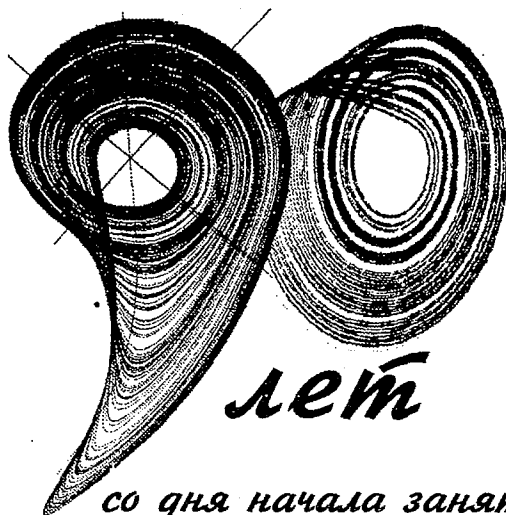
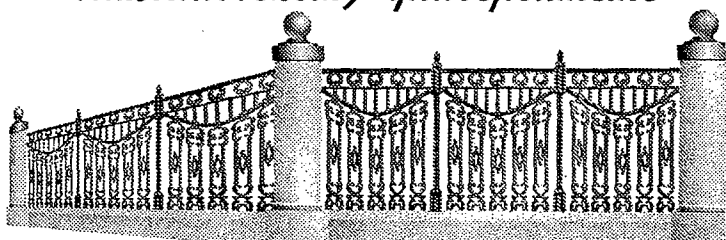
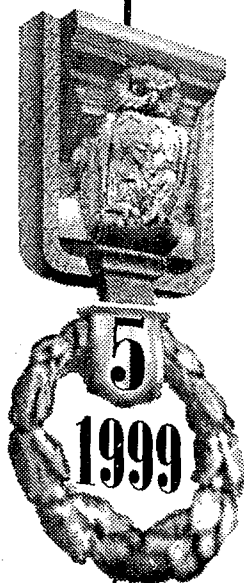


# Трикладная Динамика



лет

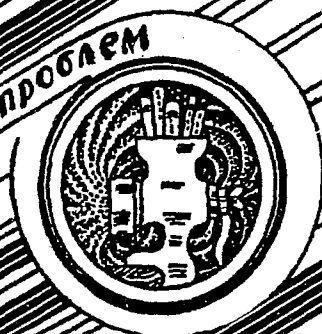
*со дня начала занятий  
в Саратовском (Императорском  
Николаевском) университете*



ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы



Обзоры актуальных проблем  
нелинейной  
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



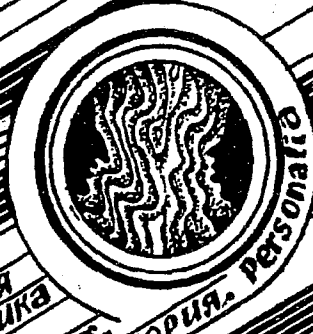
детерминированный хаос



Авто-волны, самоорганизация



Прикладные задачи  
нелинейной  
теории  
колебаний  
и волн



Нелинейная  
динамика  
в лицах.  
История. Personalo

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*В.И. Крицкий*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет

*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

*В.К. Юлпатов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород



**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

**ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ**

Усанов Д.А. Нелинейная динамика твердотельных СВЧ-устройств . . . . . 3

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

Купцов П.В., Кузнецов С.П. Вейвлет-анализ критических аттракторов . . . . 10

Астахов В.В., Баланов А.Г., Сосновцева О.В., Вадивасова Т.Е. Потеря синхронизации хаоса в связанных системах Ресслера . . . . . 26

Исаева О.Б., Елисеев М.В., Рожнёв А.Г., Рыскин Н.М. Моделирование автотоэлектронной эмиссии с фрактальной поверхностью . . . . . 33

Степанцов М.Е. Модель движения группы людей на основе решетчатого газа с нелокальными взаимодействиями . . . . . 44

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

Измайлов И.В., Калайда В.Т., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Бифуркации в точечной модели кольцевого интерферометра с запаздыванием и поворотом поля . . . . . 47

**НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ**

Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Новожилова Ю.В., Сергеев А.С. Теоретические и экспериментальные исследования автомодуляционных режимов генерации 3-сантиметровой ЛОВ с мегаваттным уровнем мощности . . . . . 60

Бессуднова Н.О., Рожнёв А.Г., Трубецков Д.И. Влияние теплового разброса электронов по скоростям на взаимодействие прямолинейного электронного потока с обратной электромагнитной волной . . . . . 70

Бессуднова Н.О. Влияние пространственного заряда на режимы генерации и усиления волн в системе электронный поток – электромагнитное поле вблизи границы полосы пропускания замедляющей системы . . . . . 80

Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е. Влияние отстройки частоты на пространственно-временную структуру оптического поля широкоапертурного лазера . . . . . 87

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA**

Левин М.Л., Миллер М.А., Суворов Е.В. Особенности Максвелловского «Трактата об электричестве и магнетизме» и принципы научного перевода . . . . . 97

**КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА**

Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Том I, II . . . . 110

Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем: фундаментальные основы и избранные проблемы . . . . . 123

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ . . . . . 128

## CONTENTS

## REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Nonlinear dynamics of solid–state microwave devices. *D.A. Usanov* . . . . . 3

## APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Wavelet analysis of critical attractors. *P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov* . . . . . 10

Loss of chaos synchronization in coupled Rössler systems. *V.V. Astakhov, A.G. Balanov, O.V. Sosnovtseva, T.E. Vadivasova* . . . . . 26

Simulation of field emission from fractal surface. *O.B. Isayeva, M.V. Eliseev, A.G. Rozhnev, N.M. Ryskin* . . . . . 33

Dynamic model of a group of people based on lattice gas with non–local interactions. *M.E. Stepanov* . . . . . 44

## BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Bifurcations in the point model of ring interferometer with delay and field turn. *I.V. Izmailov, V.T. Kalaida, A.L. Magazinnikov, B.N. Poizner* . . . . . 47

## INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Theoretical and experimental investigations of self–modulation regimes in the megawatt power X–band BWO. *N.S. Ginzburg, N.I. Zaitsev, E.V. Ilyakov, I.S. Kulagin, Yu.V. Novozhilova, A.S. Sergeev* . . . . . 60

Influence of thermal velocity distribution on electron beam – backward electromagnetic wave interaction. *N. O. Bessudnova, A. G. Rozhnev and D. I. Trubetskoy* . . . . . 70

Space charge influence to generation and amplification of a signal during interaction of electron beam and electromagnetic field close to the cutoff of slow wave structure. *N.O. Bessudnova* . . . . . 80

Frequency detuning influence on a spatio–temporal structure of a wide area laser field. *A.P. Zaikin, A.A. Kurguzkin, N.E. Molevich* . . . . . 87

## HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

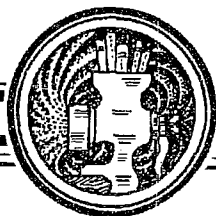
Peculiarities of Maxwell's «A treatise on electricity and magnetism» and principles of scientific translation. *M.L. Levin, M.A. Miller, E.V. Suvorov* . . . . . 97

## STUDENT'S BOOKSHELF

Statistical theory of open systems. Volumes I, II. *Yu.L. Klimontovich* . . . . . 110

Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: fundamental bases and selection of problems. *V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, V.V. Astahov* . . . . . 123

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS . . . . . 128



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ СВЧ-УСТРОЙСТВ\*

*Д.А. Усанов*

Обобщены результаты исследований нелинейной динамики различных типов полупроводниковых приборов в схемах СВЧ. Отмечается возможность качественного изменения вида вольт-амперных характеристик полупроводниковых приборов при воздействии на них СВЧ-излучения. Подчеркивается сложность теоретического описания наблюдающихся экспериментально последовательностей изменения режимов работы полупроводниковых СВЧ-устройств при увеличении уровня воздействующей на них мощности СВЧ-сигнала.

К настоящему времени с помощью твердотельных приборов можно реализовать большинство радиотехнических функций в диапазоне СВЧ. Стали ясны и основные недостатки твердотельных СВЧ-устройств, ограничивающие области их применения. К числу таких недостатков можно отнести, в частности, зависимость характеристик полупроводниковых приборов, составляющих основную элементную базу устройств твердотельной СВЧ-электроники, от уровня мощности воздействующего на них сигнала. В результате такого воздействия полупроводниковые приборы могут существенным образом изменять режим своей работы вплоть до полного выхода их из строя. В этой связи теоретические и экспериментальные исследования характера нелинейной динамики полупроводниковых приборов СВЧ представляются актуальными.

При описании свойств полупроводниковых приборов на СВЧ часто считают возможным использовать их стационарные или малосигнальные характеристики – вольт-амперную характеристику (ВАХ), импеданс. Такой подход позволяет успешно конструировать различного типа СВЧ-устройства на полупроводниковых приборах. В то же время ясно, что с увеличением уровня воздействующей СВЧ-мощности возможно существенное изменение свойств полупроводниковых приборов. Для устранения влияния внешних СВЧ-сигналов используют так называемые защитные устройства или СВЧ-ограничители [1,2] и, в частности, ограничители на  $p-i-n$ -диодах. То есть  $p-i-n$ -диоды в таких приборах по своему назначению находятся в условиях воздействия изменяющегося в широких пределах уровня СВЧ-мощности.

Было установлено, что при определенных уровнях СВЧ-мощности в  $p-i-n$  диодах может происходить скачкообразное изменение выпрямленного тока [3,4]. Возникновение таких скачков тока объяснено [5] нелинейным характером

\* Статья написана по материалам лекции, прочитанной на IX Международной школе по электронике СВЧ и радиофизике, Саратов, 2–6 марта 1999 года.

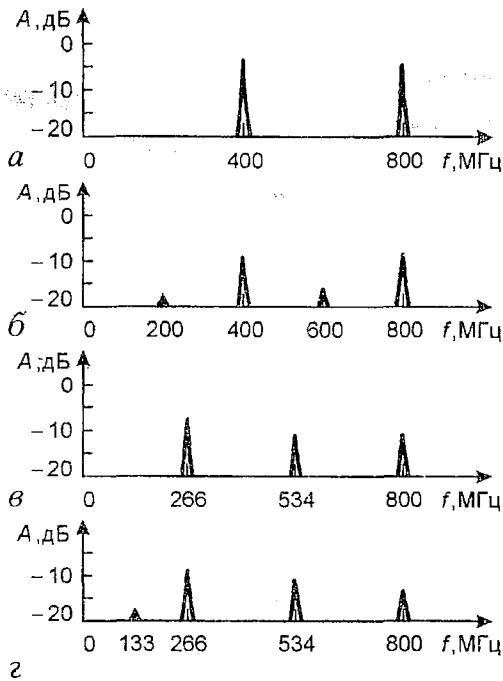


Рис. 1. Спектрограммы выходного сигнала ограничителя при входной мощности, Вт: а - 0.3, б - 0.7, в - 1.1, г - 1.8

с отрицательным дифференциальным сопротивлением (рис. 2) и, как следствие этого, к модуляции выходного СВЧ-сигнала сравнительно более низкочастотными колебаниями, частота и форма которых зависят от частоты и амплитуды входного сигнала [9]. Теоретическое объяснение этого эффекта стало возможным при учете в физической модели эффектов разогрева носителей заряда, детекторного эффекта и зависимостью импеданса диода от уровня входной СВЧ-мощности [10].

Явление возникновения гармонических составляющих при воздействии на полупроводниковый элемент СВЧ-сигнала было хорошо изучено. Для предотвращения влияния высших гармоник на характеристики СВЧ-ограничителей на р-і-п-диодах в их схемах предусматривалось введение фильтров низких частот. В то же время возникающие субгармонические составляющие в широкополосных волноведущих системах могут распространяться и тем самым влиять на выходные параметры устройства, в частности, увеличивать уровень просачивающейся через ограничитель мощности.

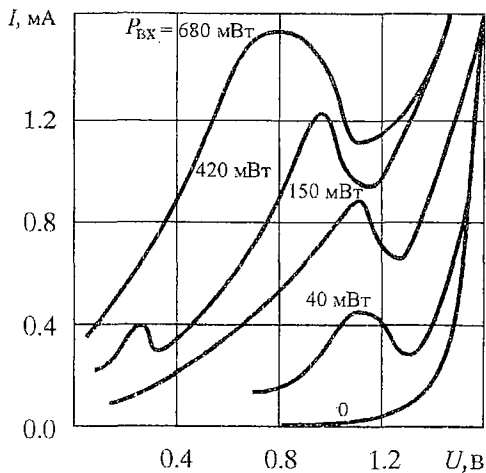


Рис. 2. Вольт-амперные характеристики диодов типа 2A534A при различных уровнях входной мощности

барьерной емкости р-і-перехода, образующей с индуктивностью выводов диодов нелинейный колебательный контур, имеющий два различных устойчивых состояния. Интересно отметить, что в спектре выходного сигнала ограничителя с увеличением уровня мощности входного сигнала  $P_{вх}$  с частотой  $f_0$  (рис.1) наблюдается последовательное появление составляющих с  $f_0/2$ ,  $f_0/4$ , области шумового спектра, составляющих  $f_0/3$ ,  $f_0/6$  [6]. Теоретически возникновение субгармонических составляющих и гистерезис в СВЧ-ограничителях описаны с использованием представления р-і-п-диода в виде нелинейного колебательного контура [7].

Следует отметить, что характера наблюдавшейся в эксперименте последовательности появления субгармонических составляющих описать не удалось.

Воздействие высокого уровня мощности на р-і-п-диод [4] или на два последовательно соединенных р-і-п-диода [8] может приводить к появлению на ВАХ одного или нескольких участков

на ВАХ одного или нескольких участков

полупроводниковых СВЧ-приборов

является *туннельный диод*. В том числе известны теоретические исследования нелинейной динамики устройств на туннельных диодах. Одно из предположений, которое принимается при моделировании работы устройств на туннельных диодах, состоит в том, что его вольт-амперная характеристика содержит участок отрицательного дифференциального сопротивления  $N$ -типа, и при увеличении уровня воздействующей на диод мощности СВЧ-излучения она остается неизменной.

В результате проведенных экспериментальных исследований было установлено, что, в противоположность описанной выше ситуации, характерной для  $p-i-n$ -диодов, когда воздействие СВЧ-излучения приводило к наведению на ВАХ участка с отрицательным дифференциальным сопротивлением, такое воздействие на туннельный диод может приводить к изменению его ВАХ от  $N$ -образной до приближающейся к экспоненциальной, характерной для ВАХ обычного невырожденного  $p-n$ -перехода (рис. 3) [12,13].

В случае использования туннельного диода в качестве активного элемента СВЧ-генератора следствием увеличения мощности подводимого внешнего сигнала является уменьшение генерируемой мощности и последующий срыв СВЧ-колебаний. При этом восстановление режима генерации колебаний наблюдается при существенно меньших значениях мощности внешнего СВЧ-сигнала, то есть зависимость относительной мощности, генерируемой туннельным диодом, от величины мощности внешнего СВЧ-сигнала носит гистерезисный характер.

Как известно,  $N$ -образный вид ВАХ туннельного диода связан с тем, что  $p-n$ -переход в нем образуется в результате контакта двух вырожденных полупроводников. Следовательно, исчезновение на ВАХ участка с отрицательным сопротивлением, которое наблюдается при воздействии СВЧ-излучения, может означать снятие вырождения в  $p$ - и  $n$ -областях  $p-n$ -перехода. Теоретическое обоснование этого утверждения приведено в работе [14]. Из теории следует, что описанный характер изменения ВАХ связан с разогревом носителей заряда полем СВЧ и появлением продетектированного сигнала.

В работе [15] описан экспериментально обнаруженный эффект возникновения участка отрицательного дифференциального сопротивления на ВАХ туннельного диода под воздействием внешнего СВЧ-сигнала для случая, когда напряжение смещения на диоде в отсутствие СВЧ-сигнала существенно меньше пикового значения. ВАХ туннельного диода типа 1Н308 при различных значениях тока через диод в отсутствие СВЧ-сигнала (кривые 1) и при подаче внешнего СВЧ-сигнала (кривые 2) различной мощности приведены на рис. 4.

Воздействие СВЧ-излучения качественным образом изменяет спектр выходного сигнала *устройств на диодах Ганна*, импеданс которых имеет ярко выраженный нелинейный характер. При этом вид нелинейности диода существенным образом зависит от его режима питания, элементов конструктивного исполнения, типа электродинамической системы, в которую он помещен, и других факторов [16-20]. При воздействии на диод Ганна, работающий в режиме усиления внешнего СВЧ-сигнала, начиная с некоторого уровня мощности на выходе возникают субгармонические составляющие  $f_0/2$ ,  $f_0/4$ ,  $f_0/8$  и шумовая генерация. При этом наблюдается скачкообразное изменение продетектированного диодом Ганна напряжения. При воздействии на диод Ганна, работающий в режиме многочастотной генерации, внешним сигналом на частоте его субгармоники, каждая мода в спектре выходного сигнала занимала положение, соответствующее по частоте ближайшей к ней гармонике синхронизированного

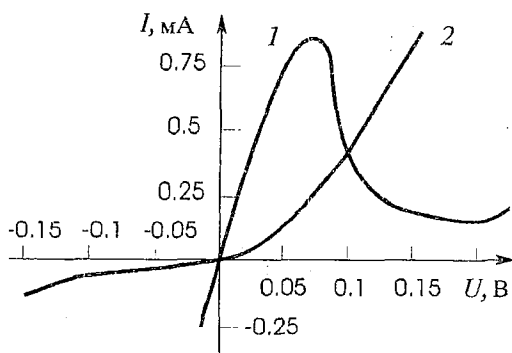


Рис. 3. Вольт-амперные характеристики туннельного диода: 1 - в отсутствие внешнего СВЧ-сигнала, 2 - при подаче СВЧ-сигнала мощностью 2 мВт

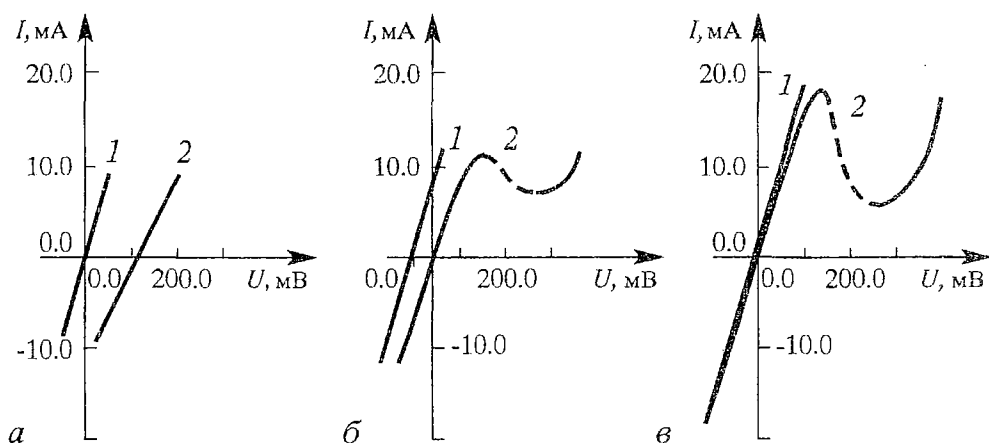


Рис. 4. Вольт-амперные характеристики туннельного диода при различных значениях тока через диод в отсутствие СВЧ-сигнала (кривые 1) и при подаче внешнего СВЧ-сигнала (кривые 2) различной мощности, мВт: а - 1600, б - 300, в - 2

сигнала [21]. При повышении мощности синхронизирующего сигнала зависимость мощности генератора от частоты расстройки принимала гистерезисный характер [22]. Если частота внешнего сигнала близка к собственной частоте генерации, то возникает модуляция. При этом глубина модуляции, частота и форма модулирующего сигнала зависят от величины расстройки и мощности внешнего сигнала [23]. Максимальные значения частот модуляции достигаются при мощностях внешнего СВЧ-сигнала, сравнимых с мощностью собственной генерации СВЧ-генератора на диоде Ганна. Если кроме основного сигнала на диод Ганна воздействует внешний сигнал, то наблюдается его влияние на уровень пороговой мощности основного сигнала, при котором происходит возникновение субгармонических составляющих [24]. Особенно сильно это влияние в случае, когда частота дополнительного сигнала близка к  $f_0/4$ . Наряду с уменьшением пороговой мощности воздействие дополнительного сигнала приводит к увеличению амплитуд субгармонических составляющих. Отметим, что введение фильтра, отсекающего субгармонические составляющие, позволяет в два раза увеличить максимальное значение мощности, при котором коэффициент усиления  $K_u$  не зависит от уровня мощности входного сигнала  $P_0$  (рис. 5) [25]. В реальных конструкциях генераторов на диодах Ганна происходит саморазогрев кристалла диода, следствием которого в зависимости от напряжения питания может быть хаотизация либо, напротив, регуляризация колебаний [26].

Генерация субгармонических составляющих наблюдалась и при воздействии внешнего СВЧ-сигнала на *арсенид-галлиевый полевой транзистор с барьером Шоттки*, работающий в режиме усиления [27]. Особенностью поведения такого типа транзистора при воздействии на него внешнего СВЧ-сигнала является появление субгармоник  $f_0/2$  и  $f_0/9$  при определенном режиме питания и в ограниченном интервале уровней СВЧ-мощности.

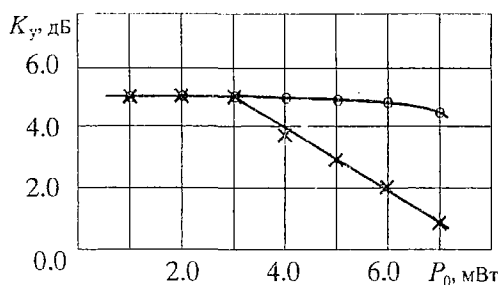


Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления  $K_u$  от уровня мощности входного сигнала СВЧ-генератора на диоде Ганна с фильтром (о) и без фильтра (х)

Следует отметить, что при теоретическом описании нелинейной динамики полупроводниковых элементов приходится использовать эквивалентные схемы, включающие довольно большое число элементов. Такие схемы описываются системами дифференциальных уравнений, составленных с использованием законов Кирхгофа. Типичной является ситуация, когда число таких уравнений достигает четырнадцати.

Кроме описанных выше эффектов при изменении уровня мощности СВЧ-излучения, воздействующего на полупроводниковые приборы с отрицательным сопротивлением, наблюдается и эффект детектирования. Специфика проявления этого эффекта и различные аспекты его практического использования изучены для усилителей и генераторов на диодах Ганна, ЛПД, туннельных диодах, биполярных и полевых транзисторах [28].

Из результатов экспериментальных исследований характера изменения ВАХ точечных детекторных диодов при воздействии на них внешнего СВЧ-сигнала следует, что с ростом уровня воздействующей мощности ВАХ постепенно выпрямляется и при высоких уровнях мощности представляет собой прямую линию [29]. При этом диод продолжает детектировать СВЧ-сигнал. Последнее позволяет предположить, что преобладающим или, по крайней мере, весьма существенным механизмом детектирования при этом является термоэдс горячих носителей тока.

Таким образом, воздействие СВЧ-излучения на полупроводниковые приборы может приводить к существенному изменению их характеристик: появлению или исчезновению на ВАХ участков отрицательного сопротивления  $N$ - или  $S$ -типа, генерации субгармонических составляющих и шума, модуляции, гистерезисного характера зависимостей их характеристик. Поведение различных типов полупроводниковых приборов под действием СВЧ-излучения имеет свою специфику. Учет описанных эффектов существенен при анализе физики работы различного типа полупроводниковых приборов СВЧ, при определении условий их эксплуатации и областей применения. Использование этих эффектов позволяет создавать различного типа измерительные устройства, предотвращение их появления позволяет улучшить основные характеристики некоторых типов устройств.

## Библиографический список

1. Лебедев И.В., Шитников А.С., Купцов Е.И. Твердотельные СВЧ ограничители – проблемы и решения // Изв. вузов. РЭ. 1977. Т. 20, № 2. С. 5.
2. Виненко В.Г., Красовский С.В., Усанов Д.А. СВЧ ограничители мощности на полупроводниковых диодах // Обзоры по электронной технике. Сер.1. Электроника СВЧ. 1988. Вып. 3. 45 с.
3. Дзехцер Г.Б., Либерман Л.С., Шпирт В.А. О некоторых эффектах, возникающих в  $p^+-n-n^+$  ( $p^+-p-n^+$ ) структурах под действием СВЧ-поля // Электронная техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы. 1972. № 2. С. 68.
4. Дзехцер Г.Б., Николаев Ю.И., Орлов О.С. К вопросу о взаимодействии плоскостного полупроводникового диода с электронным СВЧ-полем // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 6. Радиоизмерительная техника. 1971. Вып. 3. С. 3.
5. Красовский С.В., Усанов Д.А. Скачкообразные изменения характеристик СВЧ-ограничителей на  $p-i-n$ -диодах // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1985. Вып. 12. С. 7.
6. Виненко В.Г., Красовский С.В., Усанов Д.А. Спектральный состав выходного сигнала СВЧ-ограничителей мощности на  $p-i-n$ -диодах // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1987. Вып. 8. С. 7.
7. Красовский С.В., Родина Л.П., Усанов Д.А. Явление удвоения периода в квазиактивном ограничителе на  $p-i-n$ -диодах // Изв. вузов. РЭ. 1993. Т. 36, № 2. С. 77.
8. А.с. 1297139 СССР, МКИ H01 P 1/22. СВЧ-ограничитель / Виненко В.Г., Красовский С.В., Усанов Д.А. // Бюл. № 10. 2 с. 15.03.87 (Заявлено 28.10.85).
9. Виненко В.Г., Красовский С.В., Усанов Д.А. Модуляция выходного сигнала в СВЧ-ограничителях мощности на  $p-i-n$ -диодах // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ 1987. Вып. 4. С. 38.
10. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Угрюмова Н.В. Возникновение



отрицательного дифференциального сопротивления в р-і-п-диодных структурах при воздействии СВЧ-излучения // Изв. вузов. Электроника. 1997. № 3-4. С. 48.

11. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Угрюмова Н.В. Возникновение S-образных участков на вольт-амперных характеристиках с р-п-переходом под действием СВЧ-излучения. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. №1. С. 42.

12. Усанов Д.А., Коротин Б.Н., Орлов В.Е., Скрипаль А.В. Снятие вырождения в р- и п-областях р-п-перехода внешним СВЧ-сигналом // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16, вып. 8. С. 50.

13. Усанов Д.А., Орлов В.Е., Коротин Б.Н., Скрипаль А.В. Влияние внешнего СВЧ сигнала на работу СВЧ генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, N 1. С. 81.

14. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Коротин Б.Н., Орлов В.Е. Влияние греющего СВЧ поля на вид вольт-амперной характеристики туннельного диода // Письма в ЖТФ. 1993. Т.19, вып. 7. С.81.

15. Усанов Д.А., Горбатов С.С., Семенов А.А. Изменение вида вольт-амперной характеристики диода Ганна в зависимости от режима его работы на СВЧ // Изв. вузов. РЭ. 1991. Т. 34, № 5. С. 107.

16. Перлмен Б., Упадхияюла Ч., Секанович В. Сверхвысокочастотные свойства и применения приборов с переносом электронов и отрицательной проводимостью // ТИИЭР. 1971. Т.59, № 8. С.115.

17. Усанов Д.А., Вениг С.Б., Орлов В.Е. Отрицательное сопротивление туннельного диода, наведенное внешним СВЧ-сигналом // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 2. С. 39.

18. Мидзусима С. Представление ганновских диодов в виде параллельно соединенных нелинейной активной проводимости и нелинейной емкости // ТИИЭР. 1972. Т. 61, № 1. С. 159.

19. Усанов Д.А., Вениг С.Б., Горбатов С.С., Семенов А.А. Смена знака нелинейной составляющей реактивности и гистерезис у диодов Ганна в режиме генерации // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 21. С. 21.

20. Усанов Д.А., Горбатов С.С. Генерация субгармоник СВЧ диодом Ганна // Тезисы докладов VII Всесоюзного симпозиума «Плазма и неустойчивости в полупроводниках». Паланга, 1989. 4.1. С. 77.

21. Усанов Д.А., Горбатов С.С., Вениг С.Б., Семенов А.А. Синхронизация мод в СВЧ генераторах на диодах Ганна // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, вып. 12. С. 26.

22. Усанов Д.А., Вениг С.Б., Горбатов С.С., Семенов А.А. Влияние нелинейного характера импеданса диодов Ганна на работу СВЧ генераторов на их основе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 35.

23. Усанов Д.А., Вениг С.Б., Горбатов С.С., Семенов А.А. Модуляция выходного сигнала генератора на диоде Ганна воздействием на него внешнего СВЧ сигнала // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 9. С. 982.

24. Усанов Д.А., Горбатов С.С., Семенов А.А. Двухчастотный режим работы СВЧ усилителя на диоде Ганна // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 12. С. 1429.

25. Семенов А.А. Исследование нелинейных режимов работы полупроводниковых приборов СВЧ. Дис... канд. физ.-мат. наук. Саратов: Изд-во СГУ, 1994. 126 с.

26. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Бабаян А.В. Влияние саморазогрева диодов Ганна на спектр выходного сигнала генераторов на их основе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6, № 6. С. 20.

27. Skripal A.V., Usanov D.A., Tyajlov V.S., Vasilieva A.V. Subharmonic generation in GaAs FET amplifier // Proc. XI International Microwave conf. Mikon 96. Poland. Warsaw. May 27-30. 1996. Vol. 2. P. 450.

28. Усанов Д.А. Исследование эффектов детектирования в полупроводниковых СВЧ диодах и транзисторах, работающих в режиме усиления или генерации // Труды II Всесоюзной школы-семинара «Взаимодействие электромагнитных волн с полупроводниками и полупроводниково-диэлектрическими структурами». 4-10 сентября 1988 г. Часть 1. Саратов: Издательство СГУ, 1988. С. 1640.

29. Усанов Д.А., Вениг С.Б., Орлов В.Е. Механизмы детектирования точеч-

ными диодами при воздействии высоких уровней СВЧ мощности // Материалы междуна. научно-тех. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-98», 7-9 сентября 1998 г. Саратов: СГТУ, 1998. С.16.

*Саратовский государственный университет*

*Поступила в редакцию 24.06.99*

## NONLINEAR DYNAMICS OF SOLID-STATE MICROWAVE DEVICES

*D.A. Usanov*

Investigation results of nonlinear dynamics of various kind of semiconductor devices in the microwave circuits are summarized. The possibility of qualitative variation of VA-characteristic form of semiconductor devices on exposure to microwave radiation is noted. The difficulties of theoretical description of experimentally observed sequence of operation regime variation of semiconductor microwave devices with power increase of influenced microwave signal are emphasized.



*Усанов Дмитрий Александрович* родился в 1943 году в Менделеевске (Татария). Окончил Саратовский госуниверситет (1965). Кандидат физико-математических наук (1972), доктор физико-математических наук (1989), с 1990 – профессор кафедры физики твердого тела, с 1985 по настоящее время – заведующий кафедрой физики твердого тела, с 1989 – проректор по НИР СГУ. Автор большого числа статей и изобретений по твердотельной электронике и радиофизике. Заслуженный деятель науки РФ, академик МАН ВШ, член IEEE. E-mail: usanovda@info.sgu.ru



## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ

*П.В. Купцов, С.П. Кузнецов*

В работе развит вейвлет-анализ критических аттракторов одномерных и двумерных отображений, находящихся на пороге перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Обсуждаются вейвлет-диаграммы аттракторов отображений, относящихся к различным классам универсального критического поведения.

### Введение

Одним из важнейших направлений развития нелинейной динамики является исследование перехода к хаосу в системах при изменении их управляющих параметров. Существенное продвижение здесь связано с методом ренормализационной группы (РГ), который позволяет исследовать скейлинговые свойства динамики у порога хаоса. Оказалось, что существуют определенные классы универсального поведения, так что системы разной природы при переходе к хаосу могут демонстрировать одни и те же закономерности, иметь одни и те же универсальные константы скейлинга. В частности, несколько различных классов универсальности выявлено при многопараметрическом анализе перехода к хаосу через удвоения периода [1–3].

О точке перехода к хаосу, допускающей анализ методом РГ и характеризующей наличием свойств универсальности и скейлинга, мы будем говорить как о критической точке, а об аттракторе, реализующемся в этой точке, как о критическом аттракторе. Критические аттракторы обладают мультифрактальной структурой, поэтому к ним применимы известные из теории фракталов процедуры анализа, такие как вычисление спектра обобщенных размерностей  $D_q$  и скейлинг-спектра  $f(\alpha)$ . Однако эти характеристики не дают исчерпывающего представления о фрактальной структуре, и, в частности, локального описания устройства фрактального множества вблизи различных его точек. Сравнительно недавно в обиход исследователей вошел еще один метод – вейвлет-анализ [4,5]. С его помощью можно получить информацию о том, как устроен фрактал локально, в окрестности каждой его точки.

Критический аттрактор одномерного квадратичного отображения, находящегося в точке накопления бифуркаций удвоения периода, был изучен с применением вейвлет-анализа достаточно подробно [4,6]. В настоящей работе вейвлет-анализ привлекается для исследования фрактальных свойств критических аттракторов, отвечающих различным классам универсального поведения. В разделе 1 обсуждаются основные идеи вейвлет-анализа и выводится формула,

используемая в дальнейшем для вычисления вейвлет–преобразований. В разделе 2 представлены необходимые сведения из теории перехода к хаосу через удвоения периода. Разделы 3 и 4 составляют основное содержание статьи и посвящены собственно вейвлет–анализу критических аттракторов. В разделе 5 резюмируются результаты работы.

## 1. Основные идеи вейвлет–анализа

Вейвлет–анализ можно интерпретировать как исследование устройства функций на разных масштабах [4,5]. Идея состоит в том, чтобы производить сглаживание деталей структуры анализируемой функции на масштабах, меньших заданного параметром  $\eta$ , и исследовать полученный результат в зависимости от  $\eta$ . Вейвлет–преобразование вещественной функции одного аргумента  $f(x)$  представляет собой функцию двух переменных  $T(\eta, x)$ , которая стремится к  $f(x)$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Формально вейвлет–преобразование определяется как свертка исследуемой функции с функцией специального вида, называемой анализирующим вейвлетом

$$T(\eta, \theta) = \eta^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi((x-\theta)/\eta) dx, \quad \eta \in (0, \infty), \quad \theta \in (-\infty, \infty). \quad (1)$$

Анализирующий вейвлет  $\psi(x)$  в общем случае является комплекснозначной функцией. Область, где вейвлет заметно отличается от нуля, имеет конечный размер и располагается вблизи начала координат. Кроме того, накладывается условие, чтобы несколько моментов вейвлета (по меньшей мере, среднее значение) обращались в нуль. В настоящей работе будет использоваться вейвлет, который называется «мексиканская шляпа»,

$$\psi(x) = (1 - x^2) \exp(-x^2/2). \quad (2)$$

В контексте нелинейной динамики вейвлет–анализ по своей природе близок к методу РГ. Как известно, идея этого метода состоит том, чтобы строить операторы эволюции системы, описывающие динамику на последовательно возрастающих временных интервалах. При этом каждый шаг увеличения временного масштаба сопровождается определенным пересчетом масштаба динамических переменных. Трансформацию оператора эволюции на последовательных шагах ренорм–преобразования можно интерпретировать как своего рода динамику, как говорят, динамику в ренорм–времени [7–9]. Проводя аналогию между методом РГ и вейвлет–анализом, можно сказать, что переменная  $\eta$ , точнее  $\log(1/\eta)$ , соответствует ренорм–времени [4,6].

Применение вейвлет–анализа позволяет выявлять свойства фракталов, получая их наглядный графический образ [4,10,11]. Если фрактальная мера  $\rho(x)$  вблизи некоторой точки локальной сингулярности  $\theta^*$  демонстрирует скейлинг с показателем  $\gamma$ ,

$$\rho(\theta^* + x) - \rho(\theta^*) \sim x^\gamma, \quad (3)$$

то соответствующая функция  $T(\eta, \theta^*)$  в зависимости от  $\eta$  изменяется по степенному закону с показателем  $\gamma-2$  [10,11]

$$T(\eta, \theta^*) \sim \eta^{\gamma-2}. \quad (4)$$

Таким образом, фрактальные свойства объекта, подвергнутого вейвлет–преобразованию, проявляются в иерархической структуре пиков, указывающих остриями в точки локальной сингулярности [10,11]. При этом чем выше пик, тем меньше соответствующая величина  $\gamma$ . Это иллюстрирует рис. 1, где построена вейвлет–диаграмма стандартного множества Кантора.

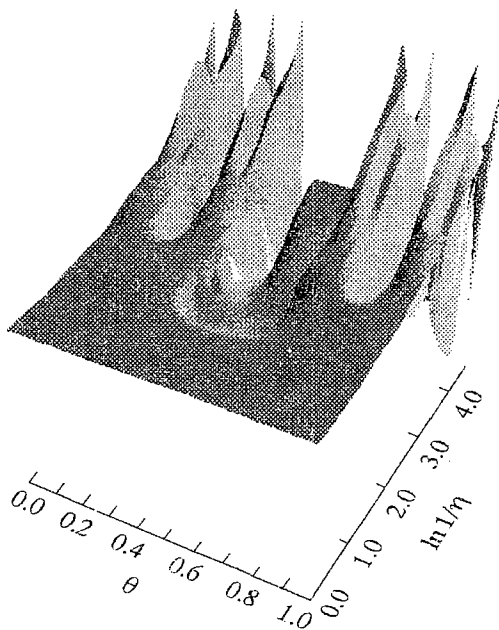


Рис. 1. Вейвлет-преобразование  $\text{sgn}(T)|T(\eta, \theta)|^{1/2}$  множества Кантора (исходный отрезок, которому приписан единичный вес, делится пополам и длина каждой из частей уменьшается на фактор  $1/3$  от длины исходного отрезка, затем эту процедуру проводят с каждым из полученных отрезков и так до бесконечности [12,13])

фазовое пространство двумерно. В этих случаях в качестве объекта вейвлет-преобразования будут выступать распределения  $\rho(x)$ ,  $\rho(y)$ , возникающие при проецировании аттрактора на некоторые оси координат в фазовом пространстве.

Рассмотрим аттрактор одномерной системы с дискретным временем. Когда аналитическое выражение для распределения  $\rho(x)$  неизвестно, его ищут численно – выбирают на координатной оси определенный интервал, разбивают его на отрезки  $[X_k, X_k + \Delta X]$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) длиной  $\Delta X$  и вычисляют распределение как относительную частоту попадания изображающей точки  $x_n$  на отрезок с номером  $k$ , то есть  $\rho(X_k) = N_k/N$ . Покажем, что вейвлет-преобразование  $\rho(x)$  можно найти, не вычисляя распределение непосредственно. Действительно, если длина отрезков разбиения  $\Delta X$  достаточно мала, то выполняется равенство

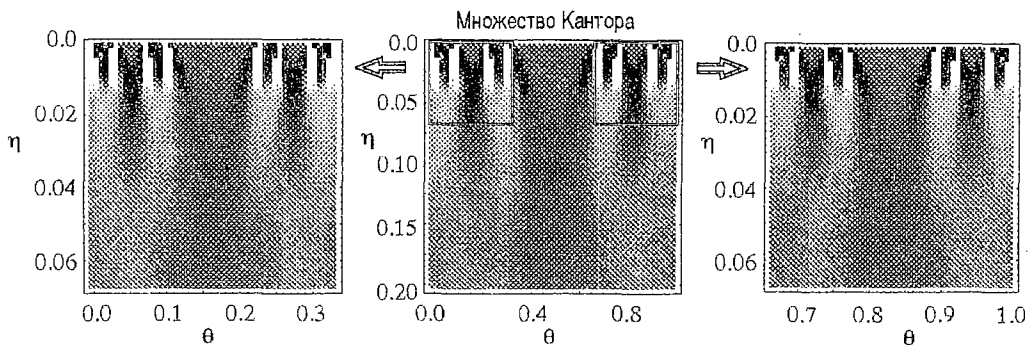


Рис. 2. Самоподобие множества Кантора. Значения  $T(\eta, \theta)$  отображены оттенками серого цвета. Светлые точки соответствуют большим значениям  $T$

В отличие от спектра размерностей  $D_q$  и скейлинг-спектра  $f(\alpha)$  [12–14], представляющих собой глобальные характеристики фрактального множества, вейвлет-преобразование содержит информацию о локальном устройстве фрактала и о взаимном расположении его элементов в пространстве. При вейвлет-преобразовании сохраняется присущее фрактальным объектам свойство самоподобия. Как видно из рис. 2, фрагменты вейвлет-диаграммы канторова множества после масштабного увеличения в 3 раза воспроизводят исходную картину.

Вейвлет-анализ может быть применен для исследования фрактальных свойств аттракторов нелинейных систем [4,6,11]. Информацию о структуре аттрактора можно получить, подвергая вейвлет-преобразованию плотность распределения инвариантной меры. Основным предметом исследования в настоящей работе будут плотности распределения  $\rho(x)$ , порождаемые модельными системами с дискретным временем на пороге возникновения хаоса. Помимо одномерного случая будут рассмотрены несколько ситуаций, когда

$$N_k \psi((X_k - \theta)/\eta) \approx \sum_{\xi} \psi((\xi - \theta)/\eta), \quad \xi \in \{x_n | X_k \leq x_n < X_k + \Delta X\}.$$

Следовательно, для вейвлет-преобразования плотности распределения  $\rho(x)$  справедлива формула

$$T(\eta, \theta) = \eta^{-2} (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} \psi((x_n - \theta)/\eta). \quad (5)$$

В дальнейшем для нахождения вейвлет-преобразований будет использоваться формула (5), что позволяет существенно упростить расчеты.

## 2. Переход к хаосу через удвоения периода

Одним из самых распространенных сценариев перехода к хаосу в нелинейных диссипативных системах является каскад бифуркаций удвоения периода. Типичной одномерной однопараметрической моделью, которая демонстрирует этот сценарий, является рекуррентное отображение с квадратичным экстремумом. Изменяя управляющий параметр отображения, можно наблюдать последовательность удвоений периода колебаний. Эта последовательность сходится по закону геометрической прогрессии к критической точке, за которой возникает хаос.

В основе РГ-анализа, применяемого для исследования этого сценария, лежит ренорм-преобразование оператора эволюции системы – двукратное увеличение масштаба времени, сопровождаемое изменением масштаба динамической переменной [7–9]. Процедуру ренорм-преобразования можно рассматривать как действие некоторого динамического оператора в функциональном пространстве, задающего так называемую ренорм-динамику. Один шаг в ренорм-времени эквивалентен удвоению периода в реальном времени. Критическая ситуация соответствует неустойчивой неподвижной точке ренорм-динамики

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)). \quad (6)$$

Решение уравнения (6), которое называется уравнением Фейгенбаума – Цвитановича [7], может быть найдено численно как разложение функции  $g(x)$  по степеням  $x^2$ . Из этого же уравнения определяется скейлинговая постоянная  $\alpha = -2.5029\dots$  Всем отображениям с квадратичным экстремумом соответствует одна и та же универсальная функция  $g(x)$ , один и тот же масштабный фактор  $\alpha$ . Говорят, что такие отображения образуют фейгенбаумовский класс универсальности, который мы будем обозначать символом F. Универсальная функция  $g(x)$  и соответствующий масштабный фактор  $\alpha$  являются своеобразными «визитными карточками» класса F.

Из уравнения (6) видно, что выделенную роль играет точка  $x=0$ , в которой, по предположению, располагается экстремум исходного отображения и функции  $g(x)$ . Эту точку мы будем называть *главным центром скейлинга*.

Оператор ренорм-преобразования, линеаризованный в окрестности фейгенбаумовской неподвижной точки, имеет дискретный спектр собственных чисел, причем (для возмущений, неустраиваемых инфинитезимальной заменой переменных) только одно по модулю больше единицы. Следовательно, размерность неустойчивого многообразия неподвижной точки ренорм-динамики равна единице. Отсюда вытекает, что фейгенбаумовский тип критического поведения на пороге хаоса реализуется в однопараметрических семействах отображений, то есть имеет коразмерность, равную единице.

Многopараметрический анализ перехода к хаосу через удвоения периода позволяет выявить среди одномерных отображений нефейгенбаумовские классы универсального поведения, которые имеют коразмерность больше единицы [1–3]. Каждому возможному классу отвечает определенная универсальная функция  $g(x)$ ,

удовлетворяющая ренорм–уравнению (6), а также универсальная масштабная постоянная  $\alpha$  [1]:

тип F («фейгенбаумовский»),  $z = 2, \text{CoDim} = 1, \alpha = -2.502907875$ ;  
 тип T («трикритичность»),  $z = 4, \text{CoDim} = 3, \alpha = -1.690302971$ ;  
 тип S («six–power»),  $z = 6, \text{CoDim} = 5, \alpha = -1.4677424503$ ;  
 тип E («eight–power»),  $z = 8, \text{CoDim} = 7, \alpha = -1.358017279$ .

Здесь  $z$  – порядок экстремума отображения,  $\text{CoDim}$  – коразмерность. Видно, что справедливо соотношение  $\text{CoDim}=z-1$ .

Экстремумом требуемого порядка может обладать не само отображение, а его итерации. Эта ситуация возникает, когда отображение имеет несколько точек экстремума или точек перегиба и управляющие параметры подобраны таким образом, что происходит отображение одной точки в другую. В этом случае соответствующее критическое поведение проявляет себя как феномен меньшей коразмерности:  $\text{CoDim}_T=2, \text{CoDim}_S=3, \text{CoDim}_E=3$ .

Обобщая РГ–анализ на многомерные отображения, демонстрирующие переход к хаосу через удвоения периода, можно прийти к уравнению [15–19]

$$G(\mathbf{x}) = AG(G(A^{-1}\mathbf{x})), \quad (7)$$

где  $G(\mathbf{x})$  – универсальная функция,  $A$  – диагональная скейлинговая матрица. При записи уравнения (7) предполагается, что система координат выбрана таким образом, что главный центр скейлинга находится в начале координат, а координатные оси отвечают направлениям, ассоциирующимся с определенными значениями масштабных констант  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  – элементов матрицы  $A$ .

У порога возникновения хаоса существенное значение имеет устройство асимптотически малой окрестности главного центра скейлинга, отвечающее за принадлежность отображения к тому или иному классу универсального поведения. Каждому классу соответствует определенное решение уравнения (7)  $G(\mathbf{x})$  и скейлинговая матрица  $A$ . Коразмерность критического поведения можно найти, изучая ренорм–динамику, линеаризованную в окрестности критической точки.

Для двумерных отображений с однонаправленной связью известно несколько классов универсальности [1,16,17]:

тип B («бикритичность»),  $\text{CoDim}=2, \alpha_1=-2.5029\dots, \alpha_2=-1.505318159$ ;

тип BT («битрикритичность»),  $\text{CoDim}=4, \alpha_1=-2.5029\dots, \alpha_2=-1.2416604$ .

Бикритичность можно наблюдать в системе двух фейгенбаумовских отображений, одно из которых воздействует на другое. Критическое поведение типа BT возникает при однонаправленном воздействии отображения, принадлежащего классу F, на отображение с критичностью T–типа.

В более общем случае взаимной связи подсистем также обнаружены классы универсального поведения [19]. Класс, получивший обозначение FQ, имеет следующие характеристики:

тип FQ («F + quasiper.»),  $\text{CoDim}=3, \alpha_1=-1.90007167, \alpha_2=-4.00815785$ .

Еще один класс, обозначаемый символом C, замечателен тем, что, в отличие от всех предыдущих случаев, критической ситуации соответствует ренорм–цикл периода 2. Критичность этого типа характеризуется двумя универсальными функциями  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , и, соответственно, двумя скейлинговыми матрицами  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$ . Универсальные ренорм–уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{x}) &= A^{(1)}G^{(1)}(G^{(1)}((A^{(1)})^{-1}\mathbf{x})), \\ G^{(1)}(\mathbf{x}) &= A^{(2)}G^{(2)}(G^{(2)}((A^{(2)})^{-1}\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (8)$$

Коразмерность класса C и масштабные постоянные, вычисленные за период ренорм–цикла, равны:

тип C («cycle»),  $\text{CoDim}=2, (\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})_1=6.565350, (\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})_2=22.120227$ .



### 3. Структура критических аттракторов и вейвлет-анализ: одномерные отображения

Рассмотрим одномерное модельное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 - \lambda|x_n|^z. \quad (9)$$

Здесь  $\lambda$  выступает в роли управляющего параметра, изменяя который, можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода. Когда  $\lambda$  достигает определенного порогового значения, в системе возникает хаос. В зависимости от величины  $z$  поведение системы в критической точке может принадлежать различным классам универсальности:

тип F,  $z = 2$ ,  $\lambda_c = 1.401155189092$ ;

тип T,  $z = 4$ ,  $\lambda_c = 1.594901356229$ ;

тип S,  $z = 6$ ,  $\lambda_c = 1.6832601982$ ;

тип E,  $z = 8$ ,  $\lambda_c = 1.736452374$ .

Далее предполагаем, что параметр  $\lambda$  выбран точно равным соответствующему критическому значению.

Процедуру построения критического аттрактора одномерного отображения можно представить геометрически следующим образом [20]. Обозначим через  $\mathfrak{S}_0$  критический аттрактор отображения (9), а через  $s_0=0$  – главный центр скейлинга. Стартуя из точки  $x_0=s_0$ , при итерациях отображения получаем набор точек  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , принадлежащих  $\mathfrak{S}_0$ . Их взаиморасположение таково, что на нулевом шаге конструирования (рис. 3) можно записать

$$\mathfrak{S}_0 \in [x_2, x_1].$$

На следующем, первом шаге построения рассмотрим отображение за две итерации  $f^{(2)}$ . Это отображение имеет два аттрактора,  $\mathfrak{S}_1^0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$ , которые являются подмножествами  $\mathfrak{S}_0$  (см. рис. 3). Если стартовать из точки  $s_1^0=s_0$ , то порождаемая отображением  $f^{(2)}$  траектория выходит на аттрактор  $\mathfrak{S}_1^0$ . Точку  $s_1^0$  будем называть центром скейлинга этого аттрактора. Если же взять в качестве начальной точку  $s_1^1$ , удовлетворяющую уравнению  $f(s_1^1)=s_0$ , то траектория придет к другому аттрактору отображения  $f^{(2)}$ , а именно  $\mathfrak{S}_1^1$ . Его центром скейлинга служит точка  $s_1^1$ . Так как  $\mathfrak{S}_1^0 \in [x_2, x_4]$ ,  $\mathfrak{S}_1^1 \in [x_3, x_1]$  и  $\mathfrak{S}_0 \in \mathfrak{S}_1^0 \cup \mathfrak{S}_1^1$ , то имеем

$$\mathfrak{S}_0 \in [x_2, x_4] \cup [x_3, x_1].$$

Рассматривая таким образом шаг за шагом отображения  $f^{(4)}, f^{(8)}, \dots$ , на  $n$ -ом шаге заключаем, что аттрактор  $\mathfrak{S}_0$  принадлежит объединению  $2^n$  интервалов

$$\mathfrak{S}_0 \in \bigcup_{i=1}^{2^n} [x_i, x_{i+2^n}].$$

В окрестности главного центра скейлинга  $s_0$  аттрактор обладает самоподобием, что следует из уравнения (6). Фрагмент  $\mathfrak{S}_1^0$  после масштабного увеличения в  $\alpha$  раз воспроизводит приближенно структуру всего аттрактора  $\mathfrak{S}_0$ . Символически это можно записать как

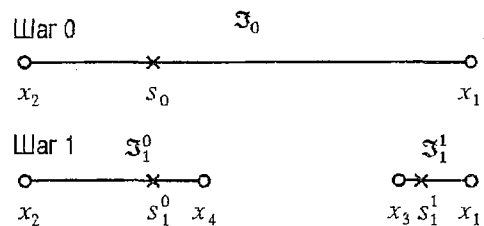


Рис. 3. Геометрическое конструирование критического аттрактора одномерного отображения

$$\mathfrak{S}_0 \approx \alpha \mathfrak{S}_1^0. \quad (10)$$

Иными словами, любой точке аттрактора  $\mathfrak{S}_1^0$  отвечает точка аттрактора  $\mathfrak{S}_0$ , отличающаяся множителем  $\alpha$ . Можно записать также аналитическое соотношение, связывающее  $\mathfrak{S}_0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$ . Принимая во внимание равенство  $f(\mathfrak{S}_1^1) = \mathfrak{S}_1^0$  и формулу (10), имеем

$$\mathfrak{S}_0 \approx \alpha s_0 + \alpha f'(s_1^1)(\mathfrak{S}_1^1 - s_1^1). \quad (11)$$

Рассмотрим снова переход с нулевого уровня построения на первый. Для каждого из аттракторов отображения  $f^{(2)}$ ,  $\mathfrak{S}_1^0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$  можно записать соотношения подобия. Они совпадают с (10) и (11), но в качестве масштабных множителей фигурируют величины  $\alpha$  и  $\alpha(f^{(2)})'$ . Как можно убедиться непосредственно, множители  $\alpha f'$  и  $\alpha(f^{(2)})'$  отличаются друг от друга незначительно и приблизительно равны  $\alpha$ . Это равенство становится точным в асимптотике, при рассмотрении глубоких уровней построения. Можно сказать, что структура критического аттрактора вблизи правой границы воспроизводится при пересчете масштаба на фактор  $\alpha$ . Это приводит нас к альтернативной форме ренорм-уравнения [21]

$$g(x) = \alpha^z (g(g(x/\alpha^z + s_1^1)) - s_1^1). \quad (12)$$

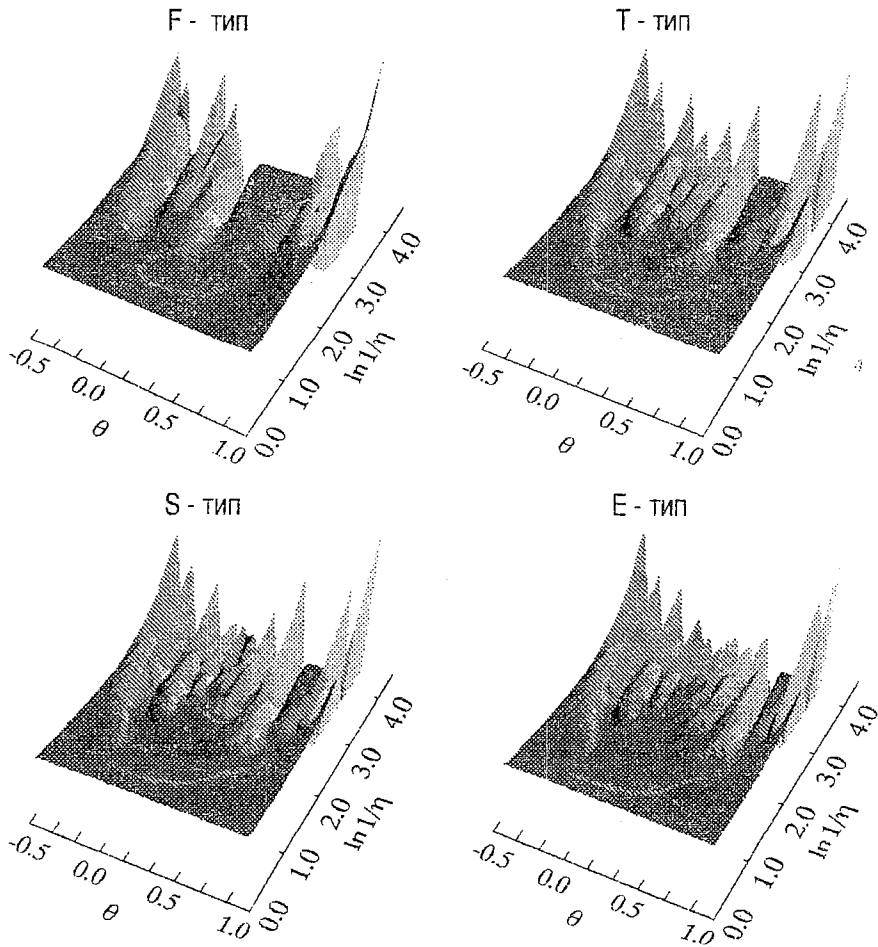


Рис. 4. Вейвлет-преобразования  $\text{sgn}(T)[|T(\eta, \theta)|]^{1/2}$  критических аттракторов F-, T-, S- и E-типов, порождаемых отображением (9) при различных значениях  $z$

(Оказывается, что универсальные ренорм-уравнения можно записать не только для главного центра скейлинга и правой границы аттрактора, но и для других его точек [22]).

Хорошей аппроксимацией критического аттрактора служит двухмасштабное множество Кантора, которое строится по следующему правилу: исходный отрезок единичного веса делят пополам, одну из частей уменьшают на фактор  $|\alpha|^{-1}$  от

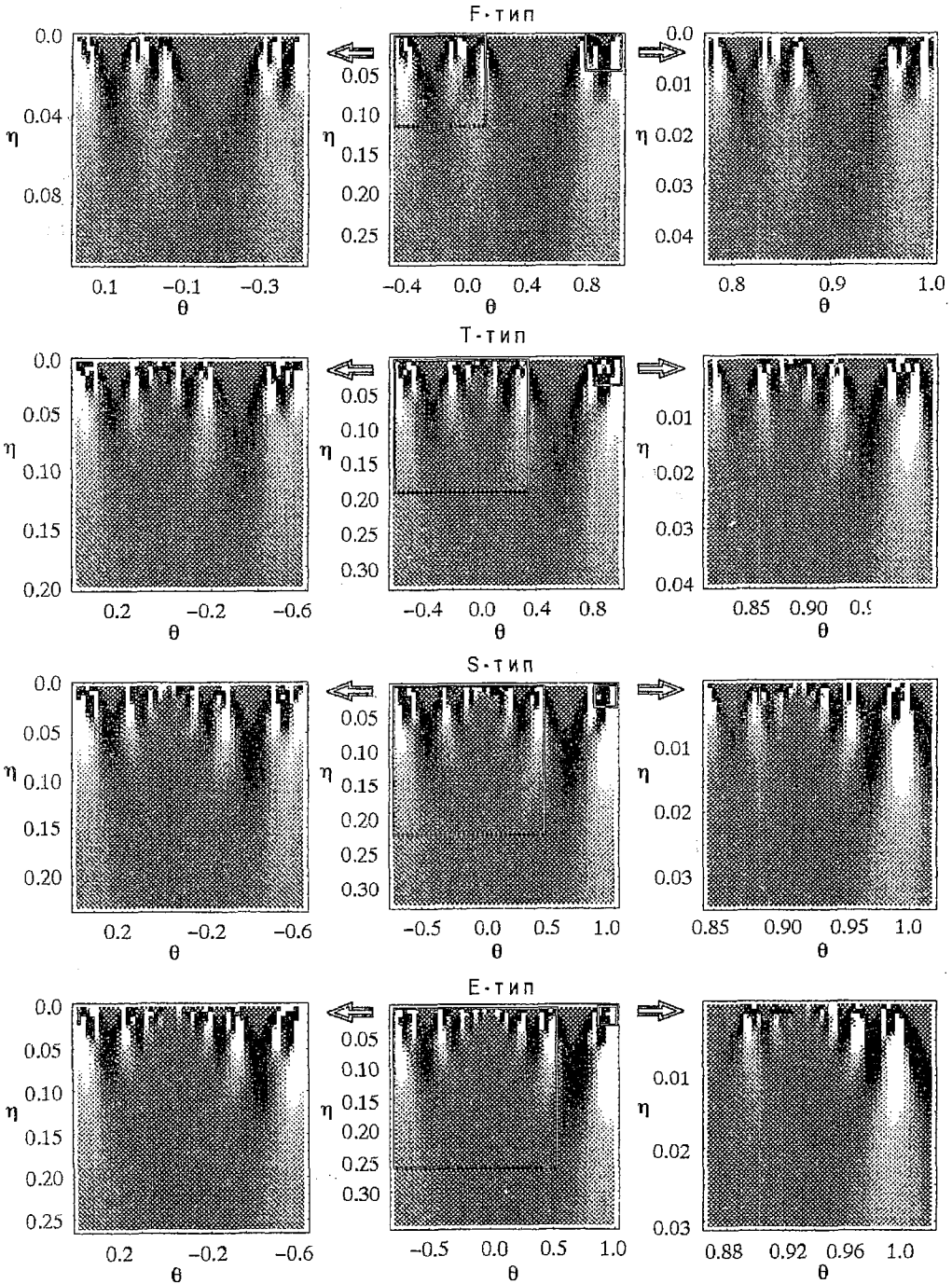


Рис. 5. Самоподобие критических аттракторов F-, T-, S- и E-типов, порождаемых отображением (9) при различных значениях  $z$

длины исходного отрезка, а другую – на фактор  $|\alpha|^{-z}$ , затем то же самое проделывают с каждым из полученных на предыдущем шаге отрезков, и так до бесконечности [12,14,23–25].

Вычислим по формуле (5) вейвлет–преобразования критического аттрактора отображения (9) при различных значениях показателя  $z$  (рис. 4). Как видно из рисунка, с увеличением  $z$  вейвлет–диаграммы становятся все более и более похожими друг на друга. Диаграмма аттрактора F–типа имеет две четко выраженные области, где концентрируются точки сингулярности. Каждая из этих областей, в свою очередь, также подразделяется на две части, и так далее. В меньшей степени эта иерархия заметна на вейвлет–диаграмме аттрактора T–типа, а для S– и E–типов точки сингулярности распределены сравнительно однородно. Это объясняется тем, что с увеличением  $z$  фактор  $|\alpha|^{-z}$  убывает, а фактор  $|\alpha|^{-1}$  становится доминирующим. Концентрация высоких пиков вблизи краев на вейвлет–диаграммах и ее спад около нуля говорит о том, что в окрестности главного центра скейлинга преобладают точки с более высоким скейлинговым показателем (см. (3) и (4)). Действительно, используя аппроксимацию канторовым множеством, можно найти, что этот показатель в центре скейлинга равен  $\ln 2 / \ln |\alpha|$ , а в правой граничной точке –  $\ln 2 / (z \ln |\alpha|)$ .

Рис. 5 иллюстрирует свойство самоподобия критических аттракторов различных типов. На центральных диаграммах изображены вейвлет–преобразования, а слева и справа приведены их фрагменты, масштабированные в  $\alpha$  и в  $\alpha^z$  раз, соответственно. Видно, что также, как и в случае канторова множества (см. рис. 2), аттракторы образованы объединением двух своих фрагментов, каждый из которых воспроизводит аттрактор в целом.

#### 4. Структура критических аттракторов и вейвлет–анализ: двумерные отображения

Обратимся теперь к обсуждению критического поведения двумерных отображений. Рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (13)$$

где  $F$  – оператор эволюции, а  $x_n \in \mathbb{R}^2$  – двумерный вектор. Будем считать, что отображение находится на пороге перехода к хаосу, в точке накопления бифуркаций удвоенного периода. Обозначим главный центр скейлинга через  $s_0$ .

Критический аттрактор  $\mathfrak{Z}_0$  отображения (13) можно сконструировать по аналогии с одномерным случаем [16,19]. На нулевом шаге рассматриваем итерации главного центра скейлинга:  $x_0 = s_0$ ,  $x_1 = F(x_0)$ ,  $x_2 = F^2(x_0)$ . Каждой из этих точек

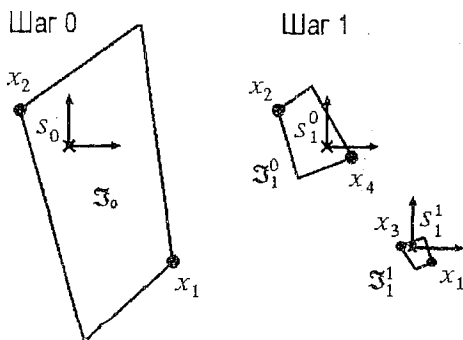


Рис. 6. Геометрическое конструирование критического аттрактора двумерного отображения

можно приписать пару направлений. В точке  $x_0$  эти направления задаются единичными векторами  $i_0 = (1, 0)$ ,  $j_0 = (0, 1)$ . В точках  $x_1$  и  $x_2$  направления  $i_1, j_1$  и  $i_2, j_2$  можно найти, рассмотрев, как трансформируются при итерациях малые возмущения вдоль  $i_0$  и  $j_0$ . Проведя прямые линии вдоль векторов  $i_1, j_1, i_2, j_2$ , получаем четырехугольную область, которой принадлежит аттрактор  $\mathfrak{Z}_0$  (рис. 6).

На первом шаге аналогичным образом рассматриваем отображение за две итерации  $F^2$ . Это отображение имеет два аттрактора,  $\mathfrak{Z}_1^0$  и  $\mathfrak{Z}_1^1$ ,

$\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_1^0 \cup \mathfrak{S}_1^1$  (см. рис. 6). Траектория, стартующая из  $s_1^0 = s^0$ , попадает на аттрактор  $\mathfrak{S}_1^0$ . Точку  $s_1^0$  будем называть центром скейлинга этого аттрактора. Если же траектория начинается в точке  $s_1^1$ ,  $F(s_1^1) = s_0$ , то она выходит на аттрактор  $\mathfrak{S}_1^1$ , центр скейлинга которого расположен в точке  $s_1^1$ . На этом шаге мы находим четырехугольные области, заключающие в себе аттракторы  $\mathfrak{S}_1^0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$ . Затем, на втором шаге рассматриваем отображение за четыре итерации  $F^{(4)}$  и находим четыре области, потом восемь, шестнадцать и так далее. Это можно интерпретировать как процедуру построения двумерного обобщения канторова множества.

Как можно заключить из уравнения (7), критический аттрактор отображения (13) в окрестности главного центра скейлинга должен обладать свойством самоподобия. Символически это можно записать как

$$\mathfrak{S}_0 \approx A\mathfrak{S}_1^0. \quad (14)$$

Используя (14) и соотношение  $F(\mathfrak{S}_1^1) = \mathfrak{S}_1^0$ , получим формулу, которая устанавливает соотношение между  $\mathfrak{S}_0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$ ,

$$\mathfrak{S}_0 \approx A s_0 + AJ(s_1^1)(\mathfrak{S}_1^1 - s_1^1). \quad (15)$$

Здесь  $J(s_1^1)$  – матрица Якоби отображения  $F$  в точке  $s_1^1$ , которая в общем случае не является диагональной. Чтобы наблюдать самоподобие критического аттрактора в окрестности точки  $s_1^1$ , нужно, следовательно, произвести преобразование координат, диагонализующее матрицу  $AJ(s_1^1)$ . В частности, это означает, что для проекций на координатные оси двумерного критического аттрактора канторово множество, вообще говоря, не является адекватной аппроксимацией.

#### 4.1. Бикритический аттрактор. Модельное отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - A y_n^2 - B x_n^2 \quad (16)$$

при значении связи  $B=0.375$  находится в бикритической точке, когда управляющие параметры принимают значения [1]

$$\lambda_c = 1.40115518092, \quad A_c = 1.124981403.$$

Главный центр скейлинга расположен в начале координат,  $s_0 = (0,0)$ .

На рис. 7 построена вейвлет–диаграмма  $y$ -проекции бикритического аттрактора. Видно, что имеются две области концентрации пиков, соответствующих точкам сингулярности. Однако внутри этих областей пики распределены более или менее однородно, то есть не наблюдается характерная для канторова множества иерархия, когда каждая из двух областей разделена на две части, в свою очередь также состоящие из двух частей, и так далее.

Рассмотрим окрестность главного центра скейлинга и перейдем к отображению за четыре итерации  $F^{(4)}$ . Из уравнения  $F^{(4)}(s_1^1) = s_0$  найдем  $s_1^1$  и вычислим соответствующую матрицу Якоби:

$$\text{тип В, } s_1^1 = (0.1327562, 0.2015083), \quad J(s_1^1) = \begin{pmatrix} -2.2449776 & 0 \\ -1.7879799 & -1.4496514 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

На рис. 8 построена вейвлет–диаграмма  $y$ -проекции критического аттрактора отображения (16) за четыре итерации  $F^{(4)}$ . Диаграмма обладает самоподобием в окрестности  $y$ -координаты главного центра скейлинга. Фрагмент, изображенный слева с увеличением в  $\alpha_2$  раз, воспроизводит диаграмму в целом. Такой же фрагмент в правой части вейвлет–диаграммы выделить не удастся. Это

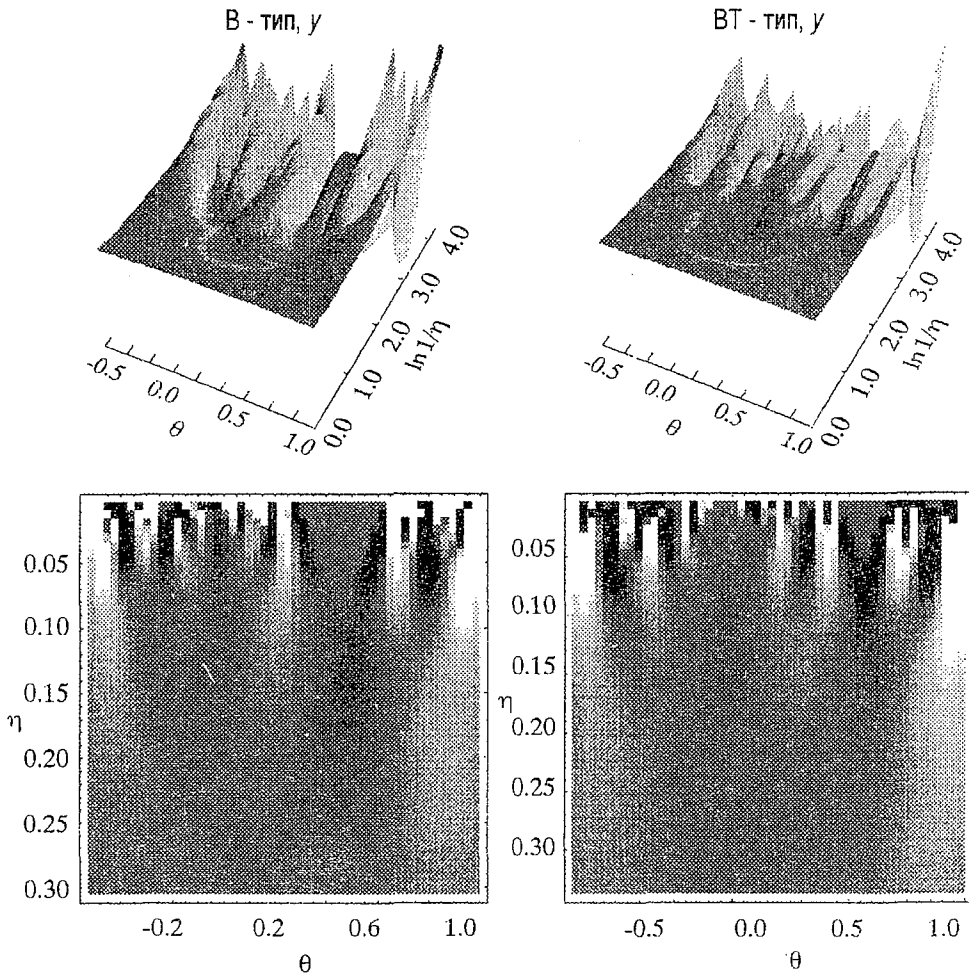


Рис. 7. Вейвлет-преобразования  $u$ -проекции критических аттракторов В- и ВТ-типов, порождаемых отображениями (16) и (18). На диаграммах верхнего ряда построена функция  $\text{sgn}(T)[|T(\eta, \theta)|]^{1/2}$

объясняется тем, что матрица Якоби (17), которая фигурирует в формуле (15), не диагональна. Для построения правой диаграммы взят аттрактор отображения за восемь итераций  $F^{(8)}$  с центром скейлинга  $s_1^1$ . Аттрактор подвергнут преобразованию по формуле (15), и для  $u$ -проекции построена вейвлет-диаграмма.

Таким образом,  $u$ -проекция критического аттрактора отображения (16) имеет неканторову структуру. Тем не менее, нужно отметить, что если рассматривать мультифрактальные характеристики, то есть спектр размерностей и спектр сингулярностей, то  $u$ -проекция бикритического аттрактора достаточно хорошо аппроксимируется двухмасштабным множеством Кантора, построенного с масштабными множителями  $|\alpha_2|^{-1}$  и  $|\alpha_2|^{-2}$  [16]. Вейвлет-анализ выявляет неидентичность локального устройства этих множеств.

#### 4.2. Битри критический аттрактор. Отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - P y_n^4 - Q x_n^2 \quad (18)$$

при значении параметра связи  $Q=0.375$  демонстрирует критичность ВТ-типа, когда управляющие параметры имеют следующие значения [1]:

$$\lambda_c = 1.40115518092, \quad P_c = 1.279735.$$

Главный центр скейлинга находится в точке  $s_0=(0,0)$ .

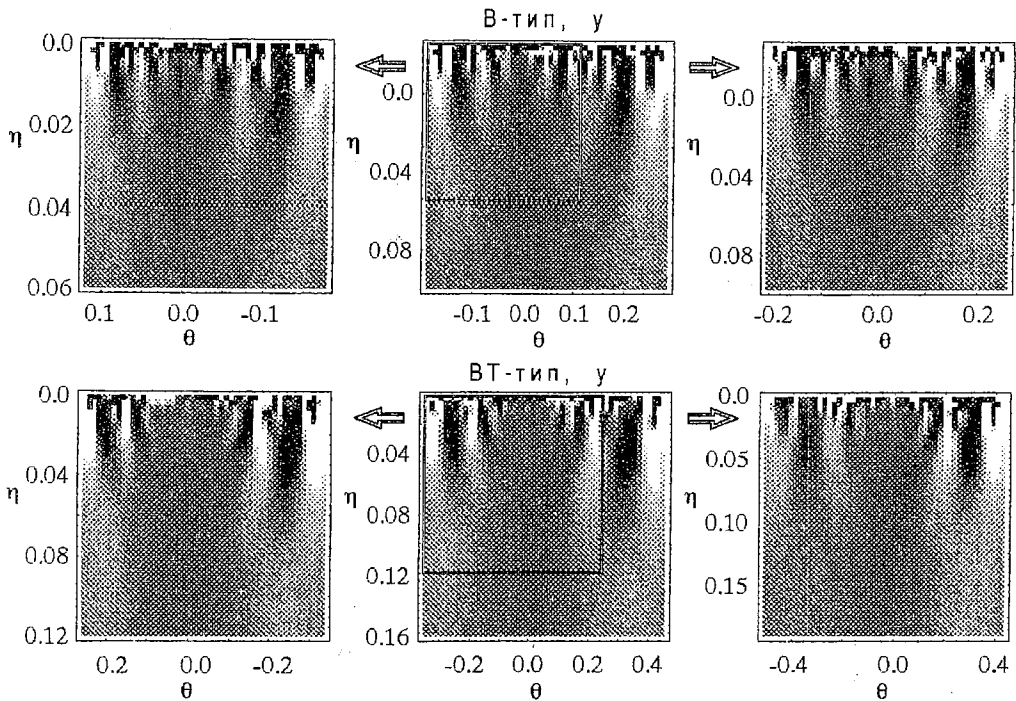


Рис. 8. Самоподобие  $y$ -проекции критических аттракторов В- и ВТ-типов, порождаемых отображениями (16) и (18), взятых за четыре итерации

На рис. 7 построена вейвлет-диаграмма  $y$ -проекции битрикритического аттрактора. Для отображения  $F^{(4)}$  центр скейлинга  $s_1^1$  и матрица Якоби имеют вид:

$$\text{тип ВТ, } s_1^1 = (0.1327562, 0.3463247), \quad J(s_1^1) = \begin{pmatrix} -2.2449776 & 0 \\ -3.1895788 & -2.3494498 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Рис. 8 иллюстрирует свойство самоподобия аттрактора ВТ-типа. Как и для бикритической ситуации, на этом рисунке построены вейвлет-диаграммы  $y$ -проекции аттрактора отображения  $F^{(4)}$ . Центральная и левая диаграммы связаны масштабным пересчетом в  $\alpha_2$  раз, а диаграмма справа построена для аттрактора отображения  $F^{(8)}$ , который подвергнут преобразованию (15).

#### 4.3. Аттрактор FQ-типа. Модельное отображение

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + dx_n y_n, \quad y_{n+1} = 1 - bx_n y_n \quad (20)$$

при значении параметра связи  $d=0.3$  имеет критическую точку FQ при [1]

$$a_c = 1.767192895, \quad b_c = 1.629678013.$$

Главный центр скейлинга находится в точке  $s_0=(0,0)$ .

На рис. 9 построены вейвлет-диаграммы  $x$ - и  $y$ -проекции аттрактора FQ-типа. На диаграмме  $x$ -проекции видна канторова иерархия областей, где концентрируются точки сингулярности. В то же время на диаграмме  $y$ -проекции сингулярности распределены более сложным образом.

Самоподобие аттрактора FQ-типа можно наблюдать, перейдя к так называемым скейлинговым переменным [19],

$$X = x, \quad Y = y + 2.1091x. \quad (21)$$

Координаты точки  $s_1^1$  и соответствующая матрица Якоби  $J(s_1^1)$ , вычисленные в скейлинговых переменных, таковы:



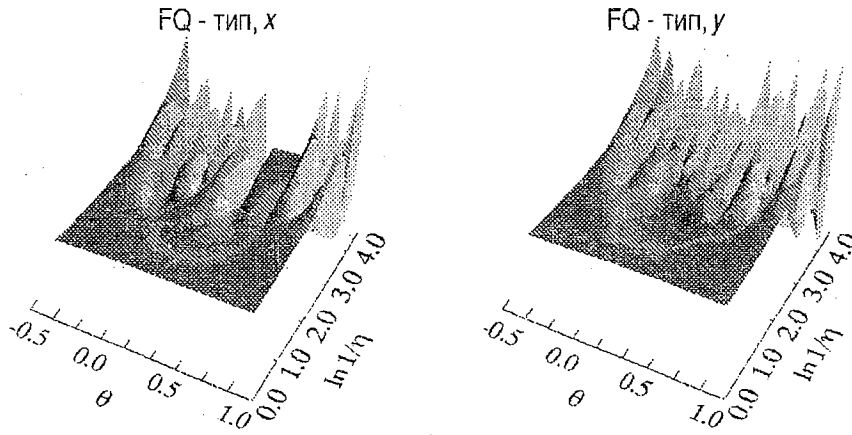


Рис. 9. Вейвлет-преобразования  $\text{sgn}(T)[|T(\eta, \theta)|]^{1/2}$   $x$ - и  $y$ -проекции критического аттрактора FQ-типа отображения (20)

тип FQ,  $s_1^{-1} = (0.8185582, -0.9767877)$ ,  $J(s_1^{-1}) = \begin{pmatrix} -2.1502842 & 0.2455674 \\ 0.4999927 & -1.8519127 \end{pmatrix}$  (22)

Свойство самоподобия иллюстрирует рис. 10, на котором приведены вейвлет-диаграммы  $X$ - и  $Y$ -проекции аттрактора в скейлинговых переменных (21). Фрагменты, выделенные на центральных диаграммах, изображены слева после масштабного увеличения в  $\alpha_1$  раз для компоненты  $x$  и в  $\alpha_2$  для компоненты  $y$ . Справа построены вейвлет-диаграммы аттрактора системы за две итерации после преобразования его по формуле (15).

#### 4.4. Аттрактор $C$ -типа. Отображение

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = -x_n^2 + dy_n \quad (23)$$

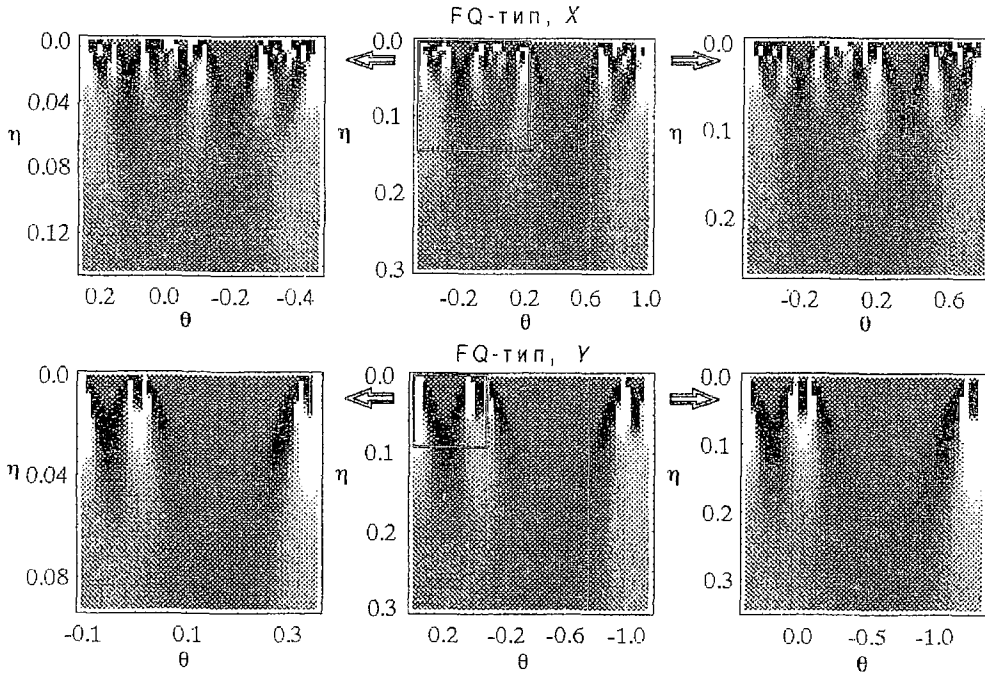


Рис. 10. Самоподобие  $X$ - и  $Y$ -проекции критического аттрактора FQ-типа отображения (20). При построении использованы скейлинговые переменные (21)

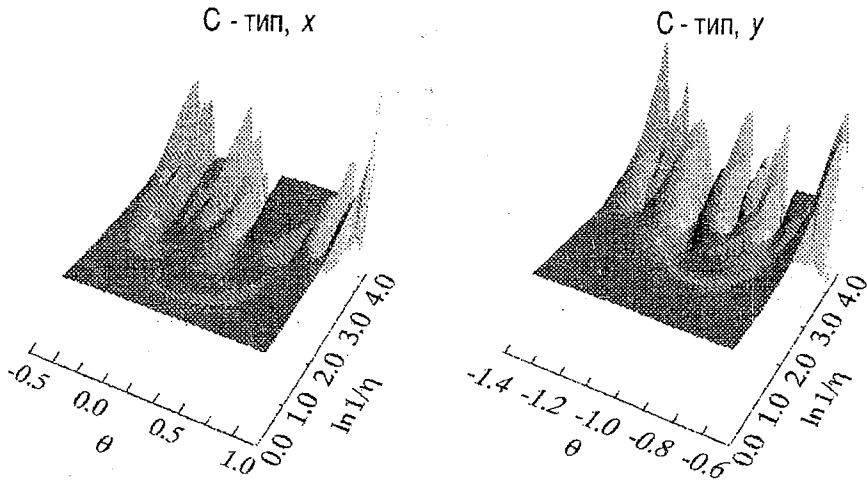


Рис. 11. Вейвлет-преобразования  $\text{sgn}(T)[|T(\eta, \theta)|]^{1/2}$  критического аттрактора С-типа отображения (23)

при значении параметра связи  $b = -0.6663$  демонстрирует критическое поведение С-типа если взять следующие значения управляющих параметров [1]:

$$a_c = 0.24990280, \quad d_c = 0.45290288.$$

При этом главный центр скейлинга находится в точке  $s_0 = (0, -1.316447534)$ .

На рис. 11 построены вейвлет-диаграммы проекций аттрактора С-типа. Отметим сильное внешнее сходство диаграммы  $x$ -проекции с вейвлет-диаграммой одномерного критического аттрактора F-типа (см. рис. 4).

Как уже говорилось в разделе 2, класс С характеризуется тем, что в критической точке имеет место ренорм-цикл периода 2. Построим вейвлет-диаграмму для аттрактора С-типа, выделим на ней некоторый фрагмент и масштабно увеличим его, затем на нем выделим и увеличим фрагмент и так далее. Получаемые таким образом диаграммы должны повторяться с периодом 2. Это иллюстрирует рис. 12, где изображены вейвлет-диаграммы  $x$ - и  $y$ -проекции аттрактора отображения (23), а также аттракторов отображений  $F^{(2)}$ ,  $F^{(4)}$  и  $F^{(8)}$  с центром скейлинга  $s_0$ .

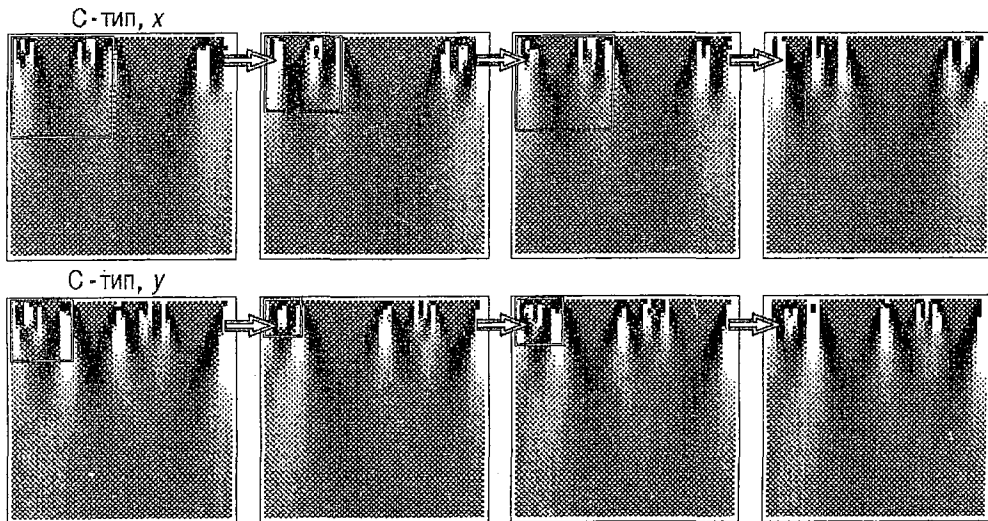


Рис. 12. Самоподобие  $x$ - и  $y$ -проекции критического аттрактора С-типа. Для построения диаграмм слева взято отображение (23), затем, слева направо, —  $F^{(2)}$ ,  $F^{(4)}$  и  $F^{(8)}$

## Заключение

Вейвлет–анализ – это мощный инструмент исследования фрактальных объектов. В настоящей работе он используется для изучения структуры одно– и двумерных критических аттракторов отображений на пороге накопления бифуркаций удвоения периода. Построенные вейвлет–диаграммы дают представление об устройстве критических аттракторов, позволяют судить о распределении точек локальной сингулярности. Сопоставление вейвлет–диаграмм выявляет общие закономерности построения аттракторов и дает возможность обнаружить характерные черты, присущие разным классам универсальности.

Одно из возможных направлений развития данной темы связано с исследованием многомерных аттракторов. В настоящей работе при изучении двумерных аттракторов строятся вейвлет–диаграммы их проекций на координатные оси. Альтернативой этому может быть использование так называемого многомерного вейвлет–анализа, когда производится свертка исследуемой функции нескольких переменных с многомерным вейвлетом [4]. Развитие такого подхода, по всей видимости, позволит получить дополнительную информацию об устройстве многомерных аттракторов.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 97–02–16414.*

## Библиографический список

1. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I.R. A variety of period–doubling universality classes in multi–parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*, 1997. Vol. 109. P. 91.
2. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Three–parameter scaling for one–dimensional maps // *Phys.Lett. A*. 1994. Vol. 189. P. 367.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // *Регулярная и хаотическая динамика*. 1997. Т. 2, № 3/4. С. 90.
4. Arneodo A., Argoul F., Bacry B., Elezgaray J., Freysz E., Grasseau G., Muzy J. F., Pouligny B. Wavelet transform of fractals // *Wavelets and applications* / Ed. Meyer Y., Masson and Springer–Verlag, 1992. P. 286.
5. Даценко Н.М., Сонечкин Д.М. Вейвлетный анализ временных рядов и динамика атмосферы // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1993. Т.1, №2. С. 9.
6. Arneodo A., Argoul F., Elezgaray J., Grasseau G. // *Nonlinear Dynamics* / Ed. Turchetti G., Singapore, World Scientific, 1988. P. 130.
7. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J.Stat.Phys.* 1978. Vol. 19. P. 25.
8. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations // *J.Stat.Phys.* 1979. Vol. 21. P. 669.
9. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН*. 1983. Т.141, № 3. С. 343.
10. Holschneider M. On the wavelet transform of fractal objects // *J.Stat.Phys.* 1988. Vol. 50. P. 963.
11. Arneodo A., Grasseau G., Holschneider M. Wavelet transform of multifractals // *Phys.Rev.Lett.* 1988. Vol. 61, № 20. P. 2281.
12. Schroeder M. *Fractals, Chaos, Power Laws*. New York, Freeman & C, 1991.
13. Федер Е. *Фракталы*. М.: Мир, 1991.
14. Halsey T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Fractal measures and their singularities // *Phys.Rev.* 1986. Vol. A33. P. 1141.
15. Eckmann J.P., Koch H., Wittwer P. Existence of a fixed point of the doubling transformation for area preserving maps of plane // *Phys.Rev.A*. 1982. Vol. 26. P. 720.
16. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Bicritical dynamics of period–

doubling systems with unidirectional coupling // Int J. Bifurc. and Chaos. 1991. Vol. 1, № 4. P. 839.

17. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Variety of types of critical behavior and multistability in period-doubling systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // Int J. Bifurc. and Chaos. 1993. Vol. 3. P. 139.

18. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // Phys.Lett.A. 1992. Vol. 162. P. 236.

19. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality // Physica D. 1997. Vol. 101. P. 249.

20. *Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A.* Fluctuations and simple chaotic dynamics // Phys.Rep. 1982. Vol. 92. P. 45.

21. *Couillet P., Tresser C.J.* Iterations d'endomorphismes et groupe de renormalisation // J.de Phys Coll. 1978. Vol. 39. P. 25.

22. *Chang S.J., Fendley P.R.* Scaling and universal behavior on bifurcation attractor // Phys. Rev.A. 1986. Vol. 33, № 6. P. 4092.

23. *Grassberger P.* On the Hausdorff dimension of fractal attractors // J.Stat.Phys. 1981. Vol. 26. P. 173.

24. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. Vol. 9. P. 189.

25. *Chang S.J., McCown J.* Universal exponent and fractal dimensions of Feigenbaum attractors // Phys.Rev.A. 1984. Vol. 30. P. 1149.

*Институт радиотехники  
и электроники РАН,  
Саратовский филиал*

*Поступила в редакцию 3.06.99*

## WAVELET ANALYSIS OF CRITICAL ATTRACTORS

*P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov*

Wavelet analysis is developed for critical attractors of one- and two-dimensional maps at the threshold of the chaos onset via period-doubling cascades. Numerically calculated wavelet diagrams are presented and discussed relating to critical attractors of different universality classes.



*Купцов Павел Владимирович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского университета (1994). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1998). Область научных интересов – нелинейная динамика, теория критических явлений. Автор нескольких научных работ по этой теме.



*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал свыше 100 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора в 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.

E-mail: kuz@spkuz.saratov.ru



## ПОТЕРЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ РЕССЛЕРА

*В.В. Астахов, А.Г. Баланов, О.В. Сосновцева, Т.Е. Вадивасова*

В работе исследуется процесс потери полной синхронизации хаоса во взаимодействующих осцилляторах, демонстрирующих каскад бифуркаций удвоения периода. Показано, что бифуркации основного семейства седловых циклов, встроенных в хаотический аттрактор, приводят к потере грубости синхронного режима и появлению предельных множеств, расположенных в окрестности симметричного подпространства. Бифуркации несимметричных предельных множеств, в свою очередь, ведут к формированию сложной структуры бассейнов притяжения. Потеря синхронизации завершается переходом к режиму гиперхаоса, который возникает в результате объединения определенных хаотических множеств.

Исследование явления синхронизации в связанных хаотических системах является одной из важных задач нелинейной динамики, имеющих большое фундаментальное и прикладное значение во многих областях науки и техники.

Одним из простейших видов взаимного согласования движений взаимодействующих хаотических систем является так называемая полная синхронизация хаоса. В связанных идентичных колебательных системах возможна ситуация, когда выше некоторого порогового значения коэффициента связи колебания подсистем полностью совпадают  $x_1(t) = x_2(t)$ , где  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  – фазовые координаты первого и второго осциллятора, соответственно, [1–5].

Переход к несинхронному поведению в системах с симметричным инвариантным многообразием происходит довольно сложным образом [6,7] и сопровождается такими эффектами, как «пузырение» аттрактора (bubbling of an attractor) [8], «изрешечивание» бассейнов притяжения (riddled basins) [9] и др. «Пузырение» представляет собой вид перемежающейся синхронизации, которая индуцируется малым шумовым воздействием или незначительной расстройкой подсистем, и обусловлено переходом к негрубому режиму синхронизации. «Изрешечивание» бассейна притяжения состоит в том, что в малой окрестности симметричного хаотического аттрактора появляется множество начальных условий, стартуя с которых, можно попасть на другие притягивающие множества.

Данные эффекты непосредственно связаны с бифуркациями седловых циклов, встроенных в синхронный хаотический аттрактор, что было продемонстрировано на разных примерах динамических систем [6,10–13].

В работе [12] для связанных логистических отображений было показано, что процесс потери полной синхронизации хаоса определяется поведением основного семейства седловых симметричных циклов, на базе которых в результате каскада бифуркаций удвоения периода образован синхронный хаотический аттрактор.

Потеря синхронизации начинается с бифуркации удвоения седлового цикла периода один. После нее режим синхронизации становится негрубым, в окрестности симметричного подпространства рождается седловой цикл удвоенного периода. Небольшая расстройка подсистем индуцирует «пузырение». Бифуркация седлового цикла периода два, расположенного вне симметричного подпространства, ведет к формированию сложной структуры бассейна притяжения. В малой окрестности синхронного хаотического аттрактора появляется множество начальных условий, стартуя с которых, фазовая траектория уходит на несимметричный цикл.

Обсуждаемая в [12] модель является простейшим примером взаимодействующих систем с переходом к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. В настоящей работе потеря синхронизации хаоса исследуется в более сложной модели взаимодействующих систем с удвоением периода: в двух связанных осцилляторах Ресслера. С увеличением размерности фазового пространства и числа существенных параметров связанных систем ситуация усложняется. Тем не менее, в системе с непрерывным временем в виде двух связанных идентичных осцилляторов Ресслера существуют сечения пространства параметров, при движении по которым просматривается такой же бифуркационный механизм потери полной синхронизации хаоса, как и в связанных логистических отображениях. Бифуркации основного семейства седловых циклов, встроенных в хаотический аттрактор, приводят к потере грубости синхронного режима и появлению предельных множеств, расположенных в окрестности симметричного подпространства. Бифуркации несимметричных предельных множеств ведут к формированию сложной структуры бассейнов притяжения. Кроме того, продемонстрировано, что потеря синхронизации в связанных системах Ресслера завершается переходом к режиму гиперхаоса, который возникает в результате объединения симметричных и несимметричных хаотических множеств.

Рассмотрим связанные осцилляторы Ресслера в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_0 y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon (x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_0 x_{1,2} + \alpha y_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= \beta + z_{1,2}(x_{1,2} - \mu), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$ ,  $z_{1,2}$  – динамические переменные первого и второго осцилляторов;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  – параметры, управляющие динамикой индивидуальной системы;  $\varepsilon$  – коэффициент связи;  $\omega_0$  – базовая частота подсистем.

Система (1) в широкой области значений управляющих параметров демонстрирует различные регулярные и хаотические синхронные режимы колебаний. В связанных осцилляторах Ресслера с увеличением  $\mu$  на базе симметричного цикла периода один ( $C_0$ ) происходит каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого возникает множество симметричных  $2^N$ -тактных циклов ( $2^N C_0$ , где  $N=0,1,2,\dots$ ). Рассмотрим поведение взаимодействующих осцилляторов Ресслера в зависимости от  $\mu$  и  $\varepsilon$  при фиксированных  $\alpha=0.15$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\omega_0=0.97$ .

На рис. 1 на плоскости управляющих параметров ( $\mu, \varepsilon$ ) построены линии бифуркационных значений основного семейства циклов  $2^N C_0$ . На горизонтальных линиях старший мультипликатор циклов принимает значение, равное минус единице. На наклонных линиях второй мультипликатор седловых циклов равен минус единице. При значениях  $\varepsilon$  справа от бифуркационной линии седлового цикла  $C_0$  последовательность бифуркаций завершается появлением хаотического аттрактора, расположенного в симметричном подпространстве  $x_1=x_2$ ,  $y_1=y_2$ ,  $z_1=z_2$  объединенного фазового пространства связанных систем. С дальнейшим

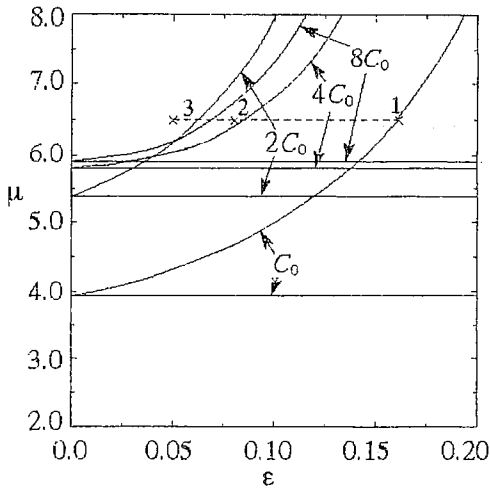


Рис. 1. Линии бифуркационных значений основного семейства циклов  $2^N C_0$  на плоскости управляющих параметров при  $\alpha=0.15$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\omega_0=0.97$

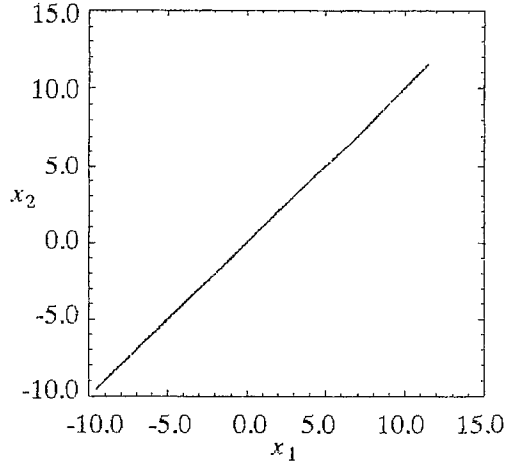


Рис. 2. Проекция хаотического аттрактора, соответствующего режиму синхронизации хаоса ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.2$ )

увеличением  $\mu$  наблюдается последовательность бифуркаций слияния лент симметричных хаотических аттракторов.

Рассмотрим колебательные режимы взаимодействующих осцилляторов с уменьшением значений коэффициента связи от  $\epsilon=0.2$  при фиксированном  $\mu=6.5$ , когда в системе существует одноленточный симметричный хаотический аттрактор ( $A^0$ ). Устойчивый и грубый режим синхронизации хаоса наблюдается при изменении связи до  $\epsilon \approx 0.125$ . При воздействии на систему шума малой интенсивности хаотические колебания осцилляторов остаются близкими к идентичным (рис. 2). Ниже по параметру  $\epsilon$  режим синхронизации становится негрубым. Малые флуктуации индуцируют «пузырение» (рис. 3), которое наблюдается в интервале значений  $\epsilon$  примерно от 0.125 до 0.075. В отсутствие шума при задании начальных условий в окрестности симметричного подпространства фазовая траектория притягивается к хаотическому аттрактору  $A^0$ . После переходного процесса

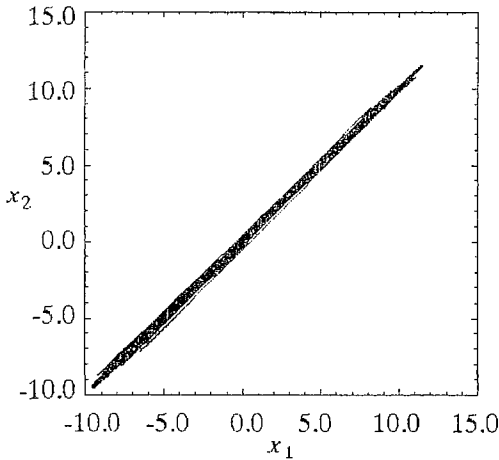


Рис. 3. «Пузырение» аттрактора, индуцированное слабым шумом ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.11$ )

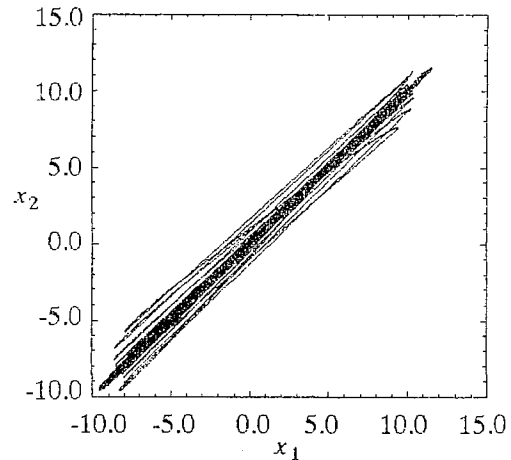


Рис. 4. Проекция фазового портрета в режиме перемежающейся синхронизации ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.0092$ )



устанавливаются синхронные хаотические колебания. При дальнейшем уменьшении значений коэффициента связи поведение осцилляторов становится более сложным. В интервале значений  $\epsilon$  от 0.075 до 0.01 в тонкой зависимости от выбора начальных условий из окрестности симметричного подпространства фазовая траектория притягивается либо к хаотическому аттрактору, либо к устойчивому циклу периода два, расположенному вне симметричного подпространства. При малом шумовом воздействии синхронные хаотические колебания не наблюдаются. «Пузырение» сменяется регулярными несинфазными колебаниями с периодом два. Время переходных процессов сильно зависит от выбора начальных условий и может быть довольно продолжительным, например, наблюдались переходные процессы, длительность которых достигала нескольких сотен периодов цикла  $C_0$ . В отсутствие флуктуаций в данном интервале значений  $\epsilon$  все еще существует негрубый режим синхронизации хаоса. Ниже по параметру  $\epsilon$  он сменяется режимом перемежающейся синхронизации, проекция фазового портрета и временная реализация разности динамических переменных которого показаны на рис.4 и 5. При  $\epsilon < 0.008$  в системе возникает режим гиперхаоса (рис. 6). Отметим, что в рассмотренном сечении пространства параметров при уменьшении  $\epsilon$  взаимодействующие осцилляторы Ресслера демонстрируют такое же поведение, как и связанные дискретные отображения с удвоением периода.

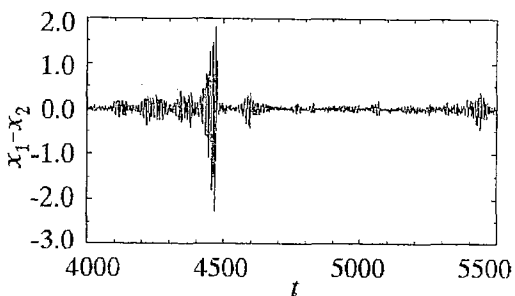


Рис. 5. Временная реализация разности динамических переменных в режиме перемежающейся синхронизации ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.0092$ )

Теперь обсудим наблюдаемые качественные изменения в динамике системы при уменьшении значений коэффициента связи, сопоставляя их с бифуркациями седловых циклов основного семейства  $2^N C_0$ . Поскольку синхронный хаотический аттрактор  $A^0$  возник через последовательность удвоений данного семейства циклов, можно предположить, что бифуркации именно этих циклов играют основную роль в процессе потери синхронизации хаоса. Обратимся к бифуркационной диаграмме на рис. 1. Исследуемое сечение  $\mu=6.5$  на плоскости параметров показано штриховой линией. Справа от точки 1 встроенные в одноленточный симметричный хаотический аттрактор  $A^0$  седловые циклы  $2^N C_0$  являются устойчивыми к трансверсальным возмущениям. В системе наблюдается устойчивый и грубый режим синхронизации хаоса. С уменьшением  $\epsilon$  при пересечении точки 1 происходит бифуркация удвоения периода седлового цикла  $C_0$ . В его окрестности вне симметричного подпространства рождается устойчивый цикл периода два ( $2C_1$ ). Симметричный цикл  $C_0$  становится неустойчивым к трансверсальным возмущениям. Данная бифуркация приводит к потере грубости режима синхронизации хаоса. Несколько ниже по параметру, начиная с  $\epsilon \approx 0.125$ , наблюдается «пузырение». При дальнейшем уменьшении  $\epsilon$  аналогичную бифуркацию демонстрирует симметричный цикл  $4C_0$ , что не приводит к качественному изменению наблюдае-

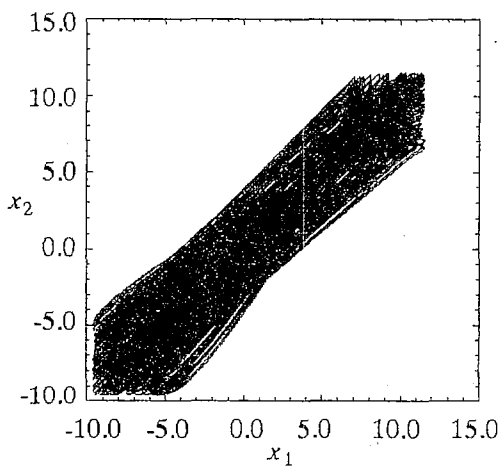


Рис. 6. Проекция хаотического аттрактора в режиме гиперхаоса ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.002$ )

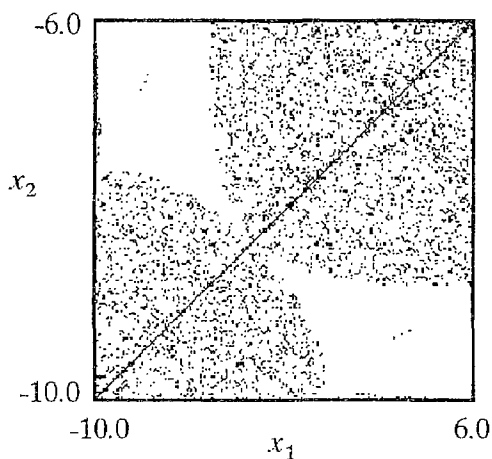


Рис. 7. Проекция сечения бассейнов притяжения хаотического аттрактора  $A^0$  (черный цвет) и устойчивого цикла  $2C^1$  (белый цвет) ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.08$ )

в системе наблюдаются переходы к несинфазным режимам. При дальнейшем уменьшении  $\epsilon$  происходят аналогичные бифуркации на базе других седловых циклов основного семейства, что ведет к развитию трансверсальной неустойчивости симметричного хаотического множества в целом. В точке 3 становится положительной еще одна ляпуновская характеристическая экспонента, вычисленная по типичной хаотической траектории аттрактора  $A^0$ . Слева от точки 3 возникает режим гиперхаоса. В окрестности бифуркационного значения в системе без флуктуаций наблюдается режим перемежающейся синхронизации [7]. Хаотический аттрактор, соответствующий режиму гиперхаоса, образуется в результате объединения хаотического множества  $A^0$  и хаотического множества, сформированного в окрестности симметричного подпространства на базе  $2C^1$  и других несинфазных циклов, родившихся из основного семейства циклов  $2^N C_0$ .

Таким образом, в двух связанных идентичных осцилляторах Ресслера в указанном сечении пространства параметров наблюдается качественно такой же бифуркационный сценарий, как и в связанных логистических отображениях [12]. Но, в отличие от простейшей модели взаимодействующих систем с бифуркациями удвоения периода, в связанных системах Ресслера могут наблюдаться и иные сценарии перехода к несинхронному поведению осцилляторов. В частности, в сечении пространства параметров  $\alpha=0.2$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\omega_0=1$ ,  $\mu=10$  имеет место иная последовательность бифуркаций несимметричных режимов. Здесь хотя и происходит усложнение структуры бассейна притяжения аттрактора  $A^0$ , однако явления «изрешечивания» обнаружить не удалось. Перехода к несимметричным колебательным режимам при слабом шумовом воздействии за время наблюдения порядка  $10^5$  периодов цикла  $C_0$  не наблюдалось. Данная ситуация сохраняется вплоть до возникновения режима гиперхаоса. Выяснение указанных особенностей требует дополнительных исследований.

*Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-02-16531).*

### Библиографический список

1. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems // Prog. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
2. Pikovsky A.S. On the interaction of strange attractors // Z. Phys. 1984. Vol. 55 B. P. 149.

3. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
4. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1050.
5. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
6. Pikovsky A.S., Grassberger P. Symmetry breaking bifurcations for coupled chaotic attractors // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. Vol. 24. P. 4587.
7. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability // Nonlinearity. 1996. Vol. 9. P. 703.
8. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // Phys. Lett. 1994. Vol. A193. P. 126.
9. Alexander J.C., Kan I., Yorke J.A., You Z. Riddled basins // Int. J. Bifurc. Chaos. 1992. Vol. 2. P. 795.
10. Kapitaniak T., Maistrenko Yu., Stefanski A., and Brindley J. Bifurcations from locally to globally riddled basins // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 6253.
11. Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Venkataramani S.C. Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 55.
12. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79, № 6. P. 1014.
13. Rulkov N.F. Images of synchronized chaos: Experiments with circuits // Chaos. 1996. Vol. 6, № 3. P. 262.

Лаборатория нелинейной  
динамики СГУ

Поступила в редакцию 10.03.99  
после переработки 30.08.99

## LOSS OF CHAOS SYNCHRONIZATION IN COUPLED RÖSSLER SYSTEMS

V.V. Astakhov, A.G. Balanov, O.V. Sosnovtseva, T.E. Vadivasova

We study process of loss of complete chaos synchronization in interacting oscillators which demonstrates cascade of period-doubling bifurcations. It is shown that bifurcations of main family of saddle cycles embedded in chaotic attractor lead to loss of the synchronous regime robustness and appearance of limit sets located in vicinity of symmetrical subspace. Bifurcations of nonsymmetrical limit sets lead to formation of complex structure of attractor basins. The transition to hyperchaos regime which appears as a result of merge of some chaotic sets completes the loss of chaos synchronization.



Астахов Владимир Владимирович окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую (1983) и докторскую диссертацию (1999). Работает профессором кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 60 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.  
E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



*Баланов Александр Геннадьевич* родился в 1973 году. Окончил физический факультет СГУ (1995). С 1997 года – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и синхронизация хаоса. Автор более 15 научных работ.  
E-mail: [balanov@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:balanov@chaos.ssu.runnet.ru)



*Сосновцева Ольга Владимировна* родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996) по структурам и свойствам аттракторов неавтономных и связанных динамических систем. Имеет более 25 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.  
E-mail: [olga@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:olga@chaos.ssu.runnet.ru)



*Вадivasова Татьяна Евгеньевна* окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981). Кандидат физ.-мат. наук (1986), Соросовский доцент. С 1998 года – докторант кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Научные интересы сосредоточены в области теории колебаний и статистической радиофизики. Автор более 40 статей в отечественной и зарубежной печати.  
E-mail: [tanya@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:tanya@chaos.ssu.runnet.ru)



## МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ С ФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ\*

*О.Б. Исаева, М.В. Елисеев, А.Г. Рожнёв, Н.М. Рыскин*

Исследуются характеристики автоэлектронной эмиссии с поверхности двумерного фрактального объекта, границей которого является множество Жюлиа. Обнаружено, что эмиссия концентрируется главным образом на мелкомасштабных самоподобных неоднородностях, где происходит многократное усиление поля. Выясняется связь эмиссионных свойств с фрактальной размерностью поверхности. Представленные результаты помогают объяснить необычные эмиссионные свойства ряда материалов, характеризующихся развитой структурой поверхности.

### Введение

Для вакуумной микроэлектроники большое значение имеют материалы, обладающие значительной автоэмиссионной способностью в относительно слабых полях [1]. В последние годы появился ряд новых перспективных материалов, в частности, таких, как алмазоподобные пленки [2], углеродные нанотрубки (тубелены) [3], пористый кремний [4] и т. д. Они демонстрируют эмиссию в рекордно низких электрических полях (порядка 10 В/мкм). Природа этого явления до сих пор остается невыясненной. Обычно ее связывают с необычайно низкой работой выхода для этих материалов [3,5]. Однако, на наш взгляд, можно предложить другое объяснение этого эффекта. Исследование структуры поверхности подобных материалов с помощью сканирующего туннельного микроскопа показывает, что она характеризуется множеством самоподобных микронеоднородностей, то есть является фрактальной. Вообще поверхности многих природных и искусственно созданных материалов характеризуются дробной фрактальной размерностью, по крайней мере, в определенном диапазоне масштабов [6]. Многократное усиление поля на микронеоднородностях может дать объяснение столь низким напряжениям, необходимым для эмиссии, и ее неоднородному характеру [7].

Как известно [1], величину плотности тока эмиссии с поверхности катода можно рассчитать по формуле Фаулера – Нордгейма

$$J = AE^2 \exp(-B\phi^{3/2}/E) / \phi, \quad (1)$$

\* Статья написана по материалам доклада на XI Международной школе по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 2–6 марта 1999 года.

где  $\phi$  – работа выхода;  $A$  и  $B$  – величины, слабо зависящие от геометрии системы и работы выхода;  $E$  – напряженность поля. Пусть, например, рассматриваемая область представляет собой плоский диод, на катоде которого размещено эмитирующее острие. Тогда напряженность поля на вершине острия можно связать с анодным напряжением  $V$  с помощью коэффициента усиления  $\beta$

$$E = \beta V/d,$$

где  $d$  – расстояние между катодом и анодом.

Полный ток эмиссии  $I$  зависит также от эффективной площади эмиссии  $S$

$$I = SJ(E).$$

Если рассчитать напряженность поля на поверхности, то, зная работу выхода, можно определить полный ток и эффективную площадь эмиссии. С другой стороны, значения  $S$  и  $\beta$  можно определить и по экспериментальным данным. Действительно, вольт–амперная характеристика в координатах Фаулера – Нордгейма (то есть зависимость  $\ln(I/V^2)$  от  $1/V$ ) представляет собой прямую линию, что позволяет вычислить два из трех параметров  $S$ ,  $\beta$  и  $\phi$  [8]. Однако первые же попытки сопоставить экспериментальные данные с расчетными закончились неудачей: измеренный коэффициент усиления оказался гораздо больше, а эффективная площадь эмиссии гораздо меньше предсказанных теоретически [8]. В некоторых случаях  $S$  оказалась порядка нескольких квадратных ангстрем, что соответствует площадке, на которой может уместиться всего несколько атомов. Таким образом, можно предположить, что эмиссия в этом случае может быть обусловлена наличием микронеоднородностей на поверхности катода.

Качественно эффект усиления поля на микронеоднородностях можно объяснить следующим образом. Для гладкого эмиттера, имеющего высоту  $h$  и радиус кривизны  $r$ , известна простая оценка коэффициента усиления  $\beta \approx 1+h/r$  для острейного эмиттера и  $\beta \approx (1+h/r)^{1/2}$  для лезвийного [1]. Тогда, в присутствии малой неоднородности, размеры которой много меньше размеров основного острия, можно получить выражения для  $\beta$  в виде произведений  $\beta \approx (1+h/r)(1+h_i/r_i)$  или  $\beta \approx [(1+h/r)(1+h_i/r_i)]^{1/2}$ , соответственно, где  $h_i$  и  $r_i$  – параметры неоднородности. При наличии самоподобных микронеоднородностей меньшего масштаба коэффициент усиления можно представить в виде произведения соответствующего числа сомножителей и, следовательно, он будет многократно возрастать.

Эти соображения подтверждаются рядом теоретических и экспериментальных исследований. В частности, в работе [9] рассчитывалась эмиссия в случае, когда на поверхности эмиттера имеется микронеоднородность, размеры которой на порядок меньше размеров эмиттера. Было показано, что наличие неоднородности приводит к резкому возрастанию поля на ней и, следовательно, возрастанию эмиссионного тока. Эмиссия в основном происходит с острия микронеоднородности и определяется ее свойствами. Аналогичные результаты были получены в статье [10], где рассматривался катод с неоднородностями трех последовательно уменьшающихся масштабов. В работе [11], где приведены результаты экспериментального изучения матричных углеродных катодов, в ряде случаев были получены значения  $\beta=261$ ,  $S=4.4 \text{ \AA}^2$ . Поэтому представляется вероятным, что эмитируют отдельные микронеоднородности, малый размер которых обеспечивает высокий коэффициент усиления и малую эффективную площадь эмиссии.

В настоящей работе исследуются характеристики автоэлектронной эмиссии в предположении, что эмитирующая поверхность является фрактальной. Однако непосредственное вычисление напряженности электрического поля на фрактальной (и вообще достаточно сложной) поверхности при помощи

существующих компьютеров и численных методов не представляется возможным. Поэтому решается модельная задача об автоэлектронной эмиссии с поверхности двумерного фрактального объекта, границей которого является множество Жюлиа.

## 1. Множество Жюлиа как модель фрактальной поверхности

Множество Жюлиа возникает при исследовании квадратичного итерационного отображения вида

$$z_{n+1} = f_c(z_n) \equiv z_n^2 + c, \quad (2)$$

где  $z$  – комплексная переменная,  $c$  – комплексный параметр [12,13]. Рассмотрим сначала простейший пример, когда  $c=0$ . Нетрудно видеть, что если взять начальную точку внутри единичного круга, то в процессе итерирования  $z \rightarrow 0$ . Точка, взятая вне единичного круга, убежит в бесконечность. Таким образом, существуют два аттрактора – нуль и бесконечность, а плоскость комплексных чисел разбивается на два подмножества – бассейна притяжения (так называемые множества «беглецов» и «заключенных»). Граница между этими двумя множествами является единичной окружностью и называется множеством Жюлиа для данного итерационного процесса. В этом простейшем примере граница между бассейнами притяжения является регулярной кривой – окружностью единичного радиуса. Однако при  $c \neq 0$  отображение (2) может порождать фрактальную границу [12,13]. Существуют два основных типа множеств Жюлиа: некоторые из них являются связными, а другие представляют собой облака из точек (канторовы множества). Множество значений параметра  $c$ , для которых множество Жюлиа связно, называется множеством Мандельброта [12,13].

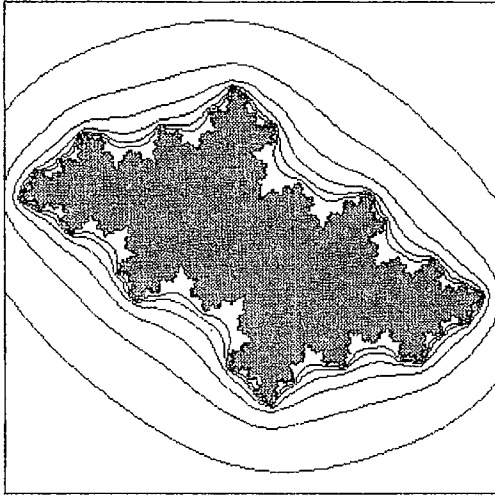
Считаем, что множество Жюлиа, порождаемое итерационным процессом  $f_c$ , является границей заряженного проводника. Полагаем, что в продольном направлении объект является однородным – это позволяет ограничиться решением двумерной задачи. Как показано, например, в [12], для потенциала электростатического поля  $U_c$ , создаваемого этим проводником, справедлива следующая формула:

$$U_c(z) = \ln|z| + \sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) \ln|1 + c/(f_c^{n-1}(z))^2|, \quad (3)$$

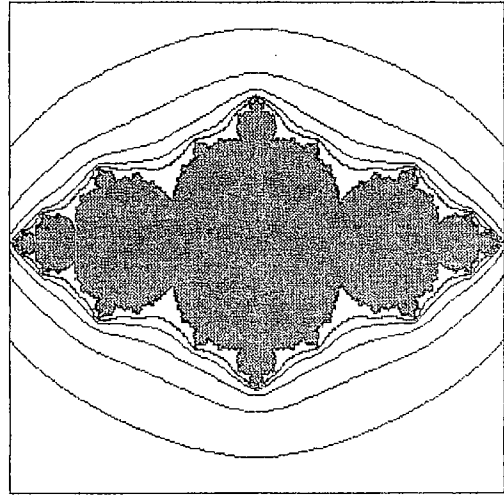
где  $f_c^{n-1}(z)$  – точка, в которую переходит точка  $z$  в результате  $n-1$ -кратного применения к ней отображения (2). Этот ряд быстро сходится, так что для численного расчета достаточно рассмотреть небольшое число его членов. В случае  $c=0$ , что соответствует бесконечному проводнику круглого сечения, очевидно, получаем

$$U_0(z) = \log|z|,$$

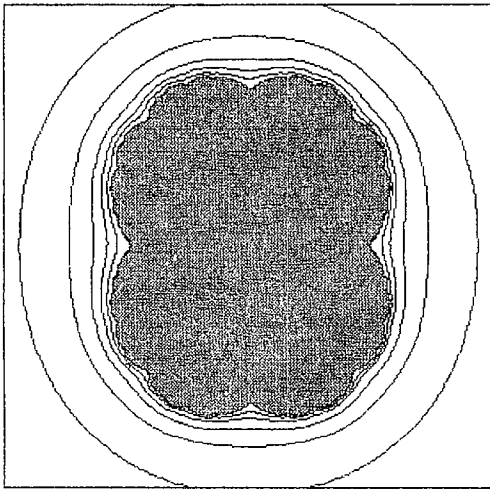
причем эквипотенциали являются концентрическими окружностями. Вывод формулы (3) основан на теореме Римана о конформных отображениях, согласно которой можно отобразить связное множество Жюлиа для процесса  $f_c$  на единичный круг. Отметим также, что в результате однократного итерирования отображения (2) потенциал точки возрастает в два раза:  $U_c(z_{n+1})=2 U_c(z_n)$ . На рис. 1 представлены множества Жюлиа и эквипотенциальные линии для различных значений параметра  $c$ . При переходе от одной эквипотенциали к другой потенциал увеличивается в два раза. Для построения множества Жюлиа использовался метод обратного итерирования [12], который является наиболее простым, быстрым и дает вполне удовлетворительные результаты для значений параметра  $c$  внутри главной кардиоиды множества Мандельброта.



*a*



*б*



*в*

Рис. 1. Множества Жюлиа с параметрами  $c = -0.5 + 0.5i$  (*a*);  $-0.7$  (*б*);  $0.2$  (*в*) и система их эквипотенциалей

## 2. Методика численного моделирования автоэлектронной эмиссии с фрактальной поверхностью

Зная распределение потенциала, создаваемого проводником, границей которого является множество Жюлиа, можно вычислить напряженность электростатического поля вдоль эмитирующей поверхности и, пользуясь законом Фаулера – Нордгейма (1), найти плотность тока и полный ток эмиссии. Поскольку невозможно вычислить напряженность поля непосредственно на фрактальной границе, считалось, что эмитирующая поверхность совпадает с эквипотенциальной линией, расположенной достаточно близко к фрактальному объекту. Одновременно такой выбор позволяет учесть тот факт, что реальная поверхность является фрактальной лишь в определенных пространственных масштабах [6]. В качестве поверхности внешнего проводника рассматривалась эквипотенциаль, достаточно удаленная от фрактала, по форме близкая к окружности. В продольном направлении структура предполагалась однородной. Таким образом, расчетная область представляла собой цилиндрический диод с шероховатой поверхностью внутреннего проводника. По мере приближения эквипотенциали к фракталу (то есть по мере уменьшения потенциала), можно добиться описания этой моделью все меньшего размера шероховатостей поверхности.



Эквипотенциальная кривая с заданным значением потенциала  $U_c=U_0$  численно восстанавливалась с помощью кусочно-линейной аппроксимации. Рассматриваемая область на плоскости разбивалась прямоугольной сеткой с необходимым разрешением, в узлах которой вычислялся потенциал по аналитической формуле (3). Затем для каждой ячейки сетки проверялось условие прохождения эквипотенциали через ее границы. Если это условие выполнялось, внутри ячейки эквипотенциаль аппроксимировалась отрезком прямой. Далее путем численного дифференцирования потенциала и последующей линейной экстраполяции определялось распределение напряженности поля вдоль эмитирующей поверхности.

Поскольку распределение поля имеет ярко выраженную неоднородную структуру, для обеспечения удовлетворительной точности расчетов необходимо достаточно высокое разрешение. В противном случае наиболее резкие изгибы эквипотенциали обрезаются, вследствие чего пропадают высокие пики, описывающие сильные неоднородности поля. Поэтому при вычислениях шаг сетки выбирался достаточно малым, так что его уменьшение переставало влиять на результаты.

После того, как найдено распределение поля, по формуле Фаулера – Нордгейма (1) с параметрами  $A=1.54 \cdot 10^{-6}$ ,  $B=6.83 \cdot 10^6$  [1] и работой выхода  $\phi=4.5$  эВ находилось распределение плотности тока эмиссии, численным интегрированием которого определялся полный ток. При этом по-прежнему важно, чтобы шаг интегрирования был достаточно малым, так как из-за экспоненциального характера зависимости  $J(E)$  и ее сильной изрезанности большой шаг интегрирования приводит к огромной погрешности.

На рис. 2 изображено распределение поля в относительных единицах вдоль

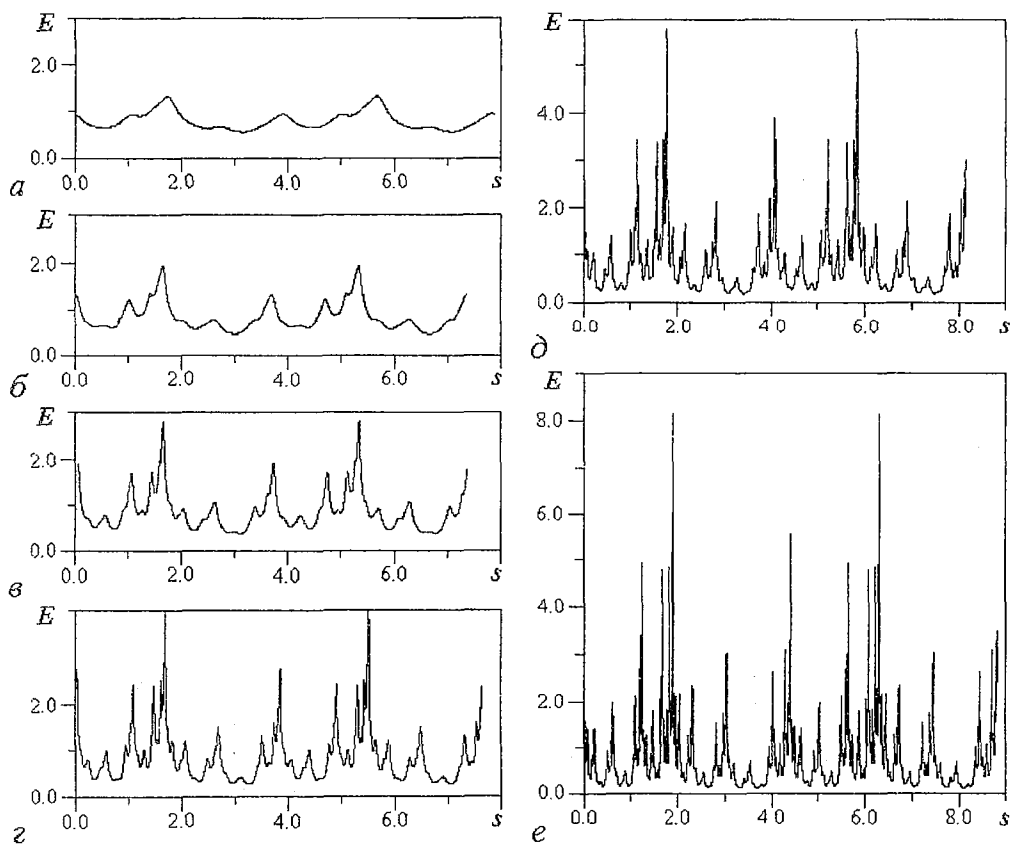


Рис. 2. Распределение поля вдоль различных эквипотенциалей для множества Жюлиа с параметром  $s=-0.5+0.5i$  по мере приближения к фрактальной поверхности. Значения потенциала в относительных единицах составляют  $U_0=0.2$  (а), 0.1 (б), 0.05 (в), 0.025 (г), 0.0125 (д), 0.00625 (е)

различных эквипотенциалей ( $s$  – координата вдоль эквипотенциали). Видно, что по мере приближения к фрактальной границе (то есть когда эмитирующая поверхность становится все более шероховатой) появляются высокие пики, намного превышающие среднее значение поля, описывающие усиление поля на мелко-масштабных неоднородностях. Соответственно, на этих участках происходит резкое увеличение плотности автоэмиссионного тока. Наличие на рис. 2 двух повторяющихся участков связано с симметрией множества Жюлиа (см. рис. 1).

### 3. Расчет вольт–амперных характеристик

Особый интерес представляют вольт–амперные характеристики (ВАХ) автоэлектронной эмиссии с фрактальной поверхности. Результаты расчетов для множества Жюлиа с параметром  $c = -0.5 + 0.5i$  представлены на рис. 3. Из формул раздела 1 легко видеть, что если эффективная площадь эмиссии  $S$  постоянна, ВАХ в координатах Фаулера – Нордгейма должны представлять собой прямые линии, угол наклона которых определяется коэффициентом усиления. В данном случае наклон зависит от приложенного напряжения, что свидетельствует о зависимости эффективной площади  $S$  от приложенного поля. Вследствие этого ВАХ слегка изогнуты в области сильных полей. В слабых полях эмитирует не вся поверхность, а лишь отдельные наиболее ярко выраженные микро неоднородности. При увеличении напряжения начинают эмитировать все более и более мелкие неоднородности. Эффективная площадь эмиссии, а следовательно, и наклон ВАХ, незначительно возрастает. При достаточно больших напряжениях, когда эмитирует вся поверхность, наклон перестает меняться, а значение эффективной площади эмиссии насыщается (см. также раздел 4).

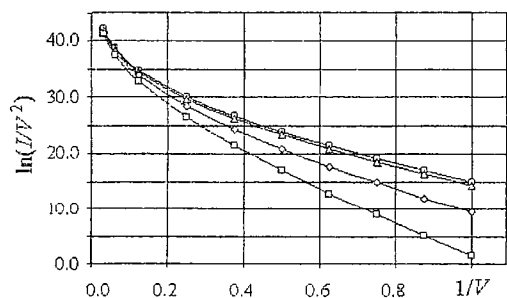


Рис. 3. Вольт–амперные характеристики в координатах Фаулера – Нордгейма для различных эквипотенциалей:  $U_0 = 0.2$  ( $\square$ );  $0.1$  ( $\diamond$ );  $0.05$  ( $\triangle$ );  $0.025$  ( $\circ$ )

Сказанное иллюстрирует рис. 4, на котором показаны распределения плотности тока эмиссии при различных напряжениях. Из приведенных на этом рисунке результатов следует, что с увеличением напряжения начинают эмитировать все более мелко масштабные неоднородности. Хорошо наблюдается появление новых пиков, их рост, насыщение их высоты по отношению к высоте максимального пика и, наконец, стабилизация всей картины. Следует отметить, что неоднородность эмиссии вдоль поверхности значительно снижается с ростом  $V$ .

### 4. Влияние фрактальной размерности на характеристики автоэлектронной эмиссии

Основной количественной характеристикой фрактального множества является фрактальная размерность [6,12,13]. С другой стороны, множества с одинаковой размерностью визуально могут выглядеть по-разному. Поэтому возникает вопрос, является ли фрактальная размерность как таковая объективной характеристикой процесса автоэлектронной эмиссии. С целью ответа были проведены расчеты фрактальной размерности и эмиссионных свойств для эквипотенциалей множеств Жюлиа с различными параметрами  $c$ , которые демонстрируют разнообразную геометрию и разную степень фрактальности (см. рис. 1).

Несмотря на то, что множество Жюлиа является одним из наиболее известных фрактальных объектов с ярко выраженной самоподобной структурой, о его

фрактальной размерности  $D$  известно сравнительно мало. Однако существует приближенная формула, полученная Д. Рюэлем (1982) (см. [12]; также см. [14]),

$$D = 1 + |c|^2 / (4 \ln 2) + O(|c|^3) \quad (4)$$

для размерности множества Жюлиа с параметром  $c$ . Формула (4) справедлива при  $|c| \ll 1$ .

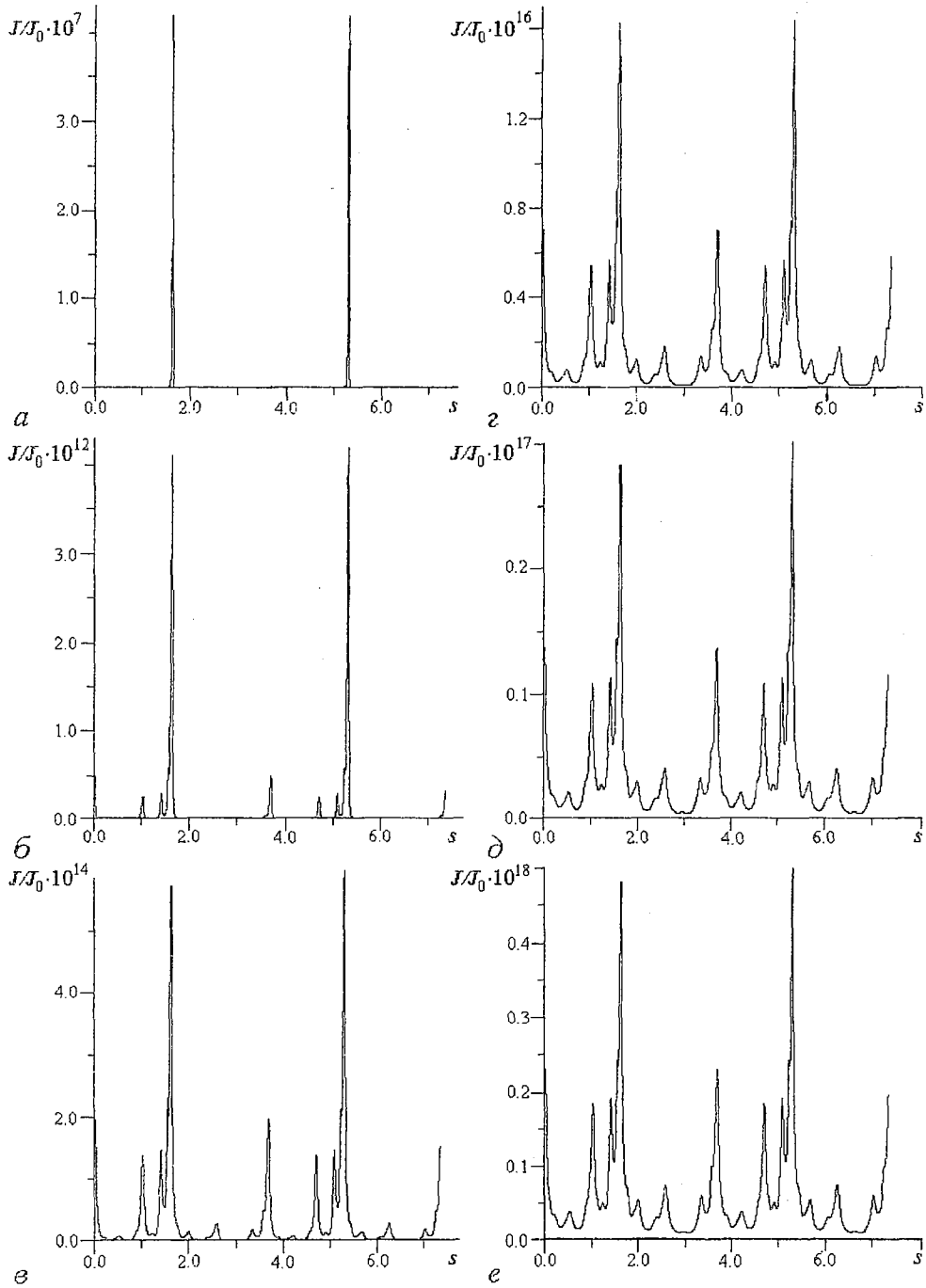


Рис. 4. Распределение плотности тока вдоль эквипотенциали с  $U_0=0.05$  при различных значениях напряжения в относительных единицах:  $V=1$  (а); 4 (б); 16 (в); 64 (г); 256 (д); 1024 (е)

Нами были проведены расчеты фрактальной размерности для различных множеств Жюлиа, которые сравнивались с результатами, полученными по теоретической формуле (4)\*. Использовался наиболее распространенный метод покрытия прямоугольниками (box-counting) [12,13]. Фрактальная размерность  $D$  определялась как наклон графика  $\ln N(\ln \epsilon)$ , где  $N$  – число прямоугольников, через которые проходит фрактальная кривая,  $\epsilon$  – характерный размер прямоугольника. Некоторые результаты расчетов для различных значений параметра  $c$  внутри основной кардиоиды множества Мандельброта приведены в табл. 1.

Таблица 1

$c$	$D$ , расч.	$D$ , ф. (4)	$c$	$D$ , расч.	$D$ , ф. (4)
-0.7	1.17	1.176	$\pm 0.3i$	1.04	1.032
-0.6	1.1	1.13	$\pm 0.4i$	1.065	1.057
-0.5	1.08	1.09	$\pm 0.5i$	1.11	1.09
-0.4	1.05	1.058	$\pm 0.6i$	1.13	1.13
-0.3	1.03	1.032	$0.1 \pm 0.1i$	1.01	1.007
-0.2	1.01	1.014	$0.2 \pm 0.1i$	1.028	1.018
-0.1	1.002	1.004	$0.3 \pm 0.1i$	1.099	1.036
0.0	1.0	1.0	$-0.1 \pm 0.1i$	1.006	1.007
0.1	1.004	1.004	$-0.2 \pm 0.2i$	1.03	1.029
0.2	1.024	1.014	0.25	1.07	1.022
$\pm 0.1i$	1.001	1.004	$-0.6 \pm 0.1i$	1.139	1.133
$\pm 0.2i$	1.013	1.014	$-0.5 \pm 0.5i$	1.22	1.18

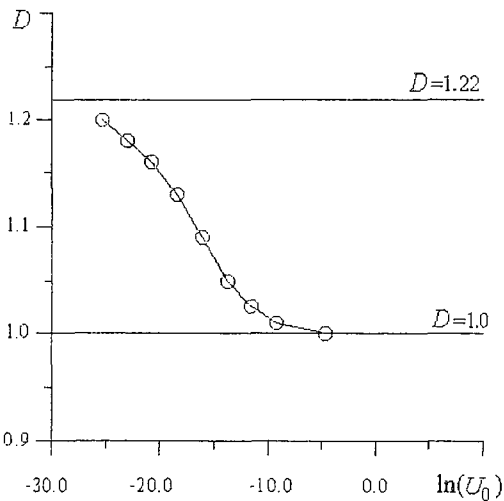


Рис. 5. Зависимость фрактальной размерности участков эквипотенциалей от их потенциала  $U_0$  при  $c = -0.5 + 0.5i$ . Фрактальная размерность оценивалась в одном и том же диапазоне масштабов для всех эквипотенциалей

Эквипотенциаль, проходящая сколь угодно близко к фрактальной границе, все равно является гладкой кривой. Поэтому ее размерность  $D \rightarrow 1$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Однако в некотором диапазоне масштабов можно ожидать, что на графике будет присутствовать второй прямолинейный участок с наклоном, большим 1. В этой области масштабов эквипотенциаль является самоподобной (область скейлинга). Таким образом, выбирая различные значения потенциала, можно варьировать фрактальную размерность в области скейлинга от 1 до предельного значения размерности множества Жюлиа с данной величиной параметра  $c$ . На рис. 5 показана зависимость размерности эквипотенциалей в области скейлинга от  $U_0$ , то есть от степени их близости к фрактальному объекту ( $c = -0.5 + 0.5i$ ).

Чтобы выяснить, насколько фрактальная размерность поверхности

\* Строго говоря, формула (4) получена не для фрактальной, а для хаусдорфовой размерности. Однако, как показывают результаты расчетов, между этими величинами существует хорошее соответствие, по крайней мере в области малых  $\epsilon$ .

катода влияет на его эмиссионную способность, были проведены две серии численных экспериментов. Во-первых, рассчитывался полный ток эмиссии для трех поверхностей, обладающих одинаковым значением  $D$  в области скейлинга, но соответствующих разным множествам Жюлиа на рис. 1. Расчет показал, что полный ток последовательно возрастает при переходе к поверхности со все более развитой структурой (максимальное значение тока соответствует  $c=-0.7$ , а минимальное –  $c=+0.2$ ).

Во-вторых, рассчитывался наклон линий Фаулера – Нордгейма в зависимости от приложенного напряжения. На рис. 6 представлены зависимости наклонов, нормированных на максимум, для эквипотенциалей с фрактальной размерностью  $D \approx 1.08$ , соответствующих множествам Жюлиа с  $c=0.2$  и  $c=-0.5+0.5i$  (кривые 1 и 2), а также эквипотенциалей с  $D \approx 1.12$  для множеств с  $c=-0.5+0.5i$  и  $c=-0.7$  (кривые 3 и 4). Видно, что для эквипотенциалей различных множеств Жюлиа с близкими фрактальными размерностями эти зависимости практически совпадают. Если формально в соответствии с формулами раздела 1 ввести некоторый эффективный коэффициент усиления поля на поверхности в целом, то его величина оказывается зависящей от фрактальной размерности.

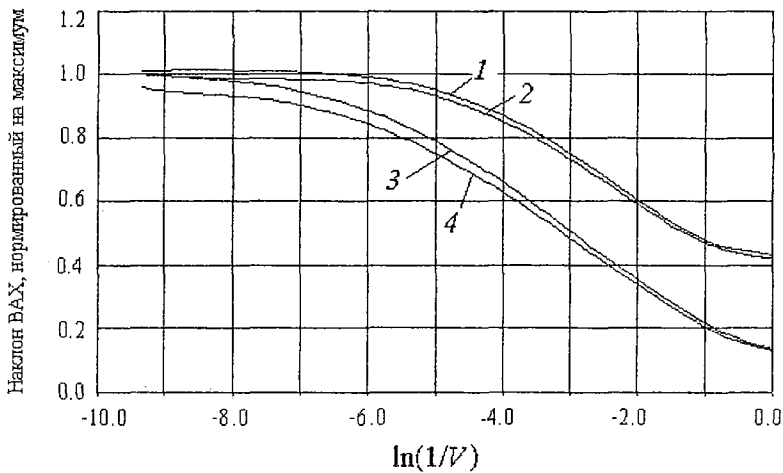


Рис. 6. Наклоны вольт-амперных характеристик эквипотенциальных линий с близкими фрактальными размерностями, соответствующих различным множествам Жюлиа:  $c=0.2, D \approx 1.08$  (1);  $c=-0.5+0.5i, D \approx 1.08$  (2);  $c=-0.5+0.5i, D \approx 1.12$  (3);  $c=-0.7, D \approx 1.12$  (4)

### Заключение

Представленные результаты компьютерного моделирования автоэлектронной эмиссии с поверхности двумерного фрактального объекта, границей которого является множество Жюлиа, показали, что такая структура поверхности приводит к многократному возрастанию поля вблизи фрактальных выступов, что является причиной возрастания тока эмиссии. С помощью полученных результатов можно объяснить известные несоответствия между численными расчетами и экспериментальными данными, которые обнаружили anomalously большое значение коэффициента усиления [8–11]. Фрактальная размерность эмитирующей поверхности определяет эффективную величину коэффициента усиления поля на микро неоднородностях, в то время как полный ток эмиссии определяется, в основном, геометрией микро неоднородностей.

Авторы благодарны Д.И. Трубецкову и Ю.А. Данилову за обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 97-02-16546) и ФНЦП «Интеграция».

## Библиографический список

1. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В. Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.
2. Geis M.W., Twichell J.C., Bozler C.O., et al. Diamond field-emission cathodes // VI Int. Vac. Microelectronics Conf. Tech. Digest. Newport, Rhode Island. 1993. P. 160.
3. Gulyaev Yu.V., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V., et al. Work function estimate for electrons emitted from nanotube carbon cluster films // J. Vac. Sci. Technol. B. 1997. Vol. 15, № 2. P. 422.
4. Wilshaw R.P., Boswell E.C. Field emission from pyramidal cathodes covered in porous silicon // J. Vac. Sci. Technol. B. 1994. Vol. 12, № 2. P. 662.
5. Jung J.H., Ju B.K., Lee Y.H., Jang J., Oh M.H. Enhancement of electron emission efficiency and stability of molybdenum-tip field emitter array by diamond-like carbon coating // IEEE Electron Device Lett. 1997. Vol. 18, № 5. P. 197.
6. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
7. Habermann T., Göhl A., Müller G., et al. Uniform field-emission from polycrystalline CVD-diamond films // IX Int. Vac. Microelectronics Conf. Tech. Digest. St.-Petersburg, Russia, 1996. P. 258.
8. Spindt C.A., Brodie I., Humphrey L., Westerberg E.R. Physical properties of thin-film field emission cathodes with molybdenum cones // J. Appl. Phys. 1976. Vol. 47, № 12. P. 5248.
9. Ryskin N.M., Rozhnev A.G., Trubetskov D.I. Theoretical study of field emission from non-uniform emitters // Technical Digest of IVMC'97. Kyongju, Korea, 1997. P. 310.
10. Солнцев В.А. Нелинейные явления в вакуумных микроэлектронных структурах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 54.
11. Grigoriev Yu.A., Petrosyan A.I., Penzyakov V.V., et al. Experimental study of matrix carbon field-emission cathodes and computer aided desing of electron guns for microwave power devices, exploring these cathodes // J. Vac. Sci. Technol. B. 1997. Vol. 15, № 2. P. 503.
12. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993.
13. Peitgen H.-O., Jurgens H., Saup D. Chaos and fractals: new frontiers of science. Springer-Verlag, New-York, 1992.
14. Widom M., Bensimon D., Kadamoff L., Shenker S. Strange objects in the complex plane // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 32. P. 443.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 17.09.99

## SIMULATION OF FIELD EMISSION FROM FRACTAL SURFACE

*M.V. Eliseev, O.B. Isayeva, A.G. Rozhnev, N.M. Ryskin*

Results of numerical simulation of electron field emission from the surface of 2-D fractal object bounded by Julia set are presented. The calculations show that emission occurs mainly from small sites of the surface close to self-similar small-scale irregularities, where the electrostatic field is amplified greatly. Submitted results confirm hypothesis, that unusual field-emission properties of some materials could be explained by taking into account the fractal structure of its surface. The influence of the fractal dimension on the emission has been cleared. It turned out that emission current depends mainly on the geometry of small-scale irregularities. Nevertheless, the fractal dimension defines the slope of current-voltage characteristics.



*Исаева Ольга Борисовна* родилась в Саратове (1977). Окончила Высший колледж прикладных наук СГУ (1999). Стажер-исследователь СО ИРЭ РАН. Область научных интересов – теория фракталов и динамика комплексных отображений. Автор 5 статей по этой тематике.



*Елишеев Максим Валерьевич* – родился в 1978 году. Студент 5 курса Высшего колледжа прикладных наук СГУ, выполняет дипломную работу на кафедре нелинейных процессов. Область научных интересов – вакуумная микроэлектроника СВЧ, численное моделирование физических полей.



*Рожнев Андрей Георгиевич* – родился в Саратове (1959). Окончил физический факультет СГУ (1981). Старший научный сотрудник НИИ механики и физики СГУ, доцент Высшего колледжа прикладных наук. Область научных интересов – электроника СВЧ, вакуумная микроэлектроника, вычислительная электродинамика. Автор 55 научных публикаций в отечественных и зарубежных журналах. Автор книги «Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996; совместно с Д.И. Трубецковым и Д.В. Соколовым).



*Рыскин Никита Михайлович* – родился в Саратове (1966). Окончил физический факультет Саратовского университета (1991). Работал в НИИ механики и физики СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «радиофизика» в СГУ (1996). Доцент Высшего колледжа прикладных наук СГУ (1997). Область научных интересов – нелинейные явления в распределенных системах, содержащих электронные потоки и электромагнитные поля, вакуумная микроэлектроника. Автор и соавтор более 45 научных работ.



## МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ГРУППЫ ЛЮДЕЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕТОЧНОГО ГАЗА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

*М.Е. Степанцов*

Для математического моделирования движения неорганизованной группы людей ранее был предложен клеточный автомат с окрестностью Марголуса, имевший ряд недостатков – в частности, движение людей рассматривалось без учета их способности выбирать оптимальное направление движения.

В данной работе предлагается модель на основе двумерного решеточного газа с нелокальными взаимодействиями, обладающая элементами искусственного интеллекта. Проведены модельные расчеты.

Необходимость моделирования поведения людей возникает при решении задач, связанных с проектированием городских коммуникаций и сооружений, рассчитанных на нахождение в них большого количества людей. При этом целесообразно рассмотреть движение людей как в штатной ситуации, так и в условиях паники, и устранить особенности конструкций, которые могут привести к заторам и давке.

Поведение достаточно большой группы людей в стандартной ситуации хорошо описывается вероятностным образом: даже если один человек будет действовать нетривиально, его действия никак не повлияют на группу в целом.

Для математического моделирования процессов, происходящих с ансамблем большого числа однородных объектов, например, молекул газа, успешно применялись упрощенные дискретные модели из класса клеточных автоматов [1]. Движение группы людей оказалось возможным описать при помощи клеточного автомата с окрестностью Марголуса [2].

Однако данный автомат имеет ряд недостатков – в частности, движение людей рассматривается без учета их способности ориентироваться в ситуации, выбирать оптимальное направление движения, обходить препятствия и создавшиеся заторы. Кроме того, в предыдущих работах на эту тему моделируемый объект назывался толпой, что вело к терминологической неточности – социальные науки называют толпой нечто другое. Поэтому в данной работе мы будем говорить о движении неорганизованной группы людей.

При построении новой модели главной целью было придание ей элементов искусственного интеллекта. Поскольку автомат с классической окрестностью Марголуса не позволяет осуществлять нелокальные зависимости, в качестве основы нового автомата был взят двумерный решеточный газ на ортогональной решетке [3].



Как и в старой модели, каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «1» (заполнена) или «0» (пуста). Задано также направление движения «вперед», в котором частицы движутся при отсутствии препятствий. Препятствием могут служить как другие частицы, так и стационарные препятствия (стены и т.п.), моделируемые запретом движения в соответствующих клетках. Каждый временной шаг автомата состоит из двух этапов:

- 1) анализ ситуации в каждой клетке автомата;
- 2) перемещение частиц в соответствии с правилами автомата.

Рассмотрим каждый из этих этапов.

Анализ ситуации в каждой клетке автомата производится путем подсчета вероятностей выбора одного из трех направлений («вперед», «вправо», «влево») (рис. 1). При этом учитывается состояние  $N$  клеток в каждом из этих направлений, где  $N$  (глубина анализа) является параметром модели.

Вероятности находятся по формулам

$$P_F(i,j) = 1 - 1/N \sum_{k=1}^N X(i-k,j),$$

$$P_R(i,j) = 1 - 1/N \sum_{k=1}^N X(i,j+k),$$

$$P_L(i,j) = 1 - 1/N \sum_{k=1}^N X(i,j-k),$$

где  $i$  и  $j$  – координаты текущей клетки,  $X$  – состояние соседних клеток. Если при последовательной проверке клеток встречается стенка, то все последующие клетки считаются заполненными ( $X=1$  для всех  $k > k_0$ ), так как они являются недоступными.

Найденные вероятности используются на втором этапе. Вначале проверяется возможность передвижения частицы вперед, то есть отсутствие в ближайшей клетке в этом направлении частицы как в данный момент, так и на предыдущем шаге (это необходимо для предотвращения попадания двух частиц в одну клетку, что приведет к нарушению закона сохранения числа частиц). Если такая возможность есть, то с вероятностью  $P_F$  частица перемещается вперед.

В противном случае аналогичным способом совершаются попытки перемещения частицы вправо и влево. Варианты «сначала вправо, затем влево» и «сначала влево, затем вправо» выбираются с равной вероятностью, чтобы сохранить симметрию модели. В любом случае, если перемещение частицы удастся, вся данная процедура прекращается, и автомат переходит к следующей клетке. Если же частица все еще остается на своем месте, совершается последняя попытка – переместить ее назад. Здесь перемещение осуществляется с вероятностью 1, если передвижение назад возможно, то есть соседняя клетка свободна.

Таким образом, частицы перемещаются по клеткам автомата в соответствии со следующими правилами:

- при возможности частица движется вперед (по отношению к некоторому заданному направлению);
- если движение вперед невозможно, частица движется вправо/влево или назад;
- наличие в каком-либо направлении других частиц или стен уменьшает вероятность движения частицы в этом направлении.

Этот набор простейших правил позво-

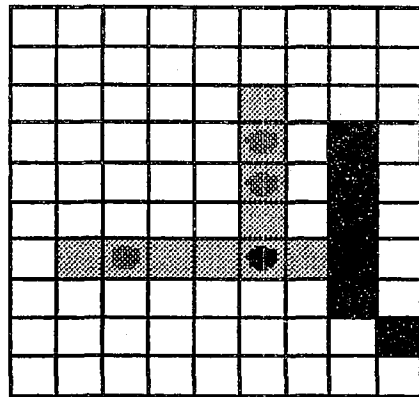


Рис. 1. Анализ ситуации для частицы при  $N=4$ . Серым цветом выделены проверяемые клетки, черным – стены. Здесь  $P_F=0.5$ ,  $P_L=0.75$ ,  $P_R=0.25$  (в последнем случае на втором шаге встречена стенка)

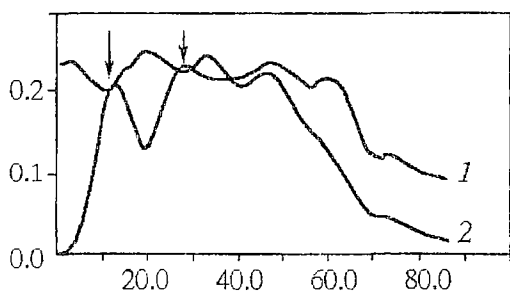


Рис. 2. Зависимости плотностей числа частиц от времени: 1 – после сужения, 2 – до сужения

движения людей в сужающемся проходе рассматривался профиль сужения, который, как показано в [2], приводит в некоторых случаях к образованию «пробки». И действительно, такой эффект был получен и в данной модели.

На рис. 2 показаны зависимости плотностей количества частиц перед сужением прохода и за ним от времени. Видно, что в некоторый момент времени (первая вертикальная стрелка) они сравниваются (заполнен весь проход). Затем плотность за сужением падает, в то время как перед ним остается большое количество частиц – возникает «пробка». В дальнейшем она исчезает (вторая вертикальная стрелка), и движение продолжается без «пробок».

Построенная модель позволяет анализировать возможное возникновение заторов и давки при проектировании сооружений, рассчитанных на значительные потоки людей, а также оценивать безопасность зданий и помещений.

### Библиографический список

1. Тоффולי Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991.
2. Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е. Моделирование динамики движения толпы при помощи клеточных автоматов с окрестностью Марголюса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 75.
3. Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е. Клеточные автоматы для расчета некоторых газодинамических процессов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 5. С. 137.

Поступила в редакцию 25.05.99

## DYNAMIC MODEL OF A GROUP OF PEOPLE BASED ON LATTICE GAS WITH NON-LOCAL INTERACTIONS

*M.E. Stepanstov*

A cellular automaton with Margolus neighbourhood was previously proposed for modelling dynamics of an unorganized group of people. However, it had a number of drawbacks, one is that the human possibility to choose the optimal direction of movement was ignored. In this paper a new model is proposed. It is based on two-dimensional lattice gas with non-local interactions and has AI elements. Model calculations are carried out.



*Степанцов Михаил Евгеньевич* – родился в Куйбышеве (1972). Окончил физический факультет МГУ (1995) и аспирантуру кафедры математики физического факультета МГУ (1998). Кандидат физико-математических наук. Автор 8 статей, посвященных применению клеточных автоматов для моделирования нелинейных явлений.

E-mail: sm@briz.mccme.ru



## БИФУРКАЦИИ В ТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ КОЛЬЦЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПОВОРОТОМ ПОЛЯ

*И.В. Измайлов, В.Т. Калайда, А.Л. Магазинников, Б.Н. Пойзнер*

Математической моделью процессов структурообразования в нелинейном кольцевом интерферометре служит система обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и нелинейностью в виде функции косинуса. Сделан расчет границ областей устойчивости (на плоскости: запаздывание – нелинейность), обобщающий результаты Икеды. На основе построенных бифуркационных диаграмм, фазовых портретов и фурье–спектров сделан анализ динамики для разных условий. Показан простой прием совместной интерпретации диаграмм и портретов. Идентифицированы типы бифуркаций в зависимости от нелинейности и поворота поля при наличии запаздывания.

### Введение

Статья продолжает исследования бифуркаций в модели процессов в кольцевом интерферометре, содержащем несколько нелинейных сред, оптические поля в котором взаимосвязаны. Фундаментальное свойство нелинейного кольцевого интерферометра – способность формировать в поперечном сечении лазерного пучка многообразные регулярные и хаотические структуры. Особенностью данной модели является возможность учесть запаздывание оптического поля в контуре обратной связи, отмечавшаяся еще авторами работы [1]. Представляет интерес выяснить влияние этого запаздывания на динамику процессов в интерферометре. Подобное исследование целесообразно, во-первых, в связи с тем, что кольцевой интерферометр служит аналогом кольцевых нейронных систем, в которых также имеет место запаздывание [2]. Во-вторых, такое исследование оправдано в более широком контексте изучения кольцевых систем с запаздыванием, например, СВЧ–приборов: ЛБВ, ЛОВ [3]. В-третьих, необходимо установить, как отражается на процессах в кольцевом интерферометре с запаздыванием рост числа нелинейных элементов либо уменьшение угла поворота оптического поля в контуре обратной связи интерферометра. Обсуждение свойств многокомпонентных интерферометров проводится обычно в плане разработки принципов и устройств оптической обработки информации [4]. Наконец, обращение к вопросам устойчивости описанной оптической системы открывает возможности применения результатов моделирования в курсах нелинейной динамики и теории колебаний для студентов университета (так, на компьютерных семинарах по курсу «Динамические системы и бифуркации» для студентов Высшего колледжа прикладных наук Саратовского государственного университета изучается, в частности, в рамках классической модели Икеды [5] возбуждаемый лазером нелинейный кольцевой интерферометр [6]).

Проведенное моделирование показало, что в зависимости от величины запаздывания в контуре обратной связи интерферометра фазовые портреты системы усложняются. Построены бифуркационные диаграммы, на которых указаны области устойчивости. Установлено, что имеют место бифуркации удвоения периода. Отмечено, что при увеличении времени запаздывания размер областей устойчивых стационарных состояний (на плоскости: стационарное решение – параметр нелинейности) сокращается. Вычислены фурье-спектры установившихся движений. По четырем первым бифуркациям удвоения периода определено число Фейгенбаума. Проведено сопоставление строения бифуркационных диаграмм и фазовых портретов.

Структура фазовых портретов и временного фурье-спектра зависит от угла поворота оптического поля в плоскости поперечного сечения лазерного пучка (в контуре обратной связи интерферометра). С уменьшением угла поворота проявляется тенденция к хаотизации. В качестве тестовой ситуации при анализе устойчивости авторы использовали модель Икеды, обсуждавшуюся в нелинейно-оптическом [5] и нелинейно-динамическом [7] аспектах, а при построении бифуркационных диаграмм – результаты авторов [4] для поворота поля на угол  $\pi$ .

Таким образом, знание закономерностей бифуркационного поведения нелинейного кольцевого интерферометра с запаздыванием и поворотом поля в поперечной плоскости дает определенные ориентиры для развития моделей кольцевых систем оптической обработки информации.

## 1. Описание модели

Схема кольцевого интерферометра с поворотом оптического поля в плоскости поперечного сечения лазерного пучка (поворот осуществляет некоторый линейный элемент, например, призма, помещенная в контуре обратной связи интерферометра) изображена на рис. 1. Здесь приняты следующие обозначения:  $G$  – линейный элемент;  $M_1, M_2$  – зеркала с коэффициентом отражения по интенсивности  $R$ , для  $M_3, M_4$  он равен 1.

Характер процессов в кольцевом интерферометре обусловлен свойствами нелинейной среды  $NL$  [4], а при заданном уровне ее нелинейности  $K$  – темпом диффузии поляризованных молекул в жидком кристалле  $NL$  [8].

В тех случаях, когда оптическая длина контура обратной связи интерферометра и, следовательно, время обхода контура световым полем  $T$  (обусловленное конечной величиной скорости света) достаточно велики, также следует ожидать изменения динамики структурообразования. Для характеристики  $T$ , то есть времени запаздывания в интерферометре, оказываются существенными два количественных масштаба. Ими служат: период светового поля  $T_0$  и время релаксации нелинейной части показателя преломления  $n$  нелинейной среды  $\tau$ . Для

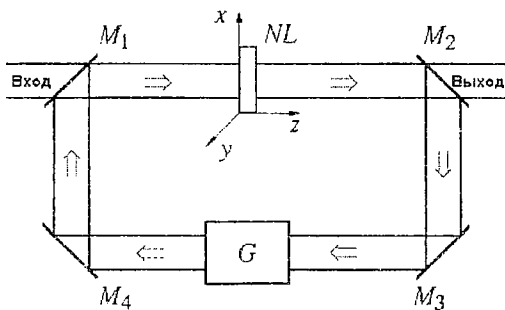


Рис. 1. Интерферометр Физо, содержащий нелинейную среду  $NL$ .  $M_1$ – $M_4$  – зеркала ( $M_1, M_2$  – полупрозрачные зеркала). Стрелками показаны направления хода лучей

сред (со значительными по величине нелинейными свойствами), используемых в кольцевых интерферометрах, время релаксации  $\tau$ , как правило, составляет от  $10^{-12}$  с до  $10^{-1}$  с [4]. Поэтому для видимого диапазона длин волн справедливо соотношение  $\tau \gg T_0 \approx 10^{-14}$  с. Но соотношение между величиной запаздывания светового поля  $T$  и временем релаксации  $\tau$  может быть различным. Если величина  $\tau \ll T$ , то достаточно учесть запаздывание в виде дополнительного фазового набег в интерференционном слагаемом, значе-

ние которого определяется соотношением между  $T$  и  $T_0$ . Если же  $\tau$  соизмеримо с  $T$ , то следует учитывать запаздывание введением функции с отклоняющимся аргументом.

Как уже говорилось, необходимо исследовать совместное влияние нелинейности, запаздывания и поворота оптического поля в контуре обратной связи интерферометра, или числа нелинейных элементов  $N$ , как будет показано ниже, на динамику процессов в нем.

В случае поворота поля на угол  $\Delta=2\pi/N=120^\circ$  при  $N=3$  возвращение светового луча в исходную точку  $(x,y)$  поперечного сечения происходит после трех проходов через интерферометр, причем через участки нелинейной среды с различными значениями показателя преломления. Поэтому, если влиянием диффузии пренебрегают, то поворот оптического поля на угол  $\Delta=2\pi/N$  приводит к тому же эффекту, что и последовательное распространение светового луча через  $N$  нелинейных элементов (керровских сред), параметры которых в общем случае различны. Однако, для любой модели  $N$ -компонентного интерферометра можно найти равноценную модель однокомпонентного интерферометра с поворотом поля на угол  $\Delta=2\pi/N$ , временем запаздывания поля внутри интерферометра  $T$  и параметром нелинейности  $K$ .

Границы применимости модели  $N$ -компонентного интерферометра на практике обусловлены целочисленным значением  $N$ , то есть максимальным числом проходов, при котором потери излучения не оказывают заметного влияния на структурообразование. Если число  $N$  не целое, то есть возвращение светового луча (после  $N$  проходов через интерферометр) в исходную точку не происходит, то существенной оказывается дифракция светового поля. Следовательно, точечная модель становится неприменимой. В теоретическом плане модель работоспособна для любого целочисленного значения  $N$ .

Динамику нелинейной фазовой модуляции в кольцевом интерферометре с поворотом оптического поля на угол  $2\pi/N$  описывает система уравнений [1,9]

$$\tau du_j(t)/dt + u_j(t) = K[1 + \gamma(\cos(u_i(t-T) + \varphi_0))], \quad j=1, 2, \dots, N; \quad i=2, \dots, N, 1. \quad (1)$$

Здесь  $u_j$  – фазовый набег в  $j$ -м канале,  $\tau$  – время релаксации,  $T$  – время запаздывания,  $K$  – параметр нелинейности,  $\varphi_0$  – невозмущенный фазовый набег,  $\gamma$  – контрастность. В системе (1) все  $u_j$  положительны. Постоянный фазовый набег  $\varphi_0=0$ . Из-за наличия второго члена в левой части равенства, описывающего релаксацию, система (1) является диссипативной.

## 2. Анализ устойчивости стационарных состояний

Исследуем динамику оптических волн в нелинейном интерферометре. Для этого найдем стационарные решения  $u_{j*}$  системы (1) из следующих уравнений:

$$u_{j*} = K(1 + \gamma \cos(u_{i*} + \varphi_0)), \quad j=1, 2, \dots, N; \quad i=2, \dots, N, 1. \quad (2)$$

Система (2) является инвариантной относительно циклической перестановки переменных  $u_{j*}$ . Например, для  $N=3$  [10] система (2) генерирует точечную группу симметрии  $C_3$  вращений вокруг прямой  $B$  с углами поворотов  $\alpha$  равными  $0, 2\pi/3, 4\pi/3$  (рис. 2). Из рисунка видно, что поворот треугольника относительно прямой  $B$  на угол, кратный  $2\pi/3$ , приводит лишь к циклической перестановке индексов переменных  $u_{j*}$ . Поэтому, для полного анализа решений системы (2) достаточно рассмотреть один из трех ее корней ( $u_{1*}$ ). Решения, принадлежащие прямой  $B$  (перпендикулярной плоскости треугольника), находятся из следующего уравнения:

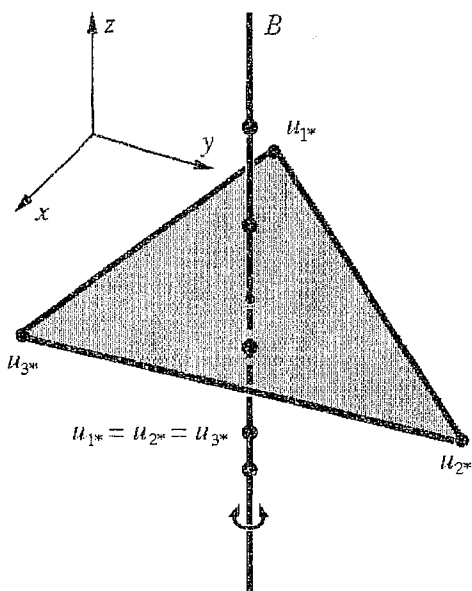


Рис. 2. Случай трех одинаковых и различных корней системы трех уравнений (2). Прямая  $B$  – ось поворотной симметрии третьего порядка  $C_3$ . Вершины равностороннего треугольника  $u_{j*}$  обозначают различные корни уравнений (2). Точки на прямой  $B$  соответствуют одинаковым корням  $u_* = u_{1*} = u_{2*} = u_{3*}$ .

Для того, чтобы можно было судить о характере процессов в интерферометре с запаздыванием, необходимо исследовать стационарные решения уравнений (1) на устойчивость. По-видимому, наиболее рациональным является метод, предложенный в книгах [12,13]. Для этого линеаризуем уравнения (1) и получим следующую систему:

$$\tau \dot{\varepsilon}_j(t) + \varepsilon_j(t) + C_j \varepsilon_j(t-T) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $C_j = K\gamma \sin(u_{j*} + \varphi_0)$ ,  $\varepsilon_j = |u_j - u_{j*}| \ll 1$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ ,  $i=2, \dots, N, 1$ . Решение (4) ищем в виде

$$\varepsilon_j = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_N]^T \exp(\nu \lambda),$$

что приводит к характеристическому уравнению относительно неизвестного параметра  $\lambda$

$$(\lambda+1)^N + (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^N C_j \exp(-N\nu\lambda) = 0. \quad (5)$$

Проведем анализ уравнения (5) при  $N=2, 3, 4$ . Подобно тому, как это сделано в работе [7] для  $N=1$ , построим кривые зависимостей  $C(\nu)$ , которые являются границами областей устойчивости стационарных решений. Каждая точка, лежащая на этой кривой, соответствует значениям  $\text{Re}(\lambda)=0$ . Для  $N>1$  переменную  $C$  определим следующим образом:

$$C = [\text{PC}_j / |\text{PC}_j|] |\text{PC}_j|^{1/N}, \quad (6)$$

где в качестве величины  $|\text{PC}_j|^{1/N}$  следует взять вещественный положительный корень.

Из рис. 3 видно, что при  $|C| \leq 1$  стационарное решение (2) всегда устойчиво

$$u_* = K(1 + \gamma \cos u_*), \quad u_* = u_{1*} = u_{2*} = u_{3*}. \quad (3)$$

Заметим, что решения уравнения (3) полностью включает в себя и система с любым другим числом уравнений  $N$ . Для  $N=4$ , очевидно, система (2) генерирует группу симметрии  $C_4$ . При этом решения  $(u_{1*}, u_{2*}, u_{3*}, u_{4*})$ , принадлежащие вершинам четырехгранного угла, будут полностью включать в себя решения  $(u_{1*}, u_{2*})$  системы из двух алгебраических уравнений.

Решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом имеют много общего со свойствами решений обычных дифференциальных уравнений, тогда как благодаря запаздыванию возникают свойства, которые являются принципиально новыми [11]. Например, при малых значениях параметров  $K$  и  $\gamma$  ( $K\gamma < 1$ ) решения уравнений (1) не отличаются от решений системы обычных дифференциальных уравнений. С ростом значений указанных параметров в системе с запаздыванием могут возникнуть периодические движения и динамический хаос.

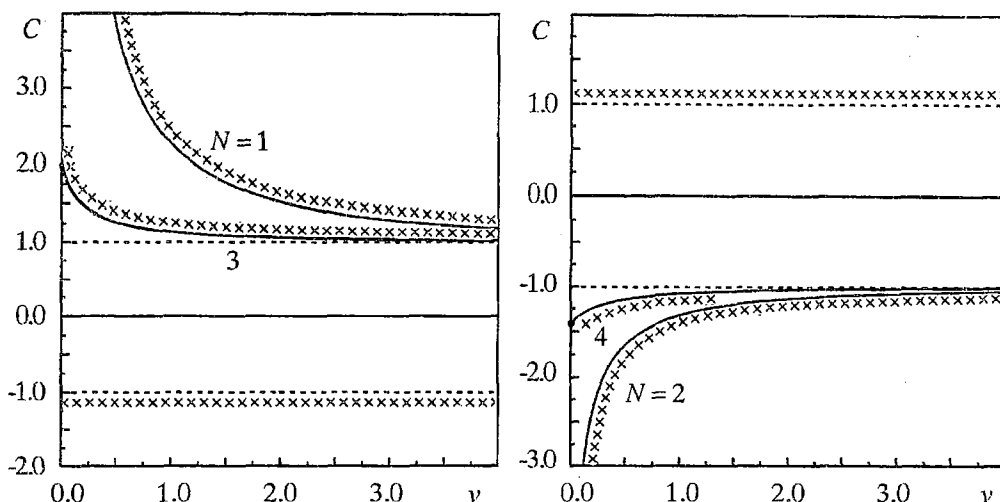


Рис. 3. Области и границы устойчивости на плоскости: запаздывание – нелинейность. Переменная  $C$  (6) зависит от параметра нелинейности  $K$ ;  $\nu$  – время запаздывания, нормированное на время релаксации нелинейной части показателя преломления. «Крестики» обозначают переход в область неустойчивости. Цифры от 1 до 4 есть значения  $N$ , определяющие угол поворота поля  $\Delta=2\pi/N$ . График 1 соответствует случаю, рассмотренному Икедой [7]

(то есть не зависит от значения запаздывания  $\nu$  при любых  $N$ ). Отметим важную особенность систем с  $N \geq 3$ . Даже при  $\nu=0$  в такой системе возможно возникновение неустойчивых колебаний, поскольку значение переменной  $C(\nu=0)$  конечно и составляет:  $C=2$  для  $N=3$  и  $C=-(2)^{1/2}$  для  $N=4$ . Данный вывод подтверждают натурные [4] и вычислительные [10] эксперименты. Ориентируясь в областях устойчивости, изображенных на рис. 3, будем строить бифуркационные диаграммы стационарных состояний при различных  $K$ ,  $\nu$  и  $N$ . Численное решение системы (1) производилось методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

### 3. Бифуркационные диаграммы с учетом запаздывания и поворота поля в контуре обратной связи

Общее представление об изменении бифуркационных диаграмм вследствие варьирования угла поворота  $\Delta=2\pi/N$  оптического поля в плоскости поперечного сечения лазерного пучка при учете нормированного времени запаздывания  $\nu=T/\tau$ , где  $\tau$  – время релаксации нелинейной части показателя преломления, дают серии бифуркационных диаграмм на рис. 4. Они построены на плоскости: стационарные решения уравнений (1) – параметр нелинейности  $K$  для данного угла поворота  $\Delta$  при различных значениях  $\nu$ .

Сопоставление бифуркационных диаграмм со случаем, когда  $\nu=0$  [4,10,14], приводит к следующим выводам. Во-первых, наличие запаздывания, хотя и вызывает появление и/или смещение вдоль оси  $K$  бифуркаций устойчивости стационарных состояний, но не влияет на расположение стационарных состояний в структуре диаграммы. Во-вторых, с ростом запаздывания внутри кольцевого интерферометра количество устойчивых стационарных состояний уменьшается. В-третьих, с ростом запаздывания размеры интервалов значений параметра нелинейности, при которых имеет место потеря устойчивости стационарных состояний, увеличиваются.

Проведем сравнительный анализ бифуркационного поведения нелинейного фазового набегает сначала для нечетного значения  $N$ , а затем – для четного.

Обратимся к бифуркационным диаграммам для углов поворота  $\Delta=2\pi$  и  $\Delta=2\pi/3$  (см. рис. 4, а, в) и обратим внимание на их нижние ветви А. Рассмотрим интервал значений от 0 до 6.62 параметра нелинейности  $K$ , когда все  $u_j$  одинаковы, то есть

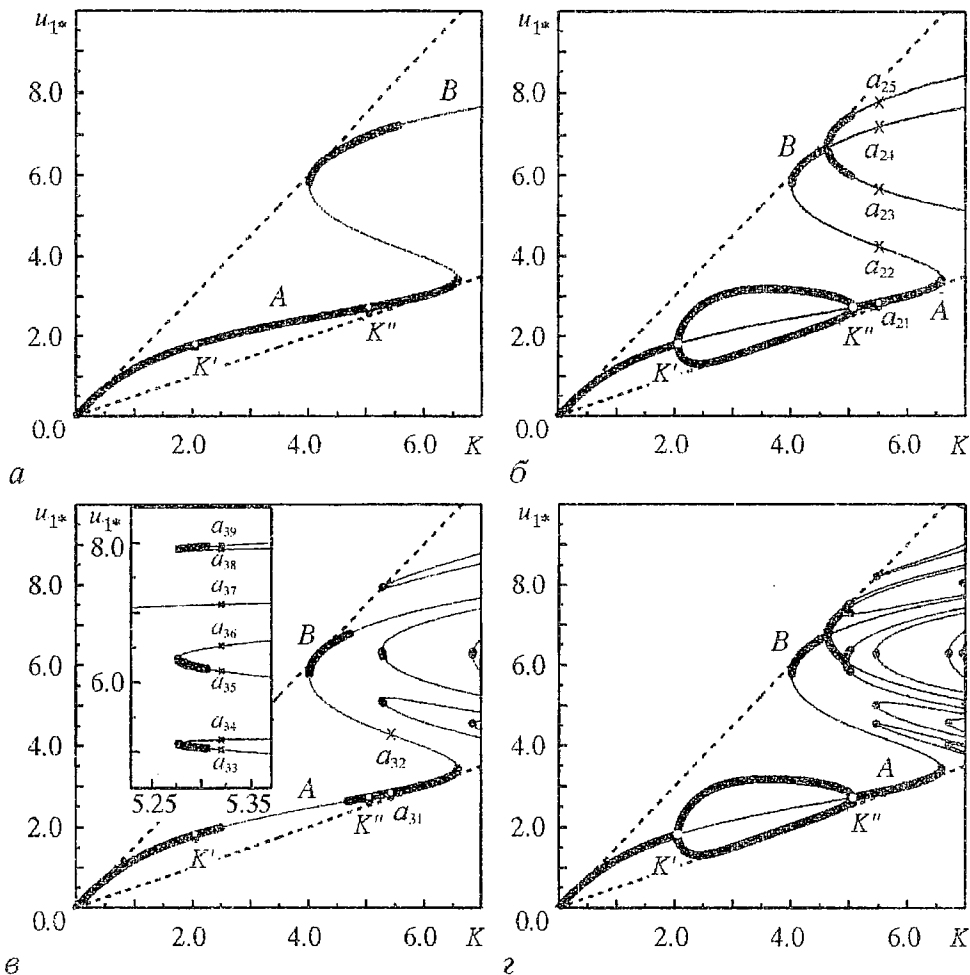


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы (на плоскости: стационарное решение – параметр нелинейности) при запаздывании  $v=1$  для различных углов поворота поля  $\Delta=2\pi/N$ :  $a - N=1$ ,  $б - N=2$ ,  $в - N=3$ ,  $г - N=4$ . Более жирными линиями показаны устойчивые участки ветвей. Видность  $\gamma=0.5$ . При  $v=0$  диаграммы  $a, б$  по форме совпадают с приведенными в работе [4]

генерируется структура типа моностабильность. Действие запаздывания  $v$  выражается в появлении неустойчивых состояний на нижних ветвях  $A$  при значениях величины  $v=3.02$  для числа уравнений  $N=1$  и  $v=0.44$  для  $N=3$ . Зато при  $N=5$  такие состояния существуют даже при отсутствии запаздывания ( $v=0$ ). Расстояние вдоль оси  $K$  между возникшей таким образом парой бифуркаций устойчивости увеличивается с ростом  $v$ . Этот рост ограничен значениями  $K'=2.05$  и  $K''=5.07$ , приближение к которым бифуркационного параметра  $K$  происходит асимптотически с увеличением  $v$ . Значениям  $K'$  и  $K''$  соответствует величина коэффициента  $C=1.00$  на рис. 3.

Установлено, что для углов поворота поля  $\Delta=2\pi$  и  $\Delta=2\pi/3$  потеря устойчивости стационарного состояния сопровождается возникновением устойчивого предельного цикла, то есть имеет место бифуркация Андронова – Хопфа [15]. С увеличением бифуркационного параметра  $K$  на нижней ветви  $A$  имеет место лишь периодическое движение без бифуркаций удвоения периода.

Аналогичные переходы от стационарного состояния к предельному циклу (бифуркация Андронова – Хопфа) и обратно наблюдаются также на участках диаграммы  $B$  для угла поворота оптического поля  $\Delta=2\pi/3$  (см. рис. 4, в), расположен-



ной выше ветви  $A$  и соответствующей тому же типу состояния, когда все  $u_i$  одинаковы. Однако здесь с увеличением бифуркационного параметра  $K$  появляется последовательность бифуркаций удвоения периода. Кроме того, на ветви  $B$  наблюдаются окна периодичности, то есть появляются более простые периодические движения. Поэтому можно констатировать, что с переходом на ветвь  $B$  бифуркационной диаграммы характер динамики усложняется.

Рассмотрим вид бифуркационных диаграмм для углов поворота  $\Delta=\pi$  (см. рис. 4, б) и  $\Delta=\pi/2$  (см. рис. 4, з), соответствующих значениям  $N=2$  и  $N=4$ . Отметим, что на каждой из них нижняя ветвь  $A$  теряет устойчивость независимо от величины запаздывания  $\nu$ : при  $K=K'=2.05$  происходит возникновение петли бистабильности. При  $K=K''=5.07$  бистабильность исчезает: ветвь  $A$  снова становится устойчивой. Таким образом, значения  $K'=2.05$  и  $K''=5.07$  соответствуют для нечетных  $N$  парам бифуркаций потери устойчивости при  $\nu \rightarrow \infty$ , а для четных  $N$  – возникновению и исчезновению петли бистабильности независимо от запаздывания  $\nu$ . Сама петля бистабильности всегда устойчива, так как для всех ее точек задаваемая формулой (6) величина  $|C| < 1$ .

Согласно вышесказанному множество стационарных состояний нелинейного фазового набег в случае угла поворота оптического поля  $\Delta=\pi/2$  включает в себя множество стационарных состояний фазового набег, соответствующих углам поворота  $\Delta=2\pi$  и  $\Delta=\pi$ . В этом нетрудно убедиться, сопоставляя структуру всех ветвей бифуркационных диаграмм на рис. 4. При отсутствии запаздывания вид диаграммы при  $\Delta=\pi$  совпадает с бифуркационной диаграммой этого случая, исследованного в книге [4]. Для углов поворота  $\Delta=\pi$  неустойчивые состояния «окаймлены» (в направлении оси  $u$ ) парой устойчивых состояний. Это позволяет заключить, что при  $\Delta=\pi$  (в отсутствие запаздывания) система с течением времени неизбежно сходится к стационарному устойчивому состоянию. При наличии запаздывания «окаймляющие» устойчивые состояния могут утратить свою устойчивость, что делает возможным появление предельных циклов или более сложных типов движения. Их детальное изучение предполагает построение фазовых портретов и вычисление временных фурье-спектров.

#### 4. Фазовые портреты и особенности временных фурье-спектров

Для идентификации и изучения нестационарных состояний нелинейного фазового набег на рис. 5 были построены фазовые портреты на плоскости  $(u_1, u_2)$  и вычислены временные фурье-спектры указанных процессов.

Обращаясь к ним, будем комментировать обсуждавшиеся ранее бифуркационные диаграммы. Как уже указывалось, ветвь  $B$  соответствует более сложным видам движения, чем ветвь  $A$ . Чтобы продемонстрировать это обстоятельство и одновременно влияние нелинейности, а также угла поворота поля, на рис. 5 построено пять серий фазовых портретов, соответствующие значениям  $\Delta=\pi/2$  ( $N=4$ ),  $\Delta=2\pi/3$  ( $N=3$ ),  $\Delta=\pi$  ( $N=2$ ),  $\Delta=2\pi/3$  ( $N=3$ ),  $\Delta=\pi/2$  ( $N=4$ ) для различных величин параметра нелинейности  $K$ . Структура рис. 5 свидетельствует о том, что динамика нелинейного фазового набег в кольцевом интерферометре включает в себя бифуркацию удвоения периода. С уменьшением угла поворота  $\Delta$  диапазон значений  $K$ , внутри которого сохраняется определенный тип предельного цикла, существенно сокращается. Число Фейгенбаума (4.6692), оцененное разными методами по второй, третьей, четвертой бифуркациям, составляет приблизительно 4.50. При увеличении параметра нелинейности последовательность бифуркаций удвоения периода приводит к более сложной динамике тем быстрее, чем меньше угол  $\Delta$  (см. рис. 5). Две нижние строки фазовых портретов на рис. 5 позволяют сравнить влияние на их вид значения  $N$  при прочих одинаковых

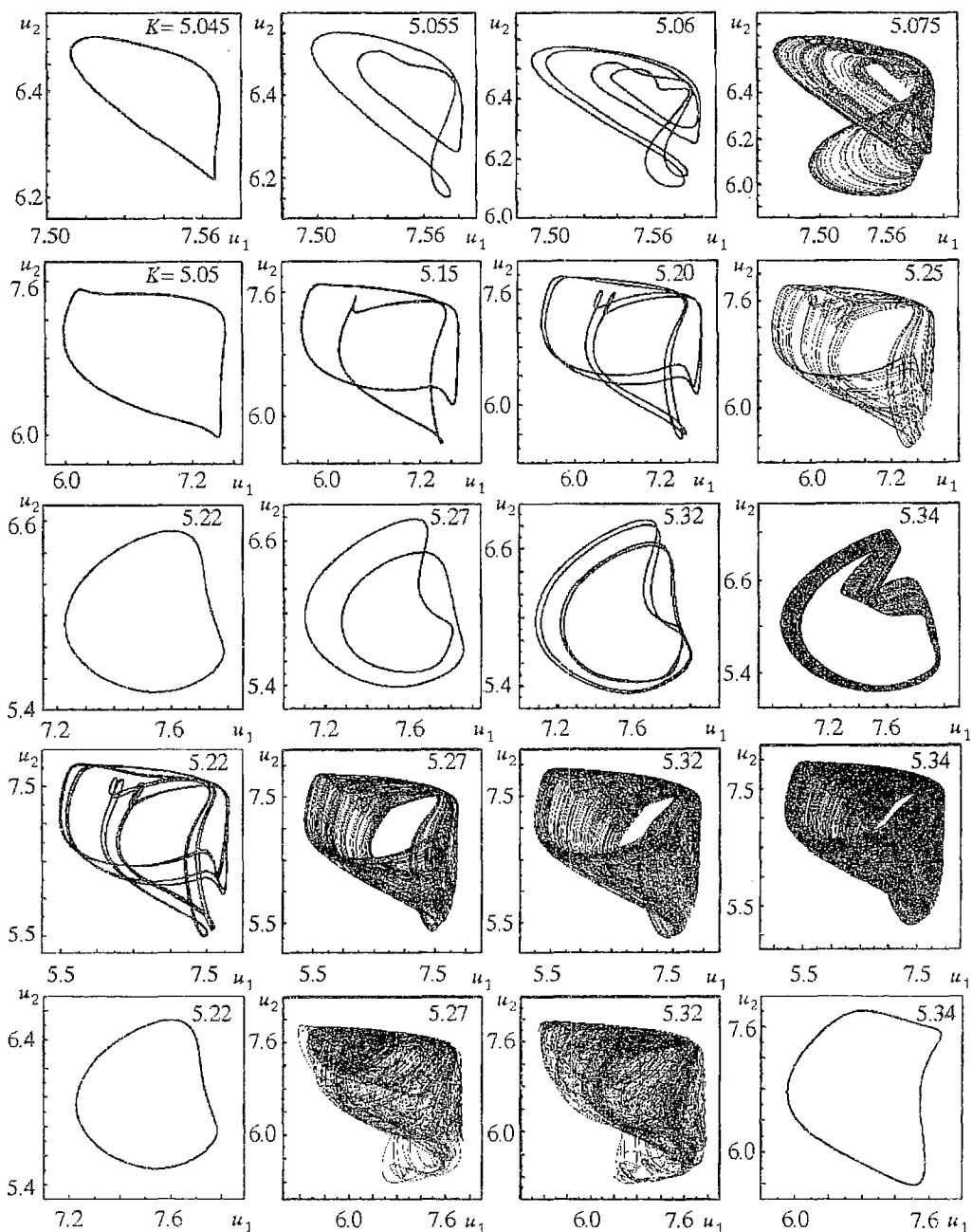


Рис. 5. Серии проекций фазовых портретов, полученных как результат решения уравнений (1) для  $N=4$  – первая и пятая строки,  $N=3$  – вторая и четвертая строки,  $N=2$  – третья строка. Первая, вторая, третья строки демонстрируют наступление бифуркации удвоения периода при различном уровне нелинейности. Третья, четвертая, пятая строки отражают влияние угла поворота поля при прочих равных условиях. Видность  $\gamma=0.5$

параметрах. Несмотря на тенденцию к усложнению структуры фазовых портретов, с увеличением параметра  $K$  и числа  $N$  имеют место «окна» периодичности, характерные и для многих других нелинейных систем. На рис. 5 окну периодичности соответствуют левый и правый нижние фазовые портреты, построенные для  $N=4$ .

Выяснить особенности сложного движения помогают взятые в совокупности бифуркационные диаграммы, фазовые портреты и фурье-спектры на рис. 6,

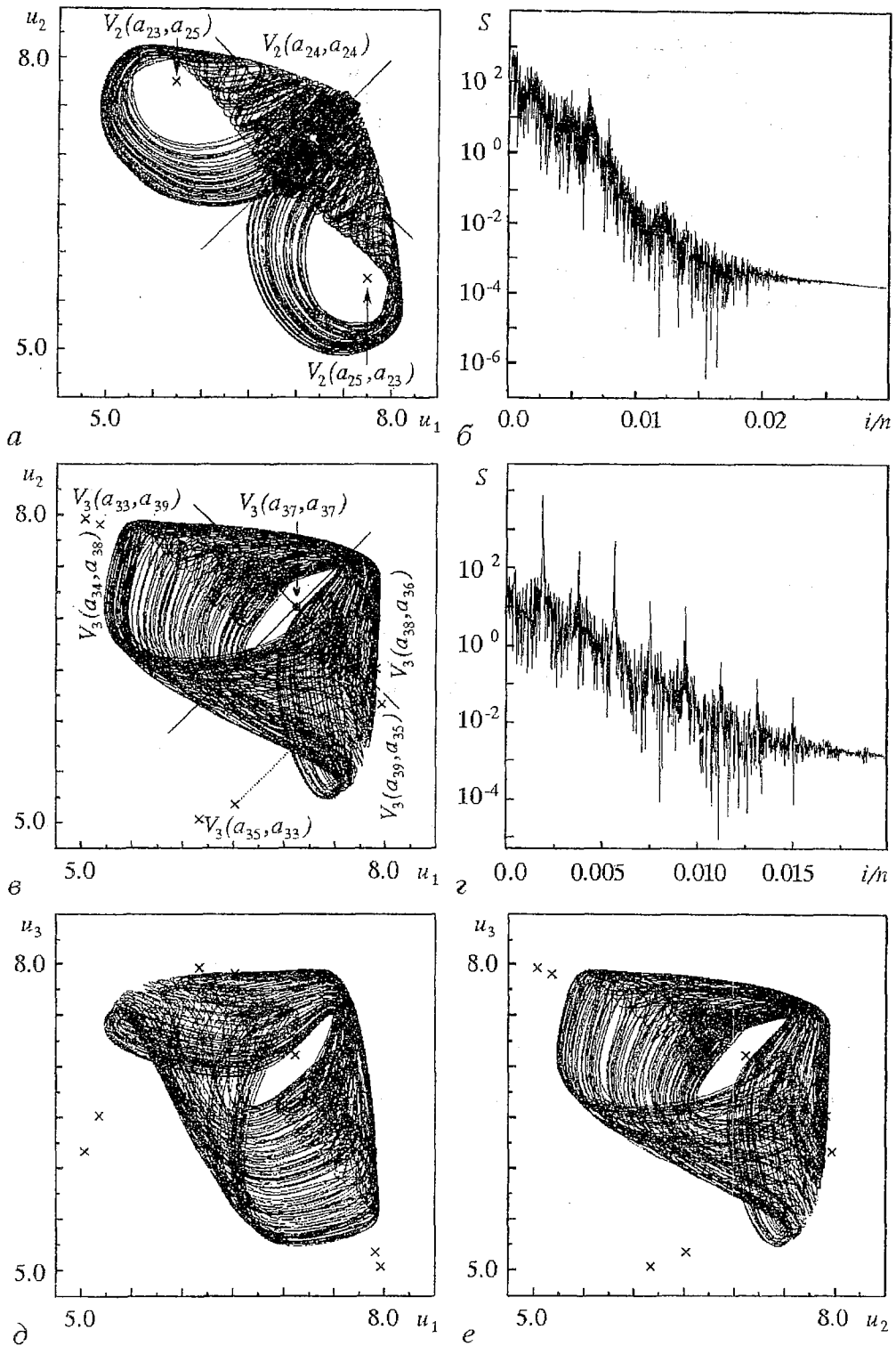


Рис. 6. Проекция фазовых портретов  $a, б, в, д, е$  и энергетические фурье-спектры  $б, г$  процессов изменения нелинейного фазового набегу  $u_j$  при различных углах поворота поля и параметрах нелинейности:  $a, б - N=2, K=5.45$ ;  $в - e - N=3, K=5.32$ . Точки  $V_j$ , отмеченные «крестиками», показывают стационарные неустойчивые состояния  $a_{ji}$  на соответствующих бифуркационных диаграммах (см. рис. 4, б, в)

с

соответствующие различным углам  $\Delta$  и значениям  $K$ . В литературе принято судить о степени хаотичности движения по наличию/отсутствию ярко выраженных узких пиков (максимумов) в спектре частот. Если движение периодически, то его фурье-спектр имеет ряд узких пиков. С приближением к хаотическому режиму в спектре появляется непрерывное распределение частот [16]. Если руководствоваться этими признаками, то можно заключить, что хаотизацию вызывает как рост параметра нелинейности  $K$ , так и уменьшение угла поворота  $\Delta$ , то есть увеличение  $N$  (см. рис. 5).

При анализе сложного движения целесообразно сопоставить строение фазового портрета с положением стационарных точек на ветвях бифуркационной диаграммы. Для этого выберем случаи поворота оптического поля на углы  $\Delta=\pi$  и  $\Delta=2\pi/3$  в контуре обратной связи интерферометра. Зададимся начальными условиями, лежащими на бифуркационных диаграммах (см. рис. 4, б, в) выше точек, обозначенных  $a_{22}$ ,  $a_{32}$ , соответственно. Точки лежат на границах, отделяющих различные динамические режимы: с устойчивой стационарной точкой  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  и нерегулярный. Как показали вычислительные эксперименты, сложный тип динамики имеет место при значениях бифуркационного параметра  $K=5.45$  (см. рис. 6, а) и  $K=5.32$  (см. рис. 6, в). Неустойчивым состояниям при  $K=5.45$  на рис. 4, б отвечают точки, обозначенные  $a_{22}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{25}$ , а неустойчивым состояниям при  $K=5.32$  на рис. 4, в – точки  $a_{32}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{35}$ ,  $a_{36}$ ,  $a_{37}$ ,  $a_{38}$ ,  $a_{39}$ .

На фазовых портретах (см. рис. 6, а, в, д, е) точки  $V_j$ , отмеченные «крестиками», показывают стационарные неустойчивые состояния, взятые с соответствующих бифуркационных диаграмм (см. рис. 4, б, в). Например, помеченные «крестиками» точки  $V_2$  на фазовом портрете (см. рис. 6, а) имеют координаты точек на неустойчивых ветвях диаграммы (см. рис. 4, б). Строение траекторий на фазовом портрете (см. рис. 6, а) приводит к выводу, что движение динамической системы происходит вокруг пары зеркально-симметричных точек  $V_2(a_{23}, a_{25})$ ,  $V_2(a_{25}, a_{23})$ , а также вдоль биссектрисы прямого угла  $(u_1, u_2)$ , делящей портрет на две зеркально-симметричные части.

Аналогичным образом, обозначенные «крестиками» точки  $V_3$  на фазовом портрете (см. рис. 6, в) имеют координаты точек на неустойчивых ветвях диаграммы (см. рис. 4, в). Строение траекторий на трех проекциях трехмерного фазового портрета (см. рис. 6, в, д, е) приводит к следующим выводам. Во-первых, движение динамической системы происходит во всех трех плоскостях вокруг «центральной» точки  $V_3(a_{37}, a_{37})$ , лежащей на биссектрисе трехгранного угла. Во-вторых, наличие неустойчивых стационарных точек, расположенных вне фазового портрета, влияет на его внешнюю конфигурацию и внутреннее строение. В-третьих, можно предположить, что через неустойчивые стационарные точки  $V_3(a_{34}, a_{36})$  и  $V_3(a_{38}, a_{36})$  проходит прямая, параллельная биссектрисе трехгранного угла. Эта прямая (изображена пунктиром на рис. 6, в) определяет на фазовом портрете точку, над и под которой проходит граничная траектория, совершающая петлю в фазовом пространстве.

## 5. Обсуждение результатов

Таким образом, в статье в рамках модели (1), предполагающей пренебрежимо малую роль диффузии молекул нелинейной (жидкокристаллической) среды и дифракции лазерного пучка, исследовано влияние на динамику процессов в кольцевом интерферометре нелинейности, запаздывания в контуре обратной связи, угла поворота оптического поля в поперечной плоскости лазерного пучка как по отдельности, так и в совокупности. С этой целью изучены свойства стационарных уравнений (2), найдены области устойчивости решений, построены семейства бифуркационных диаграмм и фазовых портретов, рассчитаны временные фурье-спектры процессов со сложной динамикой.

Стационарные состояния  $u_{j*}$  динамической системы, описываемой системой (1), являются решениями уравнений (2), инвариантных относительно циклической перестановки переменных  $u_{j*}$  (см. рис. 2). В ходе изучения устойчивости стационарных состояний получено характеристическое уравнение (5), учитывающее как запаздывание, так и поворот оптического поля в контуре обратной связи интерферометра. При отсутствии поворота уравнение (5) сводится к характеристическому уравнению, полученному Икедой [5]. Без запаздывания, но при достаточно сильной нелинейности утрата устойчивости становится возможной вследствие поворота оптического поля: на угол  $\Delta=2\pi/3$  ( $N=3$ , что соответствует трехмерному фазовому пространству), на  $\Delta=\pi/2$  ( $N=4$ , что соответствует четырехмерному пространству) и менее (см. рис. 3). Данный вывод подтверждают как натурные [4], так и вычислительные [10] эксперименты. Если же параметр нелинейности не выходит за определенные границы, то устойчивость стационарных решений уравнений (2) сохраняется при любых значениях запаздывания  $\nu$  и сколь угодно малых углах поворота, то есть при любых  $N$  (см. рис. 3).

С увеличением времени запаздывания в интерферометре вид бифуркационных диаграмм (на плоскости: стационарные решения уравнений (2) – параметр нелинейности  $K$ ) преобразуется – число устойчивых стационарных состояний сокращается, а интервалы значений  $K$ , при которых стационарные состояния неустойчивы, расширяются. Структура бифуркационных диаграмм изменяется также и с уменьшением угла поворота поля в поперечной плоскости пучка, то есть с ростом числа  $N$ , но по-разному для нечетных и четных чисел  $N$ . При углах поворота, которым соответствуют нечетные  $N$ , влияние запаздывания заключается в появлении неустойчивых состояний на нижней ветви диаграмм. (При достаточно больших  $N$  эти неустойчивые состояния имеют место даже без запаздывания.) Интервал значений  $K$ , определяемый парой бифуркаций устойчивости, увеличивается с ростом времени запаздывания, и его пределы составляют величины  $K'=2.05$  и  $K''=5.07$ . Для углов поворота поля  $\Delta=2\pi$  ( $N=1$ ) и  $\Delta=2\pi/3$  ( $N=3$ ) потеря устойчивости стационарного состояния (в зависимости от бифуркационного параметра  $K$ ) сопровождается бифуркацией Андронова – Хопфа. С увеличением бифуркационного параметра  $K$  на нижней ветви имеет место лишь периодическое движение без бифуркаций удвоения периода. На верхней ветви диаграмм с увеличением бифуркационного параметра  $K$  появляется последовательность бифуркаций удвоения периода и, кроме того, имеются окна периодичности (см. рис. 4, а, в). Для углов поворота  $\Delta=\pi$  (см. рис. 4, б) и  $\Delta=\pi/2$  (см. рис. 4, г), соответствующих четным значениям  $N=2$  и  $N=4$ , нижняя ветвь бифуркационных диаграмм теряет устойчивость (независимо от величины запаздывания) в некотором интервале величин параметра  $K$ , внутри которого имеет место петля бистабильности. Но здесь границы интервала  $K'$  и  $K''$  не зависят от времени запаздывания  $\nu$ . При отсутствии запаздывания вид диаграммы для  $\Delta=\pi$  такой же, что и в книге [4].

Построена «матрица» проекций фазовых портретов для различных значений  $K$  и  $N$  при времени запаздывания равно времени релаксации (см. рис. 5). Число Фейгенбаума (4.6692), оцененное по нескольким бифуркациям, составляет 4.50. При увеличении параметра нелинейности  $K$  последовательность бифуркаций удвоения периода приводит к более сложной динамике тем быстрее, чем меньше угол поворота поля  $\Delta$ .

Показано, как строение фазовых портретов для  $N=2$ ,  $N=3$  (см. рис. 6, а, в, д, е) связано с положением стационарных точек на ветвях бифуркационной диаграммы (см. рис. 4). Такой прием представляется достаточно эффективным для выяснения закономерностей сложной динамики, зависящей от ряда параметров системы.

## Заключение

Итак, совместное рассмотрение бифуркационных диаграмм, формы фазовых портретов и рассчитанных временных фурье–спектров приводит к выводу, что наличие запаздывания в интерферометре влечет усложнение динамики нелинейного фазового набега. Без запаздывания, но при прочих равных условиях система со временем сходится к устойчивым стационарным точкам [10].

## Библиографический список

1. *Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu., Larichev A.V., and Zheleznykh N.I.* Controlling transverse–wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1992. Vol. 9, № 1. P. 78.
2. *Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю.* Волновые образования в кольцевых нейронных системах // *Математическое моделирование.* 1997. Т. 9, № 3. С. 29.
3. *Рыскин Н.М., Титов В.Н.* О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Т.6, № 1. С. 75.
4. Новые физические принципы оптической обработки информации: Сб.ст. / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 13; 263.
5. *Гиббс Х.* Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. М.: Мир, 1988. 520 с.
6. *Кузнецов А.П.* Через экран компьютера – в мир нелинейной динамики // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Т.6, № 5. С. 89.
7. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. С. 370.
8. *Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н.* Бифуркационная диаграмма в случае кольцевого интерферометра с жидким кристаллом: влияние диффузии // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Т.6, № 2. С. 65.
9. *Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н.* Тройка керровских сред в кольцевом интерферометре: роль неидентичности // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т.3, № 1. С. 20.
10. *Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н., Сабденов К.О., Тимохин А.М.* Тройка керровских сред в нелинейном интерферометре: факторы, влияющие на бифуркационное поведение // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Т.6, № 5. С. 56.
11. *Мышкис А.Д.* Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом // *Математическая энциклопедия: В 5 т.* М.: Сов. энциклопедия, 1979. Т. 2. С. 294.
12. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
13. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИФМЛ, 1959. 212 с.
14. *Магазинников А.Л.* Бифуркационная диаграмма стационарных состояний нелинейного оптического интерферометра с двумерной обратной связью / Ред. ж–ла «Изв. вузов. Физика». Томск, 1997. 6 с. Деп. в ВИНТИИ 01.08.97, № 2575–В97.
15. *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 366 с.
16. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.

Томский государственный  
университет

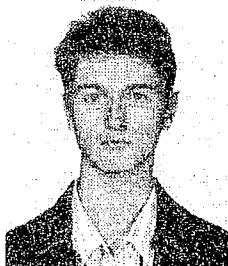
Поступила в редакцию  
после доработки

25.06.99  
11.10.99

## BIFURCATIONS IN THE POINT MODEL OF RING INTERFEROMETER WITH DELAY AND FIELD TURN

*I.V. Izmailov, V.T. Kalaida, A.L. Magazinnikov, B.N. Poizner*

System of the ordinary differential equations with retarded argument and nonlinearity in the form of cosine function serves as the mathematical model of optical structures generation in nonlinear ring interferometer. Computation of stability domains boundaries (in plane: delay – nonlinearity) extended of Ikeda results is performed. Based on the bifurcation diagrams, phase patterns, Fourier spectrums analysis of dynamics features under various conditions is realized. Simple way of the bifurcation diagrams and phase patterns joint interpretation is showed. Types of bifurcations are identified depending on nonlinearity and turn of optical field under delay in the interferometer.



*Измайлов Игорь Валерьевич* – родился в Алма-Ате (1976). Поступил в Томский государственный университет (1993). В настоящее время является студентом (магистрантом) шестого курса радиофизического факультета кафедры квантовой электроники и фотоники. Область научных интересов: моделирование процессов в системах различной природы, применение нелинейной динамики для обработки и передачи информации.



*Калайда Владимир Тимофеевич* – родился в Хабаровске (1949). В 1972 году окончил факультет прикладной математики томского государственного университета и физико-технический факультет томского политехнического института. Защитил диссертацию (1979) на соискание ученой степени кандидата технических наук. Область научных интересов – применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях. Имеет около 80 публикаций. В настоящее время – докторант ТГУ.

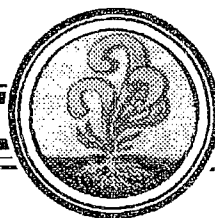


*Магазинников Антон Леонидович* – родился в 1974 году в Томске. Окончил с отличием радиофизический факультет ТГУ (1997). В настоящее время является аспирантом кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Области научных интересов: оптическая синергетика, моделирование процессов оптического формообразования. Автор нескольких работ по данной тематике.



*Пойзнер Борис Николаевич* – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучающего»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.

E-mail: pznr.rff@elefot.tsu.ru



**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
АВТОМОДУЛЯЦИОННЫХ РЕЖИМОВ ГЕНЕРАЦИИ  
3-САНТИМЕТРОВОЙ ЛОВ  
С МЕГАВАТТНЫМ УРОВНЕМ МОЩНОСТИ\***

*Н.С. Гинзбург, Н.И. Зайцев, Е.В. Иляков,  
И.С. Кулагин, Ю.В. Новожилова, А.С. Сергеев*

Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований автомодуляционных режимов генерации в ЛОВ мегаваттного уровня мощности с электродинамической системой в виде слабоффрированного волновода. Бифуркационные значения токов, при которых имело место самовозбуждение колебаний, переход к режиму синусоидальной, а затем и глубокой автомодуляции в виде последовательности пиков, находились в хорошем соответствии с результатами моделирования. Упрощение режима генерации при дальнейшем повышении тока на основании результатов моделирования объясняется влиянием высокочастотного пространственного заряда.

### **Введение**

Многочастотная динамика генераторов обратной волны была впервые исследована теоретически в работах [1,2], где было показано, что по мере превышения тока над стартовым значением режим стационарной одночастотной генерации сменяется режимом периодической автомодуляции, которая вначале носит синусоидальный характер, а затем приобретает вид последовательности пиков. При дальнейшем увеличении тока форма сигнала усложняется, теряет периодичность, и режим генерации становится стохастическим. Для специально разработанных макетов нерелятивистских ЛОВ с уровнем мощности десятки милливатт результаты экспериментальных наблюдений указанной последовательности бифуркаций приведены в [3,4].

Очевидно, эффекты автомодуляции могут представлять непосредственный практический интерес в связи с возможностью генерации периодически модулированных или шумоподобных сигналов. Это обстоятельство обуславливает важность ведущихся в настоящее время исследований нестационарных процессов в ЛОВ [5,6]. Экспериментальные исследования эффектов автомодуляции в ЛОВ мегаваттного уровня мощности были начаты в ИПФ РАН на основе микросекундного ускорителя «Сатурн» [7].

\* Статья написана по материалам доклада на XI Международной школе по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 2–6 марта 1999 года



В работе [5] были проведены первые экспериментальные наблюдения автомодуляционных режимов генерации в мощной ЛОВ, действовавшей по традиционной для диапазона релятивистских энергий электронов схеме [8]: электродинамическая система в виде слабогфрированного волновода с закритическим сужением на катодном конце и выводом излучения в сторону коллектора электронов. Для наблюдения автомодуляционных режимов генерации длина рабочего пространства была увеличена примерно в полтора раза по сравнению с прототипом, в котором был реализован стационарный режим генерации. Чтобы избежать проблем, обусловленных конкуренцией мод, поперечные размеры гофрированного волновода были выбраны так, чтобы электронный пучок мог взаимодействовать лишь с низшей модой  $H_{11}$ . Рабочая точка оказалась при этом в зоне малых групповых скоростей рабочей моды, что, с одной стороны, обеспечивало повышенный импеданс связи и облегчало получение автомодуляционных режимов, а с другой – затрудняло вывод энергии СВЧ-излучения из рабочего пространства и повышало риск возникновения отражений волны от выходного конца рабочего пространства. В итоге эти особенности расположения рабочей точки привели к повышенному уровню СВЧ-полей, поэтому выходная мощность ЛОВ оказалась ограниченной СВЧ-пробоями на уровне примерно 50–100 кВт при длительности импульса 10 мкс [5].

В настоящей статье представлен очередной этап этой работы, целью которого было получение автомодуляционных режимов при мегаваттном уровне средней выходной мощности. В новом варианте ЛОВ превышение рабочего тока над стартовым, достаточное для получения автомодуляционных режимов, обеспечивалось выбором сильно связанной с электронным пучком моды  $E_{01}$ , а выходная мощность при отсутствии пробоев – высокой групповой скоростью рабочей моды, облегчавшей вывод генерируемого излучения из рабочего пространства. Результаты анализа конкуренции мод, различающихся поперечным индексом, в ЛОВ, приведенные в работе [9], показали возможность реализации автомодуляционного режима генерации на одной из мод при нелинейном подавлении генерации другой моды и, следовательно, обеспечили определенную свободу в выборе рабочей точки на дисперсионной диаграмме.

В разделе 1 настоящей работы моделирование автомодуляционных режимов проведено на основе подхода, описывающего эволюцию медленно меняющейся (в масштабе несущей частоты) амплитуды поля [1,2]. В разделе 2 приводятся результаты экспериментального наблюдения автомодуляционных режимов в ЛОВ на моде  $E_{01}$ . Показано, что эти результаты достаточно хорошо соответствуют результатам моделирования.

## 1. Численное моделирование нестационарных процессов в ЛОВ

Рассмотрим модель ЛОВ с отрезком осесимметричного слабогфрированного волновода в качестве электродинамической системы, возбуждаемую тонким трубчатым электронным пучком. Предварительное моделирование многочастотных процессов в ЛОВ-генераторе можно провести на основе самосогласованной системы уравнений, состоящей из уравнения, описывающего эволюцию амплитуды поля [1,2]

$$\partial A / \partial \tau - \partial A / \partial \zeta = -J / \pi \int_0^{2\pi} \exp(-i\vartheta) d\vartheta_0, \quad (1)$$

и релятивистских уравнений движения электронов с учетом собственного поля пространственного заряда пучка

$$\partial \vartheta / \partial \zeta = 1 / (1 - \gamma^2)^{1/2} - 1 / (1 - \gamma_0^2)^{1/2}, \quad (2)$$

$$\partial \gamma / \partial \zeta = \operatorname{Re}[A(\zeta, \tau) \exp(i\vartheta) + i\sigma \sum_n f_n \rho_n \exp(in\vartheta)]. \quad (3)$$

Здесь  $A=eE_z/(mc\omega)$  – безразмерная амплитуда синхронной (-1)-й гармоники поля излучения;  $\tau=\omega(t-z/v_0)/(1/\beta_0+1/\beta_{гр})$  и  $\zeta=\omega z/c$  – безразмерные время и продольная координата;  $\vartheta=\omega t-lz$  – фаза электрона относительно синхронной гармоники поля;  $J=eI/Z/(2\beta_0^2mc^2)$ ,  $Z$  – сопротивление связи для этой гармоники [10],  $I$  – ток пучка;  $\gamma$  – релятивистский масс-фактор электронов;  $\omega$  – частота точного синхронизма;  $v_0=\beta_0c$  – начальная поступательная скорость электронов;  $v_{гр}=\beta_{гр}c$  – групповая скорость волны;  $\sigma=Ie/(mc^3)gc^2/(\omega^2b)$  – параметр пространственного заряда;

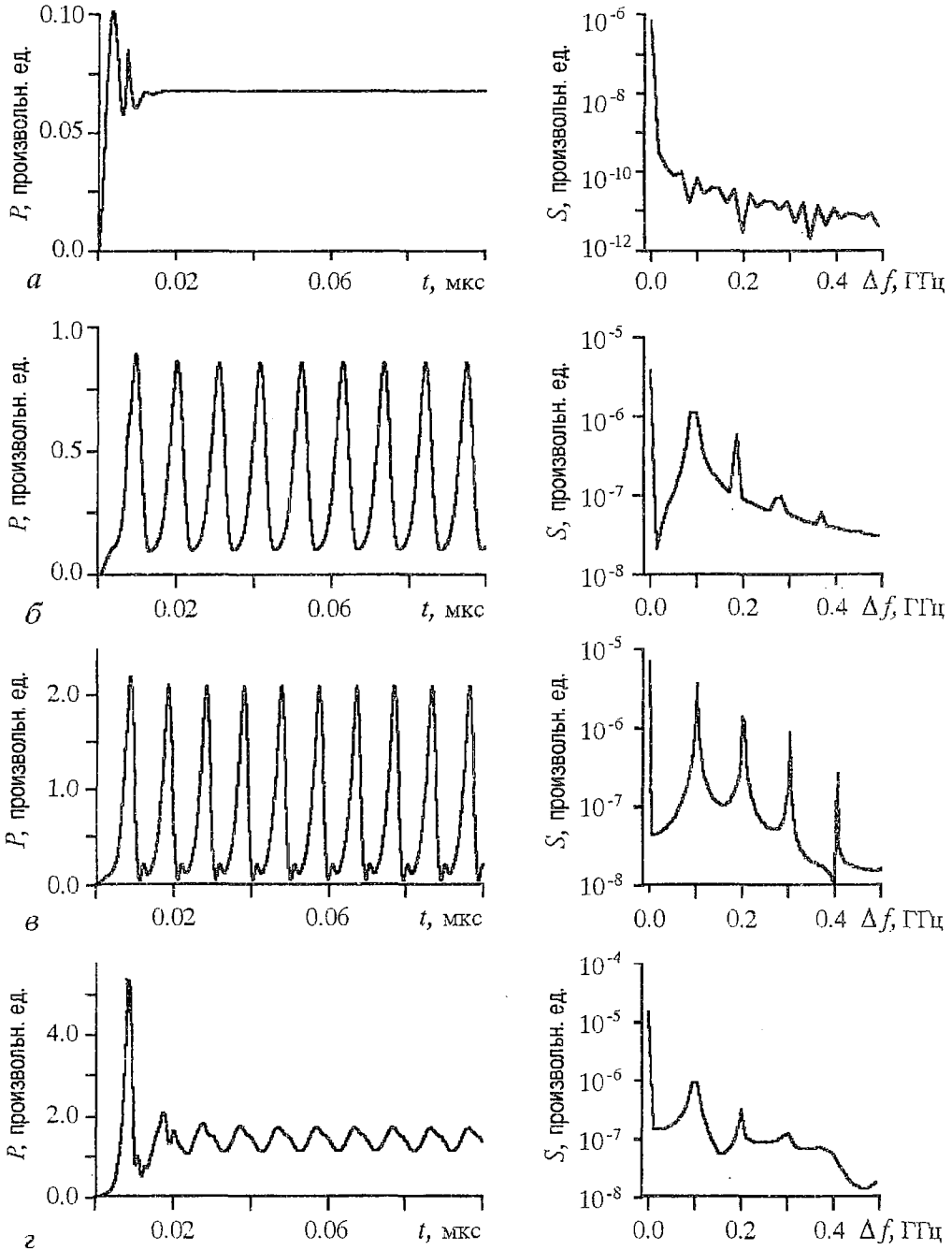


Рис. 1. Результаты моделирования нестационарных процессов в ЛОВ с длиной 41.5 см, импедансом связи 0.9 Ом и энергией частиц  $\gamma_0=1.3$ . Зависимость от времени мощности излучения и спектры квадрата амплитуды выходного сигнала в произвольных единицах при различных токах  $I$ : а – 7 А, б – 18 А, в – 27 А, г – 50 А

$f_n = 1 - \exp[-2gn(a-b)]$  – коэффициент редукции  $n$ -й гармоники поля пространствен-

ного заряда;  $g = [(\omega/v_0)^2 - (\omega/c)^2]^{1/2}$  – поперечное волновое число;  $\rho_n = 1/\pi \int_0^{2\pi} \exp(-in\vartheta) d\vartheta$  –  $n$ -я гармоника плотности пространственного заряда;  $a$  – средний радиус волновода;  $b$  – радиус электронного пучка. Коэффициент редукции  $f_n$  найден для приближенной модели, в которой не учитываем гофрировку стенки волновода, а также при выполнении условия  $a-b \ll a$  пренебрегаем кривизной стенки волновода и электронного пучка. Граничные и начальные условия к уравнениям (1)–(3) имеют вид

$$A|_{\zeta=l} = 0, \quad A|_{\tau=0} = A_0(\zeta), \quad \vartheta|_{\zeta=0} = \vartheta_0 \in (0, 2\pi), \quad \gamma|_{\zeta=0} = \gamma_0, \quad (4)$$

где  $l$  – безразмерная длина пространства взаимодействия.

Численное моделирование уравнений (1)–(3) проводилось при различных значениях тока пучка для лампы с параметрами, близкими к реализуемым в эксперименте. Длина пространства взаимодействия составляла 41.5 см, средний радиус волновода примерно 1.4 см, период гофрировки 1.7 см, радиус электронного пучка 0.9 см, энергия электронов 150 кэВ. Сопротивление связи и стартовый ток были рассчитаны для заданной геометрии электродинамической системы на основе результатов работы [10]. На рабочей частоте 8.7 ГГц для моды  $E_{01}$  стартовый ток составил 6 А при сопротивлении связи 0.9 Ом. При моделировании учитывались первые четыре гармоники поля пространственного заряда. Учет следующих гармоник давал незначительные поправки к численному моделированию.

На рис. 1 приведены временные зависимости выходной мощности излучения, а также спектры квадрата амплитуды выходного сигнала для различных значений тока пучка. На рис. 1, а показан пример установления стационарного режима генерации при величине тока  $I=7$  А. По мере увеличения тока реализуются автомодуляционные режимы генерации с усложняющимся характером модуляции и спектром. Так, при токе 18 А автомодуляция близка к синусоидальной (рис. 1, б), а при токе 27 А приобретает вид периодической последовательности пиков (рис. 1, в). Важно подчеркнуть, что при дальнейшем повышении тока и заданном сопротивлении связи возникает подавление автомодуляции, обусловленное влиянием пространственного заряда (ср. с [2,11]). Как видно из сравнения рис. 1, в, г, при токе  $I=50$  А автомодуляция носит менее выраженный характер, чем при токе  $I=27$  А.

При групповой скорости волны 0.25 с и поступательной скорости электронов 0.62 с период автомодуляции составляет около 10 нс. Ширина спектра в режиме сложной автомодуляции при токе  $I=27$  А достигает 5 %.

На основе системы уравнений (1)–(3) было выполнено также численное моделирование нестационарных процессов для лампы, которая при тех же параметрах замедляющей системы имела длину 61 см, что в полтора раза превышало длину экспериментально реализованного макета. Как видно из рис. 2,

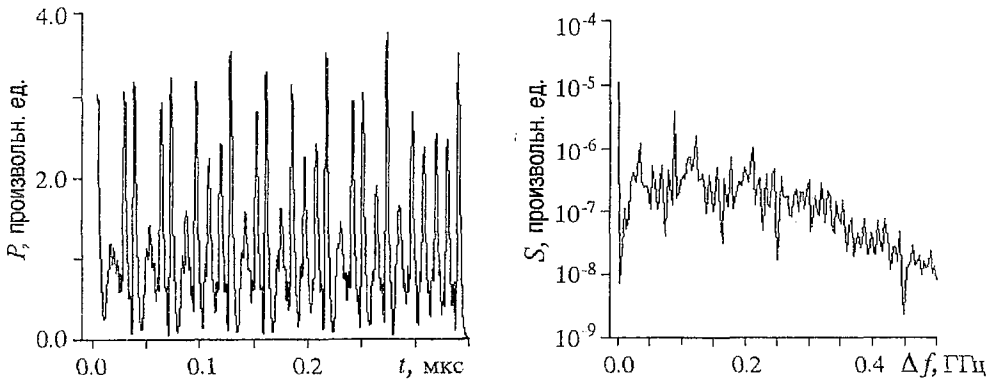


Рис. 2. Зависимость от времени мощности излучения и спектр квадрата амплитуды выходного сигнала при увеличении длины ЛОВ до 62 см. Ток инжекции  $I=40$  А. Значения  $P$  и  $S$  даны в произвольных единицах

увеличение длины позволяет достичь режима стохастической автомодуляции при токе 40 А. При этом влияние пространственного заряда оказывается менее существенным, чем для более короткой лампы.

## 2. Экспериментальное исследование автомодуляционных режимов

В качестве источника электронного пучка использовался импульсный ускоритель «Сатурн» (рис. 3) на базе магнетронно-инжекторной пушки с

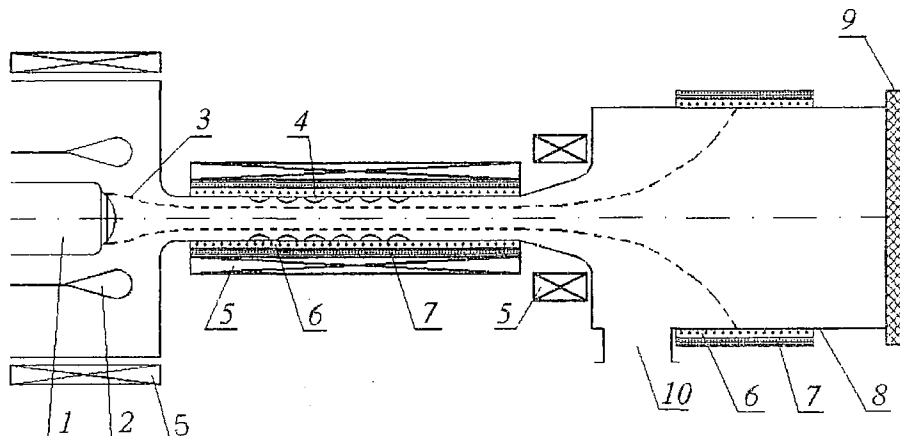


Рис. 3. Схема экспериментальной установки: 1 – катод; 2 – промежуточный анод; 3 – трубчатый электронный пучок; 4 – электродинамическая система СВЧ-прибора; 5 – соленоиды; 6 – нагреватели; 7 – тепловые экраны с водяной рубашкой; 8 – коллектор; 9 – кварцевое вакуумное окно; 10 – патрубок вакуумной откачки

термокатодом, позволяющий формировать электронный пучок с длительностью импульса несколько микросекунд. В рабочем режиме ускоряющее напряжение достигало 150 кВ, ток инжекции варьировался в пределах  $10 \div 70$  А. Термокатод работал в режиме ограничения тока пространственным зарядом, регулировка тока в необходимом диапазоне осуществлялась путем перераспределения потенциалов между элементами трехэлектродной электронной пушки. Это позволяло поддерживать малый разброс электронов по скоростям для всех значений токов.

Генерируемое излучение после прохождения вакуумного окна регистрировалось в безэховой камере. Приемный рупор располагался в максимуме диаграммы направленности моды  $E_{01}$ . Огибающая выходного сигнала регистрировалась с помощью кристаллического детектора с инерционностью не более 2 нс и цифровых осциллографов Hewlett Packard и Tektronix с периодом оцифровки не реже 1 нс, позволявших запоминать всю огибающую высокочастотного импульса для последующего просмотра отдельных его участков. Мощность выходного излучения измерялась как по калиброванному затуханию тракта, так и (для более точных измерений) по энергии в СВЧ-импульсе, измеряемой с точностью до  $\pm 10\%$  специальным калориметром [12]. Для повышения электропрочности (см. [12]) температура электродинамической системы с помощью подогревателя постоянно поддерживалась на уровне  $500^\circ\text{C}$ .

Электродинамическая система представляла собой слабофривированный осесимметричный волновод с параметрами, приведенными в разделе 1. Как следует из анализа дисперсионных характеристик, при рабочем напряжении 150 кВ в принципе могло реализоваться синхронное взаимодействие с тремя низшими волноводными модами:  $H_{11}$ ,  $E_{01}$  и  $H_{21}$  (рис. 4). На модах  $H_{11}$  и  $E_{01}$  точки синхронизма соответствовали возбуждению обратных волн, тогда как для моды  $H_{21}$  частота синхронизма близка к частоте отсечки. Стартовые токи для мод  $E_{01}$  и  $H_{11}$ , рассчитанные на основе работы [10], составили соответственно 6 А и 27 А. Для

моды  $H_{21}$  стартовый ток, вычисленный в рамках теории оротрона с нефиксированной продольной структурой поля [14], составил 13 А. Таким образом, мода  $E_{01}$  обладала более высоким сопротивлением связи и соответственно меньшим стартовым током по сравнению с другими модами. В настоящем эксперименте было зафиксировано только возбуждение рабочей моды  $E_{01}$  с центральной частотой 8.7 ГГц. Хотя для других мод в интервале рабочих токов 10÷50 А условия самовозбуждения выполнялись, по всей видимости, имело место нелинейное подавление этих мод. Это согласуется с результатами работы [9], где показано, что при достаточно сильно различающихся сопротивлениях связи нелинейная конкуренция мод приводит к установлению одномодового автомодуляционного режима, даже если пороги превышены настолько, что для каждой из мод в отдельности могли бы реализоваться автомодуляционные режимы генерации.

На рис. 5 приведены осциллограммы мощности излучения на рабочей моде, а также спектры квадрата амплитуды сигнала при различных токах инжекции и фиксированной величине напряжения на вершине импульса примерно в 150 кВ. В целом осциллограмма выходной мощности имеет достаточно сложную форму. Этот факт может быть объяснен переходами между различными динамическими режимами при изменении напряжения и, соответственно, импеданса связи, а также наличием паразитных отражений на коллекторном конце, которые, как известно, приводят к сильной зависимости выходной мощности от частоты, меняющейся с изменением напряжения [15]. Следует отметить, что при детектировании теряется информация об изменении несущей частоты с изменением напряжения, поэтому для вычисления спектра выбирался участок, где напряжение и несущая частота остаются примерно постоянными.

Как видно из приведенных осциллограмм, по мере роста тока имеет место переход от стационарного режима генерации к автомодуляционным режимам генерации. Автомодуляция при токе 18 А имеет форму, близкую к синусоидальной, а затем при токах, превышающих 25 А, усложняется и приобретает вид последовательности пиков. Величина основного периода автомодуляции (10÷11 нс), как и бифуркационные значения токов, хорошо соответствует результатам моделирования. При дальнейшем росте тока свыше 50 А происходило подавление автомодуляции. В результате автомодуляция вновь приобретала квазигармонический характер, а затем режим генерации становился близок к стационарному (см. рис. 5). В соответствии с результатами моделирования, такое поведение системы при больших токах можно объяснить влиянием поля пространственного заряда. В целом, как видно из сопоставления рис. 1 и рис. 5, экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Экспериментальные результаты характеризовались хорошей степенью повторяемости от импульса к импульсу, если не принимать во внимание участок заднего фронта импульса напряжения. Отсутствие симметрии СВЧ-импульса на переднем и заднем фронтах можно объяснить СВЧ-пробоем, вызванным бомбардировкой электродинамической системы накопленными в пучке положительными ионами. С ростом ускоряющего напряжения СВЧ-импульс еще более укорачивается, поэтому нельзя исключить, что мощность излучения в автомодуляционном режиме ограничивалась СВЧ-пробоем. Измеренная калориметрическим методом при токе инжекции 30 А и напряжении 150 кВ

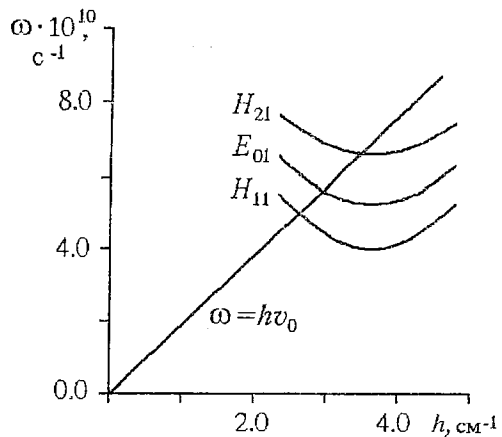


Рис. 4. Дисперсионная диаграмма ЛОВ с параметрами замедляющей системы, близкими к экспериментальным

мощность излучения в автомодуляционном режиме генерации составляла порядка 0.5 мВт, то есть электронный КПД достигал 10%.

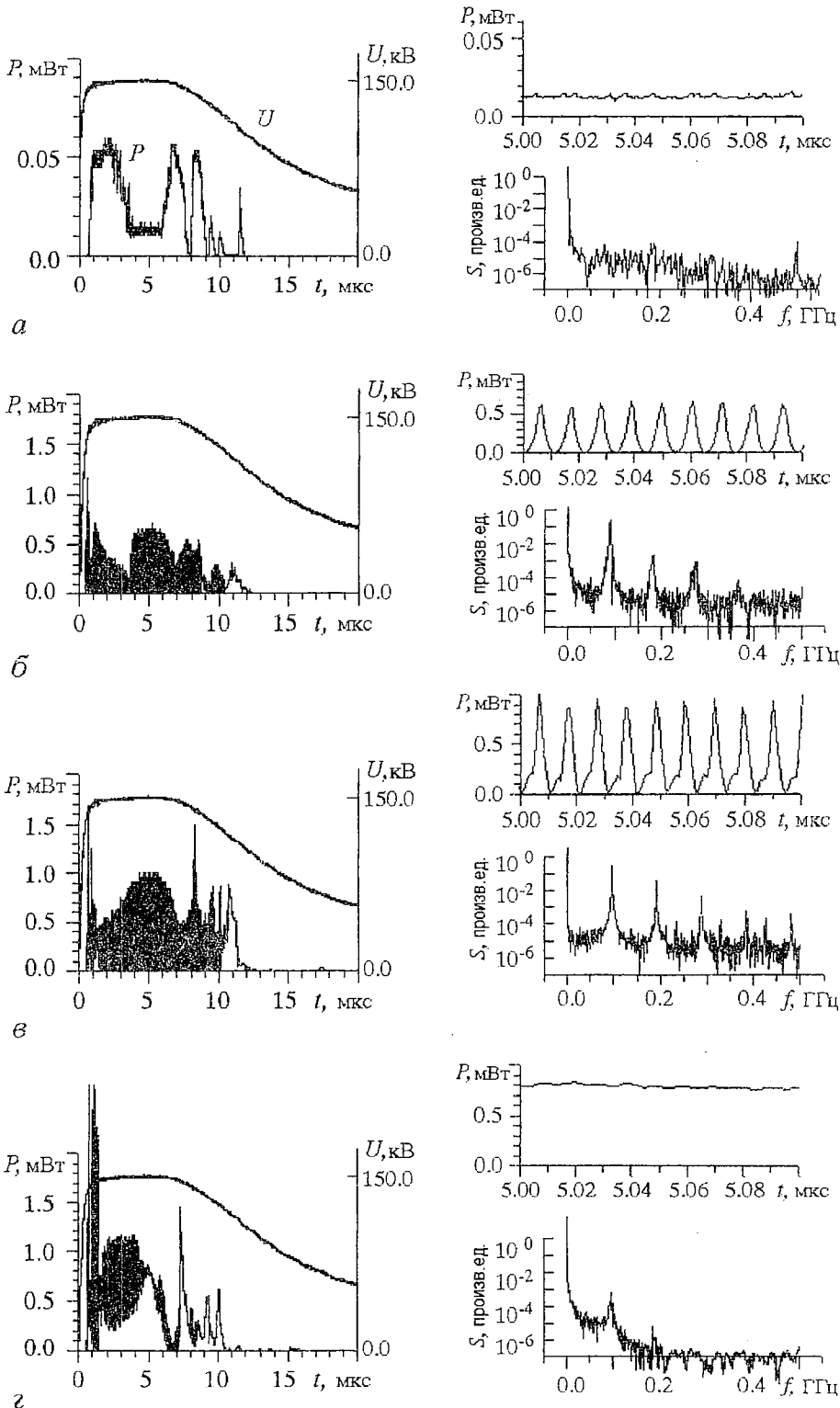


Рис. 5. Результаты эксперимента. Осциллограммы выходной мощности и спектры излучения при различных значениях тока инжекции  $I$ : *a* – 6 А, *б* – 18 А, *в* – 27 А, *г* – 53 А.

## Заключение

Таким образом, в проведенных экспериментах наблюдались автомодуляционные режимы генерации в ЛОВ с мегаваттным уровнем мощности. По мере возрастания тока пучка от 10 А до 30 А имел место переход от стационарного режима к режиму глубокой периодической автомодуляции с периодом 10 нс, что соответствует результатам моделирования. В хорошем согласии с результатами расчетов находилось значение периода автомодуляции 10 нс. Согласно экспериментальным данным и результатам моделирования, при фиксированной величине импеданса связи увеличение тока инжекции свыше 30 А вновь приводило к упрощению режима генерации, что можно объяснить влиянием пространственного заряда.

На выбранных участках временной реализации, где напряжение почти не менялось, автомодуляция в основном носила периодический характер, хотя в ряде случаев наблюдалась небольшая непериодическая вариация формы автомодуляционных пачек. Однако, как правило, такая вариация была скоррелирована с некоторой вариацией во времени ускоряющего напряжения. Следующим этапом работы должно стать наблюдение стохастических режимов автомодуляции. С этой целью планируется разработка нового макета лампы с увеличенной в полтора раза длиной пространства взаимодействия. Кроме того, использование специальных технологий, повышающих электропрочность электродинамической системы, должно способствовать увеличению рабочих напряженностей полей. Это, в свою очередь, позволит повысить рабочие напряжения, токи и, следовательно, выходную мощность. Заметим, что импеданс связи также растет с ростом напряжения. Все эти факторы должны привести к увеличению превышения над порогом в 10–12 раз при одновременном снижении степени влияния пространственного заряда. Результаты моделирования подтверждают такую возможность (см. рис.2).

Авторы признательны М.И.Петелину за полезные обсуждения.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-02-1761.*

## Библиографический список

1. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т.21, № 7. С. 1037.
2. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 101.
3. Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. // Нелинейные волны: Стохастичность и турбулентность. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 29.
4. Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное наблюдение стохастических колебаний в динамической системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т.29, № 3. С. 180.
5. Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Новожилова Ю.В., Сергеев А.С., Ткаченко А.К. Наблюдение автомодуляционных режимов генерации в мощной ЛОВ // Письма ЖТФ. 1998. Т.24, № 20. С.66.
6. Рыскин Н.М., Титов В.Н. О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6, № 1. С.75.
7. Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кораблев Г.С., Кулагин И.С., Лыгин В.К., Мовшевский Б.З., Далолихин В.И., Шмелев М.Ю. Сильноточный микросекундный электронный ускоритель с термодатодом для мощных с.-в.-ч.-приборов // Приборы и техника эксперимента. 1995. № 3. С. 138.

8. Ковалев Н.Ф., Петелин М.И., Райзер М.Д., Сморгонский А.В., Цопп Л.Э. Генерация мощных импульсов электромагнитного излучения потоком релятивистских электронов // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т.18, вып. 4. С.232.

9. Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Новожилова Ю.В., Розенталь Р.М., Сергеев А.С. Нелинейная динамика лампы обратной волны в условиях конкуренции двух мод // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т.41, № 12. С.1565.

10. Ковалев Н.Ф. Электродинамическая система ультрарелятивистской ЛОВ. // Электронная техника. Серия 1. Электроника СВЧ. 1978. № 3. С.102.

11. Безручко Б.П., Булгакова Л.Б., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических колебаний в лампе обратной волны // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. 5-я зимняя школа-семинар инженеров. Т.5. Саратов: СГУ, 1980. С.25.

12. Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Ковнеристый Ю.К., Кораблев Г.С., Кулагин И.С., Лазарева И.Ю., Цалолыхин В.И., Шульгин В.В. Калориметр для измерения энергии мощного электромагнитного импульса // Приборы и техника эксперимента. 1992. № 2. С. 153.

13. Ilyakov E.V., Korablyov G.S., Kulagin I.S., Zaitsev N.I. Relativistic carsinotron with a thermionic injector of electrons // IEEE Trans. Plasma Sci. 1998. Vol. 26, № 3. P. 332.

14. Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Запезалов В.Е., Мусеев М.А., Новожилова Ю.В. Нестационарные процессы в оротроне с дифракционным выводом излучения // ЖТФ. 1999 (в печати).

15. Levush B., Antonsen Th.M., Bromborsky A., Lou Wei-Ran, Carmel Yu. Theory of relativistic backward-wave oscillators with end reflections // IEEE Trans. Plasma Sci. 1992. V. 20, № 3. P. 263.

Институт прикладной физики РАН  
Нижний Новгород

Поступила в редакцию 25.06.99  
после переработки 15.09.99

## THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF SELF-MODULATION REGIMES IN THE MEGAWATT POWER X BAND BWO

N.S. Ginzburg, N.I. Zaitsev, E.V. Ilyakov,  
I.S. Kulagin, Yu.V. Novozhilova, A.S. Sergeev

The results of theoretical and experimental investigations of self-modulation regimes in megawatt power level BWO with the slightly corrugated waveguide as microwave system are presented. Bifurcation currents corresponding to the oscillations self-excitation, to the transition to the self-modulation regimes with sinusoidal and spikes modulation of amplitude are in the good agreement with the simulation results. The simplification of generation regimes with the further to simulation can be explained by influence of electron space charge.



Гинзбург Наум Самуилович – родился в 1952 году. Работает в Институте прикладной физики РАН ведущим научным сотрудником, доктор физико-математических наук. Область интересов – лазеры на свободных электронах, мазеры на циклотронном резонансе, релятивистские гиротроны, многочастотные процессы в электронных СВЧ-приборах с распределенным взаимодействием, эффекты канализации и сверхизлучения, плазменные пучковые неустойчивости. Лауреат премии им. Ленинского комсомола (1980). Автор более 120 статей и обзоров по указанной проблематике.





*Зайцев Николай Иванович* – родился в 1944 году. Окончил Горьковский политехнический институт (1967) и занимался исследованиями гиротронов миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн. С 1973 года как руководитель экспериментальной группы работает в области высокоточной релятивистской электроники. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Институте прикладной физики АН СССР (1983). В настоящее время – старший научный сотрудник отдела релятивистской высокочастотной электроники и главный инженер отделения физики плазмы и электроники больших мощностей ИПФ РАН.



*Иляков Евгений Викторович* – родился в 1954 году в Горьком. Окончил Горьковский политехнический институт по специальности «Радиоэлектроника и кибернетика» (1981). В настоящее время – научный сотрудник Института прикладной физики (Нижний Новгород). Работает в области релятивистской СВЧ-электроники. Научные интересы связаны с исследованием процессов, определяющих длительность и мощность импульсов СВЧ-излучения в мощных микроволновых приборах. Результаты работы представлены более чем в 30 научных статьях и докладах на международных и внутренних конференциях.



*Кулагин Игорь Станиславович* – родился в 1954 году в Горьком. Окончил Горьковский государственный университет (1976). После окончания ГГУ работает в Институте прикладной физики РАН (Нижний Новгород). В 1994 году в ИПФ РАН защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по физической электронике. Научные интересы связаны с экспериментальными исследованиями физических процессов в мощных релятивистских электронных приборах микросекундного диапазона длительности импульса. Опубликовал 27 научных статей в журналах и сборниках.

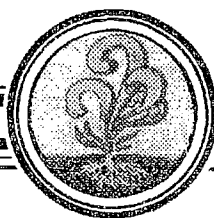


*Новожилова Юлия Владимировна* – родилась в 1960 году. Окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1982). Работает в Институте прикладной физики РАН, кандидат физико-математических наук. Область научных интересов – релятивистская высокочастотная электроника, нелинейная динамика СВЧ-приборов. Опубликовано более 20 работ в отечественных и зарубежных журналах.

E-mail: river@appl.sci-nnov.ru



*Сергеев Александр Сергеевич* – родился в 1957 году в Горьком. Окончил механико-математический факультет Горьковского государственного университета (1980). Работает в Институте прикладной физики РАН (Нижний Новгород), кандидат физико-математических наук. Область научных интересов – математическое моделирование нелинейных нестационарных процессов электронно-волнового взаимодействия. Опубликовал более 80 статей в отечественных и зарубежных журналах.



## ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО РАЗБРОСА ЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ОБРАТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

*Н.О. Бессуднова, А.Г. Рожнёв, Д.И. Трубецков*

Построена одномерная линейная теория взаимодействия прямолинейного электронного потока и обратной электромагнитной волны с учетом распределения электронов по скоростям. Предложен подход, позволяющий корректно учесть конечную длину области взаимодействия. Для случая больших значений пространственного заряда и теплового разброса представлены результаты двухволнового приближения. Проанализирован пусковой режим низковольтной ЛОВ. Расчеты проведены для прямоугольной, лоренцевской и максвелловской функций распределения.

### Введение

В последние несколько лет появилась и быстро развивается новая область электроники – вакуумная микроэлектроника [1,2]. Одним из направлений этого развития является создание миниатюрных низковольтных вакуумных СВЧ-приборов, в частности, ламп бегущей и обратной волны (ЛБВ и ЛОВ). Преимущества подобных устройств перед твердотельными аналогами, особенно в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн, состоят в более высоких мощностях, устойчивости к тепловым и радиационным воздействиям, малом дрейфе параметров. Однако переход к более низким рабочим напряжениям приводит при разработке приборов к необходимости учета целого ряда факторов, которые прежде играли второстепенную роль. В первую очередь это относится к разбросу электронов по скоростям.

Известно, что уменьшение размера электродинамической системы в  $k$  раз, где  $k$  – масштабный фактор, приводит к уменьшению напряжения в  $k^2$  раз. Тогда ток пучка должен быть увеличен в  $k^2$  раз для поддержания мощности. Это приводит к существенному увеличению влияния разброса электронов по скоростям и пространственного заряда в электронном потоке на процессы взаимодействия с электромагнитным полем. В связи с этим представляет определенный интерес построение теории миниатюрных ламп бегущей волны (ЛБВ) и обратной волны (ЛОВ), учитывающей распределение электронов по скоростям. Несмотря на то, что разработан ряд программ численного моделирования нелинейных нестационарных процессов в этих приборах, строгой линейной теории для случая произвольной функции распределения по скоростям в электронном потоке до сих пор не существует. В данной работе предложен вариант такой теории для ЛОВ.

Впервые влияние теплового разброса электронов по скоростям на пусковой режим работы ЛОВ было оценено Г. Джонсоном [3]. Он предложил приблизительно считать функцию распределения по скоростям в электронном потоке прямоугольной (рис. 1), при этом оказалось, что разброс по скоростям может быть учтен введением эффективного (увеличенного) параметра пространственного заряда

$$q_{эф} = q + (1/C^2)[\Delta v / (2v_0)]^2, \quad (1)$$

где  $\Delta v$  – ширина функции распределения;  $v_0$  – средняя скорость электронного потока;  $C$  – параметр усиления Пирса, явное выражение для которого будет приведено ниже.

В настоящей работе дано строгое подтверждение эвристических представлений Г. Джонсона и их обобщение на случай произвольной симметричной функции распределения. Границы применимости подхода Джонсона, как будет показано ниже, определяются условием  $v_i/v_0 \ll C \ll 1$ , где  $v_i$  – дисперсия функции распределения. В работе также предложена более общая теория, позволяющая корректно учесть ограниченность области взаимодействия в пространстве (см. [4]) и справедливая при выполнении более общего условия  $v_i/v_0 \sim C \ll 1$ .

## 1. Основные уравнения линейной теории. Приближение малого теплового разброса

Для простоты ограничимся случаем широкого электронного потока, фокусируемого бесконечно большим магнитным полем и взаимодействующего с замедленной волной в линии передачи. Распределение амплитуды высокочастотного поля по сечению пучка считаем однородным, редуцией поля пространственного заряда пренебрегаем (см. [5]). В предположении, что все переменные зависят от времени по гармоническому закону вида  $\exp(j\omega t)$ , запишем систему одномерных линеаризованных уравнений, состоящую из кинетического уравнения Власова, уравнения возбуждения линии передачи и выражений для поля пространственного заряда и плотности сгруппированного тока в следующем виде:

$$j\omega f_1 + v \partial f_1 / \partial x + (e/m)(E_q + E) \partial f_0 / \partial v = 0, \quad (2)$$

$$j_1 = e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 dv, \quad (3)$$

$$E_q = -j_1 / (j\omega \epsilon_0), \quad (4)$$

$$\partial E / \partial x + j\beta_0 E = \beta_0^2 K S j_1 / 2. \quad (5)$$

В соотношениях (2)–(5)  $f_0(v)$  – невозмущенная полем стационарная пространственно однородная функция распределения электронов;  $f_1(v, x)$  – ее возмущение под действием поля;  $E_q$  – переменная составляющая поля пространственного заряда и  $E$  – поле линии передачи;  $j_1$  – первая гармоника плотности сгруппированного тока;  $\beta_0$  – постоянная распространения волны в линии передачи без пучка;  $\omega$  – частота;  $K$  – сопротивление связи;  $S$  – площадь поперечного сечения элект-

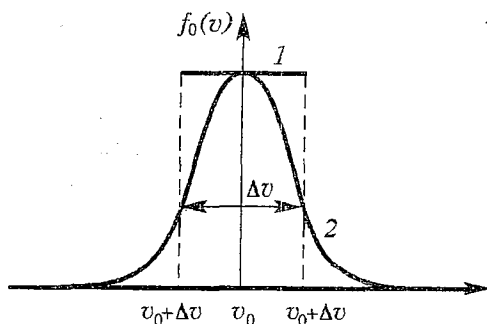


Рис. 1 Модель Г. Джонсона. 1 – прямоугольная функция распределения, 2 – произвольная симметричная функция распределения

ронного потока;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума;  $e/m$  – удельный заряд электрона.

Для полной постановки задачи уравнения (2)–(5) должны быть дополнены граничными условиями. Рассмотрим сначала дисперсионное уравнение, соответствующее системе уравнений (2)–(5). Следуя [7], запишем выражение для переменной составляющей плотности тока

$$j_1 \epsilon / (\epsilon - 1) = j \omega \epsilon_0 E, \quad (6)$$

в которое входит продольная составляющая диэлектрической проницаемости электронной плазмы

$$\epsilon(\omega, \beta) = 1 - \omega_p^2 / \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \partial f_0 / \partial v dv / (v - \omega / \beta), \quad (7)$$

где  $\beta$  – неизвестная постоянная распространения;  $\omega_p = [e^2 n_0 / (m \epsilon_0)]^{1/2}$  – плазменная частота,  $n_0$  – постоянная плотность электронов в пучке. Из условия совместности (5), (6) получается дисперсионное уравнение задачи

$$-(\beta - \beta_0) \epsilon / (\epsilon - 1) = 1/2 \omega \beta_0^2 \epsilon_0 K S. \quad (8)$$

Для рассматриваемой задачи добавка в диэлектрическую проницаемость, связанная с затуханием Ландау, мала, поэтому в формуле (7) интеграл рассматривается в смысле главного значения.

Невозмущенную компоненту функции распределения  $f_0(v)$  удобно представить в виде

$$f_0(v) = f_0^*((v - v_0)/v_i) / (n_0 v_i), \quad (9)$$

где  $v_0$  – средняя скорость электронного потока,

$$v_i^2 = 1/n_0 \int_{-\infty}^{\infty} (v - v_0)^2 f_0(v) dv \quad (10)$$

– дисперсия функции распределения; величина  $v_i$  определяет ширину функции распределения, а  $v_0$  – положение ее максимума на оси скорости. Безразмерная функция  $f_0^*(u)$  при этом имеет характерную ширину порядка единицы. Полагая, что  $v_i \ll |\omega/\beta - v_0|$ , разложим интеграл в формуле (7) в асимптотический ряд

$$1/n_0 \int_{-\infty}^{\infty} \partial f_0^*(u) / \partial u du / [u - (\omega/\beta - v_0)/v_i] \approx (\omega/\beta - v_0)^{-2} + 3v_i^2 (\omega/\beta - v_0)^{-4}. \quad (11)$$

Здесь интеграл рассматривается в смысле главного значения.

Введем стандартные для теории ЛЭВ и ЛОВ безразмерные параметры  $b$ ,  $\delta$  и  $C$  с помощью соотношений  $\beta = \beta_e (1 + j\delta C)$ ,  $b = (\beta_0 - \beta_e) / (C\beta_e)$ ,  $\beta_e = \omega/v_0$ ,  $C^3 = I_0 K / (4V_0)$ , где  $I_0$  и  $V_0$  – постоянные ток и напряжение пучка. Считая  $\delta C \ll 1$ , с учетом (11) представим дисперсионное уравнение задачи в виде

$$(b - j\delta) [\delta^2 + q + 3v_i^2 / (v_0^2 C^2)] = (1 + bC)^2, \quad (12)$$

где  $q = \omega^2 / (\omega_p C)^2$  – параметр пространственного заряда. Уравнение (12) имеет вид обычного дисперсионного уравнения для ЛОВ за исключением того, что в квадратных скобках появляется дополнительное слагаемое, определяемое величиной теплового разброса. В духе идеи Джонсона его можно интерпретировать как увеличение пространственного заряда за счет конечной ширины функции распределения электронов по скоростям. Таким образом, распределение электронов по скоростям в электронном потоке может быть учтено введением эффективного параметра пространственного заряда

$$q_{эф} = q + 3v_i^2/(v_0^2 C^2). \quad (13)$$

В частности, для прямоугольной функции распределения из уравнения (13) получается формула Г. Джонсона (1).

В таком приближении в системе электронный поток – волна в линии передачи существуют три парциальных волны, как и в случае моноскоростного электронного потока. Пусковые режимы ЛОВ могут быть рассчитаны по формулам обычной линейной теории, если увеличить параметр пространственного заряда в соответствии с уравнением (13).

Использованные при выводе уравнения (12) условия  $v_i \ll |\omega/\beta - v_0|$  и  $C \ll 1$ , выраженные в безразмерных параметрах, принимают вид

$$v_i/v_0 \ll C \ll 1. \quad (14)$$

Эти соотношения определяют область применимости подхода Джонсона, обобщенного на случай произвольной симметричной функции распределения.

## 2. Случай произвольного теплового разброса

Как показывают простые оценки, в низковольтных ЛОВ с рабочим напряжением порядка десяти вольт условие  $v_i/v_0 \ll C$  нарушается, так что простой подход, изложенный в предыдущем разделе, оказывается недостаточным. В этом разделе будет предложено более общее решение задачи, которое, к тому же, корректно учитывает конечную длину области взаимодействия.

Дополним уравнения (2)–(5) граничными условиями на функцию распределения и ВЧ–поле на концах области взаимодействия

$$f_1|_{x=0} = 0, \quad E|_{x=l} = 0, \quad (15)$$

где  $l$  – длина лампы.

Введем следующие безразмерные переменные: координату  $\xi$ , ВЧ–поле  $F$  и сгруппированный ВЧ–ток  $I$  с помощью соотношений

$$\xi = \beta_e C x / L, \quad F(\xi) = E(x) \exp(j\beta_e x) / (2C^2 V_0 \beta_e), \quad I(\xi) = i_1(x) \exp(j\beta_e x) / I_0,$$

где  $L = 2\pi C N$  – безразмерная длина области взаимодействия,  $N = \beta_e l / (2\pi)$  – электрическая длина лампы. В новых переменных система уравнений (2)–(5) с граничными условиями (15) может быть приведена к системе двух связанных интегральных уравнений для функций  $F(\xi)$  и  $I(\xi)$

$$I(\xi) = jL^2 \int_0^\xi F(\zeta) + jqI(\zeta) K(\xi - \zeta) d\zeta, \quad (16)$$

$$F(\xi) = -(1 + bC)^2 L \int_\xi^1 I(\zeta) \exp[-jbL(\xi - \zeta)] d\zeta,$$

где

$$K(\xi) = \xi \int_{-\infty}^{\infty} f_0^*(u) \exp[jv_i/(v_0 C) Lu / (1 + uv_i/v_0) \xi] / (1 + uv_i/v_0)^2 du \quad (17)$$

– ядро интегрального уравнения.

В частности, если электронный поток моноскоростной, то  $K(\xi) = \xi$  и из (16) получаются известные результаты [6]. Для прямоугольной функции распределения, определяемой формулами  $f_0(v) = n_0 / (2 \cdot 3^{1/2} v_i)$ , если  $|v - v_0| < 3^{1/2} v_i$  и  $f_0(v) = 0$  для остальных значений  $v$ , интеграл в соотношении (17) берется элементарно и равен

$$K(\xi) = 1/[L(1 - \Delta^2)] \exp\{-j\xi L \Delta^2/[C(1 - \Delta^2)]\} \sin\{\xi L \Delta/[C(1 - \Delta^2)]\} / \{\Delta/[C(1 - \Delta^2)]\}, \quad (18)$$

где  $\Delta = 3^{1/2} v_i / v_0$ . В случае лоренцевской функции распределения

$$f_0(v) = n_0 / \{ \pi v_i [1 + (v - v_0)^2 / v_i^2] \}$$

ядро (17) вычисляется методом контурных интегралов через вычеты. При этом контур интегрирования выбирается согласно предписанию Ландау [7] о бесконечно медленном включении поля в момент времени  $t = -\infty$ . В итоге получаем

$$K(\xi) = \xi \exp[-v_i / (v_0 C) L \xi / (1 + j v_i / v_0)] / (1 + j v_i / v_0)^2. \quad (19)$$

Для максвелловской функции распределения

$$f_0(v) = n_0 / [(2\pi)^{1/2} v_i] \exp[-(v - v_0)^2 / (2 v_i^2)]$$

выражение (17) представимо в виде

$$K(\xi) = 1 / (2\pi)^{1/2} \xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2/2) \exp[j v_i / (v_0 C) L u \xi / (1 + u v_i / v_0)] / (1 + u v_i / v_0)^2 du. \quad (20)$$

Система интегральных уравнений (16) решалась методом коллокаций [8]. Алгебраизация задачи проводилась следующим образом. Расчетная область  $0 < \xi < 1$  равномерно разбивалась на конечное число элементарных отрезков с кусочно-линейной аппроксимацией функций  $F(\xi)$  и  $I(\xi)$  на них. Эти аппроксимации подставлялись в уравнения (16) и налагалось требование, чтобы уравнения точно выполнялись на концах отрезков (в точках коллокации). В результате получалась система линейных однородных уравнений относительно значений функций тока и поля в точках коллокации. Условие совместности этой системы приводит к двум трансцендентным уравнениям с неизвестными  $b$  и  $L$  и параметром  $C$ , решение которых может быть найдено численно.

### 3. Двухволновое приближение

При больших значениях пространственного заряда процессы в ЛОВ могут быть описаны в рамках двухволновой модели, то есть с учетом взаимодействия только медленной волны пространственного заряда в электронном потоке и обратной волны в линии передачи. В этом разделе будут получены уравнения двухволнового приближения, применимые для произвольного распределения электронов по скоростям в электронном потоке. Для этой цели перейдем в пространство изображений, применяя к системе (16) преобразование Лапласа, тогда

$$I(p) \{1 + q L^2 K(p)\} = j L^2 K(p) F(p), \quad (21)$$

$$F(p)(p + j b) = (1 + b C)^2 I(p),$$

где

$$K(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^*(u) / \{ (1 + u v_i / v_0)^2 [p - j v_i / (v_0 C) L u / (1 + u v_i / v_0)]^2 \} du$$

– образ ядра  $K(\xi)$ .

Рассмотрим выражение, стоящее в левой части выражения (21) для тока

$$1 + q L^2 K(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) / (1 + u v_i / v_0)^2 \times \\ \times \frac{[p(1 + u v_i / v_0) - j L u v_i / (v_0 C) + j L q^{1/2}][p(1 + u v_i / v_0) - j L u v_i / (v_0 C) - j L q^{1/2}]}{[p - j v_i / (v_0 C) L u / (1 + u v_i / v_0)]^2} du. \quad (22)$$

Оставляя множитель, соответствующий медленной волне в (22), и применяя

обратное преобразование Лапласа, получаем систему интегральных уравнений, описывающую взаимодействие медленной волны в электронном потоке и обратной электромагнитной волны в линии передачи

$$\int_0^{\xi} I(\zeta) D(\xi - \zeta) d\zeta = -L/(2q^{1/2}) \int_0^{\xi} [F(\zeta) + 2jqI(\zeta)] K(\xi - \zeta) d\zeta, \quad (23)$$

$$F(\xi) = -(1 + bC)^2 L \int_0^1 I(\zeta) \exp[-jbL(\xi - \zeta)] d\zeta,$$

где

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^*(u) \exp[jv_l/(v_0 C) Lu\xi/(1 + uv_l/v_0)] / (1 + uv_l/v_0) du \quad (24)$$

– ядро интегрального уравнения.

Уравнение для тока в некоторых частных случаях может быть упрощено. Например, для моноскоростного электронного потока  $D(\xi)=1$ ,  $K(\xi)=\xi$  и выражение для тока переходит в хорошо известное

$$I(\xi) = -L/(2q^{1/2}) \int_0^{\xi} [F(\zeta) + 2jqI(\zeta)] d\zeta. \quad (25)$$

В случае лоренцевской функции распределения электронов по скоростям  $D(\xi) = (1 + jv_l/v_0) K(\xi) / \xi = \exp[-v_l/(v_0 C) L\xi/(1 + jv_l/v_0)] / (1 + jv_l/v_0)$ , и первое из уравнений (23) принимает следующий вид:

$$I(\xi) = -L/(2q^{1/2}(1 + jv_l/v_0)) \int_0^{\xi} [F(\zeta) + (2jq + 2q^{1/2}v_l/(v_0 C))I(\zeta)] d\zeta. \quad (26)$$

#### 4. Обсуждение результатов

Вычисления пусковых значений длины ЛОВ и параметра рассинхронизма проводились для прямоугольной, лоренцевской и максвелловской функций распределения методом дисперсионного уравнения и методом коллокаций. В дальнейших расчетах использовалось до 160 точек коллокации. Параметр Пирса фиксировался и во всех вычислениях выбирался равным типичному значению 0.05. В случае прямоугольной функции распределения возможно решение уравнений (7), (8) с граничными условиями (15) методом дисперсионного уравнения [6]. На рис. 2 представлены зависимости  $CN_{st}(q)$  и  $b_{st}(q)$  при различных значениях

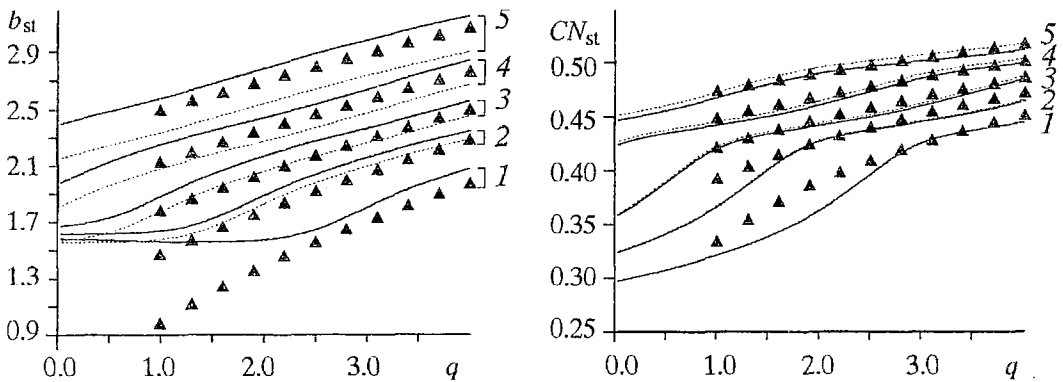


Рис. 2. Пусковые значения  $CN_{st}$  и  $b_{st}$  для прямоугольной функции распределения;  $C=0.05$ . Для кривых 1–5 значения параметра  $v_l/(v_0 C)=0, 0.6, 0.8, 1, 1.2$ , соответственно. Сплошные линии соответствуют точному решению; пунктирные – результатам, рассчитанным по формуле Джонсона; треугольники – двухволновому приближению

параметра  $v_l/(v_0C)$ , полученные таким способом (сплошные линии). Отметим, что они полностью совпадают с результатами решения системы интегральных уравнений (16) методом коллокаций. Расчеты, проведенные с помощью приближенной формулы Джонсона (13), отмечены пунктирными линиями. Из графиков видно, что формула Джонсона является достаточно хорошей аппроксимацией точного решения для прямоугольной функции распределения, хотя в результатах расчета пусковых значений частоты есть различия. Границы применимости двухволнового приближения определяются снизу достаточно большими значениями параметров  $v_l/(v_0C)$  и  $q$ .

Расчеты пусковых режимов ЛОВ для лоренцевской функции распределения представлены на рис. 3. Необходимо отметить, что функция Лоренца не является аппроксимацией реальной функции распределения по скоростям в электронном потоке, но, с одной стороны, она является гладкой функцией в отличие от прямоугольного распределения, а с другой стороны, по сравнению с максвелловским распределением ее использование дает возможность получить ряд результатов в аналитическом виде, что позволяет отработать технику решения. Таким образом, расчеты с применением лоренцевской функции распределения электронов по скоростям в электронном потоке следует рассматривать в качестве тестовых. Здесь, также как и в случае прямоугольной функции распределения, обнаруживается полное совпадение результатов решений задачи методом дисперсионного уравнения и методом коллокаций. Строгое решение задачи, как и ранее, обозначено сплошными линиями. Но, поскольку распределение Лоренца обладает бесконечной дисперсией, то величину  $v_l$  следует рассматривать как некоторый параметр, задающий ширину функции распределения, который, однако, не связан с ее дисперсией. Результаты решения задачи в двухволновом приближении представлены на рисунке треугольниками. Обратим внимание, что для такой функции распределения при заданном значении параметра  $v_l$  существуют предельные величины пространственного заряда, при превышении которых колебания в системе невозможно возбудить вообще. Это связано с тем обстоятельством, что функция распределения имеет очень широкие "хвосты", так что при любом значении параметра пространственного заряда в пучке существует группа электронов с такими скоростями, что быстрая волна пространственного заряда, связанная с этой группой электронов, будет находиться в синхронизме с обратной электромагнитной волной, препятствуя возникновению генерации.

Указанное обстоятельство еще раз говорит о том, что использование функции распределения Лоренца для моделирования процессов теплового разброса по скоростям при взаимодействии прямолинейного электронного потока с электромагнитной волной является неправомерным.

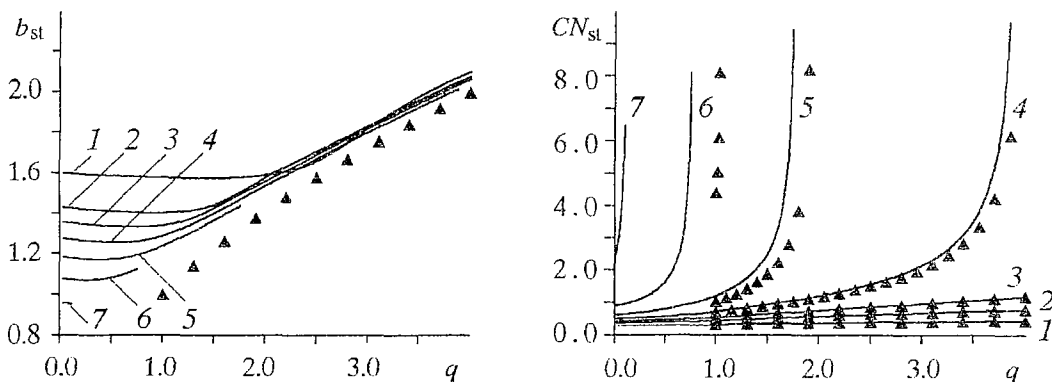


Рис. 3. Пусковые значения  $CN_{st}$  и  $b_{st}$  для лоренцевской функции распределения;  $C=0.05$ . Для кривых 1-7 значения параметра  $v_l/(v_0C)=0, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6$ , соответственно. Сплошными линиями показано точное решение; треугольниками - двухволновое приближение



На рис. 4 аналогичные зависимости представлены для максвелловской функции распределения. В этом случае аналитическое выражение для ядра  $K(\xi)$  отсутствует, а его численный расчет приводит к значительному увеличению затрат машинного времени. Но можно получить хорошее аналитическое приближение для ядра, если учесть, что выполнение условий  $v_i/(v_0C) \sim 1$  и  $C \ll 1$  эквивалентно неравенству  $v_i/v_0 \ll 1$ .

Раскладывая в формуле (20) для  $K(\xi)$  дроби вида  $1/(1+iv_i/v_0)$  в ряд по  $iv_i/v_0$  и ограничиваясь величинами первого порядка малости, получаем приближенное выражение для ядра

$$K(\xi) = \xi \exp\{-[L\xi v_i/(v_0C)]^2/[2+4jv_i/v_0L\xi v_i/(v_0C)]\}/[1+2jv_i/v_0L\xi v_i/(v_0C)]^{3/2}. \quad (27)$$

Сплошными линиями на рис. 4 показаны зависимости, полученные решением интегральных уравнений (16) с использованием точного выражения (20). Расчеты с использованием приближенного выражения для ядра (27) показаны на рис. 4 ромбами. Видно, что приближенное выражение можно использовать вплоть до значений  $v_i/(v_0C) = 1$ , что соответствует достаточно большому тепловому разбросу. Зависимости, рассчитанные с помощью обобщенной формулы Джонсона (13), обозначены пунктирной линией. Как и следовало ожидать, применение приближенной формулы (13) ограничивается очень малыми значениями параметров  $v_i/v_0 \ll C$  и  $q$ . Таким образом, для расчета пусковых условий низковольтных ЛОВ следует пользоваться результатами решения интегральных уравнений (16).

Заметим, что при фиксированном значении параметра теплового разброса электронов по скоростям с увеличением поля пространственного заряда в электронном потоке характер поведения зависимостей  $CN_{st}(q)$  на рис. 2 и 4 изменяется. На каждой кривой можно выделить два участка. На первом из них, соответствующем небольшим значениям параметра  $q$ , в процессе генерации сигнала существенно взаимодействие трех волн: волны в линии передачи и двух волн пространственного заряда в электронном потоке. На этом участке наблюдается монотонное нарастание  $CN_{st}$  с увеличением параметра  $q$ . Второй участок соответствует достаточно большим значениям параметра пространственного заряда, когда можно ограничиться рассмотрением взаимодействия только медленной волны пространственного заряда с обратной электромагнитной волной, то есть двухволновым приближением. В этой области значение пусковой длины меняется с увеличением параметра  $q$  существенно медленнее – по закону  $CN \sim q^{1/4}$  [5]. Такое различие в поведении зависимостей пусковой длины от

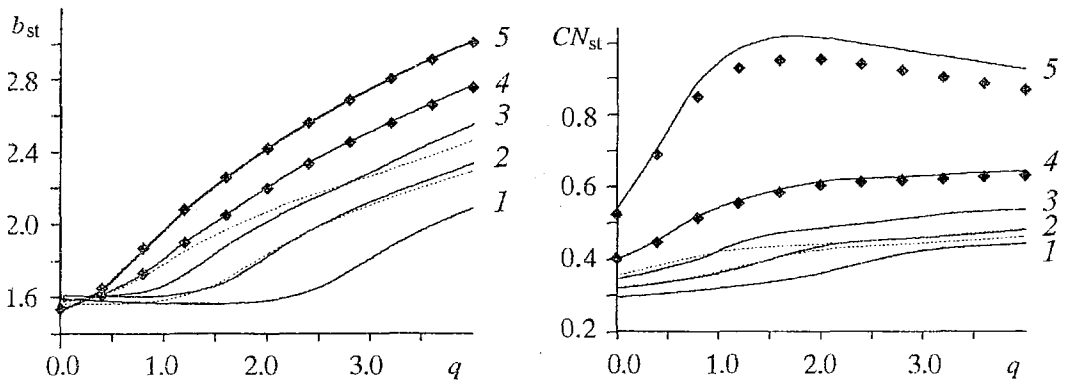


Рис. 4. Пусковые значения  $CN_{st}$  и  $b_{st}$  для максвелловской функции распределения;  $C=0.05$ . Для кривых 1–5 значения параметра  $v_i/(v_0C)=0, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ , соответственно. Сплошными линиями обозначено точное решение; ромбами – результаты, полученные с помощью приближенного выражения для ядра; пунктиром – расчеты по обобщенной формуле Джонсона

параметра  $q$  объясняется различным количеством взаимодействующих в системе волн. С увеличением параметра теплового разброса область, где существенно влияние только двух волн, увеличивается; соответственно уменьшается участок, где следует рассматривать трехволновую задачу.

Авторы выражают благодарность С. П. Кузнецову и Н. М. Рыскину за полезное обсуждение работы.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 97-02-16546.*

### **Библиографический список**

1. Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г., Соколов Д.В. Лекции по сверхвысоко-частотной вакуумной микроэлектронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. 238 с.

2. Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г., Соколов Д.В. Вакуумная микроэлектроника – бремя ожиданий // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4,5. С. 130.

3. Johnson H. Backward-Wave Oscillators // Proc.IRE. 1955. Vol. 43, № 6. P. 684.

4. Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. 1946. Т. 46, № 7. С. 574.

5. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов.радио, 1970. 584 с.

6. Электроника ламп с обратной волной // Под ред. В.Н.Шевчика и Д.И.Трубецкова. Саратов: Изд-во СГУ, 1975. 195 с.

7. Лившиц Е.М., Пятаевский Л.П. Физическая кинетика. Сер. Теоретическая физика. Т. 10. М.: Наука, 1979. 528 с.

8. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 15.07.99  
после переработки 19.10.99*

## **INFLUENCE OF THERMAL VELOCITY DISTRIBUTION ON ELECTRON BEAM – BACKWARD ELECTROMAGNETIC WAVE INTERACTION**

*N. O. Bessudnova, A. G. Rozhnev and D. I. Trubetskov*

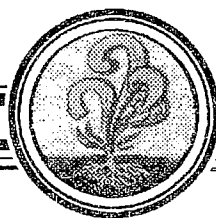
One-dimensional linear theory of interaction between electron beam and backward electromagnetic wave in transmission line is presented taking into account arbitrary velocity distribution of electrons and allowing correct consideration of finite length of interaction region. Influence of electron velocity spread on start oscillation regime of low-voltage backward-wave oscillator is analysed. Calculations are carried out for rectangular, Lorentz and Maxwell distributions.



*Бессуднова Надежда Олеговна* – родилась в городе Вольске Саратовской области (1973). Закончила физический факультет Саратовского университета (1995). В настоящее время – аспирантка кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского университета. Область научных интересов – вакуумная СВЧ-электроника, компьютерное моделирование процессов в распределенных системах различной природы. Автор нескольких публикаций. E-mail: BessudnovaNO@info.sgu.ru



*Трубецков Дмитрий Иванович* родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Ректор СГУ, заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук, заслуженный деятель науки РФ. В Саратовском государственном университете в разное время подготовил и прочитал общие курсы лекций «Основы электроники сверхвысоких частот», «Квантовая электроника», «Методы математической оптимизации», «Теория волновых процессов», а также специальные курсы «Введение в специальность (радиофизика и электроника)», «Теория СВЧ электронных приборов О и М-типа», «Вакуумная микроэлектроника», «Высокочастотная релятивистская электроника», «Хаос и структуры», «Линейные волны», «Нелинейные волны». Некоторые из спецкурсов читал в Санкт-Петербургском государственном техническом университете и Ростовском государственном университете. Научный руководитель Колледжа прикладных наук СГУ. Соросовский профессор (1994, 1995). Автор учебных пособий «Введение в теорию колебаний и волн» (М.: Наука, 1984; The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989; М.:Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем); «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995; совместно с А.А. Короновским) «Колебания, волны, электроны» и «Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996; совместно с А.Г. Рожневым и Д.В. Соколовым). E-mail: true@cas.ssu.runnet.ru



**ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА  
НА РЕЖИМЫ ГЕНЕРАЦИИ И УСИЛЕНИЯ ВОЛН  
В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК – ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ  
ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ  
СИСТЕМЫ**

*Н.О. Бессуднова*

Исследуется влияние пространственного заряда на режимы генерации и усиления волн в системе электронный поток – электромагнитное поле вблизи границы полосы пропускания замедляющей системы. На плоскости параметров получены области с различным характером поведения системы. Показано, что вблизи высокочастотной границы пространственный заряд облегчает генерацию, а вблизи низкочастотной границы – наоборот, затрудняет ее.

**Введение**

Для генерации и усиления электромагнитных волн в электронных генераторах, таких как релятивистский оротрон, черенковский генератор, а также в мощных лампах бегущей волны на цепочках связанных резонаторов используется взаимодействие прямолинейного электронного потока с электромагнитным полем вблизи границы полосы пропускания замедляющей системы (ЗС). Возникновение полезной или паразитной генерации напрямую связано с механизмами неустойчивости в системе взаимодействующих волн [1], следовательно, анализ неустойчивости необходим для полного теоретического описания этих приборов. Впервые подобное исследование было проведено в [2], однако рассмотрение ограничивалось кинематическим приближением. В реальных приборах ток пучка достаточно велик, так что пространственный заряд (ПЗ), как это показано в настоящей работе, может изменить характер неустойчивости с абсолютной на конвективную и наоборот, или же в некоторых случаях подавить неустойчивость.

С другой стороны, учет ПЗ приводит к многопараметрической задаче, что само по себе представляет интерес с точки зрения теории волн. В большинстве работ исследование обычно ограничивалось анализом однопараметрических систем, хотя не всегда возможно, используя один управляющий параметр, построить адекватную физическую картину явлений. Рассмотрение однопараметрических динамических систем отчасти было связано с построением наглядных простых моделей, отчасти – с недостаточным развитием компьютерной техники. Таким образом, представляет самостоятельный интерес изучение динамических систем с несколькими управляющими параметрами, где одновременно учитывается

влияние нескольких факторов. Подобные исследования интенсивно развиваются в гидродинамике, электронике, физике плазмы, в химической кинетике [1,3–5]. Например, в [5] исследуются неустойчивости Хопфа и Тьюринга в многопараметрической системе химической кинетики с учетом диффузии.

## 1. Анализ неустойчивости

Уравнения взаимодействия пучка с синхронной составляющей продольного электрического поля вблизи границы полосы пропускания ЗС [2] с учетом поля пространственного заряда, введенного так, как это обычно делается в линейной теории (см., например, [6]), имеют вид

$$(\partial/\partial\xi - iB)^2 I = i(F + iqI), \quad (1)$$

$$\partial F/\partial\tau + i\mu\partial^2 F/\partial\xi^2 = -I, \quad (2)$$

где  $F(\xi, \tau)$  и  $I(\xi, \tau)$  – медленно меняющиеся амплитуды высокочастотного поля и тока;  $B$  – параметр рассинхронизма пучка с волной критической частоты;  $q = -[\omega_p/(\omega_0\epsilon)]^2$  – параметр ПЗ, где  $\omega_p$  – частота ленгмюровских колебаний в пучке;  $\omega_0$  – критическая частота;  $\epsilon$  – параметр взаимодействия. Параметр  $\mu=1$  для низкочастотной (НЧ) границы и  $\mu=-1$  для высокочастотной (ВЧ) границы полосы пропускания. Вывод и обсуждение уравнений (1), (2) и введенных параметров можно найти в [2].

Дисперсионное уравнение задачи (1), (2) имеет вид

$$\Omega(\beta) = \mu\beta^2 + 1/[(\beta+B)^2 - q]. \quad (3)$$

Частота  $\Omega(\beta)$  является аналитической функцией всюду за исключением двух точек  $\beta_{1,2} = -B \pm q^{1/2}$ , в которых имеются полюсы первого порядка. Они соответствуют дисперсии электронного потока, не связанного с волной в ЗС. Правила обхода особенностей в интеграле Фурье, который является формальным решением начальной задачи, определяется условием  $I(\xi, \tau) = 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ , что означает затухание поля в направлении, противоположном направлению распространения электронного потока.

Рассмотрим задачу о развитии во времени возмущения, заданного в пространстве в некоторый начальный момент времени, то есть исследуем систему на возможность возникновения в ней абсолютной неустойчивости. Используя метод, развитый в [2], приходим к выводу, что в системе реализуется абсолютная неустойчивость, если на комплексной плоскости волнового числа  $\beta$  существуют седловые точки  $\beta_s$ , удовлетворяющие уравнению

$$d\Omega/d\beta = 0, \quad (4)$$

для которых выполняются два условия:

$$\text{Im } \Omega(\beta_s) < 0, \quad (5)$$

$$\text{Im } \beta_s > 0. \quad (6)$$

Первое означает, что малое начальное возмущение с волновым числом  $\beta_s$  нарастает, а второе вытекает из правила обхода особенностей. Расположение седловых точек для дисперсионного уравнения (3) в комплексной плоскости волновых чисел  $\beta$  в зависимости от параметра  $B$  представлено на рис. 1 для НЧ- и ВЧ-границ полосы пропускания. Рис. а, б отвечают значениям параметра ПЗ  $q=0$

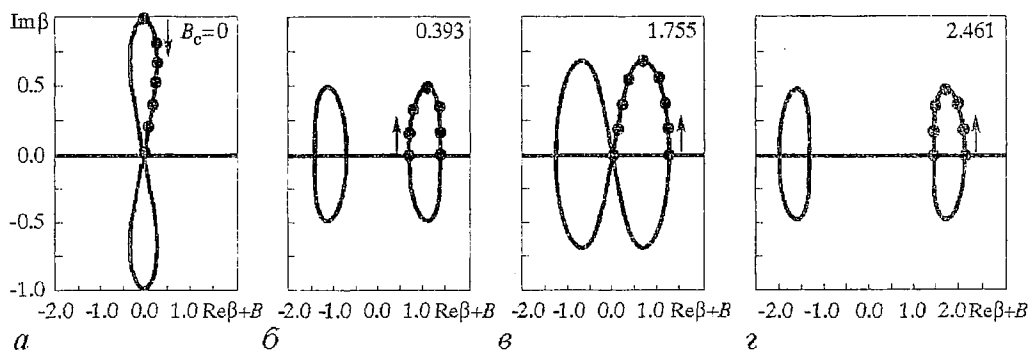


Рис. 1. Расположение седловых точек в комплексной плоскости волновых чисел  $\beta$  для низкочастотной границы полосы пропускания ( $\mu=1$ ) при  $q=0$  (а), 2 (б) и для высокочастотной границы ( $\mu=-1$ ) при  $q=0$  (в), 2 (г)

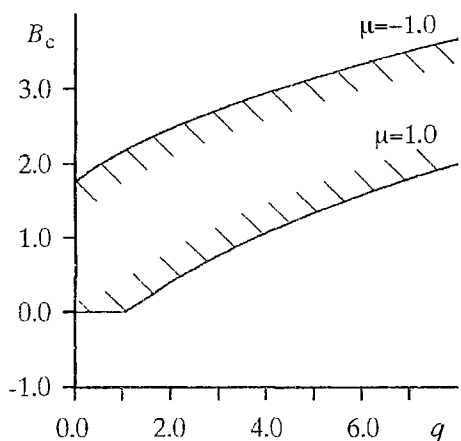


Рис. 2. Зависимость  $B_c(q)$  для низкочастотной ( $\mu=1$ ) и высокочастотной ( $\mu=-1$ ) границ полосы пропускания. Штриховкой обозначена область абсолютной неустойчивости

и при  $\mu=-1$ .

Зависимости  $B_c(q)$  представлены на рис. 2. Из него следует, что для ВЧ-границы при  $B > 1.755$  увеличение ПЗ приводит к появлению в системе абсолютной неустойчивости. Для НЧ-границы наоборот, при  $B > 0$  увеличение ПЗ приводит к подавлению абсолютной неустойчивости. Таким образом, вблизи ВЧ-границы ПЗ облегчает генерацию, а вблизи НЧ-границы — затрудняет ее. Отметим, что для НЧ-границы при значении параметра  $q=1$  существует пороговая точка, начиная с которой происходит увеличение параметра  $B_c$ . Поведение корней уравнения (4) в окрестности и в самой пороговой точке иллюстрирует рис. 3.

Возможна другая постановка задачи, когда возмущение создается в некотором участке пространства по заданному временному закону. В этом случае можно рассматривать задачу об усилении волн средой (или конвективной неустойчивости) при их распространении от источника с заданной частотой  $\Omega_0$  [1]. Если в системе отсутствует абсолютная неустойчивость, границы областей, в которых реализуются различные режимы, а именно, усиления и пропускания, в пространстве параметров  $(B, \Omega_0, q)$  определяются системой уравнений [2,5]

$$\Omega_0 = \Omega(\beta), \quad (7)$$

и 2 для НЧ-границы полосы пропускания ( $\mu=1$ ), а рис. в, г — тем же значениям  $q$  для ВЧ-границы ( $\mu=-1$ ). Кружочками обозначены такие значения волновых чисел, для которых выполняются условия (5), (6). При дальнейшем увеличении параметра ПЗ характер поведения седловых точек качественно не меняется. Расчет показывает, что абсолютная неустойчивость в системе реализуется при значениях параметра  $B$ , больших некоторого критического значения  $B_c$  для НЧ-границы полосы пропускания и при  $B$ , меньших некоторого критического значения  $B_c$  для ВЧ-границы. Эти значения  $B_c$  приведены на рисунках. Там же стрелками указаны направления увеличения параметра  $B$  при  $\mu=1$  и его уменьшения при  $\mu=-1$ .

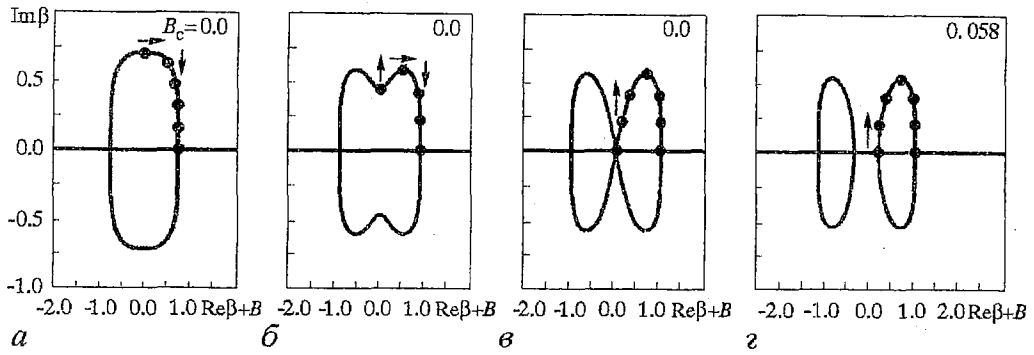


Рис. 3. Расположение седловых точек в комплексной плоскости  $\beta$  для низкочастотной границы полосы пропускания ( $\mu=1$ ) при близких к единице значениях параметра  $q=0.5$  (а),  $0.8$  (б),  $1$  (в),  $1.2$  (г)

$$d\Omega/d\beta = 0, \quad (8)$$

что дает применительно к дисперсионному уравнению (3)

$$\Omega_0 = \mu\beta^2 + 1/[(\beta+B)^2 - q] = 0, \quad (9)$$

$$\mu\beta - (B+\beta)/[(B+\beta)^2 - q]^2 = 0. \quad (10)$$

Заметим, что линии, определяемые (9), (10), разделяют области, где мнимые части корней уравнения  $\Omega_0=\Omega(\beta)$  сохраняют знак. Характер поведения системы в каждой из таких областей можно найти, используя критерий различения конвективной неустойчивости и непропускания [1,3] в одной характерной точке.

При больших значениях параметра пространственного заряда можно ограничиться рассмотрением взаимодействия только медленной волны пространственного заряда в электронном потоке с полем замедляющей системы. В этом случае уравнение для тока (1) может быть переписано следующим образом:

$$[\partial/\partial\xi - iB + iq^{1/2}]I = -F/(2q^{1/2}), \quad (11)$$

а уравнение дисперсии имеет вид

$$\Omega = \mu\beta^2 + 1/[2q^{1/2}[\beta - (q^{1/2} - B)]]. \quad (12)$$

## 2. Результаты расчетов

Расчет карт параметров  $(B, \Omega_0)$ , соответствующих различным типам поведения системы, был проведен для НЧ- и ВЧ-границ полосы пропускания замедляющей системы в диапазоне значений параметра пространственного заряда  $q$  от 0 до 10. На рис. 4 и 6 представлены плоскости параметров  $(B, \Omega_0)$ , рассчитанные для НЧ- и ВЧ-границ полосы пропускания ЗС. Рисунки а, б, в, г соответствуют значениям параметра  $q=0, 2, 4, 8$ .

На рис. 4 представлены карты параметров для верхней границы полосы пропускания ( $\mu=-1$ ). Цифрой 1 обозначена область абсолютной неустойчивости, которая с увеличением параметра ПЗ все дальше заходит на ветвь дисперсионной характеристики, отвечающей прямой волне (параметр  $B_c$  увеличивается). Область конвективной неустойчивости 2а сужается по мере увеличения параметра ПЗ. На рис. 5 показано поведение корней уравнения (3) при изменении  $\text{Im}\Omega$  от  $-\infty$  до 0 при  $\text{Re}\Omega=\Omega_0$  в области конвективной неустойчивости. Цифрами 1, 2, 3 обозначены волновые числа, лежащие при  $\text{Im}\Omega \rightarrow -\infty$  в нижней полуплоскости комплексной

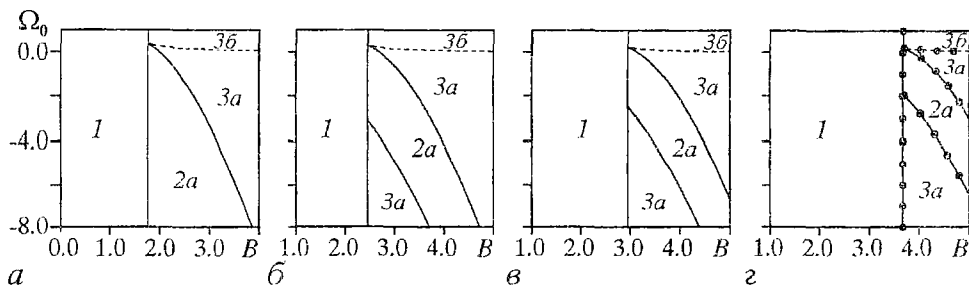


Рис. 4. Карты параметров  $(B, \Omega_0)$  для высокочастотной границы полосы пропускания ( $\mu=-1$ ) при значениях  $q=0$  (а), 2 (б), 4 (в), 8 (г). 1 – область абсолютной неустойчивости, 2а – область конвективной неустойчивости, 3а, 3б – области пропускания

плоскости  $\beta$ , и цифрой 4 – в верхней (корни 1 и 2 соответствуют быстрой и медленной волнам ПЗ, а 3 и 4 – прямой и обратной волнам в линии передачи). Выход волнового числа 2 в верхнюю полуплоскость указывает на наличие конвективной неустойчивости в системе. Области пропускания на рис. 4 обозначены цифрой 3. Участки 3а соответствуют таким значениям параметров  $\Omega_0$  и  $B$ , при которых действительным значениям  $\Omega_0$  в (9) соответствуют действительные значения  $\beta$  и наоборот. В области 3б все корни (3) при движении  $\text{Im}\Omega$  от  $-\infty$  до 0 при фиксированном значении  $\Omega_0$  остаются в «своих» полуплоскостях и среди них есть комплексные корни при  $\text{Im}\Omega=0$ . Однако, используя аналогию с прохождением пучка в среде с реактивной проводимостью, можно показать, что во внеполосной области 3б реализуется режим пропускания. Действительно, полагая, что  $\Omega_0 > 0$  и  $|\Omega| \gg 1$ , волновые числа для волн тока можно приближенно считать равными  $\beta \approx -B \pm [q+1/(B^2+|\Omega|)]^{1/2}$ . При сделанных предположениях они действительны и система прозрачна. Таким образом, распространение возмущений происходит за счет волн ПЗ в электронном потоке. Линии, разделяющие области с различными характерами решения, а именно, усиления и пропускания, и пунктирные линии соответствуют случаю резонанса в системе  $\Omega_0 = \Omega_s$ , где  $\Omega_s = \Omega(\beta_s)$  – частота, при которой сливаются корни уравнения (3). При значении параметра  $q=8$  проведены расчеты в трехволновом приближении. Границы областей с различными характерами неустойчивости обозначены кружочками. Результаты анализа четырехволнового взаимодействия полностью согласуются с трехволновым приближением.

Аналогичные карты параметров для нижней границы полосы пропускания

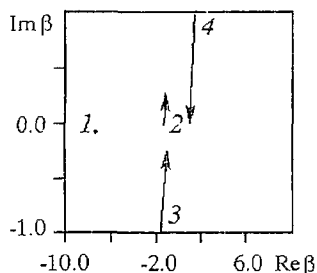


Рис. 5. Движение корней уравнений (3) на комплексной плоскости волновых чисел в области конвективной неустойчивости. Параметры  $\mu=-1$  и  $q=8$ . Цифрами 1, 2, 3 обозначены волновые числа, соответствующие волнам, распространяющимся вправо, а цифрой 4 – области 2а на рис. 4

( $\mu=1$ ) для различных значений параметра ПЗ приведены на рис. 6. С увеличением параметра  $q$  область абсолютной неустойчивости 1 сдвигается в сторону положительных значений параметра  $B$ , область конвективной неустойчивости 2 расширяется по параметру  $B$  и сужается по параметру  $\Omega_0$ . Участки 2а и 2б различаются поведением корней дисперсионного уравнения (3) на комплексной плоскости волновых чисел. В области 2а быстрая волна ПЗ в электронном потоке и обратная волна в линии передачи распространяются без затухания, а в области 2б они затухают. С увеличением параметра ПЗ в системе появляются новые виды решения. В частности, из



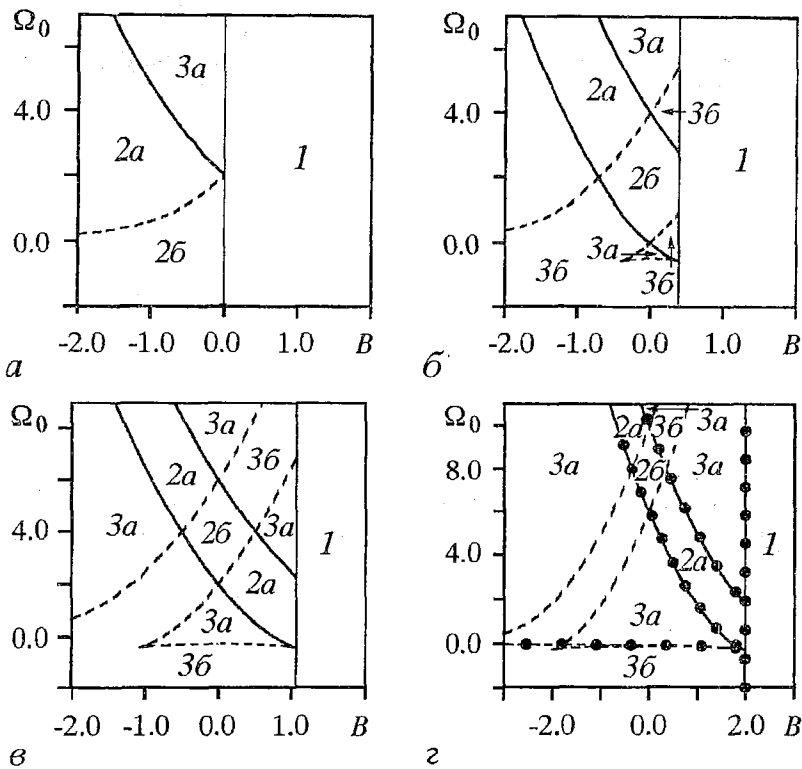


Рис. 6. Карты параметров  $(B, \Omega_0)$  для низкочастотной границы полосы пропускания ( $\mu=1$ ) при значениях  $q=0$  (а), 2 (б), 4 (в), 8 (г). 1 – область абсолютной неустойчивости, 2а, 2б – области конвективной неустойчивости, 3а, 3б – области пропускания

рис. 6 видно, что вместо области внеполосного усиления возмущений за счет волн ПЗ в электронном потоке 2б при  $q=0$  появляется область внеполосного пропускания 3б. (Различие в поведении корней (3) в областях прозрачности, отмеченных цифрами 3а и 3б, при изменении  $\text{Im}\Omega$  от  $-\infty$  до 0 и фиксированном значении  $\text{Re}\Omega=\Omega_0$  аналогично случаю  $\mu=-1$ .) В глубине внеполосной области 3б ( $|\Omega| \gg 1$ ,  $\Omega_0 < 0$ ) для постоянных распространения волн тока можно записать  $\beta \approx -B \pm [q - 1/(B^2 + |\Omega|)]^{1/2}$ , то есть они действительны при значениях  $q > 0$ , и в системе реализуется режим пропускания. Для  $q=8$  результаты трехволнового приближения обозначены кружочками.

## Выводы

В работе исследовано влияние поля пространственного заряда на неустойчивость в системе электронный поток – электромагнитное поле вблизи границы полосы пропускания замедляющей системы. Учет пространственного заряда приводит к следующим результатам:

- Пространственный заряд может изменить характер неустойчивости с абсолютной на конвективную и наоборот, или в некоторых случаях подавить неустойчивость.

- Влияние пространственного заряда вблизи высокочастотной и низкочастотной границ полосы пропускания на режимы генерации и усиления волн существенно отличается. Вблизи высокочастотной границы полосы пропускания замедляющей системы пространственный заряд облегчает генерацию, но при этом сужается по параметру  $B$  область конвективной неустойчивости. Вблизи низкочастотной границы – наоборот, пространственный заряд затрудняет

генерацию волн. При значении параметра  $q=1$  обнаружена пороговая точка такая, что с дальнейшим увеличением пространственного заряда генерация происходит в более жестких условиях. Но при этом расширяется (по параметру  $V$ ) область конвективной неустойчивости, где возможен режим усиления волн.

Автор благодарит А.Г. Рожнева за постановку задачи и Д.И. Трубецкова за постоянное внимание и поддержку работы.

*Работа поддержана ФЦП «Интеграция» (грант № 696.3).*

### **Библиографический список**

1. Лившиц Е.М., Пятаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. С. 528.
2. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. О характере неустойчивости в ЛБВ вблизи границы полосы пропускания // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 9. С. 1104.
3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. С. 455.
4. Федорченко М.А., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. С. 176.
5. Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Dewel G., et al. Absolute and convective instabilities in a one-dimensional Brusselator flow model // J. Chem. Phys. 1997. Vol. 108 (18). P. 7609.
6. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов.радио, 1970. С. 584.

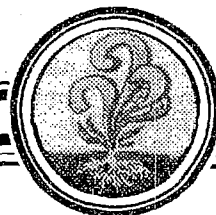
*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 20.09.99*

## **SPACE CHARGE INFLUENCE TO GENERATION AND AMPLIFICATION OF A SIGNAL DURING INTERACTION OF ELECTRON BEAM AND ELECTROMAGNETIC FIELD CLOSE TO THE CUTOFF OF SLOW WAVE STRUCTURE**

*N.O. Bessudnova*

Regimes of generation and amplification of a signal during interaction of electron beam and electromagnetic field close to the cutoff of slow wave structure are investigated taking into account space charge effect. Maps of parameters demonstrating different kinds behavior of the system were obtained. It was shown that space charge itself improves oscillations close to the high frequency cutoff of slow wave structure but makes hard them close to low frequency cutoff.



## ВЛИЯНИЕ ОТСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ НА ПРОСТРАНСТВЕННО- ВРЕМЕННУЮ СТРУКТУРУ ОПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ШИРОКОАПЕРТУРНОГО ЛАЗЕРА\*

*А.П. Заикин, А.А. Кургузкин, Н.Е. Молевич*

Рассмотрено формирование поперечной структуры оптического поля широкоапертурного лазера с отстройкой частоты. Найдены условия возникновения периодических волновых структур и основные параметры этих волн в резонаторе Фабри – Перо и резонаторе с боковыми зеркальными стенками.

### Введение

В работе [1] исследовалось влияние частотной отстройки  $\Delta = \omega_a - \omega_c$  между центром линии усиления активной среды  $\omega_a$  и собственной частотой резонатора  $\omega_c$  на характер потери устойчивости тривиального состояния равновесия ( $E=P=0$ ,  $N_i=N_{ic}$ , где  $E, P$  – комплексные амплитуды электрической напряженности световой волны и поляризации активной среды;  $N_i$  характеризует инверсию населенностей активной среды;  $N_{ic}$  – ее ненасыщенное значение) в лазере с большими геометрическими размерами при периодических граничных условиях на краях апертуры и условиях Неймана. Наиболее близким физическим объектом, соответствующим периодическим граничным условиям в [1], было узкое кольцо активной среды, получаемое с помощью специальной диафрагмы. Второму типу граничных условий соответствуют системы, имеющие отражающие боковые грани. Было показано, что пространственно–временная динамика развития лазерной генерации существенно зависит от знака отстройки  $\Delta$ . Кардинальное изменение структуры стационарного оптического поля при переходе от положительной или нулевой частотной отстройки к  $\Delta < 0$  обсуждалось также в [2–4].

В настоящей работе исследована устойчивость однородного (не тривиального) состояния лазерной генерации в широкоапертурном резонаторе Фабри – Перо и резонаторе с отражающими боковыми гранями. Показано, что при  $\Delta < 0$  могут реализовываться условия бифуркации Андронова – Хопфа, что приводит к возникновению периодических волновых структур, распространяющихся поперек апертуры. При  $\Delta \geq 0$  подобные периодические волновые структуры в данной лазерной системе не обнаружены.

\* Статья написана по материалам лекции на XI Международной школе по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 2–6 марта 1999 года.

## 1. Линейный анализ устойчивости

Уравнение для медленно меняющейся амплитуды поля  $E$  в широко-апертурном лазере в одномерном (планарном) приближении запишем в виде

$$\partial E/\partial t - i\partial^2 E/\partial x^2 = 1/2\nu E[N/(1+\Delta_a^2) - 1] + 1/2i\nu E[2\Delta_{\text{cav}} - \Delta_a N/(1+\Delta_a^2)], \quad (1)$$

где безразмерное время  $t$  и координата  $x$  связана с размерными величинами  $t_d$  и  $x_d$  как  $t=t_d/T_1$ ,  $x=x_d[2k/(T_1c)]^{1/2}$ ;  $k$  – волновой вектор;  $c$  – скорость света;  $T_1$  – время релаксации населенности уровней активной среды;  $E=E_d/E_s$  – безразмерная амплитуда поля;  $E_s$  – амплитуда поля насыщенной активной среды;  $N=g/g_i$ ;  $g$ ,  $g_i$  – коэффициенты усиления активной среды на центральной частоте лазерного перехода и потерь, усредненные по длине резонатора;  $\nu=cT_1g_i$  – коэффициент, определяющий отношение времени релаксации населенности активной среды ко времени жизни фотонов в резонаторе;  $\Delta_{\text{cav}}=(\omega-\omega_c)/(cg_i)$  – безразмерная отстройка частоты генерации от моды пустого резонатора;  $\Delta_a=(\omega_a-\omega)T_2$  – безразмерная отстройка частоты генерации от центра линии усиления активной среды;  $T_2$  – время релаксации поляризации. Заметим, что поскольку в лазерном резонаторе обычно  $cT_2g_i \ll 1$ , то  $\omega \approx \omega_c$  и  $\Delta_a$  главным образом определяется частотной отстройкой  $\Delta = \omega_a - \omega_c$ .

Уравнение (1) может быть получено усреднением квазиоптического уравнения в продольном направлении  $z$  в предположении малости изменения поля за время одного полного прохода излучения через резонатор  $\tau$ . Кроме того, полагается, что время релаксации поляризации  $T_2 \ll T_1$ ,  $\tau$ , и поэтому инерционностью поляризации можно пренебречь.

Состояние усиливающей среды в двухуровневом приближении можно описать простым релаксационным уравнением

$$\partial N/\partial t = N_c - N[1 + J(1+\Delta_a^2)], \quad (2)$$

где  $J=|E|^2$ ,  $N_c=g_c/g_i$ ,  $g_c$  – ненасыщенный коэффициент усиления на частоте  $\omega_a$ . Система уравнений (1), (2) имеет два однородных состояния равновесия. Первое состояние равновесия соответствует отсутствию генерации ( $E=0$ ,  $N=N_c$ ). Характер потери устойчивости этого состояния подробно исследован в [1,2] и здесь не рассматривается. Второе состояние равновесия ( $E=E_c$ ,  $N=N_c=1+\Delta_a^2$ ,  $\Delta_{\text{cav}}=\Delta_a$ ) соответствует режиму стационарной генерации с интенсивностью  $J_c \equiv |E_c|^2 = N_c - 1 - \Delta_a^2$ . Для исследования характера потери устойчивости этого состояния равновесия будем искать решения системы уравнений (1), (2) в автомодельном виде

$$E = E_c[1 + e(\xi)], \quad N = N_c[1 + n(\xi)],$$

где  $e \ll 1$ ,  $n \ll 1$ ;  $\xi = t - \beta x$  – автомодельная переменная;  $w = 1/\beta$  – скорость автоволны, распространяющейся в поперечном к оси резонатора направлении.

Характеристическое уравнение, соответствующее линеаризованной системе уравнений (1), (2), имеет вид

$$(\lambda + 1 + I_c)(a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0, \quad (3)$$

где

$$a_4 = \beta^4, \quad a_3 = \beta^4(1 + I_c), \quad a_2 = 1,$$

$$a_1 = (1 + I_c + \beta^2\nu\Delta_a I_c), \quad a_0 = \nu I_c,$$

$$I_c = J_c/(1+\Delta_a^2).$$

Согласно уравнению (3) критерий Раусса – Гурвица устойчивости стационарного состояния нарушается при

$$\beta^2 \Delta_a (1 + I_c + \beta^2 \nu \Delta_a I_c) + \beta^4 (1 + I_c)^2 > 0. \quad (4)$$

Таким образом, если частотная отстройка  $\Delta_a \geq 0$ , то режим однородной стационарной генерации оказывается неустойчивым для любой поперечной волны независимо от ее скорости. Это соответствует режиму генерации бесконечно большого числа плоских волн, распространяющихся под любыми углами к оси резонатора. Тем самым автомоделная схема лазера, не учитывающая конечность апертуры, оказывается слишком упрощенной. В реальных лазерных системах конечность поперечного размера апертуры ограничивает нарастание внесевого излучения за счет увеличения потерь. Кроме того, существенную роль играет дифракция излучения на краях зеркал. Структура оптического поля, формируемого в открытом резонаторе Фабри – Перо, при больших (но конечных) числах Френеля будет рассмотрена в разделе 2 настоящей статьи.

Другая ситуация складывается при отрицательной величине  $\Delta_a$ . Режим стационарной генерации теряет свою устойчивость только для волн, у которых, согласно (4),

$$\beta > \beta_{cr} = \{-(1 + I_c) \Delta_a / [(1 + I_c)^2 + \Delta_a^2 \nu I_c]\}^{1/2}. \quad (5)$$

Причем при  $\beta = \beta_{cr}$  два корня характеристического уравнения оказываются чисто мнимыми

$$\lambda_{1,2} = \pm i \omega_0, \quad \omega_0 = (1/\beta_{cr}) [(1 + I_c) / |\Delta_a|]^{1/2}. \quad (6)$$

Три других корня имеют отрицательные действительные части, то есть выполняется первая часть бифуркационной теоремы Андронова – Хопфа о рождении предельного цикла:  $\text{Re} \lambda_{1,2}(\beta_{cr}) = 0$ ,  $\text{Re} \lambda_{3,4,5}(\beta_{cr}) < 0$  [5]. Докажем, что выполняется и второе требование

$$[d/d\beta(\text{Re} \lambda_{1,2}(\beta))]_{\beta_{cr}} \neq 0. \quad (7)$$

Для этого найдем  $\lambda_{1,2}$  в малой окрестности бифуркационного параметра  $\beta = \beta_{cr}(1 + \epsilon)$ , где  $\epsilon \ll 1$ . Действуя аналогично [6], получаем

$$\text{Re} \lambda = g \epsilon, \quad (8)$$

где

$$g = \nu I_c (1 + I_c)^3 \Delta_a^2 / \{\beta_{cr}^4 [(1 + I_c)^6 + \omega_0^2 [(1 + I_c)^2 - \nu \Delta_a^2 I_c]^2]\}.$$

Такой вид действительной части  $\lambda$  удовлетворяет требованию (7). Оба условия теоремы Андронова – Хопфа о рождении предельного цикла оказываются выполненными. Из этого сразу следует возможность существования семейства периодических волн малой амплитуды, параметризованных при помощи  $\beta$  [7]. Таким образом, при  $\Delta_a < 0$  возможна потеря устойчивости режима однородной стационарной генерации с рождением волн малой амплитуды, распространяющихся со скоростью  $w_0 = 1/\beta_{cr}$  поперек апертуры лазера. Их длина волны  $\Lambda_0 = 2\pi w_0 / \omega_0$  и определяется с помощью формул (5), (6) как

$$\Lambda_0 = 2\pi [|\Delta_a| / (1 + I_c)]^{1/2}. \quad (9)$$

## 2. Периодические автоволновые структуры в широкоапертурном резонаторе Фабри – Перо. Распределенная модель

Предыдущий анализ не учитывал конечность апертуры реального лазера и дифракцию на краях зеркал. Для учета влияния этих факторов на поперечную структуру оптического поля использовалась расчетная модель лазерной системы,

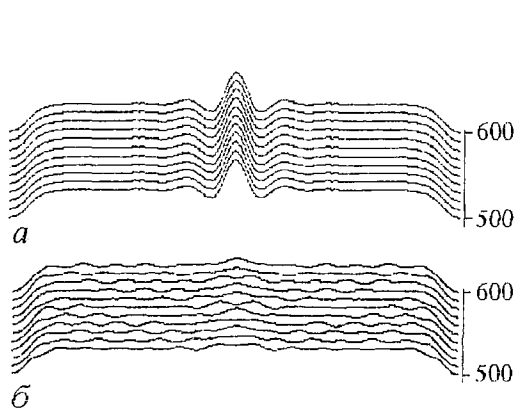


Рис. 1. Стационарная форма поля, наблюдаемая при малых отрицательных отстройках:  $a - \Delta_a=0$ ,  $b - \Delta_a=-0.53$ . Числа справа – номера итераций, соответствующих полному обходу резонатора. Параметры расчетов:  $N_c=9.5$ ,  $\nu=8.4$ ,  $N_F=300$

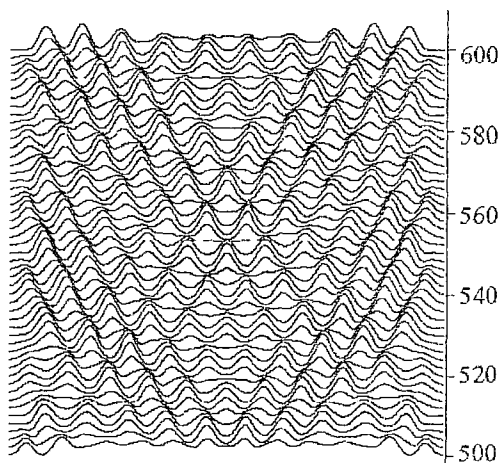


Рис. 2. Стационарная форма поля, наблюдаемая при  $N_c=9.5$ ,  $\nu=8.4$ ,  $N_F=300$ ,  $\Delta_a=-0.7$

предложенная в [8]. Активная среда учитывалась в виде бесконечно тонкого экрана, помещенного у полупрозрачного зеркала, края которого были сглажены так же, как и в работе [8]. Второе зеркало полагалось полностью отражающим и неограниченных размеров. Исходная система уравнений, описывающая динамику широкоапертурного лазера с отстройкой частоты, совпадает с уравнениями (1), (2). Уравнение для поля использовалось в интегральном виде. По формуле Френеля рассчитывалось изменение поля за обход резонатора. Затем вычислялось воздействие слоя активной среды на поле и интегрировалось кинетическое уравнение за время полного обхода резонатора  $\tau=2L/c$ , где  $L$  – длина резонатора,  $c$  – скорость света.

Поперечная структура поля рассчитывалась при варьировании параметров  $\Delta_a$ ,  $N_c$ ,  $\nu$  и числа Френеля  $N_F=a^2/(\lambda L)$ , где  $a$  – полуширина апертуры резонатора,  $\lambda$  – длина волны лазерного излучения. Коэффициент потерь зависел от величины отражения  $r_0$  и не изменялся при счете ( $G_i=2Lg_i=0.21$ ).

При отрицательной частотной отстройке  $\Delta_a < 0$  была обнаружена последовательная смена структуры оптического поля, происходящая с ростом  $|\Delta_a|$ : яркое пятно («бугор») в центре однородного стационарного поля (рис. 1,  $a$ ); затем практически однородная (за исключением краев апертуры) структура поля («П-образный контур») (рис. 1,  $b$ ); квазисинусоидальные волны, бегущие в обоих направлениях по апертуре (рис. 2); нерегулярные и сильно модулированные пространственные структуры (рис. 3). Подобная смена структур прослеживалась не только при указанных на рис. 1–3 параметрах активной среды ( $N_c=9.5$ ,  $\nu=8.4$ ,  $N_F=300$ ), но и при других  $N_c$  и  $\nu$ , причем возникновение автоволновой поперечной структуры поля происходит закономерно с увеличением параметра

$$G = g\bar{a}/w_0. \quad (10)$$

Здесь параметр  $G$  (рис. 4) характеризует усиление на половине апертуры (полное усиление еще зависит от амплитуды волн (8), но управляющим фактором смены структур является именно  $G$ );  $w_0$  – скорость волн малой амплитуды;  $\bar{a}=(4\pi N_F \tau / T_i)^{1/2}$  – безразмерная полуширина апертуры. Зависимости величин  $g$  и  $w_0$  от параметров  $\Delta_a$ ,  $N_c$ ,  $\nu$  найдены в разделе 1.

Смена структур для каждого набора ( $N_c$ ,  $\nu$ ) с изменением  $\Delta_a < 0$  происходит следующим образом. При  $\Delta_a \rightarrow 0$  вид поля типичен для широкоапертурного резонатора Фабри – Перо [9] – «бугор» интенсивности в центре апертуры (см. рис. 1,  $a$ ). Увеличение  $|\Delta_a|$  приводит сначала к появлению «П-образного контура» –

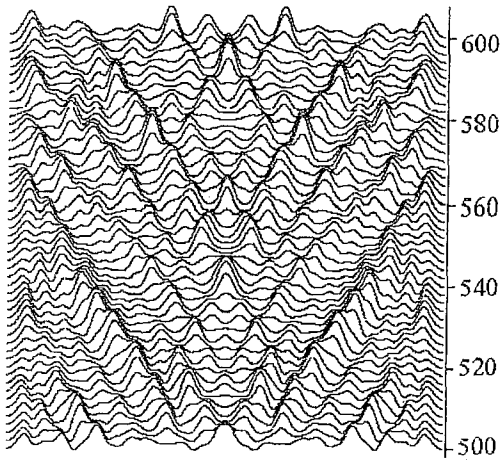


Рис. 3. Стационарная форма поля, наблюдаемая при  $N_c=9.5$ ,  $\nu=8.4$ ,  $N_F=300$ ,  $\Delta_a=-1.2$

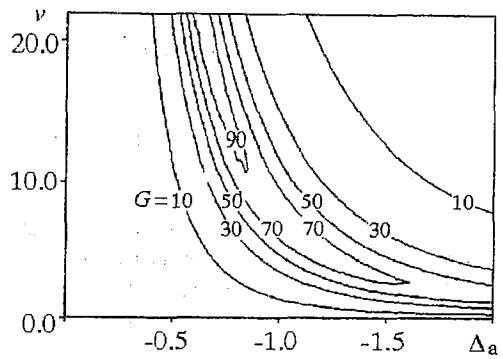


Рис. 4. Зависимость величины усиления  $G$  от  $\nu$  и  $\Delta_a$  при  $N_c=9.5$ ,  $N_F=300$

более однородной структуры поля, чем при  $\Delta_a=0$  (см. рис. 1, б). Это связано с тем, что отрицательная отстройка приводит к такой нелинейной зависимости показателя преломления активной среды, что эта среда приобретает дефокусирующие свойства и препятствует образованию дифракционной картины с «бугром» интенсивности в центре апертуры.

При отрицательных отстройках, когда  $G \geq (5 \div 10)$ , «П-образный контур» начинает модулироваться бегущими в обоих направлениях вдоль апертуры волнами. Их амплитуда сначала растет с увеличением  $|\Delta_a|$  (и  $G$ ) (см. рис. 2). Причем при малых  $|\Delta_a|$  зависимости длины волны и ее скорости от  $\Delta_a$ ,  $N_c$ ,  $\nu$  хорошо, количественно и качественно, коррелируют с соответствующими зависимостями  $\Lambda_0$  и  $w_0$ , полученными на основе бифуркационных значений. Вид волн при этом квазисинусоидальный. В центре апертуры периодически появляются стоячие регулярные структуры, связанные с суперпозицией прямой и обратной волн.

При дальнейшем увеличении  $|\Delta_a|$  амплитуда волн практически не изменяется, но меняется их структура. Пространственно-временная структура становится малорегулярной (см. рис. 3), а пространственный период оптических структур не согласуется с результатами бифуркационного анализа. В общем случае этот период вообще не определен, так как структура поля изменяется в пространстве и времени непериодично. Заметим, что увеличение  $|\Delta_a|$  соответствует увеличению пространственного периода и, следовательно, увеличению роли краевых эффектов, которые в бифуркационном анализе не учитывались.

Поскольку величина  $G \sim N_F^{0.5}$ , то при увеличении числа Френеля автоволны появлялись при меньших  $\Delta_a$ .

Отдельно было исследовано влияние положительной частотной отстройки  $\Delta_a > 0$  на структуру оптического поля. Это исследование подтвердило результаты бифуркационного анализа: периодических автоволновых структур обнаружено не было. При малых  $\Delta_a$  сохранялась картина с «бугром», то есть ярким пятном интенсивности в центре апертуры. С увеличением  $\Delta_a$  яркие пятна образуются и исчезают в разных областях апертуры, перемещаясь по ней в обоих направлениях (рис. 5). Это соответствует появлению и

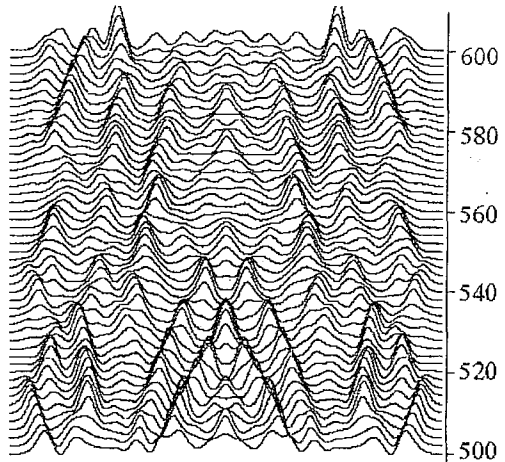


Рис. 5. Стационарная форма поля, наблюдаемая при  $N_c=9.5$ ,  $\nu=8.4$ ,  $N_F=300$ ,  $\Delta_a=0.8$

обрыву филаментов в самофокусирующей (при  $\Delta_a > 0$ ) активной среде. Теоретически подобная структура поля исследовалась для широкоапертурного полупроводникового лазера в [10].

### 3. Спектр и конкуренция автоволновых структур

В дополнение к указанным свойствам системы вблизи критических (бифуркационных) условий можно определить еще и ряд других свойств, хотя и не столь универсальным образом, но в довольно общем виде. Рассмотрим вопрос о пространственном спектре автоволн. Для этого представим колебания малой амплитуды в виде  $e^{-i\lambda t - iqx}$  и получим дисперсионное уравнение в прежнем виде – формула (3), но с заменой  $\lambda\beta$  на  $iq$

$$q^4 + q^4(1+I_c)/\lambda + \lambda^2 + \lambda(1+I_c) - q^2\nu I_c \Delta_a/\lambda + \nu I_c = 0.$$

На рис. 6 приведены решения этого уравнения для частного случая, когда

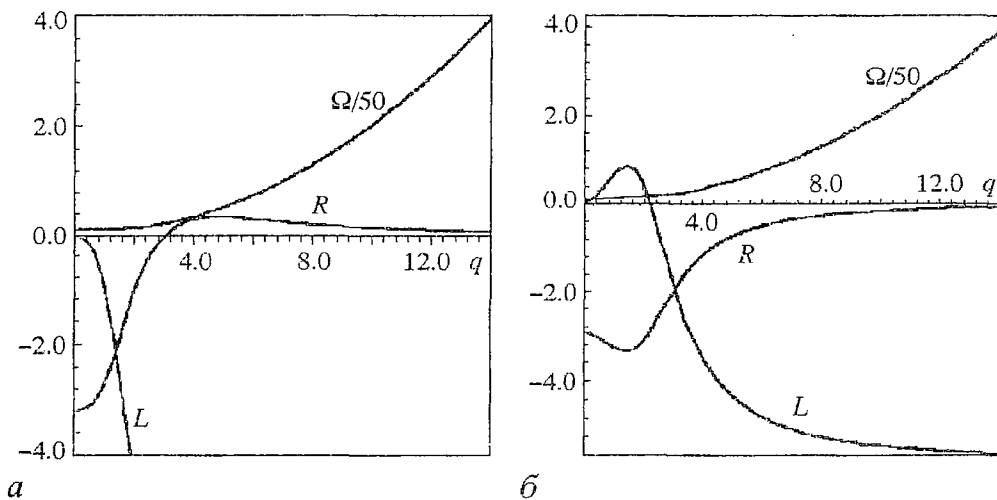


Рис. 6. Корни дисперсионного уравнения для двух значений отстройки: а –  $\Delta_a = -0.7$ ; б –  $\Delta_a = 0.8$ . Параметры лазера:  $N_c = 9.5$ ,  $\nu = 8.4$

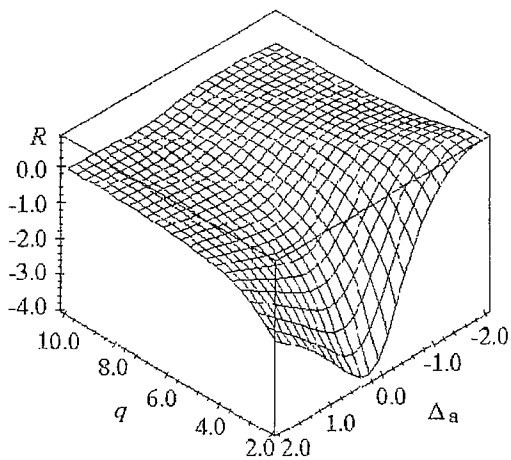


Рис. 7. Реальная часть комплексно-сопряженных корней для условий, проиллюстрированных на рис. 6

параметры равны  $N_c = 9.5$ ,  $\nu = 8.4$ ,  $\Delta_a = -0.7$  и  $+0.8$ . Но эта качественная зависимость сохраняется и при иных параметрах. Здесь изображены корни дисперсионного уравнения, обозначенные как  $\text{Re}\lambda_3 = L$ ,  $\lambda_{1,2} = R \pm i\Omega$ , причем  $\text{Im}\lambda_3 = 0$ . На рис. 7 приведена зависимость  $R$  от  $q$  с учетом изменения  $\Delta_a$ . Некоторые аналогичные зависимости приведены в работе [2].

Можно утверждать, что два корня дисперсионного уравнения комплексно сопряжены. Их реальная часть  $R$  при  $\Delta_a > 0$  всегда отрицательна. Но при  $\Delta_a < 0$  в зависимости от волнового вектора автоволн  $q$  величина  $R$  сначала отрицательна вплоть до некоторого  $q_{\min}(\Delta_a)$ . С ростом  $q > q_{\min}$  растет и  $R$ , достигает максимума



при  $q=q_0$  и затем медленно спадает, стремясь к нулю. Мнимая часть этих корней, то есть частота автоволн, резко растет с увеличением  $q$ . Третий корень при этом вещественен и отрицателен. Если же  $\Delta_a > 0$ , то у комплексно-сопряженных корней реальная часть отрицательна, а у третьего корня она положительна в некотором диапазоне  $q$ . В этом случае автоволны не возникают, проявляется иной тип неустойчивости.

На основании полученных зависимостей можно прогнозировать спектр автоволн, возможности их селекции. Ясно, что невозможно возбудить и поддерживать без дополнительных условий длинноволновые колебания. Наиболее вероятны автоволны с  $q=q_0$ , если только это допустимо при учете прочих условий (например, граничных).

Действие границ может сильно повлиять на выбор пространственной частоты автоволн. Рассмотрим здесь один из вариантов задачи, когда границы зеркальные, то есть поток световой энергии через них равен нулю:  $dE/dx|_{\pm z} = 0$ . В случае малых автоволн, когда их можно считать чисто гармоническими  $e^{-\cos qx}$ ,

граничные условия определяют такой пространственный спектр, что  $2aq = 2\pi m$ ,  $m$  – целое число. Оптимальные условия для возникновения и существования автоволн реализуются при таком  $m$ , что  $q_m$  есть ближайшее к  $q_0$  изо всех прочих. Но максимум  $R$  в зависимости от  $q$  выражен не столь уж резко, и вопрос о спектре автоволн остается открытым.

Мы выполнили детальные расчеты поведения системы с такими зеркальными боковыми границами. Расчеты делались практически так же, как и в разделе 2. Но профиль выходного зеркала полагался однородным (без сглаживания краев). Распространение поля вдоль резонатора рассчитывалось одним из сеточных методов – методом немонотонной прогонки [11].

На рис. 8, а приведена эволюция профиля оптического поля в зависимости от времени. Начальный вид поля полагался

$$E(x_d) = E_c [1 + \varepsilon \sum_{n=1}^5 \cos(2^n \pi x_d / a)], \quad \varepsilon = 0.2,$$

остальные условия были такими же, как и при расчетах, результаты которых приведены на рис. 6, а. Из рис. 8, а видно, что длинноволновые гармоники со временем угасли, а остальные присутствуют в системе. Существенно то, что вначале амплитуда этих высокочастотных гармоник была невелика, но со временем они увеличились так, что полностью модулируют профиль поля. На рис. 8, б изображена эволюция поля, содержащего вначале лишь одну длинноволновую гармонику

$$E(x_d) = E_c [1 + 0.6 \cos(2\pi x_d / a)].$$

Четко видно, как она быстро затухает. После этого в резонаторе присутствуют очень слабые высокочастотные волны, которые со временем усиливаются до значительной амплитуды.

Это вполне объяснимо, так как согласно рис. 6, а величина  $q_{\min} \approx 3$ , поэтому гармоники с  $m=2; 4; 8$ , что соответствует  $q_m \approx 0.65; 1.3; 2.6$ , гаснут, а с  $m=16; 32$  растут с течением времени, что и видно на рис. 8. Сходное поведение оптического поля было получено при изменении параметров лазерной системы в широкой области.

Полученные результаты позволяют заключить, что при названных условиях можно эффективно возбуждать автоволны в профиле лазерного оптического поля с дискретным спектром. При этом вряд ли можно эффективно осуществить их спектральную селекцию и весьма вероятно присутствие многих высших гармоник в системе. Этот вывод получен для случая искусственно упрощенных условий. Реально же высокие пространственные частоты соответствуют наличию световых волн, которые сильно отклонены от оптической оси системы, поэтому сильно

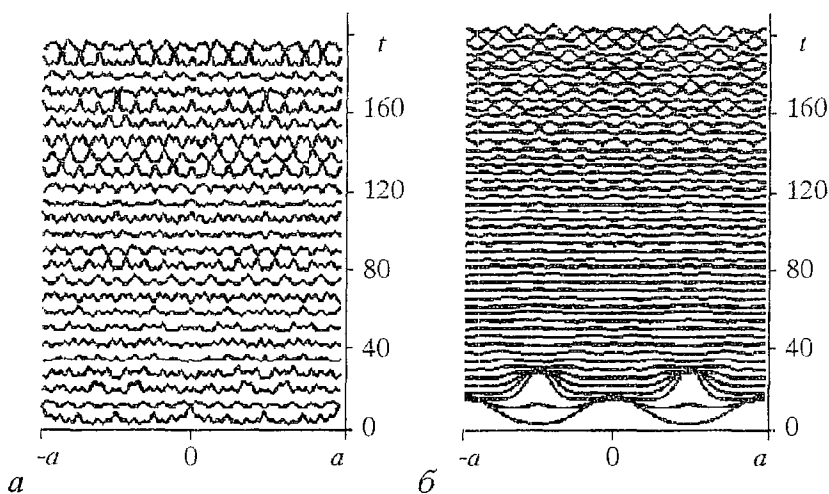


Рис. 8. Эволюция оптического поля в лазере с зеркальными боковыми стенками для условий, проиллюстрированных на рис. 6; а – начальное поле – сумма гармоник; б – одна низкочастотная гармоника.  $N_F=300$

взаимодействуют с боковыми зеркальными стенками. Можно обеспечить их затухание на стенках подбором соответствующего материала стенок. Можно также значительно погасить их, усложняя структуру стенок (например, создав разрыв в стенках). Не следует забывать также, что здесь рассмотрена одномерная (по апертуре) задача, а в реальности профиль светового поля двумерен, что дает и иные возможности воздействия на профиль поля.

### Заключение

Теоретически исследована устойчивость однородного (не тривиального) состояния лазерной генерации в широкоапертурном лазере. Показано, что при отрицательной отстройке частоты генерации от центра линии усиления активной среды могут реализовываться условия бифуркации Андронова – Хопфа, что приводит к возникновению периодических поперечных волновых структур. Найдены основные параметры этих волн – скорость, период, амплитуда, инкремент нарастания и дисперсионные характеристики.

Исследована распределенная модель широкоапертурного лазера с частотной отстройкой. Основные результаты этого исследования можно свести к следующим.

1. Показано, что небольшие отрицательные частотные отстройки приводят к более однородной картине лазерного поля в широкоапертурном резонаторе Фабри – Перо.

2. Найдена область параметров лазерной среды, где возможно наблюдение квазисинусоидальных периодических картин. Эта область соответствует величине инкремента автоволн  $G > (5 \div 10)$ .

3. Получено удовлетворительное количественное и качественное соответствие зависимостей длины и скорости волны от лазерных параметров результатам бифуркационного анализа.

4. Показано, что в резонаторе с зеркальными боковыми границами длинноволновые гармоники не возбуждаются, а высшие гармоники полностью модулируют профиль поля.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП «Интеграция» (госконтракт № 235).*

## Библиографический список

1. Григорьева Е.В., Кащенко С.А. Нормальные и квазинормальные формы для полуклассических лазерных уравнений с дифракцией // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1 С. 59.
2. Jakobsen P.K., Moloney J.V., Newell A.C., Indik R. Space-time dynamics of wide-gain-section lasers // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, № 11. P. 8129.
3. Jakobsen P.K., Lega J., Feng Q. et al. Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers: I. Analysis and numerical simulation // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49, № 5. P. 4189.
4. Huyet G., Martinoni M.C., Tredicce J.R., Rica S. Spatio-temporal dynamics of lasers with a large Fresnel number // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75, № 22. P. 4027.
5. Хэссард Б., Казаринов М., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
6. Заикин А.П., Молевич Н.Е. Генерация широкоапертурного лазера с просветляющимся фильтром в режиме излучения световых полей с периодическим бегущим профилем интенсивности // Квантовая электроника. 1997. Т. 24, № 10. С. 908.
7. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
8. Заикин А.П. Автоволновые процессы в широкоапертурном лазере с дополнительным нелинейным элементом // Квантовая электроника. 1996. Т. 23, № 6. С. 561.
9. Zaikin A.P., Molevich N.E. Transverse quasi-periodic structure laser with a saturable absorber // SPIE Proc. 1999. Vol. 3685. P. 60.
10. Marciante J.R., Agrawal G.P. Spatio-temporal characteristics of filamentation in broad-area semiconductor lasers // IEEE J.Quant.Electr. 1997. Vol. 33, № 7. P. 1174.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978. 590 с.

Самарский государственный  
аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королева  
Самарский филиал Физического  
института им. П.Н. Лебедева РАН

Поступила в редакцию 28.05.99

## FREQUENCY DETUNING INFLUENCE ON SPATIO-TEMPORAL STRUCTURE OF WIDE AREA LASER FIELD

A.P. Zaikin, A.A. Kurguzkin, N.E. Molevich

Transverse autowave structure forming in a wide area laser field with frequency detuning is investigated. Conditions of periodic transverse profile appearance and its main characteristics in a Fabry – Perot cavity and in a cavity with mirror sides are found.



Заикин Алексей Павлович – родился в Липецке (1956). Окончил физический факультет Воронежского госуниверситета (1978). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (1990). В настоящее время работает в Самарском филиале Физического института РАН. Область научных интересов – динамика лазерных оптических полей. Опубликовал около 40 работ по направлению, указанному выше.



*Кургузкин Александр Алексеевич* – родился в Перми (1977). Студент 5-го курса факультета «Информатика» Самарского государственного аэрокосмического университета. Область научных интересов – нелинейная динамика, численное моделирование. Опубликовал 4 научных работы.



*Молевич Нонна Евгеньевна* – родилась в Семипалатинске (1959). Окончила Московский инженерно-физический институт (1982). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Физическом институте АН СССР им. П.Н. Лебедева (1989). В настоящее время работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Область научных интересов – нелинейная акустика и оптика неравновесных сред. Опубликовала около 80 работ по направлениям, указанным выше.

E-mail: molevich@mb.ssau.ru



Изв. вузов «ПНД», т. 7, № 5, 1999

УДК 537.8(09)

**ОСОБЕННОСТИ МАКСВЕЛЛОВСКОГО  
«ТРАКТАТА ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ»  
И ПРИНЦИПЫ НАУЧНОГО ПЕРЕВОДА\***

*М.Л. Левин, М.А. Миллер, Е.В. Суворов*

*«War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb!»  
Goethe. «Faust»*

### **1. Принципы перевода**

Перевод любого текста, художественного или научного, обычно представляет собой компромисс между двумя крайностями – смысловым и буквальным соответствием оригиналу. Мы столкнулись с этими проблемами конкретно и практически, когда взялись за перевод максвелловского «Трактата об Электричестве и Магнетизме». Конечно, для полноценного восприятия суждений, излагаемых далее, читатель (в идеале) должен бы держать перед собой английский и русский тексты трактата одновременно. Но это недостижимо; если английский вариант еще можно попытаться извлечь из ИНТЕРНЕТА, то русский затаился на полках избранных библиотек и научных книгоцеев. Поэтому мы попытались приспособить наше изложение к суровой российской действительности и поделить ее своими взглядами на принципы научного перевода, хотя и опирающиеся на «Трактат», но воспринимаемые без особых трудностей и в отрыве от него. Вместе с тем, многие приводимые далее суждения, обращенные напрямик к «Трактату», выполняют и более широкие, чем чисто переводческие задачи, ибо характер мышления автора проявляется через его стилистику, через сочетательность в ней логики и образности. «Трактат» в этом отношении являет собой открытую книгу; «книгу нараспашку», – в ней Максвелл без утайки предъявляет себя для диагностических заключений о нем самом. Так что обсуждение особенностей перевода фактически пересекается с изучением характера Максвелла, как ученого и как человека, т. е. может служить важным дополнением к его биографии.

Итак, перейдем к изложению некоторых принципов перевода, сформулированных нами в процессе работы над «Трактатом».

Первый из них – нечто вроде *принципа стилистического соответствия*. Мы стремились не изменять максвелловскую манеру письма, не улучшать, не

\* © Приложение к переводу максвелловского «Трактата об Электричестве и Магнетизме». Н.Новгород: ИПФ РАН, 1998. 68 с.

приближать ее к современной, не трактовать «Трактат», останавливаясь в этом стремлении лишь перед неизбежными различиями языковых норм. Сохранялась не только крупномасштабная архитектоника текста, но и конструкция фразы почти всюду, где англоподобность еще не должна была, по нашему мнению, отторгать русского читателя от более или менее непринужденного ее восприятия.

Язык Максвелла своеобразен. За кажущейся простотой, частыми повторами равносмысловых утверждений, отступлениями, перескоками видится и логическая, и эмоциональная направленность, так что определенная доля аллитераций и стилистических сбоев должна восприниматься не как косноязычие, а как средство литературного воздействия, и было бы досадно выгладить это при переводе.

В своем первоначальном назначении «Трактат» имел целью изложение новых взглядов на свойства (а отчасти и на природу) электромагнетизма, и читатель тех времен следил за ходом повествования, еще не зная правильного ответа, вернее, еще не будучи уверенным в правильности его. Поэтому как сама аргументация, так и форма представления ее также поддерживала совсем иные, чем сейчас, отношения между автором и читателем.

Сохранение таких нюансов является, наверное, заповедным правилом любого перевода и уж тем паче перевода исторически значимого материала, но оно заведомо требует высокого лингвистического мастерства; поэтому – то мы, опасаясь промахов, тяготели – при отсутствии явных противопоказаний – в сторону пунктуального переноса стилистики. Этому отчасти благоприятствовало изменение функций «Трактата», происшедшее за столетие. Первоначально они были не только чисто научные, но и учебные. Как учебное пособие «Трактат» был необычен, ибо в нем много места отводилось «неокончательным утверждениям», а потому он казался многословным, допускал возможность методических улучшений и разъяснений и т. д. Вполне вероятно, что перевод его на русский язык в те времена (к сожалению, не случившийся) поощрял бы большее предпочтение смысла над формой.

Когда Максвелл представил взору физиков свое в муках рожденное детище – уравнения электромагнетизма – в еще не очищенном от плацентных наслоений виде, многие знатоки не смогли усмотреть в странных «готических уродцах» их будущей разумности, стройности и почти неземной красоты. Особенно трудно это давалось континентальным ученым (Гельмгольц, Пуанкаре и др.). Те привыкли к дисциплинированному, строго последовательному мышлению, когда любое продвижение вперед суть обобщение уже достигнутого. А тут вдруг скачком – новая фарадеевская парадигма: электромагнитное поле может отрываться от своих источников (зарядов и токов) и существовать автономно. Как это часто бывает, первоначальное отгалкивающее неприятие вскоре сменилось свехвосторженными признаниями именно на континенте. В частности, Больцман даже впал в анималистическую эйфорию, заподозрив, что уравнения Максвелла имитируют свойства живых существ, будучи способными сами творить мир электромагнитных движений. И поэтому столь торжественно звучит его молитвенно–благодарственное восклицание, заимствованное из «Фауста» Гете:

«*Was es ein Gott, der diese Zeichen schrieb!*  
(Не один ли из богов начертал нам эти знаки!)

Переводам поэзии только в редчайших случаях удается передавать все оттенки содержания и звучания оригинала, поскольку в отличие от прозы – особенно выхолощенной до логической схемы – в поэтических произведениях «настроение слов» бывает даже первичнее их смысла. Так, например, даже перевод этого пассажа, сделанный самим Пастернаком («Кто из богов придумал этот знак»), все-таки не адекватно передает то чувство благоговения перед Великими Знаками Природы, которое присутствует у Гете.

*Göthe:*

War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb,  
Die mir das innere Toben stillen,

Das arme Herz mit Freude füllen,  
Und mit geheimnisvollem Trieb  
Die Kräfte der Natur rings um mich her enthüllen?  
Bin ich ein Gott? Mir wird so licht!  
Ich schau' in diesen reinen Zügen  
Die wirkende Natur vor meiner Seele liegen.

*Пастернак:*

Кто из богов придумал этот знак?  
Какое исцеленье от унынья  
Дает мне сочетание этих линий!  
Расходится томивший душу мрак.  
Все проясняется, как на картине.  
И вот мне кажется, что сам я – бог  
И вижу, символ мира разбирая,  
Вселенную от края и до края.

Современный читатель знакомится с «Трактатом» с иными намерениями: им руководит – насколько мы вправе судить – скорее историческая любознательность, реже – желание получить фактическую справку и, почти как исключение, потребность пополнить свое предметное образование. Снятие образовательных обязанностей как раз и позволяет оставить в неприкосновенности повторы, длинноты, кажущиеся или фактические непоследовательности, загадочности и т. п. и, главное, не вносить оживляющего грамматического разнообразия там, где оно отсутствует у самого Максвелла. Например, Максвелл довольно часто, повторяясь от фразы к фразе, постепенно развивает тот или иной тезис, словно разглядывая его под разными углами. И при этом отдает предпочтение условным оборотам: «если предположить», «если допустить», «если взять» и даже «если обозначить», как бы позволяя при этом свободу и другим возможностям. Мы практически нигде не изменяли этих наклонений, хотя и понимали, что по-английски они несут на себе отпечаток меньшей осторожности, чем по-русски.

Второй принцип следовало бы назвать «*принципом наименьшего вмешательства*» или даже категоричнее – *принципом невмешательства* в авторский текст. Сам по себе он вроде бы очевиден, но предусматривает текстологическую ясность, т. е. знание того, что есть авторский текст, а как раз в этом мы испытывали некоторые затруднения. Только в совершенно очевидных случаях исправления опечаток или недочеток производились негласно. Никаких посягательств на места, казавшиеся нам странными или даже неточными, не делалось. Более того, мы старались переводить их строже, указывая при необходимости на неоднозначности оборотов. Даже комментирование таких мест могло граничить с нарушением исторического такта, т. е. с использованием разности времен и знаний на предмет снисходительного поучения.

Так мы пришли к принятию третьего принципа – *сдержанности в комментариях*. Хотя максвелловская электродинамика являет собой пример физической теории, надолго сохраняющей свой первоначальный облик в неприкосновенности, все же за прошедшее столетие был достигнут значительный прогресс в ее интерпретации и методике изложения. Множество разноплановых монографий и учебников появилось за это время и находится в активном обращении. Возросла культура и техника работы с уравнениями Максвелла, и это позволило извлекать из них результаты, на которые Максвелл вышел «независимо и много раньше», весьма экономными средствами и с большим пониманием их подчиненности общим законам и принципам. Следовательно, эти книги вполне могут сойти за развернутые комментарии к «Трактату», хотя их авторы, как правило, и не ведут свои исчисления непосредственно от «Трактата».

С другой стороны, именно методическое оснащение позволяет нам сейчас легче понимать максвелловский язык, чем его современникам. Более того, он эмоционально воспринимается как первозданный, его архаизмы не раздражают, а

те трудности, на которые сетовали некоторые «логически настроенные» первые читатели «Трактата», преодолеваются нами более непринужденно, поскольку мы приучены к полевому мышлению, обладаем обогащенной интуицией и, главное, уверенно знаем, что уравнения Максвелла правильно описывают все макроэлектродинамические явления. Так что даже выдающиеся по тем временам комментарии Больцмана (частично переведенные на русский язык) сейчас уже, по нашему разумению, не могут сопровождать «Трактат». Они принадлежат к истории преодоления недоверия, очищения здания от строительных лесов.

Последний оборот идет от самого Максвелла, который сознательно, следуя воодушевляющему примеру Фарадея, не избегал вводить читателя в свою (как сказали бы сейчас) творческую лабораторию. Да и многие другие прямые комментаторы «Трактата» фактически исполняли агитационные и очистительные функции, с которыми успешно справилась сама жизнь. И мы не сочли нужным собирать их под одним переплетом, ограничившись только ссылками. Соответственно и свое собственное отношение мы старались выражать редко и ненавязчиво, преодолев опасения быть заподозренными в нерадивости. Есть, правда, по крайней мере один изъян в тактике скупого комментирования: не раскрыты именные ссылки, даваемые Максвеллом, подобно тому, как это было сделано, например, при переводе трудов Фарадея.

Наконец, четвертый принцип работы над переводом относится к терминологии и может быть назван *принципом непосягательства на старинные слова*. Далее в п. 2 мы вкратце поясним максвелловскую систему обозначений, принятую в «Трактате», довольно многоплановую и многозначимую. Пока же сосредоточимся на чисто переводческих загвоздках. Создавая электродинамику, Максвелл, естественно, вводил множество новых терминов, которые обычно отпочковывались от образных пояснений определенных физических событий и, как многие первые обозначения понятий, были в своей эмбриональной стадии метафоричны. Установление связей между ранее, казалось бы, независимыми величинами сопровождалось совмещениями соответствующих терминов; при этом, как правило, рождалось и новое понимание их физической сущности. Значит, одновременно с эволюцией понятий происходила эволюция слов. Но, к сожалению, в английском и русском языках однозначной связи между этими лингвистическими процессами не существовало. У нас совершался свой – слегка смещенный по времени – процесс формирования электродинамического словаря. Когда речь шла о промежуточных обозначениях, играющих роль неформальных разъяснительных образов, то, поскольку они не получили в русском языке даже временного употребления, мы осмелились вставлять их в историю электродинамики ретроспективно.

Так возникли слегка непривычные нам словообразования «индуктивная способность», «магнитная индуктивная емкость» и т. п. Но в большинстве других случаев приходилось сталкиваться с уже укоренившимися словами, посягательство на которые потребовало бы переучения людей; поневоле следовало держаться старинных обычаев, несмотря на то что их создатели распоряжались ими не очень удачно, поскольку было (и будет!) не так-то просто предугадывать смысловое обогащение понятий, подстерегающее их по ходу развития науки. Действительно, многие обозначения возникли из ассоциаций с первыми, обычно экспериментальными, проявлениями: магнит, электрон, поле и т. п., а затем их содержание углублялось и утрачивало связь с происхождением.

Иногда возникает искушение (наивное, как всякое преобразование методом распоряжений сверху) взять и, собравшись с духом, провести всеобщую реформу перевода всех обозначений взамен старых, исторически сложившихся, но, увы, не отразивших окончательного назначения своего. Если такое и произойдет, то, скорее всего, при изобретении нового языка, не обремененного увесистыми традициями, языка изолированного, кастового, слова которого не будут диффундировать по живым языкам, подобно старой латыни. А пока приходится приравниваться.



Вот несколько примеров. В максвелловские времена довольно часто слово *electrification* употреблялось и для обозначения процесса заряжения, и как характеристика состояния наэлектризованности. В русском языке его функции распределились по разным словам, хотя можно было ввести зарядение и заряженность, электризация и наэлектризованность... Далее, Максвелл часто использует абстрактный образ *electrified point* (заряженная точка), а мы его вынуждены переводить как точечный заряд (*point charge*), придавая ему более модельный оттенок. То же самое несоответствие наличествует и в случае заряженного объема, строго говоря, не тождественного с объемным зарядом. И вдруг в двумерном случае русский язык разрешает эти два понятия – геометрическое (заряженная поверхность) и модельное (поверхностный заряд) – употреблять раздельно и независимо.

Другой, еще более выразительный пример принудительного следования традициям связан с запутанным использованием слова «сила». Даже в физическом словаре оно испытало сильные перегрузки. Это, прежде всего, обычная механическая сила (иногда говорят пондеромоторная, но как равнообразный синоним – без альтернатив). Ему соответствует английское слово *force*. Значит, слово «сила» ассоциируется с размерной физической величиной. Однако мы часто прибегаем к «силе» в безразмерном значении: сила тока, сила магнитного полюса и т. п. В английской лексике это уже не *force*, а *strength*, т. е. скорее напряженность или даже сильность, но не сила; с другой стороны, «напряженность» приходится прибегать для перевода английского «*intensity*», потому что «интенсивность» в русском языке выглядит как скалярное понятие, тогда как напряженность может смотреться и как векторное тоже... Перечень этих пересечений можно было бы продлить. До сих пор в ходу понятие «живая сила», которая имеет размерность энергии или лошадиной силы, имеющей размерность мощности (*horse power*). В общем, основания к преобразованию обозначений вполне аргументируемы, и, в принципе, их следовало бы начать с переписывания исходных монографий, но это задержало бы перевод «Трактата» на неопределенный срок, ибо человечеству пока еще не суждено договориться даже и по более важным вопросам.

## 2. Терминология, обозначения

В нашем современном представлении «Трактат» схож с книгой, миновавшей процедуру внутрииздательского редактирования. Правда, сейчас, когда он перешел в ранг исторических памятников, это обстоятельство имеет и благоприятные стороны, поскольку его с большим основанием можно воспринимать как истинно максвелловский, почти «рукописный» документ и изучать с его помощью даже некоторые психологические аспекты творчества (что, кстати, часто затрудняется в наши дни из-за возрастающего вмешательства в текст «теневых соавторов»). Символика и терминология «Трактата» тоже показательны. Максвелл порой необычно многообразен в словесных наименованиях сходных или даже одинаковых физических величин. Некоторые его понятия живут, развиваются, а затем исчезают вовсе, другим он остается верен до конца, иногда чередуя две или три их разновидности. Например, диэлектрическая проницаемость сначала появляется как электрическая индуктивная способность (емкость, *capacity*), потом – как диэлектрическая постоянная, потом – как проницаемость.

Это отражает действительную картину разнообразия, имевшего место до максвелловского объединения статического и переменного электромагнетизма с оптикой. Аналогичные многоликости свойственны и электромагнитным полям; они обретают разные имена почти при всяком своем независимом появлении на свет. Если речь идет об электрическом поле, то это и электрическая сила (*electric force*), когда оно определяет воздействие одного заряда на другой, это и электрическая интенсивность (*electric intensity*), когда оно – самостоятельное (оторванное от источников) поле в среде – (оставаясь, однако, по-прежнему величиной векторной, направленной вдоль линии силы), это напряженность ЭДС

или даже просто ЭДС в точке (*electromotive intensity, electromotive force at a point*), т. е. плотность ЭДС (*at a point density*), прежде всего, когда электрическое поле возникает в результате изменения магнитного потока.

А вот с напряженностью магнитного поля никакого разнослова нет – она всегда фигурирует как магнитная сила (*magnetic force*), хотя, заметим, и не обладает размерностью механической силы. Конечно, метания не случайны: они отражают изменения взглядов на понятия и то состояние поиска, в котором пребывал Максвелл при написании «Трактата» и даже после. Некоторые из терминов (*displacement, flux, current*) носят следы аналогий, моделей. Как мы знаем, впоследствии разные по происхождению поля  $E$  слились в одно электрическое поле, а поле  $H$  так и осталось самим собой (т. е. магнитным полем), утратив лишь отвлекающую «силовую часть». Что же касается векторов  $D$  и  $B$ , то здесь терминология и вовсе не претерпела изменений: и у Максвелла, и в наши дни употребляются на равных правах термины электрическое смещение и электрическая индукция (это  $D$ ), и всюду без исключений – магнитная индукция (это  $B$ ). При этом иногда Максвелл придает этим понятиям и смысл векторной плотности соответственно электрических и магнитных потоков, но слово «плотность» опускает, называя все это просто потоками (*flux*), а то, что сейчас называется потоком, он обозначает как полный (интегральный) поток (*total flux*).

Здесь мы были вынуждены отступить от «принципа сохранения устаревших слов» и следовать поздней терминологии. Иначе современный читатель вконец запутался бы, или же текст был бы испещрен назойливыми пометками. Обратим внимание, что в наше время некоторые часто встречающиеся термины дублируются привычно закрепленными за ними буквами, приобретающими тем самым функции и обозначений, и наименований. Но такая стандартизация электромагнитной символики (в ряде случаев интернациональная) пришла позже, в «Трактате» почти для всех векторных величин Максвелл прибегает к заглавным готическим буквам, непривычным для глаза многих пользователей даже из латиноалфавитных стран, поэтому первоначальные максвелловские обозначения не получили никакого распространения, что, между прочим, не так уж часто бывает в физике.

### 3. Структура

Несколько слов о внутренних, методических особенностях структуры «Трактата». Сейчас сложился прочный стереотип изложения основ макроэлектродинамики. Он состоит в двухэтапном подходе. На первом этапе осуществляется сборка экспериментальных фактов и ступенчатое обобщение охватывающих эти факты законов. Это стадия индуктивных догадок и обобщений, стадия восхождения к уравнениям Максвелла. Затем они постулируются как исходные, первоначальные законы Природы, и далее изучаются результаты последовательного дедуктивного приложения этих законов к разным, в той или иной степени упрощенным моделям и сопоставляются с доступными наблюдениям фактами. Эта стадия исследования решений уравнений относится сейчас в основном к теоретической физике – разделу, посвященному теории электромагнитного поля.

Не будем стремиться понять, почему первая – восходящая ветвь – считается более общей (точнее, более экспериментальной) физикой, чем вторая. Важно иное. Ведь обучение многим знаниям, не только физике и не только электромагнетизму, происходит, как правило, двухзаходно, причем индуктивная цепочка предшествует дедуктивной (этими словами здесь и далее мы оперируем несколько упрощенно и скорее в целях обозначений, а не характеризования, т. е. отнюдь не утверждая, что индуктивные и дедуктивные приемы так категорично принесены по стадиям). Наверное, считается, что воспроизведение в целях обучения этого естественного хода познания законов природы (а ведь именно так мы осваиваем окружающий мир по мере своего взросления) адекватен

психоневрологической сущности людей. Исторически впервые такой прием был испробован на механике. Там, отталкиваясь от законов равновесия и движения простейших тел под воздействием на них внешних сил, постепенно наращивались обобщения с выходом на аналитическую динамику сплошных (непрерывных) сред, вершинные уравнения которой могли быть извлечены из принципа наименьшего действия.

В середине XIX в., когда у Максвелла созрели намерения привести в систему многочисленные разрозненные факты и законы, относящиеся к электромагнетизму, эта программа построения Великой Науки Динамики (мы употребляем здесь максвелловские эпитеты и максвелловский способ придания патетичности высказываниям путем привлечения заглавных букв к заглавным словам) была во многих своих частях завершена. Но Максвелл, опоздав стать ее создателем, несомненно являлся ее знатоком и воплощением. На опыте динамики можно было основывать методiku создания и других динамико-подобных (тоже максвелловский оборот) наук: наикратчайшими путями выходить на наиболее общие законы, которые затем анализировать и сопоставлять с наблюдениями во всех наивозможнейших частных ситуациях. И вот эту работу Максвелл проделал, можно сказать, в одиночку, тогда как в Динамике она соединила усилия нескольких поколений разнохарактерных создателей (Ньютон, Эйлер, Лагранж, Гамильтон...).

Конечно, и у Максвелла были Великие и Проницательные Предшественники, в первую очередь Фарадей, но функции обобщения, объединения и анализа Максвелл исполнил сам. В этом смысле «Трактат» можно квалифицировать как первый в истории образец научного произведения (мы не знаем, есть ли второй), соединившего в себе основополагающую монографию, т. е. фолиант, систематизирующий старые и устанавливающий новые связи в природе явлений, и учебно-методическое пособие, педагогически последовательно, двухэтапно вводящее обучающегося читателя (у Максвелла неоднократно прорываются прямые обращения – «учащийся», «обучающийся», «студент») в курс нового знания и понимания. Наверное, мы несколько утрируем картину, но намеренно, чтобы контрастнее выставить максвелловский замысел «Трактата» – в едином сочинении провести охват всего электромагнетизма по восходящим и нисходящим путям. Эта программа раскрывается в самом начале «Трактата».

Вот что пишет Максвелл в Предисловии: «Я полагал бы, что будет полезен трактат, который имел бы главной своей задачей охват всего предмета в целом, с общей методической точки зрения...». Кстати сказать, Предисловие к «Трактату» заслуживает отдельного изучения, это самостоятельное произведение науки (и науковедения). Затем Максвелл возвращается к вопросу о структуре книги по мере продвижения вперед. У него есть даже специальный пункт (сохранившийся при подготовке второго издания!) – «План Трактата и сводка его результатов». И допустимо предположить, что он вернулся бы к обсуждению этих вопросов в Заключении к последующим изданиям, если бы жизнь предоставила ему такую возможность.

#### 4. Основные идеи

Казалось бы, не должно возникать трудностей выявления основополагающих идей, на которые опирался Максвелл при создании общей теории электромагнетизма: он неоднократно и подробно (местами, как считалось некоторыми его современниками, даже излишне пространно) пишет о них сам. Мы выделим их примерно в том же порядке, в котором они развиваются в «Трактате». Прежде всего, это понятие физического поля; затем – скалярных и векторных величин, описывающих поля математически; далее – принцип близкого действия, как-то естественно проистекающий из принятия существования полей, непрерывно распределенных в пространстве и изменяющихся во времени; наконец, введение тока смещения на равных правах с током проводимости (и током

конвекции), благодаря чему упрочивался вывод об универсальном соблюдении закона сохранения заряда (уравнение непрерывности для тока аналогично соответствующему уравнению в гидродинамике).

Однако помимо этих идей «Трактат» содержит и другие, столь открыто не провозглашаемые, но тоже весьма значимые. В некоторых случаях это стало понятно лишь впоследствии, через поколения.

В историческом плане сюда же примыкает и вопрос о предшественниках, особо близких, непосредственных, тех, кто своими результатами, предсказаниями и т. п. инициировал максвелловские раздумья над явлениями электромагнетизма, и тех, кто, по существу, снабдил его удобным для описания этих явлений инструментарием.

Максвелла – за редчайшими исключениями – отличала тактичность и уважительность ко всем предшественникам. Но одного он выделял особо как образец Научного Величия и Научного Ясновидения. Речь идет, конечно же, о Фарадее. Вряд ли в те времена существовал какой-либо другой ученый, кроме Максвелла, проштудировавший «Труды» Фарадея так тщательно, так проникновенно и так благожелательно к ним. А ведь многим ревнителям строгих правил некоторые содержащиеся в них умозаключения казались, мягко говоря, не совсем вразумительными. Это какой-то парадоксальный стереотип «непризнания признанного». Человек, уже прославивший Великим Исследователем Природы, казалось бы, должен был хотя бы настораживать людей каждым своим размышлением, намерением, поступком. А они, как замороженные, отмечают их, не вникнув, будто руководствуются какими-то тягостными соображениями типа «он так долго был прав, что когда-то должен начать быть неправым».

Фарадей был, по-видимому, человеком, которому нет и не может быть объяснений, если под таковыми понимать логические доводы. Он соединял в себе дотошную приверженность фактам, подкорковую бдительность к отвлекающим случайностям с симфоническим воображением, позволявшим ему составлять правильное представление о свойствах ответов без решения задач и без умения решать их в общепринятом понимании. По-видимому, он действительно приводил в состояние раздражения немалое число «аналитиков» (Максвелл называет их «*professed mathematicians*»), возможно, используя двусмысленность слова «*professed*» – профессиональный и считающий себя таковым), вынужденных признавать его Великие Открытия и не признавать свою неспособность проникнуться его образным мышлением. А ведь такие люди, как Фарадей, принадлежат сами к странным («аномальным») явлениям природы, именно потому и могли столь непринужденно просто углядывать не менее странные явления в Природе вообще. Вероятно, кое-что, свойственное Фарадею, относится к самому Максвеллу, открывшему *этого* Фарадея, т. е. прочитавшему и расшифровавшему фарадеевские «письмена» с доверием к ним. Максвелл скромно сводит свою заслугу к переизложению идей Фарадея на язык математических соотношений. Но его показания не должны нас дезориентировать: мы понимаем, что само по себе открытие *этого* Фарадея потребовало от Максвелла не меньшего преодоления инерционности мышления, чем когда дело касалось явлений, причисляемых к неодушевленным.

Главнейшей концепцией Фарадея была концепция континуума, непрерывно распределенного в пространстве действия, поля – сначала поля электрических и магнитных сил, а потом уже и единого электромагнитного поля. Она не воспринималась всерьез его современниками, скорей всего, из-за того, что аналогия с механикой требовала введения какой-то особой эфирной среды, наделенной вымороченными свойствами. Максвелл не сразу, но сумел преодолеть этот «страх среды». Сначала он придумал механико-подобную электродинамику, затем фактически устроил механические подкрепления фарадеевской концепции поля и построил теорию этого поля, как потом стали говорить, феноменологически, оперируя с полями как с первоначальными физическими сущностями. Именно таким образом обстоит дело в «Трактате», в чем заключается его первостепенная научно-методическая значимость. Мы уже настолько

привыкли к неизбежности обращения на том или ином иерархическом уровне описания к феноменологическим постулатам, что нам нелегко оценить то идеологическое мужество, которое нужно было проявить Максвеллу для принятия столь нетривиального решения. Это ведь не только про электродинамику, это про познание окружающего мира вообще.

Фактически еще ранее в теории гравитации (не говоря уже прямо об электростатике), развиваемой Лапласом, Пуассоном, Грином, было использовано понятие поля, в частности поля скалярного потенциала и градиента от него, дающего силу, и все работали с этими понятиями, не подводя под них никаких несущих сред, но почему-то считали их не более чем математическими абстракциями. Максвелл неоднократно вызывает к данному примеру как к иллюстрации удивительного взаимонепонимания между математически и физически мыслящими людьми, ибо полевая концепция Фарадея по существу состояла лишь в придании этим и аналогичным им решениям смысла наблюдаемых величин.

Приняв концепцию поля, Максвелл прежде всего предпринял пересмотр (и этому посвящена изрядная часть «Трактата») всех доселе известных и сравнительно хорошо разработанных разделов электричества, магнетизма и проводимости («conductance» – снова трудности перевода, по-русски это делается с помощью длинного оборота – «процесс прохождения токов по проводящим средам»). При этом Максвелл столь же непринужденно, сколь это делается в гидродинамике, вводит, кроме потенциальных векторных полей (обычных, но, заметим, отнюдь не обязательных даже в электростатике), поля вихревые. И хотя он нигде не дает явного доказательства простой, но определяющей многие топологические особенности векторных полей теоремы о представлении произвольного векторного поля в виде суперпозиции потенциального и вихревого, он широко пользуется таким разбиением как очевидным.

Следующий шаг должен был состоять в развитии аппарата векторной алгебры и анализа. Аппарат в том виде, в котором мы владеем им сейчас, как известно, был отработан чуть позже, но можно сказать, что это произошло в основном по заказу теории электромагнитного поля. Не следует, однако, принижать и прямой максвелловский вклад: Максвеллу принадлежит понимание адекватности векторного анализа, не говоря уже об инициативе его использования. Бытует мнение, что будто бы он предпочитал работать только с декартовыми компонентами векторов. Действительно, при решении многих конкретных задач (да еще при извлечении преимуществ от разделения переменных) он широко пользовался записью уравнений через проекции (не обязательно декартовы, разумеется). Но он не пропускал почти ни одной возможности – по крайней мере, в «Трактате» написания общих уравнений в инвариантном векторном представлении. Правда, максвелловские обозначения не совсем привычны нашему глазу. Следуя Гамильтону и Тэту (а в те времена больше и некому было следовать), он стал работать со скалярами и векторами как с компонентами кватернионов.

Напомним, что кватернионом называется объект, состоящий из четырех компонент: одного действительного скаляра и трех мнимых составляющих вектора, причем каждой декартовой координате приписывается своя мнимая единица. Таким образом, вместо одной обычной мнимой единицы  $i$ , характеризуемой свойством  $i^2 = -1$ , вводится три  $i, j, k$  ( $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ), их различие между собой определяется попарной некоммутативностью, а именно  $ij = k = -ji$ ,  $jk = i = -kj$ ,  $ik = -j = -ki$ .

Сейчас мы понимаем, что привлечение кватернионов удобно упрощает вычисления, связанные с некоммутативными величинами, например при трехмерных вращениях, теория которых была заложена еще Эйлером. Но в максвелловские времена люди не обращали внимания на такие тонкости, и кватернионика Гамильтона считалась чем-то вроде символа обособления гордой ирландской самобытности. А Максвелл принял ее в качестве рабочего инструмента и приспособил обслуживать фарадеевские поля, ибо кватернионика

позволяла установить правила не только сложения, но и умножения векторов, а следовательно, открывала путь к построению векторного дифференциального исчисления. Действительно, если рассматривать векторное поле  $\mathbf{A}$  ( $A_\alpha$ ,  $\alpha=1, 2, 3$  – индексы соответствуют номерам координатных осей) как векторную часть кватерниона  $\mathfrak{A}$  (следуя Максвеллу, снабжаем кватернионы готическими обозначениями), то произведение двух чисто векторных кватернионов (их иногда называют ассоциированными)  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ , выполненное с учетом правил коммутации  $i, j, k$ , будет содержать *векторную часть* (Максвелл обозначает ее  $V \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B}$ ) и *скалярную часть* ( $S \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B}$ ), и ничего более. Судя по воспоминаниям, Гамильтон очень гордился этим результатом и имел к тому основания.

В современном представлении через действительные проекции произведение векторов  $A_\alpha$  и  $B_\beta$  в общем случае выглядит как симметричный диадный тензор  $A_\alpha B_\beta$ . По известной теореме приведения он может быть разложен на три «элементарных» (неприводимых) группы: группу скаляров  $A_\alpha B_\alpha$  (по дважды встречающимся индексам производится суммирование  $\alpha\alpha = \sum_{\alpha=1}^3$ ), группу векторов (псевдовекторов)  $e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma$  ( $e_{\alpha\beta\gamma}$  – единичный антисимметричный тензор) и группу симметричных тензоров с нулевым следом ( $A_\alpha B_\beta + A_\beta B_\alpha - 2/3 \delta_{\alpha\beta} A_\gamma B_\gamma$ );  $\delta_{\alpha\beta}$  – единичный симметричный тензор; последняя группа повышает ранг описания *векторных* полей и потому «не задействована» в формулировке скалярных и векторных уравнений электродинамики (во всяком случае, применительно к неэкзотическим ситуациям). Кватернионная операция умножения векторов производит это отнесение тензоров второго ранга автоматически.

Этими несколько подробными сопоставлениями векторных действительных и векторных кватернионных манипуляций мы, с одной стороны, дополняем информацию п. 2 об обозначениях «Трактата», а с другой – хотим отметить высокое качество принятой в нем терминологии, в определенном смысле более адекватной существу дела, чем наша. В самом деле, *скалярная часть* произведения векторов

$$S \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B} \rightarrow \mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$$

и *векторная часть* произведения векторов

$$V \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B} \Rightarrow [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \rightarrow e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma$$

лингвистически последовательнее отражают существо теоремы приведения, чем наши в общем – то жаргонные обороты *скалярное* и *векторное произведение*.

Конечно, сейчас большинство из нас является приверженцами описания скалярных и векторных полей в действительных переменных, считая его нагляднее кватернионного. Но ведь наглядность – свойство человеческое – прививаемое и воспитываемое. А по строгости оба подхода равноправны.

Далее Максвелл, тоже вслед за Гамильтоном, вводит оператор дифференцирования  $\nabla = i\partial/\partial x_1 + j\partial/\partial x_2 + k\partial/\partial x_3$ . Собственно говоря, это и есть истинный оператор Гамильтона, а наш модифицированный вариант «набла» приспособлен к действительным переменным и не содержит комплексных факторов  $i, j, k$ . С помощью этого оператора образуются три новых математических образа: градиент скаляра ( $\nabla \cdot \phi$ ), ротор, или вихрь вектора,

$$V \cdot \nabla \mathfrak{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow e_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta A_\gamma$$

и конвергенция (равная дивергенции с обратным знаком)

$$- S \cdot \nabla \mathfrak{A} = -\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla_\alpha A_\alpha$$

а также соответствующие операции второго порядка, важнейшая из которых,

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha},$$

эквивалентна «нашему» лапласиану с противоположным знаком.

Важность этого математического языка несомненна. Без него уравнениям поля не удалось придать бы столь универсального охвата. Так что второе открытие Максвелла в «одушевленной части» природы было связано с кватернионикой Гамильтона, и оно произошло тоже, как и в случае Фарадея, вопреки общепринятым мнениям профессионалов. Конечно, Максвелл не довел этот аппарат до современного автоматизма, базирующегося на небольшом числе векторных тождеств, с которыми сейчас быстро осваиваются студенты, но это не умаляет его общей заслуги. Тем более, что он пошел в определенном смысле дальше. Ведь его цель состояла в придании аналитического представления идеям Фарадея, а тот видел поля, как целостные электрические и магнитные «пейзажи», что было адекватно лишь крупномасштабной топологии. И в этом случае Максвеллу опять «повезло»: его снова «поджидал» практически завершённый аппарат интегральных теорем, известных нам как теоремы Гаусса – Остроградского и Стокса, который позволил написать уравнения электромагнитного поля в интегральной форме. Правда, в отличие от дифференциальных, эти уравнения не собраны воедино в «Трактате», а разбросаны по специализированным главам. Но, как следует из Предварительной главы, Максвелл намеревался систематизировать свои топологические идеи на базе критериев перифрактичности, характеризующих трехмерные многосвязные области.

К сожалению, нам не дано восстановить ход его замыслов. И поэтому, вероятно, некоторые фрагменты рассуждений на эти темы мы принимаем скептически. Например, Максвелл различает векторные поля двух типов – потоковые (пронизывающие поверхности, «ассоциируемые» с ними) и силовые (направленные вдоль линии, «ассоциируемые» с линиями). Такая классификация кажется нам отчасти ситуационной: она, с нашей точки зрения, выполняла функцию наведения, т. е. помогала Максвеллу связать между собой изменения электрических и магнитных полей в пространстве и во времени, но не более того. Формулируя закон индукции Фарадея в интегральной форме

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

(всюду, где не оговорено иное, мы пользуемся в Послесловии гауссовыми единицами и стандартной современной символикой), Максвелл различал общетопологические свойства конфигураций, образованных полями  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  (работает только их вихревая часть, закручиваемая вдоль замкнутых линий) и полями, пронизывающими поверхность, ограничиваемую этим контуром. Отсюда вытекала максвелловская классификация, касающаяся потоковых и силовых векторов. К числу линиейподобных векторов Максвелл относил  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  и т. п., а к потоковым векторам –  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ , плотность электрического тока  $\mathbf{j}$  и т. п. Но, уже придя к уравнениям материальных связей в виде  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , он признал равноправие векторных полей обоих типов, в том числе и топологическое равноправие.

Следующий этап состоял в использовании всего перечисленного выше идейного и технического оснащения для установления наиболее общих закономерностей электромагнетизма. Сотни, а может быть и более, работ посвящены изучению фактических и предполагаемых путей, которым следовал или мог следовать Максвелл при продвижении к своим Великим Уравнениям.

Прежде всего у него на вооружении был принцип близкодействия, в согласии с которым все возмущения (а значит, и электрические – магнитные тоже) должны передаваться в пространстве с конечной скоростью и территориально последовательно – от одного элемента пространства (среды) к другому, прилегающему к нему (*adjacent*). Это означало, что соответствующий

математический аппарат должен был опираться на дифференциальные (а не разностные или дифференциально-разностные) уравнения в частных производных по координатам и времени.

После этого он записал все известные до него законы электромагнетизма в форме таких уравнений. И сделал решающий шаг, дополнив их током смещения. Что же побудило его к этому? Вопрос становится уже отчасти «легендарным» в том смысле, что ответ на него обрастает историческими легендами. Совсем не просто вжиться в предыдущую эпоху из последующих: невольно прокрадывается стремление придать ходу истории большую целеустремленность и последовательность, чем она может себе позволить сама. В итоге возникают различные реконструкции, использующие методику и логику уверенного в своей правоте будущего. Вполне возможно, что Максвелл привлекал все доводы, какие были вскрыты или допридуманы потом в научно-исторических исследованиях, но одни из них играли роль первичных догадок, а другие – проверок на внутреннюю непротиворечивость и на внешнюю совместимость с общими законами природы.

Вероятно, его внимание привлекало простейшее модельное рассуждение, опирающееся на аналогию с «верной» Динамикой. Оно состояло в необходимости возникновения реального смещения «зарядоносителей» под действием силовых полей. Отсюда и эта терминология из теории упругости: вектор электрического смещения, ток смещения (тоже электрического, ибо соответствующая ему величина в магнетизме оставлена безымянной). Затем допустимо думать, что были привлечены размышления о прохождении электрического тока по последовательной цепи проводник – емкость, когда условия непрерывности изменения окружающего магнитного поля вдоль цепи вынуждают ввести какое-то продолжение тока проводимости внутри конденсатора.

Далее, может быть, уже на уровне контроля возникла формально математическая потребность привести нововведение в непротиворечие с уравнением непрерывности для тока, что тоже удачно сочеталось с модельной картинкой, заимствованной из аналогии с механикой непрерывных сред. Был еще один путь получения правильных уравнений – их симметризация. Максвелл тщательным образом сделал все необходимые для этого заготовки, фактически сформулировав принцип дуальности (двойственности) электрических и магнитных полей в статическом приближении, но никаких слов о распространении этого принципа на изменяющиеся во времени поля в «Трактате» нет. Возможно, это чисто случайный пробел, и тогда он был бы наверняка восполнен при следующей правке «Трактата», но возможно и другое – Максвелл не пошел на введение каких-то фиктивных магнитных токов, поскольку они не укладывались ни в какие модельные представления. А ведь он был поборником модельной физики и, по-видимому, должен был представлять себе модельно все, что умел понять.

Наконец, если не держаться только явных свидетельств, содержащихся в «Трактате», то следует иметь в виду и такие поступательно-возвратные поисковые движения мысли, как подгонка исходных положений теории для получения законов, ведущих к разумным толкованиям наблюдаемых эффектов. Действительно, историческое реконструирование сходно с составлением сценария по законченному и отснятому фильму, а творческий процесс может включать в себя фрагменты, не попавшие в итоговые кадры. Скажем, стремясь соединить (по программе Фарадея) электромагнетизм с волновой оптикой, можно было отталкиваться от волнового уравнения для полей (или потенциалов) и надлежащим образом подправить систему уравнений первого порядка.

И все же аналоговый подход был для Максвелла, наверное, самым важным подкреплением чувства правоты. Как уже говорилось выше, «Трактат» являет собой произведение почти очищенное от динамического оснащения, хотя и с ярко выраженным динамическим прошлым. В нем просматриваются две функции, исполненные Великой Наукой Динамикой. Первая состоит в установлении взаимных аналогий между гидродинамикой и электродинамикой, что не только не утратило, но и повысило свое значение впоследствии. В современном понимании Максвелл предложил принципиальные схемы построения аналоговых машин,

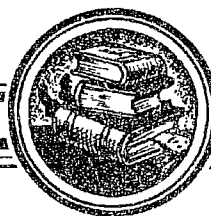


причем сделал это не так, как обычно делается сейчас на основе общности математического описания, а наоборот – в предварении составления уравнений, как раз и получая свои уравнения из соображений физического сродства явлений. Привычность нашего обращения с аналогами, возможно, приглушает неочевидность максвелловского достижения. Тем более что потом направление этой аналогии изменило знак: для понимания и интерпретации явлений различной природы (в том числе и явлений динамических) теперь обычно уже используются электродинамические системы благодаря их доступной осуществимости и простоте интуитивных представлений.

С другой стороны, ориентация на Динамику выполняла еще одну функцию – функцию установления единства взглядов на устройство мира. В те времена Динамика была единственной областью физики с логически замкнутым описанием (постулаты → измерения → правила → измерения → выводы → измерения → постулаты) и сопоставление с ней давало некоторую страховку в том, что новая теория не войдет в противоречие с некоторыми общими физическими принципами (например, и прежде всего, законами сохранения), а это на начальном этапе было еще не так-то просто сделать напрямик. В таком объединении взглядов на гидродинамику и электродинамику Максвелла поджидал еще один успех. По аналогии с механикой он построил функцию Лагранжа для электромагнитных процессов (которая в случае электромеханических систем получила известность потом как функция Лагранжа – Максвелла). Похоже на то, что он и сам недооценил общезначения этого достижения. Ведь фактически этим был проторен путь познания любого вида взаимодействия, для осторожности скажем, неживой природы.

Руководствуясь разумными доводами (например, поведением представительных моделей в представительных условиях или соображениями симметрии, инвариантности и т. п.), можно попытаться угадать вид функции Лагранжа, а затем испытать ее на верность по стандартной схеме: уравнения движения → интерпретация → сравнение с экспериментом. Эта схема позволила, в частности, проникнуть в физику калибровочных полей. Она выглядит настолько естественной, что даже не ассоциируется с именем Максвелла – предельный случай полного признания, когда авторство утрачивается в силу общечеловеческой значимости, как при изобретении колеса.

*(Окончание следует)*



Изв.вузов «ПНД», т.7, № 5, 1999

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ

### Том I

*Ю.Л. Климонтович*

Дается систематическое изложение идей, методов и результатов современной статистической теории открытых систем – систем, которые обмениваются с окружающими телами веществом, энергией и информацией. Благодаря этому в них, наряду с процессами деградации, происходят и процессы самоорганизации, в результате которых возникают более сложные и более совершенные структуры. Рассматриваются статистические критерии самоорганизации, в частности, критерий «S-теорема». Он основан на сопоставлении знаний энтропии, перенормированных к определенному уровню средней эффективной энергии. Анализ относительной степени упорядоченности состояний открытых систем проводится непосредственно по экспериментальным данным. Критерий дает проверку правильности выбора параметров, управляющих процессами эволюции. Показана возможность единого описания кинетических, гидродинамических и диффузионных процессов в пассивных и активных макроскопических системах без привлечения традиционной теории возмущений. На этой основе через градиент энтропии вводится общее определение теплового потока. Проведен последовательный расчет кинетических и гидродинамических флуктуаций. Этот подход широко используется и при построении теории классического и аномального броуновского движения в нелинейных средах. Развита теория открывает также возможность новой трактовки явления турбулентности и единого кинетического описания ламинарного и турбулентного движения. Предложенные методы используются также для статистического описания квантовых макроскопических открытых систем. Это позволяет дать ответы на «вечные вопросы»: Является ли квантовомеханическое описание полным? Существуют ли в квантовой теории скрытые параметры?

Книга не имеет аналогов в мировой литературе. Она представляет собой монографическое учебное пособие и написана в значительной мере на основе оригинальных работ автора.

© Ю.Л. Климонтович, 1995  
М.: ТОО «Янус», 1995. 624 с.  
ISBN 5-88929-001-0

### Предисловие к русскому изданию

В течение многих лет существовала практика, когда переводы на английский язык публиковались позднее, чем на русском. Это давало возможность вносить в английское издание определенные улучшения и дополнения. Ситуация в настоящее время изменилась и издание книги на английском языке опережает издание ее на Родине автора.

Такова судьба и этой книги. Однако, как говорится, «Нест худа без добра». Англичане выражают это более поэтично: «Each dark cloud has a silver board». Действительно, благодаря некоторой задержке удалось еще раз просмотреть текст

и внести в него некоторые коррективы и дополнения. Благодаря этому книга на русском языке лучше ее английского «двойника».

Все сказанное в Предисловии к английскому изданию остается неизменным. Отметим лишь, что основные улучшения текста сделаны в последних двух главах, посвященных теории турбулентного движения и квантовым открытым системам. К последней главе написано также дополнение о дополнительном уравнении для квантовой функции распределения – функции Вигнера.

## **Предисловие к английскому изданию**

Начнем с выдержки из Предисловия к книге автора «Статистическая физика» [М: Наука, 1982; Harwood Academic Publishers, 1986]:

«Боже, еще одна книга по статистической физике! Ведь и так на полках нет свободного места! – Подобные восклицания вполне возможны. Однако прежде чем делать какие-либо заключения, надо прочитать хотя бы Введение к книге и просмотреть Оглавление. При этом читатель сразу убедится, что предлагаемое учебное пособие «Статистическая физика» существенным образом отличается от аналогичных руководств по этому предмету, как кратких, так и фундаментальных.

...в ней нет традиционного деления на статистическую теорию равновесного и неравновесного состояний. Напротив, теория неравновесного состояния служит основой – стержнем всего курса.

...подобное построение курса позволяет на основе единого метода развить статистическую теорию очень широкого класса систем.

...автор, разумеется, не склонен преувеличивать достоинства книги и рассматривает ее лишь как первую попытку создания учебного пособия подобного рода».

Следующим шагом в выполнении этой программы была книга автора «Турбулентное Движение и Структура Хаоса» [М: Наука, 1990, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991]. Название книги имеет подзаголовок: «Новый подход к статистической теории открытых систем». Естественно, что «новый подход» не служит отрицанием хорошо развитых и эффективных методов традиционной статистической теории, но лишь необходимым их дополнением и развитием.

Изложенный в этой книге материал многократно обсуждался на семинарах и конференциях. Он служил также основой курсов лекций в Московском университете и в университетах Германии. Установленная таким образом «обратная связь» была, несомненно, положительной. Это, разумеется, не означает, что не было оппонентов. Среди них, однако, не было таких, которые могли придать своим возражениям конструктивную форму. В результате стало ясно, что необходимо изложить основные идеи, методы и результаты статистической теории открытых систем в виде учебного пособия, которое будет полезно не только физикам, но, во всяком случае в своей основе, и всем специалистам, для которых статистическая физика открытых систем служит фундаментом для проводимых ими исследований.

Коротко о названии настоящей книги.

В нем отмечено, что речь пойдет об открытых системах. Напомним что в отличие от идеализированных замкнутых (изолированных) систем, открытые системы обмениваются с окружающими телами веществом, энергией и, что не менее важно, информацией. Благодаря этому в открытых системах временная эволюция не обязательно ведет к равновесному, т.е. наиболее хаотическому состоянию. Напротив, в открытых системах, наряду с такого рода процессами деградации, возможны и процессы самоорганизации, в результате которых возникают более совершенные и более сложные структуры.

Все рассматриваемые открытые системы являются макроскопическими, т.е. состоят из очень большого числа элементов – «частиц». В физике и химии ими могут служить атомы и молекулы; в биологии это, например, макромолекулы,

клетки и микроорганизмы; в социологии группы живых организмов, а в астрономии планеты и звезды.

Спектр макроскопических открытых систем, как мы видим, чрезвычайно широк. Сложность описания таких систем обусловлена не только тем, что они состоят из большого числа элементарных объектов. В значительной мере она обусловлена также и динамической неустойчивостью движения отдельных частиц, т.е. сложностью динамического движения. Это означает, что при малых изменениях начальных условий траектории сильно расходятся – «разбегаются».

В такой ситуации малые внешние воздействия приводят к неконтролируемым – непредсказуемым – изменениям движения частиц. По этой причине применение статистического описания становится неизбежным.

Наличие большого числа элементов–частиц позволяет при описании многих явлений заменять рассматриваемую систему частиц сплошной (непрерывной) средой. Такая «подмена» качественно меняет характер системы. Чтобы избежать возникающих при этом принципиальных трудностей, необходимо использовать не формально математическое, а физическое определение сплошной среды. Это означает, что необходимо конкретное, т.е. через характерные параметры системы, определение физически бесконечно малых масштабов времени и длины. Соответствующий физически бесконечно малый объем и служит физическим определением понятия «точка». Это определение зависит, естественно, от принятого уровня описания. Тем самым в статистическую теорию вводится структура «сплошной среды».

Мы увидим, что число частиц в «точке» сплошной среды может быть весьма большим. Так, например, в разреженном газе – газе Больцмана при нормальных условиях это число порядка  $10^5$ . Благодаря этому эффективным оказывается сглаживание по состояниям частиц в «точке». При этом выбором функции сглаживания можно отразить в статистической теории сложность движения отдельных элементов среды.

На основе физического определения сплошной среды можно дать определение ансамбля Гиббса для неравновесных процессов. Именно неполнота задания микросостояний отдельных систем ансамбля обусловлена отсутствием информации о движении частиц в «точках» сплошной среды. Если движение отдельных элементов–частиц системы описывается обратимыми уравнениями движения – уравнениями Гамильтона, то переход к приближению сплошной среды ведет с неизбежностью к необратимым уравнениям, так как информация о движении частиц в «точках» теряется безвозвратно. Существенно, что при таком переходе неустойчивость динамического движения, т.е. его сложность, играет конструктивную роль при построении статистической теории открытых систем.

Учет структуры «сплошной среды» на всех уровнях описания и является важным элементом нового подхода к статистической теории открытых систем, о котором говорилось выше. Такой подход, как мы увидим, приводит к обобщенным кинетическим уравнениям, на основе которых возможно единое описание кинетических, гидродинамических и диффузионных процессов без использования теории возмущений. Он открывает также возможность новой трактовки явления турбулентности и единого кинетического описания ламинарного и турбулентного движения.

Все сказанное относится в равной мере как к классическим, так и квантовым системам. Понятие «сплошная среда» и вопрос о ее структуре возникают с неизбежностью при переходе от идеализированных обратимых уравнений квантовой механики всей системы к приближенным и необратимым, но реалистическим уравнениям квантовой статистической теории. Использование статистической теории открытых систем для описания квантовых явлений позволяет дать ответы на «вечные вопросы»: Является ли квантовомеханическое описание полным? Существуют ли в квантовой теории скрытые параметры?

Отметим еще раз, что новый подход не отрицает, а лишь дополняет и развивает традиционный способ описания неравновесных процессов. Достаточно полное описание может быть проведено лишь при разумном сочетании «старого» и «нового».

При написании книги весьма сложной оказалась проблема отбора материала. В результате книга была разделена на две части. Первый том посвящен изложению основных идей, методов и результатов на примерах сравнительно «простых» систем. При этом мы постарались избежать «излишних» математических деталей, но делать это без ущерба для понимания основного материала. Для заполнения соответствующих пробелов указываются источники, по которым можно восстановить недостающие детали.

Я благодарен моим учителям, коллегам и друзьям, с которыми мне посчастливилось обсуждать многие проблемы, затронутые в книге. Сожалею, что нет возможности их всех здесь перечислить.

## Оглавление

### Предисловие.

**Глава 1. Введение.** 1.1. Структура «сплошной среды». Ансамбль Гиббса для неравновесных состояний. 1.1. Ансамбль Гиббса. Равновесное состояние. 1.1.2. Ансамбль Гиббса. Усреднение по распределению начальных данных. 1.1.3. Физически бесконечно малые масштабы в кинетической теории. 1.1.4. Физически бесконечно малые масштабы. Гидродинамическое описание. 1.2. Переход от кинетического описания к газодинамическому. 1.3. Единое описание кинетических и гидродинамических процессов. 1.3.1. Физическое число Кнудсена. 1.3.2. Согласование кинетического и гидродинамического определений сплошной среды. 1.3.3. Мелкомасштабные и крупномасштабные флуктуации. 1.3.4. Уравнение для единого описания кинетических и гидродинамических процессов. 1.4. Кинетическое описание автоволновых процессов в активных средах. Базовое уравнение теории самоорганизации синергетики. 1.5. Динамическое и статистическое описание сложных движений в макроскопических открытых системах. Конструктивная роль динамической неустойчивости движения. 1.6. Критерии самоорганизации. 1.6.1. Физический хаос в открытых системах. Управляющие параметры. 1.6.2. Эволюция и самоорганизация. 1.6.3. Процессы деградации. Н-теорема Больцмана. 1.6.4. Теорема Гиббса. 1.6.5. Примеры Н-теоремы для открытых систем. 1.6.6. Уменьшение энтропии при самоорганизации. S-теорема. 1.6.7. Определение относительной степени упорядоченности по критерию S-теоремы на основе экспериментальных данных. 1.7. Энтропия и производство энтропии при ламинарном и турбулентном течениях. 1.8. Принцип минимума производства энтропии в процессах самоорганизации.

**Глава 2. Динамическое и статистическое описание процессов в макроскопических системах.** 2.1. Динамическое описание эволюции макроскопической системы. 2.2. Теорема Лиувилля. Уравнение Лиувилля. 2.3. Локальное динамическое распределение состояний в  $6N$ -мерном фазовом пространстве. 2.4. Уравнение для микроскопической фазовой плотности. Микроскопические уравнения переноса. 2.5. Ансамбль одинаковых макроскопических систем – ансамбль Гиббса.

**Глава 3. Статистическая теория равновесного состояния.** 3.1. Микроканоническое распределение Гиббса. 3.2. Система в термостате. Каноническое распределение Гиббса. 3.3. Первый закон, первое начало термодинамики. 3.4. Второй закон термодинамики для квазистатических процессов. 3.5. Энтропия – мера неопределенности состояний системы при статистическом описании. 3.6. Теорема Гиббса. 3.7. Изменение энтропии в процессе временной эволюции. 3.8. Принцип максимума энтропии. Вывод канонического распределения Гиббса. 3.9. Принцип неразличимости частиц в статистической теории. 3.10. Зависимость термодинамических функций от числа частиц. 3.11. Термодинамические функции идеального газа. 3.12. Энтропия идеального газа. Парадокс Гиббса.

**Глава 4. Распределение функций динамических переменных. Флуктуации внутренних параметров.** 4.1. Функции распределения динамических переменных. 4.2. Функция распределения значений внутренней энергии. 4.3. Среднее и наиболее вероятное значения энергии. 4.4. Функция распределения значений энтропии. 4.5. Распределения локальных функций динамических переменных. 4.6. Средняя плотность в пространстве импульсов – распределение Максвелла. 4.7. Распределение Больцмана. 4.8. Формулы Гиббса. 4.9. Флуктуации объема и давления. 4.10. Принцип Больцмана. 4.11. Распределение Гаусса для флуктуаций значений внутренних параметров. 4.12. Флуктуации числа частиц. Распределение Пуассона. 4.13. Обобщение теоремы Гиббса на распределения значения функции динамических переменных. 4.14. Эффективная функция Гамильтона в статистической теории равновесного состояния.

**Глава 5. Методы функций распределения и метод микроскопической фазовой плотности.** 5.1. Последовательность функций распределения. 5.2. Связь гидродинамических и термодинамических функций с одно-двухчастичной функциями распределения. 5.3. Цепочка уравнений для последовательности равновесных функций распределения. 5.4. Уравнения для последовательности неравновесных функций распределения. 5.5. Корреляционные функции. 5.6. Метод микроскопической фазовой плотности.

**Глава 6. Кинетическое уравнение Больцмана.** 6.1. Разреженный газ. Кинетическое уравнение Больцмана. 6.2. Свойства интеграла столкновений Больцмана. 6.3. Равновесное решение уравнения Больцмана. 6.4. Возрастание энтропии в процессе временной эволюции к равновесному состоянию. H–теорема Больцмана. Функционал Ляпунова. 6.5. Время и длина релаксации в газе Больцмана. 6.6. Приближения свободномолекулярного течения и газовой динамики. 6.7. Итоги главы. Нерешенные проблемы.

**Глава 7. От уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона к кинетическому уравнению для газа Больцмана.** 7.1. Уравнения ББГКИ в приближении парных столкновений. 7.2. Выделение диссипативного вклада взаимодействия частиц. 7.3. Переход к уравнению Больцмана. 7.4. Итоги главы. Нерешенные проблемы. Гипотеза Больцмана о молекулярном хаосе.

**Глава 8. Кинетическая теория неидеального газа.** 8.1. Равновесное состояние. Теория возмущений по параметру плотности. 8.2. Термодинамические функции неидеального разреженного газа. 8.3. Энтропия и свободная энергия неидеального газа. 8.4. Высшие приближения по параметру плотности в кинетической теории. 8.5. Кинетические уравнения для неидеального разреженного газа.

**Глава 9. Кинетическая теория флуктуаций.** 9.1. Кинетическое уравнение Леонтовича. 9.2. Равновесное решение уравнения Леонтовича. 9.3. H–теорема. Функционал Ляпунова. 9.4. Сравнение значений энтропии Больцмана и Леонтовича. Влияние корреляции на степень упорядоченности состояний газа. 9.5. Цепочка диссипативных уравнений для последовательности функций распределения. 9.6. Приближение теории возмущений по взаимодействию. Приближение вторых корреляционных функций в теории ББГКИ. 9.7. Уравнение Леонтовича. Приближение вторых корреляционных функций.

**Глава 10. Кинетическая теория флуктуаций. Метод Ланжевена.** 10.1. Диссипативные уравнения для сглаженной микроскопической фазовой плотности. 10.2. Последовательность уравнений для моментов сглаженной микроскопической фазовой плотности. 10.3. Уравнения для флуктуаций функции распределения. 10.4. Метод Ланжевена в кинетической теории флуктуаций. 10.5. Энтропия и производство энтропии для неравновесных состояний с учетом флуктуаций. 10.5.1. Обобщенное уравнение баланса энтропии. 10.5.2. Энтропия и производство энтропии для неравновесных состояний без учета кинетических флуктуаций. 10.5.3. Энтропия и производство энтропии с учетом кинетических флуктуаций. 10.5.4. Производство энтропии и интенсивность источника Ланжевена. 10.5.5. Эффективный источник флуктуаций. 10.5.6. Критерии «малости отклонения от равновесного состояния».

**Глава 11. Переход от кинетического уравнения Больцмана к уравнениям газовой динамики.** 11.1. Газодинамические функции. Уравнения переноса. 11.2. Нулевое приближение по числу Кнудсена. Локальное распределение Максвелла. 11.3. Первое приближение по числу Кнудсена. Уравнения газовой динамики с учетом вязкости и теплопроводности. 11.4. Уравнение баланса энтропии в газовой динамике. 11.5. Уравнения газовой динамики для неидеального газа. 11.6. Уравнения газовой динамики в приближении тройных столкновений.

**Глава 12. Термодинамика неравновесных необратимых процессов.** 12.1. Термодинамический метод в теории неравновесных процессов. 12.2. Уравнения гидродинамики простых жидкостей. 12.3. Принцип Больцмана и эффективная функция Гамильтона. 12.4. Два определения свободной энергии неравновесных состояний. Функционал Ляпунова. 12.5. Функция распределения значений скорости при наличии источника тепла. 12.6. Распределение значений кинетической энергии – мгновенной температуры. 12.7. Оценка относительной степени неравновесности состояний по функционалу Ляпунова  $\Lambda_S$ . Иллюстрация применения S–теоремы. 12.8. «Физический хаос». Общая формулировка S–теоремы. 12.9. Критерий самоорганизации по временным спектрам. 12.10. Заключительные замечания.

**Глава 13. Единое описание кинетических и гидродинамических процессов.** 13.1. Необходимость единого описания кинетических и гидродинамических процессов. 13.2. Физическое определение сплошной среды. 13.2.1. Физически бесконечно малые масштабы в кинетической теории. 13.2.2. Физически бесконечно малые масштабы при газодинамическом описании. 13.2.3. Сопряжение кинетического и газодинамического определений физически бесконечно малых масштабов. 13.2.4. Сглаживание по физически бесконечно малому объему. Физический параметр Кнудсена. 13.3. Обобщенное уравнение для единого описания кинетических и газодинамических процессов. 13.4. H–теорема для обобщенного кинетического уравнения. Поток энтропии и производство энтропии. Функционалы Ляпунова. 13.4.1. H–теорема. 13.4.2. Состояние локального равновесия. 13.4.3. Функционал Ляпунова  $\Lambda_S$  для замкнутой системы. 13.4.4. Незамкнутая система. Функционал Ляпунова  $\Lambda_F$ . 13.5. Определение теплового потока при произвольных числах Кнудсена. 13.6. Тепловой поток во внешнем поле.

**Глава 14. Переход от обобщенного кинетического уравнения к уравнениям газовой динамики.** 14.1. Уравнения газовой динамики с учетом самодиффузии. 14.2. Диффузионная стадия релаксации к

равновесному состоянию. 14.3. Волновые возбуждения в газовой динамике. 14.4. Уравнение Навье – Стокса для «несжимаемого» газа. 14.5. Уравнение баланса энтропии для «несжимаемого» газа. 14.6. Тепловая конвекция в разреженном газе. 14.6.1. Обобщенное кинетическое уравнение для описания тепловой конвекции. 14.6.2. Газодинамические уравнения для конвективного движения. 14.7. Условие неустойчивости конвективного движения. 14.8. Кинетическое и газодинамическое описания теплопереноса.

**Глава 15. Нелинейное броуновское движение.** 15.1. Два способа описания броуновского движения. 15.1.1. Уравнения Ланжевена. 15.1.2. Уравнение Фоккера – Планка. 15.2. Броуновское движение в среде с нелинейным трением. Три формы уравнений Ланжевена и Фоккера – Планка. 15.3. Уравнение Фоккера – Планка для газа Больцмана. 15.4. Уравнение Смолуховского. Управляющее уравнение (Master Equation). 15.5. Два способа перехода от управляющего уравнения к уравнению Фоккера – Планка. 15.6. Управляющее уравнение для системы атомов в электромагнитном поле. 15.7. Броуновское движение квантовых атомов–осцилляторов. 15.7.1. Управляющее уравнение. 15.7.2. Уравнение Фоккера – Планка. 15.8. Управляющие уравнения для одношаговых процессов. 15.8.1. Традиционное определение вероятностей перехода. 15.8.2. Нетрадиционное определение вероятностей перехода. 15.9. Пространственная диффузия. Уравнение Эйнштейна – Смолуховского. 15.9.1. Пространственная диффузия. Метод Ланжевена. 15.9.2. Диффузия броуновской частицы во внешнем поле. 15.9.3. Стационарные распределения в «линейном» и «нелинейном» термостате. 15.10. Гидродинамическое описание броуновского движения. 15.11. Эволюция свободной энергии и энтропии при броуновском движении. Функционалы Ляпунова  $A_L$ ,  $A_S$ . 15.11.1. Управляющее уравнение. H–теорема. 15.11.2. Уравнение Фоккера – Планка. H–теорема. 15.11.3. Уравнение Эйнштейна – Смолуховского. H–теорема.

**Глава 16. Нелинейное броуновское движение. Примеры.** 16.1. Броуновское движение в автоколебательных системах. Генератор Ван дер Поля. 16.2. Генератор Ван дер Поля. Симметризованная нелинейность. 16.3. Совместное действие естественного и внешнего шума. 16.4. Симметризованный генератор. Распределение значений координаты и скорости. 16.5. H–теорема для генератора Ван дер Поля. 16.6. Самоорганизация в генераторе Ван дер Поля. S–теорема. 16.7. Генератор с инерционной нелинейностью. 16.8. Ветвления значений энергии предельного цикла. Генераторы с мультистабильными стационарными состояниями. 16.9. Генераторы в дискретном времени. Бифуркации энергии предельного цикла и периода колебаний. 16.10. Критерий устойчивости при переходе к дискретному времени на основе H–теоремы. 16.11. Броуновское движение в химически реагирующих системах. Частично ионизованная плазма. 16.12. Процесс Мальтуса – Ферхюльста (Malthus – Verhust).

**Глава 17. Нелинейное броуновское движение. Единое описание кинетических и гидродинамических и диффузионных процессов.** 17.1. Обобщенное кинетическое уравнение в теории броуновского движения. 17.2. Диффузионное описание броуновского движения. 17.3. Две модели гармонических осцилляторов. 17.3.1. Броуновское движение в плазменном колебательном контуре. 17.3.2. Броуновское движение в диэлектрическом колебательном контуре. 17.4. Броуновское движение атомов–осцилляторов. 17.5. Броуновское движение в генераторе с нелинейной частотой. Система Ван дер Поля – Дuffинга (Van der Pol – Duffing). 17.6. Время перехода через барьер. 17.7. Взаимное влияние равновесных и неравновесных фазовых переходов. 17.7.1. Влияние фазового перехода на сегнетоэлектрике на процесс генерации лазерного излучения. 17.7.2. Влияние фазового перехода в жидком кристалле на характеристики лазерного излучения. 17.8. Эволюция к стационарному состоянию в системах с двумя управляющими параметрами. H–теорема. 17.9. Оптимизация процесса эволюции в пространстве управляющих параметров на основе критерия «S–теорема».

**Глава 18. Кинетическая теория активных сред.** 18.1. Кинетические уравнения реакционно–диффузионного типа. Кинетическое и гидродинамическое описание теплопереноса в активной среде. 18.2. Проявление структуры «сплошной среды» в процессах временной релаксации. 18.3. Среда из бистабильных элементов. Кинетический подход в теории фазовых переходов. 18.3.1. Кинетическое уравнение. 18.3.2. «Гидродинамическое приближение» в статистической теории открытых сред. 18.4. Функционалы Ляпунова  $A_L$ ,  $A_S$ . H–теорема. 18.5. Пример обобщенного уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова. 18.6. Температура – управляющий параметр при фазовых переходах. 18.6.1. Теория Ландау. Кинетический подход. 18.6.2. Относительная степень упорядоченности при фазовых переходах. S–теорема. 18.7. Среда из связанных генераторов. 18.8. Кинетическое описание сред с химическими реакциями.

**Глава 19. Кинетическая теория флуктуаций в активных средах.** 19.1. Единое описание кинетических и гидродинамических флуктуаций. 19.2. Кинетические флуктуации при броуновском движении. 19.2.1. Источник Ланжевена в уравнении Фоккера – Планка. 19.2.2. Источник Ланжевена в уравнении Эйнштейна – Смолуховского. 19.2.3. Временные корреляции при броуновском движении. 19.3. Расчет гидродинамических флуктуаций на основе кинетической теории Больцмана. 19.3.1. Общие свойства источника Ланжевена в уравнении Больцмана. 19.3.2. Источники Ланжевена в уравнениях газовой динамики. 19.4. Традиционный расчет флуктуаций газодинамических функций. Метод Ланжевена. 19.4.1. Уравнения Ланжевена для газодинамических функций. 19.4.2.

Высокочастотные флуктуации  $\delta_p$ ,  $\delta_r$ ,  $\delta T$ ,  $\delta u^i$ . 19.4.3. Низкочастотные флуктуации  $\delta_p$ ,  $\delta T$ ,  $\delta s$ . Непоследовательность традиционного расчета газодинамических флуктуаций. 19.5. Расчет гидродинамических флуктуаций с учетом самодиффузии. 19.6. Кинетические флуктуации в активной среде. 19.6.1. Источник Ланжевена в кинетическом уравнении. 19.6.2. Источник Ланжевена в реакционно-диффузионном уравнении. 19.6.3. Кинетические флуктуации при теплопереносе в активной среде.

**Глава 20. Аномальное броуновское движение. Равновесный и неравновесный фликкер-шум («шум  $1/f$ ») и остаточные временные корреляции.** 20.1. Равновесный естественный фликкер-шум. 20.2. Теория равновесного естественного фликкер-шума. 20.3. Остаточные временные корреляции. 20.4. Уравнение Ланжевена для области фликкер-шума. 20.5. Фликкер-шум в пространстве волновых чисел. 20.6. Естественный фликкер-шум в активных ограниченных системах при реакционно-диффузионных процессах. 20.6.1. Активная среда из бистабильных элементов. 20.6.2. Фликкер-шум при теплопроводности в среде с источником тепла. 20.7. Фликкер-шум в средах из элементов со сложным поведением. 20.8. Естественный фликкер-шум в музыке. 20.9. Фликкер-шум и сверхпроводимость. 20.10. Спектр теплового излучения в сверхпроводниках – нарушение закона Рэлея – Джинса (Rayleigh – Jeans) в области фликкер-шума. 20.11. Фликкер-шум системы независимых источников с экспоненциальным распределением времен релаксации. 20.12. Диффузия в пространстве фрактальной (дробной) размерности. Аномальное броуновское движение.

**Глава 21. Критерии самоорганизации.** 21.1. Эволюция во времени. Деградация и самоорганизация. H-теорема. 21.2. Эволюция в пространстве управляющих параметров. S-теорема. 21.3. Определение относительной степени упорядоченности по спектрам. 21.4. Функция распределения расстояний между траекториями. 21.5. K-энтропия и показатели Ляпунова при динамическом и статистическом описаниях сложных движений. 21.6. Нелинейная характеристика расхождения траекторий.  $K_{int}$ -энтропия. 21.7. K-энтропия и производство энтропии. Статистический аналог K-энтропии –  $K_{st}$ -энтропия. 21.8. Эволюция в пространстве управляющих параметров. S-теорема. 21.9. Энтропия Реньи в статистической теории открытых систем. 21.10. Самоорганизация при переходе через критическую точку газ – жидкость. 21.11. Некоторые нерешенные проблемы.

**Глава 22. Турбулентное движение. Кинетическое описание турбулентности.** 22.1. Представляет ли турбулентное движение хаос или порядок? 22.2. Характерные черты турбулентного движения. 22.3. Несжимаемая жидкость. Уравнения и напряжения Рейнольдса. 22.4. Гидродинамическая неустойчивость и возникновение турбулентности. 22.5. Развитая турбулентность. Число степеней свободы. 22.6. Интенсивность источника Ланжевена, производство энтропии и турбулентная вязкость для развитой турбулентности. 22.7. Полуэмпирическая теория Прандтля – Кармана. 22.8. Возникновение стационарных турбулентных течений. Оценка критического числа Рейнольдса. 22.9. Производство энтропии при ламинарном и турбулентном течениях. 22.10. Уменьшение энтропии при переходе от ламинарного течения к турбулентному. 22.11. Аргументы в пользу кинетического описания турбулентного движения. 22.11.1. Максимальные значения числа Рейнольдса в теории Колмогорова. 22.11.2. Проблемы замыкания при кинетическом и гидродинамическом описаниях. 22.11.3. Уравнение баланса энтропии при турбулентном движении в несжимаемой жидкости. 22.12. Две возможности кинетического описания турбулентного движения. Гипотеза Рейнольдса в кинетической теории. 22.12.1. Времена релаксации при ламинарном течении. 22.12.2. Отношение времен релаксации для турбулентного движения. 22.12.3. Локальное равновесие. Гипотеза Рейнольдса в кинетической теории. 22.13. Аналогия с переходом газ – жидкость в системе Ван дер Ваальса. 22.14. Кинетическое описание стационарного турбулентного течения Пуазейля в плоском канале. 22.15. Уравнение баланса энтропии при турбулентном движении. 22.16. Заключительные замечания.

**Глава 23. Мост от классической статистической теории открытых систем к квантовой теории.** 23.1. Микроскопическое и макроскопическое уравнения Шредингера. 23.2. Электрон в равновесном электромагнитном поле. 23.3. Флуктуационное движение электрона в равновесном поле. 23.4. Переход от обратимых динамических уравнений к диссипативным уравнениям «сплошной среды». 23.5. Пример структуры основного состояния. 23.6. Оправдано ли понятие «чистого ансамбля» в квантовой механике? Является ли квантовомеханическое описание полным? Существуют ли в квантовой теории скрытые параметры?

**Заключение.**

**Дополнение. Два уравнения для квантовой функции распределения – функции Вигнера.**

**Список литературы.**

**Предметный указатель.**



# СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ

## Том II

*Ю.Л. Климонтович*

© Ю.Л. Климонтович, 1999  
М.: «Янус-К», 1999. 440 с.  
ISBN 5-8037-0032-0

### Предисловие

Читателю предлагается второй том книги «Статистическая теория открытых систем». Первый том был опубликован в 1995 году на английском языке издательством Kluwer (Голландия, Дордрехт) и в том же году на русском языке издательством «Янус» (Москва). Цель этой книги – продолжить изложение и анализ круга идей, методов и результатов, которые можно объединить единым названием «Физика открытых систем». Третий том предполагается посвятить физике квантовых открытых систем.

Естественно, что все рассматриваемые системы являются в той или иной мере открытыми. Содержание введенного термина «Физика открытых систем» определяется в значительной мере соответствующим перечнем ключевых слов и понятий. Нет необходимости воспроизводить здесь этот перечень. Его можно извлечь из оглавления. Исключение сделаем лишь для одного ключевого понятия «сплошная среда», которое является, несомненно, одним из важнейших понятий физики открытых систем. Это утверждение нуждается, однако, в некотором пояснении.

Понятия «замкнутая» и «открытая» системы вводятся на примере систем «частиц», движение которых описывается обратимыми уравнениями Гамильтона. К их числу относится, например, газ Больцмана – система «бесструктурных атомов». Более сложной базовой моделью является система заряженных частиц (электронов и ионов) и осцилляторов электромагнитного поля – полностью ионизованная плазма. Система Гамильтона является замкнутой, если нет обмена частицами и энергией с окружающими телами. Тем самым полная энергия системы неизменна. Более того, описание движения частиц в замкнутой системе является полным. Это означает, что по заданным начальным условиям можно, в принципе, точно предсказать значения координат и импульсов частиц в любой последующий момент времени. Наконец, движение частиц в замкнутой системе Гамильтона является обратимым.

В первом томе неоднократно отмечалось, что в силу сложности динамического движения и наличия неконтролируемых внешних воздействий потенциальная возможность полного описания движения частиц на основе обратимых уравнений Гамильтона не может быть реализована. Неизбежным оказывается переход от точных (для рассматриваемой модели) обратимых уравнений движения к приближенным необратимым (диссипативным) уравнениям сплошной среды.

Впервые представление сплошной среды было введено в термодинамике. При этом вообще не использовалось понятие «частица». Понятие же обратимости в термодинамике сохранилось – квазистатические процессы представляются обратимыми. Квазистатические процессы являются, однако, лишь предельным случаем более реалистичного описания процессов на основе уравнений термодинамики неравновесных необратимых процессов. Известна целая иерархия таких уравнений. Если двигаться от термодинамического описания к полному описанию на основе уравнений Гамильтона, то можно в простейшем случае (без учета химических реакций) выделить три уровня: диффузионное, гидродинамическое и кинетическое описания неравновесных необратимых процессов.

На каждом из этих уровней описания используется модель сплошной среды. Эти модели различны по степени их приближенности. В первом томе на примере газа Больцмана было показано, сколь важным является конкретное определение физически бесконечно малых масштабов и, следовательно, размера точки «сплошной среды». Именно на таком пути удалось построить обобщенное кинетическое уравнение для единого описания неравновесных процессов на кинетических и газодинамических масштабах. При этом удалось избежать ряда принципиальных трудностей, возникающих при переходе от кинетического к газодинамическому описанию на основе традиционной теории возмущений по малому числу Кнудсена. Было показано, что учет структуры сплошной среды необходим и в теории броуновского движения, а также при построении кинетических уравнений для описания неравновесных процессов в активных средах.

Существенна еще одна особенность сплошных сред: они, даже при условии внешней замкнутости, являются внутренне незамкнутыми – внутренне открытыми.

Действительно, при переходе от системы частиц к сплошной среде теряется информация о движении частиц на масштабах в пределах точек сплошной среды. Тем самым, описание системы становится неполным. По этой причине все уравнения сплошных сред являются диссипативными. Пренебрежение диссипацией в уравнениях сплошной среды, например, переход к кинетическому уравнению для свободной молекулярного течения или к уравнению Эйлера в газовой динамике является весьма грубым приближением.

Внутренняя незамкнутость внешне замкнутой сплошной среды проявляется в наличии производства энтропии. Это было показано на примере временной эволюции к равновесному состоянию в газе Больцмана.

Напомним, что при условии внешней замкнутости энтропия газа Больцмана возрастает со временем – H-теорема Больцмана. Рост энтропии и, следовательно, ее производство и указывают на наличие внутренней незамкнутости. В процессах эволюции сохраняется не полная энергия, как в замкнутой системе Гамильтона, а лишь ее среднее статистическое значение.

Выразим то же другими словами. Уравнение Больцмана описывает эволюцию лишь на масштабах, превышающих размер точки сплошной среды. Наличие огромного резервуара недоступных для описания движений на масштабах в пределах точек сплошной среды и делает систему Больцмана внутренне незамкнутой.

Несмотря на кажущуюся очевидность понятия «внутренняя незамкнутость» сплошной среды, до недавнего времени «структура сплошной среды» на всех уровнях от кинетической теории до термодинамики не конкретизировалась. Это, как мы уже видели на примерах газа Больцмана и теории броуновского движения, приводит к ряду принципиальных трудностей. В частности, без ее учета невозможно дать физическое определение ансамбля Гиббса для неравновесных процессов.

В настоящем томе роль структуры сплошной среды будет продемонстрирована на примерах кинетической теории электрон-ионной плазмы, а также термодинамической и кинетической теории фазовых переходов второго рода. В результате будет предложено альтернативное традиционному построение теории неравновесных процессов в плазме и теории фазовых переходов.

Существенно также следующее.

Явное определение физически бесконечно малых масштабов, и следовательно размера точки сплошной среды, позволяет ввести наиболее естественный малый параметр для всех случаев, когда используется модель сплошной среды. Это отношение физически бесконечно малой длины  $l_{ph}$ , определяющей размер «точки» сплошной среды к характерному размеру системы  $L$ . Естественно, что значение величины  $l_{ph}/L$  зависит как от выбора задачи, так и от принятого уровня описания. Однако, этот параметр всегда мал, если в основу положена модель сплошной среды.

В первом томе эффективность разложения по  $l_{ph}/L$  была продемонстри-

рована на примере Больцмана. Именно на этой основе удалось получить обобщенное кинетическое уравнение для единого описания кинетических и гидродинамических процессов в газе. В настоящем томе эффективность теории возмущений по «параметру сплошной среды» будет продемонстрирована при описании неравновесных процессов в электрон-ионной плазме, а также в теории фазовых переходов второго рода.

При этом удается избежать как «проблемы бесконечно малых» (математическая точка), так и «проблемы бесконечности», которая возникает при стремлении объема и числа частиц к бесконечности предельного перехода. Будут фигурировать лишь отношения «малого к большому» или, напротив, «большого к малому».

Такая позиция может служить иллюстрацией точки зрения Д. Гильберта. Приведем некоторые выдержки из его статьи «О бесконечном (см. стр. 431–448 в т. 1 собрания трудов («Факториал», Москва, 1998)).

«И аналогично тому, как оперирование с бесконечно малыми (здесь размерами «точки» сплошной среды – Ю.Л.К.) было заменено операциями с конечными, дающими в точности те же самые результаты и приводящими к абсолютно тем же самым элегантным формальным соотношениям, рассуждения с использованием бесконечного должны быть вообще заменены оперированием конечными операциями...»

«Математическая литература, если повнимательнее присмотреться к ней, изобилует бессмыслицами и нелепостями, в которых в большинстве случаев повинна бесконечность.»

Далее Д. Гильберт обращается к теории Кантора и к некоторым аспектам физики и химии. Приведем лишь некоторые выводы. На стр. 448 читаем:

«И напоследок давайте еще раз вспомним о нашей исходной теме и подведем итог всем нашим рассуждениям о бесконечном. Наш общий вывод таков: в реализованном виде бесконечное не встречается нигде. Его нет в природе, и оно также недопустимо и в качестве основы нашего разумного мышления. ...для возможности научного познания необходимы некоторые наглядные представления и благоразумие и что одной только логики для этого недостаточно...»

Приведенные утверждения Д. Гильберта являются ободряющими для проведения намеченной уже в первом томе программы развития нового подхода как в кинетической теории плазмы, так и в теории фазовых переходов второго рода. Эта программа оказывается плодотворной и в квантовой теории открытых систем. Начало этому уже положено в заключительной главе первого тома. Ее реализация будет продолжена в гл. 15. Физике квантовых открытых систем будет целиком посвящен заключительный – третий – том настоящей книги.

При написании второго тома естественно было стремление сделать изложение материала в наибольшей степени независимым. Именно этим объясняется включение в него небольших фрагментов из первого тома. Однако полная независимость так же недостижима, как и полная замкнутость описания в физике открытых систем.

## Оглавление

### Предисловие.

### ЧАСТЬ 1. НОВЫЙ ПОДХОД В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ (МИФ О БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ).

#### Глава 1. Введение. История вопроса.

Глава 2. Статистическая теория полностью ионизованной плазмы. 2.1. Микроскопические уравнения для заряженных частиц и поля. 2.2. Основные параметры кулоновской плазмы. 2.2.1. Собственные колебания плазмы. Частота Ленгмюра. 2.2.2. Экранирование внешнего поля в плазме. Длина Дебая. 2.2.3. Пространственная корреляция заряженных частиц. Корреляционный радиус. 2.2.4. Времена и длины релаксации. 2.2.5. Корреляционное время и корреляционная длина (корреляционный радиус) для разреженной плазмы. 2.3. Физически бесконечно малые интервалы (масштабы) длины и времени для разреженного газа и разреженной плазмы. 2.3.1. Общее определение физически бесконечно малых масштабов. 2.3.2. Газ Больцмана. Кинетический уровень описания. 2.3.3. Газ Больцмана. Гидродинамическое описание. 2.3.4. Физическое число Кнудсена.

2.3.5. Согласование кинетического и гидродинамического определений сплошной среды. 2.3.6. Разреженная кулоновская плазма (приближение Дебая). 2.3.7. Сильно неизотермическая плазма.

**Глава 3. Усреднение микроскопических уравнений для плазмы. Традиционный метод.** 3.1. Приближение вторых моментов. 3.2. Приближение вторых корреляционных функций.

**Глава 4. Два альтернативных приближения в статистической теории плазмы.** 4.1. Традиционный и нетрадиционный способы описания неравновесных процессов в газе Больцмана. 4.2. Традиционный и нетрадиционный методы описания неравновесных процессов в разреженной плазме. 4.2.1. Сглаживание по объему «точки» сплошной среды. 4.2.2. Метод адиабатического включения взаимодействия.

**Глава 5. Кинетические уравнения для полностью ионизованной плазмы. Традиционное приближение.** 5.1. Спектральные плотности флуктуаций в кулоновской плазме. 5.2. Кинетические уравнения для разреженной кулоновской плазмы. 5.3. Эффективный потенциал. Интеграл столкновений Ландау. 5.4. Свойства интегралов столкновений Балеску – Ленарда и Ландау. 5.5. Времена релаксации. Частоты столкновений. 5.6. Приближение первых моментов – нулевое приближение по флуктуациям. Уравнение Власова. 5.7. Волны в «бесстолкновительной» кулоновской плазме. Затухание Ландау. 5.7.1. Электрическая восприимчивость кулоновской плазмы. Дисперсионное уравнение. 5.7.2. Решение дисперсионного уравнения. 5.8. Электрическая проницаемость и затухание Ландау в кинетической теории флуктуаций. 5.8.1. Кинетическая теория. 5.8.2. Теория флуктуаций.

**Глава 6. Уравнения газовой динамики для разреженной кулоновской плазмы.** 6.1. Уравнения переноса для плазмы. 6.2. Уравнения газовой динамики для плазмы. 6.3. Релаксация температур в плазме. 6.4. Электрическая проводимость плазмы.

**Глава 7. Нетрадиционное описание неравновесных процессов в плазме.** 7.1. Первый шаг к необратимым уравнениям физики открытых систем. 7.2. Обобщенное кинетическое уравнение для разреженной кулоновской плазмы. 7.3. Свойства обобщенных кинетических уравнений для плазмы. 7.3.1. Равновесное пространственно-однородное распределение частиц плазмы. 7.3.2. Соотношение Эйнштейна для коэффициентов диффузии и трения в пространстве импульсов. 7.3.3. Равновесное состояние по внешнему полю. Распределение Больцмана. 7.3.4. Экракирование внешнего поля равновесной плазмой. 7.3.5. Коэффициенты пространственной диффузии. Амбиполярная диффузия в полностью ионизованной плазме. 7.3.6. Свойства интеграла столкновений Ландау. 7.3.7. H–теорема при пространственно однородном распределении плазмы. Функционал Ляпунова.

**Глава 8. Миф о бесстолкновительной плазме. Роль диссипации в «бесстолкновительной» плазме.** 8.1. Что же такое «бесстолкновительная» плазма? 8.2. «Свободномолекулярные течения» в полностью ионизованной ограниченной плазме. 8.3. Возможно ли «бесстолкновительное приближение» в неограниченной плазме. 8.4. «Столкновительная» природа затухания Ландау. 8.5. Волны Ван Кампена.

**Глава 9. Законы сохранения вещества и заряда в кулоновской плазме с учетом самодиффузии.** 9.1. Поток вещества к средней скорости в микроскопической теории. 9.2. Поток вещества и средняя скорость в кинетической теории. 9.2.1. Два определения ансамбля Гиббса для неравновесных процессов. 9.2.2. Кинетическое и гидродинамическое определение средней скорости. 9.3. Уравнение непрерывности для плазмы.

**Глава 10. Электронная плазма.** 10.1. Обобщенное кинетическое уравнение для электронной плазмы. 10.2. Уравнение непрерывности для заряда. Электрический ток. 10.3. Самодиффузия в электронной плазме. 10.4. Волновые свойства электронной плазмы. «Столкновительное» затухание Ландау. 10.4.1. Неограниченная плазма. Большие числа Кнудсена:  $\lambda \ll l$ . 10.4.2. Неограниченная плазма. Малые числа Кнудсена:  $l \ll \lambda$ . 10.4.3. Ограниченная плазма. Затухание Ландау.

**Глава 11. Расчет равновесных флуктуаций. Корреляционная функция Дебая.** 11.1. «Бесстолкновительные» флуктуации в равновесной кулоновской плазме. 11.1.1. Метод Ланжевена. 11.1.2. Флуктуации поля в равновесном состоянии. 11.1.3. Флуктуационно-диссипационное соотношение. 11.1.4. Пространственная спектральная плотность флуктуаций поля. 11.1.5. Пространственная корреляционная функция Дебая. 11.2. «Столкновительные» флуктуации в равновесной кулоновской плазме в диффузионном приближении. 11.2.1. Уравнение непрерывности для плазмы. 11.2.2. Уравнения Ланжевена. Расчет флуктуаций в диффузионном приближении. 11.2.3. Расчет индуцированных флуктуаций. 11.2.4. Расчет флуктуаций источника. 11.3. Заключение к гл. 11.

**Глава 12. H–теорема для электронной плазмы. Функционалы Ляпунова.** 12.1. Уравнение баланса энтропии для уравнения Ландау. 12.2. Кинетическое уравнение для электронной плазмы. 12.3. Уравнение баланса локальной энтропии. 12.3.1. Вклад в производство энтропии от интеграла столкновений Ландау. 12.3.2. Диффузионный вклад в уравнение баланса энтропии. 12.3.3. Вклад подвижности в уравнение баланса энтропии. 12.3.4. Локальное уравнение баланса энтропии. 12.3.5. Производство энтропии. 12.3.6. Интегральное уравнение баланса энтропии. 12.3.7. Уравнение баланса энтропии для локального распределения Максвелла. 12.3.8. Модельные интегралы столкновений. 12.4. Заключение к гл. 12.

**Глава 13. Уравнения газовой динамики на основе обобщенного кинетического уравнения.** 13.1. Уравнения газовой динамики с учетом самодиффузии и подвижности заряженных частиц. 13.2. Поток тепла в электронной плазме.

**Глава 14. Кинетическая теория плазменно–молекулярных систем.** 14.1. Введение. 14.2. Микроскопические уравнения плазменно–молекулярной системы. 14.2.1. Фазовое пространство  $x'=(r', p')$ ,  $x''=(r'', p'', t)$ . 14.2.2. Фазовое пространство  $r, p, R, P$ . 14.3. Уравнение для вектора поляризации. 14.3.1. Нулевое приближение по запаздыванию. 14.3.2. Коэффициент радиационного трения. 14.4. Кинетическое уравнение для системы атомов осцилляторов. 14.5. Структура кинетических уравнений частично ионизированной кулоновской плазмы. 14.6. Равновесное состояние. Ионизационное равновесие. 14.7. Структура кинетических уравнений для распределения электронов, ионов и атомов. 14.8. Уравнения баланса концентраций электронов, ионов и атомов. 14.9. Флуктуации концентраций электронов, ионов и атомов.

**Глава 15. Второй мост к квантовой теории открытых систем.** 15.1. Введение. 15.2. Микроскопические и макроскопические уравнения Шредингера. 15.3. Приближение сплошной среды в квантовой теории. 15.4. Установление основного состояния в атоме–осцилляторе. 15.4.1. Быстрая и медленная диффузия. 15.4.2. Физически бесконечно малые масштабы. 15.4.3. Уравнения Ланжевена для атомов в тепловом поле. 15.5. Уравнение Фоккера – Планка для атомов в тепловом поле. 15.5.1. Учет быстрых и медленных процессов. 15.5.2. Исключение быстрой релаксации. 15.6. Физическая интерпретация принципа неопределенности Гейзенберга. 15.7. Два «выхода» из области квантовой теории в классическую. 15.7.1. «Выход» в сторону больших масштабов. 15.7.2. «Выход» в сторону малых масштабов. «Классический квант действия». 15.8. Осцилляторная форма соотношения Гейзенберга. 15.9. Квантовая функция распределения при знаке « $\Rightarrow$ ». 15.9.1. Квантовая функция распределения Вигнера. 15.9.2. Соотношение неопределенности Гейзенберга при отличной от нуля температуре. 15.9.3. Предельные случаи. 15.10. Квантовая корреляционная функция. 15.10.1. Чистый и смешанный ансамбли. 15.10.2. «Скрытые переменные». Смешанный ансамбль. 15.10.3. Матрица плотности. 15.10.4. Матрица плотности в равновесном состоянии. 15.10.5. Классическое соотношение неопределенности. 15.11. S–теорема для квантовых систем. Относительная упорядоченность состояний « $\Rightarrow$ », « $\gg$ ». 15.12. Теорема Нернста. Функционал Ляпунова  $\Lambda$ . 15.13. Информация. 15.14. Закон сохранения энтропии и информации.

## **ЧАСТЬ 2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ВТОРОГО РОДА**

**Глава 16. Введение.** 16.1. Фазовые превращения – фазовые переходы. 16.2 Фазовые переходы первого и второго рода. Критическая точка. 16.2.1. Фазовые переходы первого рода. 16.2.2. Фазовые переходы второго рода. 16.2.3. Критическая точка. 16.3. Фазовый переход газ–жидкость. Модель Ван дер Ваальса. 16.4. Фазовые переходы в магнитных кристаллах. 16.5. Фазовые переходы в сегнетоэлектриках. 16.6. «Путеводитель» по гл. 17–22.

**Глава 17. Термодинамическое описание. Принцип Больцмана. Эффективная функция Гамильтона.** 17.1. Статистическое обоснование законов термодинамики по Гиббсу. 17.2. Принцип Больцмана. Эффективная функция Гамильтона. 17.3. Теплоемкость. 17.4. Средние и наиболее вероятные значения внутренних параметров. 17.5. Определение термодинамических функций через наиболее вероятные значения.

**Глава 18. Фазовый переход в сегнетоэлектриках. Теория Ландау.** 18.1. Введение. 18.2. Простейшая модель сегнетоэлектрика. 18.3. Уравнение для вектора поляризации. 18.3.1. Пространственно–однородное состояние. 18.3.2. Учет пространственной нелокальности. 18.4. Функции распределения Ландау и Больцмана. 18.5. Теория Ландау. Время перехода через барьер. Формула Крамерса. 18.6. Энтропия и теплоемкость в теории Ландау. 18.7. Распределение Больцмана. Флуктуационный вклад в температурную зависимость теплоемкости. 18.8. Теплоемкость неравновесных состояний. 18.9. Релаксационное уравнение Гинзбурга – Ландау. 18.10. Вывод формулы Ориштейна – Цернике на основе уравнения Гинзбурга – Ландау. 18.10.1. Флуктуационно–диссипационное соотношение. 18.10.2. Источник Ланжевена. 18.11. Заключение к гл. 18

**Глава 19. Кинетическая теория фазовых переходов.** 19.1. Кинетическое уравнение для сегнетоэлектриков. 19.2. Самосогласованное приближение для первого момента. 19.3. Два альтернативных расчета структуры доменной стенки. 19.4. Расчет флуктуаций на основе уравнения Ланжевена. 19.5. Приближение вторых моментов. Полидоменные сегнетоэлектрики. 19.6. Быстрые флуктуации при фазовых переходах. 19.7. Медленные флуктуации при фазовых переходах. 19.8. Теплоемкость полидоменных сегнетоэлектриков. 19.9. Физически бесконечно малые масштабы.

**Глава 20. Процессы самоорганизации при фазовых переходах.** 20.1. Равновесные и неравновесные фазовые переходы. 20.2. Изменение степени упорядоченности в процессе фазового перехода. 20.2.1. Переход в монодоменное состояние. 20.2.2. Переход в полидоменное состояние. 20.3. Сравнительная степень упорядоченности монодоменного и полидоменного состояний. 20.4. Эволюция свободной энергии при фазовых переходах.

**Глава 21. Сопоставление с результатами эксперимента.** 21.1. Доменная структура. 21.2. Температурная зависимость теплоемкости в критической области. 21.3. Рассеяние света в критической области. Ширина спектра рассеянного излучения. 21.4. Центральный пик в спектре рассеянного излучения.

**Глава 22. «Неклассические» критические индексы.** 22.1. Роль структуры сплошной среды. Локальный термодинамический предельный переход. 22.2. Критические индексы. Гипотеза

масштабной инвариантности. 22.3. Предельный переход  $T \rightarrow T_C$ . 22.4 Приближение второго момента для сплошной среды. 22.5. Термодинамические функции в критической области. 1. Быстрые флуктуации. 22.6. Термодинамические функции в критической области. 2. Медленные флуктуации. 22.7. Переход к самосогласованному приближению. 22.7.1. Корреляционный параметр. 22.7.2. Критерий применимости приближения самосогласованного поля в критической точке. 22.7.3. Переход от неклассических индексов к классическим. «Параметр Вильсона». 22.8. Критические индексы для пространственно–временных процессов. 22.9. Время релаксации в критической области.

#### **Заключительные замечания к главам 16–22.**

**Глава 23. Фазовый переход газ–жидкость. Модель Ван дер Ваальса.** 23.1. Модель Ван дер Ваальса. 23.1.1. «Ван дер Ваальсовский предел». 23.1.2. Критическая область. Предельный переход  $T \rightarrow T_C$ . 23.2. Термодинамические функции для модели Ван дер Ваальса. 23.3 Функция распределения  $f(n, R, t)$ . 23.3.1. Корреляторы флуктуации плотности. 23.4. Учет структуры сплошной среды. 23.5. Эффективная функция Гамильтона. 23.6. Критическая область. 23.6.1. Уравнение для наиболее вероятного значения плотности числа частиц. 23.6.2. Изотермическая сжимаемость. 23.6.3. Эффективная функция Гамильтона для критической области. 23.7. Кинетическое уравнение для критической области. 23.7.1. Самосогласованное приближение для первого момента. 23.7.2. Коэффициент изотермической сжимаемости. 23.7.3. Область сосуществования двух фаз. Правило Максвелла. 23.7.4. Время релаксации. 23.7.5. Радиус экранирования. 23.7.6. Приближение Гаусса.

**Глава 24. Кинетические флуктуации в критической области.** 24.1. Источник Ланжевена в кинетическом уравнении. 24.1.1. Источник Ланжевена. 24.1.2. Спектральные плотности и пространственный коррелятор. 24.1.3. Спектральная плотность на нулевой частоте. Связь с формулой Орнштейна – Чернике. 24.2. Эффективные коэффициенты затухания и пространственной диффузии. 24.3. Приближение второго момента. Двухфазное состояние – аналог полидисперсного состояния. 24.3.1. Уравнение для второго момента. 24.3.2. Быстрые флуктуации. 24.3.3. Медленные флуктуации. 24.3.4. Спектральная плотность медленных флуктуаций.

**Глава 25. Сопоставление с экспериментом.** 25.1. Молекулярное рассеяние электромагнитного излучения. 25.1.1. Спектр рассеянного излучения. 25.1.2. Критическая область. Интегральные по частотам характеристики. 25.1.3. Критическая область. Максимум спектра рассеянного излучения. 25.2. Сопоставление двух альтернативных подходов в теории рассеяния. Экспериментальные данные. 25.2.1. Зависимость интенсивности рассеянного света от  $r_c^2 q^2$ . 25.2.2. Экспериментальное исследование зависимости полуширины спектра рассеянного излучения от фактора  $r_c^2 q^2$ . 25.2.3. Температурная зависимость теплоемкости газа Ван дер Ваальса в критической области.

**Глава 26. «Неклассические» критические индексы в системе Ван дер Ваальса.** 26.1. Итоги гл. 22. Последовательность двух предельных переходов. 26.2. Предельный переход  $T \rightarrow T_C$ . Модификация гипотезы масштабной инвариантности. 26.3. Температурная зависимость теплоемкости в критической области. Экспериментальные данные. 26.4. Термодинамические функции в критической области. 26.4.1. Быстрые флуктуации. 26.4.2. Медленные флуктуации. 26.5. Критерий применимости самосогласованного приближения. 26.6. Время релаксации в критической области.

**Глава 27. Процесс самоорганизации при переходе через критическую точку.** 27.1. Равновесные и неравновесные фазовые переходы. 27.2. Изменение степени упорядоченности в процессе перехода к двухфазному состоянию. 27.3. Эволюция свободной энергии при фазовых переходах.

#### **Глава 28. Заключение.**

##### **Список литературы.**

##### **Предметный указатель.**

*Заинтересованный читатель может заказать монографию*

*по электронной почте:*

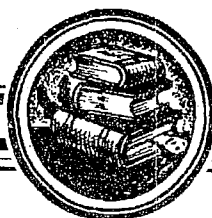
yklm@hklm.phys.msu.ru  
wadim@chaos.ssu.runnet.ru

*по телефону:*

(845–2) 51–45–49

*по почте:*

410026, Саратов, Астраханская 83, СГУ  
редакция журнала «ПНД»



Изв.вузов «ПНД», т.7, № 5, 1999

УДК 537.86

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ХАОТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Фундаментальные основы и избранные проблемы

*В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов*

© В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов, 1999  
Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 368 с.: илл.  
ISBN 5-292-02285-3

*Славному юбилею родного  
Саратовского университета,  
90-летию со дня основания,  
посвящают этот труд авторы*

### Предисловие

Уважаемый читатель! Перед Вами книга по нелинейной динамике, актуальному научному направлению в области исследований нелинейных явлений в динамических системах. За последние годы по близкой тематике опубликовано много хороших книг. И тем не менее предлагаемая Вам новая книга, мы надеемся, будет достойна внимательного прочтения в силу ряда причин. Их несколько и они относятся как к предмету изучения нелинейной динамики, содержанию книги, так и к форме изложения материала.

В конце 70-х годов благодаря активной деятельности профессора Штутгартского университета Г. Хакена и профессора МГУ Ю.Л. Климонтовича, в университетах России начались дискуссии о синергетике<sup>1</sup>. При этом каждый понимал новую науку по-своему. Одни говорили о новой парадигме в естествознании; об изменении сути научного подхода, обусловленного кооперацией нескольких фундаментальных наук и их методов; другие не видели в синергетике ничего нового в сравнении с современной теорией нелинейных колебаний и волн; третьи вообще считали, что синергетика это лозунг и ничего больше. Примерно в эти же годы яростные дискуссии и споры вызвали идеи Нобелевского лауреата И.Р. Пригожина о процессах формирования и эволюции так называемых диссипативных структур, о хаосе, порядке и т.д.<sup>2</sup> Многие ученые отстаивали мнение, что понятие «автоволны» и «автоколебания» более правильно отражают

<sup>1</sup> Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985.

<sup>2</sup> Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985.

суть явлений и рассматриваемые проблемы составляют предмет исследований нелинейной теории колебаний и волн. Наконец, относительно недавно профессор Ю.Л. Климонтович предложил ввести в перечень направлений магистерской подготовки физиков специализацию «физика открытых систем»<sup>3</sup>. Несмотря на определенные различия в содержании и трактовке указанных выше научных направлений, их объединяет глубокая общность.

В современной теории колебаний и волн разработаны специальные методы анализа нелинейных процессов в динамических системах и исследован ряд принципиальных физических явлений, имеющих фундаментальное значение для естествознания. Вклад теории нелинейных колебаний и волн в развитие нелинейной динамики в целом безусловно велик. Однако выяснилось, что при анализе реальных, эволюционных процессов в естествознании ряд проблем не может быть исследован с использованием только теории колебаний и волн. В качестве примера можно привести явления индуцированных шумом переходов в нелинейных системах. Шум может вызывать качественно новые явления, отсутствующие в системах без флуктуаций. Другим примером служит эффект детерминированного хаоса. Для понимания закономерностей возникновения, структуры и свойств хаотических автоколебаний необходимо использовать весь арсенал теоретических методов и представлений теории динамических систем, статистической и эргодической теорий, теории информации, качественной теории дифференциальных уравнений и др. Другими словами, анализ закономерностей нелинейной динамики сложных систем естествознания требует синергетического подхода. Другое важное обстоятельство заключается в том, что ряд принципиальных эффектов, обнаруженных при исследовании нелинейных систем в различных областях знаний, носит фундаментально общий характер. И, наконец, наиболее важное. Большинство новых эффектов, открытых в последние годы, относится к исследованиям процессов в нелинейных диссипативных системах и средах. Автоколебания и автоволны, а также стационарные пространственные структуры могут наблюдаться исключительно в нелинейных диссипативных системах и распределенных активных средах. Такие системы в силу диссипативности являются открытыми, самоподдерживание тех или иных режимов или структур в них возможно лишь за счет нелинейности. Таким образом, ключом к пониманию сути сложных явлений и процессов является диссипативность и нелинейность динамической системы. Поэтому, если подходить к проблеме с самых общих позиций, то синергетика, теория диссипативных структур, физика открытых систем и нелинейная динамика – все это по сути дела важные составляющие одной общей науки о колебаниях и структурах, призванной описать явления в мире нелинейных систем, активно взаимодействующих с внешней средой.

Нелинейная динамика как часть этой науки выявляет наиболее простые и типичные модели фундаментальных нелинейных явлений, развивает специальные методы их описания и исследования, формирует единый междисциплинарный научный язык и обосновывает методы компьютерного моделирования как один из наиболее эффективных способов познания нелинейных процессов.

Настоящая книга посвящена изложению фундаментальных основ и ряда научных результатов по исследованию динамики нелинейных диссипативных систем, математическими моделями которых служат обыкновенные дифференциальные уравнения, дискретные отображения или соответствующие стохастические уравнения, когда учитывается эффект воздействия флуктуаций.

Перед Вами научная монография, в которой отражены результаты современных исследований, в большинстве своем полученные авторами совместно с коллегами по лаборатории нелинейной динамики Саратовского государственного университета. В то же время книга может рассматриваться и как учебник для студентов, аспирантов и молодых ученых естественно-научных специальностей вузов, изучающих природу нелинейных явлений.

---

<sup>3</sup> Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995, 1999. Т. 1,2.



Сложность в определении жанра книги обусловлена содержанием и формой представления материала. Работа содержит 11 глав, посвященных одной из самостоятельно важных научных проблем. Главы носят относительно законченный характер, включают отдельный список цитируемой литературы и могут быть прочитаны независимо друг от друга. При этом главы 1–6 можно выделить в первую часть, посвященную наиболее общим проблемам, составляющим фундаментальную основу нелинейной динамики. Главы 7–11 являются по сути самостоятельными монографическими обзорами современных результатов по избранным научным проблемам. Эти главы условно составляют вторую часть книги и адресуются подготовленному читателю, имеющему опыт самостоятельной научной работы.

Главы 1, 2, 6, 7 книги были написаны Т.Е. Вадивасовой, главы 5, 8 – В.В. Астаховым. Мною написаны главы 3, 4, 9–11 и осуществлено научное редактирование книги в целом.

Как и предыдущие монографии<sup>4</sup>, настоящая книга в первую очередь базируется на научных результатах, опубликованных в периодической печати ее авторами совместно с сотрудниками лаборатории нелинейной динамики СГУ за последние 5–6 лет. Они отражены в диссертационных работах моих аспирантов Г.И. Стрелковой, А.В. Шабунина, Н.Б. Янсон, А.Н. Павлова, Б.В. Шульгина, И.А. Хованова, А.Н. Сильченко, а также докторантов А.Б. Неймана и Д.Э. Постнова. Всем вышеперечисленным коллегам по лаборатории от имени авторов я выражаю глубокую благодарность и признательность. Искреннюю благодарность выражаю зарубежным коллегам, J. Kurths, W. Ebeling, F. Moss, L. Schimansky-Geier, M. Hasler, T. Kapitaniak, A. Pikovsky, P. McClintock за участие в совместных исследованиях, регулярное обсуждение и критику результатов, за поддержку деятельности нашей лаборатории.

От имени авторов книги благодарю профессоров Ю.Л. Климонтовича, Д.И. Трубецкова, Ю.А. Данилова, С.П. Кузнецова, Б.П. Безручко, Ю.М. Романовского, В. В. Тучина и Ю.А. Кравцова за внимание и постоянный интерес к нашим исследованиям. Работа над книгой была бы невозможной без финансовой помощи, оказываемой лабораторией на разных этапах со стороны Международного Научного Фонда Сороса, Российского Фонда Фундаментальных исследований, Международной программы INTAS, Королевского Общества Лондона, Немецкого Научного Общества и Госкомобразования России. Гранты на исследование, присужденные лаборатории вышеперечисленными организациями, обеспечили условия для проведения исследований, результаты которых положены в основу книги.

В заключение хочется особо поблагодарить Г.И. Стрелкову и А.В. Климпина за огромный труд по подготовке рукописи книги к печати.

*Научный редактор  
заслуженный деятель науки РФ  
чл.-корр. РАН,  
профессор В.С. Анищенко*

## **Оглавление**

### **Предисловие.**

**Глава 1. Динамические системы.** 1.1. Введение. 1.2. Динамическая система и ее математическая модель. 1.3. Классификация динамических систем. Дифференциальные и дискретные системы. 1.4. Колебательные системы. 1.5. Фазовые портреты динамических систем. 1.6. Регулярные и странные аттракторы. 1.7. Выводы. Литература.

**Глава 2. Устойчивость, бифуркации, катастрофы.** 2.1. Введение. 2.2. Классификация предельных множеств динамической системы. 2.3. Линейный анализ устойчивости. 2.4. Бифуркации

<sup>4</sup> Анищенко В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985, 1986. Ч. 1,2; Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990; Anishchenko V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995.

динамических систем, катастрофы. 2.5. Бифуркации состояний равновесия. 2.6. Бифуркации предельных циклов. 2.7. Бифуркации квазипериодических и странных аттракторов. 2.8. Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры. 2.9. Выводы. Литература.

**Глава 3. Детерминированный хаос.** 3.1. Введение. 3.2. Детерминированность. 3.3. Хаос. 3.4. Устойчивость и неустойчивость. 3.5. Нелинейность. 3.6. Неустойчивость и нелинейное ограничение. 3.7. Детерминированный хаос. 3.8. Перемешивание. 3.9. Вероятностные свойства детерминированных систем. 3.10. Детерминированный хаос – математическая экзотика или типичное свойство материального мира? 3.11. Понятие странного аттрактора. 3.12. Размерности аттрактора. 3.13. Выводы. Литература.

**Глава 4. Аттракторы динамических систем.** 4.1. Введение. 4.2. Что такое аттрактор? 4.3. Регулярные аттракторы. 4.4. Странные (хаотические) аттракторы. 4.4.1. Грубые гиперболические аттракторы. 4.4.2. Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца. 4.4.3. Квазиаттракторы и их свойства. 4.5. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы. 4.5.1. Хаотические нестранные аттракторы. 4.5.2. Странные нехаотические аттракторы. 4.6. Выводы. Литература.

**Глава 5. Базовые модели динамического хаоса.** 5.1. Введение. 5.2. Дифференциальные системы. 5.2.1. Общие уравнения генератора с 1,5 степенями свободы. 5.2.2. Модели Лоренца и Ресслера. 5.2.3. Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью. 5.2.4. Генератор Чуа. 5.3. Дискретные системы. 5.4. Неавтономные и связанные динамические системы. 5.5. Выводы. Литература.

**Глава 6. Бифуркационные механизмы перехода к хаосу.** 6.1. Введение. 6.2. Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума. 6.3. Жесткие переходы к хаосу. Кризис и перемежаемость. 6.4. Переход к хаосу через разрушение двухчастотных колебаний. 6.4.1. Теорема о разрушении двумерного резонансного тора. 6.4.2. Отображение окружности. Универсальные закономерности мягкого перехода от квазипериодических колебаний к хаосу. 6.5. Переход к хаосу через трехмерный тор. Хаос на трехмерном торе. Хаотические нестранные аттракторы. 6.6. Переход к хаосу через разрушение эргодического тора. Странные нехаотические аттракторы. 6.7. Выводы. Литература.

**Глава 7. Синхронизация хаоса.** 7.1. Введение. 7.2. Классический подход к хаотической синхронизации. Полная и частичная синхронизации хаоса и их количественные характеристики. 7.3. Особенности взаимодействия осцилляторов с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса. Фазовая мультистабильность в области синхронизации. 7.4. Бифуркационные механизмы разрушения полной и частичной синхронизации хаоса. 7.5. Особенности хаоса и возможность частотно-фазовой синхронизации. 7.6. Синхронизация в ансамбле хаотических осцилляторов. 7.7. Выводы. Литература.

**Глава 8. Управление хаосом.** 8.1. Введение. 8.2. Управление и синхронизация хаоса в системе взаимно связанных осцилляторов. 8.3. Управляемая синхронизация хаоса методом периодической модуляции параметра связи. 8.4. Стабилизация пространственно-однородных движений посредством параметрического воздействия. 8.5. Управление хаосом в решетках связанных отображений. 8.6. Выводы. Литература.

**Глава 9. Реконструкция динамических систем.** 9.1. Введение. 9.2. Реконструкция аттракторов по временным рядам. 9.2.1. Анализ непрерывных сигналов. 9.2.2. Анализ последовательностей межпиковых интервалов. 9.3. Глобальная реконструкция динамической системы. 9.3.1. Историческая справка и постановка задачи. 9.3.2. Описание алгоритма реконструкции. 9.3.3. Особенность реконструкции ДС по существенно неоднородным реализациям. 9.3.4. Примеры реконструкции динамических систем по данным медико-биологических экспериментов. 9.3.5. Особенности и недостатки алгоритма реконструкции. 9.4. Метод реконструкции в приложении к задаче защиты передаваемой информации. 9.5. Выводы. Литература.

**Глава 10. Стохастический резонанс.** 10.1. Введение. 10.1.1. Физические основы эффекта СР. 10.1.2. Характеристики эффекта СР. 10.2. Отклик на слабый сигнал. Теоретические подходы. 10.2.1. Теория двух состояний. 10.2.2. Теория линейного отклика. 10.3. Стохастический резонанс для сигналов сложного спектрального состава. 10.3.1. Отклик стохастической бистабильной системы на многочастотный сигнал. 10.3.2. Стохастический резонанс для сигналов с конечной шириной спектральной линии. 10.4. Когерентный стохастический резонанс. Стохастический резонанс в хаотических системах. 10.4.1. Когерентный резонанс вблизи бифуркаций периодических решений динамической системы. 10.4.2. Стохастический резонанс в хаотических системах. 10.5. Физический эксперимент. 10.6. Выводы. Литература.

**Глава 11. Синхронизация стохастических систем.** 11.1. Введение. 11.2. Теория стохастической синхронизации бистабильного осциллятора. 11.2.1. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмита. 11.2.2. Взаимная стохастическая синхронизация связанных бистабильных систем. 11.3. Внешняя и взаимная синхронизации переключений в хаотических системах. 11.3.1. Внешняя синхронизация. 11.3.2. Взаимная синхронизация. 11.4. Стохастический резонанс и синхронизация ансамблей стохастических осцилляторов. 11.4.1. Теория линейного отклика для ансамблей стохастических резонаторов. 11.4.2. Стохастический резонанс в ансамбле. 11.4.3. Синхронизация ансамбля стохастических резонаторов слабым периодическим сигналом. Численное моделирование. 11.5. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок. 11.6. Выводы. Литература.

**Предметный указатель.**

**Лаборатория нелинейной динамики Саратовского государственного университета.**



**ПОЗДРАВЛЯЕМ**

зав. кафедрой радиофизики  
Саратовского университета,  
Заслуженного деятеля науки РФ,  
профессора

Вадима Семеновича  
**АНИЩЕНКО**

с присвоением звания  
*Лауреата премии фонда  
Александра Гумбольдта  
(Германия) за 1999 год*



Изв.вузов «ПНД», т.7, № 5, 1999



## НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ - 99

Научная школа-конференция

Саратов, 26 – 30 октября 1999

Связь времен и преемственность поколений остается визитной карточкой настоящей школы. Состав школы – старшеклассники и студенты, аспиранты и молодые ученые, именитые преподаватели-лекторы. На этот раз в ее работе приняли участие также молодые исследователи из Москвы (МГУ) и Нижнего Новгорода (ННГУ). На трех секциях было заслушано 34 доклада «школьников» и обсуждено 30 стендовых докладов. Материалы школы опубликованы в сборнике.

### *Организаторы и спонсоры*

Саратовский государственный университет  
Государственный учебно-научный центр «Колледж»  
Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
Министерство образования и науки Саратовской области  
ОАО КБ «Синергия», Саратов  
Министерство образования РФ, ФЦП «Интеграция»  
РФФИ, грант 99-15-96536 (поддержка научной школы)

### *Программный комитет*

Суровов С.Б., сопредседатель, министр образования и науки Саратовской области  
Трубецков Д.И., сопредседатель, чл.-корр. РАН, профессор, ректор СГУ  
Кузнецов А.П., зам. председателя, д.ф.-м.н., зав. базовой кафедрой динамических систем СГУ, в.н.с. СО ИРЭ РАН  
Безручко Б.П., д.ф.-м.н., профессор СГУ, в.н.с. СО ИРЭ РАН  
Кузнецов С.П., д.ф.-м.н., профессор СГУ, в.н.с. СО ИРЭ РАН  
Левин Ю.И., к.ф.-м.н., доцент, директор ГосУНЦ «Колледж», декан ВКПН

Рыскин Н.М., к.ф.-м.н., доцент СГУ  
Шараевский Ю.П., д.ф.-м.н., профессор СГУ

### **Оргкомитет**

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, профессор, ректор СГУ  
Левин Ю.И., зам. председателя, к.ф.-м.н., доцент, директор ГосУНЦ "Колледж"  
Казаков Г.Т., зам. председателя, к.ф.-м.н., доцент, директор СО ИРЭ РАН  
Анфиногентов В.Г., к.ф.-м.н., доцент СГУ  
Красичков Л.В., к.ф.-м.н., доцент СГУ  
Рыскин Н.М., к.ф.-м.н., доцент СГУ  
Смирнов Д.А., аспирант СГУ  
Храмов А.Е., к.ф.-м.н., ассистент СГУ  
Шараевский Ю.П., д.ф.-м.н., профессор СГУ

### **Рабочая программа**

#### **26 октября 1999**

16.00 Открытие школы-конференции  
16.30–17.20 *Трубецков Д.И.* (чл.-корр РАН, профессор, СГУ). Об истории Саратовского университета

#### **Окно в науку**

17.30–18.45  
*Романов И.* (учащийся, ЛКПН). Почти все о вынужденных колебаниях нелинейного маятника на примере отображения  
*Спирина А.С.* (учащаяся, ЛКПН). Некоторые интересные закономерности (золотое сечение, числа Фибоначчи и др.)  
*Самошин Ф.В.* (учащийся, Лицей № 37). Исследование работы релаксационного генератора на туннельном диоде в автоколебательном и ждущем режимах  
*Носенко И.М.* (учащаяся, ЛКПН). Колебательные химические реакции осаждения в гелях полимеров  
*Сороконтенко В.Р.* (учащийся, гимназия № 4). Шарик плавает в воде...

#### **27 октября 1999**

9.00–9.50 *Данилов Ю.А.* (профессор, Курчатовский научный центр, Москва). Майкл Фарадей  
10.00–10.50 *Шалфеев В.Д.* (профессор, ННГУ). Синхронизация и некоторые приложения  
11.00–11.50 *Кузнецов С.П.* (профессор, СО ИРЭ РАН). Хаос в простых моделях  
12.00–12.30 *Кузнецов А.П.* (профессор, СО ИРЭ РАН), *Тюрюкина Л.В.* (студентка, ВКПН). Сравнительный анализ описания динамических систем в терминах потоков, двумерных и одномерных отображений на примере неавтономного осциллятора

#### **Сложная динамика. Канонические модели**

15.00–17.10. *Потапова А.Ю.* (студентка, ВКПН). Сложная динамика нелинейных осцилляторов с потенциалами, задаваемыми элементарными катастрофами Тома

*Милованов С.В., Печников А.А.* (студенты, ВКПН). Некоторые вопросы теории динамики неавтономных систем  
*Савин А.В.* (студент, физ. фак. СГУ). Воздействие бинарных сигналов на системы с удвоениями периода и разрушением квазипериодических движений  
*Капустина Ю.В.* (студентка, ВКПН). Скейлинг на бифуркационном дереве в отсутствие и в присутствии шума. Фейгенбаумовская и трикритическая динамика  
*Исаева О.Б.* (стажер–исследователь, СО ИРЭ РАН). Комплексное обобщение приближенного ренормгруппового анализа Фейгенбаума  
*Иванова А.С.* (студентка, ВКПН). Бассейны притяжения связанных систем с удвоениями периода  
*Кузнецов А.С.* (м.н.с., ИПФ РАН, Нижний Новгород). Динамика ансамблей связанных бистабильных элементов

17.30 Стендовые доклады

19.30 Вечер английского языка

## 28 октября 1999

9.00–9.50 *Данилов Ю.А.* (профессор, Курчатовский научный центр, Москва). Джеймс Клерк Максвелл  
 10.00–10.50 *Клеев А.И.* (д.ф.–м.н., ИПФ РАН, Москва). Об Институте физических проблем РАН им. П.Л. Капицы  
 11.00–11.50 *Анищенко В.С.* (профессор, СГУ). Синхронизация кардиоритма  
 12.00–12.30 *Кузнецов С.П.* (профессор, СО ИРЭ РАН), *Иваньков Н.Ю.* (аспирант, ВКПН). Критическое поведение при разрушении квазипериодического движения

## Сложная динамика. Физические системы

15.00–17.10.

*Титов В.Н.* (аспирант, физ. фак. СГУ). Особенности нелинейной динамики системы электронный поток – обратная электромагнитная волна  
*Дмитриева Т.В.* (студентка, ВКПН). Сложная динамика простой модели лампы обратной волны  
*Шигаев А.М.* (студент, ВКПН). Сложная динамика простых моделей распределенных автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью  
*Широков А.П.* (аспирант, ВКПН). Динамика консервативных и диссипативных систем на примере сравнительного анализа точного и приближенного отображения прыгающего шарика  
*Бугаевский М.Б.* (студент, ВКПН). Экспериментальное определение характеристик аттракторов схемы Чуа  
*Красков А.В.* (студент, ВКПН). Размерностные характеристики электромиограмм  
*Артюхин Д.В.* (аспирант, ННГУ). Хаотическая динамика двух связанных нейронов  
*Касаткин Д.В.* (студент, ННГУ). О генерации хаоса в ансамбле трех каскадно связанных фазовых систем

- 17.30            Стендовые доклады
- 19.30            Высшее образование в XXI веке: круглый стол – от профессора до школьника

## 29 октября 1999

- 9.00–9.50        *Данилов Ю.А.* (профессор, Курчатовский научный центр, Москва). Яков Исидорович Перельман
- 10.00–10.40     *Безручко Б.П.* (профессор, СГУ), *Смирнов Д.А.* (аспирант, ВКПН). Построение моделей нелинейных неавтономных колебательных цепей по временным рядам
- 10.40–10.50     *Диканев Т.В.* (студент, ВКПН). Информационная ценность различных участков временного ряда для восстановления уравнений динамической системы
- 11.00–11.30     *Жалнин А.Ю.* (студент, ВКПН). Что такое странный нехаотический аттрактор?

## Физика колебаний и волн

- 15.00–16.10
- Блохина Е.В.* (студентка, ВКПН). Теория гиротрона с нефиксированной структурой поля и отражениями на концах пространства взаимодействия
- Митюрин В.Е.* (студент, ВКПН). Моделирование распространения импульсов в диэлектрических волноводах методом конечных разностей во временном представлении
- Малюгина М.А.* (аспирант, ВКПН). Нелинейные магнитостатические волны в связанных структурах
- Скоков В.В.* (студент, ВКПН). Процессы установления колебаний в ферромагнетике при больших уровнях сигнала
- Егоров О.Б.* (студент физ. фак. МГУ). Динамика пространственных параметрических солитонов в резонаторе
- Егорычев С.А.* (аспирант, ННГУ). О работе распределенной параметрической антенны в неоднородных по трассе волноводах
- Лонин А.Л.* (ассистент, ННГУ). Формирование волноведущих структур в фотополимеризующихся композициях
- Мошков А.Ю.* (студент, ННГУ). Использование принципа минимума при решении уравнения Бюргерса и KPZ

*Сборник материалов «Нелинейные дни в Саратове для молодых–99» можно приобрести в редакции наложенным платежом (15 руб.). Заказы можно сделать по электронной почте или телефону.*

*E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru*

*Тел.: (845–2)51–42–98*

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *М.В. Попова, Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал–макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно–научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты  
р/с №40503810000000000378 ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

**Подписка на I–ое полугодие 2000 года**  
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498  
и по заявочным письмам непосредственно в редакции  
Стоимость подписки на I полугодие 90 рублей

**Зарубежная подписка** оформляется через фирмы–партнеры ЗАО «Международная книга – Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК–Периодика» по адресу: 117049, Москва, ул. Б. Якиманка, 39, ЗАО «МК–Периодика» тел.: (095) 238–14–85, 238–49–67; факс: 238–46–34  
E–mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address one of the partners of JSC «Mezhdunarodnaya Kniga–Periodica» in Your country or necessary to address JSC «МК–Periodica» directly  
Address: Russia, Moscow, 117049, ul. B. Yakimanka, 39, «МК–Periodica»  
Tel.: (095) 238–14–85, 238–49–67; Fax: 238–46–34  
E–mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

Сдано в набор 28.09.99. Подписано к печати 1.12.99. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 11,55 (8,25). Уч.–изд. л. 13,8. Тираж 200 экз. Заказ 140

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.04.98

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел. (845–2)514298, факс (845–2) 514298  
E–mail: and@cas.ssu.runnet.ru

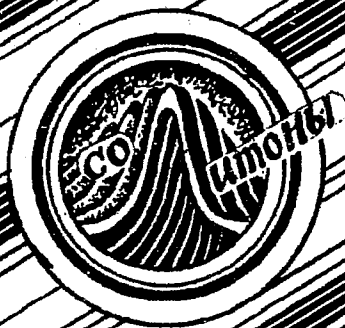
Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж»

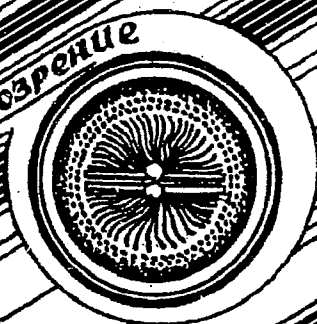


© Оформление художника Д.В. Соколова, 1999





Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей



Современной нелинейной динамики



Эх, дороги...  
 Дорога в никуда  
 Дороги, которые мы выбираем  
 Выбор цели  
 Цель неясна и неизвестен срок. Зато такое множество дорог!  
 Куда ведешь, тропинка милая  
 Куда свернуть, куда идти - меня, о боже, просвети!  
 Миллион развилок у судьбы  
 Девять девяносто девять  
 Девиз твой прост - нельзя остановиться, и вечный путь.  
 Покой нам только снится  
 Milky-Way- лекарство от апатии, с ним не прозеваешь бифуркации  
 Бывали дни весёлые, гуляя во все стороны  
 Быть или не быть...  
 Девы образ у меня в груди помогает в выборе пути  
 Покой нам только снится