораторию плазменных исследований (Мерилендский университет). В настоящее время его научные интересы включают изучение различных источников мощного СВЧ-излучения. Является консультантом Sc. Applications Int. Corp., Phys Sc.m Corp., Omega-P, Inc.



*Подобинский Виталий Олегович* – 1955 года рождения. Окончил физико-технический факультет Харьковского государственного университета (1981). Старший научный сотрудник Института плазменной электроники и новых методов ускорения Национального научного центра «ХФТИ». Область научных интересов – плазменная электроника, взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. Имеет около 40 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



## АВТОСТОХАСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ СВЧ

*Р. В. Беляев, Э. В. Кальянов, В. Я. Кислов, Б. Е. Кяргинский, М. Н. Лебедев*

Приведены уравнения системы связанных генераторов, учитывающие инерционность и запаздывание в обратной связи в каждом парциальном генераторе, а также запаздывание в элементах связи между генераторами. Приведены результаты численного анализа одного и двух генераторов при емкостной связи. Показано, что хаотические колебания возбуждаются при определенных величинах запаздывания, причем в связанной системе двух генераторов хаотизация колебаний более устойчива и менее критична к параметрам, чем в случае одиночного генератора. Экспериментальные исследования автостохастических систем показали, что в системе двух связанных транзисторных генераторов можно получить в десятисантиметровом диапазоне длин волн автостохастические колебания, подобные шумовым.

### Введение

Системы связанных генераторов исследовались многими авторами. Ранние исследования посвящались в основном изучению явления взаимной синхронизации генераторов с целью повышения мощности синхронных колебаний. При этом изучалась специфика синхронизации различных типов генераторов. С открытием явления динамического хаоса в сложных и простых системах, описываемых нелинейными детерминированными уравнениями, и бурным развитием вычислительной техники, началось интенсивное изучение физических процессов в хаотических системах, в том числе, и в связанных генераторах [1–11].

Известные исследования связанных автостохастических систем носят в основном характер изучения физики процессов, а эксперименты проводятся на низких частотах. Достижения твердотельной электроники в продвижении транзисторов в область сверхвысоких частот определили необходимость исследования возможности создания широкополосных автостохастических транзисторных генераторов на сверхвысоких частотах. Для этого представляется целесообразным исследование высокочастотных связанных систем.

В настоящей работе исследуются связанные генераторы, обладающие спецификой, присущей сверхвысокочастотным генераторам: а именно, запаздыванием и инерционностью. На примере одного и двух генераторов численно анализируется система уравнений таких связанных генераторов. В качестве иллюстрации возможных применений теории приводятся результаты экспериментальных исследований автостохастических транзисторных генераторов.

## 1. Математическая модель

Учитывая уравнения для одного генератора с запаздыванием и инерционностью [12], можно представить в общем виде уравнения многих связанных автоколебательных систем с запаздыванием и инерционностью с учетом запаздывания по связи:

$$d^2 x_i / dt^2 + (\omega_i / Q_i) dx_i / dt + \omega_i^2 x_i = (\omega_i^2 / \sigma_i) d/dt [F_i(y_i)] + \omega_i^2 \sum_{j, j \neq i} \{C_{ji} \varphi_j [x_j(t - T_{ji}), d/dt [x_j(t - T_{ji})], d^2/dt^2 [x_j(t - T_{ji})]\}, \quad (1a)$$

$$\delta_i dy_i / dt + y_i = x_i(t_i - \tau_i), \quad (1b)$$

где  $i, j=1, 2, 3, \dots, k$ ,  $k$  – число парциальных генераторов, причем каждый парциальный генератор состоит из замкнутых в кольцо нелинейного элемента, фильтра первого порядка, линии задержки, фильтра второго порядка и дифференцирующего элемента;  $F_i(y_i)$  – характеристика нелинейного элемента  $i$ -го парциального генератора;  $\delta_i$  – постоянная времени фильтра первого порядка;  $\tau_i$  – запаздывание в цепи обратной связи;  $\omega_i$ ,  $Q_i$  – резонансная частота и добротность фильтра второго порядка;  $\sigma_i$  – постоянная времени дифференцирующего элемента;  $\varphi_j$  – функция, определяющая связь между парциальными генераторами;  $C_{ji}$  – коэффициент связи;  $T_{ji}$  – время запаздывания по связи.

Наибольший интерес представляет емкостная связь, так как этот тип связи легче обеспечить в эксперименте на сверхвысоких частотах. Рассмотрим случай емкостной связи, аппроксимируя характеристику нелинейных элементов с помощью унимодальной функции

$$F_i(y_i) = G_i y_i^{m_i} (1 + y_i)^{-n_i}, \quad (2)$$

где  $G_i$ ,  $m_i$ ,  $n_i$  – постоянные коэффициенты, определяющие усиление в кольце парциального генератора (параметр усиления  $G_i$ ) и нелинейность (параметры  $m_i$ ,  $n_i$ ). Параметр нелинейности  $n_i$  определяет крутизну падающего участка характеристики. При  $m_i=1$  характеристика, описываемая соотношением (2), обеспечивает мягкое возбуждение колебаний в парциальном генераторе, а при  $m_i > 1$  – жесткое.

Полагая в системе (1)  $G_i = \sigma_i B_i$  и учитывая (2) при условии, что  $C_{ji}$  – коэффициент емкостной связи, получим

$$\ddot{x}_i + (\omega_i / Q_i) \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \omega_i^2 \{B_i [m_i - (m_i - n_i) y_i^{m_i}] [y_i^{m_i - 1} / \delta_i (1 + y_i^{m_i})^2] [x_i(t - \tau_i) - y_i] + \sum_{j, j \neq i} C_{ji} x_j(t - T_{ji})\}, \quad (3a)$$

$$\delta_i \dot{y}_i + y_i = x_i(t_i - \tau_i), \quad (3b)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ .

Будем считать, что парциальные генераторы различаются лишь значениями собственных частот колебательных систем и задержек, а остальные параметры одинаковые, так что  $C_{ji} = C$ ,  $Q_i = Q$ ,  $B_i = B$ ,  $n_i = n$ ,  $\delta_i = \delta$  (при  $j, i=1, 2$ ). При этом предполагается, что имеют место мягкие режимы возбуждения колебаний, то есть  $m_i=1$ . При этих условиях, вводя новую переменную, а также простую замену переменных, запишем уравнения для одного и двух генераторов в форме, удобной для расчетов и анализа.

Для одного генератора получим следующие уравнения:

$$\dot{x} = y, \quad (4a)$$

$$\dot{y} = -(\omega_1/Q)y - \omega_1 x^2 + \omega_1^2 \{B[1 - (1-n)x^n][x(t-\tau) - z]/[\delta(1+x^n)^2]\}, \quad (4б)$$

$$\dot{z} = [x(t-\tau) - z]\delta^{-1}. \quad (4в)$$

Для системы двух связанных генераторов получим

$$\dot{x}_1 = y_1, \quad (5a)$$

$$\dot{y}_1 = -(\omega_1/Q)y_1 - \omega_1 x_1^2 + \omega_1^2 \{B[1 - (1-n)x_1^n][x_1(t-\tau_1) - z_1]/[\delta(1+x_1^n)^2] + Cx_2(t-T_{21})\}, \quad (5б)$$

$$\dot{z}_1 = [x_1(t-\tau_1) - z_1]\delta^{-1}, \quad (5в)$$

$$\dot{x}_2 = y_2, \quad (5г)$$

$$\dot{y}_2 = -(\omega_2/Q)y_2 - \omega_2 x_2^2 + \omega_2^2 \{B[1 - (1-n)x_2^n][x_2(t-\tau_2) - z_2]/[\delta(1+x_2^n)^2] + Cx_1(t-T_{12})\}, \quad (5д)$$

$$\dot{z}_2 = [x_2(t-\tau_2) - z_2]\delta^{-1}. \quad (5е)$$

Аналогично можно записать уравнения для расчета большего числа (трех, четырех, пяти и т.д.) связанных генераторов.

## 2. Результаты численного анализа

При численном анализе уравнений, описывающих связанные генераторы с запаздыванием, проводились расчеты реализаций, фазовых портретов, спектров мощности и бифуркационных диаграмм. При этом использовались программы, описанные в [13], но модернизированные на языке Бейсик применительно к решению уравнений с запаздывающим аргументом. При расчетах использовались как обычный метод Рунге – Кутты 4–го порядка, так и его модификация – метод Рунге – Кутты – Мерсона 4–го порядка [14]. Результаты расчетов по обоим методам практически не отличаются. Однако, поскольку метод Рунге – Кутты – Мерсона менее распространен, для большей простоты воспроизведения полученных результатов в работе приводятся результаты, полученные методом Рунге – Кутты.

Изменение характера колебательного процесса при изменении определенного параметра удобно отображать бифуркационными диаграммами, показывающими разброс (регулярный или хаотический) максимальных значений колебательного процесса. Однако, при уменьшении шага интегрирования с целью повышения точности счета число точек на бифуркационной диаграмме уменьшается, что связано с уменьшением числа экстремальных точек, характеризующих колебательный процесс: число последних тем меньше, чем меньше шаг. Это затрудняет идентификацию характера колебаний, особенно при хаотическом режиме. Поэтому для характерных значений изменяемого параметра диаграммы целесообразно приводить аттракторы колебаний или спектры мощности. Наглядность спектров мощности, а зачастую также реализаций и аттракторов, больше, чем бифуркационных диаграмм. Бифуркационные диаграммы облегчают выбор характерных значений параметров, для которых следует рассчитывать аттракторы и спектры мощности.

Прежде чем перейти к анализу связанных генераторов, описываемых уравнениями (5), целесообразно отметить особенности работы одной автоколебательной системы, описываемой уравнениями (4), так как переход к хаосу в генераторе с запаздыванием и инерционностью не описывается известными простыми сценариями. Существенное влияние оказывает величина запаздывания.

На рис. 1 приведены бифуркационные диаграммы применительно к одному генератору. Они иллюстрируют изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$  в зависимости от параметра усиления при относительно малом (рис. 1, а,  $\tau=1$ ) и большом (рис. 1, б,  $\tau=6$ ) запаздываниях и следующих значениях остальных параметров:  $Q=4$ ,  $\delta=0.1$ ,  $\omega_1=1$ ,  $n=4$ . Начальные условия выбраны равными  $x(0)=y(0)=z(0)=x(0-\tau)=0.01$  при шаге интегрирования по времени, равном 0.025. Видно, что в обоих случаях существуют лишь регулярные колебания, причем при большем запаздывании, как это ни парадоксально, наблюдаются более простые движения (однотактные), тогда как при  $\tau=1$  по мере увеличения параметра усиления происходит переход к трехтактным колебаниям. Как выяснено, это обусловлено тем, что при изменении запаздывания, когда остальные параметры постоянны, имеет место периодическое изменение характера колебаний. Расчеты показывают, в частности, что диаграмма, подобная показанной на рис.1, б, имеет место при отсутствии запаздывания ( $\tau=0$ ): возбуждение однотактных колебаний происходит при  $B=0.6$  и этот режим колебаний сохраняется при увеличении параметра усиления до значения  $B=6$ . При увеличении запаздывания до значения  $\tau=0.5$  возбуждение однотактных колебаний происходит при  $B=0.7$ , а при  $B=5.6$  наблюдается бифуркация перехода к трехтактным колебаниям, аналогично тому, как это имеет место в случае  $\tau=1$  при  $B=3.1$ . При дальнейшем увеличении  $\tau$  пусковое значение параметра  $B$  повышается, а его бифуркационное значение перехода к трехтактным движениям снижается. При этом уменьшается интервал значений  $B$  между бифуркацией Хопфа и бифуркацией утроения периода колебаний так, что в случае  $\tau=2$  возбуждение колебаний происходит сразу с трехоборотным предельным циклом при достижении параметром усиления величины  $B=2.2$ , а при  $B>4.4$  происходит хаотизация движений. Это значение запаздывания ( $\tau=2$ ) является, при выбранных величинах остальных параметров, оптимальным с позиций возбуждения хаотических колебаний, хотя при большей величине запаздывания возрастает число степеней свободы. Однако, при дальнейшем увеличении задержки (уже при  $\tau=2.4$ ) снова происходит возбуждение только регулярных колебаний при изменении параметра усиления в интервале  $B \in [0, 6]$ . При  $\tau=5$  бифуркационная диаграмма становится подобной показанной на рис. 1, а.

Расчеты показывают, что интервал значений параметра усиления, которому соответствуют колебания с однооборотным предельным циклом (при  $\tau < 2$ ), закономерно уменьшается с увеличением задержки. При этом увеличивается пусковое значение параметра  $B$ . Так, при  $\tau=0.5$  интервал между пусковым значением параметра усиления и бифуркацией утроения периода равен  $B \in [0.7, 5.6]$ , а при  $\tau=1, 1.25$  и  $1.5$  этот интервал принимает соответственно значения  $B \in [1, 3]$ ,  $B \in [1.2, 2.1]$  и  $B \in [1.4, 1.5]$ .

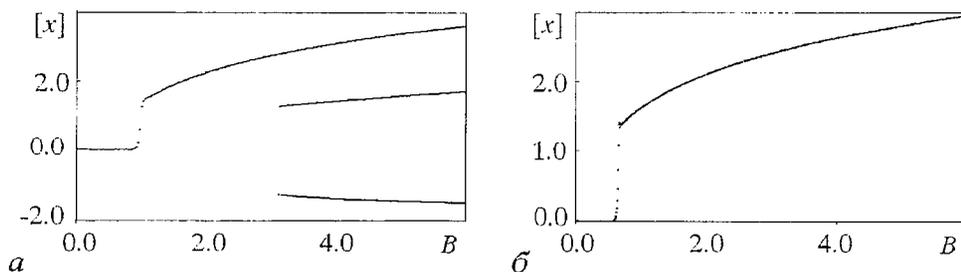


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма изменения максимальных значений колебательного процесса в одиночном генераторе в зависимости от параметра усиления: а – при малом запаздывании  $\tau=1$ ; б – при большом запаздывании  $\tau=6$

На рис. 2, *a–г* приведены аттракторы колебаний, а на рис. 2, *д–з* соответствующие спектры мощности для характерных режимов работы. Начальные условия и шаг интегрирования как на рис. 1. Аттракторы получены в интервале времени  $t \in [200, 450]$ . Простой предельный цикл рис. 2, *a* соответствует однотактным колебаниям, а рис. 2, *б* – трехтактным. Рис. 2, *в* отображает удвоение периода трехтактных колебаний, а рис. 2, *г* – хаотизацию колебательного процесса. Эти процессы иллюстрируются также соответствующими спектрами колебаний.

Следует отметить, что при изменении частоты фильтра второго порядка количественные значения параметра  $B$ , соответствующие бифуркациям колебаний, изменяются, но характер зависимостей сохраняется. Естественно, что на бифуркационные величины параметра усиления влияют также и величины других параметров. В связи с этим при анализе связанных систем наряду с аттракторами, возникающими при взаимодействии колебаний, целесообразно для наглядности

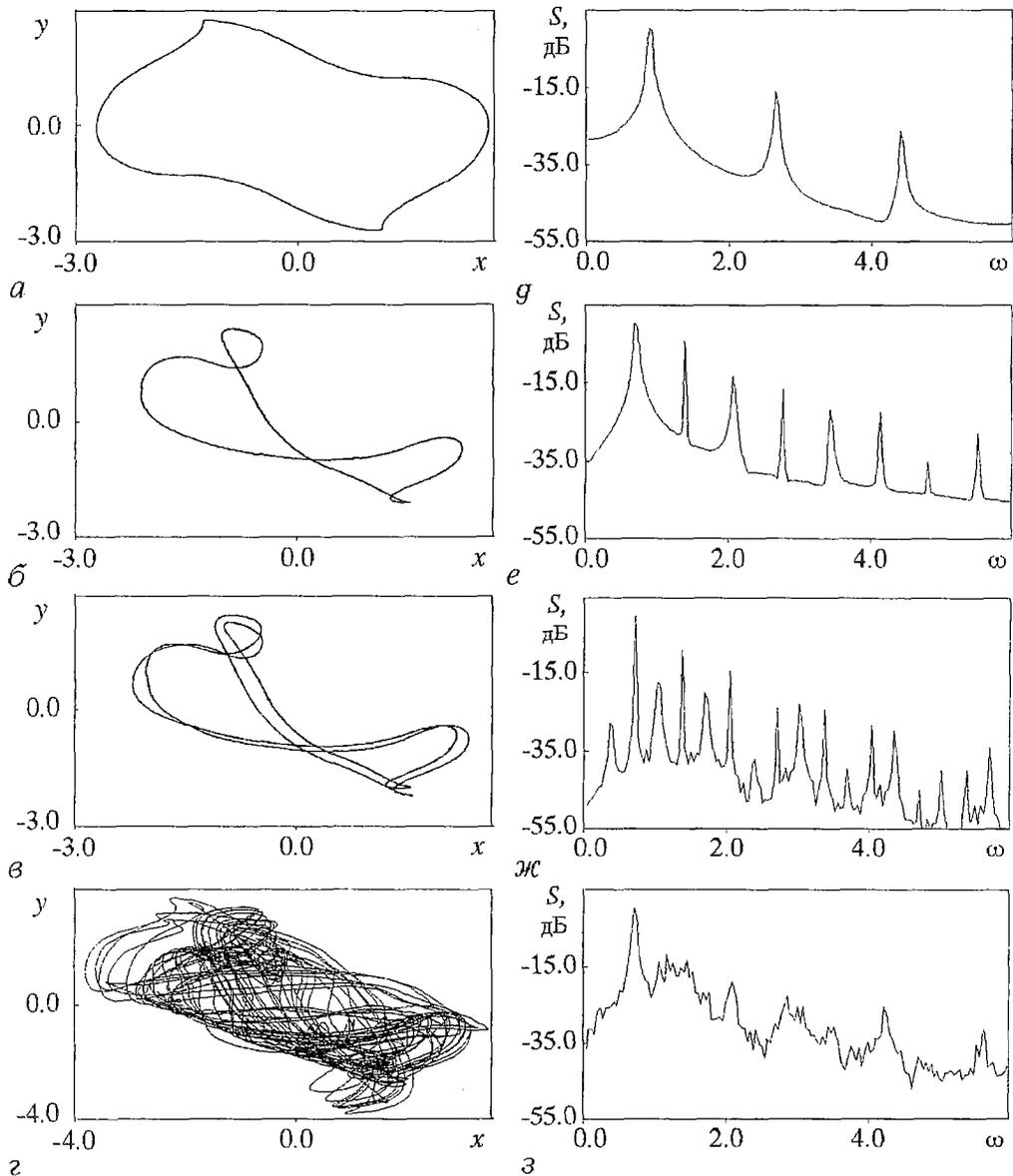


Рис. 2. Аттракторы колебаний (*a–г*) и соответствующие им спектры мощности (*д–з*) при различных режимах работы одиночного генератора: *a, д* –  $\tau=1, B=3$ ; *б, е* –  $\tau=2, B=3.5$ ; *в, ж* –  $\tau=2, B=3.58$ ; *г, з* –  $\tau=2, B=4.8$

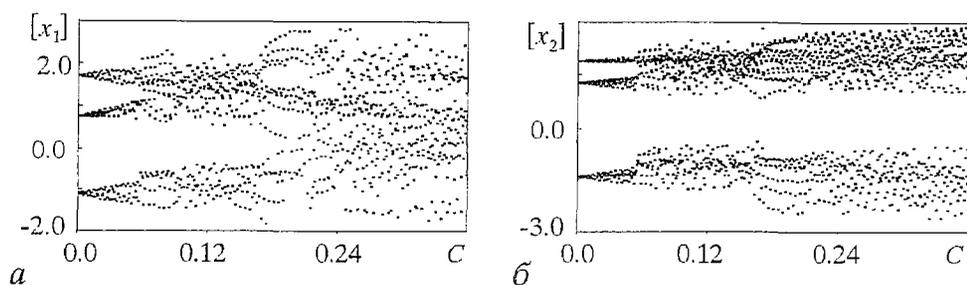


Рис. 3. Изменение максимальных значений колебательных процессов в первом (а) и втором (б) генераторах в зависимости от параметра связи. При этом  $B=2.5$ ,  $\omega_1=1$ ,  $\tau_1=T_{12}=2$ ,  $\omega_2=1.3$ ,  $\tau_2=T_{21}=1.5$

приводить аттракторы (или спектры) для парциальных генераторов при их автономной работе.

На рис. 3 представлены бифуркационные диаграммы при совместной работе двух генераторов. На нем показано изменение максимальных значений колебательных процессов в первом  $[x_1]$  и втором  $[x_2]$  генераторах в зависимости от параметра связи  $C$ . При этом параметры  $n$ ,  $\delta$  и  $Q$  связанной системы такие же, как на рис. 1. Расчеты проводились при начальных условиях  $x_i(0)=y_i(0)=z_i(0)=x_i(0-\tau_i)=x_i(0-T_{ij})=0.01$  ( $i,j=1,2$ ). Для увеличения числа точек, соответствующих максимальным значениям колебательных процессов, шаг интегрирования по времени выбран, в отличие от рис. 1, равным 0.05.

Как видно, при увеличении параметра связи происходит разрушение трехтактных движений, имеющих место при  $C=0$  и отображаемых лишь тремя

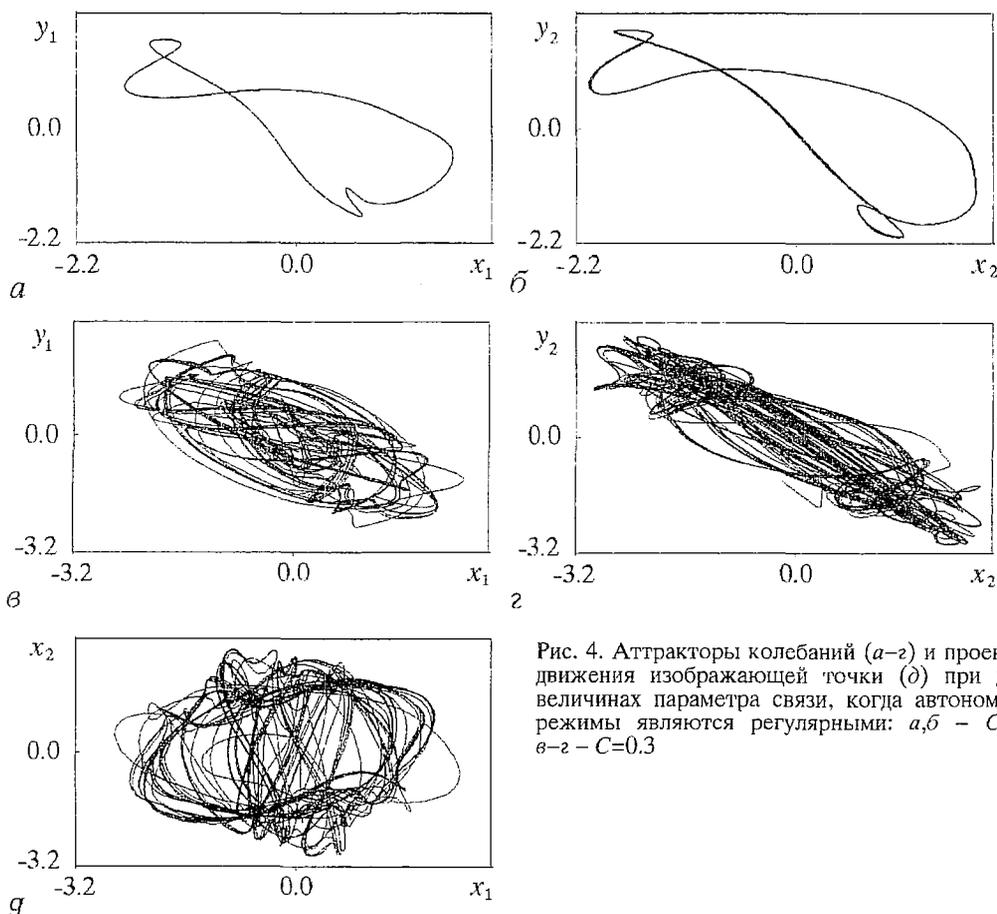


Рис. 4. Аттракторы колебаний (а-г) и проекция движения изображающей точки (д) при двух величинах параметра связи, когда автономные режимы являются регулярными: а,б -  $C=0$ ; в-г -  $C=0.3$

точками на диаграмме. Колебания усложняются и соответственно появляется большое число точек при каждом значении параметра связи. При этом характер изменения  $[x_1]$  и  $[x_2]$  различен: при  $C > 0.18$  на рис. 3, а образуется одна широкая область разброса (случайного или со сложным законом изменения) максимальных значений колебательного процесса, а на рис. 3, б сохраняются две области разброса точек.

Регулярные (при  $C=0$ ) и хаотические колебания (при  $C=0.3$ ) в связанной системе двух генераторов иллюстрируются аттракторами колебаний, показанными на рис. 4, а-г. На рис. 4, д показано движение изображающей точки в проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$  для случая взаимодействия связанных генераторов. Аттракторы и проекция движения изображающей точки получены в интервале времени  $t \in [0, 250]$ . Значения всех параметров (за исключением  $C$ ) те же, что и на рис. 3. Начальные условия определялись значениями переменных (с точностью до шестого знака) при соответствующих величинах параметра связи на диаграммах рис. 3.

Аттракторы рис. 4, а, б отображают трехтактные колебания в исходном (автономном) режиме работы парциальных автоколебательных систем. В этом случае аттракторы имеют вид предельных циклов. В случае рис. 4, в, г аттракторы свидетельствуют о хаотическом характере автоколебаний. При этом колебания  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  не синхронизированы, о чем свидетельствует хаотический вид проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$  траектории движения изображающей точки в фазовом пространстве.

В практическом плане интересна возможность выравнивания спектра мощности, то есть улучшения спектральных свойств за счет уменьшения регулярных составляющих в спектре колебаний, при использовании связанных автостохастических систем с хаотическими автономными колебаниями. Как показывают расчеты, бифуркационные диаграммы не дают в этом случае наглядного представления об изменении характера колебаний: распределение точек остается случайным (или со сложным законом распределения) во всем интервале изменения параметра связи, что свидетельствует, по крайней мере, о сохранении, в основном, режима динамического хаоса в рассматриваемом интервале изменения параметра связи. Спектры мощности наглядно показывают изменение характера колебаний. На рис. 5 представлены спектры мощности для

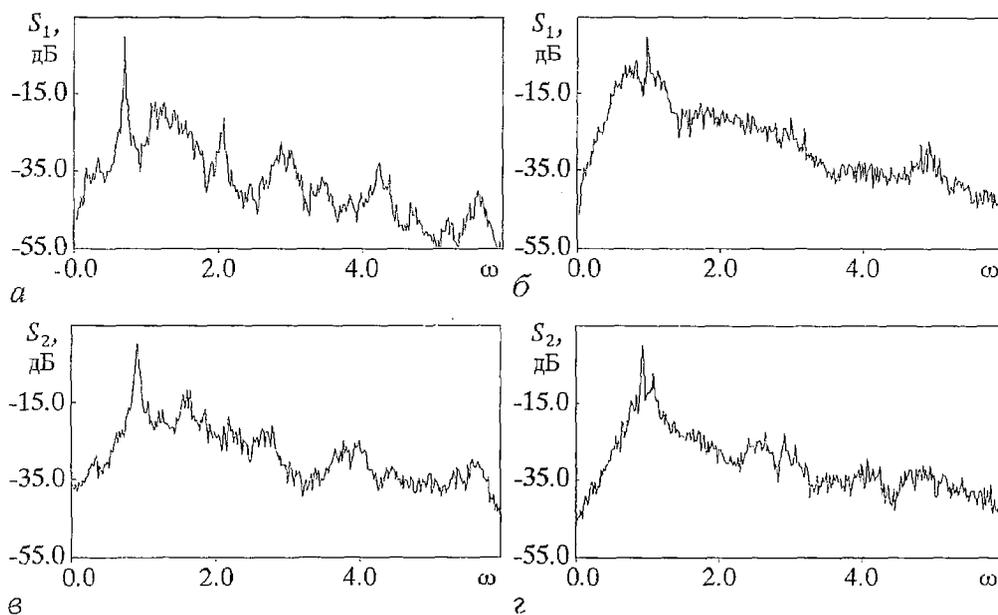


Рис. 5. Спектры мощности при отсутствии связи между генераторами (а, в) и при параметре связи  $C=0.3$  (б, г) для хаотических автономных режимов

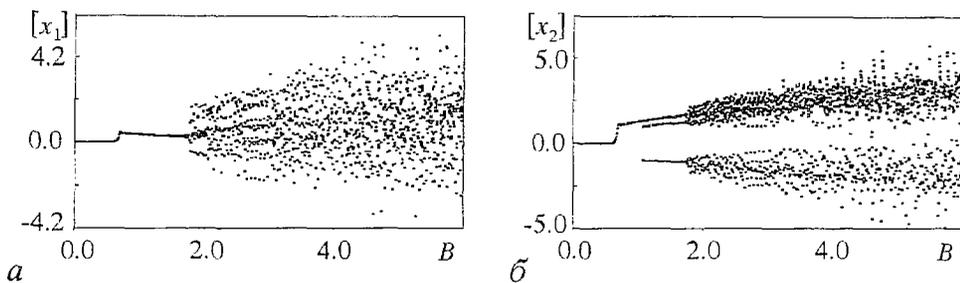


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы изменения максимальных значений колебательных процессов в первом (а) и втором (б) генераторах в зависимости от параметра усиления при  $C=0.3$ .

первого (рис. 5, а, б) и второго (рис. 5, в, г) генераторов при отсутствии связи между генераторами ( $C = 0$ ) и при взаимодействии колебаний ( $C = 0.3$ ), когда при автономных режимах генераторов имеют место хаотические колебания. Расчеты спектров мощности, представленных на рис. 5, проведены при  $B = 4.8$ . Остальные параметры, а также шаг интегрирования по времени, имеют те же величины, при которых рассчитывались диаграммы рис. 3. Из сравнения спектров колебаний наглядно видно изменение хаотичности при введении связи: спектры мощности на рис. 5, б, г имеют меньшие выбросы в области резонансных частот.

На рис. 6 приведены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие изменение колебательных процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в зависимости от параметра усиления для фиксированного значения параметра связи  $C$ , равного 0.3. Диаграммы рассчитаны при тех же остальных параметрах (в том числе и при тех же начальных условиях, а также шаге интегрирования), что и диаграммы рис. 3. На рис. 7 представлены спектры мощности для наибольшей величины параметра усиления на диаграммах рис. 6. Начальные условия при расчете спектров определялись значениями переменных при соответствующих величинах параметра усиления на бифуркационных диаграммах рис. 6. Шаг интегрирования по времени равен 0.05.

Как видно из рис. 6, возбуждение колебаний  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  происходит при достижении параметром усиления величины  $B=0.8$ . При этом устанавливаются регулярные колебания, сохраняющиеся при увеличении параметра усиления до значения  $B=1.8$ . В первом генераторе колебательный процесс во всем интервале  $B \in [0.8, 1.8]$  остается однократным, а во втором – при  $B=1.1$  происходит бифуркация утроения периода. При хаотизации колебаний, как и в случае рис. 3, в первом генераторе наблюдается одна область разброса максимальных значений колебательного процесса, расширяющаяся с увеличением параметра усиления, а во втором – две. Спектры мощности колебательных процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  при большой величине параметра усиления ( $B=6$ ), как и бифуркационные диаграммы, различаются между собой.

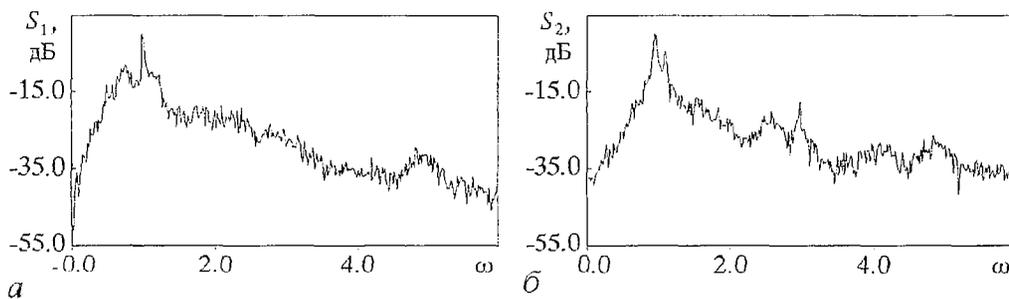


Рис. 7. Спектры мощности первого (а) и второго (б) генераторов при  $C=0.3, B=6$

### 3. Эксперимент

В качестве примера приложения теоретического анализа приведены результаты эксперимента на системе, состоящей из двух связанных генераторов. Эта система создана для работы в сверхвысокочастотном диапазоне длин волн с использованием биполярных транзисторов типа 2Т640А-2 и стандартной микрополосковой техники. Микрополосковая плата этой системы приведена на рис. 8. Плата имеет размеры  $60 \times 80$  мм<sup>2</sup> и выполнена на материале ФАФ-1. Обозначения на рис. 8 имеют следующий смысл:  $T_1, T_2$  – биполярные транзисторы, соединенные с колебательными контурами в виде отрезков микрополосковых линий 1 и 2;  $C_1, C_2, C_3$  – подстраиваемые емкости;  $C_4, C_5, L_1, L_2$  и  $R_1, R_2$  – соответственно емкости, индуктивности и сопротивления фильтров в цепи питания транзисторов;  $C_6$  – развязывающая емкость в отрезке микрополосковой выходной линии 3; 4 – проводящая перемычка, замыкающая по постоянному напряжению коллекторные цепи обоих транзисторов;  $U_{кб}$  – напряжение питания коллектор – база;  $U_{эб}$  – напряжение смещения эмиттер – база.

Взаимодействие двух генераторов осуществлялось с использованием емкостной связи. Эта связь реализовывалась с помощью отрезка микрополосковой линии 3, включенного между колебательными контурами, выполненными в виде отрезков микрополосковых линий 1 и 2, соединенных каждый со своим парциальным генератором. Указанная линия одновременно служила устройством вывода генерируемых колебаний в нагрузку. Собственные частоты парциальных генераторов находились, как и при численном анализе, в соотношении 1 : 1.3.

В качестве управляющего параметра при экспериментах использовалось напряжение коллектор – база транзисторов ( $U_{кб}$ ). Такой выбор определялся удобством изменения и контроля этого параметра, а также многообразием получаемых при этом режимов генерации и возможностью относительно плавного перехода между ними.

Эксперименты проводились с использованием анализатора спектра типа

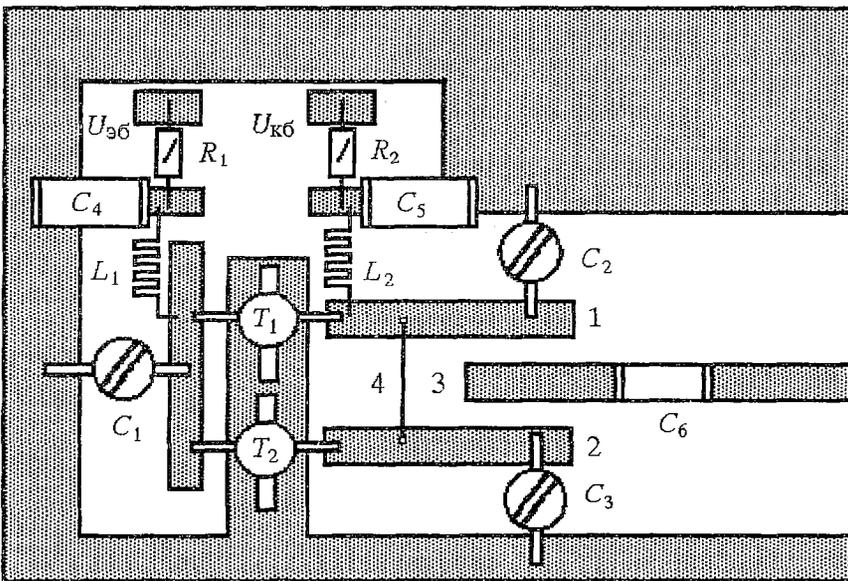


Рис. 8. Микрополосковая плата экспериментальной схемы двух связанных генераторов:  $T_1, T_2$  – транзисторы 2Т640А-2;  $C_1, C_2, C_3=0.1 - 10$  пФ;  $C_4, C_5=50$  пФ;  $R_1, R_2=30$  Ом; 1 и 2 – отрезки микрополосковой линии, включенные в коллекторную цепь транзисторов  $T_1, T_2$ , соответственно;  $C_6=10$  пФ – развязывающая емкость в выходной микрополосковой линии 3; 4 – перемычка, соединяющая по постоянному току коллекторные цепи транзисторов; напряжение питания коллектор – база транзисторов  $U_{кб}=+5$  В; напряжение смещения эмиттер – база транзисторов  $U_{эб}=-0.9$  В

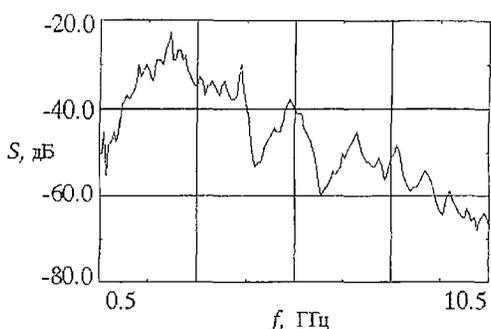


Рис. 9. Спектр мощности, регистрируемый на выходе экспериментальной системы двух связанных генераторов

конструктивной реализации системы связанных генераторов, отличается от теоретической модели элементом связи, совмещающим функции вывода энергии. Определенное влияние на характер распределения мощности по спектру в эксперименте реально оказывает рассогласование, не учитываемое в теории.

На рис. 9 приведен спектр колебаний на выходе системы двух связанных генераторов при оптимальном режиме работы. Как видно, спектр генерируемых колебаний на выходе экспериментального макета находится в хорошем качественном соответствии с теоретическими спектрами мощности, представленными на рис. 7, несмотря на отмеченные выше различия теоретической модели с экспериментальным макетом.

Качественное соответствие выражается в том, что на частотах колебательных контуров в обоих случаях имеется явно выраженный пик мощности. Спад мощности по диапазону сопровождается также ее повышением, хотя и «размытым», на частотах кратных резонансным частотам колебательных контуров.

### Заключение

Приведенная математическая модель системы связанных генераторов позволяет рассмотреть работу нескольких генераторов с учетом инерционности и запаздывания в цепях обратной связи и в элементах связи между генераторами. Она отражает специфику генераторов сверхвысоких частот в случае соизмеримости их размеров и расстояния между ними с длинами волн генерируемых колебаний.

Расчеты показывают, что существует периодическая зависимость режима колебаний от величины запаздывания и имеется оптимальная величина запаздывания, при которой возбуждаются хаотические колебания. Область этих значений запаздывания относительно узкая, так что настройка одного генератора в режим хаотических колебаний критична.

При работе двух связанных генераторов с запаздыванием, как и следовало ожидать, колебательные процессы сложнее, чем в случае одного автономного генератора, и хаотизация колебаний менее критична к параметрам. Система связанных генераторов позволяет осуществить более устойчивые режимы хаотических колебаний.

Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о возможности создания генераторов с шумоподобным спектром в сверхвысокочастотном диапазоне длин волн на основе связанных систем с динамическим хаосом. Спектр широкополосных колебаний, наблюдаемый в экспериментальном макете связанных генераторов, имеет структуру, подобную структуре спектра, рассчитанного для математической модели.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-02-16722).*

НР-8566А и аппаратуры для регистрации электрических параметров схемы генератора. Анализатор спектра имел выход на компьютер, что позволяло отображать в цифровом представлении спектры, наблюдаемые на выходе схемы.

Точное количественное сопоставление теории и эксперимента на СВЧ едва ли возможно. Это обусловлено тем, что в эксперименте нельзя точно определить значения таких важных в данном случае параметров, как запаздывание и величина связи между парциальными генераторами. Практическая схема эксперимента, удобная для

## Библиографический список

1. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. XXIX, № 9. С. 1050.
2. *Ланда П.С., Перминов С.М.* Взаимодействие периодических и стохастических автоколебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 4. С. 424.
3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
5. *Кальянов Э.В., Лебедев М.Н.* Стохастические колебания в системе связанных генераторов при наличии инерционности // РЭ. 1985. № 8. С. 1570.
6. *Сбитнев В.И.* // Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 46.
7. *Кальянов Э.В.* Взаимоиндуцированные переходы в связанных автколебательных системах // РЭ. 1996. Т. 41, № 4. С. 497.
8. *Кальянов Э.В.* Самоорганизация в системе двух связанных автстохастических генераторов // Письма в ЖТФ. 1994. Т.20, № 2. С.44.
9. *Астахов В.В. и др.* Управление и синхронизация хаоса в системе связанных генераторов// РЭ. 1996. Т.41, № 11. С. 1323.
10. *Astakhov V., Shabunin A., Anischenko V.* Synchronisation by chaos control in symmetrically coupled Chua's circuits // Proc. 5-th Intern. Specialist Workshop. Non-linear Dynamics of Electronic Systems, June 26-27 1997, Moscow, Russia. P. 172.
11. *Kuznetsov A.S., Shalfeev V.D.* Structure formation and regularisation in an array of globally coupled oscillators // Proc. 5-th Intern. Specialist Workshop. Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, June 26-27 1997, Moscow, Russia. P. 347.
12. *Кальянов Э.В.* Воздействие одиночного импульса на автогенератор при детерминированном и хаотическом режимах колебаний // РЭ. 1993. Т.38, № 2. С. 287.
13. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
14. *Александров М.Г., Беляшин А.Н., Брюкнер В. и др.* Расчет электрических цепей и электромагнитных полей на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1983. 344 с.

*Институт радиотехники и  
электроники РАН*

*Поступила в редакцию 6.10.98  
после переработки 6.04.99*

## AUTOSTOCHASTIC SYSTEM OF COUPLED MICROWAVE OSCILLATORS

*R.V. Belyaev, E.V. Kal'yanov, V.Ya. Kislov, B.E. Kyarginiskii, M.N. Lebedev*

The equations of coupled oscillation system taking into account each partial oscillator inertia and delay in backward are given. Delay in connecting elements between oscillators is also considered. The results of numerical analysis of one and two oscillators with capacity coupling are given. It is demonstrated that chaotisation of oscillations is appearing more easy in a system of two coupled oscillators than in a system of only one oscillator. These results are supported by experiments with microwave transistor oscillators. The experiments fulfilled on autostochastic systems consisting of two oscillators has shown that system of two coupled transistor oscillators permits to obtain chaotic noise-like oscillations in S-frequency band.



*Беляев Ростислав Владимирович* – окончил Московский физико-технический институт (1958). Работает в Институте радиотехники и электроники РАН в должности старшего научного сотрудника, кандидат физико-математических наук. Автор около 40 печатных трудов. Область научных интересов: динамический хаос в электронных системах.  
E-mail: belyaev@mail.cplire.ru



*Кальянов Эраст Васильевич* – родился в 1930 году в Саратове, окончил физический факультет Ленинградского государственного университета (1953) и аспирантуру ЛГУ (1957), защитив диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Работает в Институте радиотехники и электроники РАН в должности ведущего научного сотрудника. Соавтор монографии «Многочастотные режимы в приборах СВЧ». Автор более 150 научных публикаций. Лауреат Премии Совета Министров СССР за 1984 г.



*Кислов Владимир Яковлевич* – окончил физический факультет Московского государственного университета. Зав. отделом Института радиотехники и электроники РАН, профессор, доктор физико-математических наук. Автор более 120 печатных трудов. Область научных интересов: динамический хаос в радиоэлектронных системах, электронные и плазменные системы, биомедицина. Лауреат Государственной Премии и Премий Совета Министров СССР.



*Кяргинский Борис Егорович* – родился в 1937 году. Окончил Ленинградский электротехнический институт (1967). Работает в Институте радиотехники и электроники РАН в должности ведущего инженера. Имеет 14 печатных работ. Область научных интересов: динамический хаос в электронных СВЧ-приборах.



*Лебедев Михаил Николаевич* – родился в 1950 году. Окончил Всесоюзный заочный политехнический институт. С 1978 года работает в Институте радиотехники и электроники РАН в должности научного сотрудника. Автор более 50 научных работ в области стохастических колебаний в радиотехнике и электронике. Лауреат Премии Совета Министров СССР за 1989 г.



## **ПРЕЦИЗИОННЫЙ ГЕНЕРАТОР ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА**

*Л. В. Кузьмин, Н. А. Максимов, А. И. Панас*

Рассматривается прецизионный генератор хаотических колебаний с 1.5 степенями свободы, представляющий собой последовательное соединение двух линейных и одного нелинейного четырехполосника в единую кольцевую схему и имеющий характеристику нелинейного элемента в виде кусочно-линейной функции. Численно и экспериментально исследуются типовые хаотические режимы генератора. Демонстрируется возможность анализа режимов генератора с помощью специального пакета прикладных программ Electronics Workbench, предназначенного для моделирования различных радиотехнических схем и устройств. Приводится принципиальная схема реализации нелинейного элемента.

### **Введение**

С момента обнаружения динамического хаоса прошло уже более 30 лет [1–2]. За это время проявления динамического хаоса обнаружены в самых разнообразных областях (механика, биология, радиоэлектроника, экономика и т.п.), свойства его хорошо изучены и сегодня актуальным является вопрос практического использования полученных результатов.

Среди приложений динамического хаоса особое место занимают прикладные задачи, решение которых связано с необходимостью получения и использования хаотических сигналов. На практике функцию источников хаотических сигналов выполняют генераторы хаоса. Если на этапе исследования генераторов основное внимание уделялось изучению особенностей колебательных режимов (условия возникновения, бифуркационные явления и т.п.), то сегодня прикладные задачи выдвигают на передний план решение специфических проблем, связанных с конкретными применениями генераторов.

Одним из таких применений является использование генераторов хаоса для создания новых подходов к передаче информации [3–4]. В последние годы отмечен возросший интерес к этой проблеме. Проведены эксперименты как в низкочастотном, так и в радиочастотном диапазонах, подтвердившие возможность реализации указанных подходов. Однако использование полученных результатов на практике встречает определенные трудности. Одной из основных проблем является качество выделяемого в приемнике информационного сообщения. Генераторы хаоса являются базовым элементом приемно-передающих устройств, и от того, насколько точно удастся их воспроизвести (в приемнике и в передатчике) и зависит, главным образом, качество передачи. Другими словами,

при использовании динамического хаоса в системах передачи информации возникает проблема прецизионности используемых в них генераторов хаоса.

Принимая во внимание тот факт, что генераторы хаоса представляют собой специфические автоколебательные системы с высокой чувствительностью к параметрам и начальным (стартовым) условиям, необходимо пояснить, какое содержание вкладывается в термин «прецизионный генератор хаоса» и что является критерием определения прецизионности.

Структура коммуникационных систем с хаосом включает в себя передатчик (ведущая хаотическая система) и приемник (ведомая хаотическая система). Большая часть из известных на сегодняшний день схем передачи информации базируется на получении в приемнике синхронного хаотического отклика [5,6], который означает, что на выходе ведомой системы формируется хаотический сигнал, идентичный (или очень близкий, с высокой степенью соответствия) по своим характеристикам к сигналу на ее входе. В этом случае приемник является пассивной системой, в основе которой лежит такой же генератор хаоса, что и в ведущей системе, но с разорванной обратной связью. По существу, ведомая система представляет собой согласованный нелинейный фильтр по отношению к сигналу ведущей системы. Таким образом, в качестве критерия прецизионности генераторов хаоса в работе выступает синхронный хаотический отклик в паре ведущая – ведомая система.

Целью данной работы является рассмотрение конструкции прецизионного генератора и исследование как численными методами, так и экспериментально его наиболее типичных режимов.

Структура работы следующая. В разделе 1 обсуждаются необходимые условия прецизионности генераторов хаоса, во 2-м разделе рассматривается структура генератора с 1.5 степенями свободы, удовлетворяющего сформулированным условиям. Затем, в разделе 3 вводится математическая модель генератора и анализируются результаты численных экспериментов. Далее, в разделе 4 рассматривается принципиальная схема реализации нелинейного элемента и объясняется процесс формирования его кусочно-линейной характеристики. Раздел 5 посвящен радиотехническому моделированию генератора с помощью специального программного пакета Electronics Workbench. И, наконец, в разделе 6 приводятся результаты физических экспериментов.

## **1. Генераторы хаоса с кусочно-линейной характеристикой**

К настоящему моменту известно довольно большое число генераторов хаоса, отличающихся как по конструкции, так и по типовым хаотическим режимам. Однако их общим свойством является то, что они представляют собой совокупность линейных и одного (нескольких) нелинейных элементов. С точки зрения радиотехнической реализации, линейные элементы могут быть как пассивными (сопротивления, конденсаторы, катушки индуктивности), так и активными (усилители и т.п.). Функцию нелинейных элементов могут выполнять как стандартные элементы (диоды, транзисторы,...), так и специально разработанные приборы или схемы, обладающие нелинейной функцией преобразования для одной (нескольких) характеристики проходящего через них сигнала.

Для того чтобы два генератора одной и той же структуры были прецизионными, необходимо попарно обеспечить идентичность всех составляющих его одинаковых элементов. Что касается линейных элементов, то их можно подобрать с довольно высокой точностью. Идентичность же нелинейных элементов подразумевает совпадение их функций преобразования сигнала. В случае использования стандартных нелинейных элементов, обладающих гладкими функциями преобразования, подбор двух одинаковых элементов, как правило, представляет собой гораздо более сложную проблему, а для специальных схем с такого вида функциями и совсем трудноразрешимую.

Выходом в данной ситуации является применение в конструкциях генераторов хаоса специально разработанных нелинейных элементов с воспроизводимыми функциями преобразования\*. Примерами указанных функций являются кусочно-линейные функции, состоящие из нескольких линейных сегментов. При этом используется возможность воспроизведения характеристики нелинейного элемента на каждом из сегментов вследствие его линейности.

Широко известным примером генератора хаоса с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента является цепь Чуа [7]. В ней функцию нелинейного элемента выполняет специально синтезированное нелинейное сопротивление с трехсегментной вольт-амперной характеристикой. Двухсегментные вольт-амперные характеристики используются в нелинейных элементах генераторов, рассмотренных в [8]. Другим примером является генератор, у которого функцию преобразования выполняет пятисегментная амплитудная характеристика нелинейного элемента, реализованного с помощью стандартных элементов – диодов [9].

## 2. Структура генератора с 1.5 степенями свободы

В основе структуры генератора (рис. 1, а), рассматриваемого в данной работе, лежит принцип построения хаотических колебательных систем [10–13], в соответствии с которым составляющие генератор элементы последовательно соединяют в схему, образующую единое кольцо обратной связи. При этом соединение элементов осуществляется через буферные устройства, которые обеспечивают однонаправленность обратной связи генератора и развязку между элементами. Чтобы реализовать указанные свойства, буферные устройства должны иметь большое входное и малое выходное сопротивления, обладать единичным коэффициентом передачи в прямом направлении и нулевым в обратном. В качестве составляющих генератор элементов могут выступать пассивные и активные, линейные и нелинейные, простые и сложные, имеющие свою внутреннюю структуру, элементы. Поэтому на рис. 1, а они изображены как подсистемы. В схематическом представлении такие подсистемы являются четырехполосниками.

Простейший генератор этого класса состоит из нелинейного элемента  $F(z)$  (подсистема 1) с амплитудным преобразованием входного сигнала  $z$  (рис. 1, б),  $RC$ -фильтра низких частот (подсистема 2),  $RLC$ -фильтра низких частот (подсистема 3) и является автоколебательной системой с 1.5 степенями свободы. Функцию

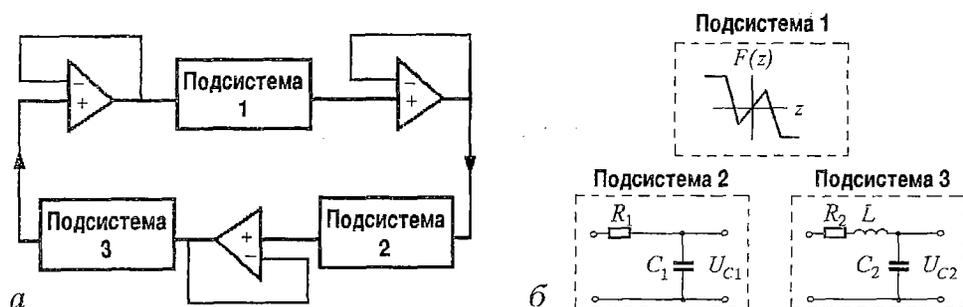


Рис. 1. Структура генератора хаотических колебаний: а – блок-схема генератора; б – структура подсистем, входящих в состав генератора: подсистема 1 – нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой, подсистема 2 – фильтр низких частот первого порядка, подсистема 3 – фильтр низких частот второго порядка

\* Другой возможный вариант – использование цифровых сигнальных процессоров – выходит за пределы данной работы и в ней не рассматривается.

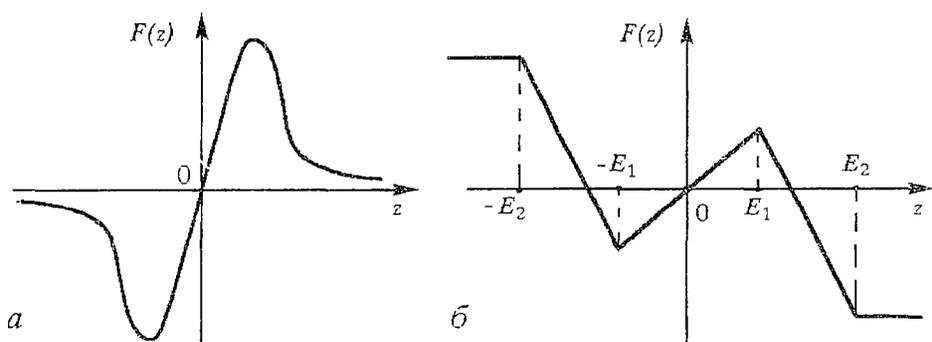


Рис. 2. Характеристика нелинейного элемента: *а* – гладкая, *б* – пятиsegmentная кусочно-линейная

устройств развязки выполняют буферные каскады на операционных усилителях. Динамика такого генератора с характеристикой нелинейного элемента

$$F(z) = Mz \exp(-z^2), \quad (1)$$

где  $M$  – коэффициент усиления, хорошо изучена [12, 14–15] и включает в себя разнообразные хаотические режимы с широкими зонами устойчивости в пространстве управляющих параметров генератора. Форма характеристики (1) представлена на рис. 2, *а*. Как видно из рисунка, она является гладкой функцией, что в силу указанных в предыдущем разделе причин делает проблематичным воспроизводимость генератора, а значит и использование его в прикладных задачах.

Чтобы сделать генератор воспроизводимым, сохранив при этом разнообразие хаотических режимов, предлагается использовать нелинейный элемент с кусочно-линейной пятиsegmentной характеристикой (рис. 2, *б*), сохраняющей подобие с характеристикой (1) и представляемой в виде

$$F(z) = M[|z + E_1| - |z - E_1| + (|z - E_2| - |z + E_2|)/2], \quad (2)$$

где  $E_1, E_2$  – константы,  $M$  – коэффициент усиления. Конкретный выбор  $E_1, E_2$  и  $M$  однозначно определяет характеристику (2). Наличие внешних ограничивающих сегментов связано с реально существующем на практике ограничением уровня амплитуд выходных сигналов различных устройств, применяемых в радиотехнике.

### 3. Математическая модель

Динамические режимы генератора описываются с помощью дифференциальных уравнений, получаемых из законов Кирхгофа для подсистем – четырехполюсников (см. рис. 1, *б*).

Обозначая напряжения на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  через  $U_{C1}$  и  $U_{C2}$ , соответственно, рассмотрим каждую из трех подсистем как четырехполюсник.

*Подсистема 1* представляет собой четырехполюсник с нелинейной функцией преобразования амплитуды входного сигнала  $F(z)$  (2). Входным сигналом для нее является выходной сигнал подсистемы 3, то есть напряжение  $U_{C2}$ . Таким образом выходным сигналом подсистемы 1 является напряжение  $F(U_{C2})$ .

*Подсистема 2* представляет собой фильтр низких частот 1-го порядка, на вход которого подается напряжение  $F(U_{C2})$ , а выходным сигналом является  $U_{C1}$ . В соответствии со вторым законом Кирхгофа, принимая во внимание большое входное сопротивление буферного каскада, подсоединенного к выходу подсистемы, зависимость между напряжениями можно описать уравнением

$$C_1 R_1 dU_{C1}/dt = F(U_{C2}) - U_{C1}. \quad (3)$$

Подсистема 3 является фильтром низких частот второго порядка с входным напряжением  $U_{C1}$  и выходным  $U_{C2}$ . По аналогии с подсистемой 2 применение закона Кирхгофа приводит к следующему уравнению:

$$LC_2 d^2 U_{C2} / dt^2 + C_2 R_2 dU_{C2} / dt = U_{C1} - U_{C2}. \quad (4)$$

Объединение (3) и (4) приводит к системе дифференциальных уравнений, описывающих динамические режимы генератора,

$$C_1 R_1 dU_{C1} / dt = F(U_{C2}) - U_{C1}, \quad (5)$$

$$LC_2 d^2 U_{C2} / dt^2 + C_2 R_2 dU_{C2} / dt = U_{C1} - U_{C2}.$$

Если обозначить  $U_{C1}=x$ ,  $U_{C2}=z$ ,  $C_1 R_1=T$ ,  $R_2/L=\alpha$ ,  $1/(LC_2)=\omega^2$  и ввести новую переменную  $y=dU_{C2}/dt - R_2 U_{C2}/L$ , то систему (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &= (F(z) - x)/T, \\ y &= \omega^2(x - z), \\ z &= y - \alpha z. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) позволяет использовать стандартные численные методы решения дифференциальных уравнений (например, метод Рунге – Кутты) для анализа динамических режимов генератора. Результатом решения системы являются зависимости  $x(t)$  и  $z(t)$ . Изменяя параметры системы ( $M$ ,  $85$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ) и анализируя получаемые реализации  $x(t)$ ,  $z(t)$ , можно исследовать режимы генератора. Однако для того, чтобы сделать заключение о характере колебаний генератора, анализа реализаций недостаточно. В этом случае прибегают к другим характеристикам (спектры мощности, фазовые портреты, ляпуновские показатели, бифуркационные диаграммы и др.), для получения которых используют специальные программные средства [12].

Рассмотрим особенности возникновения различных колебательных режимов в модели генератора, описываемого системой (6). Эта система уравнений имеет три положения равновесия

$$(x, y, z)_1 = (0, 0, 0), \quad (7)$$

$$(x, y, z)_{2,3} = \pm [2ME_1 / (M+1)] (1, \alpha, 1). \quad (8)$$

Условия устойчивости точек равновесия определяются из линеаризованной в окрестности точек равновесия системы (6), анализ которой показывает, что устойчивость положения равновесия в начале координат возможна лишь в случае малых коэффициентов усиления, удовлетворяющих соотношению  $M < 1$ . С другой стороны, ненулевые положения равновесия сохраняют устойчивость при  $T \ll 1$ ,  $\alpha \gg 1$  и относительно небольших  $M$  ( $M > 1$ ). Если параметры  $T$  и  $\alpha$  соизмеримы с единицей, то увеличение  $M$  рано или поздно приводит к потере устойчивости положений равновесия (8) и возникновению автоколебаний.

Специфика динамических режимов рассматриваемого генератора при численном эксперименте отражена на бифуркационной диаграмме (рис. 3) и состоит в том, что при фиксированных

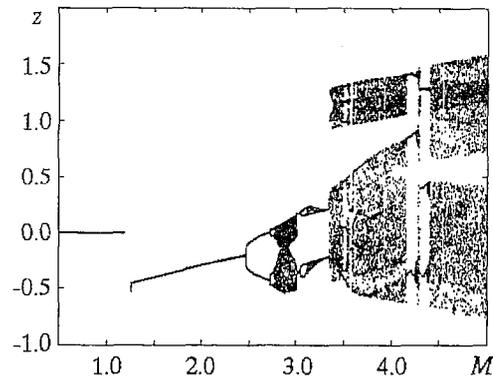


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма: зависимость максимальных значений реализации сигнала  $z$  с выхода фильтра низких частот второго порядка от коэффициента усиления  $M$  при  $\alpha=0.22$ ,  $T=3$ ,  $\omega=1$ ,  $E_1=0.5$ ,  $E_2=2$

параметрах  $T$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  и увеличении коэффициента усиления  $M$  жестким образом возбуждаются регулярные колебания вокруг одного из ненулевых положений равновесия с частотой, близкой к резонансной частоте фильтра второго порядка. Затем регулярные колебания теряют устойчивость и после ряда бифуркаций удвоения становятся хаотическими. На следующем этапе возникают колебания и вокруг второго из ненулевых положений равновесия. Хаотический аттрактор становится похожим на «двойную спираль» («double-scroll»), например, для цепи Чуа. И, наконец, дальнейшее увеличение  $M$  приводит к появлению хаотических колебаний, охватывающих все три положения равновесия.

На рис. 4 представлены наиболее типичные хаотические режимы генера-

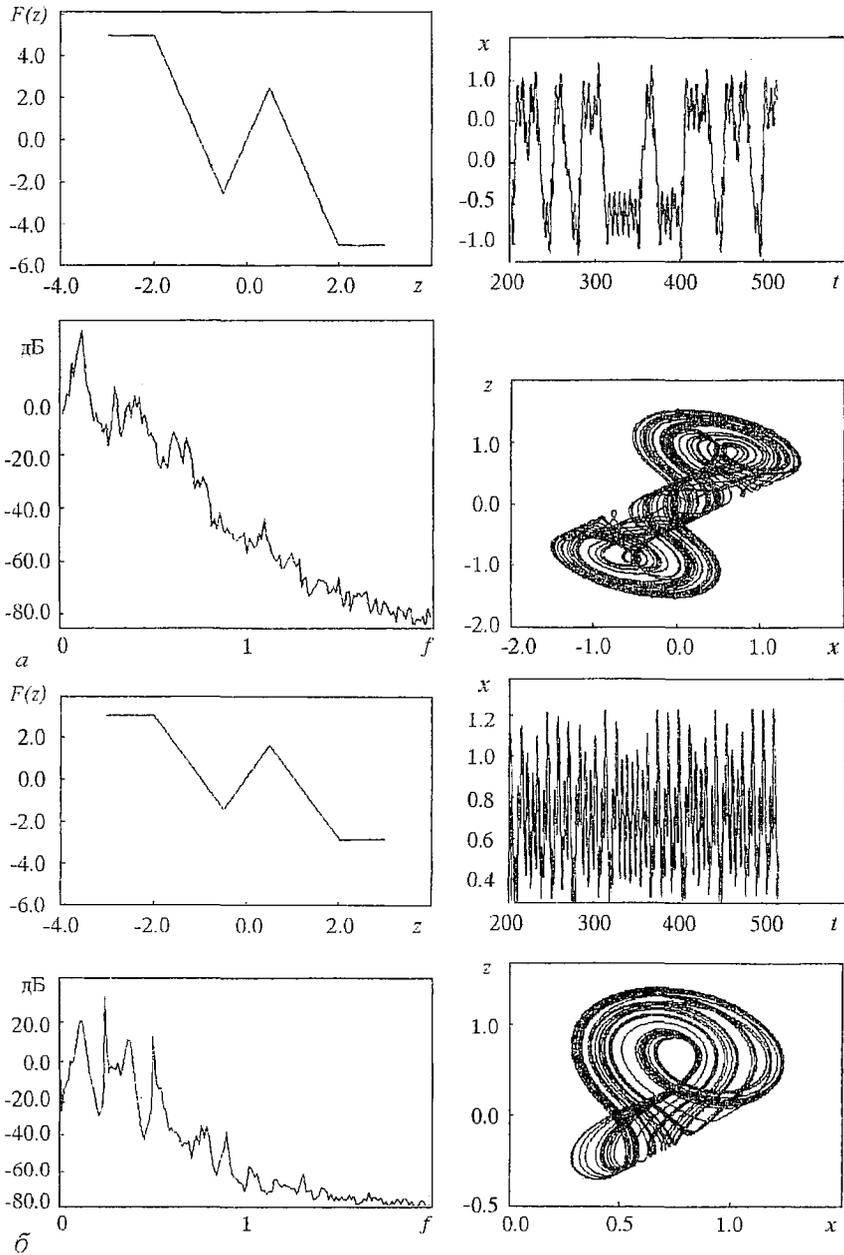


Рис. 4. Численный эксперимент: форма характеристики нелинейного элемента, форма сигнала  $x=U_{C1}$  на выходе подсистемы 2, его спектр мощности и фазовый портрет в плоскости  $(x, z)$ , где  $z=U_{C2}$ , для различных значений коэффициента усиления: а -  $M=5$ , б -  $M=3$ ;  $\alpha=0.22$ ,  $T=3$ ,  $\omega=1$ ,  $E_1=0.5$ ,  $E_2=2$

тора, полученные при численном моделировании (б) при тех же фиксированных параметрах, как на рис. 3, и различных значениях  $M$ . Как видно из рисунка, изменение даже одного из параметров может приводить к появлению совершенно различных по своим характеристикам хаотических режимов. Так, рис. 4, а демонстрирует режим, характерной особенностью которого являются последовательные во времени хаотические колебания вокруг двух ненулевых неустойчивых положений равновесия. Как видно из рисунка, время нахождения траектории в окрестности каждого из положений равновесия не является постоянной величиной, а изменяется, принимая случайно-подобный характер.

Уменьшение коэффициента усиления  $M$  приводит к возникновению колебаний вокруг только одного из положений равновесия (рис. 4, б). Спектр мощности становится более изрезанным, а в реализации  $x(t)$  появляется постоянная составляющая.

#### 4. Реализация нелинейного элемента

Практическая значимость рассматриваемого генератора определяется тем, насколько физически реализуем и воспроизводим нелинейный элемент с

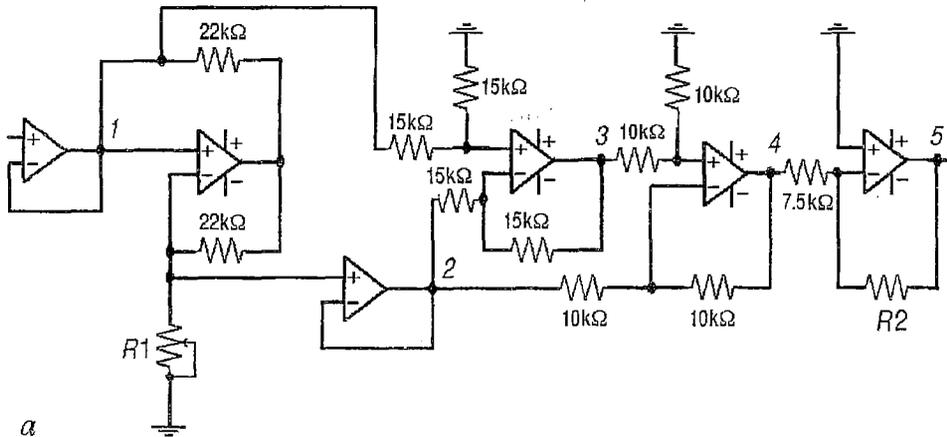
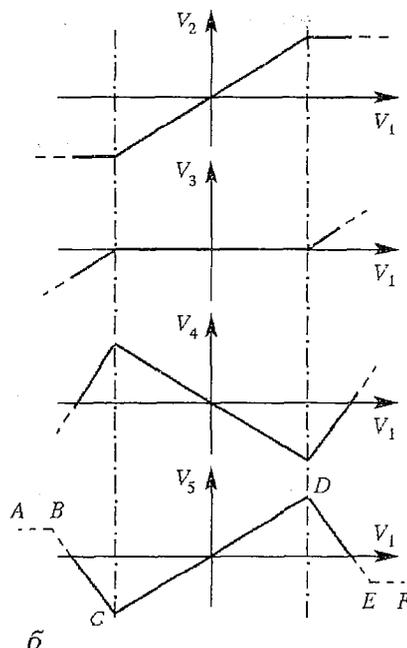


Рис. 5. Реализация нелинейного элемента: а – принципиальная схема; б – эпюры напряжений в узлах схемы

характеристикой (2). Выше упоминался генератор с подобной пятисегментной характеристикой нелинейного элемента на диодах. Однако, будучи нелинейными элементами, диоды затрудняют воспроизводимость характеристики.

Чтобы избежать этого недостатка, ниже рассматривается конструкция нелинейного элемента, содержащая операционные усилители и линейные пассивные компоненты. На рис. 5, а представлена его принципиальная схема. Входные в состав элемента операционные усилители работают в линейном режиме.

На рис. 5, б приведены эпюры напряжений в различных узлах схемы рис. 5, а, иллюстрирующие формирование характеристики (2).  $V_2$  представ-



ляет напряжение на выходе амплитудного ограничителя, на вход которого подается напряжение  $V_1$ .  $V_3$  является разностью напряжений  $V_1$  и  $V_2$ , а  $V_4$  – разностью напряжений  $V_3$  и  $V_2$ . Крайний справа операционный усилитель осуществляет усиление и инвертирование напряжения  $V_4$ .

Сопrotивления  $R_1$  и  $R_2$  являются элементами, управляющими параметрами  $M$  и  $E_1$  характеристики (2). С помощью  $R_2$  осуществляется изменение крутизны сегмента  $CD$  ( $M$ ),  $R_1$  регулирует ширину сегмента  $CD$  по оси абсцисс ( $E_1$ ). Внешние сегменты  $AB$  и  $EF$  определяются напряжениями питания используемых в схеме операционных усилителей. На рис. 5, б они изображены штриховой линией, так как реально (в типовых режимах, рассматриваемых в работе) не принимают участия в формировании хаотических колебаний.

## 5. Применение программы Electronics Workbench для схемотехнического моделирования на PC

Схемотехническое моделирование генератора производилось с помощью пакета прикладных программ Electronics Workbench (версия 4.1). Пакет разработан фирмой Interactive Image Technologies Ltd., является развитием программы SPICE и удобен тем, что достоверность получаемых с его помощью результатов позволяет в ряде случаев заменить физический эксперимент, а такие качества, как простота в обращении и наглядность представления результатов, делают его эффективным инструментом при анализе поведения моделируемых радиотехнических устройств. Electronics Workbench снабжен графическим редактором принципиальных схем и набором виртуальных приборов для конструирования и анализа в интерактивном режиме как аналоговых, так и цифровых схем. Графический интерфейс Electronics Workbench, работающий в среде Windows, позволяет одновременно отражать на мониторе PC чертеж схемы и результаты ее моделирования на экране виртуальных приборов. Обширный выбор различных стандартных радиотехнических элементов и устройств (осциллограф, измеритель АЧХ, генератор сигналов различной формы и др. ), которые можно подключать к любому узлу моделируемой схемы, допускает моделирование довольно сложных схем. А богатая библиотека выпускаемых промышленностью активных элементов (операционные усилители, транзисторы и т.д.) позволяет пользователю анализировать реально воспроизводимые на практике схемы.

На рис. 6 приведена принципиальная схема генератора с кусочно–линейной характеристикой нелинейного элемента, собранная с помощью Electronics Workbench. В качестве операционных усилителей в ней используются микросхемы LM324A с напряжением питания  $\pm 12\text{В}$ . Структура нелинейного элемента полностью совпадает со схемой на рис. 5. К нелинейному элементу через буферные усилители подключены фильтры низких частот (подсистемы 2,3), образуя кольцевую схему в соответствии с рис. 1. Также, на рис. 6 показаны виртуальные осциллографы, два входа которых подсоединены к выходам фильтров низких частот. Первый осциллограф работает в режиме отражения временных реализаций  $x(t)$ ,  $z(t)$ , второй – фазового портрета. В качестве примера на рисунке демонстрируется режим хаотических колебаний вокруг двух неустойчивых положений равновесия и соответствующие этому режиму номиналы элементов принципиальной схемы.

Особенностью схемы является то, что в цепь обратной связи генератора введен управляемый ключ, замыкающий ее только спустя 2 мс после включения генератора. Сделано это для того, чтобы избежать переходных процессов в схеме, связанных с формированием характеристики нелинейного элемента.

## 6. Физический эксперимент

Основной задачей экспериментов являлась практическая апробация генератора с точки зрения его прецизионных свойств, а также исследование его

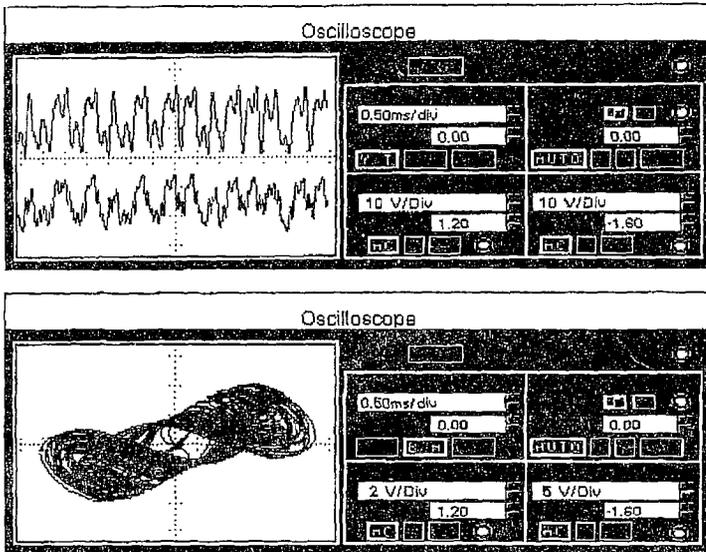
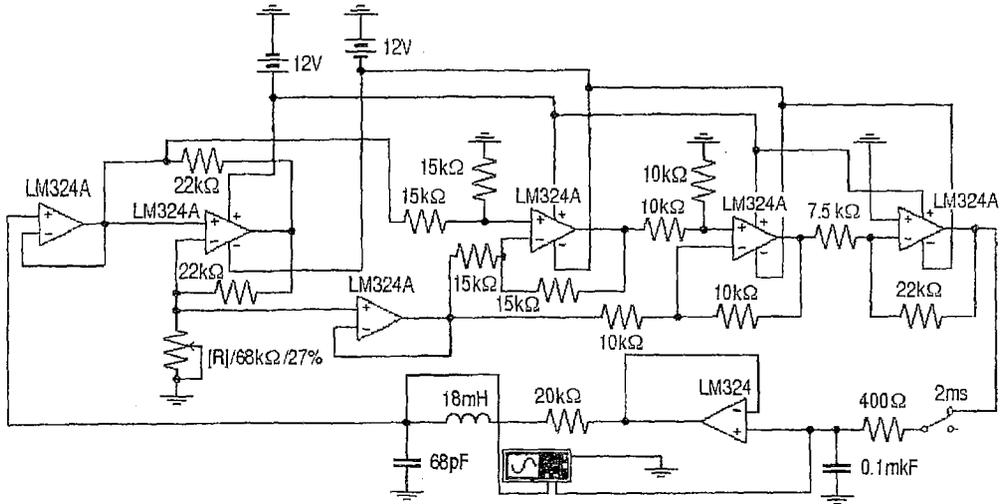


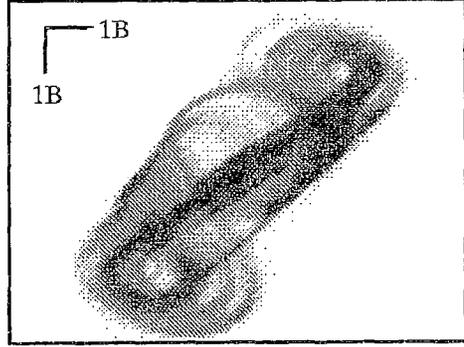
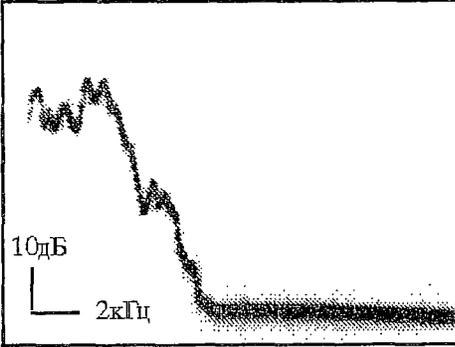
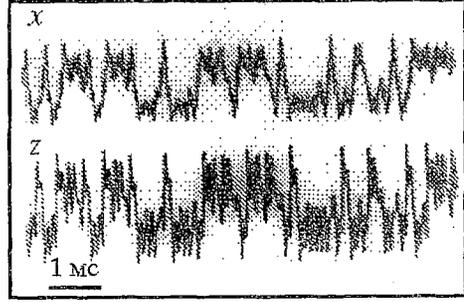
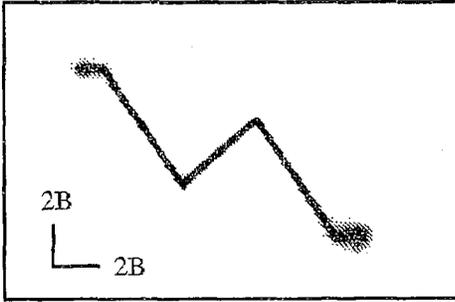
Рис. 6. Генератор хаотических колебаний, моделирование с помощью пакета прикладных программ Electronics Workbench. Принципиальная схема генератора и пример реализации хаотических сигналов и фазового портрета на виртуальном осциллографе

характерных хаотических режимов и сопоставление их с результатами моделирования.

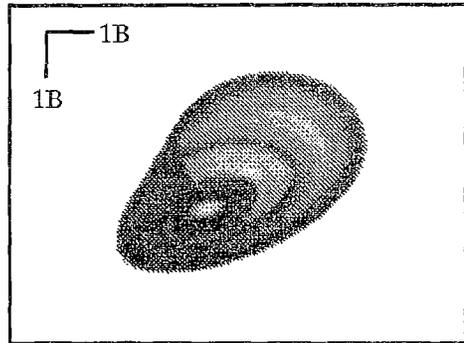
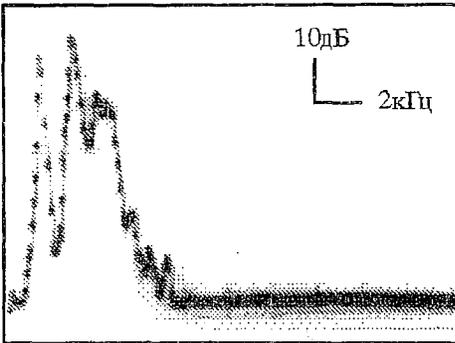
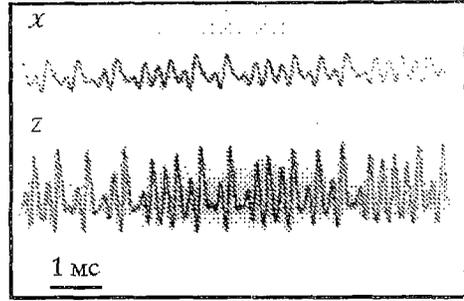
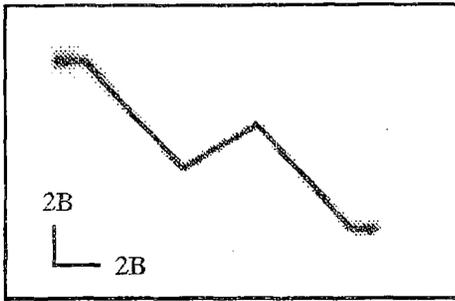
Эксперименты проводились с макетами генераторов, полностью соответствующими принципиальной схеме на рис. 6. Нелинейный элемент и буферные каскады были реализованы на базе операционных усилителей КР1401УД2Б, которые являются аналогами используемых в схеме усилителей LM324A. Такой выбор усилителей позволял варьировать напряжение питания в пределах  $\pm(5\div 15)$  В.

На рис. 7, а, б представлены экспериментальные характеристики хаотических режимов при различных коэффициентах усиления  $M$ , качественно соответствующие режимам, приведенным на рис. 4, а, б. Рис. 7, в демонстрирует еще один типовой режим генератора. Он наблюдается при максимальном по отношению к рис. 7, а, б усилении и характеризуется возникновением колебаний вокруг трех положений равновесия, включая нулевое.

Проверка прецизионности осуществлялась на 4 макстах генераторов в соответствии с рассмотренным выше критерием, основанным на получении

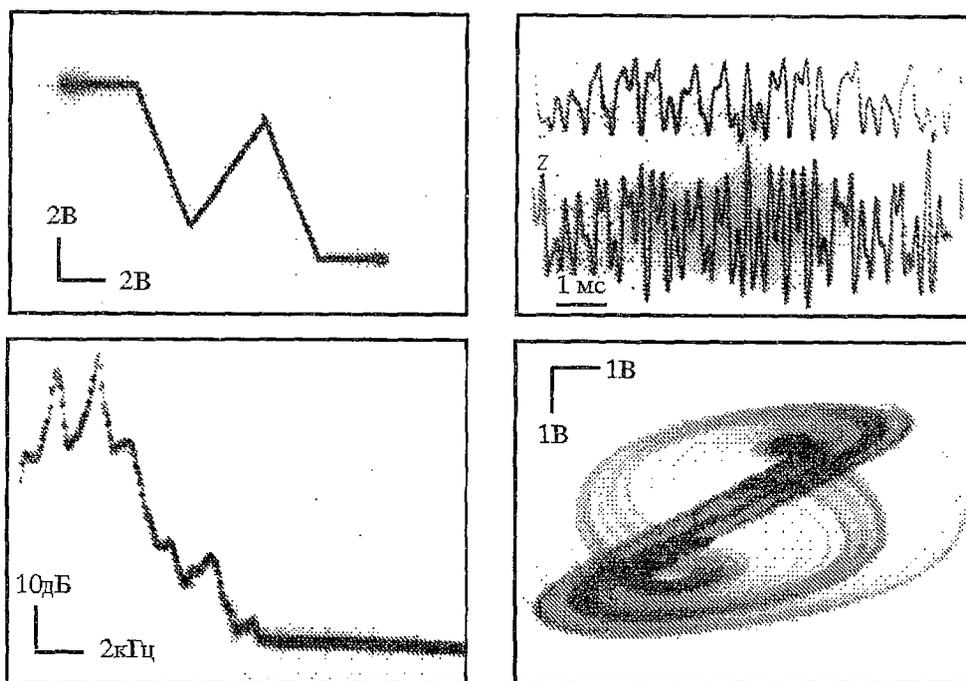


a



б

синхронного хаотического отклика в паре ведущая – ведомая система. При этом указанные генераторы попарно выполняли функции ведущей и ведомой систем. Пассивные элементы, входящие в состав генераторов, подбирались с точностью 1÷3 %. Эксперименты показали, что при условии выбора одинаковых параметров ( $M, T, \omega, \alpha, E_1, E_2$ ) все генераторы демонстрируют идентичные по структуре и основным характеристикам хаотические колебания. Замена операционных



в

Рис. 7. Физический эксперимент: форма характеристики нелинейного элемента; осциллограммы сигналов  $x$  и  $z$  на выходах подсистем 2 и 3, соответственно; спектр мощности сигнала  $x=U_{C1}$ ; фазовый портрет в плоскости  $(x,z)$  для различных значений коэффициента усиления:  $a - M_1$ ,  $б - M_2$ ,  $в - M_3$  ( $M_2 < M_1 < M_3$ ).  $R_1=800$  Ом,  $C_1=33$  нФ,  $L=20$  мГн,  $C_2=68$  нФ,  $R_2=40$  Ом

усилителей или пассивных элементов (в пределах указанной точности) не приводит к нарушению воспроизводимости режимов! Более того, усилители КР1401УД2Б являются полностью взаимозаменяемыми с усилителями серии LM324А.

С другой стороны, то обстоятельство, что используемые в схеме операционные усилители работают в линейном режиме, позволяет применять и другие серии усилителей, например КР544УД1Б, сохраняя при этом совокупность типовых хаотических режимов.

Методика экспериментов по проверке прецизионности была основана на том, что для идентификации в физическом эксперименте двух прецизионных хаотических сигналов достаточно подать их на два входа осциллографа (входы X и Y). При этом, если сигналы совпадают или близки по форме и не имеют фазового сдвига один относительно другого, то на экране осциллографа наблюдается их фазовый портрет в виде прямой или очень близкой к ней линии. В случае несовпадающих сигналов фазовый портрет имеет существенно более сложную форму.

В качестве примера на рис. 8, *а* продемонстрирован синхронный хаотический отклик двух произвольно выбранных из тестируемых генераторов, один из которых играл роль ведущей системы, а другой – ведомой системы. Верхняя линия соответствует случаю, когда один и тот же хаотический сигнал подавался одновременно на оба входа осциллографа. Таким образом, она отражает ситуацию с идеальным синхронным откликом и выступает в качестве тестовой (калибровочной) линии. Для сравнения рис. 8, *б* иллюстрирует десинхронизацию (или отсутствие синхронного отклика), наблюдаемую при проведении экспериментов с генераторами, не являющимися прецизионными.

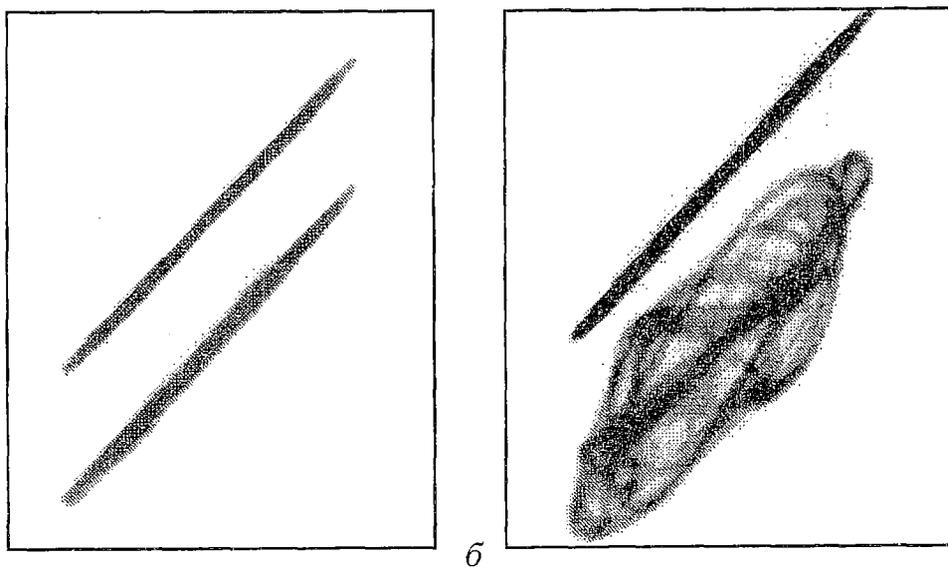


Рис. 8. Физический эксперимент: *а* – синхронный хаотический отклик (нижняя линия); *б* – десинхронизация отклика. Верхние линии соответствуют синхронному отклику для тестового хаотического сигнала (один и тот же хаотический сигнал синфазно подается на входы *X* и *Y* осциллографа)

### Заключение

Таким образом, в работе рассмотрен прецизионный генератор хаотических колебаний с кусочно–линейной характеристикой нелинейного элемента.

Показано, что воспроизводимость хаотических режимов генератора обеспечивается использованием в его конструкции нелинейного элемента с кусочно–линейной характеристикой. Проведен анализ математической модели генератора и исследованы его типовые хаотические режимы. Обсуждена схмотехническая реализация нелинейного элемента и приведены результаты физических экспериментов в различных экспериментальных макетах генераторов. То обстоятельство, что в схеме нелинейного элемента используются только пассивные *R, C*–элементы в сочетании с усилителями, работающими в линейном режиме, позволяет получать прецизионные хаотические режимы как в различных образцах генераторов, так и в отдельно взятом генераторе при замене его комплектующих элементов на ближайшие аналоги.

Из сказанного, однако, не следует делать вывод о том, что применение в генераторах хаоса нелинейных элементов с кусочно–линейными характеристиками и их схмотехнических реализаций, использующих только линейные компоненты, является гарантией прецизионности генераторов в рассмотренном в работе контексте. Отмеченные качества генераторов служат необходимым, но недостаточным условием их прецизионности. Дело в том, что помимо кусочной (сегментной) линейности характеристики нелинейного элемента, не менее важное значение имеет и конкретная форма характеристики. Так, цепь Чуа [7] имеет трехсегментную кусочно–линейную характеристику нелинейного сопротивления, допускающую схмотехническую реализацию с помощью операционных усилителей, работающих в линейном режиме. Вместе с тем, она не может быть отнесена к прецизионным генераторам из–за «on–off» переменяемости [16,17], наблюдаемой в хаотическом отклике в реальных условиях и сопровождаемой нерегулярными «потерями» идентичности сравниваемых хаотических сигналов на входе и выходе ведомой системы.

В работе использована методика исследования динамических режимов генератора с помощью пакета прикладных программ Electronics Workbench (версия 4.1).

Прецизионность рассмотренного в работе генератора, наряду с простотой конструкции и разнообразными хаотическими режимами, делают возможным его использование в различных прикладных задачах, а также в учебном процессе, например, при постановке лабораторных работ.

Авторы признательны А.С. Дмитриеву, С.О. Старкову, Ю.В. Андрееву и М.Е. Широкову за полезные обсуждения проблемы, а также благодарны Ю.Г. Митрохину за сотрудничество при создании макетов генераторов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 97-01-00800 и № 99-02-18315).*

### Библиографический список

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atm. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130.
2. Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
3. Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О. Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 10. С. 4.
4. Хаслер М. Передача информации с использованием хаотических сигналов. Последние достижения // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. №11. С.33.
5. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in Chaotic Systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64. P. 821.
6. Волковский А.Р., Рувльков Н.Ф. Синхронный хаотический отклик нелинейной колебательной системы как принцип детектирования информационной компоненты хаоса // Письма в ЖТФ. 1993. Т.9, №3. С.715.
7. Madan R.N. Chua's circuits, a paradigm for chaos. Singapore: World Scientific, 1993.
8. Nishio Y., Mori S., Saito T. An approach toward higher dimensional autonomous chaotic circuits // Proc. NDES'92, Russia. Moscow, 1992. Vol. 2. P. 60.
9. Rulkov N.F. Images of synchronized chaos: Experiments with circuits // Chaos. 1996. Vol. 6, № 3. P. 2629.
10. Дмитриев А.С., Панас А.И. Странные аттракторы в кольцевых автоколебательных системах с инерционными звеньями // ЖТФ. 1986. Т.56, вып. 4. С.759.
11. Дмитриев А.С., Панас А.И. Квазипериодические, резонансные и хаотические режимы в кольцевых автоколебательных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т.9. С.1085.
12. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
13. Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O. Ring oscillating systems and their application to the synthesis of chaos generators // Int. J. of Bif. and Chaos. 1996. Vol.6. № 5. P. 851.
14. Дмитриев А.С., Кислов В.Я., Старков С. Экспериментальное исследование образования и взаимодействия странных аттракторов в кольцевом автогенераторе // ЖТФ. 1985. Т.55, №12. С. 2417.
15. Дмитриев А.С., Старков С.О. Исследование хаотической динамики кольцевого автогенератора с асимметричной характеристикой нелинейного элемента // РЭ. 1986. Т.31, №12. С. 2396.
16. Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O., Kuzmin L.V. Experiments on RF band communication using chaos // Int. J. of Bif. and Chaos. 1997. Vol.7, № 11. P. 2511.
17. Дмитриев А.С., Кузьмин Л.В., Панас А.И., Старков С.О. Эксперименты по передаче информации с использованием хаоса через радиоканал // РЭ. 1998. Т.43, № 9. С. 1115.

Московский физико-  
технический институт  
Институт радиотехники  
и электроники РАН

Поступила в редакцию 25.02.99  
после переработки 14.04.99

## PRECISION CHAOTIC OSCILLATOR WITH PIECEWISE-LINEAR CHARACTERISTIC OF NONLINEAR ELEMENT

*L.V. Kuzmin, N.A. Maximov, A.I. Panas*

Precision chaotic oscillator with 1.5 degrees of freedom is considered. It consists of two linear and one nonlinear subsystems which are connected in series and closed in a loop. The nonlinear subsystem has five-segment piecewise-linear amplitude characteristic. Typical chaotic modes of the oscillator are analyzed numerically and in physical experiments. The use of special software Electronics Workbench (the electronic lab in a computer) for analysis of chaotic modes is demonstrated. The circuit schematic of the nonlinear subsystem is considered.



*Кузьмин Лев Викторович* – родился в 1974 году. Окончил факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института (1997), в настоящее время аспирант МФТИ. Область научных интересов – хаотическая динамика и ее использование в информационных технологиях. Автор более 10 работ.



*Максимов Николай Андреевич* – родился в 1949 году. Окончил МГУ им. Ломоносова, физический факультет (1973). В настоящее время – старший научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН. Кандидат физико-математических наук (1989). Лауреат премии Совета Министров СССР (1989). Область научных интересов – динамический хаос, радиофизические, в том числе коммуникационные системы, использующие хаотические сигналы. Автор более 50 работ. E-mail: chaos@mail.cplire.ru



*Панас Андрей Иванович* – родился в 1955 году. Окончил Московский энергетический институт (1978). Кандидат физико-математических наук (1988). В настоящее время старший научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – динамический хаос в радиофизических системах, информационные технологии на основе хаотической динамики. Лауреат премии Ленинского комсомола (1987). Автор более 60 научных работ.



## ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОРОВ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ И ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ХАОСА

*С.В. Емец, С.О. Старков*

Обсуждается применение цифровых методов для генерации хаоса и передачи информации с использованием хаотических сигналов. Показана возможность реализации этих методов с помощью сигнальных процессоров. Исследовано влияние ограниченной точности сигнальных процессоров на свойства генерируемых сигналов. Экспериментально реализована схема с нелинейным подмешиванием информации в хаотические колебания. Продемонстрирована невозможность прослушивания передачи речевых и музыкальных сигналов в канале.

### Введение

Среди областей применения идей хаотической динамики большой интерес вызывает развитие информационных технологий на основе хаоса и, прежде всего, новых, нетрадиционных способов передачи информации. Исследования в этом направлении активно проводятся, начиная с 1990 года, и к настоящему времени предложен ряд схем и моделей, осуществляющих передачу сообщений с использованием хаотических сигналов [1–9]. Привлекательность использования хаотических колебаний в качестве носителя информации обусловлена прежде всего их спектральными свойствами. Будучи по своей природе широкополосными, они обладают свойствами известных псевдослучайных носителей (например, псевдослучайных последовательностей) – быстро спадающей автокорреляционной функцией, низкой кросскорреляцией. Вместе с тем, хаотические сигналы допускают эффективное управление такими характеристиками, как форма огибающей спектра мощности [10] и плотность вероятности распределения амплитуд [11]. Генераторы хаоса характеризуются простотой конструкций, разнообразием возможных способов построения и вариантов реализации.

В основу большинства схем передачи информации с использованием хаоса положено явление хаотической синхронизации ведомой (приемник) и ведущей (передатчик) систем. Наличие синхронного хаотического отклика [1,5–6] позволяет формировать в приемнике опорный несущий хаотический сигнал и далее с его помощью извлекать информационную составляющую без использования специальных дополнительных цепей синхронизации. Практическое использование хаоса для передачи сигналов по физическим каналам сталкивается с рядом серьезных проблем, связанных с невысокой робастностью предложенных схем. Для получения синхронного отклика необходимо выдерживать достаточно

жесткие требования к идентичности параметров передающей и приемной частей системы (~1%) [12,14–16]. Имеющиеся технологические ограничения, разброс параметров используемых радиокомпонентов существенно сужают возможности практической реализации предложенных моделей хаотических коммуникационных схем в аналоговом исполнении.

Одним из путей решения возникающих проблем является использование цифровых методов для генерации хаотических сигналов и последующей их обработки в передающей и приемной частях коммуникационных систем. В качестве источников дискретных хаотических сигналов в этом случае удобно использовать дискретные динамические системы – отображения. Поведение этих систем, особенности их динамики, характерные наблюдаемые в них бифуркационные явления достаточно хорошо изучены, поэтому именно отображения удобно использовать в качестве объектов для цифрового моделирования.

К настоящему времени предложено несколько схем, демонстрирующих возможность передачи сообщений на основе дискретных динамических систем с хаосом [17–20]. Вопросы применимости цифровых методов для генерации хаотических сигналов, построения цифровых схем передачи сообщений с использованием хаоса требуют специального исследования. Предварительный анализ этих возможностей проводился в [21–24]. В данной работе обсуждаются особенности цифровых алгоритмов генерации хаотических сигналов, показана возможность создания генераторов хаоса на основе цифровых сигнальных процессоров (ЦСП), рассматриваются свойства полученных генераторов, а также приводятся результаты экспериментов по передаче речевых и музыкальных сигналов с использованием ЦСП.

## 1. Влияние ограниченной точности цифровых методов

Применение цифровых методов предполагает временную дискретизацию сигналов, и, вообще говоря, квантование их амплитуды по уровню. При цифровом моделировании динамического хаоса возникает ряд вопросов, связанных с конечной точностью задания параметров системы, начальных условий, а также ограниченной точностью вычислений вследствие конечного представления переменных (числа битов).

Отображения, как правило, демонстрируют хаотическое поведение в достаточно широкой области параметров, поэтому в пространстве параметров всегда можно выбрать такую сетку, на которой значения параметров и начальные условия в точности соответствуют выбранному битовому представлению. Более серьезная проблема – ограниченная точность представления переменных. Переход в отображениях к конечному битовому представлению переменных может существенным образом менять их динамику. Ограниченное битовое представление переменных в точечных отображениях означает, что пространство состояний содержит конечное число ячеек, общее количество которых равно  $N \cdot 2^k$ , где  $N$  – число независимых переменных,  $k$  – число битов, используемых для представления. Поэтому при выборе параметров, соответствующих хаотическому поведению отображений при достаточно долгом итерировании (когда число шагов превышает возможное число состояний) мы обязательно попадаем в уже однажды посещаемую ячейку фазового пространства. Следовательно, существует максимальная конечная длина неповторяющихся фрагментов отсчетов амплитуд  $\{x_i\}$ . Здесь необходимо отметить, что проблема истинности хаотического движения и конечномерности пространства состояний возникает и при традиционном компьютерном моделировании хаотической динамики отображений. Вопрос заключается в используемом критерии хаотичности при таком моделировании. Обычно в компьютерных экспериментах при рассмотрении относительно коротких выборок отсчетов (по сравнению с числом возможных состояний) все основные свойства хаотического движения – непериодичность, «перемешивание» и

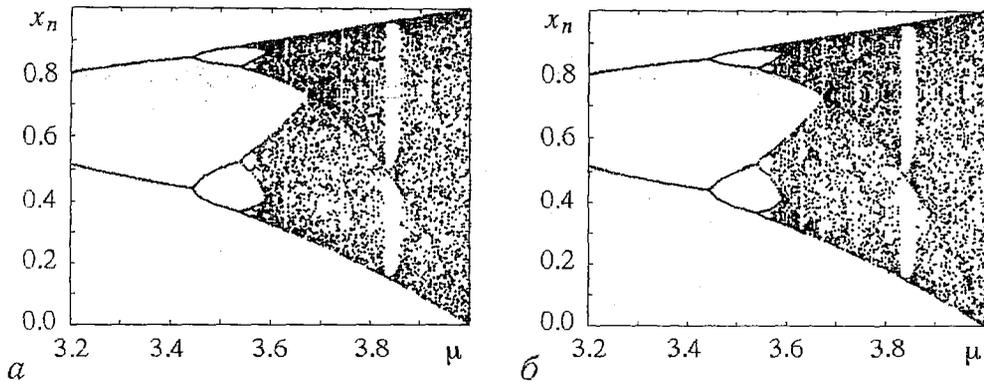


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма логистического отображения при вычислениях: *a* – с плавающей точкой; *б* – с точностью 16 битов; *в* – с точностью 8 битов

экспоненциальное «разбегание» траекторий – сохраняются. Использование вычислений с ограниченной точностью может приводить к ситуации, когда непериодичность последовательности генерируемых отсчетов нарушается уже на относительно коротких сериях, отсчеты начинают часто попадать в одни и те же ячейки фазового пространства, то есть могут возникать периодические фрагменты с относительно малыми периодами.

Поэтому важно выяснить, какая минимально возможная точность представления (число битов) не искажает характер динамических режимов хаотических отображений. Анализ влияния точности представления на динамику отображений проводился на основе численных экспериментов. В качестве критерия оценки степени этого влияния использован метод построения бифуркационных диаграмм, отражающих поведение (периодичность/непериодичность), а также совокупность бифуркационных свойств в широкой области изменения параметров. Неустойчивость движения оценивалась на основе анализа поведения максимального ляпуновского показателя. Ниже приведены результаты исследований, проводимых на примере логистического отображения

$$x_{n+1} = \mu(1 - x_n)x_n. \quad (1)$$

Для отображения (1) последовательно строились бифуркационные диаграммы, соответствующие вычислениям от двойной точности до вычислений с точностью 8 битов. Реально, при наших оценках, в сечение бифуркационной диаграммы выводилось до 1000 точек. Результаты моделирования представлены на рис. 1, 2. Сравнение диаграмм на рис. 1, *a* (вычисления с двойной точностью, 64 бита) и на рис. 1, *б* (вычисления с точностью 16 битов) свидетельствует о совпадающей динамике логистического отображения в широкой области изменения параметра  $\mu$ . Расположение областей непериодического движения, а также характерных «окон устойчивости» на рис. 1, *a* и *б* практически идентичны. Дальнейшее огрубление вычислений приводит к нарушению структуры диаграммы, появлению многочисленных новых окон периодичности. Существенное изменение характера динамических режимов начиналось с точности 13–14 битов. На рис. 1, *в* приведена диаграмма, соответствующая точности вычислений 8 битов, где практически отсутствуют области непериодического поведения. Более детальное сопоставление фрагментов бифуркационных диаграмм (рис. 2, *a, б*) подтверждает

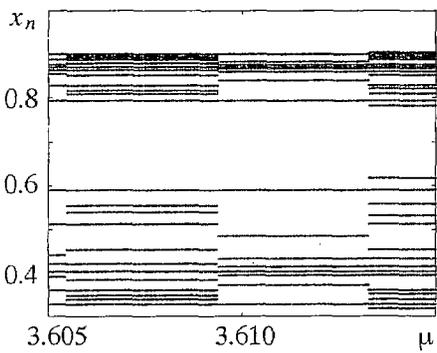
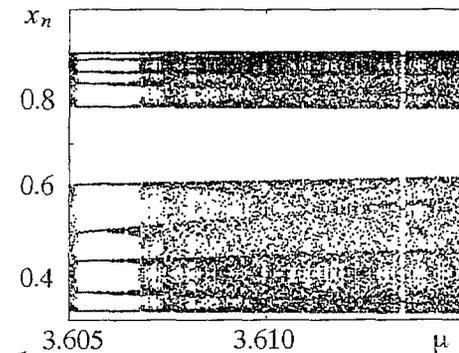
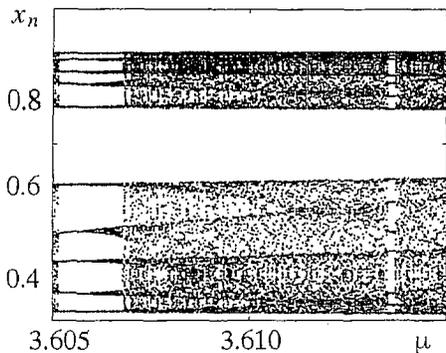


Рис. 2. Фрагмент бифуркационной диаграммы логистического отображения при вычислениях: *a* – с плавающей точкой; *б* – с точностью 16 битов; *в* – с точностью 8 битов

хаотических траекторий, скорости их «разбегания» практически постоянны во всем диапазоне изменения параметра  $\mu$ .

вывод о том, что при точности вычислений вплоть до 16 битов динамика системы остается практически неизменной, тогда как дальнейшее ухудшение точности вычислений приводит к потере хаотичности и установлению только периодических режимов (рис. 2, *в*). Наряду с анализом бифуркационных свойств для отображения (1) проводились оценки устойчивости возникающих режимов. На рис. 3 представлены зависимости показателя Ляпунова при вычислениях с точностью 64 бита (рис. 3, *a*) и с точностью 16 битов (рис. 3, *б*). Длина выборок, по которым рассчитывался показатель Ляпунова, составляла  $2 \cdot 10^4$ . Как следует из сравнения приведенных зависимостей, свойства «разбегания» практически постоянны во

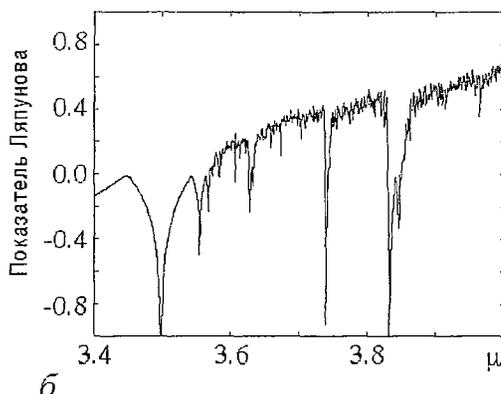
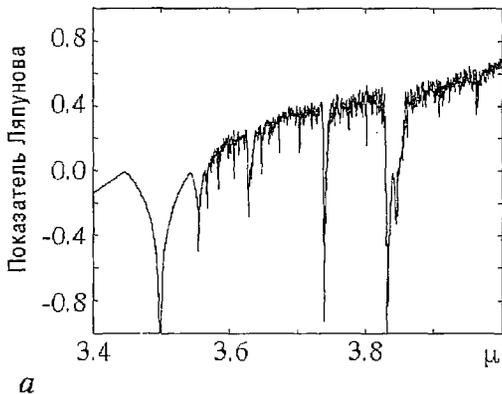


Рис. 3. Зависимость ляпуновского показателя от параметра  $\mu$  логистического отображения при вычислениях: *a* – с плавающей точкой; *б* – с точностью 16 битов

## 2. Выбор элементной базы

При создании реальных коммуникационных схем, использующих хаотическую несущую, возникает проблема выбора элементной базы. Применение

универсальных микропроцессорных комплектов (8051 и др.) наталкивается на серьезные ограничения частоты дискретизации (реально не превышающей 10 кГц). Весьма перспективным представляется использование специализированных сборок дискретных элементов, например, программируемых логических матриц, FPGA (Field Programmable Gate Array), CPLD (Complex Programmable Logic Devices). Однако наиболее широко применяемыми в настоящее время средствами цифровой обработки сигналов являются ЦСП, обладающие высокой вычислительной производительностью, возможностью сопряжения с аналоговыми частями схемы, универсальностью средств отладки и относительно низкой стоимостью. По способу представления операций над сигналами процессоры подразделяются на два типа: с плавающей точкой и с фиксированной точкой.

Проведенный в предыдущем разделе анализ свидетельствует о том, что арифметика 16-битовых сигнальных процессоров не приводит к изменению характера режимов моделируемых систем в широкой области параметров, и с этой точки зрения их применение для генерации хаотических сигналов является корректным.

Для проведения экспериментов выбран сигнальный процессор ADSP-2181 фирмы Analog Device. Процессор использовался в составе базового комплекта EZkitLite совместно с микросхемой аналогового ввода/вывода (кодеком) AD-1847. Блок-схема платы EZkitLite приведена на рис. 4. В применяемом процессоре используется 16-битовое представление переменных, что по точности приблизительно соответствует пяти десятичным разрядам. Встроенные операции данный процессор позволяет выполнять с фиксированной точкой. При представлении данных каждому разряду соответствует степень числа 2, то есть поля под мантиссу и порядок не выделяются. В зависимости от расстановки степеней числа 2 возможны два различных представления. Первое представление – в формате целых чисел. В этом случае динамический диапазон составляет  $-2^{15} \div 2^{15}$  (знаковое представление) либо  $0 \div (2^{16}-1)$  (беззнаковое представление). Второе представление – с фиксированной точкой. Для этого вида динамический диапазон составляет  $-1 \div (1-2^{-15})$  (знаковое представление) и  $0 \div (2-2^{-15})$  (беззнаковое представление). В последнем случае величины, меньшие  $2^{-15}$ , являются нулями.

Для обработки аналоговых информационных сигналов использовалась микросхема аналогового ввода/вывода (кодек) AD-1847. Кодек имеет два 16-битовых цифро-аналоговых преобразователя (ЦАП) и два 16-битовых аналого-цифровых преобразователя (АЦП), управляемые входные усилители для обеспечения большего динамического диапазона, мультиплексоры и аттенюаторы для динамического переключения аналоговых входов и выходов, тактовый генератор и цифровую часть управления и приема/передачи данных в сигнальный процессор. Это позволяет использовать плату EZkitLite для проведения экспериментов по обработке сигналов, ограниченных звуковым диапазоном частот, без дополнительных доработок. Обмен данными между кодеком и процессором производится по последовательному каналу. После инициализации кодек передает сигнальному процессору пары отсчетов АЦП и получает от него пары отсчетов ЦАП через интервал, определяемый частотой дискретизации. Микросхема аналогового ввода/вывода AD-1847 позволяет работать с частотой дискретизации от 5 до 48 кГц. Тактовая частота процессора

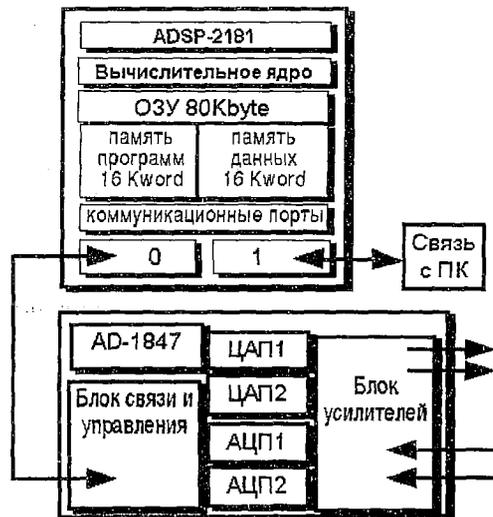


Рис. 4. Блок-схема платы сигнального процессора. Сигнальный процессор ADSP-2181 и микросхема аналогового ввода/вывода AD1847

33 МГц обеспечивает возможность использования до 1000 простых операций (кроме деления) для обработки входных отсчетов, соответствующих звуковым фрагментам высокого качества (частота дискретизации 44 кГц).

### 3. Генерация хаоса с использованием сигнального процессора

Для генерации цифровых хаотических сигналов с помощью сигнального процессора использовали несколько известных отображений: логистическое отображение (1); несимметричное «tent»-отображение

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 - 2x_n, & x_n \geq 0, \\ 1 + 1.8x_n, & x_n < 0; \end{cases} \quad (2)$$

двумерное отображение Хенона

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = \beta x_n. \end{cases} \quad (3)$$

Для 16-битового процессора при точности  $2^{-15}$  диапазон вычислений не выходит за пределы интервала  $(-1,1)$ , поэтому применение сигнальных процессоров с фиксированной точкой требует перенормировки исходных используемых точечных отображений.

В случае отображения (1) дополнительного преобразования не требуется. Более того, поскольку функция (1) лежит в первом квадранте, можно воспользоваться беззнаковым представлением.

Для (2) подобная перенормировка приводит отображение к виду

$$x_{n+1} = \begin{cases} 0.5 - 2x_n, & x_n \geq 0, \\ 0.5 + 1.8x_n, & x_n < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Перенормированное отображение Хенона (3) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.5 - 2\alpha x_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = \beta x_n. \end{cases} \quad (5)$$

Цифровое моделирование динамики отображений продемонстрировало идентичность видов исходных и получаемых с помощью 16-битового сигнального процессора отображений. Соответствующий вид реализованного с помощью сигнального процессора аттрактора Хенона при трех наборах значений параметров  $(\alpha, \beta)$  представлен на рис. 5, а–в. В классической точке пространства параметров  $(\alpha=1.4, \beta=0.3)$  [25] наблюдался типичный аттрактор Хенона (рис. 5, а). Точка  $(\alpha=1.498, \beta=0.15)$  соответствует в пространстве параметров окну периодичности с периодом 5 [26]. В эксперименте также наблюдался периодический режим (рис 5, б). Для  $\alpha=1.252, \beta=0.39$  вновь реализовывались хаотические колебания. Соответствующий этому режиму аттрактор приведен на рис. 5, в.

Спектры мощности сигналов, генерируемых отображениями (4), (5) с помощью сигнального процессора, приведены на рис. 6.

Поскольку генерируемые с помощью ЦСП хаотические отсчеты предполагается в дальнейшем использовать в качестве носителя информации, важное значение имеет устойчивость реализуемых алгоритмов, определение допустимого уровня возмущений, не разрушающих исходные хаотические режимы. В экспериментах в качестве внешнего возмущающего сигнала использовалась последовательность отсчетов  $\{s_n\}$ , которая представляла собой оцифрованный с

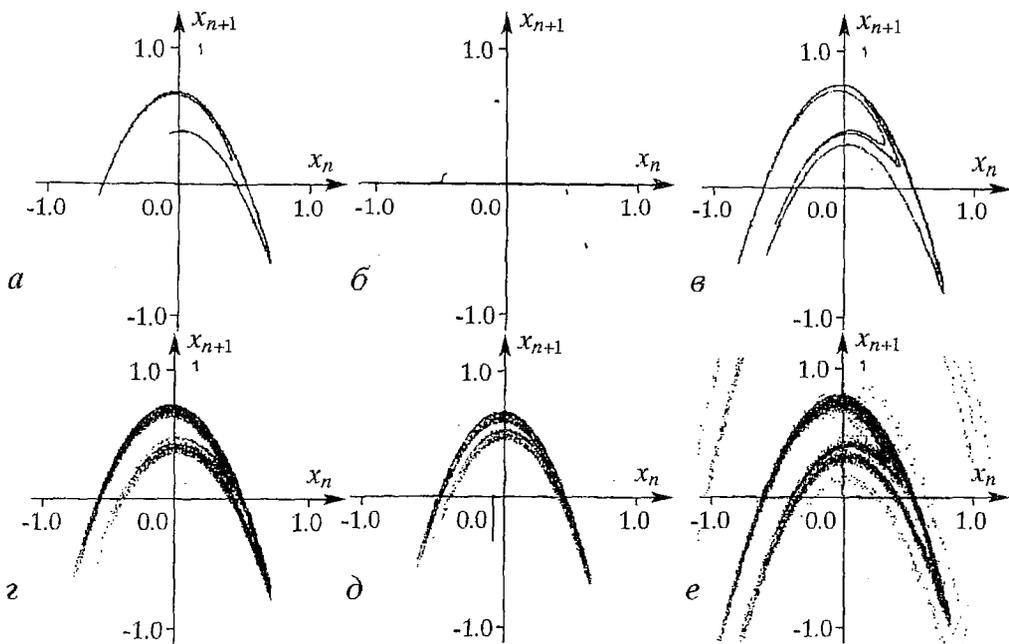


Рис. 5. Отображение Хенона, реализованное с помощью сигнального процессора: невозмущенное (а-в); при подмешивании внешнего возмущающего сигнала (г-е)

помощью АЦП тестовый аналоговый сигнал с фиксированным уровнем амплитуд. Эти отсчеты аддитивно добавлялись к хаотическим отсчетам перед функцией нелинейного преобразования исследуемых отображений  $x_{n+1}=f(x_n+s_n)$ . Вид возмущенного отображения Хенона для различных параметров приведен на рис. 5, г-е. Уровню внешнего сигнала  $-26$  дБ и параметрам  $\alpha=1.4$ ,  $\beta=0.3$  соответствует рис. 5, г. Добавление внешнего сигнала при  $\alpha=1.498$ ,  $\beta=0.15$  приводило, как и ожидалось, к возникновению более сложного режима (рис. 5, д).

Возмущение динамики отображения (5) при значениях параметров  $\alpha=1.252$ ,  $\beta=0.39$ , находящихся вблизи границы устойчивости отображения (5), приводило к тому, что отсчеты начинали попадать за пределы интервала  $(-1, 1)$ , то есть нарушалась корректность представления переменных (рис. 5, е).

Проведенные эксперименты продемонстрировали устойчивость алгоритмов сигнальных процессоров отображений (1), (3), (4) при относительно небольших уровнях возмущений (порядка  $-25 \div 30$  дБ) а также позволили выбрать значения параметров отображений (1), (4), (5), обеспечивающие устойчивую генерацию хаотических отсчетов.

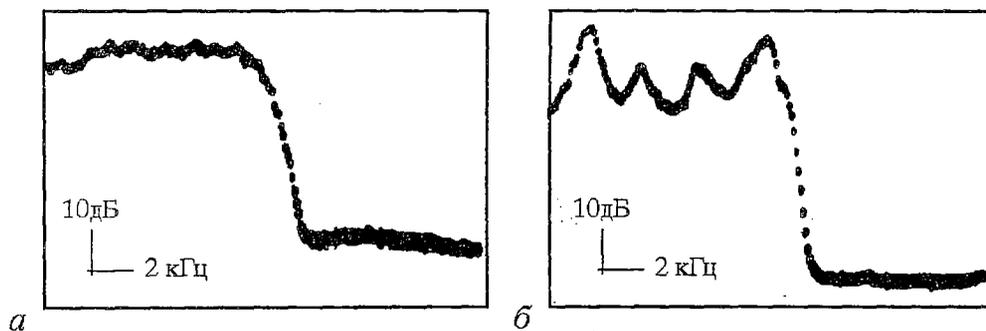


Рис. 6. Спектральные характеристики сигналов, соответствующих «tent»-отображению (а) и отображению Хенона (б)

#### 4. Схема передачи информации

В качестве базовой схемы передачи информации была выбрана схема с нелинейным подмешиванием информационного сигнала в хаотический [5,6, 12–15]. Структура рассматриваемой схемы представлена на рис. 7. Здесь  $\{s_n\}$  – последовательность отсчетов кодируемого информационного сигнала;  $x_n+s_n$  – закодированный сигнал, который передается по каналу;  $f(\cdot)$  – функция нелинейного преобразования, осуществляющая генерацию следующего отсчета по предыдущему.

Передатчик состоит из сумматора, блока вычислений следующего отсчета  $x_{n+1}$ , и блока задержки на один такт. Эти элементы замкнуты в кольцо обратной связи и при нулевом информационном сигнале передатчик генерирует выборку хаотических отсчетов  $\{x_n\}$ . При добавлении информационного отсчета, получаемого с помощью АЦП, на вход нелинейного преобразователя поступает сумма, то есть в формировании последующего хаотического отсчета принимают участие как информационный, так и собственный отсчеты  $x_{n+1}=f(x_n+s_n)$ . В канал связи поступает суммарный сигнал  $x_n+s_n$ .

Извлечение полезного сигнала в приемнике, построенном на тех же самых элементах, производится вычитанием сигнала, прошедшего по разомкнутому кольцу, из сигнала, поступающего на вход приемника. При отсутствии информационного сигнала ( $s_n=0$ ) в рассматриваемой схеме и при использовании идентичного нелинейного преобразования  $f$  в передатчике и приемнике, последний формирует синхронный хаотический отклик, представляющий собой точное воспроизведение хаотической последовательности отсчетов, генерируемых передатчиком. В результате на выходе вычитающего элемента устанавливается нулевой сигнал. При передаче информации в установившемся режиме на вход приемника поступает сигнал  $x_n+s_n$ , на выходе блока задержки формируется сигнал  $x'_n$ . После вычитания  $s_n+x_n-x'_n$  при  $x_n=x'_n$  происходит извлечение полезного передаваемого информационного отсчета  $s_n$ . Одновременно в блок задержки загружается следующее значение  $x'_{n+1}$ , которое вычисляется так же, как и  $x_{n+1}$  в передатчике, и приемник готов к обработке следующего отсчета.

В силу цифрового характера формирования хаотического сигнала и его обработки в приемнике, вопрос о воспроизводимости параметров передатчика и приемника сводится к точности вычислений. Если информационный сигнал отсутствует, то на выходе приемника наблюдается остаточный шум, связанный с конечной точностью вычислений. Экспериментальное исследование показало, что для различных типов используемых отображений (4), (5) уровень остаточного шума не превышал  $-80 \div -85$  дБ.

Поскольку в канал передается сумма информационного и хаотического отсчетов, то при относительно малом уровне информационной составляющей

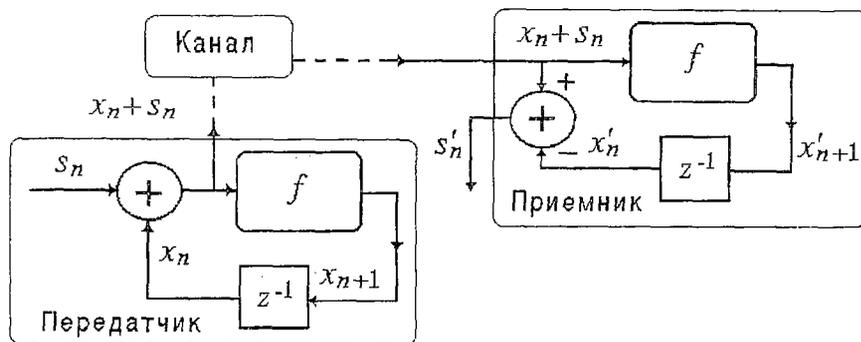


Рис. 7. Структура схемы передачи с нелинейным подмешиванием информационного сигнала в динамику хаотической системы

( $-26 \div 30$  дБ), обеспечивается определенная степень конфиденциальности передаваемой информации.

Рассматриваемая схема передачи реализована на основе одномерного отображения, но она может быть обобщена на отображения более высокого порядка  $x_{n+1} = f(x_n)$ . В этом случае информационные отсчеты добавляются к одной компоненте, а остальные компоненты остаются свободными, то есть и в передатчике и в приемнике поступают на вход блока вычислений следующего значения непосредственно из блока задержки. Такая схема, в частности, была реализована для двумерного отображения Хенона (5), где в качестве модулируемой использовалась координата  $x_n$ .

## 5. Эксперименты по передаче аналоговых сигналов

Эксперименты по передаче информации с использованием цифровых процессоров проводились для различных типов дискретных динамических систем: «tent»-отображения (4), логистического отображения (1), отображения Хенона (5). Исходный аналоговый информационный сигнал подавался на вход АЦП1 (см. рис. 4), где с частотой дискретизации 44 кГц производилась выборка отсчетов, поступающих далее на вход алгоритма передатчика. Для каждого входного отсчета передатчик формировал отсчет хаотического сигнала, моделируемый буфером в памяти и поступающий в канал связи. Одновременно этот отсчет подавался на вход ЦАП1. Приемник, получая данные из буфера, обрабатывал их по своему алгоритму и подавал восстановленный сигнал на вход ЦАП2. Таким образом, на выходе ЦАП1 имеется возможность прослушивать сигнал в канале, а на выходе ЦАП2 – восстановленный информационный сигнал. При подключении двухлучевого осциллографа к АЦП1 и к ЦАП1 можно было одновременно наблюдать информационный сигнал и сигнал в канале.

Первоначально были проведены эксперименты по передаче простых тестовых аналоговых сигналов. Рис. 8, а, б иллюстрируют передачу гармонического сигнала с использованием «tent»-отображения (4). На рис. 8, а верхний сигнал представляет собой вводимую информацию, а нижняя осциллограмма соответствует сигналу в канале. Масштаб приведенных амплитуд соответствует соотношению уровней информационного сигнала и сигнала в канале, которое составляло  $-28$  дБ. Как следует из формы сигнала в канале, он не содержит никаких признаков информационной составляющей. Качество восстановления гармонического информационного сигнала в системе иллюстрируется рис. 8, б. Нижняя и верхняя осциллограммы соответствуют извлекаемому в приемнике сигналу, и сигналу на входе передатчика. Уровень остаточных шумов, определяемый ошибками вычислительных алгоритмов сигнального процессора, не превышал  $-40$  дБ. Эксперименты продемонстрировали аналогичное качество восстановления исходного тестового сигнала и для других используемых в качестве генератора хаоса отображений (1), (5).

Следующий шаг заключался в передаче более сложных аналоговых сигналов, а именно, речевой и музыкальной информации. На рис. 8, в, г представлены результаты экспериментов по передаче речевого сигнала в системе, реализованной на основе отображения (4). Уровень входного сигнала составлял  $-30$  дБ по отношению к хаотическому сигналу (см. рис. 8, в). Остаточные шумы не превышали величину  $-35 \div 40$  дБ. При отсутствии искажений и помех в канале связи форма восстанавливаемых сигналов практически не отличалась от исходной (см. рис. 8, г). Характер спектральных характеристик сигналов в канале, которые практически повторяли спектры мощности автономных источников хаоса (см. рис. 6, а, б), свидетельствует о том, что реализованная схема передачи информации обладает конфиденциальностью, поскольку спектральная плотность передаваемых информационных речевых сигналов совпадает по полосе со спектральной плотностью хаотических сигналов и по уровню существенно ниже последних. Оценка восстанавливаемого речевого сигнала, проводимая на основании

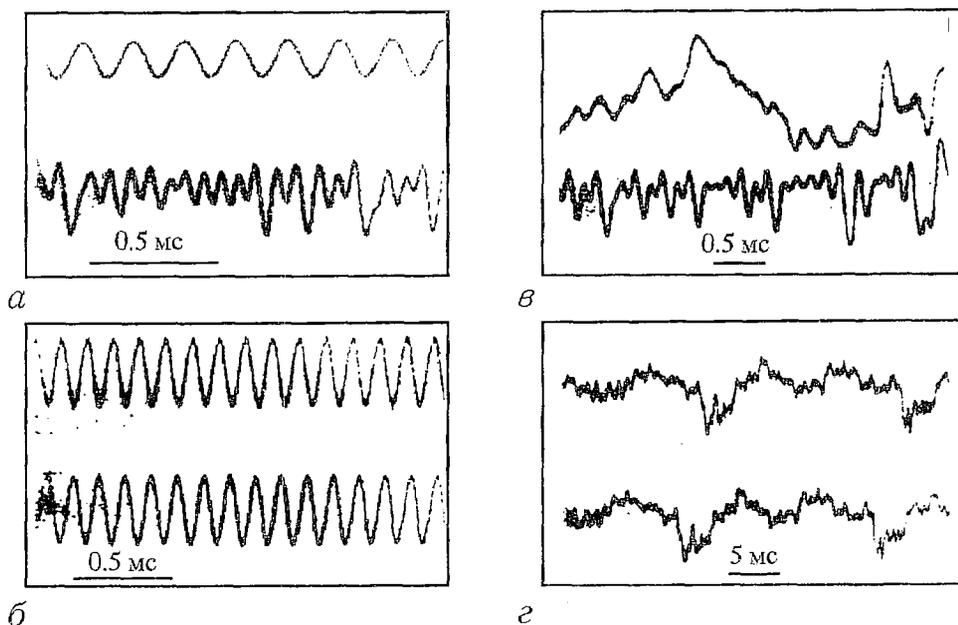


Рис. 8. Эксперименты по передаче информации с использованием сигнальных процессоров. Передача гармонического сигнала на основе «tent»-отображения (4); информационный гармонический сигнал: а – входной сигнал (верхняя осциллограмма) и сигнал в канале (нижняя осциллограмма); б – исходный и восстановленный приемником сигналы. Передача речевых сигналов на основе «tent»-отображения (4), информационный сигнал – фрагменты речи: в – входной сигнал (верхняя осциллограмма) и сигнал в канале (нижняя осциллограмма); г – исходный и восстановленный приемником сигналы

прослушивания исходного и извлекаемого в приемнике фрагментов, подтвердила хорошее качество извлекаемого сигнала. При этом прослушивание сигнала в канале не представлялось возможным. Невозможно было также идентифицировать сам факт передачи информации по каналу.

### Заключение

Проведенные исследования продемонстрировали возможность применения цифровых сигнальных процессоров для генерации хаотических сигналов и построения цифровых систем передачи с использованием хаоса в качестве информационного носителя.

Сигнальные процессоры представляют собой удобную элементную базу для создания хаотических генераторов, позволяющую достаточно точно воспроизводить характерные динамические режимы. Высокая производительность сигнальных процессоров, быстрое развитие технологий позволяют создавать высокоточные, легко тиражируемые источники хаотических сигналов в широком (вплоть до сотен МГц) диапазоне частот.

На примере схемы с нелинейным подмешиванием показана возможность передачи информационного сигнала с помощью хаотической несущей с высоким качеством воспроизведения в приемной части системы. Экспериментально продемонстрирована конфиденциальность передачи аналоговых сообщений звукового диапазона (речь, музыка).

Авторы выражают признательность А.С. Дмитриеву, А.И. Панасу за полезные обсуждения в ходе выполнения настоящей работы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-18315).*

## Библиографический список

1. Pecora L.M., Carrol T.L. Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, № 8. P. 821.
2. Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L., Parlitz U. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 709.
3. Parlitz U., Chua L., Kocarev L., Halle K., Shang A. Transmission of digital signals by chaotic synchronization // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1992. Vol. 2, № 4. P. 973.
4. Cuomo K., Oppenheim A. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 1. P. 65.
5. Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С. Передача информации с использованием детерминированного хаоса // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38, № 7. С. 1310.
6. Волковский А.Р., Рульков Н.В. Синхронный хаотический отклик нелинейной системы передачи информации с хаотической несущей // *Письма в ЖТФ.* 1993. Т. 38, № 7. С. 1310.
7. Halle K.S., Wu C.W., Itoh M., Chua L.O. Spread spectrum communication through modulation of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1993. Vol. 3, № 2. P. 469.
8. Hasler M., Dedieu H., Kennedy M., Schweizer J. Secure communication via Chua's circuit // *Proc. International Symposium on Nonlinear Theory and Applications,* 1993, Hawaii, USA. P. 87.
9. Heyes S., Grebogi C., Ott E. Communicating with chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, № 20. P. 87.
10. Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O. Ring oscillating systems and their application to the synthesis of chaos generator // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, № 5. P. 851.
11. Gotz M., Kelber K., Schwarz W. Discrete-time chaotic coders for information encryption // *Proc. NDES'96.* Sevilla, Spain, 1996. P. 15.
12. Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С. Влияние возмущающих факторов на работоспособность системы передачи информации с хаотической несущей // *Радиотехника и электроника.* 1995. Т. 40, № 2. С. 265.
14. Dmitriev A., Panas A., Starkov S. Transmission of complex analog signals by means of dynamical chaos // *Proc. NDES'95.* 1995. Dublin. Ireland. P. 241.
15. Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O. Experiments on music and speech transition in system with nonlinear mixing of chaotic and information oscillations // *Proc. ECCTD'95 / Istanbul.* Turkey. 1995. P.475.
16. Panas A.I., Dmitriev A.S., Kuzmin L.V., Starkov S.O. Experiments on RF-band communication using chaos // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1997. Vol. 7, № 11. P. 2511.
17. Bohme F., Schwarz. The chaotizer-dechaotizer channel // *IEEE Trans. on Circuits and Systems II.* 1993. Vol. 40, № 10. P. 660.
18. Itoh M., Murakami H. Chaos synchronization in discrete-time dynamical systems and secure communication // *Proc. European Conference on Circuit Theory and Design.* 1993. P. 611.
19. Kelber K., Kiliyas T. Analysis of encoder-decoder-system based on digital filter structure with two's complements overflow characteristics // *Proc. ISCAS'96.* 1996. Vol. 3. P. 166.
20. Restituto M.D., Ahumada R.L., Vasques A.E. Secure communication using CMOS current-mode sampled-data circuits // *Proc. Nonlinear Dynamics of Electronic System.* 1995. P. 237.
21. Дмитриев А.С., Емец С.В., Панас А.И., Старков С.О. Эксперименты по применению сигнальных процессоров для передачи информации с использованием хаотических колебаний // *Препринт ИРЭ РАН.* 1997, № 618.
22. Starkov S.O., Emetz S.V. Digital communication system using chaos // *Proc. International Conference Control of Oscillation and Chaos.* 1996. P. 207.
23. Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O., Emetz S.V. Digital processing for chaos generation and information transmission // *Proc. NDES'97.* Moscow. 1997. P. 370.

24. *Dmitriev A., Starkov S., Emetz S.* Chaotic communication using digital signal processing // Proc. NOLTA '98. Crans–Montana. Switzerland. 1998. P. 1093.

25. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Москва. Мир. 1988. С.112.

26. *Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е.* Структура периодических орбит хаотической автоколебательной системы, описываемой разностными уравнениями второго порядка // РЭ. 1994. Т. 39, № 9. С. 1392.

*Институт радиоэлектроники РАН*

*Поступила в редакцию 24.12.98*

## USING OF DIGITAL SIGNAL PROCESSORS FOR CHAOS GENERATION AND CHAOTIC COMMUNICATION

*S.O. Starkov, S.V. Emetz*

The use of digital processing for chaos generation and chaotic communication is discussed. The possibility of implementation of the digital signal processors is shown. The affect of digital processing precision on chaos properties is investigated. Chaotic communication scheme with nonlinear mixing of information and chaos, based on digital signal processor, is realized. Experiments on voice and music transmission are carried out.



*Старков Сергей Олегович* – 1956 года рождения. Окончил факультет радиотехники и электроники Московского физико–технического института (1979), кандидат физ.–мат. наук (1987). Старший научный сотрудник ИРЭ РАН. Область научных интересов: динамический хаос в радиоэлектронных устройствах; информационные технологии на основе динамического хаоса. Автор более 60 научных трудов. Лауреат премии Ленинского комсомола в области науки и техники. E–mail: chaos<chaos@mail.cplire.ru>



*Емец Сергей Вячеславович* – 1973 года рождения. Окончил факультет радиотехники и электроники Московского физико–технического института (1996). В настоящее время аспирант ИРЭ РАН. Область научных интересов: использование динамического хаоса для передачи информации, цифровые методы обработки сигналов. Автор 5 публикаций.



## **ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛОКОМОТОРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЧЕЛОВЕКА, ВЫЗВАННЫХ ВИБРАЦИОННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ НА МЫШЦЫ**

*Я.И. Мольков, М.М. Суцук, А.С. Кузнецов, А.К. Козлов, Д.Г. Захаров*

Предложена и рассмотрена феноменологическая модель центрального генератора, которая в рамках традиционных представлений о мотонейронной и скелетно-мышечной системе ноги человека обеспечивает качественное описание динамики произвольных шагательных движений, вызванных вибрацией мышц, в частности, бистабильности режимов шагания «вперед» и «назад» и хаотических переключений между ними. Модель представляет из себя два автогенератора с нелинейной связью, действие которой качественно похоже на действие комбинации возбуждающей и подавляющей химических связей, характерных для нейронных систем. Конкретный анализ выполнен на примере взаимодействия двух идентичных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга.

### **Введение**

Первостепенной задачей любой области познания является установление основополагающих принципов, которые, с одной стороны, позволяют систематизировать результаты наблюдений, а с другой, служат фундаментом для построения теоретических моделей. Несомненным достижением последних десятилетий является установление таких принципов в нейробиологии – одной из наиболее сложных областей с точки зрения адаптации в ней традиционных подходов точных наук. В этом направлении наибольшие успехи достигнуты на клеточном уровне, когда речь идет о построении моделей нейронов и простейших актов их взаимодействия. Иная ситуация складывается в случае многоклеточных макросистем. Из-за чрезвычайной сложности и большого разнообразия явлений на макроуровне из единства механизмов генерации электрических импульсов (потенциалов действия) в нервных системах еще не следует однозначный вывод, что устройство и функционирование нервных систем, управляющих поведением различных животных, будут иметь сходство даже для таких сравнительно простых его форм, как локомоция (передвижение в окружающей среде). Тем не менее тщательные наблюдения, выполненные к настоящему времени, свидетельствуют в пользу существования общего принципа – принципа центрального генератора паттернов (ЦГП), который гласит, что нервной системе для генерации ритмических движений при локомоции не требуется обратная связь от органов чувств (см., например, обзорные статьи [1–4]).

Наиболее весомые подтверждения этого проистекают из исследований, в которых часть нервной системы изолируется от внешнего воздействия, например,

с помощью медикаментозного воздействия или посредством физического удаления из организма. Для низших животных это легко осуществимо и в соответствующих экспериментах неоднократно демонстрировалось, что действительно существует центральный (то есть не зависящий от периферии) генератор ритма или, как часто говорят, паттернов, который создает сложный многоканальный выход, управляющий локомоцией. Так, например, акула, у которой рассечен спинной мозг около головы и разорвана подавляющая часть так называемых афферентных связей, подводящих сигналы к спинному мозгу от периферии, могла совершать плавательные движения несколько часов без специальных стимулов. Более того, моторные выходы (то есть сигналы, управляющие мышцами) к частям, которые разделены областями с разорванными афферентными связями, были хорошо скоординированы, даже когда животное после инъекции яда кураре становилось совершенно неподвижным (эти и другие примеры обсуждаются более подробно в обзорных статьях [1,2]).

Для высших животных имеются лишь косвенные, хотя достаточно убедительные свидетельства наличия ЦПП. Однако получить информацию о его расположении, а тем более о схеме (даже функциональной) значительно труднее. Тем не менее известные данные позволяют сделать вывод, что некоторые типы локомоторного поведения могут осуществляться без привлечения высших отделов нервной системы, а ЦПП, управляющие простейшими ритмическими движениями, могут располагаться в спинном мозге. Наиболее впечатляющими являются опыты с кошками. У кошек, подвергшихся после рождения декортикации (то есть удалению коры больших полушарий головного мозга), в дальнейшем формировался рисунок локомоторного поведения такой, что неискушенный наблюдатель не обнаруживал в нем отличий от движений нормальных кошек. Локомоция выглядела вполне целенаправленной в поисках и потреблении пищи, и кошки даже осуществляли движения передними лапами, которые можно было квалифицировать как составляющую компоненту обучения методом проб и ошибок. Более того, после декортикации кошки могли приносить потомство, ухаживать за новорожденными котятками и осуществлять другие движения, которые выглядели вполне осмысленными.

В 1966 году в своей пионерской работе М.Л.Шик, Ф.В.Северин и Н.Г.Орловский [5] продемонстрировали, что декортированные кошки (то есть у которых перерезана стволовая часть головного мозга) могли ходить, если на область мозгового ствола действовал электрический стимул в виде сравнительно слабого постоянного тока (примерно 10-20 мА). Если ток увеличивался, скорость и тип локомоторного движения существенно изменялись от медленной ходьбы к иноходи и галлопу. Таким образом, простой неспецифический (то есть с поведением, ничем не напоминающим локомоторный паттерн) стимул мог вызывать и изменять сложное поведение, включающее координацию большого количества суставов и мышц. Безусловно локомоторный паттерн у животных со спинным мозгом, изолированным от мозжечка, и в отсутствие афферентных потоков от сенсорных нейронов гораздо беднее, и эти две компоненты существенны для локомоции в изменчивой внешней среде. Однако важно то, что эти компоненты действуют на ЦПП, в котором условия существования автоколебаний могут выполняться без их участия.

Подробные исследования устройства и автономных режимов функционирования нервных систем, связанных с ЦПП у низших животных, решили вопрос об их существовании и позволили построить не только феноменологические модели ЦПП, но и модели, опирающиеся непосредственно на нейрофизиологические данные (см., например, специальный выпуск [6] и цитированную в нем литературу). Что касается высших животных, то хотя предложенные модели ЦПП отражают некоторые качественные особенности смены режимов локомоции, они в значительной степени неконкретны, а гипотезы, на которых они базируются, можно квалифицировать лишь как правдоподобные и требующие дальнейшего обоснования. Еще хуже дело обстоит, когда речь заходит о локомоции человека. Проблема усложняется тем, что метод электрической стимуляции спинного мозга

при исследованиях на здоровых людях отпадает по вполне естественным соображениям гуманности. Поэтому до последнего времени выполнить эксперименты со здоровым человеком при воздействии неспецифических стимулов на локомоторные центры, сходные с экспериментами работы [5] с кошками, не удавалось. Лишь совсем недавно в работах В.С.Гурфинкеля с сотрудниками [7,8] было продемонстрировано, что в качестве такого неспецифического стимула могут быть использованы нерезонансные широкополосные высокочастотные ( $f \approx 20 \div 60$  Гц) вибрации мышц. Эти работы стимулировали интерес к построению моделей, предназначенных для описания конкретных экспериментально наблюдаемых эффектов с тем, чтобы в дальнейшем они могли быть использованы как составная часть более полного описания. В настоящей работе обсуждаются предпосылки для построения и основные свойства феноменологической модели ЦГП такого типа, управляющего скоординированными движениями тазобедренного и коленного суставов. Более подробный бифуркационный анализ этой модели представлен отдельно [9].

### 1. Экспериментальные предпосылки

Настоящая работа была инициирована оригинальными экспериментами, недавно проведенными В. С. Гурфинкелем с сотрудниками [7,8], по активации локомоторных движений нерезонансной вибрацией мышц ноги, которая была подвешена таким образом, что могла свободно двигаться в горизонтальной плоскости без внешнего сопротивления, связанного с тяготением. Как правило, вибрация вызывала циклические движения в тазобедренном и коленном суставах. Средние значения продолжительности цикла составляли  $1.6 \div 3.1$  с и слабо зависели от частоты вибрации и от типа вибрирующей мышцы. Вызванные циклические движения в тазобедренном суставе происходили со сдвигом фазы по отношению к движениям в коленном суставе. Когда разгибание колена предшествовало разгибанию бедра, движение ассоциировалось с шагаем вперед. Если движение колена отставало от движения бедра, то оно воспринималось как шагание назад. Эффект не зависел от того, вибрирует разгибательная или сгибательная мышца. Иногда, при постоянных параметрах вибрации, наблюдались спонтанные переходы от шагания вперед к шаганию назад, что соответствовало изменению сдвига фаз движений коленного и бедренного суставов от  $\Delta\phi \approx \pi/2$  к  $\Delta\phi \approx -\pi/2$  и наоборот (рис. 1).

Методика эксперимента и сравнительно низкие значения уровня вибраций (их амплитуда составляла около 1 мм при используемых частотах  $20 \div 60$  Гц) позволяли получать осциллограммы произвольных шагательных движений длительностью до  $10^3$  периодов (примерно 15 мин.), прежде чем становились

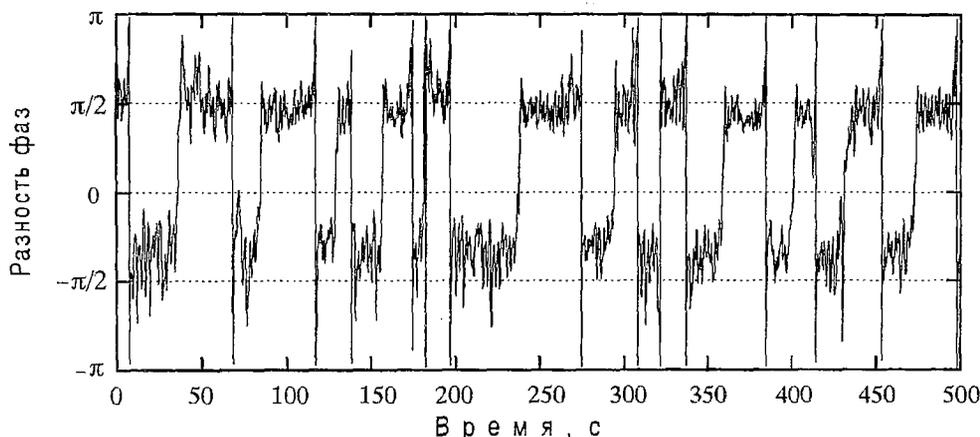


Рис. 1. Экспериментальная зависимость разности фаз колебаний углов сгиба бедренного и коленного суставов от времени

заметными накапливающимися эффектами, аналогичными эффектам усталости, и/или эффектами сознательного воздействия центральной нервной системы. К сожалению, такой длительности реализаций оказалось недостаточно для восстановления порождающей их динамической системы формальными методами, развитыми в нелинейной динамике [10–12]. Тем не менее эти методы мы использовали для предварительных оценок характеристик динамической системы, порождающей исследуемые реализации. В частности, оценка минимальной размерности вложения была осуществлена с помощью метода ложных соседей, подробно описанного в [10]. Этот метод позволяет по экспериментальной реализации одной динамической переменной системы оценить минимальную размерность фазового пространства, при которой фазовая траектория, восстановленная по данной реализации, не имеет самопересечений. При оценке используется зависимость отношения числа ложных соседей к полному числу соседей от размерности вложения. При этом, фазовые точки считаются соседними в пространстве размерности  $d$ , если расстояние между ними не превышает некоторого заданного. Точки считаются ложными соседями в пространстве размерности  $d$ , если они, во-первых, являются соседними в пространстве размерности  $d$ , а во-вторых, не являются соседними в пространстве размерности  $d+1$ . Размерность  $d$  считается минимальной размерностью вложения, если число ложных соседей пренебрежимо мало. Как показало вычисление описанной характеристики для реализаций углов сгиба тазобедренного и коленного суставов, полученных из эксперимента, минимальная размерность вложения порождающей системы составляла для разных реализаций  $d_E=4\div 6$ . Целью настоящей работы является рассмотрение лишь качественных эффектов, и, поскольку наиболее существенные из них проявляются уже в реализациях с  $d_E=4$ , при моделировании мы остановили свой выбор на динамических системах четвертого порядка.

В основу моделирования положены наиболее общие свойства произвольной ходьбы, идентифицируемые в эксперименте:

1) существует два режима произвольного шагания («вперед» и «назад»), характеризующиеся примерно одинаковыми по величине и противоположными по знаку фазовыми сдвигами между колебаниями углов коленного и тазобедренного суставов;

2) не обнаружено большого различия в вероятности перехода к тому или иному режиму из расслабленного состояния ноги при включении вибраций;

3) в зависимости от индивидуальных особенностей или состояния испытуемого возможно устойчивое наблюдение как каждого из режимов, так и переключений между ними через нерегулярные промежутки времени;

4) переключения осуществляются достаточно быстро (преимущественно за один период шагания), а средняя длительность режимов произвольного шагания «вперед» и «назад» примерно одинакова и существенно больше одного периода – такое поведение системы может характеризоваться как перемежающееся с двумя разными «ламинарными» режимами и переходами между ними.

5) произвольные шагательные движения и переключения между их различными режимами не связаны непосредственно с временными характеристиками вибраций. Последние являются нерезонансными, то есть широкополосными и/или высокочастотными, с частотами на два порядка превышающими все характерные частоты движений, которые слабо зависят от частоты вибрации и от того, какая мышца вибрировалась. Поэтому нерезонансную вибрацию в первом приближении можно рассматривать как неспецифический стимул, влияющий только на общее состояние нервной системы (уровень возбудимости нейронов, состояние каналов между ними и т.д.).

## 2. Модель центрального генератора паттернов

Здесь мы ограничиваемся построением феноменологической модели ЦГП, обеспечивающей формирование наблюдаемых движений, и не пытаемся связать ее

с конкретными нейробиологическими процессами. Тем не менее мы стремимся к тому, чтобы она не противоречила имеющимся представлениям об этих процессах и в дальнейшем могла послужить отправной точкой для создания более обоснованной модели. Концептуальная гипотеза, лежащая в основе данного рассмотрения, заключается в том, что ЦГП генерирует сигналы, качественные свойства которых совпадают с осциллограммами углов коленного и бедренного суставов. Предполагается, что мышечно–скелетная система и сенсорная обратная связь лишь преобразует форму сигналов и тем самым обеспечивает требуемый рисунок движения внутри периода. Вопрос о том, как происходит преобразование, требует отдельного рассмотрения, хотя простейшие примеры [13] демонстрируют, что скелетно–мышечная система обладает более чем достаточным набором средств, позволяющих легко осуществить такое преобразование.

Из представленного выше вытекает, что в первом приближении моделируемое явление обладает определенной симметрией. Поэтому не вдаваясь в детали двух нейронных ансамблей, управляющих каждым из суставов, будем моделировать их поведение двумя связанными между собой одинаковыми автогенераторами. Подсказкой, естественно не претендующей на обоснование такой замены, служит тот факт, что на эмбриональном этапе развития, по крайней мере у некоторых позвоночных, мотонейроны в спинном мозге объединены электрической связью в большие ансамбли и для них характерна синхронность поведения (см., например, [14]). Такая система обеспечивает формирование лишь простых движений. По мере развития организма электрические связи частично ослабевают или разрушаются и заменяются химическими связями, характерными для взрослого организма. Это приводит к дроблению ансамблей, что позволяет осуществлять независимое управление отдельными группами и участками мышц и формировать более утонченные движения. Здесь мы предполагаем, что и при новой структуре синаптических связей взрослого организма синхронное поведение больших ансамблей нейронов также существует, но обладает сравнительно малым запасом устойчивости. Поэтому такая синхронность легко разрушается под влиянием воздействия дифференцированных сигналов центральной нервной системы или сенсорной обратной связи. В условиях эксперимента [7,8], когда наблюдались лишь простые движения, а специфические воздействия были сведены к минимуму, дифференцированность сигналов, по–видимому, играла несущественную роль, и можно считать, что синхронность внутри каждого из ансамблей и сохранялась. Заметим, что предполагаемая синхронность внутри ансамбля не исключает, что поведение их коллективных переменных  $x_i$ ,  $y_i$  может быть достаточно сложным, в том числе и хаотическим (см., например, [15–17]). В такой ситуации представляется возможным описание их взаимодействия как взаимодействия двух генераторов, в данном конкретном случае – генераторов Ван дер Поля – Дуффинга:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1 - C(x_1, x_2), \\
 \dot{y}_1 &= r[y_1(1 - \lambda x_1^2) - \beta x_1^3] - x_1, \\
 \dot{x}_2 &= y_2 - C(x_2, x_1), \\
 \dot{y}_2 &= r[y_2(1 - \lambda x_2^2) - \beta x_2^3] - x_2.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Связь  $C(x_1, x_2)$ , в соответствии с условиями эксперимента, была выбрана таким образом, чтобы в системе существовали два антисимметричных по сдвигу фазы синхронизованных состояния. В случае идентичных подсистем они фактически определяются конкуренцией между синфазным и противофазным режимами. Такая конкуренция в биологических моделях обычно описывается комбинацией разнотипных связей – эксайтерных (возбуждающих) и ингибиторных (подавляющих). В этом случае величина фазового сдвига регулируется весом этих связей [18]. Не претендуя на точное воспроизведение синаптических связей и в то

же время сохраняя возможность качественного описания конкуренции, мы воспользовались наиболее простым выражением

$$C(x_1, x_2) = \gamma(x_1 - x_2)[(x_1 - x_2)^2 - \alpha]$$

и ограничились областью параметров, при которых, с одной стороны, синфазный режим  $\delta \equiv x_1 - x_2 = 0$  неустойчив (преобладает ингибиторная связь)

$$C(0) = 0; \quad dC/d\delta|_{\delta=0} > 0,$$

а с другой, при больших  $\delta$  связь оказывает стабилизирующее влияние на синфазный режим (преобладает эксайторная связь)

$$dC/d\delta < 0, \quad \text{при } |\delta| > \delta_{\max}.$$

Очевидно, что эти условия выполняются при  $\gamma > 0$  и  $\alpha > 0$ .

Прежде, чем перейти к анализу модели, отметим, что осцилляторные режимы с разными значениями фазового сдвига  $\phi$  между взаимодействующими подсистемами и переходами между этими режимами ранее широко исследовались в связи с математическим моделированием как смены аллелов у животных [19], так и специальных экспериментов по исследованию координации движений конечностей у людей [20–24]. Однако, обычно основное внимание уделялось режимам близким к синфазным ( $\phi=0$ ) и противофазным ( $\phi=\pi$ ) и их смене при изменении контрольного параметра. Здесь же основное внимание сфокусировано на существовании двух устойчивых режимов с антисимметричными (равными по величине и противоположными по знаку) сдвигами фаз  $\phi = \pm\phi_0$  и на повторяющихся нерегулярным образом переходах между ними после потери устойчивости. Это предопределило отличия выполненного здесь конкретного рассмотрения от более ранних исследований по сути очень похожей модели НКВ (Haken – Kelso – Bunz) [20,23], предложенной для математического описания динамических процессов в психофизиологических опытах [20–24]. Наиболее существенным является учет сильной нелинейности и зависимости частоты колебаний от амплитуды. Как показал анализ, именно эти факторы обеспечивают реализацию перемежаемости с хаотическими переходами между двумя режимами в широком интервале параметров связи.

### 3. Свойства модели

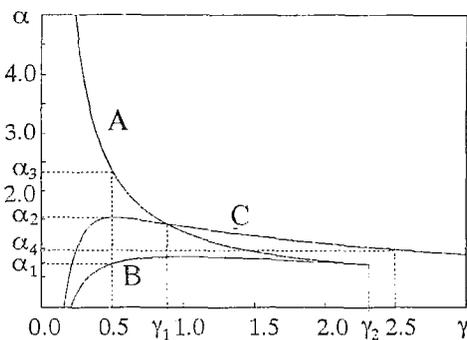


Рис. 2. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма в плоскости параметров  $(\gamma, \alpha)$ . Линия с меткой А соответствует исчезновению режимов типа I, с меткой В — рождению режимов типа II, с меткой С — потере устойчивости при всех значениях  $\gamma$  устойчивыми режимами типа II

Бифуркационный анализ рассматриваемой системы приведен при малой нелинейности  $r \ll 1, \gamma \ll 1$  в работе [25], а при большой — в работе [9]. Здесь мы лишь сформулируем основные результаты, которые имеют непосредственное отношение к моделированию спонтанных переключений между шагательными движениями вперед и назад.

Система (1) исследовалась численно при  $r=0.5, \lambda=1, \beta=2$  и при различных значениях параметров  $\alpha, \gamma$ . На рис. 2 приведена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма в плоскости параметров  $(\gamma, \alpha)$ . При  $\alpha < 0$  при всех значениях  $\gamma$  устойчивыми

являются синфазные решения  $x_1 \equiv x_2$ ,  $y_1 \equiv y_2$ . При переходе  $\alpha$  через 0 синфазное решение теряет устойчивость и из него через бифуркацию тройного равновесия предельных циклов рождаются два несимметричных решения с близкими величинами амплитуд колебаний парциальных генераторов и с разными относительными фазовыми сдвигами  $\pm\phi$  (рис. 3). Будем в дальнейшем о них говорить как о решениях и режимах типа I.

При дальнейшем увеличении  $\alpha$  на кривой В (см. рис. 2) при  $\gamma < \gamma_2$  рождается пара других устойчивых движений, характеризующихся сильным различием в амплитудах колебаний генераторов (типа II). Каждое из решений этого типа рождается в паре с некоторым неустойчивым решением (см. рис. 3, а, б), которое при дальнейшем увеличении  $\alpha$  (на кривой А рис. 2) сливается с одним из решений типа I, что приводит к исчезновению решений типа I через седло-узловую бифуркацию предельных циклов. Решения II-го типа на кривой С на рис. 2 теряют устойчивость с выходом пары комплексно-сопряженных мультипликаторов за единичную окружность, что соответствует бифуркации рождения инвариантного устойчивого тора (см. рис. 3). Как видно из рис. 2, порядок описанных бифуркаций зависит от величины параметра  $\gamma$ , а именно,

- при  $\gamma < \gamma_1$  сначала рождаются решения типа II ( $\alpha = \alpha_1$  на рис. 3, а), что соответствует пересечению линии В на рис. 2 (точка  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = \alpha_1$ ); далее эти решения теряют устойчивость ( $\alpha = \alpha_2$  на рис. 3, а), что соответствует пересечению линии С на рис. 2 (точка  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = \alpha_2$ ); после чего происходит исчезновение решений типа I ( $\alpha = \alpha_3$  на рис. 3, а), что соответствует пересечению линии А на рис. 2 (точка  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = \alpha_3$ );

- при  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$  потеря устойчивости решений типа II и исчезновения решений типа I происходит в обратном порядке (см. рис. 3, б);

- при  $\gamma > \gamma_2$  седло-узловых бифуркаций не происходит, а решения типа I мягко переходят в решения типа II, в дальнейшем теряющие устойчивость ( $\alpha = \alpha_4$  на рис. 3, в), что соответствует пересечению кривой С на рис. 2 (точка  $\gamma = 2.5$ ,  $\alpha = \alpha_4$ ).

**3.1. Переключения.** Таким образом, в некоторой области параметров выше кривой А при  $\gamma < \gamma_1$  и выше кривой С при  $\gamma > \gamma_1$  (см. рис. 2) в фазовом пространстве системы (1) описанные устойчивые периодические движения отсутствуют. Динамика системы в этой области определяется сложными бифуркациями,

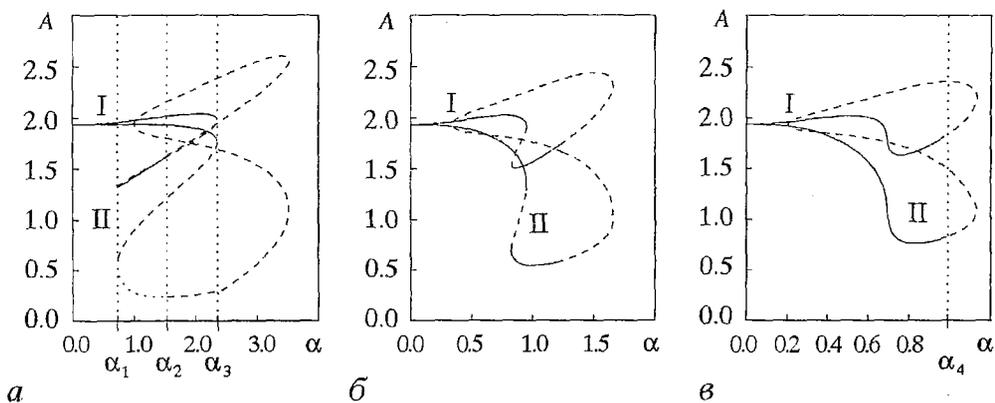


Рис. 3. Однопараметрические бифуркационные диаграммы при различных значениях  $\gamma$ : а – 0.5; б – 1.5; в – 2.5; А – амплитуды сигналов генераторов; сплошными линиями показаны устойчивые решения, пунктирными – неустойчивые; знаками I и II отмечены пары сплошных линий, отображающие решения типов I и II, соответственно

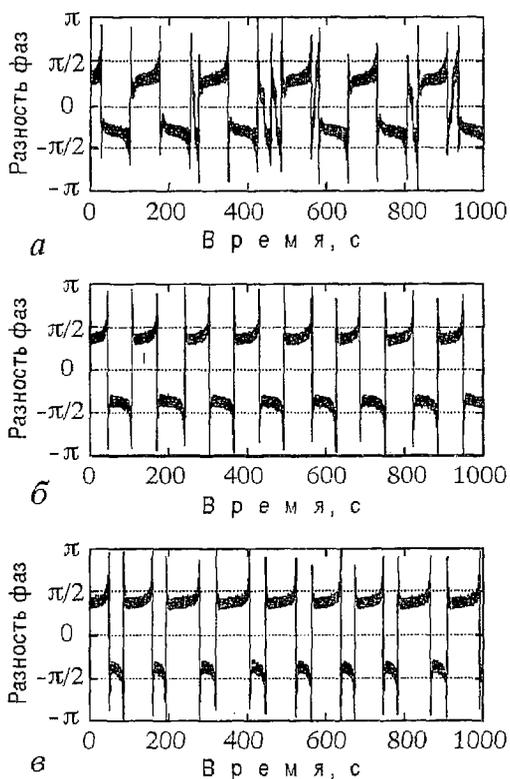


Рис. 4. а, б – осциллограммы разности фаз модельных генераторов при  $\beta=2$ ,  $r=0.5$ ; а –  $\gamma=0.83$ ,  $\alpha=1.61$ ; б –  $\gamma=0.5$ ,  $\alpha=2.5$ ; в – осциллограмма разности фаз модельных генераторов в присутствии расстройки частоты  $\delta=0.05$ ,  $\beta=2$ ,  $r=0.5$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $\alpha=2.5$

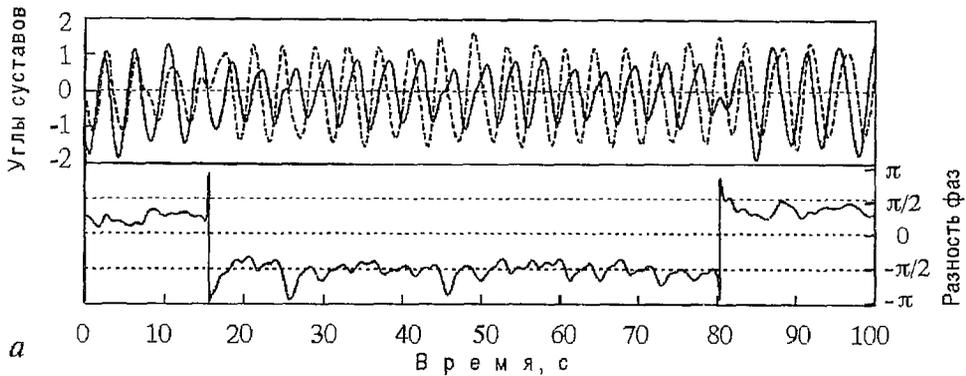
(сплошная линия) происходит практически без изменения ритма, в то время как движение коленного сустава (пунктирная линия) «пропускает» часть периода. И наоборот, при переходе от шагания вперед к шаганию назад ( $t=80$ ) движение коленного сустава почти не изменяется, а происходит сбой ритма движения тазобедренного сустава. Точно так же ведут себя и колебания автогенераторов в математической модели при выбранных значениях параметров (рис. 5, б) – события, когда одновременно нарушается ритм обоих генераторов, менее вероятны.

В рамках предложенной модели можно описывать, помимо качественных, и некоторые количественные характеристики экспериментальных реализаций. В эксперименте, как и в модели, переключения происходят через нерегулярные отрезки времени, а каждое переключение происходит в течение 1–2 периодов колебаний. Кроме того, подбором параметров связи  $\alpha$  и  $\gamma$  удается получить значение средней длительности ламинарных фаз, соответствующее конкретной экспериментальной реализации. Так, например, средняя длительность ламинарных фаз равная 8, соответствующая приведенной на рис. 4 экспериментально измеренной реализации, достигается при значениях параметров  $\beta=2$ ,  $r=0.5$ ,  $\gamma=0.825$ ,  $\alpha=1.6$ .

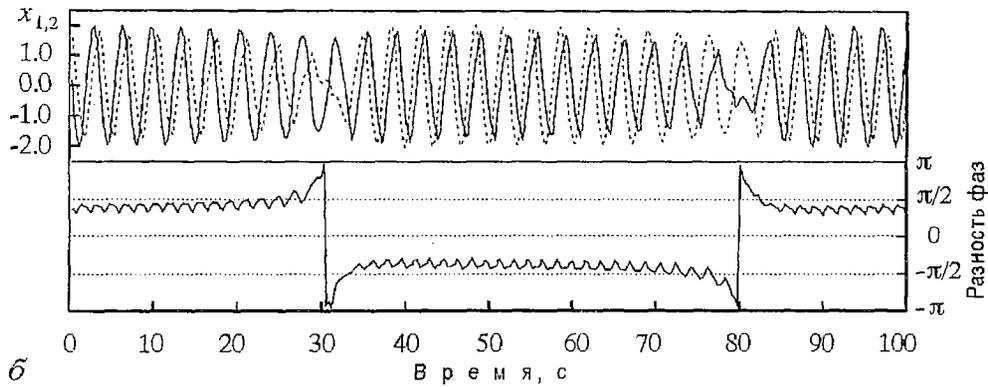
**3.2. Механизм рождения переключений.** Остановимся на механизме переключений, возникающих при переходе снизу вверх через кривую А при  $\gamma < \gamma_1$ .

исследование которых представляет отдельную проблему вследствие высокой размерности системы [9]. Здесь мы ограничимся лишь качественным описанием эффекта, возникающего в данной области и важного для моделирования локомоторной активности, инициированной вибрацией. Этот эффект состоит в возникновении спонтанных переключений между двумя несимметричными состояниями с почти постоянным фазовым сдвигом  $\pm\phi_0$  колебаний генераторов при исчезновении устойчивых синхронизованных режимов (переход снизу вверх через кривую А при  $\gamma < \gamma_1$  на рис. 2) или потере их устойчивости (переход снизу вверх через кривую С при  $\gamma > \gamma_1$  на рис. 2).

Рассматриваемая модель демонстрирует качественное сходство временного поведения разности фаз двух автогенераторов (рис. 4) и разности фаз движений коленного и тазобедренного суставов в выше описанных экспериментах (см. рис. 1). Отметим, что даже относительно тонкие детали переключений воспроизводятся предложенной моделью. На рис. 5, а представлены осциллограммы колебаний коленного и тазобедренного суставов. Здесь можно заметить характерную особенность процесса переключения: при переходе от шагания назад к шаганию вперед ( $t=16$ ) движение тазобедренного сустава



а



б

Рис. 5. а – переключения, наблюдаемые в эксперименте [7,8]; верхняя часть рисунка представляет осциллограммы колебаний углов тазобедренного (сплошная линия) и коленного (пунктирная линия) суставов, нижняя – осциллограмма разности фаз между ними; фаза определена как

$\phi_j = \arg z_j(t)$ , где  $z_j(t) = x_j(t) + ix_j(t)$ ,  $j=1,2$ . б – переключения между несимметричными состояниями с фиксированным фазовым сдвигом при  $\alpha=2.5$ ,  $\gamma=0.5$ ; верхняя часть рисунка представляет осциллограммы сигналов генераторов (сплошная линия – первый генератор, пунктирная – второй), нижняя – осциллограмма разности фаз генераторов

Как уже отмечалось, на этой кривой происходит исчезновение устойчивых синхронизованных режимов через седло–узловую бифуркацию предельных циклов (см. рис. 3, а). Данная бифуркация обычно приводит к возникновению перемежаемости 1–го рода (см., например, [26]). Такая перемежаемость сопровождается характерным видом точечного отображения одной из динамических переменных системы на некоторой секущей и определенным скейлингом в зависимости времени жизни  $\tau$  в метастабильном состоянии от величины превышения  $\epsilon$  контрольным параметром бифуркационного значения, а именно

$$\tau \sim \epsilon^{-1/2}.$$

Для построения точечного отображения мы использовали в качестве динамической переменной разность фаз колебаний генераторов на секущей  $x_1 = x_2$ . Фрагмент этого отображения вблизи одного из метастабильных состояний, оставшихся после исчезновения устойчивых режимов типа I, приведен на рис. 6, а.

Динамика системы в режиме перемежаемости характеризуется чередованием ламинарных и турбулентных фаз. Ламинарная фаза соответствует достаточно длительному нахождению системы в окрестности места исчезновения устойчивого режима, а турбулентная фаза – быстрому уходу и последующему возвращению изображающей точки в эту окрестность. В нашем случае имеется два метастабильных состояния, соответствующих режимам со сдвигом фазы  $+\phi_0$  и

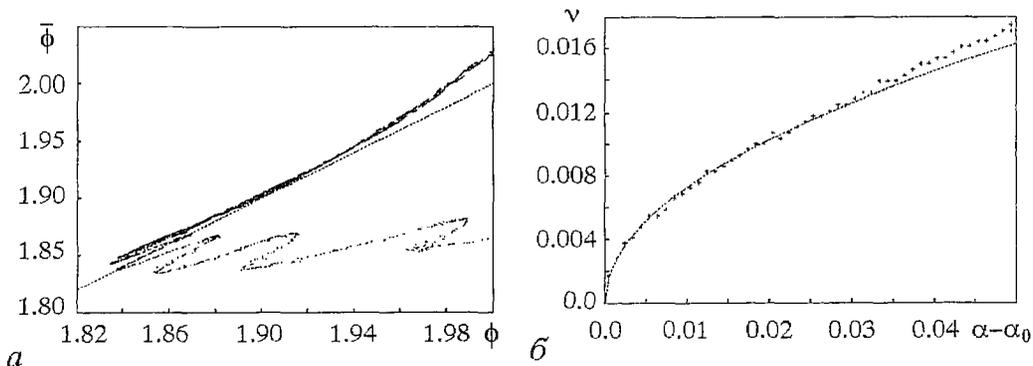


Рис. 6. *a* – точечное отображение  $\bar{\phi}(\phi)$  для разности фаз (в геометрическом смысле) колебаний генераторов на секущей  $x_1=x_2$  при  $\gamma=0.5$ ,  $\alpha=2.385$ , пунктирная линия соответствует биссектрисе  $\bar{\phi}=\phi$ ; *б* – зависимость частоты переключений  $\nu$  от превышения параметром  $\alpha$  бифуркационного значения  $\alpha_0 \approx 2.35$  при  $\gamma=0.5$ , пунктирная линия отвечает аппроксимации  $\nu \sim (\alpha - \alpha_0)^{1/2}$

– $\phi_0$ , поэтому ламинарные фазы будут соответствовать нахождению в том или другом режиме, а турбулентные – переключениям между ними. Тогда, считая время переключения много меньшим продолжительности ламинарной фазы, введем среднюю частоту переключений  $\nu = \tau^{-1}$ , где  $\tau$  – время жизни в метастабильном состоянии. На рис. 6, *б* приведена зависимость частоты переключений от  $\alpha$ , которая хорошо аппроксимируется зависимостью  $\nu \sim (\alpha - \alpha_0)^{1/2}$ , характерной для перемежаемости 1-го рода [26].

**3.3. Влияние шумов.** Введение в систему слабого шума не вносит качественных изменений в наблюдаемую картину перемежаемости. Его влияние оценивалось по изменению свойств решений при добавлении слагаемых вида  $\sigma \xi_1(t)$  и  $\sigma \xi_2(t)$  в первое и третье уравнения системы (1), где  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  – дельта-коррелированные случайные процессы, равномерно распределенные в интервале  $(-1,1)$ ,  $\sigma$  – амплитуда шума. Вплоть до значений  $\sigma \approx 1$  так же, как и раньше, можно выделить два состояния с разностью фаз  $\phi = \pm \phi_0$  (рис. 7, *a, б*). Промежуточные значения разности фаз маловероятны, так как переходы остаются быстрыми. Интервалы времени между переходами более существенно зависят от шумов, однако как величина дисперсии, так и вид распределения претерпевают значительные изменения лишь при  $\sigma \geq 0.25$  (рис. 7, *в, г*).

**3.4. Роль нелинейной зависимости частоты от интенсивности колебаний.** Область параметров, в которой реализуются описанные выше переключения, существенно зависит от величины реактивной нелинейности  $\beta$ . На рис. 8 приведена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма в плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$ , построенная при фиксированных значениях параметров  $\gamma=0.5$ ,  $\beta=0.5$ . Начиная со значения  $\alpha=+0$  решения, отвечающие режимам типа I, являются устойчивыми. С ростом управляющего параметра (на линии **D**) они исчезают через седло-узловую бифуркацию, что приводит к рождению квазиаттрактора, для которого характерны хаотические переходы между потерявшими устойчивость режимами. В отличие от странных аттракторов, в квазиаттракторе, помимо седловых и гомоклинических траекторий, присутствуют устойчивые периодические движения. Области притяжения регулярных аттракторов относительно малы, а характерные периоды относительно велики. Но при дальнейшем увеличении параметра  $\alpha$  (на линиями **E**) появляются устойчивые пятиобходные предельные циклы, с большой областью притяжения. Так, что

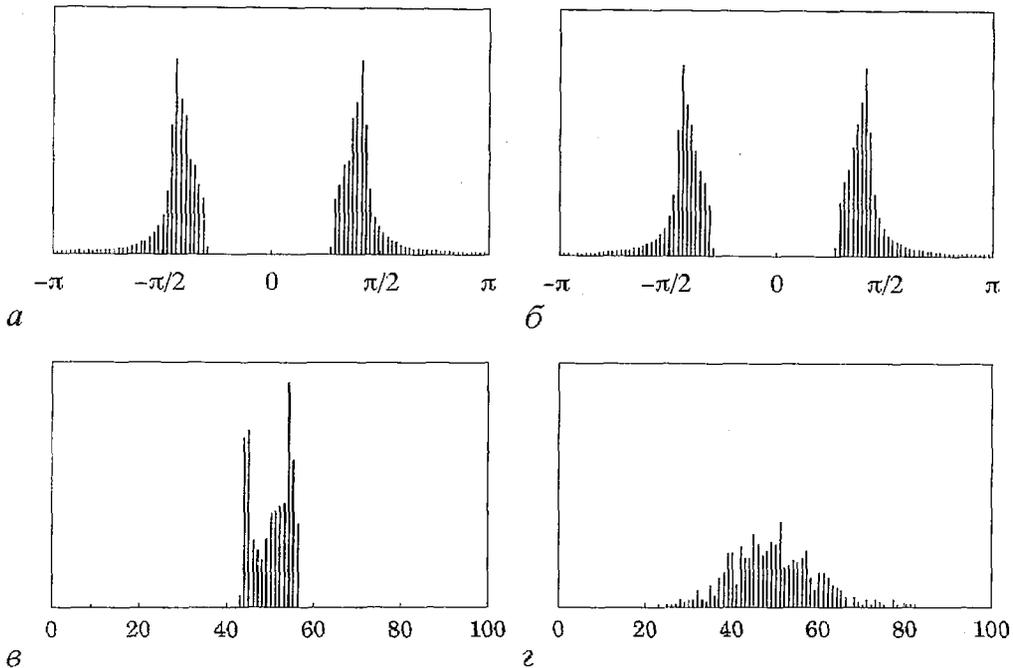


Рис. 7. *а, б* – гистограммы фазы при  $\gamma=0.5$ ,  $\alpha=2.5$  и различных значениях амплитуды шума  $\sigma$ : *а* – 0; *б* – 0.25; *в, г* – гистограммы периодов времени между переключениями при  $\gamma=0.5$ ,  $\alpha=2.5$  и различных значениях амплитуды шума  $\sigma$ : *в* – 0; *г* – 0.25

фактически область между линиями **D** и **E** можно условно считать областью параметров, в которой имеются переключения между разрушившимися устойчивыми состояниями со сдвигами фаз  $\phi=\pm\phi_0$ . Как следует из диаграммы на рис. 8 интервал значений параметра  $\alpha$ , на котором наблюдаются такие переключения, увеличивается с ростом  $\beta$ .

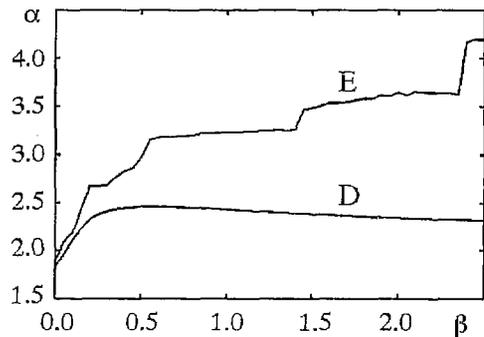


Рис. 8. Двухпараметрическая диаграмма в плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$ ; линия **D** соответствует потере устойчивости режимами типа I, линия **E** – появлению устойчивых пятиобходных предельных циклов

**3.5. Влияние линейной расстройки частоты.** Особенностью возникновения перемежаемости в рассматриваемой модели является то, что вследствие симметрии оба синхронизированные состояния с  $\phi=\pm\phi_0$  исчезают при одном и том же значении контрольного параметра. При нарушении симметрии (например, из-за различия параметров генераторов) можно ожидать существенного изменения, а возможно и разрушения переключений. Действительно, чем больше разница значений контрольного параметра, при которых происходят такие бифуркации для различных состояний, тем более существенно различие во временах жизни в оставшихся метастабильных состояниях. Можно сделать следующую оценку: допустим одно из синхронизированных состояний исчезло при  $\alpha=\alpha_1$ , тогда в момент исчезновения второго, при  $\alpha=\alpha_2$ , время жизни  $\tau_1$  в первом будет пропорционально величине

$$\tau_1 \sim (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1/2}. \quad (2)$$

Если это время окажется близким к периоду колебаний парциальных осцилляторов, полученный процесс вряд ли можно будет назвать переключениями, то есть при достаточно сильном нарушении симметрии переключения в системе наблюдаться перестанут. Как показал численный эксперимент, в котором между парциальными осцилляторами вводилась частотная расстройка, действительно так и происходит. Однако, если частоты отличаются не больше, чем на 5% качественные свойства переключений сохраняются (см. рис. 4, в).

### Заключение

Макроскопические движения людей и животных отличаются скоординированностью и в определенной степени предсказуемостью несмотря на то, что они являются результатом сложных разнообразных процессов, протекающих на микроскопическом уровне, зачастую в присутствии шумовых источников. Естественно предположить, что отклонения от регулярности и хаотичность также наблюдаемые на макроскопическом уровне обусловлены не этими шумовыми источниками, а собственной нелинейной динамикой [27]. Если это так, то при описании макроскопического поведения можно использовать маломерные динамические модели, сконструированные на основе свойств симметрии характерных режимов и переходов между ними (примеры приведены в [19]). Параметры в этих уравнениях, естественно, зависят от фундаментальных микропроцессов и могут быть конкретизированы на следующем более высоком уровне изучения. На первом этапе представляется целесообразным моделирование конкретных экспериментальных ситуаций, как это производилось, например, в [20–24]. В настоящей работе в рамках такого подхода построена модель переключения шагательных движений «вперед» и «назад», вызванных вибрационной стимуляцией мышечных рецепторов у человека [7,8]. Эта модель относится к общему классу моделей НКВ [20–24], предложенных ранее для математического описания психофизиологических опытов. Такие модели представляют собой два автогенератора с нелинейной связью, действие которой качественно похоже на действие комбинации эксайтерной и ингибиторной связей в случае нейронов. Отличительной чертой нашего рассмотрения является то, что оно продвинуто в область больших нелинейностей и учитывает нелинейную зависимость частоты от амплитуды. Именно при этих условиях при взаимодействии двух идентичных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга установлено наличие хаотических перемежающихся переходов в широкой области параметров, качественно совпадающих с экспериментально наблюдаемыми переходами между шагательными движениями «вперед» и «назад», вызванными вибрациями мышц [7,8].

Конечно, нельзя переоценивать внешнее сходство экспериментальных реализаций (см. рис. 1) и реализаций, полученных из модельного рассмотрения (см. рис. 4), поскольку в эксперименте наблюдаются сигналы прошедшие через нелинейный преобразователь – скелетно-мышечную систему ноги. Тем не менее есть основания [13,28–30] полагать, что хотя конкретный рисунок внутри периода может существенно модифицироваться механической системой, сам характер процесса и соотношения временных масштабов не изменяются.

Авторы благодарны Гурфинкелю В.С., Левику Ю.С., Казенникову О.В., Селионову В.А. и Рубчинскому Л.Л. за полезное обсуждение.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–97–02–17526) и Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант № 96–15–96593).*

## Библиографический список

1. *Delcomyn F.* Neural basis of rhythmic behavior in animals // *Science*. 1980. Vol. 210. P. 492.
2. *Grillner S.* Neurobiological bases of rhythmic motor acts in vertebrates // *Science*. 1985. Vol. 228. P. 143.
3. *Collins J.J., Stewart I.N.* Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits // *J. Nonlinear Sci.* 1993. Vol. 3. P. 349.
4. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суццик М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166. С. 363.
5. Шик М.Л., Северин Ф.В., Орловский Н.Г. Управление ходьбой и бегом посредством электрической стимуляции среднего мозга // *Биофизика*. 1966. Т. 11. С. 659
6. *Seminars in the Neurosciences*. 1993. Vol. 5. P. 1.
7. *Gurfinkel V.S., Levik Yu.S., Kazennikov O.V, Selionov V.A.* Locomotor-like movements evoked by leg muscle vibration in humans // *European J. Neuroscience* 1998. Vol. 10. P. 1068.
8. Гурфинкель В.С., Левик Ю.С., Казенников О.В., Селионов В.А. Существует ли генератор шагательных движений человека? // *Физиология человека*. 1998. Т. 24, № 3. С.42.
9. Козлов А.К., Суццик М.М., Мольков Я.И. Фазовая синхронизация, бистабильность и хаос в системе двух идентичных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга//Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 1. С. 68.
10. *Abarbanel H.D.I., Brown R., Sidorowich J.J., Tsimring L.Sh.* The analysis of observed chaotic data in physical systems // *Rev. Modern Phys.* 1993. Vol. 65. P. 1331.
11. *Abarbanel H.D.I.* Tools for analysing observed chaotic data // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, №№ 3–5.
12. *Badii R.* Progress in analysis of experimental chaos through periodic orbits // *Rev. Modern Phys.* 1994. Vol. 66. P. 1389.
13. Мольков Я.И., Суццик М.М., Кузнецов А.С., Козлов А.К., Захаров Д.Г. Динамическая модель локомоторных движений человека, вызванных вибрационным воздействием на мышцы // *Вестник ННГУ*. 1998 (в печати).
14. *Frank E.* New life in an old structure: the development of synaptic pathways in the spinal cord // *Current Opinion in Neurobiology*. 1993. Vol. 3. P. 82.
15. *Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L.M.* Synchronous chaos in coupled oscillator systems // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50. P. 1874.
16. *Perez-Villar V., Munuzuri A.P., Perez-Munuzuri V., Chua L.O.* Chaotic synchronization of a one-dimensional array of nonlinear active systems // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3. P. 1067.
17. Рубчинский Л.Л., Суццик М.М. Прямая и обратная взаимосвязь между неупорядоченностью пространственных и временных паттернов в цепочках хаотических автогенераторов// *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1999. Т. 7, № 1. С. 81.
18. *Ermentrout B., Kopell N.* Learning of phase lags in coupled neural oscillators // *Neural Computation*. 1994. Vol. 6. P. 225.
19. *Collins J.J., Stewart I.N.* Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits // *J. Nonlinear Sci.* 1993. Vol. 3. P. 349.
20. *Haken H., Kelso J.A.S., Bunz H.* A theoretical model of phase transitions in human hard movements // *Biol. Cybern.* 1985. Vol. 51. P. 347.
21. *Kelso J.A.S., Scholz J.P., Schover G.* Nonequilibrium phase transitions in coordinated biological motions: critical fluctuations // *Phys. Lett.* 1986. Vol. 118. P. 279.
22. *Buchanan J.J., Kelso J.A.S., Fuchs A.* Coordination dynamics of trajectory formation // *Biol. Cybern.* 1996. Vol. 75. P. 41.
23. *Fuchs A., Jirsa V.K., Haken H., Kelso J.A.S.* Extending the HKB model of coordinated movement to oscillators with different eigen frequencies // *Biol. Cybern.* 1996. Vol. 75. P. 21.

24. *Sternad D., Turvey M.T., Schmidt R.C.* Average phase difference theory and 1:1 phase entrainment in interlimb coordination // *Biol. Cybern.* 1992. Vol. 67. P. 223.

25. *Захаров Д.Г., Мольков Я.И., Суццик М.М.* Синхронизированные колебания в системе связанных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1998. Т. 41, № 12. С. 1531.

26. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе: о детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.

27. *Schoner G., Kelso J.A.S.* Dynamic pattern generation in behavioral and neural systems // *Science.* 1988. Vol. 239. P. 1513.

28. *Taga G., Yamaguchi Y., Shimizu H.* Self-organized control of bipedal locomotion by neural oscillators in unpredictable environment // *Biol. Cyber.* 1991. Vol. 65. P. 147.

29. *Taga G.* A model of the neuro-musculo-skeletal system for human locomotion. I. Emergence of basic gait // *Biol. Cybern.* 1995. Vol. 73. P. 97.

30. *Taga G.* A model of the neuro-musculo-skeletal system for human locomotion. II. Real-time adaptability under various constraints // *Biol. Cybern.* 1995. Vol. 73. P. 113.

*Институт прикладной физики РАН*

*Поступила в редакцию 24.02.99  
после переработки 6.05.99*

## **THE DYNAMICAL MODEL OF LOCOMOTOR-LIKE MOVEMENTS EVOKED BY MUSCLE VIBRATION IN HUMANS**

*Ya.I. Molkov, M.M. Sushchik, A.S. Kuznetsov, A.K. Kozlov, D.G. Zakharov*

A phenomenological model of central pattern generator is proposed for qualitative description, within the framework of traditional concepts of motoneural and skeleto-muscular system of human leg, of dynamics of spontaneous stepping movements evoked by muscle vibration. In particular, it describes bistability of «forward» and «backward» stepping and chaotic transitions between them. The model consists of two self-excited oscillators with nonlinear coupling, the action of which resembles qualitatively the action of a combination of excitatory and inhibitory chemical couplings typical for neural networks. The analysis is made on the example of the interaction of two identical Van der Pol – Duffing generators.



*Мольков Ярослав Игоревич – родился в Горьком (1974). Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1996). По окончании поступил в аспирантуру Института прикладной физики РАН. Работает в том же институте в должности младшего научного сотрудника. Область научных интересов – нелинейная динамика.*



*Сущик Михаил Михайлович* – родился в городе Городня Черниговской области (1941), окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1965). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972). Заместитель директора Отделения нелинейной динамики и оптики Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика, синхронизация, когерентные структуры и модели нейродинамики.



*Кузнецов Алексей Сергеевич* – родился в 1973 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1996). По окончании поступил в аспирантуру того же университета на кафедру Теории колебаний. С 1995 года работает в Институте прикладной физики РАН, с 1998 года в должности младшего научного сотрудника. Опубликовал около 20 работ. Область научных интересов – исследования нелинейной динамики ансамблей связанных активных элементов, в том числе в приложении к биологическим задачам.



*Козлов Александр Константинович* – выпускник радиофизического факультета Горьковского государственного университета (1989). С 1989 по 1998 год работал в НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ; с 1995 года – в Институте прикладной физики РАН. Кандидат физико-математических наук. Область научных интересов – нелинейная динамика автоколебательных систем, явления синхронизации, управление хаотическими динамическими системами в приложении к нейробиологическим и медицинским задачам.



*Захаров Денис Геннадьевич* – родился в Горьком (1976). В 1993 году поступил на Радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. В 1997 поступил в магистратуру на кафедру теории колебаний. Сотрудник Института прикладной физики РАН. Опубликовал 7 научных работ. Область научных интересов – нелинейная динамика. E-mail: zakharov@tepii.appl.sci-nnov.ru



## БИФУРКАЦИИ В СТРУКТУРЕ СВОБОДНО РАСТУЩЕГО ДЕНДРИТА ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ БИНАРНОЙ СИСТЕМЫ

*П. К. Галенко, М. Д. Кривилев, К. В. Емельянов*

Исследована динамика движения границы раздела жидкой и твердой фаз с дендритной формой с использованием модели локально неравновесного затвердевания переохлажденной бинарной системы. Определен морфологический спектр боковой структуры свободно растущего дендрита. Рассмотрено изменение дендритной структуры в зависимости от значений двух управляющих параметров – начального переохлаждения и расстояния от вершины дендрита, определяющего локальное переохлаждение в каждой точке границы раздела, при этом граница раздела может становиться неустойчивой, периодической и изменять свой период.

### Введение

Большой класс задач математической физики, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, тесно связан с современной теорией динамического хаоса [1,2]. Приведенные в этих монографиях примеры демонстрируют, насколько важно и полезно при исследовании сложных явлений, описываемых уравнениями в частных производных, искать аналогии с поведением простых и гораздо лучше изученных динамических систем (нелинейных отображений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений). Полученные авторами настоящей работы результаты указывают на возможность существования таких аналогий в теории неравновесной кристаллизации.

В статье рассмотрена динамика движения свободной границы раздела фаз в конденсированной среде. Исследуется задача затвердевания переохлажденной бинарной системы с образованием кристаллических структур роста, в особенности дендритных форм роста кристаллов. Дендриты являются хорошо известным примером структурного упорядочения в диссипативных системах, находящихся вдали от термодинамического равновесия и определяемых диффузионным полем массы и кинетикой движения границы раздела [3].

Основной целью работы является изучение развития последовательности ветвления боковой поверхности свободно растущего дендрита. Продолжены исследования [3–6] по изучению поведения дендритного ветвления и его качественной связи с поведением нелинейных динамических систем, проанализирован полученный морфологический спектр боковой поверхности дендрита. Для описания дендритного роста использована модель затвердевания в локально неравновесной бинарной системе [7–10]. Основной особенностью этой модели является включение эффекта локальной неравновесности в диффузионном поле

при высокоскоростном фазовом переходе [7,8]. Эта модель позволяет рассматривать затвердевание как при малых скоростях роста дендритов (малые отклонения от термодинамического равновесия), так и высокоскоростной дендритный рост (большие отклонения от термодинамического равновесия) [11].

## 1. Описание модели

Кратко сформулируем основные допущения используемой модели неравновесного затвердевания бинарной системы:

а) рассматривается изотермическая двухфазная жидко-твердая система при постоянном давлении;

б) система состоит из химически инертного сплава, затвердевающего из переохлажденной жидкости подобно атомному раствору замещения;

в) затвердевание из жидкой фазы может быть настолько быстрым, что скорость  $V$  движения границы раздела фаз сопоставима по величине со скоростью  $V_D$  диффузии;

г) конвекция в жидкости и диффузия в твердой кристаллической фазе являются пренебрежимо малыми.

При этих допущениях процесс управляется массопереносом и кинетикой движения фазовой границы. В частности, из допущения (в) следует, что необходимо принять во внимание конечность скорости диффузионного переноса примеси и отклонение от локального равновесия на фазовой границе [10,11]. Таким образом, модельное описание системы достигается рассмотрением локально неравновесной диффузии примеси и кинетики движения границы раздела фаз.

Опишем основные уравнения модели при предположениях (а-г). Процесс неравновесного затвердевания из переохлажденной бинарной системы может быть описан континуальной моделью [12]

$$\partial/\partial t[(1-G)C_L + kGC_L] + \text{div} \mathbf{J} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_D \partial \mathbf{J} / \partial t + \mathbf{J} + D(1-G) \nabla C_L = 0, \quad (2)$$

$$G = 1 - \exp[-\int (\omega/v) V dt], \quad (3)$$

$$\partial G / \partial t = (\omega/v) V \text{ при } \int (\omega/v) V dt \ll 1, \quad (4)$$

$$C_S = k C_L. \quad (5)$$

Здесь  $C_L$  и  $C_S$  являются концентрациями примесного компонента в жидкой и твердой фазах, соответственно;  $\mathbf{J}$  – вектор диффузионного потока растворенного компонента (примеси);  $0 \leq G \leq 1$  является долей твердой фазы в локальном объеме;  $\tau_D = D/V_D^2$  – время диффузионной релаксации локального объема расплава;  $D$  – коэффициент диффузии;  $V$  – скорость движения межфазной границы (границы раздела жидкой и твердой фаз) вдоль вектора нормали, направленного в сторону жидкой фазы;  $t$  – время;  $\omega$  – площадь фазовой границы в затвердевающей системе;  $v$  – объем двухфазной области;  $k$  – коэффициент неравновесного распределения примеси на фазовой границе.

Уравнение (1) учитывает баланс массы и является локальным законом сохранения. Уравнение (2) представляет собой модифицированный закон Фика в линейном приближении, учитывающий релаксацию диффузионного потока [13]. При малых скоростях кристаллизации имеем  $V \ll V_D$ ,  $\tau_D \rightarrow 0$ , и уравнение (2) приводится к закону Фика  $\mathbf{J} = -D(1-G) \nabla C_L$ , справедливому для описания локально равновесного массопереноса при затвердевании. В области высоких скоростей,  $V \sim V_D$ , слагаемое  $\tau_D \partial \mathbf{J} / \partial t$  в уравнении (2) качественно меняет механизм массопереноса при переходе через  $V_D$ . При  $V \geq V_D$  перед фазовым фронтом не успевает сформироваться концентрационный профиль и наступает переход к

бездиффузионному (безотборному по химическому составу) режиму затвердевания [10].

Уравнения (3)–(4) описывают закон прироста твердой фазы  $G$ , которая характеризует степень затвердевания системы в каждой точке и является объемной долей кристаллической фазы в локальном объеме, связанным с этой точкой. Скачок концентрации на фронте затвердевания (5) определяется неравновесным коэффициентом  $k$  распределения примеси, зависящим от скорости  $V$ .

Для расчета неравновесных фазовых превращений выберем связь между температурой, химическим составом и скоростью превращения в виде

$$T_0 = T_A + mC_L + GK - V/\beta, \quad (6)$$

где  $T_0$  – температура в изотермической системе;  $T_A$  – температура затвердевания основного компонента системы;  $m$  – тангенс угла наклона линии кинетического ликвидуса;  $G = \gamma/\Delta S$  – постоянная капиллярности,  $\gamma$  – поверхностное натяжение,  $\Delta S$  – изменение энтропии при затвердевании;  $K$  – кривизна границы раздела фаз ( $K < 0$  для вышуклой в сторону жидкости границы);  $\beta$  – кинетический коэффициент роста кристаллов. Совместно с уравнением (5), выражение (6) определяет связь температуры  $T_0$  в системе и неравновесный состав  $C_L$  при конечной скорости  $V$  фазового превращения. Полагая, что скорость фазового превращения определяется скоростью движения границы раздела фаз, можно определить из (6), что скорость  $V$  описывается уравнениями [11]

$$V = \beta(\Delta T - \Delta T_C - \Delta T_N - \Delta T_T), \quad (7)$$

$$\Delta T = T_A + m_e C_0 - T_0, \quad (8)$$

$$\Delta T_C = m(C_0 - C_L), \quad (9)$$

$$\Delta T_N = (m_e - m)C_0, \quad (10)$$

$$\Delta T_T = -GK, \quad (11)$$

где  $\Delta T$  – полное начальное переохлаждение в системе;  $\Delta T_C$  – концентрационное переохлаждение, обусловленное диффузией примеси;  $\Delta T_N$  – переохлаждение, обусловленное изменением наклона кинетического ликвидуса и определяемое разностью между равновесной линией ликвидуса  $T_A + m_e C_0$  и линией кинетического ликвидуса  $T_A + m C_0$ ;  $\Delta T_T$  – переохлаждение, обусловленное искривлением границы раздела фаз (эффект Гиббса – Томсона).

Существует несколько возможностей для расчета кривизны  $K$  межфазной границы в некоторой точке. Для расчета кривизны в точке границы, где доля  $G$  твердой фазы имеет значение  $0 < G < 1$ , примем выражение [14,15]

$$K = (N_S - N_f)/(2N_0 R). \quad (12)$$

Здесь  $N_S$  является суммой доли твердой фазы  $G$  в точках, принадлежащих кругу диаметра  $2R$  (центр которого совпадает с точкой, в которой вычисляется кривизна);  $N_f$  – сумма доли твердой фазы для случая предполагаемого плоского фронта, проходящего через центр круга;  $N_0$  – количество точек, по которым производится суммирование.

Переохлаждения  $\Delta T_C$  и  $\Delta T_N$ , описываемые уравнениями (9) и (10), включают отклонение линии кинетического ликвидуса от равновесного значения (описываемое функцией  $m(V)$ ), которое в свою очередь зависит от неравновесного распределения примеси (описываемого функцией  $k(V)$ ). Для самосогласованности модели локально неравновесного затвердевания необходимо использовать функции  $k(V)$  и  $m(V)$ , которые учитывают отклонение от локального равновесия как на поверхности раздела фаз, так и в диффузионном поле переноса массы [11].

Неравновесное распределение примеси (или, другими словами, неравновесный захват примеси) описывается коэффициентом  $k(V)$  в виде [16]

$$k = \begin{cases} \{[1 - (V/V_D)^2]k_e + V/V_{Dl}\} / [1 - (V/V_D)^2 + V/V_{Dl}], & V/V_D < 1, \\ 1, & V/V_D \geq 1, \end{cases} \quad (13)$$

где  $k_e$  – коэффициент равновесного распределения примеси при  $V \rightarrow 0$ ;  $V_{Dl}$  – скорость диффузии на границе раздела фаз, причем  $V_{Dl} \leq V_D$  [16]. При  $V_D \rightarrow \infty$  выражение (13) дает функцию  $k(V)$  [17], используемую в модели кристаллического роста, которая учитывает только отклонение от локального равновесия на границе раздела фаз. В дополнение к предыдущей модели [17], функция  $k(V)$ , описываемая уравнением (13), включает отклонение от локального равновесия как на границе раздела (введением скорости  $V_{Dl}$  поверхностной диффузии), так и в объеме жидкой фазы (введением скорости  $V_D$  диффузии в объеме). Как показывает выражение (13), при  $V=V_D$  происходит полный захват примеси, то есть  $k(V)=1$ . В общем случае, выражение (13) является обобщением модели непрерывного роста [17] на случай локально неравновесной диффузии примеси.

Наклон линии  $m(V)$  кинетического ликвидуса как функция неравновесного распределения примеси и скорости роста кристаллов описывается выражением [18]

$$m = [m_e/(1-k_e)]\{1 - k + \ln(k/k_e) + (1-k)^2 V/V_D\}. \quad (14)$$

Выражение (14) в пределе  $V_D \rightarrow \infty$  переходит в выражение для кинетического ликвидуса при локально равновесном массопереносе [17], которое учитывает так называемый эффект примесного сопротивления поверхности раздела фаз (solute-drag effect). Учитывая локально неравновесную диффузию, можно получить выражение (14) при использовании формализма расширенной необратимой термодинамики [16]. В частности, слагаемое  $(1-k)^2(V/V_D)$  в выражении (14) следует из анализа свободной энергии Гиббса для случая высокоскоростного затвердевания и локально неравновесной диффузии примеси [18]. Подстановка функции  $k(V)$  (см. (13)) в выражение (14) дает зависимость наклона  $m(V)$  кинетического ликвидуса от локальной неравновесности на границе раздела фаз и в поле диффузии примеси вблизи границы. Таким образом, используя принятые функции  $k(V)$  и  $m(V)$ , уравнения модели (1)–(14) дают самосогласованный подход к проблеме высокоскоростного затвердевания.

Предложенная система уравнений учитывает локально неравновесный массоперенос, описываемый гиперболической системой уравнений (1) и (2). При рассмотрении таких задач учитывается конечность распространения массы со скоростью  $V_D=(D/\tau_D)^{1/2}$ . В общем случае, на фронте диффузионной волны, то есть на переднем крае диффузионного профиля, движущегося со скоростью  $V_D$ , возникает скачок концентраций, учет которого представляет собой отдельную самостоятельную задачу [19]. В настоящей работе скачок концентрации на движущемся со скоростью  $V_D$  фронте диффузионной волны учитывался рассмотрением потоков  $\mathbf{J}_+$  и  $\mathbf{J}_-$ , а также концентраций  $C_+$  и  $C_-$  «справа» и «слева» от фронта диффузии, соответственно. Это приводит к граничному условию на диффузионном фронте «DF» в виде

$$(\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-)|_{DF} = V_D(C_+ - C_-)|_{DF}\mathbf{n}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали диффузионного фронта, направленный в сторону распространения концентрационного возмущения. На границе  $\sigma$  расчетной области принимается условие отсутствия массопереноса

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})|_{\sigma} = 0, \quad (16)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали границы  $\sigma$ . В начальный момент времени задаются условия

$$C_L|_{t=0} = C_0 = \text{const}, \quad J|_{t=0} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (1)–(14) вместе с граничными и начальными условиями (15)–(17) описывает процесс неравно-весного изотермического затвердевания бинарного сплава с малым содержанием примеси.

## 2. Моделирование

Система уравнений (1)–(14) при граничных и начальных условиях (15)–(17) решалась в двумерной области численно. Для этого уравнения были приведены к безразмерному виду в соответствии с выбранными характерными масштабами диффузионных процессов в объеме жидкой фазы и кинетики на границе раздела фаз. Использовались следующие масштабы диффузионных процессов: по пространству  $h_D = a_0 n_0$  ( $h_D$  – несколько межатомных расстояний  $a_0$ ,  $n_0$  – число межатомных расстояний порядка  $10^1$ ); по времени  $\tau_D = h_D / V_D$ ; по температуре  $T_D = V_D / \beta_0$ . Система уравнений решалась в двумерном пространстве с применением метода конечных разностей и специально разработанного алгоритма, описанных в работе [19].

Решение уравнений (1)–(17) осуществлялось на квадратной решетке, имеющей расстояние  $h$  между узлами. Моделирование производилось на каждом временном шаге  $\tau$ , где  $\tau$  и  $h$  связаны соотношением [19]

$$D\tau/h^2 = 1/\epsilon. \quad (18)$$

Здесь  $\epsilon$  – параметр устойчивости вычислительной схемы (при решении гиперболических уравнений (1) и (2) для двумерной вычислительной схемы необходимое условие устойчивости есть  $\epsilon \leq 8$  [19]).

В начальный момент времени моделирования в расчетной области задавался ряд твердых ячеек в виде плоского фронта с возмущением в центре фронта. Выступая в переохлажденный расплав, это возмущение имеет более выгодное положение для роста по сравнению с остальным плоским фронтом благодаря ускоренному отводу примеси [3]. Поэтому возмущение прорастало вглубь жидкости быстрее остальной поверхности, которая в дальнейшем приостанавливалась в своем развитии благодаря постепенному накоплению примеси и снятию переохлаждения перед ним. При моделировании дендритного роста соблюдалось следующее правило: твердая фаза может расти только на ранее сформированной твердой фазе, и зарождение твердофазных центров кристаллизации перед фронтом затвердевания в объеме жидкой фазы принимается маловероятным. Были выбраны следующие константы расчета, приемлемые для сплава Fe–C:  $T_A = 1809$  К,  $C_0 = 0.1$  вес.%,  $\beta_0 = 0.4$  м/(с·К),  $\gamma = 0.0$  Дж/м<sup>2</sup>,  $m_e = 0.1$  К/вес.%,  $k_e = 0.1$ ,  $D = 6 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с,  $V_D = V_{Df} = 17$  м/с,  $Q = 10^9$  Дж/м<sup>3</sup>,  $c_p = 5 \cdot 10^6$  Дж/(К·м<sup>3</sup>),  $a_0 = 3 \cdot 10^{-10}$  м,  $T_Q = Q/c_p$  ( $Q$  – скрытая теплота затвердевания,  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении). Расчеты производились в области  $447 \times 447 h^2$ .

## 3. Результаты моделирования и дискуссия

В результате численного решения уравнений модели (1)–(14) была изучена динамика движения границы раздела фаз и найден морфологический спектр боковой ветвящейся структуры свободно растущего дендрита. Все результаты моделирования оценивались относительно параметра  $V_0/V_D$ , где  $V_0$  – начальная скорость движения фазовой границы, определяемая исходным переохлаждением  $\Delta T$  согласно уравнениям (7)–(11).

Прежде всего отметим, что в поведении растущих кристаллов можно выделить характерные качественные особенности, наблюдаемые в поведении

нелинейных динамических систем. В частности, в процессе формирования структуры растущих кристаллов имеют место следующие три динамических режима, характерные также для конвекции Рэлея – Бенара при переходе от конвективных валов к турбулентному движению жидкости или в процессе диффузионно лимитируемого роста агрегатов [20]:

1) почти равновесный рост макроскопически округлого кристалла, при котором его форма определяется по правилу Кюри – Вульфа (малые отклонения от равновесия);

2) возникновение упорядоченных форм роста (неравновесность полностью управляет структурообразованием);

3) образование разупорядоченных кристаллов со случайным периодом ветвления (хаос).

Все три режима обусловлены переходом из равновесного или почти равновесного состояния к неравновесному, а затем и сильно неравновесному состоянию. На рис. 1 эти режимы показаны в виде некоторых конечных состояний

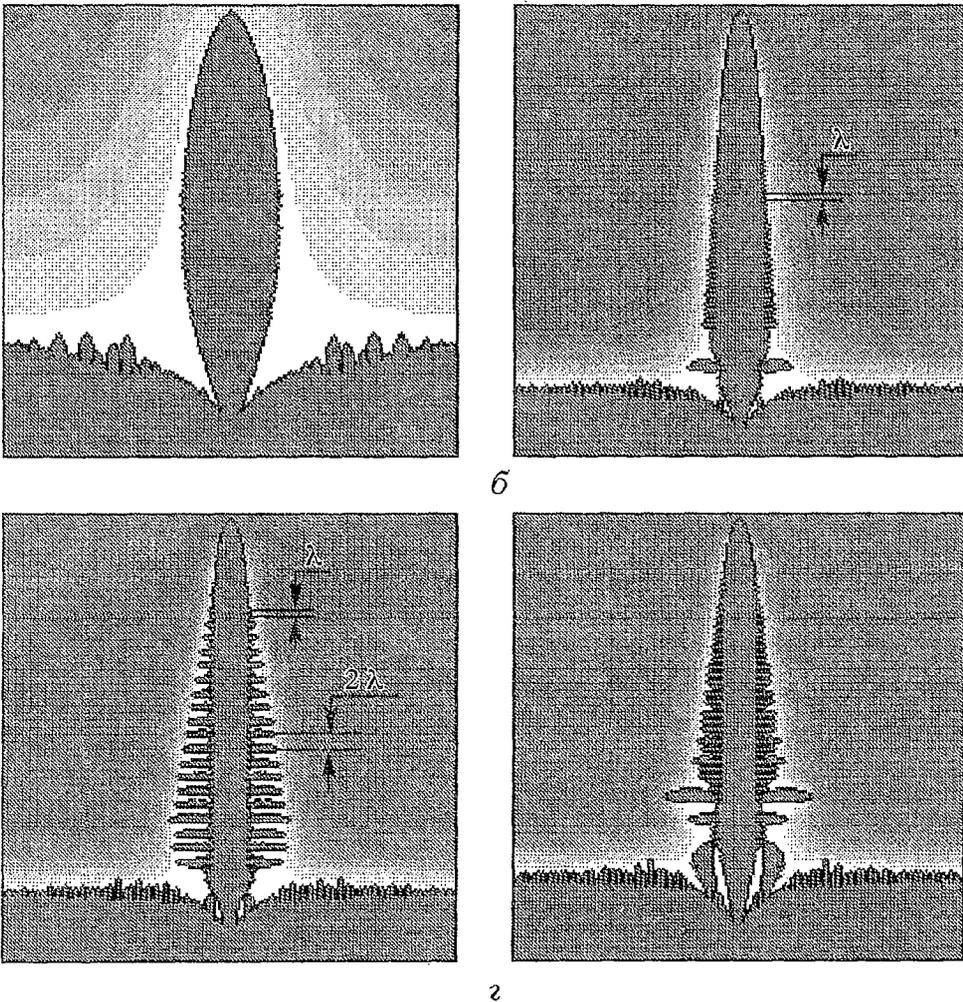


Рис. 1. Квазистационарные формы роста кристаллов в двумерной модели локально равновесного затвердевания бинарной системы [9]: а – иглообразный дендрит,  $\Delta T=1.08T_Q$ ; б – дендритная структура после развития неустойчивости боковой поверхности и бифуркации с образованием ветвей, имеющих постоянный период ветвления  $\lambda$ ,  $\Delta T=1.09T_Q$ ; в – дендритная структура после развития неустойчивости боковой поверхности и структурной бифуркации удвоения периода ветвления  $\lambda \rightarrow 2\lambda$ ,  $\Delta T=1.12T_Q$ ; г – хаос в ветвлении боковой поверхности дендрита,  $\Delta T=1.165T_Q$ . Вблизи дендритных поверхностей показано диффузионное поле, значения концентраций в котором убывают по направлению от светлого цвета к темному

после эволюции границы раздела фаз в модели дендритного роста [6]. Далее рассмотрим подробнее динамику границ раздела, приводящую к развитию структуры кристалла в неравновесных условиях.

На рис. 2 показана динамика границы раздела фаз в некоторые фиксированные моменты времени.

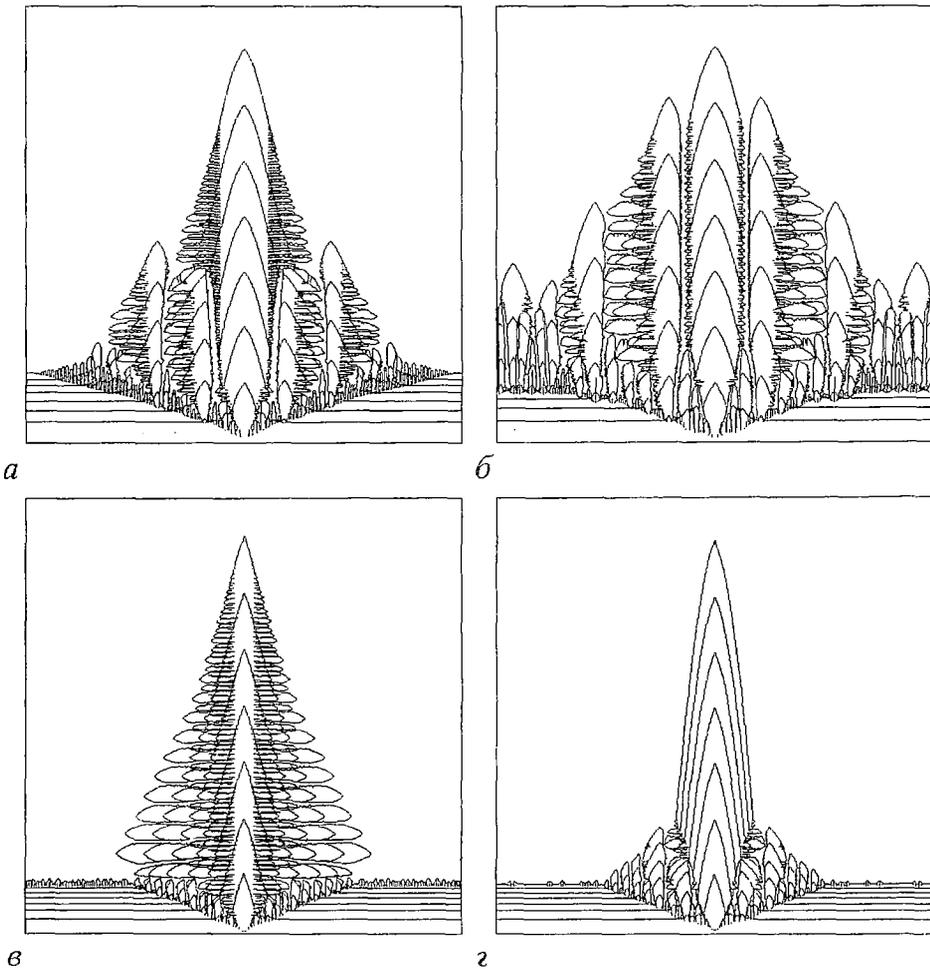


Рис. 2. Динамика границы раздела фаз в различные моменты времени для значений  $V_0/V_D$ :  $a - 0.473$ ,  $b - 0.638$ ,  $v - 0.691$ ,  $z - 0.698$

рованные моменты времени. Из исходного структурного возмущения в центре фронта со временем формируется иглообразный кристалл около-параболической формы вблизи его вершины (рис. 2, *a*). При дальнейшем прорастании кристалла вглубь переохлажденной жидкости его боковая поверхность становится морфологически неустойчивой, и возникают возмущения на поверхности кристаллической иглы. Природа этой неустойчивости связана с конкуренцией стабилизирующих и дестабилизирующих сил на боковой поверхности иглообразного кристалла, имеющей вдали от его вершины слабо выпуклую форму, близкую к плоскости<sup>1</sup>. В общем случае такими конкурирующими силами

<sup>1</sup> Строго говоря, природа неустойчивости боковой поверхности дендрита может быть обусловлена не только линейной морфологической неустойчивостью по сценарию Маллинза – Секерки [21]. Неустойчивость поверхности раздела может также быть обусловлена: во-первых, эволюцией структурной волны, бегущей с вершины кристалла вдоль его боковой поверхности [22]; во-вторых, наличием стохастического шума, ведущего к флуктуациям на боковой поверхности иглообразного кристалла [23]; в-третьих, высокочастотными возмущениями при изотропном росте и возмущениями с нулевой частотой при анизотропном росте [24]. Поэтому для однозначного определения конкретного сценария неустойчивого развития фазовой границы требуется сопоставление выводов аналитических теорий и результатов численного моделирования.

являются силы поверхностной энергии и концентрационный градиент в каждой точке границы. В настоящей работе принята нулевая поверхностная энергия (см. константы моделирования в разделе 2). Поэтому нарастание возмущений обусловлено преобладанием концентрационных градиентов над стабилизирующим влиянием вычислительной решетки (см. дискуссию в работах [3,6]). Появившиеся возмущения растут во времени и превращаются в боковые ветви кристалла на основном стволе. Происходит переход от иглообразной к дендритной форме роста кристалла (см. рис. 2, а).

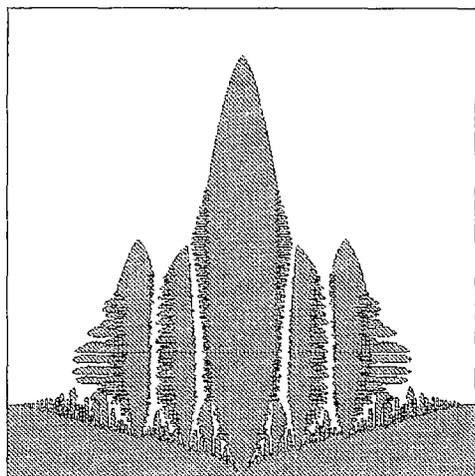
При некоторых переохлаждениях может преобладать возмущение основного фронта по сравнению с возмущениями боковой поверхности иглообразного кристалла. На рис. 2, б показана динамика фронта, когда развитие возмущения в центре фронта ведет к развитию как иглообразного кристалла, так и самого фронта. При этом развитие неустойчивости фронта ведет к образованию дендритных кристаллов, гасящих боковое ветвление основного иглообразного кристалла в центре области. Таким образом, эволюция свободно растущего кристалла может быть прекращена, если неустойчивость общего фронта затвердевания при данном исходном переохлаждении ведет к значительному развитию кристаллов на фронте. В этом случае свободный рост дендрита невозможен, поскольку затвердевание происходит в виде кристаллического ансамбля, внутри которого отдельные кристаллы взаимодействуют друг с другом через перекрывающиеся концентрационные поля или чисто механическим сопряжением боковых ветвей.

Возможны также сценарии, когда развитие свободно растущего кристалла происходит наиболее полно. На рис. 2, в показана динамика фронта, приводящая к практически полному развитию свободного роста дендрита, в боковой структуре которого отчетливо наблюдается конкуренция между ветвями. Эта конкуренция приводит к так называемому неравновесному укрупнению боковых ветвей, когда формируются быстрорастущие вторичные ветви, между которыми остаются неразвитыми медленнорастущие ветви. При дальнейшем увеличении переохлаждения, то есть увеличении начальной стартовой скорости затвердевания, может происходить переход к гладким формам роста, как это представлено на рис. 2, г. Скорость движения кристаллической иглы настолько высока, что боковая поверхность остается морфологически устойчивой в течение всего времени затвердевания системы<sup>2</sup>.

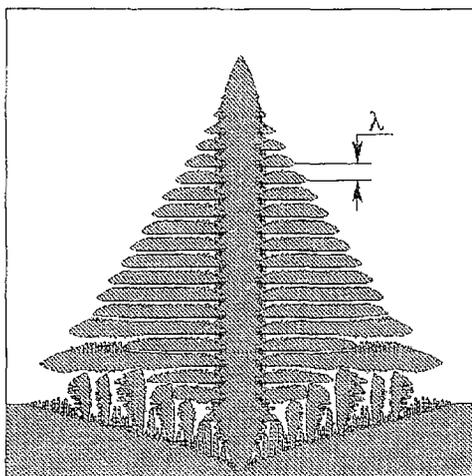
Таким образом, на примере образования некоторых неравновесных форм роста (см. рис. 2) показано, что динамика фазовой границы может иметь различные сценарии. Последовательность таких сценариев, ведущих к различным типам структур, назовем морфологическим спектром и далее покажем, какие основные структуры свободно растущего дендрита могут появляться в зависимости от начального отклонения от равновесия, то есть от исходной скорости  $V_0/V_D$  (исходного переохлаждения  $\Delta T$ ) в этом спектре.

На рис. 3, а показано развитие кристаллической иглы, представляющей собой гладкую протяженную область позади вершины. Возмущение поверхности иглы происходит лишь вблизи соседних кристаллов благодаря накоплению примеси у фазовой границы из-за перекрывания соседних концентрационных полей. Когда нарушается морфологическая устойчивость боковой поверхности иглообразного кристалла, происходит возникновение и развитие вторичных ветвей (рис. 3, б). Расстояние между ними имеет постоянное значение равное  $\lambda$ . В этом случае можно предположить, что с увеличением отклонения от равновесия в системе произошел переход от гладкой иглообразной формы роста к разветвленному дендриту вследствие структурной бифуркации [6].

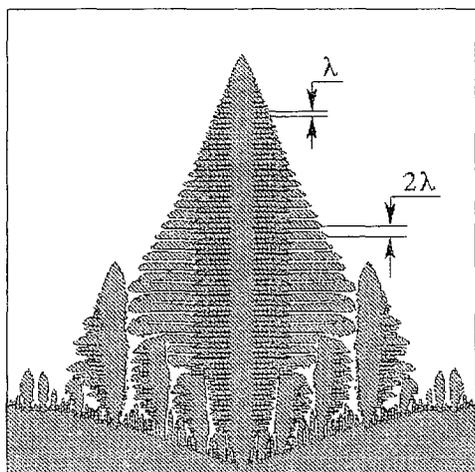
<sup>2</sup> Отметим, что, согласно теории высокоскоростного затвердевания, с увеличением скорости  $V$  роста градиенты концентрации в каждой точке фронта уменьшаются вплоть до нуля при  $V \geq V_D$  [7–12]. Как следует из результатов работы [6], существует критическое значение скорости  $V_C < V_D$ , выше которого стабилизирующее действие вычислительной решетки будет превалировать над дестабилизирующим действием концентрационных градиентов на фронте. Поэтому при  $V_C \leq V < V_D$  следует ожидать развития морфологически гладких форм роста, что и показано на рис. 2, г.



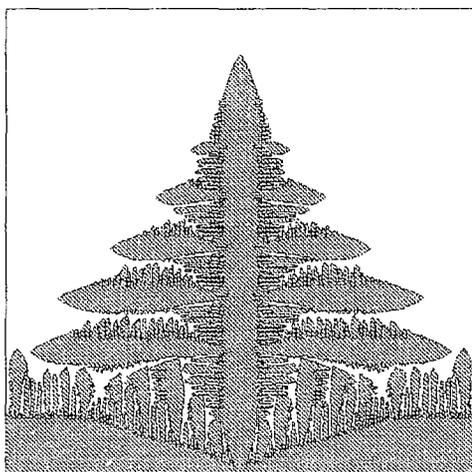
a



б



в



г

Рис. 3. Иллюстрация различных типов структур свободно растущего дендрита в морфологическом спектре: а – иглообразный дендрит,  $V_0/V_D=0.456$ ; б – дендритная структура после развития неустойчивости боковой поверхности и бифуркации с образованием ветвей, имеющих постоянный период ветвления  $\lambda$ ,  $V_0/V_D=0.458$ ; в – дендритная структура после структурной бифуркации удвоения периода ветвления  $\lambda \rightarrow 2\lambda$ ,  $V_0/V_D=0.536$ ; г – пакетная структура ветвей дендрита,  $V_0/V_D=0.566$

Взаимодействие диффузионных полей соседних ветвей ведет к неравновесному укрупнению в структуре боковой поверхности свободно растущего дендрита. Это явление заключается в том, что каждая вторая ветвь замедляется в своем развитии и по прошествии некоторого времени может быть приостановлена соседними быстро растущими ветвями [5]. В результате расстояние между быстро растущими ветвями увеличивается и становится равным  $2\lambda$ . Как показано на рис. 3, в, благодаря структурной бифуркации происходит удвоение периода ветвления ( $\lambda \rightarrow 2\lambda$ ) вдоль основного ствола дендрита. Отметим, что ветвление боковой поверхности дендрита и выделение характерного расстояния во вторичном ветвлении зависит от  $\Delta T$  и связано с отбором длины волны структурного возмущения [3–6]. Эволюция структуры боковой поверхности дендрита может иметь регулярное удвоение периода  $\lambda$  структурной волны в виде двойного увеличения ( $\lambda \rightarrow 2\lambda \rightarrow 4\lambda$ ) вдоль основного ствола дендрита (см. рис. 3, в и работы

[3–6]). Как следует из термодинамического анализа Уманцева и Ольсона [25], увеличение периода ветвления растущей структуры путем удвоения расстояния между структурными элементами является признаком неравновесного укрупнения структуры в консервативной системе с внутренней диссипацией.

Дальнейшее увеличение неравновесности в системе приводит к хаосу в ветвлении боковой поверхности дендрита. Среди развивающихся вторичных ветвей уже не будет существовать постоянного периода ветвления. В этом случае происходит подбор длины волны структурного возмущения, которая имеет непостоянное значение вдоль основного ствола дендрита. При еще большем увеличении неравновесности имеет место переход к так называемой пакетной структуре боковой поверхности дендрита (рис. 3, 2). Расстояние между быстрорастущими ветвями в пакетной структуре может быть различным [9] и, обычно, не кратно увеличению периода с удвоением по сценарию  $\lambda \rightarrow 2\lambda \rightarrow 4\lambda \rightarrow 8\lambda$ .

Таким образом, морфологический спектр структуры боковой поверхности дендрита обусловлен конкурентным отбором между вторичными ветвями. Это наглядно может быть показано на рис. 4, а, где в результате конкуренции вначале

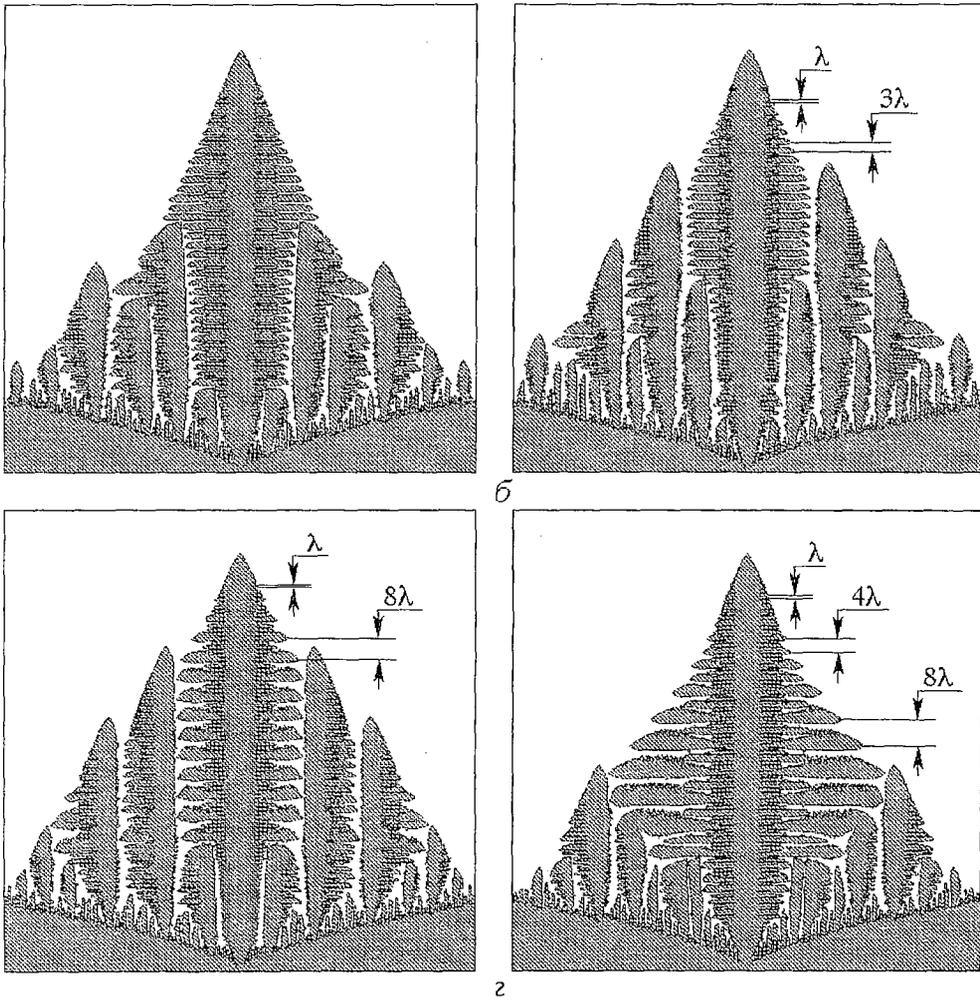


Рис. 4. Нетривиальное ветвление дендритов: а – образование дуплекс-структур (дублонов) в боковом ветвлении дендрита,  $V_0/V_D=0.406$ ; б – дендритная структура после структурной бифуркации трехкратного увеличения периода ветвления  $\lambda \rightarrow 3\lambda$ ,  $V_0/V_D=0.348$ ; в – дендритная структура после структурной бифуркации восьмикратного увеличения периода ветвления  $\lambda \rightarrow 8\lambda$ ,  $V_0/V_D=0.353$ ; г – дендритная структура после структурной бифуркации четырехкратного увеличения периода ветвления  $\lambda \rightarrow 4\lambda \rightarrow 8\lambda$ ,  $V_0/V_D=0.419$

образуются так называемые дуплекс-структуры вторичных ветвей (или, так называемые дублоны), внутри которых «выживают» лишь отобранные быстрорастущие вторичные ветви. Подобные дуплекс-структуры наблюдаются также после развития морфологической неустойчивости плоских фронтов в натуральных экспериментах при направленном затвердевании бинарных систем [26] и являются промежуточным типом структур между ячеисто-дендритной или дендритно-ячеистой структурами роста [26,27]. Такое поведение можно качественно сопоставить с поведением динамических систем, претерпевающих бифуркации изменения периода.

В последнее время имеется ряд работ по изучению динамических систем с диссипацией, где наряду с бифуркациями удвоения обнаружены каскады бифуркаций трех-, четырехкратного и т.д. увеличения периода [28–31]. Интересно отметить, что помимо дендритов с ветвями, находящимися на одинаковом расстоянии  $\lambda$  (рис. 3, б), имеющих период удвоения  $\lambda \rightarrow 2\lambda \rightarrow 4\lambda$  (рис. 3, в) или структуру пакетов (рис. 3, г), существуют также другие типы регулярных боковых структур. Например, на рис. 4, б–г показаны структуры после трехкратного увеличения периода ветвления,  $\lambda \rightarrow 3\lambda$ , изменения периода  $\lambda \rightarrow 8\lambda$ , а также после четырехкратного увеличения периода,  $\lambda \rightarrow 4\lambda \rightarrow 8\lambda$ . Приведенные выше результаты позволяют предположить, что динамика фронта затвердевания может быть качественно описана некоторой простой динамической системой (к таковым мы относим обыкновенные дифференциальные уравнения и нелинейные отображения), по крайней мере, в ограниченном интервале значимых параметров модели. К настоящему времени известны работы, где модель дендритного роста сводится к одному интегро-дифференциальному уравнению, анализ которого в линейном приближении позволил установить условие устойчивости вершины и период бокового ветвления кристалла при малых переохлаждениях [32,33]. Поиск аналогичной динамической системы, дающей объяснение наблюдаемым нами структурным бифуркациям, может явиться предметом дальнейшего исследования.

В заключение опишем укрупнение боковой структуры для случая регулярного удвоения периода ветвления вдоль основного ствола дендрита. Аналогичное описание было дано впервые для роста дендритов чистого вещества в работе [5]. Пусть  $X(z)$  – координата границы раздела фаз на расстоянии  $z$  от вершины дендрита. На стационарной стадии движения вершины со скоростью  $V_s$  боковая поверхность дендрита разбивается на ряд характерных областей (рис. 5):

- функция  $X(z)$  монотонно возрастает от нуля при  $x=0$  (вершина дендрита) до значения  $\delta_s$  при  $z=z_s$  (граница стационарной невозмущенной области за вершиной дендрита);

- функция  $X(z)$  становится периодической благодаря неустойчивости в точке  $z=z_s$ ; происходит бифуркация в периодическое решение с периодом  $\lambda=t_s V_s$  ( $t_s$  – характерное время образования структуры); появляются две огибающие функции  $X(z)$ :  $x_s$  проходит по максимальным значениям, а  $x_{m1}$  проходит по минимальным значениям функции;

- неустойчивость функции  $X(z)$  в точке  $z=z_1$  приводит к раздвоению функции  $X(z)$ ; происходит бифуркация с изменением периода ветвления, что ведет к укрупнению структуры боковых ветвей; увеличение функции  $X(z)$  происходит за счет появления быстрорастущих ветвей, имеющих огибающую  $x_s$ ; пространственный период, необходимый для развития быстро растущих ветвей, удваивается и становится равным  $2\lambda$ ; длина медленно растущих ветвей с огибающей  $x_{m2}$  остается неизменной;

- неустойчивость функции  $X(z)$  в точке  $z=z_2$  и следующая бифуркация приводят к дальнейшему удвоению периода ветвления ( $2\lambda \rightarrow 4\lambda$ ); функция  $X(z)$  раздваивается на возрастающую ветвь  $x_s$  и невозрастающую ветвь  $x_{m4}$ .

Таким образом, можно заключить, что изменение дендритной структуры может быть рассмотрено в зависимости от двух управляющих параметров:

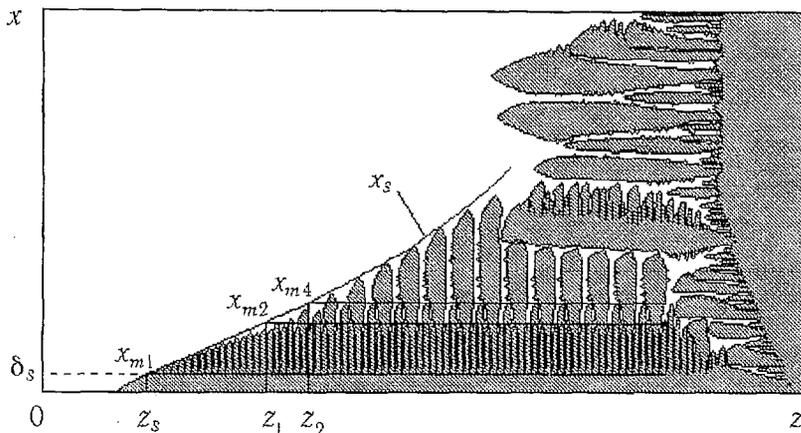


Рис. 5. Боковая структура после регулярного удвоения периода ветвления,  $\lambda \rightarrow 2\lambda \rightarrow 4\lambda$ , вдоль основного ствола дендрита,  $V_0/V_D=0.564$

1) начального отклонения от равновесия, то есть начальной скорости или начального переохлаждения (см. морфологический спектр на рис. 3 и нетривиальное укрупнение структуры на рис. 4);

2) расстояния от вершины дендрита, в зависимости от которого функция  $X(z)$  может становится неустойчивой, периодической и изменять свой период (см. рис. 5). Это расстояние будет определять локальное переохлаждение, которое также можно принять за параметр, при изменении которого наблюдаются структурные бифуркации. На рис. 5 это выглядит как изменение периода ветвления при увеличении расстояния от вершины дендрита вдоль оси  $z$ .

Дальнейшее изучение структуры дендрита благодаря структурным бифуркациям авторы видят в описании динамики фазовой границы именно в зависимости от этих двух управляющих параметров.

## Выводы

Для описания роста кристаллов дендритного строения в переохлажденной бинарной системе использована модель локально неравновесного затвердевания (см. раздел 1). Численное решение уравнений модели позволило установить динамику дендритной твердо-жидкой границы в переохлажденной бинарной системе (см. раздел 2 и рис. 2) и режимы роста кристаллов при отклонении от равновесия как на поверхности раздела фаз, так и в объеме жидкой фазы.

При увеличении исходного отклонения от равновесия ветвление дендритной боковой поверхности дает следующий морфологический спектр: иглообразный дендрит; плотная структура вторичных ветвей с одинаковым периодом ветвления между ними; хаотическая структура, имеющая непостоянный период ветвления боковой поверхности дендрита; удвоенный период между вторичными ветвями боковой поверхности дендрита; пакетная структура, представляющая собой быстро растущие вторичные ветви с плотно упакованной структурой медленно растущих между ними вторичных ветвей. Аналогичное поведение в структуре бокового ветвления благодаря развитию структурных бифуркаций было зафиксировано ранее при исследовании дендритной структуры в локально равновесных условиях затвердевания бинарной системы [6]. Обнаруженный морфологический спектр в структуре бокового ветвления (рис. 3), обусловлен конкурентным отбором между вторичными ветвями. Это наглядно может быть показано на рис. 4, а, где в результате конкуренции образуются так называемые дуплекс-структуры (дублоны), внутри которых «выживают» лишь отобранные быстрорастущие вторичные ветви.

В зависимости от исходного отклонения от равновесия могут развиваться дендриты с боковой структурой после нетривиального изменения периода ветвления. На рис. 4, б–г показаны дендриты с боковой структурой после трех-, восьми- и четырехкратного увеличения периода ветвления соответственно. Если рассматривать изменение границы раздела фаз в зависимости от ее неустойчивости и последовательности бифуркаций в некоторых критических точках (см. рис. 5), то нетривиальное укрупнение (см. рис. 4) имеет более сложный сценарий, чем только удвоение периода между вторичными ветвями.

*Настоящая работа частично выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства общего и профессионального образования Российской Федерации по разделу «Естественное знание. Теоретическая и математическая физика» (грант № 97–0–14.3–13).*

### Библиографический список

1. Schuster H.G. Deterministic Chaos. Weinheim: Physik-Verlag, 1984.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
3. Galenko P.K., Zhuravlev V.A. Physics of Dendrites. Singapore: World Scientific, 1994.
4. Уманцев А.Р., Виноградов В.В., Борисов В.Т. Математическое моделирование роста дендритов в переохлажденном расплаве // Кристаллография. 1985. Т. 30, № 3. С. 455.
5. Уманцев А.Р., Виноградов В.В., Борисов В.Т. Моделирование эволюции дендритной структуры // Кристаллография. 1986. Т. 31, № 5. С. 1002.
6. Galenko P.K., Krivilyov M.D., Buzilov S.V. Bifurcations in a sidebranch surface of a free-growing dendrite // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 1. P. 611.
7. Галенко П.К. Эффект диффузионной релаксации при высокоскоростной кристаллизации бинарного сплава // Кристаллография. 1993. Т. 38, № 6. С. 238.
8. Galenko P. Local nonequilibrium phase transition model with relaxation of the diffusion flux // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 190, № 3/4. P. 292.
9. Галенко П.К. К феноменологической теории локально неравновесной кристаллизации // Докл. РАН. 1994. Т. 334. С. 707.
10. Galenko P., Sobolev S. Local nonequilibrium effect on undercooling in rapid solidification of alloys // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 1. P. 343.
11. Galenko P.K., Danilov D.A. Local nonequilibrium effect on rapid dendritic growth in a binary alloy melt // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 235, № 3. P. 271.
12. Galenko P.K., Krivilyov M.D. Crystal pattern formation under local non-equilibrium solidification // Fractal Frontiers. Eds M.M. Novak and T.G. Dewey. Singapore: World Scientific, 1997. P. 411.
13. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics. 2nd ed. Berlin: Springer, 1996.
14. Family F., Platt D.E., Vicsek T. Deterministic growth model of pattern formation in dendritic solidification // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. Vol. 20. P. L1177.
15. Meakin P., Family F., Vicsek T. Viscous fingering simulated by off-lattice aggregation // J. Colloid Interface Sci. 1987. Vol. 117. P. 394.
16. Sobolev S.L. Effects of local nonequilibrium solute diffusion on rapid solidification of alloys // Phys. Stat. Sol. A. 1996. Vol. 156. P. 293.
17. Aziz M.J., Kaplan T. Continuous growth model for interface motion during alloy solidification // Acta Metall. 1988. Vol. 36. P. 2335.
18. Галенко П.К. Анализ движения границы раздела фаз с позиций расширенной необратимой термодинамики: Препринт. Ижевск: УдГУ, 1998.
19. Кривилев М.Д., Галенко П.К. Программный комплекс для моделирования кристаллического структурообразования в переохлажденных бинарных сплавах. Ижевск: Издательский Дом «Удмуртский университет», 1999.
20. Сандер Л.М. Континуальная диффузионно-лимитируемая агрегация:

случайный фрактальный рост, порождаемый детерминистической моделью // Фракталы в физике / Под. ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти. М.: Мир, 1988. С. 336.

21. *Mullins W.W., Sekerka R.F.* // *J. Appl. Phys.* 1963. Vol. 34. P. 323; *ibid.* 1964. Vol. 36. P.444.

22. *Pelce P.* Dynamics of curved fronts. N.-Y.: Academic Press, 1988.

23. *Langer J.S.* // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36. P. 3350.

24. *Xu J.J.* // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53. P. 5051.

25. *Umantsev A., Olson G.B.* Phase equilibria and transformations in adiabatic systems // *Phys. Rev. E.* 1993. 48. P. 4229.

26. *Jamgotchian H., Trivedi R., Billia B.* Array of doublets: A branch of cellular solutions in directional solidification // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47. P. 4313.

27. *Бренер Е.А., Темкин Д.Е.* Ячейстая, дендритная и дублонная структуры при направленной кристаллизации // ЖЭТФ. 1996. Т.109, № 3. С. 1038.

28. *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства последовательности утроения периода // УМН. 1983. Т.38, № 1. С. 159.

29. *Синай Я.Г., Халатников И.М.* Предисловие // Фракталы в физике / Под. ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти. М.: Мир, 1988. С. 7.

30. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т.2, № 3/4. С. 90.

31. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multy-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. 109. P. 91.

32. *Langer J.S., Mueller-Krumbhaar H.* Theory of dendritic growth. Elements of stability analysis // *Acta Metall.* 1978. Vol. 26. P. 1681.

33. *Langer J.S., Mueller-Krumbhaar H.* Theory of dendritic growth. Instabilities in the limit of vanishing surface tension // *Acta Metall.* 1978. Vol. 26. P. 1689.

Удмуртский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.01.99  
после переработки 26.02.99

## BIFURCATIONS IN A STRUCTURE OF A FREE-GROWING DENDRITE DURING SOLIDIFICATION OF A BINARY SYSTEM

*P.K. Galenko, M.D. Krivilyov, K.V. Emelyanov*

Using a model of local nonequilibrium solidification of supercooled binary system the dynamics of a motion of the liquid-solid interface having dendritic structure is investigated. The morphological spectrum of side-branch surface of a free-growing dendrite is defined. The modification of dendritic structure is considered in an association with two controlling parameters: an initial undercooling and position from the tip of dendrite which is define local undercooling at the phase interface. Due to the values of these parameters the interface can become unstable, periodic, and bifurcate with doubling, trebling of the period and so on.



*Галенко Петр Константинович*, 1961 года рождения, окончил Ленинградский политехнический институт (1985). Защитил кандидатскую диссертацию по теории и моделированию ростовых структур в металлических системах (1991). Доцент Удмуртского государственного университета, руководитель лаборатории физики конденсированных сред и лаборатории самоорганизующихся систем. Автор более 40 научных статей, монографии «Physics of Dendrites» (World Scientific, Singapore, 1994) в соавторстве с В.А.Журавлевым. С 1995 года – член Нью-Йоркской Академии Наук. Области научных интересов – теория фазовых и структурных переходов в конденсированных средах, математическая физика, теория затвердевания, фрактальный анализ, вычислительная физика, термодинамика необратимых процессов, материаловедение. E-mail: pkg@uni.udm.ru



*Кривилёв Михаил Дмитриевич*, 1974 года рождения, окончил физический факультет Удмуртского государственного университета (1996). Аспирант, сотрудник лаборатории физики конденсированных сред физического факультета Удмуртского государственного университета. Автор 3 научных публикаций. В соавторстве с П.К. Галенко опубликовал учебное пособие «Программный комплекс для моделирования кристаллического структурообразования в переохлажденных бинарных сплавах» (Ижевск: УдГУ, 1998). Области научных интересов – теория затвердевания и ростовые структуры, математическое моделирование и программные комплексы.



*Емельянов Константин Владимирович*, 1975 года рождения, окончил физический факультет Удмуртского государственного университета (1996). Аспирант и сотрудник лаборатории физики конденсированных сред физического факультета Удмуртского государственного университета. Области научных интересов – теория затвердевания и ростовые структуры, математическая физика, интегрируемые и неинтегрируемые динамические системы.



*В редакции журнала имеются в наличии книги*

**Шапиро И.С., Ольшанецкий М.А.** Лекции по топологии для физиков. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 132 с. ISBN 5-7029-0311-0

Предлагаемый текст представляет собой обработанный курс лекций, прочитанный И.С.Шапиро группе физиков ИТЭФ в 1977–78 годах. Публикуемая часть курса является введением в теорию гомологий.

*Стоимость наложенного платежа 37 руб.*

**Поляков А.М.** Калибровочные поля и струны. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 321 с. ISBN 5-7029-0322-6

Автор книги выдающийся физик–теоретик, специалист по квантовой теории поля. Книга написана на основе его научного дневника и представляет субъективный взгляд на важнейшие проблемы теоретической и математической физики – конфайнмент кварков, инстантоны, магнитные монополи, струны, критические явления. Эти разнообразные вопросы объединены общей целью – понять поведение квантополевых систем в области сильной связи, когда теория возмущений неприменима. В книге ясно и увлекательно изложены тонкие и сложные современные методы квантовой теории поля, и она отлично дополняет традиционные учебники по теории поля и физике элементарных частиц.

*Стоимость наложенного платежа 47 руб.*

**Козлов В.В.** Общая теория вихрей. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1998. 238 с. ISBN 5-7029-0299-8

Книга посвящена математическому изложению аналогий, существующих между гидродинамикой, геометрической оптикой и механикой. Изучение семейств траекторий гамильтоновых систем по существу сводится к задачам многомерной гидродинамики идеальной жидкости. В частности, известный метод Гамильтона – Якоби отвечает случаю потенциальных течений. Даны некоторые приложения такого подхода, в частности, вихревой метод точного интегрирования дифференциальных уравнений динамики.

*Стоимость наложенного платежа 43 руб.*

*Книги можно заказать в редакции.*

E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

Тел.ред. (845-2) 51-42-98





Изв. вузов «ПНД», т. 7, № 2,3, 1999

УДК537.8(09)

**ОБ ИЗОБРЕТЕНИИ РАДИО ... И НЕ ТОЛЬКО**  
**Лекция, прочитанная на открытии физматшколы**  
**в Зеленом Городе 4 августа 1997 года\***

*М. Миллер*

*Светлой, но трудной памяти Вити Гапонова,*  
*трагически погибшего 4 августа 1977 года, день в*  
*день 20 лет назад.*

**Радио... Радио... Радио...**

Я знаю людей, которые твердо уверены, что никогда ранее в истории нашей (нашей!) цивилизации не случалось такого изобретательского события, каким стало появление радио. А следовательно, такого массового проявления увлеченности духа, изощренности ума, вовлеченности таланта, а вместе с этим косою зависти и прямой неприязни, а также многих, многих других человеческих возвышений и ниспадания, сконцентрированных на одном тематически обособленном «интеллектуальном пятячке». И, как следствие, столь многочисленных претендований на первооткрывательство. Следующий ему подобный ажиотаж возник полстолетия спустя – примерно в последней трети 20-го века. На сей раз речь шла о компьютерном нашествии, разбушевавшемся, конечно же, не без участия своих близких «радиопредков» и, вероятно, не менее влиятельным по социальным последствиям, если не более, а с учетом подстерегающей человечество экспоненты – еще более масштабным.

Далее для разгона придется слегка повториться. Если бы снова пришлось поизбахвалиться перед инопланетянами и мы бы исхитрились объяснить им, что такое есть радио, из чего его делают и почему ему воздают такие неослабевающие почести, несомненно мы испытали бы при этом невероятные педагогические трудности! Само собой разумеется, перед объяснением другим надо сперва попытаться разобраться самим. И очень бы нас озадачила увертливая тактика справочников. А ведь, казалось бы, все на свете должны знать словари. Будто бы все и будто бы должны. Вот один из них уверяет: «Радио – способ передачи информации на расстояние посредством *электромагнитных волн*»... Другой: «Передача текстовых или музыкальных программ»... Третий:

\* © М. Миллер. Об изобретении радио ... и не только. Нижний Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997. 56 с.

Окончание. Начало см. Изв. вузов. ПНД. 1999. Т. 7, № 1. С. 112.

«The term radio covers the radiation and detection of signals propagated through space as electromagnetic waves to convey information». И так далее, в том же духе... Нет, я не прав – иногда дух иной... В одном из нашенских б. советских руководств указано наотмашь – радио – это то, что было изобретено русским ученым А. С. Поповым... Прекрасная дефиниция, но боюсь – не для инопланетян! И даже не для всех землян! Заодно, попутно я позволил себе поразвлечься устными опросами, приставая к случайно попадавшимся мне под руку работникам умственного труда с «радио–так сказать–привязанностями», и многие отвечали недоуменным пожатием плеч, что на языке жестов означало: «радио есть радио, включил его – оно работает»..., то есть ту самую обогащаемую чувствами тавтологию, которую я поминал выше.

Самое интересное во всем этом «деле об изобретении радио», что, по–моему, его нет, этого дела, оно какое–то надуманное, оно как бы специально инспирировано (О, Господи! Всюду мерещатся происки!) для принижения роли Великих Идей и Великих Открытий. Попытаюсь убедить вас в этом. А что касается инопланетян, то не знаю, как с ними и поступить! Ибо «на нашем свете есть такое чудо, которое не снилось мудрецам оттуда!»

Природа умело распорядилась оптическими сигналами для передачи информации на расстояние. Вот смотрю на ваши лица и умею различать множество подробных выражений, передаваемых вами мне и мною усваиваемых. Передаваемых и усваиваемых, между прочим, посредством электромагнитных колебаний и волн! Люди так естественно «эксплуатируют» достижения естества, что часто совсем и не нуждаются в дотошных уразумениях подноготных причин! И зачем им знать (раньше положенного времени?!), что они сами внутри себя наполнены электромагнитными сигналами, разгуливающими вдоль нервных волокон. (До сих пор наука толком не разобралась, сколько в этом «бегущих химических реакций», а сколько «волн электрической поляризации»). Значит, даже наше понимание мира, как внутреннего, так и наружного, зиждется на все тех же, все на тех же электромагнитных колебаниях и волнах! Так что по мере продвижения в науках человечеству оставалось *понять* это! Сперва догадаться, а потом и понять!

Не буду утомлять вас историческими повторами. Сделаю лишь прыжковую пробежку по пред–фарадей–максвелловской эпохе электромагнетизма. Как вы наверняка знаете, с незапамятных времен люди шаг за шагом извлекали из Природы признаки поведения вещей и веществ, связанные с электричеством и магнетизмом. Эта стадия наблюдения длилась много–много веков. Попутно и совершенно отдельно изучалась оптика, причем оптические успехи выглядели продвинутое других: в основном из–за наличия отменных по своему совершенству измерительных устройств (глаза плюс мозговая обработка!). И вот так до 19–го века наши предки имели *независимые* знакомства с электричеством (первоначально чисто статическим), магнетизмом (тоже поначалу постоянным во времени) и оптикой (сперва лучевой, а потом и волновой). Пожалуй, самым знаменательным научным событием прошлого столетия следует считать объединение этих трех ранее разрозненно воспринимаемых явлений. В известном смысле самым–самым знаменательным и знаменитым научным событием!

*Впрочем, выделение любого события в самые–какие–то–самые всегда отдает субъективностью. Попробуйте, например, составить тройку (или десятку) наиболее значимых (или знаменитых, что, вообще говоря, не одно и то же!) людей всей цивилизации, или только современности, или... хотя бы своего окружения... и вы испытаете растерянность, неуверенность и, главное, непонимание отличающих признаков. Даже массовые опросы подвержены коллективным переоценкам или недооценкам «избранных баловней судьбы», обусловленным группирующимися «стайными самовнушениями».*

Любая наука стремится к экономному описанию своих владений. Дабы **никаких величин и причин не вводить без особой надобности.**

Этот призыв именной: его зовут «бритвой Оккама». (Жил–был такой средневековый монах. В те времена многие «мудрецы–созерцатели» изрекали

назидательные афоризмы в поисках окончательных научных истин, но большинство тех изречений потерялось потом в мутноватых потоках философской словесности, а вот пароль Оккама выжил, – значит, попал «в жилу» современных представлений об этой самой истине. И действительно, и в мелочах, и по-крупному мы стремимся к «обрезанию ненужного», к избавлению от невлияющих сопутствий и, в конечном счете, – к возможному *объединению* причин. А в особых удачах даже называем их *Великими Объединениями!*

Наверное, первым Великим Объединением люди обязаны Ньютону, давшему общее описание небесной и земной механики. А вторым – Максвеллу, который, опираясь на идеи Фарадея, создал единую электродинамику, охватывающую электричество, магнетизм и оптику.

*Между прочим, первое официальное сообщение по этому поводу на заседании Королевского Общества (Royal Society) было сделано 27 октября 1864 года. Если бы мы возвысились в своем почитании круглых дат до чествования настоящих событий цивилизации, определивших ее проникновение в Тайны Природы, то не забыли бы в 1994 году справить 130-летие со дня рождения максвелловской электродинамики. Насколько я помню, столетний юбилей все же отмечался; во всяком случае на Радиофизическом факультете нашего Университета и причем достаточно восторженно и бурно.*

Конечно, никакие Великие Открытия не происходят невзначай: у Максвелла были очень даже плодоносящие предшественники, имена которых вам, по-видимому, известны: в частности, Гильберт, Франклин, Вольты, Кулон, Кавендиш, Гальвани, Пуассон, Эрстед, Ампер, Био, Савар, Фарадей, Генри, Ом, Джоуль, Нейман, Вебер, У. Томпсон... (всех не перечислить, да и боязно власть в рейтинговую субъективность, о чем я только что говорил!), но именно Максвеллу выпала миссия Окончательного Слова: он написал уравнения (их потом назвали уравнениями Максвелла), которым подчинены электромагнитные поля, заряды и токи при любых изменениях во времени и в пространстве. (Ну, разумеется, придиричивая наука установила потом кое-какие границы применимости, но в наших житейских макромасштабах уравнения Максвелла перекрыли все рекорды по долгоживущей достоверности!)

Важнейшим провозглашением фарадеевско-максвелловской электродинамики было Его Величество Электромагнитное Поле! Оно могло существовать самостоятельно – в отрыве от своих источников – зарядов и токов, перемещаясь в виде электромагнитных волн с любыми временными и пространственными периодами (и соответствующими им частотами). Хорошо изученные ранее электростатику и магнитостатику стало возможным рассматривать теперь как пределы колебаний и волн с нулевыми частотами, область медленных изменений (называемую квазистатической или квазистационарной) можно было в принципе описывать, минуя поля, непосредственно через заряды и токи, но, начиная с некоторых частот, поля излучались, уносились в открытое, свободное пространство (free space) в виде совокупности плоских электромагнитных волн, распространяющихся (при отсутствии препятствий и сред) всегда с одной и той же предельной скоростью, равной скорости света в вакууме:  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с. Оптические волны соответствовали частотам, примерно равным  $f \sim 10^{15}$  с<sup>-1</sup>, и так далее... Даже сейчас, в нашу умственно преуспевающую эпоху, не установлено наличие верхнего предела для частот электромагнитных колебаний! Во всяком случае, нет полной уверенности в этом!

Я позволил себе пробежаться трусцой по этим известным электромагнитным событиям, чтобы иметь возможность вместе с вами еще и еще раз *испытать чувство потрясения «Открытием Породнения Чужаков!» ...Сближением разрозненностей! ...Природной общностью несходств! ...Попробуйте вжиться в наивное тогдашнее незнание, то есть притворно избавиться от своей забежавшей вперед образованности! И представить себе думанье тех времен... В разных проявлениях Природы выскакивают разные факты, кажущиеся совершенно чуждыми друг другу. И тут приходит некий «A Magic Traveler» и составляет из этих*

фактов единую Картину, наполненную Красотой и Смыслом! Нисколько не сомневаюсь – вы испытаете при этом чувство восторженного преклонения перед Ней и перед Ним. Кто-то когда-то меня учил, что интенсивность восторга(!), или удивления(!), или потрясения(!)... лучше всего оценивается числом вспыхнувших по телу нервических мурашек (как чувство страха – морозом по коже?!). Я склонен думать, что Великое Электромагнитное Объединение могло бы претендовать на установление рекорда по количеству и качеству мурашек восторженности!

*Не могу удержаться от навязчивой аналогии. Один из не притворяющихся поэтов, сочинявший свои стихи прямо в пишущую машинку, совершенно искренне поражался, как это разбросанные по клавиатуре буквы, друг с другом ранее не знакомые, под воздействием божественного вдохновения (разумеется, его собственного!) собираются в созвучные и осмысленные слова и строки. Он был уверен, что стихи ниспосылаются ему с в ы ш е в виде сгустков незримых магических флюидов, а не просто придумываются переборами нейронных комбинаций внутри двухполушарного мозга, растревоженного и возбужденного какими-нибудь причудами. Платон был ему друг, а истина... дешевле!*

Так и во всей Природе, наверное, разрозненные явления и факты должны бы связаться между собой, собираясь в единую цельность, подчиненную назначенным ей законам. Должны бы! Должны бы! Надо только терпеливо ждать пришествий Великих Магов, ниспосланных из неизвестности! А вдруг они не придут?!

Я умышленно – для обострения интриги и драматизации сценария – несколько утрирую ситуацию: в исторических продвижениях многое (но не все!) происходит постепеннее. Ведь всамделишные события протекают в реальном времени, а рассказывать о них невольно приходится в сжатии. И до Максвелла намечались подвижки к сближениям, а придуманные им уравнения не сразу и не всеми признавались окончательными и возносились в ранг законов мироздания. Решающее «за» было произнесено лишь после знаменитых опытов Герца (1888), в которых тот продемонстрировал существование и свойства электромагнитных волн. На языке современного ранжирования, в его опытах участвовали лишь волны метрового диапазона, что, однако, не играло особой роли; важен был сам факт подтверждения одного из главных выводов теории Максвелла – реальности электромагнитных волн вообще, любого диапазона – от квазистатики до сверхоптики! В пределах справедливости свежее открытых уравнений!

*Такие опыты иногда называют «крестовыми», по латыни «experimentum crucis», этим словам есть несколько толкований; мне по душе такое: они ставят крест на всех сомнениях!*

Наступает кульминация сюжета об открывательстве применения электромагнитных волн для целей связи. Итак, в оптическом диапазоне эти волны вошли в физиологический обиход со времен первых эволюционных шажков простейших тварей, а потом люди, выбравшись из недодумья, стали эксплуатировать их вовсю (жестовые общения, махания, мигания, сигнальные костры и т. п.). В 30-х же годах прошлого столетия появилось уже «надприродное изобретение» – телеграфно-проводная связь: замыкание и размыкание цепи тока на одном ее конце инициировали отклики на другом. (И почти сразу же придумался трехбуквенный алфавитный код – азбука Морзе). К 80-м годам этот способ достиг *по* уровня (будто бы *по*, а не *вдоль!*) в сущности такая же волновая (!) связь, как и оптическая, но только длина электромагнитных волн, возбуждаемых в проводных цепях, значительно превышает (обычно, но, впрочем, не всегда) длину пути связи. Знатоки физики тех времен, строго говоря, не совсем правильно толковали этот процесс. Считалось, что энергия переносится зарядами и токами *по* металлу, а на самом деле (ох уж эти «на самом деле»!) после прихода правильной электродинамики (и вдумчивого ее применения) оказалось, что все энергетические потоки текут *с н а р у ж и*, а не *внутри* проводников, то есть там и только там, где электрические и магнитные поля отличны от нуля! А внутри

хорошо проводящих сред они, увы, практически как раз и не проникают! Провода же нужны (да и тоже не всегда!) для посылки электромагнитных полей в желаемом направлении.

*Попутно (то есть в порядке очередного свингового отклонения) возникает интереснейший социально-этический вопрос: может ли неправильное понимание препятствовать признанию факта. Почти очевидно – нет! не может! История науки (да и не только науки!) изобилует заблуждениями в интерпретациях фактов; часто предыдущая модель какого-нибудь явления потом оказывается лишь примитивным приближением к последующей... Факты Природы вообще не зависят от того, что про них думают Создания той же самой Природы, даже если последние претендуют на должности Царей создавшей их Природы!*

**И вообще никакие ложные посылы, приводящие к непреложным результатам, не могут отменить действительности этих результатов!**

*Это высокопарное утверждение имеет, возможно, большую значимость, чем она в нем проглядывается. Здесь чувствуется мое веселое расположение духа, и поэтому при вольном распоряжении лекционным временем я, пожалуй, мог бы рассказать о многих достоверных достижениях человеческого ума, порожденных «заворотными» идеями! Да вы и без моей помощи можете (небось!) забросать друг друга впечатляющими примерами – не только из всеобщей истории, но даже из вашей частной повседневности!*

Итак, итак, итак, к 90-м годам прошлого века сложилась такая картина. Стало ясно, что Природа наша изобильно наполнена электромагнитными волнами. Как естественными, так и рукотворными. В зависимости от частоты колебаний они перекрывают диапазон длин волн от многокилометровых до мало-мальски-суб-суб-миллиметровых ( $\sim 10^{-5}$  см). На краях этого обширного диапазона электромагнитные волны использовались уже давно и отменно для целей внешней и внутренней связи (плюс сопутствующие функции – управление, разведывание, диагностика...). Освоение же центральной части диапазона заметно отставало от «спектральной периферии»: прежде всего из-за отсутствия технически совершенных устройств возбуждения (генерации) излучения, приема и детектирования сигналов, хотя принципиальные «образцы» (позже их научились именовать «действующими макетами установок») были загодя предъявлены Герцем. Математики в таких случаях любят говорить: доказана теорема существования, существования того самого, что вскоре будет кем-то обозначено сверкающим термином «радио» (к сожалению, я не откопал в литературе, кому первому пришло в голову такое всеязычно удачное слово!).

*А ведь это непростое дело – придумывать хорошо звучащие имена! Иногда самоуверенные «именователи» новорожденных изделий (или еще чего-нибудь новорожденного!) попадают впросак, как это произошло однажды с русскими «Жигулями», если вдруг на каком-нибудь из ведущих (ООНовских, например) языков «вляпываются» в слова, не имеющие, мягко говоря, «товарного вида»! «Жигуль» для французов звучит как альфонс, а кто захочет ездить с таким прозвищем! Кстати, и я проморгал ехидную двусмысленность, бездумно назвав вот эту свою лекцию свингоподобной... и только потом, уже при оформлении текста, узнал, что в американском сленге swiŋger'ами называют участников двухпарного секса! О, Господи! Прости нас за некоторые наши «склонности к извращениям»!*

Причем была не только доказана общая теорема существования, но и подсказаны принципы осуществления конкретных решений. И вот на таком-то почти на всем готовеньком начался пресловутый бум «изобретательства радио», который правильнее было бы назвать бумом физического и технического освоения новых диапазонов электромагнитных колебаний и волн!

## Особенности национальной охоты

Вот тут-то и пошло-поехало азартное состязание пусть не по олимпийскому, но все же по всемирно признаваемому виду спорта – по научно-техническому изобретательству на заданную тему. Очень даже азартное и, как непременно бывает в любом международном соревновании, очень даже национально «озабоченное».

*Патриотическое ослепление людей, возможно, закладывается еще в начале формирования личности: нам ближе и понятнее тот мир (или мирок), в котором мы с момента рождения (или с зарождения?) приступаем к обитанию, а посему все, с ним связанное, кажется роднее и – что совсем удивительно – справедливей (!) того же самого «всего», но из других пенатов, так сказать, другого принадлежности. Столь загадочная «логика любви к своим племенам» распространяется вишь и вглубь, – от спортивного «фанатения» до религиозного исступления и сохраняется даже, когда эти племена перенаполнены наймитами со стороны!*

Помимо этого, почти у каждого индивида существует еще и неукротимое стремление к личному первенствованию; природа этого пристрастия, видимо, легче поддается разгадке. В частности, некоторые ученые мужи считают, что его инициатива таится в генетических программах почти всех гетеросексуалов... Дабы в результате предсвадебных поединков только отборные победители (самцы, в общем-то) получали право на потомство... Впоследствии, однако, «к делу подключился интеллект», и особи любого уровня совершенства натренировались «обогащать» эту самую целевую физиологию... ритуальными наслаждениями, так что многие такого рода «радости жизни» ушли в независимость от своего чисто физиологического прошлого, подобно тому, как, простите, любовное вдохновение научилось поддерживать себя высококачественными гормонами, даже при полном отстранении тела от инстинкта воспроизводства! И самцовая состязательность перекинулась на все иные виды преуспевания... Здесь самое время развернуть бы аналогичные тирады про эволюцию способов соперничества среди самок, но я просто испугался утопания в соблазнительных подробностях. Да и вообще, я поделился с вами этими забавными «теориями», скорее всего, чтобы показать, какие встречаются неожиданные придумки, интересные сами по себе, то есть даже при неполном доверии к ним!

Но вернемся к фактическому стремлению людей первенствовать, как к завершеному свойству. В истории науки (да и не только науки!) встречается множество одновременных уведомлений о совпадающих результатах, полученных независимо. Независимо в том смысле, что авторы не были знакомы с конкурирующими мыслями (или текстами, или установками, или т. п.) друг друга. Однако, как правило, знали многие (а иногда почти все) предшествующие достижения и свои, и чужие, то есть стартовали примерно с одних и тех же рубежей, отталкиваясь от одних и тех же пред-идей, а значит, все-таки были зависимы через некую общую подводящую их к этим новым достижениям предысторию. Но строгое людское судейство засчитывает приоритет только того, кто оказался первым на финише хоть на йотинку!

*Такое придумано правило игры! Воистину спортивно-подобное! Известно, что даже легкоатлеты-марафонцы, пробежавшие свои 42 с чем-то километра, но отставшие на финише от победителя на какой-нибудь жалкий сантиметрик, лишаются чемпионской славы (и многих последующих за ней благ), а ведь долевая разница в результатах скатывается аж до  $\sim 2 \cdot 10^{-7}$  (!), то есть пребывает с большим запасом за пределами человеческого восприятия! Это похоже на дурь! Ибо выделяет лотерейного удачника, а не мастера достижений, а потому настраивает толпу на узаконенную несправедливость. Может быть, кому-то покажется сей факт пустяковинкой, невинной слабинкой человеческой братии, но мне – нет!*

*Я уверен, такое назначенное отделение чемпиона от не чемпиона настраивает всю человеческую психику на фатальную подчиненность флуктуациям, и этот феномен отнюдь не замыкается на отдельном эпизоде спортивной удачи-неудачи, а въедается практически во все области человеческого измерения! Какой же выход? Да никакого! В принципе можно было бы установить «физиологический интервал одинаковости», но, во-первых, такая честность была бы скучна, а есть еще и во-вторых, в-третьих и далее... Оставляю их на ваше растерзание...*

И все-таки я не случайно, хотя и временно, повернул свои рассуждения на спорт – там все это выглядит как-то нагляднее и не так прискорбно, да и к тому же не всякий раз непоправимо безнадежно («сегодня ты, а завтра, может быть, и я!»); совсем иначе в изобретательстве, где иногда случайная везучесть поощряется непоправимой «исторической незабвенностью»; это порой вышибает обойденных неудачников из нормальной колеи и уводит умных и творчески одаренных людей в несвойственные их божественному предназначению дрязги! Не зря же один из «классиков мысли», вдумывавшийся в эти трудные приоритетные несправедливости, изрек такую непреходящую фразу: «Первый тот, кто убедительно первый!»

Я уже столь наотклонялся от магистральной линии повествования, что самое время на нее вернуться.

Итак, ажиотаж изобретательства начался примерно с 1888 года. С года провозглашения Герцем искусственно изготовляемых, рукотворных электромагнитных волн. Встрепенулись почти все, чья образованность или понятливость позволяли оценить значимость События. И как это нередко встречается, было их три категории, этих встрепенувшихся. Первых я называю «прозевывателями» (или позаковыристей – «ретро-открывателями»). Вторых – «усовершенствователями», а третьих – «провидцами» или «забегателями вперед»...

Узнав про опыты Герца, представители первой категории вдруг вспомнили, что в свое время тоже натыкались на нечто подобное, но не придали этому значения. Смалодушничили сами по себе или под убойным обстрелом агрессивно закостенелых экспертов. Отмечу, приличия ради, лишь двух невезучих американцев (правда, часто невезение есть продукт неверия в удачу или – что еще хуже – плод непонимания таковой!). Один назывался профессором Е. Томсоном (это был не У. Томсон – известный широким массам по именной формуле для частоты колебательного контура, и даже не Дж. Дж. Томсон, первооткрыватель электрона, – то было, так сказать, просто Томсон). Лет за десять до опытов Герца, демонстрируя на лекции индукционно-разрядные эффекты, он обнаружил, что подносимый к металлам в разных уголках аудитории графитовый карандашик всю искрит, но его, увы, не посетила догадка, что все контролируемое пространство наполнено электромагнитными волнами, излученными разрядником. Он стал жертвой невнимания к неожиданностям.

*История науки знает много случайных, как бы с неба свалившихся удач, однако никому не ведомо, сколько же наслучалось в ней «прохождений мимо», часто из-за ленивой нелюбопытности «свидетелей происшествий» плюс неверия в судьбовую звезду...*

*Между прочим, как-то еще в 80-х годах два моих друга по работе и по жизни (назову их полуанонимно – АА и МП) предложили сделать шутиливо-серьезный обзор на тему «Около каких великих открытий мы были рядом, но не смогли вовремя отдать им должное!» Почти сразу же пришлось отступить от этой затеи. Оказалось, в пределах нашей профессиональной досягаемости мы фактически сближались почти со всеми «эпохальными идеями», пребывая от них на расстоянии догадки, доступной нашим умственным возможностям! Так что в качестве эпиграфа могла бы красоваться пошловатенькая надпись, заимствованная из любовных подарочных картинок времен нерешительной юности нашей: «На память о том, чего не было, но могло бы быть!»*

А вот другой пример «отверженца». Американский физик Юз (Hughes) еще в 1878 году придумал чувствительный детектор на плохих металл-металл-контактах

(предваритель будущего когерера, переизобретенного в 1891 году французом Эдуардом Бранли!), и с его помощью засек интерференцию электромагнитных волн. Но его результаты были отвергнуты знатоками, а к ним, кстати, принадлежал даже знаменитый Стокс. Отвергнуты за неубедительностью «улик». Пришлось Юзу отступить. А потом–потом, когда его работа реабилитировалась, никто из экспертов так и не покаялся в содеянном ими отлупе. Наверное, все–таки «юзовы роды» оказались преждевременными, а вынашивать недоноска не хватило ему ни умения, ни смелости!\*

Зачинщиками своевременного «штурма совершенствования» можно считать англичанина Оливера Лоджа и упомянутого выше француза Бранли (1890–1892). Они повторили и продвинули опыты Герца и, главное, благодаря улучшению качества детекторов, снизили уровень скептицизма (исходившего, между прочим, от самого Герца!) в применении электромагнитных волн (коротко– и средневолнового диапазона!!!) для целей беспроводной дальней связи (относительно ближней связи или проводной связи на любые расстояния сомнения давно уже к тому времени сменились подтверждениями!). Примерно тогда же (1892) была провозглашена знаменитая программа Крукса, программа развития всдиапазонных радиокommunikаций, затрагивающая даже проблемы перехвата информации недружественными «любопытателями». Меня всегда и во всем удивляет зигзажность творческих порывов – еще, бывает, не доделано многое рутинное, а уже непременно находятся «провидцы третьей категории», раскрывающие секреты завтрашнего дня... И ведь почти без промаха!

С позиций «взглядов из конца 20–го» поначалу все изобретатели отталкивались от первородной установки Герца, поэлементно ее совершенствуя (поэтому так и хочется назвать их «до!изобретателями!»). Герц применил в качестве генератора газовый разрядник, включенный в разрыв металлического излучателя, – два уса с шарами на концах, впоследствии названные диполем Герца. «Улучшатели» ввели более эффективный трехэлектродный разрядник (Риги, 1894), или динамку с трансформатором (Тесла, 1893), или обнаружили и использовали естественное излучение грозовых облаков (Попов, 1895)... Примерно такие же усовершенствования ввели и в излучатели: удлинители проволоочную часть, заземлили один ус, испробовав различные их конфигурации (Попов, 1894–1896; Маркони, 1896; Браун, 1899). Эти проволоочные рей, по латыни *антенны*, передали потом свое имя излучателям любых разновидностей – зеркалам, рупорам, щелям и т. п.

*И как–то непроизносимо, как само собой очевидное, было установлено свойство эквивалентности (равнодейственности) передающих и приемных антенн – впоследствии названное теоремой взаимности; при определенных условиях (линейные связи полей!) оно могло быть получено непосредственно из уравнений Максвелла...*

*В этом месте хорошо бы поставить предупреждающий знак: «Внимание! Мысль!»... И мысль такая... взлетающая в поднебесье!!!*

*Я убежденно склонен думать, что именно линейность полей и основанный на ней принцип суперпозиции, то есть возможность их сложения и вычитания по алгебраическим или векторным правилам – именно это свойство позволило Главному Конструктору Природы сотворить мысленно, в любом его варианте – живом или компьютерном. Однако, сами понимаете, такое утверждение настолько ответственно, что лучше его отставить до лучших времен, и для вас – лучших, и для меня – не худших!*

---

\* Как можно заметить, эта лекция не удовлетворяет обязательному признаку исторического описания, – в ней отсутствуют отсылки к источникам заимствованных сведений. Это сделано осмысленно, чтобы не отвлекать внимания от общей картины оглядками по сторонам. Но здесь я готов сделать исключение. Еще в препринтовом издании Д.И. Трубецков указал мне на статью Дж.П. Рыбака и Л.Н. Крыжановского «Дэвид Эдуард Юз и открытие радиоволн» (Электросвязь, № 9, 1994), освещающую изобретательскую одиссею Юза, в чем–то опередившего даже самого Герца).

Но, пожалуй, основному совершенствованию подвергся детектор – вместо слабочувствительного разрядника, применявшегося Герцем, теперь пошел в ход когерер Юза – Бранли; в нем смесь опилок под действием электрического поля сплалась (поляризованные полем опилки притягиваются), а при отсутствии поля разлипалась (особенно если вдобавок эту смесь еще механически встряхивать). В результате проводимость опилочной смеси изменялась и появлялся детектированный (выпрямленный) ток, пропорциональный принимаемому электрическому полю.

*Возможно, я несколько утяжелил лекцию, так сказать, внешкольными техническими подробностями, да к тому же все равно не смог достичь беспропускной полноты картины. Но мне это было крайне необходимо самому. Приходится, бывает, осознанно отрываться от аудитории, временно утрачивая доходчивость ради поддержания собственного тонуса... И не только на лекции, но и в некоторых эпизодах обывденной жизни тоже.*

После всех этих «радионововедений» (а новое в данном случае действительно было чутьчку подзабытым старым!) началась «гонка на расстояния». Кто передаст информацию дальше и внятнее! ...Из точки А в точку Б... и обратно!.. Вперед выходил то один, то другой, но в конце концов с большим запасом оторвался от соперников итальянский инженер Г. Маркони (Guglielmo Marconi), вовремя перекочевавший из Италии в Англию и основавший там (тоже вовремя!) первоклассную фирму, отчасти процветающую и поныне. Поначалу он вроде бы ничего и не придумывал своего, зато отлично соединил известное ему не свое. Удачно соединил, системно соединил и, главное, довел до патентной убедительности! А потом и сам творчески развернулся и изобретал множество отличительных и продвигающих радиодело «всяких всячин». Изобретал и наизготавливал. Он умел все, доступное его пониманию, воплощать в устройства, доступные пониманию и пользованию другими!

Итак, взгляните на состав участников состязаний, кого только там не было – англичане, французы, итальянцы, немцы, американцы, русские... допускаю, что еще кого-нибудь не вставил по незнанию. Поистине интернациональная команда, как теперь сказали бы, – «G e a m T e a m»! И не зря же почти каждая страна из числа здесь представленных чувствует своих собственных победителей! Англичане – Лоджа, мы – Попова, немцы – Брауна, итальянцы (и многие другие) – Маркони. Почему – то это напоминает мне растаскивание славы победителей по окончании Второй Мировой Войны, правда, по несколько иному контингенту участников. А ведь так хочется отвлечься от особенностей национальной охоты и провозгласить эту победу как командную! Победу себя над собой! Человечества над человечеством! Не над Природой же?! С обязательным включением в эту команду Фарадея, Максвелла, Герца (открывателя электромагнитных волн), а может, еще и Дж. Генри (открывателя электромагнитных колебаний, 1840), а может, еще, и еще, и еще кого-то. Например, в 1789 году Гальвани ухитрился излучить электромагнитный сигнал разрядником и принять его на отодвинутую ножку лягушки. (Этот «биодетектор» был перепроверен в конце прошлого века и выдавал нервные дерги даже с расстояния в несколько сот метров от излучателя, размещенного на Эйфелевой башне, Лефевр 1897). Да и кроме того, разве сигнал «да-ноль-нет», посланный на несколько метров, не был предпродственником цуга сигналов морзянки, переданных чуть позже на сотни метров (Попов и др.), или даже сотни километров (Маркони и др.), не говоря уже о предпрередках, в частности, об освоенной, но недопонятой в свое время проводной телеграфии!.. Редкий случай, когда установление о т ц о в с т в а оказалось более доступно, чем установление ... м а т е р и н с т в а!!!

Так – то вот, на мой взгляд, обстоит дело с так называемым изобретением радио!

Однако углубляясь в радиоизобретательство, я рассчитывал поделиться с вами не только этим. Мне хотелось **заронить в вас проблему**, проблему соотношения между личными, национальными и общечеловеческими м о р а л я м и! Невраждебного их соединения между собой! Проблема эта

настоящая, в том смысле, что она не может иметь ответа, окончательного и общего, и каждое свежее продвижение в ней и вдумывание в нее порождает новые и новые переплетения, разветвленности и неразрешимости...

### Мытарства профессора Попова

И тут настало время сказать несколько слов о русском профессоре А. С. Попове, ибо во всей той изобретательской кутерьме его судьба заслуживает отдельных отметин. И не только потому, что он наш соотечественник, хотя и это тоже, разумеется, немаловажно (кто же, если не свой, выскажется о нем с проникновенным пониманием), но и в силу наполненности его жизни многими поучительными характеристиками – и его самого, и доставшейся ему эпохи; более того, даже его посмертное прохождение по истории тоже оказалось примечательным, но, скорее уже, для самой истории.

До 1945 года у нас в стране не было особого ажиотажа по части отстаивания приоритетов на русское первенство в достижениях инженерии, наук и искусств. Во всяком случае так мне кажется. Царская Россия не могла угнаться за западным развитием, и, если быть честным, она поставляла мировой цивилизации, в основном, лишь интеллектуальных одиночек, профессионализация которых в принципе происходила почти независимо от жизни страны, плетущейся где-то позади как в общекультурном, так и в технологическом плане. Большевистское правление произвело в этом деле не поддающийся нормальному разумению переворот. С одной стороны, оно выдавило в эмиграцию многих выдающихся творцов (да кое-кого из оставшихся подвергала смертоносным преследованиям), не веря, согласно невежественной марксистской концепции, в необходимость бережного сохранения генофонда страны и ее народов («кто был ничем, тот станет всем»!.. и чем «ничемее», тем «всемерее»!.. Тогда уж воистину – «да будут последние первыми!»), а с другой, круто повернув весь уклад жизни на военизированную подготовку к мировой революции, оно с бешеной энергией развивало все, работающее на войну, включая науку, технику, искусство и даже общую образованность (без чего нельзя было рассчитывать на массовую «готовность к труду и обороне»). В результате возникла парадоксальная ситуация. Страна, побуждаемая гордиться своими свежими успехами (в доказательство преимущества «соц» перед «кап»), одновременно ограничила себя в правах безоглядного почитания дореволюционной истории, дозволяя прославлять лишь тех «героев прошлого», которые были назначены властями из неподвластных беспартийному уму соображений (социально ориентированная выборочность!).

И вдруг после Второй Мировой Войны (перед Первой Мировой Холодной Войной) все изменилось. Партия и Правительство, еще более решительно развернув пропаганду преимуществ социалистического образа жизни пред капиталистическим, начали снимать ограничения на признание ранее неудобной интеллигенции прежних времен и ввели к тому же (в духе так называемой *врательной правдивости*) тезис о врожденной национальной исключительности нашего многонационального народа. Эта «национальная идея», взамен предыдущей «интернациональной», была заимствована (думаю, что так) у почившего в небытие (будто бы?) ведомства Гейббельса. А тут как раз кстати подоспело 50-летие с момента первого сообщения А. С. Попова о передаче первого радиосообщения (первое сообщение о первом сообщении!..). Власть (сводившаяся тогда к Верховному Властителю, «единому и неделимому») решила отпраздновать это круглолетие широко и помпезно с приглашением видных ученых зарубежных. Хотя те, как известно, почти все радиооткрытия и развития числили за Маркони и даже Нобелевскую премию по этой части присудили именно ему в паре с немецким физиком Брауном.

*Правда, к тому моменту (1909) наш Попов, увы, уже умер, а «нобелевка» дается только прижизненно, но, честно говоря, у меня нет уверенности, что*

*Попова премировали бы даже при дожитии до этого срока, – они там, на Западе, традиционно слеповаты в восточном направлении.*

Сейчас, вспоминая то, назначенное сверху мероприятие по всенародному ликованию в честь изобретения радио А. С. Поповым, я проникаюсь мыслью, что именно с этого началась безудержная кампания самовосхваления всего (!) нашего (!) и провозглашения непременно (!) нашего (!!) «первооткрывательства по всем статьям и статьям». Например, уравнения Максвелла были бодренько переименованы в уравнения Аркадьева – Максвелла (с расположением фамилий по алфавиту, как это принято, заметьте, в приличных обществах!). В народе то «движение» окрестили девизом: «Россия – родина слонов!» (даже не мамонтов, заметьте, а слонов!). Вредоносность подобных «национальных потех» очевидна: «Единожды солгавши, да кто тебе поверит!» В результате люди перестали почитать истинных своих «передовиков», и заслуги Попова, в частности, были незаслуженно принижены их непомерным вознесением: известный в психологии феномен, который я называю «недоверием из-за передозировки внушения» (наверное, существует и более точный термин, но я его подзабыл, а такая расшифровка отлично воспринимается жертвами осточертевших телерекламных повторов).

А. С. Попов родился 4 (16) марта 1859 года в семье священника в рабочем посёлке на Урале. По генетике и воспитанию (даже по фамильному прозвищу!) он должен был посвятить себя служению Богу. И действительно, сначала окончил Екатеринбургское духовное училище, а потом поступил учиться в Пермскую семинарию. Но примерно в 18 лет неожиданно круто изменил напугствиям предков (да, пожалуй, и своей наследственности тоже), предавшись чисто мирским занятиям – физике и математике. Слава Богу, родители этому повороту не воспрепятствовали. В 1877 году А. С. Попов поступил в Петербургский университет и через 6 лет его успешно закончил. Однако при университете не остался, а пошел на преподавательскую работу в Минную школу и в Минный офицерский класс в Кронштадте; хорошо оснащенная лаборатория там позволила ему заодно с преподаванием еще и развернуться в научных исследованиях по электротехнике.

С работами Герца А. С. Попов ознакомился уже в 1889 году на демонстрациях университетского профессора Н. Г. Егорова – еле светящаяся в крошечной темноте приемная искра, видимо, поощрила его изобретательский пыл, и он фактически все свое творческое терпение направил на совершенствование системы приема герцевых волн: удлинил усы диполя и снабдил когерер Юза – Бранли удачными встряхивающими приспособлениями. Его первая публикация была посвящена именно проблеме приема и детектирования электромагнитных колебаний. Она так и называлась: «Об отношении металлических порошков к электрическим колебаниям». Собственно говоря, это была даже не публикация, а запротоколенный доклад на заседании Физического отделения Русско-химического общества, сделанный А. С. Поповым 25 апреля 1895 года (старого летоисчисления). Именно эту дату решено было справлять в нашей стране как День Радио. Сам Попов относился к своему докладу менее провозгласительно и более сдержанно. В протоколе зафиксировано: «Исходя из опытов Бранли, докладчик исследовал резкие изменения в сопротивлении, испытываемые металлическими порошками в поле электрических колебаний...». Существенно улучшенная приемная установка позволяла Попову увеличить расстояние передач информативных сообщений до нескольких сот метров (а потом и далее), а также обнаружить радиоизлучение гроз. Тут-то он первенствовал в гордом одиночестве, и это свое первое детище поясняяще точно назвал грозоотметчиком.

Вне всяких сомнений, А. С. Попов являлся равноправным членом той непревзойденной, но, к сожалению, не очень сыгранной команды, о которой говорилось выше. Однако по своему характеру (возможно, наследственному) он был человеком (и профессором!) романтического склада; в силу этого зачастую ограничивался доверительными сообщениями о своих успехах и практически

ничего не патентовал: свое первое патентование по радиоделам он произвел лишь в 1899 году, не более чем на телефонный приемник для депеш, то есть когда многочисленная орава конкурентов и завистников приступила уже всюю к развертыванию радиопромышленности.

Последние годы жизни А. С. Попов с отчаянным остервенением пытался обратить внимание начальства и научного сообщества на свой вклад в зарождение радиосвязи, но слабость официальной документации делала эти попытки донкихотствующими – люди, как правило, теряют благородство, чуя запахи богатств, да еще таких огромных, да еще таких приумножающихся, да еще свалившихся им по наследству от знатных предков, накопивших эти богатства в почти бескорыстной преданности научному изыскательству. Возможно, что и умер – то А. С. Попов от стресса беспомощности, инициировавшего мозговой удар после очередной бурной беседы с «военно-морскими силами». Умер 46 лет от роду, в конце 1905 года, когда наши славные (воистину!) эскадры были разметаны в Цусимском проливе фактически при полном отсутствии командной координации на радиочастотах.

Изобретательские мытарства профессора Попова в значительной мере обусловлены его принадлежанием к военному ведомству. И ранее в России (а уж после революции тем паче!) значительная доля прикладных научных исследований проводилась на военную потребу. В этом было и определенное преимущество: возможность дисциплинированной мобилизации усилий и ресурсов для решения проблем с априорно понятными конечными целями. Однако в таком способе «изготовления наук» таится и очевидная противостоестественность. Истинный научный поиск – рыскание по неизвестностям,ощаемое внутренними побуждениями, включающими наслаждения красотой и совершенством открываемых законов мироздания. Приказное управление поисковым творчеством почти всегда нелепо, ибо оно насаждает насильственный прагматизм думанья. Вдобавок с ним связано скрытничество, секретничество, перестраховочность, трусоватость, а потому приверженность к апробированным решениям и противление рискованным вылазкам в негарантированные успехами новшества.

И хотя А. С. Попов проводил свои эксперименты в открытую, но все же под неусыпным контролем военно-морского начальства, обладавшего врожденным рвением «стращать и не пущать» и одновременно «боязнями прозева» какой-нибудь невидальи, заимевшей у предполагаемого противника. Так что деятельность Попова в Кронштадте взяла в канцелярской канители, в бумажной возне, в запросах на дозволения, в поисках аргументов, излагаемых в форме, доступной вышестоящему уму... и т. д. В результате решающее признание в военно-морском окружении опыта Попова получили только после того, как с легкой и предприимчивой руки Маркони радиотелеграфия пошла гулять по всему старому и новому свету в хорошо запатентованном и промышленно воплощенном виде. Парадоксально, но факт – именно Попову это самое «непущательное начальство» несколько лет спустя поручило закупать в Германии радиооборудование для флотских надобностей. Немцы и французы смогли во многом преуспеть, посылаясь на работы нашего родного Попова, вовремя отвергли действие патентов Маркони на подвластных им территориях. Возмело место чисто деловое признание заслуг Попова! Вот какие страсти и хитрости порождаются людьми при эксплуатации бесхитростных тайн Природы!

*Но прежде чем расстаться с этой грустноватой историей, я хочу направить ваше внимание еще на одну особенность профессора А. С. Попова. Как я уже говорил, он появился на Свет Божий из духовного сословия, и его первые, детские, важнейшие для формирования взрослого мышления представления о смысле жизни выстраивались под наставлением «законов чувств и вер», то есть с преобладанием образности над логикой, а значит, с преимущественнымощрением развития п р а в о г о мозгового полушария. И только в уже заканчивающемся процессе взросления его организм приступил к профессиональной тренировке и освоению л е в о -полушарных нейронных*

сетей. Я называю этот путь умственного воспитания *ломаносовским*, хотя, по-видимому, он просто естественен, – допускаю, что люди еще с древних докроманьонских времен тянулись в своем развитии «справа налево» – от образности к логике (с точностью до неизбежных исключений, разумеется).

Очень было бы любопытно каждому из вас задуматься над собой и прикинуть, каким путем вы следуете в своем умственном продвижении. Но если даже и не разберетесь в этом, нет основания для беспокойства – ваши организмы сотворят свои очередные чудеса оптимизации, так сказать, и без вашей помощи.

### Концовка

Итак, я заканчиваю эту многоплановую лекцию, исполненную в манере джазового свинга. Теперь, на ее исходе вы можете оценить название «Об изобретении радио ... и не только». В ней столько было этого самого «не только», что мне захотелось собрать всех их в кучку, без подробностей – в виде набора ключевых оборотов. Для обоюдной пользы – вам и делу... Такой способ резюмирования должен, по моему замыслу, способствовать оживлению оперативной памяти и получению целостного впечатления.

Вот она – моя лекционная «ключевка». Манера свинга... Предыдущие «талалушки»... Различные тактики думанья... Задачи на предсказания, на сходства, на свойства... Лево-правость в природе и в мышлении... Лекторы-педанты и лекторы-безалаберники... Их меловые характеристики... Юбилей по круглым датам... Десятичная система, высосанная из пальцев или из законов сохранения?... Привет инопланетянам... Величие и отличие 20-го века... Планета Земля стала излучателем радиоволн... Праздник нового тысячелетия – 1-го января нулевого года или 1-го января первого года?... Гонка открытий в конце 19-го века: электрон, фотон, радио, рентген, радиоактивность... Акустические и оптические средства связи в Природе... Бритва Оккама... Великое максвелловское объединение... Ехрегimentum cruicis Герца... Проволочная телеграфия – тоже ведь с помощью волн... Юридические права на мысль... Ложные посылы и непреложные результаты... Кодексы изобретательства у нас и у них... Запреты на негуманные достижения... Человеческий фактор в законодательствах... Творцы и дельцы... Неудачное слово «жигули» и удачное слово «радио»... Как трудно быть одиночно первым... И как нетрудно прозевать удачу... Гонка изобретателей радио... Герц, Юз, Бранли, Лодж, Крукс, Тесла, Попов, Маркони, Браун... Особенности национальной охоты... Россия – родина слонов... Науки военные и науки гражданские... Мытарства профессора Попова ... Оценка удивлений числом мурашек!..

Я слегка изменял последовательность и, в частности, вынес упоминание о «мурашках удивления» в самый конец. В самый конец концовки. И вот почему. В 1832 (!) году Фарадей написал письмо в Royal Society с просьбой вскрыть конверт и ознакомиться с его содержанием через столетие. В этом письме он фактически (в терминах и понятиях тех времен) сообщал человечеству о единстве всего электромагнетизма – от статики до оптики. О единой природе всех электрических и магнитных явлений. О существовании электромагнитных волн, распространяющихся с конечной скоростью. В его голове вообразилась правильная картина электромагнитного мира задолго до того, как она была нарисована и математически обоснована Максвеллом. У него был свой язык общения с Природой, недоступный людям общепринятого ума. Поэтому он поостерегся делиться со своими современниками этим забсжавшим вперед пониманием Электромагнитных Явлений Мироздания, дабы избавиться от незаслуженных сочувствий... Мне думается, он со свойственной ему практической пронизательностью, возможно, даже умел («сквозь магический кристалл!») подглядеть и наши «радиодали»... Когда я впервые прочитал его письмо, мое тело покрылось мурашками восторга и преклонения. Какое счастье, что человечество способно выращивать пророков в своих рядах, не прибегая к

сверхъестественностям! Так что на прощание примите такое мое пожелание: на всякий случай уважайте странности ближних своих.. на всякий случай... на всякий случай... на всякий случай.

Спасибо всем за внимание, а если вдобавок и за понимание, то тем более спасибо!

## SCHOOL ON THE INVENTION OF RADIO ...AND SOMETHING ELSE

**Introductory lecture at the Summer Physical and Mathematical School  
held in Green Town on August 4, 1997**

*M. Miller*

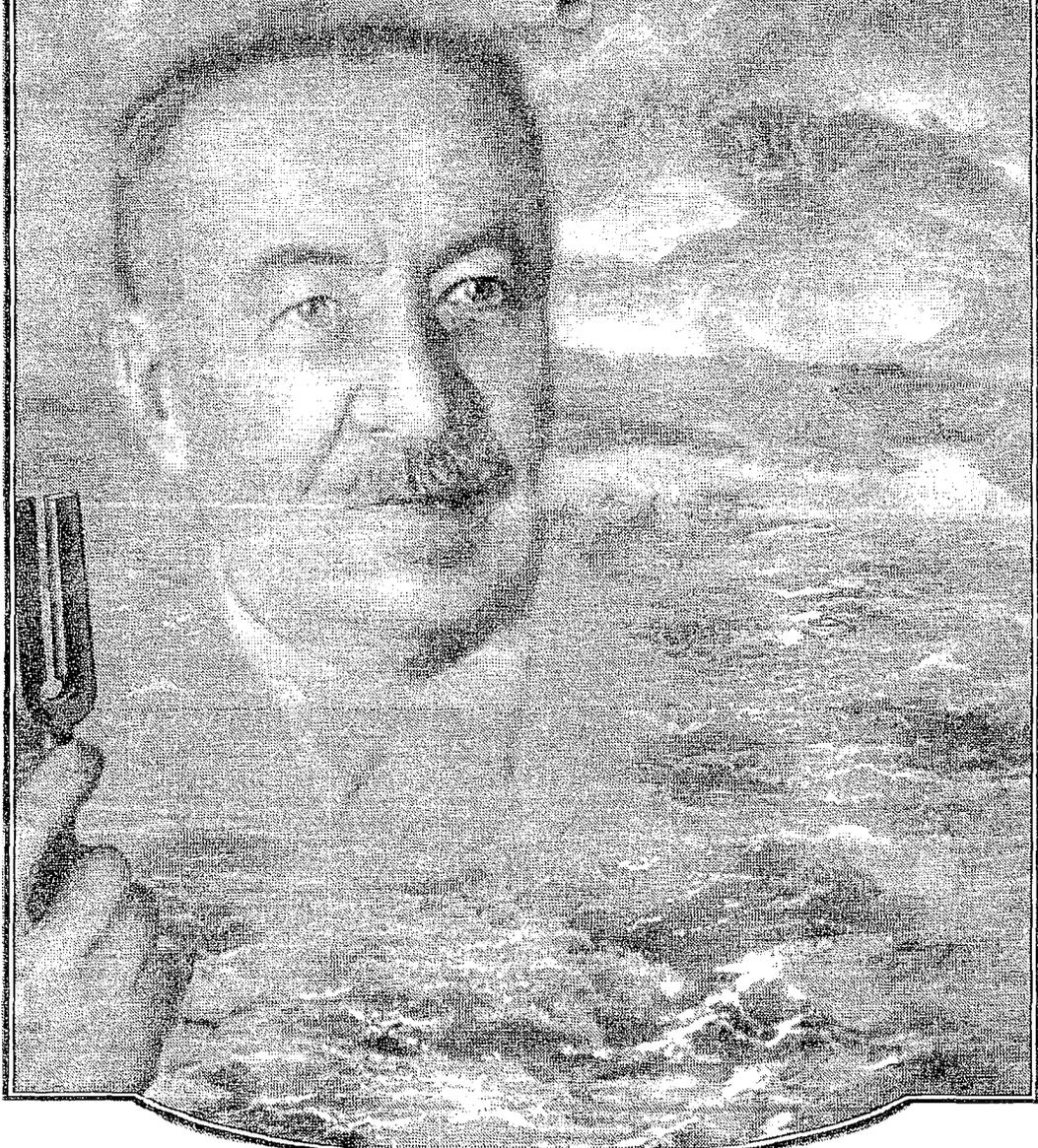
This lecture was delivered at the Summer Physical and Mathematical School in the Green Town (the neighbourhood of Nizhny Novgorod) on August 4, 1997. Its performance reminded a jazz style similar to swing music. The leit-motiv (the leading theme concerning invention and noninvention of radio) is accomplished with various improvisations – from diagnostics of peculiarities of natural or artificial thinking... up to some oddities of people customs. The problem of priority of an invention in the case of radio has a trivial solution (according to the author's opinion). Those were Faraday, Maxwell and Hertz who proclaimed the community of the whole electromagnetism (from statics to optics). So the following skilled scientists and engineers invented not more than technical methods and means of breaking-in intermediate frequencies. Therefore a plenty of claimants appeared to be «primary discoverers» (of wireless communication by means of electromagnetic waves). Thus a rare case takes place: in which it is simpler to establish «fatherhood» than «motherhood».

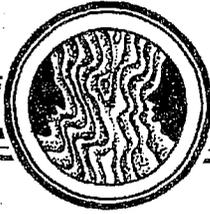


*Миллер Михаил Адольфович* родился 3 мая 1924 года в Нижнем Новгороде. Во время войны (1942) служил в рядах Красной Армии. Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1949). Некоторое время работал в промышленности, затем поступил в аспирантуру Горьковского университета к профессору М.Т. Греховой. Своим учителем считает также М.Л. Левина. Защитил кандидатскую диссертацию по поверхностным электромагнитным волнам (1953), затем докторскую диссертацию по взаимодействию заряженных частиц с высокочастотными электромагнитными полями (1960). Долго время читал лекции в Горьковском университете. В настоящее время работает главным научным сотрудником Института прикладной физики РАН в Нижнем Новгороде. Заслуженный Соросовский профессор.

Каждая из областей физики -  
оптика, механика, акустика -  
говорят на своем "националь-  
ном" языке. Но есть "интер-  
национальный" язык, и это  
язык теории колебаний.

Л. И. Мандельштам





Изв. вузов «ПНД», т.7, № 2,3, 1999

### К 120-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л.И. МАНДЕЛЬШТАМА

4 мая этого года исполнилось 120 лет со дня рождения крупнейшего русского физика, академика, профессора Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова Леонида Исааковича Мандельштама – основателя колебательно–волнового подхода к различным явлениям природы, создателя и воспитателя «нелинейной школы физиков». Как писал сам Л.И. Мандельштам, «...теория колебаний объединяет, обобщает различные области физики. Каждая из областей физики – оптика, механика, акустика – говорит на своем «национальном» языке. Но есть интернациональный язык, и это язык теории колебаний. Она вырабатывает свои специфические понятия, свои методы, свой универсальный язык».

В научном наследии Мандельштама колебательно–волновой подход – главное. Он глубоко проанализирован его учениками и коллегами в сборнике «Академик Л.И. Мандельштам. К 100-летию со дня рождения» (М.: «Наука», 1979. 312 с.). У научных идей Л.И. Мандельштама счастливая судьба. В первую очередь это относится к физике нелинейных колебаний и нелинейных волн, которая составляет сейчас основу того, что называют нелинейной динамикой.

Писать о Мандельштаме биографическую статью не имеет смысла, поскольку она будет пересказом написанного. Редакция решила ограничиться подбором высказываний о Леониде Исааковиче Мандельштаме учеников и сподвижников, которые характеризуют его не только как выдающегося ученого, но и как удивительного человека. Кстати любопытно, что у поэта Осипа Мандельштама есть такие строки:

Это какая улица?  
Улица Мандельштама.  
Что за фамилия чертова?  
Как ее ни вывертывай,  
Криво звучит, а не прямо.  
Мало в нем было линейного.  
Нрава он был не елейного.  
А потому эта улица, –  
Или, верней, эта яма,  
Так и зовется по имени  
Этого Мандельштама.

Так и хочется заменить «не елейного» на «нелинейного».

## О Л.И. Мандельштаме

**Академик А.А. Андронов:** «Обычные термины вряд ли помогут в характеристике Л.И. Мандельштама. ... В наше время резкого деления физиков на теоретиков и экспериментаторов, на «чистых» физиков и «технических» физиков, Л.И. Мандельштам одновременно и теоретик и экспериментатор, и «чистый» физик и «технический» физик.

Если пользоваться терминологией Оствальда, Л.И. Мандельштам одновременно и классик – по образцовой ясности и законченности опубликованных им работ, по строгости и точности рассуждений, и романтик – по стремлению делиться своими идеями и догадками, по своей любви к преподаванию, по силе своего живого слова, способного вызвать напряженное внимание и радостное возбуждение аудитории.

Вокруг Л.И. Мандельштама существовала атмосфера подлинной научной школы. Во-первых, он любил учить – в самом прямом значении этого слова – молодых физиков, любил задавать и растолковывать им трудные и коварные задачи, разные «парадоксы». Во-вторых, он непрерывно делился с сотрудниками и учениками своими соображениями и планами будущих работ, ставя перед ними вопросы, из которых вырастали научные исследования. Он был готов незаметным и деликатным образом отказаться от авторства в пользу своего ученика или сотрудника и умел придать его работе известный блеск и остроту, переакцентировав две-три формулировки и указав на новое следствие. Одновременно он никогда не забывал отмечать, если его ученик сделал что-нибудь существенное самостоятельно.

...Он удивительно знал, любил и чувствовал классическую линейную теорию колебаний, которой он столь виртуозно пользовался. Никто отчетливее и острее Леонида Исааковича не понимал, что ее большие возможности являются все же ограниченными и что громаднейший круг важнейших физических и технических вопросов требует создания нелинейной теории.

...В громадном здании физической науки для него не было запретных комнат.

...Идея выработки нелинейного мышления, опирающегося на твердую математическую базу, идея создания наглядных физических представлений и понятий, имеющих в своей основе адекватные нелинейным физическим объектам математические представления и понятия, является, как мне кажется, основной руководящей идеей научного творчества Л.И. Мандельштама в области теории нелинейных колебаний.

...Не все достижения этих лет в направлении выработки нелинейного мышления принадлежат Леониду Исааковичу или лицам, так или иначе с ним связанным. Но именно Л.И. Мандельштам вызвал к жизни это новое, опирающееся, с одной стороны, на настоящую математику, с другой стороны, на тонкий радиофизический эксперимент – научное направление в теории нелинейных колебаний».

**Пауль Эренфест:** «Надо спросить мнение самого крушного из современных оптиков – профессора Мандельштама».

**Академик А.Н. Крылов:** «Леонид Исаакович отличался прямою, честностью, полным отсутствием искательства и лукавства и заслужил особенное уважение лучшей части профессоров Московского университета. Как ученый, как академик и профессор, Леонид Исаакович стоял в первом ряду».

**Академик Г.С. Ландсберг:** «Я был уже не мальчиком, когда я впервые встретился с Леонидом Исааковичем. Теперь я уже пожилой человек. Но я не стыжусь признаться, что на протяжении двух десятилетий моей близости с Леонидом Исааковичем я, принимая то или иное ответственное решение или оценивая свои поступки и намерения, задавал себе вопрос – как отнесется к ним Л.И. И мне было ясно, что то, что может вызвать его осуждение, не должно быть принято».

**Академик И.Е. Тамм:** «Я прожил большую жизнь, но другого такого человека не встречал. Манделъштам – редчайшая личность. Такое сочетание могучего интеллекта с поразительной человечностью и чистотой.

...Непередаваемая доброта и чуткость в обращении с людьми сочетались в Л.И. с непреклонной твердостью во всех вопросах, которым он придавал принципиальное значение, с полной непримиримостью к компромиссам и соглашательству. Невозможно сказать, кого мы более потеряли в Л.И. – мыслителя или человека».

**Профессор Г.С. Горелик:** «Я не смогу, конечно, воссоздать то неповторимое, чисто индивидуальное очарование, которое приобретал в его изложении решительно любой вопрос, – очарование, благодаря которому то, что мы узнали от него, мы знаем как-то совершенно по-особенному и особенно стремимся передать нашим ученикам».

**Академик Н.Д. Папалекси:** «...возникла замечательная школа физиков, замечательная не только и не столько своим прекрасным знанием физики, искусным владением аппаратом современной теории и умением его конкретного применения, как умением физически логически мыслить, правильно ставить задачу и отделять в ней существенное от несущественного, продумывать ее глубоко и до конца. Эта школа... завоевала международное признание как в области нелинейных колебаний, так и рассеяния света...».

**Академик В.Л. Гинзбург:** «Отношение к нему многих... было просто трогательным. Манделъштам пользовался огромным моральным авторитетом. Существование таких людей порождает стандарты, оказывает глубокое влияние на окружающих».

Материал подготовил *Д.И. Трубецков*



90 лет  
Саратовскому  
университету

## ПИСЬМА ПРОФЕССОРА В.Д. ЗЁРНОВА ПЕРИОДА ОТКРЫТИЯ И СТАНОВЛЕНИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА 1909 – 1914

Владимир Дмитриевич Зёрнов (1878–1946) – доктор физико–математических наук, один из семи первых профессоров открытого в 1909 году Саратовского университета, ученик и последователь знаменитой русской школы физиков, во главе которой стоял П.Н. Лебедев, прожил яркую и интересную жизнь.

Родившись в профессорской семье, несколько поколений которой внесли существенный вклад в становление и развитие отечественного университетского образования, он с ранних лет, сначала косвенно, присутствуя при разговорах старших, а затем, став студентом и преподавателем, вполне осознанно окупился в самую гущу университетской жизни. В выборе будущей профессии, а точнее призвания, определяющее значение для юноши несомненно имел живой пример его отца, профессора анатомии и ректора (1898–1899) Московского университета Д.Н. Зёрнова. Благодаря многогранному таланту – ученого, педагога, общественного деятеля – и весьма прогрессивным для своего времени взглядам Дмитрий Николаевич пользовался большим авторитетом в среде московской научной интеллигенции. Немалую роль также сыграл и пример деда, профессора чистой математики того же университета Н.Е. Зёрнова (1804–1862), который, по свидетельству Н.А. Любимова, «... любил университет, чтил его обычаи и всегда готов был принять участие во всяком заявлении в честь дорогого учреждения»<sup>1</sup>.

По окончании в 1897 году гимназии Владимир Дмитриевич поступил на физико–математический факультет Московского университета. К этому времени относится возникновение крепкой дружбы студента Зёрнова и профессора физики П.Н. Лебедева. На всю жизнь он сохранил самые теплые чувства к своему первому наставнику и другу, а о своей работе в лаборатории Лебедева всегда вспоминал как о самых лучших годах своей научно–творческой деятельности.

Под руководством П.Н. Лебедева В.Д. Зёрнов готовит и в 1902 году представляет в Государственную испытательную комиссию два научных сочинения: «Тепловая диссоциация» и «Определение декремента затухания акустических резонаторов». В том же году он оканчивает университет с дипломом 1–ой степени и по рекомендации П.Н. Лебедева оставляется при кафедре физики Московского университета «для приготовления к профессорскому званию».

Работая одновременно в физической лаборатории и в Московской частной женской гимназии Н.П. Щепотьевой преподавателем физики, Владимир Дмитриевич добивается в 1904 году первого крупного успеха в науке. Его работа «Сравнение методов измерения звуковых колебаний в резонаторе», представленная в Общество любителей естествознания, антропологии и этнографии при Московском университете, была отмечена премией имени В.П. Мошнина<sup>2</sup>.

Двумя годами позже вышел и первый печатный его труд на немецком языке: «Uber absolute Messung der Schallintensität» («Сравнение методов измерения абсолютной силы звука»), напечатанный в журнале «Annalen der Physik»<sup>3</sup>. А в 1909 году В.Д. Зёрнов защитил диссертацию на тему «Абсолютное измерение

силы звука» и получил ученую степень магистра физики, после чего его избирают приват-доцентом Московского университета и командируют за границу с факультетской стипендией «для усовершенствования в науках». Он работал в Гейдельберге, изучал постановку преподавания физики в высших учебных заведениях Германии и Англии. Ему посчастливилось присутствовать на лекциях Рентгена, Денара, познакомиться с исследованиями в лабораториях Резерфорда (Манчестер), Дж. Дж. Томсона (Кембридж) и Рикке (Геттинген).

Несмотря на молодость, В.Д. Зёрнов уже в начале научной карьеры сумел заявить о себе крупными и оригинальными исследованиями, сразу же обратив на себя внимание ведущих ученых физиков как внутри России, так и за ее пределами. И когда в 1937 году решался вопрос о присвоении ему степени доктора физико-математических наук без защиты диссертации, чл.-корр. АН СССР Н.Н. Андреев особенно выделил работы, выполненные им именно с 1905 по 1909 год, подчеркивая, что «до них сколько-нибудь надежных способов измерения силы звука не существовало»<sup>4</sup>.

Саратовский период жизни и деятельности ученого берет начало с 1 (14) июля 1909 года, когда он «высочайшим приказом» был назначен и.д. экстраординарного профессора Саратовского университета по кафедре физики<sup>5</sup>.

Среди первых семи профессоров Владимир Дмитриевич был самым молодым – ему исполнился только 31 год, но это не помешало ему обнаружить в себе недоожинные организаторские способности, умение убеждать в необходимости принятия того или иного решения. Его личная распорядительность и оперативность в доставке оборудования на место позволили в кратчайшие сроки, уже в конце сентября 1909 года, начать чтение курса физики не «мелового», как говорится, а экспериментального, с демонстрацией всех необходимых опытов<sup>6</sup>.

Вскоре он вошел в состав строительной комиссии по возведению собственных зданий университета. С этого момента главным делом его жизни становится забота о Физическом институте, строительство которого началось 30 апреля (13 мая) 1911 и завершилось в конце 1913 года<sup>7</sup>.

В Саратове Владимира Дмитриевича застали и революционные события 1917 года. Он с огромным воодушевлением встретил Февральскую революцию и падение самодержавного строя, но довольно прохладно отнесся к Октябрьскому перевороту. И все же, несмотря ни на что, он продолжал добросовестно исполнять свои обязанности. А став деканом открывшегося в Саратовском университете по решению Временного правительства физико-математического факультета, он старательно собирает научно-преподавательский состав: приглашает многих талантливых ученых – физиков и математиков, чьи имена затем широко прославили отечественную науку – С.А. Богуславского, И.И. Привалова, В.В. Голубкова.

28 сентября 1918 года В.Д. Зёрнов избирается ректором Саратовского университета. Период его ректорства, вывавший на исключительно тяжелые в организационном и хозяйственном отношении годы, протекал под нажимом местной администрации, слепо исполнявшей любые декреты, распоряжения и предписания новой власти. Но благодаря редкому умению искать и находить приемлемые компромиссы, с ролью ректора Владимир Дмитриевич, по признанию его коллег, «... справился с исключительным тактом и успехом...»<sup>8</sup>.

Неожиданную черту в деятельности В.Д. Зёрнова на посту профессора и ректора подвел его арест в марте 1921 года. Поводом для него послужило выступление ученого перед верующими в Александро-Невском соборе с лекцией на тему «Рассеяние энергии и разумное начало в мироздании», в которой он не скрывал своего положительного отношения к вере и религии. Не отрекся он от своих убеждений и после ареста. На допросе 31 марта 1921 года Владимир Дмитриевич открыто заявил: «Религию препятствием к осуществлению коммунизма не считаю, в том лишь случае, если ее понимать правильно, т.е. как усовершенствование личности. Религия связывает нравственность человека, а потому наука без религии однообразна и поведет к падению нравственного облика человека»<sup>9</sup>.

Тем не менее он был заключен в тюрьму, потом переведен в Москву в

распоряжение ВЧК, где, к счастью, посредством вмешательства наркомов просвещения А.В. Луначарского и здравоохранения Н.А. Семашко его удалось освободить, но без права возвращения в Саратов.

Начинается второй период московской жизни и деятельности ученого. Как и раньше, он отдает всего себя любимому делу – преподаванию, стремясь поднять слушателей к вершинам научного познания, завораживая их своим интеллектом и обаянием. Один из его московских сослуживцев в сентябре 1936 года писал ему: «Под Вашим руководством каждый хотел быть лучше, чем он был в действительности. Хотелось работать, хотелось делать свою работу лучше, не считаясь с обстановкой; даже некоторые «хамствующие» люди стремились скрыть свое «хамство» – они хотя внешне вели себя культурно. Вы умели заставить людей стать выше своих личных интересов, себялюбия, оскорбленного самолюбия»<sup>10</sup>.

С весеннего полугодия 1924 года Владимир Дмитриевич заведовал кафедрой физики Московского института инженеров железнодорожного транспорта (МИИТ) и был по совместительству профессором Московского высшего технического училища им. Н.Э. Баумана (МВТУ). Тем не менее, по его собственному признанию, «удавалось кое-что делать и по научной части». К приоритетным направлениям данного периода следует прежде всего отнести его работу о табличном и механическом гармоническом анализе, коллективные исследования по вопросам звуко- и теплопроводности строительных материалов, а также внутреннему трению при крутильных колебаниях<sup>11</sup>. В 1925–1928 годах В.Д. Зёрновым был подготовлен и издан вузовский учебник по физике («Конспект лекций по физике». Ч. 1–3), в январе 1938 года явившийся поводом для обвинения автора в приверженстве идеалистическому мировоззрению.

«В отношении увязки фактического физического материала, даваемого в книге, с основными положениями диалектического материализма, – говорилось в одной околонуучной рецензии на учебник, – следует констатировать, что по существу такой связи совершенно нет.

За исключением введения (3 страницы) в книге нигде более не встречается какого-либо методологического обобщения. Введение же составлено, по-видимому, с целью декларирования материалистических взглядов автора»<sup>12</sup>.

Этот по сути дела прямой политический донос, направленный на дискредитацию чести и достоинства ученого, серьезных последствий для В.Д. Зёрнова, к счастью, не имел. Он по-прежнему продолжал заведовать кафедрой в МИИТе и читать лекции в МВТУ. В годы Великой Отечественной войны вместе с другими сотрудниками МИИТа был эвакуирован в Новосибирск, с ними же – возвратился в Москву. Но возраст и выпавшие на его долю тяжелые испытания давали о себе знать. 30 сентября 1946 года во время лекции в Баумановском институте В.Д. Зёрнову стало плохо. Не приходя в сознание, он скончался.

Таковы главные этапы жизненного пути В.Д. Зёрнова – талантливого и незаурядного человека, однажды посвятившего себя служению науке и просвещению и до последних дней не изменившего своему выбору.

После себя Владимир Дмитриевич оставил не только добрую и светлую память в сердцах знавших его людей, но и нечто более осязаемое – богатейший и удивительно разнообразный по содержанию личный архив, многие годы хранившийся у дочери ученого Марии Владимировны Зёрновой (1911–1993), которая незадолго до своей смерти передала его автору настоящей публикации для дальнейшего хранения и использования его материалов в научных целях.

Из множества уцелевших документальных свидетельств минувшей эпохи, имеющих большую историческую ценность, особенно выделяется в собрании эпистолярный архив ученого. Он насчитывает около тысячи единиц хранения (только одна частная переписка дореволюционной поры содержит 417 писем).

Вниманию читателей предлагается лишь малая толика бесценного сокровища – письма Владимира Дмитриевича, отправленные им из Саратова своей жене Екатерине Васильевне Зёрновой (1885–1959), нежно именуемой в посланиях Кисаной и Катенушкой. Написанные в период с 1909 по 1914 год, все они так или иначе освещают начальный этап становления Саратовского университета,

показывая его жизнь во всем многообразии. Настоящую публикацию эпистолярного наследия В.Д. Зёрнова открывают 18 писем, датируемые одним лишь 1909 годом – временем подготовки и проведения торжеств по случаю открытия в Саратове десятого русского университета. Отобранные письма не только характеризуют личность самого В.Д. Зёрнова, что само по себе тоже важно, поскольку позволяют судить о присущих русской интеллигенции типичных качествах – профессионализме, трудолюбию, чувстве ответственности за судьбу Родины и русского народа, высоких нравственных принципах и культурном уровне, разносторонности интересов и чистоте помыслов. Они содержат также сведения о событиях, связанных с историей Саратова и Саратовского университета, выступая в качестве ценнейшего источника для научных исследований этих проблем.

Знакомясь с зёрновским архивом – его мемуарами и особенно эпистолярным собранием (как точно подметил А.И. Герцен, «письма – больше, чем воспоминания, на них запеклась кровь событий, это само прошедшее, как оно было, задержанное и нетленное»<sup>13</sup>), убеждаешься в том, что предпраздничная атмосфера в Саратове отнюдь не была однозначно радужной. Организаторам и устроителям торжеств нередко приходилось выступать в несвойственной для них роли «мировых посредников», улаживая всевозможные конфликтные ситуации и приводя в чувство не в меру зарвавшихся подрядчиков.

Публикуемые письма полностью сохраняют стилистические особенности авторского изложения, донося до читателей дух исторической эпохи с ее нравами и обычаями. Имеющиеся в отдельных письмах купюры касаются сугубо личных аспектов и обуславливаются жесткими условиями передачи архива.

Вступительная статья, комментарии и подготовка писем к публикации В.А. Соломонова

<sup>1</sup> Любимов Н.А. Речь, произнесенная в заседании Совета Московского университета по случаю годовщины со дня смерти проф. Н.Е. Зёрнова, 1862 г. // Личный архив профессора В.Д. Зёрнова, входящий в состав Коллекции документов по истории Саратовского университета В.А. Соломонова (далее в ссылках указывается: Архив В.Д. Зёрнова).

<sup>2</sup> См.: Известия Имп. Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, состоящего при Московском университете. М., 1904. Т. CVII. Вып. II. С. 39.

<sup>3</sup> На первом журнальном отгиске этой работы стоит, сделанная рукой П.Н. Лебедева, надпись–напутствие: «Поздравляю Вас с первым, самым важным шагом начинающего ученого. До сих пор Вы только брали – теперь сами даете. Помните добрый совет: работайте много, сколько можете, но печатайте только тогда, когда вполне разобрались в вопросе и излагайте только то, что важно узнать читателю–специалисту по данному вопросу. Чем короче и сжате статья – тем больше читателей, тем больше проку» (Архив В.Д. Зёрнова).

<sup>4</sup> Там же.

<sup>5</sup> ГАСО. Ф. 393. Оп. 1. Д. 837. Л. 3 об.

<sup>6</sup> См.: Зёрнов В.Д. Записки русского интеллигента // Волга. 1993. № 11. С. 139–142.

<sup>7</sup> Наглядной иллюстрацией к этому могут служить письма ученого. «Сегодня начали земляные работы по институту, – писал он жене 30 апреля 1911 г. – Я с Ваней и Ив<аном> Аф<анасьевичем> (И.М. Серебряковым и И.А. Чуевским. – В.С.) начинали. Землекопы, конечно, поздравляли с началом дела и получили на чай с меня и архитектора (Карла Людвиговича Мюфке (1863–1934). – В.С.). Начали стройку с первой весенней грозой и дождем. Мюфке говорит – это хорошо: «Святой водой начало работ окроплено». А в письме от 17 июня 1914 года он сообщает об окончательном завершении строительства: «Институт готов. Вот все, что мне надо. А институтом я очень доволен. Такой он симпатичный. Мне кажется, он симпатичнее всех зданий, или уж от того, что мой» (Архив В.Д. Зёрнова).

<sup>8</sup> Там же.

<sup>9</sup> Справка Управления КГБ СССР по Саратовской области № 4 от 9.10.1990 г. (Архив автора).

<sup>10</sup> Архив В.Д. Зёрнова.

<sup>11</sup> См.: Зёрнов В.Д. Указ. соч. // Волга. 1994. № 7. С. 136.

<sup>12</sup> Архив В.Д. Зёрнова.

<sup>13</sup> Герцен А.И. Собр. соч. в 30–ти томах. Т. VIII. С. 290.

Пишешь, и все кажется,  
что не так далеко от тебя ...

В.Д. Зёрнов

23 июня <19>09 г.

Милая моя, сладкая Кисана! Не мог написать тебе вчера вечером, т.к. от устатку сделалась страшная мигрень. Теперь отдохнул и голова прошла. Вчера по приезде разыскал Мишу<sup>1</sup>. Он был еще в правлении, а потом в 2 ч<аса> вместе с ним на его отличной квартире пообедали и отправились по городу. Я зашел сначала к Разумовскому<sup>2</sup>, но его не застал. Потом прошел к зданию, отведенному под Университет; там идет деятельная работа и здание вообще очень хорошее<sup>3</sup>. Там нашел только рабочих и сторожа, который мне и показывал помещение.

Смотрели потом квартиры, но пока еще ничего вполне подходящего не нашли. Есть квартира в том же доме, где живет Миша, которая освободится в августе, но она маленькая – 4 маленьких комнаты. Проят 45 р<ублей> в месяц с отоплением. Может быть, на первое время остановиться на этом?

После двухчасового путешествия по квартирам Миша предложил пить чай на пароходе их дороги<sup>4</sup>, который каждый вечер ходит в виде прогулки верст 16 вниз по Волге и обратно. С нами был еще Мишин товарищ по службе, а на пароходе оказалось еще два новых профессора – анатомии и физиологии, последний назначен деканом<sup>5</sup>. Я познакомился с ними и [мы] условились сегодня встретиться в 11 ч<асов> в канцелярии Университета, где я и узнаю от ректора все интересующие меня сведения. В начале десятого вернулись домой – я сейчас же лег, а Миша еще некоторое время сидел у меня и рассказывал о своих делах. По карточке его невеста очень славная<sup>6</sup>.

Сейчас надо идти, сначала к Разумовскому, а потом в Университет. Господь над всеми вами. Целую тебя крепко. Поцелуй за меня папу, маму и Мику<sup>7</sup>.

<sup>1</sup> Полозов Михаил Александрович (1878–1930–е гг.), гимназический товарищ В.Д. Зёрнова. В описываемый период – начальник движения Рязано–Уральской железной дороги.

<sup>2</sup> Разумовский Василий Иванович (1857–1935), хирург, организатор и первый ректор Саратовского университета.

<sup>3</sup> До введения в строй собственных учебных и научно–вспомогательных корпусов университет размещался в здании Саратовской фельдшерской школы, построенном в 1899 г. по проекту архитектора А.М. Салко (1838–1918), и находившемся на углу Большой Сергиевской и Никольской улиц (ныне – улиц Чернышевского и Радищева). Сейчас здесь размещается медицинский колледж.

<sup>4</sup> Имеется в виду Рязано–Уральская железная дорога.

<sup>5</sup> Позже, вспоминая об этой встрече, В.Д. Зёрнов писал: «На пароходе двое мужчин своим видом выделялись среди остальной публики. Один – довольно большого роста и профессорского вида. Другой – небольшой, в какой–то легкомысленной накидке, красном галстуке, увивался около видной, эффектной дамы. Полозов сказал мне, что это два новых профессора. Я тут же с ними познакомился: первый оказался профессором анатомии Николаем Григорьевичем Стадницким, второй – профессором физиологии Иваном Афанасьевичем Чуевским. Мои симпатии в тот вечер были на стороне профессора анатомии, но кажется, только на этот вечер.

Стадницкий оказался элементарным, я бы сказал, малопривычным и тупым человеком, а Иван Афанасьевич, несмотря на свою фривольную внешность и легкомысленное поведение, – очень милым и умным. Недаром В.И. Разумовский пригласил его занять должность декана медицинского факультета. Мы дружили с ним до самой его смерти, хотя я часто и подшучивал над его слабостями» (Зёрнов В.Д. Записки русского интеллигента // Волга. 1993. № 11. С. 138).

<sup>6</sup> Полозова Клавдия Ивановна, жена М.А. Полозова. Первое впечатление оказалось ошибочным. Как вспоминал позже В.Д. Зёрнов, «... тяжелый характер жены Миши привел к тому, что в последние его годы мы перестали встречаться» (Зёрнов В.Д. Указ. соч. // Волга. 1994. № 7. С. 135).

<sup>7</sup> Зёрнов Дмитрий Николаевич (1843–1917), анатом, профессор (с 1873), ректор (1898–1899) Московского университета. Отец В.Д. Зёрнова. Зёрнова (урожденная Машковцева) Мария Егоровна (1841–1913), мать В.Д. Зёрнова. Зёрнов Дмитрий Владимирович (1907–1971), сын ученого, ставший впоследствии крупным специалистом в области электроники, членом–корреспондентом АН СССР.

18 сент<ября> (вечер) <1909 г.>

Дорогая моя, золотая Катенушка! Как-то ты себя чувствуешь? Был ли Н.И.<sup>1</sup> и что сказал? Я доехал, как ты уже знаешь из телеграммы, хорошо. Квартира выглядит симпатично, хотя комнаты выглядят в обеих несколько мельче, чем казались вчерне. Ночую я сегодня у Полозовых, которые мне очень обрадовались. У них уже все устроено; обстановка очень хорошая, но, по-моему, все же не стоит тех денег, которые за нее заплачены. Они оба тебе кланяются.

По приезде я отправил Федора<sup>2</sup> на товарную станцию с накладными, а сам пошел в Университет. Федор получил вещи от Мюра и то, что отправлял Ступин. В Университете все еще не совсем готово, но несмотря на это, обещают закончить ко вторнику и во вторник будет молебен<sup>3</sup>. Завтра пошлю Федора за товаром «большой скорости», т.е. книгами и приборами от Трындина. Потом останется посылка Гарраха и Смирнова<sup>4</sup>. Завтра постараемся разобрать полученные вещи и, надеюсь, завтра же буду ночевать уже дома, т.к. кровать будет, а умываться пока можно и в кухне.

Ванну поставили очень хорошую с колонкой и душем. Ванна эмалированная, два крана – холодный и теплый. Нанял уже полотеров, которые придут в понедельник. У нас в гостиной, столовой и спальней [комнатах] паркет, а в кабинете и детской простой пол, покрытый линолеумом, в кухне асфальт крашенный. Кухня отличная. Федор с Матрешей<sup>5</sup> очень довольны своей судьбой, т.к. до сих пор у них никакого дела не было. Службы еще не готовы, идет стройка и потому на дворе страшный беспорядок.

Обедал сегодня у Полозовых и пока так у них и буду обедать, только не знаю, как обставить плату. Вероятно, они не пожелают брать денег. Ну да это устроим как-нибудь.

Господь над всеми вами. Целую тебя, моя лапушка, Мику, папу и маму. Всех крепко-крепко. Прислуге поклонись.

<sup>1</sup> Побединский Николай Иванович (1861–1923), акушер, профессор Московского университета.

<sup>2</sup> Троицкий Федор Федосеевич (1883 – не ранее 1953), механик механической мастерской при Физическом институте Саратовского университета.

<sup>3</sup> Первый молебен, по традиции совершавшийся перед началом нового учебного года, был отслужен в Саратовском университете 22 сентября 1909 г., после чего студенты и вольнослушатели, в числе 106 человек, вступили в аудиторию, чтобы представиться своим профессорам. А 23 сентября началось чтение лекций по всем предметам 1 курса медицинского факультета (анатомия, общая физиология с основами гистологии, физика, химия, зоология и ботаника).

<sup>4</sup> Упоминаются торговые дома и магазины, осуществлявшие поставку учебного, научно-вспомогательного и технического оборудования в высшие учебные заведения.

<sup>5</sup> Троицкая (урожденная Чувикова) Матрена Андреевна, жена Ф.Ф. Троицкого.

28 сент<ября> 1909 г.>

Катенушка моя ненаглядная! Сегодня получил два твоих письма от 25 и 26. Последнее неожиданно дошло на сутки раньше, верно, было раньше опущено. Милуша моя, ты говоришь, что может слишком много пишешь. Каждое слово лишнее мне от тебя сладко. Как жду каждый день писем! Все вы, милые, обо мне думаете и я все представляю, как устроимся мы, как спальню, как детскую устроим, как жить будем, как кабинет в спальню для родителей преобразуем – и все как будто выходит ничего – славно. Дал бы только Бог всем здоровья. Мика мой ненаглядный! Так бы всех поласкал. Ну, Бог даст, все хорошо будет.

Сегодня читал вторую лекцию два часа. Ничего, хорошо. Без опытов, совершенно серьезно и детально излагал чистую механику – слушали хорошо. Пока аудитория полна, что-то будет дальше. Относительно жалованья – это оказывается не прибавка, а только квартирные деньги вперед выдали<sup>1</sup>. Сегодня в

11/2 ч. был Совет, просидели до пяти. Вообрази, из министерства пришла бумага с предложением выбрать трех выборщиков для избрания члена Госуд<арственного> Совета и послать их в Петербург – это из семи–то человек. Пришлось формально производить выборы, хотя имеющих право баллотироваться всего и есть только трое (ординарных), но всю процедуру честь честью проделали<sup>2</sup>.

Вечером сегодня был у Полозовых. Там были Игнациусы<sup>3</sup>. Я тебе говорил о нем – это Мишин товарищ по службе. Они очень милые люди, а жена Игнациуса, кроме того, очень порядочная пианистка. Мы немного поиграли с ней. У Мишиной супруги рояль, но сама она что–то не решается к нему подходить. Просидели довольно долго. Завтра утром буду вешать занавески в гостиной. Карнизы готовы – липовые под красное дерево, сделаны довольно чисто. Столяр заклеил стол, но штапики у красной мебели не подклеил. Придется самому как–нибудь заняться. Господь над всеми вами. Целую тебя, моя лапушка, и Мику, и папу, и маму. Лене<sup>4</sup> и всем домашним кланяюсь.

До свидания.

<sup>1</sup> Годовое денежное довольствие экстраординарного профессора, каковым являлся В.Д. Зёрнов, составляло: жалованье – 1600 руб., столовые – 200 руб., квартирные – 200 руб. Итого – 2000 руб. в год. В месяц же ученый получал 144 руб.

<sup>2</sup> Речь идет о распоряжении попечителя Казанского учебного округа от 22 сентября 1909 г. № 16995 об избрании от Императорского Саратовского университета выборщиков на съезд для выбора двух членов Государственного Совета взамен выбывших: Афанасьева – от Императорской Академии Наук и М.М. Ковалевского – от Императорских российских университетов. «Означенные выборы, – говорилось в обращении, – должны быть произведены с таким расчетом, чтобы выборщики могли прибыть в С.–Петербург на съезд<...> к 6–му октября, так как самый съезд назначается 8–го октября». После формальной процедуры выборов с участием всех семи первых профессоров Саратовского университета, на съезд были избраны ординарные профессора В.И. Разумовский, И.А. Чуевский и А.Я. Гордягин (ГАСО.Ф. 393. Оп. 1. Д. 31. Л. 1–2).

<sup>3</sup> По–видимому, речь идет о семье управляющего Рязано–Уральской железной дороги инженера Игнациуса; дополнительные сведения неизвестны.

<sup>4</sup> Власова Елена Васильевна (1887–1962), младшая сестра Е.В. Зёрновой.

*30 сент<ября 1909 г.>*

Золото мое, Катенушка! Сейчас получил твое письмо от 27. Ты плохо себя чувствуешь. Лапушка моя, как мне больно за тебя. Дай Бог тебе силы. Милая, надо бы еще Н.И. вызвать, чтобы он поясничку полегил.

Сегодня был у меня с визитом Разумовский; он очень ласков со мной и вообще, видимо, чудной души человек. Такой внимательный, такой деликатный и, вместе <с тем>, простой; остальные товарищи тоже в большей или меньшей степени симпатичны. Бируков<sup>1</sup> очень старается завязать хорошие отношения. Все говорит: ведь у нас много общего – мы ж москвичи. Он тоже ничего. Всех менее пока мне нравится анатом Стадницкий – похож на телка, хотя может быть и ничего.

Трындин не посылает второй транспорт до сих пор, а книги от Лидерта<sup>2</sup> 20–го высланы из Москвы (большой скоростью) и до сих пор не пришли, верно, куда–нибудь их заслали, не туда куда нужно. Из–за границы от Гугерсгофа тоже еще нет ничего. Вообще, такая канитель. Ты знаешь, товар от Александрово<sup>3</sup> идет месяц.

Сегодня в Университете Разумовский знакомит меня с доктором Минхом<sup>4</sup> – главным доктором городской больницы и директором фельдшерских курсов. Он обратился ко мне с просьбой от Совета курсов взять на себя лекции по физике в фельдшерской школе. Меня уже раньше предупреждали, что он будет просить. Я решил взять, т.к. 1) курс пустышный, 2) можно пользоваться отчасти их кабинетом и для Университета; курсы помещаются совсем рядом – по дороге от нас к Университету<sup>5</sup>. Лекции там по вечерам. Отвез сегодня В.Д. Белооговой<sup>6</sup> немного нот, но там не оставался, спешил обедать.

Полозовы горничную выписали из Москвы – она раньше жила у жены Миши и оказалась из Саратовской губернии. Пойду вечером чай пить опять к Полозовым, благо Миша звал и сказал, что будут ждать, а то читать еще нечего, да и тоскливо одному в квартире сидеть. Мне каждый день носят «Русское слово»; я велел газетчику носить, так скорее газеты получают – на другой день, а если подписаться, то на сутки позднее будут доставлять.

После завтра здесь концерт Шалаяпина. К.И. Полозова взяла три билета – один на мою долю, но кажется, завтра приезжает ее брат и я, может быть, ему продам билет. <...> Я что-то каждый час стал ждать поездки в Москву, кажется, уж Бог знает сколько времени вас, милых, не видал. До сих пор не принесли из магазина качалку; ходил сегодня ругаться, говорят – непременно сегодня вечером доставят и вот опять нет.

Господь над тобой, мое солнышко. Крепко-крепко целую тебя и Мику. Маму и папу поцелуй за меня и всем домашним кланяйся. Ненагляднушка моя.

<sup>1</sup> Бируков Борис Ионович (1873–?), профессор по кафедре зоологии Саратовского университета, а до этого приват-доцент Московского университета. С 1922 года, когда он покинул Саратовский университет, его судьба теряется из виду. Правда, воспоминания проф. В.Д. Зёрнова дают основания предположить, что последние годы своей жизни он провел за рубежом в добровольной эмиграции (См.: Зёрнов В.Д. Указ. соч. // Волга. 1993. № 11. С. 139).

<sup>2</sup> «Книжный магазин и библиотека для чтения Н. Лидерга», находившийся в Москве на Петровских линиях.

<sup>3</sup> Погранично-таможенный пункт, через который осуществлялась доставка научного и технического оборудования зарубежных производителей и посреднических фирм.

<sup>4</sup> Минх Алексей Петрович (1866–1939), доктор медицины, старший врач городской больницы и заведующий женской фельдшерской школой в Саратове.

<sup>5</sup> Фельдшерская школа, после размещения в ее здании университета, помещалась в доме Очкина по адресу: Малая Сергиевская улица (ныне – ул. Мичурина), д. 84. Сейчас в нем находится педагогическое училище.

<sup>6</sup> Возможно, речь идет о жене Александра Евгеньевича Белогова, директора Саратовского 2-го реального училища

18 окт<ября 1909 г.>

Золото мое, лапушка моя, Катенушка! Доехал я отлично. Спал с десяти и до девяти. Тотчас же после приезда отправился в Университет и провозился там до половины пятого, сходил пообедать в ресторане и опять вернулся в Университет, приготовить к завтраму. Кончил только в восемь и пошел чай пить к Полозовым. Они были мне очень рады, поздравляли меня и тебя с Танюшей<sup>1</sup>. Сейчас вернулся от них. Голубка моя, ты верно, уже слышала, как я на поезд чуть было не опоздал. Лошадь попалась, чисто блоха какая – трусит, а не с места. Рамок не взял, т.к. когда заехал, то они были еще не завернуты. Хозяин хотел было завернуть, да впопыхах разбил стекло на гобелене, ну я все и оставил. Завтра вышлю квитанцию заказным письмом. Может быть, Настасья<sup>2</sup>, когда пойдет, получит (надо уплатить 7 р<ублей>). Полозовым подарок очень понравился. К<лавдии> И<вановне> больше всех гравюр нравится «Просветление». У них Октавия уходит. Являлась сегодня утром, когда я еще не приезжал, предлагать свои услуги, ну да, я думаю, это совсем не подходящее дело.

Как-то ты, моя маленькая, себя чувствуешь? Бог даст, когда это письмо получишь, можно уж привставать будет немного. Пиши милушка побольше о себе, Мике, Танюше, о всех домашних. Милушка моя, я сегодня плохо пишу – устал порядочно, надо поскорее спать ложиться. Целую тебя, моя радость, и всех моих милых.

<sup>1</sup> Талиева (урожденная Зёрнова) Татьяна Владимировна (1909–1989), дочь В.Д. Зёрнова.

<sup>2</sup> Настасья или, как еще ее называли все младшие в семье Зёрновых, «Кусенька» (1855–1928), прислуга; фамилия и отчество неизвестны.

2 октября <sup>1</sup><1909 г.>

Голубка моя, дорогая Кисана! Получил сегодня твою открытку от 30-го. Слава Богу, что ты себя чувствуешь удовлетворительно. Дал бы Бог поскорее совсем оправиться. Читал сегодня лекцию в Университете. Потом зашел в правление – нужно было взять одну бумажку. Разумовский предложил остаться при обсуждении проекта здания анатомического института. Хотя это меня и не касается, но раз Разумовский предложил, мне надо было остаться. Просидели почти до двух. Утром получил папино заказное письмо. Ему напишу отдельно.

Ходил посмотреть залу Музыкального училища – очень хорошая зала и вообще здание чуть ли не лучшее в Саратове<sup>2</sup>. Директор Экснер<sup>3</sup> страшно рассыпается и любезничает. Завтра придется пойти с Чуевским туда же, чтобы выяснить, как расположить торжественное заседание – «акт» открытия, который будет в этом зале<sup>4</sup>. Обедал дома. Дуняша сварила отличные щи и очень вкусные капустастики сделала. На третье заказал блинчики и сказал, что буду их есть с вареньем. Она не поняла и взяла завернула варенье в блинчики, а т.к. варенье очень жидкое, то получилось что-то не особенно интересное. Ну да это ничего. Во всяком случае остальное кушанье было вкусно. Муж кухарки живет поваром у одного купца. Этот муж раньше очень пил, а теперь водку бросил, но у него делается тоска и Дуняша просит, чтобы я дал каких-нибудь капель. Я уверяю ее, что лечить не могу, но, по-видимому, она не особенно этому верит, говорит, что это все равно, что муж ее уверял, что капли, данные именно мною, ему помогут, и что к доктору он идти не хочет. Завтра спрошу кого-нибудь, какие бы капли ему дать.

Хотел перед чаем взять ванну и уже вымыл голову, но пришли Полозовы, так уже ванну буду брать на ночь, т.е. сейчас. Полозовы все зовут почаще ходить к ним обедать. Мне кажется, они еще не привыкли долго оставаться вдвоем. Ну, милушка, пойду в ванну.

Выкупался. Очень хорошо. Сидел в ванне и соображал, как тебя, милуша, буду в этой ванночке купать, какие надо усовершенствования сделать. Надо будет у Мюра циновку на пол купить. Да, маленькая, надо позаботиться о шторах в детскую – заказать у Мюра спускающиеся шторы из молбоскина с машинкой; такая штора стоит 3 р<убля> 75 к<опеек> их надо три. Ширина окна 27<sup>1</sup>/<sub>2</sub> в<ершков>, само полотно шторы должно иметь 25 в<ершков> ширины и длины 3 арш<ина> 6 в<ершков> – это высота окна. Цвет реши сама. Милуша, подумай о переезде и напиши мне свои мысли. Спроси папу, когда назначен съезд, на какие числа?<sup>5</sup> Голубка моя, ты, верно, уже спишь. Спи с Богом. Господь над всеми вами. Целую тебя, детей и папу с мамой.

<sup>1</sup> Описка; надо: ноября.

<sup>2</sup> Здание Саратовской государственной консерватории им. Л.В. Собинова (проспект Кирова, 1), построенное в 1902 г. по проекту архитектора А.Ю. Ягна под музыкальное училище, и переделанное в 1912 г., в связи с открытием в нем консерватории, архитектором С.А. Калистратовым в стиле псевдоготики (был надстроен четвертый этаж и закончено оформление фасада здания), до сих пор является одной из жемчужин архитектурного убранства города.

<sup>3</sup> Экснер Станислав Каспарович, директор Саратовского музыкального училища (с 1912 г. – консерватории).

<sup>4</sup> После более детального обсуждения данного вопроса, устроители торжеств вынуждены были все же отказаться от этого намерения. Уже 17 ноября «Саратовский вестник» известил горожан о том, что «праздновать акт решено в городском театре (ныне – Саратовский государственный академический театр оперы и балета им. Н.Г. Чернышевского. – В.С.). Вместо 2000 гостей на торжественный акт решено пригласить всего 1200, так как большего числа городской театр вместить не может». Окончательное же официальное решение о проведении торжественного заседания Совета Императорского Саратовского университета в помещении городского театра было принято в среду, 25 ноября 1909 г. (Саратовский вестник. 1909. 27 нояб. № 261).

<sup>5</sup> Имеется в виду съезд естествоиспытателей и врачей, проводившийся в Москве с 28 декабря по 6 января 1909 г. В.Д. Зёрнов не только принимал участие в работе этого научного форума, но и был избран на последнем заседании его почетным председателем.

7 ноября <1909 г.>

Лапушка моя, Кисана! Сегодня получил два твоих письма от 4-го и 5-го. Золото мое, как мне тяжело за тебя и не могу тебе помочь. Сегодня смотрели квартиру с К<лавдией> И<вановой> и я решил взять ее. Хозяина не было дома, а я не мог еще раз попасть туда, т.к. днем был Совет, в 5 <часов> – лекция в школе; а вечером я хотел пойти на концерт в музыкальное училище – слушал 1 Тrio Аренского. Хорошо.

Я просил Бирукова дать задаток, на что дал ему 30 р<ублей>. Просил, чтобы квартиру считали за мной с 15 ноября. 1/2 месяца потеряю. Не знаю, согласился ли на это хозяин. Завтра узнаю.

Торжество назначено окончательно на 6 декабря. Ну до тех пор, Бог даст, увидимся. Господь над всеми вами. Целую тебя крепко, Мику – моего мальчика, Танюшу, папу и маму.

10 ноября <1909 г.>

Золото мое, ненаглядная Катенушка! Получил твое письмо от 8-го. Как грустно и тяжело без вас, главное – чувство полной невозможности помочь. Я так устал тоже. Теперь еще с этим торжеством хлопоты. Все разговоры, все трепка, беготня. И бесконечное количество людей, все новых и чужих. Есть и хорошие, и умные, но все чужие. Хотел написать открытку, т.к. хорошего письма не могу написать, да не нашел; не знаю, куда задевал. Сегодня подписал контракт на квартиру. Думаю в четверг переезжать.

Моему милому, бедному мальчику скажи, что папа скучает без него. Голубка, до завтра. Спи с Богом. Господь над всеми вами. Целую тебя, моя детка, и всех.

Сегодня Танюше 4 недели. Поцелуй ее за меня. Гуляй моя лапка, и Мика бы побольше гулял, на нервы, может хорошо будет это действовать. Здесь проливной дождь сегодня весь день.

15 ноября <1909 г.>

Дорогие мои! Все еще не устроился, тем более, что, оказывается, паркет не протерт и еще, значит, будут работать паркетчики. С утра сегодня промучился с типографией по поводу исправления текста приглашений<sup>1</sup>, потом хотел было отправиться к Белоговым, но вспомнил, что мне надо счета привести в порядок; отправился в Университет и провозился с этим до обеда. Обедал у Масленниковых<sup>2</sup>, а после обеда отправился опять в Университет и готовил лекцию. Я очень устал от моей нескладной жизни и мечтаю, как побуду с вами, мои милые, и отдохну. Опять вешать и прибывать прямо нет охоты, тем более, что теперь Федора нет – он занят весь день. Хочу позвать обойщика, чтобы он сделал. Милые мои, теперь скоро увидимся. Пойду спать, а то совсем дремлю. Спите с Богом. Целую всех вас крепко.

<sup>1</sup> Речь идет об официальном именном приглашении на торжественные мероприятия по случаю открытия университета в Саратове, состоявшем из трех самостоятельных блоков: приглашительного текста, исчерпывающей программы празднества и текста кантаты, специально для этого случая написанной преподавателями Саратовского музыкального училища С.К. Эксером и М.Я. Горделем.

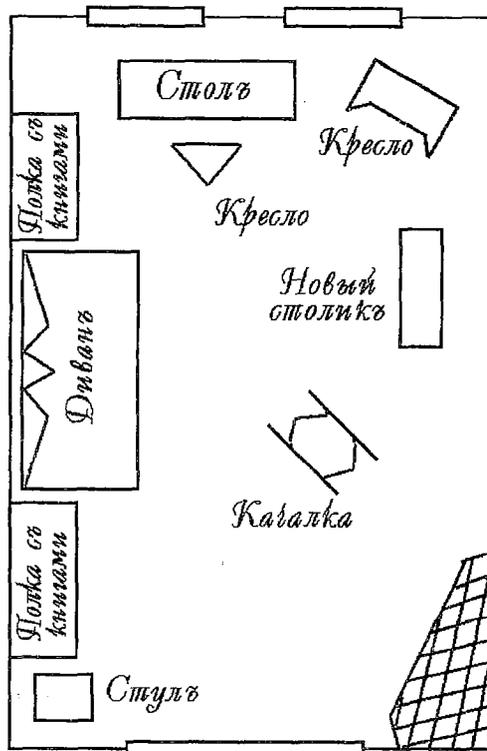
<sup>2</sup> Семья Александра Михайловича Масленникова (1858–?), известного саратовского адвоката, члена III Государственной Думы, после революции 1917 г. эмигрировавшего в Берлин, где и прожил последние годы. Его жена, Людмила Львовна, будучи ответственной вместе с В.Д. Зёрновым за устройство и проведение первого студенческого бала, намеченного на 7 декабря 1909 г. в залах коммерческого собрания (ныне – гарнизонный Дом офицеров), принимала самое деятельное участие в подготовке предстоящих университетских торжеств.

16 ноября <1909 г.>

Милая моя лапушка, дорогое солнышко, Катенушка! Когда получишь это письмо (если в среду), то останется три дня до моего приезда. Хоть бы как-нибудь перескочить эти дни, а то они что дальше, то медленнее двигаются. Завтра Бирукова<sup>1</sup> и Кл<авдия> Ив<ановна> уезжают в Москву. Миша едет позже и прямо в Питер, так что он в этот приезд к нам не зайдет, но К.И. хотела, если успеет, зайти одна. Может быть, в четверг зайдет.

Сегодня читал лекцию и на втором часу вижу, вошел пожилой человек и сел, слушает. Меня как-то это целый час смущало. Я думал – посторонний. Когда кончил, обратился к студентам и просил, чтобы никто посторонний без моего специального разрешения не приходил на лекцию. Хотя я и не указал ни на кого, но все догадались о ком речь, и говорят: «Это вольнослушатель». И он подошел и говорит, что будто вольнослушатель, но не бывал на лекциях, т.к. находился на какой-то службе. Может и врет, ну да все равно, но мне досадно на себя, что такой пустяк мешал мне читать. На этой неделе придется много читать. В среду от 9 до 10 – семинарий и от 5 до 7 – школа, в четверг от 12 до 2 – лекция (вместо 23-го) и в пятницу – от 9 до 11. Потом получу жалованье, рассчитаюсь и поеду к вам, мои милые, хорошие. Я очень доволен и благодарен милой маме, что шубу тебя уговорила делать. Хорошо, что у хорошего портного.

Я Танюшу-то наверно, и не узнаю. Она совсем уж большая стала. Как-то заходил спросить насчет цветов. Здесь можно будет купить и не дорого. Поставим в гостиной. Я думаю, твой письменный стол не поставить ли в запасной – это будет твой кабинетик, а когда мама придет – ее спальня. Сегодня я немного убрал свой кабинет. Изображу тебе как расставил:



Занавески не буду вешать до твоего приезда. Повесил вешалку, зеркало и лампу в передней. В нее выходит пять дверей. Ну, спи с Богом. Господь над всеми вами. Целую тебя, моя лапка, детей и папу с мамой.

<sup>1</sup> Бирукова (урожденная Остроумова) Инна Александровна, жена профессора Б.И. Бирукова. Позже, в своих «Записках», В.Д. Зёрнов создаст небольшой, но довольно яркий ее личный портрет: «В Саратов Борис Ионович приехал с женой и двумя мальчиками. Женат он был на дочери московского парфюмерного фабриканта Остроумова – Инне Александровне; она была очень приветливая, хорошенькая, но простоватенькая, гостеприимная хозяйка, любившая хорошо угощать. <...> На вечерах Инна Александровна блистала «приданными» бриллиантами.

Позднее семейство это распалось. Инна Александровна – то ли во время войны 1914-го года, то ли в начале революции уехала к родителям и больше к мужу не возвращалась, а Борис Ионович сбежал за границу», прихватив с собой бриллианты жены (Зёрнов В.Д. Указ. соч. // Волга. 1993. № 11. С. 139).

30 ноября, 6 часов, 1909 г. >

Золото мое ненаглядное, сладкая моя Катенушка! Получил сегодня два твоих письма (12 часов). Начал писать тебе после обеда, а продолжаю совсем уже поздно, т.к. сначала пришел мой будущий лаборант Забаровский<sup>1</sup> – он мне очень нравится и мне кажется, что как лаборант он будет удобен. В пятницу или в четверг будет Совет, я сделаю о нем заявление. Просидел он до половины девятого, а потом я отправился со скришкой к одной преподавательнице музыки, с которой меня познакомил Чуевский. Играли твою любимую сонату Грига, первые две части концерта Вьетана, Соловья и еще мелочь<sup>2</sup>. Это очень хорошая пианистка и к тому же очень простая, без претензий. Ты будешь довольна этой музыкой. Теперь бы виолончелиста потверже. Пианистка обещала достать.

Милушка моя, если няньки расклеятся, не привезти ли Дуняшу на Рождество, ведь здесь – то она даром деньги будет получать. Только она далеко не так эффектна, как Марта. Одета плоховато, а как человек, мне кажется, порядочный. Ты меня очень порадовала известием, что Мика себя ведет хорошо. Дал бы Бог, чтобы это наладилось. Слава Богу тоже, что маме лучше.

Хотелось бы к папиному приезду немного квартиру образить – занавески хоть повесить, но с другой стороны, что же они будут на Рождество – то пылиться только. Рецепт крахмаленя очень сложный. Я завтра попрошу Дуняшу продиктовать (теперь она спит). Она кладет кроме тальки еще стеарину и магнезии, а по сколько, не знаю. Давал ей денег купить утюг, но она ходила и не решилась, т.к. утюги (я заказывал с отъемной ручкой) продают только комплектом в три штуки разных размеров и стоит это удовольствие с лишним четыре рубля. Я думаю, все – таки надо купить, т.к. Дуняша охотится гладить и говорит, что для разного белья надо и различные утюги. Пока она гладила мне рубашки своим старым утюгом, но говорит, что он плох. Ну, милуша, пойду спать. Спи с Богом. Целую тебя, детей, папу и маму. Господь над вами.

Что это ты, голубка, об бюсте Ломоносова<sup>3</sup> ничего не пишешь, и от папы ничего не получаю?

<sup>1</sup> Забаровский Владимир Алексеевич (1876–1911), преподаватель физики и математики в Саратовском 2-ом реальном училище и одновременно лаборант при кафедре Саратовского университета.

Еще раньше, 28 ноября 1909 г., ученый писал о нем жене: «... сегодня в Университет ко мне приходил один мой университетский товарищ. Он здесь преподавателем в реальном училище. Преподает математику и физику. Я помню его, как очень симпатичного малого и слышал еще от Белогова, что он здесь. Тогда еще мне подумалось – не предложить ли ему лаборантство, но тогда я не знал, что у меня есть еще свободная вакансия лаборанта. Теперь же, узнав, что вакансия имеется, я ему это предложил. Он очень охотится, а мне это будет облегчением, т.к. если бы я пригласил кого – нибудь из Москвы, то, во – первых, мне пришлось бы его здесь устроить, т.е. искать ему уроков, а этот устроен. А во – вторых, найти подходящего и в Москве не легко. Те, кого бы я взял – не пойдут, а кто бы пошел, того, может быть, я бы не взял».

<sup>2</sup> Стремление как можно глубже и всесторонне разобраться в физике звука вызывалось в жизни ученого двумя основными причинами: приверженностью науке и преклонением перед искусством. «Эта область – подчеркивал профессор Московского университета А.К. Тимирязев (1880–1955), знавший Зёрнова по совместной работе в «Лебедевском подвале», – была особенно ему по душе – она соединила в одно стройное целое его увлечение физикой с его стремлением к искусству – к музыке. Он был не только физиком, но и художником, большим знатоком музыки и прекрасным исполнителем» (архив автора).

Наука и музыка – вот те два божества, на которых основывалось миропонимание ученого, которые скрашивали его жизнь, помогая с честью выдержать любые испытания. Его исполнительскому мастерству игры на скрипке могли бы позавидовать многие профессиональные музыканты. И сам Владимир Дмитриевич, ученик таких прославленных музыкантов, как Карл Антонович Кларот (1828–1912) и Иван Войцехович Гржимали (1844–1915), мог бы стать профессиональным артистом. Судьба же распорядилась по – своему. Артистом он не стал, но, по его собственному признанию, «моя причастность к искусству играла во всю мою жизнь, и сейчас играет, большую роль» (Зёрнов В.Д. Указ. соч. // Волга. 1993. № 8. С. 127).

<sup>3</sup> Бюст М.В. Ломоносова был официально заказан университетом с целью установки его, как символа российской университетской науки, вместе с бюстом выдающегося хирурга Н.И. Пирогова на сцене городского театра во время проведения там торжественного заседания Совета Саратовского университета.



ПОЧТОВАЯ КАРТОЧКА



г. Москва



г. Калужская

В. Д. Зёрнов и Е. В. Зёрновой

6 декабря.

Завалов наш милый! Снасть  
 же предвзвешен. Ошибки  
 шаровесивен, но очень важно,  
 у нас же в. ст. азерб. Связь  
 тут телеграф. анал. Дипломат  
 телеграфу Ледову П. К., казначей  
 прикладит цент каздривен. Моск  
 рдз шавиний. Моск же и  
 его внимание. Ут. т. у. в. ст. ма  
 и реддмивен. В. Д. Зёрнов

Факсимиле письма В. Д. Зёрнова Е. В. Зёрновой от 6 декабря 1909 года

1 декабря <1909 г.>

Дорогие мои! Пищу дорогие, т.к. письмо получите, верно, когда папа уже будет в дороге. Милые мои, хорошие, надо бы девку—то в кожную клинику спослать, а то, правда, не известно, что за экзема у нее. Да и вообще, с экземой не складно при ребенке держать. Дуняша с удовольствием готова ехать на Рождество в Москву. Только не знаю, превращать ли ее окончательно в няньки. Она, правда, детей, видимо, любит, по крайней мере со своими очень нежно обращается. Но это самое количество детей может служить минусом для няньки. Во всяком случае, временно для переезда, и здесь на первое время, она вполне удобна.

Она жила у Беклемишевых, которые теперь живут в Москве на Тверской. Мне кажется, что у Насти есть какое—то там знакомство. Помнится, масло какое—то у них покупали. Можно об ней справиться еще и там.

Сегодня в университете фотограф снимал группу профессоров одних и общую группу профессоров со студентами — всего человек около ста<sup>1</sup>. Вчера снимал меня фотограф (просил «сделать честь его фотографии»). Наверное, сдерет за фотографию с редакций, которые выпускают иллюстрированные приложения. Вышло грубовато, но, мне кажется, похоже<sup>2</sup>. Все готовятся, все волнуются. Студенты каждый день находят новые поводы обижаться. Сегодня на меня обиделись (теперь, кажется, это прошло). Дело в том, что они заказали жетоны в память открытия, и дали на клочке бумажки заказ, но без задатка. Гравер обратился ко мне с вопросом: действительна ли эта бумажка, и можно ли что по ней получить? Я сказал, что получить ничего нельзя. Спрашивает — не поручусь ли я за студентов? Говорю — нет. Понятно ведь, коли они не заплатят, как же я буду отвечать. Ну, да это все недоразумение на два часа<sup>3</sup>.

Господь над всеми вами. Спите с Богом. Целую вас и детей.

<sup>1</sup> Указанные фотосъемки производил известный саратовский фотограф Н. Гольдберг. Выполненные им в дни торжественного открытия Саратовского университета фотоработы сохранились и в настоящее время находятся в фондах отдела редких книг Зональной научной библиотеки Саратовского университета.

<sup>2</sup> Этот снимок был сделан в фотостудии С. Глушенко. Данная работа в настоящее время хранится в личном архиве В.Д. Зёрнова у автора публикации.

<sup>3</sup> Речь идет о предпринятой саратовским студенчеством еще в ноябре 1909 г. попытке выпустить по случаю торжественного открытия Саратовского университета памятный серебряный жетон, сбор от продажи которого должен был поступить в общую кассу первого студенческого бала—концерта. Из газетных сообщений известно, что выполненный по проекту студента Саратовского университета А.Н. Трегубова жетон имел следующий вид: «На одной стороне жетона будет изображен орел (времен Петра I), обнимающий крыльями края жетона (орел — эмблема России, охраняющий крыльями новую Alma mater), со щитом на груди с инициалами Государя Императора. На этой же стороне: герб Саратова в лавровом венке, кругом же надпись: «В память открытия Императорского Саратовского университета». Внизу — дата Высочайшего рескрипта (10 июня 1909 г.) об открытии университета.

Обратная сторона: тот же орел на жетоне, чаща с двумя змеями, извивающимися в лавровом венке; середину занимает год и число торжества: 16—XI 1909 г.» (Саратовский вестник. 1909. 13 нояб. № 250; 12 нояб. № 249).

Однако, из—за переноса тогда дня официального открытия университета на 6—ое декабря, выпустить означенные жетоны не удалось. До сих пор также неизвестно, были ли они изготовлены позже. Зато известно достоверно, что желая увековечить торжество открытия нового университета, Совет постановил вычеканить в память этого события медаль. Эскиз медали был выполнен профессором Дмитрием Васильевичем Айналовым (1862—1939), а непосредственное выполнение заказа было поручено художнику—медальеру С.—Петербургского Монетного Двора Петру Григорьевичу Стадницкому (1853—?). Всего было заказано и изготовлено 865 медалей — две золотых, поднесенных позже императору Николаю II и Председателю Совета Министров П.А. Столыпину, 115 серебряных и 550 бронзовых, на что истрачено было в общей сумме 2839 рублей 50 копеек, не считая оплаты за пересылку и стоимости эскиза медали (450 руб.).

3-го декабря <1909 г.>

Дорогие мои, золотые! Получил сегодня телеграмму от папы. Завтра отправляюсь его встречать<sup>1</sup>. Завтра же, но с дневным поездом, приезжает Серебряков<sup>2</sup> с жидким воздухом. Придется завтра днем устроить демонстрацию. Я рад, что вы побывали на Щепотьевском вечере и это доставило вам удовольствие. Теперь скоро увидимся, хотя, думаю, что с папой мне не удастся вернуться. Придется задержаться, все в порядок привести, устроить денежные дела лаборатории, провести лаборанта через Совет. И, может быть, одну лекцию прочесть.

Разумовский умильно просит купить форменную фуражку для встречи министра<sup>3</sup>. Так мне не хочется это делать, но очень уж старик просит, – для него придется сделать. Просил тоже для министра жидкого воздуха оставить, не знаю уж, удастся ли это сделать, ведь воздух быстро испаряется.

Разумовского совершенно замотали и он имеет совсем растерянный вид. Секретарь Совета<sup>4</sup> говорит, что проклинает тот день, когда родился. Целый день пристают к ним то репортеры, то разные обыватели, то полотеры, то драшировщики. Я сегодня чуть не побил одного жида, который взялся делать жетоны в память открытия и клялся, что сам это дело знает и сделает, даже образцы показывал. Я уже несколько дней тому назад требовал, чтобы он показал свою работу – он все отвиливал, а сегодня признался, что заказал в Москве. Я потребовал, чтобы он показал, по крайней мере, извещение из Москвы. Действительно, дал мне письмо, где написано, что в Москве жетоны делают, но будут готовы только 10-го. Ну, тут уж я его и отделал. Он клянется, что послал телеграмму и что жетоны придут вовремя. Я в конце притащил его в канцелярию и заставил написать расписку, что если вовремя не доставит, то возвратит тройной задаток – 150 р<ублей>. Конечно, взять с него нечего, но по крайней мере страху он натерпелся.

Гостей будет много, боюсь, что акт очень затянут. Две речи, да масса приветствий. Большинство адресов будут читать. Кажется, ректор с деканом длинные речи приготовили<sup>5</sup>. Не умеют все-таки русские торжества устраивать. Я рассказывал, как в Кембридже депутации принимали<sup>6</sup>. Ну, да куда тут. У нас так нельзя – обиды пойдут. А в конце выйдет Демьянова уха. Хорошо, что депутация от Моск<овского> Унив<ерситета> в самом начале.

Ну, Господь над вами. Спите с Богом. Целую крепко вас и ребят.

<sup>1</sup> Являясь деканом медицинского факультета Московского университета, Д.Н. Зёрнов вместе с ректором А.А. Мануйловым представлял официальную делегацию от старейшего русского университета, направленную в Саратов для приветствия своего младшего собрата.

<sup>2</sup> Серебряков Иван Максимович (1888–1918), лекционный ассистент В.Д. Зёрнова, работавший с ним в Физическом институте Саратовского университета.

<sup>3</sup> Предполагаемое участие в торжествах министра народного просвещения Александра Николаевича Шварца (1843–1915) не состоялось. Открытие Саратовского университета министр приветствовал телеграммой, в которой выражал надежду на то, что вновь открываемый «светоч знания» послужит, «... говоря словами великого Ломоносова, «к приращению наук», следовательно – к истинной пользе и славе отечества» (Чуевский И.А. Торжество открытия Императорского Николаевского университета в г. Саратове 1909 г. 6 декабря. Саратов, 1910. С. 37).

<sup>4</sup> Купцов Сергей Ильич (1868–?), секретарь Совета и Правления Саратовского университета (1909–1918); до назначения в Саратов занимал ту же должность в Казанском университете.

<sup>5</sup> Имеются в виду произнесенные ректором университета В.И. Разумовским и деканом медицинского факультета И.А. Чуевским актовые речи, соответственно имевшие названия: «К истории университетов и медицинских факультетов» и «К истории Императорского Николаевского Университета». Обе эти речи были опубликованы в специальном выпуске «Известий Императорского Николаевского университета» (См.: Чуевский И.А. Указ. соч.)

После завершения торжественных мероприятий в университетскую библиотеку на вечное хранение было передано 163 адреса и 669 приветствий, поднесенных Саратовскому университету 6 декабря 1909 года (ГАСО. Ф. 393. Оп. 1. Д. 27. Л. 351).

<sup>6</sup> Во время своего посещения в 1909 г. Кембриджа, В.Д. Зёрнов присутствовал на торжественном заседании Совета Физического института, посвященном чествованию 100-летия со дня рождения Ч. Дарвина. Вспоминая о том, как проходило торжество, он впоследствии писал: «Речи произносили только трое: представители Германии, Соединенных Штатов Америки и Франции.

Остальных представителей вызывал главный секретарь к эстраде. Те подходили к «амвону» и подносили папку или свиток с адресом. Другой секретарь, стоявший у трона, принимал адреса, а Рэлей делал лишь маленький поклон» (Зёрнов В.Д. Указ. соч. // Волга. 1993. № 10. С. 117).

4 декабря <1909 г.>

Дорогие мои, золотые! Папа приехал. Встретили его почетно. Ректор поехал специально его встречать, как представителя старейшего Университета и как самого заслуженного гостя из медицинского мира – так Разумовский формулировал мне свое желание приехать встретить папу. Конечно, мне такое внимание к папе доставляет глубокое удовлетворение. Видимо, и папе было приятно. Он приехал в очень хорошем расположении духа. Квартира ему очень понравилась, и это мне тоже приятно. Теперь папа уже лег спать – он захотел лечь в кабинете, хотя я и предлагал ему спальню.

Сегодня приехало уже порядочно гостей. Был в Университете попечитель Деревицкий, ректор Казанского Университета, из Харькова несколько человек. Завтра поеду встречать Мануйлова, Боргмана и М. Ковалевского<sup>1</sup>. Завтра в 3 часа начинается торжество панихидой по деятелям умершим, которые способствовали возникновению Саратовского Университета<sup>2</sup>. Пришлось так рано начать, т.к. в 4 часа уже начинается церковный день 6-го дек<абря>, т.е. царский день и панихиду служить нельзя<sup>3</sup>. На улицах везде идут приготовления – флаги вешают, гирлянды из зелени, ковры<sup>4</sup>. Вечером 6-го будет иллюминация. С жидким воздухом я прогорел. Трындин дал такой сосуд, что все три литра испарились в течение нескольких часов, и в Саратов сосуд пришел совершенно пустым. Виноват, конечно, Трындин, что отпускает негодные приборы. Постараюсь взыскать с него убыток. Напишу сейчас же ему письмо.

Господь над вами, мои хорошие. Крепко вас целую. Ребятишек моих сладких поцелуйте.

<sup>1</sup> Деревицкий Алексей Николаевич (1859-?), историк, попечитель Казанского учебного округа, в ведении которого находился Саратовский университет; в торжественные дни официально представлял министра народного просвещения. Александров Александр Иванович (1861–1918), н. о. ректора Казанского университета. В депутацию от Харьковского университета входили: Багалеи Дмитрий Иванович (1857–1932), ректор, профессор русской истории и Кузнецов Александр Харитонович, декан медицинского факультета. Мануйлов Александр Аполлонович (1861–1929), экономист, профессор и ректор (1908–1914) Московского университета, министр народного просвещения Временного правительства. Боргман Иван Иванович (1849–1914), физик, ректор С.-Петербургского университета. Ковалевский Максим Максимович (1851–1916), профессор Московского и Петербургского университетов, академик, член 1 Государственной Думы и Государственного Совета. Во время обсуждения в Гос. Совете законопроекта об открытии в Саратове нового университета являлся одним из его основных докладчиков. Присутствовать же лично на торжествах его открытия в декабре 1909 г. не смог, ограничившись посылкой приветственной телеграммы (см.: Чувеский И.А. Указ. соч. С. 139).

<sup>2</sup> Среди поминаемых деятелей, способствовавших делу возникновения на саратовской земле нового «рассадника знаний», назывались имена А.Н. Радищева, А.Н. Пыпина, Д.Л. Мордовцева, представителей дворянства, земства и духовенства (см. подробно: Чувеский И.А. Указ. соч. С. 29–30).

<sup>3</sup> Согласно церковному календарю, 6 (19) декабря отмечается день Святителя Николая Чудотворца, помогающего, по мнению верующих, в благоустройстве жизни, в избавлении от разных бед и печалей. Весь христианский мир почитает Св. Николая так же как главного покровителя путешествующих, особенно плавающих по водам. Этот церковный праздник назывался еще «царским днем», поскольку 6 декабря отмечалось тезоименитство императора Николая II.

<sup>4</sup> Отмечая праздничное убранство Саратова в дни проведения торжественных мероприятий, М.В. Казанский, участвовавший в них в качестве гостя, писал: «Город разукрасился: улицы, особенно главные, дома, магазины, театры, рестораны, кинематографы, здания различных учреждений и т.д. запестрели разноцветными флагами, цветными лентами, щитами, транспарантами, вензелями, гербами <...> – у входа в здание университета, украшенное флагами и декорированное зеленью, поставлены были два знамени университетского, голубого, цвета с желтыми гербами. Стоящие по середине улицы, трамвайные столбы украшены были флагами, с коронами и инициалами Императорского Саратовского университета вверху. По пути имевшего быть шествия торжественной процессии из собора к месту закладки зданий университета расставлены были обтянутые разноцветной материей колонны с двуглавыми бронзовыми орлами наверху.

За лучшее украшение домов и за более эффектную иллюминацию в день университетского торжества, по сообщению газет, – заключал автор, – назначены были три бронзовые медали» (Казанский М.В. О торжестве открытия Саратовского университета 6–го декабря 1909 года. Казань, 1910. С. 6–7. См. также: Саратовский листок. 1909. 4 декабря. № 272).

*5 декабря <1909 г.>*

Дорогие мои, милые! Ну, торжества начались. Целый день метался по городу и проездил, кажется, рублей пять. Был только на панихиде, а во время всенощной надо было депутацию из Праги встречать<sup>1</sup>, да еще дела с концертом улаживать. Устал и в голове сумбур<sup>2</sup>. Описывать уже не буду, когда приеду, все расскажу. Мне очень приятно, что папе, кажется, все нравится и он в хорошем расположении духа.

Пойду спать, а то завтра с раннего утра и до вечера придется на ногах быть. Господь над вами, мои дорогие. Крепко вас целую и маленьких моих ребят.

<sup>1</sup> Чешский университет в Праге на торжествах в Саратове представлял профессор истории права Карел Кадлец (Колдец) (1865–1928).

<sup>2</sup> Характеризуя позже свое душевное состояние в те дни, В.Д. Зёрнов признавался: «И в конце концов я потерял способность ориентироваться, что нужно делать, а что нет<...>. И тем не менее обстановка вокруг была радостной, печалило лишь – не было со мной моей Катенушки» (Зёрнов В.Д. Указ. соч. // Волга. 1993. № 11. С. 147–148).

*6 декабря <1909 г.>*

Дорогие мои, милые! Спасибо за приветствие. Открывали торжественно, но очень долго. Устали все очень. Сейчас пишу из телеграфного отделения. Отправляя телеграмму Лебедеву П.Н.<sup>1</sup>, который прислал мне поздравление<sup>2</sup>. Такой он славный. Так меня трогает его внимание.

Целую вас, мои дорогие, и ребятешек.

<sup>1</sup> Лебедев Петр Николаевич (1866–1912), профессор Московского университета, основатель и руководитель первой русской школы физиков. Под его руководством В.Д. Зёрнов, будучи студентом физико-математического факультета Московского университета, приступил к своим первым экспериментальным исследованиям в области акустики, затем подготовил и защитил магистерскую диссертацию. П.Н. Лебедев принимал также деятельное участие в проектировании и оснащении необходимым оборудованием Физического института Саратовского университета – богатый жизненный и научный опыт учителя в этом вопросе для В.Д. Зёрнова имел первостепенное значение.

<sup>2</sup> Имеется в виду телеграмма П.Н. Лебедева следующего содержания: «Университет. Профессору Владимиру Дмитриевичу Зёрнову. Приветствую нарождающийся Физический институт. Желаю ему расти большим, иметь силы, много успешно работать. Лебедев» (Подлинник телеграммы хранится на кафедре общей физики Саратовского университета).

*8 декабря <1909 г.>*

Дорогие мои! Вчера не писал, т.к. день был сумасшедший – гости в здании Университета, потом обед в думе и вечер<sup>1</sup>. Все прошло очень хорошо. Рассказывать буду уж сам, да и папа порасскажет. Домой пришел в шестом часу. Танцы были запрещены по случаю траура<sup>2</sup>. Ночь просидели со студентами, которые бесконечно пели *Gaudeamus* и каждый раз при словах *Vivat professores* – устраивали гвалт в знак овации нам, качали, опять пели и опять качали. Ну, да все расскажу. Сбор с концерта по Саратову громадный – валового свыше 4200 рублей, так что чистого во всяком случае больше 3000<sup>3</sup>. Расходы все еще не выяснили, но, конечно, они не больше 1000. Сегодня провожали самых почетных гостей. Были почти все профессора и много студентов. Завтра придется ездить благодарить участвовавших. Думаю я, что мне не удастся выехать раньше субботы. Ну, теперь уж не долго. Я рад, что наконец эти торжества прошли и прошли в общем удачно. Теперь поскорее бы устроиться с вами, мои хорошие, и жить настоящей тихой жизнью.

Получил на днях от Миши письмо из Питера, но еще не отвечал. Он очень интересуется – какое впечатление произвела на вас его супруга. Завтра, думаю я, выяснится вопрос, будут ли читать лекции или нет. Если да, то мне придется в пятницу прочесть, а в субботу, вероятно, будет Совет. Вот почему я и думаю, что до субботы не выберусь. Ну, Господь над вами. Спите с Богом. Целую крепко вас и ребятишек.

<sup>1</sup> С утра 7 декабря для гостей были открыты все «университетские помещения, кабинеты и аудитории, которые показывались почтенными профессорами Саратовского университета с большим вниманием их к посетителям и любезностью». В актовом зале была устроена «выставка подношений – адресов, различных книг, изданий в ценных переплетах в дар библиотеке, фотографии торжеств (дар местных фотографов), груды телеграмм». (Казанский М.В. Указ. соч. С. 34; Чуевский И.А. Указ. соч. С. 48).

В четыре часа дня в здании Городской думы был дан обед, устроенный Саратовским городским общественным управлением. На нем присутствовало 250 гостей (по другим сведениям – 182) – депутаты от университетов, других высших учебных заведений и учреждений, представители администрации. Кроме этого накануне через фельдшерский персонал медико-санитарного бюро было выдано для бедных 1350 билетов на сорокакопеечные бесплатные обеды.

Завершился день в залах Коммерческого собрания, где состоялся первый бал-концерт в пользу малообеспеченных студентов.

<sup>2</sup> Намечавшиеся танцы были запрещены по указанию саратовского губернатора графа Сергея Сергеевича Татищева (1872–1915) в виду объявленного с стране траура по случаю кончины старейшего представителя Дома Романовых – великого князя Михаила Николаевича (1832–1909). По этой причине студенческий бал ограничился лишь концертом, на котором звучала музыка Глазунова, Римского-Корсакова, Аренского, Чайковского, Сен-Санса, Глинки и др.

<sup>3</sup> За вычетом понесенных расходов на организацию и проведение вечера, в кассу Правления Саратовского университета поступило около 3350 рублей чистого дохода (См.: Чуевский И.А. Указ. соч. С. 54).

*10 декабря (утро) <1909 г.>*

Золото мое ненаглядно, ясная моя звездочка, ненаглядная моя Катенушка! Вчера вечером не написал – играл у Овсянничких и поздно вернулся. Голубка моя, вслед за этим письмом сам приеду. Счастье мое, как хочется тебя приласкать, крепко-крепко. Лапка, приеду в воскресенье, т.к. в субботу Совет в 1 час – надо быть непременно. Будем собираться, как хорошо с тобой – то будет ехать. Милая, золото, спасибо, что маму уговорила ехать с нами. Наш отъезд от этого будет легче, да и ей приятно будет пожить у нас и помочь нам устроиться.

Миша Масленников (он очень славный парень) говорил: «Знаете, Владимир Дмитриевич, кому я завидовал на акте?». Я спрашиваю – кому? «Вашему отцу (т.е. папе). Наверно, – говорит, – большое удовольствие видеть своего сына профессором».

Вчера лекции не состоялись. Чуевский совершенно охрип и не мог читать, а на лекцию Гордягина<sup>1</sup> никто не пришел. Посмотрим, что будет сегодня, если никого опять не будет, то не буду и готовить лекцию. Вчера на курсах не стал читать – такую мысленную усталость чувствовал, что не мог себя заставить приготовить лекцию, да там и большинство уже кончили лекции. Голубка, вчера без марки послал письмо – не было дома марок. Сейчас пойду в Университет и по дороге куплю марку, и письмо опущу.

Вчера к вечеру пошел дождь, а потом снег. Телефонные проволоки так обледенели, что в некоторых местах все порвались и висят, как сеть. Господь над тобой, мое счастье. Теперь скоро я тебя поцелую, приласкаю, возьму на ручки и поняньчаю. Радость моя, не дождусь скоро ли воскресенье. Только бы Бог нам всем дал здоровья. Лапка моя, Кисана! Целую тебя крепко, крепко. Поцелуй папу, маму и малышей наших.

<sup>1</sup> Гордягин Андрей Яковлевич (1865–1932), ботаник, профессор Саратовского (1909–1914) и Казанского (с 1914) университетов, член-корреспондент АН СССР (1929).

**PROFESSOR V.D. ZERNOV LETTERS  
OF THE PERIOD OF FOUNDATION  
AND DEVELOPMENT OF SARATOV UNIVERSITY**

In the article the basic life stages of V.D. Zernov, Doctor of Physics and Mathematics, one of the first professors of Saratov University, opened in 1909, are briefly covered. The article opens the first publication of V.D. Zernov letters, concerning the events of the period of Saratov University foundation.

The introductory article, comments and preparation of the texts for publication are made by V.A. Solomonov.



*Соломонов Владимир Анатольевич* – родился в 1962 году в Балашове Саратовской области. Окончив исторический факультет СГУ (1989), работал в Саратовском государственном техническом университете. В настоящее время – кандидат исторических наук, доцент кафедры истории России СГУ. Автор более 20 печатных работ по истории высшего университетского образования в России, специалист по вопросам дореволюционной истории Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского, активно занимающийся в этой области сбором и публикацией первоисточников.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *М.В. Попова, Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал–макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно–научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты –  
р/с №40503810000000000378 ЗАО АКБРиР «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

**Подписка на II–ое полугодие 1999 года**  
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498  
и по заявочным письмам непосредственно в редакции  
Стоимость подписки на II полугодие 90 рублей

Сдано в набор 15.05.99. Подписано к печати 3.07.99. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 15,4 (11,0). Уч.–изд. л. 14,0. Тираж 200 экз. Заказ 116

Издательство ГосУНЦ «Колледж»

Лицензия ЛР №020773 от 15.04.98

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.  
Тел. (845–2)514298, факс (845–2) 514298  
E–mail:and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

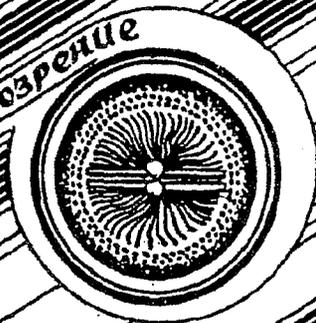
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1999



Книжное обозрение



для студентов и преподавателей



Современной нелинейной динамики

**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



## **Проблематика и перспективы реконструкции динамической модели применительно к системам каллиграфической палеографии (часть 2)\***

На 4-й странице обложки прошлого номера нашего журнала сообщалось о важных результатах, полученных на основе нового подхода к анализу рукописных материалов, рассматриваемых как временные реализации некоего колебательного процесса, т.е. в качестве объектов нелинейной динамики. На примере рукописей Пушкина была показана возможность воссоздания динамической системы, которая с достаточно высокой степенью точности моделирует творческую способность какой-либо личности по известным ее проявлениям, если эти последние могут быть представлены в виде некоего колебательного процесса.

К сожалению, ресурсы имеющейся в наличии вычислительной техники не позволили нам продвинуться далее обработки заголовков произведений Пушкина, но и на этом этапе получены интересные результаты. В частности оказалось, что модельная динамическая система сгенерировала совершенно иные заглавия произведений, нежели канонические, и эти заголовки, как нам кажется, гораздо более точнее, хотя и менее образно, выражают существенные особенности произведения. Обнаружение параллельных заглавий с несомненностью доказывает наличие "нелинейно-динамической" особенности пушкинского мышления, и только отсутствие в то время необходимого терминологического аппарата не дало возможности явного проявления этой особенности. Ниже приводится список 1 параллельных заглавий:

### *Список 1*

1. **Нелинейные волны, катастрофы, бифуркации, самоорганизация.**
2. **Динамический метод управления и разрушение метастабильных состояний в теории игр.**
3. **Необратимые явления в двухкомпонентных системах, описываемых уравнением "хищник - жертва".**
4. **Разрушение возбужденных состояний связанных систем под влиянием сверхсильного импульсного воздействия.**
5. **Механизмы развития этической неустойчивости в мультистабильных элементах на пороге возникновения хаоса.**
6. **Об одном механизме рождения страшного нехаотического аттрактора.**
7. **Internet и проблемы психологической совместимости пользователя с виртуальными объектами.**
8. **Влияние активных центров на динамику вихревых потоков в условиях низких температур.**
9. **Динамические процессы развития взрывной неустойчивости под воздействием внешнего сигнала.**
10. **Бассейны притяжения нелинейных упругих тел с нестандартной формой потенциального профиля.**

Для того, чтобы читатель мог в какой-то мере ощутить себя соучастником творческого азарта, воодушевлявшего авторов настоящей работы, мы помещаем также список 2 канонических названий, расположенных в ином порядке нежели в списке 1, и предоставляем читателю самостоятельно привести оба списка в соответствие.

### *Список 2*

1. **Калмычке.**
2. **Пророк.**
3. **Бесы.**
4. **Утопленник.**
5. **Вурдалак.**
6. **Борис Годунов.**
7. **Каменный Гость.**
8. **Моцарт и Сальери.**
9. **Пиковая дама.**
10. **Медный всадник.**

Недостаток вычислительных ресурсов, связанный со сложностью графического анализа непечатного текста, обусловленной необходимостью учета мелкомасштабных особенностей, заставляет нас временно приостановить исследование рукописных материалов классиков. Однако, в ближайшее время мы планируем заняться воссозданием динамических моделей постоянных авторов журнала ПНД, что позволит редакции журнала постепенно переходить на сотрудничество с этими моделями. Работа эта, несомненно, имеет важное значение, она даст возможность сэкономить огромные материальные, духовные и временные ресурсы, освободит авторов и рецензентов от рутинной работы по написанию и оценке статей, улучшит экологическую ситуацию в стране вследствие сбережения бумажных ресурсов и позволит редакции журнала организовать, наконец, бесперебойное и своевременное обслуживание подписчиков.

\* Работа выполнена в рамках подготовки к празднованию 200-летия со дня рождения А.С.Пушкина