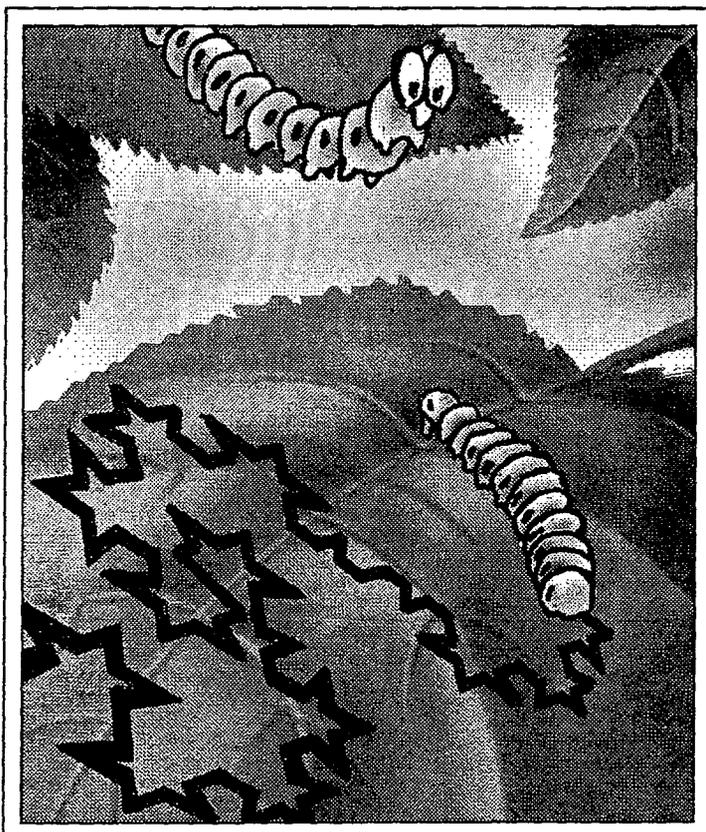


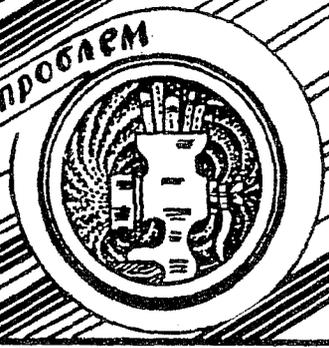
# Трикладная Желпнейная Динамика



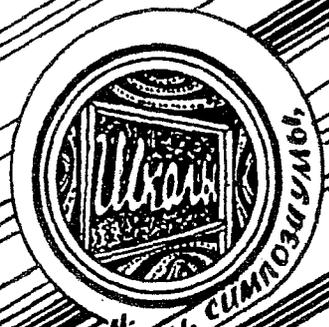
2  
1998



**Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы**



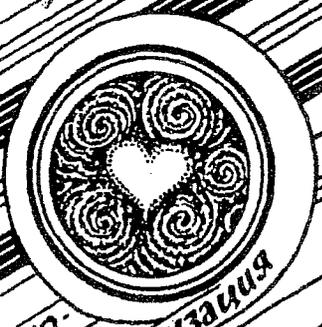
**Обзоры актуальных проблем  
нелинейной  
динамики**



**Конференции, семинары, симпозиумы,  
детерминированный хаос**



**детерминированный хаос**

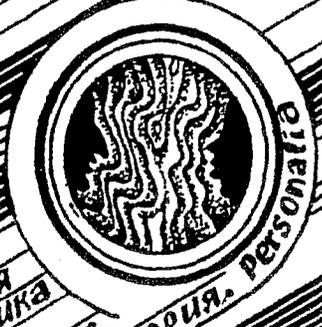


**Авто-волны  
самоорганизация**

**Прикладные задачи  
нелинейной  
теории  
колебаний  
и волн**



**Нелинейная  
динамика  
в  
лицах.**



**история. персоналии**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и  
электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский  
государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный  
университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный  
университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анщипенко*, профессор, Саратовский государственный  
университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский  
научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет

*В.И. Кринский*, профессор, Институт экспериментальной и  
теоретической биофизики, Пуцнино

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник,  
Саратовский филиал Института радиотехники и  
электроники РАН

*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный  
университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный  
университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики  
РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический  
институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный  
университет

*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных  
наук РФ, Нижегородский государственный университет

*В.К. Юлатов*, старший научный сотрудник, Институт  
прикладной физики РАН, Нижний Новгород

**СОДЕРЖАНИЕ**

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

<i>Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С., Гриднев В.И., Довгалецкий П.Я.</i> Анализ $RR$ -интервалов с помощью показателей Ляпунова . . . . .	3
<i>Макаров В.А., Некоркин В.И.</i> Кластерная синхронизация в цепочке бистабильных автоколебательных элементов . . . . .	15
<i>Брюханов Ю.А.</i> Динамика нелинейной рекурсивной цифровой системы второго порядка . . . . .	28
<i>Синицкий Л.А., Цвигун О.А.</i> О синхронизации квазипериодических систем третьего порядка периодическим сигналом . . . . .	35
<i>Храмов А.Е.</i> Сложная динамика когерентных структур в двухпоточковом виркаторе . . . . .	42

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

<i>Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н.</i> Бифуркационная диаграмма в случае кольцевого интерферометра с жидким кристаллом: влияние диффузии . . . . .	65
--	----

**НОВОЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

<i>Мельников Л.А., Дербов В.Л., Быченков А.И.</i> Динамика внеосевого гауссова пучка с астигматизмом и кручением в прозрачной нелинейной волновой среде . . . . .	73
---	----

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

<i>Качак В.В., Мчедлова.</i> Модель взаимодействия двух научных направлений с учетом ограничения экспоненциального роста достижений . . . . .	85
<i>Качак В.В., Усанов Д.А.</i> К вопросу о взаимодействиях научных школ или об одном аргументе «за» интеграции образовательных структур . . . . .	95
<i>Трубецкова Е.Г.</i> Философия случая в романах М.А. Алданова: синергетический аспект . . . . .	97

**ДЕБЮТЫ**

<i>Мельникова Е.В.</i> Нелинейная динамика распространения эпидемий . . . . .	110
---	-----

**КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ**

<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Мельников Л.А.</i> Физические задачи для научных сотрудников младшего возраста . . . . .	117
---	-----

<b>АНОНС</b> . . . . .	72
------------------------	----

## CONTENTS

## APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Diagnostics of cardio-vascular diseases with help of largest lyapunov exponent of  $RR$ -sequences. *A.N. Pavlov, N.B. Janson, V.S. Anishchenko, V.I. Gridnev, P.Ya. Dovgalevsky*. . . . . 3
- Cluster synchronization in a chain of bistable self-excited elements. *V.A. Makarov, V.I. Nekorkin*. . . . . 15
- Transient processes in recursive digital second-order system with nonlinearity of saturation. *Yu.A. Bruhanov* . . . . . 28
- On synchronization of the third order quasi-periodic systems by a periodic signal. *L.A. Sinitsky, O.A. Tsvigun* . . . . . 35
- Complex dynamics of coherent structures in two stream vircator. *A.E. Hramov* . . . 42

## BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Bifurcation diagram in case of ring inteferometer containing liquid crystal: effect of diffusion. *A.L. Magazinnikov, B.N. Poizner* . . . . . 65

## INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Dynamics of an off axis gaussian beam with astigmatism and twist in a transparent nonlinear waveguide medium. *L.A. Melnikov, V.L. Derbov, A.I. Bychenkov* . . 73

## METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

- The model of interactions of two scientific fields with exponential growth of achievements bounded by nonlinearity. *V.V. Kachak, E.S. Mchedlova* . . . 85
- To the question on scientific schools cooperation or about one argument for integration of education structures. *V.V. Kachak, D.A. Usanov* . . . . . 95
- Philosophy of randomness in the novels by M.A. Aldanov: synergetic aspect. *E.G. Trubetskov* . . . . . 97

## DEBUTS

- Nonlinear dynamics of an epidemic spreading. *E.V. Melnikova*. . . . . 110

## BOOKS REVIEW

- Physical problems for scientists of young age. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., L.A. Melnikov* . . . . . 117

- ANNOUNCEMENTS . . . . . 72



## ДИАГНОСТИКА СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ ПАТОЛОГИИ МЕТОДОМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ RR-ИНТЕРВАЛОВ

*А.Н. Павлов, Н.Б. Янсон, В.С. Анищенко, В.И. Гриднев, П.Я. Довгалевский*

В настоящей работе мы предлагаем метод представления дискретной последовательности кардиоинтервалов в виде гладкой временной зависимости, который позволяет применять к данному типу временных рядов процедуру вычисления старшего ляпуновского показателя. Обработка банков данных, содержащих записи RR-интервалов пациентов, страдающих ишемической болезнью сердца, а также лиц, перенесших инфаркт миокарда, продемонстрировала, что ляпуновский показатель может являться диагностическим критерием, позволяющим осуществлять разделение различных групп пациентов более достоверно, чем стандартные для кардиологии методы анализа временных рядов.

### Введение

Исследования последних лет свидетельствуют о возрастании интереса специалистов по нелинейной динамике к проблемам диагностики в медицине и биологии [1–26]. Начиная с работ [1–6], все больше ученых приходят к выводу о необходимости анализа хаотической динамики многих природных явлений, включая функционирование живых организмов. Такой подход открывает новые возможности использования мощного аппарата теории нелинейных колебаний в диагностических целях.

Большое внимание исследователей привлекают сигналы электрической активности сердца человека – электрокардиограммы (ЭКГ). На сегодняшний день известно значительное количество работ по исследованию ЭКГ, выполненных как специалистами в области медицины с использованием некоторых представлений нелинейной динамики, так и физиками, не имеющими фундаментальных знаний по физиологии, но обладающими большим опытом обработки сигналов сложной структуры (см., например, [7–31]).

Большое количество публикаций в этом направлении потребовало провести обобщение (стандартизацию) известных методов анализа временных рядов с целью выявления наиболее информативных методов, рекомендованных к использованию в целях диагностики [32].

Не следует, однако, полагать, что нелинейная динамика уже прочно утвердилась в сознании кардиологов, а ее достижения внесли значительные изменения в существующие диагностически значимые медицинские критерии. На самом деле нелинейная динамика делает пока только первые шаги в направлении

решения ряда проблем медико-биологической диагностики, которые тем не менее свидетельствуют о большом потенциале и перспективности приложений данной науки в этой области.

Большинство исследователей в настоящее время предпочитают работать не с сигналом ЭКГ, а с последовательностью  $RR$ -интервалов – расстояний между соседними  $R$ -пиками. Данное обстоятельство объясняется следующим образом. Во-первых, при создании больших банков данных хранение электрокардиограмм требует резервирования значительного объема памяти компьютера. Во-вторых, по мнению кардиологов, именно  $RR$ -интервалы несут в себе информацию о функциональном состоянии организма, тогда как характерный  $PQRST$ -комплекс повторяется с минимальными искажениями при каждом сердечном сокращении. Важной характеристикой ЭКГ является вариабельность сердечных сокращений, то есть изменение длительности  $RR$ -интервалов во времени.

Известные методы анализа  $RR$ -интервалов в наиболее полном объеме изложены исследовательской группой Европейского Кардиологического Общества в обзоре [32]. Целью настоящего исследования является разработка метода вычисления старшего ляпуновского характеристического показателя (ЛХП) для дискретной последовательности кардиоинтервалов и экспериментальное обоснование возможности использования этого метода для диагностики состояния сердечно-сосудистой системы человека.

## 1. Способы представления $RR$ -интервалов

С точки зрения нашей задачи очень важным является вопрос о представлении последовательности  $RR$ -интервалов. Традиционным методом представления является зависимость величины каждого  $RR$ -интервала от номера сердечного сокращения  $i$  (рис. 1). Такая зависимость позволяет сразу же оценить диапазон изменения кардиоинтервалов, построить плотность распределения вероятности и вычислить моментные функции ( $\overline{RR}$ ,  $\sigma_{RR^2}$ ). Для осуществления спектрального анализа необходим переход к временной оси, для чего обычно домножают номер  $i$  на величину  $\overline{RR}$ . При работе с короткими реализациями (не более 5 минут) для лучшего частотного разрешения иногда используют авторегрессионные методы анализа, либо вычисляют быстрое преобразование Фурье с использованием различных корреляционных окон.

Заметим, что традиционное представление  $RR$ -интервалов (рис. 2, а) с физической точки зрения представляется довольно искусственным, и более целесообразным является другое представление (рис. 2, б). Если происходит заме-

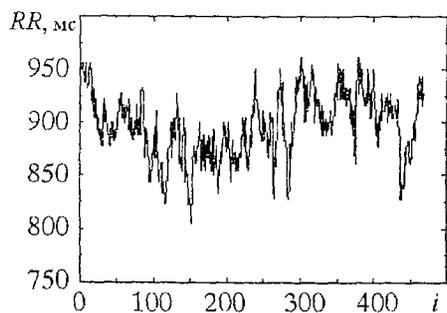


Рис. 1. Зависимость величины  $RR$ -интервала от номера сердечного сокращения

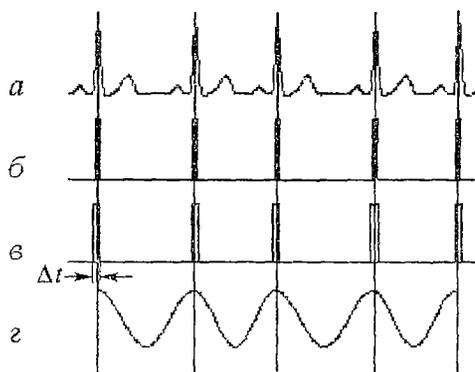


Рис. 2. Исходная ЭКГ (а) и различные способы представления  $RR$ -интервалов: в виде последовательности  $\delta$ -функций (б), последовательности прямоугольных импульсов (в) и гладкой реализации (г)

щение  $R$ -пиков на  $\delta$ -функции, а все остальные характерные зубцы исключаются из рассмотрения, появляется возможность аналитического вычисления спектра мощности [33].

Поскольку определение  $RR$  при записи ЭКГ происходит с ошибкой, определяемой шагом дискретизации  $\Delta t$ , координаты точки, в которой задана  $\delta$ -функция, имеют погрешность  $\Delta t$ . Поэтому вместо  $\delta$ -пиков можно рассмотреть последовательность прямоугольных импульсов с шириной  $\Delta t$  и единичной амплитудой (рис. 2, в). Для такой последовательности также сохраняется возможность аналитического вычисления спектра мощности.

## 2. Вычисление старшего ляпуновского показателя по последовательности $RR$ -интервалов

Спектральный и корреляционный анализ были известны и широко применялись при обработке временных рядов задолго до утверждения представлений о динамическом хаосе. Наряду с ними в последние годы для  $RR$ -интервалов стали вычислять различные энтропии. Поскольку расчеты энтропии Шеннона  $H = -\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$  для открытых систем являются некорректными, необходимо нормировать энтропию на энергию системы. Таким образом, для  $RR$ -интервалов может быть использована нормированная энтропия  $H_p = H/E$ , где  $E$  представляет собой величину, пропорциональную суммарной энергии системы в диагностически значимом диапазоне. Можно также использовать энтропию  $H_s$ , рассчитанную по спектру мощности и нормированную на величину  $E$  [19–23, 34, 35]. Прогресс нелинейной динамики позволяет надеяться на появление новых критериев, которые могли бы найти применение в медицинской диагностике.

В настоящее время появляются работы, где помимо традиционных способов обработки  $RR$ -интервалов (вычисления моментных функций, спектрального анализа и т.д. [32]) осуществляется расчет корреляционной размерности [2, 10], анализ фазовых портретов [11–13]. Вычисление энтропии Колмогорова и ляпуновских показателей по последовательности  $RR$ -интервалов для коротких временных рядов до сих пор не проводилось, поскольку общепризнанный метод [36] требует наличие гладкого сигнала.

Чтобы перейти от принципиально дискретного сигнала к непрерывному, по сути, необходимо ввести фазу для последовательности кардиоинтервалов. В настоящее время известны различные способы введения фазы [37], наиболее простой из которых состоит в приближении постоянства мгновенной частоты  $\omega_i = 2\pi/(t_{i+1} - t_i)$  в интервале времени между двумя событиями (пересечениями непрерывным сигналом некоторого порогового уровня в моменты  $t_i$  и  $t_{i+1}$ ), что предполагает линейный закон изменения фазы

$$\varphi = 2\pi(t - t_i)/(t_{i+1} - t_i) \pm 2\pi i, \quad t_i \leq t < t_{i+1}. \quad (1)$$

На основе данной формулы предлагается трансформировать последовательность кардиоинтервалов в гладкую временную зависимость (рис. 2, з)

$$a(t) = \cos 2\pi(t - t_i)/RR_i, \quad RR_i = t_{i+1} - t_i, \quad (2)$$

где  $t_i$  и  $t_{i+1}$  – моменты времени, соответствующие двум последовательным  $R$ -зубцам ЭКГ.

Поскольку фаза в интервале между двумя  $R$ -пиками по определению (1) предполагается линейной, а участки косинусоиды с разными периодами «спиваются» в точках  $\varphi = \pm 2\pi i$ , первая производная от сигнала (2) не претерпевает разрывов. Таким образом, предложенный способ перехода от дискретного ряда к

гладкому сигналу (2) дает возможность применения к  $a(t)$  метода расчета старшего ЛХП [36]<sup>1</sup>.

Мы предлагаем один из наиболее простых методов перехода к гладкой временной зависимости, основанный на том, что мгновенная частота на интервале между двумя сокращениями сердечной мышцы считается постоянной. При преобразовании (2) последовательность  $RR$ -интервалов трансформируется в гладкую реализацию  $a(t)$ , представляющую собой сигнал со сложной частотной модуляцией. Наши исследования, проведенные в более общем случае, когда мгновенная частота является функцией времени [40], показали, что выбранное приближение хотя и дает количественную ошибку в сравнении с общим случаем, однако качественно ему соответствует. Другими словами, определение ляпуновского показателя в этом случае содержит ошибку, однако знак показателя и его зависимость от изменения режима функционирования системы полностью соответствуют более точным данным, учитывающим зависимость мгновенной частоты от времени. Для подтверждения вышесказанного рассмотрим, как работает предложенный «метод косинусов» на тестовых моделях – модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью (генератор Анищенко – Астахова) [41,42]

$$dx/dt = mx + y - xz, \quad dy/dt = -x, \quad dz/dt = -gz + 0.5g(x + |x|)x \quad (3)$$

и системе Ресслера [43]

$$dx/dt = -(y + z), \quad dy/dt = x + ay, \quad dz/dt = b + z(x - c). \quad (4)$$

Аналогом  $RR$ -интервалов для данных систем могут служить расстояния между последовательными максимумами координат  $x(t)$ . Мы осуществляли переход от расстояний между максимумами к сигналу (2) и вычисляли ляпуновский показатель  $\lambda_1$  методом [36] при различных значениях управляющих параметров тестовых моделей. Результаты, приведенные на рис. 3, позволяют убедиться в том, что даже если старший ЛХП, посчитанный по сигналу  $a(t)$  (рис. 3, б, з), не совпадает с истинным значением показателя (рис. 3, а, в), он, тем не менее, сохраняет качественное представление о динамике модельных систем. Другими словами,  $\lambda_1=0$  для периодических сигналов и  $\lambda_1>0$  в режиме динамического хаоса. Причем, эволюция  $\lambda_1$  при изменении управляющих параметров систем (3) и (4) качественно повторяет зависимость от параметров истинных значений максимальных ляпуновских экспонент. Поскольку при решении задач медицинской диагностики нас интересует не само по себе значение показателя, а установление неких объективных критериев различного динамического поведения, вычислять ли истинную величину показателя Ляпунова или характеристику ему пропорциональную, не является принципиальным с этой точки зрения. Базируясь на данных результатах, обратимся к описанию эксперимента.

---

<sup>1</sup> Известно [38,39], что по одномерной реализации не всегда можно вычислить истинное значение максимального показателя Ляпунова ( $\lambda_1$ ). В общем случае алгоритм [36] позволяет определить некоторую величину  $K$ , характеризующую скорость разбегания близких в начальный момент траекторий, отличную от классического ляпуновского показателя. Однако, поскольку для автономных динамических систем, не испытывающих шумового воздействия, имеем  $K=\lambda_1$ , данную характеристику отождествляют со старшим ЛХП при анализе экспериментальных данных биологического происхождения [2], что зачастую неверно. В настоящей работе мы используем сформировавшуюся терминологию и называем величину, вычисленную методом [36], ляпуновским показателем. Вопрос о взаимосвязи  $\lambda_1$  и  $K$  требует отдельного детального изучения, которое мы планируем осуществить в дальнейших исследованиях.

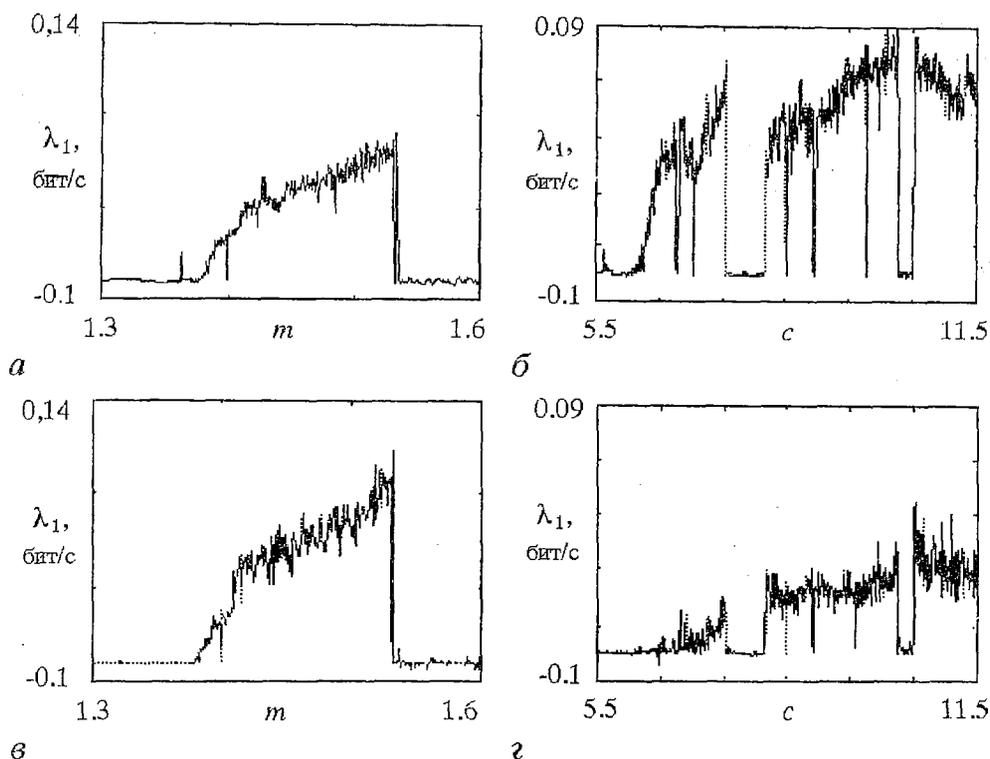


Рис. 3. Зависимость величины ляпуновского показателя от управляющих параметров генератора с инерционной нелинейностью и системы Ресслера: а – истинные значения показателя для системы (3); б – то же для системы (4); в – показатель Ляпунова, посчитанный для сигнала вида, приведенного на рис. 2,г, при использовании в качестве аналога  $RR$ -интервалов расстояний между максимумами координаты  $x(t)$  системы (3); г – то же для системы (4)

### 3. Разделение различных групп пациентов методами нелинейной динамики

**3.1. Больные ишемической болезнью сердца различной степени.** В исследование было включено 40 пациентов Саратовского кардиоцентра, страдающих ишемической болезнью сердца (ИБС) различной степени тяжести без клинических признаков сердечной недостаточности. Основные медицинские методы диагностики ИБС, используемые в Саратовском кардиоцентре, включали:

- определение толерантности (предельно допустимая нагрузка, которую способен выдерживать пациент, то есть уровень физической работоспособности);
- определение двойного произведения (характеристика, отражающая потребление кислорода миокардом при 75% допустимой по возрасту физической нагрузки).

Диагностика ИБС проводилась с использованием таких инструментальных методов, как коронарография, холтеровский мониторинг ЭКГ, велоэргометрия.

Из данного перечня видно, что клинические методы диагностики ишемии основаны на совокупности критериев, не включающих обработку  $RR$ -интервалов. В то же время важной задачей кардиологии является возможность диагностики именно по последовательности  $RR$ -интервалов, поскольку, во-первых, они несут информацию о состоянии всей сердечно-сосудистой системы организма в целом (рабочая гипотеза кардиологов); во-вторых, их анализ и обработка не требуют дорогостоящего оборудования.

В проводимых исследованиях 40 пациентов (мужчины) были разделены на 2 группы по результату физиологической пробы на ИБС. Лица, давшие положительный результат пробы, составили 1-ю группу (24 пациента); отрицательный результат – 2-ю группу (16 пациентов). Цель наших исследований заключалась в выявлении диагностически значимых критериев, получаемых путем обработки

последовательностей кардиоинтервалов самыми различными методами анализа временных рядов.

Обрабатываемый банк данных содержал 80 файлов – по два на каждого пациента (приблизительно по 350–500 точек). Первая запись  $RR$ -интервалов проводилась в состоянии покоя, вторая – при нагрузке 25 Вт. Нагрузка осуществлялась следующим образом. Пациента заставляли с определенной скоростью крутить педали велоэргометра (приблизительно 60 оборотов в минуту). После того, как скорость вращения стабилизировалась (окончание переходного процесса от спокойного состояния к нагрузке), записывалась последовательность кардиоинтервалов в течение 5÷7 минут.

Для всех временных рядов из имеющегося банка данных был рассчитан ряд характеристик, описанных ниже. Пользуясь терминологией обзора [32], были рассмотрены

- «временные» характеристики:  $a$  – среднее значение  $\overline{RR}$ ,  $b$  – дисперсия  $\sigma_{RR}^2$ ;
- «частотные» характеристики:  $a$  – энергия  $E_{LF}$  колебаний в диапазоне  $LF$  низких частот 0.04÷0.15 Гц,  $b$  – энергия  $E_{HF}$  в диапазоне  $HF$  высоких частот 0.15÷0.4 Гц,  $v$  – отношение энергий  $E_{LF}/E_{HF}$  колебаний в диапазонах  $LF$  и  $HF$ .

Наряду с широко используемыми в медицине вышеупомянутыми величинами, нами были использованы следующие статистические и динамические характеристики:

- энтропия  $H_p$ , посчитанная по распределению вероятности  $RR$ -интервалов и нормированная на величину, пропорциональную суммарной энергии колебаний в диапазоне  $LF+HF$ ;
- энтропия  $H_s$ , посчитанная по спектру мощности и нормированная на величину, пропорциональную суммарной энергии колебаний в диапазоне  $LF+HF$ ;
- старший ЛХП  $\lambda_1$ , вычисляемый с помощью алгоритма [36] для предложенного в настоящей работе «метода косинусов».

Результаты исследования обеих групп даны в табл. 1 и сводятся к следующему.

1. Из всех характеристик только две – *нормированная энтропия  $H_s$* , посчитанная по спектру, и *старший ЛХП  $\lambda_1$*  – позволили осуществить разделение групп<sup>2</sup>. В первом случае диагностическим критерием являлось значение  $H_s$  при нагрузке 25 Вт: в 1-й группе у 18 из 24 пациентов (то есть у 75%)  $H_s < 9.6$ , тогда как во 2-й группе у 11 из 16 пациентов (то есть примерно у 69%)  $H_s \geq 9.6$ . Таким образом, с помощью  $H_s$  удастся правильно идентифицировать принадлежность к той или иной группе 29 пациентов из 40 (то есть примерно 72.5%). Во втором случае диагностика проводится по реакции на нагрузку. В 1-й группе у 17 из 24 пациентов (то есть примерно 70.8%) старший ЛХП при нагрузке уменьшается, во 2-й группе у 12 из 16 пациентов (то есть 75%) он увеличивается. Вычисление ляпуновского показателя позволяет идентифицировать также 29 пациентов из 40 (то есть примерно 72.5%).

Все другие из вышеуказанных характеристик не позволили осуществить надежной диагностики (вероятность быть отнесенным в ту или иную группу не более 66 %).

2. Расчет старшего ляпуновского показателя является более предпочтительным, чем вычисление  $H_s$ , поскольку дает качественный эффект – упорядочение или хаотизацию колебаний при внешнем воздействии (нагрузке), тогда как  $H_s$  – только количественный. Введение некоторого уровня  $H_s = 9.6$  является условным, а поскольку для 11 из 40 пациентов  $H_s \in [9.5; 9.7]$ , требуется высокая точность вычисления энтропии и, как следствие, точность вычисления спектра мощности.

<sup>2</sup> В кардиологии принято говорить о разделении групп, если выбранный критерий осуществляет диагностику более чем в 2/3 случаев.

Таблица 1

Результаты обработки последовательностей кардиоинтервалов для пациентов, страдающих ишемической болезнью сердца

Состояние	Номер группы	Число пациентов в группе	Число пациентов, диагностируемых по		
			дисперсии $\sigma_{RR}^2$	энтропии $H_s$	показателю Ляпунова $\lambda_1$
покой	1	24	13	16	исследуется реакция на нагрузку
	2	16	8	8	
нагрузка 25 Вт	1	24	15	18	17
	2	16	9	11	12

3. Процедура вычисления ляпуновского показателя [36] предполагает решение задачи реконструкции фазового портрета по одномерной реализации и, соответственно, подбор ряда параметров численной схемы (размерности пространства вложения, времени задержки  $\tau$  и т.д.) [44–46]. Поскольку эффект увеличения или уменьшения для ряда индивидуумов является незначительным, целесообразно проводить параметрический анализ при определении  $\lambda_1$ . В табл. 1 приведены результаты такого анализа в 5–мерном пространстве при варьировании  $\tau$ . Каждое значение  $\lambda_1$  определялось путем усреднения результатов вычисления старшего ЛХП в некотором диапазоне значений  $\tau$  (который не приводит к сильным геометрическим искажениям реконструированного множества, то есть фазовый портрет не был сильно вытянут ни в одном из направлений). Такая процедура требует значительно большего времени вычисления, чем при расчете других характеристик, но зато позволяет с большим доверием относиться к полученным результатам.

4. Эффект хаотизации (или упорядочения) колебаний при внешнем воздействии, фиксируемый по увеличению (уменьшению) величины  $\lambda_1$ , сопровождается изменением структуры сигнала. Поэтому неизбежно возникает вопрос: почему данные изменения не были зафиксированы при вычислении других характеристик, например, спектра мощности?

Наши исследования показали, что реакция пациентов на нагрузку не является идентичной даже в пределах одной группы. Для части больных рост ЛХП сопровождается увеличением энергии колебаний в диапазоне высоких частот  $HF$ , тогда как для других спектр мощности меняется в области ультранизких частот  $ULF$  ( $f < 0.04$  Гц). Учитывая тот факт, что расчеты в диапазоне  $ULF$  являются недостоверными для коротких временных рядов, а также принимая во внимание отсутствие идентичной реакции на нагрузку, мы не смогли установить диагностический критерий при спектральном анализе. Заметим при этом, что согласно известным стандартам измерения [32] мы рассматривали в диагностических целях только ограниченный частотный диапазон  $0.04 \div 0.4$  Гц как при расчете спектров, так и при вычислении энтропий. Как продемонстрировано на рис. 4, спектры мощности, вычисленные по последовательностям  $RR$ -интервалов пациентов обеих групп, как до, так и во время нагрузки являются однотипными.

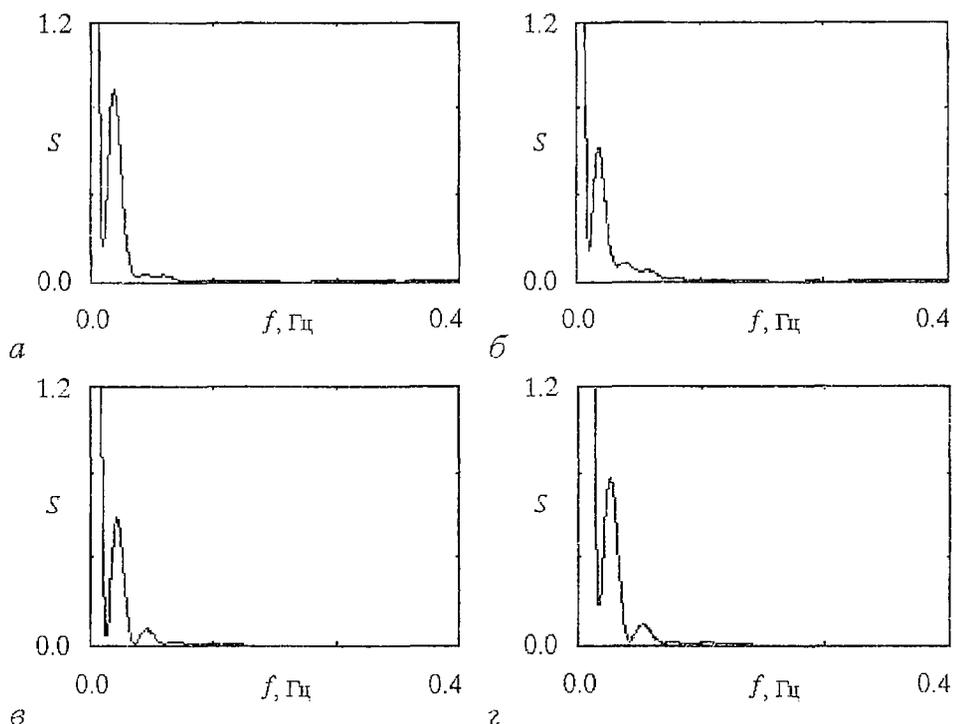


Рис. 4. Характерные спектры мощности, вычисленные по последовательностям  $RR$ -интервалов пациентов, страдающих ИБС, для обеих групп в спокойном состоянии:  $a$  – группа 1,  $б$  – группа 2; при нагрузке 25 Вт:  $в$  – группа 1,  $г$  – группа 2

**3.2. Пациенты, перенесшие инфаркт миокарда.** В исследование было включено 29 пациентов, перенесших инфаркт миокарда. Из них 14 пациентов (1-я группа) выжили, 15 пациентов (2-я группа) умерли в течение месяца вследствие перенесенного инфаркта. Задачей, интересующей кардиологов, является прогноз выживаемости по анализу записей  $RR$ -интервалов, проводимых в первые дни после перенесения инфаркта.

Для последовательностей кардиоинтервалов, записанных в 1-й день после инфаркта (время записи было не более 5 минут), был осуществлен расчет тех же характеристик, что и ранее. Результаты сведены в табл. 2.

Для анализируемого банка данных разделение групп удалось получить только при вычислении старшего ляпуновского показателя. Согласно полученным результатам, существует диапазон  $\lambda_1 \in [0.5; 1.1]$  бит/с, в который попадает основная

Таблица 2

Результаты обработки последовательностей кардиоинтервалов для пациентов, перенесших инфаркт миокарда

Номер группы	Число пациентов в группе	Число пациентов, диагностируемых по		
		среднему $\overline{RR}$	энтропии $H_s$	показателю Ляпунова $\lambda_1$
1	14	9	8	11
2	15	10	10	11

масса пациентов из 1-й группы – 11 из 14 (примерно 78.5%) и не попадает большинство представителей 2-й группы – для 11 из 15 (примерно для 73%)  $\lambda_1 < 0.5$  бит/с или  $\lambda_1 > 1.1$  бит/с. По ляпуновскому показателю, таким образом, можно отнести к той или иной группе 22 пациента из 29 (примерно 76%).

Остальные характеристики не позволили осуществить разделение групп (вероятность быть отнесенным в ту или иную группу была не более 66%). Для иллюстрации мы включили в таблицу 2 результаты расчета  $\overline{RR}$  и энтропии  $H_s$ .

### Заключение

В настоящей работе предложен метод представления  $RR$ -интервалов, позволяющий применять к данному типу временных рядов процедуру вычисления старшего ЛХП. Для приведенных примеров, как показали исследования, ляпуновский показатель может являться диагностическим критерием, позволяющим осуществлять разделение групп пациентов более достоверно, чем стандартные для кардиологии методы анализа временных рядов.

В проводимые исследования были включены записи  $RR$ -интервалов 40 человек в 1-м примере и 29 человек во 2-м. Разумеется, для того, чтобы с большим доверием относиться к возможности диагностики по значению  $\lambda_1$ , полученные результаты должны быть перепроверены на больших группах. В частности, мы хотим отметить, что в случае инфаркта нам не удалось добиться диагностики для записей, сделанных через несколько дней после инфаркта для тех же пациентов; только в первый день классификация получилась достаточно четкой.

К достоинствам «метода косинусов» относится то, что он может применяться не только к  $RR$ -интервалам, но и к целому набору других данных, например, «interspike intervals» (ISI) для нейронов [40].

Переход от последовательности дискретных значений к гладкой реализации и возможность вычисления динамических характеристик для сигналов, генерируемых нейронами, позволяет надеяться на то, что ляпуновские показатели пополнят набор характеристик, традиционно вычисляемых в последнее время для данных типа ISI.

*Проводимые исследования были частично поддержаны грантом INTAS 96-0305 и Саратовским Международным центром перспективных исследований.*

### Библиографический список

1. *Goldberger A.L., West B.J.* Fractals in physiology and medicine // *Yale J. Biol. Med.* 1987. Vol. 60. P. 421.
2. *Babloyantz A., Deslexhe A.* Is a normal heart a periodic oscillator? // *Biol. Cybernetics.* 1988. Vol. 58. P. 203.
3. *Goldberger A.L., Rigney D.R., West B.J.* Chaos and fractals in human physiology // *Sci. Am.* 1990. Vol. 262. P. 42.
4. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
5. *Glass L.* Theory of heart. New York: Springer-Verlag, 1991.
6. *Glass L.* Cardiac arrhythmias and circle maps – A classical problem // *Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 13.
7. *Peng C.K., Mietus J., Hausdorff J.M., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Long-range anti-correlations and non-Gaussian behavior of the heartbeat // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. P. 1343.
8. *Peng C.K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // *Chaos.* 1995. Vol. 5, № 1. P. 82.

9. Peng C.K., Haylin S., Stanley H.E., Goldberger A.L. Fractal scaling properties in nonstationary heartbeat time series // Chaotic, Fractal And Nonlinear Signal Processing. Mystic, July, 1995 / Ed. R.A. Katz. AIP Conf. Proc. 1995. Vol. 375. P. 615.
10. Frison T.W., Peng C.K., Goldberger A., Katz R.A. Chaotic data analysis of heart R-R Interval EKG data // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing. Mystic, July, 1995 / Ed. R.A. Katz. AIP Conf. Proc. 1995. Vol. 375. P. 658.
11. Ulbikas J., Cenys A., Zemaityte D., Varoneskas G. Correlations in heart beat data as quantitative characterization of heart pathology // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing. Mystic, July 1995 / Ed. R.A. Katz. AIP Conf. Proc. 1995. Vol. 375. P. 669.
12. Zebrowski J.J., Poplawska W., Baranowski R. Pattern entropy a tool for non-linear dynamical analysis of a biological nonstationary system: the human heart // Acta Physica Polonica B. 1995. Vol. 26, № 6. P. 1055.
13. Baranowski R., Zebrowski J.J., Poplawska W. et al. 3-dimensional Poincare plots of the QT intervals – an approach to nonlinear QT analysis // Computers in Cardiology. 1995. P. 789.
14. Bigger J.T., Fleiss J.L., Steinman R.C., Rolnitzky L.M., Kleiger R.E., Rottman J.N. Correlations among time and frequency domain measures of heart period variability two weeks after acute myocardial infarction // The American Journal of Cardiology. 1992. Vol. 69, № 4. P. 891.
15. Rosenblum M., Kurths J. A model of neural control of the heart rate // Physica A. 1995. Vol. 215. P. 439.
16. Seidel H., Herzog H. // Modelling the dynamics of biological systems / Eds Erik Mosekilde and Ole G. Mouritsen. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. P. 205.
17. Bezerianos A., Bountis T., Papaioannou G., Polydoropoulos P. Nonlinear time series analysis of electrocardiograms // Chaos. 1995. Vol. 5, № 1. P. 95.
18. Garfinkel A., Spano M.L., Ditto W.L., Weiss J.N. Controlling cardiac chaos // Science. 1992. Vol. 257, № 8. P. 1230.
19. Анищенко В.С., Сапарин П.И. Нормированная энтропия как диагностический признак реакции сердечно-сосудистой системы человека на внешнее воздействие // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3, 4. С. 54.
20. Анищенко В.С., Сапарин П.И., Куртс Ю., Витт А., Фосс А. Анализ динамики сердечного ритма человека на основе критерия перенормированной энтропии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 3, 4. С. 55.
21. Kurths J., Voss A., Saparin P., Witt A., Kleiner H.J., Wessel N. Quantitative analysis of heart rate variability // Chaos. 1995. Vol. 5, № 1. P. 88.
22. Voss A., Kurths J., Kleiner H.J., Witt A., Saparin P., Dietz R., Fiehring H., Wessel N. Neue methoden für die erkennung von hochrisikopatienten in der kardiologie // Biomedizinische Technik. 1994. Band 39, Heft 6. Seite 134.
23. Анищенко В.С., Сафонова М.А., Сапарин П.И. Измерительно-вычислительный комплекс для диагностики сложных режимов автоколебаний // РЭ. 1992. Т. 37, № 3. С. 467.
24. Saparin P.I., Zaks M.A., Kurths J., Voss A., Anishchenko V.S. Reconstruction and structure of electrocardiogram phase portraits // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 1. P. 1.
25. Дмитриева Н.В. Симметричный подход к анализу электрокардиограммы // Серия биологическая. 1989. № 3. С. 450.
26. Дмитриева Н.В. Симметричный подход к анализу электрической и сократительной активности кардиоцитов // Серия биологическая. 1992. № 2. С. 270.
27. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. Может ли режим работы сердца здорового человека быть регулярным? // РЭ. 1997. Т. 42, вып 8. С. 1005.
28. Павлов А.Н., Янсон Н.Б. Применение методики реконструкции математической модели к электрокардиограмме. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 93.
29. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. Седло-фокус в модели электрической активности сердца человека // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 4. С. 78.
30. Янсон Н.Б., Павлов А.Н., Баланов А.Г., Анищенко В.С. Задача

реконструкции математической модели применительно к электрокардиограмме // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 16. С. 57.

31. *Janson N.B., Pavlov A.N., Anishchenko V.S.* One method for restoring in-homogeneous attractors // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1998. Vol. 8, № 4–5 (accepted for publication).

32. Task Force of the European Society of Cardiology and the North American Society of Pacing and Electrophysiology Heart Rate Variability. Standards of Measurement, Physiological Interpretation, and Clinical Use // *Circulation*. 1996. Vol. 93, № 5. P. 1043.

33. *DeBoer R.W., Karemaker J.M., Strackee J.* Comparing spectra of a series of point events particularly for heart rate variability data // *IEEE Trans. on Biomed. Eng.* 1984. Vol. 31, No. 4. P. 384.

34. *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.

35. *Климонтович Ю.Л.* Критерии относительной степени упорядоченности открытых систем // *УФН*. 1996. № 11. С. 1231.

36. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D*. 1985. Vol. 16. P. 285.

37. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* // *Physica D*. 1997. Vol. 104. P. 219.

38. *Paladin G., Serva M., Vulpiani A.* Complexity in dynamical systems with noise // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74, № 1. P. 66.

39. *Loreto V., Paladin G., Vulpiani A.* Concept of complexity in random dynamical systems // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53, № 3. P. 2087.

40. *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals // *Phys. Rev. E* (accepted for publication).

41. *Анищенко В.С., Астахов В.В.* Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // *РЭ*. 1983. № 6. С. 1109.

42. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

43. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys. Lett. A*. 1976. Vol. 57. P. 397.

44. *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 712.

45. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture Notes in Mathematics* / Eds D.A.Rang, L.S.Young. Warwick: Springer-Verlag, 1980. Vol. 898. P. 366.

46. *Breeden J.L., Packard N.H.* A learning algorithm for optimal representation of experimental data // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1994. Vol. 4, № 2. P. 311.

*Лаборатория нелинейной динамики СГУ  
Саратовский НИИ Кардиологии при СМГУ*

*Поступила в редакцию 27.02.98*

## **DIAGNOSTICS OF CARDIO-VASCULAR DISEASES WITH HELP OF LARGEST LYAPUNOV EXPONENT OF RR-SEQUENCES**

*A.N. Pavlov, N.B. Janson, V.S. Anishchenko, V.I. Gridnev, P.Ya. Dovgalevsky*

A method for presenting a discrete sequence of cardiointervals as a smooth time dependence, which allows one to apply to the given data sets the algorithm for largest Lyapunov exponent computation is suggested. Processing the data banks of RR-intervals of patients suffering from coronary artery disease and also those who survived after myocardial infarction has shown that the largest Lyapunov exponent may serve as a diagnostic tool being able to distinguish between different groups of patients with more confidence than the standard methods for time series processing accepted in cardiology.



*Павлов Алексей Николаевич* – окончил физический факультет Саратовского университета по специальности «радиофизика и электроника» (1995). С 1995 по настоящее время является аспирантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: анализ временных рядов, реконструкция динамических систем. Имеет 18 работ в отечественной и зарубежной печати.



*Янсон Наталья Борисовна* – ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1997), участница нескольких научных конференций, в том числе зарубежных. Научные интересы: анализ временных рядов, в том числе биологического происхождения, реконструкция динамических систем по экспериментальным данным, синхронизация хаоса. Опубликовала 23 работы в отечественной и зарубежной печати.



*Анищенко Вадим Семенович* – защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук (1970) и докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. В качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдском университете (Берлин, 1987). С 1988 года заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики Саратовского университета. Автор более 250 научных работ, среди которых 6 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Три монографии написаны на английском языке, из них 2 книги опубликованы в Лейпциге (1987, 1989); издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых системах» (1990), хорошо известная среди специалистов; в издательстве «World Scientific» вышла монография «Dynamical Chaos – Models and Experiments» (1995). Соросовский профессор (1994). Заслуженный деятель науки РФ (1995), чл.-корр. РАН (1998). Входит в состав редколлегии журналов «Прикладная нелинейная динамика» и «Discrete Dynamics in Nature and Society».



*Гриднев Владимир Иванович* – врач клиники НИИ Кардиологии при СГМУ. Окончил лечебный факультет Саратовского медицинского института (1978). Занимается научными исследованиями в области вариабельности сердечного ритма у больных ишемической болезнью сердца. Опубликовал 2 статьи в отечественных журналах.



*Довгалецкий Павел Яковлевич* – директор Саратовского НИИ Кардиологии при Саратовском государственном медицинском университете, доктор медицинских наук, профессор.



## КЛАСТЕРНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЦЕПОЧКЕ БИСТАБИЛЬНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*В.А. Макаров, В.И. Некоркин*

Исследуется феномен синхронизации колебаний в цепочке бистабильных автоколебательных элементов. Обнаружено, что взаимная синхронизация колебаний происходит с образованием либо фазовых, либо частотных кластеров. Обсуждается связь между положением кластеров в цепочке и пространственной динамикой системы.

### Введение

Синхронизация колебаний является одним из наиболее фундаментальных явлений, наблюдаемых в природе и широко используемых в технике. В той или иной мере проблемы, связанные с достижением синхронных режимов работы, возникают в самых различных областях науки. Например, в радиотехнике синхронизация используется для повышения стабильности частоты генераторов, демодуляции сигналов; в радиофизике ее используют для повышения мощности лазерного излучения, соединяя лазеры в сети; в механике на основе этого явления построены различные вибромеханизмы и т.д. Поэтому исследование данной проблемы является традиционной задачей во многих отраслях науки.

В последнее время большой интерес исследователей привлекает проблема взаимной синхронизации большого числа активных автоколебательных объектов, объединенных в единый коллектив с помощью различного рода связей. К такого типа объектам относятся: сети фазовой синхронизации [1], массивы лазерных диодов [2,3], системы с джозефсоновскими контактами [4], некоторые простейшие биологические системы [5,6], цепочки и решетки электронных систем [7] и др.

Многие из этих систем построены из элементов, обладающих автоколебательными свойствами. Исследованию коллективной динамики систем из автоколебательных элементов (далее для краткости будем называть такие элементы осцилляторами) посвящены работы [8–13]. К работам этого направления относятся также многочисленные публикации, посвященные исследованию динамики фазовых осцилляторов (см., например, [14,15]). Интуитивно понятно представление о синхронизации колебаний, как об одновременном изменении одноименных переменных различных осцилляторов, в то же время допускает несколько уровней степени синхронизации. В настоящей работе мы рассматриваем следующие уровни синхронизации.

а. *Синфазная синхронизация* – наиболее сильная форма синхронизации, когда разность фаз между осцилляторами с течением времени исчезает.

б. *Фазовая синхронизация* – более слабая, чем предыдущая форма синхронизации, при которой разность фаз между осцилляторами остается постоянной, не равной нулю.

в. *Синхронизация в среднем* – наиболее общий вид синхронизации, для которой характерно невозрастание разности фаз осцилляторов. Другими словами, разность фаз может быть произвольной ограниченной функцией времени и, следовательно, средние частоты колебаний осцилляторов являются одинаковыми.

Здесь необходимо добавить, что установление единого ритма колебаний в смысле «а», «б» или «в» может произойти не во всем ансамбле осцилляторов, а лишь в некоторой его части. В этом случае принято говорить (см., например, [14]) о кластерной синхронизации.

В литературе достаточно полно изучено явление синхронизации в цепочечных системах, у которых в фазовом пространстве каждого элемента существует единственный предельный цикл. С другой стороны, сравнительно недавно было установлено [16–18], что для цепочечных систем, состоящих из бистабильных элементов, характерно существование пространственного беспорядка амплитуд колебаний. Поэтому для таких систем чрезвычайно интересно и принципиально важно исследовать взаимную синхронизацию колебаний, происходящую на «фоне» амплитудного беспорядка. В настоящей работе рассматривается цепочка, состоящая из бистабильных осцилляторов с различными парциальными частотами «вдоль» цепочки.

При отсутствии связей каждый элемент может находиться в двух состояниях, соответствующих генерации автоколебаний с «малой» либо «большой» амплитудой. В полярных координатах динамика индивидуального осциллятора может быть описана системой уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{r} = rF(r), \\ \dot{\phi} = \omega(r), \end{cases} \quad (1)$$

где  $r, \phi$  – амплитуда и фаза колебаний;  $\omega(r)$  – частота колебаний, вообще говоря, зависящая от амплитуды;  $F(r) = (a_1 - r)(a_2 - r)(a_3 - r)$ ;  $a_{1,2,3}$  – амплитуды предельных циклов ( $a_1 < a_2 < a_3$ ,  $a_{1,3}$  соответствуют устойчивым, а  $a_2$  – неустойчивому циклам). Уравнения, описывающие цепочку, состоящую из  $N$  осцилляторов вида (1) с различными собственными частотами, в комплексной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_j(F(|z_j|) + i\omega_j(|z_j|)) + d(z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}), \\ j &= 1, 2, \dots, N, \quad z_0 = z_1, \quad z_{N+1} = z_N. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $z_j = r_j \exp(i\phi_j)$ ,  $d$  – коэффициент связи между осцилляторами. Далее мы будем полагать его чисто действительным.

## 1. Распределение мгновенных амплитуд колебаний

Пусть параметры системы (2) принадлежат области  $D$  (рис. 1). Как установлено в Приложении, в этом случае в фазовом пространстве системы (2) существует  $2^N$  изолирующих блоков  $J_s$ . Зададим произвольную последовательность  $S$  «длины»  $N$ , состоящую из символов двух типов «0» и «1», и поставим в соответствие этой последовательности изолирующий блок  $J_s$  (см. Приложение). Выберем начальные условия в системе (2) внутри блока  $J_s$ . Поскольку траектории

<sup>1</sup> Кластер – группа соседних элементов, имеющих одинаковые (или почти одинаковые) некоторые характеристики колебаний, например, фазы.

системы (2) не могут покинуть  $J_s$ , то можно утверждать, что в  $J_s$  существует некоторое предельное множество траекторий, характеризуемое ограниченностью всех переменных  $r_j(t)$  во времени. В зависимости от того, какой символ (0 или 1) расположен в  $j$ -ой позиции последовательности  $S$ , компонента  $r_j(t)$  локализована либо в  $\Omega_j^0$ , либо в  $\Omega_j^1$ . Из геометрического положения этих областей в фазовом пространстве следует, что в первом случае амплитуда колебаний существенно меньше, чем во втором. Поэтому ставит последовательности  $S$  соответствует некоторое распределение мгновенных амплитуд колебаний вдоль цепочки, состоящее из «малых» и «больших» величин. При этом, фазы колебаний могут быть произвольными функциями времени. Поскольку распределение символов в последовательности  $S$  может быть произвольным, то и распределение мгновенных амплитуд колебаний может быть чрезвычайно разнообразным – от пространственно однородного (все элементы последовательности равны) до пространственно беспорядочного. Таким образом, при значениях параметров из области  $D$  в системе (2) существует, по крайней мере,  $2^N$  различных распределений мгновенных амплитуд колебаний.

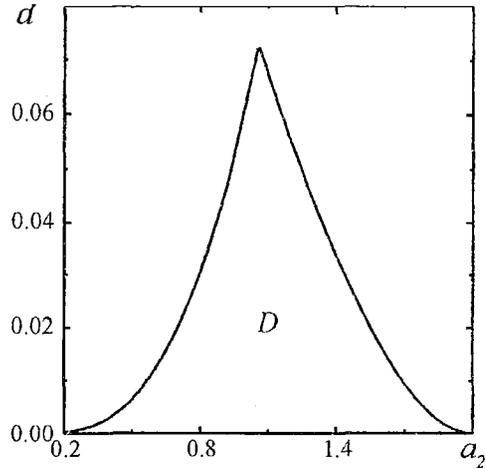


Рис. 1. Область параметров, выделяемая неравенством (П.11), построенная при  $a_1=0.1, a_3=2.0$

## 2. Синхронные режимы колебаний

Введение связи между осцилляторами в принципе создает предпосылки для взаимной синхронизации колебаний элементов цепочки. Мы покажем, что в зависимости от коэффициента связи  $d$ , распределения частот<sup>2</sup>  $\omega_j$  и распределения мгновенных амплитуд колебаний (будем рассматривать значения параметров из области  $D$ ) в цепочке возможно установление колебаний с различной степенью синхронизации, соответствующей уровням «а», «б» или «в» (см. Введение).

**2.1. Синфазная синхронизация.** Рассмотрим систему уравнений для разностей фаз колебаний  $\psi_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j$ , вытекающую из системы (2),

$$\dot{\psi}_k = \omega_{k+1} - \omega_k + d[(r_{k+2}/r_{k+1})\sin\psi_{k+1} - (r_k^2 + r_{k+1}^2)/(r_k r_{k+1}) \sin\psi_k + (r_{k-1}/r_k)\sin\psi_{k-1}], \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_N = 0.$$

Предположим, что в цепочке осцилляторов, описываемой системой (2), возможны синфазные колебания. Этот тип синхронизации соответствует условию  $\psi_j=0$ . Из уравнений (3) имеем

$$\dot{\psi}_j|_{\psi_j=0} = \omega_{j+1} - \omega_j. \quad (4)$$

Таким образом, синхронизация фаз возможна лишь когда парциальные частоты осцилляторов одинаковы во всей цепочке ( $\omega_j = \omega$ ). В этом случае система (2) с помощью замены переменных  $\varphi'_j = \varphi_j - \omega$  может быть приведена к градиентному виду. Следовательно, стационарными движениями являются лишь колебания у

<sup>2</sup> Далее ограничимся случаем изохронных колебаний, то есть  $\omega_j(r_j) = \omega_j = \text{const}$ .

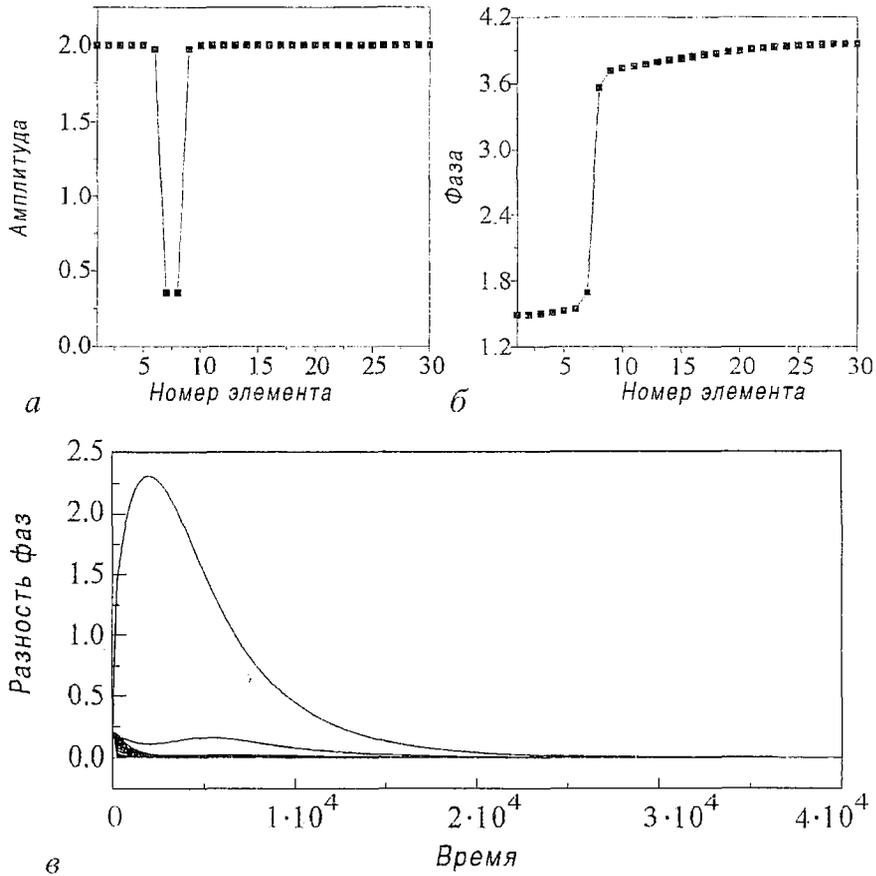


Рис. 2. Синфазная синхронизация ( $\omega_j=1$ ,  $d=0.05$ ): а – финальное распределение амплитуд колебаний вдоль цепочки; б – распределение фаз при  $t=4000$ ; в – зависимость разностей фаз  $\psi_j$  от времени

которых  $r_j, \phi'_j = \text{const}$ . Причем, как было показано в [12], режим синфазной синхронизации устанавливается для любых начальных условий независимо от пространственного распределения амплитуд колебаний.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования цепочки из 30 осцилляторов. В начальный момент времени фазы были равномерно распределены по окружности, а амплитудное распределение было выбрано пространственно неоднородным, принадлежащим одному из блоков  $J_s$ . В цепочке наблюдался достаточно быстрый процесс формирования практически неменяющегося распределения амплитуд колебаний. После этого в цепочке происходило образование двух фазовых кластеров (рис. 2, б). Далее в результате взаимодействия кластеров разности фаз между соседними осцилляторами уменьшались с течением времени и в системе устанавливались синфазные колебания (рис. 2, в), а распределение амплитуд колебаний становилось стационарным во времени ( $r_j = \text{const}$ ) и неоднородным вдоль цепочки (рис. 2, а). Принципы формирования и взаимодействия кластеров в данном случае аналогичны описанным в [17,19]. Заметим, что возникновение фазовых кластеров непосредственно связано с неоднородностью пространственного распределения амплитуд колебаний и в данном случае является переходным процессом к установлению синфазных колебаний во всей цепочке.

**2.2. Фазовая синхронизация.** Из (4) следует, что введение любой, даже очень малой, неоднородности распределения частот приводит к нарушению

режима синфазной синхронизации и появлению других синхронных режимов. В случае, если неоднородность достаточно мала, разности фаз  $\psi_j$  остаются постоянными, не зависящими от времени величинами, и в цепочке может реализоваться режим фазовой синхронизации.

По-прежнему в фазовом пространстве системы (2) существует, по крайней мере,  $2^N$  устойчивых предельных циклов, у которых значения амплитуд колебаний  $r_j$  являются постоянными величинами и подчиняются символическому описанию, изложенному в предыдущем параграфе. Разности фаз  $\psi_j = \text{const}$ ; однако, в отличие от синфазного случая,  $\psi_j \neq 0$ . Из уравнений для разностей фаз колебаний относительно  $\sin \psi_j$  мы имеем систему  $N-1$  линейных неоднородных уравнений. Разрешив ее, получим

$$\sin \psi_j = [\sum_{i=1}^j r_i^2 \sum_{i=j+1}^N \omega_i r_i^2 - \sum_{i=j+1}^N r_i^2 \sum_{i=1}^j \omega_i r_i^2] / (d r_{j+1} r_j \sum_{i=1}^N r_i^2). \quad (5)$$

Из (5) следует, что стационарные значения разностей фаз могут принимать различные значения в зависимости от распределений  $\omega_j$  и  $r_j$  вдоль цепочки. Частоту синхронных колебаний  $\omega_s$  находим, используя одно из уравнений (П.2) для фаз колебаний и выражения (5), для стационарных разностей фаз

$$\omega_s = \sum_{i=1}^N \omega_i r_i^2 / \sum_{i=1}^N r_i^2. \quad (6)$$

Пусть  $\omega_j = \omega_0$ ,  $j \neq 1$ ,  $\omega_1 = \omega_0 + \alpha$ , то есть все осцилляторы, за исключением первого, имеют одинаковые парциальные частоты. В этом случае из (5) имеем

$$\sin \psi_j = -\alpha r_1^2 \sum_{i=j+1}^N r_i^2 / (d r_j r_{j+1} \sum_{i=1}^N r_i^2). \quad (7)$$

Из (7) следует, что разность фаз между соседними осцилляторами существенно зависит от распределения амплитуд. Для распределений (000...0) и (111...1) можно считать  $r_j \approx \text{const}$ . Отсюда  $\sin \psi_j \approx -\alpha(N-j)/dN$ , то есть  $\sin \psi_j$  является линейной функцией координаты. При этом частота синхронизации  $\omega_s = \omega_0 + \alpha/N$ . В случае произвольного распределения амплитуд частота синхронных колебаний  $\omega_s = \omega_0 + \alpha r_1^2 / \sum_{i=1}^N r_i^2$  может быть как больше, так и меньше, чем в однородном случае. Кроме того, в системе могут наблюдаться резкие скачки фазы между соседними осцилляторами. На рис. 3 представлены графики, иллюстрирующие этот эффект. После переходных процессов в цепочке происходит установление стационарных

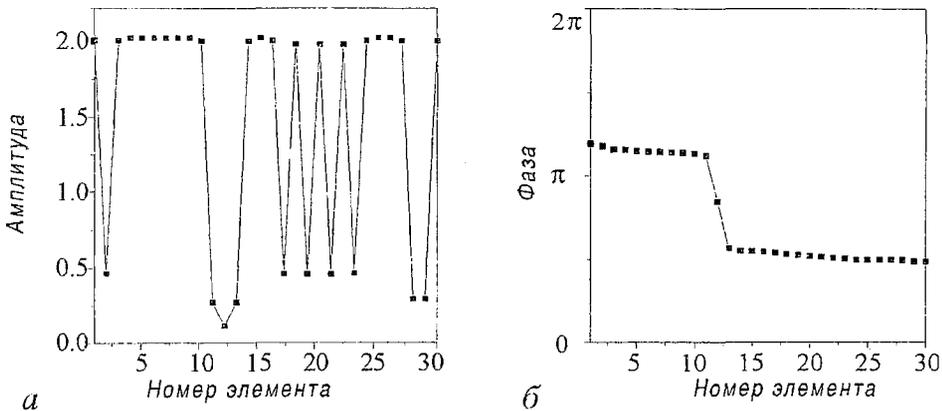


Рис. 3. Фазовая синхронизация ( $\alpha=7 \cdot 10^{-4}$ ,  $d=0.05$ ): а – стационарное распределение амплитуд колебаний; б – соответствующее ему распределение фаз

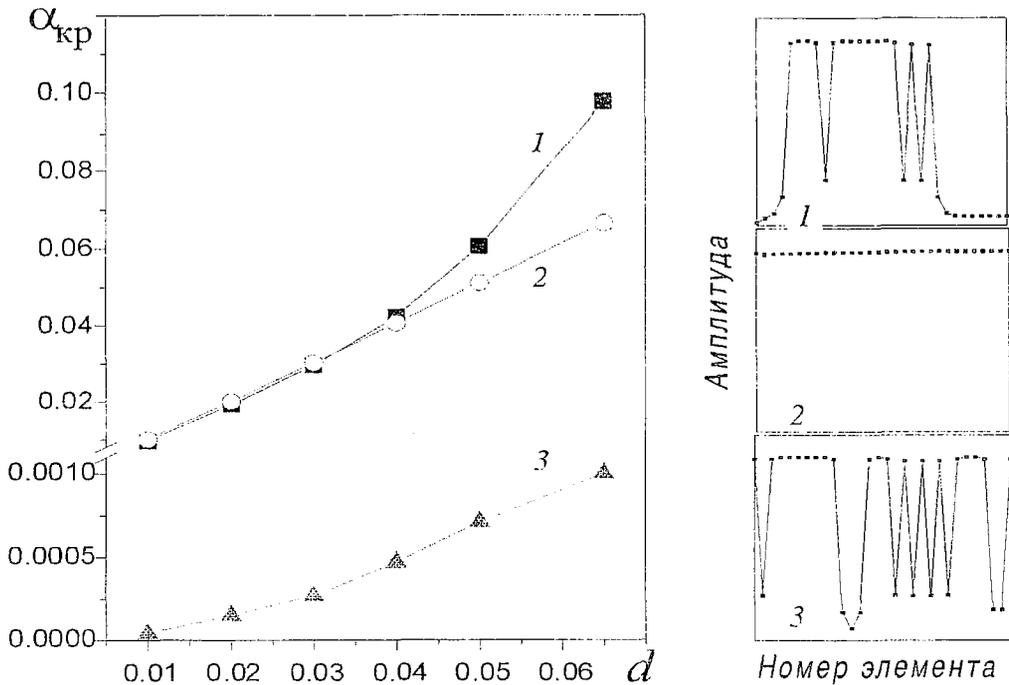


Рис. 4. Зависимость критического значения  $\alpha$  от коэффициента связи  $d$  для трех различных пространственных распределений амплитуд колебаний

распределений амплитуд колебаний. При этом фазы осцилляторов разделились на три группы (одна из групп состоит из одного элемента), в каждой из которых колебания практически синфазны. Таким образом, в отличие от предыдущего случая, введение малой расстройки частоты приводит к формированию стационарных фазовых кластеров или, другими словами, к кластерной синфазной синхронизации. Как видно из (7), максимальный скачок фазы (деление цепочки на кластеры) происходит между элементами  $u$  которых  $r_j$  и  $r_{j+1}$  малы, то есть соответствуют последовательности символов 00. Причем, при прочих равных условиях надо выбрать участок последовательности, где кусок 00 встречается впервые (на рис. 3,  $a$  это элементы с номерами 11,12).

На рис. 4 представлены зависимости критического значения параметра  $\alpha$ , при котором в системе нарушается режим фазовой синхронизации, от коэффициента связи  $d$ . В случае пространственно-однородного распределения (кривая 2) зависимость  $\alpha_{кр}$  от  $d$  является линейной функцией  $\alpha_{кр} \equiv d$ , что совпадает с результатами, полученными для цепочки моностабильных осцилляторов в [8]. Для пространственно-неоднородного распределения амплитуд область фазовой синхронизации может быть как больше, чем в однородном случае (кривая 1), так и меньше (кривая 3). Таким образом, сложная пространственная динамика амплитуд колебаний может привести к следующему интересному эффекту. При значениях параметров, когда в цепочке из моностабильных элементов синхронный режим отсутствует, в цепочке из бистабильных элементов существует режим фазовой синхронизации.

**2.3. Синхронизация в среднем.** Как было установлено выше, при  $\alpha > \alpha_{кр}$  режим фазовой синхронизации нарушается. Поскольку образом фазовой синхронизации в фазовом пространстве системы (П.1),(3) является устойчивое состояние равновесия, рассинхронизация колебаний происходит через бифуркации состояний равновесия. Для изучения путей разрушения режима фазовой синхронизации были проведены численные эксперименты. Мы обнаружили два характерных пути исчезновения режима фазовой синхронизации.

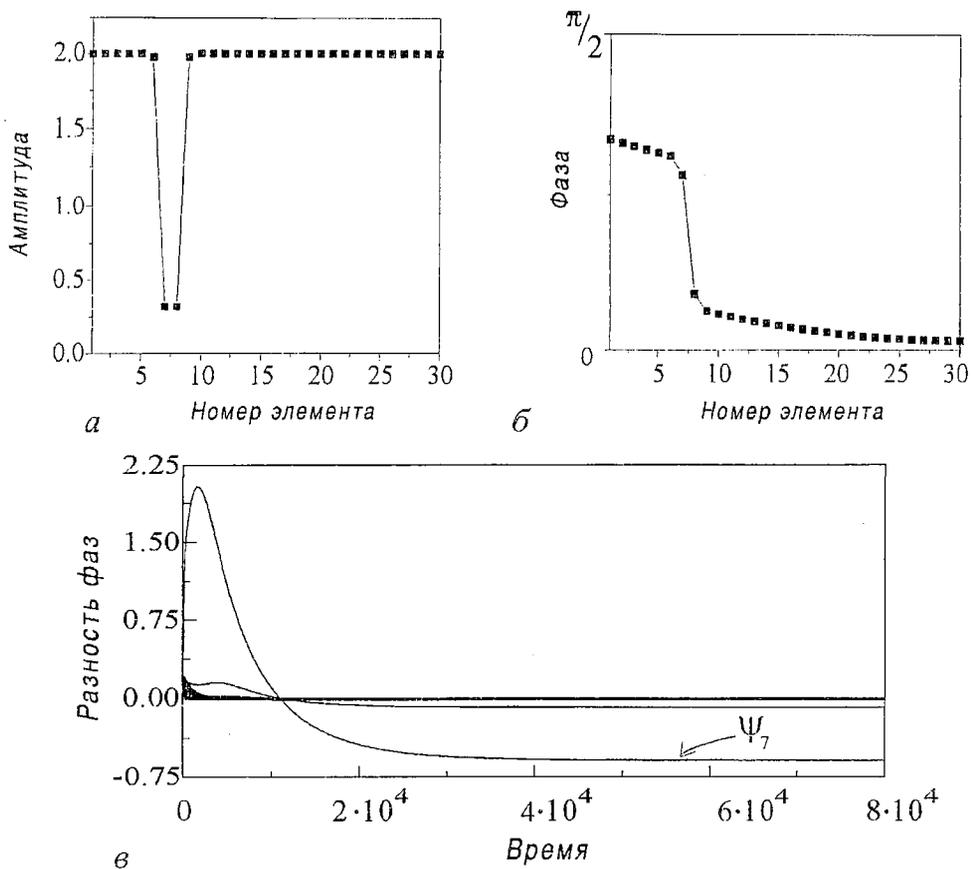


Рис. 5. Фазовая синхронизация при  $\alpha < \alpha_{кр}$  ( $\omega_1 = 1.0009$ ,  $\omega_j = 1$ ,  $j = 2, 3, \dots, N$ ,  $d = 0.05$ ): а – финальное распределение амплитуд; б – установившееся распределение фаз при  $t = 7 \cdot 10^4$ ; в – зависимость разности фаз от времени

1. С увеличением параметра  $\alpha$  два состояния равновесия сливаются в одно при  $\alpha = \alpha_{кр}$  и далее исчезают, то есть происходит бифуркация «двукратное равновесие». На рис. 5 приведены распределения амплитуд, фаз колебаний и зависимость разностей фаз от времени при  $\alpha < \alpha_{кр}$ . С течением времени разности фаз выходят на свои стационарные значения (рис. 5, в). Существует резкий скачок фазы между 7 и 8 осцилляторами. Следовательно, существует два фазовых кластера. Первый кластер состоит из осцилляторов 1–7, а второй содержит все остальные (рис. 5, б). При увеличении  $\alpha$  стационарное значение разности фаз  $\psi_7$  непрерывно растет и при  $\alpha = \alpha_{кр}$  достигает значения  $-\pi/2$  ( $\sin \psi_7 = -1$ ). При  $\alpha > \alpha_{кр}$

состояние равновесия исчезает. В результате этого  $\dot{\psi}_7(t) < 0$  и разность фаз между 7 и 8 осцилляторами непрерывно нарастает, в то время как остальные  $\psi_j$  остаются ограниченными во времени (рис. 6, а). Мгновенные значения амплитуд колебаний – величины  $r_j(t)$  – уже не являются константами, а совершают малые колебания внутри изолирующего блока  $J_s$ . Таким образом, в цепочке формируется два частотных кластера (рис. 6, б). Внутри кластеров средняя по времени частота колебаний одинакова для всех осцилляторов. Другими словами, цепочка разделилась на две части, в каждой из которых реализуется режим синхронизации в среднем.

2. Нарушение фазовой синхронизации происходит через потерю устойчивости состояния равновесия, связанную с бифуркацией Андронова – Хопфа. Заметим, что этот случай возможен только при пространственно–

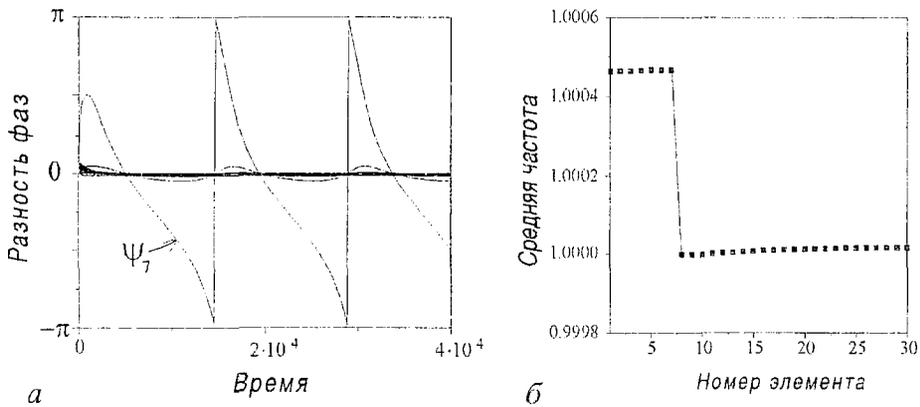


Рис. 6. Частотные кластеры при  $\alpha > \alpha_{кр}$  ( $\omega_1=1.003$ ,  $\omega_j=1$ ,  $j=2,3,\dots,N$ ,  $d=0.05$ ): а – зависимость разностей фаз  $\psi_j$  от времени; б – распределение усредненной по времени частоты колебаний вдоль цепочки

неоднородном распределении мгновенных амплитуд колебаний, то есть, если индивидуальный элемент обладает свойством бистабильности. При  $\alpha < \alpha_{кр}$ , как и в предыдущем случае, наблюдается фазовая синхронизация. Однако, устойчивое состояние равновесия может существовать и при  $|\psi_j| > \pi/2$ , что невозможно для цепочки из моностабильных элементов. При  $\alpha > \alpha_{кр}$  состояние равновесия становится неустойчивым и в системе возникают колебания переменных  $r(t)$  и  $\psi(t)$  (рис. 7). Если при этом разности фаз не возвращаются (реализуется колебательный

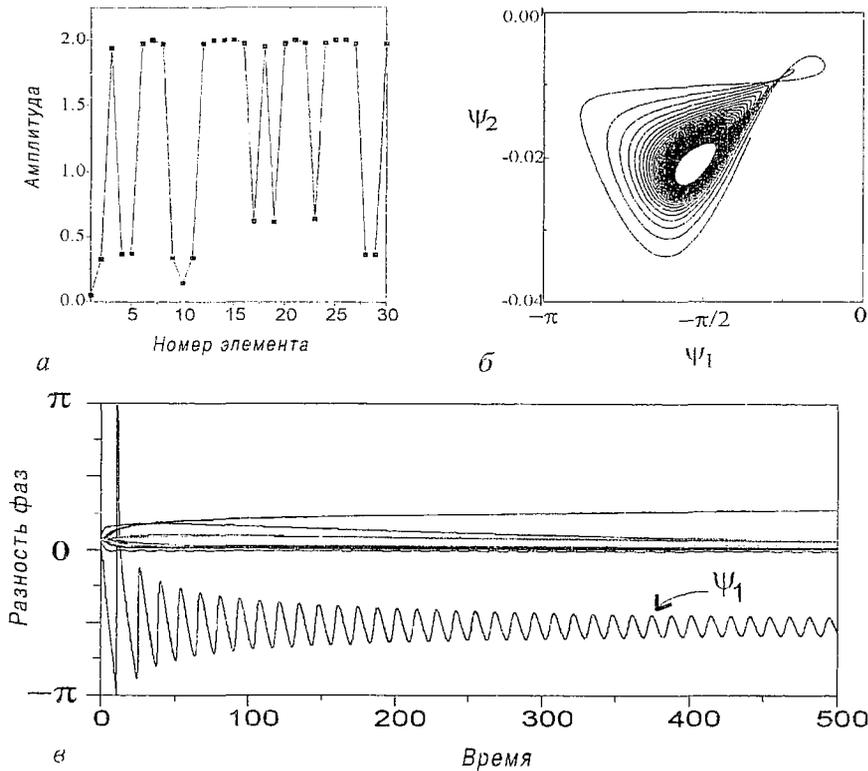


Рис. 7. Синхронизация в среднем всех осцилляторов при  $\alpha > \alpha_{кр}$  ( $\omega_1=1.49$ ,  $\omega_j=1$ ,  $j=2,3,\dots,N$ ,  $d=0.065$ ): а – распределение мгновенных амплитуд колебаний; б – проекция колебательной траектории системы (2) на плоскость  $(\psi_1, \psi_2)$ ; в – зависимость разностей фаз от времени

тип движений), как это показано на рис. 7, б, в, цепочка переходит от режима фазовой синхронизации к синхронизации в среднем. Все осцилляторы группируются в один частотный кластер. При дальнейшем увеличении  $\alpha$  амплитуды колебаний разностей фаз  $\psi_j$  нарастают и при некотором  $\alpha^*$  происходит переход от колебательного к вращательному типу движений. Вращение  $\psi_1$  приводит к «делению» элементов цепочки на два частотных кластера.

### Заключение

В настоящей работе проведено исследование синхронных состояний, реализующихся в цепочке бистабильных осцилляторов. Установлены параметры (обл.  $D$  на рис. 1), для которых в системе существует  $2^N$  качественно различных распределений мгновенных амплитуд колебаний, то есть система обладает сложной пространственной динамикой. Обнаружено, что пространственная динамика амплитуд существенно влияет на формирование синхронных режимов системы и приводит к новым эффектам, существование которых принципиально невозможно в цепочке из моностабильных автоколебательных элементов.

Установлено, что можно выделить два временных интервала с различными временными масштабами. На первом, быстром, этапе в системе устанавливается некоторое распределение амплитуд колебаний (переменные  $r_j(t)$  принадлежат одному из изолирующих блоков  $J_s$ ), которое далее меняется незначительно. На втором этапе происходит формирование синхронных режимов, которое происходит через эволюцию фаз колебаний. Мы обнаружили, что «спектр» синхронных режимов в цепочке бистабильных осцилляторов весьма широк – от полностью синфазных до частотных кластеров.

В последнее время появилось большое количество работ, посвященных исследованию феномена образования фазовых кластеров. Например, в [14] для системы глобально связанных фазовых осцилляторов было продемонстрировано образование фазовых кластеров за счет разброса собственных частот. Характерной особенностью такого состояния является равенство частот колебаний для всех осцилляторов, небольшой фазовый сдвиг внутри кластеров и резкий скачек фазы между кластерами. В нашем случае при определенном выборе параметров (см. рис. 4) также образуются фазовые кластеры. Однако, их происхождение вызвано бистабильностью отдельного осциллятора, а принадлежность осциллятора к определенному кластеру определяется стационарным распределением амплитуд колебаний.

Кроме образования фазовых кластеров в системе (2) возможно формирование частотных кластеров, то есть групп осцилляторов, для которых разности фаз колебаний  $\psi_j$  (номер  $j$  принадлежит  $k$ -му кластеру) являются ограниченными функциями времени, в то время как разность фаз между соседними кластерами непрерывно растет. Таким образом, внутри кластеров средние частоты колебаний одинаковы. Подобный режим синхронизации наблюдался при исследовании цепочки генераторов Ван-дер-Поля под воздействием белого шума [8]. Здесь длина синхронного кластера зависела от интенсивности шума. В нашем случае деление цепочки на кластеры вызвано бистабильностью осцилляторов, входящих в цепочку, а длины кластеров определяются пространственной динамикой амплитуд колебаний.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16550, программа «Ведущие научные школы», грант № 96-15-96593).*

### Построение изолирующих блоков

Перейдем в уравнениях (2) к действительным переменным

$$\dot{r}_j = r_j F(r_j) + d(r_{j-1} \cos \psi_{j-1} - 2r_j + r_{j+1} \cos \psi_j), \quad j=1, 2, \dots, N, \quad r_0=r_1, \quad r_{N+1}=r_N, \quad (\text{П.1})$$

$$r_j \dot{\varphi}_j = r_j \omega_j + d[r_{j+1} \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) - r_{j-1} \sin(\varphi_j - \varphi_{j-1})], \quad j=1, 2, \dots, N, \quad \varphi_0=\varphi_1, \quad \varphi_{N+1}=\varphi_N. \quad (\text{П.2})$$

Опираясь на технику работы [18], построим в фазовом пространстве системы (П.1),(П.2) области – так называемые «изолирующие» блоки, с помощью которых можно локализовать (изолировать) некоторые семейства траекторий системы (П.1),(П.2).

Введем в фазовом пространстве системы семейство областей

$$\Omega_A = \{r : 0 \leq r_j \leq A, \quad j=1, 2, \dots, N\},$$

где  $A > 0$  – произвольный параметр. Зафиксируем параметр  $A$ . Граница  $\partial\Omega_A$  области  $\Omega_A$  – цилиндрическая поверхность. Установим ориентацию векторного поля системы на  $\partial\Omega_A$ . Поскольку при  $r_j=0$  значение  $\varphi_j$  не определено, доопределим  $\varphi_j$  так, чтобы, за исключением точек множества  $K=\{r_j=0, \quad j=1, 2, \dots, N\}$ , выполнялось неравенство

$$\dot{r}_j|_{r_j=0} = d(r_{j-1} \cos \psi_{j-1} + r_{j+1} \cos \psi_j) > 0. \quad (\text{П.3})$$

На остальной части границы  $\partial\Omega_A$  имеем

$$\dot{r}_j|_{r_j=A} = AF(A) + d(r_{j-1} \cos \psi_{j-1} - 2A + r_{j+1} \cos \psi_j) \leq AF(A). \quad (\text{П.4})$$

Пусть  $A > a_3$ , тогда, принимая во внимание свойства функции  $F(r)$ , получим

$$\dot{r}_j|_{r_j=A} < 0. \quad (\text{П.5})$$

Из (П.4), (П.5) следует, что для любого  $A > a_3$  на границе  $\partial\Omega_A$ , за исключением множества  $K$ , векторное поле системы (П.1),(П.2) ориентировано внутрь  $\Omega_A$ , а на  $K$  – касательно к  $\Omega_A$ . Следовательно, все траектории системы с начальными условиями вне области  $\Omega_{A=a_3}$  с течением времени попадают в эту область. Из области  $\Omega_{A=a_3}$  траектории не выходят.

Построим в фазовом пространстве системы семейство областей  $J_s$ , каждая из которых обладает следующим свойством: если  $\{r_j(0), \varphi_j(0)\} \in J_s, \quad j=1, 2, \dots, N$ , то  $\{r_j(t), \varphi_j(t)\} \in J_s$  при любом  $t > 0$ . Такая область «изолирует свои» траектории от всех других. Поэтому области  $J_s$  будем называть изолирующими блоками. Для их построения рассмотрим ориентацию векторного поля системы на поверхностях  $\{r_k=c\}$ , где  $0 < c = \text{const} < a_3$ . Пусть  $A > a_3$ . Из (П.1),(П.2) имеем

$$\dot{r}_k|_{r_k=c} = cF(c) + d(r_{k-1} \cos \psi_{k-1} - 2c + r_{k+1} \cos \psi_k). \quad (\text{П.6})$$

Потребуем, чтобы

$$\dot{r}_k|_{r_k=c} < 0 \quad \text{для} \quad r_j \in \Omega_A, \quad \forall j \neq k. \quad (\text{П.7})$$

В свою очередь, неравенство (П.7) выполняется, если параметр  $c$  является решением следующего неравенства

$$cF(c) - 2d(c-A) < 0. \quad (\text{П.8})$$

Аналогично, потребовав выполнение неравенства

$$\dot{r}_k|_{r_k=c} > 0 \text{ для } r_j \in \Omega_A, \quad \forall j \neq k, \quad (\text{П.9})$$

приходим к неравенству

$$cF(c) - 2d(c+A) > 0. \quad (\text{П.10})$$

Неравенства (П.8),(П.10) будут иметь решения (рис. 8), если параметры системы (П.1),(П.2) принадлежат области

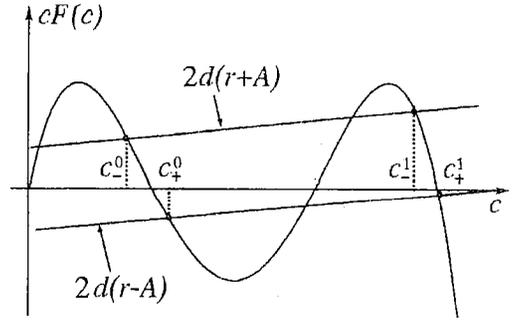


Рис. 8. Графическое решение неравенств (П.8), (П.10)

$$D = \{ d < \min[r_{\max}F(r_{\max})/[2(a_3+r_{\max})], -r_{\min}F(r_{\min})/[2(a_3-r_{\min})]] \}, \quad (\text{П.11})$$

где  $r_{\min, \max}$  — координаты минимума и правого максимума функции  $rF(r)$ . Обозначим через  $c_{+0}, c_{+1}$  решения неравенства (П.8), а через  $c_{-0}, c_{-1}$  — неравенства (П.10), соответствующие падающим участкам функции  $rF(r)$  (см. рис. 8). Введем в рассмотрение в фазовом пространстве системы следующие области

$$\Omega_j^0 = \{ c_{-0} \leq r_j \leq c_{+0}, \quad 0 \leq r_k \leq A, \quad \forall k, \quad k \neq j \},$$

$$\Omega_j^1 = \{ c_{-1} \leq r_j \leq c_{+1}, \quad 0 \leq r_k \leq A, \quad \forall k, \quad k \neq j \}.$$

Пусть  $S$  — последовательность «длины»  $N$ , состоящая из символов двух типов

$$S = \{ m_1 m_2 \dots m_N \}, \quad \text{где } m_i \in \{0,1\}.$$

Каждой такой последовательности поставим в соответствие область следующего вида:

$$J_s = \bigcap_j \Omega_j^{m_j}.$$

В силу неравенств (П.3),(П.5),(П.7), (П.9),  $J_s$  — изолирующий блок. Поскольку существует  $2^N$  различных последовательностей  $S$ , при значениях параметров из области  $D$  существует  $2^N$  изолирующих блоков.

## Библиографический список

1. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1989.

2. Логинов А.С., Ржанов А.Г., Еленский В.Г. Многоэлементные полупроводниковые лазеры // Зарубежная электроника. 1986. № 8. С. 49.

3. Rappel W.-J. Dynamics of a globally coupled laser model // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, № 4. P. 2750.

4. Watanabe S., van der Zant H.S.J., Strogatz S.H., Orlando T.P. Dynamics of circular arrays of josephson junctions and the discrete sine-Gordon equation // Physica D. 1996. Vol. 97. P. 429.

5. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.Н., Казанович Я.Б., Лузянина Т.Б., Турова Т.С., Цембалюк Г.С. Осцилляторные нейронные сети. Математика и приложения // Математическое моделирование. 1992. Т. 4, № 1. С. 65.

6. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Сельверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суццик М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 363.

7. Chua's circuit: A paradigm for chaos // World Scientific Series on Nonlinear Science / Ed. R.N. Madan. Singapore: World Scientific, 1993. Series B. Vol. 1.

8. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.

9. Ermentrout G.B., Kopell N. Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 215.

10. Ermentrout G.B. Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies // J. Math. Biology. 1985. Vol. 22. P. 1.

11. Tass P., Haken H. Synchronization in networks of limit cycle oscillators // Z. Phys. B. 1996. Vol. 100. P. 303.

12. Макаров В.А. Некоркин В.И. Пространственно-временная динамика цепочки автоколебательных элементов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С. 3.

13. Некоркин В.И., Казанцев В.Б., Веларде М.Г. Динамическое копирование в многослойных бистабильных решетках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 56.

14. Tass P. Phase and frequency in a population of phase oscillators // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, № 2. P. 2043.

15. Golomb D., Hansel D., Shraiman B., Sompolinsky H. Clustering in globally coupled phase oscillators // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, № 6. P. 3516.

16. Mackay R.S., Sepulchre J.-A. Multistability in networks of weakly coupled bistable units // Physica D. 1995. Vol. 82. P. 243.

17. Nekorkin V.I., Makarov V.A. Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74, № 24. P. 4819.

18. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Kazantsev V.B., Velarde M.G. Spatial disorder and pattern formation in lattices of coupled bistable elements // Physica D. 1997. № 100. P. 330.

19. Макаров В.А. Фазовые кластеры в цепочке бистабильных осцилляторов с локальными связями // Современные проблемы радиофизики : Сб. научн. тр. / Под ред. А.В. Якимова. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1996. С. 94.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию 16.01.98  
после переработки 1.04.98

## CLUSTER SYNCHRONIZATION IN A CHAIN OF BISTABLE SELF-EXCITED ELEMENTS

V.A. Makarov, V.I. Nekorkin

The phenomenon of synchronization of oscillations in a chain of bistable oscillators is investigated. It is revealed that the mutual synchronization of oscillations occurs to formation of phase or frequency clusters. The connection between sites of clusters in the chain and spatial dynamics of the system is discussed.



*Некоркин Владимир Исаакович* – родился на Украине в 1948 году, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико–математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно–временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.



*Макаров Валерий Анатольевич* – родился в Сыктывкаре, окончил радиофизический факультет Нижегородского госуниверситета (1992). Защитил кандидатскую диссертацию «Пространственный беспорядок и волны в сетях автоколебательных бистабильных систем» (1997). С 1997 года работает старшим преподавателем на кафедре теории колебаний Нижегородского госуниверситета. Автор 25 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕКУРСИВНОЙ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НАСЫЩЕНИЯ

Ю.А. Брюханов

Исследованы свободные колебания в системе, сумматор которой имеет характеристику с насыщением. Для двух областей параметров рассмотрены процессы установления движений с периодами один, два и четыре.

Рекурсивная система второго порядка, являющаяся одним из базовых элементов для построения сложных фильтрующих систем [1], при определённых значениях параметров может использоваться и для генерации периодических колебаний. Рассмотрим систему, сумматор которой имеет характеристику с насыщением. Считаем, что эффекты квантования отсутствуют.

Свободные колебания такой системы описываются разностным уравнением

$$x(n+2) = f(ax(n+1) + bx(n)),$$

где

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi, & |\varphi| < 1, \\ \text{sign}(\varphi), & |\varphi| \geq 1, \end{cases}$$

$a$  и  $b$  – параметры системы. Это уравнение сводится к эквивалентному ему отображению

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ f(bx(n) + ay(n)) \end{pmatrix}$$

на плоскости  $(x, y)$ . Пары последовательных итераций  $(x(n), y(n))$  отображения определяют точки траектории движения системы на фазовой плоскости  $(x, y)$ .

Известно [2–5], что для параметров системы в секторе  $gdc$  (рис. 1) при ненулевых начальных условиях стационарный режим характеризуется аттрактором с периодом  $T=1$  или  $T=2$ . Причем первый из них имеет траекторию движения  $\rightarrow(1,1)\rightarrow(1,1)\rightarrow$  или  $\rightarrow(-1,-1)\rightarrow(-1,-1)\rightarrow$ , а траектория движения второго  $\rightarrow(-1,1)\rightarrow(1,-1)\rightarrow$ . При выборе параметров в секторе  $hei$  стационарный режим характеризуется аттрактором с периодом  $T=4$  и траекторией движения

$$\rightarrow(1,1) \rightarrow (1,-1) \rightarrow (-1,-1) \rightarrow (-1,1) \rightarrow. \quad (1)$$

Для практического использования периодических колебаний, генерируемых системой, необходимо знать переходные режимы.

Целью настоящей работы является исследование характера и получение выражений для расчёта длительности переходных процессов при выборе параметров системы в вышеуказанных областях.

Учитывая вид нелинейности, фазовую плоскость разобьём на три области, характеризующиеся уравнениями движения:

область  $D_{-1}$

$$x(n+2) = -1,$$

область  $D_0$

$$x(n+2) = ax(n+1) + bx(n), \quad (2)$$

область  $D_1$

$$x(n+2) = 1.$$

Решение уравнения (2) выражается зависимостью [6]

$$x(n) = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n, \quad (3)$$

где

$$C_1 = [x(0)q_2 - x(1)] / (q_2 - q_1), \quad C_2 = [x(1) - x(0)q_1] / (q_2 - q_1), \quad (4)$$

$x(0), x(1)$  – начальные условия,  $q_1, q_2$  – корни характеристического уравнения

$$q_{1,2} = [a \pm (a^2 + 4b)^{1/2}] / 2.$$

Соотношения между  $q_1$  и  $q_2$  следующие: в секторе  $bdc$   $q_1 > 1, q_2 < -1, q_1 > |q_2|$ , в секторе  $gdb$   $q_1 > 1, q_2 < -1, q_1 < |q_2|$ , в секторе  $hei$  корни комплексно сопряженные,  $|q_{1,2}| > 1$ .

Граница между областями  $D_{-1}$  и  $D_0$  представляет собой прямую  $MN$ , описываемую уравнением

$$y = -(b/a)x - 1/a,$$

а граница между  $D_0$  и  $D_1$  – прямую  $PG$  с уравнением

$$y = -(b/a)x + 1/a.$$

1. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора  $bdc$ . Разбиение фазовой плоскости на области  $D_{-1}, D_0$  и  $D_1$  показано на рис. 2, а. Здесь и ниже прямая  $MN$  пересекает стороны  $DA$  и  $BC$  квадрата  $ABCD$  в точках

$$x_{гр1} = -(a+1)/b, \quad x_{гр2} = (a-1)/b, \quad (5)$$

соответственно. Координаты точек  $x_{гр4}$  и  $x_{гр3}$  пересечения прямой  $PG$  с квадратом отличаются от соответствующих (5) только знаками.

Проведем луч  $EF$  параллельно оси абсцисс через точку  $E_1$ , причем  $AE_1 = x_{гр3}A$ . Поскольку отображение в области  $D_1$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ 1 \end{pmatrix},$$

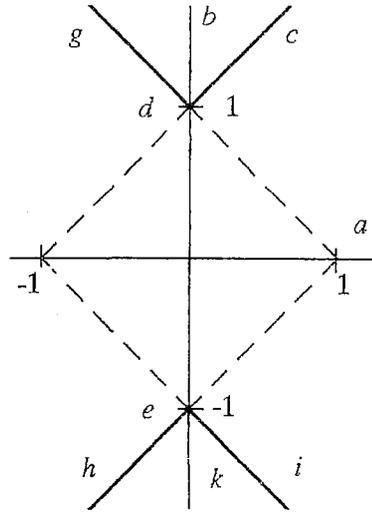


Рис. 1

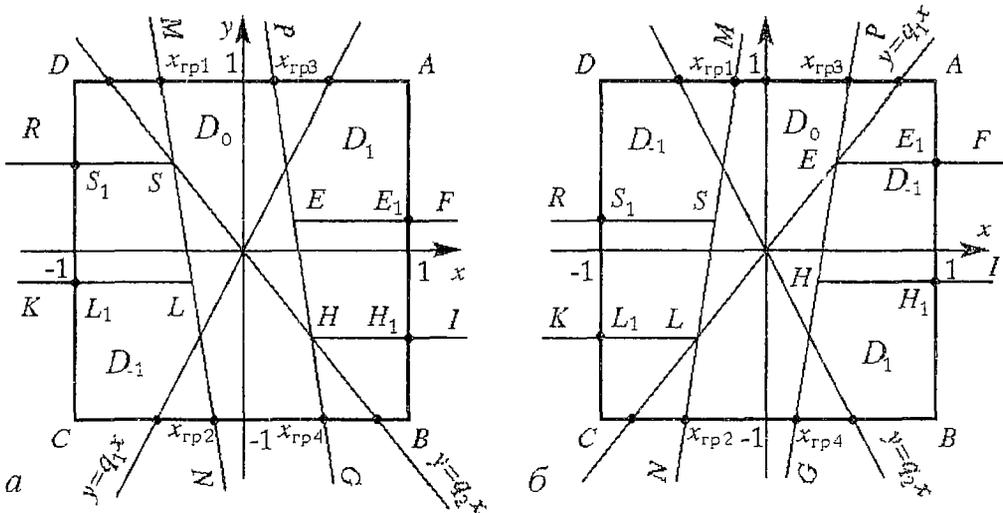


Рис. 2

то сектор  $PEF$  (кроме луча  $x_{гр3}A$ ) отображается в луч  $x_{гр3}A$  (кроме точки  $A$ ), а луч  $x_{гр3}A$  (кроме точки  $A$ ) отображается в точку  $A$ . Следовательно, если движение начинается из вышеуказанного сектора (кроме луча  $x_{гр3}A$ ), то после второй итерации устанавливаются колебания с периодом  $T=1$ . При старте с вышеуказанного луча эти колебания устанавливаются после первой итерации.

Выполним аналогичные построения лучей  $LK$  ( $CL_1=x_{гр2}C$ ),  $HI$  ( $H_1B=Dx_{гр1}$ ),  $SR$  ( $S_1D=Bx_{гр4}$ ) и образуем секторы  $KLN$ ,  $GHI$ ,  $RSM$ . Используя рассуждения, приведенные выше, и учитывая вид отображения в области  $D_{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ -1 \end{pmatrix},$$

утверждаем, что если движение начинается из секторов  $KLN$  (кроме луча  $x_{гр2}C$ ) или  $GHI$  (кроме луча  $x_{гр4}B$ ),  $RSM$  (кроме луча  $x_{гр1}D$ ), то в системе устанавливаются колебания с периодом  $T=1$  или  $T=2$ , соответственно, также после второй итерации. При старте с вышеуказанных лучей эти колебания устанавливаются после первой итерации.

Если движение начинается из сектора  $FEHI$ , то последовательность отображений может иметь вид

$$FEHI \rightarrow x_{гр1}x_{гр3} \rightarrow E_1H_1 \rightarrow x_{гр1}x_{гр3} \rightarrow \dots$$

Изменение абсциссы изображающей точки, когда последняя находится на стороне  $DA$ , описывается линейным разностным уравнением

$$x_1(m+1) = bx_1(m) + a, \quad (6)$$

где

$$m = (n-1)/2, \quad x_1(0) = y(0), \quad (7)$$

которое можно рассматривать как линейное одномерное отображение. Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = zb^m - a_1,$$

где  $z=x_1(0)+a/(b-1)$ ,  $a_1=a/(b-1)$ . При  $z>0$  с ростом  $m$  величина  $x_1(m)$  возрастает. Линейный процесс (6) прекращается при  $x_1(m) \geq x_{гр3}$ . Соответствующее число итераций  $m_0$  является ближайшим сверху целым значением величины

$$m = \ln[(x_{гр3} + a_1)/z]/\ln b.$$

Это правило используется и ниже.

При  $z < 0$  процесс (6) прекращается, если  $x_1(m) \leq x_{гр1}$ . Величина  $m$  определяется по формуле

$$m = \ln[(x_{гр1} + a_1)/z]/\ln b.$$

При  $z = 0$  в системе существуют колебания с периодами  $T = 2: \rightarrow(1, -a_1) \rightarrow (-a_1, 1) \rightarrow$ . Например, при  $y(0) = -0.4$ ,  $a = 0.1$ ,  $b = 1.2$  имеем  $a_1 = 0.5$ ,  $z = 0.1$ ,  $m_0 = 14$ , соответственно  $n_0 = 29$ . В качестве иллюстрации на рис. 3 изображены диаграмма Кенигса – Ламерея и лестница Ламерея [7] для  $y(0) = 0.1$ ,  $a = 0.1$ ,  $b = 1.2$ . Здесь  $y_1(m) = x_1(m+1)$ . После окончания процесса (6) изображающая точка через одну итерацию оказывается в точке  $A$  (при  $z > 0$ ) или  $B$  (при  $z < 0$ ).

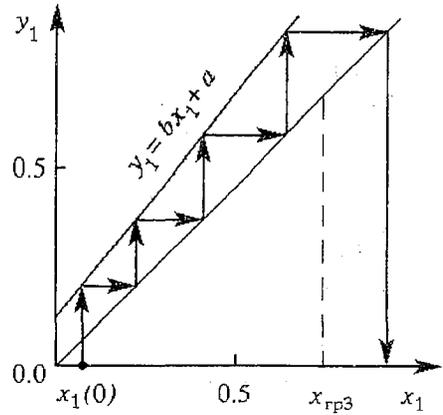


Рис. 3

Если движение начинается из сектора  $RSLK$ , то изменение координаты  $x_1$ , когда изображающая точка находится на стороне  $BC$ , выражается зависимостью

$$x_1(m+1) = bx_1(m) - a, \quad (8)$$

где  $m$  и  $x_1(0)$  находятся из (7). Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = z_1 b^m + a_1,$$

где  $z_1 = x_1(0) - a_1$ . Процесс (8) прекращается после  $m_0$  итераций, причем

$$m = \ln[(x_{гр4} - a_1)/z_1]/\ln b, \quad z_1 > 0,$$

$$m = \ln[(x_{гр2} - a_1/z_1)]/\ln b, \quad z_1 < 0.$$

При  $z_1 = 0$  в системе существуют движения с периодом  $T = 2: \rightarrow(-1, a_1) \rightarrow (a_1, -1) \rightarrow$ . После окончания процесса (8) изображающая точка через одну итерацию оказывается в точках  $D$  (при  $z_1 > 0$ ) или  $C$  (при  $z_1 < 0$ ).

Если движение начинается в области  $D_0$ , то оно описывается уравнением (2) с решением (3). Соотношение между корнями характеристического уравнения таково, что главным является решение

$$x^{(1)}(n) = C_1 q_1^n, \quad (9)$$

то есть при достаточно больших  $n$  движение системы описывается этой функцией. Направление движения (к области  $D_1$  или  $D_{-1}$ ) зависит от знака  $C_1$ . Из (4) имеем, что при старте из области выше прямой

$$y^{(2)} = q_2 x \quad (10)$$

изображающая точка стремится к  $D_1$ , а ниже – к  $D_{-1}$ . Функции (9) на фазовой плоскости соответствует прямая

$$y^{(1)} = q_1 x. \quad (11)$$

Огибающая траектории движения имеет вид совокупности гипербол, асимптотами которых являются прямые (10), (11) (см. рис. 2, а). Число итераций  $N$  от старта до достижения области  $D_1$  находится из условия

$$y(N) \geq -(b/a)x(N) + 1/a,$$

это означает, что

$$C_1(q_1+bla)q_1^N + C_2(q_2+bla)q_2^N \geq 1/a. \quad (12)$$

Например, при  $x(0)=0.25$ ,  $y(0)=-0.2$ ,  $a=0.1$ ,  $b=1.2$  имеем  $N=20$ . Выражение для определения  $N$  при старте из области ниже прямой (10) и достижении области  $D_{-1}$  отличается от (12) только знаком правой части. После попадания изображающей точки в область  $D_1$  или  $D_{-1}$  справедливы закономерности, приведенные выше.

2. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора  $gdb$ . Разбиение фазовой плоскости показано на рис. 2, б.

При старте из областей  $D_1$  или  $D_{-1}$  движение системы подчиняется закономерностям, установленным в п. 1. Стоит лишь отметить уменьшение областей притяжения точек  $A$ ,  $C$  и увеличение областей притяжения точек  $B$ ,  $D$ .

Если движение начинается из области  $D_0$ , то вследствие соотношения между  $q_1$  и  $q_2$  главным решением уравнения (2) является знакопеременная функция

$$x^{(2)}(n) = C_2 q_2^n.$$

На рис. 2, б показаны графики асимптот (10), (11). При достаточно больших  $n$  изображающая точка находится поочередно во втором и четвертом квадрантах. Число итераций  $N$  от старта до достижения области  $D_1$  или  $D_{-1}$  находится из условия

$$|C_1(q_1+bla)q_1^N + C_2(q_2+bla)q_2^N| \geq -1/a.$$

3. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора  $kei$ . Разбиение фазовой плоскости показано на рис. 4, а.

Если движение начинается из секторов  $MEF$ ,  $IHN$ ,  $KLG$ ,  $RSP$ , кроме лучей  $x_{гр1}A$ ,  $x_{гр2}B$ ,  $x_{гр3}C$ ,  $x_{гр4}D$ , соответственно, то после второй итерации в системе устанавливаются колебания с периодом  $T=4$  (имеется в виду, что  $AE_1=Bx_{гр2}$ ,  $H_1B=x_{гр3}C$ ,  $CL_1=Dx_{гр4}$ ,  $S_1D=x_{гр1}A$ ). При старте с вышеуказанных лучей эти колебания устанавливаются после первой итерации. Это происходит потому, что сектор  $MEF$  (кроме луча  $x_{гр1}A$ ) отображается в луч  $x_{гр2}B$  (кроме точки  $B$ ), а луч  $x_{гр2}B$  (кроме точки  $B$ ) отображается в точку  $B$  и т.д.

Если движение начинается из сектора  $FEHI$ , то последовательность отображений может выглядеть следующим образом

$$FEHI \rightarrow x_{гр2}x_{гр4} \rightarrow L_1S_1 \rightarrow x_{гр3}x_{гр1} \rightarrow E_1H_1 \rightarrow x_{гр2}x_{гр4} \rightarrow \dots$$

Изменение абсциссы изображающей точки, когда последняя находится на сторонах  $BC$  или  $DA$ , описывается линейным разностным уравнением

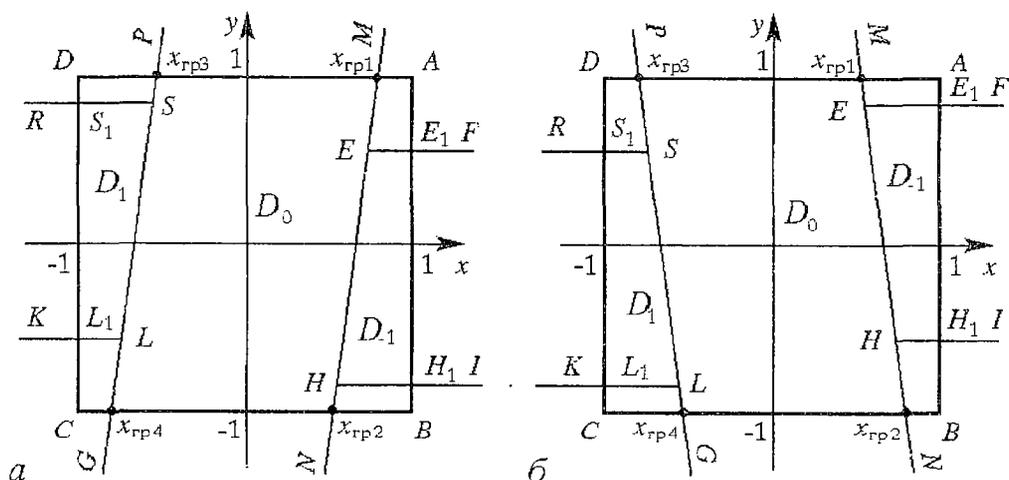


Рис. 4

$$x_1(m+1) = bx_1(m) - (-1)^m a, \quad (13)$$

где  $m$  и  $x_1(0)$  находятся из (7). Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = z_2 b^m + (-1)^m a_2, \quad (14)$$

где  $z_2 = x_1(0) - a_2$ ,  $a_2 = a/(1+b)$ . При  $z_2 > 0$  процесс (13) прекращается, если при четных  $m$  имеем  $x_1(m) \geq x_{rp2}$ , а при нечетных имеем  $x_1(m) \leq x_{rp3}$ . Соответствующее число итераций  $m_0$  находится по вышеуказанному правилу с помощью равенства

$$m = \ln[(x_{rp2} - a_2)/z_2] / \ln(-b).$$

Когда  $z_2 < 0$ , то процесс прекращается, если при четных  $m$  имеем  $x_1(m) \leq x_{rp4}$ , а при нечетных  $-x_1(m) \geq x_{rp1}$ . Соответственно,

$$m = \ln[(x_{rp4} - a_2)/z_2] / \ln(-b).$$

При  $z_2 = 0$  в системе существуют колебания с периодом  $T=4$

$$\rightarrow (1, a_2) \rightarrow (a_2, -1) \rightarrow (-1, -a_2) \rightarrow (-a_2, 1) \rightarrow \dots \quad (15)$$

Например: при  $y(0) = -0.4$ ,  $a = 0.1$ ,  $b = -1.2$  имеем  $m_0 = 14$ , то есть  $n_0 = 29$ .

Если движение начинается из сектора  $RSLK$ , то последовательность отображений может иметь вид

$$RSLK \rightarrow x_{rp3} x_{rp1} \rightarrow E_1 H_1 \rightarrow x_{rp2} x_{rp4} \rightarrow L_1 S_1 \rightarrow x_{rp3} x_{rp1} \rightarrow \dots$$

При этом вместо (13), (14) имеем

$$\begin{aligned} x_1(m+1) &= bx_1(m) + (-1)^m a, \\ x_1(m) &= z_3 b^m - (-1)^m a_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $z_3 = x_1(0) + a_2$ . Процесс (16) прекращается после  $m_0$  итераций, причем

$$m = \ln[(x_{rp1} - a_2)/z_3] / \ln(-b), \quad z_3 > 0,$$

$$m = \ln[(x_{rp3} - a_2)/z_3] / \ln(-b), \quad z_3 < 0.$$

В случае  $z_3 = 0$  существуют колебания с периодом  $T=4$  вида (15). По окончании процессов (13), (16) через одну итерацию в системе устанавливаются колебания с периодом  $T=4$  вида (1).

Если движение начинается из области  $D_0$ , то оно описывается уравнением (2) с решением (3), где однако

$$q_{1,2} = [a \pm j(-a^2 - 4b)^{1/2}] / 2.$$

Число итераций  $N$  от старта до достижения области  $D_1$  или  $D_{-1}$  находится из условия

$$2|\operatorname{Re}[C_1 q_1^N (q_1 + b/a)]| \geq 1/a. \quad (17)$$

Например: при  $x(0) = 0.2$ ,  $y(0) = -0.2$ ,  $a = 0.1$ ,  $b = -1.2$  имеем  $N = 14$ .

4. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора  $hek$ . Разбиение фазовой плоскости показано на рис. 4, б. Здесь  $AE_1 = Bx_{rp2}$ ,  $H_1B = x_{rp4}C$ ,  $CL_1 = Dx_{rp3}$ ,  $S_1D = x_{rp1}A$ .

При старте из областей  $D_1$  или  $D_{-1}$  движение системы подчиняется закономерностям, установленным в п.3.

Если движение начинается из области  $D_0$ , оно развивается как и в п.3, а формула для нахождения числа  $N$  отличается от (17) только знаком правой части.

## Заключение

В статье исследованы процессы установления свободных колебаний с периодами  $T \in \{1; 2; 4\}$ , в системе, сумматор которой имеет характеристику с насыщением. Определены этапы движения в переходном режиме, получены выражения для расчета их длительности. Предложенную методику исследования характера переходных процессов целесообразно использовать и для других областей параметров системы с насыщением. Результаты могут использоваться при разработке цифровых систем генерации сигналов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17388).*

## Библиографический список

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. Ogorzalek M.J. Complex behaviour in digital filters // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol.2, № 1. P. 11.
3. Брюханов Ю.А., Глызин С.Д., Рахманова Н.К. Динамические свойства разностной модели цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения. Препринт № 91. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1993. 20 с.
4. Брюханов Ю.А., Глызин С.Д., Рахманова Н.К. Динамика цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения. Аналитическое исследование. Препринт № 17. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1994. 30 с.
5. Брюханов Ю.А., Глызин С.Д. Устойчивые периодические режимы одной разностной модели цифрового фильтра с характеристикой насыщения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 4. С. 53.
6. Брюханов Ю.А. Свободные колебания в линейном цифровом осцилляторе // Радиотехника. 1996. № 5. С. 46.
7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.

Ярославский государственный  
университет

Поступила в редакцию 2.12.97  
после переработки 13.05.98

## TRANSIENT PROCESSES IN RECURSIVE DIGITAL SECOND-ORDER SYSTEM WITH NONLINEARITY OF SATURATION

*Yu.A. Bruhanov*

Free oscillations in a system with saturation type of adder characteristic are investigated. At parameters chosen inside two areas, processes of development of motions of periods one, two and four are considered. Phases of motions at transient regime are determined. Expressions for calculating of their duration are obtained.



*Брюханов Юрий Александрович* – родился в 1941 году в Красноярске, окончил Красноярский политехнический институт (1967). Работает в Ярославском государственном университете. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 140 статей.



## О СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПЕРИОДИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

*Л. А. Синицкий, О. А. Цвигун*

Рассматривается диссипативная система, описываемая системой обычных дифференциальных уравнений третьего порядка. В отсутствие внешнего сигнала все решения системы стремятся к единственному квазипериодическому двухчастотному решению. При расстройке внешнего сигнала (относительно высокочастотной составляющей квазипериодического сигнала), стремящейся к нулю, порог синхронизации отсутствует. При этом сохраняется режим квазипериодических колебаний. Рост амплитуды внешнего сигнала вызывает разрушение квазипериодического режима: возникают одночастотные колебания, совпадающие по частоте с внешним сигналом.

Воздействие периодического сигнала на автоколебательные системы третьего порядка рассматривается в работах [1–3]. Исследованная в [4] система имеет чрезвычайно много различных типов режимов, и действие внешнего периодического сигнала еще в большей степени увеличивает в ней количество разнообразных стационарных режимов. В предлагаемой работе анализируется более простая автоколебательная система третьего порядка, в которой в отсутствие внешнего сигнала возможно единственное семейство стационарных режимов – квазипериодические колебания на частотах  $\omega_0$ ,  $\omega_\epsilon$ . Отличие между составляющими семейства – в фазовых соотношениях, то есть все квазипериодические решения в фазовом пространстве непрерывно заполняют поверхность двумерного тора. Такого типа поведение характерно для сверхрегенеративного приемника до подачи внешнего сигнала.

При подаче внешнего периодического сигнала на частоте  $\omega$  возможны следующие типы стационарных режимов.

*Режим 1.* Отсутствие синхронизации, то есть существуют квазипериодические колебания с тремя базисными частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_\epsilon$ ,  $\omega$ .

*Режим 2.* При частоте  $\omega$  близкой к  $\omega_0$  имеет место синхронизация колебаний на частоте  $\omega$ , колебания остаются квазипериодическими с базисными частотами  $\omega$ ,  $\omega_\epsilon$ .

*Режим 3.* Синхронизация низкочастотных колебаний  $\omega_\epsilon$  разностной частотой  $\omega - \omega_0$ , ее субгармониками, либо внешним сигналом близким по частоте к  $\omega_\epsilon$ .

*Режим 4.* Разрушение квазипериодических колебаний и возникновение периодических колебаний на частоте  $\omega$ .

Для изучения поведения сверхрегенеративного приемника наиболее интересны режимы 2 и 4, поэтому им уделено значительное внимание.

Исследование приведенных выше режимов производилось на следующей математической модели:

$$\dot{x}_1 = \omega_0 x_2 + \varepsilon \nu x_1, \quad (1a)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0 x_1 + \varepsilon \nu x_2 + A \nu \sin \omega t, \quad (1б)$$

$$\dot{\varepsilon} = (\varepsilon/\tau) [1 - 1/3(\varepsilon/\varepsilon_0)^2] - (\nu/2) \ln(r/r_0), \quad (1в)$$

где  $r = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\tau$ ,  $\nu$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $r_0$  – параметры.

В отсутствие внешнего сигнала ( $A=0$ ) в системе (1) возникают квазипериодические колебания на частотах  $\omega_0$ ,  $\omega_\varepsilon = \nu$  для  $\nu\tau \gg 1$ . Это следует из вида общего решения системы (1). Замена переменных

$$x_1 = r^{1/2} \sin \varphi, \quad x_2 = r^{1/2} \cos \varphi$$

даёт

$$dr/dt = 2\varepsilon \nu r, \quad (2)$$

$$d\varphi/dt = \omega_0.$$

Тогда уравнения (1в) и (2) приводят к уравнению Ван-дер-Поля для переменной  $\varepsilon$

$$\ddot{\varepsilon} - (1/\tau) [1 - (\varepsilon/\varepsilon_0)^2] \dot{\varepsilon} + \nu^2 \varepsilon = 0, \quad (3)$$

которое при  $\nu\tau \gg 1$  даёт периодическое решение

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \sin(\nu t + \alpha), \quad (4)$$

где  $\alpha$  – произвольная фаза.

После подстановки (4) в (1) и пренебрежения высшими гармониками получим

$$r = r_0 \exp[-4\varepsilon_0 \cos(\nu t + \alpha)].$$

Следовательно,

$$x_1 = r_0^{1/2} \exp[-2\varepsilon_0 \cos(\nu t + \alpha)] \sin(\omega_0 t + \beta), \quad (5)$$

$$x_2 = r_0^{1/2} \exp[-2\varepsilon_0 \cos(\nu t + \alpha)] \cos(\omega_0 t + \beta).$$

Таким образом, независимо от начальных условий устанавливается квазипериодический режим с базисными частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_\varepsilon = \nu$ . Разумеется, при  $\nu\tau$  порядка 1 и ниже базисная частота  $\omega_\varepsilon$  отличается от  $\nu$  в сторону уменьшения, а колебания  $\varepsilon$  отличаются от гармонических. Однако квазипериодический режим не исчезает. Изменения  $x_1$ ,  $x_2$  во времени качественно полностью воспроизводят колебания, имеющие место в сверхрегенеративном приемнике (рис. 1).

При ненулевом внешнем сигнале ( $A \neq 0$ ) применим к уравнениям (1а), (1б) метод медленно меняющихся амплитуд. Решение ищем в виде

$$x_1 = b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t, \quad (6)$$

$$x_2 = b_1 \cos \omega t - b_2 \sin \omega t.$$

После подстановки (6) в уравнения (1а), (1б) и пренебрежения гармоникой с частотой  $2\omega$  получим систему

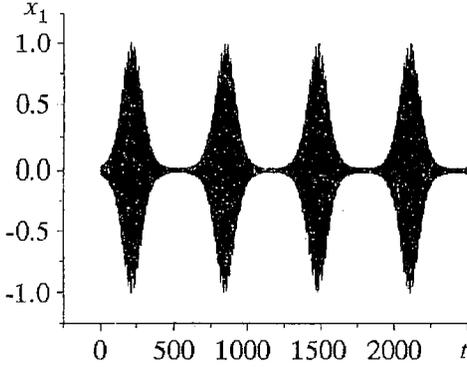


Рис. 1. Изменение  $x_1$  для системы (1) во времени при отсутствии внешнего сигнала и значениях параметров  $\tau=500$ ,  $\epsilon_0=1.15$ ,  $\nu=10^{-2}$ ,  $\omega_0=1$ ,  $r_0=10^{-2}$

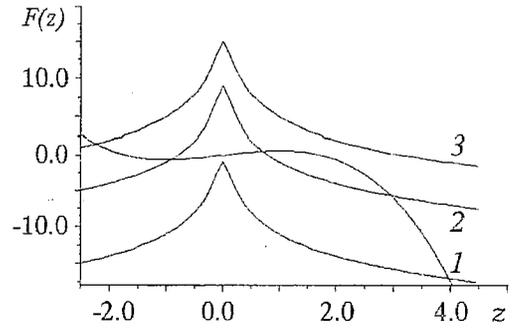


Рис. 2. Графическое решение уравнения (8) для случаев одного неустойчивого (кривая 1), трех (кривая 2) и одного (кривая 3) устойчивых положений равновесия. Здесь  $F(z)$  – правая часть уравнения (8) при различных значениях  $C$

$$\dot{b}_1 = \delta b_2 + \epsilon \nu b_1,$$

$$\dot{b}_2 = -\delta b_1 + \epsilon \nu b_2 + A \nu / 2, \quad (7)$$

$$\dot{\epsilon} = (\epsilon / \tau) [1 - 1/3(\epsilon / \epsilon_0)^2] - (\nu / 2) \ln(r / r_0),$$

где  $r = b_1^2 + b_2^2$ ,  $\delta = \omega - \omega_0$ .

Исследуем положения равновесия в системе (7), приравняв производные к нулю. В результате получим одно уравнение для определения стационарного значения  $\epsilon = \epsilon_s$

$$z(1 - z^2/3) = C - \mu \ln(\rho^2 + z^2), \quad (8)$$

где  $z = \epsilon_s / \epsilon_0$ ,  $C = [(\nu \tau) / (2 \epsilon_0)] \ln[A^2 / (4 r_0 \epsilon_0^2)]$ ,  $\mu = \nu \tau / (2 \epsilon_0)$ ,  $\rho = \delta / (\epsilon_0 \nu)$ .

При достаточно малом значении амплитуды  $A$  уравнение (8) имеет единственное решение  $\epsilon_s > \epsilon_0$  (рис. 2, кривая 1). При возрастании амплитуды  $A$  и превышении значения  $A_1 = f_1(\delta)$  возникают три решения (см. рис. 2, кривая 2). Причем, для значений параметра  $\rho \ll 1$  имеем

$$f_1 = (2 r_0^{1/2} / \nu) \delta,$$

а для значений  $\rho \gg 1$  –

$$f_1 = (2 r_0^{1/2} / \nu) \exp[-2 \epsilon_0 / (3 \nu \tau)] \delta.$$

При дальнейшем увеличении  $A$  и превышении значения  $A_2 = f_2(\delta)$  уравнение (8) снова имеет единственный корень при  $\epsilon_s < 0$  (см. рис. 2, кривая 3). В этом случае для значений  $\rho \gg 1$

$$f_2 = (2 r_0^{1/2} / \nu) \exp[2 \epsilon_0 / (3 \nu \tau)] \delta.$$

Рассмотрим линеаризованные уравнения системы (7)

$$\dot{b}_1 = \delta b_2 + \epsilon_s \nu b_1 + \epsilon \nu b_{1s},$$

$$\dot{b}_2 = -\delta b_1 + \epsilon_s \nu b_2 + \epsilon \nu b_{2s}, \quad (9)$$

$$\dot{\epsilon} = (\epsilon / \tau) [1 - (\epsilon_s / \epsilon_0)^2] - (\nu / r_s) (b_{1s} b_1 + b_{2s} b_2),$$

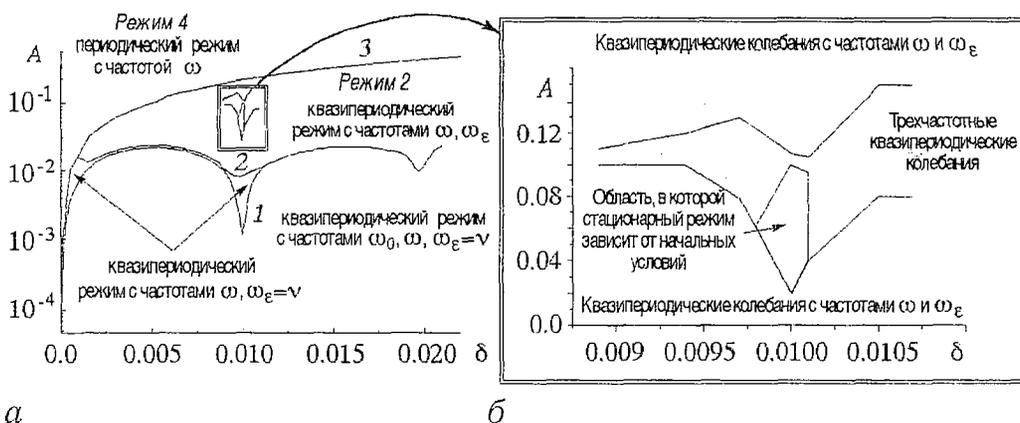


Рис. 3. а – разбиение плоскости  $(A, \delta)$  в зависимости от режима, который устанавливается в системе (1):  $A=A_1$  – кривая 1,  $A=A_2$  – кривая 2,  $A=A_3$  – кривая 3; б – увеличенный фрагмент, выделенный рамкой на рис. 3, а. Результаты получены численным интегрированием

где  $r_s = b_{1s}^2 + b_{2s}^2$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $b_{1s}$ ,  $b_{2s}$  – стационарные значения;  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\varepsilon$  – малые отклонения динамических переменных от стационарных значений. Решение (9) показывает, что единственное положение равновесия устойчиво при  $\varepsilon_s < -\varepsilon_0$  и неустойчиво при  $\varepsilon_s > \varepsilon_0$ . При наличии трех решений уравнения (8) система линеаризованных уравнений (9) имеет три положения равновесия, одно из которых устойчиво.

Обратимся теперь к динамике системы. При малых значениях амплитуды  $A \ll A_1$  в системе (7) имеется единственное неустойчивое положение равновесия и сохраняется квазипериодический режим с базисными частотами близкими к  $\delta$  и  $\nu$ . Это соответствует тому, что в системе (1) отсутствует синхронизация внешним сигналом, и существуют квазипериодические колебания с тремя базисными частотами  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\nu$ . В этом режиме амплитуды колебаний составляющих примерно такие же, как и в отсутствие внешнего сигнала ( $A=0$ ).

Однако при достижении амплитудой  $A$  некоторого значения  $A_\nu$  ( $A_\nu < A_1$ ) в системе (7) возникает периодический режим с частотой  $\omega_\varepsilon$ . Экспериментально установлено, что значение  $A_\nu$  тем меньше, чем ближе значение  $\delta$  к  $k\nu$ , где  $k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$  (рис.3, а, кривая 1).

Рассмотрим сначала явление синхронизации при  $\delta \ll \nu$ . Значение  $A$ , при котором происходит синхронизация высокочастотных колебаний внешним сигналом (режим 2) обозначим  $A_\nu$ . Подобно синхронизации генератора периодических колебаний  $A_1$  и  $A_\nu$  стремятся к нулю одновременно с  $\delta$ , то есть порог синхронизации отсутствует (рис. 3, а).

При этом частота огибающей  $\omega_\varepsilon$  сохраняется равной  $\nu$ . Отметим, что в отличие от режима синхронизации генератора Ван-дер-Поля возрастание амплитуды внешнего сигнала вызывает уменьшение амплитуды колебаний  $x_1$ ,  $x_2$ , в то время как для генератора Ван-дер-Поля амплитуда синхронизированных колебаний возрастает. Форма огибающей при режиме 2 качественно сохраняется, однако среднее значение  $r$  во времени сильно зависит от амплитуды  $A$  и расстройки  $\delta$ . Эти зависимости проиллюстрированы на рис. 4. Отметим, что

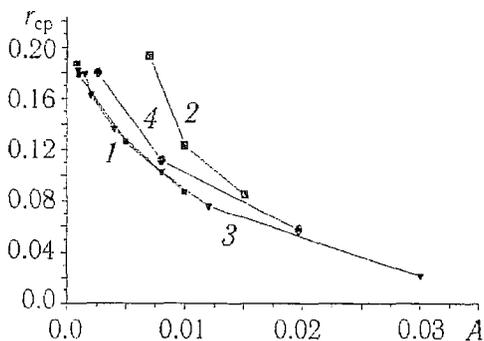


Рис. 4. Зависимость среднего значения  $r$  от параметра  $A$  для системы (7) при различных значениях параметра  $\delta$ : 1 –  $10^{-4}$ ; 2 –  $10^{-3}$ ; 3 –  $10^{-2}$ ; 4 –  $1.02 \cdot 10^{-2}$ ; значения остальных параметров те же, что и для рис. 1

изменения  $r_{cp}$  в зависимости от  $A$  для случаев  $\delta \approx 0$  и  $\delta = \nu$  практически совпадают. Такой режим сохраняется при возрастании  $A$  вплоть до значения  $A = A_1$ , при котором в системе (7) появляется устойчивое положение равновесия. В системе (1) возникает режим периодических колебаний на частоте  $\omega$  (режим 4), то есть квазипериодический режим разрушен. При этом амплитуда синхронизированных колебаний резко падает и принимает значение порядка  $A$ .

Описанный характер поведения справедлив для значений  $\delta < 0.2\nu$  (см. рис. 3, а). При  $\delta > 0.2\nu$ , прежде всего, наблюдается отклонение частоты огибающей в сторону возрастания, однако при росте  $A$  не наблюдалось бифуркаций вплоть до разрушения квазипериодического режима.

Было также изучено поведение системы (7) при  $\delta$  близких  $\nu$ , то есть в области первого минимума (см. рис. 3, а). При  $A > A_\nu$  в системе (7) устанавливается единственный периодический режим с частотой  $\omega_e = \nu$ . Этот режим существует, пока значения  $A < A_\delta$ . При превышении амплитудой  $A$  значения  $A_\delta$  ( $A > A_\delta$ ) частота периодического режима  $\omega_e$  начинает отклоняться от  $\nu$ . Причем  $\omega_e$  зависит от  $A$  и разности  $(\nu - \delta)$ . Существует также некоторая область параметров на плоскости  $(A, \delta)$ , в которой наблюдаются два устойчивых периодических режима, либо один периодический и один квазипериодический режимы, установление которых зависит от начальных условий (см. рис. 3, б).

Синхронизации колебаний огибающей (режим 3) разностной частотой  $\omega - \omega_0$  (так же как и гармониками разностной частоты  $\omega - \omega_0$ ) не наблюдалось.

При возникновении в (7) периодического режима возможны две ситуации.

1. Частота  $\omega_e$  несоизмерима с частотой  $\omega$ . Тогда в (1) существуют квазипериодические колебания при синхронизации колебаний на высокой частоте внешним сигналом.

2. Возможно также, что эти частоты соизмеримы. Тогда режим, строго говоря, периодический, но формы кривых для  $x_1, x_2$  подобны тем, что наблюдаются в первом случае.

Во втором случае можно говорить о том, что происходит одновременная синхронизация как высокочастотных колебаний  $\omega_0$ , так и низкочастотных  $\omega_e$  одним и тем же сигналом с частотой  $\omega$ . Отметим, что в силу того, что  $\omega/\omega_e$  имеет порядок  $10^2$  и выше, достаточно точно идентифицировать кратность частот  $\omega, \omega_e$  затруднительно. Тем не менее можно утверждать, что подобная синхронизация наблюдается и она аналогична синхронизации частот  $\omega_0, \omega_e$  в отсутствие внешнего сигнала.

При  $A > A_1$  в системе (7) появляется устойчивое положение равновесия. Независимо от того, существуют ли неустойчивые положения равновесия, все траектории (кроме соответствующих неустойчивым положениям равновесия) при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к нему. Последнее означает, что переход  $A$  через значение  $A_2$  не отражается на характере процессов в системах (7) и (1). Теоретически доказать этот факт не удалось, однако многочисленные расчеты при  $A > A_1$  и различных начальных условиях позволяют сделать приведенное утверждение. Во всяком случае, если и существуют какие-либо другие установившиеся режимы, кроме положений равновесия, то их области притяжения достаточно малы.

Существование одного устойчивого положения равновесия  $e_s$ , если оно устойчиво в целом, свидетельствует, что квазипериодический режим разрушен, и в системе (1) возникают колебания на частоте внешнего сигнала.

Отметим, что амплитуда синхронизированных колебаний порядка  $A$ ; поэтому при значениях  $A \approx A_1$  синхронизированные автоколебания значительно меньше амплитуды квазипериодических колебаний в отсутствие внешнего сигнала. (Это типично для подавления.)

Предложенная модель позволяет также рассмотреть режим синхронизации на частоте огибающей  $\omega_\epsilon$  (режим 3), если ввести внешний сигнал иным образом

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega_0 x_2 + \epsilon \nu x_1, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0 x_1 + \epsilon \nu x_2,\end{aligned}\quad (10)$$

$$\dot{\epsilon} = (\epsilon/\tau)[1 - 1/3(\epsilon/\epsilon_0)^2] - (\nu/2)\ln(r/r_0) + A\nu\sin\omega t.$$

Тогда (10) сводится в режиме внешней синхронизации к уравнению Ван-дер-Поля

$$\ddot{\epsilon} - (1/\tau)[1 - (\epsilon/\epsilon_0)^2]\dot{\epsilon} + \nu^2\epsilon = A\nu\omega\cos\omega t \quad (11)$$

и к нему применима известная теория [5]. Отметим, что в этом случае режим квазипериодических колебаний в системе (10) до прекращения режима синхронизации полностью сохраняется с тем отличием, что частота огибающей  $\omega_\epsilon = \omega$ .

Показано, что режим синхронизации высокочастотной составляющей квазипериодических колебаний внешним сигналом сохраняет в некотором отношении одно из свойств синхронизации гармонического генератора, а именно, отсутствие порога синхронизации при расстройке, стремящейся к нулю. Однако амплитуда высокочастотных колебаний сильно зависит от амплитуды и частоты синхронизирующего сигнала, что используется при сверхрегенеративном приеме. Для больших сигналов происходит разрушение квазипериодического режима.

### Библиографический список

1. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
2. Ланда П.С., Перминов С.М., Шаталова Г.Г., Дамгов В.Н. Стохастические автоколебания в генераторе с дополнительной запаздывающей обратной связью // РЭ. 1986. Т.31, №4. С.730.
3. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах: механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
5. Андронов А.А. Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956.

Львовский государственный  
университет, Украина

Поступила в редакцию 6.01.98

### ON SYNCHRONIZATION OF THE THIRD ORDER QUASI-PERIODIC SYSTEMS BY A PERIODIC SIGNAL

L.A. Sinitsky, O.A. Tsvigun

The dissipative system described by a system of the ordinary differential equations of the third order is considered. In the absence of an exterior signal all solutions of the system converge to a unique quasi-periodic two-frequency solution. When derivation of an input signal frequency tends to zero (relatively to a high-frequency component of a quasi-periodic signal) the synchronization threshold is absent. The input signal amplitude growth causes destruction of a quasi-periodic solution: one-frequency oscillations exist on the frequency of an input signal.



*Синицкий Лев Аронович* – доктор технических наук, профессор Львовского государственного университета. Окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения (1948). Автор 150 научных работ, в том числе 7 монографий. Область научных исследований – теория электрических цепей.



*Цигун Олег Алексеевич* – аспирант Львовского государственного университета. Окончил физический факультет Львовского государственного университета (1996). Автор 3 научных работ. Область научных исследований – теория электрических цепей.



## СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР В ДВУХПОТОВОМ ВИРКАТОРЕ

*А.Е. Храмов*

В работе исследуется система генераторов на виртуальном катоде с электростатической связью – виркатор на встречных потоках. Показано существование различных режимов, включая синхронизацию и хаотическую генерацию. Анализируются физические процессы, приводящие к сложной динамике двухпотокового виркатора, а также демонстрируется их тесная связь с процессами структурообразования в электронном потоке. Внутренние структуры в системе выделялись с помощью ортогональной декомпозиции по методу Карунена – Лозва. Предложена простейшая конечномерная модель–аналог, качественно иллюстрирующая взаимодействие между электронными структурами в потоке, которое приводит к хаотизации колебаний виртуального катода.

### Введение

Для ряда приложений приборов релятивистской электроники важно повышение уровня выходной мощности СВЧ излучения (в первую очередь это касается радиолокации и физики плазмы). В связи с этим внимание исследователей было привлечено к проблеме создания фазированных антенных решеток на СВЧ устройствах сверхбольшой мощности. В качестве модулей подобных антенных решеток было предложено использовать генераторы на сверхкритическом токе [1–6]. Это обусловлено, с одной стороны, характеристиками данного класса приборов рекордными по уровню генерируемой мощности и перспективами по повышению эффективности энергообмена в них [3,6,7]. С другой стороны, ряд физических [2,8] и численных [9,10] экспериментов показал возможность достаточно эффективного управления частотой и фазой колебаний виртуального катода (ВК) внешними сигналами.

В последние годы многие приборы СВЧ электроники, демонстрирующие сложные нерегулярные режимы поведения, были проанализированы с позиций нелинейной динамики [11,12]. При этом сложная внутренняя динамика в электронных потоках связывается с формированием и взаимодействием когерентных структур [13,14], что вообще является характерным для распределенных систем, демонстрирующих пространственно–временной хаос (см., например, [15,16]). Хорошо известно, что колебания ВК характеризуются сложной нерегулярной динамикой [17–19], включая детерминированный хаос [3,20,21], поэтому естественно ожидать появления сложных режимов колебаний комплекса связанных генераторов на ВК. В работах [20–23] показано, что в системе

«электронный поток с ВК – электромагнитное поле» хаотическая динамика определяется формированием и взаимодействием нескольких электронных структур. Вместе с тем известно, что внешнее воздействие на систему с ВК позволяет достаточно эффективно управлять процессами структурообразования в потоке [9,10,24].

*Представляет большой практический и теоретический интерес исследование процессов структурообразования в системе связанных виркаторов, так как понимание внутренней динамики потока позволит более эффективно управлять динамикой комплекса, а выделение характерных структур даст возможность описать процессы в системе с помощью более простых моделей, что весьма актуально при рассмотрении многомодульных конструкций.*

В представленной работе вышеобозначенный круг вопросов рассматривается на примере системы связанных генераторов на ВК, предложенной К. Хендриком, Р. Адлером и К. Ногле [4] в качестве возможного прототипа модуля антенной решетки. Система представляет собой два ускорителя, каждый из которых формирует электронный поток, направленный навстречу другому потоку, причем ВК формируется в каждом из потоков. Геометрия системы подобрана таким образом, что реализуется либо электростатическая связь между модулями (мы рассматриваем именно этот случай), либо электромагнитная связь. При этом связь по потоку можно пренебречь. Такая схема позволяет классифицировать исследуемую систему как виркатор на встречных потоках с электростатической связью между формирующимися в каждом из потоков ВК.

Данная связанная система интересна в том плане, что для решения вопроса синхронизации колебаний в каждой из секций не требуется каких-либо внешних элементов связи, что делает рассматриваемую систему более простой по конструктивному воплощению<sup>1</sup>.

## 1. Модель

Исследуем простейшую модель двухпотокового виркатора (рис. 1), представляющую собой два электронных потока, распространяющихся навстречу друг другу между двумя параллельными бесконечными короткозамкнутыми плоскостями (плоская диодная модель). Скорость и плотность пространственного заряда потоков полагаются постоянными на входе в систему. Поведение системы определяется безразмерными токами пучков  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , где

$$\alpha_k = (\eta |\rho_{0k}| / \epsilon_0)^{1/2} L / v_{0k} = \omega_{pk} L / v_{0k}. \quad (1)$$

Здесь  $\eta$  – удельный заряд электрона;  $L$  – расстояние между плоскостями;  $\rho_{0k}$ ,  $\omega_{pk}$  и  $v_{0k}$  – соответственно невозмущенные плотность пространственного заряда, плазменная частота и скорость  $k$ -го электронного потока ( $k=1,2$ );  $\epsilon_0=8.85 \cdot 10^{12}$  Ф/м – диэлектрическая

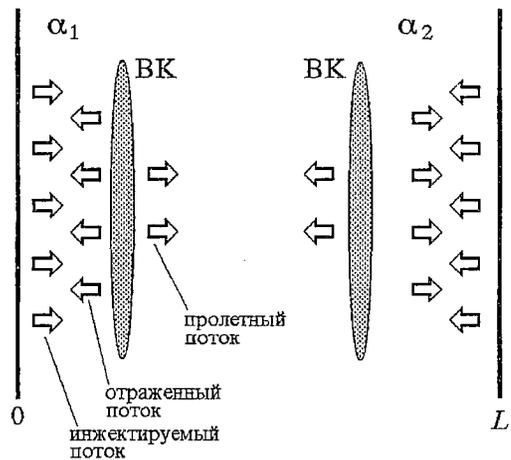


Рис. 1. Модель виркатора на встречных потоках

<sup>1</sup> Заметим, что отсутствие внешних элементов связи делает одновременно систему менее управляемой. Дело в том, что, как показывают натурные и численные исследования [5,24–28], на динамику ВК оказывают сильное влияние различные типы обратной связи с запаздыванием, что легче всего реализуемо на внешних элементах с фазовращателями или с линией задержки. В рассматриваемой системе подобные элементы принципиально отсутствуют.

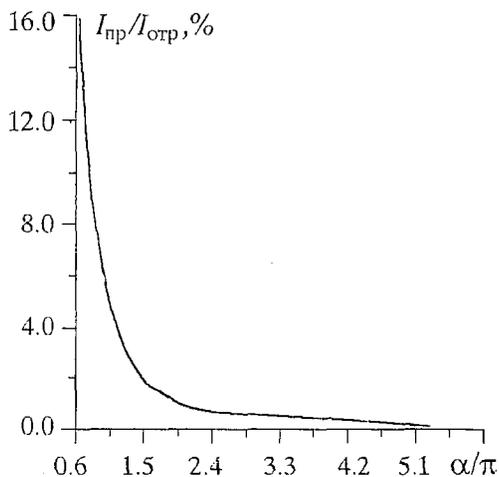


Рис. 2. Отношение пролетного тока  $I_{пр}$  к правой плоскости системы к отраженному от ВК току  $I_{отр}$  как функция безразмерного параметра  $\alpha$

Отметим, что в диоде без нейтрализации пространственного заряда ионным фоном пролетный ток в режиме с ВК достаточно мал (рис. 2). Видно, что при  $\alpha > \pi$  величина пролетного тока не превышает 5% от инжектируемого в систему. Поэтому исследуемую систему на встречных потоках можно рассматривать, не учитывая связь между модулями по потоку, как два электростатически связанных виркатора.

Для анализа динамики системы используем численное моделирование при помощи метода *particle-in-cell* [31]. Каждый из потоков представляем в виде совокупности заряженных листов, инжектируемых в пространство взаимодействия с постоянной скоростью через равные интервалы времени. Различие между потоками заключается в заряде, который переносят листы каждого потока.

Для каждого листа решаем нерелятивистские уравнения движения

$$dv_{ik}/dt = -\eta \partial \phi(x_{ik}) / \partial x, \quad (2)$$

$$dx_{ik}/dt = v_{ik}.$$

Здесь  $i=1, \dots, N_k$  – номер частицы;  $k=1, 2$  – номер потока;  $\phi$  – потенциал поля пространственного заряда, определяемый с помощью уравнения Пуассона

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 = -\rho(x) / \epsilon_0 \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\phi(0) = \phi(L) = 0, \quad (4)$$

где  $\rho(x)$  – распределение плотности пространственного заряда в междусеточном пространстве.

Для приведения модели (2)–(4) к удобному для численного моделирования виду введем следующие безразмерные параметры:  $x' = x/L$ ,  $v' = v/v_0$ ,  $t' = v_0 t/L$ ,  $\phi' = \phi v_0^2 / \eta$ . Тогда система уравнений (2)–(4) переписется в виде (штрихи над безразмерными величинами опущены)

$$dv_{ik}'/dt = -\partial \phi(x_{ik}') / \partial x, \quad (2')$$

$$dx_{ik}'/dt = v_{ik}',$$

постоянная. Невозмущенные скорости обоих потоков одинаковы  $v_{01}^{(0)} = -v_{02}^{(L)} = |v_0|$ , поэтому изменение безразмерных токов определяется изменением плазменных частот потоков, инжектируемых в диодный промежуток.

В диодном промежутке с одним электронным потоком при  $\alpha = \alpha_{кр} > 4/3$  [6] однопоточное состояние становится неустойчивым. Электростатическая неустойчивость приводит к росту малых возмущений плотности заряда, пока в системе не возникает ВК – область в пространстве взаимодействия с потенциалом, близким к ускоряющему потенциалу  $v_0^2/2\eta$ . Колеблясь в потоке, ВК отражает часть заряженных частиц к входной сетке. Частота колебаний ВК определяется плазменной частотой электронного потока и может быть оценена как  $\omega_{ВК} \sim 2\omega_p$  [29,30].

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 = -\rho(x), \quad (3')$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (4')$$

где для нахождения величины плотности пространственного заряда используется РИС-процедура

$$\rho(X_j) = \sum_{k=1}^2 \alpha_k^2 \sum_{i=1}^{N_k} S(x_{ik} - X_j).$$

Здесь

$$S(x) = \begin{cases} 1 - |x|/\Delta x, & x < \Delta x, \\ 0, & x \geq \Delta x \end{cases}$$

– билинейная весовая функция, аппроксимирующая форму частицы;  $X_j$  – координата  $j$ -го узла пространственной сетки;  $\Delta x$  – шаг пространственной сетки.

Уравнения движения (2') решались методом с перешагиванием [31], уравнение Пуассона (3') с граничными условиями (4') интегрировалось методом распространения вектора ошибки [32].

## 2. Нелинейная динамика системы

**2.1. Характерные режимы колебаний.** На рис. 3 приведено примерное разбиение плоскости параметров  $\alpha_1, \alpha_2$  на области характерных режимов колебаний электрического поля на левой входной плоскости системы. Типичные для этих областей спектры мощности, построенные в логарифмическом масштабе, проекции фазовых портретов и соответствующие отрезки временных реализаций приведены на рис. 4. Фазовые портреты восстанавливались с помощью метода Такенса [33], сводящегося к построению фазовых векторов  $\mathbf{R}$  вида

$$\mathbf{R} = \{E(i\Delta t), E((i+d)\Delta t), \dots, E((i+(m-1)d)\Delta t)\},$$

где  $E$  – напряженность электрического поля в плоскости  $x=0$ ,  $d\Delta t$  – время задержки,  $m$  – размерность пространства вложения ( $m=2$  соответствует проекции аттрактора на плоскости).

В спектре сильно нерегулярных колебаний (область II; рис. 4, а) присутствует развитый шумовой пьедестал, на фоне которого можно выделить две базовые частоты  $\omega'$  и  $\omega''$ , высшая из которых определяется плазменной частотой потока  $\omega'' \approx 2.5\omega_{p1}$ . Фазовый портрет достаточно однороден и бесструктурен. На временной реализации поля на каждом основном временном масштабе  $2\pi/\omega''$  наблюдается нерегулярное появление двух различных по амплитуде максимумов поля.

С увеличением управляющих параметров сильно нерегулярные колебания переходят либо мягко через постепенную трансформацию фазового портрета и спектра мощности к другому типу хаотической динамики, либо жестким образом к установлению режимов регулярных колебаний.

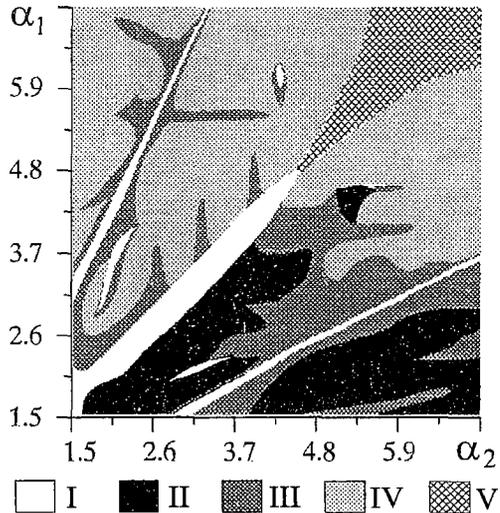


Рис. 3. Карта режимов на плоскости параметров  $\alpha_1, \alpha_2$ . I – регулярные колебания; II – развитый хаос; III – ленточный хаос; IV – биения; V – квазипериодические колебания

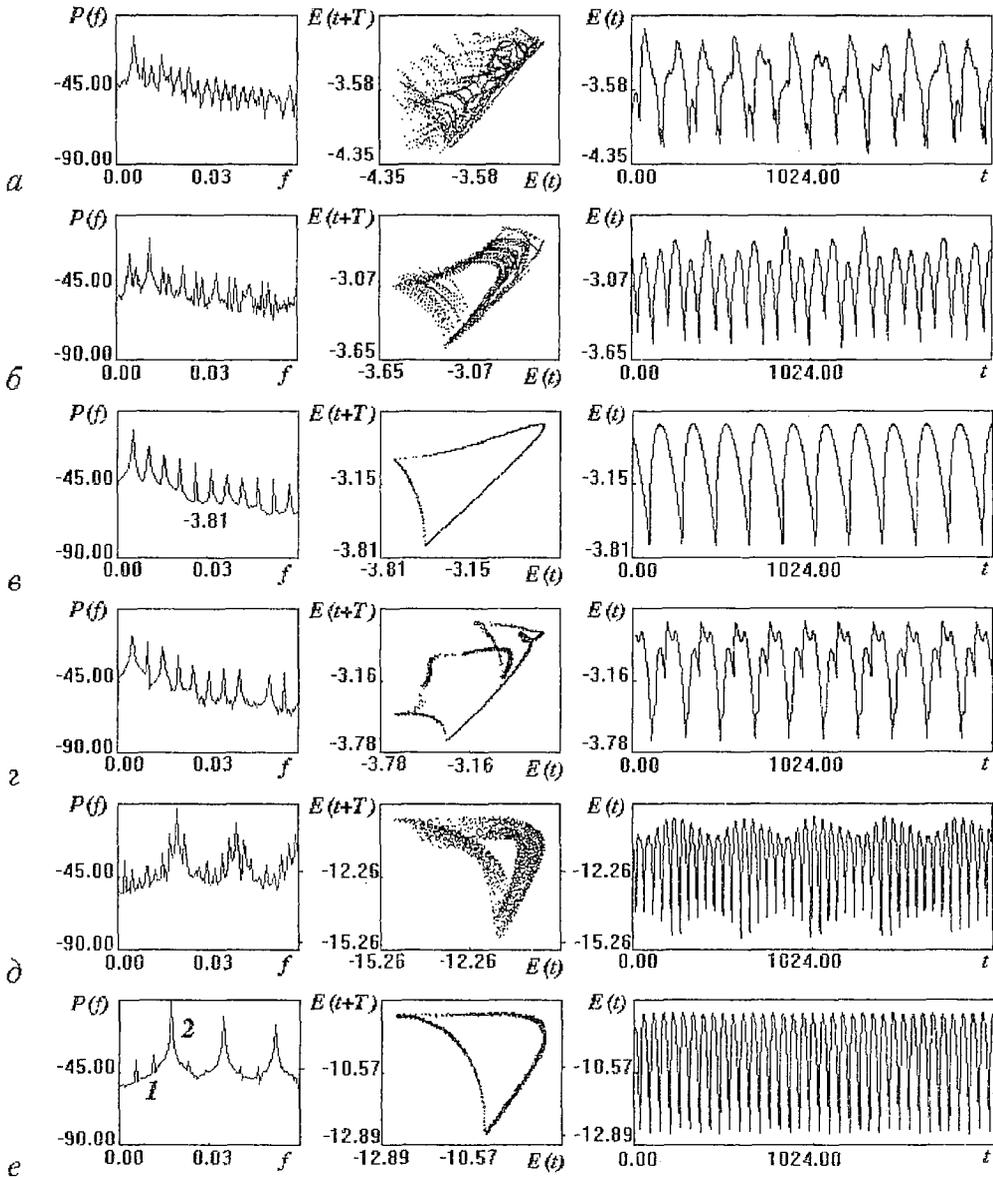


Рис. 4. Характеристики колебаний в системе для различных областей на карте режимов: а – развитый хаос ( $\alpha_1=1.75$ ,  $\alpha_2=2.75$ ); б – ленточный хаос ( $\alpha_1=1.50$ ,  $\alpha_2=3.25$ ); в – цикл-1 ( $\alpha_1=1.50$ ,  $\alpha_2=1.50$ ); г – цикл-3 ( $\alpha_1=1.50$ ,  $\alpha_2=3.00$ ); д – бифуркации ( $\alpha_1=5.75$ ,  $\alpha_2=6.50$ ); е – квазипериодические колебания ( $\alpha_1=6.25$ ,  $\alpha_2=6.50$ )

В первом случае аттрактор представляет собой широкую ленту в фазовом пространстве (область III; рис. 4, б). В спектре присутствует шумовой пьедестал, однако, он существенно ниже, чем в режиме сильно нерегулярных колебаний. На его фоне наблюдаются выбросы на основной частоте и ее субгармониках. Из временной реализации видно, что степень нерегулярности колебаний уменьшается.

Во втором случае внутри областей регулярных движений (область I, рис. 4, в, г) хаотический аттрактор синхронизируется в  $n$ -тактные предельные циклы. Если в центральной области (рис. 4, в;  $\alpha_1=1.5$ ,  $\alpha_2=1.5$ ) колебания в системе возникают на основе однотоктного предельного цикла, то на боковых ветвях, которые лежат вдоль линии  $f_1=2f_2$  ( $f_{1,2}$  – частоты автономных колебаний в диоде), в системе

рождаются многооборотные предельные циклы. Например, в боковой нижней ветви синхронизации наблюдается трехоборотный предельный цикл (рис. 4,2;  $\alpha_1=1.5$ ,  $\alpha_2=3.0$ ). Это связано с особенностями взаимодействия колебаний в каждом из генераторов, когда основная гармоника в спектре колебаний одного из ВК близка к субгармонике колебаний второго ВК. Подобная ситуация описана в [9,10], где исследовалось влияние внешних сигналов на динамику потока с ВК.

Кратко остановимся на фазовых отношениях между сигналами модулей. Колебания в каждой точке, расположенной симметрично относительно линии  $\alpha_1=\alpha_2$ , происходят с одинаковой основной частотой. Между колебаниями устанавливается не меняющаяся во времени разность фаз, величина которой зависит от расстройки по частоте генераторов, а следовательно, и токов пучков (см. раздел 1). Это позволяет рассматривать режим I как режим синхронизации генераторов. При  $\alpha_1 \approx \alpha_2$  разность фаз близка к  $120^\circ$ . При увеличении расстройки  $\Delta\alpha = |\alpha_1 - \alpha_2|$  и росте токов  $\alpha_{1,2}$  величина разности фаз стремится к  $180^\circ$ , то есть колебания происходят в противофазе.

Рост тока  $\alpha_2$  второго пучка приводит к режиму биений (область IV; рис. 4, д) с частотой модуляции  $\omega_m$ , равной разностной частоте колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ВК соответственно в первом и втором потоках

$$\omega_m = |\omega_1 - \omega_2|. \quad (5)$$

Заштрихованная область (область V на карте режимов) соответствует квазипериодическим движениям с двумя несоизмеримыми частотными составляющими спектра. На рис. 4, е цифрой 1 отмечена низкочастотная составляющая, а цифрой 2 – высокочастотная. В фазовом пространстве в этом случае наблюдается двумерный тор.

**2.2. Анализ количественных характеристик сложных режимов колебаний.** Для количественной характеристики сложных режимов в исследуемой системе нами была выбрана размерность аттракторов, восстановленных по временным реализациям (см. п. 2.1.). Размерность вычислялась с помощью алгоритма Грассбергера – Прокаччиа [34]. Величина корреляционной размерности есть

$$D(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(C(\epsilon)) / \ln(\epsilon),$$

где  $\epsilon$  – масштаб наблюдения;  $C(\epsilon)$  – корреляционный интеграл, представляющий собой число пар точек, расстояние между которыми меньше  $\epsilon$ ,

$$C(\epsilon) = [1/(MN)] \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N H(\epsilon - |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|).$$

Здесь  $M$  – число точек редукции;  $N$  – число точек временной реализации, по которой восстанавливался аттрактор в фазовом пространстве с размерностью  $m$ ;  $H$  – функция Хевисайда;  $\mathbf{R}$  – вектор состояния в фазовом пространстве.

На рис. 5 представлена зависимость наклона корреляционного интеграла от масштаба наблюдения для значений токов потоков, соответствующих двум типам хаотического поведения. По оси абсцисс отложен масштаб наблюдения  $\epsilon$ , нормированный на размер аттрактора  $\epsilon_0$ , по оси ординат – размерность аттрактора  $D$ .

Для ленточного хаоса (см. рис. 5, а) можно выделить область неизменного значения размерности  $D$  при изменении масштаба наблюдения  $\epsilon$  (область скейлинга). Размерность аттрактора определяется в области скейлинга как  $D=1+\Delta$ , где  $\Delta$  меняется для различных значений параметров в пределах  $0.05 \div 0.4$ , что характерно для ленточных аттракторов. Как видно из рисунка, размерность в области скейлинга насыщается с ростом размерности пространства вложения  $m$ , что свидетельствует о детерминированности случайных процессов в системе, так

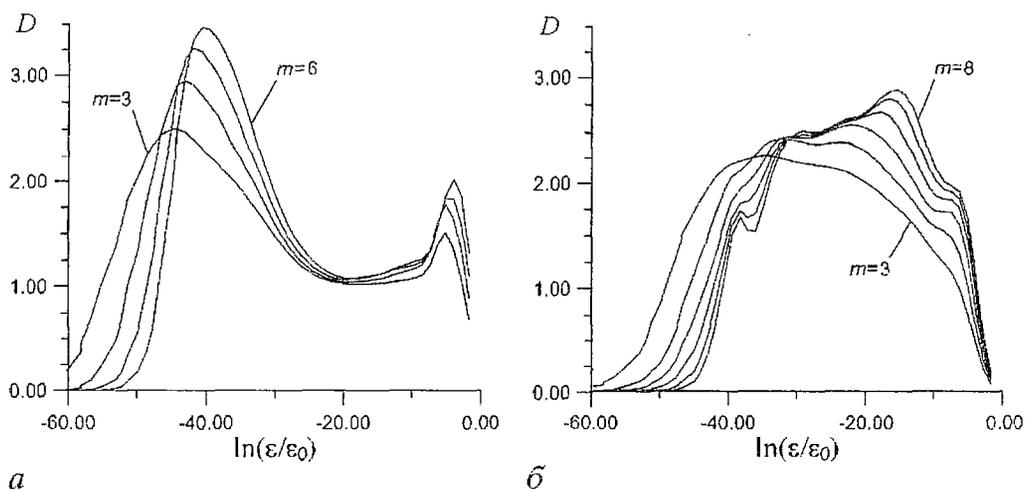


Рис. 5. Размерность восстановленных аттракторов как функция масштаба наблюдения для различных значений размерности пространства вложения и режимов: а – III; б – II

как для шумовых колебаний размерность предельных множеств растет пропорционально  $m$  [35]. Для масштабов наблюдения меньше 30 дБ сильная зависимость  $D$  от  $\epsilon$  связана с конечной длительностью временной реализации, по которой восстанавливался аттрактор в фазовом пространстве.

Для сильно хаотического режима (см. рис. 5, б) область скейлинга на кривых наклона корреляционного интеграла выделить не удастся, что свидетельствует о неоднородности аттрактора, однако, размерность испытывает насыщение с увеличением  $m$ . Усредненная в области насыщения размерность аттрактора больше двух, что связано с возбуждением большего числа степеней свободы по сравнению с предыдущим случаем. Тем не менее во всех режимах число активных степеней свободы, вовлекаемых в колебательное движение в нашей бесконечномерной системе, остается небольшим. Это является косвенным доказательством возможности описания динамики системы с помощью взаимодействия небольшого числа мод, хотя необходимое число их различно для различных режимов.

Отметим, что в режимах, отличных от режима синхронизации колебаний в обоих генераторах, наблюдается сильная зависимость размерности предельного множества от координаты сечения снятия сигнала, по которому восстанавливается аттрактор. Это иллюстрирует табл. 1, в которой приведена усредненная по масштабу наблюдения  $-30 \div -10$  дБ размерность аттрактора в нескольких сечениях диода. Результаты получены для режима, когда в левой половине системы, в которую инжектируется ток  $\alpha_1=1.5$ , колебания ВК сильно нерегулярны, а во встречном потоке с током пучка  $\alpha_2=2.25$  динамика ВК периодична.

Таблица 1

$x/L$	0.00	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.00
$D$	3.46	3.02	1.09	1.03	1.07	1.12	1.27	1.00	1.00

Из табл. 1 видно, что с продвижением по координате размерность уменьшается, достигая в центре системы величины  $D \approx 1 + \Delta$ , где  $\Delta < 0.1$ . Далее наблюдается скачок  $D$  и у правой границы системы размерность равна единице, что соответствует регулярным колебаниям в потоке с большим током.

На рис.6 представлены взаимные по пространству корреляционные функции

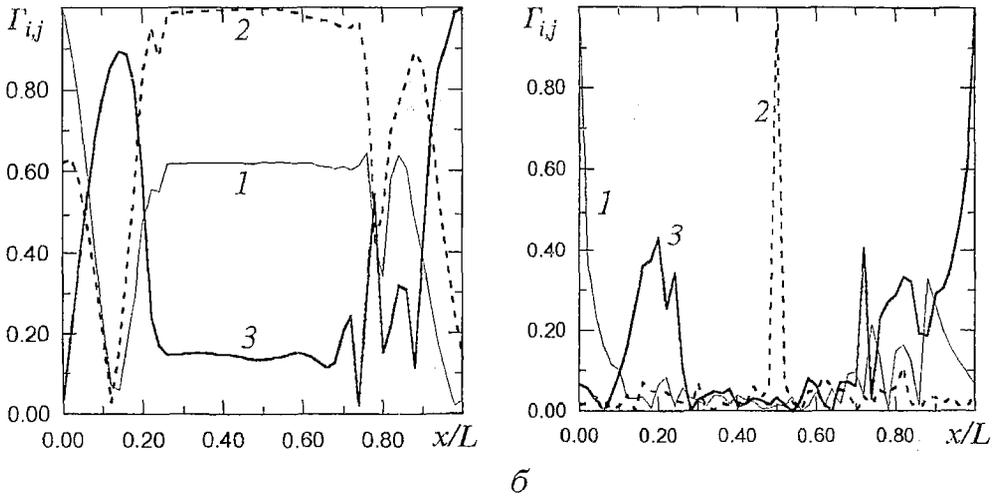


Рис. 6. Взаимная по пространству корреляционная функция, рассчитанная относительно различных плоскостей потока (1 - 0.0, 2 - 0.5L, 3 - L) по колебаниям электрического поля (а) и плотности пространственного заряда (б)

величины  $\mathcal{L}(x)$  относительно различных точек в пространстве взаимодействия

$$\Gamma_{ij} = \langle \mathcal{L}(x_i) \mathcal{L}(x_j) \rangle_i - \langle \mathcal{L}(x_i) \rangle \langle \mathcal{L}(x_j) \rangle_i, \quad x_i = i \Delta x.$$

На рис. 6, а демонстрируются результаты расчета для случая, когда в качестве функции  $\mathcal{L}(x)$  выбираются значения напряженности электрического поля пространственного заряда; на рис. 6, б - соответственно плотности пространственного заряда. Из рис. 6, б видно, что корреляция хаотических колебаний  $\rho(x)$  вдоль пространства взаимодействия значительно уменьшается на расстояниях порядка  $0.1L$  (кривые 1,2). Однако, четко прослеживается статистическая взаимосвязь колебаний в области ВК во втором потоке с большим током и в области ВК в первом потоке (кривая 3). Это свидетельствует о том, что колебания в потоке с меньшим током в большей степени определяются динамикой ВК во встречном потоке. В то же время влияние потока с  $\alpha_1$  на колебания в потоке с  $\alpha_2$  существенно меньше (кривая 1). Отметим также, что связь по потоку между модулями практически отсутствует: в области  $x/L \approx (0.3 \div 0.7)$ , связывающей модули,  $\Gamma_{ij} \rightarrow 0$  (кривые 1,3), а взаимная корреляционная функция относительно центра цепочки имеет вид  $\delta$ -функции (кривая 2). Напротив, колебания электрического поля в центре системы коррелируют с колебаниями в области  $x/L \approx (0.3 \div 0.7)$  (рис. 6, а, кривая 2), то есть связь между модулями осуществляется через поле пространственного заряда. Остальные результаты анализа взаимных корреляционных функций, рассчитанных по полю, совпадают с предыдущими.

**2.3. Физические процессы в двухпотоковом виркаторе.** Рассмотрим физические процессы, протекающие в исследуемой системе, с помощью анализа пространственно-временных диаграмм и соответствующих зависимостей максимальной плотности пространственного заряда в электронном потоке от времени (рис. 7).

В режиме периодических колебаний (область I на карте режимов) плотность пространственного заряда ведет себя регулярно, достигая на каждом периоде одного максимума, связанного с формированием в потоке ВК (рис. 7,а).

Возникновение квазипериодических движений (рис. 7,б) при больших значениях токов пучков связано с появлением двух характерных типов заряженных частиц в потоке. Это, во-первых, частицы, тормозящиеся в области ВК и отражающиеся от него к плоскости инжекции. Среднее время жизни их в пространстве взаимодействия совпадает с характерным масштабом колебаний ВК. Именно этот тип частиц определяет появление в спектре квазипериодических

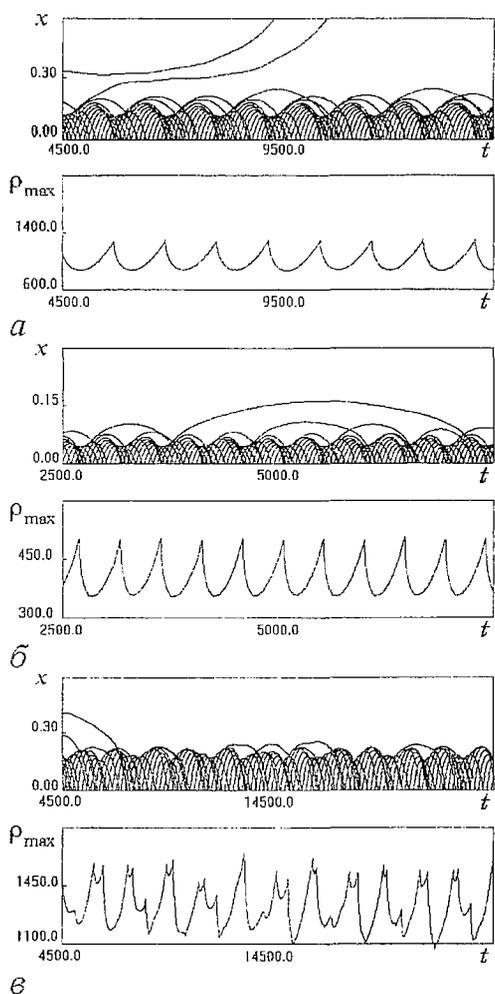


Рис. 7. Пространственно-временные диаграммы электронного потока в пространстве взаимодействия и зависимости максимальной плотности пространственного заряда от времени для режимов регулярных (а), квазипериодических (б) и хаотических (в) колебаний

регулярном режиме, развитием электростатической неустойчивости, в результате которой формируется ВК, а следовательно, и наблюдается рост плотности пространственного заряда вблизи входной сетки за счет заряженных частиц, затормозившихся в области минимума потенциала. Этому электронному образованию в потоке соответствует область А на рис. 9, на котором представлен в более крупном масштабе один характерный период колебаний в системе. Второй электронный сгусток в потоке (область В на рис. 9), ответственный за второй максимум на зависимости  $\rho_{\max}(t)$ , образуется после начала распада ВК на предыдущем периоде колебаний – в начале формирования на следующем периоде. Образование этой вторичной электронной структуры, заряда которой достаточно для отражения части потока<sup>2</sup>, связано с кинематической группировкой электронного потока, модулируемого как меняющимся тормозящим полем

движений (см. рис. 4, е) высокочастотной составляющей 2. Во-вторых, частицы, влетающие в пространство дрейфа в момент времени, когда тормозящее поле ВК минимально, так что их кинетической энергии хватает, чтобы не отразиться обратно к плоскости инжекции, но не хватает для того, чтобы уйти к противоположной границе системы. Эти частицы, традиционно называемые метастабильными [3], остаются в пространстве взаимодействия в течение двух и более периодов колебаний ВК и, возвращаясь к входной сетке, оказывают влияние на динамику потока в области минимума потенциала.

Вышеописанную ситуацию иллюстрирует рис. 8, на котором представлены эволюции пространственного распределения плотности заряда в области ВК для регулярных и квазипериодических движений. Из рисунка хорошо видно, что в регулярном режиме «сброшенные» из ВК к центру диода частицы двигаются к противоположной границе системы (сгусток отмечен стрелкой на рис. 8, а). В случае квазипериодических движений эти частицы возвращаются в область ВК (отмечены стрелкой на рис. 8, б), образуя метастабильный сгусток. Временной масштаб его движения соответствует низкочастотной составляющей  $I$  в спектре на рис. 4, е.

В хаотическом режиме на характерном масштабе колебаний максимальная плотность пространственного заряда достигает двух максимумов (рис. 7, в). Возникновение первого максимума объясняется, как и в

<sup>2</sup> Отметим, что суммарное число отраженных от вторичного сгустка частиц меньше, чем от ВК, хотя его заряд порядка заряда самого ВК; это связано с тем, что от ВК отражается уже затормозившийся поток, тогда как к вторичному электронному сгустку поступают частицы со слабо возмущенной скоростью  $v \approx v_1$ .

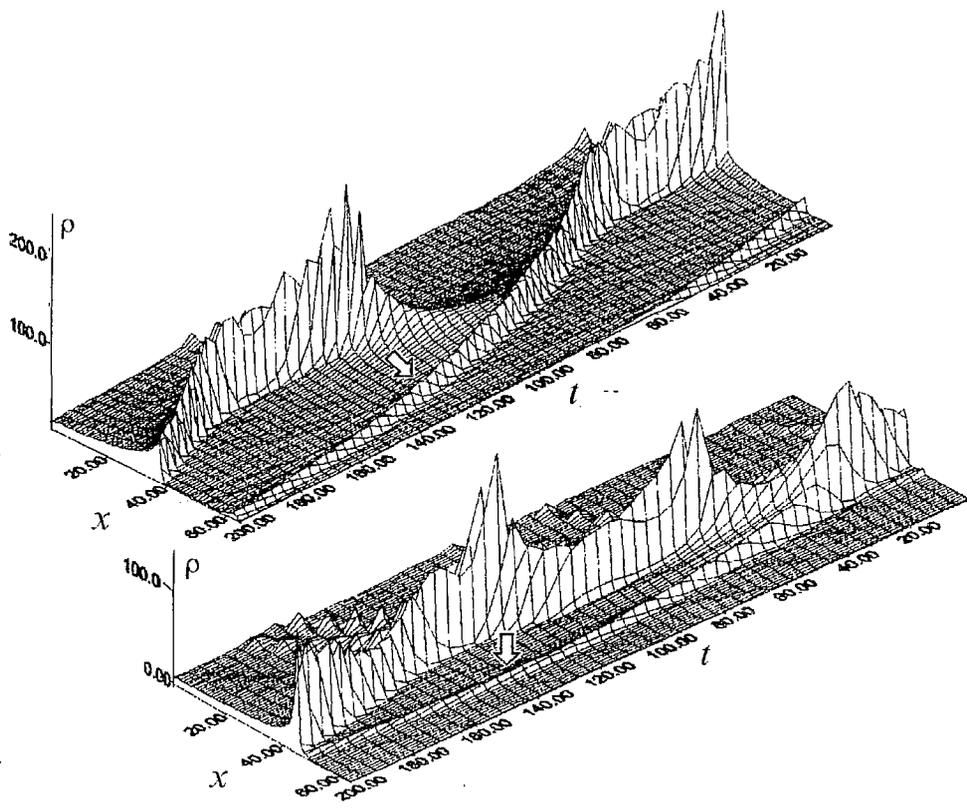


Рис. 8. Динамика пространственного распределения плотности заряда  $\rho(x,t)$  для режима регулярных (а) и квазипериодических (б) колебаний

открывающегося ВК, так и (что наиболее существенно) внешним полем из области ВК встречного потока. Величина поля, воздействующего на область первого ВК из области ВК второго потока, достаточно велика, так как величина инжектируемого во второй виркатор тока  $\alpha_2$  больше величины тока  $\alpha_1$  левого диода. При этом наблюдается эффект, аналогичный процессам в комбинированной структуре «виртод – лампа обратной волны» [25,26,28], где сравнительно небольшое поле, подаваемое в область ВК в момент времени, когда собственное поле ВК невелико (ВК «открывается»), позволяет произвести достаточно глубокую модуляцию потока, который в результате группируется в этом же поле. Таким образом, возникновение вторичного сгустка подобно группировке электронного потока в монотроне. Плотность пространственного заряда во втором сгустке может оказаться достаточной для полного отражения потока. В результате этого в системе наблюдаются сбой фазы колебаний, а на зависимости  $\rho_{\max}(t)$  появляется третий максимум, которому соответствует слабосформированный сгусток, возникающий вследствие кинематической группировки в сравнительно слабом тормозящем поле открывающегося вторичного ВК.

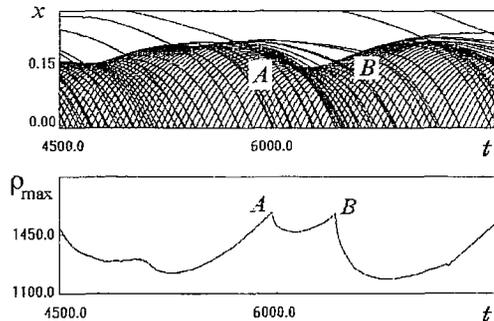


Рис. 9. Характеристики динамики потока для развитого хаоса. Точки А и В соответствуют двум различным электронным сгусткам в пространстве взаимодействия

### 3. Динамика когерентных структур

В п. 2.3 с помощью визуализации траекторий заряженных частиц на пространственно–временных диаграммах была выявлена связь усложнения динамики исследуемой системы с формированием в потоке вторичных электронных структур. Им соответствует максимум плотности пространственного заряда в пространстве взаимодействия и сгущение траекторий заряженных частиц на пространственно–временных диаграммах. Для количественной характеристики процессов структурообразования были выделены когерентные структуры с помощью декомпозиции пространственно–временных данных по алгоритму Карунена – Лозва [36,37].

Задача выделения набора базисных функций  $\{\Psi_i\}$  по Карунену – Лозву сводится к решению интегрального уравнения следующего вида:

$$\int K(x, x^*) \Psi(x^*) dx^* = \Lambda \Psi(x), \quad (6)$$

где ядро уравнения является двухточечной корреляционной функцией

$$K(x, x^*) = \langle \xi(x, t) \xi(x^*, t) \rangle_t, \quad (7)$$

$$\langle s(t) \rangle_t = 1/T \int_0^T s(t) dt.$$

В качестве  $\xi(x, t)$  может быть выбран набор пространственно–временных данных, приведенных к нулевому среднему, какой–либо подходящей физической величины. Например, для задачи подобной нашей можно рекомендовать в качестве  $\xi(x, t)$  выбрать распределение плотности пространственного заряда в пространстве взаимодействия.

Собственные функции  $\Psi_i(x)$  обычно называют модами Карунена – Лозва. Собственные числа  $\Lambda_i$  пропорциональны энергии, заключенной в соответствующей  $i$ -й моде. Мерой этой энергии может служить величина  $W_i$

$$W_i = (\Lambda_i / \sum_j \Lambda_j) \times 100\%.$$

Отметим, что набор  $\{\Psi_i\}$  является оптимальной системой координат в смысле наибольшего сжатия информации. С точки зрения физики это означает, что основная энергия процесса сосредоточена в нескольких модах, а не разбросана по большому их числу. Строго это может быть сформулировано с помощью введения функции  $S$ , смысл которой близок к понятию энтропии

$$S(\{\Theta_i\}) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i,$$

где  $\{\Theta_i\}$  – некоторый базисный набор функций, а  $\{\lambda_i\}$  – соответствующие собственные числа этих функций.

Система собственных функций является оптимальной  $\{\Theta_i\}_{\text{опт}}$ , если она минимизирует  $S$

$$S(\{\Theta_i\}_{\text{опт}}) = \min_{\{\Theta_i\}} S(\{\Theta_i\}).$$

В работе [35] строго доказывается, что система является оптимальной тогда и только тогда, когда она является системой Карунена – Лозва, то есть удовлетворяет уравнениям (6)–(7)

$$\forall \xi(x, t): \{\Theta_i\}_{\text{опт}} = \{\Psi_i\} \cap \forall i \in [1, \infty): \max_{\{\lambda_i\}} \lambda_i = \Lambda_i.$$

Численный метод определения наборов  $\{\Psi_i\}$  и  $\{\Lambda_i\}$  базируется на том, что

задача (6)–(7) является однородным линейным интегральным уравнением 2–го рода, которое, как известно, представляет собой задачу о собственных значениях. Соответствующее интегральному уравнению (6) матричное уравнение имеет вид

$$[k_{kl}] \{\Psi_l\} = \Lambda \{\Psi_k\},$$

где, как нетрудно видеть из (7),  $[k_{kl}]$  есть действительная симметричная матрица. Для нахождения ее собственных чисел и собственных векторов можно воспользоваться любым из известных численных методов линейной алгебры (см., например, [38]).

Полученные результаты декомпозиции пространственно–временных данных плотности пространственного заряда в области формирования ВК вблизи левой плоскости инжекции, представлены в табл. 2, в которой приведены энергии мод Карунена – Лозва, и на рис. 10, на котором приводятся пространственные эпюры и временные динамики нескольких первых мод для различных режимов колебаний в системе.

Таблица 2

Распределение энергии по модам Карунена – Лозва для различных режимов колебаний ВК

Режим	Энергия мод, %									
	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$	$W_7$	$W_8$	$W_9$	$W_{10}$
Регулярные колебания $\alpha_1=2.25, \alpha_2=2.0$	76.7	8.9	3.50	0.38	1.89	1.38	1.05	0.88	0.65	0.59
Биения $\alpha_1=5.75, \alpha_2=6.5$	75.66	13.16	5.43	2.07	0.91	0.69	0.48	0.33	0.26	0.21
Квазипериодические колебания $\alpha_1=6.25, \alpha_2=6.25$	73.03	14.34	5.38	2.43	1.35	0.97	0.57	0.39	0.30	0.25
Развитый хаос $\alpha_1=1.75, \alpha_2=2.75$	60.13	14.67	7.82	4.81	2.84	1.93	1.24	1.07	0.960	0.69

Во всех режимах, включая хаотические и регулярные, основная энергия потока заключена в небольшом числе мод (порядка 6), причем на высшие моды с номерами  $i > 6$  приходится менее 3% полной энергии потока. Отметим, что энергии высших мод практически не меняются с изменением управляющих параметров. Это подтверждает то, что высшие моды не описывают процессов, сопровождающих усложнение динамики системы, а характеризуют эффекты, не связанные с большими возмущениями плотности пространственного заряда потока. Например, попадание некоторого числа частиц одного из потоков в область формирования ВК во встречном потоке доказывает тот факт, что энергия высших мод в режиме регулярных и хаотических колебаний несколько больше энергии высших мод в режиме квазипериодических движений, при этом пролетный ток в режимах I, II в несколько раз больше, чем в режиме IV или V (см. раздел 1).

Одновременно с этим энергии низших мод достаточно сильно зависят от режима. Переход от регулярных колебаний к более сложным движениям сопровождается ростом энергии 2–5 мод с одновременным уменьшением энергии, заключенной в первой моде. В режиме развитого хаоса (режим II) первая мода теряет порядка 25% своей энергии по сравнению с регулярными колебаниями (режим I).

Распределения мод (рис. 10, а) сильно неоднородны в пространстве взаимо–

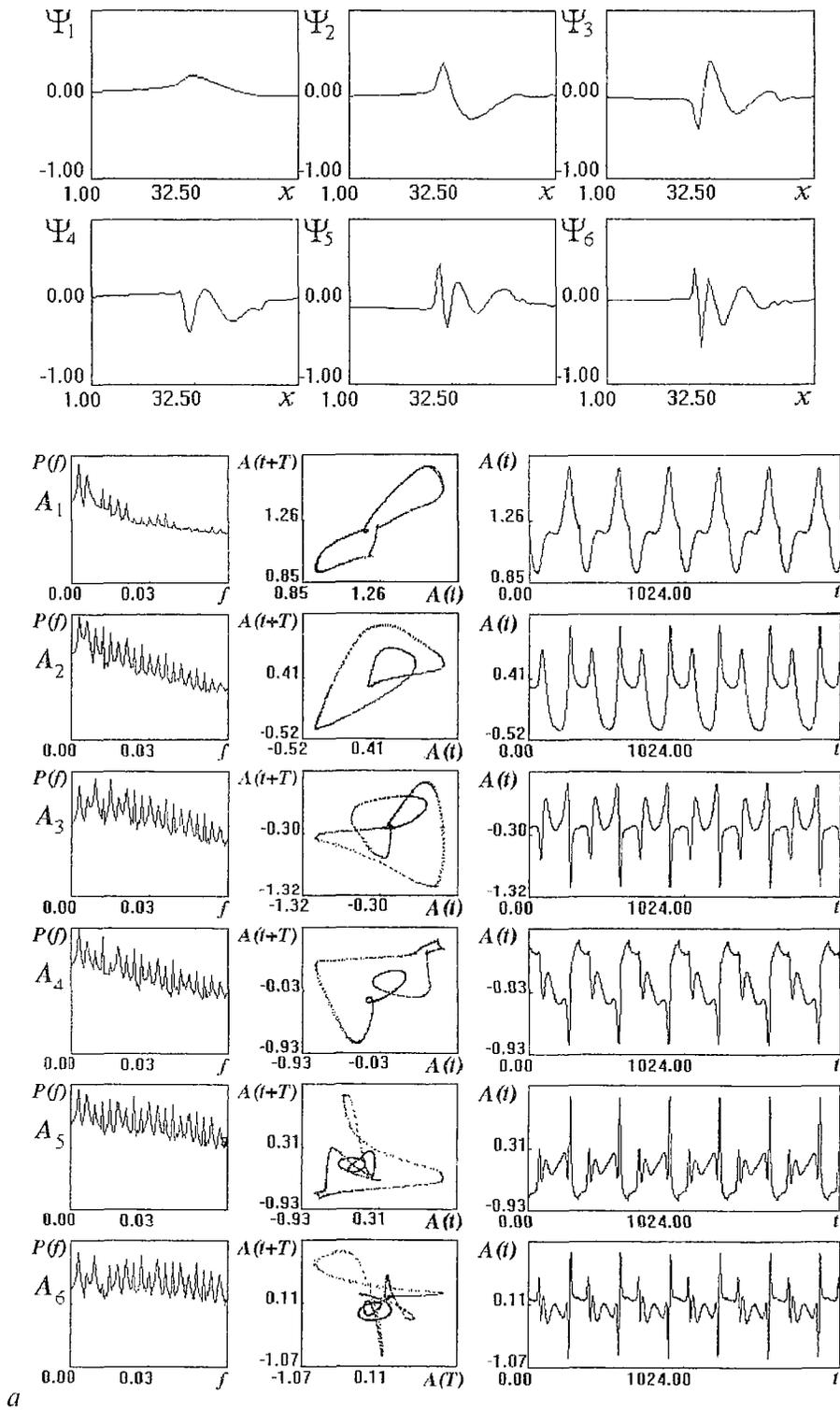
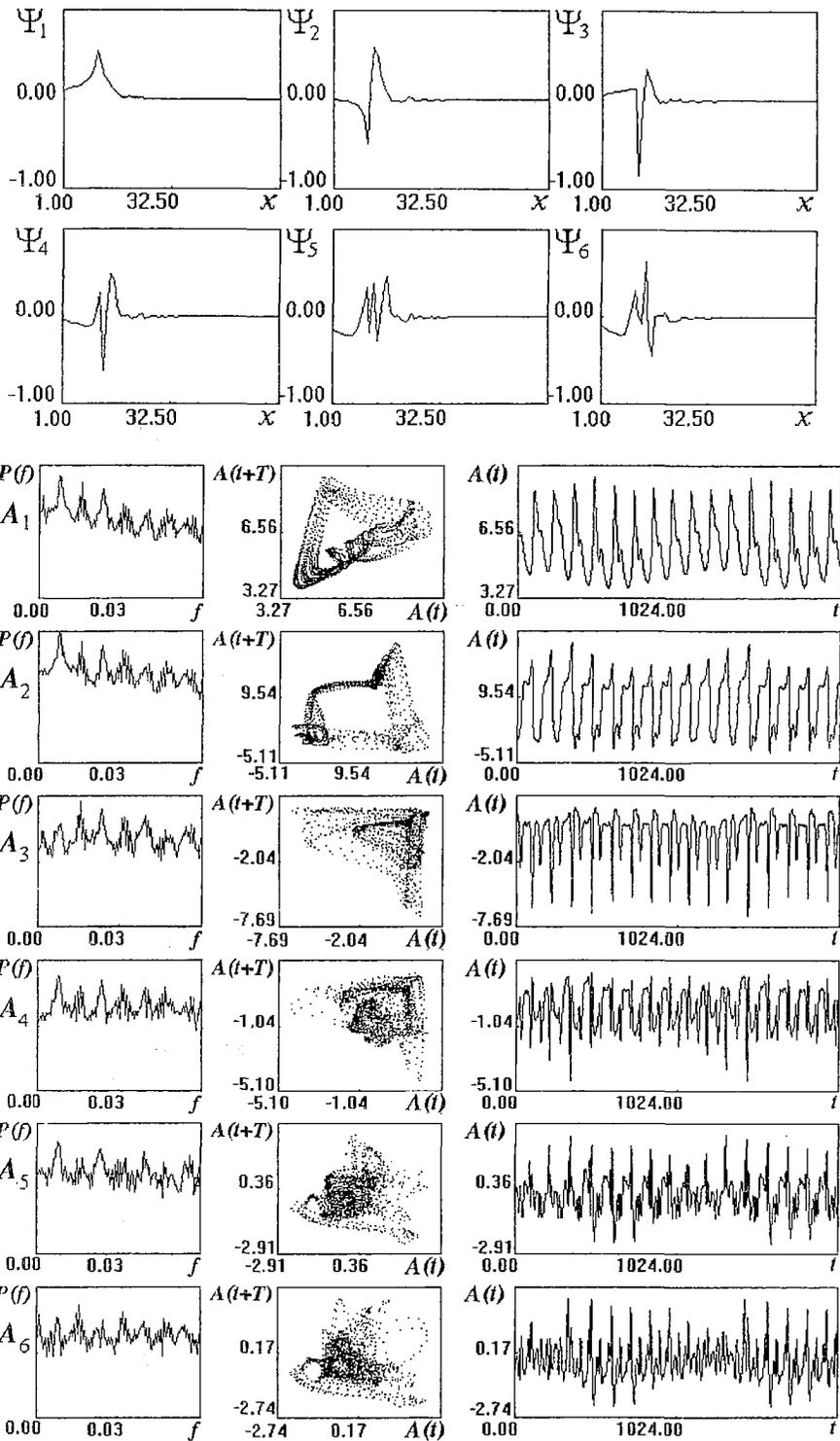
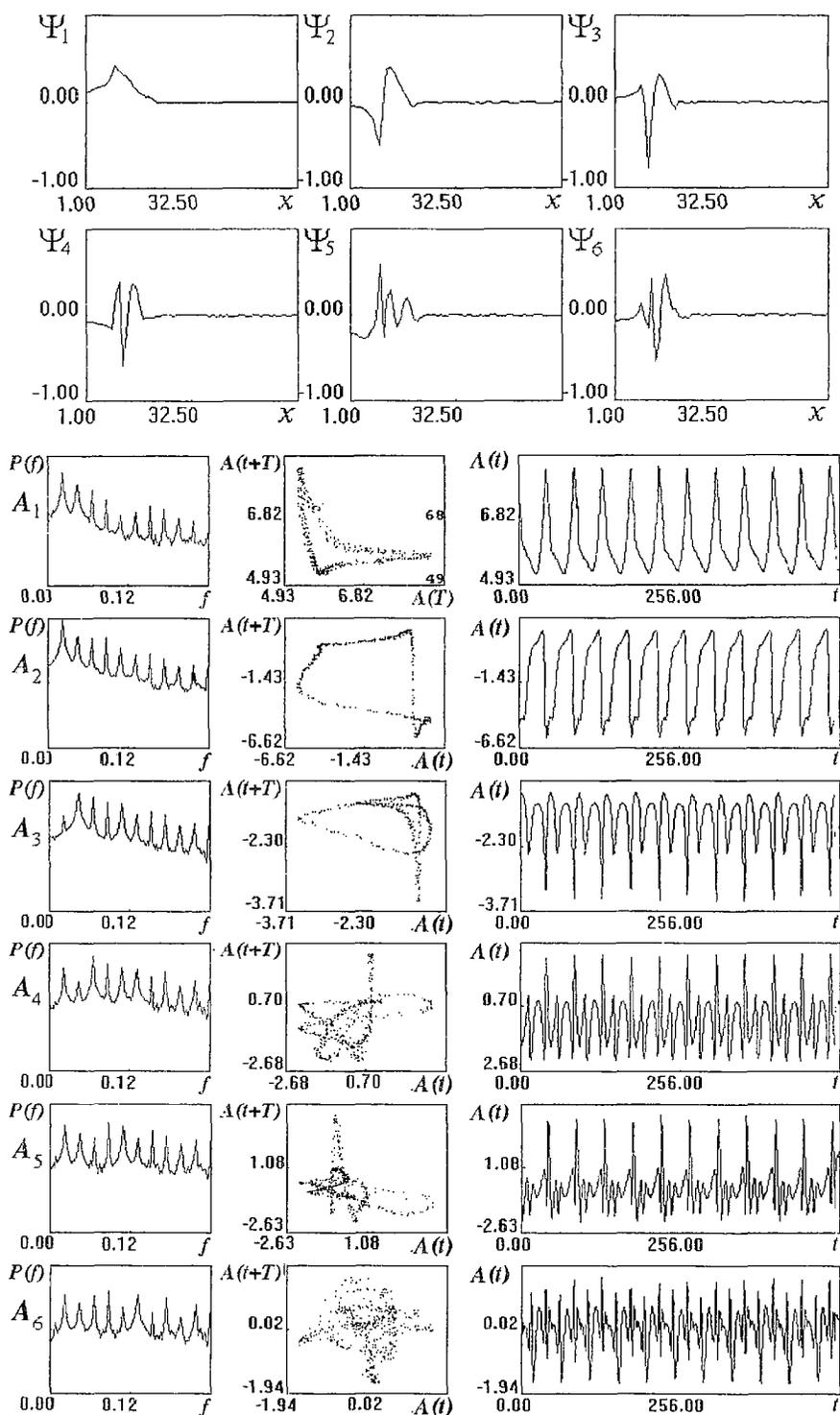


Рис. 10. Вид высших мод Карунена – Лозва и их временная динамика для различных режимов колебаний в системе: *a* – регулярные колебания



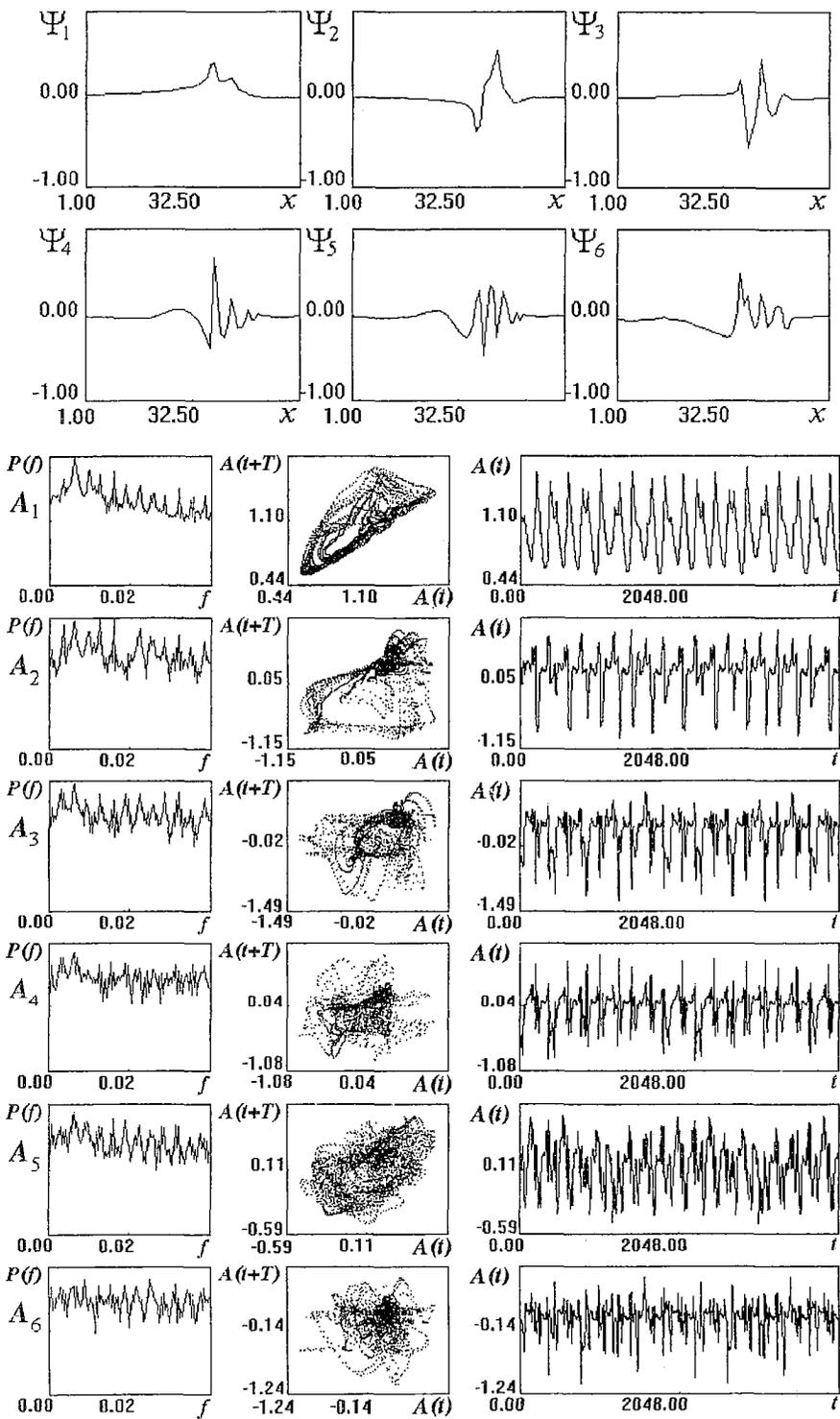
б

Рис. 10. Вид высших мод Карунена – Лозва и их временная динамика для различных режимов колебаний в системе: б – биения



в

Рис. 10. Вид высших мод Карунена – Лозва и их временная динамика для различных режимов колебаний в системе: в – квазипериодические колебания



2

Рис. 10. Вид высших мод Карунена – Лозва и их временная динамика для различных режимов колебаний в системе:  $z$  – хаотические колебания

действия, причем вид функций  $\Psi_i(x)$  усложняется с ростом номера моды. В режиме регулярных колебаний первая мода в области, прилегающей к левой границе системы, демонстрирует близкое к симметричному распределение с одним максимумом, расположенным в области локализации ВК. Рост номера моды приводит к прибавлению новых максимумов на энорах мод, причем максимумы появляются в области за ВК. Это связано с тем, что динамика высших мод описывает в первую очередь процессы разрушения ВК и «сброса» заряда из него к центру диода (см., например, рис. 8, а). Временная зависимость амплитуд мод определяется с помощью выражения

$$A_i(t) = \int \xi(x,t) \Psi_i(x) dx.$$

В режиме регулярных движений динамика мод демонстрирует периодические колебания, форма которых усложняется с ростом номера моды. При этом в псевдофазовом пространстве каждой из мод наблюдаются многооборотные циклы.

Переход к режиму биений (рис. 10, б) сопровождается изменением энор мод Карунена – Лозва. В данном режиме часть пространства, где  $\Psi_i(x)$  отлична от нуля, компактно локализована в области ВК, а не растянута на большую часть пространства взаимодействия, как это наблюдается в регулярном режиме. Это связано с тем, что наибольшее возмущение плотности заряда  $\rho$  в пространстве взаимодействия связано с самим ВК, на собственные колебания которого накладывается второй временной масштаб колебаний, пропорциональный  $1/\omega_m$  (5). При этом амплитуда модуляции колебаний высоты потенциального барьера (ВК) достаточно велика

$$\Delta\varphi_0/(\varphi_0)_{\min} \approx 10\%,$$

где  $\varphi_0$  – величина минимума потенциала в пространстве взаимодействия. Однако, модуляция координаты положения минимума в пространстве существенно меньше, вследствие чего наблюдается четкая выраженная локализация амплитуды мод в узкой области пространства взаимодействия. Колебания всех мод сильно нерегулярны, причем в спектрах мод прослеживается наличие частоты модуляции  $\omega_m$ . Динамика мод с номерами  $i > 3$  демонстрирует ярко выраженную перемежаемость, в спектре с номером моды растет шумовое основание, фазовый портрет становится однородным.

Динамика высших мод в режиме квазипериодических колебаний связана с динамикой метастабильного сгустка. Пространственное распределение мод (рис. 10, в) так же как и в предыдущем случае локализовано вблизи плоскости инжекции ( $x=0$ ). Это связано с тем, что квазипериодические режимы появляются при больших токах пучка, когда ВК возникает в непосредственной близости от входной сетки. В спектрах мод прослеживается увеличение интенсивности второй базовой спектральной составляющей с ростом номера моды.

В режиме сильно хаотических колебаний наиболее характерным является появление второго максимума на пространственном распределении высшей моды  $\Psi_1$ . Это связано с формированием в потоке на каждом периоде колебаний второго электронного сгустка в пролетном потоке распадающегося ВК. Заметим также, что динамика первой моды  $A_1(t)$  качественно совпадает с динамикой  $\rho_{\max}(t)$  в пространстве взаимодействия, так как практически на каждом периоде колебаний  $A_1$  наблюдается два различных по амплитуде максимума. Вследствие этого можно предположить, что динамика первой моды в первом приближении описывает поведение двух основных структур потока – ВК и вторичного электронного сгустка, формирующегося в поле распадающегося ВК. Более тонкие аспекты физических процессов, сопровождающих усложнение динамики потока, например, образование третьего электронного сгустка теперь уже в поле распадающегося вторичного ВК, описывают моды с высшими номерами, на что указывает

появление в спектре мод с номерами  $i \geq 2$  второго независимого временного масштаба, соответствующего вышеуказанному физическому процессу.

Таким образом, переход от регулярных к хаотическим колебаниям сопровождается ростом энергии вторичных структур в потоке, описываемых модами Карунена – Лозва с высшими номерами. При этом наблюдается рост плотности пространственного заряда вторичных структур, что приводит к отражению части потока от них. Это в свою очередь приводит к появлению в потоке внутренней распределенной обратной связи, которая и является основной причиной усложнения динамики системы.

#### 4. Конечномерная модель

Небольшое число активных степеней свободы, возбуждаемых в системе, а так же небольшое число мод Карунена – Лозва, необходимых для описания динамики потока (то есть мод, энергия которых больше нескольких процентов от общей энергии потока), свидетельствует о возможности построения конечномерной модели, которая бы качественно верно отражала основные особенности поведения системы.

В работе [39] предложена простейшая эквивалентная схема пролетного промежутка со сверхкритическим током (рис. 11). В рассматриваемой схеме с генератором тока точка 1 соответствует входному и выходному электродам, точка 2 – минимуму потенциала. Емкость  $C$  учитывает накопление в системе электростатической энергии, проводимость  $G_1$  отвечает за движение заряженных частиц под действием сил пространственного заряда, проводимость  $G_2$  подключается, когда превышает некоторое пороговое значение напряжения  $U_{кр}$  (возникает ВК и имеет место обратный ток, отраженный от ВК, то есть от 1 к 2). Для схемы на рис. 11 можно записать закон Кирхгофа

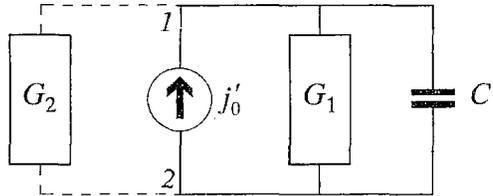


Рис. 11. Эквивалентная схема пролетного промежутка в режиме сверхкритического тока [39]

$$j'_0 = j'_1 + j'_2 + CdU/dt, \quad (9)$$

где  $j'_1$  и  $j'_2$  соответственно плотности тока через проводимости  $G_1$  и  $G_2$ . Введя нормированные величины

$$\Phi = U/U_0, \quad j_i = j'_i/I_0,$$

где

$$I_0 = CU_0v_0, \quad U_0 = mv_0^2/2,$$

и учитывая вид функций  $G_1(\Phi)$  и  $G_2(\Phi)$  [40]

$$G_1(\Phi) = \Phi(1 - \Phi)^{1/2},$$

$$G_2(\Phi) = \Phi^{3/2},$$

уравнение (9) перепишем в виде

$$\begin{cases} j_0 = d\Phi/dt + \Phi(1 - \Phi)^{1/2} & \text{на нижней ветви,} \\ j_0 = d\Phi/dt + \Phi[\Phi^{1/2} + (1 - \Phi)^{1/2}] & \text{на верхней ветви.} \end{cases}$$

Учитывая значение критического потенциала  $\Phi_{кр} = 2/3$  [40], при котором происходит включение проводимости  $G_2$ , можно построить вольт–амперную характеристику (ВАХ) промежутка со сверхкритическим током (рис. 12).

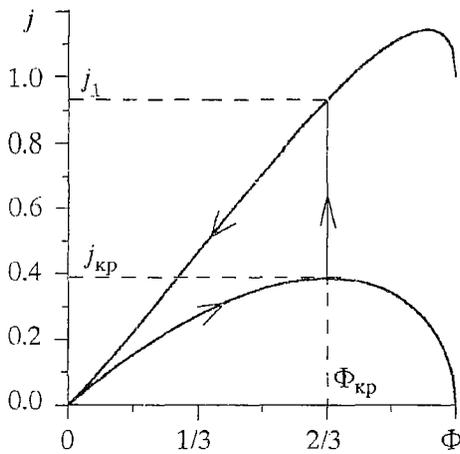


Рис. 12. ВАХ пролетного промежутка в режиме сверхкритического тока

Движение системы на нижней ветви соответствует заряду конденсатора – образованию ВК. При достижении потенциалом критического значения  $\Phi_{кр} = 2/3$  включается проводимость  $G_2$ , через которую происходит быстрый разряд емкости  $C$ . В системе при этом происходят релаксационные колебания, предельный цикл которых отмечен стрелками на рис. 12.

Заменяя ВАХ пролетного промежутка кусочно–линейной аппроксимацией<sup>3</sup>, можно найти частоту колебаний в такой системе

$$\omega = 2\pi / (T_1 + T_2),$$

где время жизни системы на *нижней ветви*

$$T_1 = -(\Phi_{кр}/j_{кр}) \ln[1 - j_{кр}/j_0]$$

и время жизни на *верхней ветви*

$$T_2 = -(\Phi_{кр}/j_1) \ln \frac{(1 - j_{кр}/j_0)^{j_1/j_{кр}}}{1 - j_1/j_0}.$$

Видно, что с увеличением тока  $j_0$  частота колебаний в системе растет, что является характерным для генераторов на ВК.

Отметим также, что данная модель отражает существование критического тока, ниже которого электростатическая неустойчивость, с которой связано формирование ВК, не развивается. При плотности тока  $j^* < j_{кр}$  в рассматриваемой модели наблюдается устойчивое состояние равновесия, определяемое координатами

$$(j^*, \Phi^*): j^* = \Phi^*(1 - \Phi^*)^{1/2}.$$

В рамках данной модели существует возможность учесть хаотизацию движения в системе в результате формирования в пространстве взаимодействия второй электронной структуры в поле внешнего сигнала. В этом случае, во-первых, необходимо учесть зависимость величины  $\Phi_{кр}$  от внешнего поля, которое в первом приближении можно предположить изменяющимся по гармоническому закону

$$\Phi_{кр}(t) = \Phi_{кр}[1 + \Phi'_{кр} \sin(\omega t)].$$

И, во-вторых, поведение системы необходимо контролировать в том смысле, что при превышении меняющегося критического потенциала  $\Phi_{кр}(t)$  напряжением между точками 1 и 2 (см. рис. 11) при нахождении системы на верхней ветви проводимость  $G_2$  отключается, а к емкости  $C$  подключается дополнительная емкость, характеризующая уменьшение максимальной потенциальной энергии, которая может быть накоплена в системе. Это связано с тем, что при формировании ВК происходит перераспределение кинетической энергии первоначально невозмущенного электронного потока между кинетической и потенциальной энергией электростатического поля потока (с чем и связано

<sup>3</sup> Такой подход весьма распространен для модельного исследования реальных сложных систем. Например, семейство схем Чуа [41] или работы, посвященные кусочно–линейной модели генератора на туннельном диоде [42].

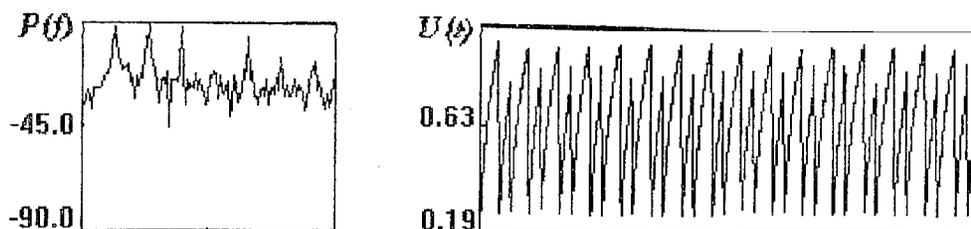


Рис. 13. Спектр мощности и временная реализация хаотических автоколебаний в конечномерной модели

формирование ВК при превышении критического тока). Кинетическая энергия, теряемая потоком в результате формирования вторичного электронного образования, существенно меньше, чем при формировании основной структуры потока – ВК. Следовательно, потенциальная энергия электрического поля, определяемая в нашей модели величиной емкости, подключенной параллельно источнику тока, уменьшается, и необходимо подключение второй емкости, которое уменьшило бы возможность накопления потенциальной энергии в системе.

Отметим, что подобным образом сконструированная модельная система допускает аналогию с неавтономным релаксационным генератором, исследованным в работе [43], который может демонстрировать хаотические автоколебания.

Выбор из физических соображений значений управляющих параметров показал, что модельная система качественно верно иллюстрирует процессы, сопровождающие формирование второго электронного сгустка в системе. Как видно из рис. 13, на котором представлены характеристики колебаний в схеме, на временной реализации наблюдается два различных по величине максимума, которые в распределенной системе появляются в результате конкуренции между ВК и вторичной электронной структурой, а в конечномерной модели обеспечиваются за счет переключений между верхней и нижней ветвями ВАХ, управляемых фазовыми соотношениями между сигналом в системе и внешним сигналом. Наблюдается также качественное соответствие спектра мощности, в котором наблюдается низкочастотная составляющая, с приведенным на рис. 4,а.

Таким образом, предложенная модель в первом приближении качественно описывает основной механизм возникновения хаотической динамики – нелинейное взаимодействие между двумя электронными структурами, вторая из которых формируется в результате группировки во внешнем поле, вводимом в область ВК из области образования ВК во встречном потоке.

## Заключение

Проведенное исследование модельной системы связанных генераторов на виртуальном катоде с электростатической связью (виркатор на встречных потоках) показало принципиальную возможность использования ее в качестве модуля антенной решетки на сверхмощных источниках СВЧ излучения. Особый интерес к рассматриваемой системе обуславливается отсутствием внешних элементов связи, что делает прибор более простым в плане практической реализации.

Исследуемая система демонстрирует широкий спектр нелинейных динамических явлений, включая режимы синхронизации колебаний в каждом из модулей с высоким качеством спектра. Возможно также установление режимов широкополосной генерации с близким к шумовому спектром. В режиме синхронизации существует возможность управления в достаточно широких пределах разностью фаз между сигналами каждого из модулей (примерно от  $\pi/2$  до  $\pi$ ) за счет варьирования расстройки генераторов, за счет изменения токов потоков. Здесь также следует отметить возможность синхронизации колебаний ВК на субгармонике. Это открывает определенные перспективы по созданию решеток на

виркаторах средней мощности (то есть со сравнительно небольшим током пучка, а следовательно, и генерируемой частотой), синхронизируемых мощным задающим генератором.

Исследование внутренней динамики в электронных потоках показало, что поведение системы определяется динамикой когерентных структур, которые математически выделялись с помощью ортогональной декомпозиции по Карунену – Лозву. Хаотизация колебаний связывается с увеличением энергии вторичных структур по сравнению с основной структурой потока – ВК, и в результате этого появлением внутренней распределенной связи по потоку между ними. Возникновение дополнительных внутренних структур определяется воздействием на поток внешнего сигнала из области ВК встречного потока. Этот эффект на феноменологическом уровне проиллюстрирован на примере простейшей конечномерной модели, описывающей как регулярную динамику ВК, так и усложнение динамики при наличии внешнего сигнала.

Автор благодарен В. Г. Анфиногентову за внимание к этой работе, неоднократное обсуждение и полезные критические замечания.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98–02–16541).*

## Библиографический список

1. Sze H., Harteneck B. and Price D. Phase locking of two strongly coupled vircators // J.Appl.Phys. 1990. Vol. 67, № 5. P. 2278.
2. Woo W., Benford J., Fittingoff D., Harteneck B., Price D., Smith R. and Sze H. Phase locking of high–power microwave oscillators // J.Appl.Phys. 1989. Vol. 65, № 2. P.861.
3. Селемир В.Д., Алехин Б.В., Ватрунин В.Е., Дубинов А.Е., Степанов Н.В., Шамро О.А., Шибалко К.В. Теоретические и экспериментальные исследования СВЧ–приборов с виртуальным катодом // Физика плазмы. 1994. Т. 20, вып. 7,8. С.689.
4. Hendricks K., Richard A. and Noggle R. Experimental results of phase locking two virtual cathode oscillator // J.Appl.Phys. 1990. Vol. 68, № 2. P. 820.
5. Magda I.I., Prokopenko Yu.V. Cooperative high–power radiation of a two beam–two vircator assembly // Proc. on 11–th International Conference on High Power Particle Beams. Prague, Czech Republic, June 10–14, 1996. P–1–59.
6. High Power Microwave Sources / Eds V.L. Granatstein and I. Alexeff. Boston: Artech House, 1987. Ch. 13–14.
7. Артюх И.Г., Сандалов А.И., Сулакшин А.С., Фоменко Г.П., Штейн Ю.Г. Релятивистские устройства сверхбольшой мощности // Обзоры по электронной технике. Сер. 1, вып. 17 (1490), 70с.
8. Григорьев В.П., Жерлицын А.Г., Коваль Т.В., Кузнецов С.И., Мельников Г.В. О возможности изменения частоты излучения внешним сигналом в СВЧ–триоде с виртуальным катодом // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 23. С. 2164.
9. Hramov A.E. Influence of external action on chaotic dynamics of virtual cathode oscillations// Proc. of the 5th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. NDES'97. Moscow, Russia, 26–27 June, 1997. P. 443.
10. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. Неавтономные колебания электронного потока с виртуальным катодом в плоском диодном промежутке // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 6. С. 61.
11. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием. Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 101.
12. Афанасьева В.В., Трубецков Д.И. Динамический хаос в электронных

сверхвысокочастотных приборах //Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Вып. 4 (1615), 32 с.

13. *Trubetskov D.I., Mchedlova E.S., Anfinogentov V.G., Ponomarenko V.I., Ryskin N.M.* Nonlinear waves, chaos and patterns in microwave devices // *Chaos*. 1996. Vol. 5, № 3. P. 368.

14. *Madon A., Klinger T.* A model for the bifurcations in plasma drift-waves // *Physica D*. 1997. Vol. 102. P. 335.

15. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.:Наука, 1992.

16. *Kaneko K.* Formation, Dynamics and Statistics of Patterns /Eds K.Kawasaki et al. // Singapore: World Scientific, 1990. Vol. 1.

17. *Привезенцев А.П., Фоменко Г.П.* Сложная динамика потока заряженных частиц с виртуальным катодом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1994. Т. 2, № 5. С. 56.

18. *Brandt H.E.* The turbuon // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1985. Vol. PS-13, № 6. P. 513.

19. *Афонин А.М., Диденко А.Н., Пауткин А.Ю., Рошаль А.С.* Нелинейная динамика электронного потока с виртуальным катодом в триодных системах // *РЭ*. 1992. Вып. 10. С. 1889.

20. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Механизм возникновения хаотической динамики и взаимодействие когерентных структур в вакуумном СВЧ генераторе на виртуальном катоде // *Матер. науч. конф. «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ»*. Саратов, 4–8 сентября 1997. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. С. 4.

21. *Анфиногентов В.Г.* Взаимодействие когерентных структур и хаотическая динамика в электронном потоке с виртуальным катодом // *Письма в ЖТФ*. 1995. Т. 21, вып. 8. С. 70

22. *Anfinogentov V.G.* Nonlinear dynamics and chaotic behaviour of electron beam with virtual cathode in the Pierce diode // *Proc. of the 3rd International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. NDES'95. University College Dublin, 28–29 July, 1995*. P. 79.

23. *Anfinogentov V.G.* Chaotic dynamics and structure formation in the plasma diode with virtual cathode // *24th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Berchtesgarden, 9–13 June, 1997. Contributed Paper, Part III*. P. 1293.

24. *Храмов А.Е.* Колебания в системе двух связанных генераторов на виртуальном катоде виртодного типа с управляемой связью: вычислительный эксперимент // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1998. Т. 6, № 1. С. 108.

25. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Сложное поведение электронного потока с виртуальным катодом и генерация хаотических сигналов в виртодных системах // *Изв. РАН. Сер. Физическая*. 1997. Т. 61, № 12. С. 2391.

26. *Гадецкий Н.Н., Магда И.И., Найстетер С.И., Прокопенко Ю.В., Чумаков В.И.* Генератор на сверхкритическом токе РЭП с управляемой обратной связью – виртод // *Физика плазмы*. 1993. Т. 19, вып. 4. С. 530.

27. *Anfinogentov V.G.* Chaotic dynamics of electron beams with virtual cathode in the bounded systems // *Proc. on 11th International Conference on High Power Particle Beams. Prague, Czech Republic, June 10–14, 1996*. P. 1–59.

28. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Влияние распределенной обратной связи на хаотические колебания виртуального катода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1998. Т. 6, № 1. С. 93.

29. *Kwan T.J.T., Thode L.E.* // *Phys.Fluids*. 1984. Vol. 27. P. 1570.

30. *Диденко А.Н., Рациков В.И.* // *Физика плазмы*. 1992. Т. 18, № 9, С. 1182.

31. *Бэдсел Ч., Ленгтон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергаториздат, 1989. 452 с.

32. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.

33. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture Notes in Mathematics*. Warwick: Springer-Verlag, 1980. Vol. 898. P. 366.

34. Grassberger P., Procaccia J. On the characterization of strange attractors // Phys.Rev.Lett. 1983. Vol. 50. P. 346.

35. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.:Мир, 1991.

36. Варанабе С. Разложение Карунена – Лозва и факторный анализ. Теория и приложение // Автоматический анализ сложных изображений / Под ред. Э.М. Бравермана. М.:Мир, 1969. С. 254.

37. Lumley J.L. The structure of inhomogeneous turbulent flows // Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation: Proc. of the International Colloquium / Eds A.M. Yaglom and V.I. Tutarsky. Moscow: Nauka, 1967. P. 166.

38. Уилкинсон Д. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

39. Привезенцев А.П., Фоменко Г.П., Филипенко Н.М. Колебания электронного потока в плоском пролетном промежутке // ЖТФ. 1981. Т. 51, № 6. С. 1161.

40. Привезенцев А.П., Фоменко Г.П., Филипенко Н.М. Феноменологический анализ устойчивости стационарных состояний интенсивного электронного потока в пространстве дрейфа // РЭ. 1983. Т. 28, № 5. С. 1011.

41. Matsumoto T., Chua L.O., Tanaka S. Simplest chaotic nonautonomous circuits // Phys.Rev.A. 1984. Vol. 30, № 2. P. 1155.

42. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Путь к хаосу в кусочно–линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1,2. С. 93.

43. Кипчатов А.А., Подин С.В. Исследование поведения неавтономного релаксационного генератора в пространстве управляющих параметров // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4,5. С. 30.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 17.10.97  
после переработки 5.06.98

## COMPLEX DYNAMICS OF COHERENT STRUCTURES IN TWO-STREAM VIRCATOR

A.E. Hramov

System of virtual cathode oscillators with electrostatic coupling – viricator on oncoming streams is investigated with the aid of numerical simulation. The existence of different regimes, including the synchronisation and chaotic generation, is shown. Physical processes in the system are determined by the formation of electron patterns in each beam. The inner structures in the beam are analysed by the orthogonal decomposition by Karhunen – Loeve method. The simplest finite–dimension model–analogy is proposed to illustrate of an interaction between electron structures in the beam, that leads to chaotic dynamics of virtual cathode oscillation.



Храмов Александр Евгеньевич – в 1996 году закончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. В настоящее время работает в НИИ механики и физики и научном секторе Государственного учебно–научного центра «Колледж» СГУ. Область научных интересов – нелинейные явления и процессы структурообразования в распределенных системах электронно–плазменной природы. Имеет несколько публикаций по вышеуказанной тематике.



## БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА В СЛУЧАЕ КОЛЬЦЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА С ЖИДКИМ КРИСТАЛЛОМ: ВЛИЯНИЕ ДИФфуЗИИ

*А.Л. Магазинников, Б.Н. Пойзнер*

На основе компьютерного моделирования изучены явления бифуркаций в оптическом кольцевом интерферометре, содержащем нелинейную (керровскую) среду – жидкий кристалл. Установлено, что при увеличении коэффициента диффузии точки бифуркации на бифуркационной диаграмме смещаются в сторону большего параметра нелинейности. Для наглядного описания явлений гистерезиса и бифуркаций построено распределение интенсивности в поперечном сечении лазерного пучка на выходе системы.

### Введение

Явление бифуркации встречается в нелинейных физических системах разнообразной природы: лазерах, неавтономных системах маятникового типа, нейронных системах и др. [1–3]. В последние два – три года исследования условий появления бифуркаций предпринимались по различным поводам, но главным образом в связи с изучением причин и обстоятельств смены одного динамического режима другим. Так, в работе [1] моделировалось поведение лазера с насыщающимся поглотителем для того, чтобы выяснить механизмы формирования хаотических аттракторов. В частности, установлено, что к хаотическим режимам приводят каскад бифуркаций удвоения периода либо гетероклиническая бифуркация к седло–фокусной стационарной точке.

В работе [2] качественно–численным методом с использованием компьютерного моделирования проведен бифуркационный анализ нелинейной системы маятникового типа. В ходе компьютерного моделирования выделены области с хаотическим поведением различного типа, изучен случай возникновения в системе двух устойчивых периодических движений колебательного типа. В [3] представлен краткий обзор работ по изучению поперечной и поперечно–поляризационной структуры поля излучения в лазерах с резонаторами линейного и кольцевого типа. Указано, в частности, что режимы генерации лазера разделяются на два типа: стационарные и динамические режимы. При увеличении усиления может произойти смена одного режима другим, то есть бифуркация.

Анализ бифуркаций представляет также интерес в контексте изучения процессов в нелинейном кольцевом интерферометре (интерферометре Физо). В данной системе экспериментально обнаружены явления самоорганизации структур в поперечном сечении лазерного пучка: бистабильность, мультистабильность, вращение структур, оптический хаос. Изучение подобных явлений ведется с конца 1980–х С.А. Ахмановым, М.А. Воронцовым [4–6], В.И. Шмальгаузенем и

А.В. Ларичевым с коллегами [7,8] а также зарубежными авторами В. Фирфом, Ф. Арекки и др. [9,10]. Указанными авторами, в частности, затрагиваются следующие аспекты:

- построение и анализ бифуркационных диаграмм;
- выявление динамики структур в нелинейном интерферометре Физо;
- ослабление фазовых искажений за счет фурье-фильтрации в цепи обратной связи;
- составление и изучение «точечных» моделей нелинейного интерферометра Физо.

Установлено, что в нелинейном интерферометре Физо могут наблюдаться многочисленные бифуркации. Они возникают при изменении параметров системы (например, параметра нелинейности), когда возможны скачкообразные изменения интенсивности выходного излучения [4], а также смена динамических режимов [11]. Общепринятым приемом для изучения бифуркационного поведения служит так называемая бифуркационная диаграмма. Она строится на плоскости: стационарное решение уравнения – параметр, вызывающий бифуркацию решения. Насколько можно судить по литературе [4,12], бифуркационная диаграмма остается главным способом описания бифуркационного поведения системы.

С учетом имеющихся в литературе результатов целесообразным видится исследование, осуществляемое в два этапа. Сначала проводится изучение закономерностей бифуркационного поведения нелинейного интерферометра Физо при изменении диффузионного и нелинейного фактора, вызванного нелинейным электрооптическим эффектом, что составляет предмет данной статьи. Затем анализируется устойчивость стационарных решений, найденных на первом этапе. Результаты анализа устойчивости предполагается систематизировать и изложить в следующей статье. По мнению авторов, такая постановка задачи имеет смысл как с точки зрения изучения особенностей совместного влияния на процессы структурообразования рассеивающего и нелинейного факторов [13], так и с точки зрения применения оптической системы в адаптивной оптике [14].

### Физическая и математическая модели

В качестве физической модели выбран кольцевой интерферометр Физо с керровской нелинейностью (рис. 1). Диффузия молекул нелинейной среды и/или дифракция света приводят к возникновению локальной (мелкомасштабной) поперечной взаимосвязи световых полей. Мелкомасштабная связь означает, что изменение траектории луча после обхода через интерферометр много меньше диаметра пучка. В математической модели мелкомасштабная связь учитывается феноменологически введением оператора Лапласа по поперечным координатам [4]. Основное уравнение записано для нелинейной фазовой модуляции  $u(\mathbf{r},t)$ , пропорциональной интенсивности выходного излучения

$$\tau \text{ди}(\mathbf{r},t)/\text{д}t + u(\mathbf{r},t) = D\Delta_{\perp}u(\mathbf{r},t) + K(\mathbf{r})[1 + \gamma \cos(u(\mathbf{r},t) + \varphi_0)], \quad (1)$$

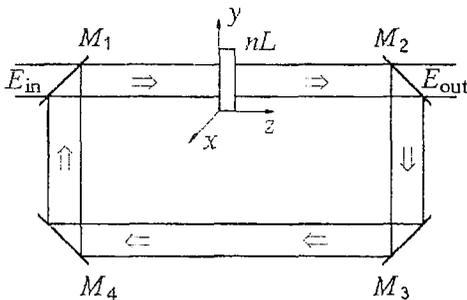


Рис. 1. Схема нелинейного кольцевого интерферометра Физо.  $M_1 \dots M_4$  – зеркала ( $M_1, M_2$  – полупрозрачные зеркала);  $nL$  – слой нелинейного жидкого кристалла

где  $D$  – коэффициент диффузии;  $\tau$  – время релаксации нелинейной части показателя преломления;  $\varphi_0$  – невозмущенный фазовый набег;  $\gamma$  – контрастность интерференционной картины;  $K$  – коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного излучения;  $K(\mathbf{r}) = kl(1-R)n_2I_{in}(\mathbf{r})$ ;  $k$  – волновое число;  $l$  – толщина слоя нелинейной среды;  $R$  – коэффициент отражения по интенсивности зеркал  $M_1$  и  $M_2$ ;  $n_2$  – коэффициент нелинейной рефракции. Координаты  $\mathbf{r} = (x, y)$  нормированы к

эффективному радиусу входного лазерного пучка, коэффициент  $D$  – к квадрату радиуса.

В литературе часто рассматривается случай пространственно однородного светового поля (то есть,  $K(\mathbf{r})=\text{const}$ ). Так, в работе [4] исследовалась система, когда входное излучение имело вид тонкого кольца. А между тем представляют интерес системы с  $K(\mathbf{r})\neq\text{const}$ , когда характер процессов, протекающих в системе, принципиально меняется [9]. Поэтому в данной работе будет использоваться гауссово распределение интенсивности излучения входного пучка, то есть для коэффициента нелинейности  $K$  можно записать выражение

$$K = K_0 \exp[(x^2+y^2)/r_0^2]. \quad (2)$$

Величину стационарной фазы  $u_{\text{st}}(r)$  и распределение интенсивности на выходе интерферометра  $I_{\text{out}}(r)$  определим из уравнений

$$\begin{aligned} u_{\text{st}}(r) &= D[d^2u_{\text{st}}(r)/dr^2 + (1/r)du(r)/dr] + I_{\text{out}}(r)/\alpha, \\ I_{\text{out}}(r) &= \alpha K(r)(1 + \gamma \cos(u_{\text{st}}(r) + \varphi_0)) \end{aligned} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$u(r = r_0) = \text{const}, \quad du(r = 0)/dr = 0, \quad (4)$$

где  $r$  – полярная координата;  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от коэффициента отражения зеркал в контуре обратной связи.

Уравнение (3) с граничными условиями (4) решено нами при различных значениях коэффициента диффузии  $D$ . Это позволило исследовать влияние коэффициента диффузии на строение бифуркационной диаграммы, то есть на зависимость  $u_{\text{st}}(K)$ . Для численного решения (3) применялась равномерная сетка с постоянным шагом по координате. Полученная система конечноразностных уравнений решалась методом прогонки [15].

### Графическое представление явления бифуркации и учет влияния диффузии

Численное моделирование и компьютерная графика позволили наглядно продемонстрировать оптический гистерезис и бифуркации. Для описания явления бифуркации построено распределение интенсивности выходного излучения при увеличении интенсивности входного излучения (рис. 2, а) и при ее уменьшении (рис. 2, б). Как видно из рисунков, при учете диффузионной взаимосвязи световых полей переходы из одного состояния в другое остаются резкими. Для  $D=0.1$  в диапазоне значений параметра  $K_0$  от 7.59 до 9.01 наблюдается гистерезис строения оптической структуры. Это означает, что в пределах указанных значений  $K_0$  возможны две качественно различные интерференционные картины. При изменении величины  $K_0$  в сторону уменьшения (рис. 2, б) размер ярко освещенной области интерференционной картины уменьшается, однако при этом растет интенсивность излучения в центральной области лазерного пучка. При критическом значении  $K_0=7.59$ , соответствующем точке бифуркации, яркое пятно исчезает. Напомним, что величина  $K_0$  пропорциональна интенсивности входного излучения.

Чтобы выяснить влияние диффузии молекул нелинейной среды на строение бифуркационной диаграммы, необходимо решить дифференциальное уравнение (3). Для симметричного пучка, распространяющегося вдоль оси  $z$ , зависимости  $u_{\text{st}}(K_0)$  при различных значениях коэффициентов диффузии показаны на рис. 3. Здесь величина  $K_0$  соответствует максимальному значению параметра нелинейности  $K$ . По сравнению со случаем отсутствия поперечных взаимодействий, бифуркация

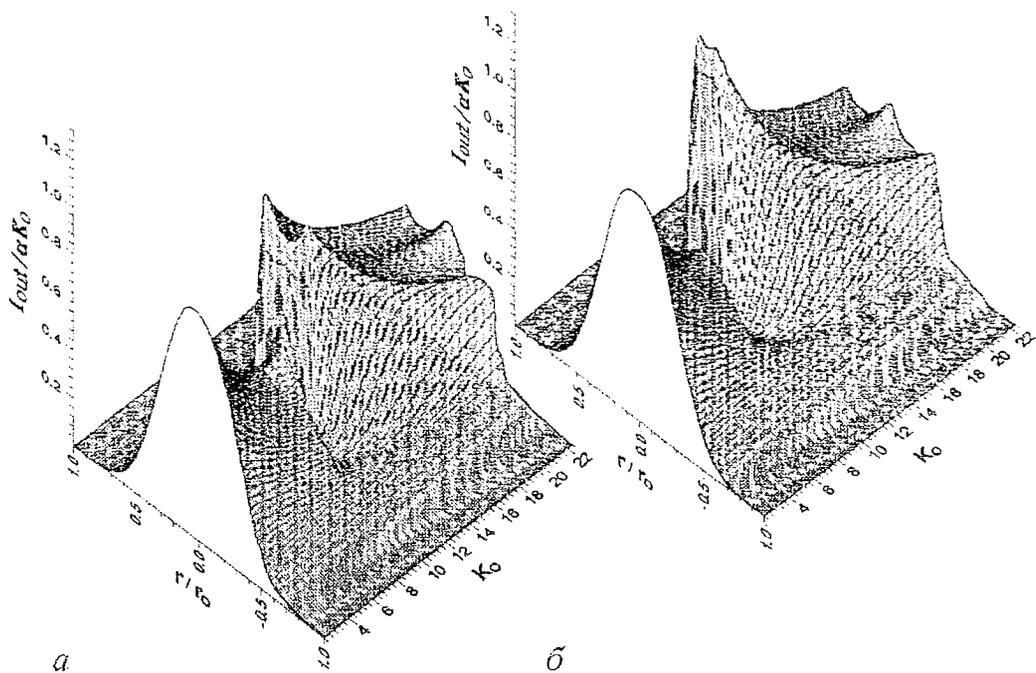


Рис. 2. Изменение распределения интенсивности излучения в поперечном сечении лазерного пучка на выходе интерферометра Физо при увеличении (а) и при уменьшении (б) параметра  $K_0$ ; величина  $K_0$  пропорциональна интенсивности входного излучения,  $I_{out}/\alpha K_0$  – нормированная интенсивность,  $r/r_0$  – нормированная координата;  $\gamma=0.5$ ,  $\varphi_0=0$

происходит при большем значении параметра нелинейности. Для осуществления перехода из одного устойчивого состояния в другое достаточно изменить условия освещения (увеличить интенсивность входного излучения), либо использовать импульсную подсветку слоя нелинейной среды.

При некоторых значениях параметра  $K_0$  (на рис. 3 эти значения помечены знаками 1, 2, 3,  $2L$  и  $3L$ ) наблюдается переход системы с одного стационарного состояния на другое, то есть бифуркация. Из рис. 3 видно, что при увеличении коэффициента диффузии  $D$  точки бифуркации смещаются в сторону большего значения параметра нелинейности  $K_0$ . Для анализа совместного влияния диффузии и нелинейности на бифуркационное поведение целесообразно строить так называемый бифуркационный портрет:

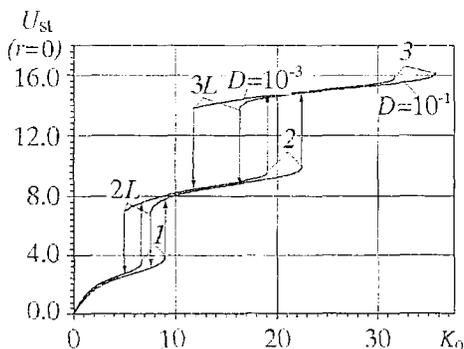


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы стационарных решений при разных значениях коэффициента диффузии  $D$ : зависимость стационарного фазового набег  $u_{st}$  от максимального значения  $K_0$ , коэффициента нелинейности  $K$ ;  $\gamma=0.5$ ,  $\varphi_0=0$

кривая в пространстве параметров динамической системы, каждая точка которой соответствует наступлению бифуркации [16]. В данном случае бифуркационный портрет строится в плоскости  $(D, K_0)$  и отражает относительное влияние  $K_0$  и  $D$  на бифуркационное поведение.

Для сравнения на рис. 4 приведены кривые для точек бифуркации, лежащих на различных ветвях бифуркационной диаграммы. Например, кривая 1 на рис. 4, а соответствует точке бифуркации 1 (см. рис. 3). В нелинейном интерферометре Физо скачкообразные изменения интенсивности излучения возможны не только при увеличении, но и при

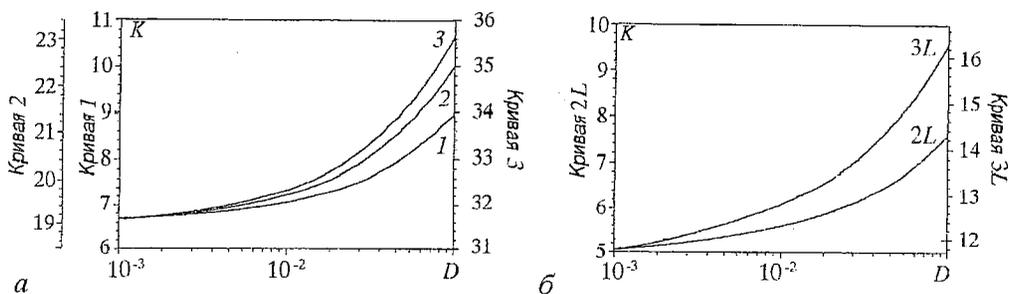


Рис. 4. Бифуркационные портреты для бифуркаций, наступающих при увеличении (а) и при уменьшении (б) параметра нелинейности: зависимость бифуркационных значений параметра  $K_0$ , обозначенных на рис. 3 как 1, 2, 3, 2L, 3L, от коэффициента диффузии  $D$

уменьшении параметра нелинейности. Соответствующие бифуркационные значения обозначены на рис. 3 как 2L и 3L. Для данных точек также построен бифуркационный портрет (рис. 4, б). Зависимости на рис. 4 с высокой степенью точности аппроксимируются полиномом четвертой степени

$$K_0 = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + a_4 D^4. \quad (5)$$

Константы  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  в (5) имеют следующие значения для кривых:

1	–	$a_0=17.17,$	$a_1=13.96,$	$a_2=7.51,$	$a_3=1.90,$	$a_4=0.19;$
2	–	$a_0=34.34,$	$a_1=20.24,$	$a_2=10.86,$	$a_3=2.74,$	$a_4=0.27;$
3	–	$a_0=50.01,$	$a_1=24.68,$	$a_2=13.40,$	$a_3=3.42,$	$a_4=0.34;$
2L	–	$a_0=15.23,$	$a_1=12.81,$	$a_2=6.67,$	$a_3=1.65,$	$a_4=0.16;$
3L	–	$a_0=30.91,$	$a_1=25.53,$	$a_2=14.28,$	$a_3=3.80,$	$a_4=0.39.$

Таким образом, с увеличением номера (порядка) ветви влияние диффузии на положение точек бифуркации увеличивается, то есть крутизна кривой на бифуркационном портрете возрастает. Диапазон изменения коэффициента диффузии в пределах  $10^{-3} \div 10^{-1}$  является наиболее часто используемым как в натуральных, так и численных экспериментах [4–6].

С помощью уравнения (3) построено распределение интенсивности для различных значений коэффициентов диффузии. Для большей наглядности графики распределения интенсивности выходного излучения выполнены в трехмерном варианте. Характер поведения интенсивности излучения на выходе интерферометра Физо в зависимости от значения коэффициента диффузии показан на рис. 5. Распределение построено для второй ветви бифуркационной диаграммы, изображенной на рис. 3. При этом значение амплитуды входного излучения выбиралось близким к точке бифуркации. Распределение интенсивности показано также на плоскости при фиксированных значениях  $D$  (рис. 6). Из построенных зависимостей (см. рис. 5, б) видно появление максимумов интенсивности излучения при увели-

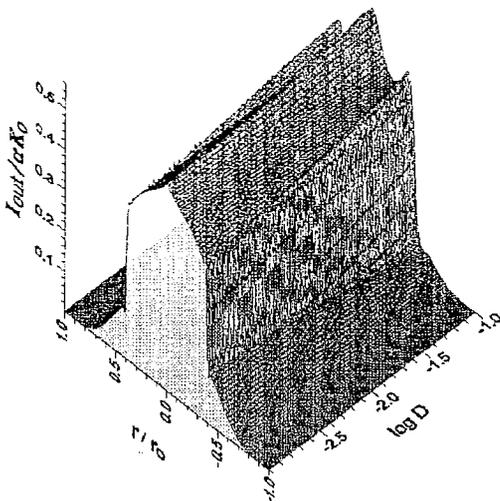


Рис. 5. Распределение интенсивности в поперечном сечении лазерного пучка на выходе интерферометра Физо в зависимости от значения логарифма коэффициента диффузии  $D$ ;  $\gamma=0.5, \varphi_0=0$

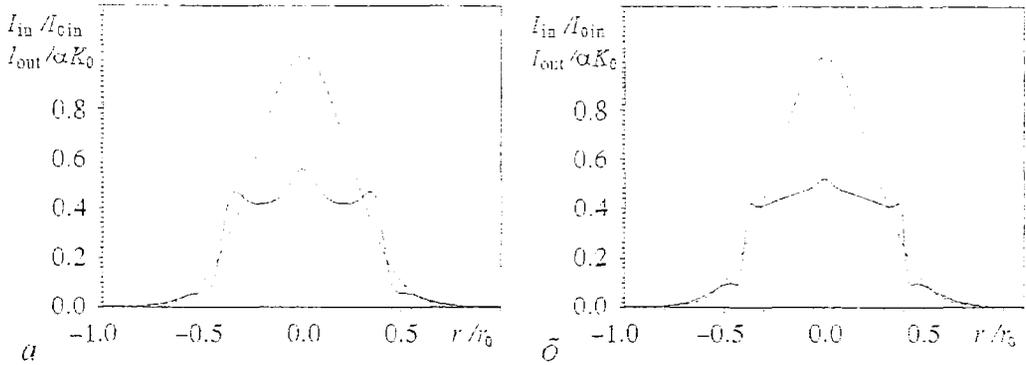


Рис. 6. Распределения интенсивности на выходе (сплошная кривая) и на входе (штриховая кривая) интерферометра Физо для различных значений коэффициента диффузии  $D$ :  $a - 0.1$ ,  $b - 0.01$ ;  $\gamma=0.5$ ,  $\varphi_0=0$

чении коэффициента диффузии  $D$  молекул нелинейной среды. Кроме того, учет диффузии молекул жидкого кристалла приводит к падению контрастности интерференционной картины, что согласуется с результатами натурального эксперимента (рис. 6.23,  $a$ ,  $b$  в [4]). Этот факт также коррелирует с утверждением Е.Н.Князевой и С.П.Курдюмова о влиянии рассеивающего фактора (в частности, диффузионного) на структурообразование, когда «распад структуры сменяется объединением, максимальное развитие неоднородностей – их замыванием, сглаживанием» [13].

### Заключение

На основании проведенного математического моделирования и анализа бифуркационных диаграмм можно заключить.

1. В результате скачка стационарного решения, наступающего при бифуркационном значении произведения интенсивности входного излучения  $I_{in}$  на параметр нелинейности жидкого кристалла  $K$  основная энергия излучения локализуется в центральной области поперечного сечения лазерного пучка.

2. При увеличении коэффициента диффузии  $D$  жидкого кристалла точки бифуркации на бифуркационной диаграмме смещаются в сторону большего значения параметра нелинейности  $K_0$ .

3. Учет совместного влияния нелинейности  $K_0$  и диффузии  $D$  молекул жидкого кристалла на возникновение бифуркации обеспечивается построением кривой на плоскости  $(D, K_0)$ , каждая точка которой соответствует наступлению бифуркации.

4. Темп изменения бифуркационного значения параметра нелинейности  $K_0$  с ростом диффузии  $D$  тем больше, чем выше порядок ветви бифуркационной диаграммы.

Авторы выражают благодарность А.М.Тимохину за ценные советы математического характера.

### Библиографический список

1. Татаркова С.А., Тучин В.В. Механизмы бифуркаций, структура и свойства хаотических аттракторов в модели лазера с насыщающимся поглотителем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, № 6. С. 24.
2. Кивелева К.В., Фрайман Л.А. Бифуркационный анализ нелинейной

динамики неавтономной системы маятникового типа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 4, 5. С. 13.

3. Баженов М.В., Рабинович М.И., Рубчинский Л.Л. Простая модель нейрона, обладающего сложной осцилляторной активностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 1. С. 33.

4. Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 263.

5. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu., Larichev A.V., Zheleznykh N.I. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatio-temporal structures // Opt. Soc. Am. 1992. Vol. 9, № 1. P. 78.

6. Воронцов М.А. Нелинейная волновая пространственная динамика световых полей // Изв. РАН. Сер. Физическая. 1992. Т. 56, № 4. С. 7.

7. Ларичев А.В., Николаев И.П., Шмальгаузен В.И. Жесткий режим возбуждения в нелинейной оптической системе с распределенной обратной связью // Квантовая электроника. 1996. Т. 23, № 3. С. 255.

8. Larichev A.V., Nikolaev I.P., Chulichkov A.L. Spatio-temporal period doubling in a nonlinear interferometer with distributed optical feedback // Opt. Lett. 1996. Vol. 21, № 15. P. 1180.

9. Papoff F., D'Alessandro G., Oppo G.-L., Firth W.J. Local and global effects of boundaries on optical-pattern formation in Kerr media // Phys. Rev. 1994. Vol. 48, № 1. P. 634.

10. Arecci F.T. Space-time complexity in nonlinear optics // Physica D. 1991. Vol. 51. P. 450.

11. Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Поизнер Б.Н. Тройка керровских сред в кольцевом интерферометре: роль неидентичности // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, № 1. С. 20.

12. Магазинников А.Л. Бифуркационная диаграмма стационарных состояний нелинейного оптического интерферометра с двумерной обратной связью / ТГУ. Томск, 1997. 9 с. Деп. в ВИНТИ 1.08.97. № 2575-В97.

13. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М.: Наука, 1994. 239 с.

14. Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И. Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1989. С. 216.

15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. С. 34.

16. Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Поизнер Б.Н. Механизм формирования структур в нелинейном интерферометре Физо: роль двумерности и понятие бифуркационного портрета // Изв. вузов. Физика. 1997. Т.4, № 3. С. 10.

Томский государственный  
университет

Поступила в редакцию 6.01.98  
после переработки 2.04.98

## BIFURCATION DIAGRAM IN CASE OF RING INTERFEROMETER CONTAINING LIQUID CRYSTAL: EFFECT OF DIFFUSION

A.L. Magazinnikov, B.N. Poizner

The bifurcation phenomena in optical ring interferometer containing nonlinear (Kerr) medium – liquid crystal – are investigated by means of a computer simulation. It has been found out that bifurcation points on a bifurcation diagram are displaced to area of greater parameter of medium nonlinearity when the diffusion factor increases. The distribution of intensity in cross section of output laser beam of system is constructed for the more evident description of hysteresis and bifurcations phenomena.



*Магазинников Антон Леонидович* – родился в 1974 году в Томске. Окончил с отличием радиофизический факультет ТГУ (1997). В настоящее время является аспирантом кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Области научных интересов: оптическая синергетика, моделирование процессов оптического формообразования. Автор 3 работ по данной тематике.



*Пойзнер Борис Николаевич* – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.



Вышел в свет журнал

ISSN: 1026-0226 DDNSFA

**DISCRETE DYNAMICS IN NATURE AND SOCIETY**

**An International Multidisciplinary Research and Review Journal**

**Editors-in-Chief**

Vladimir Gontar and Michael Sonis

**Contents**

Vol. 1, N 4 (1998) 243–320

Predictability Problems of Global Change as Seen through Natural Systems Complexity Description: 1. General Statements. <i>V.V. Kozoderov, V.A. Sadovnichii, S.A. Ushakov and O.A. Timoshin</i> . . .	243
Predictability Problems of Global Change as Seen through Natural Systems Complexity Description: 2. Approach. <i>V.V. Kozoderov, V.A. Sadovnichii, S.A. Ushakov and O.A. Timoshin</i> . . . . .	255
Necessary and Sufficient Conditions for Oscillations of Linear Delay Partial Difference Equations. <i>B.G. Zhang and S.T. Liu</i> . . . . .	265
Discrete Dynamics in Transitional Economies. <i>J.B. Rosser, Jr. and M.V. Rosser</i> . . . . .	269
Nonlinear Feedback Control of Spatiotemporal Chaos in Coupled Map Lattices. <i>J.-Q. Fang and M.K. Ali</i> . . . . .	283
Absorbers: Definitions, Properties and Applications. <i>G. Belitskii</i> . . . . .	307
Book Review . . . . .	315





## ДИНАМИКА ВНЕОСЕВОГО ГАУССОВА ПУЧКА С АСТИГМАТИЗМОМ И КРУЧЕНИЕМ В ПРОЗРАЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ СРЕДЕ

*Л.А. Мельников, В.Л. Дербов, А.И. Быченков*

С помощью модификации обобщенного метода моментов построена конечномерная динамическая модель, описывающая распространение разъюстированного астигматического гауссова пучка с кручением в аксиально симметричной нелинейной среде. Обнаружен ряд нетривиальных особенностей динамики пучка в параболическом волноводе с керровской нелинейностью (синхронизация переменных, рождение циклов, изменение симметрии тора и др.).

### Введение

Моделирование внеосевых пучков в поперечно–неоднородных нелинейных средах является необходимым элементом корректного описания лазеров и оптических волноводов при наличии разъюстировки [1–6]. Подобная задача разрешима аналитически лишь в упрощенной постановке, например такой, как в [7], где использовано безабберационное приближение, специальные граничные условия и частный вид восприимчивости.

Используя идеи обобщенного модифицированного метода моментов [8–10], удастся описать волновой пучок в аксиально–симметричной среде с произвольно зависящей от поля восприимчивостью при наличии астигматизма, отклонения от оси и кручения, системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Динамическими переменными являются усредненные по сечению параметры пучка (моменты), зависящие от продольной координаты. Осуществляемое таким образом сведение распределенной системы к конечномерной динамической системе позволяет применять к ней стандартные методы анализа. Для нелинейной динамики актуальной задачей является поиск новых физически содержательных моделей с нетривиальным поведением. Целью настоящей работы является построение такой модели в оптике обобщенных гауссовых пучков и анализ ее динамических свойств.

В разделе 1 выведены обыкновенные дифференциальные уравнения для параметров пучка. Раздел 2 посвящен анализу динамики обобщенного гауссова пучка со сдвигом и кручением в среде с квадратичной неоднородностью и керровской нелинейностью при условии, что мощность ниже порога самофокусировки. В разделе 3 проводится обсуждение результатов.

## 1. Построение динамической системы

Распространение пучка будем описывать с помощью скалярного параболического уравнения для комплексной амплитуды электрического поля  $\psi$  [11] в безразмерных переменных

$$\hat{H}\psi = [4i\partial/\partial z + \nabla_{\perp}^2 + \chi]\psi = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , поперечные координаты  $x, y$  нормированы на характерный радиус пучка  $a$ ; продольная координата  $z$  – на соответствующую дифракционную длину  $L = ka^2/2$ ,  $k = n_0\omega/c$  – волновое число,  $n_0$  – показатель преломления линейной однородной среды;  $\chi = \chi' + i\chi''$  – часть восприимчивости среды, зависящая от координат за счет неоднородности среды и от поля за счет нелинейности. Приближенное решение уравнения (1) ищем в виде обобщенной гауссовской моды

$$\psi_0 = A \exp[-(P_{1,2}^{(2)}(x, y) + iP_2^{(2)}(x, y))], \quad (2)$$

где  $P_{1,2}^{(2)}$  – положительно определенные квадратичные формы общего вида относительно лабораторных координат  $x$  и  $y$  с коэффициентами, зависящими от продольной координаты  $z$ .

Преобразованием координат

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + x_0, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi + y_0, \quad (3)$$

$$x'' = x \cos \theta + y \sin \theta + x_1, \quad y'' = -x \sin \theta + y \cos \theta + y_1 \quad (4)$$

каждая из форм приводится к диагональному виду

$$\psi_0 = A \exp[-(\eta x'^2 + \beta y'^2 + i\xi x''^2 + i\epsilon y''^2)]. \quad (5)$$

Из (5) видно, что линии равной интенсивности и равной фазы в плоскости  $xOy$  лабораторной системы координат представляют собой эллипсы с центрами в точках  $(x_l = -x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi, y_l = -x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)$  и  $(x_p = -x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta, y_p = -x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta)$  с главными осями, повернутыми на углы  $\varphi$  и  $\theta$ , соответственно. Динамические переменные  $\eta$  и  $\beta$  суть обратные квадраты полуосей эллипса равной интенсивности на уровне  $e^{-1}$  от максимума, а  $\xi$  и  $\epsilon$  определяют кривизну волнового фронта в сечениях плоскостями  $(x''O''z)$  и  $(y''O''z)$ , где  $O''x''$  и  $O''y''$  – главные оси эллипса равной фазы. Кроме перечисленных переменных, пучок описывается интенсивностью в максимуме  $I = |\psi_0(x'=0, y'=0)|^2 = |A|^2$  и набегом фазы на оси.

Для определения зависимости перечисленных динамических переменных от  $z$ , воспользуемся обобщенным модифицированным методом моментов [8–10]. Наилучшее приближенное решение (5) уравнения (1) ищется из условия ортогональности невязки  $H\psi_0$  некоторому ортонормированному набору заданных функций (мод). Специфика подхода [8–10] заключается в использовании гибких мод, параметры которых сами являются искомыми функциями  $z$ . Это позволяет резко уменьшить необходимое число базисных функций. В нашем случае последние удобно выбрать в виде [1, 2]  $|m, n\rangle \equiv |m\rangle_x |n\rangle_y$ , где

$$|0\rangle_x = N_x \exp[-\eta x'^2 - i\xi x''^2], \quad |1\rangle_x = x'(4\eta)^{1/2} |0\rangle_x, \quad |2\rangle_x = [(1-4\eta x'^2)/2] |0\rangle_x, \quad (6)$$

$$|0\rangle_y = N_y \exp[-\beta y'^2 - i\epsilon y''^2], \quad |1\rangle_y = y'(4\beta)^{1/2} |0\rangle_y, \quad |2\rangle_y = [(1-4\beta y'^2)/2] |0\rangle_y. \quad (7)$$

Скалярное произведение определим как

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \phi dx dy. \quad (8)$$

При таком определении разумно вести дальнейшие расчеты в системе  $x'O'y'$ , диагонализующей вещественную часть показателя гауссовой экспоненты, что приводит к факторизации интегралов по поперечным координатам.

Каждое из условий ортогональности  $\langle mn|\hat{H}\psi_0\rangle=0$ , где  $mn=00,01,10,11,20,02$ , дает уравнение, включающее динамические переменные пучка, их производные по продольной координате и интегралы по поперечным координатам, легко вычисляемые явно. Вместо переменных сдвига  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  удобно ввести

$$x_l = -x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi, \quad y_l = -x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi,$$

$$\alpha = \xi((x_p - x_l)\cos\theta + (y_p - y_l)\sin\theta), \quad \gamma = \varepsilon((x_p - x_l)\sin\theta - (y_p - y_l)\cos\theta),$$

имеющие ясный физический смысл:  $x_l, y_l$  показывают положение центра пятна в лабораторной системе координат, а  $\alpha, \gamma$  – средний наклон пучка. Обозначая через  $\delta = \varphi - \theta$  угол поворота пятна относительно фазового фронта, окончательно получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для динамических переменных.

$$dI/dz = I[\xi + \varepsilon - \langle 20|\chi''|00\rangle/(2 \cdot 2^{1/2}) - \langle 02|\chi''|00\rangle/(2 \cdot 2^{1/2}) - \langle 00|\chi''|00\rangle/2], \quad (9)$$

$$d\eta/dz = \eta[2(\xi \cos^2\delta + \varepsilon \sin^2\delta) - \langle 20|\chi''|00\rangle/2^{1/2}], \quad (10)$$

$$d\beta/dz = \beta[2(\xi \sin^2\delta + \varepsilon \cos^2\delta) - \langle 02|\chi''|00\rangle/2^{1/2}], \quad (11)$$

$$d\xi/dz = \xi^2 - \eta^2 \cos^2\delta - \beta^2 \sin^2\delta + [\eta \langle 20|\chi''|00\rangle \cos^2\delta + \beta \langle 02|\chi''|00\rangle \sin^2\delta]/2^{1/2} + (\eta\beta)^{1/2}/2 \langle 11|\chi''|00\rangle \sin 2\delta, \quad (12)$$

$$d\varepsilon/dz = \varepsilon^2 - \eta^2 \sin^2\delta - \beta^2 \cos^2\delta + [\eta \langle 20|\chi''|00\rangle \sin^2\delta + \beta \langle 02|\chi''|00\rangle \cos^2\delta]/2^{1/2} - (\eta\beta)^{1/2}/2 \langle 11|\chi''|00\rangle \sin 2\delta, \quad (13)$$

$$d\varphi/dz = (\sin 2\delta)(\eta + \beta)(\varepsilon - \xi)/[2(\eta - \beta)] + (\eta\beta)^{1/2} \langle 11|\chi''|00\rangle/[2(\eta - \beta)], \quad (14)$$

$$d\theta/dz = (\sin 2\delta)(\beta^2 - \eta^2)/[2(\xi - \varepsilon)] - (\eta\beta)^{1/2} \langle \cos 2\delta \rangle \langle 11|\chi''|00\rangle/[2(\xi - \varepsilon)] - (\sin 2\delta)[\beta \langle 02|\chi''|00\rangle - \eta \langle 20|\chi''|00\rangle]/[2 \cdot 2^{1/2}(\xi - \varepsilon)], \quad (15)$$

$$dx_l/dz = \alpha \cos\theta + \gamma \sin\theta + \sin\varphi \langle 01|\chi''|00\rangle/(4\beta^{1/2}) - \cos\varphi \langle 10|\chi''|00\rangle/(4\eta^{1/2}), \quad (16)$$

$$dy_l/dz = \alpha \sin\theta - \gamma \cos\theta - \cos\varphi \langle 01|\chi''|00\rangle/(4\beta^{1/2}) - \sin\varphi \langle 10|\chi''|00\rangle/(4\eta^{1/2}), \quad (17)$$

$$d\alpha/dz = -\gamma d\theta/dz + \eta^{1/2} \cos\delta \langle 10|\chi''|00\rangle/4 - \beta^{1/2} \sin\delta \langle 01|\chi''|00\rangle/4 - \xi \sin\delta \langle 01|\chi''|00\rangle/(4\beta^{1/2}) + \xi \cos\delta \langle 10|\chi''|00\rangle/(4\eta^{1/2}), \quad (18)$$

$$d\gamma/dz = \alpha d\theta/dz - \eta^{1/2} \sin\delta \langle 10|\chi''|00\rangle/4 - \beta^{1/2} \cos\delta \langle 01|\chi''|00\rangle/4 - \varepsilon \cos\delta \langle 01|\chi''|00\rangle/(4\beta^{1/2}) - \varepsilon \sin\delta \langle 10|\chi''|00\rangle/(4\eta^{1/2}). \quad (19)$$

Для ряда практически интересных случаев, один из которых будет рассмотрен ниже, интегралы от восприимчивости по поперечным координатам берутся аналитически, что делает численное решение полученной системы уравнений особенно простым. В данной работе, однако, хотелось бы подчеркнуть не вычислительные достоинства предложенной схемы, а возможность динамического анализа с использованием как аналитических, так и численных методов.

## 2. Динамика пучка

Рассмотрим аксиально-симметричную волноводную среду с параболическим поперечным профилем линейного показателя преломления и нелинейной восприимчивостью керровского типа

$$\chi' = -\chi_0 r^2 / R_0^2 + \chi_{nl} |\psi|^2,$$

где  $\chi_0$  и  $R_0$  характеризуют величину и радиус неоднородности линейного показателя преломления, а  $\chi_{nl}$  – нелинейную восприимчивость среды,  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Интегралы по поперечным координатам от восприимчивости в этом случае берутся аналитически

$$\langle 01 | \chi' | 00 \rangle = \chi_0 (x_i \sin \phi - y_i \cos \phi) / (R_0^2 \beta^{1/2}), \quad \langle 10 | \chi' | 00 \rangle = -\chi_0 (x_i \cos \phi + y_i \sin \phi) / (R_0^2 \eta^{1/2}),$$

$$\langle 11 | \chi' | 00 \rangle = 0, \quad \langle 02 | \chi' | 00 \rangle = [\chi_0 / R_0^2] / (2 \cdot 2^{1/2} \beta) + I \chi_{nl} / (4 \cdot 2^{1/2}),$$

$$\langle 20 | \chi' | 00 \rangle = [\chi_0 / R_0^2] / (2 \cdot 2^{1/2} \eta) + I \chi_{nl} / (4 \cdot 2^{1/2}).$$

Как видно из уравнений (9)–(19), даже в оптически линейной среде динамическая система остается нелинейной. Поэтому для формального определения класса, к которому относится система (консервативная/ диссипативная), получим выражение для дивергенции вектора фазовой скорости  $\mathbf{F}'$  (его координаты суть правые части уравнений (9)–(19))

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}') = \operatorname{Sp}(J) = 5\varepsilon + 5\xi + (\cos 2\delta) \langle (\eta + \beta)(\varepsilon - \xi) / (\eta - \beta) - (\beta^2 - \eta^2) / (\xi - \varepsilon) + (\beta - \eta) / [8(\varepsilon - \xi)] \rangle I \chi_{nl},$$

где  $J$  – матрица Якоби.

На рис. 1 представлен результат расчета расстояний по  $z$  между соседними нулями (с номерами  $i$  и  $i-1$ ) интеграла  $\int_0^z \operatorname{div}(\mathbf{F}') dz$ . Полученная зависимость оказывается сложной, но периодической, поэтому усредненное по продольной координате  $z$  значение дивергенции равно нулю, и система консервативна.

Заметим, что рассматриваемая динамическая система, в общем случае 11-мерная, для восприимчивости предложенного выше вида редуцируется в 7-мерную. Это возможно из-за отщепления группы уравнений для переменных пространственной локализации пучка  $x_i, y_i, \alpha, \gamma$ . При этом уравнения (16), (17) легко разрешимы аналитически.

Начальное условие  $\delta=0$ , в частности, приводит к еще большему упрощению системы (она становится 5-мерной) и, кроме того, такая редукция проявляется как специфическая особенность динамики пучка: решения для  $\phi$  и  $\theta$  есть константы, что отвечает распространению пучка с неизменной ориентацией пятна и фазового

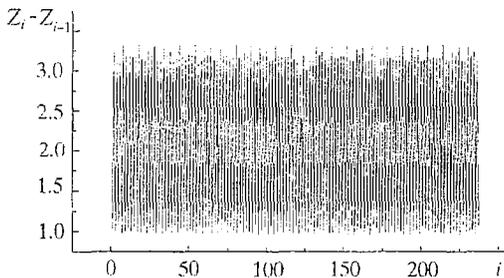


Рис. 1. Зависимость расстояний по  $z$  между соседними нулями с порядковыми номерами  $i$  и  $i-1$  интеграла  $\int_0^z \operatorname{div}(\mathbf{F}') dz$

фронта относительно лабораторной системы координат. Более того, уравнения для  $\alpha, \gamma$  в этом случае также имеют гармонические решения. Периоды получаемых решений, как и для переменных  $x_i, y_i$  в общем случае, совпадают и равны  $T = 4\pi R_0 / \chi_0^{1/2}$ .

**2.1. Стационарное решение.** Как легко видеть из полученной системы уравнений, условия стационарного распространения пучка имеют вид  $\delta=0, \eta=\beta = I \chi_{nl} / 16 + [I^2 \chi_{nl}^2 / 16^2 + \chi_0 / (4R_0^2)]^{1/2}, \varepsilon=\xi=0$ .

Относительно малая размерность редуцированной таким образом системы позволяет исследовать ее устойчивость аналитически.

Собственные значения матрицы Якоби на стационарном решении (показатели Ляпунова являются действительными частями этих величин) имеют вид

$$\lambda_1=0,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i\chi_0^{1/2}/R_0,$$

$$\lambda_{4,5} = \pm i(I\chi_{nl}\eta/4 + \chi_0/R_0^2)^{1/2}.$$

Обращение в нуль показателей Ляпунова свидетельствует о бифуркационной ситуации. Действительно, в каждой точке фазового пространства, соответствующей стационарному решению, матрица Якоби имеет чисто мнимые собственные значения, что отвечает бифуркации Андронова – Хопфа рождения автоколебательного режима для фазовых переменных. Учитывая устойчивый характер возникающих колебаний (что будет доказано ниже), собственные значения для «мягких» бифуркаций этого типа имеют, как известно, следующую структуру:  $\lambda = \pm i\omega$ , где  $\omega$  – частота порожденных колебаний.

Следует отметить особенность системы, в которой отражается ее консервативный характер. Если начальное значение  $\eta$  больше «стационарного», то оно будет верхней границей множества значений этой переменной, меньше – нижней. Это наблюдение справедливо как для линейной, так и для нелинейной среды.

**2.2. Периодическое и квазипериодическое решения.** Без явного вычисления матрицы монодромии  $Y$  мультипликаторы периодического решения при  $\chi_{nl}=0$  можно найти, сопоставив периоды колебаний фазовых переменных исходной системы (9)–(19) и ее линейризованного аналога, – они оказываются равными. Далее используя равенство, связывающее решение линейризованной системы  $y(z)$  через период исходной  $y(z+T)=Y(T)y(z)$ , легко видеть, что матрица  $Y(T)$  – единичная, мультипликаторы полученного периодического решения равны 1 и режим орбитально устойчив. Таким образом, система порождает устойчивые колебания с двумя характерными периодами  $T_1=2\pi R_0/\chi_0^{1/2}$  и  $T_2=2T_1$ .

Важно отметить, что при  $\chi_{nl}\neq 0$  возникает явная зависимость  $\lambda_{4,5}$  от фазовых переменных в точке бифуркации, свидетельствующая о переходе к квазипериодическому режиму. Физически это связано с наличием нелинейной связи (взаимной модуляции) фазовых переменных и характеризуется появлением некратных частот. В общем случае присутствует еще один фактор, объясняющий причины квазипериодичности нелинейного режима, – ангармонический фазовый сдвиг, возникающий при наличии начального кручения (поворот за квазипериод  $\delta$  и  $\phi$  не кратен  $2\pi$ ).

Особенности нелинейной динамики пучка наиболее наглядно могут быть продемонстрированы с помощью анализа соответствующих сечений фазовых траекторий системы и отображений Пуанкаре. Начнем с демонстрации характерных эффектов, возникающих при распространении пучка без кручения ( $\delta=0$ ).

Рассмотрим пучок, начальные значения фазовых переменных для которого равны

$$I=50, \eta=0.7, \beta=0.5, \varepsilon=-0.4, \xi=-0.1, x_l=0.02, y_l=0.01, \alpha=0.01, \gamma=-0.01,$$

распространяющийся в волноводной среде с параметрами  $\chi_0=5$ ,  $R_0=1.5$  при различных  $\chi_{nl}$ .

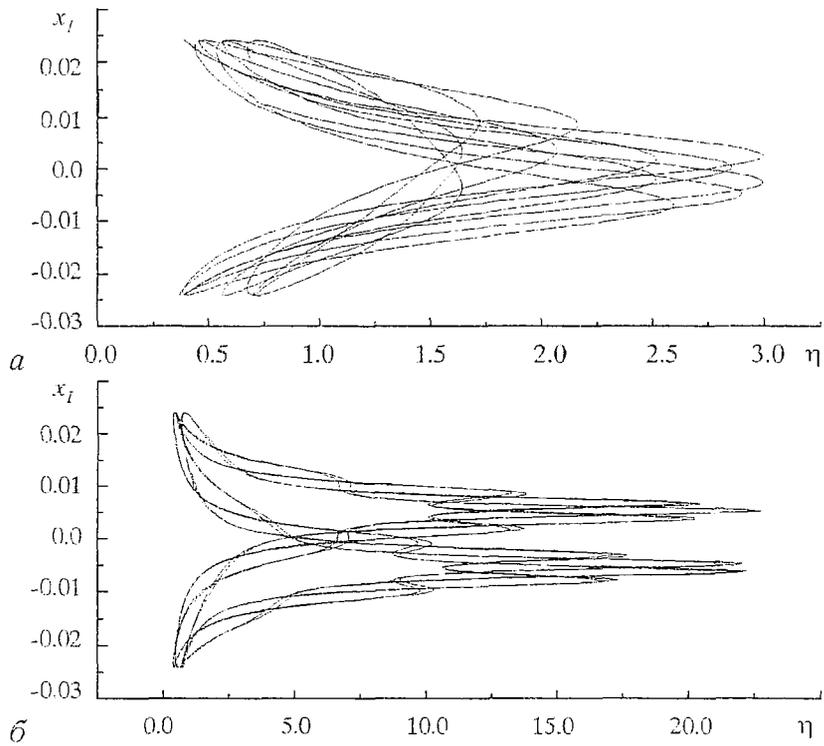


Рис. 2. Синхронизация и регуляризация относительного фазового сдвига  $(\eta, x_I)$  с ростом  $\chi_{nj}$ ;  $a - 0.05$ ;  $\delta - 0.095$

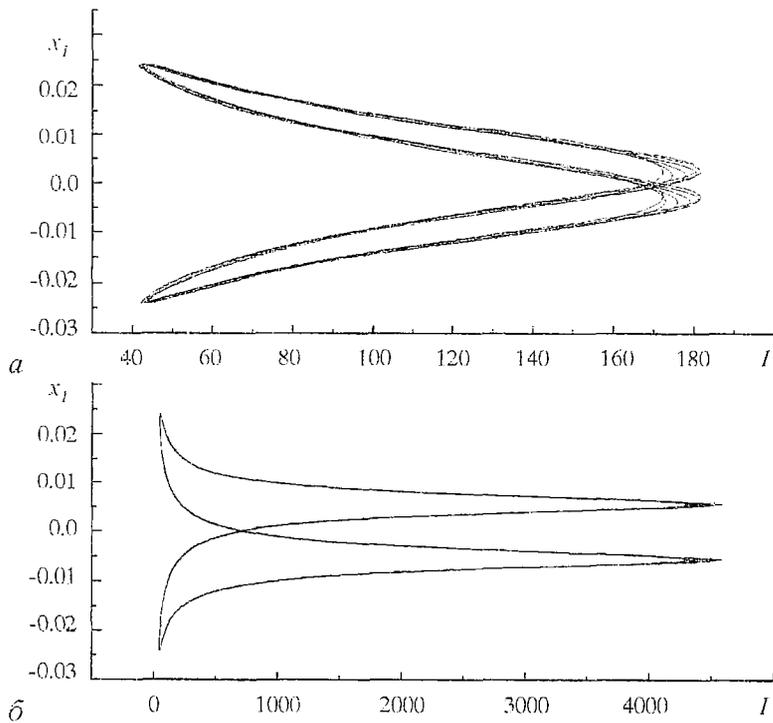


Рис. 3. Синхронизация динамических переменных  $(I, x_I)$  при различных  $\chi_{nj}$ ;  $a - 0.05$ ;  $\delta - 0.1$

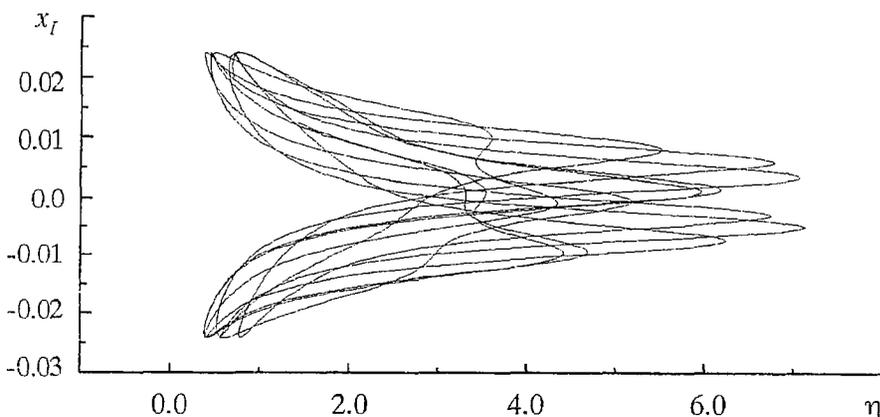


Рис. 4. Неустойчивость фазового сдвига  $(\eta, x_l)$  в точке  $\chi_{nl}=0.08$

Наиболее типично явление взаимной синхронизации переменных, наблюдаемое в системе при различных значениях показателя нелинейности  $\chi_{nl} \in (0.08, 0.095)$ . С помощью фазовых портретов (рис. 2, 3) легко фиксируется синхронизация переменных пространственной локализации с «собственными» характеристиками пучка (размер пятна, кривизна волнового фронта, интенсивность и т.д.).

Несколько неожиданным является эффект неустойчивости фазового сдвига, возникающий вблизи точки синхронизации переменных  $(\eta, x_l)$  (рис. 4). Здесь под неустойчивостью понимается не стохастизация поведения разности фаз, а ситуация, когда ее значения покрывают интервал  $(0, \pi)$  за достаточно малое число квазициклов.

Взаимная модуляция переменных системы, о которой говорилось выше, приводит с ростом показателя нелинейности к генерации новых циклов. Более наглядно это явление можно продемонстрировать в проекции фазовой траектории на плоскость  $(\eta, \xi)$  (рис. 5).

Возможность учета начальной разъюстировки позволяет рассмотреть более общий случай распространения пучка в нелинейной волноводной среде. Оказывается, что особенности динамики пучка без разъюстировки, касающиеся процесса синхронизации, сохраняются. Однако, для других нелинейных эффектов наблюдается ряд качественных отличий.

Сопоставляя рис. 4 и 6, прежде всего, следует отметить, что для пучка с ненулевым кручением  $\delta$  «вырождение» по фазовому сдвигу динамических переменных  $(\eta, x_l)$  снимается при любом физически разумном значении показателя нелинейности. Кроме того, рождение циклов, по-существу, прекращается,

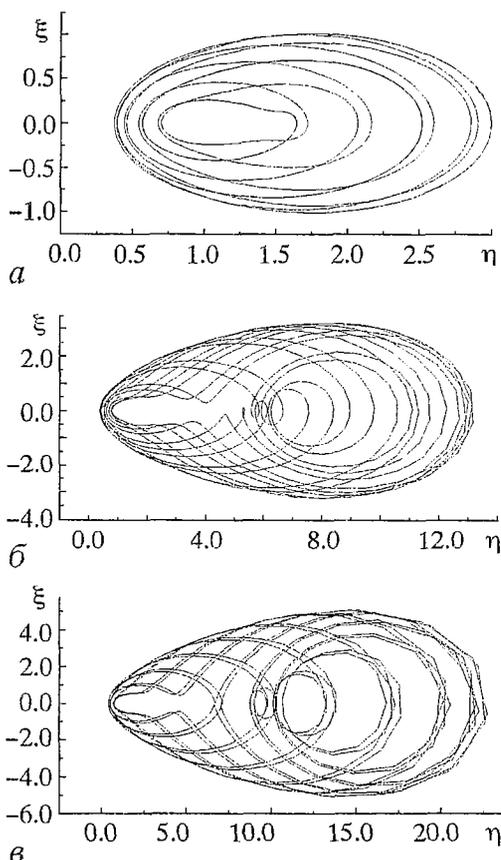


Рис. 5. Рождение новых циклов в сечении  $(\eta, \xi)$  для различных  $\chi_{nl}$ : а - 0.05; б - 0.09; в - 0.095

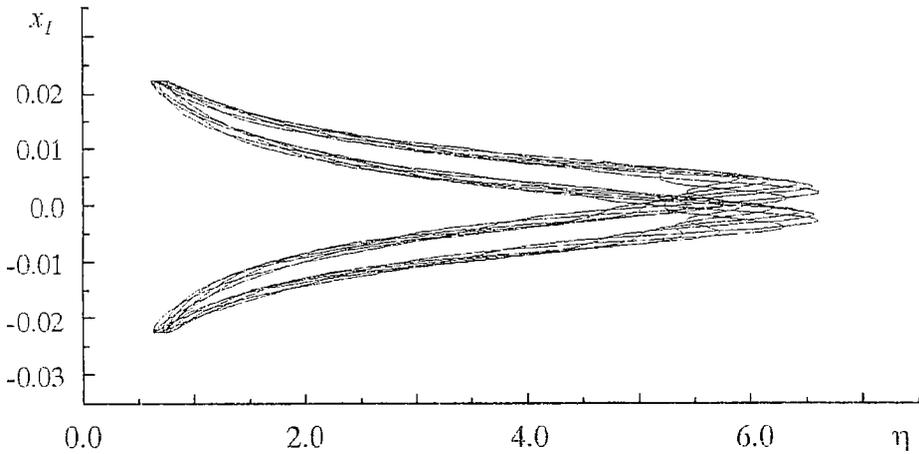


Рис. 6. Фазовый сдвиг  $(\eta, x_I)$  при  $\chi_{nl}=0.08$  для пучка с  $\delta \neq 0$  («вырождение» снимается)

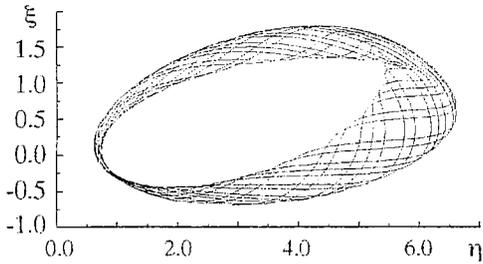


Рис. 7. Типичная картина в сечении  $(\eta, \xi)$  при  $\chi_{nl}=0.08$

и в системе наблюдается лишь слабая модуляция переменных по амплитуде (рис. 7).

Использование метода отображений Пуанкаре эффективно дополняет исследование нелинейных свойств построенной динамической системы. Разумно определять секущую квазиповерхность соотношением вида  $f_i = \text{const}$ , где переменная  $f_i$  выбирается так, чтобы полученное сечение имело легко интерпретируемый физический смысл. Для рассматриваемой здесь системы такой переменной является, очевидно,  $I$ .

Исследуем нелинейные свойства полученных уравнений с помощью отображения Пуанкаре на плоскость  $I = \text{const}$ .

В точке  $\chi_{nl}=0$  происходит бифуркация рождения тора из периодической фазовой траектории. В сечениях 10-мерного отображения Пуанкаре это отвечает возникновению некоторой замкнутой кривой из неподвижной точки (рис. 8, 1-й и 2-й столбцы). Вообще говоря, подобная бифуркация для отображений может трактоваться как бифуркация Андронова – Хопфа, когда из точки, соответствующей периодическому решению, рождается цикл, которому отвечает полученная инвариантная кривая.

При некоторых значениях  $\chi_{nl}$  возникает, как уже говорилось выше, устойчивое состояние, в котором всюду плотный тор вырождается в замкнутую кривую – наблюдается резонанс. Это соответствует резкому уменьшению числа точек отображения (при одном и том же количестве квазициклов) и позволяет фиксировать синхронизацию трех и более фазовых переменных, благодаря произвольному выбору функции, определяющей секущую квазиповерхность. На рис. 8 (3-й столбец) демонстрируются примеры таких резонансов.

В фазовом пространстве эффект рождения циклов представлен специфической динамикой инвариантного тора. Анализ отображения Пуанкаре в сечении  $(\epsilon, \xi)$  (рис. 9) показывает, что с ростом  $\chi_{nl}=0.08, 0.09, 0.095$  происходит сближение центров кривых – образующих тора, причем существует критическое значение  $\chi_{nl}=0.09$ , когда система изменяет свое состояние (см. рис. 9, б) с последующим переходом к симметричному (см. рис. 9, в).

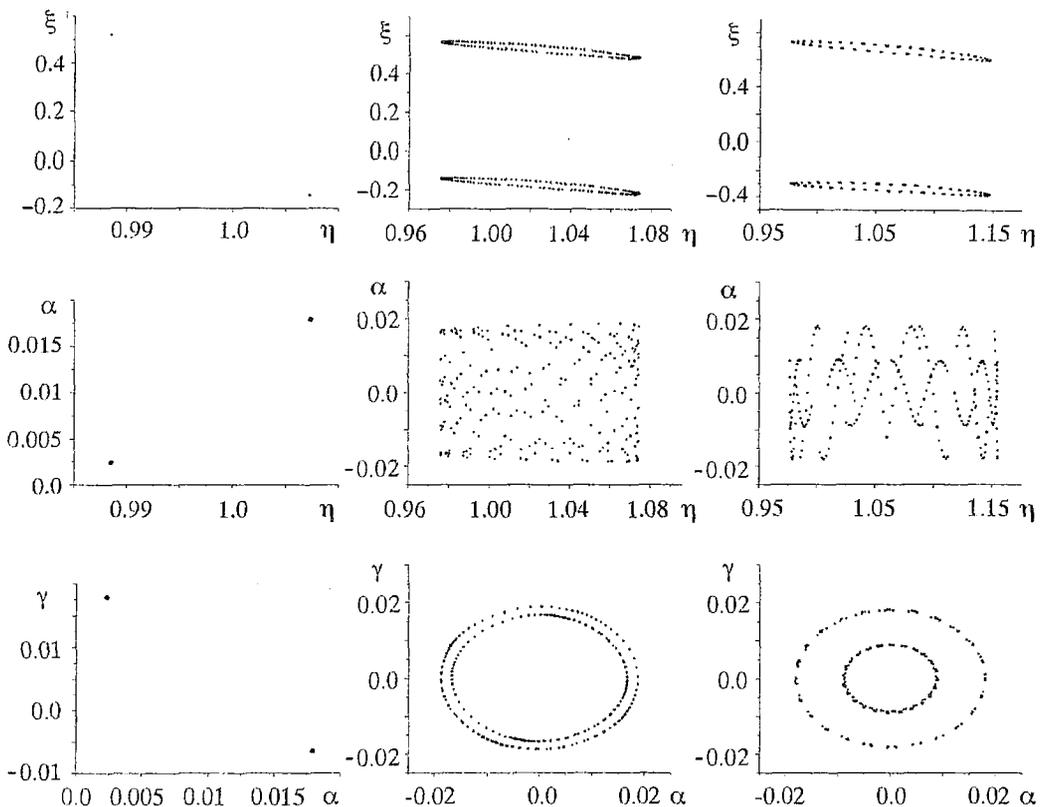


Рис. 8. Бифуркация Андронова – Хопфа для отображения Пуанкаре (1-й и 2-й столбцы); примеры нелинейных резонансов на торе (3-й столбец)

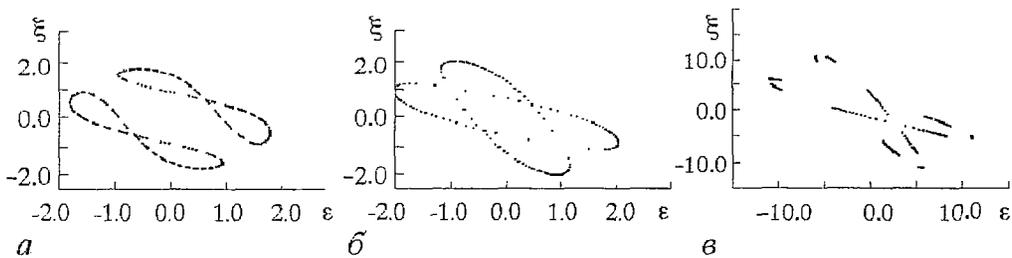


Рис. 9. Динамика тора в сечении  $(\epsilon, \xi)$ . Сближение образующих (а), переходное (б) и симметричное (в) состояния тора при  $\chi_H=0.08, 0.09, 0.095$ , соответственно

### Обсуждение результатов

С помощью обобщенного модифицированного метода моментов [8–10] нам удалось описать волновой пучок с кручением и сдвигом системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, правая часть которых содержит интегралы от восприимчивости среды и учитывает ее неоднородность и нелинейность. Осуществленное таким образом сведение распределенной системы к конечномерной дало возможность применить к ней стандартные методы динамики. Исследован ряд нетривиальных эффектов, связанных с особенностями поведения пучка в среде с параболическим поперечным профилем линейного показателя преломления и нелинейной восприимчивостью керровского типа, таких, как

синхронизация параметров, рождение новых циклов, изменение симметрии тора и ряда других.

Хорошо известно, что в средах с керровской нелинейностью пучки, ограниченные в обоих поперечных измерениях, при мощностях, превышающих некоторое пороговое значение, становятся неустойчивыми и претерпевают самофокусировку [12,13]. В параксиальной теории интенсивность пучка в точке самофокуса обращается в бесконечность, а размер пятна – в нуль; на опыте пучок может распадаться на нити и/или вызывать оптический пробой. Важно отметить, что наши расчеты выполнены для условий, когда пороговая мощность самофокусировки не достигается, и нелинейная рефракция дополняет фокусирующее действие градиента линзного показателя преломления, не вызывая катастрофического коллапса пучка. За пределами данного исследования остались вопросы, связанные с флуктуациями среды и возмущающего поля и, следовательно, с мелкомасштабной самофокусировкой [12,14].

Представленный метод, первоначально задуманный и разработанный для упрощения численных расчетов, оказался интересным как источник новых динамических моделей. Принципиальным моментом является то, что в рамках этого подхода, в отличие от прямого численного решения, ряд результатов получен аналитически. В частности,

- определен класс, к которому относится система (консервативная/диссипативная);
- обнаружено, что динамика пространственной локализации пучка (сдвига и наклона) не оказывает влияния на «внутреннюю» динамику (пульсации и поворот пятна);
- установлено, что начальное условие  $\delta=0$  отвечает распространению пучка с неизменной ориентацией пятна и фазового фронта относительно лабораторной системы координат;
- определены периоды и квазипериоды решений;
- найдены условия стационарного распространения пучка (моды);
- исследована устойчивость стационарных решений.

Следует отметить, что область применения развиваемых здесь математических методов выходит за рамки классической теории распространения световых пучков. Хорошо известно, что уравнение распространения неаксиального пучка аналогично квантовому уравнению Шредингера для смещенного осциллятора, а его решение в виде гауссовой моды – волновой функции когерентного состояния осциллятора в координатном представлении [15]. Такие состояния являются перспективным объектом исследований в квантовой механике и квантовой оптике. Подобная аналогия предоставляет замечательную возможность использовать гауссов пучок в качестве физической модели квантово–оптических явлений, которая сочетает в себе наглядность интерпретации и простоту экспериментальной реализации.

С нелинейно–динамической точки зрения представляется интересным дальнейший анализ построенной системы уравнений для сред с различными типами неоднородности и нелинейности. В частности, предметом второй части настоящей работы, планируемой авторами, будет исследование динамических свойств пучков в диссипативных средах.

## Библиографический список

1. Casperson L.W. Gaussian light beams in inhomogeneous media // Appl. Opt. 1973. Vol. 12. 10. P. 2434.
2. Casperson L.W. Beam modes in nonlinear lens-like medium and cavities // JOSA. 1976. Vol. 66. 12. P. 1373.

3. Кукушкин В.Г. Разъюстированный лазерный резонатор с неоднородными оптическими элементами // Квантовая электроника. 1987. Т. 14. 2. С. 381.
4. Бекишев А.Я., Гримблатов В.М. Разъюстированный оптический резонатор с линзоподобной средой // Квантовая электроника. 1980. Т. 7. 6. С. 1168.
5. Бойцов В.Ф., Владимиров А.Г. Свойства кольцевого оптического резонатора с разъюстированной пространственно неоднородной средой // Оптика и спектроскопия. 1981. Т. 51. 4. С. 708.
6. Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. Аппроксимация возмущений оптического пучка в условиях теплового самовоздействия // Квантовая электроника. 1995. Т. 22. 2. С. 187.
7. Goncharenko A.M., Logvin Yu.A., Samson A.M., Shapovalov P.S. and Turovets S.I. Ermakov – Hamiltonian systems in nonlinear optics of elliptic Gaussian beams // Physics Letters A. 1991. Vol. 160. P. 138.
8. Дербов В.Л., Мельников Л.А., Новиков А.Д. Новый метод расчета самовоздействия и его применение к анализу сдвига резонансов насыщенного поглощения в гауссовых пучках // Квантовая электроника. 1987. Т. 14. 12. С. 2529.
9. Дербов В.Л., Мельников Л.А., Новиков А.Д. Асимметрия резонансов насыщения за счет линзовых и апертурных эффектов при распространении внеосевых гауссовых пучков в нелинейной среде // Квантовая электроника. 1989. Т. 16. 8. С. 1652.
10. Derbov V.L., Melnikov L.A., Novikov A.D., Potapov S.K. Transverse pattern formation and spectral characteristics of cw light beams in resonant media : an improved numerical simulation technique and mode analysis // JOSA B. 1990. Vol. 7. С. 1079.
11. Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
12. Беспалов В.И., Таланов В.И. О нитевидной структуре света в нелинейных жидкостях // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 471.
13. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. 1(7). С. 118.
14. Пятахин М.В., Сучков А.Ф. Мелкомасштабная двумерная самофокусировка // ДАН СССР. 1988. Т. 299. С. 868.
15. Кривошильков С.Г., Сисакян И.Н. Когерентные состояния и распространение света в неоднородных средах // Квантовая электроника. 1980. Т. 7, № 3.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 5.06.97  
после переработки 9.02.98*

## **DYNAMICS OF AN OFF-AXIS GAUSSIAN BEAM WITH ASTIGMATISM AND TWIST IN A TRANSPARENT NONLINEAR WAVEGUIDE MEDIUM**

*L.A. Melnikov, V.L. Derbov, A.I. Bychenkov*

Using the modified generalized moments method the equations of motion are derived for the parameters of a misaligned astigmatic twisted Gaussian beam in an axially symmetric nonlinear medium. Nontrivial features of the beam dynamics (e.g., phase locking, cycle generation, nonlinear symmetry change) in a parabolic waveguide with Kerr nonlinearity are revealed.



*Мельников Леонид Аркадьевич* – родился в 1949 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1971). С 1978 года – кандидат, с 1992 года – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики. С 1997 года заведующий кафедрой лазерной и компьютерной физики. Область научных интересов: физика лазеров, лазерная спектроскопия, лазерные и волоконно-оптические измерительные системы, оптическая гироскопия, нелинейная динамика лазеров и оптических систем, нелинейное распространение световых пучков и импульсов в волноводных и резонансных средах, лазеры сверхкоротких импульсов, поперечная нелинейная оптика. Автор более чем 100 научных публикаций, член Оптического общества Америки, Международного общества по оптической технике.



*Дербов Владимир Леонардович* – 1949 года рождения, окончил физический факультет СГУ (1972). После окончания аспирантуры работал в НИИ механики и физики при СГУ. Защитил кандидатскую диссертацию по теории взаимодействия интенсивных лазерных полей с многоуровневыми релаксирующими системами. С 1983 года – доцент кафедры теоретической физики, а с 1985 года по настоящее время – доцент кафедры оптики СГУ. Автор более 70 теоретических работ в области нелинейной лазерной спектроскопии молекул, нелинейной динамики распространения лазерных пучков и импульсов. В последние годы интенсивно исследует проблему геометрических фаз в лазерных и оптических динамических системах.



*Быченков Алексей Иванович* – 1974 года рождения, окончил физический факультет Саратовского университета. С 1996 года – аспирант кафедры лазерной и компьютерной физики СГУ. Круг научных интересов лежит в области задач нелинейной динамики световых пучков сложной пространственной структуры.



## МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ НАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА ДОСТИЖЕНИЙ

*В.В. Качак, Е.С. Мчедлова*

Предложена одна из возможных математических моделей для описания взаимодействий двух научных направлений, представленная системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Анализ структуры фазового пространства и сравнение реализаций позволили на качественном уровне рассмотреть эволюцию научных направлений с учетом ограничения нелинейностью экспоненциального роста достижений для разных типов взаимодействия (сотрудничество, конкуренция, подавление) и собственных тенденций в развитии отдельного направления.

### Введение

Известно, что большинство формализованных моделей развития науки строится в предположении экспоненциального роста научных достижений. Это справедливо, поскольку полученные результаты и достижения становятся, в свою очередь, источником новой информации и результатов, за счет чего поддерживается непрерывный процесс генерации знания. Такие модели, как правило, могут служить начальным приближением при рассмотрении некоторых типов реальных систем (см., например, [1]). С физической точки зрения подобная модель может быть интерпретирована как система с положительной обратной связью, которая, как известно, порождает неустойчивые решения, неограниченно возрастающие во времени. Применяя модели с экспоненциально возрастающими решениями для описания эволюции того или иного научного направления, следует учесть тот факт, что на практике за этапом лавинного роста научной информации в некоторой области, наступает период относительного насыщения и стабилизации. Тогда для дальнейшего роста научных достижений требуется смена парадигмы или «научная революция» [2], после которой область знания развивается на качественно новом уровне.

Таким образом, корректная математическая интерпретация описанного механизма эволюции науки требует внести в модель фактор, ограничивающий экспоненциальный рост достижений, например, нелинейность. Это выглядит вполне естественным, если учесть, что подавляющее большинство процессов в природе и обществе носят нелинейный характер.

Все перечисленное приводит к выводу, что на этапе построения моделей невозможно обойтись без математического формализма. Помимо прочего, можно выделить две основные причины такой необходимости: накопление большого

фактического материала по кругу исследуемых явлений и относительная сложность связей между явлениями. Вследствие этого описательный и чисто содержательный подходы в соответствующих областях становятся затруднительными в силу своей громоздкости и нерезультативности, что приводит к поиску более компактного и эффективного способа описания, основанном на языке математики и нелинейной динамики.

Как оказалось, применение математических моделей и подходов для изучения науки как сложной системы исследований выражает не только общую тенденцию современного знания, но и принципиально необходимо для выработки обоснованных решений в области научной политики. Поэтому методы науковедения, основанные на математическом описании, давно утратили характер единичных попыток и все увереннее становятся в один ряд с более традиционным содержательным анализом науки как системы научного знания и как социального института. Этот процесс затрудняется тем, что в отличие от естественных и технических систем, наука, прежде всего, является общественным институтом и социальной системой. По этой причине существуют сложности математического описания в науковедении, во многом близкие к общим трудностям применения математики в социальных науках. Прежде всего, это отсутствие точных количественных характеристик, отражающих содержание таких понятий, как научное знание, продуктивность научного труда, ценность научного результата. Так, например, не представляется возможным однозначно и четко определить связь между количеством научных публикаций и качеством научной деятельности.

В силу перечисленных обстоятельств обоснованное описание развития науки должно опираться не столько на количественный анализ, сколько на исследование и качественную интерпретацию внутренних механизмов функционирования науки.

В данной работе мы предлагаем одну из возможных качественных моделей взаимодействий в науке – модель эволюции двух научных направлений с учетом ограничения экспоненциального роста переменных нелинейностью.

Сохраняя смысл обобщенных макропеременных  $x$  и  $y$  (см. [1]), описывающих состояние проблем в областях знания  $X$  и  $Y$ , соответственно, дополним ранее рассмотренную в работе [1] математическую модель, учитывая нелинейные свойства процессов в каждой из областей. Это легко сделать, полагая характер процессов логистическим:  $dx/dt = ax - bx^2$ , что представляется разумным, так как  $dx/dt = ax$  описывает некий прирост научной продукции, а нелинейный член  $-bx^2$  ограничивает экспоненциальный рост решения и выражает убывание соответствующей макропеременной, например, за счет старения научных результатов, их вхождения в более общие теории, либо их опровержения.

Учитывая нелинейность при описании взаимодействия двух научных направлений  $X$  и  $Y$ , запишем модельную систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} dx/dt &= c_1xy - c_2x - b_1x^2, \\ dy/dt &= c_3xy - c_4y - b_2y^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где коэффициенты  $c_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) сохраняют прежний смысл, то есть  $c_2$  и  $c_4$  определяют собственный характер развития направлений  $X$  и  $Y$ ,  $c_1$  и  $c_3$  задают тип воздействия направления  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$ , а коэффициенты нелинейности  $b_1$  и  $b_2$  определяют скорость старения информации или исчерпания результатов данного научного направления ( $b_1, b_2 > 0$ ). Отметим, что аналогичная математическая постановка задачи содержится в [3], где в обзорном порядке рассмотрено информационное взаимодействие двух близких математических дисциплин (в качестве переменных выбрано число теорем) и проблема конкуренции гипотез, претендующих на объяснение эмпирического материала и последующее признание их научным сообществом. В последнем случае в качестве характеристических переменных рассматривается совокупность информационных данных в пользу каждой из теорий.

Модели такого типа классифицируются в литературе как модели

взаимодействия с *горизонтальной* структурой [3]. Они, в отличие от моделей типа «хищник–жертва» (уравнения Вольтерра), описывают взаимодействия равноправных элементов, конкурирующих (либо кооперирующихся), находясь на одной иерархической ступени.

## 1. Анализ структуры фазового пространства

Обратимся к качественному исследованию фазового пространства системы (1). Приравнивая нулю правые части уравнений (1), находим

$$\begin{aligned}c_1xy - c_2x - b_1x^2 &= 0, \\c_3xy - c_4y - b_2y^2 &= 0,\end{aligned}$$

откуда легко получить координаты особых точек. Их четыре:

$$\begin{aligned}1) x^* = 0, y^* = 0; \quad 2) x^* = 0, y^* = -c_4/b_2; \quad 3) x^* = -c_2/b_1, y^* = 0; \\4) x^* = (1/b_1)[c_1(c_4b_1 + c_2c_3)/(c_1c_3 - b_1b_2) - c_2], \quad y^* = (c_4b_1 + c_2c_3)/(c_1c_3 - b_1b_2).\end{aligned}\quad (2)$$

Для исследования типов состояний равновесия выведем характеристическое уравнение системы (1) в общем виде, как это было сделано в [1]. Обозначим

$$\begin{aligned}c_1xy - c_2x - b_1x^2 &= \varphi(x, y), \\c_3xy - c_4y - b_2y^2 &= \xi(x, y)\end{aligned}$$

и запишем определитель

$$\Delta(x^*, y^*) = \begin{vmatrix} \varphi'_x(x^*, y^*) & \varphi'_y(x^*, y^*) \\ \xi'_x(x^*, y^*) & \xi'_y(x^*, y^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1y^* - c_2 - 2b_1x^* & c_1x^* \\ c_3y^* & c_3x^* - c_4 - 2b_2y^* \end{vmatrix},$$

$$\Delta(x^*, y^*) = (2b_1c_4 - c_2c_3)x^* - (2b_2c_2 - c_1c_4)y^* - 2b_1c_3(x^*)^2 - 2b_2c_1(y^*)^2 + 4b_1b_2x^*y^* + c_2c_4$$

и величину

$$\sigma = \varphi'_x(x^*, y^*) + \xi'_y(x^*, y^*) = (c_3 - 2b_1)x^* + (c_1 - 2b_2)y^* - c_2 - c_4.$$

Значения  $\Delta(x^*, y^*)$  и  $\sigma$  определяют вид характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \quad (3)$$

Обратимся к уравнениям (1). Как и в работе [1], будем рассматривать динамику модельной системы в нескольких случаях.

## 2. Результаты моделирования и их сравнительный анализ

**Случай I.** *Оба направления развивающиеся, X отрицательно влияет на Y, Y положительно влияет на X;  $c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = -1$ .* В этом случае координаты особых точек системы следующие:

$$\begin{aligned}1) x^* = 0, y^* = 0; \quad 2) x^* = 0, y^* = 1/b_2; \quad 3) x^* = 1/b_1, y^* = 0; \\4) x^* = (1+b_2)/(1+b_1b_2), \quad y^* = (b_1-1)/(1+b_1b_2).\end{aligned}$$

При  $b_1 < 1$  только три точки могут иметь положительные значения координат (изначально предполагается, что переменная, характеризующая состояние научного направления или области, не может быть отрицательной величиной). При  $b_1 > 1$  все четыре положения равновесия принимаются к рассмотрению.

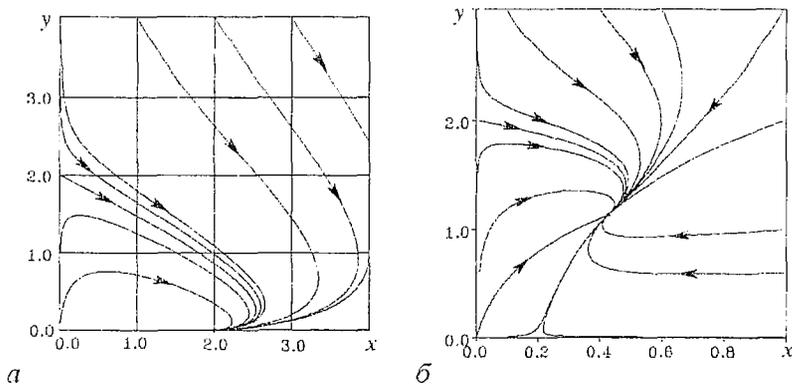


Рис. 1. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая 1 ( $c_1=1, c_2=c_3=c_4=-1$ ) при разных значениях нелинейности: а -  $b_1=b_2=0.5$ ; б -  $b_1=5, b_2=0.5$

На рис. 1 представлена структура фазового пространства системы уравнений (1) для двух значений параметров  $b_1, b_2$ . Анализ устойчивости показывает, что при  $x^*=0, y^*=0$  корни характеристического уравнения (3), записанного для этого случая, вещественны, положительны и одинаковы:  $\lambda_1, \lambda_2=1$ , поэтому особая точка – неустойчивый узел. Для второй особой точки, с координатами  $x^*=0, y^*=1/b_2$ , корни уравнения действительные, разных знаков  $\lambda_1=1+1/b_2, \lambda_2=-1$  из чего следует, что это неустойчивая седловая особая точка. Тип третьей особой точки  $x^*=1/b_1, y^*=0$  всецело зависит от величины  $b_1$  ( $\lambda_1=1-1/b_1, \lambda_2=-1$ ): при  $b_1 < 1$  мы имеем устойчивый узел (величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и отрицательны), а при  $b_1 > 1$  – особую точку типа седло ( $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ).

Тип четвертого, из перечисленных выше, положения равновесия легко определить, записав уравнение (3) для данного случая

$$\lambda^2 - [2 - 3(b_1 + b_2)/(1 + b_1 b_2)]\lambda + 1 - 3(b_1 + b_2)/(1 + b_1 b_2) + 2[b_1(1 + b_2)^2 - b_1(b_1 - 1)^2 + 2b_1 b_2(1 + b_2)(b_1 - 1)]/(1 + b_1 b_2)^2 = 0.$$

При  $b_1 < 1$  особая точка имеет отрицательные координаты, а в случае  $b_1=5.0, b_2=0.5$ , изображенном на рис. 1, б, величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и отрицательны, из чего следует, что данное положение равновесия является устойчивым узлом.

Сравнивая результаты, полученные для случаев с нелинейным ограничением роста переменных  $x$  и  $y$  (рис. 1), с результатами, полученными ранее в [1] для  $b_{1,2}=0$ , можно заметить, что при  $b_{1,2} \neq 0$  в фазовом пространстве системы (1) появляется устойчивая особая точка, координаты которой зависят от соотношения величин  $b_{1,2}$ . В этом случае неограниченный рост макропеременной  $x$  отсутствует, а вместо него наблюдается насыщение решения  $x(t)$ . Для процесса, изображенного на рис. 2, а, это означает, что развивающееся научное направление  $X$ , поддерживаемое направлением  $Y$  (обладающим значительно лучшим, по сравнению с  $X$ , начальным состоянием), после стадии экспоненциального роста научных показателей достигает их максимального уровня, после чего показатели несколько снижаются и выходят на стационарный уровень. Наличие некоторого спада перед выходом в состояние насыщения направления  $X$ , можно трактовать как следствие того, что в этот период кооперативное влияние другого направления ослабляется и спадает до нуля: динамика направления  $Y$  остается в этом случае такой же, как и при  $b_1=b_2=0$ .

Качественно иная ситуация реализуется в случае, когда при  $b_1 > 1$  в фазовом пространстве системы появляется устойчивый узел с отличными от нуля координатами

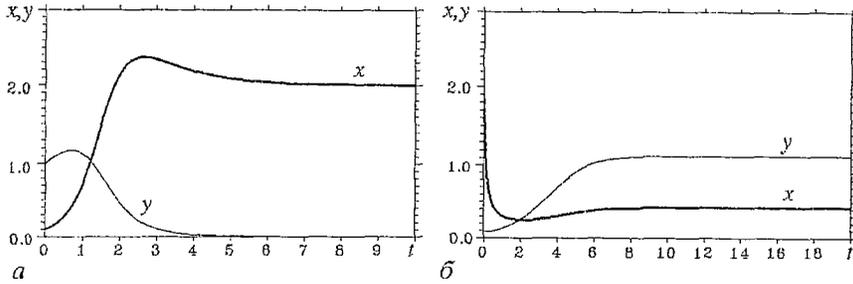


Рис. 2. Решения системы уравнений (1) для случая I ( $c_1=1, c_2=c_3=c_4=-1$ ): а -  $b_1=b_2=0.5, x_0=0.1, y_0=1.0$ ; б -  $b_1=5, b_2=0.5, x_0=2.0, y_0=0.1$

татами (рис. 1, б). Это означает, что научные показатели направления  $Y$  не снижаются до нуля и могут даже превосходить показатели направления  $X$  (рис. 2, б). Для этого необходимо, чтобы «нелинейность», которой характеризуется  $X$ , превосходила некоторую критическую величину (в данном случае – единицу, вообще же эта величина зависит от значений  $c_i$ ), то есть скорость потери актуальности научных результатов направления  $X$  была бы относительно велика.

Следует отметить, что взаимодействие научных направлений в рассмотренных случаях можно интерпретировать как систематическое поглощение направления  $Y$  со всеми его результатами и достижениями направлением  $X$ .

**Случай II. Развивающиеся направления  $X$  и  $Y$  конкурируют, взаимное влияние отрицательно;  $c_1=c_2=c_3=c_4=-1$ .** Используя характеристическое уравнение, которое для данного случая запишется в виде

$$\lambda_1 + [(1+2b_1)x^* + (1+2b_2)y^* - 2]\lambda + 1 - (2b_1+1)x^* - (2b_2+1)y^* + 2b_1(x^*)^2 + 2b_2(y^*)^2 + 4b_1b_2x^*y^* = 0, \quad (4)$$

и значения координат состояний равновесия

$$1) x^* = 0, y^* = 0; \quad 2) x^* = 0, y^* = 1/b_2; \quad 3) x^* = 1/b_1, y^* = 0; \\ 4) x^* = (1-b_2)/(1-b_1b_2), \quad y^* = (1-b_1)/(1-b_1b_2),$$

проведем краткий качественный анализ фазового пространства системы.

Первая особая точка – неустойчивый узел, так как корни уравнения (4) вещественны и положительны. Тип второй особой точки  $(0, 1/b_2)$  зависит от  $b_2$ . Характеристическое уравнение (4) имеет корни  $\lambda_1=-1, \lambda_2=1-1/b_2$ . Из этого следует, что при  $b_2 < 1$  особая точка будет устойчивым узлом, а при  $b_2 > 1$  – неустойчивой седловой особой точкой. Аналогично и в силу симметрии уравнений третья особая точка определяется значением  $b_1$ : при  $b_1 < 1$  мы имеем устойчивый узел, при  $b_1 > 1$  – особую точку типа седло. И, наконец, характер положения равновесия в последнем случае зависит как от  $b_1$ , так и от  $b_2$ : при  $b_1 < 1, b_2 < 1$  оно является седлом, при  $b_1 > 1, b_2 > 1$  – устойчивым узлом, а при других сочетаниях  $b_1$  и  $b_2$  координаты положения равновесия отрицательны и оно не представляет интереса в контексте рассматриваемой модели.

Фазовое пространство представлено на рис. 3 для двух случаев, когда величины  $b_1$  и  $b_2$  меньше и больше некоторого критического значения.

В случае  $b_1 < 1, b_2 < 1$  (рис. 3, а, направления идентичны) непосредственная конкуренция как тип взаимодействия, заложенный в модели, приводит к тому, что результат взаимодействия одинаковых направлений ( $b_1=b_2=0.5$ ) полностью предопределен соотношением начальных условий: направление с лучшим

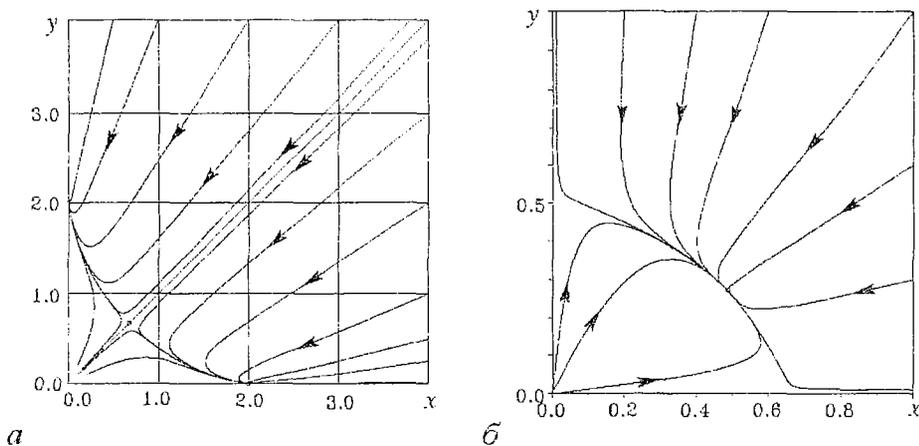


Рис. 3. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая II ( $c_1=c_2=c_3=c_4=-1$ ):  
 $a - b_1=b_2=0.5$ ;  $b - b_1=1.5, b_2=1.9$

начальным состоянием проявляет положительную динамику и испытывает насыщение, когда объем научной продукции перестает изменяться во времени (рис. 4, *a*). За исключением эффекта насыщения, изменения макропеременных во времени носят такой же характер, как и при  $b_1=b_2=0$ .

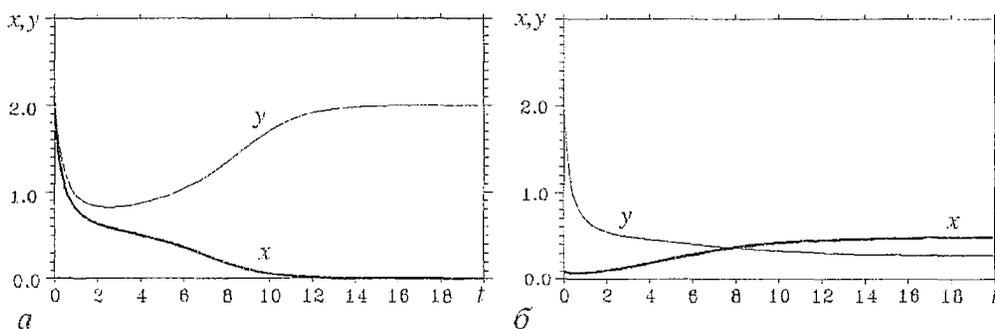


Рис. 4. Решение системы уравнений (1) для случая II ( $c_1=c_2=c_3=c_4=-1$ ):  $a - b_1=b_2=0.5, x_0=1.9, y_0=2.1$ ;  $b - b_1=1.5, b_2=1.9, x_0=0.1, y_0=2.0$

Совершенно другая ситуация имеет место при  $b_1 > 1, b_2 > 1$ . Оказывается, что в условиях взаимной конкуренции нелинейность (или скорость истощения научной информации направлений) дает возможность направлениям сосуществовать (рис. 4, *б*). Устойчивая особая точка с ненулевыми координатами в фазовом пространстве (см. рис. 3, *б*) свидетельствует о том, что с течением времени обобщенные переменные  $x$  и  $y$  примут стационарные значения. При этом величина стационарного значения больше для направления с меньшей нелинейностью из допустимых.

**Случай III. Оба направления «затухающие», взаимное влияние положительно;  $c_1=c_2=c_3=c_4=1$ .** Только две особые точки в этом случае могут иметь неотрицательные координаты

$$1) x^* = 0, y^* = 0; \quad 2) x^* = (1+b_2)/(1-b_1b_2), y^* = (1+b_1)/(1-b_1b_2),$$

причем вторая точка представляет интерес, когда  $b_1b_2 < 1$  (седловая особая точка).

Динамика системы качественно не изменилась по сравнению с динамикой модели без квадратичной нелинейности, за тем исключением, что седловая особая точка и сепаратриса, разделяющая области с возрастающими и убывающими

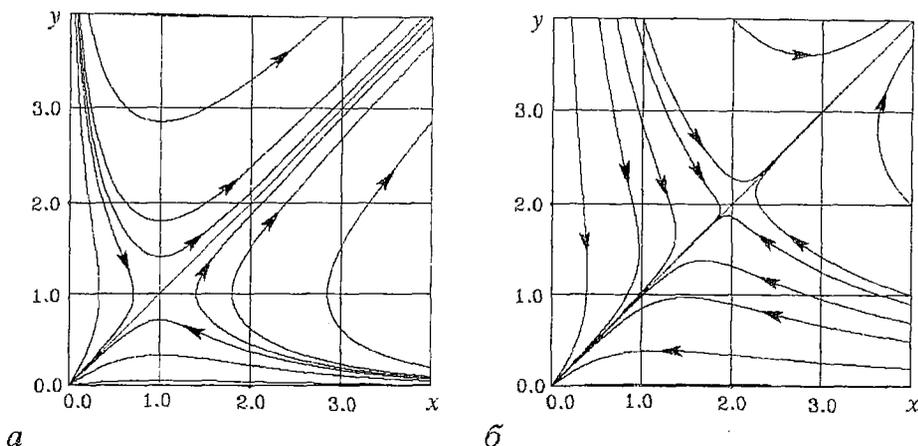


Рис. 5. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая III ( $c_1=c_2=c_3=c_4=1$ ):  $a - b_1=b_2=0$ ;  $b - b_1=b_2=0.5$

решениями, изменили свои координаты на фазовой плоскости в сторону больших значений (рис. 5).

Таким образом, при увеличении нелинейного ограничения роста достижений в условиях взаимного сотрудничества научных направлений с изначально отрицательной динамикой для сохранения развития необходимо увеличить начальные условия или усилить фактор положительного взаимного влияния.

На рис. 6 представлены качественно разные решения системы (1) для мало отличающихся  $x_0, y_0$ .

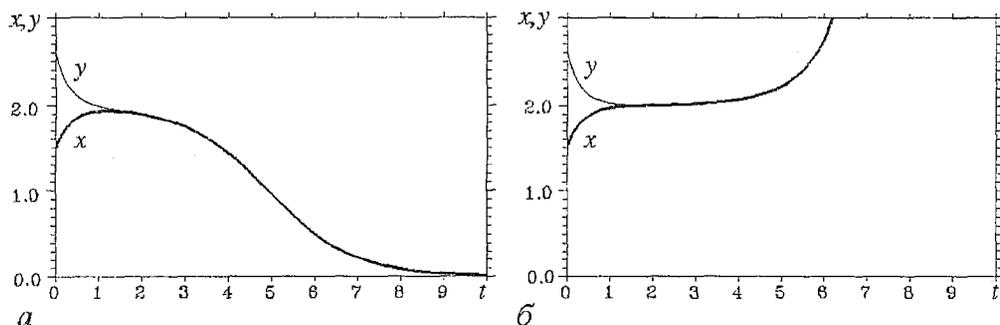


Рис. 6. Решение системы уравнений (1) для случая III ( $c_1=c_2=c_3=c_4=1$ )  $b_1=b_2=0.5$ :  $a - x_0=1.5, y_0=2.6$ ;  $b - x_0=1.525, y_0=2.6$

**Случай IV. Направления противоположных типов с положительной обратной связью;  $c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$ .** В этом случае система имеет три положения равновесия с неотрицательными значениями координат

$$1) x^*=0, y^*=0; \quad 2) x^*=0, y^*=1/b_2; \quad 3) x^*=(b_2-1)/(1-b_1b_2), y^*=(1-b_1)/(1-b_1b_2).$$

Положение равновесия, находящееся в начале координат – седловая особая точка; корни соответствующего характеристического уравнения  $\lambda_{1,2}=\pm 1$ . Вторая особая точка представляет собой седло при  $b_2 < 1$  и устойчивый узел при  $b_2 > 1$ . Третья особая точка имеет положительные координаты в двух случаях:  $b_1 > 1, b_2 < 1, b_1b_2 > 1$  и  $b_1 < 1, b_2 > 1, b_1b_2 < 1$ , являясь устойчивым узлом и седлом, соответственно. Возможные сочетания особых точек на фазовой плоскости редставлены на рис. 7, изменения обобщенных переменных  $x$  и  $y$  во времени – на рис. 8.

Отметим случай, когда  $b_1 > 1, 1/b_1 < b_2 < 1$  (рис. 7, в). Это единственный вариант,

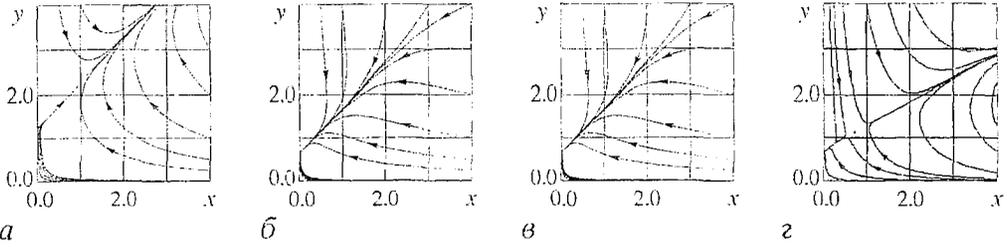


Рис. 7. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая IV ( $c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$ ):  
 $a - b_1=b_2=0.8$ ;  $б - b_1=b_2=1.5$ ;  $в - b_1=1.5, b_2=0.8$ ;  $г - b_1=0.2, b_2=1.5$

когда показатели деградирующего направления  $X$  выходят на некоторый стационарный уровень. При этом начальные условия могут быть таковы (рис. 8, б), что эволюция во времени развивающегося направления  $Y$  отчасти согласуется с теорией «научных революций» Т.Куна [2], в частности, с тем, что развитие науки носит скачкообразный характер, когда относительно продолжительные периоды «нормальной науки» чередуются с периодами экспоненциального роста знания и смены парадигм.

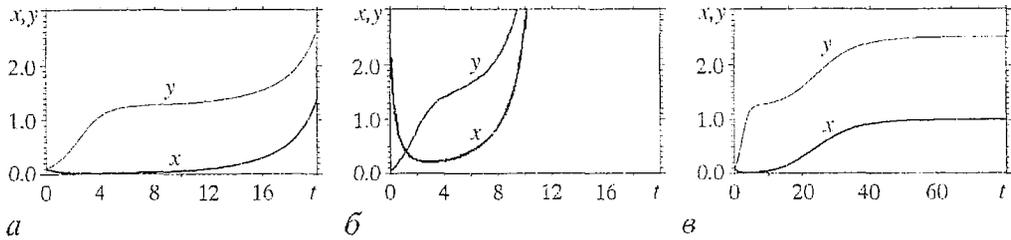


Рис. 8. Решение системы уравнений (1) для случая IV ( $c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$ ):  $a - x_0=0.1, y_0=0.1, b_1=b_2=0.8$ ;  $б - x_0=2.5, y_0=0.05, b_1=b_2=0.8$ ;  $в - x_0=0.1, y_0=0.1, b_1=1.5, b_2=0.8$

**Случай V.** «Затухающее» направление  $X$  отрицательно воздействует на  $Y$ , развивающееся позитивно и положительно влияющее на  $X$ ;  $c_1=c_2=1, c_3=c_4=-1$ . На фазовой плоскости системы (1) в этом случае может присутствовать от двух до трех особых точек с неотрицательными значениями координат. Наибольший интерес представляет особая точка с координатами

$$x^* = (1-b_2)/(1+b_1b_2), \quad y^* = (1+b_1)/(1+b_1b_2),$$

которая является устойчивым фокусом и имеет положительные координаты (рис. 9). По этой причине, обобщенные макропеременные  $x(t)$  и  $y(t)$  испытывают осцилляции, прежде чем достигнут стационарных значений (рис. 10). Осцилляции являются быстро затухающими и не синфазны друг другу. Начальная амплитуда осцилляций тем больше, чем дальше начальные условия от равновесия.

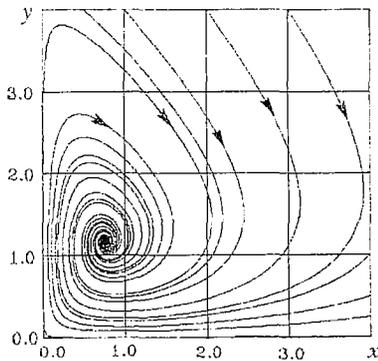


Рис. 9. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая V ( $c_1=c_2=1, c_3=c_4=-1, b_1=b_2=0.2$ )

Отметим также, что в отличие от случая, когда  $b_1=b_2=0$ , при  $b_1, b_2 > 0$  существует разница амплитуд обобщенных переменных, характеризующих динамику направлений. Ввиду различий собственной динамики направлений  $X$  и  $Y$ , величина  $y(t)$  всегда превосходит  $x(t)$ , и эта разница зависит от величин нелинейности (рис. 11).

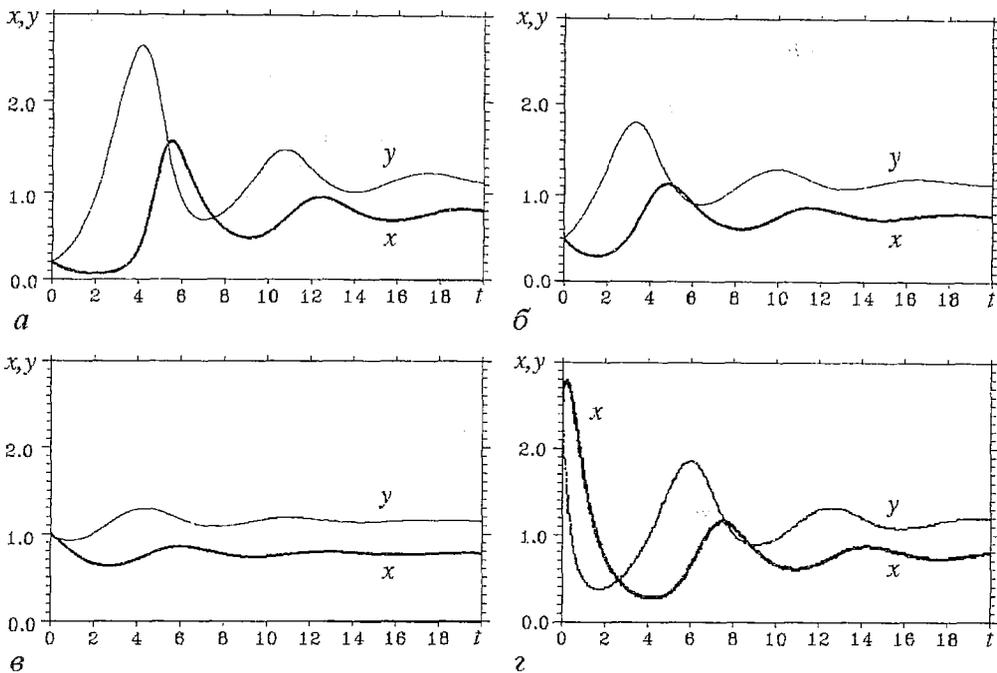


Рис. 10. Решение системы уравнений (1) для случая V ( $c_1=c_2=1, c_3=c_4=-1$ )  $b_1=b_2=0.2$ :  
 а -  $x_0=y_0=0.2$ ; б -  $x_0=y_0=0.5$ ; в -  $x_0=y_0=1$ ; г -  $x_0=y_0=2.5$

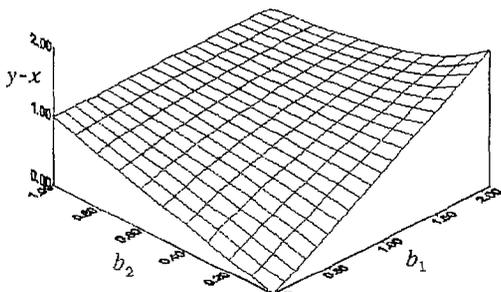


Рис. 11. Разность стационарных решений системы (1) в зависимости от параметров нелинейности  $b_1$  и  $b_2$  для случая V ( $c_1=c_2=1, c_3=c_4=-1$ )

### Заключение

Прежде, чем приступить к обобщению результатов моделирования, полученных для случаев I – V, в пределах исследуемой проблемы, классифицируем рассмотренные типы взаимодействия. Всего их три: взаимное влияние научных направлений друг на друга положительно – *сотрудничество*; взаимное влияние отрицательно – *конкуренция*; взаимное влияние различно – одно из направлений подавляет другое, которое поддерживает его развитие, – имеет место *подавление* одного научного направления другим.

Принимая во внимание данную классификацию, и то, что каждое направление характеризуется, помимо начальных условий, ростом научных достижений за счет внутренних ресурсов, с одной стороны, и величиной нелинейного ограничения этого роста за счет исчерпания информации, с другой, обратимся к рассмотренным ранее случаям.

Оказалось, что при взаимодействии по типу *подавления* двух научных направлений, в каждом из которых заложена тенденция к развитию (случай I), результат взаимодействия в значительной степени определяется величиной нелинейного ограничения – скоростью исчерпания результатов направления, со стороны которого осуществляется отрицательное влияние. Развитие подавляемого направления становится возможным только тогда, когда скорость исчерпания

результатов превосходит некоторое критическое значение. Из этого также следует, что научное направление с сильной «диссипацией» научных результатов (высокой скоростью их исчерпания) не в состоянии полностью включить в себя направление, поддерживающее его развитие.

В случае конкуренции двух развивающихся научных направлений (случай II) учет ограничения роста достижений нелинейностью позволил понять, что данное ограничение является существенным фактором, позволяющим обоим направлениям «выжить» в условиях конкуренции вне зависимости от начальных условий. Так, если скорость исчерпания результатов, в частности, за счет быстрого старения информации или вхождения ее в другие теории, больше некоторой критической, развитие направлений принимает стационарный характер.

Для того, чтобы развитие стало возможным в условиях сотрудничества направлений с изначально отрицательной динамикой (случай III), увеличение «диссипации» результатов требует улучшения начального состояния. Возможность роста научных показателей обоих направлений, несмотря на их изначально деградирующий характер, лишней раз подтверждает преимущества кооперативного типа взаимодействия в исследовательских работах.

Сотрудничество развивающегося и деградирующего научных направлений (случай IV) при определенных величинах нелинейных ограничений роста достижений может оказаться плодотворным для направления с изначально отрицательной динамикой. Так, в случае, когда скорость исчерпания результатов направления с изначально тенденцией к развитию превосходит некоторое критическое значение, а скорость исчерпания результатов деградирующего направления несколько меньше критической, научные показатели последнего достигают стационарного значения, не зависящего от начальных условий.

В последнем случае учет ограничения роста научных достижений приводит к тому, что колебания показателей, характеризующих каждое направление, затухают, переходя в стационарное состояние. При этом существует разница показателей, зависящая от скорости исчерпания достижений для обоих научных направлений.

Таким образом, можно предположить, что несмотря на высокую степень идеализации, существенные упрощения, присущие модели, и качественный анализ результатов, внесенная в модель нелинейная поправка делает ее приближением более высокого порядка при описании взаимодействий в научных сообществах.

## Библиографический список

1. Качак В.В., Мchedлова Е.С. Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 4. С.110.
2. Куи Т. Структура научных революций. М.: Прогресс, 1975. 288 с.
3. Яблонский А.И. Математические модели в исследовании науки. М.: Наука, 1986. 352 с.

Министерство общего  
и профессионального образования РФ  
Высший колледж прикладных наук

Поступила в редакцию 11.06.98

## THE MODEL OF INTERACTIONS OF TWO SCIENTIFIC FIELDS WITH EXPONENTIAL GROWTH OF ACHIEVEMENTS BOUNDED BY NONLINEARITY

*V.V. Kachak, E.S. Mchedlova*

One model of interaction of two scientific fields is suggested. The model described by system of ordinary differential equations with nonlinearity. Analysis of phase space and realizations comparison allowed to investigate the evolution of scientific fields

qualitatively, taking into account the exponential growth of achievements bounded by nonlinearity. The different types of interactions between scientific fields (cooperation, competition and suppression) and their own dynamics (developed, degraded) were considered.



*Качак Валерий Владимирович* – родился в Лисичанске на Украине (1948). Окончил Московский горный институт (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1978). Работал научным сотрудником горного университета. С 1986 года сотрудник систем ВО СССР и РФ, в настоящее время заместитель начальника управления научно-исследовательских работ. Автор более 50 научных и научно-исследовательских статей. Сфера научных интересов – социологические и экологические проблемы развития науки в системе ВО.



*Мчедлова Елена Сумбатовна* – окончила Саратовский государственный университет (1993). Кандидат физико-математических наук (1996). Работает научным сотрудником ГосУНЦ «Колледж» Саратовского госуниверситета. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, компьютерное моделирование в физике и биологии, методы анализа динамических систем. Автор ряда работ по построению и исследованию моделей структурированных потоков со сверхизлучением, изучению взаимодействий в больших ансамблях связанных автоколебательных систем.

## **К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ НАУЧНЫХ ШКОЛ ИЛИ ОБ ОДНОМ АРГУМЕНТЕ «ЗА» ИНТЕГРАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР**

*В.В. Качак, Д.А. Усанов*

По образному выражению Г.Р. Иванецкого [1], каждый ученый в ходе своей деятельности часто сопротивляется каким-либо чуждым идеям, одновременно испытывая со стороны сопротивление своим, то есть постоянно находится во взаимодействии с научным сообществом. Число эффективных связей между учеными относится к одному из важнейших показателей развития науки. В науковедении вклад ученых описывается числом публикаций, разделение которых среди ученых описывается логарифмически нормальным законом, иными словами, на сравнительно немногих ученых приходится наибольшее число публикаций, а значит и количество подготовленных специалистов, число эффективных научных связей и т. п. С этими научными лидерами зачастую связано существование научных школ и развитие научных направлений. Ясно, что число связей больше и взаимодействие эффективнее как между отдельными учеными, так и между научными школами, если они сконцентрированы в рамках одной организации, например, в университете. Поэтому можно предположить, что эффективность деятельности ученых выше в таком университете, где больше научных лидеров, сформировавшихся научных школ.

С позиций выказанного представляет интерес попытаться проанализировать связь эффективности развития коллективов ученых, функционирующих в однотипных экономических и организационно-правовых условиях, с численностью докторов наук. Постановка такой задачи может представлять интерес в связи с интеграционными процессами, начавшимися в системе образования. В качестве центров интеграции обычно выступают так называемые классические

университеты. В частности, в 1997 году постановлением Правительства в состав Саратовского университета были введены Саратовский государственный педагогический институт с его Балашовским филиалом, Саратовский колледж радиоэлектроники и Саратовский политехникум. В качестве анализируемых данных были использованы материалы, приведенные в [2–7]. Анализировалась связь численности докторов наук, работающих в классическом университете, с суммарным числом монографий, опубликованных коллективом вуза за один год. Подразумевается, что такая зависимость может в среднем характеризовать число эффективно функционирующих и развивающихся научных направлений, коллективов, школ, поскольку наличие обобщающих монографий является одним из основных показателей развитого научного направления. Из проведенного анализа следует, что связь указанных показателей носит явно выраженный нелинейный характер. То есть выход научной продукции коллективом с большим числом докторов наук существенно превышает суммарный аналогичный показатель ряда отдельных коллективов с малым числом научных лидеров. Так, например, в Ростовском государственном университете, в котором работают 194 доктора наук, в 1997 году было издано 70 монографий – столько же, сколько издано совокупным коллективом девяти других классических российских университетов, в которых работает 431 доктор наук. Подобный факт может быть одним из аргументов в пользу создания интегрированных научно-образовательных университетских комплексов. При этом, конечно же, авторы отдают себе отчет в том, что это лишь один из аргументов «за», который просматривается в существующей сегодня практике. Возможны конкретные ситуации, когда этот аргумент может и не быть определяющим. Сценарии развития взаимодействующих интегрирующихся коллективов могут быть различны. Их простейшие варианты приведены, например, в [8,9]. С другими аргументами «за» и «против» интеграции можно ознакомиться, например, в [9,10].

### Библиографический список

1. *Иваницкий Г.Р.* На пути второй интеллектуальной революции // Техника кино и телевидения. 1998. № 5. С. 33.
2. Материалы зонального совещания по итогам деятельности учреждений общего и профессионального образования в 1997 году. Волгоград: Изд-во ВГУ «Политехник», 1997. 198 с.
3. Научный потенциал вузов Северо-Кавказского экономического района России: Стат. сб. / СЗНМЦ, СПб, 1997. 122 с.
4. Научный потенциал вузов Поволжского экономического района России: Стат. сб. / СЗНМЦ, СПб, 1997. 126 с.
5. Научный потенциал вузов Восточно-Сибирского экономического района России: Стат. сб. / СЗНМЦ, СПб, 1997. 42 с.
6. Научный потенциал вузов Дальневосточного экономического района России: Стат. сб. / СЗНМЦ, СПб, 1997. 84 с.
7. Научный потенциал вузов Уральского экономического района России: Стат. сб. / СЗНМЦ, СПб, 1997. 122 с.
8. *Качак В.В., Мчедлова Е.С.* Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5, № 4. С. 110.
9. *Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука, 1997. 286 с.
10. *Трубцецов Д.И., Усанов Д.А., Кузнецов Н.И.* Интеграция – бремя ожиданий: Социально-экономические аспекты интеграции в системе образования и науки. Саратов: Изд-во Гос УНЦ «Колледж», 1998. 70 с.

Министерство О и ПО РФ  
Саратовский госуниверситет

Поступила в редакцию 2.07.98



## ФИЛОСОФИЯ СЛУЧАЯ В РОМАНАХ М.А. АЛДАНОВА: СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

Е.Г. Трубецкова

На материале произведений М.А. Алданова в статье показано изменение представлений в литературе XX века о роли детерминизма и случайности в историческом процессе и связанное с этим появление в искусстве новых принципов и подходов к изображению человека, осмысление его судьбы и самой истории как бесконечной цепи бифуркаций.

Сопоставление историософии Алданова с идеями нелинейной динамики позволяет ставить вопрос о единстве научной и художественной картин мира, о формировании единой парадигмы мышления.

Одной из отличительных черт искусства начала XX века В. Шкловский назвал «упадок потому что» [1]. Разрушение привычных представлений о причинно–следственных связях, кризис «линейного мышления» были обусловлены изменением «воздуха времени»: катастрофичностью *социальной атмосферы* эпохи (ср. у Манделштама: «Ныне европейцы выброшены из своих биографий, как шары из бильярдных луз, и законами их деятельности, как столкновением шаров на бильярдном поле, управляет один принцип: угол падения равен углу отражения» [2]), а также кризисом позитивистского мышления в *философии* и строгого детерминизма в *науке*. М. Алданов писал о тесной взаимосвязи этих причин – один из его героев, размышляя о теории относительности Эйнштейна, говорит: «Может быть, эта теория характерна именно для нашего времени. В самом деле, если поколеблена механика Ньютона, то какие же могут быть истины в политике, философии, в политической экономии?» [3] <sup>1</sup>.

Литература реагировала на распад рациональных связей действительности отказом от традиционного сюжета, обращением к технике потока сознания. На уровне композиции хаос жизни был запечатлен в хаотической структуре произведений. Например, в «Петербурге» Белого действие развивается не последовательно, а скачками–катастрофами. Эти скачки–катастрофы полно и глубоко обрисовывают эпоху – и катастрофическую, и скачкообразную одновременно.

<sup>1</sup> На торжествах по поводу трехсотлетия со дня рождения Ньютона один из крупнейших специалистов–механиков Майлс извинился перед ученым сообществом и широкой публикой за триста лет обмана, имея в виду предсказуемость в механике (лапласовский детерминизм).

Тем не менее, необходимо отметить, что в приведенной цитате Алданов не совсем точен: механика Ньютона является частным случаем специальной теории относительности. Здесь автор, получивший прекрасное естественное образование и, без сомнения, изучавший труды Эйнштейна, использует понятия «механика Ньютона» и «теория относительности» скорее как эмблемы двух различных типов мировидения.

*Алогичность событий действительности привела к повышению роли Случая в искусстве.* Например, в прозе «Серрапионовых братьев», М. Булгакова, С. Кржижановского, В. Набокова, Оберiuтов.

Конечно, случай и раньше играл в искусстве принципиально важную роль. Это прекрасно выразил Пушкин:

О, сколько нам открытий чудных  
Готовит просвещенья дух,  
И опыт – сын ошибок трудных,  
И гений – парадоксов друг,  
И случай – Бог-изобретатель.

(Примечательно, что у нас долгое время последнюю строку было «не принято» цитировать, она слишком резко контрастировала с официальным телеологическим сознанием и оставалась «скрытой» за многоточием.)

Часто случай становился решающим фактором в самом процессе творчества, что блестяще описано у Льва Толстого в «Анне Карениной», когда художник Михайлов мучительно не мог найти нужную позу для фигуры человека. И только случайное пятно стеарина, запачкавшее бумагу, вдруг придало фигуре новое живое положение. Вспомним также Бориса Пастернака:

И чем случайней, тем верней  
Слагаются стихи навзрыд.

При этом важно замечание Ю.М.Лотмана о принципиальном отличии роли Случая в творчестве и в науке, где случайное внешнее событие тоже может натолкнуть ученого на крупное открытие (классический пример – яблоко Ньютона). «В случае с Ньютоном, как и в других многочисленных примерах, случайность входит в *процесс* научного творчества, а не в его *результат*. Случайным образом открывается неслучайный текст. Само слово «открытие» указывает на спонтанное существование текста до того, как его случайно «открыли». Это напоминает икону, которая не создается иконописцем, а пресуществует в некотором идеальном пространстве и только открывается достойному. Как и законы объективного мира, она «ищет явиться». В обоих случаях перед нами не автор, а открыватель того, что было создано природой или Богом, и в том, *что* он открывает, нет места случаю. Когда же речь идет о художественном тексте, случайность входит не только в процесс творчества, но и в его результат» [4].

Принципиальное различие между «открывателем» в науке и «творцом» в искусстве обуславливает и важную «роль личности» в том и другом случае. «Представим себе мысленный эксперимент: изобретатель ткацкого станка или астроном, открывший новую комету, умер в детстве, не совершив своего открытия. Совершенно очевидно, что эти открытия и конструкции рано или поздно будут реализованы другими людьми. Это произойдет раньше или позже, однако русло исторического течения от этого не переменится. Но если бы умерли в детстве Данте, Пушкин или Достоевский, не только не были бы никогда написаны их произведения, но и история Италии и России – в конечном счете история, по крайней мере, Европы – потекла бы по другому направлению» [5].

В литературе Случай играет центральную роль, прежде всего, в развитии сюжета. Завязкой сюжета и становится Случай, нарушающий привычное течение событий, положение вещей (ярче всего это видно, на примере волшебной сказки, когда из-за действий злого волшебника система выводится из равновесия – и дальнейшие действия героя направлены на то, чтобы восстановить status quo, вернуть изначальное равновесие).

Бальзак называл Случай величайшим романистом мира. Но сам он при этом стремился «вырвать интригу из рук Случая» и перенести внимание читателя с события на вызвавшие его процессы. (И в этом можно видеть общую черту классического реалистического романа XIX века.) Отличие же писателей XX века в том, что Случай осмысливается ими не только как необходимый элемент

творчества и пружина сюжета, но и рассматривается как ключевой фактор в развитии общества, истории. Думается, это связано с хаотичностью и иррациональностью самой эпохи (когда-то близкий процесс был отражен в авантюрном романе).

«Мы живем во времена грандиозного исторического перелома. Началась какая-то новая историческая эпоха. Весь темп исторического развития существенно меняется. <...> И темп этот не может быть назван иначе, как катастрофическим (курсив мой. – Е.Т.). Открылись вулканические источники в исторической подпочве», – писал Николай Бердяев [6]. Владимир Соловьев в предсмертной статье подвел итог: «Историческая драма сыграна и остался еще один эпилог» [7].

Апокалиптическое видение мира резко подчеркивает разрыв с осмыслением истории в XIX веке. «Общечеловеческое», занимающее доминирующее место у критических реалистов прошлого столетия, оказывается по необходимости простой суммой миллионов индивидуальностей, изолированно живущих и действующих порознь. Эпическая причастность человека к миру оказывается у модернистов (ярче всего это проявляется, наверное, у Ф. Кафки) трагической обреченностью. «Человек сталкивается с иррациональностью мира. Он чувствует, что желает счастья и разума. Абсурд рождается между призыванием человека и неразумным молчанием мира», писал А. Камю [8]. Как сказал герой Джойса, «история превратилась в ночной кошмар». То же ощущение выражает А. Введенский: «История разлагается на последние смертные части. Время поедает мир» [9]. Катастрофический характер эпохи изменяет саму призму видения мира. События не подчиняются рациональной логике. Все становится подвластно Случаю. Крайние формы такое восприятие мира принимает в произведениях обэриутов – Даниил Хармс в «Случаях» создает «нонсенс-эпос».

В контексте эпохи очень интересна историософская концепция и поэтика романов Марка Александровича Алданова. Внимание писателя сосредоточено на ключевых, поворотных моментах истории. Ведя спор с теорией исторического детерминизма, Алданов подчеркивает, что в переломные моменты именно Случай определяет путь дальнейшего развития. «В мире царит случай – вот результат моего жизненного опыта», – так излагает свою философию один из очень близких писателю героев [10].

Если эпопея Толстого, которого Алданов считал непревзойденным художником, в высшей степени соответствовала мироощущению XIX века: все в истории необходимо, и иначе, чем было, быть не могло (этот же взгляд, но с обратным знаком – вместо фатализма убежденность в возможности человека рационально изменять ход истории – унаследовала и советская историография), то Алданов воплотил мироощущение эмигранта: история целей не знает и не может знать, ход событий стихийен и случаен.

Как случайное стечение обстоятельств изображаются писателем все важнейшие события в истории России и Франции на протяжении двух веков. Одной из главных тем Алданова-историка становится осмысление революции (Великая французская революция стала центром тетралогии «Мыслитель», русская революция 1917 года – центром трилогии «Ключ»– «Бегство»–«Пещера»). При этом события XVIII века во Франции Алданов осмысляет с позиции человека, получившего страшный опыт XX столетия.

«Под гильотину можно угодить и хваля революцию, и ругая ее, и совсем о ней не говоря. А в общем, революция, вероятно, отправит на эшафот больше революционеров, чем реакционеров. Я, впрочем, нисколько не реакционер. При старом строе тоже мерзавец сидел на мерзавце, а главное осел на осле. Только теперь все гораздо заметнее: произошло самое скверное из аутодафе – сожжение фиговых листочков. Люди чувствуют время от времени потребность скинуть с себя совершенно все цепи так называемой культуры» [11]. И дальше: «...на словах они благодетельствовали весь мир, а в действительности к чему они ни прикоснутся, все гибнет, пачкается, пошлится. Революция творить не может. Единственная ее заслуга – после нее приходится строить заново. А иногда, далеко,

впрочем не всегда, новое выходит лучше старого... Но эту заслугу французская революция всецело разделяет с лиссабонским землетрясением» [11, с. 228]. Эти размышления Пьера Ламора в «Девятом термидора» оказываются актуальными и для революции 1917 года.

О подобных повторах истории Алданов пишет в предисловии к роману «Чертов мост» (1925): «Эпоха, взятая в серии «Мыслитель», потому, вероятно, и интересна, что отсюда пошло почти все, занимающее людей нашего времени. Некоторые страницы исторического романа могут казаться отзвуком недавних событий. Но писатель не несет ответственности за повторения и длинноты истории» [12].

И французскую, и русскую революцию Алданов понимает не как обусловленную всем ходом истории необходимость, а как последнее звено в цепи случайностей. Эта позиция писателя открыто высказана в «Ульмской ночи» (см. гл. «Диалог о случае в истории»).

В последний роман трилогии Алданова «Ключ» – «Бегство» – «Пещера» введена новелла «Деверу», являющаяся частью книги одного из героев романа – химика Брауна, которая, по его замыслу, должна на другом языке пояснить смысл его философской книги – «Ключ». Но «Деверу» в концентрированном виде отражает и центральные идеи всей трилогии Алданова.

Новелла, вставленная в роман о жизни эмиграции 1919 года, описывает события Тридцатилетней войны – захват Магдебурга и смерть Валленштейна. Первоначальный замысел Брауна – назвать новеллу «Магдебургская кошка»: один из центральных эпизодов новеллы – роль случая во взятии войсками графа Тилли Магдебурга, когда не взорвались бочки с порохом в подземелье под площадью Нового рынка в захваченном городе. «Взрыв же порохового погреба уничтожил бы и графа Тзеркласа Тилли, и его штаб, и большую часть его армии, а с ними и весь город Магдебург. Но огонек добежал лишь до первой галереи, зашипел и погас в шагах двадцати от бочки. И столь странно устроен мир, что та магдебургская кошка, которая накануне ночью гоняясь в подземелье за крысами, с разбега наскочила на шнур и порвала его, оставила больший след в мировых судьбах, чем сам Тилли, и Валленштейн, и Ришелье, и император» [13].

Так в символической форме выражена в новелле идея Алданова о ключевой роли случая в поворотных событиях истории – в войнах, революциях. Сопоставление в трилогии событий Тридцатилетней войны и революции 1917 года, доказывает это<sup>2</sup>. («Систему сопоставлений», в скобках добавив «иронических», В. Набоков назвал «типичным алдановским приемом» [14].)

Современник Алданова, известный историк В. Кизеветтер, отмечая скрупулезную точность писателя в обращении с историческим материалом, так объяснил специфику исторического повествования писателя: «Под каждой исторической картиной и под каждым историческим ситуэтом вы смело можете пометить: «с подлинным верно» <...> Каждую строку своего художественного повествования он (Алданов. – Е.Т.) может обосновать ссылкой на документы. А нередко такая строка стоит ему немалых предварительных историко-критических исследований» [15]. Все это подчинено у Алданова единой цели: «Вот почему романист так тщательно соблюдает историческую точность в своих изображениях. Ему именно важно представить сколь возможно нагляднее все несходство с условиями нашей жизни той обстановки, в которой шла жизнь отдаленных от нас эпох, ибо при свете этого *несходства* как раз бросается нам в глаза упоминаемая выше *общность* человеческой судьбы всех времен» [15, с.478].

Подобное соотношение разных исторических эпох производится писателем и эксплицитно – в рамках одного произведения. Богатые возможности представляет

---

<sup>2</sup> Ср. высказывание Брауна в разговоре с Мусей Кременецкой: «Какие уж там законы истории, эту шутку выдумали историки. Поверьте, все в мире определяется случаем. Ведь и Россия погибла от того, что, по случайности, не нашлось пять-шесть решительных людей, готовых пожертвовать собой в атмосфере общего равнодушия <...> Разумеется, одной решительности было мало: надо было еще иметь и голову на плечах» [13, с. 346].

для этого структура «текст в тексте», использованная Алдановым в романах «Пещера» и «Живи как хочешь».

Необходимо отметить, что такое соотнесение времен, «вертикальное» осмысление истории одновременно с Марком Алдановым использует и Михаил Булгаков в «Белой гвардии» и «Мастере и Маргарите». В «Вечере у Клэр» Гайто Газданова события гражданской войны соотносятся в сознании героя-повествователя с Русью времен раскола и реформы Никона: в роман вводятся фрагменты «Исповеди протопопа Аввакума». У Михаила Кузмина в пьесе «Смерть Нерона» тоже сближаются разные временные пласты: действие происходит в Риме 1919 года, Саратове 1924-го, и Риме времен Нерона (примечательно, что замысел пьесы возник у писателя на другой день после похорон Ленина [16]).

Николай Бердяев писал: «Исторические катастрофы и переломы, которые достигают особенной остроты в известные моменты всемирной истории, всегда располагали к размышлениям в области философии истории, к попыткам осмыслить исторический процесс, построить ту или иную философию истории» [6, с.4]. И думается, не случайно у писателей 20–30-х годов осмысление революции, гражданской войны, первых лет Советской власти идет на фоне широкого исторического контекста. Подобное наложение событий разных эпох помогает более глубоко осмыслить современность. С другой стороны, избранный для сопоставления материал свидетельствует об оценке писателем всего происходящего, в какой-то мере позволяет предвидеть и результат.

Подход к истории с позиции теории вероятности, эксплицитно выраженный в философской книге «Ульмская ночь» (эта книга является таким же «ключом» ко всему историческому метароману Алданова, как книга его героя Брауна к трилогии «Ключ» – «Бегство» – «Пещера») позволяет Алданову спорить со сложившейся концепцией исторического детерминизма. Он изменяет ее, вводя понятие «случайности». Но необходимо отметить, что при этом Алданов не отвергает принцип причинности, а, вслед за французским математиком Курно, *вместо единой цепи причин и следствий предлагает видеть в истории бесконечное множество таких цепей. В каждой отдельно взятой последующее звено зависит от предыдущего, однако скрещение цепей случайно, поэтому история – царство слепого случая.*

Таким образом, *историософия Алданова представляет собой синтез детерминизма и случайности*, хотя, отталкиваясь от господствующей концепции исторического детерминизма предшествующего столетия, акцент делается именно на роли Случая.

Пример подобного синтеза детерминизма и случайности можно видеть и у современника Алданова М.А.Булгакова в романе «Мастер и Маргарита». Здесь Случай<sup>3</sup> – встреча с Воландом (в «московских» главах), с Иешуа (в «ершалаимских») – коренным образом изменяет судьбу героев. Второстепенные персонажи в результате этой встречи обретают сознание своей вины – за обман, ложь, предательство; главные герои оказываются в ситуации выбора [17]. В романе сталкиваются две точки зрения на судьбу: персонажи московских глав – Берлиоз, Бездомный – провозглашают, что «сам человек и управляет» и наказываются за свое неверие: события их жизни становятся непредсказуемыми, все происходящее в романе для них – фантастика, нелепость, случайность. С другой стороны, Воланд возражает им: «Чтобы управлять, нужно, как-никак, иметь точный план на некоторый, хоть сколько-нибудь приличный срок. Позвольте же вас спросить, как же может управлять человек, если он не только лишен возможности составить какой-нибудь план хотя бы на смехотворно короткий срок <...>, но не может ручаться за свой собственный завтрашний день». Но для Воланда те же события романа закономерны и предопределены. Таким образом, в романе буквально реализуется евангельское: «Да воздастся каждому по вере его!» Строя для своих героев две принципиально различные картины мира (в

<sup>3</sup> Первоначальное значение слова «случай» – соединение, в противоположность «разлуке».

одной царит непредсказуемость, в другой – детерминизм), Булгаков ведет читателя к осмыслению глубочайших философских проблем. Каждый из героев должен сделать свой выбор, в каком мире ему жить.

Концепция «ветвящейся истории» и переосмысление роли случая в романах Алданова – и шире – в литературе первой половины XX века в какой-то степени предвосхитили изменение научной картины мира – теорию синтеза детерминизма и случайности, которая была выдвинута в 70-е годы синергетикой. В классической динамике Ньютона мир рассматривался как полностью детерминированный и предсказуемый, и одного-единственного состояния системы было достаточно для полного ее описания – не только прошлых ее состояний, но и будущих. (Показательны слова Лапласа: «Случай – псевдоним незнания».) Постепенно, с возникновением и развитием термодинамики, квантовой механики, современная физика пришла к необходимости изучения не только изолированных, замкнутых систем, но и систем открытых, которые обмениваются с окружающим миром веществом, энергией, энтропией и, что не менее важно, информацией. (Ср. у Гете: «Природному Вселенная тесна / Искусственному замкнутость нужна».) Развитие открытых систем непредсказуемо, так как в критические моменты в точках бифуркации определяющую роль начинают играть именно случайные процессы.

Бифуркация – термин, происходящий от лат. *bi* – двойной, *furca* – развилка, означает, что эта точка даст альтернативные продолжения описываемого процесса, ветвление решения. В точках бифуркации однозначное предсказание будущего становится невозможным. Дальнейшее развитие осуществляется как реализация одной из нескольких равновероятных альтернатив. При этом в выборе пути главную роль играют флуктуации (по И.Р. Пригожину – «порядок через флуктуации»). Когда же выбор сделан, система снова продолжает развиваться по детерминистическим законам. И. Пригожин, И. Стенгерс пишут: «Мы считаем, что вблизи бифуркаций основную роль играют <...> случайные элементы, тогда как в интервале между бифуркациями доминируют детерминистические аспекты» [18]<sup>4</sup>.

Пока система находится в равновесии, развитие ее *устойчиво*; в точках бифуркации возникает *неустойчивость*, и тогда мельчайшие флуктуации (от лат. *fluctus* – бурление) могут сыграть решающую роль в определении выбора дальнейшего пути развития системы.

*Таким образом, случайное и закономерное перестают быть несовместимыми и предстают как два возможных состояния одного и того же объекта или процесса, и Случай в XX веке вводится и в описание научной картины мира, что позволяет ставить вопрос о формировании единой парадигмы мышления. А сущность этой парадигмы можно выразить словами Мандельштама, не Осипа Эмильевича, а Леонида Исааковича, крупнейшего физика, который в 30-е годы ставил вопрос о необходимости выработки концепции нового, «нелинейного» мышления.*

---

<sup>4</sup> Сам Илья Романович Пригожин рассматривает как такую цепь случайностей и закономерностей свою жизнь, свой путь в науке. На встрече в Институте истории естествознания и техники РАН он рассказал, как пришел к физике. Получив прекрасное гуманитарное образование (классические языки, история, история искусства, музыка), в 16 лет он готовился стать юристом и понял, что для этого необходимо изучить психологию. «Поэтому я пошел в библиотеку <...> и попросил какую-нибудь книгу по психологии. Как раз в это время в издательстве Дюма вышел первый том двадцатитомной энциклопедии по психологии. Мне дали этот том, что само по себе анекдотично: предложить шестнадцатилетнему мальчику для знакомства с психологией один из томов громадной энциклопедии! Первый том был посвящен хронаксии и вообще нейрофизиологии, а так как я имел гуманитарное образование, то ничего не понял. Тогда я купил маленькую книжку по биологии и начал читать ее. Там было много сведений по химии, а из химии я не знал ничего. Поэтому я купил какую-то книгу по химии, и, поскольку она начиналась с физикохимии, пришлось купить книгу и по физике. В этой книге по физике было довольно много математики, так что я начал учиться математике. Таким образом, мои юридические интересы естественнонаучными. Сегодня каждому ясно, что между нейрофизиологией и математикой существует определенная связь... Но в данный момент я хотел показать на примере, какую роль играет случай в истории жизни» [19].

В романах Алданова как открытая система предстает ход истории, где периоды равновесного развития, относительной стабильности чередуются с моментами взрывов – точками бифуркации. Не случайно в центре изображения у писателя – переломные моменты Истории: Девятое термидора, заговор против Павла I, смерть Наполеона, убийство Александра II, Берлинский конгресс, Учредительный съезд РСДРП, появление на политической арене Муссолини, война 1914 года, Октябрьская революция...

Подобный подход к осмыслению и изображению истории будет позднее использован и А.И.Солженицыным – в «узлах» «Красного колеса». Сам Солженицын, по образованию математик, писал: «В кривой истории, то есть в смысле математическом кривая линия истории – есть критические точки, их называют в математике особыми. Вот эти узловые точки – как узлы – я и беру в большой плотности <...> а потом между узлами перерыв, и следующий узел». Так десять дней «Августа Четырнадцатого» занимают два тома, «Октябрь Шестнадцатого» – два тома, «Март Семнадцатого» – четыре тома.

Алдановское понимание Истории и роли Случая в ней объясняет едкий скептицизм автора по отношению к «великим личностям», «делателям» истории: Тилли, Робеспьеру, Бисмарку, Биконсфильду, русским террористам и революционерам. Один из его героев – Мамонтов в романе «Истоки» (1942–1946) – называет их «люди тройного сальто–мортале» и сравнивает политическую арену с ареной цирка<sup>5</sup> (жизнь циркачей является одной из сюжетных линий романа): «Но у клоунов это хоть откровенно, у них самый безобидный способ забавлять людей, и цирк самый простой символ жизни. Конечно, для мира было бы гораздо лучше, если бы Бисмарк прошелся по канату над Ниагарой и на этом успокоил свою натуру человека тройного сальто–мортале» [3, с. 523].

С горечью отмечает Алданов, что решительно все выходит наперекор желаниям и ожиданиям подобных «делателей истории». Достаточно вспомнить изображение в «Истоках» убийства народовольцами Александра II в тот момент, когда им уже был подписан проект Конституции. «Россия сейчас на волосок от того, чтобы в политическом отношении превратиться во вторую Англию <...> Точно такие же «волоски» были в британской истории. Там они не оборвались, а у нас, по–видимому, оборвутся. <...> Кровавое дело Желябова так же застопорило освобождение России, как дела Бисмарка застопорили освобождение Германии. Огромная разница в том, что, хоть по замыслу, дело народовольцев входило, как эпизод, в борьбу человека за свободу» [3, с. 291]. Вспоминаются строки А.Кушнера: «Но Клио выбирает почему–то из многих наихудший вариант...». С присущей Алданову иронией, писатель так характеризует собственную позицию словами своего собеседника в «Ульмской ночи»: «Я знаю, вы в истории видите нечто вроде музея Гревена, где стоят рядышком вылепленные из воска знаменитые политические деятели и знаменитые уголовные убийцы» [21].

*Скептицизм писателя в отношении людей, берущихся вершить судьбы мира, пытающихся навязать событиям свою, «линейную», перспективу*

---

<sup>5</sup> Подобное сопоставление намечено автором в «Пещере» (1935), когда после подписания мирного договора в Версале, закончившегося оглушительными рукоплесканиями публики Клемансо и Ллойд–Джорджу, идет вставка из Тацита, которого читает Браун: «Народ же был только зрителем дела, присутствуя на нем как на цирковых играх. Рукоплесканиями приветствовал он то одних, то других. Но когда одна сторона слабея, когда побежденные укрывались в домах и лавках, он грозно требовал их выдачи и казни, а сам грабил их имущество. Лик Рима был отвратителен и страшен» [13, с. 96].

В XX веке синергетическая парадигма мышления влечет за собой «новый диалог человека с природой». Именно так звучит подзаголовок к книге И. Пригожина, И. Стенгерс [18]. В статье «Антропный принцип в синергетике» Е.Н. Князева и С.П. Курдюмов пишут: «Не субъект дает рецепты и управляет нелинейной ситуацией, а сама нелинейная ситуация, будь то природная, ситуация общения с другим человеком или с самим собой, как–то разрешается и в том числе строит самого субъекта. Нелинейное, творческое отношение к миру, таким образом, означает открытие возможности сделать себя творимым, позволить нелинейной ситуации или другому человеку влиять на себя, строить себя из другого. Похожий принцип находим в поэтическом государстве Поля Валери: «Творец – это тот, кто творим» [20].

развития, – другая центральная мысль новеллы «Деверу» и всей трилогии «Ключ» – «Бегство» – «Пещера» в целом. (На слова Клервилля о научно-фило-софской ценности учения большевиков Браун машет рукой: «Их учение – планиметрия, – мы, я думаю, вправе требовать и стереометрии» [13, с. 138].)

Действие вставной новеллы в «Пещере» начинается с изображения имперского сейма 1630 года, включает оно и собрание розенкрейцеров, упоминается в новелле и о только что образованном в Париже тайном обществе «La Cabale»: «Стремится это общество к счастью человечества, но для этого хочет установить в мире единую веру и мысль, так, чтобы все обо всем думали одинаково, жили, ни в чем никогда не уклоняясь. <...> Каждому члену общества прямо вменяется в обязанность идти на любое преступление, если только оно может быть обществу полезно. И чем больше кто преступлений совершит, тем больше этим гордится, ибо служит счастьем человечества» [13, с. 257].

Завершается же «Деверу» разговором розенкрейцера профессора Ионгмана с Декартом о возможности срочного «объединения лучших людей для победоносной борьбы со злыми» [13, с. 380]. Декарт, отвергая возможность однозначного определения, что такое зло, возражает: «Но для установления вашего мира не понадобятся ли долгие столетия, исполненные зла, подобно которому не сохранила человеческая память? <...> Не скрою от вас: в трудных человеческих делах я побаиваюсь всякой новой правды. Но та правда, которая при первом своем появлении выражает намеренье осчастливить мир, внушает мне смертельный, непреодолимый ужас. Палачей всегда приводили за собой пророки» [13, с. 382–383].

Подобно тому, как в XVII веке оказываются иллюзорны попытки германского сейма и тайных обществ переустроить мир, такой же утопичной оказывается деятельность государственных и международных организаций в XX веке: в тексте самого романа «Пещера» дано изображение (снова «ироническое сопоставление») двух полярно противоположных организаций: конференции Коминтерна и заседания Английского парламента.

Мысль о тщетности усилий подобных организаций проходит сквозной нитью через все творчество писателя. В «Девятом термидора» изображено заседание Конвента, в «Истоках» – Берлинский конгресс, в «Начале конца» и «Живи как хочешь» – сессии Объединенных Наций. Итог их оказывается одинаковым: «Берлинский конгресс отличался от других и не тем, что никто ничего не предвидел: так бывает на всех международных конгрессах и совещаниях. Но, по случайности, на нем, будто по заказу, решительно все вышло как раз наперекор желаниям, ожиданиям, надеждам его участников. Успехи оказались неудачами, победы – поражениями, то, что представлялось выгодным или необходимым, оказалось бесполезным и губительным, – разумеется, не для заправил Конгресса, а для их народов. Хотя бессмыслие сделанного выяснилось в значительной части очень скоро, высокие награды, полученные большинством делегатов, за ними остались, и их историческая репутация не пострадала» [3, с. 72]<sup>6</sup>.

Ход истории непредсказуем. Но, как писал М. Карпович, «существенно то, что Алданов говорил не только об огромной роли случая в истории, но и возможности борьбы со случаем. Там, где есть различные вероятности, есть и возможность выбора между ними» [24].

<sup>6</sup> Для подчеркивания алогичности свершающихся событий Алданов часто использует прием «остранения». Сам он писал о Толстом, что тот порою «проводит огромные исторические события через умственный мир людей, которые их явно понять не могут: Николай Ростов не дорос, конечно, до Аустерлицкого сражения» [22]. (Здесь любопытно неожиданное пересечение Алданова с работами формалистов, в частности В. Шкловского, использовавшего примеры из романов Толстого для иллюстрации приема «остранения» в литературе [23].) У самого Алданова по этому принципу изображена Французская революция – глазами молодого Юлия Штаала («Девятое термидора»), конспиративные собрания народовольцев – глазами Маши Муравьевой («Истоки»), заседание английского парламента – с позиции американского миллионера м-ра Блэквуда (потрясающая по иронии сцена в «Пещере»). Подобное «остранение» еще сильнее подчеркивает абсурдность происходящего.

Скептически относясь к роли политиков и военных, вершащих судьбы, Алданов приходит к выводу о значимости каждого – «случайного» – человека для хода истории. Говоря о недостатках учения математика Курно, Алданов отмечает как один из самых существенных «принимаемое им (Курно. – *Е.Т.*) принципиальное различие между явлениями малыми и глубокими. <...> На самом деле никакого принципиального различия тут нет: вторые – интеграл первых. Часто, например, теперь различают так называемую «малую историю» от истории «настоящей» или «большой». И здесь нет ни малейшего принципиального различия» [21, с. 203]. «Разница только в том, что эти частные цепи причинности менее важны, чем наполеоновская, что они малозаметны, что историкам очень удобно от них отвлечься <...> Историки дают десятки таких причин (войны 1812 года. – *Е.Т.*). <...> В действительности их было тысячи» [21, с. 234].

Таким образом, в понимании человека в истории Алданов спорит с двумя основными концепциями историософии и подходит к их синтезу. Он не принимает теорию о ключевой роли «великой личности» в истории. (Здесь он близок к Толстому, о котором писал, что тот «хотел представить себе Наполеона в образе ребенка, который, теребя тесемки внутри кареты, воображает, что он правит» [25].) Но чужда Алданову и концепция «истории без человека» (выдвигаемая французскими исследователями – школой Новой истории или Истории большой длительности – «долгого дыхания», изучающая безличные, коллективные исторические импульсы, которые направляют действия масс, не осознающих воздействующих на них сил). Как писал Ю.М.Лотман, «задача «освободить историю от великих людей» может обернуться историей без творчества и историей без мысли и свободы. Свободы мысли, свободы воли, т.е. возможности *выбора путей*» [26]. В своих романах Алданов подчеркивает, как важен оказывается выбор каждого человека и как от этого выбора коренным образом может быть изменен ход событий. В переломные моменты истории (в точках бифуркации) огромную роль начинают играть малые флуктуации, которые вблизи равновесного состояния системы не могли оказать на нее значительного воздействия. Такими решающими флуктуациями, благодаря которым система «выбирает» один из возможных путей развития, в критические моменты могут стать действия каждого человека или нескольких людей, вне зависимости от их положения на «иерархической лестнице». Поэтому невозможно предсказать историю, невозможно планировать ее. Поэтому так часто действия политиков приводят к противоположным результатам.

Выход, предлагаемый Алдановым, звучит в словах Декарта («Деверу»), который на предложение профессора Ионгмана стать розенкрейцером отвечает: «В вопросе же о каждом из нас *общего решения нет*» (курсив мой. – *Е.Т.*). Другой алдановский «мыслитель» – Николай Юрьевич Дюммлер («Живи как хочешь») скажет: «Именно в связи со всемогуществом Случая каждый человек находит свой путь к счастью, свой путь к освобождению. <...> Древние различали судьбу неотвратимую, они называли ее *поиға*, и судьбу, с которой можно бороться, – *түше*. И сущность <...> заключается в том, чтобы увеличивать «түше» за счет «мойра». Противопоставляя второй вид судьбы первому, человек *освобождается*» [10, с. 308].

Следует отметить, что в осмыслении судьбы, характера человека размышления Алданова снова пересекаются с идеями нелинейной динамики. В романе «Живи как хочешь» характеры героев романа по-разному «активизируются» (слово Алданова) во вставленной исторической драме «Рыцари свободы», где они становятся участниками заговора против правительства Франции, и в современной комедии «The Lie Detector». Обе пьесы принадлежат главному герою романа – Виктору Яценко (который связывает «Живи как хочешь» с трилогией «Ключ» – «Бегство» – «Пещера»). В письме к Наде он так излагает свой замысел: «В моих «Рыцарях» я отчасти активизирую тебя. <...> Вот что это значит. Я вижу людей, и, конечно, тебя первую, в их нормальной повседневной жизни, без больших событий. Но мне хочется представить себе, каким такой–то человек оказался бы, если бы попал в центр больших

драматических событий. Я не романист, но если б я был романистом, то вставил бы в роман пьесу. Человек был бы показан с двух сторон: *в романе я показал бы его в более или менее статическом состоянии, а в драме – в состоянии динамическом*<sup>7</sup> [10, с.21]. Осуществлением этой идеи героя и является роман «Живи как хочешь». Действующие лица романа – сам Виктор, Надя, Николай Юрьевич Дюммлер, Делавар, Макс Норфольк, мошенник Гранд – по-разному «активизированы» во вставных пьесах. Так, себя самого Виктор чуть-чуть «активизировал» в Лафайете, чуть-чуть в полковнике Бернаре, чуть-чуть, хоть по-иному, в старом индейце Мушалатубеке. Свой подход алдановский герой-писатель аргументирует словами Гете, который говорил, «будто никогда не слышал о преступлении, которого в известных обстоятельствах не мог бы совершить он сам. В каждом из нас заложены возможности преступника, пожалуй, в большей даже степени, чем некоторые другие, – это показала последняя четверть века...» [10, с.21].

По мысли Ю.М. Лотмана, при переводе событий внешнего мира на язык культуры происходит взрыв: культура, «будучи погружена во внешний для нее мир, втягивает этот мир в себя и выбрасывает этот мир переработанным (организованным) по структуре своего языка... Возникает взрывное пространство – пучок непредсказуемостей. Выбрасываемые им частицы первоначально движутся по столь близким траекториям, что их можно описывать как синонимические пути одного и того же. <...> Но в дальнейшем движение по разнообразным радиусам разносит их все дальше друг от друга, варианты одного превращаются в наборы разного (курсив мой. – Е.Т.)» [27].

В «Живи как хочешь» показано, как «*текст в тексте*» позволяет проследить различные траектории развития одних и тех же образов и судеб после момента взрыва – перекодировки их с языка реальности на язык художественного творчества – в рамках одного произведения.

Писатель представляет в одном произведении набор альтернативных путей для своих героев. И судьба для него – бесконечное ветвление, а не линейная причинно-следственная цепочка, как например, в античной традиции, где судьба понимается как «причинная цепь всего сущего» (у Диогена Лаэртского [28]), как «естественная соподчиненность, когда навечно одно следует за другим и сопутствует ему в неразрывном сплетении» (у Хрисиппа [28, с. 21])<sup>8</sup>.

В представлении судьбы как бесконечного ветвления, где дальнейший путь каждый раз зависит от выбора человека, думается, еще один смысл заглавия романа – «Живи как хочешь», восходящего к афоризму Эпиктета: «Свобода – не что иное, как право жить как хочется, ничего болсе». В «Ульмской ночи», которая писалась параллельно с романом, Алданов цитирует Винсента Шина: «У каждого из нас есть две жизни: та, которая есть, и та, которая могла быть», – и пишет: «Не могу с ним согласиться: у каждого из нас есть подлинная жизнь и тысяча других возможных» [21].

Ю.М. Лотман писал: «Представим себе кинофильм, демонстрирующий жизнь человека от рождения до старости. Просматривая его ретроспективно, мы скажем: у этого человека всегда была только одна возможность и он с железной закономерностью кончил тем, чем должен был кончить. Ошибочность такого

<sup>7</sup> Примечательно, что о необходимости сочетания нескольких языков для описания одного явления говорит Марк Алданов, знаменитый писатель и профессиональный химик (см. его монографию «Актинохимия» (1937), которую он называл своим лучшим произведением, и «К возможности новых концепций в химии» (1951)). Сам он изучал жизнь с позиции двух принципиально различных подходов – как художник и как ученый, описывал мир с помощью двух таких разных «языков».

<sup>8</sup> Хрисипп при этом использует слово *συνταξίς* – др. греч. «соподчиненность», и именно этот термин, по свидетельству Диогена, Хрисипп ввел в грамматический обиход. Судьба становится естественным, физическим подобием грамматического синтаксиса, причем сам термин «синтаксис», использовавшийся первоначально в области языкового анализа, затем был перенесен в сферу бытия. Таким образом, «язык, становясь как бы первичной материей для научного анализа, впоследствии экстраполирует свои внутренние законы на всю структуру мироздания» [28].

взгляда станет очевидной при перспективном просмотре кадров: тогда фильм станет рассказом об упущенных возможностях и для глубокого раскрытия сущности жизни потребует ряда параллельных альтернативных съемок. И возможно, что в одном варианте герой погибнет в 16 лет на баррикаде, а в другом – в 60 лет будет писать доносы на соседей в органы госбезопасности» [26].

Сомнение относительно непреложности судьбы и характера человека – одна из центральных тем романа XX века. Яркий пример – роман Макса Фриша «Назову себя Гантенбайн», где автор настаивает на исходной многовариантности жизни героев. На протяжении романа герой примеряет на себя и своих друзей совершенно различные социальные и жизненные маски: сам он выбирает роль слепого, а его любимая женщина Лиля становится то знаменитой актрисой, то просто домохозяйкой, то врачом, то итальянской графиней... «Я примеряю истории, как платья», – пишет он [29].

Автор заставляет героя проживать сразу несколько жизней, ставит одновременно несколько опытов на одной и той же исходной площадке. В романе нет неотступно развивающегося действия, как нет и постепенно развивающихся характеров. «Люди, – писал он в «Дневниках», – всегда пытаются найти локальную, точную причину каждого происшествя. Они стремятся все поставить в ряд и радуются достигнутой ясности» [30]. Макс Фриш развенчивает эту иллюзию. Он доказывает невозможность выстраивания строгого причинно-следственного ряда в развитии судьбы и характера человека, показывает, что будущее многовариантно.

*Многовариантность описания* становится в XX веке одной из характерных черт, объединяющих научную и художественную картины мира. Как способ наиболее полно отразить сложно развивающуюся реальность используется она в искусстве – в живописи М. Шагала, П. Филонова, когда в одной плоскости картины сведены разные точки зрения, ракурсы, перспективы, масштабы. Исследователи назовут многовариантность одной из характернейших черт живописи XX века [31]. Мощное развитие получит соединение разных точек зрения и ракурсов в кинематографе. По словам С. Эйзенштейна, «не глубока сцена, снятая с одной точки зрения». «Ракурс съемки раскрывает сокровенное в природе. <...> Сопоставление разнообразных точек зрения съемки раскрывает точку зрения художника на явление. Монтажный строй объединяет объективное бытие явления с субъективным отношением творца произведения» [32]. В литературе традиционное (для этого вида искусства, в отличие от живописи) раскрытие образа с разных точек зрения дополняется приемами альтернативного развития действия и альтернативного повествования. Примерами многовариантности описания могут служить три финала у Б. Брехта (в «Трехгрошевой опере»), четыре рассказчика у В. Фолкнера («Шум и ярость»), четыре варианта сказания о Прометее, рассказанного Ф. Кафкой («Прометей»), несколько историй, извлеченных из одного зачина у Хемингуэя («Посвящается Швейцарии»).

К необходимости многовариантности описания приходит и наука XX века. Открытие в 1923 году физиком де Бройлем дуализма волна-частица в поведении электрона поставило перед учеными сложную проблему. Дальнейшее развитие квантовой механики показало, что физическое содержание системы не исчерпывается каким-либо одним теоретическим языком. *Каждый язык способен выразить лишь какую-то часть реальности.*

*Вывод о потребности сосуществования и взаимодействия многих языков, многих точек зрения, думается, можно считать одним из итогов XX века: научным, эстетическим, нравственным уроком.*

В осмыслении возможной многовариантности развития человеческой судьбы, нелинейности развития истории и роли случая в ней Марк Алданов, скептически относящийся к традиционной исторической науке, любящий повторять, что «нет суда Истории, есть суд историков», одним из первых подходит к вопросу о необходимости корректировки самого исторического подхода. Спустя полвека эту проблему поднимет Ю.М.Лотман. «История развивается по вектору (стреле) времени. Направление ее определено движением из прошлого в

настоящее. Историк же смотрит на изучаемые тексты из настоящего в прошлое. Представлялось, что сущность цепочки событий не меняется от того, смотрим ли мы на них в направлении стрелы времени или с противоположной точки зрения» [26]. Между тем, «ретроспективность усиливает детерминированность» [26]. «Хаотическая для простого наблюдателя картина событий выходит из рук историка вторично организованной. <...> Произошедшее объявляется единственно возможным – «основным, исторически предопределенным». <...> Особенно же важно, что в его материале изолированы все случайности, взрыв трансформирован в закономерное линейное развитие» [27]. Используя сравнение Марка Блока истории с кинофильмом, в котором историку известен только последний кадр, Лотман пишет, что «это такой странный кинофильм, который, будучи запущен в обратном направлении, *не приведет* нас к исходному кадру» [26].

XX век приносит новое понимание истории – это «Клио на распутье» (используя лотманскую метафору). «Перекресток уже в санскрите обозначал судьбу, человеческие начала: разум и совесть. Перепутье предоставляет выбор идущему. Клио вышла на перепутье» [5].

### Библиографический список

1. Шкловский В. Гамбургский счет. М., 1990. С. 198.
2. Мандельштам О. Конец романа // Соч.: В 2 т. М., 1990. Т. 2. С. 203.
3. Алданов М. Истоки // Собр. соч.: В 6 т. М., 1991. Т.5. С.302.
4. Лотман Ю.М. Вместо заключения. О роли случайных факторов в истории культуры // Избранные статьи: В 3 т. Таллин, Т. 1. 1992. С. 474.
5. Лотман Ю.М. Клио на распутье // Избранные статьи: В 3 т. Т.1. С.468.
6. Бердяев Н. Смысл истории. М., 1990. С. 4.
7. Соловьев В. По поводу последних событий. Письмо в ред. // Вестник Европы. 1900. Кн. 9. С. 306.
8. Камю А. Эссе об абсурде // Бунтующий человек. М., 1990. С. 38.
9. Введенский А. Неоконченные произведения 1933–36 гг. (серая тетрадь) // ПСС. Анн Арбор, 1978. Т. 2. С. 188. Цит. по: Таршис Н., Констриктор Б. Историческая тема у обэриутов // В спорах о театре. Спб., 1992. С. 114.
10. Алданов М. Живи как хочешь // Собр. соч.: В 6 т. М., 1995. Т.5. С.171.
11. Алданов М. Девятое термидора // Собр. соч.: В 6 т. М., 1991. Т.1. С.187.
12. Алданов М. Чертов мост // Собр. соч.: В 6 т. М., 1991. Т.1. С.319.
13. Алданов М. Пещера // Собр. соч.: В 6 т. М., 1991. Т.4. С.301.
14. Сирин В. М. Алданов. Пещера // Современные записки. 1936. Т. LXI. С. 471.
15. Кизеветтер В. М. Алданов. Чертов мост // Современные записки. 1926. Т. XXVIII. С.477.
16. Богомолов Н.А., Малмстад Дж.Э. Михаил Кузмин. Искусство, жизнь, эпоха. М., 1996. С. 207, 259.
17. Волков В., Суран И. Концепция Судьбы как Встречи, Вины, Заслуги и Воздаяния у М. А. Булгакова: Иешуа и Воланд в судьбах героев «Мастера и Маргариты» // Понятие судьбы в контексте разных культур. М., 1994. С. 291.
18. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М., 1996. С.54.
19. У нас в гостях – Илья Романович Пригожин // Вопросы истории естествознания и техники. 1993. № 2. С. 5.
20. Клязева Е.Н., Курдюмов С.П. Антропный принцип в синергетике // Вопросы философии. 1997. № 3. С. 71.
21. Алданов М. Ульмская ночь // Собр. соч.: В 6 кн. М., 1996. Кн.6. С.412
22. Алданов М. Рецензия на «Эгерину» П. Муратова // Современные записки. 1923. Т. XV. С.404.
23. Шкловский В. Энергия заблуждения. М., 1981.
24. Карпович М. Комментарий. М. Алданов и история // Новый журнал. 1956. Т. XLVII. С.203

25. Алданов М. Загадка Толстого // Собр. соч.: В 6 кн. М., 1996. Кн. 6. С. 40.  
 26. Лотман Ю.М. Изъявление Господне или азартная игра? // Ю.М. Лотман и тартуско-московская семиотическая школа. М., 1994. С. 356.  
 27. Лотман Ю.М. Культура и взрыв. М., 1992. С. 208.  
 28. Цит. по: Гринцер Н.П. Грамматика судьбы (фрагмент теории Стои) // Понятие судьбы в контексте разных культур. М., 1994. С. 20.  
 29. Фриш М. Ното Фабер. Назову себя Гантенбайн. М., 1975. С. 216.  
 30. Цит. по: Павлова Н. Предисловие // Фриш М. Ното Фабер. Назову себя Гантенбайн. М., 1975. С. 9.  
 31. Батракова С. Образ мира в живописи XX века // На грани тысячелетий. Мир и человек в искусстве XX века. М., 1994. С. 38.  
 32. Эйзенштейн С. Избранные статьи. М., 1956. С. 140.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 25.05.98

## PHILOSOPHY OF RANDOMNESS IN THE NOVELS BY M.A. ALDANOV: SYNERGETIC ASPECT

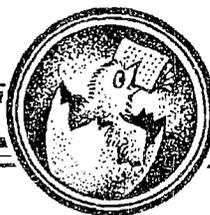
*E.G. Trubetskova*

Using the material of M. Aldanov works the article shows the change of the role of determinism and randomness in historical process in the literature of the XX th century and connected with it new principles and attitudes towards man depicture, the understanding of his fate and the whole history as an infinity chain of bifurcations.

Comparison of Aldanov's historiosophy with the ideas of non-linear dynamics makes it possible to put the question of unity of scientific and artistic pictures of universe, which has formatted in XX th century the indivisible paradigm of thinking.



*Трубецкова Елена Геннадиевна* – родилась в Саратове в 1973 году, окончила филологический факультет Саратовского государственного университета (1995). В настоящее время – аспирантка кафедры истории русской литературы XX века. Подготовила к защите кандидатскую диссертацию. Автор 9 научных публикаций. Область научных интересов – история и теория романа XX века, история науки, применение в изучении развития литературы и искусства идей нелинейной динамики



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИЙ

*Е.В. Мельникова*

Представлена пространственно–временная модель распространения эпидемии в человеческом обществе. Рассмотрен вывод основных уравнений динамики модели. Приведены результаты аналитических исследований поведения системы на фазовой плоскости с обоснованием ограничений, налагаемых на скорость волны. В модели учитывается приобретение иммунитета к заболеванию и плотность населения, зависящая от пространственной координаты.

Нелинейность окружающего мира предопределяет сложности для понимания закономерностей биологических, социальных процессов и прогнозирования их развития. Применяемые сегодня методы статистического анализа не дают полной картины исследуемых процессов и не отвечают на все вопросы. Применение методов нелинейной динамики для анализа данной проблемы является попыткой проникнуть в сущность процесса и проследить его динамику при различных начальных условиях. Последнее важно для прогнозирования распространения эпидемий и эффективной борьбы с ними.

В настоящее время известны различные модели распространения эпидемий в биологических системах [1, 2] и в человеческом обществе [3, 4]. Целью подобных исследований является создание моделей, способных наиболее адекватно описывать реальные ситуации, несмотря на то, что точное описание является невозможным из-за сложности и уникальности каждого естественного процесса.

В данной работе представлена пространственно–временная модель распространения эпидемии в человеческом обществе, которая базируется на уравнении диффузии с локальной и нелокальной модами роста. Вывод динамического уравнения основан на ряде положений, отличных от использованных в классической работе Ю.М. Свиричева [3], что позволяет расширить область применения модели. Модель лишена громоздкости, присущей модели, построенной в [5], более удобна для анализа, адекватнее описывает реальный процесс и допускает расширение области исследования путем введения иммунитета к заболеванию и переменной плотности населения. Предполагается, что распространение заболевания происходит при контакте инфицированного человека со здоровым. Перенос инфекции обусловлен перемещением людей по территории.

### 1. Описание модели и вывод основного динамического уравнения.

Пусть место постоянного проживания человека характеризуется вектором  $x$ , а его местонахождение в данный момент времени – вектором  $z$ . Введем

обозначения:  $n(\mathbf{x})$  – плотность населения в точке;  $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$  – функция плотности вероятности нахождения в точке  $\mathbf{z}$  в момент времени  $t$  человека, проживающего в точке  $\mathbf{x}$ ;  $U(\mathbf{x}, t)$  – относительное количество зараженных людей, проживающих в точке  $\mathbf{x}$ , в момент времени  $t$  ( $0 \leq U(\mathbf{x}, t) \leq 1$ ); относительное количество здоровых в этом случае выразится как  $[1 - U(\mathbf{x}, t)]$ . Тогда общее число людей, находящихся в точке  $\mathbf{z}$  в момент времени  $t$ , определяется как

$$N(\mathbf{z}, t) = \int_S n(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) dS_{\mathbf{x}}, \quad (1)$$

а количество инфицированных, находящихся в точке  $\mathbf{z}$  в момент времени  $t$ , как

$$A(\mathbf{z}, t) = \int_S n(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) dS_{\mathbf{x}}. \quad (2)$$

Интегрирование означает, что мы учитываем людей, проживающих во всех точках рассматриваемой территории. Символ  $dS_{\mathbf{x}}$  показывает, что при вычислении поверхностного интеграла интегрирование проводится по координатам постоянного места жительства  $\mathbf{x}$ .

Количество здоровых людей, проживающих в точке  $\mathbf{x}$  и находящихся в точке  $\mathbf{z}$  в момент времени  $t$ , определяется как

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) = n(\mathbf{x})(1 - U(\mathbf{x}, t))f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t). \quad (3)$$

Поскольку инфекция передается при контакте больного человека со здоровым, то количество заразившихся за время  $\Delta t$ , очевидно, будет пропорционально количеству здоровых, количеству больных и величине промежутка времени  $\Delta t$ . Поэтому количество людей, живущих в точке  $\mathbf{x}$ , но заразившихся в точке  $\mathbf{z}$  за время  $\Delta t$ , выразится следующим образом:

$$\Delta A^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) = kB(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)A(\mathbf{z}, t)\Delta t, \quad (4)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Подставляя в (4)  $B(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$  из формулы (3) и переходя к относительному количеству заразившихся

$$\Delta U^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) = \Delta A^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)/n(\mathbf{x}), \quad \text{при } n(\mathbf{x}) \neq 0$$

и

$$\Delta U^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) = 0, \quad \text{при } n(\mathbf{x}) = 0,$$

получаем

$$\Delta U^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) = k(1 - U(\mathbf{x}, t))f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)A(\mathbf{z}, t)\Delta t. \quad (5)$$

Понятно, что увеличение доли инфицированных людей, проживающих в точке  $\mathbf{x}$ , обусловленное контактами на всей территории проживания, есть

$$\Delta U(\mathbf{x}, t) = \int_S \Delta U^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) dS_{\mathbf{z}}. \quad (6)$$

Тогда, устремляя  $\Delta t$  к нулю, с учетом равенств (2), (5), (6) получим

$$\partial U(\mathbf{x}, t) / \partial t = \int_{S_{\mathbf{z}}} k(1 - U(\mathbf{x}, t))f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \int_{S_{\Psi}} n(\Psi)U(\Psi, t)f(\Psi, \mathbf{z}, t) dS_{\Psi} dS_{\mathbf{z}}, \quad (7)$$

где  $\Psi$  – векторная переменная интегрирования. Уравнение (7) описывает процесс распространения эпидемии во времени и в пространстве. В такой форме уравнение является очень сложным для исследования, поэтому преобразуем его. Для этого сделаем некоторые упрощающие предположения.

Будем полагать, что область расселения людей является бесконечно протяженной, плотность населения везде одинакова ( $n(\mathbf{x}) = n_0 = \text{const}$ ), функция плотности вероятности  $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$  не зависит от времени, а зависит от расстояния между точками  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$ . С учетом сделанных предположений уравнение (7) будет иметь вид

$$\partial U(x,t)/\partial t = k(1-U(x,t)) \int_{-\infty}^{\infty} f(|y|) n_0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} U(\psi,t) f(|\psi-z|) d\psi \right] dz. \quad (8)$$

С целью получения возможности аналитического исследования эпидемической модели рассмотрим **одномерный случай**. Сначала преобразуем внутренний интеграл, считая, что  $U(\psi,t)$  дифференцируема по пространственной координате. Разложим  $U(\psi,t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z$ . Пренебрегая высшими членами разложения (то есть считая, что вероятность передвижения людей на расстояния, на которых происходит значительные изменения  $U(z,t)$ , пренебрежимо мала), получим

$$\begin{aligned} A(z,t) &= n_0 \int_{-\infty}^{\infty} [U(z,t) + (\partial U(z,t)/\partial y)y + 1/2(\partial^2 U(z,t)/\partial^2 y)y^2] f(|y|) dy = \\ &= n_0 [U(z,t) + (\partial U(z,t)/\partial y) \int_{-\infty}^{\infty} y f(|y|) dy + 1/2(\partial^2 U(z,t)/\partial^2 y) \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(|y|) dy]. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(|y|) dy, \quad (9)$$

получим

$$A(z,t) = n_0 [U(z,t) + (\gamma/2)(\partial^2 U(z,t)/\partial z^2)]. \quad (10)$$

Подставляя (10) в уравнение (8), записанное для одномерного случая, получим

$$\partial U(x,t)/\partial t = k(1-U(x,t)) \int_{-\infty}^{\infty} A(z,t) f(|y|) dz. \quad (11)$$

Проведя аналогичные преобразования оставшегося интеграла, получим

$$\partial U(x,t)/\partial t = k(1-U(x,t)) [A(x,t) + (\gamma/2)(\partial^2 A(x,t)/\partial x^2)]. \quad (12)$$

Подставим (10) в (12) и, полагая  $\gamma^2 \ll \gamma$ , получим уравнение (12) в виде

$$\partial U(x,t)/\partial t = kn_0(1-U(x,t)) [U(x,t) + \gamma(\partial^2 U(x,t)/\partial x^2)]. \quad (13)$$

Вводя новый масштаб времени  $t_1 = kn_0 t$ , окончательно получим

$$\partial U(x,t_1)/\partial t = \gamma [1-U(x,t_1)] (\partial^2 U(x,t_1)/\partial x^2) + [1-U(x,t_1)] U(x,t_1). \quad (14)$$

Здесь  $\gamma$  – коэффициент, отражающий перемещение людей по территории. Индекс в переменной  $t_1$  будем в дальнейшем опускать.

Следует отметить, что в двумерном случае с помощью аналогичных преобразований исходное уравнение (7) можно привести к виду

$$\partial U/\partial t = \gamma(1-U)\nabla^2 U + (1-U)U, \quad (15)$$

где  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$  – оператор Лапласа.

Краевые условия к уравнению (14) сформулируем в виде

$$\begin{aligned} U(x \rightarrow \infty, t) &= 0, \\ U(x \rightarrow -\infty, t) &= C = \text{const}. \end{aligned} \quad (16)$$

Начальные условия во всех случаях будем полагать следующими:  $U(x, 0) = 0$  всюду кроме небольшой области  $\Delta x$ , являющейся очагом заражения.

Уравнение (14) является уравнением диффузии с локальной и нелокальной модами роста [6]. Члены уравнения, соответствующие нелокальной моде роста, содержат частные производные второго порядка по координате и описывают

увеличение количества зараженных, обусловленное контактами с инфицированными, проживающими в других точках территории. То есть, именно наличие этих членов отражает распространение инфекции вдоль пространственной координаты.

## 2. Случай излечимой болезни без приобретения иммунитета

Введем коэффициент  $b$ , отражающий скорость выздоровления. Уравнение (14) примет вид

$$\partial U(x,t)/\partial t = [1-U(x,t)][\gamma(\partial^2 U(x,t)/\partial x^2) + U(x,t)] - bU(x,t). \quad (17)$$

Исследуем аналитически возможность и условия существования решения уравнения (17) в виде бегущей волны. Перейдем к бегущей координате, сделав в уравнении замену вида  $\xi = x - vt$ ,

$$v dU(\xi)/d\xi = \gamma[1-U(\xi)](d^2 U(\xi)/d\xi^2) + U(\xi)[1-b-U(\xi)]. \quad (18)$$

Вводя новую переменную  $p = dU(\xi)/d\xi$ , перейдем к системе уравнений

$$dU(\xi)/d\xi = p$$

$$dp/d\xi = \{U(\xi)[1-b-U(\xi)] + vp\}/[-\gamma(1-U(\xi))]. \quad (19)$$

Исследуем систему с граничными условиями вида

$$U(\xi)=0 \text{ при } \xi=+\infty; U(\xi)=1-b \text{ при } \xi=-\infty. \quad (20)$$

Эти условия определяют (при любом конечном  $t$ ) волну, перед фронтом которой (то есть, в тех точках территории, куда волна еще не дошла) количество инфицированных равно нулю, а за фронтом уже установилось значение доли инфицированных, равное  $1-b$  (данная величина следует из численных исследований и рассмотрения положений при выводе уравнения модели).

Система уравнений (19) имеет на фазовой плоскости  $(U, p)$  две особые точки  $(0,0)$  и  $(1-b,0)$ . Выясним их тип. Характеристическое уравнение для  $U_0=1-b, p_0=0$  имеет вид

$$\gamma b \lambda^2 + v \lambda - (1-b) = 0.$$

Корни характеристического уравнения определяются формулой  $\lambda_{1,2} = \{-v \pm [(v^2 + 4\gamma b(1-b))^{1/2}]/(2\gamma b)$ , действительны и разных знаков, следовательно, данная особая точка является седлом. Характеристическое уравнение для  $U_0=0, p_0=0$  имеет вид

$$\gamma \lambda^2 + v \lambda + (1-b) = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda_{1,2} = \{-v \pm [v^2 - 4\gamma(1-b)]^{1/2}/(2\gamma)$ . Особая точка  $(0,0)$  при  $v < 2[\gamma(1-b)]^{1/2}$  является неустойчивым фокусом, а при  $v \geq 2[\gamma(1-b)]^{1/2}$  – неустойчивым узлом. Так как относительное количество заболевших по смыслу задачи не может быть отрицательным, то данная особая точка может быть только неустойчивым узлом. Таким образом, скорость волны ограничена снизу. В некоторых источниках [3, 7] обосновывается положение, что волна в подобных случаях будет распространяться с наименьшей скоростью.

На рис. 1 представлены результаты численного анализа модели. В начальный момент времени в системе присутствует незначительный очаг заражения. Затем доля заболевших начинает возрастать и достигает стационарного уровня, равного  $(1-b)$ . Кроме того, вследствие перемещения людей по территории, заболевание распространяется вдоль оси  $x$ .

Небольшое возмущение в системе порождает бегущую волну, распространяющуюся без изменения своего профиля и с постоянной скоростью.

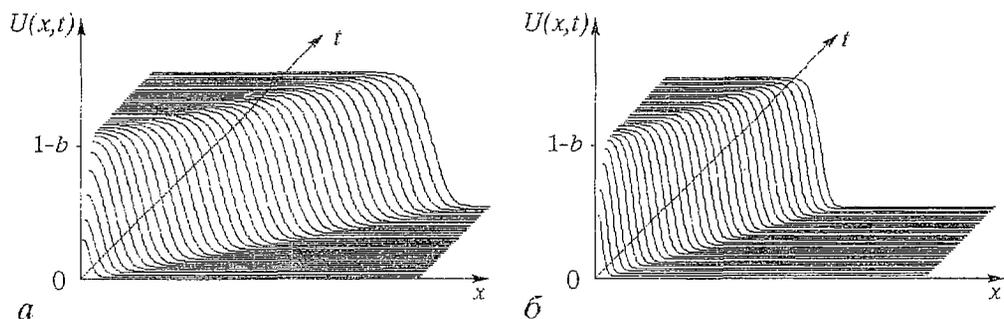


Рис. 1. Распространение эпидемии в случае излечимой болезни без приобретения иммунитета для различных коэффициентов  $\gamma$ , отражающих интенсивность перемещения людей по территории:  $a - 0.01$ ;  $b - 0.003$

Скорость волны зависит от параметров  $b$  и  $\gamma$ , то есть от скорости выздоровления и интенсивности перемещения людей по территории. Из сравнения рис. 1,  $a$  и  $b$  видно, что скорость распространения эпидемической волны выше в случае более интенсивного перемещения населения по территории.

При анализе динамического уравнения было выявлено, что коэффициент  $\gamma$  выражается через коэффициенты подвижности здоровых  $\gamma_1$  и подвижности больных  $\gamma_2$ , как  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . Если подвижность больных не ограничена, то  $\gamma_1 = \gamma_2$ . При полном ограничении подвижности больных людей ( $\gamma_2 = 0$ ) коэффициент  $\gamma$  уменьшается в 2 раза и, следовательно, уменьшится скорость эпидемической волны. При нормировке пространственной переменной полагалось, что скорость волны вдоль пространственной координаты зависит от  $\gamma^{1/2}$ . Отсюда при уменьшении  $\gamma$  в 2 раза скорость волны должна уменьшиться в  $2^{1/2}$  раз. Расчеты подтверждают этот результат.

### 3. Распространение эпидемии с учетом приобретенного иммунитета

Предположим, что после выздоровления люди приобретают иммунитет к заболеванию. Таким образом они переходят из группы восприимчивых к заболеванию в группу иммунизированных.

Пусть  $I(x,t)$  – относительное количество людей, обладающих иммунитетом, проживающих в точке  $x$ , в момент времени  $t$ . Тогда относительное количество здоровых людей запишется как  $1 - I(x,t) - U(x,t)$ , а для процесса распространения эпидемии получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} &= [1 - I(x,t) - U(x,t)] \{ \gamma (\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)) \} - bU(x,t), \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} &= bU(x,t) \end{aligned} \quad (21)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} U(x \rightarrow +\infty, t) &= 0, \\ U(x \rightarrow -\infty, t) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

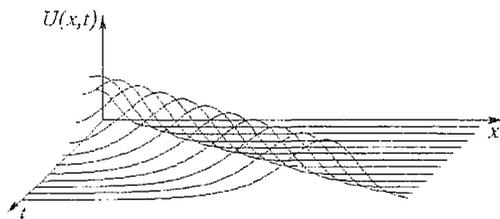


Рис. 2. Распространение эпидемии с учетом приобретенного иммунитета к заболеванию

В этом случае профиль волны качественно другой (рис. 2), так как люди, которые приобрели иммунитет не заболевают вновь. При наличии иммунитета к заболеванию в еще не пораженных эпидемией областях количество заболевших в ходе эпидемии значи-

тельно уменьшается, то есть вспышка эпидемии на этой территории гасится.

#### 4. Распространение эпидемии с учетом иммунитета к заболеванию и переменной плотности населения

Пусть плотность населения  $n(x)$  не является постоянной. В этом случае система уравнений, описывающих динамику модели преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \partial U(x,t)/\partial t &= [1 - I(x,t) - U(x,t)] \{ \gamma \partial^2 n(x) U(x,t) / \partial x^2 + n(x) U(x,t) \} - b U(x,t) \\ \partial I(x,t)/\partial t &= b U(x,t). \end{aligned} \quad (23)$$

Краевые условия такие же, как в предыдущем случае.

При преобразовании уравнения (7) для этого случая  $n(x)$  за знак интеграла не выносятся и все преобразования второго интеграла ведутся с функцией  $n(x)U(x,t)$  вместо  $U(x,t)$ .

На рис. 3 представлен фронт волны эпидемии с учетом переменной плотности населения. Начальное возмущение возникает в точке  $x_1$ , а не в начале координат, как в предыдущих случаях. Пунктиром показана зависимость плотности населения от координаты. Как видно из рис. 3, локальное возмущение сначала затухает, но когда фронт волны доходит до области, в которой плотность населения больше некоторого порогового значения, количество зараженных в этой области начинает быстро возрастать. Происходит буквально вспышка эпидемии. Далее процесс развивается, в основном, аналогично предыдущему случаю. Для каждого набора параметров существует свой порог плотности населения, восприимчивого к инфекции. Если реальная плотность выше этого порога, то происходит локальный рост количества заболевших в этой точке, пока количество восприимчивых к заболеванию вновь не опустится ниже критического порога за счет приобретения иммунитета. Под термином «локальный рост» понимается увеличение количества зараженных за счет локальной моды роста.

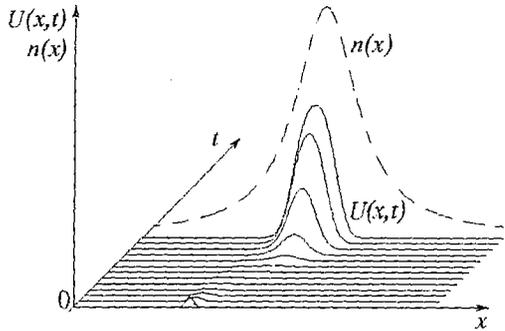


Рис. 3. Распространение эпидемии в случае переменной плотности населения

\* \* \*

Итак, в настоящей работе была представлена пространственно-временная модель распространения эпидемии в человеческом обществе, с помощью которой сделана попытка анализа изучаемого процесса, с учетом ряда существенных факторов, способствующих и препятствующих его развитию. По сравнению с моделью Ю.М. Свирежева [3], как видно из разделов 3,4, в данную модель легко вводятся приобретенный иммунитет и переменная плотность населения, что приближает модель к реальной ситуации. Отметим, что при определенных предположениях эта модель может описывать и процесс распространения эпидемии во времени и в пространстве в биологических популяциях.

В заключение хотелось бы принести благодарность моим научным руководителям Д.И. Трубецкову и А.А. Короновскому.

## Библиографический список

1. Hede B. Epidemic model with immunization // J. Phys. A. Math. Gen. 1989. Vol. 22. P. 439.
2. Svirezhev Yu.M. Diffuzion models in epidemiologi // Proc. IFIP conf. math. modelling immunology and medecine. N.-Y.: North Holland Press. Amst., 1983. P. 252.
3. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.:Наука, 1987.
4. Короновский А.А., Трубецков Д.И. Нелинейная динамика в действии: как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995. С.98.
5. Короновский А.А. Об одной модели распространения эпидемии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 1. С.140.
6. Grimson M.J., Barker G. C. Continuum model for the spatiotemporal growth of bacterial colonies// Phys. rev. E. 1994. № 49(2). P. 1680.
7. Байжанова К.С. Вопросы исследования скорости эпидемических волн // Моделирование процессов экологического развития. М.: ВНИИСИ, 1984. Вып. 8. С. 48.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 27.11.97  
после переработки 29.05.98

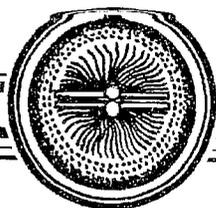
## NONLINEAR DYNAMICS OF AN EPIDEMIC SPREADING

*E.V. Melnikova*

A spatiotemporal model of an epidemic spreading in the human society is introduced. It is based on a reaction-diffusion equation with local and nonlocal modes of growth. The system behavior on the phase surface and limitation of the wave velocity are analysed. The immunization and density of population as the function of spatial coordinate are taken into account.



*Мельникова Екатерина Владиславна* – родилась в Саратове (1975). Закончила физический факультет Саратовского государственного университета (1997) и Саратовскую Поволжскую академию государственной службы (1998) по специальности «юриспруденция». В настоящее время аспирантка кафедры электроники, колебаний и волновых процессов СГУ.



Изв.вузов «ПНД», т.6, № 2, 1998

*В 1998 году выходит в свет учебное пособие*

**ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ НАУЧНЫХ РАБОТНИКОВ МЛАДШЕГО ВОЗРАСТА**

*А.П.Кузнецов, С.П. Кузнецов, Л.А. Мельников*

*Рецензент:* Б.П. Безручко, д.ф.–м.н., профессор

Саратов: Изд-во СГУ, 1998. 32 с. Тираж 175 экз.

ISBN 5-292-02168-7

© А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Л.А. Мельников, 1998

© Д.В. Соколов, обложка и иллюстрации, 1998

Оказывается, некоторые из этих ребят  
занимались прелюбопытными вещами.

*А.Стругацкий, Б.Стругацкий*

**От авторов**

Сборник задач основан на опыте проведения студенческих олимпиад по физике, радиофизике и компьютерной физике. Первая часть задачника представлена не совсем обычными разделами. Здесь задачи на оценки, подобие и метод размерностей, задачи для домашней лаборатории и компьютерных исследований, задачи–проблемы. Такая компоновка сборника создает атмосферу, приближенную к живой науке. Большим мастером подобных задач был Петр Леонидович Капица, и его знаменитые «Задачи» в свое время оказали на нас большое влияние. Надеемся, что представленный материал понравится всем, кто любит физику, и поможет следовать завету П.Л. Капицы: *«Наука должна быть веселая, увлекательная и простая. Таковыми должны быть и ученые»*. Мы снабдили каждый раздел задачника соответствующим эпиграфом из известного произведения братьев Стругацких. Мы очень любим эту повесть, но в процессе преподавательской деятельности обнаружили, что, к сожалению, большинство современных студентов с ней не знакомо. Поэтому мы решили написать не только полезный олимпиадный задачник, но и познакомить молодое поколение со стилем этого произведения наших замечательных фантастов.

*Подготовка задачника поддержана грантом Федеральной целевой программы «Интеграция» № 696.2.*

## Содержание

Предисловие 5. Оценки 6. Размерность 8. Подобие 9. Задачи для домашней лаборатории 11. Задачи для домашнего компьютера 13. Задачи–проблемы 16. Механика 18. Термодинамика и молекулярная физика 21. Электричество и магнетизм 23. Оптика 25. Колебания и волны 26. Радиофизика 29. Послесловие и комментарий 30.

*Читателям журнала «Прикладная нелинейная динамика» мы предлагаем ознакомиться с некоторыми задачами трех первых разделов.*

### Оценки

«...При трансгрессии только четырнадцать порядков...»  
... – Сплошные натяжки, – сказал Витька....

*А.Стругацкий, Б.Стругацкий*

1. Оцените количество теплоты, выделяющееся при экстренном торможении современного грузового железнодорожного состава.
2. Оцените давление, оказываемое на землю кошкой.
3. Оцените массу воды в океане.
4. Оцените время падения кирпича с самого высокого в мире небоскреба.
5. Оцените мощность электроснабжения современного жилого дома.
6. Оцените массу современного жилого дома.
7. Оцените «удаленность» горизонта для человека среднего роста.
8. Оцените длину шкурки, которую снимают, очистив килограмм картошки. Килограмм какой картошки можно быстрее очистить: крупной или мелкой?
9. Оцените давление, оказываемое Волгой на берега из-за силы Кориолиса.
10. Оцените наиболее «комфортную» температуру у поверхности тела человека. Известно, что суточный рацион питания содержит около 3000 ккал, коэффициент теплопроводности воды 0.6 Вт/км.
11. Оцените скорость, до которой разгоняются электроны в кинескопе цветного телевизора.
12. Оцените температуру газа, при которой он превращается в плазму. Потенциал ионизации имеет порядок 10 В.
13. Оцените частоту вращения электрона в магнитном поле Земли ( $B \approx 1$  Гс). Сравните ее с радиодиапазоном.
14. Оцените энергию покоя электрона.
15. Считая, что максимальная высота гор на Земле ограничена пределом прочности горных пород, оцените размер астероидов, начиная с которого они имеют приблизительно шарообразную форму. Считайте, что Земля и астероид сложены из одинаковых пород.
16. Оцените глубину модуляции светового потока лампочки накаливания в цепи переменного тока.
17. Ньютон был, по-видимому, первым, кто оценил расстояние до звезд. Он обратил внимание, что блеск некоторых звезд сравним с блеском Сатурна. Воспроизведите оценку Ньютона.
18. Считая известной скорость орбитального галактического движения Солнца (порядка 250 км/с), оцените суммарную массу звезд, расположенных внутри орбиты Солнца вокруг центра Галактики. Считая, что Солнце – типичная звезда Галактики, оцените число звезд в Галактике. Масса Солнца  $2 \cdot 10^{30}$  кг.

19. Оцените плотность вещества во Вселенной, считая, что в ней содержится  $10^{10}$  галактик, подобных нашей. Учитывайте только вещество, сосредоточенное в звездах.

### Размерность

...Корнеев... посадил попугая на весы...

*А.Стругацкий, Б.Стругацкий*

1. В известном мультфильме Удава измеряют в попугаях. Какие параметры Попугая можно использовать в качестве эталона для введения основных единиц?
2. Скорость звука в газе зависит от давления газа и его плотности. Установите вид этой зависимости. Используя табличные данные для скорости звука при нормальных условиях, найдите значение безразмерной константы в этой формуле.
3. Имеются две геометрически подобные пружины, изготовленные из одинакового материала. Как соотносятся их коэффициенты жесткости? Упругость материала характеризуется модулем Юнга  $E$ , имеющим размерность Н/м<sup>2</sup>.
4. Для планеты из несжимаемой жидкости массы  $M$  и объема  $V$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , напишите формулу для давления в центре.
5. Скорость коротких волн на поверхности воды зависит от коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ , длины волны  $\lambda$  и плотности жидкости  $\rho$ . Установите вид зависимости скорости волн от указанных параметров.
6. Частица с зарядом  $e$  движется со скоростью  $v$  параллельно плоской поверхности среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и проводимостью  $\sigma$  на расстоянии  $\alpha$  от нее. С помощью П-теоремы получите формулу для силы, тормозящей движение частицы.
7. В законе излучения Стефана – Больцмана  $S = \sigma T^4$  получите методом размерностей выражение для постоянной через фундаментальные физические постоянные – постоянную Планка  $\hbar$ , скорость света  $c$  и постоянную Больцмана  $k$ .  $S$  – энергия, излучаемая единицей площади в единицу времени.
8. Методом размерностей покажите, что величина  $\sigma T^4/c^3$  может быть проинтерпретирована как плотность «массы» равновесного теплового излучения. Оцените плотность, соответствующую реликтовому излучению, для которого  $T = 3^\circ \text{ К}$ . Сравните ее с плотностью вещества во Вселенной.

### Подобие

...На столе появился появился маленький Витька Корнеев, точная копия настоящего, но величиной с руку. Он щелкнул маленькими пальчиками и создал микродубля еще меньшего размера. Тот тоже щелкнул пальцами. Появился дубль величиной с авторучку. Потом величиной со спичечный коробок. Потом – с наперсток...

*А.Стругацкий, Б.Стругацкий*

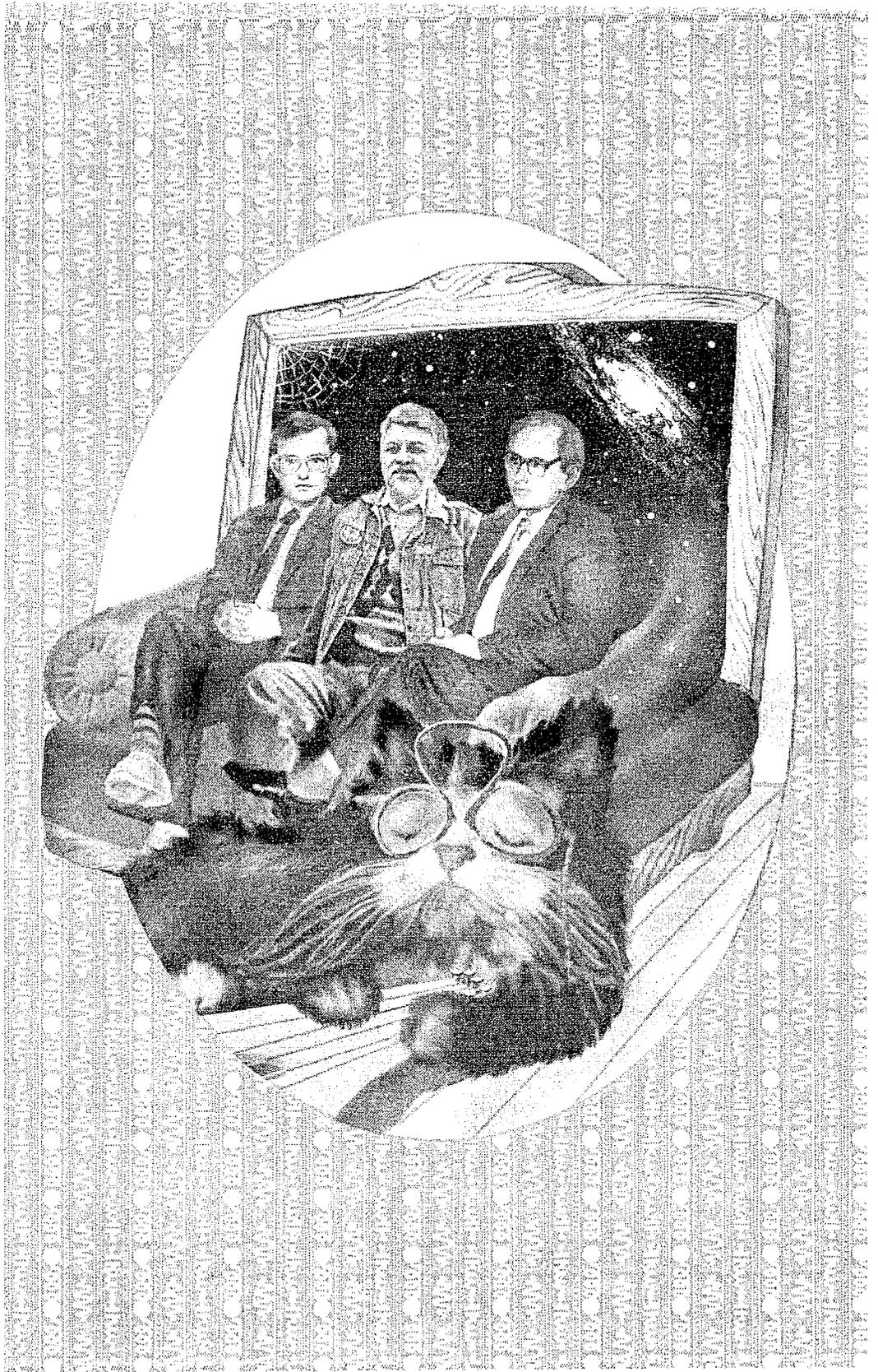
1. Предположим, что все размеры стальной проволоки изменили в  $n$  раз. Во сколько раз изменится: а) объем? б) масса? в) площадь поверхности? г) коэффициент жесткости? д) разрывное напряжение?

2. Икосаэдр со стороной 2 см весит 100 г. Сколько весит икосаэдр со стороной 8 см, изготовленный из того же материала?
3. После того, как человек вышел из воды после купания, на его коже осталось около 200 г воды. Оцените, какой процент веса Дюймовочки ростом 2.5 см составит вода после купания.
4. Кости ног некоторого животного в  $n$  раз прочнее костей другого, принадлежащего тому же семейству и имеющего ту же форму. Каково отношение ростов этих животных?
5. Великан и лилипут устроили соревнование: кто больше подтянется на перекладине. Кто выиграет и почему?
6. Имеются два клубка, намотанные из одинаковой шерстяной нити. Один из них в  $n$  раз больше другого. Во сколько раз длиннее нить, из которой он намотан?
7. Жидкость, несмачивающая стенки, налита в пробирку радиуса  $r$ . Найдите критерий, обеспечивающий подобие формы поверхности жидкости в двух пробирках.
8. Имеются два геометрически подобных соленоида, первый больше второго в 2 раза. Как соотносятся индуктивности этих соленоидов? Как соотносятся магнитные поля в соленоидах при одинаковом токе?
9. Имеются два подобных друг другу гальванических элемента, все размеры которых отличаются в 2 раза. Как соотносятся электрические характеристики этих элементов (э.д.с., емкость, внутреннее сопротивление)?
10. Имеются два геометрически подобных объемных металлических резонатора. Как соотносятся их собственные частоты?
11. Источник, испускающий электроны с нулевой скоростью, помещен в однородное электрическое поле  $E$  и однородное магнитное поле  $B$ . Магнитное поле уменьшили в 2 раза. Будет ли траектория подобна исходной? Если да, то найдите коэффициент подобия.
12. Атом водорода и однократно ионизированный атом гелия имеют подобные спектры. Во сколько раз отличаются частоты спектральных линий этих двух систем?

*Заинтересованный читатель может получить  
Сборник задач наложенным платежом.  
Стоимость наложенного платежа с почтовыми расходами 10 руб.*

Заказы направлять по адресу  
410601, Саратов, главпочтамт, а/я 3150  
Левиной Н.Н.

или по электронной почте  
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru



Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал–макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно–научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты –  
р/с №40503810000000000378 ЗАО АКБРиР «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

**Подписка на II–ое полугодие 1998 года**  
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498  
и по заявочным письмам непосредственно в редакции

Сдано в набор 11.05.98. Подписано к печати 8.07.98. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 10,75 (7,6). Уч.–изд. л. 10. Тираж 200 экз. Заказ 79

Издательство ГосУНЦ «Колледж»  
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.  
Тел. (845–2)514298, факс (845–2) 514298  
E–mail:and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

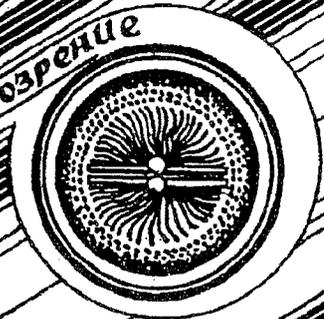
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1998



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

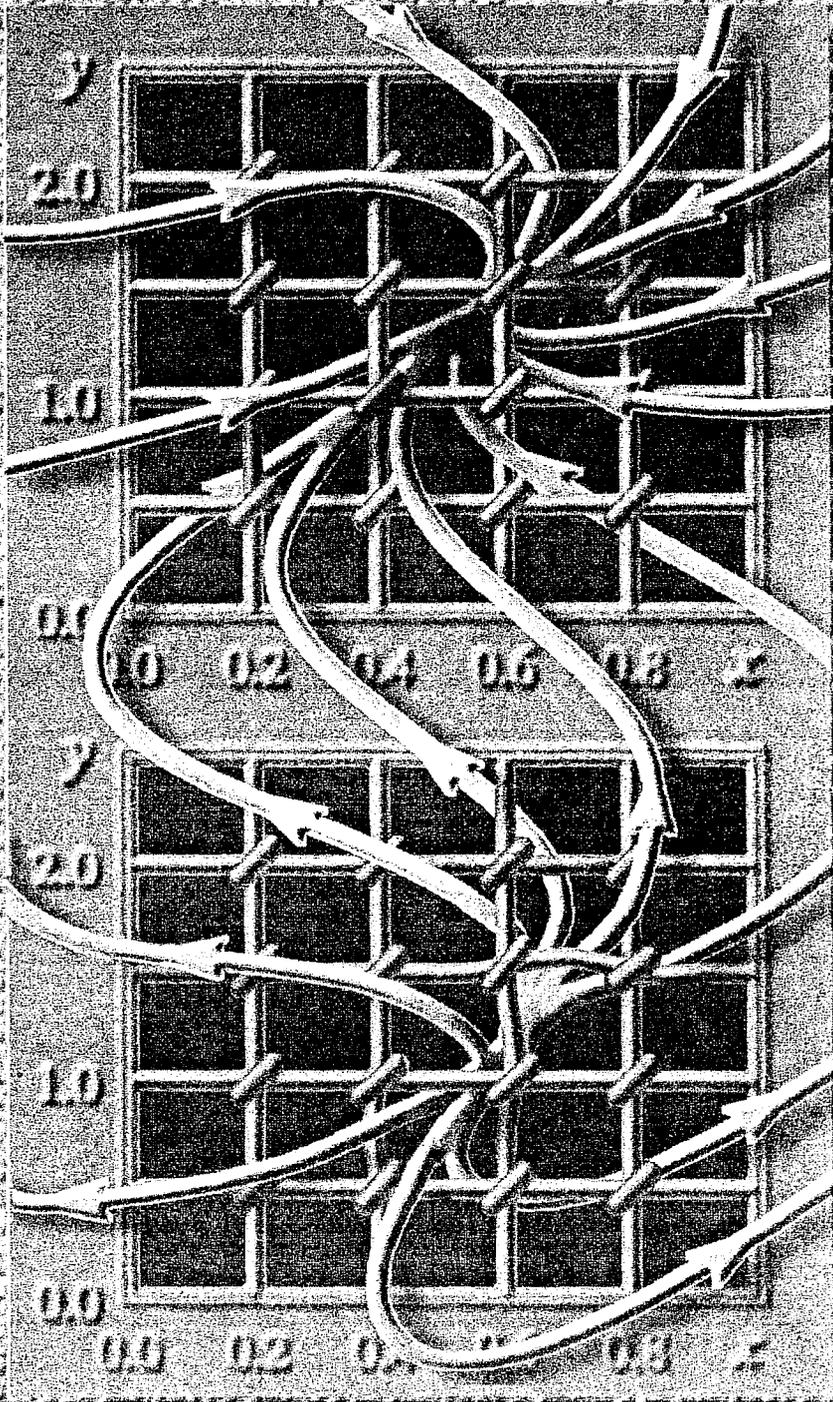
*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов преподавателей





**СВОБОДА - ЭТО ОСОЗНАННАЯ  
НЕОБХОДИМОСТЬ ПОРЯДКА**