

# Трикладная Делнейная и палика





**Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы**



**Конференции, семинары, симпозиумы**



**детерминированные системы**



**Авто-  
вольные системы**

**Прикладные задачи  
нелинейной  
теории  
колебаний  
и волн**



**Нелинейная  
динамика  
в лицах**



**История. Persona**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*В.И. Кринский*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пуцшино

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет

*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

*В.К. Юлатов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Выпуск номера осуществлен при поддержке  
ФЦП «Интеграция», проект А0057/99,  
и грантом «Будущие научные школы»,  
проект РФФИ 96-15-96536

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

## ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 7, № 4, 1999, Саратов

### СОДЕРЖАНИЕ

#### АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Кузнецов С.П.* Абсолютная и конвективная неустойчивость и образование структур в модельной системе типа реакция – диффузия с потоком . . . 3

#### ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Усанов Д.А., Вениг С.Б., Горбатов С.С., Труфакин Э.В.* Хаотические колебания в СВЧ- и НЧ-цепях генератора на диоде Ганна . . . . . 20

*Брюханов Ю.А.* Колебания в нелинейных рекурсивных цифровых цепях первого порядка при постоянном внешнем воздействии . . . . . 29

#### НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

*Ерофеев В.И., Ключева Н.В., Семерикова Н.П.* Нелинейно-упругие волны в стержне Миндлина – Германа . . . . . 35

#### МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

*Григорьев А.Д.* Современные методы моделирования нестационарных электромагнитных полей . . . . .

*Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Вычисление старшего ляпуновского показателя по последовательности времен возврата: возможности и ограничения . . . . . 59

#### НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

*Богомолов Г.Д., Клеев А.И.* Квазиоптические резонаторы с периодическими структурами . . . . . 75

#### ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

*Трубецков Д.И.* Сорок лет со дня публикации одного краткого сообщения . . . 87

*Белюсов В.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм . . . . . 89

АНОНС . . . . . 34, 96, 97

C O N T E N T S

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Absolute and convective instabilities and pattern formation in a model of distributed reaction – diffusion system with flow. *S.P. Kuznetsov*. . . . . 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Chaotic oscillations in microwave and low-frequency circuits of the Gunn diode generator. *D.A. Usanov, S.B. Wenig, S.S. Gorbatov, E.V. Trufakin*. . . . . 20
- Oscillations in first-order non-linear recursive digital circuits under constant external influence. *Yu.A. Bryuhanov* . . . . . 29

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

- Nonlinear elastic waves in Mindlin – Herrmann rod. *V.I. Erofeyev, N.V. Kluyeva, N.P. Semerikova* . . . . . 35

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

- Modern methods for transient electromagnetic fields simulation. *A.D. Grigoriev* . . 48
- Computing largest Lyapunov exponent from a sequence of return times: possibilities and limitations. *A.N. Pavlov, V.S. Anishchenko* . . . . . 59

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- On the theory of the quasi-optical resonators with periodical structures. *G.D. Bogomolov, A.I. Kleev* . . . . . 75

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- Forty years since the day of one brief report publication. *D.I. Trubetskov* . . . . . 87
- Periodical reaction and its mechanism. *B.P. Belousov* . . . . . 89

- ANNOUNCEMENTS . . . . . 34, 96, 97



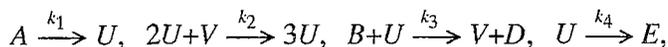
## АБСОЛЮТНАЯ И КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР В МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ТИПА РЕАКЦИЯ – ДИФфуЗИЯ С ПОТОКОМ\*

*С. П. Кузнецов*

Для одномерной модели химической системы реакция – диффузия, в которой смесь реагентов поступает на вход реактора и движется вдоль него с постоянной скоростью, рассматривается переход от конвективной неустойчивости к абсолютной в зависимости от скорости потока, обсуждается связь между характером неустойчивости Хопфа и Тьюринга и процессами образования структур. Обсуждается возможность реализации «химического эффекта Черенкова» – возбуждения стоячей структуры при поступлении на вход реактора неравновесных концентраций, а также поведение системы вблизи порога возникновения абсолютной неустойчивости при наличии случайных флуктуаций концентраций на входе («индуцированная шумом абсолютная неустойчивость»).

В программе школы–конференции по электронике и радиофизике присутствие лекции о неустойчивости и образовании структур в химической системе типа реакция – диффузия можно оправдать намерением продемонстрировать применение к системам такого рода привычного и хорошо разработанного инструментария теории волн. Оказывается, что опыт и интуиция, накопленные при анализе электронных устройств, плазменно–пучковых неустойчивостей, других колебательно–волновых феноменов, очень помогают в изучении динамики химических систем. Как отмечал в свое время Л.И.Мандельштам, такого рода междисциплинарные контакты – «колебательная взаимопомощь» различных научных дисциплин – могут быть чрезвычайно плодотворными, способствовать как прогрессу в конкретных областях, так и разработке обобщающих представлений и концепций.

Как известно, приблизительно в 1950 году Б.П. Белоусовым была обнаружена периодически действующая химическая реакция [1]. Общее понимание и признание значения этой работы пришло значительно позднее. В середине 60–х годов И.Р. Пригожин с сотрудниками предложил простую теоретическую модель периодической химической реакции, названную брюсселятором [2,3]. Эта модель основана на следующей системе реакций:



где буквы  $A, B, D, E, U, V$  обозначают химические реагенты, числовые коэффициенты показывают количество молекул, участвующих в элементарном акте реакции, а коэффициенты  $k_i$  характеризуют скорость протекания реакций.

\* Статья написана по материалам лекции, прочитанной на XI Международной школе по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 2–6 марта 1999 г.

Обычно считается, что компоненты  $A$  и  $B$  присутствуют в избытке, так что изменением их концентраций за обозримый интервал времени можно пренебречь. Компоненты  $D$  и  $E$  фигурируют только как конечный продукт реакций. Основной интерес представляет, следовательно, динамика во времени концентраций компонентов  $U$  и  $V$ . Соответствующая система уравнений составляется на основании схемы реакций по простым правилам. Для каждого реагента скорость изменения концентрации определяется балансом его производства и расхода. Скорость реакции пропорциональна произведению соответствующего коэффициента  $k_i$  и концентраций, взятых с определенными показателями степени, по количеству молекул, участвующих в элементарном акте реакции. Обозначая далее концентрации теми же буквами, что и соответствующие реагенты, получаем

$$dU/dt = k_1A + k_2U^2V - k_3BU - k_4U, \quad dV/dt = -k_2U^2V + k_3BU.$$

Заменой переменных эти уравнения приводятся к безразмерному виду

$$dU/dt = A + U^2V - BU - U, \quad dV/dt = -U^2V + BU. \quad (1)$$

Величины  $U$  и  $V$  играют роль динамических переменных, а концентрации исходных реагентов,  $A$  и  $B$ , рассматриваются как параметры задачи.

Система уравнений (1) допускает решение в виде состояния равновесия, которое отвечает обращению в нуль правых частей,

$$U = A, \quad V = B/A. \quad (2)$$

Это состояние оказывается устойчивым при малых  $B$  и неустойчивым при достаточно больших [4–9]. Порог потери устойчивости

$$B_H = 1 + A^2 \quad (3)$$

ассоциируется с моментом бифуркации Андронова – Хопфа (в литературе по химической кинетике ее чаще называют просто бифуркацией Хопфа). Эта бифуркация иллюстрируется рис. 1. При  $B < B_H$  имеем состояние равновесия типа устойчивого фокуса, а при  $B > B_H$  появляется устойчивый предельный цикл, то есть возникает режим химических автоколебаний.

Представим себе теперь, что концентрации  $U$  и  $V$  зависят не только от времени  $t$ , но и от пространственной координаты  $x$ . Предполагается, что при наличии пространственной неоднородности имеет место диффузия, притом с разными для обоих компонентов коэффициентами,  $D_U < D_V$ . Модификация уравнений (1) для описания пространственно-временной динамики состоит в том, что производная по времени заменяется частной производной, и в оба уравнения

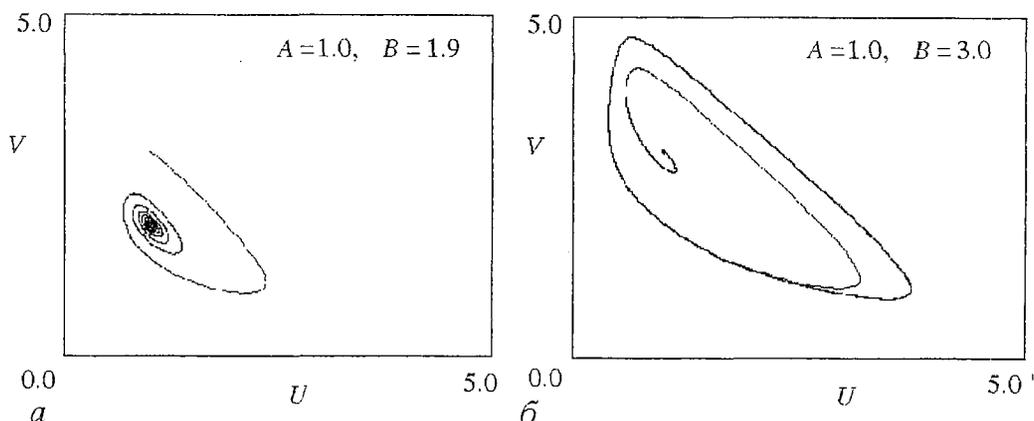


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1) на плоскости  $(U, V)$  до (а) и после (б) бифуркации Андронова – Хопфа

добавляются члены, учитывающие диффузию, — вторые производные по пространственной координате

$$U_t = A + U^2V - BU - U + \sigma U_{xx}, \quad V_t = -U^2V + BU + V_{xx}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma = D_U/D_V$ , а индексами  $t$  и  $x$  отмечены соответствующие частные производные.

В 1952 году А.Тьюринг обосновал возможность возникновения пространственных структур из-за развития неустойчивости, связанной с разной скоростью диффузии реагентов [10]. В распределенной системе (4) могут реализоваться оба типа неустойчивости, Хопфа и Тьюринга. Условие неустойчивости Тьюринга, то есть условие потери устойчивости пространственно-однородного состояния равновесия (2) относительно неоднородных возмущений, имеет вид [4–9]

$$B > B_T = (1 + A\sigma^{1/2})^2. \quad (5)$$

На рис. 2 приведены результаты численного решения системы уравнений в частных производных конечно-разностным методом для участка среды конечной длины; граничные условия заданы таким образом, что на краях концентрации  $U$  и  $V$  поддерживаются равновесными. Неустойчивость Хопфа проявляется в возникновении колебаний во времени, при этом пространственное распределение близко к однородному, за исключением краевых областей системы. Неустойчивость Тьюринга, напротив, характеризуется развитием структуры с пространственными осцилляциями и очень медленным изменением амплитуды во времени.

Модифицируем теперь рассматриваемую модель и будем считать, что реагенты непрерывно поступают в протяженное пространство взаимодействия на левом крае, как показано на рис. 3 [9]. Смесь, в которой происходит реакция, движется с постоянной скоростью и удаляется на правом крае реактора. Такая схема представляется весьма реалистичной и интересной с точки зрения практического использования и экспериментальных исследований. Уравнения, описывающие пространственно-временную динамику концентраций реагентов  $U$  и

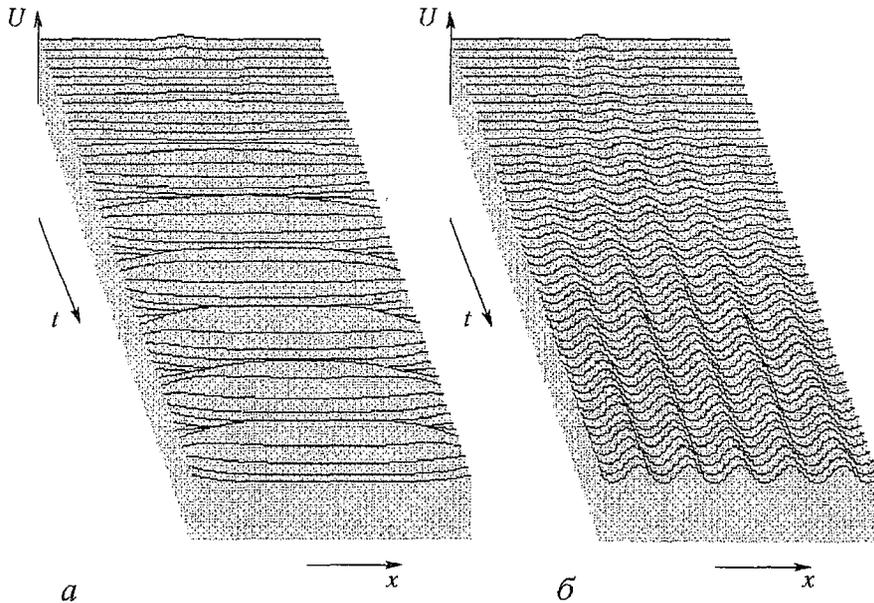


Рис. 2. Пространственно-временная эволюция возмущений в распределенной системе реакция — диффузия, описываемой системой уравнений в частных производных (4). Отношение коэффициентов диффузии  $\sigma = 0.25$ : а —  $A = 1.0, B = 2.343$ ; б —  $A = 1.0, B = 3.213$

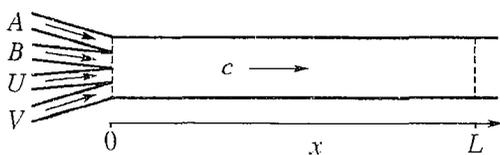


Рис. 3. Исследуемая система типа реакция – диффузия с потоком. Реагенты  $A$  (в избытке),  $B$  (в избытке),  $U$  (активатор),  $V$  (ингибитор) поступают на левом крае реактора, а их смесь движется равномерно вдоль пространства взаимодействия и удаляется на его правом крае

$V$ , получаются из (4) добавлением членов, ответственных за перенос [9],

$$U_t + cU_x = A + U^2V - BU - U + \sigma U_{xx}, \quad V_t + cV_x = -U^2V + BU + V_{xx}, \quad (6)$$

где  $c$  – безразмерная скорость движения потока. Как мы увидим, пространственно–временная динамика и процессы образования структур в такой системе определяются тем, какой характер носит неустойчивость Хопфа и Тьюринга – абсолютный или конвективный.

Как известно, неустойчивость называется абсолютной, если в распределенной системе первоначально локализованное малое возмущение развивается таким образом, что неподвижный наблюдатель регистрирует неограниченное нарастание амплитуды в (произвольной) точке наблюдения (рис. 4, а). Неустойчивость называется конвективной, если нарастающее возмущение достаточно быстро сносится, и при наблюдении в фиксированной точке амплитуда в конце концов обращается в нуль (рис. 4, б). Анализ волновых систем на характер неустойчивости хорошо разработан и широко используется в гидродинамике, физике плазмы, электронике [11–15], однако мало применяется, хотя и известен, в контексте систем типа реакция – диффузия (см. обзор [16]).

В ситуации, которая нас интересует, граничное условие на левом крае реактора предполагает поступление компонентов  $U$  и  $V$  с постоянной скоростью

$$U|_x = U_0, \quad V|_x = V_0, \quad (7)$$

где величины  $U_0$  и  $V_0$  задают входные концентрации реагентов. Если не оговорено специально, они будут, как правило, считаться совпадающими с равновесными концентрациями, то есть  $U_0=A$ ,  $V_0=B/A$ .

Предположим сначала, что система безгранична в пространстве, и зададимся вопросом: как будет зависеть от параметров задачи  $A$ ,  $B$ ,  $c$ ,  $\sigma$  характер эволюции локализованного малого возмущения стационарного пространственно однородного состояния? Подставим в уравнения  $U=A+u(x,t)$ ,  $V=B/A+v(x,t)$  и, полагая  $|u|, |v| \ll 1$ , в линейном приближении получим

$$u_t + cu_x = (B-1)u + A^2v + \sigma u_{xx}, \quad v_t + cv_x = -Bu - A^2v + v_{xx}. \quad (8)$$

Пусть начальное возмущение имеет вид

$$u(x,0) = f(x), \quad v(x,0) = g(x), \quad (9)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  предполагаются достаточно быстро убывающими при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

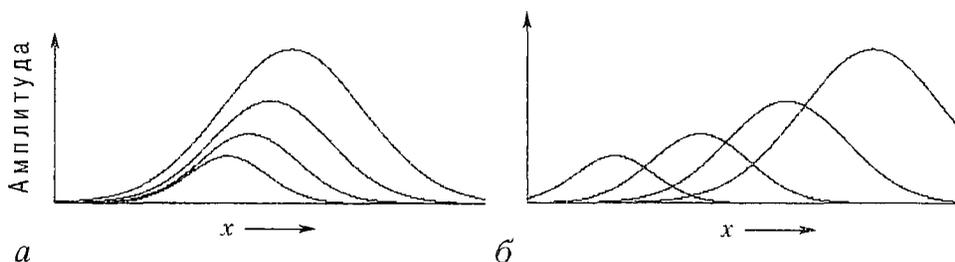


Рис. 4. Развитие локализованного возмущения пространственно однородного состояния в одномерной распределенной системе в случае абсолютной (а) и конвективной (б) неустойчивости

Следуя стандартному подходу, выполним в уравнениях (8) преобразование Лапласа по обеим независимым переменным  $x$  и  $t$ . По  $t$  используем обычное, по  $x$  – двустороннее преобразование Лапласа. Прямое и обратное преобразование имеет вид, соответственно,

$$U_{sq} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-qx} dx \quad \text{и} \quad u(x,t) = -1/(4\pi^2) \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{st} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} U_{sq} e^{qx} dq, \quad (10)$$

где  $s$  и  $q$  – комплексные переменные. Во втором соотношении контур интегрирования в  $q$ -плоскости проходит по мнимой оси. В  $s$ -плоскости контур проходит параллельно мнимой оси так, чтобы все особые точки подынтегрального выражения располагались левее него. В результате преобразования уравнения принимают вид

$$(s+cq-B+1-\sigma q^2)U_{sq}-A^2V_{sq}=F(q), \quad BU_{sq}+(s+cq+A^2-q^2)V_{sq}=G(q), \quad (11)$$

где  $F$  и  $G$  – лапласовские образы функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Для выяснения факта неустойчивости и ее характера достаточно рассмотреть динамику какого-либо одного компонента, например  $U$ . Разрешая уравнения (11) относительно  $U_{sq}$  и  $V_{sq}$  и производя обратное преобразование, получаем формальное решение в следующем виде:

$$u(x,t) = -1/(4\pi^2) \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{st} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} [(s+cq+A^2-q^2)F(q)+A^2G(q)]/D(s,q) e^{qx} dq, \quad (12)$$

где

$$D(s,q) = (s+cq-B+1-\sigma q^2)(s+cq+A^2-q^2) + A^2B. \quad (13)$$

При взятии внешнего интеграла переменная  $q$  пробегает по мнимой оси. Интеграл будет содержать нарастающие во времени составляющие в том случае, если существуют такие чисто мнимые  $q$ , для которых дисперсионное уравнение

$$(s+cq-B+1-\sigma q^2)(s+cq+A^2-q^2) + A^2B = 0 \quad (14)$$

имеет корень  $s$  с положительной действительной частью. Это и есть условие неустойчивости. Из квадратного уравнения (14) находим корни

$$s_{1,2} = -cq - 1/2\{1-B+A^2-\sigma q^2-q^2 \pm [(1-B-A^2-\sigma q^2+q^2)^2-4A^2B]^{1/2}\}. \quad (15)$$

Подставляя  $q=ik$ , можно видеть, что независимо от скорости потока  $c$  неустойчивость в области волновых чисел вблизи  $k=0$  появляется при  $B>B_H=1+A^2$  и вблизи  $k=\pm A^{1/2}\sigma^{-1/4}$  при  $B>B_T=(1+A\sigma^{1/2})^2$ , что совпадает с приведенными выше соотношениями (3) и (5).

Первый тип неустойчивости ассоциируется с бифуркацией Хопфа в уравнениях, описывающих динамику пространственно однородного решения. Как видно из (15), он проявляется в возникновении колебаний на частоте  $\Omega=\text{Im}s=A$ . Второй тип соответствует неустойчивости Тьюринга, которая в отсутствие потока ( $c=0$ ) возникает на нулевой частоте. При  $c\neq 0$  частота в момент возникновения неустойчивости отличается от 0 и равна  $\Omega=\text{Im}s=kc$ . Это можно трактовать как доплеровский сдвиг: структура Тьюринга, имеющая волновое число  $k$ , перемещается относительно наблюдателя со скоростью  $c$ , что и дает частоту  $\Omega=kc$ .

Чтобы ответить на вопрос, является ли неустойчивость Хопфа и Тьюринга абсолютной или конвективной, необходимо аккуратно оценить асимптотику поведения решения  $u(x,t)$  при  $t\rightarrow\infty$  и  $x=\text{const}$ .

Следуя Берсу и Бриггсу [14], внешний интеграл по  $s$  можно вычислить, смещая контур интегрирования влево насколько это возможно, так чтобы он не пересек особых точек подынтегральной функции в  $s$ -плоскости. В ситуации, когда система устойчива,  $s$ -контур удастся полностью переместить в левую полуплоскость и получить оценку  $|u(x,t)|<\text{const}\cdot e^{-\beta_0 t}$ , где  $\beta_0$  определяется

действительной частью сингулярности, ближайшей к действительной оси в  $s$ -плоскости.

При наличии неустойчивости такой трюк также может быть успешным, если функция под знаком внешнего интеграла допускает аналитическое продолжение в  $s$ -плоскости вплоть до мнимой оси и дальше. Процедуре аналитического продолжения соответствует такая деформация  $q$ -контура во внутреннем интеграле, чтобы сохранялись неизменными правила обхода полюсов – нулей знаменателя  $D(s, q)$ . Если при соблюдении этих условий удастся сместить  $s$ -контур в область  $s < 0$ , то при наблюдении в фиксированной точке пространства будет опять-таки наблюдаться затухание возмущения во времени. Следовательно, неустойчивость может быть только конвективной. На рис. 5, а показана характерная для этого случая конфигурация контуров интегрирования в  $q$ - и  $s$ -плоскости. Пунктирные линии на левой диаграмме изображают траектории полюсов подынтегрального выражения в  $q$ -плоскости, когда величина  $s$  пробегает по контуру интегрирования в  $s$ -плоскости.

Может случиться, однако, что по мере смещения  $s$ -контура влево  $q$ -контур окажется зажатым между двумя сингулярностями, которые приходят с противоположных сторон и в некоторый момент сливаются друг с другом (рис. 5, б). Этому отвечает наличие точки ветвления функции  $q(s)$  или, что то же самое, кратного корня дисперсионного уравнения относительно  $q$ . Алгебраические условия такой ситуации имеют вид

$$\begin{cases} D(s, q) = 0, \\ s'(q) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Если даваемый этой системой уравнений корень – точка ветвления  $s = s_b = s(q_b)$  – лежит в правой полуплоскости, то, по критерию Берса и Бриггса, это

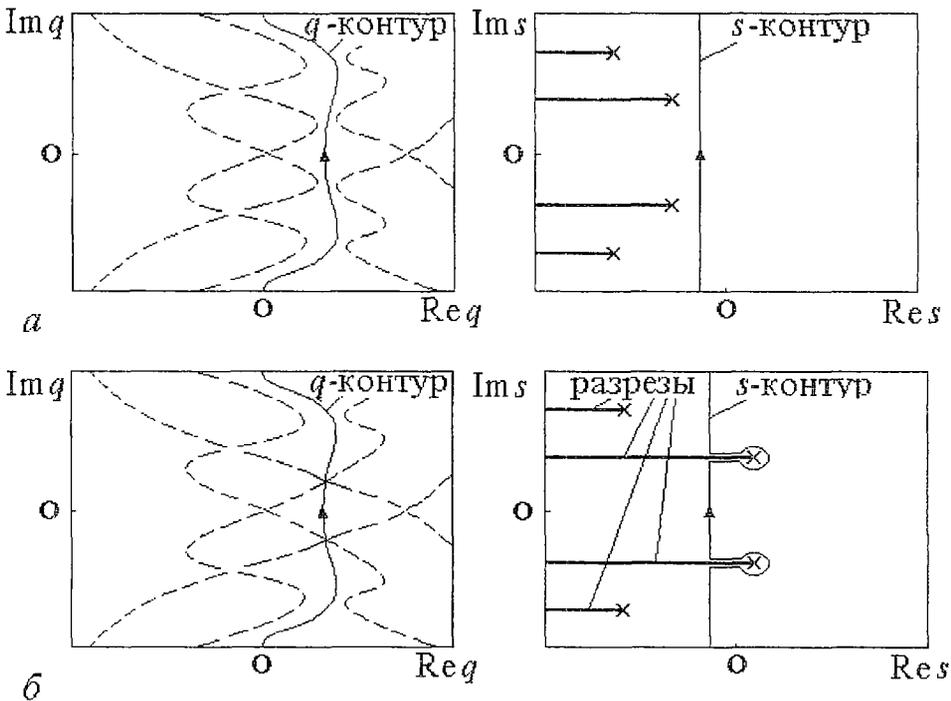


Рис. 5. Конфигурация контуров в комплексной плоскости  $q$  и  $s$  в случае отсутствия (а) и при наличии (б) абсолютной неустойчивости. Пунктирные линии в  $q$ -плоскости изображают траектории полюсов подынтегрального выражения  $q(s)$ , когда переменная  $s$  пробегает по соответствующему контуру интегрирования в  $s$ -плоскости. Точки ветвления показаны крестиками, а разрезы – жирными линиями

означает наличие абсолютной неустойчивости. В этом случае, смещая  $s$ -контур влево, приходится сохранить прежнее правило обхода точки ветвления  $s_b$ , как показано на правой диаграмме рис. 5,  $\bar{b}$ , и часть контура, проходящая в  $s$ -плоскости вдоль берегов разреза, дает нарастающий во времени вклад в интеграл

$$u(x,t) \cong t^{-1/2} \exp(s_b t + q_b x). \quad (17)$$

Следует подчеркнуть, что за появление абсолютной неустойчивости могут отвечать не все точки ветвления, находимые из (16), а только те, которые соответствуют слиянию корней дисперсионного уравнения, приходящих при уменьшении  $\text{Re } s$  с противоположных сторон от контура интегрирования в  $q$ -плоскости.

Зафиксируем  $\sigma$  и  $A$  и будем исследовать зависимость характера неустойчивости от двух оставшихся параметров,  $B$  и  $c$ . Следуя идее [15], мы сначала находим линии на плоскости параметров, подозреваемые в качестве границ изменения характера неустойчивости. После этого достаточно выяснить характер неустойчивости в одной представительной точке каждой из областей разбиения. Границами возникновения абсолютной неустойчивости могут служить такие линии на плоскости  $(B, c)$ , которым отвечает переход точки  $s_b$  из правой в левую полуплоскость, то есть такие ситуации, когда

$$\text{Re } s(q_b) = 0. \quad (18)$$

При  $c=0$  система уравнений (16) легко решается аналитически, что позволяет найти точки ветвления, ответственные за неустойчивость Хопфа и Тьюринга

$$q_H = 0, \quad s_H = -1 + B - A^2 \pm i[4A^2 - (1 - B + A^2)^2]^{1/2} \quad (19)$$

и

$$q_T = \pm i[1 - B - A^2 + A(1 + 1/\sigma)(\sigma B)^{1/2}]/(1 - \sigma), \quad s_T = [-1 + B + \sigma A^2 - 2A(\sigma B)^{1/2}]/(1 - \sigma). \quad (20)$$

На плоскости параметров  $(c, B)$  точки  $(0, B_H)$  и  $(0, B_T)$  дают начало линиям Н и Т, которым отвечает наличие точки ветвления с нулевым инкрементом  $\text{Re } s_b$ . На рис. 6 показаны эти линии, найденные из численного решения системы уравнений (16) и (18) для  $\sigma=0.25$  и нескольких значений параметра  $A$ . Буква К обозначает

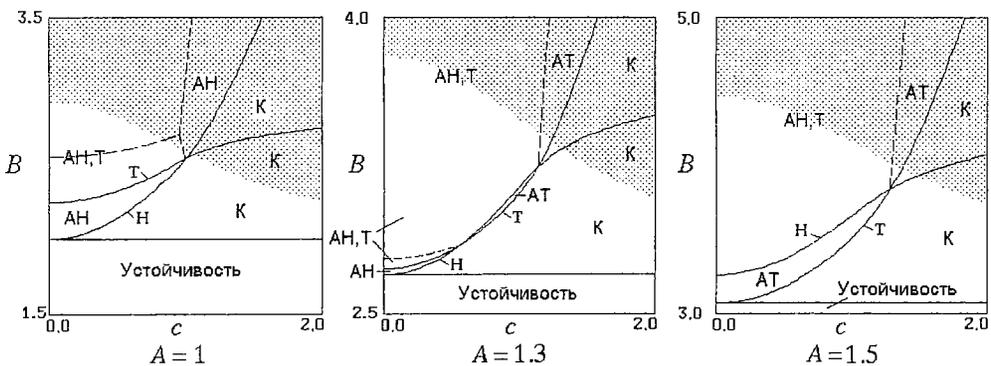


Рис. 6. Области на плоскости параметров, отвечающие различному характеру поведения малых возмущений пространственно однородного стационарного состояния системы (6) при  $\sigma=0.25$  и различных значениях  $A$ . Линии Н и Т отвечают переходу точки ветвления, ассоциирующей с неустойчивостью Хопфа или Тьюринга, через мнимую ось в  $s$ -плоскости. Буквой К обозначены области конвективной неустойчивости, буквами АН и АТ – области, где абсолютной является неустойчивость, соответственно, Хопфа и Тьюринга. Пунктирная линия отвечает равенству инкрементов в точках ветвления Хопфа и Тьюринга. Штриховкой отмечена область конвективной неустойчивости на нулевой частоте, граница которой определяется условием (24)

конвективную неустойчивость, буквы АН и АТ – абсолютную неустойчивость, соответственно, Хопфа и Тьюринга. Пунктиром показаны линии, на которых неустойчивости Хопфа и Тьюринга характеризуются одинаковым по величине инкрементом  $Re\lambda_b$ . Следует отметить, что в зависимости от параметра  $A$  могут реализоваться несколько качественно различных ситуаций взаимного расположения пограничных линий. В одних случаях при увеличении параметра  $B$  раньше возникает неустойчивость Хопфа, в других – Тьюринга, при этом порядок появления обеих неустойчивостей может меняться в зависимости от скорости потока.

Интересно теперь вернуться к полной системе нелинейных уравнений в частных производных (6), описывающих пространственно–временную динамику системы броселятор с потоком, и посмотреть, как коррелируют наблюдаемые феномены формирования и эволюции структур с результатами линейного анализа на абсолютную и конвективную неустойчивость.

Для численного решения уравнений (6) использовался неявный разностный метод второго порядка точности по временному шагу  $\Delta t$  и пространственному шагу  $\Delta x$ . Типичная величина шага порядка 0.1. Граничные условия на левом конце системы имели вид (7), причем в качестве  $U_0$  и  $V_0$  задавались равновесные концентрации  $A$  и  $B/A$ . При достаточно большой длине системы  $L$  и наличии потока с конечной скоростью  $c > 0$  конкретный выбор условия на правом крае  $x=L$  оказывается несущественным. В качестве начальных условий задавались равновесные значения концентраций  $U$  и  $V$  с малыми возмущениями

$$U(m\Delta x, 0) = A + \xi_m, \quad V(m\Delta x, 0) = B/A + \eta_m, \quad (21)$$

где  $\xi_m$  и  $\eta_m$  – случайные величины с нулевым средним и дисперсией порядка 0.1. На рис. 7 показаны примеры пространственно–временной динамики, наблюдаемые в различных областях пространства параметров, выявленных при анализе характера неустойчивости.

Рис. 8 показывает, как проявляется в наблюдаемом поведении системы смена характера неустойчивости с конвективного на абсолютный. В области параметров, где неустойчивость присутствует, но не является абсолютной, нарастающие по амплитуде возмущения сносятся вниз по потоку, так что через некоторое время система оказывается в равновесном пространственно однородном состоянии. Процесс выглядит как перемещение слева направо с некоторой скоростью фронта, разделяющего пространственные области наличия и отсутствия колебаний концентрации. При уменьшении скорости потока распространение фронта замедляется. Нулевая скорость фронта соответствует порогу абсолютной неустойчивости. При переходе через эту границу скорость распространения фронта меняет знак. Если теперь в начальном состоянии возмущения концентрации присутствовали вблизи правого края системы, то фронт перемещается справа налево, так что в конце концов вся система вовлекается в колебательно–волновой процесс. В зависимости от параметров системы, возникающая абсолютная неустойчивость может иметь тип Хопфа или Тьюринга, которые визуалью легко различимы (сравни рис.(а) и (б)).

Отметим своеобразный характер смены режима при переходе через границу возникновения абсолютной неустойчивости в распределенной системе. Если длина системы велика, то переход от равновесного состояния к колебательному при изменении параметра сопровождается возникновением сразу конечной амплитуды колебаний. Однако переход обратим и не сопровождается гистерезисом: при обратном медленном движении по параметру колебания исчезают скачком, поскольку «бифуркация» состоит в изменении направления распространения фронта, разделяющего возмущенные и невозмущенные области среды. Основной же объем среды либо вовлечен, либо не вовлечен в колебательный процесс в зависимости от направления распространения фронта. На рис. 9 сравнивается характер зависимости амплитуды колебаний от параметра при обычной мягкой или

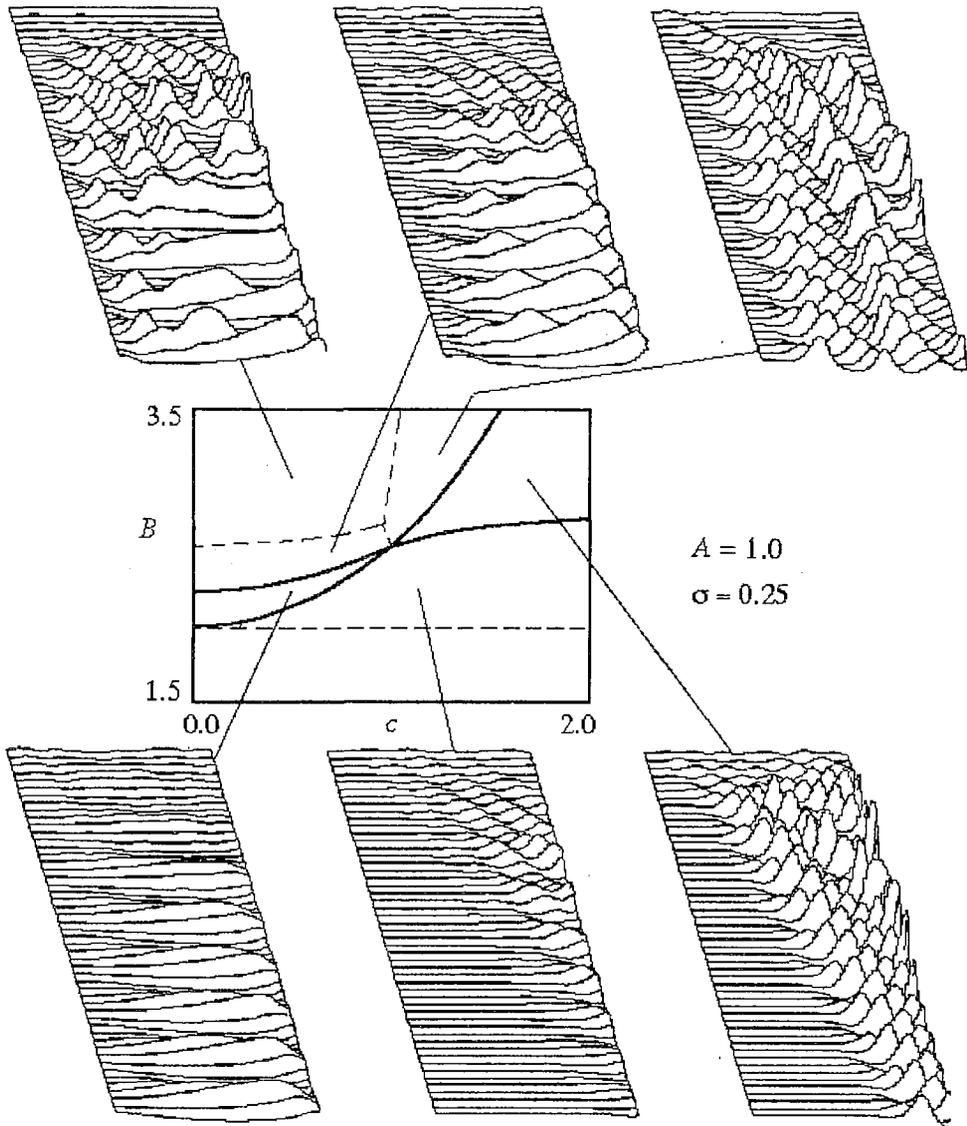


Рис. 7. Результаты численного моделирования динамики бресселятора с потоком в случае равновесных концентраций активатора и ингибитора на входе в реактор;  $\sigma=0.25$ ,  $A=1$ . Пространственно-временные диаграммы показывают динамику концентрации реагента  $U$  в различных точках на плоскости параметров  $(c, B)$ . В качестве начальных условий задавалось стационарное пространственно однородное состояние с малыми случайными возмущениями. Длина системы  $L=20$

жесткой бифуркации и при обсуждаемом здесь переходе в распределенной системе.

Обратимся теперь к ситуации, когда в системе с граничным условием (7) поступающие на вход концентрации  $U_0$  и  $V_0$  постоянны во времени, но отличаются от равновесных значений. В этом случае может возникнуть (если оно окажется устойчивым) стационарное распределение концентраций, описываемое уравнениями (6) с исключенными временными производными

$$-\sigma d^2U/dx^2 + cdU/dx = A + U^2V - BU - U, \quad -d^2V/dx^2 + cdV/dx = -U^2V + BU. \quad (22)$$

В линейном приближении мы можем проанализировать поведение решения, рассматривая дисперсионное уравнение (13) при  $s=0$

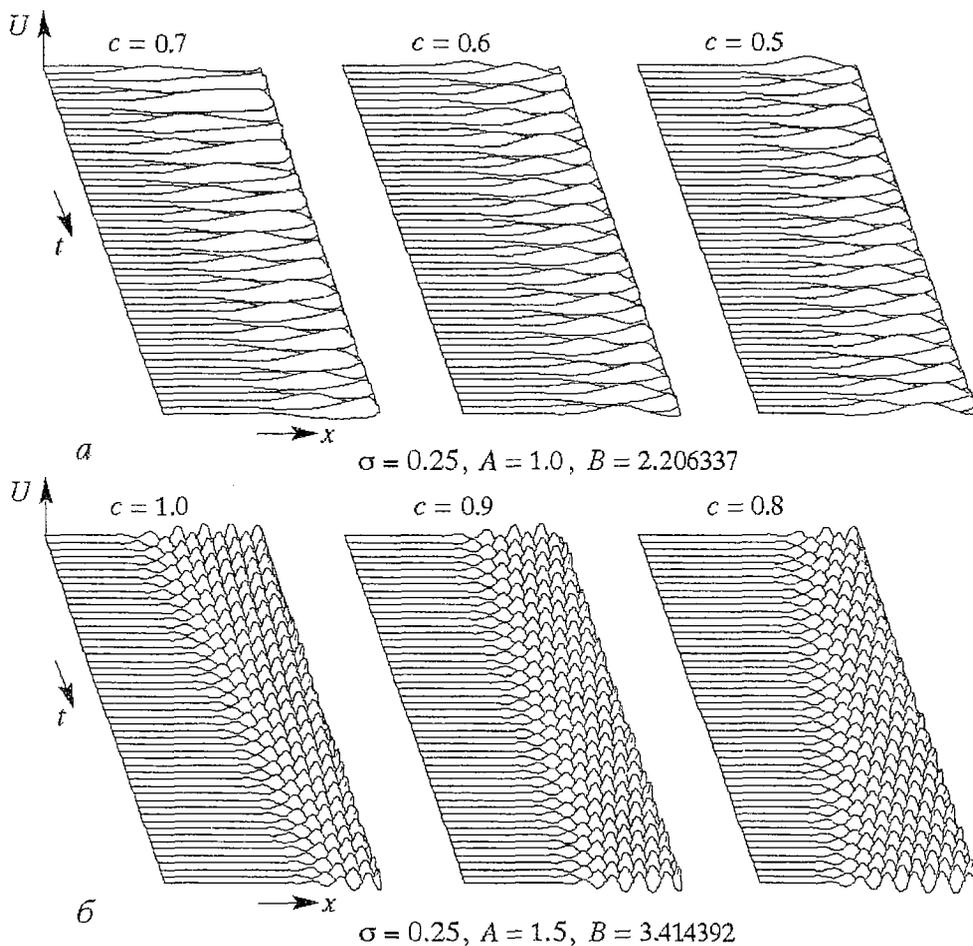


Рис. 8. Иллюстрация изменения характера динамики структур в зависимости от скорости потока вблизи порога возникновения абсолютной неустойчивости Хопфа (а) и Тьюринга (б). Пространственно-временные диаграммы иллюстрируют динамику концентрации  $U$ . При скорости больше критической неустойчивость абсолютная, фронт раздела между активной и невозбужденной областями среды смещается с течением времени вниз по потоку. При скорости меньше критической неустойчивость абсолютная, фронт раздела распространяется налево, против потока

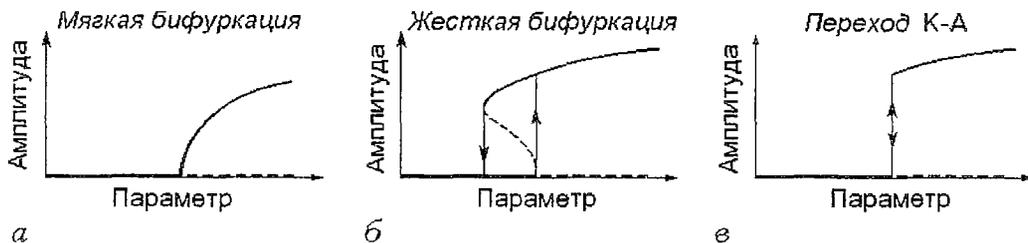


Рис. 9. Сравнение зависимости амплитуды от параметра при мягкой (а) и жесткой (б) бифуркациях в маломерных системах, и при возникновении абсолютной неустойчивости в распределенной системе в ситуации, ассоциирующейся с изменением направления распространения фронта (в)

$$(cq - B + 1 - \sigma q^2)(cq + A^2 - q^2) + A^2B = 0. \quad (23)$$

При  $c=0$  имеем квадратное уравнение относительно  $k$ , и легко находим все корни, два из которых имеют отрицательную и два положительную мнимую часть.

В безграничной системе с локальным стационарным возмущением первые два корня будут описывать затухающее в пространстве решение при  $x > 0$ , а два других – тоже затухающее, но при  $x < 0$ .

Будем теперь увеличивать скорость потока  $c$ . Тогда может случиться, что один из корней, ответственных за область  $x > 0$ , пересечет мнимую ось и перейдет в правую полуплоскость. Это будет отвечать возникновению пространственного усиления возмущений (конвективной неустойчивости) на нулевой частоте. Чтобы найти соответствующее условие критичности, подставим  $q = ik$ , где  $k$  действительное, и отделим в уравнении (13) действительную и мнимую часть. Из второго уравнения находим  $k$  и подставляем в первое, что дает искомое условие

$$c^2 = (1 - B + \sigma A^2)/(1 + \sigma) + A^2(1 + \sigma)/(B - 1 - A^2). \quad (24)$$

Это соотношение определяет линию на плоскости параметров  $(c, B)$ , выше которой пространственная волна концентрации становится незатухающей. На рис. 6 соответствующие этому области обозначены штриховкой.

На рис. 10 приводятся результаты численного моделирования динамики нелинейной системы при неравновесных значениях входных концентраций  $U$  и  $V$ . Ниже границы, даваемой условием (24), динамика остается в общем такой же, как при равновесных входных концентрациях; разница состоит только в том, что у левого края реактора распределение концентраций приобретает стационарный во времени и затухающий в пространстве осциллирующий хвост. При приближении к границе (24) хвост становится все более и более протяженным (декремент пространственного затухания уменьшается), и в конце концов его влияние распространяется на все пространство взаимодействия. Если значения параметров

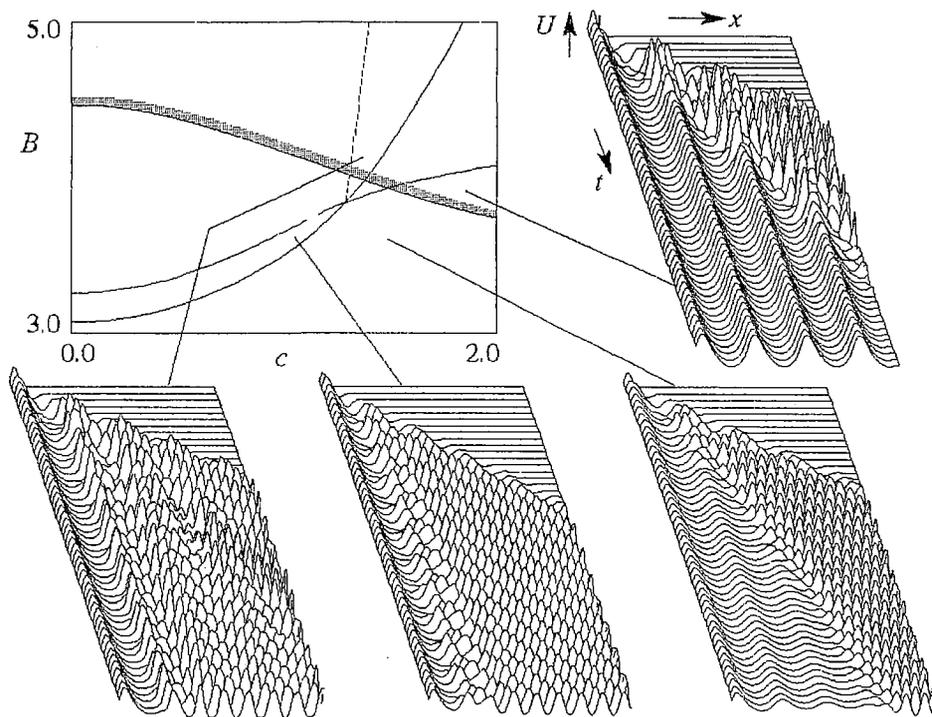


Рис. 10. Динамика брюсселятора с потоком при неравновесной входной концентрации активатора:  $U|_{x=0} = A + 0.4$ . Для  $\sigma = 0.25$ ,  $A = 1.5$  на плоскости параметров  $(c, B)$  воспроизведены линии смены характера неустойчивости (см. рис. 6, в) и граница области конвективной неустойчивости на нулевой частоте (24) (отмечена штриховкой). Пространственно-временные диаграммы иллюстрируют динамику концентрации активатора в нескольких точках на плоскости параметров  $(c, B)$ . Начальные условия нулевые. Длина системы  $L = 40$

системы находятся за пределами области абсолютной неустойчивости, то наблюдается формирование стоячей пространственно–периодической структуры. Развитие неустойчивости, если она имеет место при данных значениях параметров, происходит теперь на фоне этой стоячей структуры. По–видимому, наличие стоячей структуры влияет на расположение границ областей неустойчивости, но это влияние трудно зафиксировать в численных экспериментах.

В системе отсчета, движущейся с потоком, феномен можно интерпретировать как «эффект Черенкова»: условием излучения волны от движущейся неоднородности является равенство фазовой скорости волны и скорости источника. Заметим, что только неустойчивость типа Хопфа приводит к такому эффекту. Действительно, стационарное в лабораторной системе отсчета волнообразное пространственное распределение концентраций будет восприниматься движущимся с потоком наблюдателем как колебания во времени на некоторой частоте. Для неустойчивости Тьюринга эта частота должна была бы равняться нулю.

Как отмечалось выше, на границе возникновения абсолютной неустойчивости в распределенной системе с потоком имеет место своеобразный переход, сочетающий свойства мягких и жестких бифуркаций (см. рис. 9). Имея такой специфический тип бифуркации, интересно задаться вопросом, как вблизи точки перехода от конвективной к абсолютной неустойчивости система будет реагировать на воздействие внешнего шума?\*

Возьмем для примера набор параметров:  $A=1.5$ ,  $B=3.414392$ ,  $\sigma=0.25$ , которому отвечает критическое значение скорости потока  $c=0.9$ , когда неустойчивость Тьюринга превращается из конвективной в абсолютную. При  $c<0.9$  фронт, разделяющий области наличия и отсутствия колебаний в потоке, движется влево, а при  $c>0.9$  – направо. При критической скорости  $c=0.9$  имеет место своего рода нейтральная устойчивость: фронт может пребывать в середине пространства взаимнействия в течение долгого времени, оставаясь практически неподвижным. В активной области среды, справа от фронта, имеют место колебания с периодом  $T\approx 4.2$ , что отвечает проходу последовательных горбов структуры Тьюринга через точку наблюдения. Чтобы аккуратно отслеживать динамику фронта, можно использовать следующую процедуру. Выполняя численное интегрирование уравнений за каждый полный временной период  $T$ , определяем максимальную величину  $U(x,t)$  для каждой пространственной точки и получаем огибающую

$$W_k(x) = \max U(x,t), \quad t \in [kT, (k+1)T]. \quad (25)$$

Теперь можно следить за положением фронта в зависимости от дискретного времени  $k$ . Его координата  $x_k$  определяется из условия  $W_k(x_k)=W_0$ , где  $W_0$  – фиксированное число между нулем и максимальной амплитудой.

Введем шумовое воздействие на входе в реактор. В контексте нашего рассмотрения его конкретная природа не очень существенна. Простейший способ состоит в том, чтобы давать на каждом шаге интегрирования случайные некоррелированные добавки к входной величине  $U$  в интервале от  $-\varepsilon/2$  до  $\varepsilon/2$ , где  $\varepsilon$  – интенсивность шума. Рис. 11 демонстрирует пространственно–временную динамику огибающей для разных значений скорости потока в присутствии шума. Тона серого цвета обозначают уровень функции  $W$ , причем активная часть среды отвечает более светлым тонам. Как и следовало ожидать, для конечного уровня шума  $\varepsilon$  в удаленной от входа части потока развиваются колебания; это имеет место для скоростей как меньших, так и больших критической.

\* Вопрос о влиянии шума на динамические системы вблизи бифуркаций имеет длинную историю. В первую очередь нужно отметить классическую работу Андронова, Витта и Понтрягина [17], опубликованную в 1933 году. К настоящему времени этот предмет превратился в обширную научную дисциплину [18], хотя о воздействии шума на распределенные системы известно сравнительно немного, см. недавний обзор Кросса и Хохенберга [16].

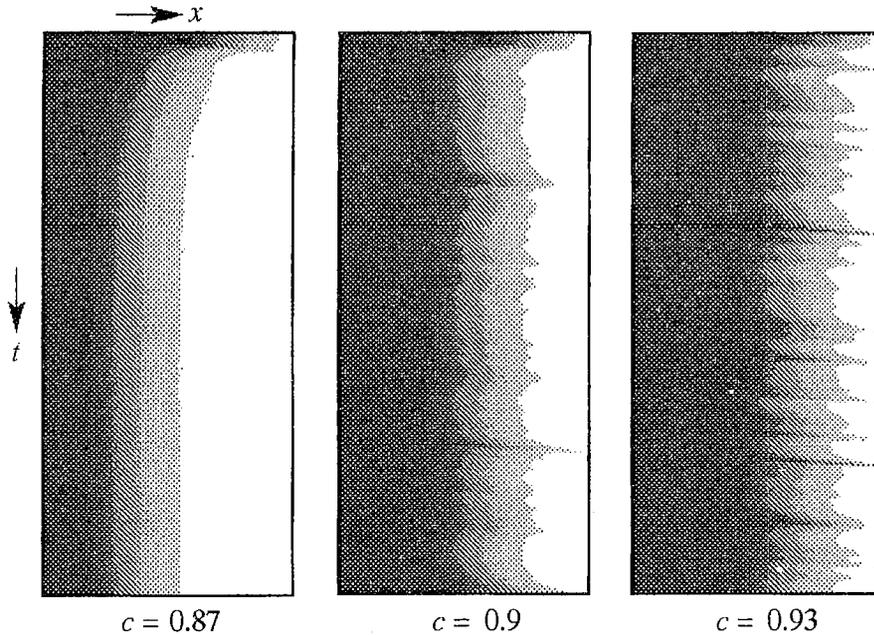


Рис. 11. Пространственно–временные диаграммы, иллюстрирующие динамику фронта в модели бресселятора с потоком при наличии входного шума. Тона серого цвета отвечают различным значениям огибающей, определенной соотношением (25), причем светлая область отвечает активному участку среды. Значения параметров:  $A=1.5$ ,  $B=3.414392$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $L=40$ . Критическое значение скорости потока, отвечающее переходу к абсолютной неустойчивости в отсутствие шума,  $c=0.9$

На этом этапе рассмотрения, однако, еще не ясна природа колебаний в области конвективной неустойчивости – связаны ли они просто с усилением шума или должны рассматриваться как результат некоторого индуцированного шумом перехода. Чтобы прояснить вопрос, был проведен специальный численный эксперимент. Предположим сначала, что скорость потока точно соответствует порогу абсолютной неустойчивости, и фронт располагается где-то в середине реактора. Проинтегрировав численно уравнения за один полный временной период колебаний, мы можем определить новое положение фронта и его смещение  $\Delta x_k$ . Далее, сдвинем все распределение концентраций  $U$ ,  $V$  на расстояние  $\Delta x_k$  так, чтобы восстановить исходное положение фронта. Повторяя эту процедуру для последовательных временных периодов, определим «виртуальную координату фронта» как накопленный к моменту  $n$  суммарный сдвиг  $X_n = \sum_{k=1}^n \Delta x_k$ . В рамках такой искусственной процедуры обеспечено, что действующие на фронт флуктуации отвечают стационарному случайному процессу.

Как будет эволюционировать во времени координата  $X$ , если скорость потока точно равна критической? Можно было бы ожидать, что в силу нейтрального характера устойчивости положения фронта будет наблюдаться случайное блуждание без предпочтительного направления. Оказывается, однако, что это не так. Численные расчеты указывают на присутствие направленного движения фронта к источнику шума, то есть вверх по потоку. На рис. 12 показана зависимость виртуальной координаты фронта от времени для разных уровней шума. Более тщательное рассмотрение показывает, что скорость вызванного шумом смещения фронта пропорциональна  $\epsilon^{1/2}$ .

Если скорость потока немного больше критической, то неустойчивость в системе без шума конвективная, фронт движется вправо и в конце концов покинул бы пространство взаимодействия. Описанный выше численный эксперимент

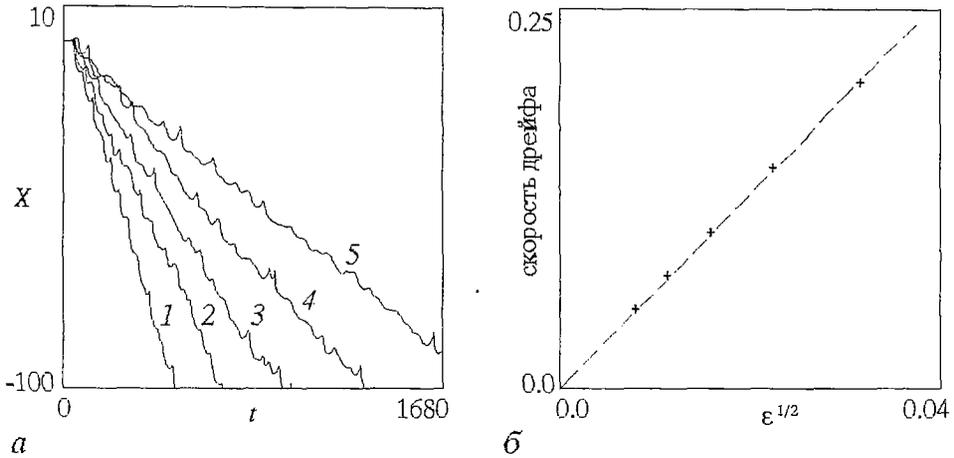


Рис. 12. Индуцированный шумом дрейф фронта на пороге возникновения абсолютной неустойчивости в условиях специального численного эксперимента, описанного в тексте (а), и демонстрация линейной зависимости скорости дрейфа от  $\epsilon^{1/2}$  (б)

показывает, что ситуацию распространения фронта влево, против потока, можно восстановить, если ввести на входе шум достаточной амплитуды. В этом случае реализуется пространственно-временная структура, характерная для ситуации с абсолютной неустойчивостью, так что эффект можно трактовать как индуцированную шумом абсолютную неустойчивость [19].

Обсудим более детально качественную картину явления. Прежде всего, отметим, что из-за присутствия неустойчивости малые флуктуации на фоне равновесного состояния усиливаются вниз по потоку. Поэтому действие шума на динамику фронта будет возрастать с увеличением расстояния от источника до фронта, и такая зависимость действительно наблюдается. Далее, на рис. 13 показана частотная зависимость коэффициента усиления малых возмущений в потоке, найденная из линейной теории при  $c=0.93$  для расстояния от источника шума до точки наблюдения  $L=10$ . Можно видеть, что у порога абсолютной неустойчивости усиление в потоке весьма селективно: имеется высокий пик на частоте  $\Omega_0$  (той самой, где собирается возникнуть абсолютная неустойчивость). Отсюда следует, что вдали от входа системы шум, воздействующий на фронт, имеет узкий спектр, а его корреляционная функция характеризуется наличием медленно затухающего осциллирующего хвоста.

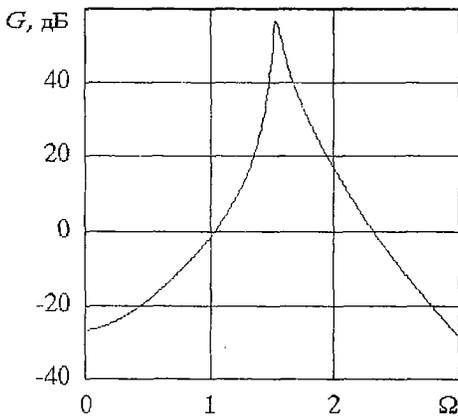


Рис. 13. Коэффициент усиления  $G=20\lg(u_{вх}/u_{вн,0})$  в зависимости от частоты внешнего сигнала в линейной системе (8) вблизи порога возникновения абсолютной неустойчивости,  $c=0.93$ , остальные параметры те же, что на рис. 11. Резкий пик на графике отвечает частоте  $\Omega_0$ , на которой должна возникнуть абсолютная неустойчивость

Прежде чем обсуждать воздействие на фронт узкополосного шумового сигнала, предположим сначала, что на вход подано регулярное возмущение в виде волнового пакета с центральной частотой  $\Omega_0$ . Когда передний край пакета достигнет фронта, последний может претерпеть сдвиг вперед или назад в зависимости от фазового соотношения между волновым пакетом и собственными колебаниями среды в активной области. Далее, по мере наползания пакета, обе фазы будут подстраиваться

благодаря эффекту синхронизации и тому обстоятельству, что прибывающие возмущения служат затравкой для раскачивающихся вниз по потоку колебаний в области за фронтом. После завершения подстройки фаз воздействие волнового пакета будет способствовать смещению фронта навстречу потоку, так что для пакета достаточно большой временной протяженности итогом воздействия будет сдвиг фронта именно в этом направлении.

Вернемся теперь к ситуации с шумом. При расположении фронта достаточно далеко от края приходящие к нему флуктуации будут узкополосными вследствие селективного усиления в потоке. Их можно, следовательно, рассматривать как случайную суперпозицию волновых пакетов с узким спектром, то есть протяженных во временной области. Из предыдущего рассуждения следует, что результатом такого воздействия на фронт будет дрейф в направлении источника шума. По мере приближения к источнику интенсивность воздействующих на фронт флуктуаций будет уменьшаться также как и их время корреляции. Следовательно, средняя скорость направленного дрейфа будет уменьшаться тоже. В конце концов фронт стабилизируется, и его положение будет претерпевать лишь случайные флуктуации, как это и наблюдается на рис.11.

Следует отметить, что подобный описанному феномен индуцированного шумом перехода может встречаться и в других распределенных системах. В этой связи можно указать недавнюю работу П.С.Ланда, предложившей рассматривать возникновение гидродинамической турбулентности в системах с потоком как индуцированный шумом переход [20,21]. Представленный здесь анализ показывает, что для присутствия такого перехода существенным может быть пребывание системы вблизи порога возникновения абсолютной неустойчивости.

В заключение хочется еще раз подчеркнуть продуктивность использования теоретических методов, развитых в радиофизике и электронике, для анализа систем совершенно иной физической природы. Для модельной одномерной системы типа реакция – диффузия было показано, что присутствие потока – направленного переноса смеси реагентов – приводит к возникновению целого ряда интересных явлений. Неустойчивости типа Хопфа и Тьюринга в такой системе могут носить абсолютный или конвективный характер в зависимости от параметров задачи. В динамике нелинейной распределенной системы переход к абсолютной неустойчивости проявляется в смене направления движения фронта, разделяющего в пространстве области наличия и отсутствия колебательно-волновых возбуждений. Переход, наблюдаемый на границе абсолютной неустойчивости, обладает свойствами, не характерными для бифуркаций конечномерных систем: он жесткий (сопровождается скачком), но обратимый (не сопровождается гистерезисом). Воздействие шума на систему вблизи точки возникновения абсолютной неустойчивости приводит к очень своеобразному индуцированному шумом переходу, который может встретиться лишь в распределенных системах. Еще один характерный для распределенной системы с потоком эффект состоит в том, что при определенном соотношении параметров влияние границы может распространяться на весь объем системы. Присутствие системе неустойчивости разыгрываются в этом случае на фоне структуры, сформированной за счет влияния границы. Представляется, что рассмотренная ситуация очень реалистична с точки зрения осуществления в экспериментах с системами реакция – диффузия. Можно ожидать, что специально поставленные эксперименты позволят наблюдать описанные здесь особенности динамики.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16414) и Министерства образования Российской Федерации (грант № 97-0-8.3-88). Часть работы проделана во время пребывания автора в Датском техническом университете, и я пользуюсь случаем выразить благодарность за приглашение, помощь, поддержку профессору Эрику Мосекилде.*

## Библиографический список

1. Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1981. С. 176.
2. Николис Г., Пригожин И.Р. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
3. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: Изд-во ГосУНЦ Колледж, 1997. Глава 9.
4. Колебания и бегущие волны в химических системах / Ред. Р.Филд и М.Бургер. М.: Мир, 1988.
5. Jensen O., Pannbacker V.O., Dewel G., Borckmans P. Subcritical transitions to Turing structures // Phys.Lett. A179. 1993. P. 91.
6. Pannbacker V.O., Jensen O., Dewel G., Borckmans P., Mosekilde E. Localized structures in the chlorine dioxide–iodide–malonic acid system // Spatio–Temporal patterns / Eds P.E.Cladis and P.Palfy–Muhoray. SFI Studies in the Sciences of Complexity. Addison–Wesley. 1995. P. 469.
7. S.Ponce Dawson, Lawniczak A., Kapral R. Interaction of Turing and flow–induced chemical instabilities // J.Chem.Phys. 1994. Vol. 100, № 7. P. 5211.
8. Zimmermann W., Ogawa A., Kai S., Kawasaki K., Kawakatsu T. Wavelength Competition in Convective Systems // Europhysics Lett. 1993. Vol. 24, № 3. P. 217.
9. Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Dewel G., Borckmans P. Absolute and convective instability in a one–dimensional Brusselator flow model // J.Chem.Phys. 1997. Vol. 106, № 18. P. 7609.
10. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Philos.Trans.Roy.Soc. 1952. Vol. 237, № 641. P. 37.
11. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. глава 6.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. Глава 7.
13. Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.
14. Bers A. Space–time evolution of plasma instabilities – absolute and convective // Handbook of Plasma Physics, vol.1: Basic Plasma Physics / Eds A.A.Galeev and R.N.Sudan. North–Holland Publ.Company, 1983. P. 451.
15. Кузнецов А.П. Смена характера неустойчивости в системе двух слабо связанных волн // Письма в ЖТФ. 1982. Vol. 8, № 15. С. 941.
16. Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev.Mod.Phys. 1993. Vol. 65, № 3. P. 851.
17. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Vol. 3, №3. С. 165.
18. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
19. Kuznetsov S.P., Mosekilde E. Noise–induced absolute instability (To be published).
20. Landa P.S. Turbulence in nonclosed fluid flows as a noise–induced phase transition // Europhys.Lett. 1996. Vol. 36 (6). P. 401.
21. Landa P.S. Noise–induced phase transitions and turbulence // Nonlinear dynamics and Chaos (ICND–96). Book of abstracts. Saratov, 1996. P.108.

Саратовское отделение Института  
радиотехники и электроники РАН,  
Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 28.06.99

# ABSOLUTE AND CONVECTIVE INSTABILITIES AND PATTERN FORMATION IN A MODEL OF DISTRIBUTED REACTION – DIFFUSION SYSTEM WITH FLOW

*S.P. Kuznetsov*

One-dimensional model of chemical reaction–diffusion system is considered with a uniform flow of the mixture of the reaction components. Transitions from convective to absolute instability of Hopf and Turing type are studied, which take place under a change of the flow rate. Connection between character of the instabilities and process of pattern formation is discussed. A possibility of «chemical Cherenkov effect» is noted, that is excitation of standing wave structure while non–equilibrium constant concentrations are pumped at the input of the reactor. Behavior of the system near threshold of the absolute instability under influence of fluctuations and possibility of noise–induced absolute instability is shortly discussed.



*Кузнецов Сергей Петрович* родился в 1951 году. Доктор физико–математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений при переходе к хаосу. Занимается также исследованиями в области квантового хаоса. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Соавтор двух монографий и одной популярной книги. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники и радиофизики СГУ и в Колледже прикладных наук СГУ. Соросовский доцент (1998). Член американского физического общества. E–mail: [kuz@spkuz.saratov.su](mailto:kuz@spkuz.saratov.su).



## ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СВЧ- И НЧ-ЦЕПЯХ ГЕНЕРАТОРА НА ДИОДЕ ГАННА

*Д.А. Усанов, С.Б. Вениг, С.С. Горбатов, Э.В. Труфакин*

Представлены результаты экспериментального и теоретического исследований особенностей работы СВЧ-генератора на диоде Ганна, в котором цепь обратной связи содержит инерционную нелинейность в виде соединения детектора и фазосдвигающей цепи. Показано, что в низкочастотном контуре такого генератора могут возникать хаотические колебания. При возбуждении хаотических колебаний в цепи обратной связи происходит уширение спектральной линии СВЧ-излучения, причем ее ширина существенно меньше величины частотной полосы хаотической генерации в цепи обратной связи.

В генераторах на диодах Ганна в связи с широкополосностью отрицательного сопротивления диодов возможно одновременное возбуждение колебаний в СВЧ и сравнительно более низкочастотном (НЧ) диапазонах [1–5]. В частности, может быть реализована цепь обратной связи, в которой используется низкочастотная огибающая продетектированного выходного СВЧ-сигнала, поступающая с детектора, установленного в СВЧ-тракте, через фазосдвигающие элементы на диод Ганна. Практическая ценность таких устройств подчеркивалась в работе [2]. Наличие СВЧ-тракта, детектора и фазосдвигающих элементов, соединение которых образует инерционную нелинейность, позволяет предположить, что в этом случае в низкочастотном контуре СВЧ-генератора на диоде Ганна могут возникать хаотические колебания, так же как это происходит в низкочастотных генераторах, описанных в [6]. Представляет интерес исследование динамики возникновения хаотических колебаний в НЧ- и СВЧ-цепях такого генератора, в частности, соотношение частотных полос шумовой генерации в этих цепях.

Для проведения экспериментальных исследований был использован СВЧ-генератор на диоде Ганна (рис. 1, а), представляющий собой отрезок прямоугоньного металлического волновода 1 с короткозамыкающим поршнем 2, в котором в разрыве стержневого держателя, являющегося продолжением центрального проводника коаксиала, установлен диод Ганна 3. С помощью другого стержневого держателя в отрезке волновода был расположен также детекторный диод 4, сигнал с которого поступал в цепь обратной связи 5. Цепь обратной связи включала в себя разделительные емкости 6, 7, эмиттерные повторители, используемые для согласования сопротивлений, фазовращатель, изменяющий фазу сигнала в пределах 0–1800 и не изменяющий амплитуды колебаний на выходе, усилитель с переменным коэффициентом усиления. Диод Ганна подключался к источнику питания 8.

В ходе экспериментальных исследований зависимостей амплитуды и частоты выходного сигнала СВЧ-генератора от напряжения питания и положения короткозамыкающего поршня при отключенной обратной связи были определены устойчивые (рис. 2, а, б) и неустойчивые (рис. 2, в) режимы работы генератора, а также условия, при которых в цепи питания возбуждаются низкочастотные колебания. Наблюдаемое при отключенной обратной связи возникновение шумовой генерации в СВЧ-генераторе может быть объяснено усилением тепловых и дробовых шумов в диоде Ганна, а также флуктуаций напряжения смещения. Следует отметить, что шумовой режим колебаний как в СВЧ-цепи, так и в цепи питания, наблюдался при одних и тех же настройках генератора в некотором диапазоне значений напряжения смещения на диоде Ганна, причем возникновение и исчезновение шумовой генерации на границах диапазона напряжений смещения происходило скачкообразно.

При включении обратной связи оказалось, что можно найти такие положения диода и короткозамыкающего поршня и такие значения коэффициента усиления и сдвига фазы в цепи обратной связи, при которых изменение напряжения смещения приводит к

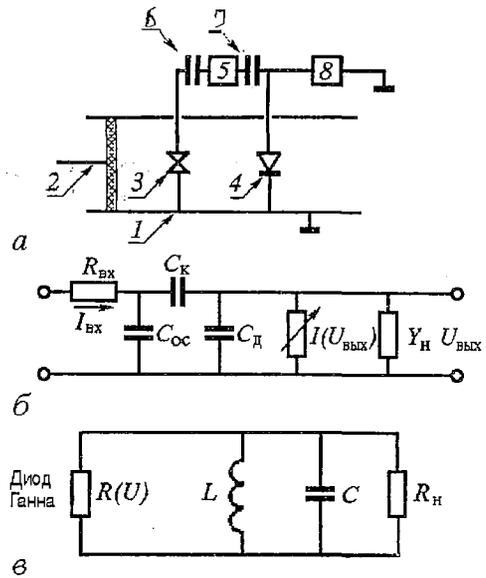


Рис. 1. Конструкция СВЧ-генератора на диоде Ганна (а) и его эквивалентные НЧ (б) и СВЧ (в) схемы: 1 – отрезок прямоугольного волновода; 2 – короткозамыкающий поршень; 3 – диод Ганна; 4 – детекторный диод; 5 – цепь обратной связи, представляющая собой последовательное соединение эмиттерных повторителей на входе и выходе, фазовращателя и усилителя; 6, 7 – разделительные конденсаторы; 8 – источник питания

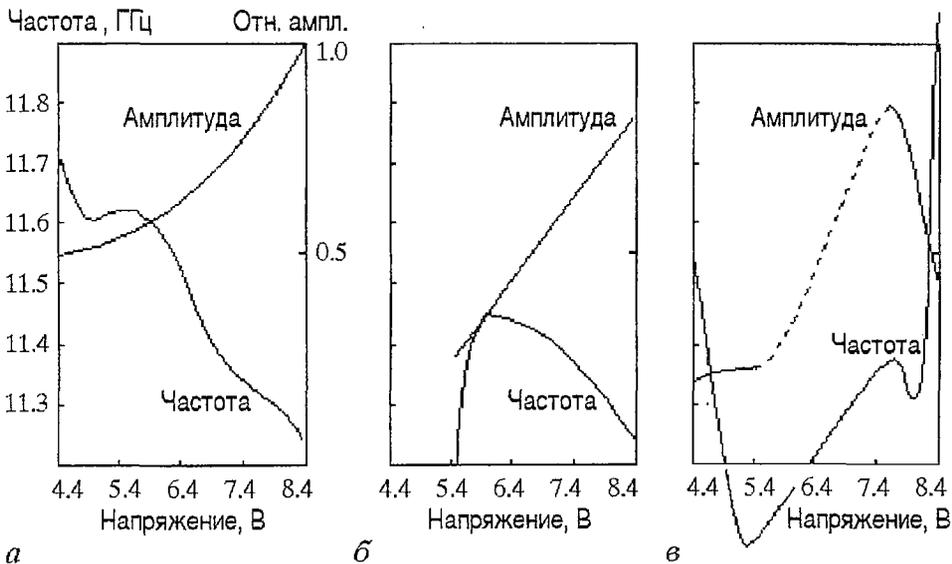


Рис. 2. Зависимость амплитуды и частоты выходного сигнала СВЧ-генератора на диоде Ганна от величины напряжения смещения на диоде, когда короткозамыкающий поршень расположен: а – на расстоянии  $\lambda_b/4$  от плоскости включения диода Ганна ( $\lambda_b$  – длина волны в волноводе для средней частоты рабочего диапазона); б – на расстоянии 3.5 мм от отсчетной плоскости; в – на расстоянии 7.5 мм от отсчетной плоскости

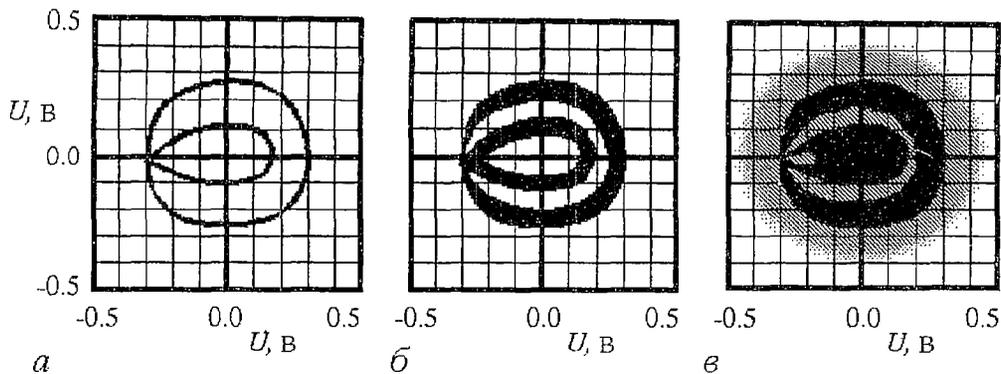


Рис. 3. Проекция фазового портрета колебаний в цепи обратной связи при различных напряжениях смещения на диоде Ганна: *а* – 7.5 В, *б* – 8.0 В, *в* – 8.5 В

постепенному увеличению числа составляющих спектра низкочастотного сигнала и последующему возникновению шумовой генерации в цепи обратной связи. Динамика перехода к хаосу хорошо иллюстрируется представленными на рис. 3 проекциями фазовых портретов низкочастотных колебаний в цепи обратной связи для различных напряжений смещения. Возникновение шумовых колебаний в цепи обратной связи приводит в этом случае к уширению спектральной линии СВЧ-излучения. Причем, в ходе исследований было обнаружено, что при напряжении питания на диоде Ганна 8.5 В в цепи обратной связи возникают шумовые колебания в полосе частот порядка 5 МГц, а спектральная линия основной частоты СВЧ-сигнала имеет значительно меньшую ширину, то есть коэффициент передачи частотной полосы шума из низкочастотной цепи в сверхвысокочастотную не равен единице. Так, в диапазоне напряжений питания на диоде Ганна 7.5–8.5 В ширина спектральной линии основной частоты СВЧ-излучения (10.5 ГГц), изменяется от 200 кГц до 1 МГц (рис. 4) при изменении частотной полосы шума от 200 кГц до 5 МГц.

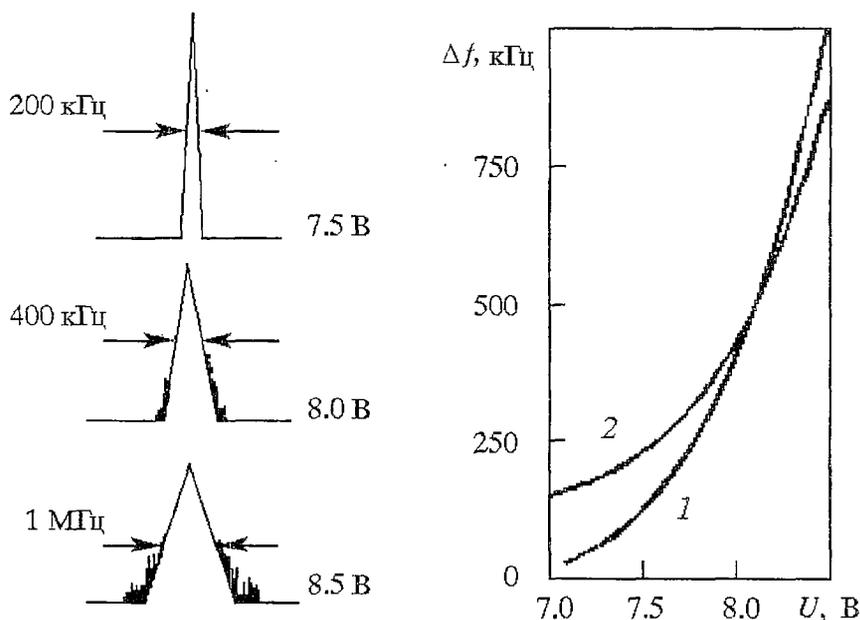


Рис. 4. Зависимости спектра выходного сигнала и ширины спектральной линии от величины напряжения смещения на диоде Ганна: *1* – эксперимент, *2* – расчет

Для оценки ширины спектральной линии основной частоты СВЧ-излучения был проведен теоретический анализ работы СВЧ-генератора на диоде Ганна с низкочастотной обратной связью с представлением его в виде эквивалентных схем и с использованием метода медленно меняющихся амплитуд. Анализ системы уравнений, описывающих низкочастотную цепь СВЧ-генератора, позволяет определить область частот, в которой возникает сложный динамический режим колебаний, и оценить амплитуду таких колебаний. В результате совместного решения уравнений для СВЧ-контура генератора и уравнения Фоккера – Планка с учетом амплитуды низкочастотных колебаний можно определить ширину спектральной линии СВЧ-излучения.

Низкочастотная цепь генераторного устройства, схематически изображенного на рис. 1, а, может быть представлена в виде эквивалентной схемы (рис. 1, б), где  $I(U_{\text{вых}})$  – вольт-амперная характеристика диода Ганна,  $Y_{\text{н}}$  – проводимость нагрузки,  $C_{\text{ос}}$  – емкость цепи обратной связи,  $C_{\text{к}}$  – конструктивная емкость,  $C_{\text{д}}$  – емкость диода Ганна,  $R_{\text{вх}}$  – входное сопротивление. Если применить метод узловых потенциалов к данной эквивалентной схеме, то нетрудно показать, что ей соответствует система уравнений

$$\begin{cases} (-Y_{\text{ос}} + Y_{\text{к}})U_{\text{вх}} - Y_{\text{к}}U_{\text{вых}} = I_{\text{вх}}, \\ Y_{\text{к}}U_{\text{вх}} - (Y_{\text{д}} + Y_{\text{н}} + Y_{\text{к}} - S)U_{\text{вых}} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $S$  – крутизна вольт-амперной характеристики диода Ганна,  $Y_{\text{к}} = j\omega C_{\text{к}}$ ,  $Y_{\text{ос}} = j\omega C_{\text{ос}}$  – проводимости конструктивных элементов и емкостей цепи обратной связи. Комплексный коэффициент передачи для такой схемы можно определить из второго уравнения системы (1)

$$\Phi(j\omega) = -U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}} = -Y_{\text{к}}/(Y_{\text{д}} + Y_{\text{н}} + Y_{\text{к}} - S).$$

Для определения коэффициента  $\Phi(j\omega)\beta(j\omega)$ , представляющего собой коэффициент передачи обратной связи, характеризующий величину напряжения, поступающего с выхода на вход через цепь обратной связи, разорвем цепь обратной связи и, считая, что при отключенном диоде к  $R_{\text{вх}}$  приложено напряжение  $SU_1$ , найдем величину напряжения  $U_0$  на другом конце цепи обратной связи. Тогда

$$\Phi(j\omega)\beta(j\omega) = U_0/U_1, \quad (2)$$

а так как при разрыве обратной связи  $Y_{\text{ос}}$  и  $Y_{\text{д}}$  становятся равными нулю, и входное напряжение равно  $SU_1$ , то система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{cases} (Y_{\text{к}} + Y_{\text{н}})U_0 - Y_{\text{к}}U_1 = 0, \\ Y_{\text{к}}U_0 - (Y_{\text{н}} + Y_{\text{к}})U_1 = SU_1. \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему уравнений (3), можно найти соотношение между напряжениями на входе и выходе цепи обратной связи

$$U_0 = -SU_1 Y_{\text{к}}/\Delta_0, \text{ откуда } U_0/U_1 = -SY_{\text{к}}/\Delta_0. \quad (4)$$

Используя (2), (4) и выражение для определителя системы (3)  $\Delta_0$ , можно получить выражение для коэффициента передачи обратной связи

$$\Phi(j\omega)\beta(j\omega) = -SY_{\text{к}}/[Y_{\text{к}}^2 - (Y_{\text{к}} + Y_{\text{н}})^2] = SY_{\text{к}}/(Y_{\text{н}}^2 + 2Y_{\text{н}}Y_{\text{к}}). \quad (5)$$

Если учесть, что  $Y_{\text{к}} = j\omega C_{\text{к}}$ , ввести обобщенную расстройку контура

$$\alpha = 2C_{\text{к}}R_{\text{н}}\omega_{\text{рез}}(\omega/\omega_{\text{рез}} - 1),$$

где  $\omega_{рез}$  – резонансная частота контура, и переписать проводимость нагрузки в виде

$$Y_{II} = Y = (1+j\alpha)/R_{II},$$

то выражение (5) для коэффициента передачи цепи обратной связи можно представить следующим образом:

$$\Phi(j\omega)\beta(j\omega) = j\omega SC_k / \{[(1+j\alpha)/R_{II}]^2 + 2[(1+j\alpha)/R_{II}]j\omega C_k\}.$$

Обозначим  $q = \omega C_k R_{II}$  и выделим из комплексного выражения  $\Phi(j\omega)\beta(j\omega) = a + jb$  действительную и мнимую части

$$a = -2(\alpha+q)SqR_{II} / [(1-2\alpha q - \alpha^2)^2 + 4(\alpha+q)^2],$$

$$b = 2(1-2\alpha q - \alpha^2)SqR_{II} / [(1-2\alpha q - \alpha^2)^2 + 4(\alpha+q)^2].$$

Мнимая часть равна нулю при  $\alpha^2 + 2\alpha q - 1 = 0$ , то есть при  $\alpha = -q \pm (q^2 + 1)^{1/2}$ . Подставляя в выражение для  $\Phi(j\omega)\beta(j\omega)$  значение частоты, соответствующее  $b=0$ , находим значение  $a$ , при котором система близка к самовозбуждению,

$$a = SqR_{II} / [2(\alpha+q)].$$

Чтобы оценить устойчивость системы в соответствии с критерием Найквиста, комплексный коэффициент усиления в системе с обратной связью обычно представляют в виде

$$\Phi_0(j\omega) = \Phi(j\omega) / [1 - \Phi(j\omega)\beta(j\omega)],$$

где  $\Phi(j\omega)$  – комплексный коэффициент передачи при разомкнутой цепи обратной связи.

Согласно критерию Найквиста, система устойчива, если годограф произведения  $\Phi(j\omega)\beta(j\omega)$  не охватывает точку (1,0). Для выполнения условий абсолютной устойчивости необходимо [7], чтобы

$$\operatorname{Re}[\Phi(j\omega)\beta(j\omega)] < 1.$$

В этом случае границу области устойчивости определяет выражение

$$SqR_{II} / [2(\alpha+q)] = 1.$$

Используя это условие, нетрудно убедиться, что возбуждение колебаний происходит на частоте

$$\omega = 2\alpha / [C_k R_{II} (SR_{II} - 2)].$$

Следует отметить, что система (1) позволяет проанализировать зависимость частоты, на которой возникает неустойчивость, как от величины переходной емкости  $C_{oc}$  ветви обратной связи, так и от коэффициента усиления усилителя в цепи обратной связи, и оценить амплитуду колебаний.

Частота самовозбуждения цепи обратной связи определяется значениями  $C_{oc}$ ,  $C_k$ , которые велики по сравнению с собственной емкостью диода Ганна, поэтому неустойчивость возникает в области низких частот по отношению к частоте генерации СВЧ.

Рассмотрим теперь СВЧ-контур генератора на диоде Ганна, который можно представить в виде эквивалентной схемы, приведенной на рис. 1, в. Нетрудно показать, что для этой эквивалентной схемы имеет место следующее нелинейное уравнение:

$$\ddot{U} - \omega_0^2 U = [1/(R_n C)] \dot{U} [1 - R_n (a_1 + a_2 U^2/2)], \quad (6)$$

где  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $R_n$  – сопротивление внешней СВЧ-схемы, а выражение  $(a_1 + a_2 U^2/2)$  определяет нелинейную проводимость диода Ганна. Введем безразмерную переменную  $t' = \omega_0 t$  и обозначим  $\mu = 1/\omega CR_n$ ,  $P = 1 - R_n a_1$ . В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x} (P - R_n a_2 x^2/2). \quad (7)$$

Малое значение параметра  $\mu$  позволяет использовать для решения уравнения (7) теорию возмущений. В первом приближении теории возмущений решение уравнения (7) отличается от решения для гармонического осциллятора

$$x = r \sin(t' + \varphi),$$

где амплитуду и фазу можно считать постоянными в связи с тем, что  $r$  и  $\varphi$  оказываются «медленными» функциями времени [8], а именно, зависящими от  $t'$  через так называемое «медленное» время  $\Theta = \mu t'$

$$x = r(\Theta) \sin(t' + \varphi(\Theta)). \quad (8)$$

Вычисляя с точностью до первого порядка по  $\mu$  производные по  $t'$  рассматриваемого уравнения (8), получаем

$$\dot{x} = \mu [\dot{r} \sin(t' + \varphi) + r \dot{\varphi} \cos(t' + \varphi)] + r \cos(t' + \varphi), \quad (9)$$

$$\ddot{x} + x = 2\mu [\dot{r} \cos(t' + \varphi) - r \dot{\varphi} \sin(t' + \varphi)].$$

Обозначим  $F(x, \dot{x}) = (P - R_n a_2 x^2/2)$ . Очевидно, что функция  $F$ , зависящая от периодических по  $u = t' + \varphi$  функций, сама периодична по  $u$  с периодом  $2\pi$  и может быть поэтому разложена в ряд Фурье

$$F(r \sin u, r \cos u) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nu + b_n \cos nu),$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n(r) \\ b_n(r) \end{array} \right\} = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} F(r \sin u, r \cos u) \left. \begin{array}{l} \sin nu \\ \cos nu \end{array} \right\} du.$$

Малое значение параметра  $\mu$  позволяет предположить, что форма колебаний будет мало отличаться от синусоидальной, и из всего ряда Фурье существенный вклад будут вносить только члены, осциллирующие по  $t'$  с основной безразмерной частотой, то есть с  $n=1$ . Таким образом, уравнение (9) принимает вид

$$2\mu [\dot{r} \cos(t' + \varphi) + r \dot{\varphi} \sin(t' + \varphi)] = a_1(r) \sin(t' + \varphi) + b_1(r) \cos(t' + \varphi).$$

Требую, чтобы это уравнение тождественно удовлетворялось по  $t'$ , то есть, собирая члены с  $\sin(t' + \varphi)$ ,  $\cos(t' + \varphi)$  и приравнявая нулю соответствующие коэффициенты, имеем два уравнения для  $r$  и  $\varphi$  как функций «медленного» времени  $\Theta = \mu t'$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = R(r), \\ r \dot{\varphi} = \Phi(r), \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} R(r) \\ \Phi(r) \end{array} \right\} = -1/2 \left\{ \begin{array}{l} b_1(r) \\ a_1(r) \end{array} \right. = -1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} F(r \sin u, r \cos u) \left. \begin{array}{l} \cos u \\ \sin u \end{array} \right\} du.$$

При подстановке  $x=r \sin u$  в выражение для  $F$  получаем

$$\dot{x}(P - R_{\text{н}} a_2 x^2/2) = r \cos u (P - R_{\text{н}} a_2 r^2 \sin^2 u/2) = r \cos u (P - R_{\text{н}} a_2 r^2/4).$$

Следовательно  $a_1=0$ ,  $b_1=r(P - R_{\text{н}} a_2 r^2/4)$ , то есть

$$\Phi(r) = 0, \quad R(r) = r(P - R_{\text{н}} a_2 r^2/4)/2.$$

Таким образом, получаем уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = (r/2)(P - R_{\text{н}} a_2 r^2/4), \\ \dot{\varphi} = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Возможные состояния равновесия в этом случае:  $r=0$  и при  $P>0$   $r=2[P/(R_{\text{н}} a_2)]^{1/2}$ .

Из анализа решения (10) следует, что при  $P<0$  состояние равновесия  $r=0$  устойчиво, а при  $P>0$  – неустойчиво, но устойчив предельный цикл с  $r=2[P/(R_{\text{н}} a_2)]^{1/2}$ . Ширину спектральной линии можно оценить, рассчитав величину наименее вероятнейшего отклонения изображающей точки от предельного цикла. Воспользуемся для этого уравнением Фоккера – Планка, которое имеет следующий вид

$$\partial v/\partial t = -\partial/\partial r(Rv) - (1/r)\partial/\partial \varphi(\Phi v) + (B/2)\{\partial/\partial r[r\partial/\partial r(v/r)] + (1/r^2)\partial^2 v/\partial \varphi^2\}, \quad (11)$$

где  $v=v(t, r, \varphi|t_0, r_0, \varphi_0)$  – плотность вероятности перехода. В качестве  $R$  и  $\Phi$  в уравнение (11) следует подставить правые части динамических уравнений (10), то есть положить  $R=r(P - R_{\text{н}} a_2 r^2/2)/2$ ,  $\Phi=0$ . Тогда уравнение (11) примет вид

$$\partial v/\partial t = -\partial/\partial r(Rv) + (B/2)\{\partial/\partial r[r\partial/\partial r(v/r)] + (1/r^2)\partial^2 v/\partial \varphi^2\}.$$

Для стационарного решения  $w(r, \varphi)$  имеем

$$d/dr[Rw - (B/2)r d/dr(w/r)] = 0.$$

Интегрируя вторично выражение, стоящее в скобках, получаем выражение

$$w = C r \exp(2/B \int_0^r R dr).$$

Величина  $C$  определяется из условия нормировки

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} w dr = 1.$$

Подставив в эти выражения  $R$ , получаем искомое стационарное распределение

$$w(r, \varphi) dr d\varphi = \{\exp[-(P - R_{\text{н}} a_2 r^2/2)^{1/2}/(4B)] / [\pi(\pi B)^{1/2}(1 + \operatorname{erf}(P/(2B^{1/2})))]\} r dr d\varphi.$$

При  $P > 0$  наименее вероятнейшим значением  $r$  будет

$$r_m = [P/2 + (P^2/4 + B)^{1/2}]^{1/2}.$$

С использованием системы (10) и выражения для наименее вероятнейшего значения  $r_m$ , в котором неизвестная величина  $B$  определялась из данных эксперимента и результатов решения системы (1), была проведена теоретическая оценка изменения ширины спектральной линии СВЧ-генерации в зависимости от

напряжения смещения на диоде Ганна. При расчетах были использованы значения параметров эквивалентных схем, характерные для исследовавшейся схемы генератора и использованного типа диода, определявшиеся экспериментально:  $C_{oc}=1\div 3\cdot 10^3$  пФ,  $C_k=100$  пФ,  $C_n=0.8$  пФ,  $L=100$  нГн,  $R_n=50$  Ом. Данные расчета приведены на рис. 4,б и свидетельствуют о достаточно хорошем совпадении теоретических расчетов и экспериментальных данных.

Таким образом, в СВЧ-генераторе на диоде Ганна, в котором цепь обратной связи содержит инерционную нелинейность в виде соединения детектора и фазосдвигающей цепи, в низкочастотном контуре могут возникать хаотические колебания. При возбуждении хаотических колебаний в цепи обратной связи происходит уширение спектральной линии СВЧ-излучения, причем ее ширина существенно меньше величины частотной полосы хаотической генерации в цепи обратной связи.

### Библиографический список

1. Усанов Д.А., Горбатов С.С., Скрипаль А.В. Особенности низкочастотной генерации в диодах Ганна // РЭ. 1981. Т. 24, № 10. С. 67.
2. Усанов Д.А., Авдеев А.А. Использование эффекта автодинного детектирования в генераторах на диодах Ганна для двухпараметрового измерения диэлектриков // Дефектоскопия. 1995. № 4. С. 42.
3. Романюк В.А., Шарифов Т.М. Подавление паразитных НЧ-колебаний в генераторах Ганна // Радиотехника. 1977. Т. 32, № 12. С. 74.
4. Острейковский А.М. Особенности низкочастотной неустойчивости генераторов Ганна // Радиотехника. 1989. № 6. С. 19.
5. Усанов Д.А., Коротин Б.Н. Устройство для измерения толщины металлических пленок, нанесенных на диэлектрическую основу // Приборы и техника эксперимента. 1985. № 1. С. 254.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
7. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
8. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 19.03.99

## CHAOTIC OSCILLATIONS IN MICROWAVE AND LOW-FREQUENCY CIRCUITS OF THE GUNN DIODE GENERATOR

*D.A. Usanov, S.B. Wenig, S.S. Gorbatov, E.V. Trufakin*

The results of experimental and theoretical researches of operation features of the Gunn diode microwave generator, in which the feedback circuit contains inertial non-linearity as a connection of the detector and phase-shifting circuit, are presented. It is shown, that there can be chaotic oscillations in a low-frequency circuit of such generator. When the chaotic oscillations in a feedback circuit are excited, spectral line of microwave radiation is widened, and its width is less than frequency band magnitude of a chaotic generation in a feedback circuit.



*Усанов Дмитрий Александрович* родился в 1943 году в Менделеевске (Татария). Окончил Саратовский госуниверситет (1965). Кандидат физико-математических наук (1972), доктор физико-математических наук (1989), с 1990 года – профессор кафедры физики твердого тела, с 1985 года по настоящее время – заведующий кафедрой физики твердого тела, с 1989 года – проректор по НИР СГУ. Автор большого числа статей и изобретений по твердотельной электронике и радиофизике. Заслуженный деятель науки РФ, академик МАН ВШ, член IEEE.



*Вениг Сергей Борисович* – родился в 1957 году в Саратове. После окончания Саратовского государственного университета (1979) работал инженером ОКБ ПО «Тантал». С 1981 года работает в СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1988) по специальности «радиофизика, включая квантовую радиофизику», доцент кафедры физики твердого тела СГУ. Область научных интересов, по направлениям которой опубликовано более 50 научных работ, – физика полупроводников, твердотельная электроника и радиофизика.

E-mail: [WenigSB@info.sgu.ru](mailto:WenigSB@info.sgu.ru)



*Горбатов Сергей Сергеевич* – родился в 1946 году в Энгельсе Саратовской области. После окончания СГУ (1973) работал на предприятиях электронной промышленности и в НИИ механики и физики при СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1991) по радиофизике. В настоящее время является докторантом СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, нелинейная динамика и полупроводниковая электроника СВЧ. Автор многочисленных статей по указанным выше направлениям.



*Труфакин Эдуард Владимирович* – родился в 1975 году в городе Бельцы, окончил Саратовский государственный университет (1998). После окончания СГУ учится в очной аспирантуре на кафедре физики твердого тела. Область научных интересов – твердотельная электроника и нелинейная динамика.



## КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*Ю.А. Брюханов*

Исследована динамика рекурсивных цепей первого порядка без учета эффектов квантования с двумя видами нелинейности сумматора: с насыщением и с переполнением. Определены границы линейного режима. Для нелинейности с переполнением установлена связь между периодом паразитных колебаний, параметром цепи и величиной внешнего воздействия. Найден диапазон начальных условий возникновения паразитных колебаний.

Цифровые цепи первого порядка используются в современных системах передачи информации для последетекторной обработки сигналов. На их базе реализуются фильтры нижних и верхних частот [1]. В качестве носителя информации часто используется прямоугольный импульс. Поэтому практически важными являются ранее не рассматриваемые вопросы исследования колебательных режимов при постоянном внешнем воздействии с учетом реально существующей нелинейной характеристики сумматора.

Колебания в такой цепи описываются разностным уравнением

$$x(n+1) = f[ax(n)+A],$$

где функция  $f$  – характеристика сумматора,  $a$  – параметр цепи,  $A$  – величина внешнего воздействия. Введем  $y(n)=x(n+1)$ . Разностному уравнению соответствует функция последования

$$y = f[ax+A].$$

### Линейный режим

В цепи первого порядка состояние равновесия (то есть установившийся сигнал на ее выходе) на фазовой плоскости  $(x,y)$  находится как ордината (абсцисса) точки пересечения биссектрисы  $y=x$  и функции последования [2]. В линейном режиме эти координаты выражаются зависимостью

$$X = Y = A/(1-a).$$

Полагая  $|X| \leq 1$ ,  $|Y| \leq 1$  (что характерно для использования арифметики с фиксированной запятой и чисел, выравненных слева [3]), и учитывая условие

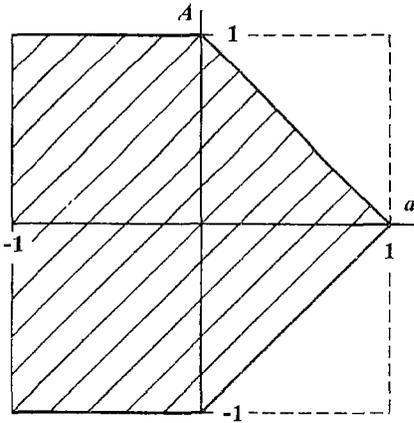


Рис. 1. Область линейного режима

устойчивости линейной цепи  $|a| < 1$ , получим границы линейного режима

$$|A| \leq 1 - a.$$

Поскольку  $|A| \leq 1$ , то линейный режим существует в заштрихованной области на рис. 1. При использовании цепи в качестве фильтра нижних частот ( $a > 0$ ) область линейного режима составляет лишь половину всей области допустимых значений  $a, A$ .

Определим длительность переходных процессов при включении и выключении постоянного воздействия. В линейном режиме колебания описываются уравнением

$$x(n+1) = ax(n) + A, \quad (1)$$

решением которого является функция

$$x(n) = [x(0) - A/(1-a)]a^n + A/(1-a).$$

Задавая критерий окончания переходного режима при включении воздействия в виде [4]

$$|x(N_1) - X| = 0.1|X|,$$

определим длительность процесса включения при  $x(0) = 0$  как ближайшее сверху целое число к величине

$$N_1 \approx -2.3/\ln|a|.$$

При выключении воздействия в цепи устанавливается линейный режим. В качестве критерия окончания переходного режима выбирается условие

$$|x(N_2)| = 0.1|X|.$$

Длительность процесса выключения равна ближайшему сверху целому числу к величине  $N_2 = N_1$ .

### Сумматор с насыщением

Характеристика сумматора с насыщением описывается функцией [5]

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi, & |\varphi| < 1, \\ \text{sign}\varphi, & |\varphi| \geq 1. \end{cases}$$

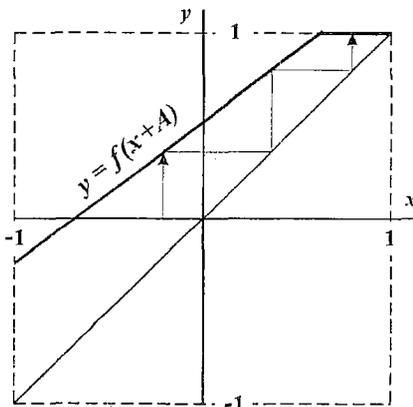


Рис. 2. Диаграмма Кенигса – Ламерея для отображения с нелинейностью с насыщением

Здесь и ниже полагается  $a > 0$ . Пример диаграммы Кенигса – Ламерея в нелинейном режиме при  $A > 0$  показан на рис. 2. После включения воздействия в цепи существует линейный режим до достижения  $|y| = 1$ . Длительность этого режима находится из решения уравнения (1) для  $|x(n+1)| = |y(n)| = 1$  и при  $x(0) = 0$  является ближайшим снизу целым числом к величине

$$N_3 = \ln[1 - (\text{sign}A)/X]/\ln a - 1,$$

а полная длительность переходного процесса на две единицы больше.

### Сумматор с переполнением

При использовании арифметики с фиксированной запятой, выравненных слева чисел, представлении отрицательных чисел в дополнительном коде характеристика сумматора выражается зависимостью

$$f(\varphi) = (\varphi + 1) \bmod 2 - 1.$$

Диаграмма Кенигса – Ламерея для такого вида отображения показана на рис. 3. Заметим, что длительность линейного режима при  $x(0)=0$  и здесь равна  $N_3$ . Принципиальным отличием от предыдущего случая является возможность возникновения паразитных периодических колебаний. Установим связь между периодом  $T$  таких колебаний, параметром  $a$  и величиной внешнего воздействия  $A$ .

Возникающий периодический процесс описывается линейным разностным уравнением

$$x(n+1) = ax(n) + A + x_1(n). \quad (2)$$

При этом функция  $x_1(n)$  удовлетворяет уравнению

$$x_1(n+T) = x_1(n)$$

с начальными условиями  $x_1(0)=x_1(1)=\dots=x_1(T-2)=0$ ,  $x_1(T-1)=-2$ . Выполнив  $z$ -преобразование обеих частей этого уравнения, получим изображение  $X_1(z)$ , оригиналом которого является функция

$$x_1(n) = -\sum_{i=0}^{T-1} X_i z_i^n, \quad (3)$$

где  $X_i = 2/\prod_{r=0, r \neq i}^{T-1} (z_i - z_r)$ ,  $z_i = \exp(j2\pi i/T)$ ,  $j = (-1)^{i/2}$ .

Подставив (3) в уравнение (2) и решив его, получим

$$x(n) = [x(0) - A/(1-a) + \sum_{i=0}^{T-1} X_i/(z_i - 1)]a^n + A/(1-a) - \sum_{i=0}^{T-1} X_i z_i^n/(z_i - a).$$

Поскольку  $a < 1$ , в установившемся режиме имеем

$$x^*(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = A/(1-a) - \sum_{i=0}^{T-1} X_i z_i^n/(z_i - a).$$

Полученное выражение позволяет определить область параметров  $a$ ,  $A$ , соответствующую конкретному значению периода  $T$ . При  $A > 0$  нижняя граница этой области находится из соотношения

$$x^*(0) \geq -1, \quad (4)$$

а верхняя граница – из соотношения

$$x^*(T-1) < 1. \quad (5)$$

Возможен и другой подход к описанию установившегося режима с периодом

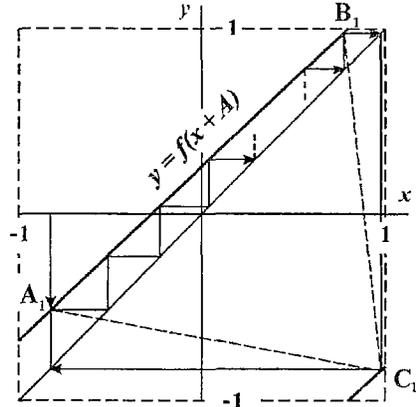


Рис. 3. Диаграмма Кенигса – Ламерея для отображения с нелинейностью и с переполнением

колебаний  $T$ . Из рис. 3 видно, что в таком режиме траектория на фазовой плоскости имеет вид инвариантного треугольника  $A_1B_1C_1$ . При этом должно выполняться равенство

$$x^*(T) = x^*(0),$$

где  $x^*(T) = ax^*(T-1) + A - 2$ ,  $x^*(T-1) = a^{T-1}x^*(0) + A\sum_{i=0}^{T-2} a^i$ . Отсюда получаем

$$x^*(0) = [A\sum_{i=0}^{T-1} a^i - 2] / (1 - a^T),$$

$$x^*(T-1) = [A\sum_{i=0}^{T-1} a^i - 2a^{T-1}] / (1 - a^T).$$

Это позволяет преобразовать условия (4), (5) к виду

$$A \geq (1 + a^T) / \sum_{i=0}^{T-1} a^i, \quad A < (1 - a^T + 2a^{T-1}) / \sum_{i=0}^{T-1} a^i,$$

соответственно. На рис. 4 показаны области параметров  $a, A$  для  $T \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

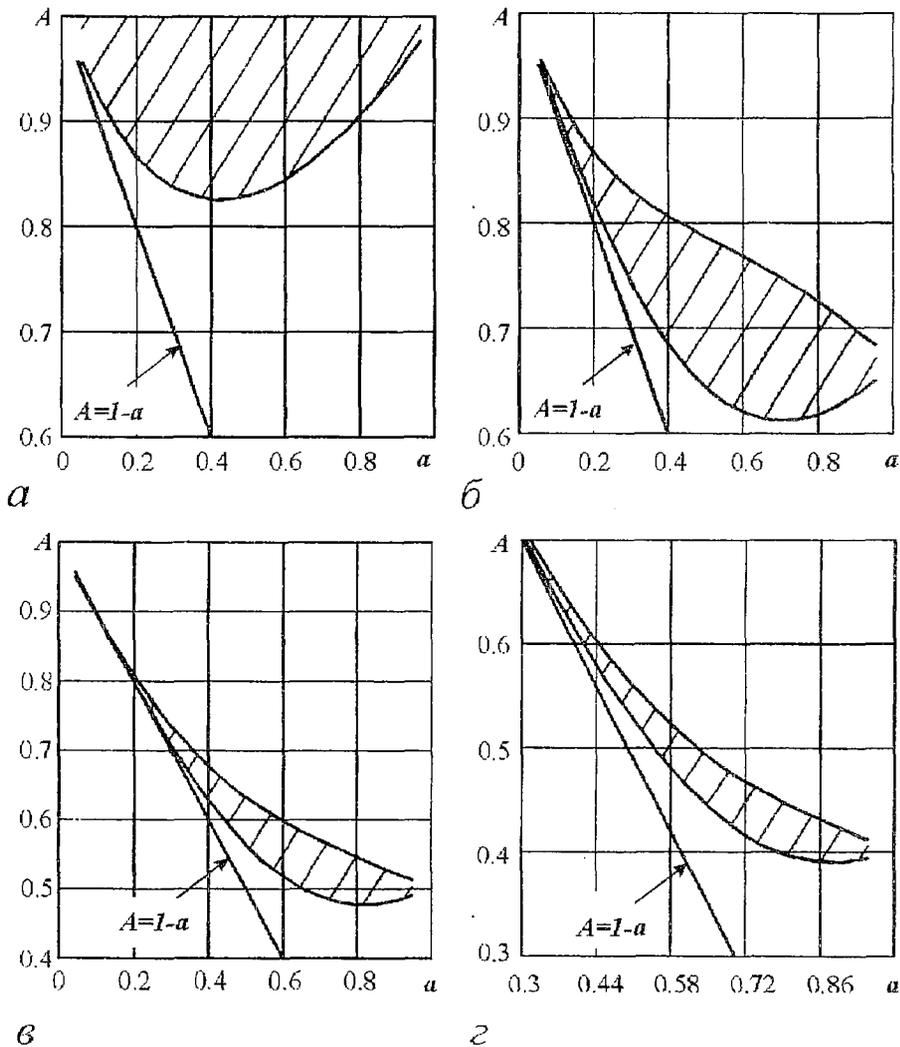


Рис. 4. Области существования паразитных периодических колебаний:  $a - T=2$ ,  $б - T=3$ ,  $в - T=4$ ,  $г - T=5$

Соотношения (4), (5) позволяют определить диапазон начальных условий  $x^*(0)$ , когда возможны колебания с периодом  $T$ . Эти условия выражаются зависимостью

$$-1 \leq x^*(0) < (1 - A \sum_{i=0}^{T-2} a^i) / a^{T-1}.$$

### Заключение

Исследованы колебания в рекурсивных цифровых цепях первого порядка с нелинейностью насыщения и с переполнением при постоянном внешнем воздействии. Определены области существования линейного и нелинейного режимов. Получены выражения для расчета длительности переходных процессов при включении и выключении воздействия в линейном и нелинейном с насыщением режимах.

Показано, что в цепях с нелинейностью переполнения могут существовать паразитные колебания с произвольным периодом. Определены области существования таких колебаний и диапазон начальных условий. Результаты могут быть использованы при создании систем передачи информации с цифровой обработкой сигналов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17939).*

### Библиографический список

1. Брюханов Ю.А. Частотные свойства цифровых цепей первого порядка // РЭ. 1996. № 11. С. 37.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фусфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
3. Каппелини В. Константиноидис А.Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988.
5. Брюханов Ю.А. Переходные процессы в рекурсивной цифровой системе второго порядка с нелинейностью насыщения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6, № 2. С. 28.

Ярославский государственный  
университет

Поступила в редакцию 6.04.99  
после переработки 9.06.99

### OSCILLATIONS IN FIRST-ORDER NON-LINEAR RECURSIVE DIGITAL CIRCUITS UNDER CONSTANT EXTERNAL INFLUENCE

*Yu.A. Bryukhanov*

Dynamics of first-order recursive circuits without quantization effects is investigated. Filter adder has characteristic of two types: saturation and overflow. Linear regime boundaries are determined. Relation of magnitude of external influence, parasitic oscillations period and circuit parameter is determined. Range of initial conditions of parasitic oscillation origin is retrieved.





## НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ МИНДЛИНА – ГЕРМАНА

*В.И. Ерофеев, Н.В. Ключева, Н.П. Семерикова*

Рассматривается нелинейная математическая модель, описывающая продольные колебания стержня с учетом сдвиговых деформаций и поперечных движений частиц срединной линии (нелинейное обобщение модели Миндлина – Германа). Изучаются особенности распространения нелинейных стационарных волн деформации: периодических волн и солитонов. Получены зависимости между основными параметрами таких волн – амплитудой волны, длиной волны, скоростью ее распространения и коэффициентом нелинейных искажений формы волны. Показано, что наряду с классическим поведением солитонов (волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью), может наблюдаться и их аномальное поведение (амплитуда волны уменьшается с ростом скорости).

### О приведении трехмерных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям теории стержней

Идея приведения трехмерных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям теории стержней заключается в выражении напряженного и деформированного состояний в произвольной точке тела через новые величины, заданные вдоль оси стержня [1]. Полученные уравнения для этих новых переменных и будут уравнениями, описывающими статику или динамику стержня. Одномерные модели пригодны для изучения динамических процессов в случаях, когда поперечные размеры стержня малы по сравнению с характерной длиной распространяющейся волны. Деформации в поперечных сечениях стержня можно считать квазистатическими и искать распределение перемещений по сечению на основе решения соответствующей статической задачи при том или ином типе нагружения (растяжение, кручение, изгиб или их комбинации).

Классическая модель Д. Бернулли (техническая теория) предполагает, что при описании продольных колебаний стержня можно пренебречь потенциальной энергией сдвиговых деформаций и кинетической энергией поперечных движений частиц стержня. Согласно этой теории в линейном приближении волны в стержне распространяются со скоростью  $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$  (где  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность материала), не зависящей от частоты. Следовательно, сделанные предположения не позволяют описать геометрическую дисперсию продольных волн, наблюдаемую экспериментально [2,3].

Математические модели, предложенные Релеем и Лявом, Бишопом, Миндлиным и Германом (уточненные теории) [1–3], устраняют этот недостаток. Из одномерных моделей дисперсию продольных волн в широкополосном диапазоне наиболее точно описывает модель Миндлина – Германа.

## Вывод нелинейных уравнений Миндлина – Германа

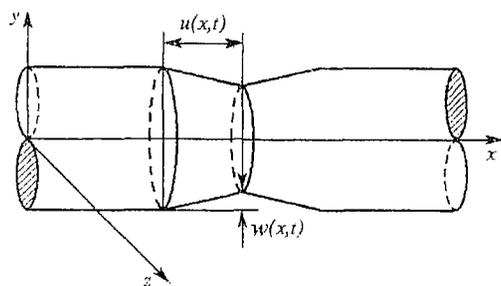


Рис. 1. Распределение смещений при продольных колебаниях стержня с учетом поперечного сжатия продольных волокон

где  $u_1(x,y,z,t)$  – компонента вектора перемещения произвольной точки объема,  $u(x,t)$  – продольное перемещение частиц срединной линии стержня;

- поперечные напряжения равны нулю

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0. \quad (2)$$

Для описания движения частиц стержня в поперечном направлении вводится функция  $w(x,t)$ , через которую выражаются перемещения  $u_2$  и  $u_3$ ,

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z,t) &= u(x,t), \\ u_2(x,y,z,t) &= (y/r)w(x,t), \\ u_3(x,y,z,t) &= (z/r)w(x,t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r$  – радиус поперечного сечения стержня.

Заметим, что в данной модели гипотеза Пуассона об одноосном деформированном состоянии ( $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu\epsilon_{11}$ , где  $\epsilon_{ij}$  – компоненты линейризованного тензора деформаций,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала) может и не выполняться, поэтому  $w$  является независимой переменной.

При выводе нелинейных уравнений Миндлина – Германа делаются такие же предположения о смещениях стержня, как и при выводе линейной модели. Схема вывода уравнений динамики стержня предложена в [4]. Вывод уравнений динамики может быть произведен из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского с помощью функции Лагранжа  $L = W_K - W_{\Pi}$ . Для этого следует вычислить плотности кинетической и потенциальной энергий. Объемная плотность кинетической энергии равна

$$T = \sum_{i=1}^3 1/2 \rho (\partial v_i / \partial t)^2, \quad (4)$$

где  $\rho$  – объемная плотность среды.

Потенциальная энергия упругого тела при адиабатических процессах определяется лишь работой, производимой силами внутренних напряжений и, следовательно, равна его внутренней энергии. Внутреннюю энергию  $\rho U$  элемента объема представим в виде разложения по инвариантам тензора деформаций с точностью до кубических членов включительно (материал Мурнагана)

$$\rho U = (\lambda/2)I_1^2 + \mu I_2 + (\nu_1/6)I_1^3 + \nu_2 I_1 I_2 + 4/3 \nu_3 I_3, \quad (5)$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные второго порядка (константы Ламэ);  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  – константы упругости третьего порядка;  $I_1 = \epsilon_{ii}$ ;  $I_2 = \epsilon_{ij}\epsilon_{ji}$ ;  $I_3 = \epsilon_{kj}\epsilon_{ji}\epsilon_{ik}$ .

Компоненты тензора деформаций ( $\epsilon_{ik}$ ) выражаются через компоненты вектора перемещений ( $v_i$ ) следующим образом:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right), \quad (6)$$

где  $i, k = 1, 2, 3$ , а по индексу  $l$  производится суммирование.

Для получения погонной плотности функции Лагранжа  $L$  необходимо проинтегрировать объемные плотности кинетической и потенциальной энергий по площади поперечного сечения стержня  $F$ . Уравнения динамики стержня могут быть получены из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского

$$\delta I = \delta \int_0^l \int_F \int \rho [1/2 (\partial \bar{v} / \partial t)^2 - U] dF dx dt = 0, \quad (7)$$

где  $I$  – функционал действия по Гамильтону,  $\delta I$  – его первая вариация. Компоненты тензора деформаций в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{y^2 + z^2}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \frac{w}{r} + \frac{w^2}{2r^2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{y}{2r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{y}{2r^2} w \frac{\partial w}{\partial x}, & \varepsilon_{13} &= \frac{z}{2r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z}{2r^2} w \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Кинетическая энергия  $W_K$  и потенциальная энергия  $W_{\Pi}$  определяются выражениями

$$W_K = \frac{\rho F}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W_{\Pi} &= F \left[ \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{2\kappa_2^2}{r^2} \right) (\lambda + \mu) w^2 + \frac{2\kappa_2^2 \lambda}{r} w \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\kappa_1^2 \mu}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \alpha_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha_2}{r^3} w^3 + \frac{\alpha_3}{r} w \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha_4}{r^2} w^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_5}{4} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha_6}{2r} w \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  – продольные и поперечные смещения частиц стержня;  $\rho$  – объемная плотность материала;  $\lambda$ ,  $\mu$  – константы Ламэ;  $\kappa_{1,2}$  – корректирующие коэффициенты, выбираемые из условия близости дисперсионных веток данной модели и точного решения Похгаммера – Кри; коэффициенты  $\alpha_j$ , характеризующие геометрическую и физическую нелинейности среды, равны

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda/2 + \mu + \nu_1/6 + \nu_2 + 4\nu_3/3, & \alpha_4 &= \lambda + 2\nu_1 + 2\nu_2, \\ \alpha_2 &= \lambda + \mu + 2\nu_1/3 + \nu_2 + 4\nu_3/3, & \alpha_5 &= \lambda + 2\mu + \nu_2 + 2\nu_3, \\ \alpha_3 &= \lambda + \nu_1 + 2\nu_2, & \alpha_6 &= \lambda + \mu + \nu_2 + \nu_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения Лагранжа в данном случае запишутся

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial w_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial w_x} - \frac{\partial L}{\partial w} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Нелинейные уравнения Миндлина – Германа имеют следующий вид:

$$u_{tt} - c_l^2 u_{xx} - \frac{2\lambda \kappa_2^2}{r\rho} w_x = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{3\alpha_1}{\rho} u_x^2 + \frac{2\alpha_3}{r\rho} w u_x + \frac{2\alpha_4}{r^2\rho} w^2 + \frac{\alpha_5}{4\rho} w_x^2 \right\}, \quad (13)$$

$$w_{tt} - c_\tau^2 \kappa_1^2 w_{xx} + \frac{8(\lambda+\mu) \kappa_2^2}{r^2\rho} w + \frac{4\lambda \kappa_2^2}{r\rho} u_x = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_5}{\rho} u_x w_x + \frac{2\alpha_6}{r\rho} w w_x \right] - \frac{12\alpha_2}{r^3\rho} w^2 - \frac{2\alpha_3}{r\rho} u_x^2 - \frac{4\alpha_4}{r^2\rho} u_x w - \frac{\alpha_6}{r\rho} w_x^2,$$

где  $c_l = [(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$  – скорость распространения продольных волн;  $c_\tau = (\mu/\rho)^{1/2}$  – скорость распространения сдвиговых волн в материале стержня.

### Уравнения Миндлина – Германа в безразмерных переменных

Введем безразмерные переменные  $x' = x/\Lambda$ ,  $t' = c_l t/\Lambda$ ,  $u' = u/u_0$ ,  $w' = w/w_0$ , где  $x$ ,  $t$  – размерные координата и время;  $u_0$ ,  $w_0$  – максимальные амплитуды продольной и изгибной волн соответственно;  $\Lambda$  – длина волны. Если  $r/\Lambda \sim 10^{-1}$ ,  $w_0/u_0 \sim 10^{-2}$ ,  $\lambda, \mu/\alpha_i \sim 10^{-1}$ ,  $u_0/\Lambda \sim 10^{-4}$ , систему можно упростить и свести к одному уравнению

$$u_{tt} + \left[ \frac{2\kappa_2^2 \nu \lambda}{\rho c_l^2} - 1 \right] u_{xx} + \frac{r^2}{8\Lambda^2 \kappa_2^2} \left( \frac{c_l}{c_m} \right)^2 u_{tttt} - \frac{r^2}{8\Lambda^2 \kappa_2^2} \left( \frac{c_l}{c_m} \right)^2 \left[ 1 + \kappa_1^2 \left( \frac{c_\tau}{c_l} \right)^2 \right] u_{xxtt} + \\ + \frac{r^2}{8\Lambda^2} \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)^2 \left( \frac{c_\tau}{c_m} \right)^2 u_{xxxx} = - \frac{a_3 u_0 \lambda}{c_m^2 c_l^2 \rho^2 \Lambda} u_x u_{xx}, \quad (14)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $c_m = [(\lambda+\mu)/\rho]^{1/2}$ .

### Нелинейные стационарные волны в стержне Миндлина – Германа

Точные решения уравнения (14) будем искать в виде стационарных волн деформаций  $U(\xi = x - vt) = du/d\xi$ , которые описываются дифференциальным уравнением в обыкновенных производных

$$d^2 U/d\xi^2 + aU + bU^2 = 0, \quad (15)$$

где

$$a = \frac{8\Lambda^2 \kappa_2^2 c_m^2}{\rho r^2 c_l^4} \frac{2\kappa_2^2 \nu \lambda + \rho c_l^2 (v^2 - 1)}{v^4 - [\kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2 + 1]v^2 + \kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2}, \\ b = \frac{4\alpha_3 u_0 \lambda \kappa_2^2 \Lambda}{\rho^2 r^2 c_l^4} \frac{1}{v^4 - [\kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2 + 1]v^2 + \kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2},$$

$v$  – скорость распространения стационарных волн. Ограниченные решения уравнения (15), описывающего колебания осциллятора с квадратичной нелинейностью, были исследованы в [5]. Здесь будут использоваться некоторые из полученных результатов.

Умножая (15) на  $U_\xi = dU/d\xi$  и интегрируя, получим

$$1/2 (dU/d\xi)^2 = E - (a/2)U^2 - (b/3)U^3. \quad (16)$$

Здесь функция  $f(U) = (a/2)U^2 - (b/3)U^3$  – потенциальная энергия системы;  $E$  – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы. Поэтому

уравнение (16) можно интерпретировать как закон сохранения энергии для ангармонического осциллятора. Полученное уравнение допускает разделение переменных

$$2^{1/2}d\xi = dU/[E-f(U)]^{1/2} \quad (17)$$

и имеет ограниченные решения при  $E-f(U)>0$ . Решения будут периодическими, если функция  $E-f(U)$  принимает положительные значения между двумя своими вещественными нулями. Пусть кубический полином  $E-f(U)$  имеет три действительных корня  $U_3 \leq U_2 \leq U_1$ . (Наличие одного действительного корня не рассматривается, так как решения уравнения (17) в этом случае будут неограниченными.) Выразим полином  $E-f(U)$  через корни  $U_{1,2,3}$

$$E - (a/2)U^2 - (b/3)U^3 = -(b/3)(U - U_1)(U - U_2)(U - U_3). \quad (18)$$

Корни полинома связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + U_3 &= -3a/(2b), \\ U_1U_2 + U_1U_3 + U_2U_3 &= 0, \\ U_1U_2U_3 &= 3E/b. \end{aligned} \quad (19)$$

Перепишем уравнение (17) в виде

$$2^{1/2}d\xi = dU/[-(b/3)(U - U_1)(U - U_2)(U - U_3)]^{1/2}. \quad (20)$$

О возможности существования нелинейных стационарных волн уравнения (15) можно судить по знакам коэффициентов  $a$  и  $b$  и значения константы  $E$ .

Для стержней, изготовленных из большинства металлов и сплавов параметр нелинейности  $\alpha_3 < 0$ , а для стержней из композиционных материалов возможно и  $\alpha_3 > 0$ .

Физически реализуемыми являются лишь те случаи, когда в волне деформации отсутствует постоянная составляющая. Мы будем рассматривать только эти случаи.

**1. Пусть  $a > 0$ ,  $b > 0$ .** При  $\alpha_3 > 0$  скорости распространения стационарных волн в стержне удовлетворяют условию  $v > 1$ , а при  $\alpha_3 < 0$  — условию  $\kappa_1(c_2/c_1) < v < [1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2}$ . В этом случае функция потенциальной энергии  $f(U)$  имеет локальный минимум  $f_{\min}(U=0)=0$  и локальный максимум  $f_{\max}(U=-a/b)=a^3/(6b^2)$ , то есть точка  $(0,0)$  на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка  $(-a/b, 0)$  — неустойчивым положением равновесия типа «узел» [5]. Ограниченные решения уравнения (17) существуют, если константа  $E$  изменяется в пределах  $E_{\min} \leq E \leq E_{\max}$  ( $E_{\max}=a^3/(6b^2)$ ,  $E_{\min}=0$ ), тогда полином  $E-f(U)$  будет иметь три действительных корня, причем разным значениям  $E$  отвечают различные типы стационарных волн.

При  $0 \leq E = E_2 < a^3/(6b^2)$  стационарные волны являются периодическими кноидальными волнами, соответствующими движениям по замкнутым траекториям вблизи сепаратрисы. В этом случае корни  $U_{1,2,3}$  различны, причем  $E-f(U) > 0$  при  $U_1 < U < U_2$ . Тогда с помощью замены переменных

$$y^2 = (U_1 - U)/(U_1 - U_2), \quad 0 < y^2 < 1 \quad (21)$$

и интегрирования уравнение (20) сводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода

$$-[(b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2}(\xi - \xi_0) = \int_0^y dy / [(1-y^2)(1-s^2y^2)]^{1/2}, \quad (22)$$

где  $s^2 = (U_1 - U_2)/(U_1 - U_3)$ ,  $0 < s^2 < 1$ . Обращая эллиптический интеграл при  $y=0$ ,  $\xi_0=0$ , получаем решение, описывающее периодические нелинейные волны, в виде

$$U(\xi) = U_1 - (U_1 - U_2)\text{sn}^2\{[(b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2}\xi, s\}, \quad (23)$$

где  $\text{sn}(\cdot, \cdot)$  – эллиптическая функция Якоби (эллиптический синус). В выражении (23) введем следующие обозначения:

$$A = U_1 - U_2, \quad s^2 = (U_1 - U_2)/(U_1 - U_3), \quad \omega = [(b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2} = [bA/(6s^2)]^{1/2}, \quad (24)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний;  $s$  – модуль эллиптической функции, определяющий степень искажения формы колебаний  $U(\xi)$  по сравнению с синусоидальной;  $\omega$  – аналог частоты. Период колебаний равен

$$\Lambda = 2K(s)/\omega = [24/(bA)]^{1/2}sK(s), \quad (25)$$

где  $K(s)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Решение (23) содержит восемь параметров  $A, v, s, \omega, U_{1,2,3}, E$ , которые связаны между собой шестью соотношениями (19) и (24). Через два независимых параметра – амплитуду колебаний  $A$  и коэффициент нелинейных искажений  $s$ , а также коэффициенты уравнения решение (23) можно представить в виде

$$U(\xi) = -a/(2b) + A[(1 + s^2)/(3s^2)] - A\text{sn}^2\{[bA/(6s^2)]^{1/2}\xi, s\}. \quad (26)$$

Качественный вид периодического решения (23) представлен на рис. 2. Параметры периодической нелинейной волны (26) связаны соотношениями

$$A = [3a/(2b)]s^2/(1 - s^2 + s^4)^{1/2}, \quad \omega^2 = a/[4(1 - s^2 + s^4)^{1/2}]. \quad (27)$$

С их учетом (26) можно записать в виде

$$U(\xi) = [A/(3s^2)][1 + s^2 - (1 - s^2 + s^4)^{1/2}] - A\text{sn}^2(\omega\xi, s). \quad (28)$$

Качественные зависимости амплитуды периодической волны от ее скорости при различных значениях коэффициента нелинейных искажений приведены на рис. 3. В диапазоне скоростей  $v > 1$ , соответствующем случаю 1 ( $a > 0, b > 0$ ) при положительном параметре нелинейности ( $\alpha_3 > 0$ ), амплитуда волны растет с ростом скорости. (Здесь  $s_1 < s_2 < s_3$ ; выделенная кривая  $s=1$  отвечает солитонному решению, а кривизна возрастает при уменьшении  $s$  от 1 до 0.)

В диапазоне скоростей  $\kappa_1(c_+/c_-) < v < [1 - 2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2}$ , соответствующем случаю 1 ( $a > 0, b > 0$ ) при  $\alpha_3 < 0$ , амплитуда волны уменьшается с ростом скорости. (Здесь  $s_1 < s_2 < s_3$ , выделенная кривая  $s=1$  отвечает солитонному решению.)

В остальных диапазонах скоростей эти зависимости не построены, так как они соответствуют физически не реализуемым случаям.

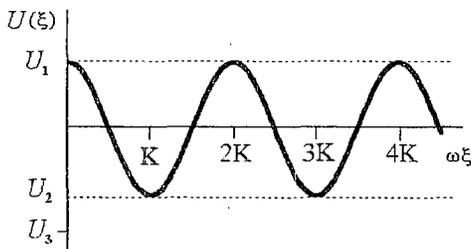


Рис. 2. Стационарная периодическая волна при  $a > 0, b > 0$

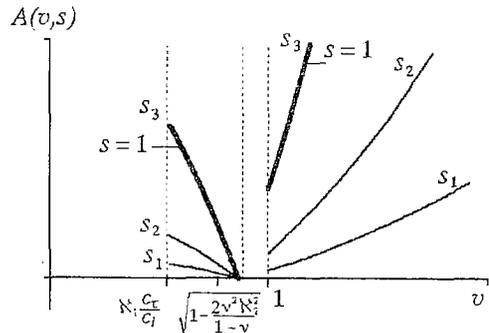


Рис. 3. Качественные зависимости амплитуды периодической волны  $A$  от ее скорости  $v$  при различных значениях коэффициента нелинейных искажений формы волны  $s$

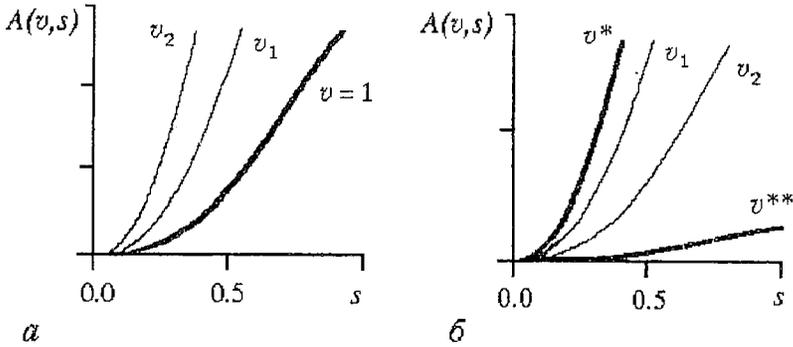


Рис. 4. Качественные зависимости амплитуды периодической волны  $A$  от коэффициента нелинейных искажений  $s$  при фиксированной скорости ( $v_1 < v_2$ ):  $a - \alpha_3 > 0$ ;  $b - \alpha_3 < 0$

На рис. 4 показаны качественные зависимости амплитуды волны  $A$  от коэффициента нелинейных искажений  $s$  при фиксированной скорости (здесь  $v^* = \kappa_1(c_T/c_l)$ ,  $v^{**} = [1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2}$ ).

Когда параметр нелинейности положителен ( $\alpha_3 > 0$ ), скорости волн удовлетворяют условию  $v > 1$  (рис. 4, а). В этом случае кривые  $A(v, s)$  лежат выше кривой, соответствующей  $v = 1$ ; при увеличении скорости ( $v_2 > v_1$ ) нарастание амплитуды с ростом  $s$  происходит быстрее.

При  $\alpha_3 < 0$  скорости волн находятся в диапазоне  $\kappa_1(c_T/c_l) < v < [1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2}$  (рис. 4, б), кривые  $A(v, s)$  лежат между кривыми  $v^*$  и  $v^{**}$ ; при увеличении скорости ( $v_2 > v_1$ ) нарастание амплитуды с ростом  $s$  происходит медленнее.

**2. При  $a < 0$ ,  $b > 0$**  скорость распространения стационарных волн находится в интервалах  $0 < v < \kappa_1(c_T/c_l)$  при  $\alpha_3 > 0$  и  $[1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2} < v < 1$  при  $\alpha_3 < 0$ . В этом случае функция потенциальной энергии  $f(U)$  имеет локальный максимум  $f_{\max}(U=0) = 0$  и локальный минимум  $f_{\min}(U = -ab) = a^3 / (6b^2)$ , то есть точка  $(-ab, 0)$  на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка  $(0, 0)$  – неустойчивым положением равновесия типа «узел» [5]. Ограниченные решения существуют, если начальная энергия системы изменяется в пределах  $a^3 / (6b^2) = E_{\min} \leq E \leq E_{\max} = 0$ . Различным значениям  $E$  соответствуют различные типы решений. При  $a^3 / (6b^2) < E < 0$  стационарные волны являются периодическими кноидальными волнами, при  $E \rightarrow E_{\min}$  будут наблюдаться квазигармонические колебания, соответствующие движению по замкнутым фазовым траекториям вблизи положения равновесия типа «центр», а при  $E = E_{\max}$  колебания на фазовой плоскости соответствуют движениям по сепаратрисе. Во всех этих случаях соответственно полином  $E - f(U)$  имеет либо три различных действительных корня, либо (при  $E = E_{\min}$ ) два совпадающих больших корня  $U_1$  и  $U_2$ , либо (при  $E = E_{\max}$ ) два совпадающих меньших корня  $U_2$  и  $U_3$ . Положительные значения полинома находятся в области  $U_2 < U < U_1$ . Поэтому, как и в случае 1, решения уравнения (20) находятся с помощью замены (21).

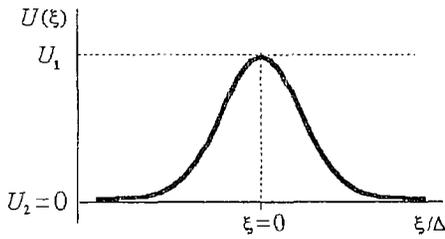
При  $E = E_{\max} = 0$  стационарные волны уравнения (15) являются уединенными. В этом случае совпадают два меньших корня полинома:  $U_2 = U_3$ . Ограниченные решения существуют в области  $U_3 = U_2 \leq U \leq U_1$ . Уравнение (20) примет вид

$$2^{1/2} d\xi = dU \{ (U - U_2) [(b/3)(U_1 - U)]^{1/2} \}, \quad (29)$$

которое после замены переменных (21) и интегрирования дает решение

$$U(\xi) = U_2 + (U_1 - U_2) \operatorname{sech}^2 \{ [(b/6)(U_1 - U_2)]^{1/2} \xi \}. \quad (30)$$

Решение (30) – предельный случай нелинейных периодических решений при  $s = 1$ . Введем обозначения



$$A^* = U_1 - U_2 = -3a/(2b), \quad (31)$$

$$\Delta = \{6/[b(U_1 - U_2)]\}^{1/2} = 2/(-a)^{1/2},$$

где  $A^*$  – амплитуда,  $\Delta$  – ширина солитона. В солитоне постоянная составляющая отсутствует  $U_2=0$ . Решение (30) можно переписать в виде

Рис. 5. Солитон деформации при  $a < 0$ ,  $b > 0$

$$U(\xi) = A^*/\text{ch}^2[(x-vt)/\Delta]. \quad (32)$$

Качественный вид солитонного решения представлен на рис. 5. Параметры солитонного решения связаны между собой соотношениями

$$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (\alpha_3 u_0 \lambda)] [\rho c^2 (1-v^2) - 2\nu \lambda \kappa_2^2], \quad (33)$$

$$\Delta = [(\rho/2)^{1/2} \rho c^2 / (c_m \Lambda \kappa_2)] \{ [v^4 - (\kappa_1^2 (c_1/c_2)^2 + 1)v^2 + \kappa_1^2 (c_1/c_2)^2] / [\rho c^2 (1-v^2) - 2\nu \lambda \kappa_2^2] \}^{1/2}. \quad (34)$$

Вид решения и зависимости между параметрами уединенной волны представлены в табл. 1. Из графиков, приведенных в табл. 1, видно, что при скоростях  $[1-2\nu^2 \kappa_2^2 / (1-\nu)]^{1/2} < v < 1$  ( $\alpha_3 < 0$ ) поведение уединенной волны является классическим для солитонов: волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью. Когда скорости волн находятся в интервале  $0 < v < \kappa_1 (c_1/c_2)$  ( $\alpha_3 > 0$ ), поведение солитонов является аномальным: волна меньшей амплитуды имеет меньшую ширину.

**3. Пусть  $a > 0$ ,  $b < 0$ .** Стационарные волны в этом случае распространяются со скоростями  $\kappa_1 c_1/c_2 < v < [1-2\nu^2 \kappa_2^2 / (1-\nu)]^{1/2}$  при  $\alpha_3 > 0$  и  $v > 1$  при  $\alpha_3 < 0$ . Смена знака перед нелинейным слагаемым в уравнении (15) приводит к тому, что на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  происходит поворот фазовых портретов, рассмотренных в предыдущих случаях, в противоположную сторону, то есть стационарные волны имеют в этом случае отрицательную амплитуду. Изменение знака перед линейным слагаемым сдвигает начало координат в одно из положений равновесия: либо в «центр», либо в «узел» [5]. Функция потенциальной энергии  $f(U)$  имеет локальный максимум  $f_{\max}(U=-alb) = a^3/(6b^2)$  и локальный минимум  $f_{\min}(U=0) = 0$ . На фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  точка  $(-alb, 0)$  является неустойчивым положением равновесия типа «узел», а точка  $(0, 0)$  – устойчивым положением равновесия типа «центр». Начальная энергия системы изменяется в пределах  $0 = E_{\min} \leq E \leq E_{\max} = a^3/(6b^2)$ .

При  $0 < E = E_2 < a^3/(6b^2)$  в системе происходят периодические колебания, соответствующие на фазовой плоскости движениям по замкнутым траекториям вблизи сепаратрисы. В этом случае корни  $U_{1,2,3}$  различны, причем  $E - f(U) > 0$  при  $U_3 < U < U_2$ . Поэтому ограниченные решения уравнения (20) существуют в области  $U_3 < U < U_2$ . В этом случае с помощью замены

$$y^2 = (U - U_3)/(U_2 - U_3), \quad 0 \leq y^2 \leq 1 \quad (35)$$

и интегрирования уравнение (20) приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода

$$-[(b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2} (\xi - \xi_0) = \int_0^y dy / [(1-y^2)(1-s^2y^2)]^{1/2}, \quad (36)$$

где  $s^2 = (U_2 - U_3)/(U_1 - U_3)$ ,  $0 \leq s^2 \leq 1$ . Обращая эллиптический интеграл при  $y=0$ ,  $\xi_0=0$ , получим решение, описывающее периодические нелинейные волны

$$U(\xi) = U_3 + (U_2 - U_3) \text{sn}^2\{ [(-b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2} \xi, s \}. \quad (37)$$

Таблица 1

$\alpha_3 > 0$	$\alpha_3 < 0$
$0 < v < \kappa_1(c_\tau/c_l)$	$[1 - 2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2} < v < 1$
$U(\xi) = A^*/ch^2[(x-vt)/\Delta]$	$U(\xi) = A^*/ch^2[(x-vt)/\Delta]$
$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (u_0 \lambda)] [\rho c_l^2 (1-v^2) - 2v\lambda \kappa_2^2]$	$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (u_0 \lambda)] [2\kappa_2^2 v\lambda + \rho c_l^2 (v^2 - 1)]$
$\Delta = \frac{(\rho/2)^{1/2} r c_l^2}{c_m \Lambda \kappa_2} \left[ \frac{v^4 - (\kappa_1^2(c_\tau/c_l)^2 + 1)v^2 + \kappa_1^2(c_\tau/c_l)^2}{\rho c_l^2 (1-v^2) - 2v\lambda \kappa_2^2} \right]^{1/2}$	

Введем в (37) следующие обозначения:

$$A = U_2 - U_3, \quad s^2 = (U_2 - U_3)/(U_1 - U_3), \quad \omega = [(-b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2} = [-bA/(6s^2)]^{1/2}, \quad (38)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний,  $s$  – коэффициент нелинейных искажений формы колебаний  $U(\xi)$ ,  $\omega$  – аналог частоты. Период колебаний равен

$$\Lambda = 2K(s)/\omega = [-24/(bA)]^{1/2} sK(s), \quad (39)$$

где  $K(s)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

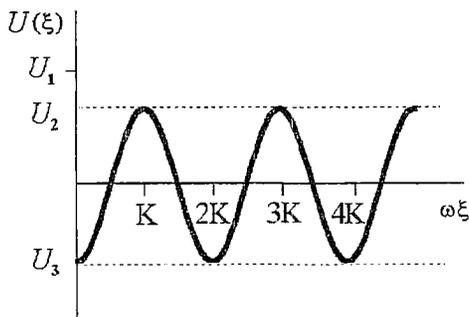


Рис. 6. Стационарная периодическая волна при  $a>0, b<0$

Решение (37) содержит параметры  $A, v, s, \omega, E, U_{1,2,3}$ , которые связаны между собой соотношениями (19) и (38). В качестве двух независимых переменных выберем амплитуду колебаний  $A$  и коэффициент нелинейных искажений  $s$ . Тогда решение можно представить в виде

$$U(\xi) = -a/(2b) - A[(1 + s^2)/(3s^2)] + Asn^2\{[-bA/(6s^2)]^{1/2}\xi, s\}. \quad (40)$$

Качественный вид периодического решения представлен на рис. 6. Параметры в решении (40) связаны следующим образом:

$$A = [-3a/(2b)][s^2/(1 - s^2 + s^4)]^{1/2}, \quad \omega^2 = a/[4(1 - s^2 + s^4)]^{1/2}. \quad (41)$$

Учитывая (41), перепишем (40) в виде

$$U(\xi) = [A/(3s^2)][(1 - s^2 + s^4)^{1/2} - 1 - s^2] + Asn^2(\omega\xi, s). \quad (42)$$

Качественные зависимости амплитуды периодической волны от ее скорости при различных значениях коэффициента нелинейных искажений приведены на рис. 3. В диапазоне скоростей  $v>1$ , соответствующем случаю 3 ( $a>0, b<0$ ) при отрицательном параметре нелинейности ( $\alpha_3<0$ ), амплитуда волны растет с ростом скорости (здесь  $s_1<s_2<s_3$ ; выделенная кривая  $s=1$  отвечает солитонному решению, а кривизна возрастает при уменьшении  $s$  от 1 до 0). В диапазоне скоростей  $v_1(c_1/c_2)<v<[1-2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2}$ , соответствующем случаю 3 ( $a>0, b<0$ ) при  $\alpha_3>0$ , амплитуда волны уменьшается с ростом скорости (здесь  $s_1<s_2<s_3$ , выделенная кривая  $s=1$  отвечает солитонному решению).

Качественные зависимости амплитуды волны  $A$  от коэффициента нелинейных искажений  $s$  при фиксированной скорости показаны на рис. 4, б (при  $\alpha_3>0$  и диапазоне скоростей  $v_1(c_1/c_2)<v<[1-2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2}$ ) и рис. 4, а (при  $\alpha_3<0$  и  $v>1$ ).

**4. При  $a<0, b<0$**  скорости волн в стержне удовлетворяют условию  $[1-2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2}<v<1$  при  $\alpha_3>0$  и условию  $0<v<v_1(c_1/c_2)$  при  $\alpha_3<0$ . Функция потенциальной энергии  $f(U)$  имеет локальный максимум  $f_{\max}(U=0)=0$  и локальный минимум  $f_{\min}(U=-a/b)=a^3/(6b^2)$ , то есть на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  точка  $(-a/b, 0)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка  $(0, 0)$  — неустойчивым положением равновесия типа «узел» [5]. Ограниченные решения существуют, если начальная энергия системы изменяется в пределах  $a^3/(6b^2)=E_{\min}\leq E\leq E_{\max}=0$ , причем при  $E\rightarrow E_{\min}$  будут наблюдаться квазигармонические колебания вблизи положения равновесия типа «центр», а при  $E=E_{\max}$  колебания на фазовой плоскости соответствуют движениям по сепаратрисе [5]. Во всех этих случаях соответственно полином  $E-f(U)$  имеет либо три действительных корня, либо два совпадающих меньших корня  $U_2$  и  $U_3$ , либо два совпадающих больших корня  $U_1$  и  $U_2$ . Положительные значения полинома  $E-f(U)$  находятся в области  $U_3<U<U_2$ . Поэтому, как и в случае 3, решения уравнения (20) находятся с помощью замены (35).

При  $E=E_{\max}=0$  стационарные волны являются уединенными. В этом случае два больших корня полинома совпадают,  $U_1=U_2$ . В солитоне постоянная составляющая отсутствует,  $U_2=0$ . Ограниченные решения существуют в области  $U_3\leq U\leq U_2$ . Применяя замену (35) к уравнению (20), получим решение, которое

Рис. 7. Солитон деформации при  $a < 0, b < 0$

является предельным случаем нелинейных периодических решений при  $s=1$ ,

$$U(\xi) = U_3 \operatorname{sech}^2\left[\frac{(b/6)U_3}{2} \xi\right]. \quad (43)$$

Качественный вид солитонного решения представлен на рис. 7. Вводя обозначения

$$A^* = -U_3 = -3a/(2b), \Delta = [-6/(bU_3)]^{1/2} = 2/(-a)^{1/2}, \quad (44)$$

где  $A^*$  – амплитуда,  $\Delta$  – ширина солитона, решение (43) можно переписать в виде

$$U(\xi) = A^*/\operatorname{ch}^2[(x - vt)/\Delta]. \quad (45)$$

Основные зависимости между параметрами солитонного решения приведены в табл. 2.

Таблица 2

$\alpha_3 > 0$	$\alpha_3 < 0$
$[1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2} < v < 1$	$0 < v < \kappa_1(c_\tau/c_l)$
$U(\xi) = A^*/\operatorname{ch}^2[(x - vt)/\Delta]$	$U(\xi) = A^*/\operatorname{ch}^2[(x - vt)/\Delta]$
$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (u_0 \lambda)] [\rho c^2 (1 - v^2) - 2v\lambda \kappa_2^2]$	$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (u_0 \lambda)] [2\kappa_2^2 v\lambda + \rho c^2 (v^2 - 1)]$
$\Delta = \frac{(\rho/2)^{1/2} r c^2}{c_m \Lambda \kappa_2} \left[ \frac{v^4 - (\kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2 + 1)v^2 + \kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2}{\rho c^2 (1 - v^2) - 2v\lambda \kappa_2^2} \right]^{1/2}$	

$$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (\alpha_3 u_0 \lambda)] [\rho c^2 (1 - v^2) - 2\nu \lambda \kappa_2^2], \quad (46)$$

$$\Delta = [(\rho/2)^{1/2} r c^2 / (c_m \Lambda \kappa_2)] \{ [v^4 - [\kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2 + 1] v^2 + \kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2] / [\rho c^2 (1 - v^2) - 2\nu \lambda \kappa_2^2] \}^{1/2}. \quad (47)$$

В диапазоне скоростей  $[1 - 2\nu^2 \kappa_2^2 / (1 - \nu)]^{1/2} < v < 1$  (при  $\alpha_3 > 0$ ) поведение солитонов является классическим: волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью. Когда скорости волн удовлетворяют условию  $0 < v < \kappa_1 c_\tau / c_l$  при  $\alpha_3 < 0$ , поведение солитонов является аномальным: волна меньшей амплитуды имеет меньшую ширину.

*Работа поддержана грантом Президента РФ (№ 98-15-96127).*

### Библиографический список

1. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
2. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х.Дж., Риппергер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках // Проблемы механики. 1961. Вып. 3. С. 22.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
4. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные модели продольных колебаний стержней // Гидроаэромеханика и теория упругости: Всесоюз. межвуз. сб. Днепропетровск: ДГУ, 1984. Вып. 32. С. 78.
5. Семерикова Н.П. Стационарные продольные волны в нелинейно-упругом стержне // Волновые задачи механики: Сб. науч. тр. Н.Новгород: НФ ИМАШ РАН, 1994. С. 121.

*Нижегородский филиал  
института машиноведения РАН*

*Поступила в редакцию 15.04.99*

## NONLINEAR – ELASTIC WAVES IN MINDLIN – HERRMANN ROD

*V.I. Erofeyev, N.V. Kluyeva, N.P. Semerikova*

The nonlinear mathematical model describing longitudinal oscillations of the rod taking into account shift strains and transversal movements of particles of the middle line (nonlinear generalization of the model of Mindlin – Herrmann) is considered. The singularities of distribution of nonlinear stationary waves of the strain periodic waves and solitons are studied. The associations between basic parameters of such waves (amplitude, velocity of distribution, wavelength, and coefficient of nonlinear distortions of the waveform) are obtained. It is shown, that alongside with the classical behavior solitons (the wave of the greater amplitude has smaller breadth and propagates with the greater velocity) their anomalous behavior can be observed (amplitude of the wave decreases with growth of the velocity).



*Ерофеев Владимир Иванович* – родился в 1959 году. Окончил механико–математический факультет Горьковского государственного университета (1981). Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико–математических наук (1994). Работает заместителем директора по научной работе Нижегородского филиала института машиноведения РАН. По совместительству – профессор Нижегородского государственного университета. Области научных интересов: нелинейные волны в механических системах, акустическая диагностика материалов и конструкций. Опубликовал более 140 научных работ, в том числе монографии: «Нелинейные волны в упругих телах с пространственной дисперсией» (1986), «Microstructured Solids» (1996), «Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой» (1999). Соавтор международной коллективной монографии «Material Instabilities in Solids» (1998). Член правления Российского акустического общества. E–mail: wvs@dynamo.nnov.ru



*Клюева Наталья Владимировна* – родилась в 1974 году. Окончила механико–математический факультет Нижегородского государственного университета (1997). С 1997 года – аспирантка Нижегородского филиала института машиноведения РАН. Область научных интересов – волновая динамика механических систем.



*Семерикова Надежда Петровна* – окончила механико–математический факультет Горьковского государственного университета (1983). Работает ассистентом кафедры математики радиофизического факультета Нижегородского университета. Область научных интересов – волновая динамика механических систем.



## СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ \*

*А.Д. Григорьев*

Изложены современные методы и алгоритмы численного моделирования нестационарных электромагнитных полей. Основное внимание уделено методу конечных разностей во временной области. Дается формулировка метода, способы учета свойств среды таких как неоднородность, анизотропия, дисперсия, нелинейность. Приводятся алгоритмы аппроксимации граничных условий, задания источников возбуждения, ограничения расчетной области при решении внешних задач электродинамики, вычисления параметров систем по результатам моделирования.

### Введение

Необходимость разработки численных методов расчета волновых электромагнитных полей стала очевидной в 40-х годах, в период интенсивного развития СВЧ-техники и электроники. Появление все более сложных СВЧ устройств не позволяло использовать для их анализа аналитические методы, а экспериментальные исследования были сопряжены со значительными трудностями. Поэтому еще в 1941 году Хан [1] предложил использовать для расчета собственных частот и полей тороидального резонатора метод частичных областей. Интенсивное развитие численных методов моделирования переменных электромагнитных полей, однако, началось только в 60-х годах, когда вычислительная техника достигла достаточно высокого уровня развития.

Следует отметить, что вначале наиболее интенсивно развивались методы анализа стационарных полей, характеризующихся гармонической зависимостью от времени (спектральные методы). В этом случае одна из четырех независимых переменных – время исключается из уравнений, уменьшая требования к быстродействию и памяти ЭВМ. Обзор этих методов содержится, в частности, в работах [2,3]. К сожалению, методам моделирования электромагнитных полей в частотной области, независимо от конкретной реализации, присущ ряд недостатков, ограничивающих их область применения. К ним относятся возможность появления нефизических (ложных) решений, трудности моделирования полей в сильно поглощающих, диспергирующих и нелинейных средах, невозможность расчета параметров систем сразу на нескольких частотах.

\* Статья написана по материалам лекции, прочитанной на XI Международной школе по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 2–6 марта 1999 г.

Другая группа методов предполагает непосредственное решение уравнений Максвелла во временной области. Среди них наибольшее (почти исключительное) распространение получили метод конечных разностей во временной области (КРВО), предложенный Йи [4] в 1966 году и метод матрицы линий передачи (МЛП), разработанный П.Б.Джонсом и Р.Л.Берле [5] в 1971 году. Оба метода первоначально были реализованы в двухмерной формулировке и использовались для расчета поля в поперечном сечении волноводов [6]. В дальнейшем они были обобщены и на решение трехмерных задач. Появились также многочисленные разновидности указанных методов. Хотя алгоритмы и получаемые результаты для методов моделирования в частотной и временной областях существенно различны, при решении линейных задач применение преобразования Фурье к нестационарному полю, полученному временным методом, позволяет найти частотный спектр колебаний системы и ее собственные частоты, то есть результаты, получаемые обычно спектральными методами.

Временные методы моделирования применяются для решения самых разнообразных задач электродинамики: расчета поля и параметров регулярных волноводов и объемных резонаторов с неоднородным и/или анизотропным, а также диспергирующим заполнением, анализа интегральных схем СВЧ с нелинейными элементами. Особенно успешно применяются эти методы для расчета высокочастотных полей и поглощаемой мощности в биологических объектах, диаграмм направленности антенн телекоммуникационных систем, сечений радиолокационного рассеяния различных целей, идентификации скрытых под землей или водой объектов. Известны и примеры применения метода КРВО (или близких к нему методов) для решения самосогласованных задач взаимодействия электромагнитного поля и потоков заряженных частиц. Временные методы могут быть также использованы при решении задач нелинейной динамики электронных приборов и устройств СВЧ.

## 1. Основные уравнения

Рассмотрим электромагнитное поле в замкнутой области  $D$ . Это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t + \sigma^e \mathbf{E} = \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}^e, \quad (1)$$

$$-\mu \partial \mathbf{H} / \partial t - \sigma^m \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{E} + \mathbf{J}^m, \quad (2)$$

$$\text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \rho^e, \quad (3)$$

$$\text{div}(\mu \mathbf{H}) = \rho^m, \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей;  $\epsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей область  $D$ ;  $\sigma^e$  и  $\sigma^m$  – электрическая и магнитная проводимости среды;  $\mathbf{J}^e$  и  $\mathbf{J}^m$ ,  $\rho^e$  и  $\rho^m$  – плотности сторонних электрического и магнитного токов и зарядов, соответственно.

Следует отметить, что если уравнения (3) и (4) выполняются в начальный момент времени и в процессе решения законы сохранения электрических и магнитных зарядов выполняются, то эти уравнения будут справедливы и во все последующие моменты времени, как это видно из уравнений (1), (2). Таким образом, при указанных условиях для расчета поля достаточно решать уравнения (1) и (2). Это обстоятельство значительно упрощает алгоритм моделирования, если в расчетной области отсутствуют свободные токи и заряды или в процессе решения обеспечивается выполнение законов сохранения заряда.

Метод КРВО основан на замене пространственных и временных производных в уравнениях (1) и (2) центральными конечными разностями. С этой целью на исследуемую область накладываются пространственная и временная

сетки, причем значения различных составляющих электрического и магнитного полей определяются в узлах сеток, сдвинутых относительно друг друга на половину шага. Как правило, используются сетки с ячейками в виде прямоугольника (параллелепипеда), хотя возможно применение криволинейных сеток [7] и/или нескольких сеток с различными шагами [8].

Рассмотрим применение метода КРВО для расчета электромагнитного поля в двумерной области  $D$ , ограниченной замкнутой кривой  $L$ . Считаем, что область расположена в плоскости  $(x,z)$  декартовой системы координат и вариации поля по третьей координате  $y$  отсутствуют ( $\partial/\partial y=0$ ). Кроме того, предполагается, что магнитные проводимость, плотность тока и плотность заряда равны нулю. Плотность стороннего электрического тока также полагаем равной нулю, что позволяет использовать только первые два уравнения Максвелла. Этот пример позволяет продемонстрировать все особенности метода и в то же время избежать громоздких выражений, характерных для анализа трехмерных областей или при использовании криволинейных систем координат.

В данном случае поля  $E$ - и  $H$ -типов разделяются и их можно рассматривать по отдельности. Поле  $E$ -типа, в частности, содержит составляющие  $E_x$ ,  $E_z$  и  $H_y$ . Уравнения (1) и (2) соответственно принимают вид

$$\epsilon \partial E_x / \partial t + \sigma^e E_x = -\partial H_y / \partial z - J_x^e, \quad (5)$$

$$\epsilon \partial E_z / \partial t + \sigma^e E_z = \partial H_y / \partial x - J_z^e, \quad (6)$$

$$\mu \partial H_y / \partial t = \partial E_z / \partial x - \partial E_x / \partial z. \quad (7)$$

Наложим на область  $D$  прямоугольную сетку с шагами  $h_x$  и  $h_z$  по координатам  $x$  и  $z$ , соответственно. Граница области обычно аппроксимируется ступенчатой линией, проходящей по линиям сетки. В последнее время были разработаны и алгоритмы более точной аппроксимации криволинейных границ [9].

Определим координаты узлов (точек в которых вычисляются значения составляющих поля) следующим образом (рис. 1): для  $E_x$   $x=(j-0.5)h_x$ ,  $z=(i-1)h_z$ ; для  $E_z$   $x=(j-1)h_x$ ,  $z=(i-0.5)h_z$ ; для  $H_y$   $x=(j-0.5)h_x$ ,  $z=(i-0.5)h_z$ . Здесь  $i, j$  – индексы, характеризующие положение ячейки сетки.

Введем также сетку во времени с шагом  $h_t$ , причем значения напряженности электрического поля в узлах пространственной сетки вычисляются в моменты времени  $t_k=(k-1)h_t$ , а значения напряженности магнитного поля – в моменты времени  $t_{k+1/2}=(k+0.5)h_t$ .

Заменяя производные в уравнениях (5) и (6) конечными разностями, после несложных преобразований получим

$$E_x^{k+1}(i, j+1/2) = (B/A)E_x^k(i, j+1/2) - A^{-1}[\hat{H}_y^{k+1/2}(i+1/2, j+1/2) - \hat{H}_y^{k+1/2}(i-1/2, j+1/2)] - A^{-1}\hat{J}_x^{k+1/2}(i, j+1/2), \quad (8)$$

$$E_z^{k+1}(i+1/2, j) = (B/A)E_z^k(i+1/2, j) - (A\xi)^{-1}[\hat{H}_y^{k+1/2}(i+1/2, j+1/2) - \hat{H}_y^{k+1/2}(i+1/2, j-1/2)] - (A\xi)^{-1}\hat{J}_z^{k+1/2}(i+1/2, j), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_y^{k+1/2} = & \hat{H}_y^{k-1/2} - \hat{\mu}_r^{-1}[E_x^k(i+1, j+1/2) - E_x^k(i, j+1/2)] + \\ & + (\hat{\mu}_r \xi)^{-1}[E_z^k(i+1/2, j+1) - E_z^k(i+1/2, j)], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\xi = h_x/h_z, \quad \gamma = \xi/(\xi^2+1)^{1/2}, \quad h_t = \alpha\gamma h_z \mu_m / c,$$

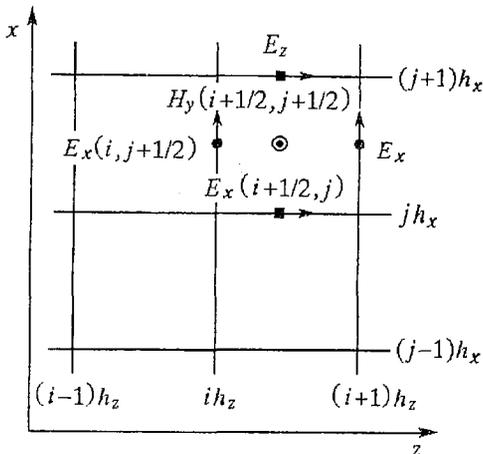


Рис. 1. Двухмерная сетка

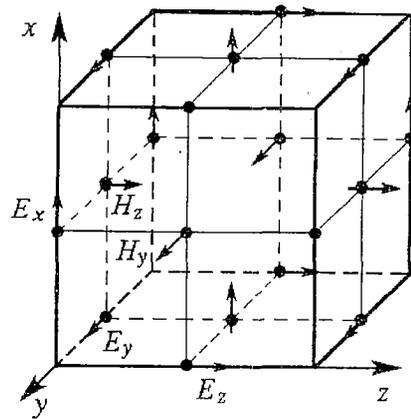


Рис. 2. Ячейка трехмерной сетки

$$A = \epsilon_r J(\alpha \gamma n_m) + \sigma Z_0 h_z / 2, \quad B = \epsilon_r J(\alpha \gamma n_m) - \sigma Z_0 h_z / 2, \quad Z_0 = (\mu / \epsilon)^{1/2},$$

$$\hat{\mu}_r = \mu_r / (\alpha \gamma n_m), \quad \hat{H}_y = Z_0 H_y, \quad \hat{J} = J Z_0 h_z.$$

Здесь  $c$  — скорость света;  $n_m = (\epsilon_{r \min} \mu_{r \min})^{1/2}$ ;  $\epsilon_{r \min}$ ,  $\mu_{r \min}$  — минимальные значения относительной диэлектрической и магнитной проницаемостей в области  $D$ . При выводе этих выражений учитывается, что шаги по координатам и времени связаны условием стабильности Крамера:  $h_r = (\alpha n_m / c)(h_z^{-2} + h_x^{-2})^{1/2}$ ,  $\alpha \leq 1$ .

Приведенные выражения легко обобщаются на расчет поля в трехмерных областях [10]. На рис. 2 изображены ячейка трехмерной пространственной сетки и точки определения узловых значений составляющих напряженности электрического и магнитного полей. Узлы электрического поля расположены в середине ребер ячейки, а магнитного поля — в центрах ее граней.

Предложены также специальные конфигурации сеток и конечно-разностные уравнения для расчета поля в областях с аксиальной симметрией [11]. Алгоритмы КРВО с более высоким порядком аппроксимации производных позволяют с большой точностью рассчитывать поле в областях, размеры которых составляют несколько тысяч длин волн [12]. С другой стороны, специальные разновидности метода КРВО разработаны для моделирования поля в хорошо проводящих средах, где из-за сильного затухания волны распределение поля в пределах одной ячейки сетки нельзя считать линейным [13].

## 2. Свойства заполняющей среды

До сих пор предполагалось, что расчетная область заполнена линейной однородной изотропной средой, не обладающей пространственной и временной дисперсией. Метод КРВО, однако, успешно применяется и для моделирования электромагнитного поля в более сложных средах. Так, если заполняющая среда кусочно-неоднородна, уравнения (8)–(10) справедливы внутри каждого блока с постоянными электрофизическими параметрами. На границе блоков касательные составляющие напряженности электрического и магнитного полей должны быть непрерывны. Это условие обеспечивается для тех составляющих поля, которые определены в узлах, находящихся на поверхности раздела. Равенство касательных составляющих, определенных в других узлах, обеспечивается приближенно.

Алгоритм моделирования усложняется, если в области  $D$  присутствуют анизотропные среды. В этом случае конечно-разностные уравнения содержат «лишние» пространственные производные электрического и магнитного полей, что требует модификации схемы размещения узлов в ячейке сетки.

Соответствующие выражения приведены, например, в работах [14,15]. Для моделирования электромагнитного поля в устройствах, содержащих гиротропные среды, разработаны алгоритмы, учитывающие как анизотропию, так и диссипацию и основанные на совместном численном решении уравнений Максвелла и уравнения движения вектора намагниченности [16].

Многие современные устройства СВЧ и оптоэлектроники работают в очень широкой полосе частот, в которой проявляется зависимость параметров среды от частоты (временная дисперсия). Метод КРВО позволяет учесть временную дисперсию среды, используя уравнения электрической поляризации и/или намагничивания, отражающие микроскопические процессы в среде. В этом случае уравнение (1) записывается в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \partial \mathbf{P} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}$  – вектор электрической поляризации,  $\kappa$  – электрическая восприимчивость. Наиболее часто применяется уравнение поляризации Друде – Лоренца

$$\partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2 + (2/\tau) \partial \mathbf{P} / \partial t + \omega_0^2 \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\omega_0^2 \kappa_0 - \omega^2 \kappa_\infty) \mathbf{E}, \quad (12)$$

где  $\kappa_0$  и  $\kappa_\infty$  – значения восприимчивости на очень низких и очень высоких частотах, соответственно. Возможно использование и более общих соотношений.

Для моделирования поля в средах с временной дисперсией разработано несколько алгоритмов. Один из них основан на непосредственной дискретизации дифференциального соотношения между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  [17]

$$g_0 \mathbf{D} + g_1 \partial \mathbf{D} / \partial t + g_2 \partial^2 \mathbf{D} / \partial t^2 + \dots = q_0 \mathbf{E} + q_1 \partial \mathbf{E} / \partial t + q_2 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 + \dots, \quad (13)$$

эквивалентного Паде–аппроксимации частотной зависимости диэлектрической проницаемости.

Широко используется метод, основанный на применении Z–преобразования временной зависимости диэлектрической проницаемости, полученной в результате дискретного преобразования Фурье частотной зависимости диэлектрической проницаемости [18,19].

Используется также дискретная свертка вектора электрической индукции [20]

$$\mathbf{D}^k = \varepsilon_0 (1 + \kappa_\infty) \mathbf{E}^k + \varepsilon_0 \sum_{m=0}^{k-1} [\mathbf{E}^{k-m}]_{mh,}^{(m+1)h,} \kappa(\tau) d\tau$$

или плотности тока проводимости в плазме [21]

$$\mathbf{J}(t) = \int_0^t \hat{\sigma}^e(t-\tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau,$$

где  $\hat{\sigma}^e(t) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \exp(-\nu t) u(t)$  – дифференциальная электрическая проводимость,  $\omega_p$  – плазменная частота,  $\nu$  – частота соударений,  $u(t)$  – единичная функция.

Определенные преимущества имеет метод [22], основанный на аналитическом решении уравнения поляризации Друде – Лоренца (12)

$$\mathbf{P} = C \int_0^t \mathbf{E}(\xi) [\exp(S_1(t-\xi)) - \exp(S_2(t-\xi))] d\xi,$$

где  $S_{1,2} = \tau^{-1} [-1 \pm (1 - \omega_0^2 \tau^2)^{1/2}]$ . Дискретизация этого решения позволяет получить рекуррентную формулу для производной вектора поляризации, входящей в уравнение (11), что значительно сокращает объем вычислений и требуемую память.

Конечно–разностные уравнения получены также для нелинейных сред, встречающихся в технике СВЧ и оптике [23], а также для сред с нелинейной

проводимостью [24]. Авторы последней работы предложили два алгоритма решения нелинейного волнового уравнения для электрического потенциала  $V$

$$\nabla^2 V = \mu \epsilon \partial^2 V / \partial t^2 + \mu \sigma^e(V) \partial V / \partial t - \rho(V) / \epsilon.$$

Первый алгоритм предполагает явное задание зависимостей плотности объемного заряда и электропроводности среды от напряженности электрического поля

$$\sigma^e(V) = K_1 \rho^e(V), \quad \rho^e(V) = K_2 + K_3 E,$$

где  $K_1, K_2, K_3$  – константы, значения которых определяются свойствами среды. Второй алгоритм не требует задания функции  $\rho^e(V)$ , а для ее определения использует нелинейное уравнение непрерывности

$$\nabla(\sigma^e \nabla V) + \partial \rho / \partial t = 0.$$

В результате дискретизации этих уравнений по схеме Йи получается система алгебраических уравнений относительно значений потенциала и плотности объемного заряда в узлах сетки, которые необходимо решать совместно.

### 3. Начальные и граничные условия

Для существования и единственности решения уравнений (5), (6) необходимо задать электрическое и магнитное поле в начальный момент времени во всей области  $V$ . Начальное распределение поля должно удовлетворять уравнениям (3), (4). Кроме того, на поверхности  $S$  электромагнитное поле должно удовлетворять определенным граничным условиям. В качестве таких условий на различных участках границы области могут быть заданы

- граничные условия типа электрической стенки  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ ,
- граничные условия типа магнитной стенки  $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ ,
- импедансные граничные условия  $\mathbf{E}_\tau = Z_s (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$ ,
- условия на оси симметрии (при расчете поля в областях с аксиальной симметрией)  $E_r = 0, \partial E_r / \partial r = 0$ .

В этих выражениях  $\mathbf{E}_\tau$  – касательная к поверхности  $S$  составляющая напряженности электрического поля,  $Z_s$  – поверхностное сопротивление,  $\mathbf{n}$  – орт внутренней нормали к поверхности.

При моделировании поля в открытых областях (например, при решении задач дифракции, рассеяния, излучения) необходимо ограничивать расчетную область некоторой поверхностью  $S$  с такими граничными условиями на ней, чтобы она поглощала все падающее изнутри излучение. Эти граничные условия называют абсорбирующими (АГУ). Чем больше точность задания АГУ, тем меньше может быть размер расчетной области и погрешность результатов. Наиболее простыми являются АГУ Зоммерфельда, получаемые из волнового уравнения [25],

$$v \partial A / \partial z \mp \partial A / \partial t = 0,$$

где  $A$  – любая составляющая электромагнитного поля волны, касательная к границе,  $v$  – скорость волны. Верхний знак соответствует распространению волны в положительном направлении оси  $z$ , а нижний – в отрицательном. Предполагается, что ось  $z$  нормальна к границе. После дискретизации этого выражения получаем [26]

$$E_x^{k+1}(i_B, j+1/2) = E_x^k(i_B-1, j+1/2) +$$

$$+ \{[\alpha \gamma_m + n(i_B, j+1/2)] / [\alpha \gamma_m - n(i_B, j+1/2)]\} [E_x^{k+1}(i_B-1, j+1/2) - E_x^k(i_B, j+1/2)],$$

где  $i_B$  – значение индекса  $i$  на границе области,  $n(i_B, j+1/2)$  – показатель

преломления среды вблизи границы. Обобщение этих условий на случай наклонного падения волны приводит к выражению [27]

$$v\partial A/\partial\xi \mp \cos\phi\partial A/\partial t = 0,$$

$\phi$  – угол между нормалью к границе и направлением  $\xi$  распространения волны.

Большую точность аппроксимации обеспечивают АГУ Зоммерфельда второго порядка. Так, для границы, расположенной в плоскости  $(x,y)$  эти условия имеют вид [27]

$$[v\partial/\partial z(\partial/\partial t) - \partial^2/\partial t^2 + (v^2/2)(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)]A,$$

однако, они также справедливы только при нормальном падении. Предложены и более сложные АГУ Зоммерфельда второго порядка [28].

Условия Зоммерфельда удобно использовать, если в расчетной области распространяется плоская волна. В большинстве задач поле излучения или рассеяния имеет более сложную структуру. В таких случаях хорошие результаты дают граничные условия типа «идеально согласованного слоя» (ИСС) [29]. В соответствии с этим методом расчетная область окружается снаружи поглощающим слоем толщиной 6–10 шагов сетки. В поглощающем слое электромагнитное поле «расщепляется».

Например, из уравнения Максвелла

$$\varepsilon\partial E_x/\partial t + \sigma^e E_x = \partial H_z/\partial y - \partial H_y/\partial x \quad (14)$$

следует, что  $E_x$  можно представить в виде суммы двух членов

$$E_x = E_{xz} + E_{xy}.$$

Уравнение (14) в результате разделяется на две части

$$\varepsilon\partial E_{xz}/\partial t + \sigma_z^e E_{xz} = \partial H_z/\partial y, \quad (15)$$

$$\varepsilon\partial E_{xy}/\partial t + \sigma_y^e E_{xy} = \partial H_y/\partial x. \quad (16)$$

Составляющие напряженности магнитного поля также расщепляются

$$H_z = H_{zy} + H_{zx},$$

$$-\mu\partial H_{zy}/\partial t - \sigma_y^m H_{zy} = \partial E_z/\partial y,$$

$$-\varepsilon\partial H_{zx}/\partial t - \sigma_x^m H_{zx} = \partial E_y/\partial x.$$

Таким образом, уравнения (15), (16) принимают вид

$$\varepsilon\partial E_{xz}/\partial t + \sigma_z^e E_{xz} = \partial H_{zy}/\partial y - \partial H_{zx}/\partial x,$$

$$\varepsilon\partial E_{xy}/\partial t + \sigma_y^e E_{xy} = \partial H_{yx}/\partial y - \partial H_{yz}/\partial z.$$

Всего для трехмерной области получается 12 уравнений, связывающих «расщепленные» значения составляющих поля, причем среда, заполняющая поглощающий слой, имеет анизотропные электрическую и магнитную проводимости. Для полного согласования слоя с внутренней областью необходимо выполнение соотношений

$$\sigma_{ii}^e/\varepsilon = \sigma_{ii}^m/\mu.$$

Как показано в работе [30], поглощающий слой является активной средой с распределенными зависимыми источниками, которые и обеспечивают отсутствие

отражений от него. Использование ИСС требует расширения расчетной области за счет поглощающего слоя и увеличивает число неизвестных в разностных уравнениях, что приводит к возрастанию объема вычислений.

Другой подход к реализации АГУ, не требующий расширения расчетной области, – использование прозрачной поглощающей границы (ППГ) [31]. Авторы вводят вспомогательные поля  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$ , стремящиеся к нулю по мере приближения к границе области. Эти поля связаны с физическими полями  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  соотношениями

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) = F(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{r},t) = F(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r},t), \quad (17)$$

где  $F(\mathbf{r})$  – ограниченная дифференцируемая функция, не равная нулю внутри области  $D$  и принимающая нулевые значения на ее границе. Подставив выражения (17) в (1)–(4), получим уравнения для вспомогательных полей, дискретизация которых позволяет реализовать процесс моделирования вспомогательного поля во времени. Для определения физических полей необходимо выполнить преобразование, обратное (17). При реализации метода ППГ необходимо учитывать, что малость полей вблизи границы и пространственное разделение узлов для электрического и магнитного полей может приводить к появлению искусственной электрической или магнитной стенки. Для исключения этого явления в работе предложены специальные процедуры.

#### 4. Моделирование источников возбуждения

Возбуждение поля в расчетной области может производиться с помощью различных источников. Если область возбуждается через участок границы, на нем задается пространственное и временное распределение касательной составляющей электрического или магнитного поля. При решении задач рассеяния и дифракции требуется облучение анализируемого объекта плоской волной, входящей в область в определенном направлении. Для решения этой задачи строится одномерный КРВО – алгоритм на линии, проходящей через расчетную область в заданном направлении, а затем полученные значения напряженностей поля экстраполируются по фронтальным плоскостям, проходящим через узлы одномерной сетки [32].

Сосредоточенные источники напряжения и тока также легко моделируются в рамках метода КРВО. Они занимают одну ячейку сетки и создают в ней электрическое поле с напряженностью  $E_x = V/h_x$  (для источника напряжения  $V$ , действующего в направлении  $x$ ) или ток плотности  $J_x = I/(h_y h_z)$  (для источника тока  $I$ , действующего в том же направлении).

Источники возбуждения могут быть как замещающими, так и аддитивными [33]. В первом случае поле в области возбуждения не рассчитывается по схеме КРВО, а определяется только источником. Во втором случае поле источника складывается с полем, рассчитанным методом КРВО. Такой способ возбуждения часто бывает предпочтительным, так как не приводит к появлению искусственных отражений от источника.

#### 5. Характеристики стационарного режима

Классический алгоритм КРВО позволяет моделировать электромагнитное поле, возбуждаемое источниками с произвольной временной зависимостью. Соответственно, результатом моделирования являются составляющие электромагнитного поля в каждом узле пространственной сетки в каждый момент времени, кратный  $h_t$ . Часто, однако, требуется определить характеристики стационарного режима системы – ее собственные частоты и собственные функции, распределение поля в расчетной области при гармоническом возбуждении, мощность излучения, мощность тепловых потерь и т.п. Эти

характеристики могут быть найдены с помощью преобразования Фурье для временной зависимости поля в некоторой точке области. При этом источник возбуждения должен обеспечивать достаточно широкий спектр отклика с тем, чтобы его спектральная плотность на заданной частоте была достаточно велика. Обычно для вычисления спектра используют возбуждение системы гауссовым импульсом. Собственные частоты системы соответствуют пикам полученного в результате дискретного преобразования Фурье спектра. Распределение поля на каждой частоте получают, возбуждая систему гармоническим сигналом с частотой, равной собственной.

Расчет диаграмм направленности и радиолокационного сечения рассеяния требует вычисления поля в дальней зоне по отношению к расчетной области. Для этого используется поле, вычисленное на поверхности вблизи границы и формулы Гюйгенса – Френеля. Однако, поскольку электрическое и магнитное поля определены на разных поверхностях, возникает дополнительная погрешность вычисления поля в дальней зоне. Для минимизации этой погрешности предложены специальные алгоритмы [34].

### Библиографический список

1. *Hahn W.C.* A new method for the calculation of cavity resonators//J. Appl.Phys. 1941. Vol. 12. P. 62.
2. *Григорьев А.Д., Янкевич В.Б.* Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. М.: Радио и связь, 1984.
3. *Григорьев А.Д., Силаев С.А.* Трехмерные математические модели волновых электромагнитных полей // Вестник МГУ. Сер. Физика, астрономия. 1992. Т. 33, № 3. С. 20.
4. *Yee K.S.* Numerical solution of initial boundary wave problems involving Maxwell's equations in isotropic media// IEEE Trans. on AP. 1966. Vol. AP 14, № 5. P.302.
5. *Johns P.B., Beurle R.L.* Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission line matrix // IEE Proc. 1971. Vol. 118, № 9. P.1203.
6. *Johns P.B.* Simulation of electromagnetic wave interaction by transmission line modeling (TLM)// Wave motion. 1988. Vol. 10, № 6. P.597.
7. *Monorchio A., Mittra R.* Time-domain (FE/FDTD) technique for solving complex electromagnetic problems // IEEE Microwave & guided waves letters. 1998. Vol. 8, № 2. P. 93.
8. *Kunz K.S., Luebbers R.J.* The finite difference time domain method for electromagnetics. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
9. *Yang H., Railton C.J.* Efficient and accurate FDTD algorithm for the treatment of curved material boundaries // IEE Proc. MWAP. 1997. Vol. 144, № 5. P. 382.
10. *Sheen D.M., Ali S.M., Abouzahra M.D., Kong J.A.* Application of the three dimensional finite-difference time-domain method to the analysis of planar microstrip circuits // IEEE Trans. on MTT. 1990. Vol. MTT 38. P. 849.
11. *Chen Y., Mittra R., Harms P.* Finite-difference time-domain algorithm for solving Maxwell's equations in rotationally symmetric geometries // IEEE Trans. on MTT. 1996. Vol. 44. P. 832.
12. *Hadi M.F., Piket Mou M.* A modified FDTD (2,4) scheme for modeling electrically large structures with high-phase accuracy // IEEE Trans. on AP. 1997. Vol. 45, № 2. P. 254.
13. *Chamberlin K., Gordon L.* Modeling good conductors using the finite difference time-domain technique// IEEE Trans. on EMC. 1998. Vol. 37, № 2. P.210.
14. *Schneider J., Hudson S.* The finite-difference time-domain method applied to anisotropic material // IEEE Trans. on AP. 1993. Vol. 41. P. 994.
15. *Garc'ia S.G., Hung Bao T.M., R. Mart'in G., Olmedo B.G.* On the application of finite methods in time domain to anisotropic dielectric waveguides // IEEE Trans. MTT. 1996. Vol. 44. P. 2195.
16. *Yildirim B.S., El-Sharavy E.* Finite-difference time-domain analysis of microwave ferrite devices // Proc. of the 3rd Int. Symp. on MTT. 1997. Part 1. P.813.

17. *Joseph R.M., Hagness S.C., Taflove A.* Direct time integration of Maxwell's equations in linear dispersive media with absorption for scattering and propagation of femtosecond electromagnetic pulses // *Opt. letters.* 1991. Vol. 16. P. 1412.
18. *Sullivan D.M.* Frequency-dependent FDTD methods using Z-transforms // *IEEE Trans. on AP.* 1992. Vol. 43. P. 1223.
19. *Sullivan D.M.* Z-transform theory and FDTD method // *IEEE Trans. on AP.* 1996. Vol. 44. P.28.
20. *Luebbers R.J., Hunsberger F. et al.* A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials // *IEEE Trans. on EMC.* 1990. Vol. 32. P. 222.
21. *Chen Q., Katsurai M., Aoyagi P.H.* An FDTD formulation for dispersive media using a current density // *IEEE Trans. on AP.* Vol. 46. P. 1739.
22. *Andreev J.V., Grigoriev A.D.* Simulation of transient electromagnetic fields in regions filled with dispersive medium // *XI Int. School on Micr. Elect & Radiophys. Book of Abstracts.* Russia, Saratov, 1999 March 2–6.
23. *Joseph R.M., Taflove A.* FDTD Maxwell's equations models for nonlinear electrodynamics and optics // *IEEE Trans. on AP.* 1997. Vol. 45, № 3. P. 364.
24. *Buccella C., Orlandi A.* Time domain iterative methods for inhomogeneous and non-linear wave equations in lossy media // *Proc. of the 3d Int. conf. Computation in electromagnetics.* 1996. Venue, Univ. of Bath, UK. P. 265.
25. *Mur G.* Absorbing boundary conditions for finite-difference approximation of time-domain electromagnetic field equation // *IEEE Trans. on EMC.* 1981. Vol. 23. P. 377.
26. *Blashak J.G., Kriegsman.* A comparative study of absorbing boundary conditions // *J. Comp. Phys.* 1988. Vol. 77. P. 109.
27. *Engquist B., Majda A.* Absorbing boundary conditions for the numerical simulations of waves // *Math. of Comp.* 1977. Vol. 31. P. 629.
28. *Ait-Sadi R., Emson C.R.I.* Practical experience in using absorbing boundary conditions with FDTD method // *Proc. of the 3d Int. conf. Computation in electromagnetics.* 1996. Venue, Univ. of Bath, UK. P. 36.
29. *Berenger J.P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *J. Comp. Phys.* 1994. Vol. 114. P. 185.
30. *Mitra R., Pikel U.* A new look at the perfectly matched layer (PML) concept for the reflectionless absorption of electromagnetic waves // *IEEE Microwave & guided wave letters.* 1995. Vol. 5. P. 84.
31. *Peng J., Balanis A.* A generalized reflection free domain-truncation method: transparent absorbing boundary // *IEEE Tans. on AP.* 1998. Vol. 46. P. 1015.
32. *Oğez U., Gürel L., Arihan O.* An efficient and accurate technique for the incident wave excitations in the FDTD method // *IEEE Trans. on MTT.* 1998. Vol. 46, № 6. P. 2189.
33. *Buechler D.N., Roper D.H., Durney C.H., Christensen D.A.* Modeling sources in FDTD formulation and their use in quantifying source and boundary conditions errors // *IEEE Trans. on MTT.* 1995. Vol. 43. P. 810.
34. *Martin T.* An improved near- to far-zone transformation for the finite-difference time-domain method // *IEEE Trans. on AP.* 1998. Vol. 46, № 9. P. 1263.

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет

Поступила в редакцию 27.04.99

## MODERN METHODS FOR TRANSIENT ELECTROMAGNETIC FIELDS SIMULATION

*A.D. Grigoriev*

Modern methods and algorithms for numerical simulation of transient electromagnetic fields are described. Main attention is paid to the Finite Difference Time Domain method. Basic equations of the method, algorithms of media properties implementation, such as nonhomogeneity, anisotropy, dispersion, non linearity are discussed. Methods of initial and boundary conditions approximation, sources of excitation determining, computational region truncating in case of solving outer boundary electrodynamic problems, algorithms of circuit parameters evaluation from the results of simulation are also presented.



*Григорьев Андрей Дмитриевич* родился в 1937 году в Ленинграде. Окончил Ленинградский электротехнический институт (ЛЭТИ, 1960). После окончания института работал в Физико-техническом институте АН СССР им. А.Ф. Иоффе, в 1963 году поступил в аспирантуру ЛЭТИ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в области теории колебаний в импульсных генераторах с задержанной обратной связью (1967) и диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук в области разработки и применения численных методов расчета электродинамических систем электронных приборов СВЧ (1984). В настоящее время работает в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете. Область научных интересов электродинамика и электроника СВЧ, применение электромагнитных колебаний СВЧ-диапазона в технологии. Автор монографии и учебника для вузов.

Опубликовал более 150 работ в периодических изданиях и трудах конференций. Член редколлегии журнала «Известия вузов России. Радиоэлектроника», член головного совета Министерства общего и профессионального образования «Радиотехника, электроника и физика твердого тела», член нескольких диссертационных советов. E-mail: adgrigoriev@eltech.ru



## ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАРШЕГО ЛЯПУНОВСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВРЕМЕН ВОЗВРАТА: ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ

*А.Н. Павлов, В.С. Анищенко*

Мы анализируем возможность определения динамических характеристик хаотического аттрактора по последовательности времен возврата и исследуем вопрос о влиянии выбора секущей плоскости на результат реконструкции. На примере модели Ресслера продемонстрировано, что старший ляпуновский показатель может быть определен по последовательности времен возврата в секущую даже в том случае, когда не все фазовые траектории ее пересекают.

### Введение

Процесс эволюции многих систем сопровождается повторяющимися резкими изменениями во времени физических переменных. Данная ситуация достаточно типична для целого ряда биологических объектов и наблюдается в нейробиологии («зажигания» нейронов, соответствующие «спайкам» напряжения [1]), в кардиологии (зубцы электрокардиограммы [2]), в микробиологии (осцилляции мембранного потенциала клеток – «берсты» [3]) и т.д. Анализ систем, демонстрирующих подобное поведение, часто проводится на основе обработки временных интервалов между последовательными «событиями», генерируемыми в ходе эволюции (например, «interspike intervals» (ISI) [4], исследование которых мы будем проводить в настоящей работе).

В литературе обычно выделяют две модели генерации «спайков». В рамках модели «integrate-and-fire» (IF) [5–7] рассматривается сигнал  $S(t)$ , чаще всего представляющий собой линейное преобразование временной зависимости одной из переменных маломерной динамической системы (ДС) либо функцию нескольких переменных. Данный сигнал интегрируется с некоторого момента  $T_0$ , а времена  $T_i$ , соответствующие «спайкам», определяются уравнением

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt = \theta, \quad I_i = T_{i+1} - T_i, \quad (1)$$

где  $\theta$  – пороговый уровень,  $I_i$  – временные интервалы (IF ISI). При достижении порога генерируется кратковременный импульс (рис.1, а) и обнуляется значение интеграла.

Другая модель, «threshold-crossing» (TC) [6], предполагает введение порогового уровня  $\theta$ , который в данном случае задает уравнение секущей  $S=\theta$ , и

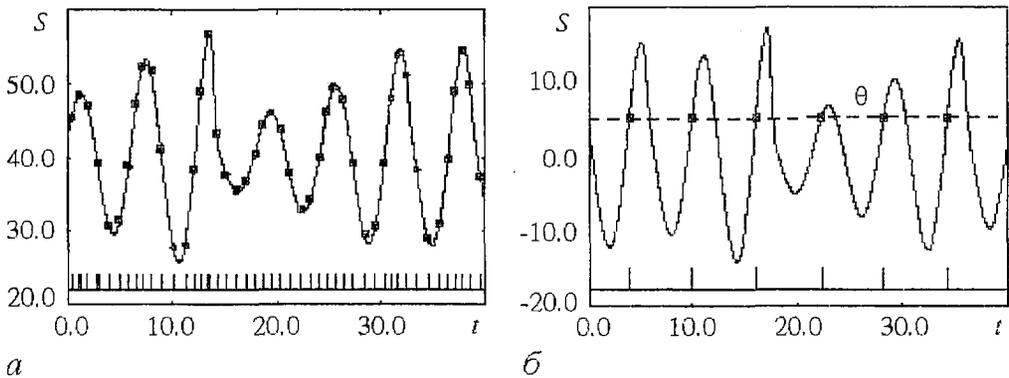


Рис. 1. Нейронные модели: а – IF; б – TC. Точками на сигналах  $S(t)$  обозначены моменты времени, соответствующие достижению порога и генерации «спайков». Внизу на каждом рисунке изображена последовательность «спайков», представляющая собой сигнал на выходе системы

запись интервалов времени между пересечениями данного уровня (TC ISI) сигналом  $S(t)$  в одном направлении, например, снизу вверх (рис. 1, б). Для аттрактора динамической системы TC ISI соответствуют временам возврата в секущую плоскость.

Проблема анализа ISI является актуальной в тех случаях, когда полная реализация интересующего нас процесса  $S(t)$  по тем или иным причинам не может быть записана, и единственно доступный сигнал представляет собой последовательность времен, соответствующих «спайкам». Классическим примером служит сенсорный нейрон, который может быть рассмотрен как некоторое пороговое устройство, преобразующее входной сигнал  $S(t)$  в последовательность «спайков», генерируемых при превышении порога. Данное преобразование неоднократно исследовалось ранее с позиции теории информации [8].

В последние годы появился новый взгляд на сигналы типа ISI. Они стали рассматриваться в качестве координаты состояния, с помощью которой может быть охарактеризована динамика хаотического сигнала на входе нейрона [5–7,9–11]. В [5] была продемонстрирована возможность реконструкции хаотического аттрактора, соответствующего входному сигналу, по последовательности временных интервалов IF ISI методом задержки [12], рассмотрены вопросы отличия детерминированного сигнала, управляющего «зажиганиями» нейрона, от случайного процесса путем вычисления ошибки предсказания, проведены расчеты корреляционной размерности [6]. Позднее была доказана теорема Зауэра<sup>1</sup> (теорема вложения для временных интервалов IF ISI) [7] и обоснована возможность реконструкции по последовательности времен возврата в секущую плоскость (TC ISI) [9]. Детальное исследование различных нейронных моделей с точки зрения реконструкции хаотического аттрактора, соответствующего сигналу на входе, предпринято в [10]. В [13] предложена интерпретация времен возврата на основе концепции аналитического сигнала и представлений о мгновенной частоте хаотических колебаний, а также определены метрические и динамические характеристики аттракторов некоторых ДС по последовательностям TC ISI.

<sup>1</sup> Учитывая, что работа [7] может быть недоступна российскому читателю, мы приводим формулировку теоремы Зауэра: Пусть  $dx/dt=f(x)$  есть система дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условию Липшица на компактном инвариантном подмножестве  $A$  в  $R^k$ . Предположим, что  $m$  есть целое, большее чем  $2d_0(A)$ , и что  $A$  не содержит точек, соответствующих состояниям равновесия системы. Тогда существует открытая область  $C$  в некотором  $R^p$  и гладкое семейство  $\{q_c: R^k \rightarrow R\} c \in C$  гладких функций, таких что для каждой гладкой положительной действительной функции  $h: R^k \rightarrow R$  функция ISI-реконструкции  $G_{h+q_c}$  является взаимно однозначной на  $A$  почти для всех  $c \in C$ . Более подробная информация (препринты статей) доступна в сети Internet: <http://math.gmu.edu/~tsauer/pre/index.html>

В настоящей работе мы исследуем влияние величины порога и структуры временных интервалов на результат реконструкции. Данные исследования проводятся в терминах вычисления максимального ляпуновского характеристического показателя (ЛХП)  $\lambda_1$ , являющегося, «вероятно, наиболее информативным инвариантом сложного динамического процесса», как отмечается, например, в [14]. Мы сформулируем условия, при которых существует возможность вычисления  $\lambda_1$  по временным интервалам ТС ISI с помощью стандартных алгоритмов без их модификации.

В первом разделе мы кратко остановимся на методах расчета старшего ляпуновского показателя. Особенности определения ЛХП по сигналам типа ISI будут рассмотрены во втором разделе работы. В третьем разделе мы обсудим влияние величины порогового уровня  $\theta$ , а также предложим качественное объяснение полученных результатов. Основные выводы суммируются в заключении.

## 1. Методы расчета максимального показателя Ляпунова

В данном разделе мы кратко остановимся на методах расчета ЛХП, с тем чтобы ввести в рассмотрение некоторые параметры алгоритмов, которые нам потребуются для дальнейшего изложения. Как известно, для режима динамического хаоса характерно наличие экспоненциальной неустойчивости траекторий, количественной мерой которой является положительный ляпуновский показатель, характеризующий степень чувствительности системы к выбору начальных условий. Число положительных экспонент в спектре ЛХП определяется количеством неустойчивых направлений периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор, хотя возможны более сложные ситуации (состоящие в сосуществовании периодических орбит с различным числом неустойчивых направлений [15]). В рамках данной работы мы ограничимся рассмотрением динамических систем с одним положительным показателем Ляпунова  $\lambda_1$ . При вычислении  $\lambda_1$  делается предположение о «типичности» фазовой траектории, являющейся решением ДС при выбранных начальных условиях. В противном случае величина показателя, определенная на интервале времени  $T$ , может отличаться от предельного значения  $\lambda_1$ , соответствующего  $T \rightarrow \infty$ . В частности, в [16] (см. также ссылки в этой работе) приводится пример дискретного отображения с очень длительными переходными процессами (до 1500000 итераций система может демонстрировать «хаотическое» поведение, после чего режим динамики становится регулярным). С точки зрения вычисления ляпуновского показателя это соответствует тому, что величина  $\lambda_1$  в течение переходного процесса сходится к некоторому положительному значению и только на очень длительных временах спадает до нуля. Длительные переходные процессы и сложное поведение  $\lambda_1$  наблюдается в окрестности гомоклинической траектории седлового цикла при разрушении квазипериодических колебаний [17]. Чтобы охарактеризовать поведение типичной фазовой траектории, иногда используют понятие «ляпуновских показателей на конечном времени» (finite-time Lyapunov exponents), которые характеризуют скорость разбегания или сжатия по различным направлениям в течение конечного интервала времени  $T$  [15].

Если уравнения ДС, генерирующей фазовую траекторию, известны, то определить величину максимального показателя (или полный спектр ЛХП) можно с помощью хорошо известного алгоритма, предложенного в работах Бенеттина с соавторами [18], Шимады и Нагашимы [19]. Данный метод иногда называют «стандартным алгоритмом» расчета ляпуновских экспонент [20].

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(x, \mu), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \quad (2)$$

в которой  $x$  – вектор состояния,  $f$  – нелинейная вектор–функция,  $\mu$  – вектор управляющих параметров. Исследование системы (2) на устойчивость ее частного решения  $x_p(t)$  сводится к анализу уравнения в вариациях и введению понятия  $k$ -мерного ляпуновского показателя; однако если ограничиться только вычислением старшего ЛХП, алгоритм [18,19] существенно упрощается. Искомая величина  $\lambda_1$  будет определять эволюцию во времени вектора возмущения

$$r(t) = r_0 \exp(\lambda_1 t), \quad (3)$$

где  $r_0$  – расстояние между двумя близлежащими траекториями в фазовом пространстве в момент  $t_0=0$  ( $r_0=|x(t_0)-x_p(t_0)|$ ). Поскольку экспоненциальный закон разбегания траекторий (3) справедлив лишь для малых значений векторов  $r$ , при расчете  $\lambda_1$  проводятся перенормировки, в ходе которых задаются новые возмущения – малые по величине, но выбранные в направлении, соответствующем максимальному разбеганию траекторий; в результате вычисляется усредненная вдоль фазовой траектории количественная характеристика степени хаотичности. Различные аспекты проблемы расчета ЛХП можно найти, например, в работах [21].

Задача вычисления  $\lambda_1$  существенно усложняется, если уравнения ДС (2) неизвестны, однако к настоящему времени предложено множество алгоритмов расчета ляпуновских экспонент по экспериментальным данным [22–24]. Проблема вычисления динамических характеристик хаотических аттракторов по их одномерным реализациям за последние годы неоднократно обсуждалась в печати [25]. В настоящей работе мы проводили вычисление старшего ЛХП с помощью алгоритма [22], который напоминает подход [18,19] к решению данной задачи, но необходимость работы с единственной траекторией ограничивает возможности выбора вектора возмущения, заставляя искать компромисс между уменьшением ошибки его ориентации в фазовом пространстве и минимизацией его длины. Ошибки ориентации обусловлены невозможностью выбора вектора возмущения строго в заданном направлении, а ограничения на его длину могут быть сформулированы следующим образом:

$$l_1 < r < l_2. \quad (4)$$

Необходимость введения минимального значения  $l_1$  вызвана тем, что при  $r < l_1$  сказывается влияние шума, способного индуцировать дополнительное разбегание траекторий;  $l_2$  задает условие линейного приближения и обычно может быть введено заранее в процентном отношении от размера аттрактора (например, 5÷10%). По аналогии с [18,19] проводятся перенормировки вектора, если расстояние между траекториями перестает удовлетворять условию линейного приближения ( $r > l_2$ ).

Поскольку вычисление  $\lambda_1$  предполагает реконструкцию аттрактора, результат расчета данной величины будет зависеть от качества реконструкции [26], что приводит к появлению дополнительных параметров численной схемы – размерности пространства вложения, задержки и т.п. [12].

Заканчивая краткое изложение техники расчета ЛХП, обратим внимание на одно важное обстоятельство. В проводимых исследованиях мы рассматриваем случай, когда реализация, для анализа которой применяется алгоритм [22] (входной сигнал для моделей ИФ и ТС), является одномерной проекцией фазовой траектории, принадлежащей аттрактору ДС. В реальных экспериментах динамическая природа анализируемого сигнала не всегда может быть установлена. Если исследуемый сигнал не является детерминированным, говорить о ляпуновских показателях становится проблематично, и вместо  $\lambda_1$  алгоритм [22] позволяет определять лишь некоторую количественную характеристику степени чувствительности системы к выбору начальных условий [27] или меру предсказуемости.

## 2. Вычисление максимального показателя Ляпунова по последовательности ISI

Вопросы реконструкции хаотического аттрактора, соответствующего входному сигналу IF-модели, по последовательности временных интервалов исследовались в работах [5–11]. Качество реконструкции в значительной степени определялось выбором порога  $\theta$ . Как показано в [10], если частота «зажиганий» нейрона велика, применение интегральной теоремы о среднем позволяет рассматривать в некотором приближении IF ISI как нелинейное преобразование входного сигнала  $S(t)$

$$I_i \approx \theta/S_i, \quad S_i = S(T_i). \quad (5)$$

Поскольку старший ЛХП является инвариантом нелинейных преобразований, величина  $\lambda_1$ , вычисленная для аттрактора, реконструированного по IF ISI, должна совпадать со значением показателя, определенного по входному сигналу  $S(t)$ . Вопрос состоит лишь в том, какую методику выбрать для расчета показателя.

С одной стороны, мы можем рассматривать ISI исключительно как дискретную последовательность  $I_1, I_2, \dots, I_N$ , восстанавливать аттрактор методом задержки ( $I_i, I_{i+1}, \dots, I_{i+m-1}$ ) и определять для него меру хаотичности как усредненную за одну «итерацию» скорость потери информации о начальном состоянии; причем длительность «итерации» приближенно можно принять соответствующей среднему значению временного интервала  $\bar{I} = (1/N) \sum_{i=1}^N I_i$ . Мы проводили данные вычисления на примере системы Ресслера

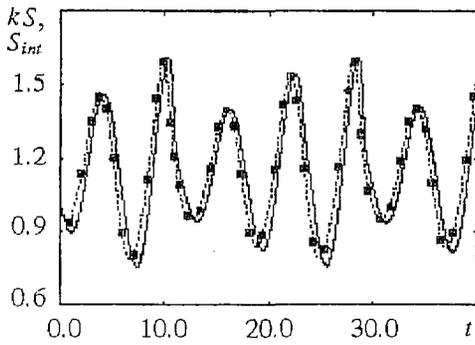
$$\begin{aligned} dx/dt &= -(y + z), \\ dy/dt &= x + ay, \\ dz/dt &= b + z(x - c) \end{aligned} \quad (6)$$

при значении параметров  $a=0.15, b=0.2, c=10.0$ , по аналогии с [10] выбрав в качестве входного сигнала  $S(t)=x(t)+40$  и зафиксировав порог  $\theta=35$ . При этом было получено заниженное значение старшего показателя Ляпунова (недооценка  $\lambda_1$  составляла приблизительно 25%).

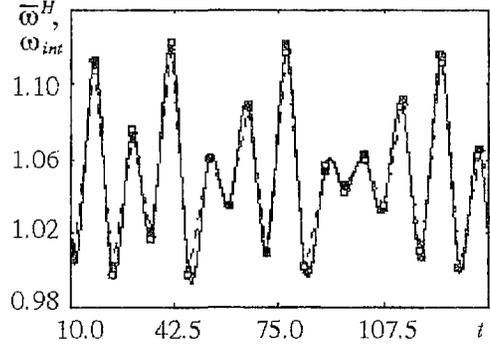
Другой подход к проблеме расчета ЛХП состоит в следующем. Если нам известна последовательность IF ISI, то, согласно (5),

$$1/I_i \approx (1/\theta)S_i = kS(T_i), \quad (7)$$

то есть в фиксированные моменты времени  $T_i$  мы можем определить значения входного сигнала, умноженные на постоянный множитель. Зная значения  $kS(T_i)$  и желая восстановить входной сигнал как непрерывную функцию времени, предлагается интерполировать точки  $1/I_i$ , рассмотренные в моменты времени  $T_i$ , гладкой функцией  $S_{\text{int}}(t)$  (например, кубическим сплайном). Интерполяция позволит перейти к постоянному шагу по времени и приближенно восстановить линейное преобразование входного сигнала, то есть  $kS(t)$  (рис. 2, а); следовательно,  $S_{\text{int}}(t)$  будет сохранять метрические и динамические характеристики сигнала на входе. Разумеется, сохранение характеристик хаотического аттрактора происходит с какой-то погрешностью, учитывая как ошибки интерполяции, так и приближенный характер соотношения (5). Однако, как видно из рис. 3, а, значение  $\lambda_1$ , вычисленное по сигналу  $S_{\text{int}}(t)$  с помощью алгоритма [22], совпадает с результатом расчета старшего ЛХП по исходному сигналу  $S(t)$ , причем точность вычисления оказалась выше, чем в предыдущем случае (по дискретной последовательности IF ISI). Мы склонны объяснять данное обстоятельство тем,

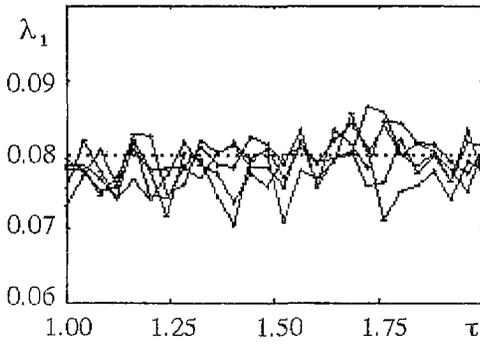


a

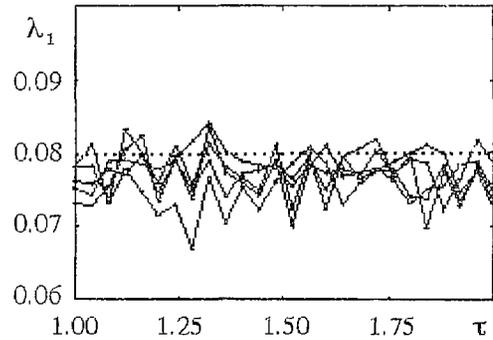


b

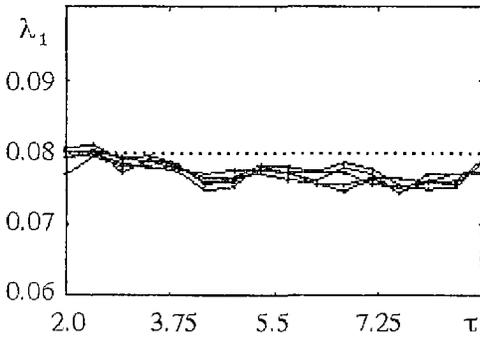
Рис. 2. a – линейное преобразование входного сигнала  $(1/\theta)S(t)$  – сплошная линия – и временная зависимость  $S_{int}(t)$  – результат интерполяции точек  $(1/I_i)(T_i)$  – пунктир. Небольшое смещение по оси времени может быть устранено, если в формуле (5) рассмотреть  $S_i = S(T_i + T_{i+1})/2$ ; б – точки усредненной мгновенной частоты по Гильберту  $\bar{\omega}^H(T_i)$  в моменты времени, соответствующие пересечению порога, (черные кружочки, соединенные пунктирной линией) и значения  $(2\pi I_i)(T_i)$  в те же моменты времени (белые кружочки, соединенные гладкой функцией  $\omega_{int}(t)$ )



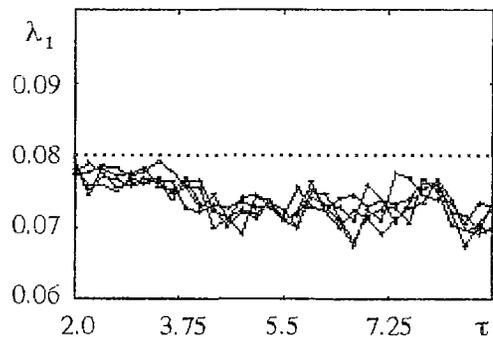
a



b



a



b

Рис. 3. Результаты расчета максимального показателя Ляпунова в зависимости от выбора задержки  $\tau$  при различных значениях параметра  $l_2$ , полученные по: a, б – последовательности IF ISI в отсутствие и при наличии флуктуаций, соответственно; a, 2 – последовательности TC ISI также в отсутствие и при наличии флуктуаций. Вычисления проводились при реконструкции аттрактора в 5-мерном пространстве. На всех рисунках пунктиром обозначена величина  $\lambda_1$ , вычисленная по входному сигналу  $S(t)$

что увеличение числа точек в интерполированной временной зависимости  $S_{\text{int}}(t)$  по сравнению с дискретной последовательностью ISI (соответственно, увеличение числа точек в восстановленном фазовом портрете) способствует уменьшению ошибки ориентации вектора возмущения при расчете ЛХП методом [22]. Для получения достоверных результатов расчет  $\lambda_1$  проводился при варьировании параметров алгоритма – задержки, размерности пространства вложения, параметра  $l_2$ , задающего условие линейного приближения (см. рис. 3,а).

Более сложную задачу представляет собой реконструкция динамических характеристик хаотического аттрактора по набору ТС ISI. Возможный вариант решения данной проблемы был предложен в работе [13] и состоял в следующем. Осуществлялся переход от набора временных интервалов  $I_i$  к точкам  $\omega(T_i)=2\pi/I_i$ , соответствующим значениям усредненной мгновенной частоты за время возврата  $I_i=T_{i+1}-T_i$ , где  $T_i$  – времена пересечения порогового уровня (то есть времена, соответствующие «спайкам»). Далее точки  $\omega(T_i)$  интерполировались гладкой функцией (также кубическим сплайном)  $\omega_{\text{int}}(t)$  для перехода к сигналу с равномерной выборкой (рис. 2, б), используемому при реконструкции аттрактора. Было показано [13], что данная временная зависимость позволяет качественно описать поведение истинной усредненной мгновенной частоты, и реконструированный аттрактор сохраняет характеристики хаотического аттрактора, соответствующего входному сигналу  $S(t)$  (рис. 3, в).

Хотя в последнем случае можно было использовать иные подходы к определению динамических характеристик (например, [24, 28]), мы решили остановиться на методе Вольфа с соавторами [22] и процедуре интерполяции, чтобы иметь возможность использовать один и тот же алгоритм вне зависимости от характера анализируемого сигнала.

Некоторые комментарии к методу [13]. Данная техника принципиально не работает при анализе однопериодических колебаний. В этом случае  $\omega(T_i)=\text{const}$ , и в отсутствие флуктуаций мы получим точку в фазовом пространстве. При наличии шумов мы можем зафиксировать некоторое движение, но расчеты динамических характеристик приведут к заведомо ошибочным результатам. В случае сложных периодических либо хаотических режимов происходит переход к медленным функциям времени (сопровождающийся, в частности, уменьшением тактности периодических колебаний), но метрические и динамические характеристики при этом сохраняются. Это подтверждают расчеты ляпуновских экспонент для системы Ресслера, генератора Анищенко – Астахова и ряда других моделей [13].

Для проверки работоспособности методики определения  $\lambda_1$  при наличии флуктуаций осуществлялось добавление нормально распределенных случайных величин аддитивно к входному сигналу (с дисперсией, равной 1% от  $S(t)$ ) и к величине порога (1% от  $\theta$  в случае IF ISI,  $10^{-2}$  для ТС ISI). Полученные результаты (рис. 3, б, г) подтверждают устойчивость работы алгоритма по отношению к слабым случайным воздействиям.

Рис. 3, в, г соответствуют выбору порогового уровня, равного нулю, то есть введению секущей Пуанкаре  $x=0$  динамической системы. В следующем разделе мы обсудим влияние величины порога на результат вычисления старшего ляпуновского показателя по последовательности ТС ISI.

### **3. Влияние величины порога на результат реконструкции динамических характеристик**

Решаемая в настоящей работе задача, по сути дела, сводится к следующему. Располагая только последовательностью времен возврата в секущую плоскость (ТС ISI), можем ли мы определить динамические характеристики хаотического аттрактора? Если да (что, собственно, следует из результатов работы [9]), то при

каких условиях? Особый интерес вызывает случай, когда секущая плоскость вводится таким образом, что часть фазовых траекторий либо касается ее либо не пересекает вовсе. Рассмотрение данного случая позволит сформулировать ограничения на эффективность используемой методики.

Обратимся к системе Ресслера и выберем в качестве секущей плоскости  $x=\theta$  (см. рис. 1,б), где  $S(t)=x(t)$ . Будем анализировать последовательность времен возврата для различных  $\theta$ , медленно увеличивая значение порогового уровня. Старший показатель Ляпунова, вычисляемый по ТС ISI (каждый раз при фиксированном пороге), демонстрирует довольно сложную зависимость от  $\theta$  (рис. 4, а). Как видно из данного рисунка, существуют две области ( $0 \leq \theta < 4$  и  $10 < \theta < 13.5$ ), в пределах которых динамические характеристики хаотического аттрактора могут быть определены с достаточно хорошей точностью (ошибка вычисления  $\lambda_1$  не превышает  $10 \div 15\%$  и может быть уменьшена за счет увеличения длительности анализируемого временного ряда, составившего в наших расчетах примерно 2000 времен возврата). В то же время вне данных областей результат расчета максимального показателя может отличаться в несколько раз от истинного значения, достигая минимума при  $\theta \approx 5.35$ . Аналогичную картину демонстрируют более детальные вычисления  $\lambda_1$ , выполненные для нескольких контрольных точек:  $\theta=0$  (рис. 3, б),  $\theta=11$  (рис. 4, б),  $\theta=5.35$  (рис. 4, в, г). В последнем случае наблюдается чувствительность алгоритма к выбору параметра  $l_2$ , не позволяющая получить достоверной оценки степени хаотичности.

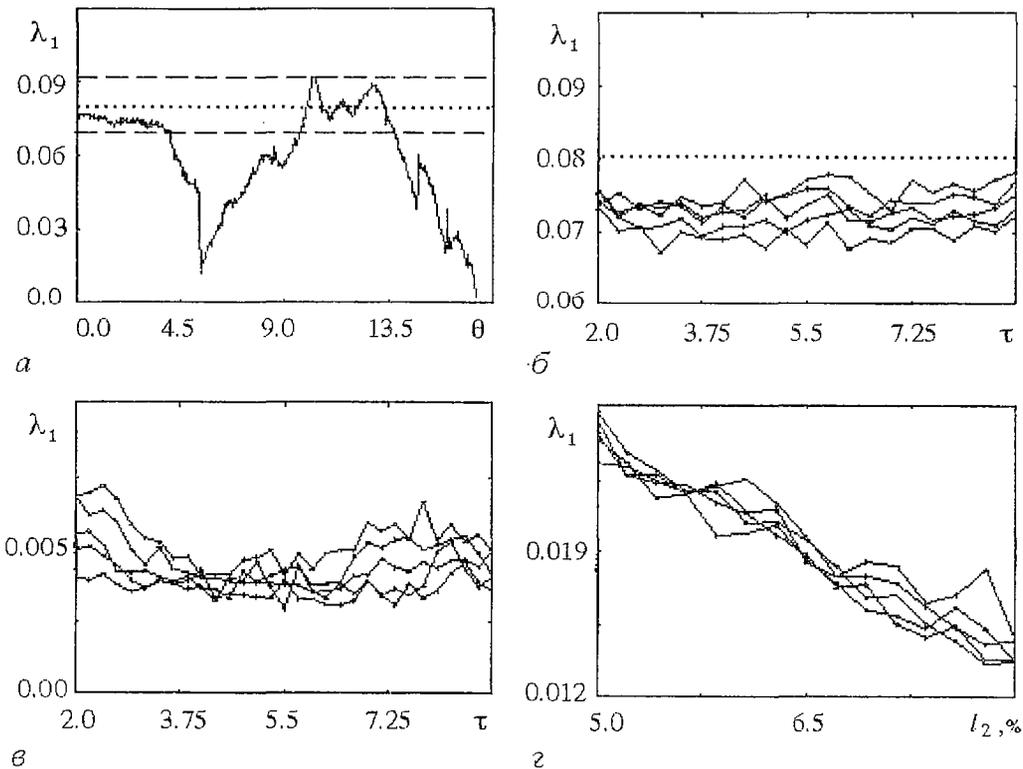


Рис. 4. а – зависимость старшего ЛХП, вычисленного по последовательности ТС ISI, от выбора порога  $\theta$ . Пунктиром обозначена величина  $\lambda_1$ , вычисленная по входному сигналу  $S(t)$ , штрихами – диапазон ошибки вычисления  $\lambda_1$  ( $\pm 12\%$ ); результаты расчета  $\lambda_1$ : б, в – в зависимости от выбора задержки  $\tau$  при различных значениях параметра  $l_2$  для  $\theta=11$  и  $\theta=5.35$ ; г – в зависимости от выбора  $l_2$  при различных  $\tau$  для  $\theta=5.35$

С целью объяснения сложного поведения  $\lambda_1(\theta)$  проводилось исследование структуры временных интервалов (рис. 5). В области  $0 \leq \theta < 4$  пересечение порогового уровня происходит в течение каждого базового периода колебаний. Последовательность временных интервалов ТС ISI является стационарной (рис. 5, а), а размеры аттрактора, реконструированного методом задержки по интерполированной временной зависимости  $\omega_{int}(t)$ , определяются диапазоном изменения  $I_i$ . Увеличение  $\theta$  приводит к тому, что в течение некоторых базовых периодов колебаний пересечения порога не происходит – появляются  $I_i$  с большими значениями (рис. 5, з). Наличие нескольких временных масштабов в последовательности ТС ISI, в свою очередь, приводит к появлению нескольких пространственных масштабов в реконструированном аттракторе (рис. 5, д), причем из-за отличающейся вероятности больших и малых  $I_i$  (рис. 5, е) фазовая траектория основную часть времени будет проводить в ограниченной области фазового пространства (примерно 10÷15% от размера аттрактора) – рис. 5, д. Условие линейного приближения (параметр  $l_2$ ) теперь необходимо задавать для

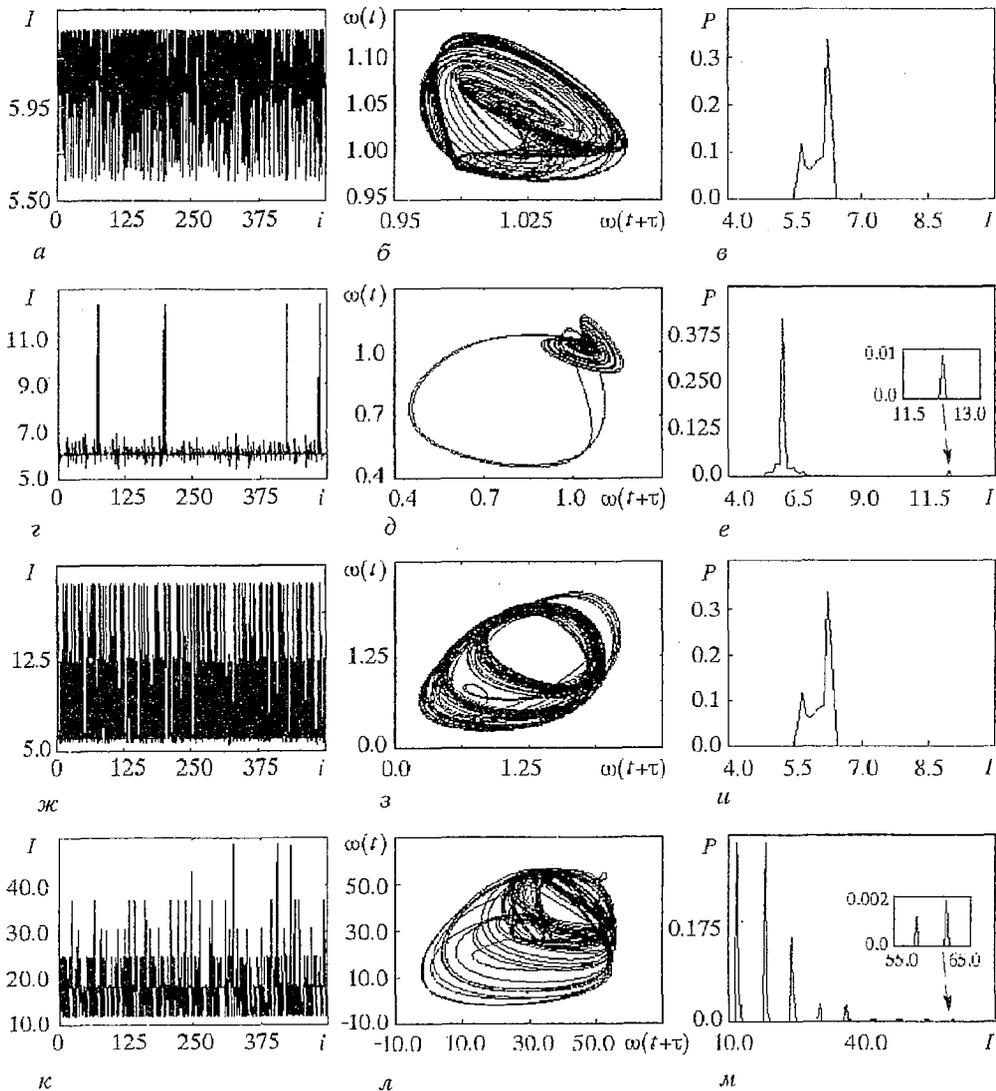


Рис. 5. Последовательности ТС ISI, фазовые портреты, реконструированные по интерполированной временной зависимости  $\omega_{int}(t)$  (для простоты обозначение int опущено) и функции плотности распределения вероятности временных интервалов для различных значений  $\theta$ : а, б, в – 0; з, д, е – 5.35; ж, з, и – 11; к, л, м – 15

каждого пространственного масштаба в отдельности; однако даже при существенном уменьшении данного параметра зависимость  $\lambda_1(l_2)$ , аналогичная рис. 4, г, сохраняется.

При дальнейшем увеличении  $\theta$  среди ТС ISI появляются временные интервалы, соответствующие трем базовым периодам колебаний, но если вероятности различных  $I_i$  сравнимы между собой, последовательность ТС ISI (рис. 5, ж) сохраняет динамические характеристики сигнала  $S(t)$ .

В области  $\theta > 13.5$  в последовательности  $I_i$  появляются интервалы, соответствующие пяти и более базовым периодам, вероятность которых очень мала, но отлична от нуля (рис. 5, к, м). В данной области вычислить значение максимального показателя Ляпунова не представляется возможным.

На основании проведенного исследования можно сформулировать ряд условий, при выполнении которых алгоритм [22] позволяет определять динамические характеристики хаотического сигнала системы Ресслера по последовательности ТС ISI:

1) последовательность  $I_i$  является стационарной, а вероятности различных временных интервалов в функции плотности распределения сравнимы между собой (для диапазонов  $I_i$  с отличной от нуля вероятностью);

2) среднее значение  $\bar{T}$  не превышает характерный временной масштаб системы (время предсказуемости или «время Ляпунова» [10,29]).

Обсудим значение данных условий. Выполнение первого из них обеспечивает приблизительное соответствие времен, проводимых фазовой траекторией в различных областях аттрактора при наличии нескольких пространственных масштабов, а также равномерное посещение данных областей.

Необходимость второго условия вызвана тем, что увеличение  $\bar{T}$  при смещении порогового уровня и превышение некоторого характерного временного масштаба системы приводит к потере информации о динамике. В результате максимальное значение показателя, которое может быть вычислено по последовательности ТС ISI, демонстрирует спад, обратно пропорциональный  $\bar{T}$  – рис. 6, а. Заметим однако, что даже если ограничения на величину  $\bar{T}$  не позволяют определить  $\lambda_1$ , процедура расчета ЛХП может служить качественной оценкой степени хаотичности. В подтверждение этому на рис. 6, б представлена зависимость  $\lambda_1$  от управляющего параметра  $c$  системы Ресслера, вычисленная методом [18,19] вместе с качественно повторяющимися ее результатами расчета ЛХП по последовательности ТС ISI, записанной при фиксировании каждого 5-го пересечения секущей  $\theta=0$ .

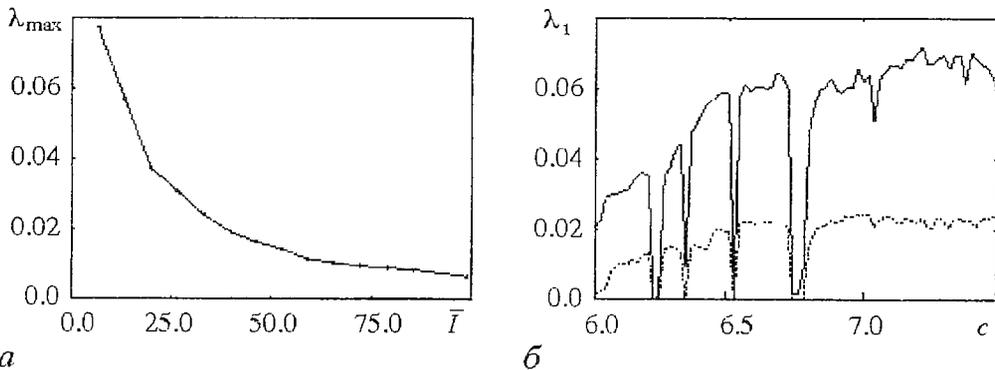


Рис. 6. а – зависимость максимального значения ЛХП, которое может быть вычислено при превышении характерного временного масштаба системы, от средней величины временного интервала; б – результаты расчета  $\lambda_1$  системы Ресслера методом [18,19] в зависимости от выбора параметра  $c$  (сплошная линия) и значения ЛХП, вычисленные при фиксировании каждого 5-го пересечения секущей плоскости  $x=0$  (пунктир)

Вышеприведенные результаты были получены в рамках алгоритма, осуществляющего проведение перенормировок вектора возмущения после достижения фиксированного расстояния между траекториями (условия линейного приближения, задаваемого параметром  $l_2$ ). Как мы убедились при рассмотрении случая  $\theta=5.35$ , данная методика может не работать для аттракторов с несколькими пространственными масштабами. Формально алгоритм [22] не ограничивает нас в том, каким образом осуществлять перенормировки. Можно, в частности, анализировать среднюю скорость разбегания траекторий за фиксированный период времени  $T_r$ . Однако в этом случае мы получаем дополнительный параметр численной схемы. Если  $T_r$  выбрать малым, существенно увеличивается время счета (в связи с процедурами поиска ближайших соседей при перенормировках, отнимающими большую часть времени работы алгоритма). Слишком частые перенормировки способствуют также увеличению ошибки ориентации вектора возмущения. С другой стороны, выбрав большое  $T_r$ , мы рискуем получить заниженные оценки степени хаотичности, если в течение данного времени разбегание близлежащих траекторий выходит за рамки линейного приближения. Для более достоверных оценок целесообразным является исследование зависимости  $\lambda_1$  от параметра  $T_r$ , также, как и от других параметров (задержки, размерности пространства вложения и т.д.).

Осуществление перенормировок через фиксированное время может приводить к большей чувствительности алгоритма расчета ЛХП к выбору параметров численной схемы, но при наличии нескольких ярко выраженных пространственных масштабов данная процедура позволяет определять динамические характеристики хаотического аттрактора (рис.7), и, таким образом, первое из двух условий перестает быть необходимым<sup>2</sup>.

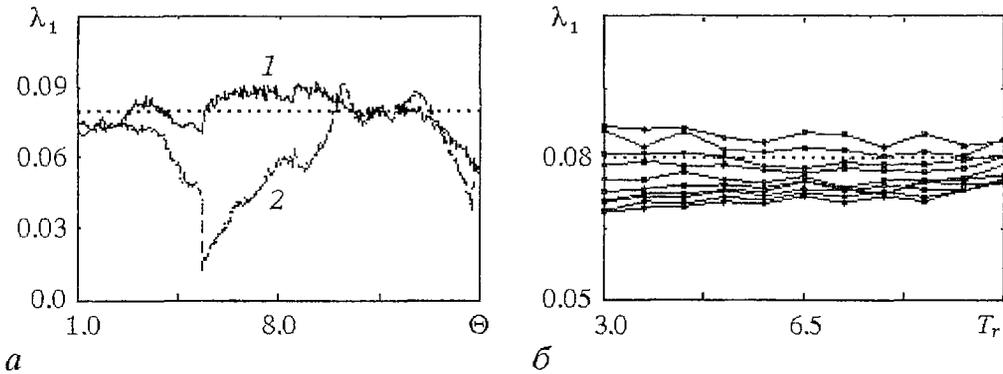


Рис. 7. а – результаты расчета  $\lambda_1$  по последовательности ТС ISI в зависимости от выбора порога  $\theta$  при осуществлении перенормировок вектора возмущения через фиксированное время (зависимость 1). Зависимостью 2 представлены результаты расчета, соответствующие рис. 4,а (осуществление перенормировок при превышении параметра  $l_2$  – условия линейного приближения); б – результаты расчета  $\lambda_1$  для случая  $\theta=5.35$  в зависимости от параметра  $T_r$  при различных  $t \in [2 \div 5]$

<sup>2</sup> Одна из проблем, с которой мы столкнулись в данной работе, состоит в том, что из-за неперехода некоторыми траекториями через порог возникают слишком большие временные интервалы и, как следствие, – сильные неоднородности. Один из способов решения проблемы разных масштабов (за идею которого мы очень признательны рецензенту) состоит в следующем. Фазовый сдвиг в течение каждого интервала  $I_i$  может быть выбран равным  $2\pi k_i$ , где  $k_i$  в общем случае отлично от единицы и подбирается из условия наибольшей равномерности изменения фазы. Соответственно осуществляется переход от последовательности  $I_i$  к точкам  $\omega(T_i)=2\pi k_i/l_i$ . Данный переход позволяет нам избавиться от проблемы сильной неоднородности, но проведенные расчеты показали, что и в этом случае процедуры перенормировок после достижения фиксированного расстояния между фазовыми траекториями [22] могут приводить к недооценке величины  $\lambda_1$ .

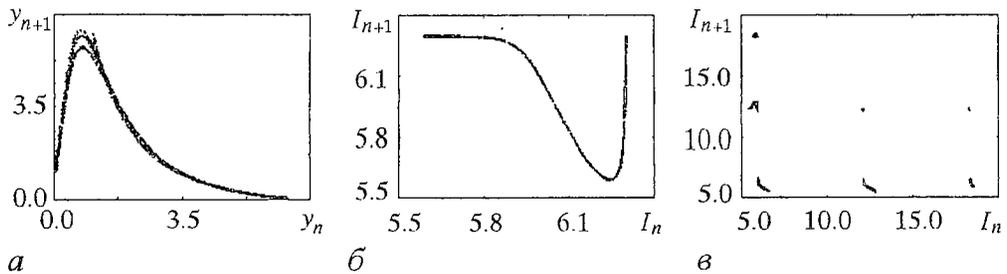


Рис. 8. *a* – отображение Пуанкаре системы Ресслера; *б, в* – отображения времен возврата для  $\theta=0$  и  $\theta=11$

Вышесказанное относилось к чисто технической стороне процедуры расчета старшего ЛХП. Если же отвлечься от деталей алгоритма и обобщить полученные результаты, мы можем говорить о том, что последовательность временных интервалов ТС ISI сохраняет динамические характеристики хаотического аттрактора даже в том случае, когда не все фазовые траектории пересекают секущую, и, таким образом, при наличии ограничения на среднее значение  $\bar{I}$  (второе условие) величина  $\lambda_1$  является инвариантной к выбору порога.

Данный вывод представляется нам достаточно нетривиальным – ведь смещение секущей плоскости приводит к разрушению структуры отображения времен возврата. Если при корректном выборе секущей (когда все фазовые траектории ее пересекают, причем трансверсально) отображение времен возврата напоминает отображение Пуанкаре (рис. 8, *a, б*), то при смещении порога картина значительно усложняется (рис. 8, *в*).

В рамках настоящей работы мы не можем предложить строгого обоснования сохраняемости динамических характеристик при произвольном выборе секущей. Возможное качественное объяснение состоит в следующем. Рассмотрим для простоты значения усредненной мгновенной частоты  $\omega(t_i)=2\pi/I_i$  в моменты  $t_i=i\bar{I}$ , то есть равномерный шаг по времени. Выберем два участка сигнала  $S(t)$  из пяти базовых периодов колебаний, для каждого из которых незначительное смещение величины порога приводит к тому, что в течение 3-го периода траектория перестает пересекать пороговый уровень (рис. 9, *a*). Для уровня  $\theta_1$  при переходе к интерполированной временной зависимости мы получим две гладкие кривые  $\omega^1(t)$  и  $\omega^2(t)$ , проходящие через точки  $\omega_1^1=\omega_{\text{int}}(t_i)=2\pi/I_i, \dots, \omega_4^1=\omega_{\text{int}}(t_{i+3})=2\pi/I_{i+3}$  и  $\omega_1^2=\omega_{\text{int}}(t_j)=2\pi/I_j, \dots, \omega_4^2=\omega_{\text{int}}(t_{j+3})=2\pi/I_{j+3}$  в моменты времени  $t_i, \dots, t_{i+3}$  и  $t_j, \dots, t_{j+3}$ , соответствующие пересечениям порога для двух выбранных участков сигнала  $S(t)$ .

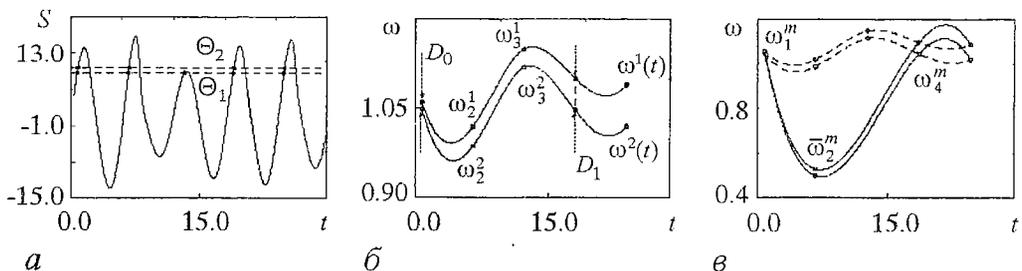


Рис. 9. *a* – участок сигнала  $S(t)$  с двумя уровнями  $\theta_1=9$  и  $\theta_2=10$ ; *б* – интерполированные временные зависимости  $\omega^1(t)$  и  $\omega^2(t)$  для двух участков сигнала  $S(t)$  при выборе порога  $\theta_1$  (точками обозначены значения  $\omega_k^m$ ); *в* – интерполированные временные зависимости  $\omega^1(t)$  и  $\omega^2(t)$  для двух участков сигнала  $S(t)$  при выборе порога  $\theta_2$ . Пунктиром обозначены временные зависимости, изображенные на рис. *б*

Если величина  $D_0=|\omega_1-\omega_2|$  достаточно мала, и условие линейного приближения для расстояния между кривыми  $\omega^1(t)$  и  $\omega^2(t)$  не нарушается за время наблюдения (3 временных интервала ТС ISI), то одномерный аналог показателя Ляпунова может быть определен следующим образом (рис. 9, б):

$$\lambda_1 = [1/(3I)] \ln(D_1/D_0), \quad D_1 = |\omega_4 - \omega_2|. \quad (8)$$

Незначительное смещение порога (уровень  $\theta_2$ ) приводит к изменению последовательностей  $\omega_k^m$ . Для каждой из них точки  $\omega_1^m$  и  $\omega_4^m$  остаются прежними, а вместо  $\omega_2^m$ ,  $\omega_3^m$  будет одна точка  $\omega_2^m$ , но со значением, вдвое меньшим, чем в предыдущем случае (рис. 9, в). Это, в свою очередь, приводит к изменению скорости разбегания траекторий на локальных участках, однако усредненная характеристика степени хаотичности за время наблюдения остается той же, определяемой формулой (8) (рис. 9, в). Аналогичные рассуждения можно провести и при неравномерном шаге по времени. Разумеется, данные иллюстрации можно интерпретировать лишь как качественное объяснение, не претендующее на строгость изложения.

### Заключение

В настоящей работе были рассмотрены две модели генерации «спайков» – «integrate-and-fire» и «threshold-crossing»; предложена процедура перехода к непрерывной временной зависимости для IF ISI, позволяющая качественно воспроизвести линейное преобразование входного сигнала для данной модели. Мы проанализировали влияние выбора порогового уровня (или, что эквивалентно, выбора секущей плоскости для аттрактора ДС) на результат реконструкции динамических характеристик хаотического аттрактора по последовательности времен возврата (ТС ISI) и убедились в том, что старший ляпуновский показатель может быть определен по сигналу ТС ISI даже в том случае, когда не все фазовые траектории пересекают секущую. Заметим, что вместо смещения порога мы могли зафиксировать постоянное значение  $\theta > 0$  и менять амплитуду входного сигнала ТС-модели, что привело бы к тем же самым выводам.

В работе были представлены результаты, полученные для системы Ресслера. На самом деле проводимые исследования не ограничивались только этой известной системой. Аналогичные выводы были сделаны при анализе целого ряда моделей математической биофизики, для которых был подтвержден вывод о возможности определения динамических характеристик при условии, что среднее значение времен возврата не превышает характерный временной масштаб динамической системы. Ряд интересных результатов был получен для ДС с несколькими состояниями равновесия, относительно которых осуществляется движение фазовой траектории (например, системы Лоренца), но нужно отметить, что анализ таких систем является более сложной проблемой, которая может представлять собой задачу отдельного исследования.

Авторы выражают благодарность профессору датского технического университета Э. Мосекилде и О.В. Сосновцевой за внимание к данной работе и обсуждение результатов, а также рецензенту за ценные замечания и интересные идеи.

*Работа частично финансировалась за счет гранта INTAS (№ 96-0305).*

### Библиографический список

1. Tuckwell H.C. Introduction to theoretical neurobiology. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Vols. 1,2.

2. Task Force of the European Society of Cardiology and the North American Society of Pacing and Electrophysiology. Heart Rate Variability. Standards of Measurement, Physiological Interpretation, and Clinical Use // *Circulation*. 1996. Vol. 93, № 5. P. 1043.

3. *Sherman A.* Anti-phase, asymmetric and aperiodic oscillations in excitable cells – I. Coupled bursters // *Bulletin of Mathematical Biology*. 1994. Vol. 56. P. 811.

4. *Longtin A., Bulsara A., Moss F.* Time interval sequences in the bistable systems and the noise induced transmission of information by sensory neurons // *Phys.Rev.Lett.* 1991. Vol. 65. P. 656;

*Dougllass J.K., Wilkens L., Pantazelou E., Moss F.* Noise enhancement of the information in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance // *Nature*. 1993. Vol. 365. P. 337;

*Moss F., Pei X.* Neurons in parallel // *Nature*. 1995. Vol. 376. P. 211;

*Richardson K.A., Imhoff T.T., Grigg P., Collins J.J.* Encoding chaos in neural spike train // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 2485;

*Gluckman B.J., Netoff T.I., Neel E.J., Ditto W.L., Spano M.L., Schiff S.J.* Stochastic resonance in a neuronal network from mammalian brain source // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 4098.

5. *Sauer T.* Reconstruction of dynamical system from interspike intervals // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. P. 3911.

6. *Castro R., Sauer T.* System reconstruction and analysis using interspike intervals // Preprint. 1996.

7. *Sauer T.* Reconstruction of integrate-and-fire dynamics, in: *Nonlinear Dynamics and Time Series*, eds. C.Culter and D.Kaplan, Fields Institute Communications. Vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. P. 63.

8. *Bialek W., Rieke F., De Ruyter van Steveninck R.R. and Warland D.* Reading a neural code // *Science*. 1991. Vol. 252. P. 1854;

*Gabbiani F., Koch C.* Coding of time-varying signals in spike trains of integrate-and-fire neurons with random threshold // *Neural Comput.* 1996. Vol. 8. P. 44.

9. *Hegger R., Kantz H.* Embedding of sequence of time intervals // *Europhysics Letters*. 1997. Vol. 38. P. 267.

10. *Racicot D.M., Longtin A.* Interspike interval attractors from chaotically driven neuron models // *Physica D*. 1997. Vol. 104. P. 184.

11. *Castro R., Sauer T.* Chaotic stochastic resonance: Noise-enhanced reconstruction of attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 1030;

*Castro R., Sauer T.* Correlation dimension of attractors through interspike intervals // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. P. 287;

*Castro R., Sauer T.* Reconstructing chaotic dynamics through spike filters // *Phys. Rev.E*. 1999. Vol. 59. P. 2911.

12. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence, in *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980., eds. D. Rang and L.S. Young, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 898, (Springer, Berlin). P. 366;

*Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 712;

*Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.* Embedology // *J. Statistical Physics*. 1991. Vol. 65. P. 579.

13. *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. P. R4.

14. *Sauer T., Tempkin J.A., Yorke J.A.* Spurious Lyapunov exponents in attractor reconstruction // *Phys.Rev.Lett.* 1998. Vol. 81. P. 4341.

15. *Dawson S.P.* Strange nonattracting chaotic sets, crises, and fluctuating Lyapunov exponents // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 4348.

16. *Froyland G., Judd K., Mees A.I.* Estimation of Lyapunov exponents of dynamical systems using a spatial average // *Phys.Rev.E*. 1995. Vol. 51. P. 2844.

17. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестности регулярных аттракторов // *Письма в ЖТФ*. 1986. Т. 12, вып. 12. С. 740;

*Anishchenko V.S., Herzog H.P.* Noise-induced chaos in a system with homoclinic points // ZAMM. 1988. Vol. 68, № 7. P. 317.

18. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them // *Mechanica*. 1980. Vol. 15. P.9.

19. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical system // *Progr. Theor. Phys.* 1979. Vol. 61. P. 1605.

20. *Wiesel W.E.* Continuous time algorithm for Lyapunov exponents. I,II // *Phys. Rev.E.* 1993. Vol. 47. P. 3686.

21. *Wiesel W.E.* Extended Lyapunov exponents // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46. P. 7480;

*Theiler J., Smith L.A.* Anomalous convergence of Lyapunov exponent estimates // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51. P. 3738;

*Dawson S., Grebogi C., Sauer T., Yorke J.A.* Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero // *Phys.Rev.Lett.* 1994. Vol. 73. P. 1927;

*Rangarajan G., Habib S., Ryne R.D.* Lyapunov exponents without rescaling and reorthogonalization // *Phys.Rev.Lett.* 1998. Vol. 80. P. 3747;

*Ershov S.V., Potapov A.B.* On the concept of stationary Lyapunov basis // *Physica D.* 1998. Vol. 118. P. 167;

*Потанов А.Б.* Методы и алгоритмы нелинейной динамики в задачах оценки параметров динамических моделей и прогноза по временным рядам // Автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук. 1999.

22. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* 1985. Vol. 16. P. 285.

23. *Eckmann J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Gilberdo D.* Lyapunov exponents from a time series // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 34. P. 4971;

*Sano M., Sawada Y.* Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. P. 1082;

*Brown R.* Calculating Lyapunov exponents for short and/or noisy data sets // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47. P. 3962;

*Parlitz U.* Identification of true and spurious Lyapunov exponents from time series // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1992. Vol. 2, № 1. P. 155.

24. *Kantz H.* A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponents of a time series // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 185. P. 77.

25. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems // *Physica D.* 1992. Vol. 56. P. 185;

*Brown R., Bryant P., Abarbanel H.D.I.* Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43. P. 2787;

*Karantonis A., Pagitsas M.* Comparative study for the calculation of the Lyapunov spectrum from nonlinear experimental signals // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53. P. 5428;

*Zeng X., Eukholt R., Pielke R.A.* Estimating the Lyapunov-exponent spectrum from short time series of low precision // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66. P. 3229;

*Bryant P., Brown R., Abarbanel H.D.I.* Lyapunov exponents from observed time series // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. P. 1523.

26. *Потанов А.Б.* Качество реконструкций хаотических аттракторов и выбор параметров реконструкции // Препринт Института прикладной математики РАН. 1995. № 13. 28 с.;

*Potapov A.* Distortions of reconstruction for chaotic attractors // *Physica D.* 1997. Vol. 101. P. 207.

27. *Paladin G., Serva M., Vulpiani A.* Complexity in dynamical systems with noise // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74. P. 66;

*Loreto V., Paladin G., Vulpiani A.* Concept of complexity in random dynamical systems // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53. P. 2087.

28. *Faure P., Korn H.* A new method to estimate the Kolmogorov entropy from recurrence plots: its application to neuronal signals // *Physica D.* 1998. Vol. 122. P. 265.

29. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.

Лаборатория нелинейной  
динамики СГУ

Поступила в редакцию 26.04.99  
после переработки 9.06.99

## COMPUTING LARGEST LYAPUNOV EXPONENT FROM A SEQUENCE OF RETURN TIMES: POSSIBILITIES AND LIMITATIONS

*A.N. Pavlov, V.S. Anishchenko*

We analyze whether it is possible to estimate dynamical characteristics of a chaotic attractor from a sequence of return times and study how the choice of a secant plane influences the result of reconstruction. Using Rössler model as an example it is shown that the largest Lyapunov exponent can be determined from a series of return times even in that case, when not all the phase trajectories cross a secant plane.



*Павлов Алексей Николаевич* – родился в 1973 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности «радиофизика и электроника» (1995). В 1998 году защитил кандидатскую диссертацию. В настоящее время работает ассистентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов, реконструкция динамических систем по экспериментальным данным. Автор 25 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



*Анищенко Вадим Семенович* защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук (1970) и докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. В качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдском университете (Берлин, 1987). С 1988 года заведует кафедрой радиофизики Саратовского университета. Автор более 200 научных работ, среди которых 6 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Три монографии написаны на английском языке, из них 2 книги опубликованы в Лейпциге (1987, 1989); издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых системах» (1990), хорошо известная среди специалистов; в издательстве «World Scientific» вышла новая монография «Dynamical Chaos – Models and Experiments» (1995).

В.С. Анищенко разработывал и читал общие курсы лекций по статистической радиофизике, теоретическим основам радиотехники, теории колебаний и теории информации и ряд спецкурсов, из которых наиболее важные: устойчивость и бифуркации динамических систем, детерминированный хаос, специальные проблемы нелинейной динамики. Под его руководством успешно защитили диссертации 10 аспирантов, в настоящее время готовят свои работы три докторанта кафедры радиофизики, у которых он является научным консультантом. Соросовский профессор (1994). Заслуженный деятель науки РФ (1995). Входит в состав редколлегии журналов «Прикладная нелинейная динамика» и «Discrete Dynamics in Nature and Society». E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru



## КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ\*

*Г.Д. Богомолов, А.И. Клеев*

В работе рассмотрены дифракционные аспекты разработки релятивистского оротрона. Описана методика расчета квазиоптического резонатора, одним из зеркал которого является отражательная дифракционная решетка. Приведены результаты расчета характеристик собственных колебаний в том случае, когда период решетки близок к длине волны. Обнаружен эффект резонансного отражения волновых пучков от периодической структуры: потери на отражение волнового пучка существенно (на несколько порядков) изменяются при малых вариациях глубины гофра вблизи определенного значения. Показано, что данный эффект может приводить к заметному уменьшению дифракционных потерь в квазиоптическом резонаторе с гофрированным зеркалом, обуславливая, в частности, своеобразный механизм селекции собственных колебаний. Расчеты показали, что резонансные явления, возникающие при отражении от периодических структур, изменяют оптимальные значения параметров решетки и приводят к дополнительному возрастанию пускового тока в релятивистском оротроне.

### Введение

Периодические структуры широко распространены в электронике СВЧ. Одна из причин – способность периодических структур поддерживать волны с фазовой скоростью меньше скорости света. С электромагнитными полями таких волн могут эффективно взаимодействовать электронные потоки, как, например, в оротроне, или генераторе дифракционного излучения [1,2]. Упрощенная схема резонатора оротрона показана на рис. 1. Поле собственного колебания в такой системе сформировано зеркалами, причем одним из зеркал служит отражательная дифракционная решетка.

Теоретическому и экспериментальному изучению собственных колебаний в резонаторах подобного типа посвящено значительное число работ (см., например, [1–4]).

Необходимо подчеркнуть, что в оротронах миллиметрового диапазона длин волн обычно применяют электронные пучки с энергией в несколько кэВ; при этом шаг периодической структуры существенно меньше длины волны [1,5]. Для получения генерации оротрона в субмиллиметровом диапазоне имеет смысл

\* Статья написана по материалам лекции, прочитанной на XI Международной школе по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 2–6 марта 1999 г.

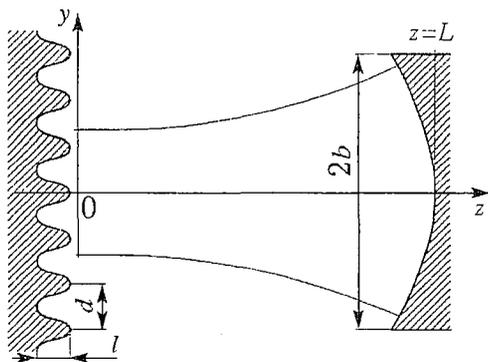


Рис. 1. Квазиоптический резонатор с гофрированным зеркалом

При расчете двумерного резонатора предполагали, что выполнены условия квазиоптического приближения: все размеры резонатора много больше длины волны  $\lambda$  ( $L/\lambda \gg 1$ ,  $b/\lambda \gg 1$ ), а продольные размеры много больше поперечных ( $L/b \gg 1$ ). Предполагалось, что поперечный размер дифракционной решетки достаточно велик для того, чтобы можно было пренебречь влиянием краев. Зависимость от времени, пропорциональную  $\exp(-i\omega t)$  ( $\omega = v_c k$ ,  $v_c$  – скорость света в вакууме), далее опускали.

## 1. Методика расчета

Следуя подходу, традиционному при расчете квазиоптических резонаторов (КР) [7], представим поперечную компоненту электрического поля внутри резонатора (на расстоянии от гофрированного зеркала много большем длины волны) в виде суммы волн, распространяющихся навстречу друг другу

$$E_y(y, z) = W^{(+)}(y, z) \exp(ikz) - W^{(-)}(y, -z) \exp(-ikz).$$

Будем полагать, что зеркала идеально проводящие и граничные условия на вогнутом (гладком) зеркале (справа на рис. 1), поверхность которого задавали в виде

$$z = L - h(y),$$

можно записать стандартным образом, вводя постоянную  $\Gamma$

$$W^{(+)}(y, L) \exp[-ikh(y)] = \Gamma W^{(-)}(y, -L) \exp[ikh(y)]. \quad (1)$$

Величина  $\Gamma$  задается соотношением

$$\Gamma = \exp(-2ikL) \quad (2)$$

и определяет комплексную собственную частоту колебаний.

Функции  $W^{(+)}(y, z)$  и  $W^{(-)}(y, -z)$  при  $z=0$  связаны условием

$$W^{(+)}(y, 0) = \hat{R} W^{(-)}(y, 0), \quad (3)$$

где  $\hat{R}$  – линейный оператор, который можно назвать оператором рассеяния для периодической поверхности.

переходить к релятивистским электронным пучкам с энергией несколько МэВ и использовать решетки с периодом, близким к длине волны [6]. Действительно, из условия синхронизма следует, что  $d/\lambda \approx p \approx 1 - 1/2\gamma^2 \sim 1$  (здесь  $\gamma$  – релятивистский фактор).

Как известно, эффективность взаимодействия релятивистского пучка с полем электромагнитной волны убывает пропорционально  $\gamma^3$  [6]. Однако, при  $d < \lambda$  необходимо учитывать и чисто дифракционные эффекты, слабо проявляющиеся при  $d \ll \lambda$  (то есть в приборах с нерелятивистскими пучками).

В частности, необходимо учитывать потери, связанные с возникновением распространяющихся дифракционных волн, покидающих резонатор под малыми углами к поверхности гофрированного зеркала. В настоящей работе обсуждаются проблемы, возникающие при использовании в оротроне существенно релятивистских пучков и решеток с периодом, близким к длине волны.

Комбинируя введенные таким образом граничные условия, получаем интегрооператорное уравнение для определения собственных колебаний

$$\Gamma W^{(+)}(y, L) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y-y_1, L) \hat{R} \left\{ \int_{-b}^b G(y_1-y_2, L) W^{(+)}(y_2, L) \exp[-2ikh(y_2)] dy_2 \right\} dy_1, \quad (4)$$

где  $G(y-y_{1,2}, L)$  – функция Грина параболического уравнения [7].

Представляя поле вблизи периодической поверхности в виде суперпозиции плоских волн, можно получить следующее соотношение для оператора рассеяния  $\hat{R}$ :

$$\hat{R} W^{(-)}(y, 0) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^{(-)}(y_1, 0) \exp[-i\chi(y_1-y)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n(\chi) \exp(iw_n y) dy_1 d\chi, \quad (5)$$

где  $w_n = 2\pi n/d$ . Окончательное интегральное уравнение имеет следующий вид:

$$\Gamma f(t) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 \rho_0(q) \exp[-iq^2/(2c)] \exp[-i\{\varphi(t) + \varphi(t_2) + q(t_2 - t)\}] f(t_2) dt_2 dq, \quad (6)$$

где введены безразмерные параметры

$$c = kb^2/(2L), \quad q = \chi b, \quad t = y/b,$$

а неизвестная функция  $f(t)$  определена соотношением

$$f(t) = W^{(+)}(y, L) \exp[-i\varphi(t)], \quad \varphi(t) = kh(tb).$$

Отметим, что в данной работе задачу о собственных колебаниях резонатора с гофрированным зеркалом решали при некоторых ограничениях, а именно, рассматривали случай, когда период гофра близок к длине волны. Оценки, проведенные для этого случая, показывают, что в рамках квазиоптического приближения при получении окончательного уравнения (6) слагаемыми с  $n \neq 0$  в соотношении (5) допустимо пренебречь. Данная процедура эквивалентна отбрасыванию в точных уравнениях слагаемых, пропорциональных степеням малых величин порядка  $\lambda/b$  и  $b/L$ ; при этом, однако, их отношение считается конечной величиной (см., например, [7,8]). Физический смысл данного приближения заключается в том, что дифракционные волны высших порядков «выбывают из игры», не участвуя в формировании поля на зеркале, а лишь приводя к изменению радиационных потерь. Подчеркнем, что мы пренебрегли высшими дифракционными волнами, лишь вычисляя поле на зеркале при  $z=L$ ; при расчете дифракционного коэффициента  $\rho_0(q)$  их учет, очевидно, необходим. Для плоского идеального зеркала (когда глубина гофрировки равна нулю)  $\rho_0(q) \equiv 1$  и уравнение преобразуется к известному уравнению для собственных колебаний резонатора с цилиндрическими зеркалами. В общем случае дифракционный коэффициент  $\rho_0(q)$  необходимо получать из численного решения задачи о дифракции обобщенной плоской волны на поверхности гофрированного зеркала.

Рассмотрим методику решения задачи о дифракции плоской волны на периодической поверхности. Данная задача является ключевой в анализируемой проблеме, поскольку коэффициент  $\rho_0(q)$  входит в выражение для ядра интегрального уравнения, определяющего собственные колебания КР с гофрированным зеркалом.

Необходимо подчеркнуть, что эффективность метода решения исходной задачи существенно зависит от объема вычислений, необходимых для расчета дифракционных коэффициентов. В данной работе для решения ключевой задачи был использован метод адаптивной коллокации [9–11]. Этот метод позволяет вычислять дифракционные коэффициенты с минимальными вычислительными затратами. В то же время метод адаптивной коллокации является строгим подходом, дающим возможность рассчитывать рассеяние на различных

периодических структурах с гладким профилем в достаточно широком диапазоне частот.

Подставляя в граничные условия на поверхности гофра поля, представленные в виде суперпозиции плоских волн (подробнее см. [11]), и приравнивая левые и правые части в точках коллокации, получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $A_n(q)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N_g+1}^{N_g-1} A_n(q) [g_n \psi'(\eta_m) / (2\pi) - v_n] \exp\{i[2\pi g_n \eta_m + v_n \psi(\eta_m)]\} = \\ = -[g_0 \psi'(\eta_m) / (2\pi) + v_0] \exp\{i[2\pi g_0 \eta_m - v_0 \psi(\eta_m)]\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$g_0 = pq\alpha/2, \quad g_n = g_0 + n, \quad v_n = (p^2 - g_n^2)^{1/2}, \quad \text{Im}v_n > 0. \quad (8)$$

Неизвестные коэффициенты  $A_n(q)$  связаны с величинами  $\rho_n(q)$ , входящими в выражение (5), соотношением

$$\rho_n(q) = (v_n/v_0)A_n(q).$$

Здесь введены новые безразмерные координаты

$$\eta = y/d, \quad \zeta = 2\pi z/d,$$

а также параметры

$$p = d/\lambda = 1 - 1/2\xi\alpha, \quad \alpha = \lambda/(\pi b). \quad (9)$$

В соответствии со сделанными ранее допущениями  $\alpha \ll 1$ . Подчеркнем, что параметры  $\xi$  и  $\alpha$  введены для удобства расчетов: при  $\xi \sim 1$  отклонение отношения  $d/\lambda$  от единицы по абсолютной величине порядка  $\alpha \ll 1$ . Поверхность гофра задается соотношением

$$\zeta = \psi(t) \equiv \psi(t+n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Глубину гофра будем характеризовать параметром  $a = \pi l/d$ .

Как известно (см., например, [9,10]) сходимость коллокационного алгоритма существенно зависит от распределения точек коллокации. Причем, как следует из результатов работы [9], метод коллокации приводит к правильному результату в том случае, когда предельная (при  $N_g \rightarrow \infty$ ) плотность коллокационных узлов  $\sigma(\eta)$  удовлетворяет соотношению

$$\int_0^1 \ln \gamma(\eta, \eta') \sigma(\eta') d\eta' = \text{const}, \quad (10)$$

где  $\gamma(\eta, \eta')$  – расстояние между точками наблюдения и интегрирования на кривой

$$\tilde{x}(\eta) = \exp[-\psi(\eta)] \cos(2\pi\eta), \quad \tilde{y}(\eta) = \exp[-\psi(\eta)] \sin(2\pi\eta). \quad (11)$$

Решив это уравнение для какого-либо конкретного контура, можно затем найти координаты  $\eta_m$  коллокационных узлов из уравнения

$$m = (2N_g - 1) \int_0^{\eta_m} \sigma(\eta) d\eta \left[ \int_0^1 \sigma(\eta) d\eta \right]^{-1}. \quad (12)$$

Попытки построения систем приближенных коллокационных узлов неоднократно предпринимались различными авторами. Например, в работе [12] предложено вычислять координаты точек коллокации по формуле

$$\eta_m = 1/2 [m/(N_g - 1) - \beta m / (N_g - 1) + \beta m^2 / (N_g - 1)^2] \quad (13)$$

при  $\beta = 1/2$ . Расчеты показали, что невязка, полученная для распределения

коллокационных узлов, предложенных в работе [12] при  $\beta=1/2$ , увеличивается с ростом числа членов в представлении поля. Отметим, что выбирая иное, чем указанное в [12], значение параметра  $\beta$ , можно (для не слишком большой глубины гофра синусоидального профиля) получить сходящийся алгоритм. Тем не менее, как показали численные эксперименты, для больших  $a$  получить сколь угодно малую невязку, следуя методике работы [12], не удастся. Использование коллокационных узлов, равномерно распределенных на отрезке  $[-1/2, 1/2]$  при  $\beta=0$  в (13), приводит к весьма быстрому росту невязки при  $a > 1/2$ .

## 2. Результаты расчетов

Перейдем к анализу результатов численного решения уравнения (6). При расчетах гладкое зеркало резонатора считали параболическим

$$\varphi(t) = 1/2c(1-g)t^2, \quad g = 1 - 2L/R,$$

где  $R$  — радиус кривизны зеркала при  $y=0$ . Неизвестную функцию  $f(t)$  аппроксимировали конечным отрезком ряда Фурье

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N_f-1} C_n \cos(\pi n t) / (1 + \delta_{0n})^{1/2}.$$

Используя метод Галеркина [13], уравнение (6) сводили к линейной алгебраической задаче на собственные значения

$$GC = SC, \quad C = (C_0, C_1, \dots, C_{N_f-1})^T. \quad (14)$$

Качественно свойства собственных колебаний в КР с гофрированным зеркалом можно рассмотреть, анализируя зависимость  $\rho_0(q)$ . Отметим, что при  $q\alpha/2 < 1$  параметр  $q$  характеризует угол падения плоской волны на периодическую структуру. Как известно из теории рассеяния на периодических структурах (см., например, [14]),  $|\rho_0(q)| \approx 1$  для  $|q| < \xi/p$ ; в том случае, если  $|q|$  начинает превосходить  $\xi/p$ , абсолютная величина  $\rho_0(q)$  существенно уменьшается. Связано это с образованием распространяющихся дифракционных волн высших порядков, уносящих часть энергии падающего поля. Таким образом, гофрированное зеркало является своеобразным фильтром верхних пространственных частот для поля волнового пучка, рассеянного гофром, причем частота «среза» определяется величиной параметра  $\xi$ . Ясно, что при приближении частоты среза к верхней границе пространственного спектра собственного колебания последнее будет испытывать сильное возмущение при отражении от гофрированного зеркала.

На рис. 2 представлены результаты расчета зависимости величины  $1 - |\Gamma|$ , характеризующей потери собственного колебания, от параметра  $\xi$ , вычисленные для различных параметров Френеля  $c$ . Кривые построены для основного ( $c$  с наименьшими потерями) колебания.

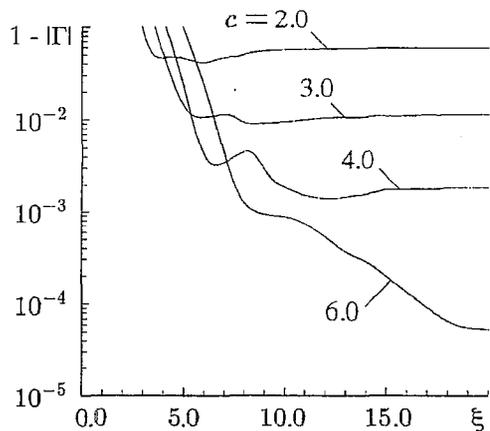


Рис. 2. Зависимость потерь в КР с гофрированным зеркалом от параметра  $\xi$ , характеризующего отличие периода гофра от длины волны ( $\xi = 2(\lambda - d)/\lambda\alpha$ ). Кривые приведены для различных значений  $c$  при  $g=0$ ,  $a=0.25$ ,  $\alpha=10^{-4}$

Отметим, что результаты, представленные на рис. 2, иллюстрируют два механизма радиационных потерь в КР с гофрированным зеркалом. Первый механизм связан с потерями при отражении от гладкого зеркала конечных размеров и определяет величину  $1-|\Gamma|$  при достаточно больших  $\xi$  (см. ниже). Второй механизм обусловлен излучением дифракционных волн под малыми углами к поверхности гофрированного зеркала и приводит к достаточно быстрому росту потерь при уменьшении  $\xi$ .

Интерпретировать представленные на этом рисунке результаты можно, если пренебречь влиянием краев зеркала и, полагая в нулевом приближении  $\rho_0(q)=1$ , воспользоваться следующим представлением для поля собственного колебания:

$$W^{(+)}_0(t,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-q^2/(4c)[(1+g)/(1-g)]^{1/2} + iqt\} dq. \quad (15)$$

Из (15) видно, что при увеличении параметра Френеля с верхняя граничная частота пространственного спектра собственного колебания  $q_0$ , определяемая соотношением

$$q_0 = 2\{c[(1-g)/(1+g)]^{1/2}\}^{1/2},$$

возрастает. Очевидно, что величина  $q_0$  приближенно определяет «граничное» значение параметра  $\xi_0$  такое, что при  $\xi < \xi_0$  потери собственного колебания существенно увеличиваются.

Необходимо подчеркнуть, что гофрировка зеркала может усиливать потери, связанные со вторым механизмом, из-за искажения волнового пучка при отражении от периодической поверхности. При  $\xi < \xi_0$  амплитуда поля вблизи краев зеркала возрастает, что приводит к дополнительному увеличению потерь.

На рис. 3, а представлена зависимость  $1-|\Gamma|$  от параметра  $a$ , характеризующего относительную глубину гофра. При достаточно больших  $a$  поведение потерь при изменении параметров становится нерегулярным. Анализ показывает, что это обусловлено двумя различными явлениями.

Одно явление представляет собой взаимодействие различных колебаний КР с близкими значениями  $\Gamma$ : при увеличении параметра  $c$  и одновременном уменьшении  $\xi$  происходит изменение типа связи колебаний [15,16]. На рис. 3 продемонстрирован характер перехода от сильной связи (кривые 1 и 2) к слабой (кривые 3).

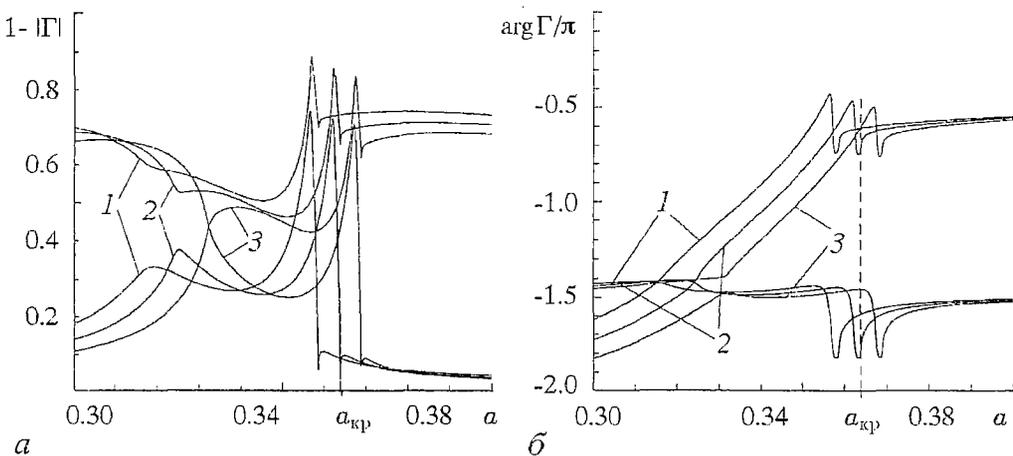


Рис. 3. Зависимости  $1-|\Gamma|$  (а) и  $\arg(\Gamma)/\pi$  (б), характеризующих, соответственно, потери и относительный сдвиг частоты собственного колебания КР с периодической структурой, от относительной глубины гофра  $a=\pi/d$ . Пунктиром отмечено значение критической глубины  $a_{кр}$  для  $\xi=3.4375$ . Кривые построены при  $g=0$ ,  $\alpha=10^{-4}$  и различных значениях параметров  $c$  и  $\xi$ : 1 - 2.5 и 3.25; 2 - 2.625 и 3.4375; 3 - 2.75 и 3.625

Расчеты проводились для основного колебания и для колебания со значительным  $\Gamma$ , ближайшим к основному. Представленные на рисунке кривые иллюстрируют зависимости  $1-|\Gamma|$  и  $\arg(\Gamma)/\pi$  от  $a$  для различных  $c$  и  $\xi$  вблизи точек совпадения частот.

Другое явление состоит в том, что потери существенно меняются в малой окрестности некоторого значения  $a_{кр}$  (см. рис. 3, а). Расчеты показали, что это обусловлено резким изменением характера зависимости фазы коэффициента отражения  $\rho_0(q)$  при вариации  $a$  вблизи  $a=a_{кр}$ .

Рассмотрим этот эффект подробнее. На рис. 4, а приведены кривые, иллюстрирующие зависимость фазы  $\rho_0(q)$  для  $a < a_{кр}$  и  $a > a_{кр}$  (в рассматриваемом случае  $a_{кр} \approx 0.3351943$ ). Видно, что при переходе через  $a=a_{кр}$  вторая производная  $d^2\arg(\rho_0)/dq^2$  меняет знак. Это приводит к появлению своего рода аномалии при отражении волнового пучка от гофра.

Для того, чтобы проиллюстрировать существование этого явления, рассмотрим более простую задачу – рассеяние гауссова пучка на гофре, используя представление падающего и рассеянного полей в виде интегралов по плоским волнам [17]. Полагая, что огибающая гауссова пучка пропорциональна  $\exp(-t^2q_G^2/2)$ , эффективность отражения можно охарактеризовать величиной  $\Gamma_G$ , определяемой соотношением

$$\Gamma_G = 1/(q_G\pi^{1/2}) \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(q) \exp(-q^2/q_G^2) dq.$$

Очевидно, что при таком определении  $\Gamma_G$  «интегральные» потери при отражении гауссова пучка от гофра задаются значением  $1-|\Gamma_G|$ . Подчеркнем, что определенные таким образом потери связаны не только с рассеянием излучения под малыми углами к поверхности гофра (обусловленные таким рассеянием потери малы при  $q_G \ll 1$ ), но также и искажением отраженного волнового пучка вследствие зависимости коэффициента отражения от угла падения. Например, если падающий пучок имеет плоский волновой фронт, то при  $a < a_{кр}$  отраженный пучок будет расходящимся, а при  $a > a_{кр}$  – сходящимся.

На рис. 4, б приведены кривые, иллюстрирующие зависимость  $1-|\Gamma_G|$  от  $a$

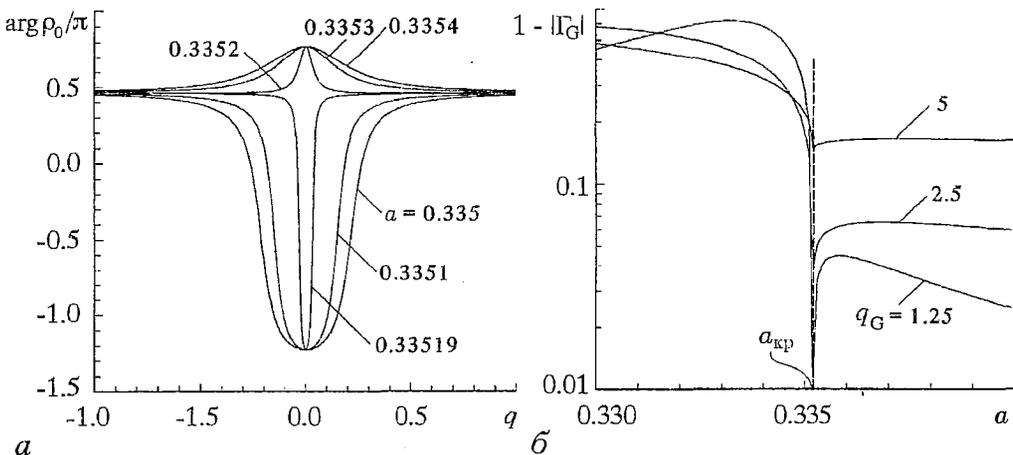


Рис. 4. Дифракция на гофре синусоидального профиля при относительной глубине гофра  $a$  вблизи критического значения  $a_{кр}$ : а – зависимость фазы коэффициента  $\rho_0$  ( $\arg(\rho_0)/\pi$ ) от параметра  $q$ , характеризующего угол падения плоской волны на гофр (значения относительной глубины гофра указаны вблизи соответствующих кривых); б – зависимость потерь на преобразование  $(1-|\Gamma_G|)$  при рассеянии гауссова пучка на гофре от относительной глубины  $a$  для различных  $q_G$ . Все зависимости построены при  $\xi=2.5$ ,  $\alpha=10^{-4}$

для различных параметров  $q_0$ , характеризующих ширину пучка. Как видно из рис. 4, б, в малой окрестности  $a_{кр}$  происходит существенное (до двух порядков для рассмотренных значений параметров) изменение потерь на отражение. При этом зависимость  $1-|\Gamma_G|$  от  $a$  имеет сходный вид с зависимостью величины  $1-|\Gamma|$ , определяющей потери в КР с гофрированным зеркалом, от безразмерной глубины гофра (см. рис. 3, а).

Необходимо подчеркнуть, что рассмотренное явление имеет «коллективный» характер: оно проявляется только при анализе рассеяния совокупности плоских волн (волнового пучка, имеющего конечную ширину спектра пространственных частот). Амплитуда коэффициента отражения «индивидуальной» плоской волны не обладает при  $a=a_{кр}$  какими-либо особенностями; существенны лишь зависимости фазы при малых  $q$ . Вместе с тем, учет данного эффекта важен на практике: как видно из результатов, приведенных на рис. 3, а, при  $a \geq a_{кр}$  потери КР с гофрированным зеркалом заметно уменьшаются. Очевидно, что при качественном анализе свойств КР с периодическими структурами существование данной аномалии требует учитывать не только амплитуды дифракционных гармоник, но и фазовые зависимости в определенном диапазоне углов падения.

Аналогично известным «индивидуальным» аномалиям (например, общеизвестным аномалиям Вуда [14]), возникающим при отражении плоских волн от гофрированной поверхности, данная особенность соответствует существованию собственной волны при  $a=a_{кр}$ , для которой  $q=0$ . Необходимо отметить, что в то время как «обычные» (медленные) волны, распространяющиеся над периодической поверхностью, существуют только при  $d/\lambda < 1/2$ , данная собственная волна появляется при  $d/\lambda \approx 1$ . Экспоненциальное затухание (при удалении от гофра) поля такой волны обусловлено обращением в нуль коэффициента, соответствующего распространяющейся гармонике в разложении по плоским волнам. При  $a \ll 1$  приближенное решение уравнений, определяющих поле собственной волны, может быть получено в явном виде, и для  $a_{кр}$  имеет место следующее приближенное соотношение:

$$a_{кр} \approx 2(3\xi\alpha)^{1/4}. \quad (16)$$

Заметим, что, как видно из (16), при уменьшении  $\xi\alpha$ , то есть при уменьшении отношения периода структуры к длине волны, критическая глубина гофра увеличивается. Это обстоятельство осложняет как теоретический анализ структуры, так и ее изготовление.

Эффекты, о которых шла речь выше, обуславливают радиационные потери КР с периодическими структурами. При использовании КР данного типа в качестве оптической системы оротрона представляют интерес параметры собственных колебаний, характеризующие взаимодействие поля с электронным пучком. Ниже будут рассмотрены явления, обусловленные резонансными явлениями, возникающими при отражении плоской волны от решетки при  $p \sim 1$ . При этом мы будем пренебрегать влиянием краев гладкого зеркала, однако, в отличие от предыдущего раздела, в импедансном приближении будет учтена конечная проводимость решетки.

В линейной теории оротрона при описании возбуждения колебаний в КР используется коэффициент трансформации, то есть отношение амплитуды медленной гармоники к амплитуде основной волны [1]. В оротроне эффективное взаимодействие электронного потока происходит с синхронной волной, фазовая скорость которой близка к скорости электронов. Используя обозначения, введенные в настоящей работе (см. (5) и примечания к формуле (7)), выражение для поля данной волны можно записать в виде

$$E_{x,1} = i[(1-p^2)^{1/2}/p]\rho_1 \exp[2i\pi t - (1-p^2)^{1/2}\eta]. \quad (17)$$

Можно показать, что эффективность возбуждения резонаторного колебания при взаимодействии с электронным пучком определяется коэффициентом трансформации  $\kappa$

$$\kappa_1 = [(1-p^2)^{1/2}/p]|\rho_1|. \quad (18)$$

Коэффициент трансформации связывает амплитуду синхронной пространственной гармоники с полем стоячей волны в резонаторе и, по существу, определяет пусковой ток оротрона.

На рис. 5, а представлены зависимости коэффициента  $\kappa_1$  от относительной глубины гофра  $a$ . Рассматривали периодическую структуру прямоугольного профиля, на поверхности которой выполняются граничные условия Леонтовича. Зависимости построены для различных значений параметра  $\mu$ , определяющего «скважность» структуры – отношение ширины канавки к периоду гофра.

Напомним, что при  $d \ll \lambda$  оптимальная глубина гофра близка к четверти длины волны, при «скважности» 0.5 ( $a = \pi/4$  при  $\mu = 0.5$ ). В том же случае, когда период близок к длине волны, зависимость коэффициента трансформации от глубины принимает ярко выраженный резонансный характер. Пренебрегая омическими потерями при отражении и приближенно решая задачу дифракции плоской волны на решетке (см. также [18]), можно получить, что вблизи «резонанса» зависимость коэффициента трансформации от глубины структуры имеет вид

$$\kappa_1 = 2 / \{1 + [(a_m - a) / (\delta a_m)]^2\}^{1/2}, \quad (19)$$

причем положение резонансного максимума  $a_m$  и его ширина  $\delta a_m$  даются соотношениями

$$a_m = 1/2 \arctg [(1-p)^{1/2} / (\mu 2^{1/2})], \quad \delta a_m = \mu/2. \quad (20)$$

Отметим, что конечные амплитуда и ширина резонансных кривых обусловлена связью канавок дифракционной решетки со свободным пространством. Как видно из рис. 5, а (результаты расчетов с учетом конечной проводимости), омические потери приводят к уменьшению резонансного значения  $\kappa_1$  и к увеличению его ширины.

На рис. 5, б представлены зависимости коэффициента  $\kappa_1$  от относительной глубины  $a$  для структуры синусоидального профиля. Кривые рассчитаны для

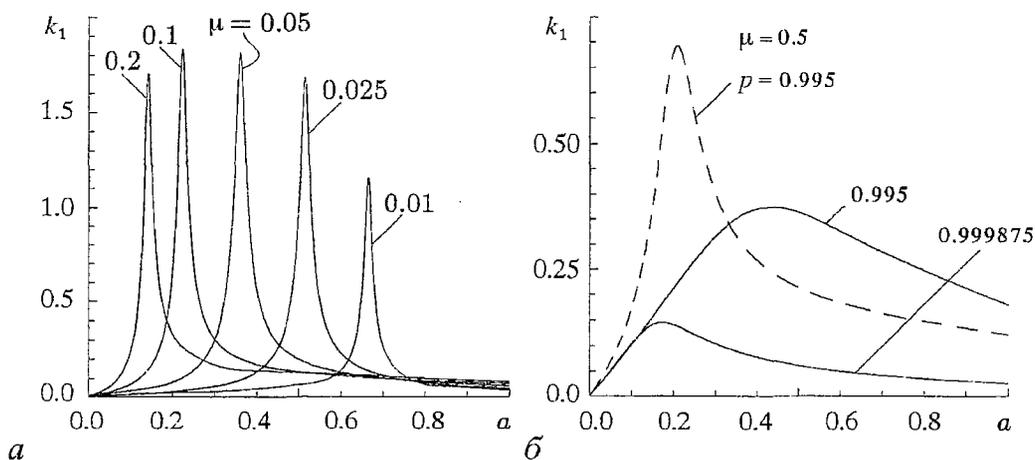


Рис. 5. Зависимости коэффициента  $\kappa_1$  от относительной глубины гофра  $a$  при различных значениях «скважности»  $\mu$  для прямоугольного профиля (а) и при различных  $p$  для синусоидального профиля (б). Штриховой линией показана зависимость, полученная для решетки с прямоугольным профилем, «близким» к синусоидальному ( $\mu = 0.5$ )

различных значений параметра  $p$ . Для сравнения штриховой линией показана зависимость, полученная для решетки с прямоугольным профилем, «близким» к синусоидальному ( $\mu=0.5$ ). Отметим, что для гофра синусоидального профиля резонансные явления выражены слабее. Данные результаты позволяют качественно оценить влияние профиля гофра на характер зависимостей. По-видимому, структуры с более плавным профилем обладают менее выраженными резонансными свойствами; вместе с тем, коэффициент трансформации для таких решеток может быть существенно меньшим.

Можно показать, что пусковой ток  $I$  оротрона определяется из выражения [1,5,6]

$$\{(III_A)[2\pi^2 b^2 / (\gamma^3 \lambda h)](1-p^2)/p^2\} |\rho_1|^2 \exp[-2(1-p^2)^{1/2} \eta_0] d/d\Phi [\sin(\Phi/2)/(\Phi/2)]^2 = \ln|\rho_0|, \quad (21)$$

где

$$\Phi = (4\pi b/d)(1 - p/\beta),$$

$b$  и  $h$  – характерные размеры пучка в продольном и поперечном направлениях, соответственно;  $I_A = m\nu c^3/e \approx 17$  кА. Из выражения (21) следует, что «дифракционные» показатели оротрона можно охарактеризовать «пусковым форм-фактором»  $F$

$$F = [(1-p^2)/p^2] |\rho_1|^2 / \ln|\rho_0|. \quad (22)$$

Величина  $F$  является показателем «дифракционного качества» оротрона: чем  $F$  больше, тем меньше пусковой ток.

Зависимость  $F$  от относительной глубины гофра прямоугольного профиля показана на рис. 6, а. Приведенные на этом рисунке результаты позволяют приблизительно оценить оптимальные параметры периодической структуры релятивистского оротрона. Действительно, оптимальная глубина гофра прямоугольного профиля близка к  $\lambda/4\pi$  при отношении ширины канавки к периоду около  $1/2$ . Необходимо подчеркнуть, что параметры гофра, обеспечивающие максимальное значение пускового форм-фактора, не совпадают с параметрами, соответствующими максимальному коэффициенту трансформации. Данное обстоятельство обусловлено сильной зависимостью от глубины гофрировки омических потерь при отражении от решетки.

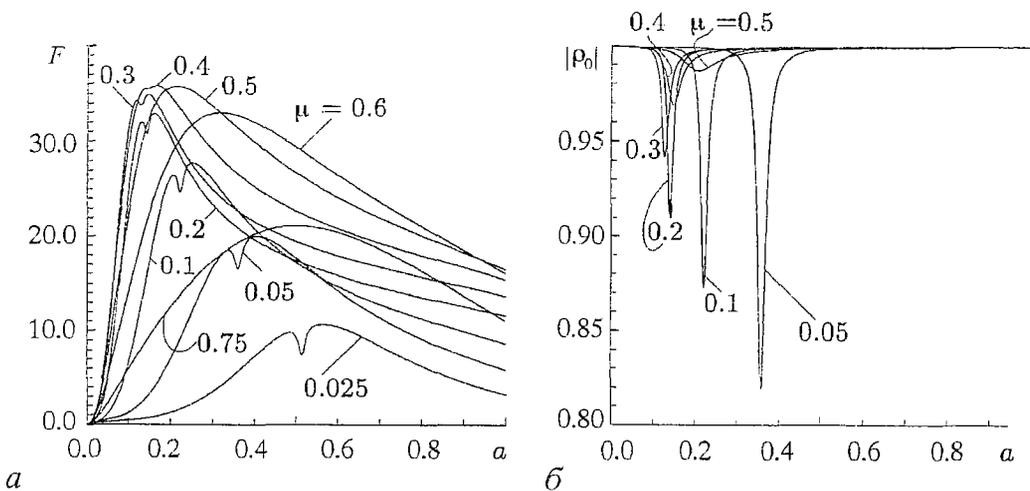


Рис. 6. Зависимость «пускового форм-фактора»  $F$  от относительной глубины прямоугольного гофра (а) для различных значений «скважности»  $\mu$ . Резонансное поглощение при отражении от гофра с конечной проводимостью (б): зависимость  $|\rho_0|$  от  $a$  при различных  $\mu$

Отметим, что, как следует из соотношения (22), величина пускового форм-фактора зависит не только от коэффициента преобразования, но и от значения  $\rho_0$  – коэффициента отражения плоской волны, падающей нормально на гофр. При  $p < 1$  значение  $|\rho_0|$  определяется лишь омическими потерями при отражении. Как показали расчеты, при  $p < 1$  зависимость  $|\rho_0|$  от  $a$  имеет выраженный резонансный характер (см. рис. 6, б). Для гофра с достаточно узкими щелями потери на отражение могут на несколько порядков превышать потери при отражении плоской волны от гладкой поверхности.

### Заключение

В настоящей работе приведена методика и результаты расчета собственных колебаний в резонаторе с гофрированным зеркалом. Исследован случай, когда период гофра близок к длине волны. Показано, что при приближении периода гофрированного зеркала к длине волны потери собственных колебаний резко возрастают, причем величина потерь зависит от размера зеркала и глубины гофра. Обнаружен эффект резонансного отражения волновых пучков от периодической структуры: потери на отражение волнового пучка существенно (на несколько порядков) изменяются при малых вариациях глубины гофра вблизи определенного значения. Приведена зависимость резонансной глубины, вычисленная для гофра синусоидального профиля, от отношения периода структуры к длине волны. Показано, что данный эффект может приводить к заметному уменьшению дифракционных потерь в КР с гофрированным зеркалом, обуславливая, в частности, своеобразный механизм селекции собственных колебаний.

Необходимо подчеркнуть, что резонансные явления, возникающие при отражении от периодических структур при  $d/\lambda \lesssim 1$ , изменяют оптимальные значения параметров решетки и приводят к дополнительному возрастанию пускового тока в релятивистском оротроне. Расчеты показали, что для типичных значений релятивистского фактора такое увеличение может достигать 20-кратного размера. По видимому, данное обстоятельство приводит к тому, что при переходе к релятивистским электронным пучкам практическое значение могут иметь только многосекционные приборы [6].

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99-02-16012) и грантом Президента РФ (96-15-96956).*

### Библиографический список

1. Русин Ф.С., Богомолов Г.Д. // Электроника больших мощностей. Сб. 5. М.: Наука, 1968. С. 38.
2. Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. Киев: Наукова думка, 1987.
3. Косарев Е.Л. // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3, № 7. С. 295.
4. Натаров М.П., Попкова Т.Л., Родионова В.Н. и др. // РЭ. 1993. Т. 38, № 9. С. 1577.
5. Русин Ф.С. // Электроника больших мощностей. Сб. 5. М.: Наука, 1968. С. 9.
6. Bogomolov G.D. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1998. Vol. A405, № 2-3. P. 248.
7. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966.
8. Булдырев В.С., Фрадкин Э.Е. // Оптика и спектроскопия. 1964. Т. 17, № 4. С. 583.
9. Клеев А.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 2. С. 231.
10. Kuyrkchan A.G., Kleev A.I., Sukov A.I. // ACES Journal. 1994. Vol. 9, № 3. С. 101.
11. Клеев А.И., Богомолов Г.Д. // РЭ. 1999. Т. 44.

12. Christiansen S., Kleinman E. // IEEE Trans. on AP. 1996. Vol. 44, № 10. P. 1309.
13. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
14. Petit R. // Electromagnetic Theory of Gratings. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1980.
15. Клеев А.И., Маненков А.Б. // РЭ. 1994. Т. 39, № 4. С. 559.
16. Богомолов Г.Д., Клеев А.И. // РЭ. 1999. Т. 44, № 3.
17. Kojima T. // Journal of the Optical Society of America. 1990. Vol. 7, № 9. P. 1740.
18. Дерюгин Л.Н., Фридман Г.Х. // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 6. С. 1209.

Институт физических проблем  
им. П.Л.Капицы РАН

Поступила в редакцию  
после переработки

25.05.99  
13.07.99

## ON THE THEORY OF THE QUASI–OPTICAL RESONATORS WITH PERIODICAL STRUCTURES

*G.D. Bogomolov, A.I. Kleev*

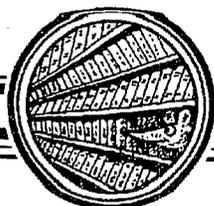
In the present paper we discuss the results of a numerical investigation of the quasi–optical resonator with a periodical structure (a grating) used at the relativistic orotron. To obtain its operation in the sub–millimeter wavelength range (the wavelengths from 20–30 microns to 1 nm) it is possible to use an electron beam with several MeV energy. A periodic structure with the period close to the wavelength must be used for the relativistic electron beams. A method for numerical analysis of the quasi–optical resonator with a corrugated mirror are presented. The method under consideration is applied to the case when the period of the structure is close to the wavelength. It has been found that there were some resonance effects which took place when the period of the corrugation was close to the wavelength. For instance, it has been shown that for a specific value of the corrugation depth, the Gaussian beam was reflected from the structure without distortion. The calculations demonstrate that when the depth is close to this specific value, the quasi–optical resonator losses are being changed drastically. The optimal grating parameters which provide maximum field–beam interaction and minimal losses have been obtained.



*Богомолов Генрих Дмитриевич* – родился в Москве (1940), закончил Московский физико–технический институт (1963) и с тех пор работает в ИФП РАН старшим научным сотрудником, зам. директора института. Защитил кандидатскую диссертацию по разработке и исследованию оротрона (1968). Область научных интересов – экспериментальные вопросы релятивистской электроники, связанные с генерацией коротковолнового излучения.



*Клеев Андрей Игоревич* – родился в Москве (1958), закончил факультет общей и прикладной физики Московского физико–технического института (1981). С 1981 года по настоящее время работает в Институте физических проблем им. П.Л.Капицы, старшим научным сотрудником. Защитил кандидатскую диссертацию в Институте физических проблем (1986), докторскую в Саратовском государственном университете (1995). Область научных интересов – теория дифракции. E–mail:kleev@kapitza.ras.ru



Изв. вузов «ПНД», т. 7, № 4, 1999

### СОРОК ЛЕТ СО ДНЯ ПУБЛИКАЦИИ ОДНОГО КРАТКОГО СООБЩЕНИЯ

В сборнике рефератов по радиационной медицине Института биофизики Министерства здравоохранения СССР за 1958 год, вышедшем в свет в 1959 году, было опубликовано краткое сообщение Бориса Павловича Белоусова «Периодически действующая реакция и ее механизм».

Б.П. Белоусов (1893–1970) получил химическое образование в Высшей технической школе города Цюриха в Швейцарии. В первые годы советской власти работал на химических курсах РККА (впоследствии – химической академии РККА). В 1939 году вышел в отставку в звании комбрига (генерал-майор). В дальнейшем он заведовал лабораторией Института биофизики здравоохранения СССР. Борис Павлович сочетал талант исследователя с умением долгие годы вести изучение трудных проблем. Он был человеком высокой этики и широкой эрудиции. Все это обусловило ряд важных научных достижений Б.П. Белоусова, среди которых особое место занимает периодическая реакция его имени, которую Нобелевский лауреат И.Р. Пригожин назвал главным экспериментальным достижением XX века. К сожалению, мировая известность пришла к Б.П. Белоусову после его смерти, последовавшей 12 июня 1970 года.

Б.П. Белоусов открыл периодическую реакцию в 1950 году. Он исследовал окисление лимонной кислоты при взаимодействии с  $\text{BiO}_3^-$  в присутствии ионов  $\text{Ce}^{4+}$  в качестве катализаторов в сернокислой среде. Борис Павлович обратил внимание на четкую периодическую смену окраски реакционной смеси с бесцветной на желтую. Введя в реакцию железозофенантролин, он «подкрасил» ее: синяя окраска менялась на красную.

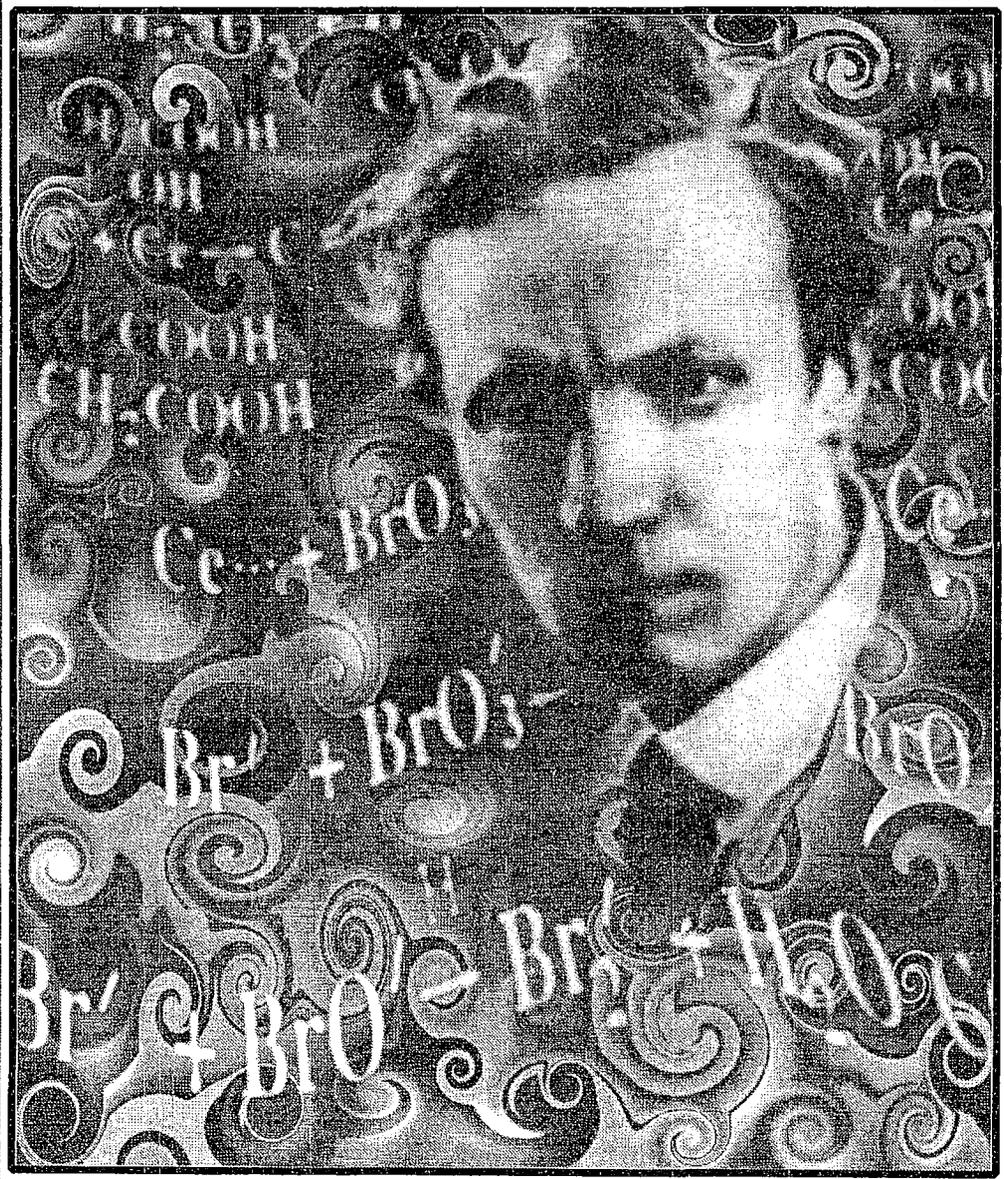
Первый раз Б.П. Белоусов оправил статью о периодической реакции в один из химических журналов в 1951 году. Рецензия на статью была отрицательной. В ней говорилось, что такая реакция невозможна, кроме того рецензент требовал теоретического обоснования наблюдаемого явления. Этому отрицанию было свое объяснение. Несмотря на то, что уже были известны теоретические работы Лотки, Вольтерра, Д.А. Франк-Каменецкого, многие химики считали невозможными колебания в гомогенных системах. Они, ошибаясь, переносили понятия равновесной термодинамики на кинетику открытых систем.

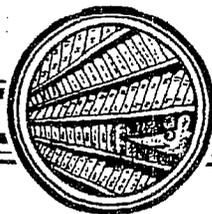
Б.П. Белоусов в 1957 году вновь послал дополненную статью в другой химический журнал, но и там его ждал отказ. И только в 1959 году по настоянию его коллег было опубликовано краткое сообщение, о котором упоминалось выше.

Существенный прогресс в понимании механизма реакции Белоусова был достигнут в исследованиях А.М. Жаботинского. Эти исследования способствовали и тому, что реакция Белоусова стала известна во всем мире: ей посвящено огромное количество статей, обзоров, книг. В частности, весьма полное представление об этой реакции и ей подобных дает книга «Колебания и бегущие волны в химических системах» (М.: Мир, 1988, 720 с.). Кстати, в ней есть любопытная статья М. Бургера и Э. Буйдошо «Колебательные реакции как пример развития подобласти науки», в которой проанализирован рост числа публикаций и числа ученых, работающих в этой области.

Ниже приводится текст статьи Б.П. Белоусова (из архива Б.П. Белоусова, датирована 1951 годом) в том виде, в каком она была опубликована в сборнике научных трудов «Автоволновые процессы в системах с диффузией», изданном в Горьком в 1981 году.

*Д.И. Трубецков*





Изв.вузов «ПНД», т.7, № 4, 1999

## ПЕРИОДИЧЕСКИ ДЕЙСТВУЮЩАЯ РЕАКЦИЯ И ЕЕ МЕХАНИЗМ\*

*Б.П. Белоусов*

Как известно, медленно протекающие окислительно–восстановительные реакции можно весьма заметно ускорить, например, путем введения относительно небольших количеств третьего вещества – катализатора. Последний изыскивается обычно эмпирически и является для данной реакционной системы до известной степени специфическим.

Некоторую помощь в изыскании такого катализатора может оказать правило, по которому нормальный его потенциал подбирается средним между потенциалами реагирующих в системе веществ. Указанное правило, хотя и упрощает выбор катализатора, однако оно еще не позволяет заранее и с уверенностью предсказывать, будет ли таким образом выбранное вещество действительно являться положительным катализатором для данной окислительно–восстановительной системы, а в случае, если и будет пригодным, то еще неизвестно, в какой мере оно проявит свое активное действие в избранной системе.

Надо полагать, что так или иначе изысканный катализатор окажет действие как в своей окислительной форме, так и в восстановленной. Причём окисленная форма катализатора, очевидно, должна легко реагировать с восстановлением основной реакции, а его восстановленная форма – с окислителем.

В системе бромата с цитратом ионы церия вполне отвечают указанным выше условиям, а потому, при подходящем рН раствора, могут являться хорошими катализаторами. Отметим, что в отсутствие ионов церия сам бромат практически не способен окислять цитрат, тогда как 4–валентный церий достаточно легко это делает. Принимая во внимание способность бромата окислять  $\text{Ce}^{III}$  в  $\text{Ce}^{IV}$ , становится понятной каталитическая роль церия в такой реакции.

Поставленные в этом направлении опыты подтвердили каталитическую роль церия в избранной системе, а кроме того, выявили поразительную особенность течения этой реакции.

Действительно, нижеописываемая реакция замечательна тем, что при проведении ее в реакционной смеси возникает ряд скрытых, упорядоченных в определенной последовательности, окислительно–восстановительных процессов, один из которых периодически выявляется отчётливым временным изменением цвета всей взятой реакционной смеси. Такое чередующееся изменение окраски, от бесцветной до желтой и наоборот, наблюдается неопределенно долго (час и больше), если составные части реакционного раствора были взяты в определенных количествах и в соответствующем общем разведении.

\* Из архива Б.П. Белоусова. Датирована 1951 годом. – *Прим. ред.*

© Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сборник научных трудов. Горький, 1981. С. 176–186.

Так, например, периодическое изменение окраски можно наблюдать в 10 мл водного раствора следующего состава\*

Лимонная кислота	2.00 г
Сульфат церия	0.16 г
Бромат калия	0.20 г
Серная кислота (1:3)	2.0 мл
Воды до общего объема	10.0 мл

Если указанный, комнатной температуры, раствор хорошо перемешан, то в растворе в первый момент усматривается возникновение нескольких быстрых смен окрасок из желтого в бесцветный и наоборот, которые спустя 2–3 мин приобретают правильный ритм. При соблюдении условий опыта продолжительность одной смены окраски имеет среднее значение, равное примерно 80 с. Однако этот интервал через некоторое время (10–15 мин) имеет тенденцию увеличиваться и с 80 с постепенно доходит до 2–3 мин и более. В это же время отмечается появление в растворе тонкой белой взвеси, которая со временем частично седиментирует и выпадает на дно сосуда в виде белого осадка. Анализ его показывает образование пентобромацетона как продукта окисления и бромирования лимонной кислоты. Увеличение концентрации ионов водорода или церия весьма ускоряет ритм реакций; при этом интервалы между импульсами (сменой окраски) становятся короче; одновременно наступает быстрое выделение значительных количеств пентобромацетона и двуокси углерода, что влечет за собой резкое уменьшение лимонной кислоты и бромата в растворе. В таких случаях реакция заметно приближается к концу, что усматривается по вялости ритма и отсутствию четких смен окрасок. В зависимости от израсходованного продукта добавка бромата или лимонной кислоты вновь возбуждает интенсивность затухающих импульсов и заметно продлевает всю реакцию. На течение реакции большое влияние оказывает также и повышение температуры реакционной смеси, что сильно ускоряет ритм импульсов; напротив, охлаждение – затормаживает процесс.

Некоторое нарушение течения реакции, а с этим и равномерности ритма, наблюдаемое спустя некоторое время от начала процесса, зависит, вероятно, от образования и накопления твердой фазы суспензии пентобромацетона.

На самом деле, ввиду способности пентобромацетона сорбировать и удерживать на себе небольшую часть выделяющегося при импульсах свободного брома (см. ниже), последний, очевидно, будет частично выбывать из этого звена реакции, напротив, при очередной смене импульса, когда раствор станет бесцветным, сорбированный бром станет медленно десорбироваться в раствор и неупорядоченно идти в реакцию, нарушая тем самым создавшуюся вначале общую синхронность процесса. Таким образом, чем больше накапливается взвеси пентобромацетона, тем больше наблюдаются и нарушения в длительности ритма: время между сменами окрасок раствора увеличивается, а сами смены становятся нечеткими.

Некоторое представление о действии пульсирующей реакции дает ряд фотографий\*\*, при этом каждый из снимков производился всякий раз после того, как происходила очередная смена окраски.

На фотографических снимках в центре видна пробирка с реакционной жидкостью, меняющей окраску из желтой в бесцветную. Для сравнения слева находится пробирка с раствором желтой соли 4-валентного церия (на снимке – черного цвета), справа – пробирка с водой (на снимке – бесцветная). Таким образом, на фотографических снимках изменение от черного к бесцветному соответствует импульсам: желтый – бесцветный. Рядом помещен секундомер, показывающий время съемки.

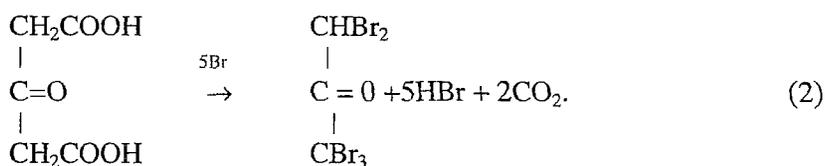
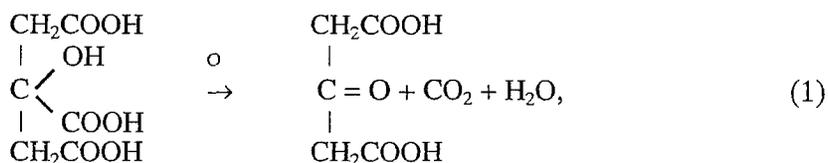
\* При желании изменить темп пульсации приведенная пропись состава реакционного раствора в известной мере может быть изменена.

Указанные в тексте количественные соотношения ингредиентов, входящих в состав описываемой реакции, были экспериментально разработаны А.П. Сафроновым. Им же предложен для этой реакции индикатор – железифенантролин, за что автор весьма ему признателен.

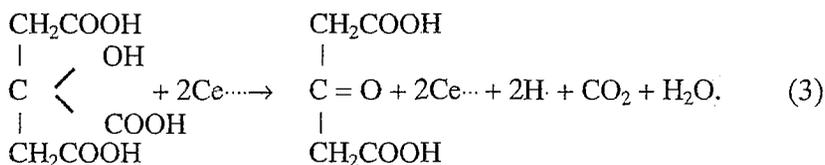
\*\* Фотографии не сохранились. – *Прим. ред.*

Сопоставление и анализ экспериментальных данных свидетельствует, что в основе этой реакции лежит своеобразное поведение лимонной кислоты по отношению к некоторым окислителям.

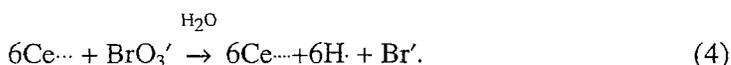
Как известно, бром практически не взаимодействует с лимонной кислотой. Однако в присутствии некоторых окислителей, способных переводить ее в ацетондихлорановую кислоту, происходит образование пентобромацетона:



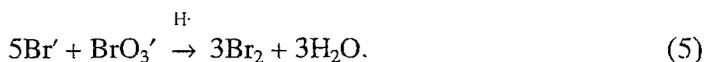
Такой окислитель, как бромат, так же, как и сам бром, при обычных условиях практически не окисляет лимонную кислоту или делает это очень длительно. Напротив, в присутствии ионов церия, являющихся в данном случае передатчиками окисления, реакция с броматом протекает достаточно гладко. Если при этом ион церия взят 4-валентным, то он и в отсутствие бромата способен с весьма заметной скоростью окислять лимонную кислоту, переводя последнюю в ацетондихлорановую кислоту:



Образующийся при этом ион 3-валентного церия способен окисляться броматом и переходить вновь в 4-валентный церий, в то время как бромат раскисляется с образованием бромидов:

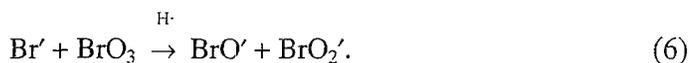


Выделившийся бромид с относительно большой скоростью реагирует в кислой среде с броматом, выделяя свободный бром\*:

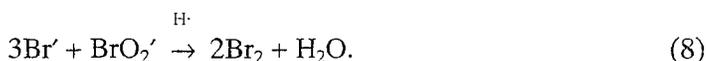


Строго говоря, реакции бромата с  $\text{Ce}^{\dots}$  (4) и с  $\text{Br}'$  (5) не отвечают вышеприведенным простым схемам. Надо полагать, что тип уравнений скоростей этих реакций более низкого порядка, чем это видно из приведенных стехиометрических равенств. Так, например, в реакции (5) допускают ряд скрытых, медленно протекающих промежуточных реакций. За ними следует одна или несколько быстрых, не влияющих на общую скорость, завершающих реакций. При этом возможно временное образование двух кислот — бромноватистой (не изолированной, но возможной) и бромистой:

\* Если при этом бромат (в реакции (5)) был взят в избытке.



За этим следуют весьма быстрые процессы их восстановления:

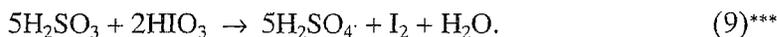


Таким образом, в качестве конечного продукта получается свободный бром\*; однако последний должен быстро «блокироваться» или захватываться, согласно приведенной выше схеме (2), ацетондикарбоновой кислотой, ранее образовавшейся при реакции (3)\*\*. В результате в реакционном растворе идет накопление бесцветного, малорастворимого пентобромацетона.

Последний достаточно устойчив и индифферентен в кислой среде ко всем составным частям реакционной смеси.

Рассмотренные выше ступени механизма этой своеобразной реакции указывают на роль и ответственное значение окисления, производимого бромноватой кислотой. На самом деле, на примере известной реакции Ландольта можно отметить особенности сложного механизма окисления такими окислителями, как йодатом или броматом.

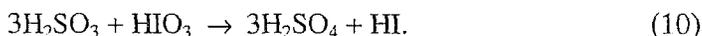
Как известно, взаимодействие йодата с сульфитом протекает по общей простой схеме



Оно имеет ту замечательную особенность, что при смешивании растворов сульфита с йодатом в кислой среде выделение свободного йода, а следовательно и окрашивание реакционной смеси, протекает не мгновенно после смешивания, а спустя некоторое, иногда довольно длительное время, и притом спонтанно.

Для объяснения этого явления полагают, что в скрытый период, в течение которого после смешивания реагентов растворяется еще бесцветным, возникают с различными скоростями взаимосвязанный и упорядоченный во времени ряд следующих процессов:

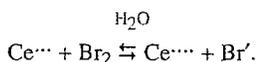
Медленная бесцветная реакция:



Более быстрая, также пока бесцветная, реакция (11)\*\*\*\*, ибо образующийся йод еще быстрее расходуется на последующую реакцию с сульфитом (12):

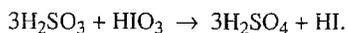


\* При этом мы временно опускаем из рассмотрения возможность возникновения обратной реакции взаимодействия  $\text{Ce}^{\dots}$  с образовавшимся свободным бромом по схеме:

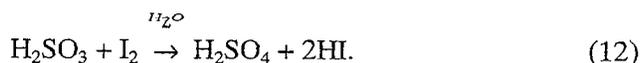


\*\* Здесь также возможна реакция свободного брома с цитратом в присутствии  $\text{BrO}'_3$  при одновременном течении индуцирующих процесс реакций.

\*\*\* При избытке сульфита свободный йод не образуется:



\*\*\*\* Надо думать, что эта реакция является сложной и проходит, вероятно, через образование  $\text{HIO}$  и  $\text{HIO}_2$  как было нами указано при реакциях (6) и (8) с броматом.

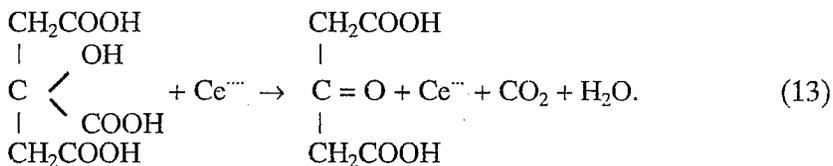


Только по израсходованию всего сульфита оставшийся йодат быстро прореагирует с накопившимся к этому времени йодидом, освободив некоторое количество свободного йода по схеме (11).

Для уяснения кинетики таких ступенчато идущих реакций принимают во внимание положение, по которому во всяком сложном процессе, протекающем через ряд последовательно идущих реакций, скорость наиболее медленной реакции определяет скорость всего процесса. Медленно протекающая реакция определяет также порядок суммарного процесса.

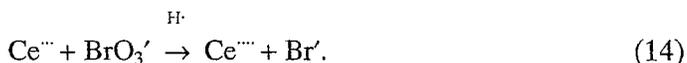
Из этого примера становится ясна и общая схема нашей сложной периодически действующей реакции, которую можно представить исходя из рассмотренных выше узловых процессов ее общего механизма следующим образом.

Если мы имеем подкисленный серной кислотой водный раствор лимонной кислоты, к которому добавлены  $\text{BrO}_3'$  и соль церия, то, очевидно, в первую очередь, должна протекать следующая реакция:



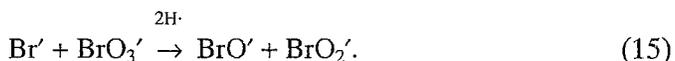
Эта реакция достаточно медленная, в ней усматривается (по исчезновению желтой окраски, свойственной ионам  $\text{Ce}^{\text{IV}}$ ) постепенное накопление 3-валентного иона церия.

Образующийся 3-валентный церий будет взаимодействовать с броматом



Эта реакция более быстрая, чем предыдущая (13), так как весь образующийся  $\text{Ce}^{\text{III}}$  успевает вернуться в реакцию (13) на окисление лимонной кислоты, а потому окраска (от  $\text{Ce}^{\text{III}}$ ) не наблюдается.

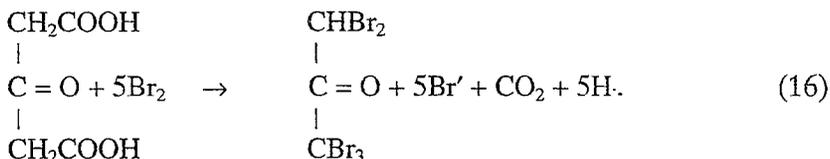
Далее, очевидно, накапливающийся в реакции (14)  $\text{Br}'$  будет реагировать с броматом:



Реакция относительно быстрая ввиду большой концентрации  $\text{H}$  за ней следуют еще более быстрые процессы:



Однако выделения свободного брома пока еще не отмечается, хотя он и образуется. Это происходит, очевидно, потому, что в реакции (14) бромид накапливается медленно, таким образом, «свободного» брома мало, и он успевает расходоваться в быстрой реакции (16) с ацетондикарбоновой кислотой (образовавшейся в реакции (13)):



Здесь, очевидно, окраска раствора также будет отсутствовать, причём раствор может слабо замутнеть от образовавшегося малорастворимого пентобромацетона. Выделение газа ( $\text{CO}_2$ ) пока ещё незаметно.

Наконец, после того как накопилось достаточное количество  $\text{Br}^{\cdot}$  (14, 16), наступает момент взаимодействия бромидов с броматом, теперь уже с видимым выделением некоторой порции свободного брома. Ясно, что к данному моменту ацетондикарбоновая кислота, которая до этого «блокировала» свободный бром, успеет израсходоваться вследствие малой скорости ее накопления в реакции (13).

Выделение свободного брома происходит спонтанно, и это обуславливает внезапную окраску всего раствора, которая усилится, вероятно, и от одновременного возникновения желтых ионов 4-валентного церия. Выделившийся свободный бром будет постепенно, но с хорошо заметной скоростью расходоваться на образование ионов  $\text{Ce}^{IV}$ , потребляемых реакцией (13), а следовательно, и на реакцию (15). Возможно, бром также будет расходоваться и на взаимодействие с лимонной кислотой в присутствии  $\text{BrO}_3^-$ \* так как при этом не исключается роль возникающих побочных процессов, индуцирующих эту реакцию.

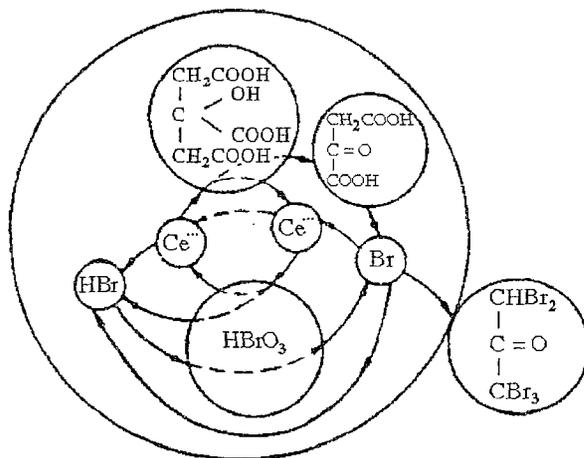
После исчезновения свободного брома и ионов  $\text{Ce}^{IV}$  в реакционном растворе, очевидно, останутся неактивный пентобромацетон, взятый избыток лимонной кислоты и бромата, а также катализирующий процесс 4-валентный церий.

Не подлежит сомнению, что в этом случае вышеописанные реакции возобновятся и будут повторяться до тех пор, пока не израсходуется один из ингредиентов взятой реакционной смеси, то есть лимонная кислота или бромат\*\*.

Эту взаимосвязь рассмотренных реакций можно представить следующей наглядной схемой.

Так как из имеющих место многочисленных процессов только немногие определяются визуально в виде смены окраски, то была сделана попытка выявить скрыто протекающие реакции с помощью осциллографа.

Действительно, на осциллографических снимках усматривается ряд периодических процессов, которые, очевидно, должны соответствовать видимым и скрытым реакциям. Однако последние требуют еще детального анализа.



\* Если в водном растворе  $\text{H}_2\text{SO}_4$  (1:3) имеются только лишь лимонная кислота и бромат, то при слабом нагревании такого раствора ( $35-40^\circ \text{C}$ ) и прибавлении бромной воды раствор быстро становится мутным, а бром исчезает. Последующее извлечение взвеси эфиром показывает образование пентобромацетона. Следы солей церия очень ускоряют этот процесс при бурном выделении.

\*\* В том случае, когда реакция остановилась, в силу израсходования одного из ингредиентов, прибавление израсходованного вещества опять возобновит периодические процессы.

В заключение отметим, что более отчетливое изменение ~~цветности~~ периодической реакции наблюдается с применением индикатора на окислительно-восстановительные процессы. В качестве такового наиболее удобным оказался железофенантролин, рекомендованный для определения перехода  $Se^{IV}$  в  $Se^{III}$ . При этом бесцветной окраске раствора ( $Se^{IV}$ ) соответствовала красная форма индикатора, а желтой ( $Se^{III}$ ) – синяя.

Особенно ценен такой индикатор для демонстрационных целей. Так, например, эта реакция чрезвычайно эффективна для демонстрации изменения ее скорости в зависимости от температуры\*.

Если сосуд с реакционной жидкостью, показывающей нормальное число импульсов (1–2 в мин) нагреть, то наблюдается быстрое изменение в скорости чередования смены окрасок, доходящее до полного исчезновения интервалов между импульсами. При охлаждении ритм реакции вновь замедляется и переменна цветов становится опять отчетливо различимой.

Другую своеобразную картину пульсирующей реакции с применением индикатора удастся наблюдать, если реакционный раствор, находящийся в цилиндрическом сосуде и «настроенный» на быстрый темп, аккуратно разбавить водой (путем наслоения) с таким расчетом, чтобы концентрация реагирующих веществ постепенно убывала от дна сосуда к верхнему уровню жидкости.

При таком разведении наибольшая скорость пульсации будет в более концентрированном, нижнем (горизонтальном) слое, убывая от слоя к слою к поверхности уровня жидкости. Таким образом, если в каком-либо слое в какое-то время произошла смена окраски, то одновременно в выше или ниже лежащем слое можно ожидать отсутствие таковой или иную окраску. Это соображение, несомненно, приложимо ко всем слоям пульсирующей жидкости. Если при этом учесть способность суспензии выпадающего пентобромацетона селективно сорбировать и длительно удерживать на себе восстановленную красную форму индикатора, то красная окраска пентобромацетона будет закреплена в слое. Она не нарушается даже при последующем изменении окислительно-восстановительного потенциала среды, в результате чего вся жидкость в сосуде через некоторое время становится пронизанной горизонтальными красного цвета слоями.

Следует указать, что введение в нашу систему другой окислительно-восстановительной пары  $Fe^{2+}=Fe^{3+}$  не может, конечно, не отразиться на первой.

В ней при этом отмечается более быстрое выделение пентобромацетона и соответственно более скорое завершение всего процесса.

---

\* Мы применяли на 10 мг реакционной смеси 0.1–0.2 мл реактива (1.0 г о-фенантролина, 5 мл  $H_2SO_4$  (1:3) и 0.8 г соли Мора в 50 мл воды).



*В Издательстве СГУ вышла в свет монография*

**Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.** Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / Под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с. Илл. ISBN 5-292-02285-3

Изложены фундаментальные основы нелинейной динамики, включающие элементы теории динамических систем, теорию устойчивости, бифуркаций и теорию детерминированного хаоса. Представлены новые результаты по проблемам синхронизации и управления хаосом, реконструкции динамических систем, стохастическому резонансу и синхронизации стохастических колебаний. Для научных работников, аспирантов, докторантов и преподавателей, специализирующихся в области теории нелинейных колебаний, статистической радиофизики и математического моделирования, а также для студентов старших курсов вузов соответствующих специальностей.

### Содержание

Предисловие  
Глава 1. Динамические системы  
Глава 2. Устойчивость, бифуркации, катастрофы  
Глава 3. Детерминированный хаос  
Глава 4. Аттракторы динамических систем  
Глава 5. Базовые модели динамического хаоса  
Глава 6. Бифуркационные механизмы перехода к хаосу  
Глава 7. Синхронизация хаоса  
Глава 8. Управление хаосом  
Глава 9. Реконструкция динамических систем  
Глава 10. Стохастический резонанс  
Глава 11. Синхронизация стохастических систем  
Предметный указатель  
Лаборатория нелинейной динамики СГУ

*Заинтересованный читатель может заказать монографию*

по электронной почте: and@cas.ssu.runnet.ru  
wadim@chaos.ssu.runnet.ru

по телефонам: (845-2) 51-45-49; 51-42-98

по почте: 410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ  
редакция журнала «ПНД»

*Стоимость наложенного платежа – 75 руб.*





*В Издательстве Янус–К вышла в свет монография*

**Ю.Л. Климонтович.** Статистическая теория открытых систем. Т.2. М: «Янус–К», 1999. 440 с. Цена 120 руб. ISBN 5–8037–0032–0

Том 2 состоит из двух частей, в которых существенно расширяется область приложения идей и методов, развитых в томе 1.

В первой части на примере явления «затухание Ландау» показано, что из-за нечеткого описания перехода от обратимых уравнений механики частиц к необратимым уравнениям статистической теории остается нерешенным ряд принципиальных вопросов теории плазмы. Их решение становится возможным благодаря конструктивному учету структуры «сплошной среды». При этом возникает обобщенное кинетическое уравнение, на основе которого проводится единое описание кинетических и гидродинамических процессов. Подзаголовок «Миф о бесстолкновительной плазме» подчеркивает существенное изменение в физическом представлении неравновесных процессов в плазме.

Во второй части методы физики открытых систем используются для описания термодинамики и кинетики фазового перехода второго рода на примере простейшей модели сегнетоэлектрического и антисегнетоэлектрического переходов типа смещения. Те же методы используются и для описания перехода через критическую точку в системе Ван дер Ваальса. Благодаря согласованности термодинамического предельного перехода и перехода в критическую точку удается избежать «проблемы бесконечности». Все термодинамические и флуктуационные характеристики имеют конечные значения при всех температурах в области перехода от симметричной фазы к несимметричной. Проводится сопоставление теоретических результатов с экспериментальными данными.

Монография предназначена для студентов, аспирантов, научных сотрудников, ведущих работы в областях, связанных со статистической теорией открытых систем.

Более развернутая информация по содержанию двух томов монографии будет дана в следующем номере журнала.

*Заинтересованный читатель может заказать монографию*

по электронной почте: [yklim@h Klim.phys.msu.su](mailto:yklim@h Klim.phys.msu.su)  
[wadim@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:wadim@chaos.ssu.runnet.ru)

по телефону: (845–2) 51–45–49

по почте: 410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ  
редакция журнала «ПНД»



Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *М.В. Попова, Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты  
р/с №40503810000000000378 ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

**Подписка на I-ое полугодие 2000 года**

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498  
и по заявочным письмам непосредственно в редакции  
Стоимость подписки на I полугодие 90 рублей

**Зарубежная подписка** оформляется через фирмы-партнеры ЗАО «Международная книга – Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК-Периодика» по адресу: 117049, Москва, ул. Б. Якиманка, 39, ЗАО «МК-Периодика» тел.: (095) 238-14-85, 238-49-67; факс: 238-46-34  
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address one of the partners of JSC «Mezhdunarodnaya Kniga-Periodica» in Your country or necessary to address JSC «МК-Periodica» directly  
Address: Russia, Moscow, 117049, ul. B. Yakimanka, 39, «МК-Periodica»  
Tel.: (095) 238-14-85, 238-49-67; Fax: 238-46-34  
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

Сдано в набор 23.08.99. Подписано к печати 1.10.99. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 8,4 (6,0). Уч.-изд. л. 8,8. Тираж 200 экз. Заказ 128

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.04.98

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 514298  
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

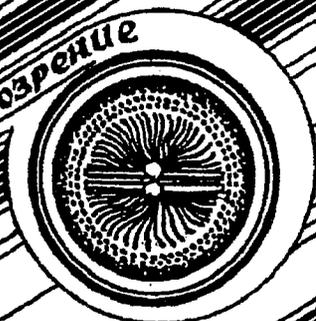
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1999



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей в журнале



Современной великой динамики

**ОЩУТИ ВКУС ВСЕЛЕННОЙ...**

**Вливайся в ряды  
подписчиков ПНД!**

