

# Трикладная Деловая Динамика



*Российскому двуглавному орлу*





**Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы**



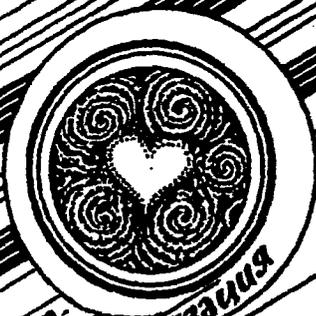
**Обзоры актуальных проблем  
нелинейной  
динамики**



**Конференции, семинары, симпозиумы**



**детерминированный хаос**



**Авто-волны, самоорганизация**



**Прикладные задачи  
нелинейной  
теории колебаний  
и волн**



**Нелинейная динамика в лицах.  
История персонажа**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва*

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет*

*Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет*

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН*

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет*

*Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатowski научный центр, Москва*

*Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет*

*В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино*

*С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН*

*П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет*

*Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет*

*Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород*

*Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный*

*В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет*

*В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет*

*В.К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород*

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

**КВАНТОВЫЙ ХАОС**

- Кузнецов С.П.* Отображение «кот Арнольда»: квантовый хаос и динамика операторов в представлении Гейзенберга . . . . . 3

**АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ**

- Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Информационный транспорт в активных электронных волокнах. Часть I. Уединенные волны . . . . . 49
- Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Информационный транспорт в активных электронных волокнах. Часть II. Волокно – система «реакция–диффузия» . . . . . 67

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

- Пойзнер Б.Н., Соснин Э.А.* Опыт классификации субъектов самоорганизации материи и информации . . . . . 74

**ИСТОРИЯ. PERSONALIA**

- Отчет за 1916–1917 год. Московское Физическое Общество имени П.Н. Лебедева . . . . . 87

- АНОНС . . . . . 86, 95

CONTENTS

QUANTUM CHAOS

Arnold's cat map: quantum chaos and operator dynamics in Heisenberg representation. *S.P. Kuznetsov* . . . . . 3

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Information transport in active electronic fibers. Part I. Solitary waves. *V.B.Kazantsev, V.I. Nekorkin* . . . . . 49

Information transport in active electronic fibers. Part II. The fiber as «reaction-diffusion» system. *V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin* . . . . . 67

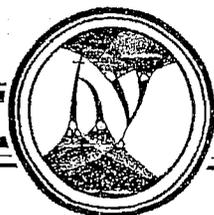
METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

Classification experience of matter and information self-organization subjects. *B.N. Poizner, E.A. Sosnin* . . . . . 74

HISTORY. PERSONALIA

Report of Moscow Physics Society (1916-1917) . . . . . 87

ANNOUNCEMENTS . . . . . 86, 95



## ОТОБРАЖЕНИЕ «КОТ АРНОЛЬДА»: КВАНТОВЫЙ ХАОС И ДИНАМИКА ОПЕРАТОРОВ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

*С.П. Кузнецов*

Рассматривается модельная квантовая система с дискретным временем, классическим аналогом которой является отображение с хаотической динамикой, известное как «кот Арнольда». В силу наложенных на фазовое пространство условий периодичности, состояние квантовой системы представляется векторами конечной размерности  $N$ , а операторы – матрицами  $N \times N$ . Целочисленный параметр  $N$  характеризует относительную величину квантовых эффектов; классическому пределу отвечает  $N \rightarrow \infty$ . Предложено отображение, описывающее эволюцию во времени операторов конечного сдвига по координате и импульсу в представлении Гейзенберга, и установлен явный вид соответствующего оператора эволюции в представлении Шредингера. Приводятся и обсуждаются результаты решения нестационарной задачи с начальными условиями в виде локализованного состояния, двух дельта-пиков, гауссова волнового пакета. Обсуждается представление квантовой динамики в фазовом пространстве в терминах распределения Хусими и функции Вигнера, а также спектр квазиэнергий и структура собственных векторов в свете динамики гейзенберговских операторов.

### Введение

Известно, что классические нелинейные системы могут демонстрировать динамический хаос. С другой стороны, описание динамики на фундаментальном уровне подразумевает использование не классической, а квантовой механики. Поэтому возникает принципиальный вопрос – какими особенностями будет характеризоваться динамика квантовых систем, классические аналоги которых обладают хаотическим поведением? Вопрос этот оказался тонким и нетривиальным, а для обозначения соответствующей области исследований привился термин «квантовый хаос» [1–6].

Как и в большинстве работ по квантовому хаосу, будем исходить из того, что имеется некоторая изолированная от остального мира квантовая система. Ее динамика в представлении Шредингера описывается как детерминированная эволюция во времени волновой функции (вектора состояния), а в представлении Гейзенберга – как изменение во времени операторов, которые в квантовой теории занимают место классических динамических переменных [7–10]. Предполагая отсутствие взаимодействия системы с макроскопическим окружением, мы тем самым исключаем из рассмотрения диссипацию, а также весь круг вопросов, касающихся теории измерений («редукция волновой функции»). При этом,

естественно, в поле зрения остаются только консервативные (гамильтоновы) системы.

Казалось бы, очевидные рассуждения приводят к выводу, что хаоса в квантовых системах просто не бывает. Действительно, из-за принципа неопределенности, для квантовой системы нельзя говорить о пребывании в заданной точке фазового пространства, а лишь в ячейке конечного размера, объем которой определяется постоянной Планка  $\hbar$ . Поэтому любая ограниченная область фазового пространства содержит лишь конечное число ячеек, и, следовательно, динамика в этой области не может быть хаотической. Другой аргумент основывается, в сущности, на линейности уравнения Шредингера. Для финитного движения это уравнение приводит к дискретному спектру собственных чисел – разрешенных значений энергии или, согласно фундаментальному соотношению  $\nu = E/\hbar$ , – дискретных частот. Любое мыслимое состояние представляется как линейная комбинация собственных состояний. В силу дискретности спектра, оно может эволюционировать во времени только периодически или квазипериодически.

С другой стороны, классическая динамика должна получаться из квантовой как результат определенного предельного перехода. На этом основан знаменитый принцип соответствия, сыгравший выдающуюся роль на раннем этапе становления квантовой теории [7,8]. Таким образом, можно сказать, что основная проблема теории «квантового хаоса» состоит в объяснении того, как появляется хаос при переходе к классическому пределу. Можно ли выявить особенности квантовой динамики, которые ассоциировались бы с возникновением хаоса в классике? Заметим, что нетривиальность проблемы квантования и перехода к классическому пределу для систем, не являющихся полностью интегрируемыми, была отмечена еще в 1917 году Эйнштейном [11].

Для понимания классического хаоса общепризнанное значение имеет изучение специально сконструированных простых моделей, подчас не очень реалистичных, но допускающих далеко идущий теоретический анализ. К их числу относятся такие системы с дискретным временем как отображение пекаря или гиперболическое отображение тора «кот Арнольда» [12–14]. Можно думать, что столь же существенную роль в понимании квантового хаоса должны играть квантовые аналоги названных модельных систем.

Разработка этой идеи началась с основополагающей работы Ханнэя и Берри, опубликованной в 1980 году [15]. С тех пор появилось значительное количество работ, исследующих модельные квантовые системы, классическими аналогами которых служат отображения с хаотической динамикой (см. обзор в последнем разделе).

Как уже говорилось, основное содержание проблемы квантового хаоса заключается в выяснении деталей квантово–классического соответствия. Наиболее явно параллель между квантовым и классическим описанием прослеживается при использовании представления Гейзенберга, когда квантовая динамика трактуется как эволюция во времени линейных операторов, сопоставленных динамическим переменным классической системы [7,8,16]. В работах, посвященных квантованию модельных отображений, этому аспекту квантово–классического соответствия не было пока уделено достаточного внимания.

Данная статья имеет целью изложить результаты, которые получаются при квантовании в представлении Гейзенберга отображения «кот Арнольда» – простейшей динамической системы с хаотической динамикой, фазовым пространством которой служит поверхность тора [13,14]. Это своего рода упражнение из элементарной квантовой механики, хотя достаточно нестандартное и акцентирующее внимание на несколько других аспектах квантовой теории, нежели это делают традиционные учебные курсы. Уровень изложения рассчитан на широкий круг читателей–физиков, в том числе студентов и аспирантов, знакомых с курсом квантовой механики.

В разделе 1 вводится классическое отображение «кот Арнольда», обсуждаются его свойства и дается механическая интерпретация этой

динамической системы, что подготавливает переход к квантовому рассмотрению.

В разделе 2 определяется гильбертово пространство состояний квантовой системы. Благодаря периодичности на торе по двум переменным, это пространство оказывается конечномерным. Его размерность — целое число  $N$  — можно трактовать как параметр, характеризующий относительную величину квантовых эффектов. Этот параметр обратно пропорционален постоянной Планка, так что переход к классическому пределу соответствует  $N \rightarrow \infty$ .

В разделе 3 производится квантование системы в терминах представления Гейзенберга для случая нечетных  $N$ . Построенное в результате операторное (матричное) отображение порождает периодическую во времени динамику матриц  $N \times N$ , которыми представляются операторы сдвига по координате и импульсу. Наличие хаоса в классике ассоциируется с тем обстоятельством, что период квантовой динамики в зависимости от  $N$  ведет себя сложным, нерегулярным образом и притом в среднем растет с увеличением  $N$ .

В разделе 4 рассмотрен переход от представления Гейзенберга к представлению Шредингера и получен явный вид унитарной матрицы  $N \times N$ , задающей оператор эволюции, или пропагатор системы.

В разделе 5 обсуждается порождаемая квантовым отображением на торе динамика волновых функций. Представлены как компьютерные результаты решения нескольких начальных задач, так и аналитическое исследование, проливающее свет на взаимосвязь между характером эволюции волновой функции в представлении Шредингера и динамикой операторов в представлении Гейзенберга.

В разделе 6 рассматривается квантовый аналог классической функции распределения — функция Вигнера, известная как очень полезный инструмент анализа квантово-классического соответствия. Основная цель состоит в том, чтобы показать, как выводятся свойства функции Вигнера из динамики гейзенберговских операторов.

В разделе 7 обсуждается задача на собственные векторы и собственные значения пропагатора. Демонстрируется, что для отображения с хаотической динамикой пространственная структура большинства собственных векторов похожа на реализацию комплексной случайной последовательности.

В разделе 8 представлен краткий обзор публикаций по проблеме квантовой динамики модельных отображений на торе.

В приложении А производится обобщение процедуры квантования отображения кота Арнольда на четные  $N$ . В приложении В рассматривается динамика в представлении Гейзенберга оператора, построенного как комбинация сдвигов по координате и импульсу. Показано, что с точками периодических орбит (циклов) классического отображения кота Арнольда ассоциируются определенные законы сохранения (операторы симметрии) для квантового оператора эволюции за период цикла. В приложении С обсуждается связь между периодическими орбитами классического отображения и спектральными свойствами квантовой системы.

## 1. Классическое отображение кота Арнольда и его механическая интерпретация

Имея в виду последующее обращение к квантовой задаче и тот факт, что квантовые представления в физике ассоциируются раньше всего с механикой, стоит ввести в рассмотрение основную модель именно в механической трактовке [17].

Пусть частица массы  $m$  способна свободно двигаться по окружности, длина которой  $L$ . Положение частицы задается величиной  $x$  — длиной дуги, отсчитываемой вдоль окружности. Пусть, далее, через каждый интервал времени  $T$  периодически включается на очень короткое время внешнее силовое поле. Распределение этого поля по  $x$  считается таким, что получаемый частицей импульс

прямо пропорционален ее координате в момент толчка:  $\Delta p = \gamma x$ . Наконец, последнее предположение, которое с физической точки зрения может показаться довольно искусственным, состоит в том, что по импульсу фазовое пространство обладает, как и по координате, свойством периодичности; соответствующий период обозначим  $L_p$ . Иными словами, значения импульса частицы, отличающиеся на целое число периодов  $L_p$ , считаются эквивалентными. Если непосредственно перед очередным толчком импульс и координата были  $p$  и  $x$ , то сразу после толчка координата не изменится, а импульс станет равен  $p' = p + \gamma x$ . После этого частица движется по инерции, ее импульс сохраняется, а скорость равна  $p'/m$ . Через время  $T$  приращение координаты составит  $\Delta x = p'T/m$ , так что перед очередным толчком имеем

$$p' = p + \gamma x \pmod{L_p},$$

$$x' = x + p'T/m \pmod{L_x},$$

где значок модуля напоминает, что координата и импульс определены с точностью до добавок в целое число периодов  $L_x$  или  $L_p$ . Выбирая параметры так, чтобы  $\gamma T/m = 1$  и  $L_p/L_x = \gamma$ , и нормируя импульс и координату, соответственно, на  $L_p$  и  $L_x$ , получаем

$$p' = p + x, \quad x' = x + p' \pmod{1}, \tag{1.1}$$

или

$$p' = p + x, \quad x' = p + 2x \pmod{1}. \tag{1.2}$$

Построенное преобразование переменных  $p$  и  $x$ , которое задает изменение состояния системы за единичный интервал времени, называют *отображением кота Арнольда* (Arnold cat map). Название объясняется тем, что предложивший это отображение В.И.Арнольд [13] для иллюстрации его действия использовал картинку в виде кота (рис. 1). Геометрически первый шаг процедуры состоит в

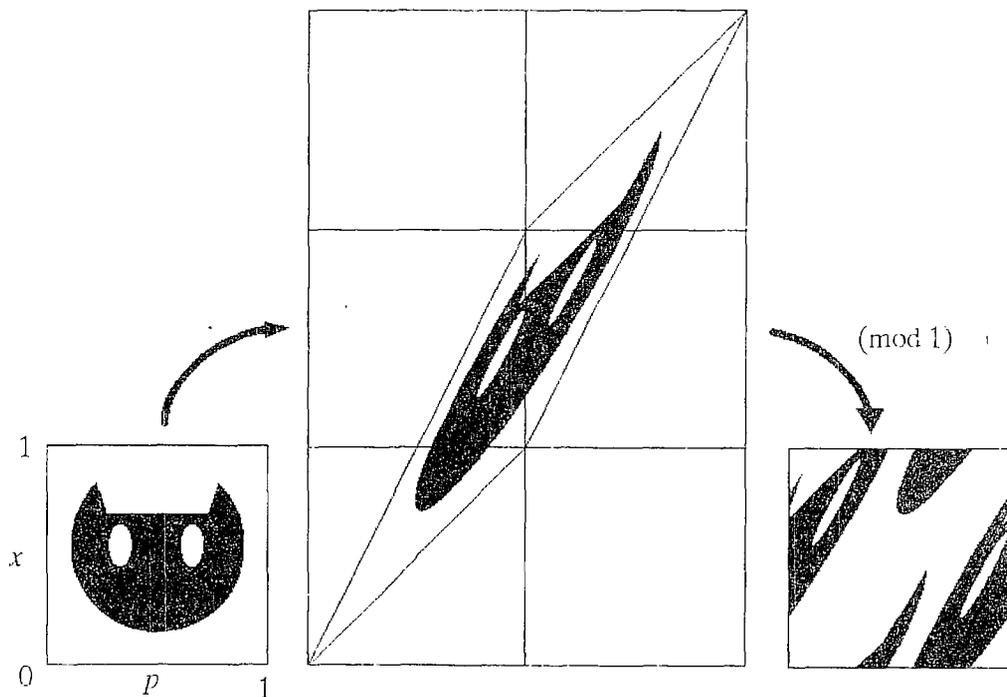


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация действия классического отображения «кот Арнольда»

линейном преобразовании координат  $\begin{bmatrix} p' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix}$ , а второй – в переносе элементов картинки, удалившихся за рамки единичного квадрата, обратно в него (последнее отвечает, конечно, операции взятия модуля). Благодаря периодичности по двум переменным  $x$  и  $p$ , фазовое пространство отображения можно мыслить как поверхность тора, хотя для наглядного представления динамики удобнее использовать просто единичный квадрат, как на рис. 1.

В нашей механической интерпретации движение частицы консервативно, то есть мы имеем дело с гамильтоновой системой. Математически это выражается в том, что детерминант матрицы  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , задающей отображение кота Арнольда, равен 1, и оно сохраняет меру (площадь) любой области, например, изображения кота.

Можно рассмотреть более широкий класс линейных отображений на торе, определяемых всевозможными матрицами  $2 \times 2$  с целочисленными элементами и единичным определителем:

$$\begin{bmatrix} p' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix} \pmod{1}, \quad (1.3)$$

$$ad - bc = 1.$$

Благодаря последнему условию, соотношение (1.3) является, по терминологии классической механики, *каноническим преобразованием*. Это позволяет трактовать переменные  $p$  и  $x$  как импульс и координату некоторой механической гамильтоновой системы. В зависимости от собственных чисел матрицы  $\lambda_1, \lambda_2$ , отображения вида (1.3) относятся к одному из трех типов [15]:

- гиперболический, если одно из собственных чисел больше, а второе меньше 1,

- параболический, если  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,

- эллиптический, если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексно-сопряженные.

Отображение кота Арнольда принадлежит к гиперболическому типу, поскольку его собственные числа  $\lambda_1 = (3+5^{1/2})/2$  и  $\lambda_2 = (3-5^{1/2})/2$ .

Приведем примеры отображений двух других типов.

Если в приведенном выше рассуждении исключить импульсные толчки, то получится отображение параболического типа, которое описывает свободное движение частицы:

$$p' = p, \quad x' = p + x \pmod{1}. \quad (1.4)$$

Каноническое преобразование, меняющее местами координату и импульс, служит примером отображения эллиптического типа:

$$p' = x, \quad x' = -p \pmod{1}. \quad (1.5)$$

На рис. 2 показано, как эволюционирует некоторая произвольно заданная начальная область при последовательных итерациях отображения гиперболического (а), параболического (б) и эллиптического (в) типа.

При итерациях гиперболического отображения закрашенная область – изображение кота – вытягивается вдоль направления первого (неустойчивого) собственного вектора на каждом шаге в  $\lambda_1$  раз и сжимается вдоль второго (устойчивого) собственного направления соответственно в  $\lambda_2$  раз. Величины  $\Lambda_1 = \log \lambda_1$  и  $\Lambda_2 = \log \lambda_2$  представляют собой ляпуновские показатели, причем старший показатель  $\Lambda_1$  положителен. Это известный признак наличия неустойчивости

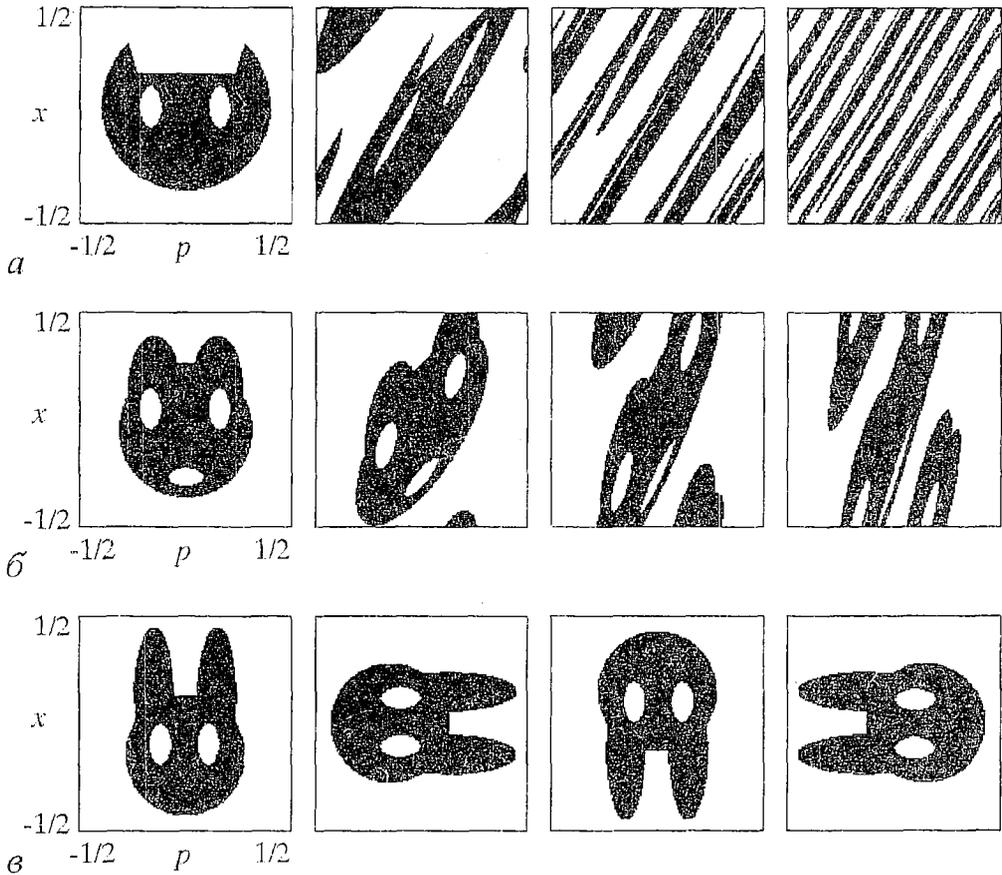


Рис. 2. Сравнение классической динамики на торе для отображений гиперболического (а), параболического (б) и эллиптического (в) типов. В гиперболическом случае имеет место перемешивание и эргодичность. В параболическом случае образ закрашенной фигуры остается по импульсу в своем определенном начальном интервале. Для эллиптического случая эволюция сводится к повороту без изменения формы фигуры. В отличие от рис. 1, начало координат – точка  $x=0$ ,  $p=0$  расположена в центре квадрата

фазовых траекторий по отношению к малому возмущению начальных условий и важнейший атрибут динамического хаоса.

После достаточно большого числа итераций изображение kota превращается в чрезвычайно узкую полосу, вытянутую вдоль неустойчивого собственного направления, то есть близкую к длинному отрезку линии, заданной уравнением  $p=[(\sqrt{5}^{1/2}-1)/2]x \pmod{1}$ . Из-за того, что угловой коэффициент иррационален, эта линия покрывает поверхность тора всюду плотно. Поэтому картина выглядит как набор большого числа узких чередующихся черных и белых полосок, в которые превратились, соответственно, множество точек, принадлежащих изображению kota, и дополнение этого множества. Выражаясь обыденным языком, «черная» и «белая» жидкости оказываются хорошо перемешанными. Свойство перемешивания в его точной математической формулировке строго доказывается для гиперболических отображений на торе и служит главным основанием для заключения о хаотической динамике этих систем [13,14]. В частности, из перемешивания следует свойство эргодичности, которое состоит в том, что вычисление статистических средних по ансамблю эквивалентно усреднению по времени вдоль типичной индивидуальной траектории. Сравнивая рис. 2, а–в, можно наглядно видеть, что ни параболическое, ни эллиптическое отображения свойством перемешивания не обладают.

## 2. Первый шаг в процедуре квантования: конечномерное гильбертово пространство, отвечающее динамике на торе

Рассмотрим вопрос о том, что будет означать с квантовой точки зрения периодичность фазового пространства одновременно по двум переменным – координате и импульсу, то есть тот факт, что фазовым пространством служит поверхность тора [15,17,18].

Если при квантовом описании одномерного движения частицы ее волновая функция в координатном представлении  $\psi(x)$ , а в импульсном –  $\tilde{\psi}(p)$ , то эти функции связаны прямым и обратным преобразованием Фурье:

$$\tilde{\psi}(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int \psi(x) \exp[-(i/\hbar)px] dx, \quad (2.1)$$

$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int \tilde{\psi}(p) \exp[(i/\hbar)px] dp.$$

Пусть теперь функция  $\psi(x)$  имеет период  $L_x$ , а функция  $\tilde{\psi}(p)$  – период  $L_p$ . Из периодичности  $\psi(x)$  следует, что ее фурье-образ – функция  $\tilde{\psi}(p)$  – представляет собой «гребенку» из  $\delta$ -функций, расположенных на оси волновых чисел в точках  $2\pi n/L_x$ , где  $n$  – целое, то есть с шагом по импульсу  $\Delta p = 2\pi\hbar/L_x$ . Поскольку функция  $\psi(p)$  тоже периодична, ее период  $L_p$  обязан содержать целое число шагов:  $L_p/\Delta p = N$ . Подставляя сюда выражение для  $\Delta p$ , получаем

$$L_x L_p = 2\pi\hbar N, \quad N - \text{целое.} \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что в импульсном представлении волновая функция полностью определяется заданием  $N$  комплексных коэффициентов  $\{\tilde{\psi}_k, k=0,1,\dots,N-1\}$ :

$$\tilde{\psi}(p) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\psi}_k \delta_{L_p}(x - kL_p/N) \quad (2.3)$$

(для упрощения записи принимаем обозначение  $\delta_L(\dots)$  для  $L$ -периодической последовательности  $\delta$ -функций.)

Аналогичное рассуждение можно провести и в обратном порядке: из периодичности  $\tilde{\psi}(p)$  следует, что функция  $\psi(x)$  есть «гребенка» из  $\delta$ -функций, расположенных на оси  $x$  в точках  $x=2\pi m\hbar/L_p$ , то есть с шагом  $\Delta x = 2\pi\hbar/L_p$ . Так как функция  $\psi(x)$  обязана иметь период  $L_x$ , должно быть  $L_x/\Delta x = N$ , и мы вновь приходим к соотношению (2.2). Итак, в координатном представлении волновая функция тоже полностью определяется заданием  $N$  комплексных коэффициентов  $\{\psi_m, m=0,1,\dots,N-1\}$ :

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m \delta_{L_x}(x - mL_x/N). \quad (2.4)$$

Таким образом, мы заключаем, что

1) гильбертово пространство состояний нашей системы есть конечномерное пространство комплексных векторов размерности  $N$ .

2) На параметры задачи, при которых возможно непротиворечивое квантовое описание системы с динамикой на торе, наложены ограничения, выражаемые формулой (2.2).

Как известно, в основу построения квантовой механики закладывается требование, чтобы при  $\hbar \rightarrow 0$  имело место соответствие с классической теорией. В задаче о динамике на торе, будучи не вправе трактовать  $\hbar$  как непрерывную переменную, мы можем рассматривать предельный переход на дискретном множестве значений, разрешенных формулой (2.2). В этом смысле классическому пределу отвечает  $N \rightarrow \infty$ .

Говоря о координатном представлении, мы теперь всегда будем иметь в виду просто  $N$ -мерный вектор  $\{\psi_m\}$ , а говоря об импульсном представлении вектор  $\{\tilde{\psi}_k\}$ . Подставляя (2.4) в (2.1), легко убедиться, что оба набора чисел  $\{\psi_m\}$  и  $\{\tilde{\psi}_k\}$  связаны дискретным преобразованием Фурье:

$$\tilde{\psi}_k = N^{-1/2} \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m \exp(-2\pi i m k / N) = N^{-1/2} \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m \alpha^{-mk}. \quad (2.5)$$

$$\psi_m = N^{-1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\psi}_k \exp(2\pi i m k / N) = N^{-1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\psi}_k \alpha^{mk}. \quad (2.6)$$

Здесь введено обозначение  $\alpha = \exp(2\pi i / N)$ , которое будет использоваться и далее. Для операторов прямого и обратного преобразования Фурье примем символы  $F$  и  $F^{-1}$ . Эти операторы представляются матрицами размера  $N \times N$ , элементы которых

$$F_{mn} = \alpha^{-mn} / N^{1/2} \quad \text{и} \quad F^{-1}_{mn} = \alpha^{mn} / N^{1/2}. \quad (2.7)$$

Если периоды  $L_x$  и  $L_p$  принять за единицу, то  $\psi(x)$  и  $\tilde{\psi}(p)$  имеют вид гребенки из  $\delta$ -функций с одинаковым шагом  $1/N$ . Согласно (2.2), квантовая постоянная  $\hbar$  подчинена тогда условию  $2\pi\hbar = 1/N$ .

В заключение раздела заметим, что в распространенной системе обозначений Дирака [10,9] вектор-столбец называется *кет-вектор* и обозначается  $|a\rangle$ , где  $a$  – какой-либо символ, помечающий данное состояние. Сопряженный вектор-строка называется *бра-вектор* и обозначается  $\langle b|$ , а их скалярное произведение («полная скобка» – bracket) есть  $\langle b|a\rangle$ . В нашем случае это векторы, имеющие  $N$  компонент:  $|\psi\rangle = [\psi_0 \ \psi_1 \ \dots \ \psi_{N-1}]^T$ ,  $\langle\phi| = [\phi^*_0 \ \phi^*_1 \ \dots \ \phi^*_{N-1}]$ , и при этом  $\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{r=0}^{N-1} \phi^*_r \psi_r$ .

### 3. Описание динамики отображения кота Арнольда в представлении Гейзенберга

Как известно, в квантовой механике каждой физической величине («наблюдаемой») сопоставляется эрмитов оператор. В представлении Гейзенберга считается, что операторы эволюционируют во времени, а вектор состояния, на который они действуют, от времени не зависит. В представлении Шредингера, наоборот, операторы считаются неизменяемыми, а во времени эволюционирует вектор состояния. В нашем случае операторы будут действовать в векторном пространстве размерности  $N$  и представляться матрицами  $N \times N$ . В этом разделе конструируется операторное отображение – квантовый аналог отображения кота Арнольда в представлении Гейзенберга.

Начнем с тривиального замечания, относящегося к классической задаче: отображение кота Арнольда можно переформулировать так, чтобы избежать использования операции взятия модуля. Для этого вместо  $p$  и  $x$  введем новые переменные

$$K = \exp(2\pi i p) \quad \text{и} \quad A = \exp(2\pi i x), \quad (3.1)$$

так что отображение (1.1) принимает вид

$$K' = KA, \quad A' = AK'. \quad (3.2)$$

С учетом этого замечания, описание динамики в представлении Гейзенберга целесообразно формулировать в терминах операторов, отвечающих величинам  $K$  и  $A$ . Как сейчас будет ясно, это операторы конечного сдвига по координате и импульсу, известные как операторы Вейля – Гейзенберга [19,20].

Рассмотрим оператор  $K_a = \exp((i/\hbar)ap)$ , где  $p = -i\hbar\partial/\partial x$  – оператор импульса,  $a$  – произвольное вещественное число. Если представить этот оператор в виде тейлоровского разложения, то очевидно его совпадение с оператором конечного сдвига на  $a$ :

$$K_a\psi(x) = \exp((i/\hbar)ap)\psi = \psi(x) + a\psi'(x) + (a^2/2)\psi''(x) + (a^3/6)\psi'''(x) + \dots = \psi(x+a). \quad (3.3)$$

В импульсном представлении действие оператора  $K_a$  отвечает просто умножению на экспоненту:  $K_a\tilde{\psi}_p = \exp((i/\hbar)ap)\tilde{\psi}_p$ .

Оператор сдвига по импульсу на  $b$  в координатном представлении определяется как умножение на экспоненту

$$A_b\psi(x) = \exp((i/\hbar)bx)\psi(x). \quad (3.4)$$

В импульсном представлении это оператор  $A_b\tilde{\psi}_p = \exp((i/\hbar)bx)\tilde{\psi}_p$ , где  $x = i\hbar\partial/\partial p$ .

Результат действия операторов  $K_a$  и  $A_b$  на функцию  $\psi(x)$  зависит от их порядка:

$$K_a A_b \psi = \exp[(i/\hbar)(bx+ba)]\psi(x+a), \quad A_b K_a \psi = \exp[(i/\hbar)bx]\psi(x+a).$$

Это можно записать в виде перестановочного соотношения

$$K_a A_b = \exp[(i/\hbar)ba] A_b K_a,$$

которое для операторов конечного сдвига заменяет известное правило коммутации  $px - xp = -i\hbar$  (и является его следствием).

Как уже говорилось, волновая функция, обладающая единичным периодом по координате и по импульсу, имеет вид гребенки  $\delta$ -функций с шагом  $1/N$  – и в координатном, и в импульсном представлении. Определим операторы сдвига на один шаг по координате и импульсу, взяв в качестве константы сдвига  $1/N$  и полагая  $\hbar = 1/(2\pi N)$ :

$$K = \exp(2\pi ip), \quad A = \exp(2\pi ix). \quad (3.5)$$

При этом соотношение коммутации принимает вид

$$KA = \alpha AK, \quad \alpha = \exp(2\pi i/N). \quad (3.6)$$

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы построить квантовый аналог отображения кота Арнольда в терминах операторов  $K$  и  $A$ . Мы просто заменяем в соотношении (3.2) величины  $K$  и  $A$  на соответствующие операторы и получаем *операторное отображение*

$$K' = KA, \quad A' = AK', \quad (3.7)$$

или, что то же самое,

$$K' = KA, \quad A' = AKA. \quad (3.8)$$

Таким образом, операторы  $K'$  и  $A'$ , отвечающие очередному шагу дискретного времени, выражены через операторы, определенные на предыдущем шаге. Чтобы новые операторы  $K'$  и  $A'$  по-прежнему можно было трактовать как операторы сдвига по координате и импульсу, для них должно быть справедливо то же самое коммутационное соотношение (3.6). Как нетрудно проверить, это действительно так:

$$K'A' = (KA)(AKA) = \alpha(AK)(AKA) = \alpha(AKA)(KA) = \alpha A'K'.$$

Поскольку для нашей системы вектор состояния представляется набором  $N$

коэффициентов  $\psi_m$ , операторы  $K$  и  $A$  должны задаваться матрицами  $N \times N$ . Естественно определить их следующим образом:

$$(K\psi)_m = \psi_{m+1}, \quad (A\psi)_m = \alpha^m \psi_m, \quad (3.9)$$

что соответствует матрицам с элементами

$$K_{mn} = \delta_{m+1,n} \quad \text{и} \quad A_{mn} = \alpha^m \delta_{mn}, \quad m, n = 0, \dots, N-1, \quad (3.10)$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \pmod{N}, \\ 0, & m \neq n \pmod{N}. \end{cases}$$

Как станет ясно в следующем разделе, схема квантования, исходящая из соотношений (3.7), (3.8), пригодна лишь для *нечетных* значений квантового параметра  $N$ . Именно этот случай только и обсуждается далее в основном тексте. Обобщение для четных  $N$  рассмотрено в приложении А.

В представлении Гейзенберга вектор состояния не зависит от времени, то есть в нашем случае от номера итерации, а операторы, отвечающие динамическим переменным, изменяются от итерации к итерации. Задавая в качестве начальных условий для операторного отображения (3.7) матрицы  $K^{(0)}=K$  и  $A^{(0)}=A$ , рекуррентным образом находим матрицы  $K^{(k)}$  и  $A^{(k)}$  для последующих моментов дискретного времени  $k$ . Например, для  $N=5$ ,

$$\begin{array}{cccccc} K^{(0)} & A^{(0)} & K^{(1)} & A^{(1)} & K^{(2)} & A^{(2)} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ \alpha^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

и т.д. Каждая матрица в этой последовательности получается просто как произведение двух предыдущих.

Из приведенного примера видно, что отличными от нуля каждый раз являются только матричные элементы, расположенные в одну линию, параллельно главной диагонали. На этом основании можно очень просто описать динамику операторов следующим образом. Положим

$$K_{mn}^{(k)} = \delta_{m+s,n} \alpha^{m+v}, \quad A_{mn}^{(k)} = \delta_{m+q,n} \alpha^{m+\mu}, \quad (3.11)$$

где  $s, r, p, q, \mu, v$  – целые числа, зависящие от номера временного шага  $k$  и определенные по модулю  $N$ , и пусть при  $k=0$  наложены условия, соответствующие начальным операторам (3.10):

$$s = 1, \quad r = 0, \quad p = 1, \quad q = 0, \quad v = 0, \quad \mu = 0. \quad (3.12)$$

Подставим (3.11) в (3.7) и произведем матричное умножение. Получаемые в результате новые матрицы имеют ту же форму (3.11), но с новыми параметрами  $s, \dots, v$ :

$$\begin{aligned} s' &= s+q, \quad q' = q+s', \quad r' = r+p, \quad p' = p+r' \pmod{N}, \\ v' &= v+\mu-rq, \quad \mu' = v'+\mu-ps' \pmod{N}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Заметим, что в соответствии с правилом коммутации (3.6), при всех  $k$  обязано выполняться равенство

$$ps - rq = 1. \quad (3.14)$$

Первые четыре уравнения (3.13) можно переписать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix} \pmod{N}. \quad (3.15)$$

Условие (3.14) остается в силе при последовательных итерациях, поскольку детерминант матрицы  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  единичный.

Согласно (3.13), две пары целых чисел,  $s$  и  $q$ ,  $r$  и  $p$ , определенных по модулю  $N$ , удовлетворяют уравнениям, совпадающим по виду с классическим отображением кота Арнольда (1.1), разница только в нормировке на 1 в (1.1) и на  $N$  в (3.13). Однако в силу того, что динамика происходит на конечном множестве целых чисел, она оказывается не хаотической, а периодической. Период зависит от  $N$ , и мы обозначим его  $T(N)$ . Это период цикла, стартующего из точки  $p=1/N$ ,  $x=0$ , в классическом отображении (1.1).

Новый момент по сравнению с классикой состоит в появлении двух дополнительных переменных  $\mu$  и  $\nu$ . Они подчиняются уравнениям, в которых  $s$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $q$  играют роль периодического внешнего воздействия. Для нечетных  $N$ , которые здесь только и рассматриваются,  $\mu$  и  $\nu$  выражаются через остальные переменные

$$\mu = ((N+1)/2)(p-q-pq-1), \quad \nu = ((N+1)/2)(r-s-rs+1) \pmod{N}, \quad (3.16)$$

что проверяется непосредственно с помощью (3.12)–(3.14).

В качестве примера рассмотрим снова случай  $N=5$ . Эволюция параметров, определяющих операторы  $K$  и  $A$ , дается таблицей:

$s$	1	1	2	0	3	4	4	3	0	2	1	...
$q$	0	1	3	3	1	0	4	2	2	4	0	...
$r$	0	1	3	3	1	0	4	2	2	4	0	...
$p$	1	2	0	3	4	4	3	0	2	1	1	...
$\mu$	0	4	3	0	4	4	3	1	0	1	0	...
$\nu$	0	0	3	2	3	1	0	2	4	0	0	...

Отсюда видно, что  $T(5)=10$ .

Поскольку операторы  $K^{(k)}$  и  $A^{(k)}$  полностью определяются числами  $s$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , они имеют тот же период изменения  $T(N)$  в зависимости от дискретного времени  $k$ . Можно показать, что в представлении Шредингера с этим же периодом будет эволюционировать волновая функция (вектор состояния). Поэтому величину  $T(N)$  естественно называть *квантовым периодом*<sup>1</sup>.

На рис. 3 показана зависимость квантового периода от  $N$  для отображения кота Арнольда. Эта зависимость носит нерегулярный характер, но в среднем период увеличивается с ростом  $N$ .

Иногда нам будет полезно иметь

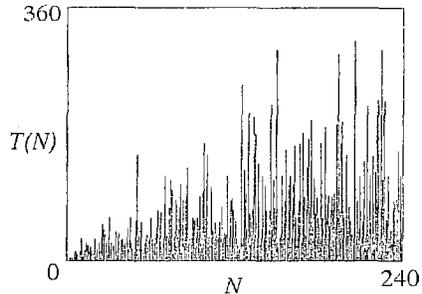


Рис. 3. Период возврата  $T(N)$  для квантового отображения кота Арнольда. Представлены значения периода как для нечетных  $N$  (отображение (3.8)), так и для четных (отображение (A.2), определенное в приложении). Для отображения параболического типа ((3.20) и (A.10))  $T(N)=N$  при  $N$  нечетном и  $2N$  при  $N$  четном. Для отображения эллиптического типа (3.22)  $T=4$  при любом  $N$ .

<sup>1</sup> Для отображений, квантуемых по Ханнэю – Берри, понятие квантового периода было введено в их работе [15]. В общем случае он может быть равен или вдвое больше, чем период возврата в матричном рекуррентном отображении. Вторая возможность, однако, исключена, если  $N$  нечетное.

альтернативное обозначение для той же самой последовательности операторов  $K^{(k)}$ ,  $A^{(k)}$ , но занумерованной в обратном порядке. Для этого будем пользоваться нижними индексами, то есть примем соглашение, что

$$K_{(k)} = K^{(T(N)-k)}, \quad A_{(k)} = A^{(T(N)-k)}. \quad (3.17)$$

Если выразить операторы, входящие в правую часть уравнений (3.8), через операторы, стоящие в левой части, можно получить форму записи операторного отображения, определяющую последовательность  $K_{(k)}$ ,  $A_{(k)}$  рекуррентным образом:

$$A_{(k+1)} = A_{(k)}K_{(k)}^+, \quad K_{(k+1)} = K_{(k)}^2A_{(k)}. \quad (3.18)$$

Необходимо сделать важную оговорку, что поскольку операторы  $K$  и  $A$  не коммутируют, выбор операторного отображения в виде (3.8) не является единственно возможным. В равной степени допустимыми следовало бы признать другие его версии, получаемые перестановкой  $K$  и  $A$  в правой части уравнений (например,  $K'=AK$ ,  $A'=KAA$  или другие варианты). Хотя коммутационное соотношение (3.6) всегда позволяет вернуться к такому же как в (3.8) расположению операторов в правых частях уравнений, при этом появляются множители вида  $\alpha$  в некоторой степени. На языке исходных переменных  $p$  и  $x$  эти множители отвечают аддитивным добавкам. Модификацию динамики вследствие выбора альтернативной версии операторного отображения можно представить как переопределение в каждый момент времени начала отсчета для координаты и импульса, причем величина квантового периода остается той же самой.

Добавим замечание, касающееся квантования линейного отображения на торе более общего вида (1.3). В случае, когда каждая из двух строк матрицы, задающей отображение, содержит четный элемент, имеется логически естественный выбор версии операторного отображения – использовать симметризованные комбинации  $K$  и  $A$ . Поскольку детерминант должен быть единичным, указанное условие означает, что матрица имеет форму

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{чет} & \text{нечет} \\ \text{нечет} & \text{чет} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \text{нечет} & \text{чет} \\ \text{чет} & \text{нечет} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

В первом случае операторное отображение можно задать в виде  $K'=K^{a/2}A^{b/2}K^{a/2}$ ,  $A'=A^{d/2}K^{c/2}A^{d/2}$ , а во втором  $K'=A^{b/2}K^{a/2}A^{b/2}$ ,  $A'=K^{c/2}A^{d/2}K^{c/2}$ . Данный класс отображений был указан как квантуемый в первоначальной работе Ханнэя и Берри [15]. Хотя отображение кота Арнольда не относится к этому классу, построение состоятельной квантовой теории все-таки оказывается возможным, но при этом все соотношения должны быть сформулированы несколько по-разному для нечетных и четных  $N$ .

Чтобы иметь основу для сопоставления ситуаций, отвечающих хаотической и регулярной динамике классических аналогов, остановимся на квантовании отображений параболического и эллиптического типа (1.4) и (1.5).

Операторный аналог отображения (1.4) выберем в виде

$$K' = K, \quad A' = AK, \quad (3.20)$$

откуда с учетом определения (3.11) получаем

$$\begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix} \quad (\text{mod } N). \quad (3.21)$$

$$v' = v, \quad \mu' = v + \mu - ps \quad (\text{mod } N).$$

Эти соотношения очень просты, так что с учетом начальных условий (3.12) легко находим, что  $s \equiv 1, r \equiv 0, p \equiv 1, v \equiv 0, q \equiv k, \mu \equiv -k \pmod{N}$ , где  $k$  – номер итерации. Квантовый период равен  $N$ .

В случае отображения (1.5) полагаем

$$K' = A, \quad A' = K^+, \quad (3.22)$$

где крестик означает операцию эрмитова сопряжения. Считая, что операторы представляются в виде (3.11), имеем  $\mu \equiv 0, v \equiv 0$  и

$$\begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix} \pmod{N}. \quad (3.23)$$

Квантовый период постоянен и равен 4.

Нерегулярная зависимость периода от квантового параметра  $N$  характерна, следовательно, только для гиперболического случая и, очевидно, ассоциируется с наличием хаоса в классическом пределе.

#### 4. Переход к представлению Шредингера

Пусть  $|\varphi\rangle$  и  $|\psi\rangle$  – некоторые векторы,  $L$  – линейный оператор, и  $|\varphi\rangle = L|\psi\rangle$ . Пусть  $U$  – другой линейный оператор, посредством которого определим преобразованные векторы  $|\varphi'\rangle = U|\varphi\rangle, |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ . Каким соотношением они будут связаны? Подействовав на исходное уравнение слева оператором  $U$  и предполагая, что определен обратный оператор  $U^{-1}$ , можно записать результат в виде  $U|\varphi\rangle = ULU^{-1}U|\psi\rangle$ , или  $|\varphi'\rangle = ULU^{-1}|\psi'\rangle$ . Можно сказать, что при переходе в пространство «штрихованных» векторов оператор  $L$  преобразуется в оператор  $L' = ULU^{-1}$ .

В квантовой механике особую роль играют преобразования, задаваемые унитарными операторами  $U$ . Они не нарушают структуры основных уравнений динамики и соответствует каноническим преобразованиям переменных в классической механике [7,8,10]. В нашем случае конечномерного пространства состояний каждое такое преобразование представляется унитарной матрицей размера  $N \times N$ , то есть матрицей, у которой эрмитово сопряженная матрица совпадает с обратной, а детерминант по модулю равен 1.

В представлении Гейзенберга операторы  $K^{(k)}$  и  $A^{(k)}$  эволюционировали в дискретном времени  $k$ , тогда как векторы состояния  $|\psi\rangle$ , на которые можно было действовать этими операторами, не зависели от времени. Произведем в каждый момент времени  $k$  такое унитарное преобразование  $U^k$

$$|\psi_k\rangle = U^k|\psi\rangle, \quad (4.1)$$

чтобы преобразованные операторы не менялись во времени, то есть

$$U^k A^{(k)} U^{-k} = A \quad \text{и} \quad U^k K^{(k)} U^{-k} = K \quad (4.2)$$

или

$$U^k A^{(k)} = A U^k \quad \text{и} \quad U^k K^{(k)} = K U^k. \quad (4.3)$$

В частности, на одном временном шаге,  $U A' U^{-1} = A$  и  $U K' U^{-1} = K$  или

$$U A' = A U \quad \text{и} \quad U K' = K U, \quad (4.4)$$

где  $A'$  и  $K'$  есть операторы, выраженные через  $A$  и  $K$  посредством соответствующего операторного отображения.

Выражение (4.1), характеризующее эволюцию вектора состояния, можно переписать в виде рекуррентного уравнения

$$|\psi_{k+1}\rangle = U|\psi_k\rangle. \quad (4.5)$$

Оператор  $U$ , определяющий преобразование состояния за один шаг дискретного времени, называют *оператором эволюции* или *пропагатором*. О такой формулировке квантового описания системы говорят как о *представлении Шредингера*.

Заметим, что при обратной во времени нумерации операторов  $K$  и  $A$  справедливы очевидные из (4.3) соотношения

$$U^k A = A_{(k)} U^k \quad \text{и} \quad U^k K = K_{(k)} U^k. \quad (4.6)$$

Найдем в явном виде матрицу оператора эволюции для отображения кота Арнольда. Согласно (3.10) матричные элементы операторов  $K$  и  $A$  есть  $K_{m,n} = \delta_{m+1,n}$ ,  $A_{m,n} = \delta_{m,n} \alpha^n$ , а из операторного отображения (3.7) за один временной шаг получаем

$$K'_{m,n} = \sum_k K_{m,k} A_{k,n} = \sum_k \delta_{m+1,k} \delta_{k,n} \alpha^n = \delta_{m+1,n} \alpha^n, \quad (4.7)$$

$$A'_{m,n} = \sum_k A_{m,k} K'_{k,n} = \sum_k \delta_{m,k} \alpha^k \delta_{k+1,n} \alpha^n = \alpha^{m+n} \delta_{m,n-1}. \quad (4.8)$$

Далее из  $UK' = KU$  следует

$$\sum_k U_{mk} \delta_{k+1,n} \alpha^n = \sum_k \delta_{m+1,k} U_{kn}, \quad \text{то есть} \quad U_{m,n-1} \alpha^n = U_{m+1,n}. \quad (4.9)$$

Из  $UA' = AU$  аналогичным образом имеем

$$\sum_k U_{mk} \alpha^{k+n} \delta_{k,n-1} = \sum_k \delta_{m,k} \alpha^k U_{kn}, \quad \text{то есть} \quad U_{m,n-1} \alpha^{2n-m-1} = U_{m,n}. \quad (4.10)$$

Эти два соотношения позволяют найти все матричные элементы через  $U_{00}$ . Из первого выражения последовательно получаем диагональные элементы:  $U_{m+1,m+1} = U_{m,m} \alpha^{m+1}$ , то есть  $U_{m,m} = U_{00} \alpha^{(1+2+\dots+m)} = U_{00} \alpha^{m(m+1)/2}$ . Далее, зная по одному элементу в каждой строке, с помощью второго соотношения находим элементы всей строки:

$$U_{m,n} = U_{00} \alpha^{m(m+1)/2 - mn + n^2}. \quad (4.11)$$

Чтобы оператор  $U$  был унитарным, следует выбрать  $U_{00}$  так, чтобы  $|\text{Det}(U)| = 1$ . Как можно показать, это обеспечено при  $|U_{00}| = N^{-1/2}$ . Фазовый множитель может быть произвольным, поскольку он не влияет на наблюдаемые величины (его выбор определяет начало отсчета для квазиэнергии, см. раздел 7). Удобно, тем не менее, конкретизировать фазовый множитель так, чтобы след матрицы  $U$  был действительным положительным числом. Для вычисления следа используем соотношение для гауссовой суммы [15,18]:

$$\begin{aligned} \text{Tr} U &= \sum_m U_{00} \alpha^{m(m+1)/2} = U_{00} \sum_m \exp[(i\pi/N)(m^2+m)] = \\ &= U_{00} N^{1/2} \exp(i\pi/4 - i\pi/(4N)) = U_{00} N^{1/2} \alpha^{-1/8} \exp(i\pi/4). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Положим  $U_{00} = N^{-1/2} \alpha^{1/8} \exp(-i\pi/4)$ , тогда

$$\begin{aligned} U_{m,n} &= \alpha^{1/8} \exp(-i\pi/4) \alpha^{m(m+1)/2 - mn + n^2} N^{-1/2} = \\ &= N^{-1/2} \exp\{(i\pi/N)[m(m+1) - 2mn + 2n^2 + 1/4] - i\pi/4\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

и при этом  $|\text{Det}(U)| = 1$  и  $\text{Tr}(U) = 1$ . Например, для  $N=5$

$$U = \frac{\alpha^{1/8} \exp(-i\pi/4)}{5^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{\alpha^{-1/8} \exp(i\pi/4)}{5^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^4 & \alpha^2 & \alpha^4 & 1 \\ \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha & \alpha^4 \\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^3 \\ \alpha^4 & \alpha^2 & \alpha^4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом месте становится понятной оговорка, сделанная в предыдущем разделе. Обнаруживается, что при четных  $N$  найденные выражения непригодны, так как по первому индексу матричные элементы  $U_{mn}$  не обладают периодом  $N$  (то есть после первого же шага по времени волновая функция перестала бы удовлетворять постулированному условию периодичности на торе). В приложении А показано, что это можно исправить надлежащим переопределением операторного отображения.

Как и для классического отображения кота Арнольда (раздел 1), эволюцию квантовой системы можно представить в две стадии («толчок» и «распространение»).

Стадия толчка в терминах операторов Вейля – Гейзенберга описывается отображением  $K'=KA$ ,  $A'=A$ . Пусть  $V$  – оператор эволюции для этой стадии. Подставляя матричные элементы (3.10), из соотношений  $VA'=AV$ ,  $VK'=KV$  получаем  $V_{m,n-1}\alpha^n = V_{m+1,n}$  и  $V_{m,n}\alpha^{n-m} = V_{m,n}$ . Второе уравнение означает, что  $V$  диагональная матрица, а первое позволяет выразить все ее ненулевые элементы через  $V_{00}$ . Чтобы матрица была унитарной, положим  $|V_{00}|=1$ , а фазовый множитель выберем так, чтобы след был действительным положительным числом. Тогда

$$V_{mn} = \exp(-i\pi/4) \alpha^{m(m+1)/2 + 1/8} \delta_{mn}. \quad (4.14)$$

Для стадии распространения операторное отображение запишем в виде  $K'=K$ ,  $A'=AK$ , а оператор эволюции обозначим  $W$ . Из  $WA'=AW$  следует, что  $W_{m,n-1}\alpha^{n-1} = W_{m,n}$ . Из  $WK'=KW$  имеем  $W_{m,n-1} = W_{m+1,n}$ , то есть вдоль любой линии параллельной главной диагонали все элементы матрицы равны. Полагая  $W_{00}=1/N^{1/2}$ , получаем

$$W_{mn} = \alpha^{(m-n)^2/2 + (m-n)/2} / N^{1/2}. \quad (4.15)$$

Оператор  $W$  диагонализуется переходом в импульсное представление, в котором его матрица выглядит как эрмитово сопряженная матрица  $V$ . Иными словами, операторы  $W$  и  $V$  связаны соотношением  $W=F+V+F$ , где  $F$  и  $F^+$  – операторы прямого и обратного преобразования Фурье.

Для отображения кота Арнольда оператор эволюции  $U$  можно, следовательно, записать в виде

$$U = WV \quad \text{или} \quad U = F+V+FW. \quad (4.16)$$

Непосредственным вычислением проверяется, что результат матричного умножения согласуется с выражением (4.13).

В заключение раздела несколько слов о других отображениях тора. Поскольку операторное отображение параболического типа (3.20) совпадает по виду с отображением на стадии распространения, его оператор эволюции представляется матрицей  $V$  (4.15). Чтобы получить оператор эволюции  $Y$  для отображения эллиптического типа (3.22), заметим, что каноническое преобразование  $p'=-x$ ,  $x'=p$  в квантовой задаче соответствует просто переходу из импульсного в координатное представление, то есть обратному преобразованию Фурье. Таким образом,

$$Y_{mn} = F^+_{mn} = \alpha^{mn} / N^{1/2}. \quad (4.17)$$

## 5. Динамика вектора состояния – компьютерные иллюстрации и аналитическое рассмотрение

До сих пор мы занимались в сущности разработкой квантового формализма для отображений на торе. Было бы интересно теперь получить впечатление о характере квантовой динамики и различии между системами, классические аналоги которых демонстрируют хаос или регулярное поведение.

Если задаться конкретным начальным вектором состояния  $|\psi_0\rangle$ , то можно отследить, как он будет меняться шаг за шагом при многократном действии матрицы пропагатора. Рис. 4 иллюстрирует эволюцию волнового пакета, имеющего в начальный момент минимальную ширину по координате и импульсу, допускаемую принципом неопределенности. Полученные численно результаты представлены в виде пространственно–временных диаграмм, на которых тона серого цвета кодируют квадрат модуля волновой функции. По горизонтальной оси отложен номер пространственной позиции  $m$ , а по вертикали вниз – дискретное время. Чтобы сравнить динамику систем, демонстрирующих в классике хаос и регулярное поведение, приведены диаграммы для отображений гиперболического, параболического и эллиптического типа.

Обратим внимание, что эволюция во времени во всех случаях периодическая, причем период возврата совпадает с тем, который был введен в разделе 3 при обсуждении динамики операторов Вейля – Гейзенберга. С точки зрения пространственного распределения волновых функций, никакой хаотизации не видно даже в гиперболическом случае. Для отображений всех трех классов более характерным кажется как раз наличие в каждый момент вдоль пространственной оси достаточно регулярного набора чередующихся интерференционных максимумов и минимумов.

Можно отметить, что для гиперболического отображения эволюция волнового пакета сопровождается его очень быстрым расширением на первых же

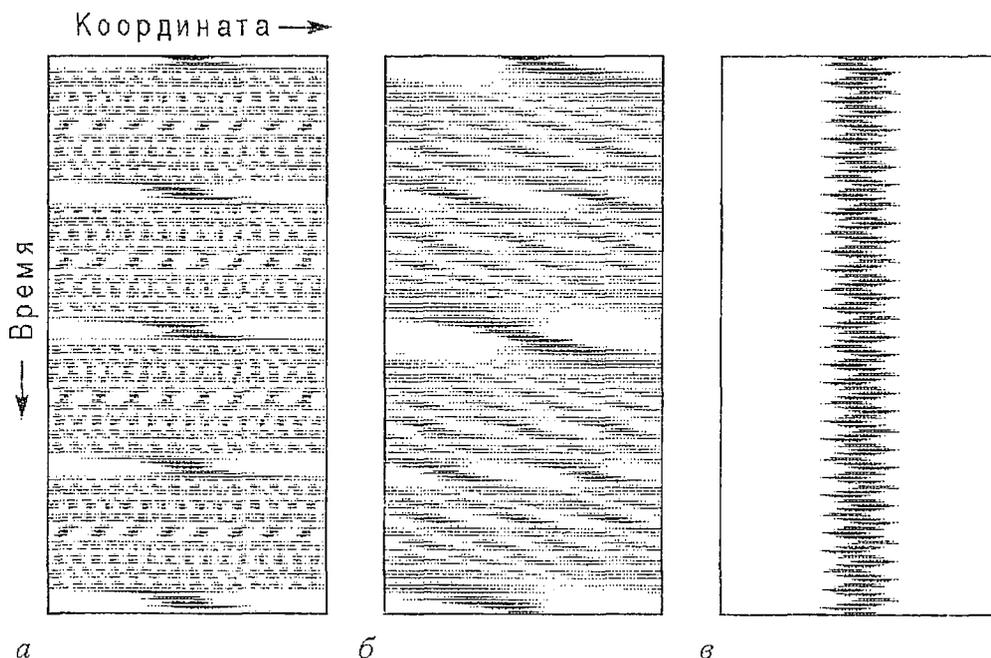


Рис. 4. Пространственно–временные диаграммы, иллюстрирующие динамику волнового пакета в квантовых системах, отвечающих отображениям на торе гиперболического (а), параболического (б) и эллиптического (в) типов. Начальное условие задано в виде  $\psi_m = \exp(-\pi m^2/N) \exp(2\pi i P m/N)$ , где  $N=59$ , а начальный сдвиг по импульсу  $P=3$ . Начало отсчета пространственной координаты в центре диаграмм. Квадрат модуля волновой функции кодируется тонами серого цвета

шагах дискретного времени. После этого распределение амплитуды по длине системы становится более или менее однородным, хотя встречаются моменты времени, когда отклонение от однородности значительное, и распределение концентрируется в нескольких узких интервалах (темные пятна на светлом фоне). Для параболического отображения расплывание пакета происходит гораздо медленнее. Когда характерная ширина пакета становится сравнимой с длиной системы, на краях появляются темные и светлые интерференционные полосы. В дальнейшем эта интерференционная картина покрывает всю систему, изменяясь во времени сравнительно медленно и регулярным образом. Для эллиптического отображения волновой пакет не расплывается и просто совершает колебания с периодом в четыре итерации.

Представляется важным обсудить, как соотносятся характер эволюции волновой функции квантовой системы и динамика операторов Вейля – Гейзенберга, связанная весьма непосредственно с классическим отображением. Имея в виду этот вопрос, применим к начальным задачам следующий единый подход.

Предположим, что из операторов  $K$  и  $A$  с помощью сложения и умножения построен такой оператор  $Z$ , что задаваемое в качестве начального условия состояние  $|\psi^{(k)}\rangle$  является собственным вектором этого оператора:

$$Z|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \quad (5.1)$$

и собственное число  $\lambda$  невырождено. Подействуем на это уравнение слева оператором эволюции за  $k$  временных шагов  $U^k$  и представим результат в виде  $U^k Z U^{-k} U^k |\psi\rangle = \lambda U^k |\psi\rangle$ . Отсюда следует, что вектор состояния в момент  $k$ ,  $|\psi^{(k)}\rangle = U^k |\psi\rangle$ , находится из решения задачи на собственные векторы оператора  $Z_{(k)} = U^k Z U^{-k}$  для собственного числа  $\lambda$ . Решение однозначно (с точностью до фазового множителя) в силу того, что собственное число, по предположению, невырождено, а унитарное преобразование оператора  $Z$  не меняет его спектр. Заметим теперь, что в представлении Гейзенберга оператор  $Z$  в момент времени  $k$  есть  $Z^{(k)} = U^{-k} Z U^k$ . Очевидно,  $Z_{(k)}$  – это та же самая последовательность операторов, но занумерованная в обратном порядке. Оператор  $Z_{(k)}$  выражается посредством сложения и умножения через операторы  $A_{(k)}$  и  $K_{(k)}$  точно таким же образом, как оператор  $Z$  выражался через  $A$  и  $K$  (см. пример в приложении В).

Далее этим методом будут рассмотрены задачи об эволюции во времени, когда в качестве начального условия берется

- пространственно–локализованное состояние,
- два дельта–пика, разнесенных по координате на некоторое расстояние (аналог знаменитого квантово–механического опыта с интерференцией от двух щелей),
- волновой пакет с шириной по координате и импульсу минимально допустимой принципом неопределенности.

**5.1. Задача об эволюции пространственно–локализованного начального состояния.** Состояние  $|\psi\rangle$ , локализованное на позиции  $m=l$ , есть не что иное как собственный вектор оператора  $A$  с собственным числом  $\lambda_l = \alpha^l$ :

$$A|\psi\rangle = \lambda_l |\psi\rangle. \quad (5.2)$$

Следовательно, вектор  $|\psi^{(k)}\rangle = U^k |\psi\rangle$ , описывающий состояние в момент времени  $k$ , будет собственным вектором оператора  $A_{(k)}$  с тем же собственным числом  $\lambda_l$ :

$$A_{(k)}|\psi^{(k)}\rangle = \lambda_l |\psi^{(k)}\rangle. \quad (5.3)$$

Все  $N$  собственных чисел  $\lambda_l$  невырождены, поэтому каждый собственный вектор находится однозначно с точностью до фазового множителя.

Матричные элементы оператора  $A_{(k)}$  представляются в виде  $(A_{(k)})_{m,l} = \delta_{m+q,l} \alpha^{p(m+q)+\mu}$ , где параметры  $p, q, \mu$  отвечают  $k$ -му шагу итерации в обратном времени уравнений (3.13) – кот Арнольда, (3.21) – отображение параболического типа, (3.23) – отображение эллиптического типа. Уравнение (5.3), следовательно, принимает вид

$$\Psi_{m+q} \alpha^{p(m+q)+\mu} = \lambda_l \Psi_m, \quad (5.4)$$

или

$$\Psi_{m-q} = c_m \Psi_m, \quad (5.5)$$

где  $c_m = \alpha^{p(m-l)+\mu}$ , причем предполагается выполненным условие цикличности  $\Psi_{m+N} = \Psi_m$ . Задавшись значением  $\psi$  в некоторой точке  $m_0$ , с помощью (5.5) последовательно получаем значения в точках  $m_0 - q, m_0 - 2q, \dots \pmod{N}$ . Пусть наибольший общий делитель для чисел  $q$  и  $N$  есть  $g = \text{gcd}(q, N)$ , и пусть  $N_g = N/g$  и  $q_g = q/g$ . Тогда после  $N_g$  шагов круг замкнется, так как  $m_0 + q N_g = m_0 \pmod{N}$ . Чтобы решение  $\Psi_m$  было

нестривиальным, начальное значение  $m_0$  должно быть выбрано так, чтобы  $\prod_{x=m_0}^{m_0-1} c_{m_0-xq} = 1$ .

Подставляя сюда выражение для  $c_m$  и выполняя в показателе суммирование арифметической прогрессии, находим, что должно выполняться равенство

$$\alpha^{N_g(m_0 p - l + \mu) - p q N_g (N_g - 1)/2} = 1. \quad (5.6)$$

Используя (3.14), можно показать, что это обеспечено при выборе

$$m_0 = g + s(l - \mu + p q (N_g - 1)/2). \quad (5.7)$$

Из (5.5) следует, что только в  $N_g$  точках  $m_0, m_0 - q, \dots, m_0 - (N_g - 1)q \pmod{N}$  значения  $\Psi_m$  ненулевые. Поскольку  $|c_m| = 1$ , все они отличаются только фазой, и, как следует из условия нормировки, по модулю должны равняться  $N^{-1/2}$ . С помощью (5.4) находим

$$\Psi_{m_0 - xq} = N_g^{-1/2} \alpha^{x(m_0 p - l + \mu) - p q x(x-1)/2 + \varphi}, \quad (5.8)$$

где  $\varphi$  – произвольная фазовая постоянная<sup>2</sup>.

Найденные соотношения применимы и в двух крайних частных случаях.

1. Если  $q$  и  $N$  – взаимно простые, то  $g=1, N_g=N$ ; при всех  $m$  от 0 до  $N-1$  имеем  $|\Psi_m| = N^{-1/2}$ . При этом  $m_0$  можно взять любым, например,  $m_0=0$ .

2. Если  $q=0$ , то  $g=N, N_g=1$ , и  $\Psi_m = \delta_{m_0,m}$ .

Резюмируем вытекающую из проведенных рассуждений связь между характером эволюции волновой функции и классическим отображением.

Для квантовой системы в представлении Гейзенберга операторы сдвига по координате и импульсу выражаются через две пары определенных по модулю  $N$  целочисленных переменных,  $(s, q)$  и  $(r, p)$ , и каждая пара подчиняется динамическим уравнениям, совпадающим по виду с исходным классическим отображением. Одна из переменных  $q$  особенно существенна с точки зрения структуры волновой функции в координатном представлении: волновая функция становится «разреженной» (амплитуды  $\Psi_m$  отличны от нуля только на некотором множестве

<sup>2</sup> На самом деле достаточно найти собственный вектор для какого-нибудь одного значения  $l$ , например,  $l=0$ , а остальные векторы можно получить из него действием оператора  $K_{(k)}$  в степени от 1 до  $N-2$ . Расположив найденные векторы в виде столбцов матрицы, получаем матрицу  $U^k$ . Указанный способ вычисления (с точностью до общего фазового множителя) требует только знания операторов  $A_{(k)}$  и  $K_{(k)}$ . Процедура же их получения с помощью рекуррентных соотношений для параметров  $s, \dots, r$  гораздо экономичнее, нежели «лобовое»  $k$ -кратное перемножение матриц  $U$  размера  $N \times N$ .

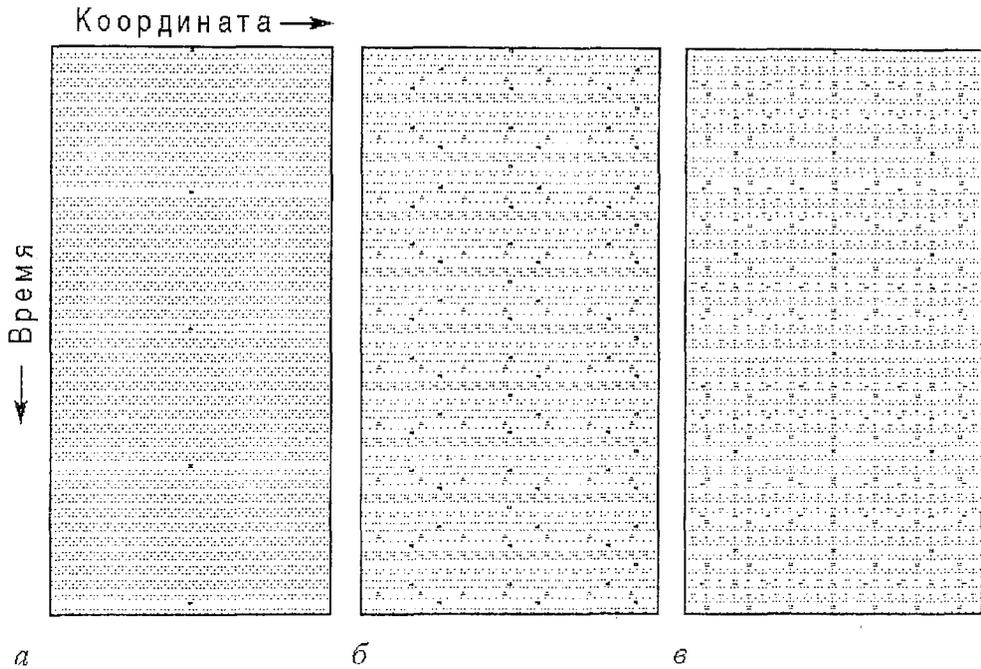


Рис. 5. Диаграммы, иллюстрирующие квантовую динамику состояния, исходно локализованного в начале координат: *a* – отображение кот Арнольда,  $N=59$ , *б* – отображение кот Арнольда,  $N=63$ , *в* – отображение параболического типа,  $N=63$

равноотстоящих позиций), если  $q$  имеет с квантовым параметром  $N$  общий делитель. Таким образом, с точки зрения квантовой динамики на торе, важна арифметическая природа числа  $N$ , а именно, структура разложения  $N$  на простые множители.

В случае параболического отображения (3.20) эта структура полностью раскрывается в процессе динамики, поскольку переменная  $q$  пробегает в течение квантового периода все целочисленные значения от 0 до  $N-1$ . Доля моментов времени, когда волновая функция разрежена, дается отношением  $\phi(N)/N$ , где  $\phi$  – известная в теории чисел функция Эйлера<sup>3</sup>. С другой стороны, для эллиптического отображения (3.22) упомянутая арифметическая структура числа  $N$  вообще несущественна:  $q$  оказывается попеременно нулем или числом взаимно простым с  $N$ , то есть волновая функция осциллирует между двумя возможными ситуациями – полной локализации и полной делокализации. Для гиперболического отображения кота Арнольда переменная  $q$  в течение квантового периода посещает лишь часть возможных значений, и при этом не проявляет видимой регулярности. Соответственно, в пределах квантового периода ситуации разреживания и полной делокализации волновой функции чередуются хаотически. Таким образом, в этом последнем случае арифметическая структура числа  $N$  существенна, но ее проявление замаскировано.

На рис. 5 можно видеть, как в процессе динамики сменяют друг друга ситуации полной локализации, разреживания и полной делокализации.

Если число  $N$  простое, то картина выглядит наименее содержательной (рис. 5, *a*): чаще всего волновая функция полностью делокализована (амплитуда равномерно распределена по координате) и лишь один или два раза за период наступает локализация в одной точке. Далее мы увидим, что в задачах с другими начальными условиями связь между арифметическими свойствами числа  $N$  и характером квантовой эволюции обнаруживается и для простых  $N$ .

<sup>3</sup> По определению,  $\phi(N)$  есть количество натуральных чисел от 1 до  $N-1$ , являющихся взаимно простыми с  $N$ .

## 5.2. Задача об эволюции волновой функции в виде двух дельта-пиков. В

большинстве учебников квантовой механики почетное место занимает описание опыта с интерференцией от двух щелей [9]. Для квантовых отображений на торе аналогом этого опыта служит задача об эволюции в дискретном времени волновой функции, имевшей в начальный момент вид двух дельта-пиков, разнесенных по координате на некоторое расстояние. На следующих шагах дискретного времени суперпозиция волновых функций, порожденных этими двумя источниками, образует некоторую одномерную интерференционную картину, изменяющуюся от шага к шагу. Если один дельта-пик находился в начальный момент на позиции  $l_1$ , а второй – на позиции  $l_2$ , то волновая функция будет определяться линейной комбинацией двух составляющих, задаваемых соотношениями вида (5.8).

Обсудим случай простых  $N$ , который оказывается содержательным и несложным для анализа. Тогда для любого целого  $q$  от 1 до  $N-1$  можно найти лежащее в этих же пределах число  $\bar{q}$ , являющееся обратным по модулю  $N$ , то есть такое, что  $\bar{q}q=1 \pmod{N}$ <sup>4</sup>. Согласно малой теореме Ферма,  $\bar{q}=(q)^{N-2} \pmod{N}$ . При этом, разумеется,  $q$  и  $N$  взаимно простые, и  $g=\text{gcd}(q,N)=1$ . Полагая в (5.8)  $x=-\bar{q}m$ ,  $m_0=0$ ,  $N_g=N$ , получим

$$\psi_m = N^{-1/2} \cdot \alpha \bar{q} m (l_1 - l_2) - p q ((\bar{q} m)^2 + \bar{q} m) / 2 + \varphi, \quad (5.9)$$

Суперпозиция составляющих, порождаемых двумя начальными дельта-пиками имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_m &= \frac{(\alpha \bar{q} m l_1 + \alpha \bar{q} m l_2)}{(2N)^{1/2}} \alpha^{-\bar{q} m \mu - p q ((\bar{q} m)^2 + \bar{q} m) / 2 + \varphi} = \\ &= (2/N)^{1/2} |\cos(\pi m \bar{q} (l_1 - l_2) / N + \text{const})|. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Отсюда видно, что комбинация  $\bar{q}|l_1 - l_2|$  играет роль волнового числа пространственной интерференционной картины. Обратившись к рекуррентным уравнениям (3.13), (3.21), (3.23), можно видеть, как эволюционирует эта величина во времени для различных модельных отображений.

Для параболического отображения  $q$  пробегает за период все числа от 1 до  $N-1$ . Соответственно, те же значения, но в другом порядке, пробегает величина  $\bar{q}$ . Динамика как бы разворачивает перед наблюдателем присущую числу  $N$  арифметическую структуру, закодированную в порядке появления различных чисел среди обратных к последовательным целым. Напротив, динамика отображения эллиптического типа совсем не несет информации об этой структуре: каким бы ни было число  $N$ , величина  $q$  пробегает всегда одни и те же значения 0, -1, 0, 1. В гиперболическом случае на временах меньших периода возврата последовательность  $q$  носит хаотический характер. Соответственно, обратное число,  $\bar{q}$ , также беспорядочно блуждает по своему множеству значений, тем самым маскируя упомянутую арифметическую структуру, ассоциирующуюся с числом  $N$ .

Итак, взаимосвязь между квантовой эволюцией и классической динамикой проявляется в том, как изменяется во времени пространственный период интерференционной картины. Для отображения кота Арнольда это изменение на конечном интервале времени, в пределах одного полупериода, выглядит нерегулярным, хаотическим. Для отображения параболического типа оно более плавное и регулярное. Для отображения эллиптического типа распределение в виде двух дельта-пиков повторяется на каждом втором шаге итераций, а на промежуточных шагах имеет место интерференционная картина с одним и тем же пространственным периодом (рис. 6).

<sup>4</sup> Исключительный случай  $q=0$  соответствует, как можно показать, возврату распределения волновой функции к конфигурации из двух дельта-пиков.

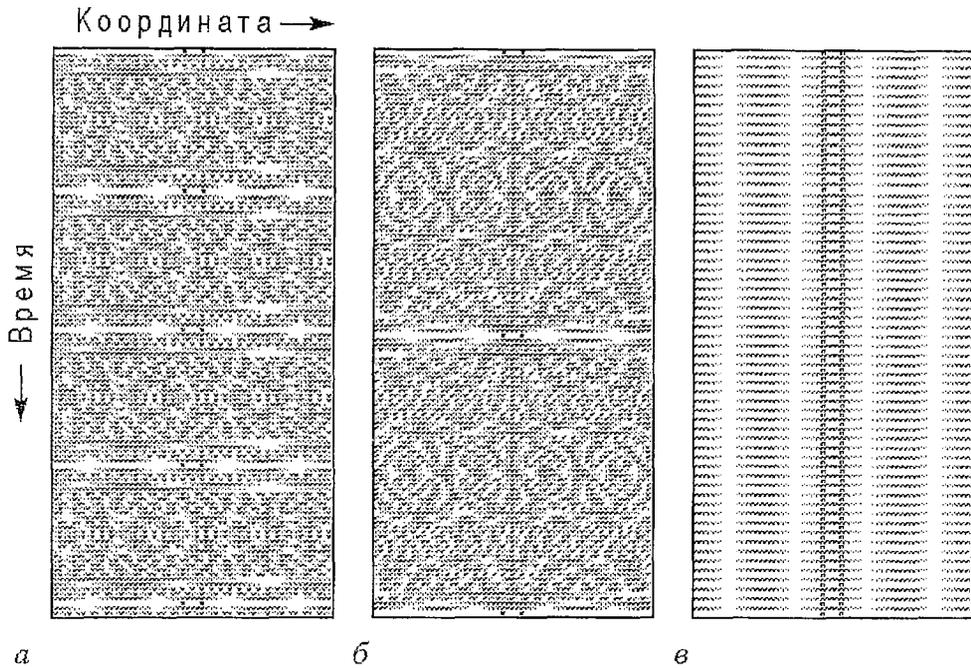


Рис. 6. Аналог квантово-механического опыта с двумя щелями: эволюция во времени интерференционной картины от двух дельта-образных источников для отображений гиперболического (а), параболического (б) и эллиптического (в) типов;  $N=59$ ,  $l_1=2$ ,  $l_2=-2$

**5.3. Задача об эволюции волнового пакета.** Одной из важных нестационарных задач в квантовой механике всегда считалось рассмотрение эволюции волновых пакетов, то есть квантовых состояний, локализованных и по координате, и по импульсу (разумеется, в той мере, в какой это допускается принципом неопределенности). Исторически, одна из причин состояла в том, что исследователи долгое время старались примирить или как-то увязать квантово-механический способ описания с представлением о локализованных классических частицах. По теореме Эренфеста, при очень общих предположениях движение «центра масс» волнового пакета (в смысле средних значений координаты и импульса) происходит по классической траектории [7]. В свое время Шредингер построил для гармонического осциллятора состояния в виде гауссова волнового пакета, эволюционирующего во времени без изменения формы и совершающего колебания, как классическая частица; сейчас такие образования называют *когерентными состояниями* [21,22]. Обнаруженный Шредингером тип поведения оказался нехарактерным для систем более общего вида: чаще всего эволюция волновой функции сопровождается расплыванием в пространстве. В этом контексте интересно рассмотреть динамику волновых пакетов под действием квантовых отображений на торе и обсудить, как проявляется наличие хаоса в отображении кота Арнольда.

Чтобы ввести в рассмотрение когерентные состояния, сначала определяют состояние, центрированное в начале координат как собственный вектор оператора  $a=(x+ip)(2\hbar)^{1/2}$  с нулевым собственным числом [22]. В координатном представлении уравнение  $a|\psi\rangle=0$  имеет вид  $x\psi + \hbar d\psi/dx=0$ , откуда  $\psi \propto \exp[-x^2/(2\hbar)]$ . Далее строятся состояния, смещенные по импульсу и координате на произвольные величины  $p$  и  $x$  как результат действия операторов сдвига:  $|\psi_{px}\rangle = \exp(i(px - xp)/\hbar)|\psi\rangle$ .

Изящное обобщение, пригодное для отображений на торе, принадлежит Сарасено [23,6]. Он предложил ввести разностный аналог оператора  $a$  и определить центрированное в начале координат состояние уравнением, которое в наших обозначениях имеет вид

$$(A - A^+ + i(K - K^+))|\psi\rangle = 0. \quad (5.11)$$

Состояния, смещенные на  $P$  позиций по импульсу и  $Q$  позиций по координате могут быть получены с помощью оператора  $K^+ \varrho A^P$ . Подействовав этим оператором на уравнение (5.11) и учитывая коммутационное соотношение (3.6), можно убедиться, что смещенное состояние  $|\psi_{PQ}\rangle = K^+ \varrho A^P |\psi\rangle$  удовлетворяет уравнению

$$[\alpha \varrho A - \alpha \varrho A^+ + i(\alpha^{-P} K - \alpha^P K^+)]|\psi_{PQ}\rangle = 0. \quad (5.12)$$

Обратимся теперь к общей схеме, сформулированной в начале раздела. Если в начальный момент вектор состояния удовлетворяет уравнению (5.11), то состояние в момент времени  $k$  будет получаться из уравнения

$$[A_{(k)} - A_{(k)}^+ + i(K_{(k)} - K_{(k)}^+)]|\psi^{(k)}\rangle = 0. \quad (5.13)$$

Если нас интересует случай смещенного пакета, то подействуем на это уравнение оператором  $K^+ \varrho_{(k)} A^P_{(k)}$ . Поскольку коммутационные соотношения для  $K_{(k)}$  и  $A_{(k)}$  такие же, как для операторов  $K$  и  $A$ , получаемое уравнение совпадает по структуре с (5.12):

$$[\alpha \varrho_{(k)} A_{(k)} - \alpha \varrho_{(k)} A_{(k)}^+ + i(\alpha^{-P} K_{(k)} - \alpha^P K_{(k)}^+)]K_{(k)}^+ \varrho_{(k)} A^P_{(k)} |\psi^{(k)}\rangle = 0. \quad (5.14)$$

Следовательно, собственный вектор оператора, фигурирующего в (5.12),  $|\psi_{PQ}\rangle = K^+ \varrho A^P |\psi\rangle$ , в момент времени  $k$  перейдет в собственный вектор оператора (5.14),  $|\psi_{PQ}^{(k)}\rangle = K^+ \varrho_{(k)} A^P_{(k)} |\psi^{(k)}\rangle$ .

Можно показать, что решение  $|\psi_{PQ}^{(k)}\rangle$  с точностью до фазового множителя находится из решения для централизованного пакета  $|\psi^{(k)}\rangle$  сдвигом по координате и импульсу на величины  $Q^{(k)}$  и  $P^{(k)}$ , которые получаются на  $k$ -ом шаге итераций классического отображения, определенного на дискретной решетке  $N \times N$ .

Докажем последнее утверждение, являющееся частным случаем теоремы Эренфеста, для отображения кота Арнольда. С помощью операторного отображения (3.18) получаем  $K^+ \varrho_{(1)} A^P_{(1)} = [A^+ + (K^+)^2] \varrho [AK^+]^P$ . Любые перестановки операторов в правой части последнего уравнения приводит только к появлению фазового множителя (в силу коммутационного соотношения (3.6)), так что

$$\begin{aligned} K^+ \varrho_{(1)} A^P_{(1)} &= (\text{фазовый множитель}) \cdot (K^+)^{P+2} \varrho A^{P-2} = \\ &= (\text{фазовый множитель}) \cdot (K^+)^{\varrho(1)} A^{P(1)}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что справедливо представление

$$K^+ \varrho_{(i)} A^P_{(i)} = (\text{фазовый множитель}) \cdot (K^+)^{\varrho(i)} A^{P(i)},$$

где  $P^{(i)}$  и  $Q^{(i)}$  удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$P^{(i+1)} = P^{(i)} + Q^{(i)}, \quad Q^{(i+1)} = P^{(i)} + 2Q^{(i)} \pmod{N}. \quad (5.15)$$

Тем самым доказательство завершено:

$$|\psi_{PQ}^{(k)}\rangle = K^+ \varrho_{(k)} A^P_{(k)} |\psi^{(k)}\rangle = (\text{фазовый множитель}) \cdot (K^+)^{\varrho(k)} A^{P(k)} |\psi^{(k)}\rangle.$$

Обсудим теперь процесс расплывания централизованного пакета, заданного уравнением (5.11). В координатном представлении это уравнение выглядит как набор соотношений, связывающих значения волновой функции в различных пространственных узлах  $m=0, \dots, N-1$ :

$$\psi_{m+1} - \psi_{m-1} + 2\psi_m \sin(2\pi m N^{-1}) = 0, \quad (5.16)$$

где подразумевается условие цикличности  $\psi_{m+N}=\psi_m$ . Произвольно полагая  $\psi_0=1$ , можно найти остальные  $\psi_m$  из системы  $N-1$  линейных уравнений, а затем отнормировать решение на единицу ( $\langle\psi|\psi\rangle=1$ ). При  $N\rightarrow\infty$  построенное таким образом состояние в области своей преимущественной локализации приближается к гауссиане, поскольку в этом пределе исчезает различие между разностным оператором Сарасено и дифференциальным оператором  $a$ . Если считать, что значения индекса  $m$  отнесены к интервалу, центрированному в нуле, то область локализации дается неравенством  $|m|\lesssim N^{1/2}$ .

Обратимся к уравнению (5.13), определяющему состояние в момент времени  $k$ , и переищем его в явном виде, используя представление матричных элементов операторов

$$(A^{(k)})_{m,n}=\delta_{m+q,n}\alpha^{pm+\mu}, \quad (A^{+(k)})_{m,n}=\delta_{m,n+q}\alpha^{-pm-\mu}, \quad (5.17)$$

$$(K^{(k)})_{m,n}=\delta_{m+s,n}\alpha^{m+\nu}, \quad (K^{+(k)})_{m,n}=\delta_{m,n+s}\alpha^{-m-\nu}. \quad (5.18)$$

В качестве параметров  $s,\dots,\nu$  сюда должны быть подставлены величины, отвечающие  $k$ -му шагу итераций соответствующего отображения в обратном времени (для кота Арнольда см. формулы (3.13), (3.16)). В результате получим

$$\psi_{m+s}\alpha^{(m+s)+\nu} - \psi_{m-s}\alpha^{-m-\nu} + i\psi_{m-q}\alpha^{-pm-\mu} - i\psi_{m+q}\alpha^{p(m+q)+\mu} = 0, \quad (5.19)$$

где вновь считается наложенным условие  $\psi_{m+N}=\psi_m$ . Задача вычисления волновой функции в пространственных узлах сводится тем самым к решению однородной системы линейных алгебраических уравнений. Амплитудный множитель находится из условия нормировки, а фаза остается неопределенной, что, впрочем, чаще всего несущественно. Технически решение системы уравнений облегчается тем, что задающая ее матрица сильно разрежена.

Пусть мы интересуемся начальной стадией эволюции пакета в ситуации, когда  $N$  велико, а ширина пакета по пространственному индексу  $m$  порядка  $N^{1/2}$ . Тогда волновую функцию можно рассматривать как зависящую квази-непрерывным образом от пространственной переменной  $m$ , и это положение сохранится, очевидно, в течение некоторого времени. Будем относить значения индексов к интервалу, центрированному в нуле. Учитывая члены порядка  $1/(N)^{1/2}$ , полагаем

$$\psi_{m+s}\alpha^{(m+s)+\nu} \approx \psi + s\partial\psi/\partial m + [(2\pi i)/N]rm\psi, \quad (5.20)$$

и аналогично для остальных членов в формуле (5.19). В результате получаем уравнение

$$\partial\psi/\partial m = (-\pi/N) \cdot [2m(p+ir)/(s-iq)]\psi, \quad (5.21)$$

откуда

$$\psi = C \exp\{(-\pi/N) \cdot [(p+ir)m^2/(s-iq)]\}. \quad (5.22)$$

Вспомним, что стандартное выражение для волновой функции в виде гауссова пакета имеет вид [22]

$$\psi(x) = [\text{Re}A/(\pi\hbar)]^{1/4} \exp[-Ax^2/(2\hbar)] = \text{const} \cdot \exp[-Ax^2/(2\hbar)]. \quad (5.23)$$

Действительная часть параметра  $A$  задает ширину пакета по координате  $\Delta x \sim 1/(\text{Re}A)^{1/2}$ , а ширина по импульсу выражается как  $\Delta p \approx 1/[\text{Re}(1/A)]^{1/2}$ . Значение  $A=1$  отвечает «пакету минимальной неопределенности», в наибольшей возможной степени локализованному и по координате, и по импульсу.

Сопоставляя выражения (5.22) и (5.23) и полагая  $\hbar=1/(2\pi N)$ ,  $x=m/N$ , находим

$$A=(p+ir)/(s-iq). \quad (5.24)$$

Выполним один шаг итераций (3.13) в обратном времени и подставим новые значения переменных в выражение для  $A$ . Результат можно представить в виде комплексного рекуррентного отображения для  $A$ , если учесть, что вследствие (3.13) и начальных условий (3.12), в процессе динамики остается в силе равенство  $r=q$ . Итак, имеем:

$$A'=(p_{(1)}+iq_{(1)})/(s_{(1)}-ir_{(1)})=[p-r+i(q-s)]/[2s-q+i(2r-p)]=(A-i)/(2+iA). \quad (5.25)$$

Если в качестве исходного задать некоторое действительное значение параметра  $A>0$  и итерировать формально отображение  $A'=(A-i)/(2+iA)$ , то решение сходится к неподвижной точке  $A=i(1-5^{1/2})/2$ . Закон сходимости можно выяснить, линеаризовав отображение вблизи этой точки:

$$A_k=i(1-5^{1/2})/2 + C\Delta^k. \quad (5.26)$$

Здесь  $k$  обозначает номер итерации,  $\Delta=(3-5^{1/2})/(3+5^{1/2})=\lambda_+^{-2}$ ,  $\lambda_+$  – старшее собственное число матрицы отображения (см. раздел 1), а вещественная константа  $C$  зависит от начального условия (в частности, для  $A_0=1$  получается  $C=1.382$ ).

Таким образом, в асимптотике действительная часть параметра  $A$  убывает по закону  $\lambda_+^{-2k}$ . Следовательно, ширина пакета нарастает экспоненциально:  $\Delta x \sim 1/(\text{Re}A)^{1/2} \sim \lambda_+^k = \exp(\Lambda_+ k)$ , и этот рост характеризуется не чем иным как положительным ляпуновским показателем классического отображения кота Арнольда  $\Lambda_+$ . (Заметим, что по такому же закону увеличивается ширина пакета и в импульсном представлении. В этом можно убедиться, вычислив действительную часть обратной величины  $1/A_k$ .) Время (число итераций), за которое ширина пакета сравняется с пространственным периодом на торе, можно оценить из условия  $N \sim N^{1/2} \exp(\Lambda_+ T_{\text{вар}})$ , что дает  $T_{\text{вар}} \sim (1/2)(\log N)/\Lambda_+ = -(1/2)\log(2\pi\hbar)/\Lambda_+$ . Это характерное время зависит от квантового параметра логарифмически, и поэтому при больших  $N$  оно всегда очень мало по сравнению с квантовым периодом.

На рис. 7 показан вид гауссова пакета на той стадии эволюции, когда коэффициент перед квадратичным членом в показателе экспоненты уже очень близок к  $i(1-5^{1/2})/2$ . Вычислим локальное волновое число  $\beta$  вблизи некоторой точки  $x_0$ . Полагая  $x=x_0+\Delta x$ , имеем

$$\exp(-ix^2(1-5^{1/2})/4) \approx \text{const} \cdot \exp(-(i/\hbar)(x_0(1-5^{1/2})/2)\Delta x),$$

то есть  $\beta=x_0(5^{1/2}-1)/(2\hbar)$ . Этому волновому числу соответствует величина импульса  $p=\beta\hbar=x_0(5^{1/2}-1)/2$ . Таким образом, соотношение между координатой и локальным

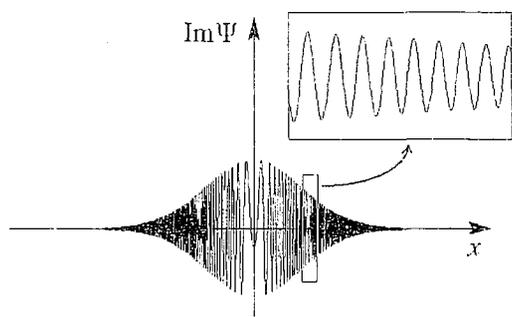


Рис. 7. Вид гауссова волнового пакета после нескольких первых шагов эволюции, описываемой квантовым отображением кота Арнольда, когда ширина пакета еще мала по сравнению с периодом на торе

импульсом в точности такое же как в классике вдоль направления неустойчивого собственного вектора отображения кота Арнольда.

Попытаемся наглядно представить квантовую динамику в виде, допускающем прямое сравнение с классической картинкой эволюции изображения кота на фазовой плоскости.

Для квантовой системы фазовую плоскость можно мыслить как упорядоченный набор ячеек размера  $\Delta p \Delta x \sim \hbar$ , и говорить об амплитуде пребывания в той или иной ячейке. Определить эту амплитуду можно как интеграл перекры-

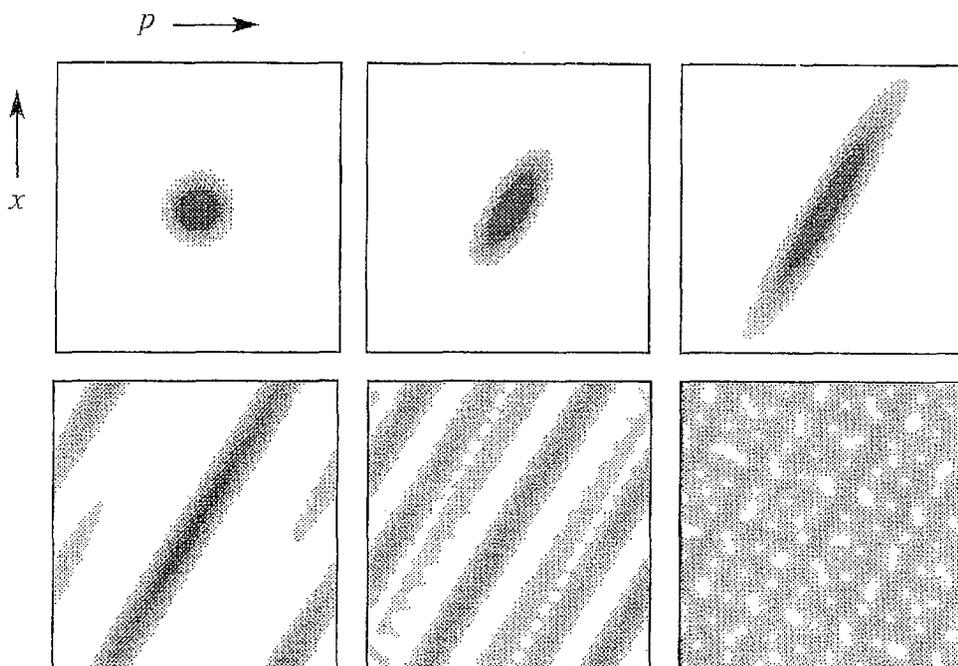


Рис. 8. Процесс расплывания гауссова волнового пакета для отображения kota Арнольда: эволюция распределения Хусими при  $N=131$ . Тона серого цвета кодируют вероятность пребывания системы в данной ячейке фазового пространства на плоскости  $(p, x)$ . Начало координат располагается в центре квадрата. Динамику распределения Хусими можно сравнить с рис. 2, а, который отвечает классическому отображению

тия волновой функции  $|\psi\rangle$  с когерентным состоянием  $|\psi_{p,x}\rangle$ , центрированным в данной точке  $(p, x)$ . Построенная таким образом функция двух переменных  $f_H(p, x) = |\langle \psi_{p,x} | \psi \rangle|^2$  называется *распределением Хусими* (Husimi distribution) [6]. Ясно, что в классическом пределе, когда  $\hbar \rightarrow 0$ , гауссов пакет минимальной неопределенности превращается в дельта-функцию, а распределение Хусими – в классическую функцию распределения.

Для систем на торе обобщение распределения Хусими получается естественным образом при использовании когерентных состояний в модификации Сарасено. На рис. 8 показана эволюция во времени функции Хусими для квантового отображения kota Арнольда. Начальное состояние отвечает гауссову волновому пакету максимальной локализации. Различные тона серого цвета кодируют уровень функции  $f_H(p, x)$ . Начальная стадия эволюции гауссова пакета демонстрирует очевидное сходство с картинками преобразования изображения kota в классическом случае (см. рис. 2, а). Когда ширина пакета становится больше пространственного периода, волновая функция  $\psi(x)$  формируется как результат наложения и интерференции «хвостов», протянувшихся из разных периодов: в произвольной точке  $x$  она вычисляется как сумма комплексных амплитуд, отвечающих всем точкам пересечения «хвостов» с линией  $x = \text{const}$ . Как результат этой квантовой интерференции, на последних «кадрах» рис. 8 можно видеть чередующиеся светлые и темные пятна.

На рис. 9 для сравнения иллюстрируется эволюция распределения Хусими для отображения параболического типа. В этом случае расплывание пакета имеет место только по пространственной координате, тогда как по импульсу его ширина остается неизменной на всем протяжении квантового периода.

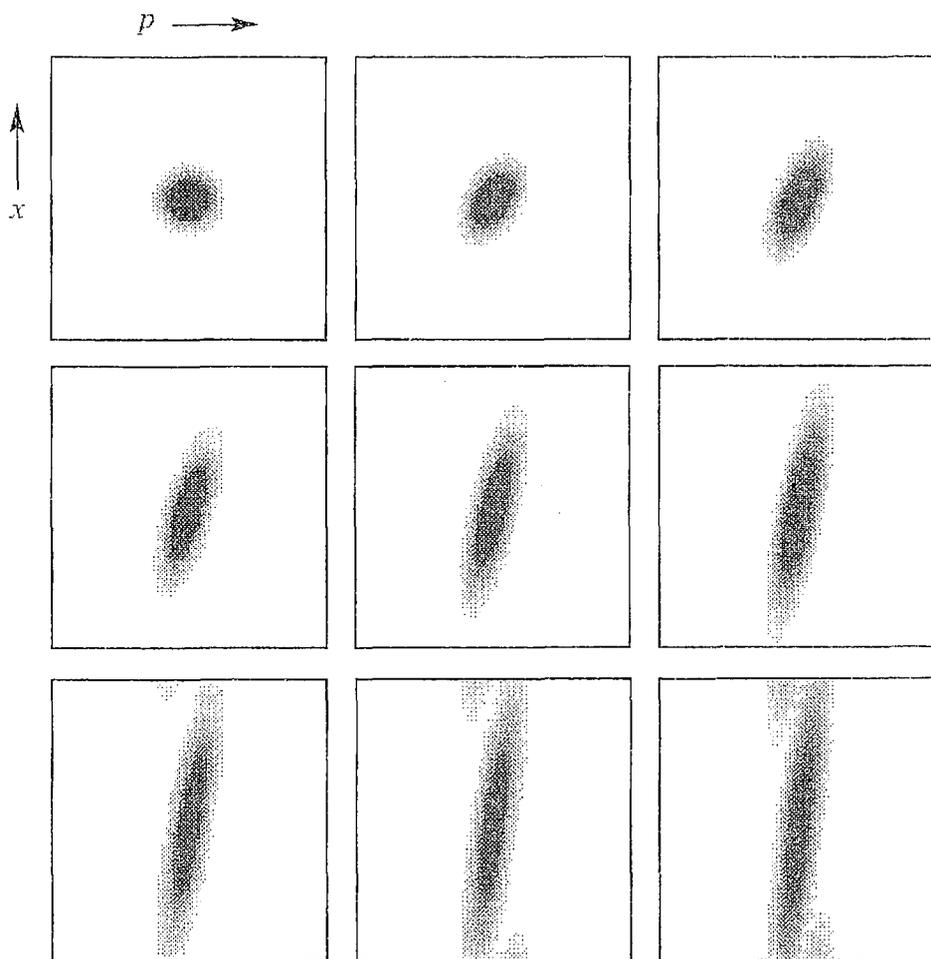


Рис. 9. Процесс расплывания гауссова волнового пакета для параболического отображения, описывающего свободное движение на торе: эволюция распределения Хусими при  $N=131$ . Тона серого цвета кодируют вероятность пребывания системы в данной ячейке фазового пространства на плоскости  $(p, x)$ . Начало координат располагается в центре квадрата. Динамику распределения Хусими можно сравнить с рис. 2, б, который отвечает классическому отображению

## 6. Функция Вигнера

Говоря о классической динамике вообще и о динамическом хаосе в частности, мы постоянно опираемся на понятие фазового пространства. Поведение индивидуальной системы представляется движением изображающей точки по фазовой траектории. Динамика ансамбля (множества не взаимодействующих систем, различающихся начальными условиями) интерпретируется как эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве и описывается функцией распределения, уравнение для которой известно в классической механике как уравнение Лиувилля.

В силу принципа неопределенности, в квантовой теории нельзя использовать функцию распределения  $f(p, x)$ , поскольку мы не вправе конструировать ансамбль из систем, обладающих одновременно заданными импульсом и координатой. Одна возможность ввести в рассмотрение квантовый аналог функции распределения обсуждалась в предыдущем разделе и основана на использовании распределения Хусими. Другая возможность была в свое время предложена Вигнером и состоит в том, что вводится функция переменных  $p$  и  $x$ , выражающаяся через волновую функцию  $\psi(x)$  следующим образом [6, 24]:

$$W(p,x)=(\pi\hbar)^{-1}\int\psi(x-x')\psi^*(x+x')\exp[2(i/\hbar)px']dx'. \quad (6.1)$$

Используя операторы сдвига по координате и импульсу и оператор инверсии  $R[\psi(x)]=\psi(-x)$ , это определение можно переписать в обозначениях Дирака

$$W(p,x)=(\pi\hbar)^{-1}\langle\psi|\exp(-ixp/\hbar)\exp(ixp/\hbar)|R|\exp(-ipx/\hbar)\exp(ipx/\hbar)|\psi\rangle. \quad (6.2)$$

Как нетрудно проверить, величина  $W(p,x)$  всегда действительна.

Функция Вигнера широко используется в статистической физике, занимая в теории квантовых систем то место, какое в классической статистике занимала функция распределения [24]. Основанием служит то, что интегрирование функции Вигнера по первому аргументу приводит к распределению вероятностей для координаты, а по второму – для импульса:

$$\int W(p,x)dp=|\psi(x)|^2, \quad \int W(p,x)dx=|\tilde{\psi}(p)|^2. \quad (6.3)$$

Функцию Вигнера все же нельзя рассматривать как функцию распределения, поскольку она может принимать отрицательные значения.

Функция Вигнера – очень полезный инструмент исследования соответствия между квантовой и классической теорией. В контексте задачи о динамике на торе она была введена в работе Ханнэя и Берри [15] и позднее использовалась многими авторами [17, 25–27]. В этом разделе мы обсудим взаимосвязь между описанием динамики отображений на торе с помощью функции Вигнера и формализмом операторов Вейля – Гейзенберга.

Если на волновую функцию наложены соответствующие тору условия периодичности, то, как показано в разделе 2, она имеет вид «гребенки» из дельта-функций  $\psi(x)=\sum_{m=0}^{N-1}\psi_m\delta_{L_x}(x-mL_x/N)$ , где  $L_x$  – пространственный период, а  $\delta_{L_x}(\dots)$  обозначает последовательность дельта-функций с этим периодом. Подставляя это выражение в (6.1), получим

$$W(p,x)=(\pi\hbar)^{-1}\int dx\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1}[\psi_s\psi_r^*\delta_{L_x}(x-x'-sL_x/N)\delta_{L_x}(x+x'-rL_x/N)]\exp(2ipx'/\hbar). \quad (6.4)$$

Условие равенства нулю аргумента каждой из дельта-функций определяет семейство параллельных прямых на плоскости  $(x,x')$  (рис. 10). Произведение дельта-функций будет ненулевым в узлах сетки, образованной этими двумя семействами прямых. Как видно из рисунка, в проекции на ось  $x$  точки пересечения располагаются с шагом  $L_x/2N$ , то есть вдвое чаще, чем дельта-пики, образующие волновую функцию  $\psi$ . Поскольку выражение в квадратных скобках имеет по  $x'$  период  $L_x$ , его фурье-образ, который как раз и есть функция Вигнера  $W$ , будет выглядеть как набор дельта-пигов с шагом по волновому числу  $\Delta\beta=2\pi/L_x$ , где  $\beta=2p/\hbar$ . Подставляя в соответствии с (2.2)  $\hbar=L_xL_p/(2\pi N)$ , находим, что шаг по импульсу  $\Delta p=\hbar\Delta\beta/2=L_p/(2N)$ , то есть вдвое меньше, чем у волновой функции в импульсном представлении. Полагая теперь  $L_x=L_p=1$ , заключаем, что функция Вигнера в единичном квадрате

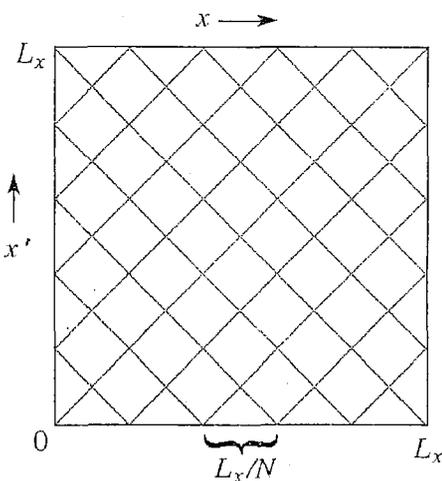


Рис. 10. К построению функции Вигнера для отображений на торе: в проекции на ось  $x$  узлы сетки, образованной пересечениями прямых, располагаются с шагом  $L_x/2N$

на плоскости  $(x, p)$  представляется набором дельта-функций, расположенных в узлах квадратной решетки с шагом  $1/(2N)$ . Задать такую функцию можно таблицей из  $2N \times 2N$  действительных чисел, определяющих амплитуды дельта-пику.

Если мы разрешим индексам  $k$  и  $m$  принимать целые и полуцелые значения  $(0, 1/2, 1, 3/2, \dots, N-1/2)$ , то можно записать

$$W(p, x) = \sum_k \sum_m w(k, m) \delta_1(p - k/N) \delta_1(x - m/N). \quad (6.5)$$

Набор действительных чисел  $w(k, m)$  естественно рассматривать как дискретную версию функции Вигнера. Через вектор состояния  $\psi_m$  она выражается посредством соотношения

$$w(k, m) = 1/(2N) \sum_x \psi_{m-x} \psi_{m+x}^* \exp(4\pi i k x / N), \quad (6.6)$$

где суммирование ведется по целым и полуцелым  $x$  от 0 до  $N-1/2$ , причем для полуцелых значений индекса  $(m \pm x)$  величина  $\psi$  считается равной нулю. Суммирование  $w(k, m)$  по  $k$  дает распределение вероятностей в координатном, а суммирование по  $m$  – в импульсном представлении:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w(k, m) = |\psi_m|^2 \quad (m - \text{целое}) \text{ и } 0 \quad (m - \text{полуцелое}), \quad (6.7)$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} w(k, m) = |\tilde{\psi}_k|^2 \quad (k - \text{целое}) \text{ и } 0 \quad (k - \text{полуцелое}). \quad (6.8)$$

Выразим функцию Вигнера через операторы  $A$  и  $K$ , то есть получим дискретный аналог соотношения (6.2). Проблема в том, что операторы  $K$  и  $A$  определены для  $N$ -мерных векторов, тогда как каждый из аргументов функции Вигнера принимает  $2N$  возможных значений. Чтобы обойти эту трудность, выпишем отдельно соотношения для каждой из четырех возможных комбинаций целых и полуцелых индексов, введя четыре разновидности операторов инверсии. Итак, полагаем

$$\begin{aligned} w(P, Q) &= w_0(P, Q) = \langle \psi | (K^+) Q A^P | R_0 | (A^+)^P K Q | \psi \rangle / 2N, \\ w(P, Q+1/2) &= w_1(P, Q) = \langle \psi | (K^+) Q A^P | R_1 | (A^+)^P K Q | \psi \rangle / 2N, \\ w(P+1/2, Q) &= w_2(P, Q) = \langle \psi | (K^+) Q A^P | R_2 | (A^+)^P K Q | \psi \rangle / 2N, \\ w(P+1/2, Q+1/2) &= w_3(P, Q) = \langle \psi | (K^+) Q A^P | R_3 | (A^+)^P K Q | \psi \rangle / 2N, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где операторы  $R_j$  имеют следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} (R_0)_{mm} &= \delta_{m, -n}, \quad (R_1)_{mm} = \delta_{m, -n+1}, \\ (R_2)_{mm} &= \alpha^m \delta_{m, -n}, \quad (R_3)_{mm} = \alpha^{m-1/2} \delta_{m, -n+1}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Как можно проверить, соотношения (6.9) эквивалентны определению (6.6).

Пусть теперь эволюция вектора состояния  $|\psi\rangle$  во времени задается унитарным оператором  $U$ , отвечающим какому-либо из линейных отображений тора. Как будет эволюционировать функция Вигнера? На следующем шаге по времени будем иметь, очевидно,

$$w_j(P, Q) = \langle \psi | U^+ (K^+) Q A^P | R_j | (A^+)^P K Q U | \psi \rangle / 2N, \quad j=0, \dots, 3, \quad (6.11)$$

или, с учетом соотношений (4.4)

$$w_j(P, Q) = \langle \psi | (K^+)^Q A^P U | R_j \rangle U(A^+)^P K^Q | \psi \rangle / 2N, \quad j=0, \dots, 3. \quad (6.12)$$

Ограничимся для определенности отображением кота Арнольда и подставим  $K^+ = KA$ ,  $A^+ = AKA$ . Используя коммутационные соотношения (3.6) для перестановки операторов, в результате получим<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} w_j(P, Q) &= \langle \psi | (A+K^+)^Q (AKA)^P U | R_j \rangle U(A+K+A^+)^P (KA)^Q | \psi \rangle / 2N = \\ &= \langle \psi | (K^+)^Q A^{2P-Q} U | R_j \rangle U(A^+)^{2P-Q} K^{Q-P} | \psi \rangle / 2N. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Далее, используя явный вид матрицы  $U$  для отображения кота Арнольда (4.13), можно проверить, что

$$U+R_0U = A+R_1A, \quad U+R_1U = K+(A^+)^2R_2A^2K, \quad U+R_2U = R_0, \quad U+R_3U = A+R_3A, \quad (6.14)$$

так что из соотношений (6.13) следует:

$$\begin{aligned} w_0'(P, Q) &= w_1(2P-Q-1, Q-P), \\ w_1'(P, Q) &= w_2(2P-Q-2, Q-P+1), \\ w_2'(P, Q) &= w_0(2P-Q, Q-P), \\ w_3'(P, Q) &= w_3(2P-Q-1, Q-P), \end{aligned} \quad (6.15)$$

В обозначениях, подразумевающих использование полуцелых индексов, имеем

$$w'(k, m) = w(2k-m-1/2, m-k). \quad (6.16)$$

Результат приведенных выкладок можно резюмировать таким образом, что значения функции Вигнера, приписанные узлам решетки  $2N \times 2N$ , просто переносятся без изменения вдоль классических траекторий, порождаемых на этой решетке отображением вида

$$k' = k+m+1/2, \quad m' = k+2m \pmod{N}. \quad (6.17)$$

(Заметим, что добавка  $1/2$ , возникшая в уравнении для  $k'$  в каком-то смысле несущественна, поскольку устраняется сдвигом начала отсчета по  $k$  и  $m$ :  $m \rightarrow m-1/2$ ,  $k \rightarrow k+1/2$ . Такое переопределение координат неудобно, поскольку приводит к необходимости работать с полуцелыми индексами, но зато восстанавливает полное соответствие с формой классического отображения.) Результат, аналогичный (6.17), для квантуемых по Ханнэю – Берри сформулирован в работе [15], а для отображения кота Арнольда при четных  $N$  – в [17].

На рис. 11 и 12 показано, как эволюционирует во времени функция Вигнера при задании в качестве начального состояния гауссова пакета. В обоих случаях эволюция периодическая: возврат к исходному состоянию наступает, соответственно, через 14 и 13 шагов. Однако промежуточные состояния, реализующиеся на протяжении периода, различаются: для гиперболического отображения заметно отличные от нуля значения функции Вигнера более или менее разбредаются по всей площади квадрата, тогда как для параболического они остаются в определенной полосе конечной ширины по импульсу.

<sup>5</sup> Фактически процедура перестановки выполняется тривиальным образом, поскольку появляющиеся в ходе нее слева и справа от оператора  $R$  множители  $\alpha$  в различной степени компенсируют друг друга.

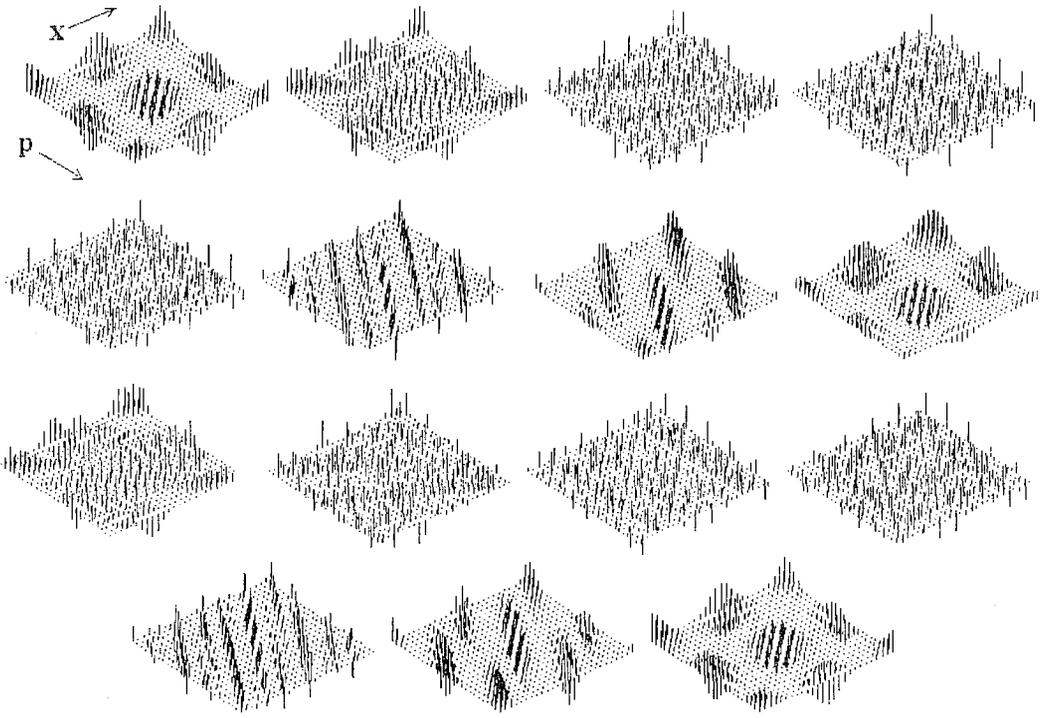


Рис. 11. Динамика функции Вигнера для отображения кота Арнольда при  $N=13$ . Квантовый период возврата  $T(N)=14$ . В качестве начального состояния задан гауссов волновой пакет, центрированный в начале координат

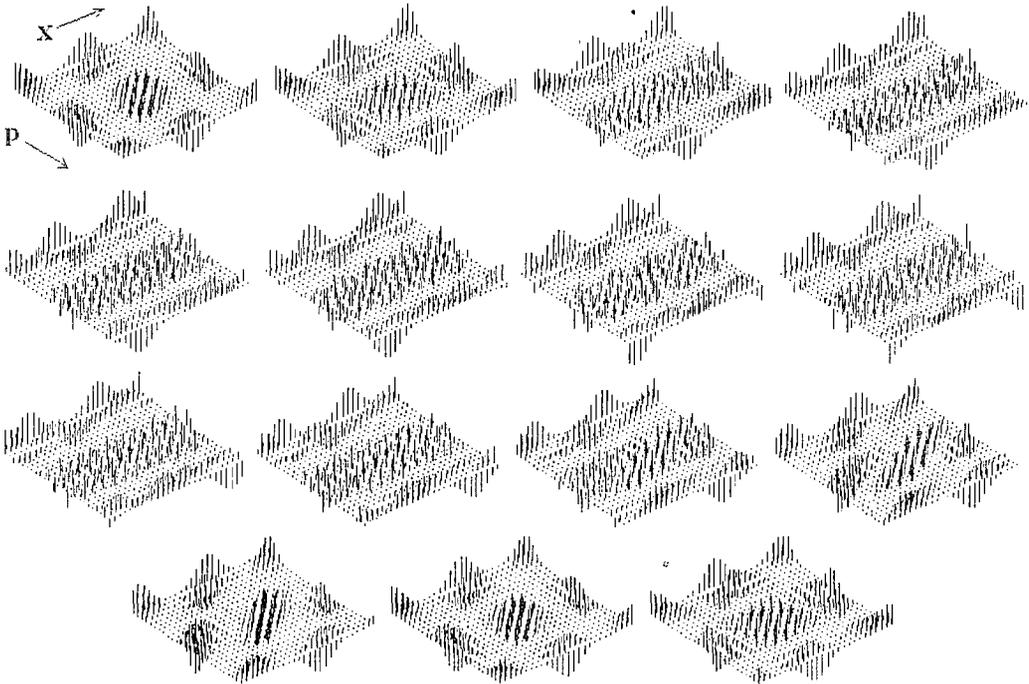


Рис. 12. Динамика функции Вигнера для отображения параболического типа, описывающего свободное движение на торе, при  $N=13$ . Квантовый период возврата  $T(N)=13$ . В качестве начального состояния задан гауссов волновой пакет, центрированный в начале координат. Обратите внимание, что по импульсу занимаемый пакетом интервал остается неизменным в процессе динамики

## 7. Спектр квазиэнергий и собственные векторы оператора эволюции

Уравнение Шредингера квантовой системы, параметры которой постоянны во времени, а динамика происходит в пространственно ограниченной области, приводит к дискретному спектру собственных чисел – разрешенных значений энергии.

Для систем, параметры которых периодически изменяются во времени, и для систем с дискретным временем, вместо энергетического спектра говорят о *спектре квазиэнергий*. Пусть эволюция вектора состояния за период  $\tau$  дается унитарным оператором  $U$ . Поставим для этого оператора задачу на собственные векторы и собственные значения и запишем  $U|\psi_s\rangle = \lambda_s |\psi_s\rangle$ . Поскольку оператор унитарный, его собственные числа по модулю обязаны быть единичными, и можно положить  $\lambda_s = \exp(iE_s\tau/\hbar)$ . Величина  $E_s$  есть *квазиэнергия* собственного состояния  $|\psi_s\rangle$ . Ясно, что она определена с точностью до постоянной добавки  $2\pi\hbar/\tau$ . Отметим уместную здесь аналогию с квазиимпульсом, который вводят вместо обычного импульса при анализе сред с пространственно периодической структурой (например, в физике твердого тела). Квазиимпульс также определен с точностью до постоянной добавки  $2\pi\hbar/d$ , где  $d$  – пространственный период.

Для отображений,  $\tau$  – это один шаг дискретного времени. Поскольку оператор эволюции для отображения на торе представляется матрицей размера  $N \times N$ , спектр должен содержать  $N$  собственных чисел  $\lambda_s = \exp(i\theta_s)$ , среди которых, однако, могут быть вырожденные. Величины  $\theta_s$ , которые и играют роль квазиэнергии состояний, называют иногда «собственными углами» (eigenangles). Вектор  $|\psi_s\rangle$  будет также собственным вектором оператора  $U^k$ , собственное число которого  $\lambda_s^k$ . Наличие квантового периода  $T(N)$  означает, что  $U^{T(N)} = \mathbf{1}$ . Поэтому  $\lambda_s^{T(N)} = 1$ , и все собственные числа  $\lambda_s$  обязаны быть комплексными корнями степени  $T(N)$  из единицы, то есть принадлежать множеству  $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{T(N)-1}\}$ , где  $\omega = \exp[2\pi i/T(N)]$ . Вопрос состоит только в том, какие из этого множества корней представлены в спектре и с какой кратностью.

След матрицы  $U$  равен, как известно, сумме всех ее собственных значений, а для матрицы  $U^k$  он дается суммой их  $k$ -ых степеней:

$$S_k = \text{Tr}(U^k) = \sum_{r=0}^{N-1} \lambda_r^k. \quad (7.1)$$

Последовательность  $S_k$ , которая получается, когда индекс  $k$  пробегает всевозможные целые значения, будем называть *trace-последовательностью*. По индексу  $k$  она имеет период  $T(N)$  и допускает поэтому представление в виде ряда Фурье:

$$S_k = \sum_{r=0}^{T(N)-1} n_r \exp(2i\pi r k/p) = \sum_{r=0}^{T(N)-1} n_r \omega^{rk}. \quad (7.2)$$

Сравнивая (7.1) и (7.2), видим, что коэффициент при  $r$ -ом члене разложения

$$n_r = (1/T(N)) \sum_{k=0}^{T(N)-1} S_k \exp(-2i\pi r k/T(N)) \quad (7.3)$$

представляет собой кратность собственного значения  $\omega^r$  в спектре оператора эволюции (разумеется, все  $n_r$  обязаны быть неотрицательными целыми числами). Таким образом, чтобы получить спектр оператора эволюции достаточно найти *trace-последовательность* и подвергнуть ее дискретному преобразованию Фурье.

«Любовой» способ состоит в том, чтобы вычислять степени матрицы  $U$ , подсчитывая  $S_k$  как сумму диагональных элементов. Один быстрый алгоритм может быть основан на процедуре нахождения матрицы оператора  $U^k$ , (см. сноску 2), другой – на соотношениях, связывающих *trace-последовательность* и периодические орбиты классического отображения (см. в этой связи работы

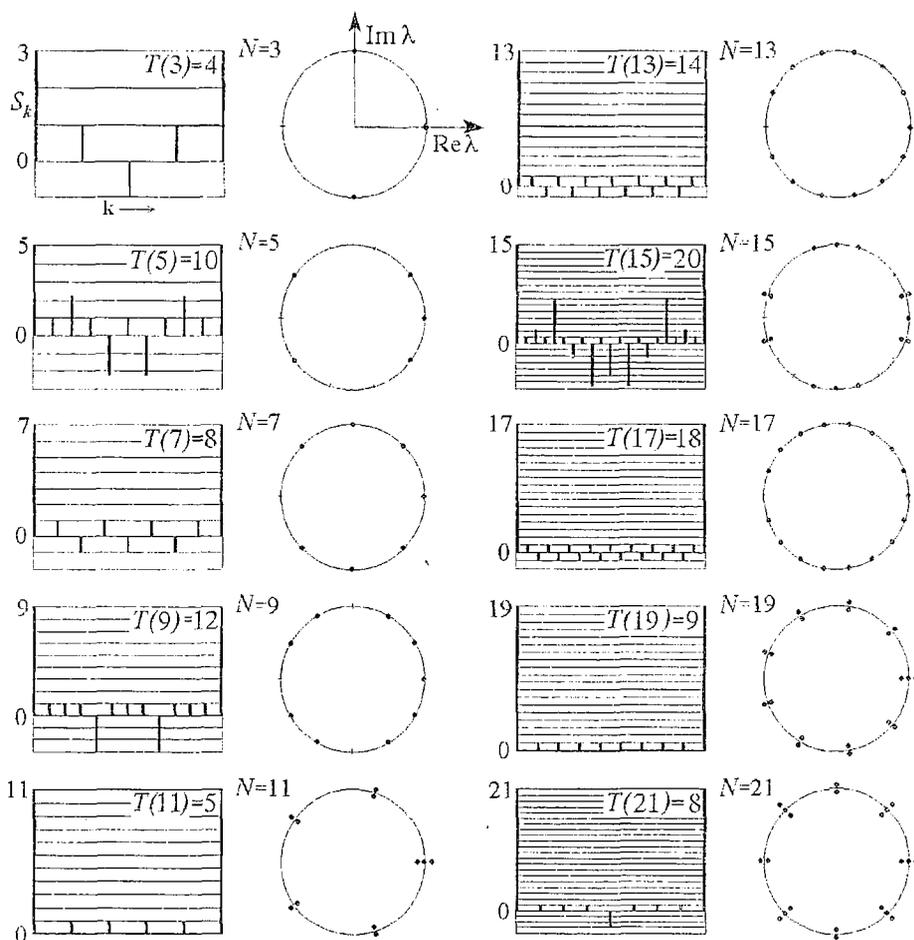


Рис. 13. Диаграммы, представляющие trace-последовательность и спектры «собственных углов» для квантового отображения кота Арнольда при нечетных  $N$  от 3 до 21

Китинга [30, 31] и приложение С). На рис. 13 приводятся диаграммы, представляющие trace-последовательности квантового отображения кота Арнольда для нескольких небольших  $N$ , а также спектры квазиэнергий или «собственные углы». На рис. 14, а показано, как зависят от числа  $N$  спектры квазиэнергий для отображения кота Арнольда.

На рис. 14, б, в приводятся аналогичные данные для отображений с регулярной динамикой – параболического и эллиптического типа. Для

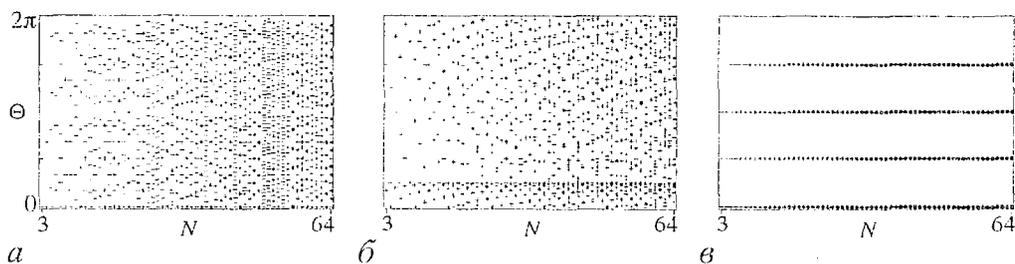


Рис. 14. Спектр квазиэнергий (или «собственных углов») для квантового отображения кота Арнольда (а), для отображения параболического типа, описывающего свободное движение (б), и для отображения эллиптического типа (в). Кратность вырождения собственных чисел обозначена количеством черточек, проходящих через данную точку. Представлены данные как для нечетных  $N$  (отображения, определенные в основном тексте), так и для четных (отображения, определенные в приложении)

параболического отображения (3.20) матрица оператора эволюции  $W$  (4.15) диагонализуется при переходе в импульсное представление и принимает вид матрицы  $V$  (см.(4.14)). Поэтому собственные функции задаются собственными векторами оператора импульса,  $(\psi_s)_m \propto \exp(2\pi i m s / N)$ , а собственные числа выражаются как  $\lambda_s = \exp\{i\pi((s^2 + s + 1/4)/N - 1/4)\}$ , где  $s=0, \dots, N-1$ . Для эллиптического отображения (3.22) оператор эволюции совпадает с оператором обратного дискретного преобразования Фурье. Задача на собственные векторы и собственные значения допускает в этом случае полный анализ, изложенный в [28]. При любом  $N$  имеется четыре собственных числа  $1, i, -1, -i$ , кратность вырождения которых равна, соответственно,  $[(N+4)/4], [(N+1)/4], [(N+2)/4]$  и  $[(N-1)/4]$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

На рис. 14 в распределении уровней квазиэнергии отображений с регулярной динамикой можно различить определенные упорядоченные структуры, тогда как для отображения кота Арнольда («хаос») их не видно.

Следующий интересный вопрос состоит в том, не проявится ли различие между отображениями с регулярной и хаотической динамикой в структуре собственных векторов оператора эволюции. Возьмем какой-нибудь пробный вектор  $|\psi_0\rangle$  и, действуя на него оператором эволюции  $U$ , построим последовательность  $|\psi_k\rangle = U^k |\psi_0\rangle$ . Благодаря тому, что имеет место период возврата  $T(N)$ , эта последовательность представляется рядом Фурье:

$$|\psi_k\rangle = \sum_{s=0}^{T(N)-1} |\tilde{\psi}_s\rangle \exp(2\pi i s k). \quad (7.4)$$

В качестве «коэффициентов» в этом выражении фигурируют (ненормированные) собственные векторы оператора эволюции  $|\tilde{\psi}_s\rangle$ . Вектору

$$|\tilde{\psi}_s\rangle = (1/T(N)) \sum_{k=0}^{T(N)-1} |\psi_k\rangle \exp(-2\pi i s k) \quad (7.5)$$

отвечает собственное значение  $\lambda_s = \exp(2\pi i s)$ , а если для некоторого  $s$  число  $\exp(2\pi i s)$  в спектре не представлено, то соответствующий член суммы обращается в нуль<sup>6</sup>.

Привлекательна идея задать пробный вектор так, чтобы результат действия оператора эволюции выражался аналитически. Эта идея была предложена и реализована Экхардом [18] для вычисления и анализа собственных векторов линейных отображений на торе, принадлежащих к классу квантуемых по Ханню – Берри. Для рассматриваемого нами отображения кота Арнольда метод нуждается в некоторой модификации. Как и в работе Экхарда, ограничимся случаем простых  $N$ .

Рассмотрим вектор

$$\psi_m = \sigma \cdot \exp[(2\pi i / N)(am^2 + bm + c)] = \sigma \cdot \alpha^{am^2 + bm + c}, \quad (7.6)$$

где  $\sigma = \pm 1$ , а параметры  $a, b, c$  – целые, определенные по модулю  $N$ , и подействуем на него оператором эволюции (4.13). Если  $a \neq -1 \pmod{N}$ , то сумма вычисляется с использованием формул Гаусса, и результат представляется вновь в виде (7.6). Если, однако,  $a = -1 \pmod{N}$ , то результирующий вектор  $\psi_m \propto \delta_{mb}$ , то есть не описывается формулой (7.6). С другой стороны, будучи подвергнутым действию оператора эволюции, этот вектор снова принимает вид (7.6). Поэтому его целесообразно включить в класс допустимых векторов. Для этого дополним множество разрешенных значений параметра  $a$   $\{0, 1, \dots, N-1\}$  еще одним

символом  $\bar{0}$  («обратный нуль») и положим

<sup>6</sup> Для каждого присутствующего в спектре числа  $\lambda_s$  рассмотренная процедура позволяет получить один собственный вектор из одного пробного вектора. При наличии вырождения для нахождения всех имеющихся собственных векторов процедуру приходится повторять с использованием других пробных векторов столько раз, какова кратность вырождения. Затем полученные собственные векторы можно ортогонализировать по методу Грама – Шмидта.

$$\psi_m = F(m; a, b, c, \sigma), \quad (7.7)$$

где

$$F(m; a, b, c, \sigma) = \begin{cases} \sigma N^{-1/2} \exp[(2\pi i/N)(am^2 + bm + c)] = \sigma N^{-1/2} \alpha^{am^2 + bm + c}, & a=0, 1, \dots, N-1, \\ \sigma \cdot \exp(2\pi i c/N) \delta_{mb}, & a=\bar{0}. \end{cases}$$

Теперь действие оператора эволюции можно рассматривать просто как пересчет определяющих вектор состояния параметров  $(a, b, c, \sigma)$  по следующим правилам.

$$\text{Если } a \neq \bar{0} \text{ и } a \neq N-1, \text{ то } \sigma' = \begin{pmatrix} 2(1+a) \\ N \end{pmatrix},$$

$$a' = \overline{2(1-2(1+a))}, \quad b' = \overline{2+2(1+a)b}, \quad c' = \overline{c+(1-N^2)/8-2 \cdot 2(1+a)b^2} \pmod{N}.$$

Если  $a=N-1$ , то

$$\sigma' = \sigma, \quad a' = \bar{0}, \quad b' = b, \quad c' = \overline{c+(b^2+b)/2} \pmod{N}.$$

Если  $a=\bar{0}$ , то

$$\sigma' = \sigma(-1)^{(N-1)/2}, \quad a' = \bar{2}, \quad b' = \bar{2}-b, \quad c' = \overline{c+b^2-[N/4]} \pmod{N}.$$

Черта сверху обозначает число обратное к данному целому по модулю  $N$ , то есть  $\bar{x} \cdot x = 1 \pmod{N}$ , в частности  $\bar{2} = (N+1)/2$ . Согласно малой теореме Ферма,  $\bar{x} = x^{N-2}$  ( $N$  – простое). Выразим  $\binom{x}{N}$  – это 1 или  $-1$  в зависимости от того, существует или нет такое целое, квадрат которого равен  $x$  по модулю  $N$ .

Уравнение для параметра  $a$  не зависит от остальных соотношений. Оно порождает периодическую динамику, хотя бы по той причине, что множество значений  $a$  конечно. Уравнения для остальных параметров  $b, c, \sigma$  содержат  $a$  в качестве «внешнего периодического воздействия». Численные расчеты показывают, что в зависимости от  $N$  и от начальных значений  $a$  и  $b$  может реализоваться период  $T(N)$ ,  $T(N)/2$  и 1. Впрочем, в любом случае начальный набор параметров воспроизводится через каждые  $T(N)$  шагов.

Схема итераций для параметров  $(a, b, c, \sigma)$  легко реализуется на компьютере. Это позволяет даже при очень больших простых  $N$  получать собственные векторы с помощью соотношения (7.5), которое переписывается в виде

$$|\tilde{\psi}_s\rangle = (1/T) \sum_{k=0}^{T-1} F(m; a_k, b_k, c_k, \sigma_k) \exp(-2\pi i k s/T), \quad (7.8)$$

где  $T$  – соответствующий период.

На рис. 15 показано, как выглядит распределение амплитуд по пространственной координате и распределение Хусими для нескольких собственных векторов при достаточно большом  $N$ . В случае, когда собственный вектор получается из цикла периода 1, его структура сравнительно проста, поскольку задается выражением вида (7.6). Для собственных векторов, получаемых из циклов периода  $T(N)$  и  $T(N)/2$  характерно пространственное распределение, похожее на реализацию некоррелированной комплексной случайной последовательности. Для сравнения на рис. 16 и 17 показаны примеры собственных векторов для отображений с регулярной динамикой – параболического и эллиптического типа. (Следует заметить, что в последнем случае, в силу наличия вырождения высокой кратности, имеется значительный произвол в выборе вида собственных векторов.)

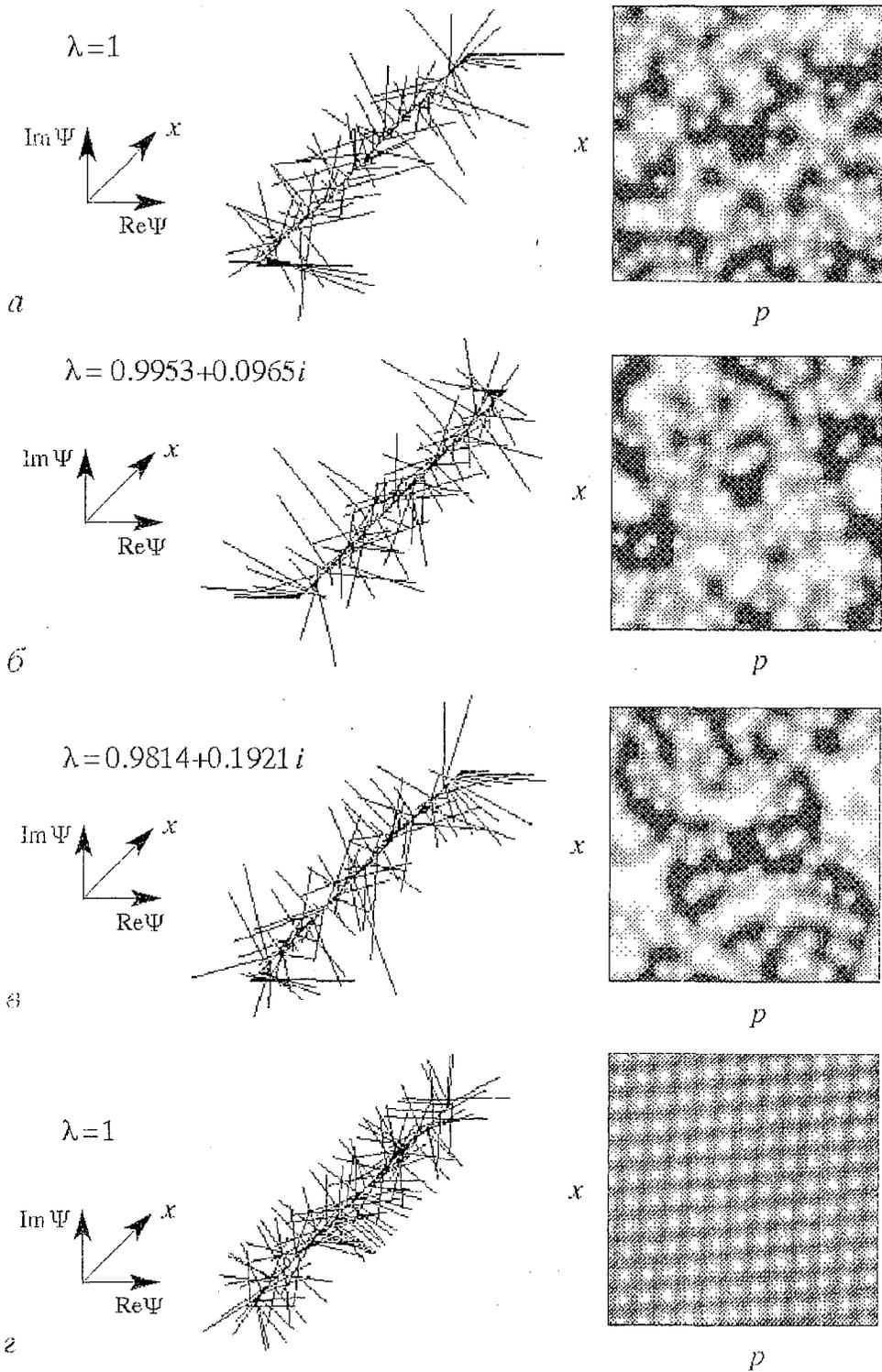


Рис. 15. Пространственная структура нескольких собственных векторов (слева) и соответствующие им распределения Хусими на плоскости  $p=P/N$ ,  $x=Q/N$  для квантового отображения кота Арнольда при  $N=131$ . Начало координат на диаграммах распределения Хусими в центре квадрата. Собственные векторы (а)–(в), характеризующиеся хаотическим распределением, получены из цикла периода  $T(N)/2=65$  при подстановке формы (7.6) с начальными значениями  $a=1$  и  $b=0$ . Вектор (г) имеет регулярную структуру и непосредственно выражается формулой (7.6) с  $a=71$ ,  $b=6$

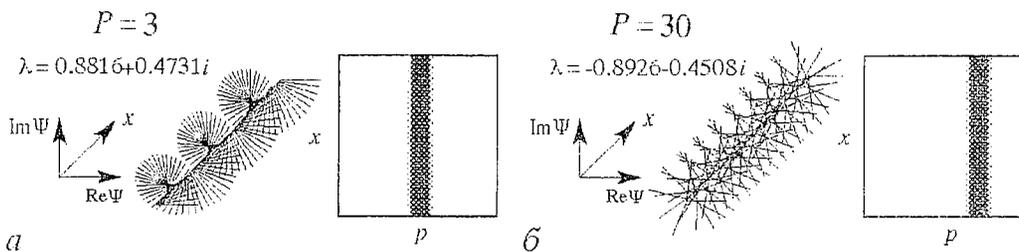


Рис. 16. Пространственная структура двух собственных векторов (слева) и соответствующие им распределения Хусими на плоскости  $p=P/N, x=Q/N$  для квантового отображения параболического типа (свободное движение на торе) при  $N=131$ . Каждый собственный вектор одновременно является собственным вектором оператора  $K$ , то есть характеризуется определенным импульсом. Показаны векторы с  $P=3$  и  $30 \pmod{N}$

В работе Экхарда оставлен открытым вопрос о взаимосвязи между циклами при итерациях переменной  $a$  и периодическими орбитами классического отображения. Чтобы прояснить этот момент, заметим, что вектор состояния (7.6) можно представить как собственный вектор для оператора, построенного из операторов Вейля – Гейзенберга, а именно

$$(K^+)^Q A^P |\psi\rangle = \alpha^L |\psi\rangle. \quad (7.9)$$

где  $L$  – некоторое целое число. Используя определение операторов  $K$  и  $A$  (3.10), переписываем это уравнение в явном виде:

$$\psi_{m-Q} \alpha^{P(m-Q)} = \alpha^L \psi_m, \quad (7.10)$$

причем  $\psi_{m+N} = \psi_m$  в силу условия цикличности. Подставляя  $\psi_m \propto \alpha^{am^2 + bm + c}$ , видим, что следует положить

$$a = \overline{2QP}, \quad b = \overline{-2P - LQ} \pmod{N}. \quad (7.11)$$

Иными словами, состояние с заданными  $a$  и  $b$  получится, если

$$L=0, \quad Q = -b\bar{a}, \quad P = -2b \pmod{N}. \quad (7.12)$$

Чтобы получить состояние с  $a=0$ , полагаем  $Q=0$ , тогда  $\psi_m \propto \delta_{mb}$  и  $b = \overline{LP}$ .

Далее, следуя схеме рассуждений раздела 5, вектор состояния в момент времени  $k$  можно найти как собственный вектор оператора  $(K^+_{(k)})^Q A^P_{(k)}$ , где нижний индекс  $k$  нумерует последовательность операторов, порождаемую отображением (3.18). Как уже было показано, с точностью до фазового множителя, оператор  $(K^+_{(k)})^Q (A_{(k)})^P$  совпадает с  $(K^+)^{Q^{(k)}} A^{P^{(k)}}$ , где  $P^{(k)}$  и  $Q^{(k)}$  подчиняются классическому отображению кога Арнольда на дискретной решетке размера  $N \times N$  (5.15). Каждой

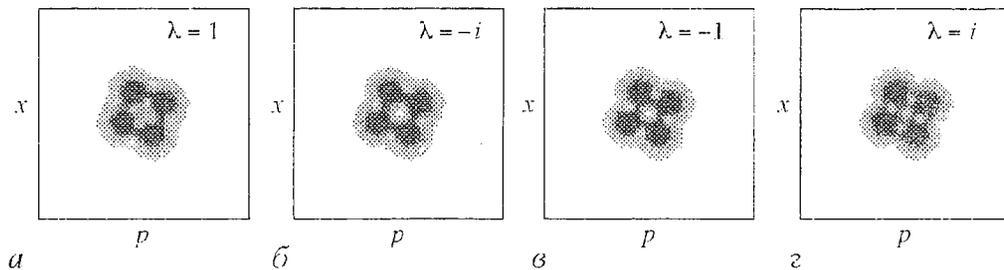


Рис. 17. Вид распределения Хусими для четырех векторов, представленных в разложении гауссова пакета минимальной ширины, совершающего движение по замкнутой орбите, стартующей из точки  $P=7, Q=3$  в случае отображения эллиптического типа (обратное преобразование Фурье),  $N=131$

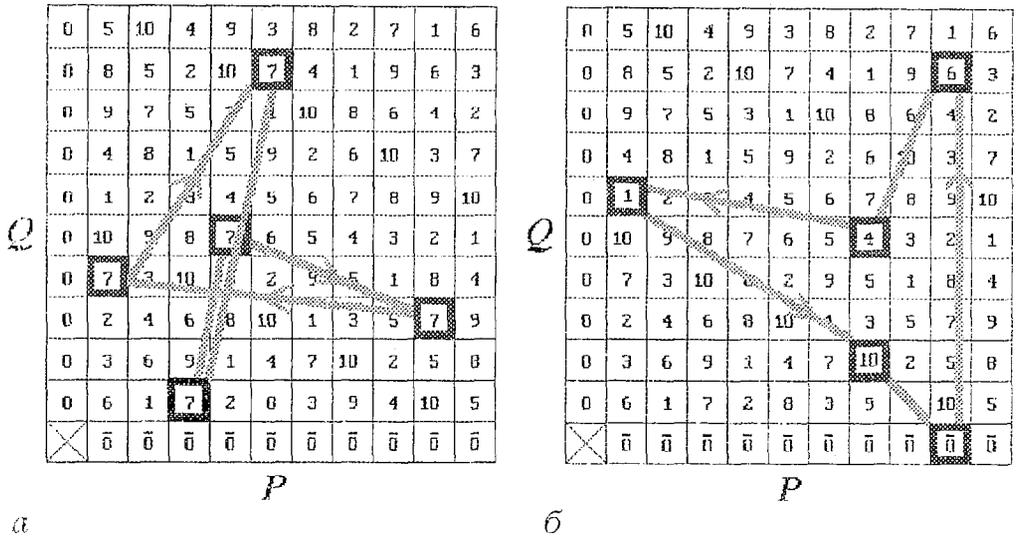


Рис. 18. К пояснению взаимосвязи между циклами, порождаемыми уравнением для параметра  $a$  в методе Эххарда и периодическими орбитами классического отображения на дискретной решетке  $N \times N$ . Каждой ячейке решетки  $(P, Q)$  приписано значение  $a=2QP \pmod{N}$ , а обход ячеек осуществляется по правилам итераций классического отображения. Для  $N=11$  показаны две орбиты, отвечающие периоду 1 (а) и 5 (б) в эволюции параметра  $a$

точке этой решетки соответствует определенное значение параметра  $a=2QP$  (рис. 18). Периодическая орбита отображения (5.15) посещает определенные точки на решетке, обеспечивая соответствующее периодическое изменение величины  $a$ .

### 8. Заключение и краткий обзор

Изложенный материал, несомненно, позволяет составить определенное впечатление о характере квантовой динамики модельных отображений на торе, а также ощутить те различия, которые имеют место между системами с регулярным и хаотическим поведением. Все же говорить о достижении полной ясности и определенности в этих вопросах пока еще трудно. Тем не менее, анализ рассмотренных модельных систем, несомненно, служит хорошим введением в проблематику квантового хаоса и подготавливает основу для обращения к более сложным задачам.

К сожалению, до настоящего времени в отечественной литературе практически отсутствуют публикации по исследованию квантовой динамики линейных отображений на торе и близких к ним по уровню сложности моделей, таких как отображение пекаря. Поэтому для удобства читателя кажется уместным привести краткий обзор работ, имеющих отношение к затронутым вопросам.

Классическое отображение, получившее впоследствии название «кот Арнольда» появляется в книге Арнольда [13], как простейший пример представителя так называемых  $У$ -систем Аносова. Доказывается наличие у этого отображения бесконечного (счетного) множества неустойчивых периодических орбит, а также свойств перемешивания и эргодичности. Соответствующие формулировки и доказательства приведены также в книге Девани, где, кроме того, выполнено построение марковского разбиения и дано описание отображения кота Арнольда на языке символической динамики [14]. В серии работ [33–35], динамика линейных отображений на торе была интерпретирована в терминах алгебраической теории чисел, что позволило глубоко осознать многие особенности динамики, и, в частности, структуру множества периодических орбит.

Основополагающая статья, посвященная квантованию линейных отображений на торе (в представлении Шредингера) принадлежит Ханнэю и Берри [15]. Они исходят из формулировки классического отображения через принцип наименьшего действия и эксплуатируют связь этого принципа с квантовой механикой, чтобы получить сначала оператор эволюции для волновой функции, определенной на бесконечной оси. Затем на волновую функцию налагаются условия, отвечающие периодичности на торе, и с помощью аналитических выражений для гауссовых сумм производится соответствующая переформулировка оператора эволюции. Как показали Ханнэй и Берри, для того, чтобы предложенная схема квантования оставалась справедливой при всевозможных целых значениях квантового параметра  $N$ , матрица классического отображения с единичным детерминантом должна представляться в виде (3.19). Работа содержит примеры квантуемых в этом смысле отображений эллиптического, параболического и гиперболического типа. Вводится понятие квантового возврата, обсуждается спектр квазиэнергий, а также динамика функции Вигнера на дискретной решетке размера  $2N \times 2N$ . На русском языке имеется только очень краткое изложение этой работы в книге Шустера [12].

Следует отметить, что отображение «кот Арнольда» вида  $p' = p + x$ ,  $x' = p + 2x \pmod{1}$  не относится к классу квантуемых по Ханнэю – Берри. Его квантование для четных  $N$  проведено Фордом с соавторами [17,25,36], а для нечетных  $N$ , по-видимому, впервые в настоящей работе.

Экхард [18,37] предложил эффективную схему вычисления собственных векторов для отображений, квантуемых по Ханнэю – Берри, и показал, что для большинства этих векторов при больших  $N$  пространственное распределение имеет вид случайной функции.

Возможность обобщения ляпуновских показателей на квантовые системы на примере отображений на торе рассматривали Тода и Икеда [38], а также Файсал и Швенгелбек [39]. Взаимосвязь такой характеристики хаоса как энтропия Колмогорова – Синая со свойствами динамики квантовых отображений на торе обсуждалась Климеком и Лесниевски [40]. Эпозити с соавторами [41], а также Бузуина и де Биевре [42] обосновали возникновение свойств перемешивания и эргодичности в динамике гиперболических отображений на торе при переходе к классическому пределу  $N \rightarrow \infty$ .

Взаимосвязь между классическими периодическими орбитами и спектральными свойствами квантовых систем с дискретным временем (отображений) была установлена Табором [43]. Для квантуемых по Ханнэю – Берри отображений на торе исследование периодических орбит и спектральных свойств, включая вывод и анализ соответствующей трасс-формулы, выполнено Китингом [30,31]. Аналогичное соотношение получено Озорио де Алмейдой и да Лузом [32] с использованием интеграла по траекториям. Как оказалось, для гиперболических отображений на торе статистические свойства распределения уровней квазиэнергии носят особый, нетипичный для других систем с квантовым хаосом, характер, подчеркивающий теоретико-числовую природу закономерностей динамики. Включение малого возмущения, превращающего отображение в нелинейное отображение Аносова, приводит к тому, что статистика уровней становится такой же, как в типичных квантовых системах [44,45]. Соответствие между структурой классических периодических орбит и картинками распределения Хусими для собственных состояний обсуждается в работах [36,46].

В серии работ Форда с соавторами [17,25,36] в очень резкой форме заявлено, что в контексте проблемы квантового хаоса принцип соответствия становится несостоятельным. В частности, статья [17] озаглавлена «Кот Арнольда: крах принципа соответствия». Авторы указывают на нестыковки, возникающие при попытках трактовать квантовое и классическое описание и переход к классическому пределу в категориях теории сложности. Хотя выдвинутая аргументация интересна и заслуживает серьезного внимания, заявление о крахе принципа соответствия само по себе следует оценивать скорее как полемический

прием. По нашему мнению, правильнее сказать, что проблема квантового хаоса в сущности и заключается в том, чтобы разобраться, какое содержание должно вкладываться в принцип соответствия для систем, классические аналоги которых демонстрируют хаос.

Использование представления Гейзенберга для исследования проблемы квантового хаоса, в том числе в системах с дискретным временем, обсуждалось в общей постановке Заславским [16]. Операторы Вейля – Гейзенберга в контексте различных квантовых задач рассматривались, например, в работах [19,20,23]. В применении к описанию квантовой динамики отображений на торе этот аппарат отчасти был развит Кнабе [47] и в уже упоминавшейся работе Климека и Лесниевски [40].

Различные версии квантовых отображений, имеющих своими классическими аналогами линейные отображения на торе, а также разнообразные аспекты их динамики обсуждаются в работах [48–52]. Помимо отображений на торе, проводились достаточно активные исследования других модельных отображений, в том числе отображения пекаря и его модификаций. Хотя они имеют косвенное отношение к основной теме этой статьи, мы приводим для удобства читателя соответствующие ссылки [53–67].

В качестве работ, дающих более широкое представление о проблематике квантового хаоса, можно рекомендовать книги и обзорные статьи [1–6, 12, 16, 29, 37, 68, 69].

Приложение А

### **Квантование отображения «кот Арнольда» для четных значений квантового параметра $N$**

Вернемся к принятому в основном тексте определению операторов  $K$  и  $A$  (3.10) и вычислим детерминант соответствующих матриц. Детерминант матрицы  $A$  есть произведение диагональных элементов:  $\text{Det}(A) = \alpha^{1+2+\dots+(N-1)} = \alpha^{N(N-1)/2}$ . Матрица  $K$  приводится к единичной с помощью  $(N-1)$ -ой перестановки столбцов, так что  $\text{Det}(K) = (-1)^{(N-1)}$ . Таким образом, оба детерминанта равны 1 для нечетных  $N$  и  $-1$  для четных. Из (3.7) следует, что  $\text{Det}(K') = \text{Det}(K)\text{Det}(A)$ ,  $\text{Det}(A') = \text{Det}(A)\text{Det}(K')$ . Поэтому при четных  $N$  знаки детерминантов должны были бы изменяться в ходе временной эволюции. Опасение, что это обстоятельство повлечет неприятности, оправдывается при переходе к представлению Шредингера (см. раздел 3). Чтобы исправить положение, приходится переопределить форму операторного отображения так, чтобы знак детерминантов в процессе эволюции сохранился.

Как отмечалось в разделе 2, конструируя выражение для оператора  $K'$  мы сталкиваемся с выбором – положить  $K' = KA$  или  $AK$ . Обе формы совместимы с классическим отображением (3.1), но неэквивалентны в силу некоммутативности операторов: они отличаются на множитель  $\alpha$ , поскольку  $KA = \alpha AK$ . Выберем «промежуточный» вариант  $K' = \alpha^{1/2}AK = \alpha^{-1/2}KA$ . Для второго уравнения сохраняем симметризованную форму:  $A' = AKA$ . Для четных  $N$  при таком выборе вида операторного отображения имеем  $\text{Det}(K') = \text{Det}(K) = -1$  и  $\text{Det}(A') = \text{Det}(A) = -1$ .

Подставим выражения для матричных элементов

$$K_{mn} = \delta_{m+1,n} \text{ и } A_{mn} = \alpha^m \delta_{mn} \quad (\text{A.1})$$

в операторное отображение

$$K' = \alpha^{1/2}AK, \quad A' = AKA \quad (\text{A.2})$$

и вычислим произведения матриц. В результате имеем

$$K'_{m,n}=\delta_{m+1,n}\alpha^{n-1/2}, \quad A'_{m,n}=\alpha^{m+n}\delta_{m,n-1}. \quad (\text{A.3})$$

Перейдем в представление Шредингера и найдем вид оператора эволюции  $U$ . Поскольку должно быть  $UK' = KU$ , из (A.1) и (A.3) следует

$$U_{m,n-1}\alpha^{n-1/2}=U_{m+1,n}. \quad (\text{A.4})$$

Аналогично, условие  $UA = AU$  при подстановке (A.1) и (A.3) дает

$$U_{m,n-1}\alpha^{2n-m-1}=U_{m,n}. \quad (\text{A.5})$$

Из (A.4) для диагональных элементов получаем  $U_{m+1,m+1}=U_{m,m}\alpha^{m+1/2}$ , так что  $U_{m,m} = U_{00}\alpha^{[1/2+3/2+\dots+(N-1)/2]}=U_{00}\alpha^{m^2/2}$ . Далее, с помощью (A.5) находим  $U_{m,m}=U_{00}\alpha^{m^2/2-mn+n^2}$ . Нетрудно убедиться, что полученное выражение для  $U_{m,m}$  имеет период  $N$  по обоим индексам.

Выберем фактор  $U_{00}$  так, чтобы  $|\text{Det}(U)|=1$ , а след был действительным положительным числом. Имеем

$$\text{Tr}(U)=\sum_m U_{00}\alpha^{m^2/2}=U_{00}\sum_m \exp(i\pi m^2/N) = U_{00}N^{1/2}\exp(i\pi/4). \quad (\text{A.6})$$

Полагая  $U_{00}=\exp(-i\pi/4)N^{-1/2}$ , окончательно получаем

$$U_{m,m}=\exp(-i\pi/4)N^{-1/2}\alpha^{(m^2/2-mn+n^2)}=N^{-1/2}\exp[2\pi i(m^2/2-mn+n^2)/N-i\pi/4], \quad (\text{A.7})$$

что совпадает с выражением, найденным в работе [17].

Оператор  $U$  можно представить также в виде произведения операторов  $V$  и  $W$ , описывающих стадии толчка и распространения.

Следуя общей идее, для стадии толчка заменяем в операторном уравнении комбинацию  $KA$  на  $\alpha^{-1/2}KA$ , так что

$$K'=\alpha^{-1/2}KA, \quad A'=A. \quad (\text{A.8})$$

Отсюда можно найти, что оператор эволюции в координатном представлении определяется диагональной матрицей:

$$V_{m,m}=\exp(-i\pi/4)\alpha^{m^2/2}\delta_{m,m}=\exp(\pi i m^2/N - i\pi/4)\delta_{m,m}, \quad (\text{A.9})$$

где фазовый множитель выбран так, чтобы  $\text{Tr}(V)=1$ .

Для стадии распространения операторное отображение выбираем в виде

$$K'=K, \quad A=\alpha^{1/2}AK, \quad (\text{A.10})$$

откуда получаем для матричных элементов оператора эволюции выражение

$$W_{m,m}=\alpha^{(m-n)^2/2}/N^{1/2}=N^{-1/2}\exp[i\pi(m-n)^2/N]. \quad (\text{A.11})$$

Как нетрудно проверить,  $U=WW$ .

Операторы  $W$  и  $V$  связаны соотношением  $W=F^+V^+F$ , поэтому оператор  $U$  можно представить также в виде  $F^+V^+FV$ .

В качестве операторного аналога параболического отображения (1.4) при четных  $N$  следует взять соотношение (A.10). Матрица оператора эволюции  $W$  определяется выражением (A.11). Что касается отображения эллиптического типа (1.5), то операторное отображение можно сохранить в прежнем виде, поскольку его итерации не приводят к изменению знака детерминантов. Оператор эволюции совпадает, как и для нечетных  $N$ , с оператором обратного преобразования Фурье.

**Эволюция оператора  $K+Q A^P$ , периодические орбиты и закон сохранения**

С помощью отображения, задающего динамику операторов  $K$  и  $A$  в представлении Гейзенберга, можно проследить эволюцию во времени и других операторов, получаемых из  $K$  и  $A$  с использованием операций сложения и умножения. В качестве важного примера рассмотрим встречающийся несколько раз в этой статье оператор  $K+Q A^P$ , действие которого состоит в выполнении сдвига на  $P$  шагов по импульсу и затем на  $Q$  шагов по координате.

Полагая  $K'=KA$ ,  $A'=AKA$  и используя коммутационное соотношение  $KA=-\alpha AK$ , можно убедиться, что

$$(K')^Q=(KA)(KA)(KA)\dots(KA)=\alpha^{(Q^2+Q)/2}A^0KQ, \quad (B.1)$$

$$(A')^P=(AKA)(AKA)(AKA)\dots(AKA)=\alpha^{-P^2}K^P A^{2P}. \quad (B.2)$$

Отсюда следует, что

$$[(K'+)Q A^P]'=(K'+)Q(A')^P=-\alpha^{-(Q^2+Q)/2+PQ-P^2}(K'+)Q-P A^{2P-Q}, \quad (B.3)$$

то есть оператор на следующем шаге представлен вновь через исходные операторы  $K^+$  и  $A$ , но с изменившимися показателями степени  $Q_{(1)}=Q-P$  и  $P_{(1)}=2P-Q$  и дополнительным фазовым множителем  $\alpha^{-(Q^2+Q)/2+PQ-P^2}$ . Соотношение между старыми и новыми показателями  $P$  и  $Q$  можно понимать по модулю  $N$ , поскольку  $K^{+N}=\mathbf{1}$  и  $A^N=\mathbf{1}$  (см. (3.10)).

Если повторить описанную процедуру  $k$  раз, то получится оператор

$$(K+Q A^P)^{(k)}=\exp\{-2\pi i/N\sum_{i=0}^{k-1}[(Q_{(i)}^2+Q_{(i)})/2-P_{(i)}Q_{(i)}+P_{(i)}^2]\}K^{+Q_{(k)}}A^{P_{(k)}}, \quad (B.4)$$

где величины  $P_{(i)}$  и  $Q_{(i)}$  удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$Q_{(i+1)}=Q_{(i)}-P_{(i)}, \quad P_{(i+1)}=2P_{(i)}-Q_{(i+1)} \pmod{N} \quad (B.5)$$

с начальными условиями  $P_{(0)}=P$ ,  $Q_{(0)}=Q$ . Уравнения (B.5) соответствуют, очевидно, итерациям в обратном времени отображения кота Арнольда  $P'=P+Q$ ,  $Q'=P+2Q \pmod{N}$ .

Если начальные значения  $P$  и  $Q$  выбраны так, что точка  $(P, Q)$  принадлежит орбите периода  $k$  отображения кота Арнольда, то  $P_{(k)}=P$  и  $Q_{(k)}=Q$ . Покажем, что стоящее в показателе экспоненты выражение (классическое действие, вычисленное вдоль периодической орбиты) для отображения кота Арнольда равно нулю по модулю  $N$ . Как можно видеть из уравнения (B.5),  $P_{(i)}=Q_{(i)}-Q_{(i+1)} \pmod{N}$ , поэтому выражение для действия вдоль периодической орбиты можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} S_{\text{p.o.}} &= \sum_{i=0}^{k-1} ((Q_{(i)}^2+Q_{(i)})/2-P_{(i)}Q_{(i)}+P_{(i)}^2) = \sum_{i=0}^{k-1} ((Q_{(i)}^2+Q_{(i)})/2-Q_{(i)}Q_{(i+1)}+Q_{(i+1)}^2) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (((N+1)/2)(Q_{(i)}^2+Q_{(i)})-Q_{(i)}Q_{(i+1)}+Q_{(i+1)}^2) \pmod{N}. \end{aligned} \quad (B.6)$$

(Здесь использовано то обстоятельство, что число  $Q^2+Q$  всегда четное, а  $(N+1)/2$  – целое в силу нечетности  $N$ .) Учитывая цикличность по индексу  $i$ , последнее выражение перепишем в виде

$$S_{\text{p.o.}}=((N+1)/2)\sum_{i=0}^{k-1}Q_{(i)}(-Q_{(i-1)}+3Q_{(i)}-Q_{(i+1)})+((N+1)/2)\sum_{i=0}^{k-1}Q_{(i)} \pmod{N}. \quad (B.7)$$

Но из уравнений (B.5) следует, что  $(-Q_{(i-1)}+3Q_{(i)}-Q_{(i+1)})=0 \pmod{N}$ . Кроме того,

суммируя это выражение по всем элементам цикла, находим, что  $\sum_{j=0}^{k-1} Q_{(j)} = 0 \pmod{N}$ . Итак, из (В.7) видно, что сумма действительно равна нулю по модулю  $N$ .

Если вспомнить, что  $P_{(k)}=P$  и  $Q_{(k)}=Q$ , то из (В.4) можно заключить, что  $(K+QA^P)^{(k)}=K+QA^P$  или  $U^{-k}K+QA^P U^k=K+QA^P$ . Таким образом, если пара целых чисел  $(P, Q)$  принадлежит орбите периода  $k$  отображения кота Арнольда, определенного на дискретной решетке размера  $N \times N$ , то оператор  $K+QA^P$  коммутирует с оператором эволюции за  $k$  временных шагов. Иными словами, с точки зрения динамики за  $k$  шагов,  $K+QA^P$  есть сохраняющаяся величина, или оператор симметрии для квантовой системы. (Собственные векторы этого оператора будут одновременно собственными векторами  $U^k$ , причем найти их очень просто, ибо матричные элементы оператора  $K+QA^P$  имеют вид  $\alpha^{nP} \delta_{m-Qn}$ ).

## Приложение С

### Классические периодические орбиты и спектральные свойства квантового отображения кота Арнольда

Установление связи между классическими периодическими орбитами и спектральными свойствами квантовых систем – одно из важнейших достижений теории квантового хаоса. В общем случае эта связь выражается так называемой trace-формулой Гутцвиллера [4,6,29], а в контексте линейных отображений на торе рассматривается в [30–32]. Учитывая направленность настоящей статьи, естественно обсудить взаимосвязь периодических орбит и спектральных свойств в свете динамики операторов Вейля – Гейзенберга. Поскольку спектр квазиэнергий однозначно определяется trace-последовательностью, зададимся вопросом о нахождении этой последовательности через эволюционирующие во времени операторы  $K$  и  $A$ .

След матрицы оператора эволюции за  $k$  шагов  $U^k$  представляется в виде

$$S_k = \text{Tr}(U^k) = \sum_{Q=0}^{N-1} \langle Q | U^k | Q \rangle = \sum_{Q=0}^{N-1} \langle 0 | K + QA^P U^k K | 0 \rangle, \quad (\text{C.1})$$

где базисные векторы в координатном представлении  $|Q\rangle$  выражены с помощью оператора сдвига  $KA^P$  через один из этих векторов,  $|0\rangle$ .

Так как унитарное преобразование матрицы не меняет след, в последнее выражение вместо  $U^k$  можно подставить комбинацию  $A^P U^k A^{-P}$ , где  $P$  – любое целое. Далее, поскольку результат не зависит от  $P$ , можно написать

$$S_k = (1/N) \sum_{P=0}^{N-1} \sum_{Q=0}^{N-1} \langle 0 | K + QA^P U^k A^{-P} K | 0 \rangle.$$

Наконец, в последнем соотношении вместо вектора  $|0\rangle$  можно подставить любой нормированный на единицу вектор  $|\psi\rangle$ , ибо с очевидностью всегда существует унитарное преобразование, переводящее один вектор в другой. Итак, справедливо представление

$$S_k = (1/N) \sum_{P=0}^{N-1} \sum_{Q=0}^{N-1} \langle \psi | K + QA^P U^k A^{-P} K | \psi \rangle. \quad (\text{C.2})$$

Далее, в силу (4.3) имеем  $K+QA^P U^k = U^k (K^{(k)}) + Q(A^{(k)})^P$ . Пусть теперь в качестве  $|\psi\rangle$  выбран собственный вектор оператора  $U^k$ , так что  $\langle \psi_s | U^k = \lambda_s^k \langle \psi_s |$ . Тогда из (С.2) следует, что

$$\lambda_s^{-k} S_k = (1/N) \sum_{P=0}^{N-1} \sum_{Q=0}^{N-1} \langle \psi_s | (K^{(k)})^{-Q} (A^{(k)})^P A^{-P} K | \psi_s \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Вследствие унитарности оператора  $U^k$ ,  $\lambda_s^{-k} = (\lambda_s^*)^k$ , поэтому суммирование по всем собственным функциям дает

$$|S_k|^2 = (1/N) \sum_{P=0}^{N-1} \sum_{Q=0}^{N-1} \text{Tr}[(K^{(k)})^{+Q} (A^{(k)})^P A^{+P} K^Q]. \quad (\text{C.4})$$

Полученное соотношение для  $|S_k|^2$  применимо для любого квантового отображения на торе. Теперь конкретизируем модель и рассмотрим отображение кота Арнольда (3.8). Как следует из результатов приложения В (см. (B.4), (B.5)), матричные элементы фигурирующего в (C.4) оператора  $(K^{(k)})^{+Q} (A^{(k)})^P A^{+P} K^Q$  с точностью до фазового множителя равны  $\delta_{m+p-P, (i), n} e^{i\pi(Q_i - Q)}$ . Если одновременно  $P_{(k)} = P$  и  $Q_{(k)} = Q$ , то это единичный оператор, след которого равен  $N$ , в противном же случае след нулевой. Поэтому вклад в сумму дадут только те пары  $(P, Q)$ , которые принадлежат периодическим орбитам классического отображения с периодом  $k$  (включая те, период которых является делителем числа  $k$ ). Поэтому из (C.4) вытекает, что

$$|S_k|^2 = \sum_{\substack{\text{по всем начальным точкам } P, Q, \\ \text{принадлежащим орбитам периода } k}} \exp[(2\pi i/N) \sum_{i=0}^{k-1} (Q_{(i)}^2 + Q_{(i)})/2 - P_{(i)} Q_{(i)} + P_{(i)}^2]. \quad (\text{C.5})$$

Далее, в приложении В показано, что сумма, фигурирующая под знаком экспоненты равна нулю по модулю  $N$ . Таким образом, для отображения кота Арнольда окончательно имеем

$$|S_k|^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{число точек } (P, Q), \\ \text{принадлежащих орбитам периода } k \\ \text{на решетке размера } N \times N \end{array} \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Эта формула позволяет с точностью до знака найти члены trace-последовательности путем подсчета для данного  $N$  всех периодических орбит классического отображения, которые имеются на дискретной решетке размера  $N \times N$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 97-02-16414).*

## Библиографический список

1. Quantum Chaos – Quantum Measurement / Eds P.Cvitanovic, I.Percival and A.Wirzba. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1992.
2. Nakamura K. Quantum chaos. A new paradigm of nonlinear dynamics. Cambridge: Cambridge University. Press, 1993.
3. Елютин П.В. Проблема квантового хаоса // УФН. 1988. Т. 155, вып. 3. С. 397.
4. Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 385 p.
5. Quantum chaos / Eds H. Cerdeira, R. Ramaswamy, M. Gutzwiller and G.Casati. Singapore: World Scientific, 1991.
6. Reichl L.E. The transition to chaos in conservative classical systems: Quantum manifestation. Springer Verlag, 1992. 551 p.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
8. Фок В.А. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
9. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике.
10. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
11. Эйпштейн А. К квантовому условию Зоммерфельда и Эпштейна // Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т. 3. С. 407.
12. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.

13. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. С. 112.
14. Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems. N.-Y., Amsterdam, Tokyo: Addison-Wesley Publ.Comp., 1989. P. 190.
15. Hannay J.H., M.V.Berry. Quantization of linear maps on a torus – Fresnel diffraction by a periodic grating // Physica 1D. 1980. P. 267.
16. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984, 267 с.
17. Ford J., Mantica G., Ristow G.H. The Arnold's cat: Failure of the correspondence principle // Physica D50. 1991. P. 493.
18. Eckhardt B. Exact eigenfunctions for a quantised map // J.Phys. A: Math.Gen., 1986. Vol. 19. P. 1823.
19. Weyers J. The quantum groups  $GL_q(n)$  and Weyl-Heisenberg operators // Physics Letters. 1990. Vol. B240. № 3-4. P. 396.
20. Athanasiu G.G., Floratos E.G. The lightcone  $SU_q(2)$  quantum algebra as dynamical symmetry of the Azbel – Hofstadter problem // Physics Letters. 1995. Vol. B352. P. 105.
21. Шредингер Э. Непрерывный переход от микро- к макромеханике // Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976. С. 51.
22. Клаудер Дж., Сударишан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 428 с.
23. Saraceno M. Classical structures in the quantized baker transformation // Annals of Physics. 1990. Vol. 199, P. 37.
24. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.
25. Ford J., Mantica G. Does quantum mechanics obey the correspondence principle? Is it complete? // Am.J.Phys. 1992. Vol. 60, № 12. P. 1086.
26. Kasperkovitz P., Peev M. Wigner – Weyl Formalisms for toroidal geometries // Annals of Physics. 1994. Vol. 230. P. 21.
27. Agam O., Brenner N. Semiclassical Wigner functions for quantum maps on a torus // J.Phys. A: Math. Gen. 1995. Vol. 28. P. 1345.
28. Mehta M.L. Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform // J.Math.Phys. 1987. Vol. 28, № 4. P. 781.
29. Gutzwiller M.G. Chaos with few degrees of freedom // Progress of Theor.Phys. Suppl. 1994. № 116. P. 1.
30. Keating J.P. Asymptotic properties of the periodic orbits of the cat maps. Non-linearity, 1991. Vol. 4. P. 277.
31. Keating J.P. The cat map: quantum mechanics and classical motion. Non-linearity, 1991 Vol. 4. P. 309.
32. Ozorio de Almeida A.M., da Luz M.G.E. Path integrals and edge corrections for torus maps. Physica. 1996. Vol. D94. P. 1.
33. Percival I., Vivaldi F. Arithmetical properties of strongly chaotic motions // Physica. 1987. Vol. D25. P. 105.
34. I.Percival, F.Vivaldi. A linear code for the sawtooth and cat maps // Physica. 1987. Vol. D25. P. 373.
35. Bartuccelli M., Vivaldi F. Ideal orbits of toral automorphisms // Physica. 1989. Vol. D39. P. 194.
36. Mantica G., Ford J. On the completeness of the classical limit of quantum mechanics // Quantum Chaos-Quantum Measurement / Eds P. Cvitanovic, I. Percival, A. Wirzba. Kluwer Academic Publishers, 1992. P. 241.
37. Eckhardt B. Quantum mechanics of classically non-integrable systems // Physics Reports. 1988. Vol. 163. № 4. P. 205.
38. Toda M., Ikeda K. Quantal Lyapunov exponent // Phys.Lett. 1987. Vol. A124. P. 165.
39. Faisal F.H.M., Schwengelbeck U. Unified theory of Lyapunov exponents and positive example of deterministic quantum chaos // Phys.Lett. 1994. Vol. A207. P. 31.
40. Klimek S., Lesniewski A. Quantized chaotic dynamics and non-commutative KS entropy // Annals of Physics. 1996. Vol. 248. P. 173.

41. *Esposti M.D., Graffi S., Isola S.* Classical limit of the quantized hyperbolic toral automorphisms // *Commun.Math.Phys.* 1995. Vol. 167. P. 471.
42. *Bouzouina A., de Bievre S.* Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus // *Commun.Math.Phys.* 1996. Vol. 178. P. 83.
43. *Tabor M.* A semiclassical quantization of area-preserving maps // *Physica.* 1983. Vol. 6D. P. 195.
44. *De Matos M Basilio, Ozorio de Almeida A.M.* Quantization of Anosov maps // *Annals of Physics.* 1995. Vol. 237. P. 46.
45. *Lakshminarayan A., Balazs N.L.* On the quantum cat and sawtooth maps – Return to generic behavior // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1995. Vol. 5, № 7. P. 1169.
46. *Leboeuf P., Voros A.* Chaos-revealing multiplicative representation of quantum eigenstates // *J.Phys.A: Math.Gen.* 1990. Vol. 23. P. 1765.
47. *Knabe S.* On the quantisation of Arnold's cat // *J.Phys. A: Math.Gen.* 1990. Vol. 23. P. 2013.
48. *Isola S.*  $\zeta$ -function and distribution of periodic orbits of toral automorphisms // *Europhysics Letters.* 1990. Vol. 11, № 6. P. 517.
49. *Weigert St.* The configurational quantum cat map // *Z.Phys.* 1990. Vol. B80. P. 3.
50. *Benatti F., Narnhofer H., Sewell G.L.* A non-commutative version of the Arnold cat map // *Lett.Math.Phys.* 1991. Vol. 21. P. 157.
51. *Kolovsky A.R.* Condition of correspondence between quantum and classical dynamics for a chaotic system // *Phys.Rev.Lett.* 1996. Vol. 76, № 3. P. 340.
52. *Kolovsky A.R.* Quantum coherence, evolution of the Wigner function, and transition from quantum to classical dynamics for a chaotic system // *CHAOS.* 1996. Vol. 6, № 4. P. 534.
53. *Balazs N.L., Voros A.* The quantized baker's transformation // *Europhysics Letters.* 1987. Vol. 4, № 10. P. 1089.
54. *Balazs N.L., Voros A.* The quantized baker's transformation // *Annals of Physics.* 1989. Vol. 190. P. 1.
55. *O'Connor P.W., Tomsovic S.* The unusual nature of the quantum baker's transformation // *Annals of Physics.* 1991. Vol. 207. P. 218.
56. *Ozorio de Almeida A.M., Saraceno M.* Periodic orbit theory for the quantized baker's map // *Annals of Physics.* 1991. Vol. 210. P. 1.
57. *Lakshminarayan A., Balaz N.L.* The classical and quantum mechanics of lazy baker maps // *Annals of Physics.* 1993. Vol. 226. P. 350.
58. *Saraceno M., Voros A.* Towards a semiclassical theory of the quantum baker's map // *Physica.* 1994. Vol. D79. P. 206.
59. *Dittes F.M., Doron E, Smilansky U.* Long-time behavior of the semiclassical baker's map // *Phys.Rev.* 1994. Vol. E49, № 2. P. R963.
60. *Hannay J.N., Keating J.P., Ozorio de Almeida A.M.* Optical realization of the baker's transformation // *Nonlinearity.* 1994. Vol. 7. P. 1327.
61. *Lakshminarayan A., Balaz N.L.* On the noncommutativity of quantization and discrete-time evolution // *Nuclear Physics.* 1994. Vol. A572. P. 37.
62. *Lakshminarayan A., Balaz N.L.* Relaxation and localization in interacting quantum maps // *J.Stat.Phys.* 1994. Vol. 77, № 1–2. P. 311.
63. *Lakshminarayan A.* On the quantum bakers map and its unusual traces // *Annals of Physics.* 1995. Vol. 239. P. 272.
64. *Saraceno M., Vallejos R.O.* The quantized D-transformation // *CHAOS.* 1996. Vol. 6, № 2. P. 193.
65. *Boasmant P.A., Smilansky U.* Quantization of monotonic twist maps // *J.Phys. A: Math.Gen.* 1994. Vol. 27. P. 1373.
66. *Lakshminarayan A., Balaz N.L.* On the quantization of linear maps // *Annals of Physics.* 1991. Vol. 212. P. 220.
67. *Lakshminarayan A.* Semiclassical theory of the sawtooth map // *Phys.Lett.* 1994. Vol. A192. P. 345.
68. *Nakamura K.* Introduction to quantum chaos // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1995. Vol. 5, № 7. P. 1035.

69. Bogomolny E.B., Georget B., Giannoni M.J., Schmit C. Quantum chaos on constant negative curvature surfaces // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. Vol. 5, № 7. P. 1311.

Институт радиотехники и  
электроники РАН,  
Саратовский филиал

Поступила в редакцию 10.04.98

## ARNOLD'S CAT MAP: QUANTUM CHAOS AND OPERATOR DYNAMICS IN HEISENBERG REPRESENTATION

*S.P. Kuznetsov*

The quantum model system is considered for which the classic analog is the known Arnold's cat map. Due to periodicity conditions for the phase space, quantum states are represented by vectors of finite dimension  $N$ , and operators by  $N \times N$  matrices. The integer parameter  $N$  characterizes a relative value of quantum effects; classic limit corresponds to  $N \rightarrow \infty$ . Operator map is suggested which governs discrete time evolution in Heisenberg representation for operators of finite shifts for position and momentum. Explicit form of evolution operator is stated in Schrödinger representation. Solution for non-stationary problem is presented and discussed for initial conditions taken as localized state, two delta-spikes, Gaussian wave packet. Quantum dynamics in terms of Husimi distribution and Wigner function, quasi-energy spectrum and eigenvector structure are discussed on a basis of dynamics of Heisenberg operators.



*Кузнецов Сергей Петрович* родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор базовой кафедры динамических систем Саратовского госуниверситета в СФИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается также исследованиями в области квантового хаоса. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Сочетатель двух монографий и одной популярной книги. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники и радиофизики СГУ и в Колледже прикладных наук СГУ. В 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.



## ИНФОРМАЦИОННЫЙ ТРАНСПОРТ В АКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛОКНАХ

### Часть I. Уединенные волны

*В.Б. Казанцев, В.И. Некоркин*

В работе обсуждается вопрос об использовании цепочки взаимодействующих электронных элементов как активного электронного волокна, способного эффективно осуществлять передачу информации в виде последовательностей бегущих уединенных волн. Проблема существования уединенных волн в цепочке сводится к изучению ограниченных траекторий вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Показано, что при определенных значениях параметров в этой системе существуют гомо- и гетероклинические траектории нескольких различных типов, включая сложные многообходные решения. Такие траектории определяют профили бегущих импульсов, волновых фронтов и волновых составов, распространяющихся по цепочке с постоянной скоростью.

### Введение

Исследование процесса передачи информации с помощью уединенных волн в пространственно распределенных системах является актуальной и современной задачей, возникающей в самых различных областях естествознания. Импульсы в оптоволоконных линиях связи [1–4], передача локального возбуждения (нервного импульса) по нервному волокну [5–8], распространение флюксонов в протяженных Джозефсоновских контактах [9,10] – вот далеко не полный перечень таких процессов. В этих системах каждая уединенная волна – единица информации, а состав из волн – кодовая посылка, содержащая информацию также и в характерных интервалах между волнами состава.

В последние несколько лет начаты интенсивные работы (см., например, [11]) по построению так называемых клеточных нейронных сетей (CNN). На базе CNN разрабатываются системы передачи визуальной информации, распознавания образов и др. CNN представляет собой большие массивы активных, тождественных или почти тождественных элементов («клеток»), объединенных с помощью межэлементных связей (тип связи варьируется в значительных пределах – от простой линейной локальной, до сложной нелинейной) в единую систему. Другими словами, CNN можно рассматривать как некоторую пространственно-распределенную систему с дискретными пространственными координатами. В большом количестве разработок CNN в качестве базового элемента используется так называемый осциллятор Чуа [12]. Динамика элемента Чуа чрезвычайно разнообразна и в зависимости от управляющих параметров она может быть как регулярной, так и хаотической. Ясно, что объединение таких элементов в CNN

образует очень сложную систему, эффективное использование которой невозможно без понимания процессов передачи информационных потоков такими системами. В частности, с этой точки зрения очень важную роль играет волновая динамика CNN.

Данная статья продолжает цикл работ авторов [13–16] по исследованию волновой динамики CNN с локальным типом связи между элементами. Как и ранее, наше исследование базируется на качественном подходе, в основе которого лежит изучение неблуждающих траекторий конечномерных динамических систем, ассоциирующихся с соответствующими CNN. Здесь мы рассматриваем одномерную CNN, состоящую из электронных элементов Чуа, соединенных в одномерную решетку с помощью локальной линейной связи. Мы сосредоточим внимание на многообразии волновых решений сложного профиля в этой системе (импульсы и волновые фронты, волновые составы и хаотические волны), изучим некоторые аспекты взаимодействия этих волн. Проводится также исследование ограниченных траекторий (гомо- и гетероклинических орбит) автомодельной системы четвертого порядка, определяющей профили стационарных волн в системе. Отметим также, что данная электронная цепочка при резистивной связи между элементами представляет собой дискретный аналог трехкомпонентной распределенной системы типа «реакция–диффузия».

## 1. Модель

Динамика цепочки локально связанных осцилляторов Чуа (рис. 1) описывается многомерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно представить в следующем безразмерном виде

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \alpha(y_j - x_j - f(x_j)) + D_1(x_{j-1} - x_j) + D_2(x_{j+1} - x_j), \\ \dot{y}_j = x_j - y_j + z_j, \\ \dot{z}_j = -\beta y_j - \gamma z_j, \end{cases} \quad (1)$$

$$j=1, 2, \dots, N,$$

где нелинейность  $f(x)$  аппроксимируется кусочно–линейной функцией вида

$$f(x) = \begin{cases} b_1x - a - b_1 & \text{при } x \geq 1, \\ -ax & \text{при } -1 < x < 1, \\ b_2x + a + b_2 & \text{при } x \leq -1. \end{cases} \quad (2)$$

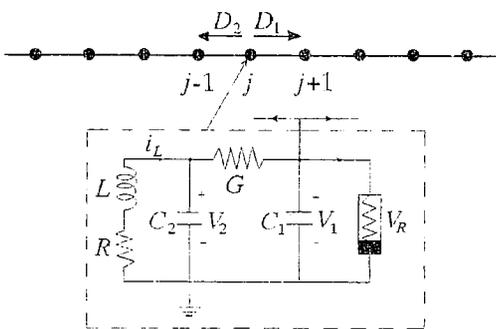


Рис. 1. Схема организации электронного волокна – цепочки локально связанных осцилляторов Чуа.  $D_1$  и  $D_2$  – коэффициенты межэлементного взаимодействия

Индекс  $j$  в системе (1) определяет номер элемента в цепочке и играет роль пространственной координаты,  $N$  – число элементов в цепочке. Параметры локального элемента  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  будем полагать положительными. Коэффициенты связи  $D_1$  и  $D_2$  характеризуют взаимодействие данного элемента  $j$  с последующим  $j+1$  и с предыдущим  $j-1$ , соответственно, и в общем случае различны. При  $D_1=D_2=D>0$  связь является взаимной. В терминах электронной цепочки это означает, что взаимодействие между элементами осуществляется через линейный резистор. В

этом случае систему (1) можно трактовать как дискретный аналог некоторой трехкомпонентной среды типа «реакция-диффузия». При  $D_1=0$ ,  $D_2=D>0$  связь между элементами — однонаправленная и (1) можно рассматривать как направленную активную линию передачи.

Уравнения (1) необходимо дополнить граничными условиями. Мы будем рассматривать два типа последних:

(i) граничные условия типа Неймана,  $x_0=x_1$ ,  $x_{N+1}=x_N$ , определяющие геометрию цепочки в виде отрезка со свободными концами;

(ii) периодические граничные условия,  $x_0=x_N$ ,  $x_{N+1}=x_1$ , задающие кольцевую геометрию системы.

Система (1) имеет три состояния равновесия, отвечающие пространственно-однородным равновесным состояниям цепочки:

$$O : \{ x_j = y_j = z_j = 0 \},$$

$$P^+ : \{ x_j = x_1, y_j = y_1, z_j = z_1 \},$$

$$P^- : \{ x_j = -x_2, y_j = -y_2, z_j = -z_2 \},$$

где

$$x_{1,2} = (b_{1,2} + a)(\gamma + \beta) / [\gamma b_{1,2} + \beta(b_{1,2} + 1)],$$

$$y_{1,2} = (b_{1,2} + a)\gamma / [\gamma b_{1,2} + \beta(b_{1,2} + 1)],$$

$$z_{1,2} = -(b_{1,2} + a)\beta / [\gamma b_{1,2} + \beta(b_{1,2} + 1)].$$

Характеристическое уравнение для пространственно однородных состояний может быть выписано в явном виде (см., например, [13]), откуда легко получить, что при выбранных параметрах нулевое состояние  $O$  является неустойчивым, а «внешние»  $P^+$  и  $P^-$  — локально устойчивыми. Оказывается, и это будет показано ниже, что оба этих состояния обладают *возбудимыми* свойствами. Это означает, что при внесении в определенную «точку среды» (элемент цепочки) возмущения по отношению к одному из устойчивых состояний (например,  $P^-$ ), превышающего некоторое пороговое значение, происходит «возбуждение» этой точки в форме импульса, после чего «точка среды» возвращается (восстанавливается) в исходное равновесное состояние. За счет диффузионного характера связи между элементами это «возбуждение» может распространяться вдоль цепочки, формируя таким образом локализованное волновое образование в виде бегущего импульса, последовательности импульсов или волнового состава. Аналогичными возбудимыми свойствами обладает и второе локально устойчивое состояние  $P^+$ . Если же это возмущение переводит «точку среды» в другое устойчивое состояние (например, из  $P^-$  в  $P^+$ ), то в системе формируется волна в виде бегущего фронта переключения, профиль которого может быть также достаточно сложным и зависит от типа этого возмущения.

## 2. Профили стационарных волн

Исследуем возможные профили стационарных волн в системе (1).

**2.1. Автомодельная система.** Перейдем в систему отсчета, движущуюся вдоль цепочки вправо (в сторону увеличения  $j$ ) со скоростью  $c$ . Для этого будем искать решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} x_j(t) &= x(\xi), \\ y_j(t) &= y(\xi), \\ z_j(t) &= z(\xi), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi = t - jh$  — бегущая координата,  $h=1/c$ . Подставляя (3) в (1), получим

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) + D_1(x(\xi + h) - x(\xi)) + D_2(x(\xi - h) - x(\xi)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \end{cases} \quad (4)$$

где точка обозначает дифференцирование по  $\xi$ . Будем интересоваться волнами достаточно «гладкого» профиля, такими что на «ширине» импульса укладывается достаточно много элементов цепочки (длинноволновый предел [13–16]). Для этого потребуем  $h \ll h^*$ , где  $h^*$  – некоторое характерное «время» существенного изменения решения (например, полуширина импульса). Тогда разностные члены в первом уравнении системы (4) можно представить в виде

$$x(\xi \pm h) = x(\xi) \pm h dx/d\xi + (h^2/2) d^2x/d\xi^2 + o(h/h^*)^2.$$

Пренебрегая слагаемыми более высокого порядка малости по  $(h/h^*)^2$  систему (4) можно приближенно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ k\dot{u} = u - \alpha'(y - x - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$k = (D_1 + D_2)h^2 / \{2[1 - h(D_1 - D_2)]\}, \quad \alpha' = \alpha'[1 - (D_1 - D_2)]. \quad (6)$$

Любая ограниченная траектория системы (5) определяет существование решения системы (1) в виде стационарной волны, распространяющейся по цепочке со скоростью  $c=1/h$ . Тривиальными ограниченными решениями системы (5) являются три ее состояния равновесия –  $O: (0, 0, 0, 0)$ ,  $P^+: (x_1, 0, y_1, z_1)$ ,  $P^-: (-x_2, 0, -y_2, -z_2)$ , отвечающие соответственно однородным статическим состояниям  $O, P^\pm$  системы (1). В этой работе мы исследуем нетривиальные решения системы (5), формируемые гомо- и гетероклиническими траекториями состояний равновесия  $P^\pm$ . В цепочке они соответствуют стационарным волновым структурам – импульсам и волновым фронтам, распространяющимся без изменения своей формы с постоянной скоростью.

**2.2. Свойства автомодельной системы.** Отметим, прежде всего, что в силу свойств кусочно-линейной функции  $f(x)$  (2) фазовое пространство системы (5) можно разделить на три области, в каждой из которых движения определяются линейной системой четвертого порядка. Это деление осуществляется плоскостями

$$U^+: \{x = 1\} \quad \text{и} \quad U^-: \{x = -1\}.$$

Каждая из областей содержит одно из состояний равновесия; собственные значения (их четыре) и соответствующие собственные вектора полностью определяют разбиение на траектории данной области фазового пространства. Зафиксируем, для определенности, параметры системы  $\{a=1.5, b_1=2, b_2=0.2, \beta=0.5, \gamma=0.01\}$ , а  $\{\alpha', k\}$  выберем в качестве контрольных параметров. Определим тип состояний равновесия системы (5). Легко показать, что собственные значения для точек  $P^\pm$  можно представить в виде

$$\{\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_{3,4} = -h + i\omega \quad (h > 0)\}.$$

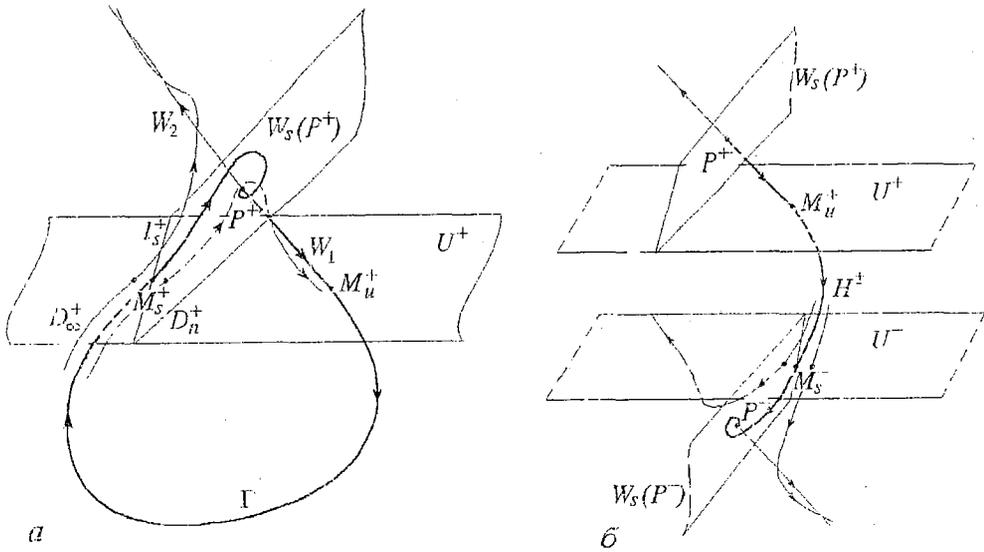


Рис. 2. *а* – формирование гомоклинической траектории  $\Gamma$  в системе (5). Качественный вид расположения многообразий состояний равновесия  $P^\pm$  и существенных точек в фазовом пространстве; *б* – формирование гетероклинической траектории  $H^\pm$  в системе (5)

Следовательно, состояния  $P^\pm$  являются «седло-фокусами» с одномерным неустойчивым многообразием  $W_u(P^\pm)$  и трехмерным устойчивым многообразием  $W_s(P^\pm)$ , которое в данном случае представляет собой трехмерную сепаратрисную плоскость. Тип тривиального состояния равновесия в точке  $O$  зависит от контрольных параметров. Эта точка может быть либо асимптотически устойчивой (все собственные значения имеют отрицательную реальную часть), либо седлового типа (седло, седло-фокус), когда два из четырех собственных значений имеют положительную реальную часть. Введем некоторые дополнительные обозначения. Точки пересечения многообразий  $W_u(P^\pm)$  с плоскостями  $U^\pm$  обозначим через  $M_u^\pm$

$$M_u^\pm: \{W_u(P^\pm) \cap U^\pm\}.$$

Пересечение сепаратрисных плоскостей  $W_s(P^\pm)$  с плоскостями  $U^\pm$  обозначим через  $l_s^\pm$

$$l_s^\pm: \{W_s(P^\pm) \cap U^\pm\}.$$

Прямая  $l_s^\pm$  разделяет плоскость  $U^\pm$  на две области  $D_\infty^\pm$  и  $D_n^\pm$  как показано на рис. 2, *а*, *б*. Траектории, пересекающие  $U^+$  в области  $D_\infty^+$ , проходят выше сепаратрисной плоскости  $W_s(P^+)$  и устремляются к бесконечности, а траектории, попадающие в область  $D_n^+$ , идут ниже плоскости  $W_s(P^+)$  и, отдаляясь от нее за счет неустойчивого направления, через некоторое время вновь оказываются на плоскости  $U^+$  (см. рис. 2, *а*). Аналогично траектории системы ведут себя, пересекая плоскость  $U^-$  (см. рис. 2, *б*).

Отметим, что при использовании изложенной в работе [14] техники, уравнения многообразий состояний равновесия в пределах линейных областей могут быть выписаны в явном виде.

**2.3. Гомоклинические траектории.** Рассмотрим сначала, как в системе (5) формируются гомоклинические орбиты состояния равновесия  $P^+$ . Это решения, отвечающие нетривиальным траекториям системы (5), которые при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  асимптотически приближаются к  $P^+$ . Легко видеть, что такие траектории должны одновременно принадлежать неустойчивому многообразию  $W_u(P^+)$  и

сепаратрисной плоскости  $W_s(P^+)$ . Другими словами, они проходят через точку  $M_n^+$  и пересекают плоскость  $U^+$  в одной из точек прямой  $l_s^+$ . Следовательно, условие существования гомоклинической орбиты состояния равновесия  $P^+$  можно сформулировать следующим образом. Выберем начальные условия для системы (5) в точке  $M_n^+$ . Тогда, если траектория системы (5), проходящая через точку  $M_n^+$ , отображает ее в некоторую точку  $M_s^+ \in U^+$  и эта точка принадлежит прямой  $l_s^+$ , то в фазовом пространстве системы (5) существует гомоклиническая траектория  $\Gamma$ .

Изменим теперь контрольные параметры, оставляя их в малой окрестности гомоклинической бифуркации. Тогда точка  $M_s^+$  сдвинется от прямой  $l_s^+$  либо в область  $D_\infty^+$ , либо в область  $D_n^+$ . В первом случае траектория будет стремиться к бесконечности (см. рис. 2, а), однако во втором случае, проходя в окрестности сепаратрисной плоскости, она снова пересекает плоскость  $U^+$  в некоторой точке, близкой к  $M_n^+$ . Для таких траекторий существует возможность образования более сложных, многообходных гомоклинических структур. Эта возможность гарантируется теоремой Шильникова [17,18] в случае, если седловая величина  $\sigma$  седло–фокуса  $P^+$

$$\sigma = \lambda_1 + \max\{\lambda_2, h\}$$

положительна для параметров гомоклинической бифуркации.

Полностью аналогично формируются гомоклинические траектории состояния равновесия  $P^-$ .

**2.4. Гетероклинические траектории.** Рассмотрим теперь гетероклинические траектории, образованные между точками  $P^+$  и  $P^-$ . Это решения системы (5), которые одновременно принадлежат неустойчивому многообразию состояния равновесия  $P^+$  ( $W_u(P^+)$ ) и сепаратрисной плоскости  $W_s(P^-)$ . Следовательно, такие траектории одновременно содержат точку  $M_n^+$  и пересекают плоскость  $U^-$  в некоторой точке  $M_s^-$ , принадлежащей прямой  $l_s^-$ . Таким образом, параметры, при которых траектория системы (5), проходящая через точку  $M_n^+$ , переводит ее в некоторую точку  $M_s^- \in U^-$ , принадлежащую прямой  $l_s^-$ , отвечают существованию в фазовом пространстве гетероклинической траектории  $H^\pm$ , «соединяющей» состояния равновесия  $P^+$  и  $P^-$ .

Аналогичным образом можно описать формирование гетероклинических орбит  $H^\mp$  траекторий, асимптотически стремящихся при  $\xi \rightarrow -\infty$  к точке  $P^-$ , а при  $\xi \rightarrow \infty$  к точке  $P^+$ .

**2.5. Бифуркационные кривые.** Для определения конкретных значений контрольных параметров, отвечающих гомо– и гетероклиническим бифуркациям в системе (5), введем так называемую функцию расщепления  $S$ . Для поиска гомоклинических траекторий она имеет вид

$$S_\Gamma(\alpha', k) = \text{dev}(M_s^+, l_s^+),$$

для гетероклинических –

$$S_{H^\pm}(\alpha', k) = \text{dev}(M_s^-, l_s^-).$$

Здесь  $\text{dev}(P, l)$  означает отклонение (расстояние со знаком) точки  $P$  от прямой  $l$ . Значения контрольных параметров, зануляющие функцию расщепления, соответствуют искомым бифуркационным значениям. Координаты точек  $M_{s,n}^\pm$  и прямых  $l_s^\pm$  выражаются в явном виде через параметры системы, а отображение  $M_n^\pm \rightarrow M_s^\pm$  может быть получено путем численного интегрирования системы (5) с соответствующими начальными условиями.

**2.5.1. Гомоклинические бифуркации.** На рис. 3 представлены бифуркационные кривые, отвечающие существованию в системе (5) различных гомо– и гетероклинических траекторий, обозначенные соответственно буквами  $\Gamma$  и  $H$ .

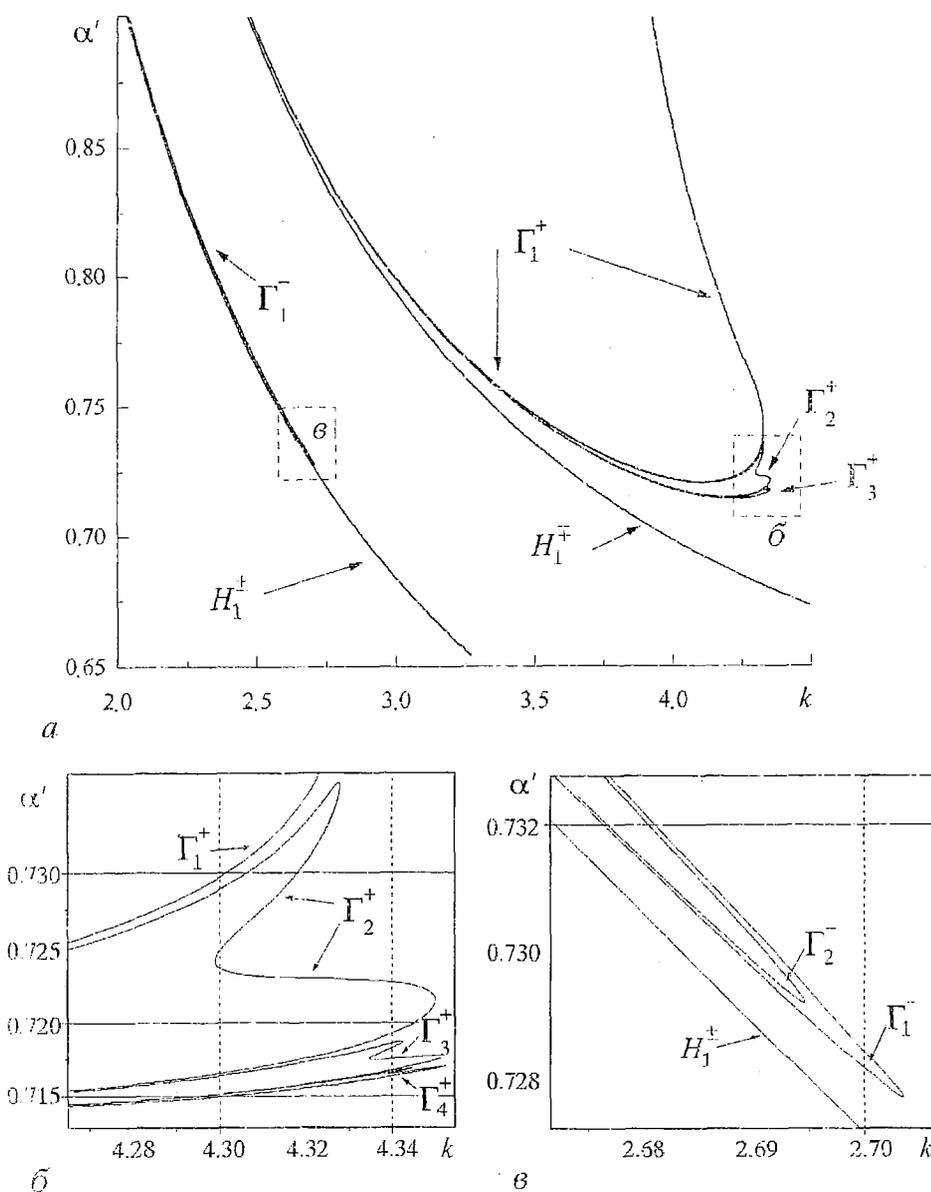
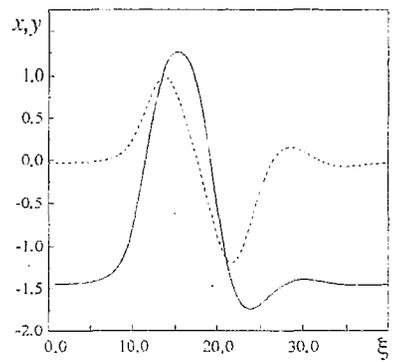
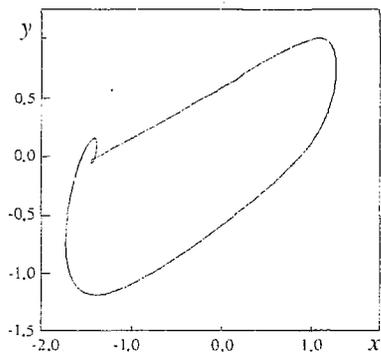
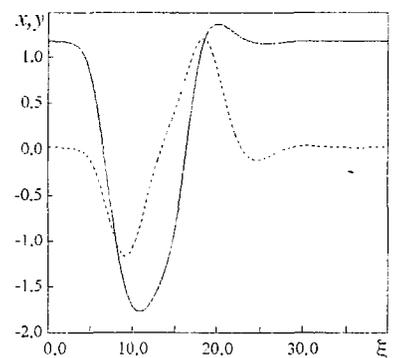
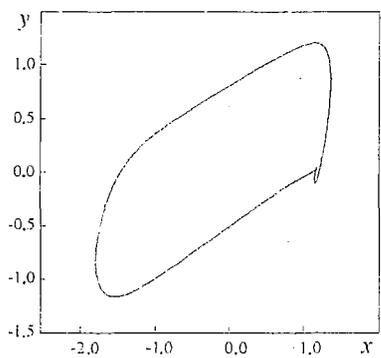


Рис. 3. Бифуркационные кривые существования гомоклинических ( $\Gamma_n^\pm$ ) и гетероклинических ( $H_1^\pm$ ) траекторий в системе (5): а – общий вид; б, в – два увеличенных участка диаграммы

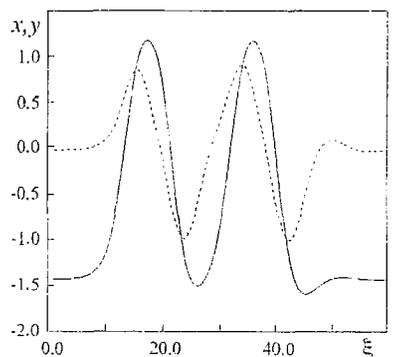
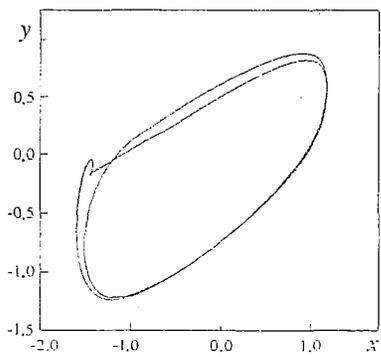
Верхний индекс  $\pm$  означает, по отношению к какой точке,  $P^-$  или  $P^+$ , формируется данная двоякоасимптотическая кривая. Нижний индекс указывает количество «обходов», которое делает данная орбита в окрестности  $\Gamma^\pm \cup P^\pm$ , прежде чем попасть на устойчивое многообразие состояния равновесия  $W_s^\pm$ . Кривые  $\Gamma_1^\pm$  соответствуют существованию простейших, однообходных гомсклинических траекторий. На рис. 4, а показана типичная форма траектории  $\Gamma_1^+$  в проекции фазового пространства на плоскость  $(x, y)$  и профиль «временной» реализации  $x, y(\xi)$ . Эти характеристики для орбиты  $\Gamma_1^-$  иллюстрирует рис. 4, б. Оказывается, что для всех значений параметров бифуркационных кривых  $\Gamma_1^\pm$  седловая величина  $\sigma$  соответствующих состояний равновесия имеет положительное значение. Согласно теореме Шильникова это гарантирует существование в окрестности  $\Gamma^\pm \cup P^\pm$  данной



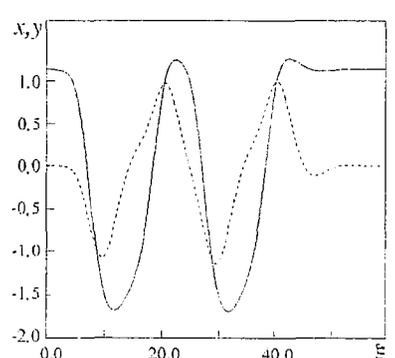
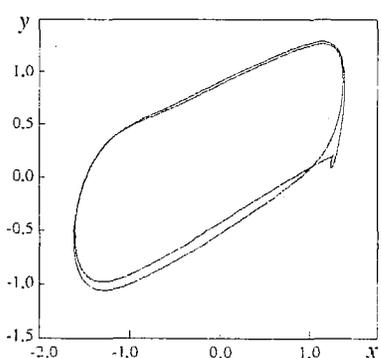
a



b



b



2

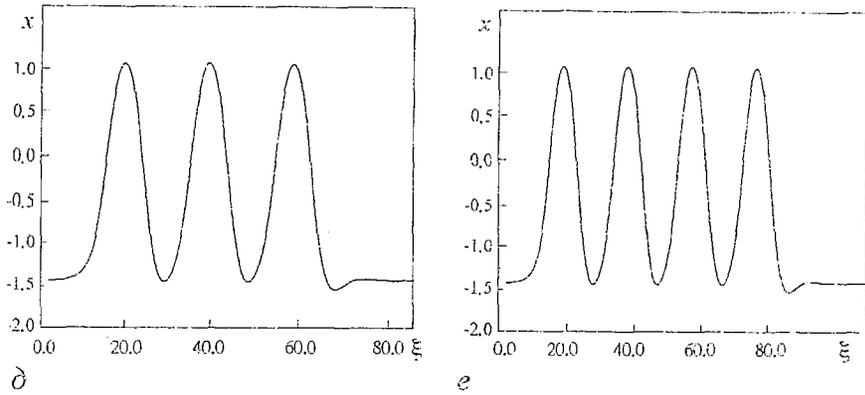


Рис. 4. Форма гомоклинических траекторий в проекции фазового пространства на плоскость  $(x, \xi)$  и профиль соответствующей «временной» реализации  $x(\xi)$ ,  $y(\xi)$  (сплошные кривые соответствуют компоненте  $x(\xi)$ , пунктирные —  $y(\xi)$ ): *a* — однообходная гомоклиническая траектория  $\Gamma_1^+$ ,  $\alpha'=0.8$ ,  $k=2.995$ ; *b* — гомоклиническая траектория  $\Gamma_1^-$ ,  $\alpha'=0.8$ ,  $k=2.355$ ; *в* — двухобходная траектория  $\Gamma_2^+$ ,  $\alpha'=0.732$ ,  $k=3.701$ ; *г* — двухобходная траектория  $\Gamma_2^-$ ,  $\alpha'=0.732$ ,  $k=2.580$ ; *д* — трехобходная траектория  $\Gamma_3^+$ ,  $\alpha'=0.715$ ,  $k=4.121$ ; *е* — четырехобходная траектория  $\Gamma_4^+$ ,  $\alpha'=0.715$ ,  $k=4.126$

бифуркации бесконечного числа седловых периодических движений и сложных, многообходных гомоклинических траекторий для всех достаточно малых значений  $S_1(\alpha', k)$ . Бифуркационная диаграмма рис. 3, *a–в* иллюстрирует расположение бифуркационных кривых, отвечающих наиболее простым двух-, трех-, четырехобходным решениям в системе (5). Кривые  $\Gamma_2^+$ ,  $\Gamma_3^+$ ,  $\Gamma_4^+$  имеют сходную структуру (см. рис. 3, *б*) и последовательно отстоят от линии  $\Gamma_1^+$ . При увеличении  $\alpha'$  они приближаются друг к другу вследствие усиления неустойчивого направления точки  $P^-$ . Кривые  $\Gamma_n^-$  имеют структуру, подобную  $\Gamma_1^-$ , и оказываются «включенными» внутрь последней. При увеличении  $\alpha'$  линии также приближаются друг к другу. Форма многообходных орбит в фазовом пространстве, а также их профиль приведены на рис. 4.

**2.5.2. Гетероклинические бифуркации.** Рис. 5, *a, б* иллюстрирует простейшие гетероклинические траектории, отвечающие кривым  $H_1^{\pm}, H_1^{\mp}$ . Кроме того, в системе (5) могут существовать и более сложные, многообходные гетероклинические решения, связывающие состояния равновесия  $P^+$  и  $P^-$ . На рис. 5, *в* приведено одно из таких решений — двухобходная гетероклиническая траектория  $H_2^{\pm}$ . Число «обходов»  $n$  для гетероклинической траектории можно определить как число попаданий траектории в окрестность  $H_n^{\mp} \cup P^+$ .

### 3. Траектории авторемодельной системы — стационарные волны

Как уже упоминалось выше, каждой гомо- или гетероклинической траектории системы (5) в цепочке отвечает импульс или волновой фронт, распространяющийся с постоянной скоростью. Согласно анализу, проведенному в предыдущем разделе, существуют два типа импульсов, один из которых отвечает удлиненным волнам, распространяющимся на «фоне» однородного статического состояния  $P^-$  (траектории  $\Gamma_{n,+}$ ), другой — на «фоне» состояния  $P^+$  (траектории  $\Gamma_{n,-}$ ). Импульсы первого типа имеют положительную амплитуду по « $x$ » координате, второго типа — отрицательную. По аналогии с терминологией, принятой при исследовании световых импульсов в оптических волокнах, будем называть движения первого типа «светлыми» импульсами, а второго — импульсами «затемнения» или «темными» импульсами.

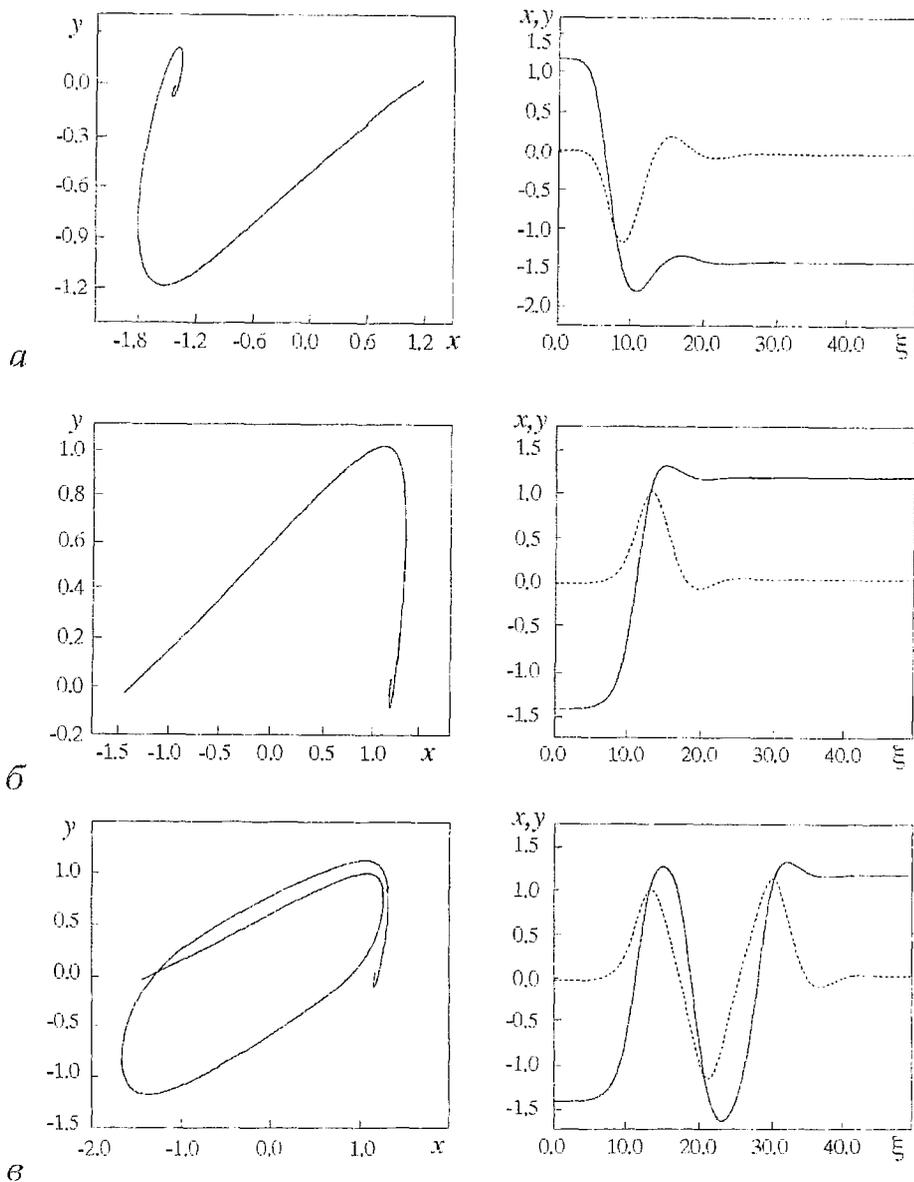


Рис. 5. Простейшие гетероклинические траектории в проекции фазового пространства на плоскость  $(x,y)$  и профиль соответствующей «временной» реализации  $(x(\xi), y(\xi))$ : а – связка  $H_1^\pm$ ,  $\alpha'=0.8, k=2.940$ ; б – связка  $H_1^\mp$ ,  $\alpha'=0.8, k=2.335$ ; в – связка  $H_2^\mp$ ,  $\alpha'=0.8, k=2.994$

Волновые фронты или фронты переключения, отвечающие гетероклиническим траекториям системы (5), представляют собой волновой процесс перехода элементов цепочки из одного устойчивого состояния  $P^+$  в другое  $P^-$ . Фронты первого типа, отвечающие связкам  $H^\mp$  и устанавливающие «светлое» состояние  $P^+$  (состояние с большим значением  $x$ ), будем называть фронтами «светлого» типа; фронты, отвечающие связкам  $H^\pm$  – фронтами «темного» типа или фронтами затемнения.

Параметры  $(\alpha, D_1, D_2)$ , отвечающие существованию в цепочке определенного импульса или фронта, можно найти по соответствующей бифуркационной кривой (см. рис. 3) и формулам (6). Отметим, что при фиксированных  $(\alpha', k)$  формулы (6) позволяют определить важную характеристику уединенных волн – зависимость скорости распространения  $c=1/h$  от коэффициентов связи  $D_1, D_2$ .

Для того, чтобы уединенная волна того или иного типа была реально физически наблюдаема в цепочке, необходимо, чтобы соответствующее решение системы (1) было, по крайней мере локально, асимптотически устойчивым. Решение этого вопроса аналитическими методами является затруднительным, так как приводит к задаче на собственные значения неавтономной системы порядка  $3N$ . Мы будем исследовать так называемую *практическую (эволюционную) устойчивость* волн. Она заключается в том, что в численном эксперименте такая волна может распространяться по цепочке достаточно долгое время без видимого изменения своей формы. Это означает, что возмущения, вносимые схемой интегрирования, а также ошибки, вызванные аппроксимацией длинноволнового перехода, не являются нарастающими и волна эволюционирует как устойчивая от некоторых начальных условий. Для возбуждения волны определенного типа будем задавать эти начальные условия близкими к профилю соответствующей траектории системы (5) согласно формулам (3).

#### 4. Цепочка со взаимной связью ( $D_1 = D_2 = D$ )

Рассмотрим систему (1) при  $D_1 = D_2 = D$ . Электронная цепочка в этом случае является дискретным аналогом возбудимой среды типа «реакция–диффузия». Согласно формулам (3), (6) система (5) описывает профили стационарных волн, бегущих с одинаковой скоростью как вправо, так и влево по цепочке.

**4.1. Распространение импульсов и волновых фронтов.** Рис. 6, а иллюстрирует эволюцию одиночного импульса «светлого» типа в цепочке с

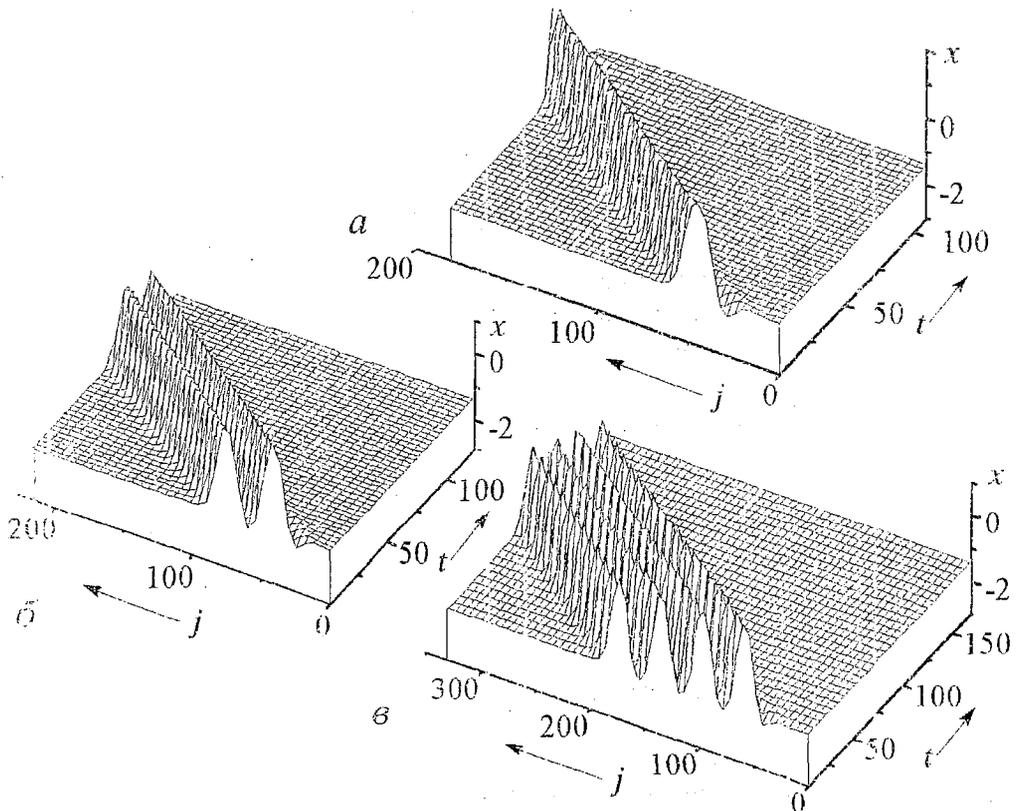


Рис. 6. Эволюция импульсов «светлого» типа в цепочке с граничными условиями Неймана: а – распространение одиночного импульса, отвечающего  $\Gamma_1^+$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $D=12.0$ ; б – двугорбый импульс ( $\Gamma_2^+$ ),  $\alpha=0.8$ ,  $D=12.0$ ; в – четырехгорбый импульс ( $\Gamma_4^+$ ),  $\alpha=0.715$ ,  $D=16.5$

граничными условиями Неймана. Из пространственно-временной диаграммы видно, что импульс распространяется без изменения своей формы и поглощается на границе. Аналогично, эволюционно устойчивыми являются «светлые» импульсы более сложного профиля. Рис. 6, б, в иллюстрирует распространение двугорбого и четырехгорбого «светлых» импульсов, отвечающих соответственно гомоклиническим орбитам  $\Gamma_2^+$  и  $\Gamma_4^+$  автономной системы.

Подобно импульсам «светлого» профиля импульсы «затемнения», отвечающие орбитам  $\Gamma_n^-$ , также могут быть эволюционно устойчивыми. На рис. 7, а-в представлена пространственно-временная диаграмма распространения одиночного ( $\Gamma_1^-$ ), двугорбого ( $\Gamma_2^-$ ) и трехгорбого импульсов. Последний представляет собой волновой состав, «составленный» из двугорбого и одnogорбого импульсов с некоторой временной задержкой между ними. Введенные таким образом начальные условия эволюционируют к устойчивому волновому образованию, профиль которого может быть ассоциирован с некоторой трехобходной гомоклинической орбитой, существующей в окрестности гомоклинических бифуркаций  $\Gamma_1^-$ ,  $\Gamma_2^-$ . Скорость такого состава близка к скоростям составляющих его импульсов.

Отметим, что как «светлые», так и «темные» импульсы являются устойчивыми и в кольцевой цепочке. По принятой терминологии в этом случае они представляют собой кноидальные волны, профили которых отвечают периодическим решениям автономной системы, близким к гомоклинической траектории.

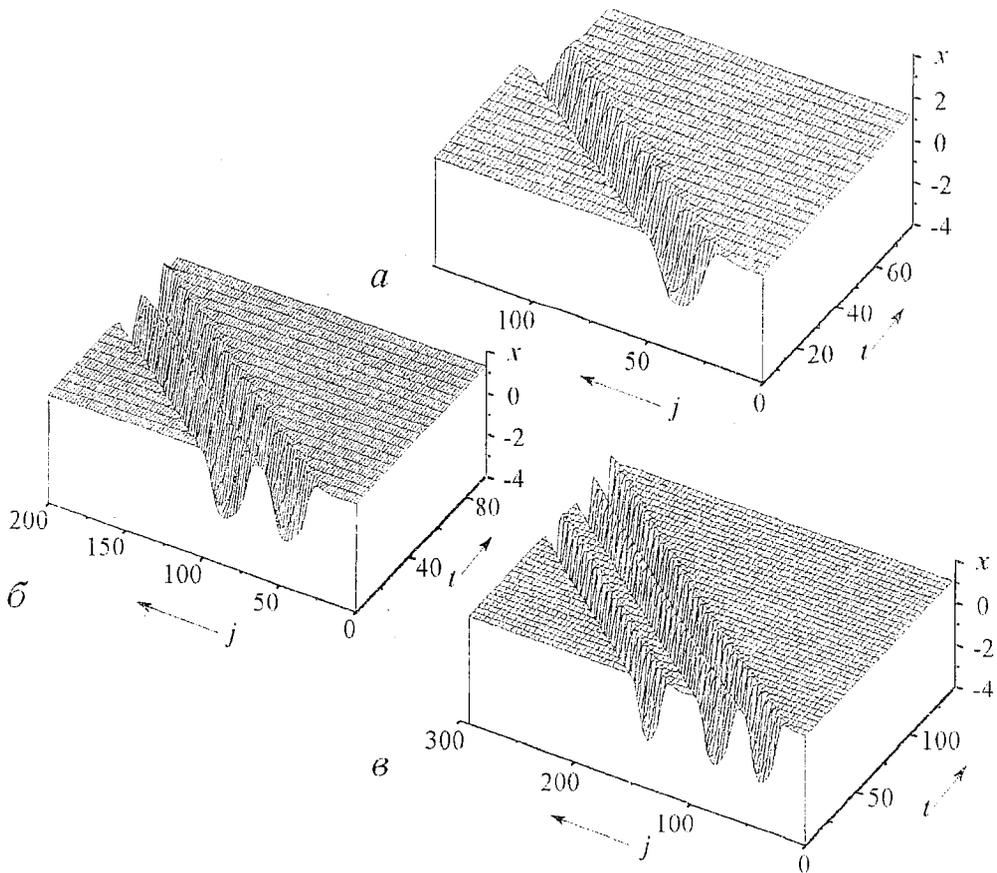


Рис. 7. Эволюция импульсов «темного» типа при фиксированных  $\alpha=0.8$ ,  $D=9.4$ : а – одиночный импульс «затемнения» ( $\Gamma_1^-$ ); б – двугорбый импульс ( $\Gamma_2^-$ ); в – трехгорбый импульс, построенный как волновой состав из одиночного ( $\Gamma_1^-$ ) и двугорбого ( $\Gamma_2^-$ ) импульсов «затемнения»

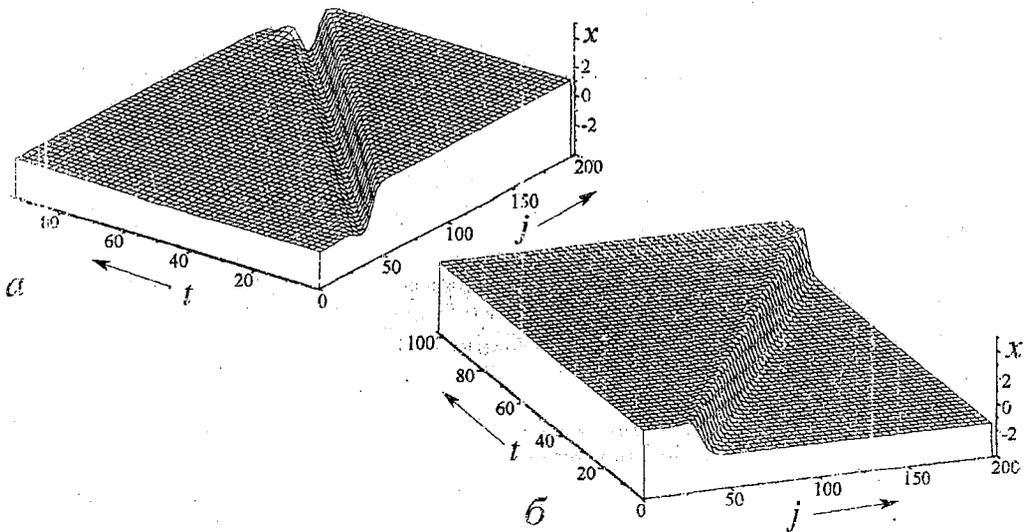


Рис. 8. Распространение фронтов переключения, отвечающих простейшим гетероклиническим траекториям системы (5): а – волновой фронт «темного» типа ( $H_1^\pm$ ), устанавливающий однородное состояние  $P^-$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $D=11.76$ ; б – волновой фронт, устанавливающий «светлое» состояние  $P^+$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $D=9.34$

Заметим также, что скорости «светлых» и «темных» импульсов в достаточной мере различаются между собой. В частности, и это следует из бифуркационной диаграммы (см. рис. 3) и формул (6), «темные» импульсы являются более быстрыми при фиксированных параметрах системы.

Рис. 8, а, б иллюстрирует распространение фронтов переключения, построенных по профилям гетероклинических орбит  $H_1^\pm$  и  $H_1^\mp$ . Оба типа («светлые» и «темные») при выбранных параметрах эволюционно устойчивы, однако имеют подобно импульсам разные скорости распространения.

**4.2. Волновые составы.** Наряду с решениями в виде уединенных волн (импульсов и волновых фронтов) в цепочке (1) существуют волны и более сложного профиля, представляющие собой волновые составы или последовательности бегущих импульсов. Рассмотрим, как формируются такие решения на примере импульсов «светлого» профиля. Заметим, что «хвосты» как импульсов, так и волновых фронтов спадают достаточно быстро (см. рис. 6, 7, 8). Другими словами, данная точка среды (элемент цепочки) после прохождения волны достаточно быстро возвращается в исходное равновесное состояние, после она снова «готова» к возбуждению, которое может принести следующий бегущий импульс. Выберем начальные условия в виде произвольной последовательности одно- и двугорбых импульсов «светлого» профиля. Близость скоростей составляющих импульсов и слабое взаимодействие между ними за счет быстрого спада «хвостов» приводит к формированию в цепочке стационарного волнового состава. Рис. 9 иллюстрирует эволюцию такой волны в кольцевой цепочке. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, с точки зрения автомодельной системы (5) профиль подобной волны ассоциируется с некоторой периодической траекторией, существующей в окрестности гомоклинической бифуркации. Такие траектории, а также гомоклинические орбиты сложной структуры образуют хаотическое множество – гомоклинический хаос, что позволяет говорить о существовании в этой окрестности ограниченных траекторий хаотического профиля, отвечающих стационарным хаотическим волнам в цепочке. Последние, как нетрудно видеть, реализуются в виде произвольных последовательностей бегущих импульсов. Такие последовательности можно интерпретировать как некоторые кодовые послышки, обеспечивающие транспорт информации по цепочке – активному электронному волонку.

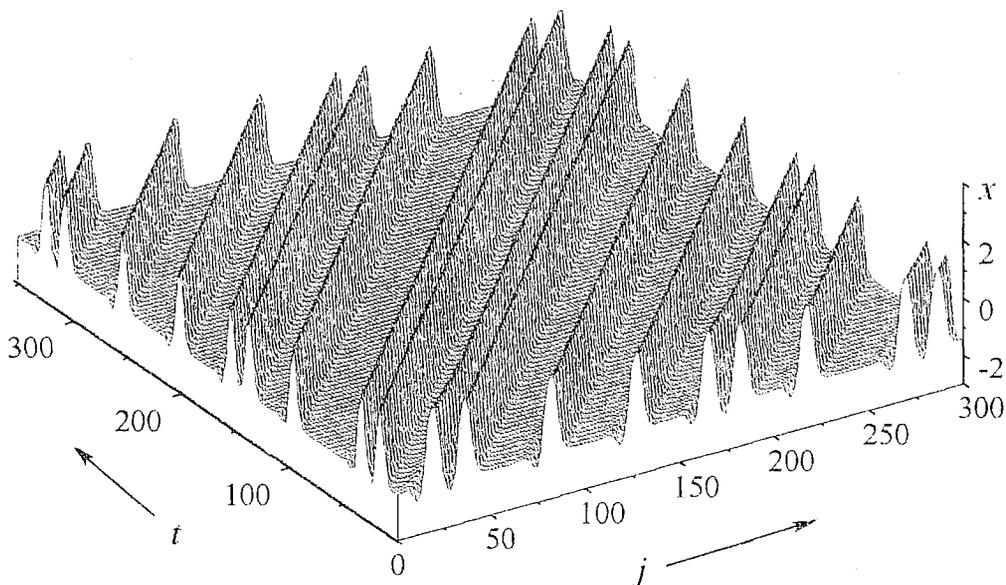


Рис. 9. Эволюция волнового состава, построенного как произвольная последовательность одно- и двугорбых импульсов с некоторой временной задержкой. Цепочка замкнута в кольцо;  $\alpha=0.8$ ,  $D=3$ .

Аналогично, для значений параметров в окрестности гомоклинической бифуркации  $\Gamma_1^-$  могут быть реализованы волновые составы в виде последовательностей импульсов «темного» профиля.

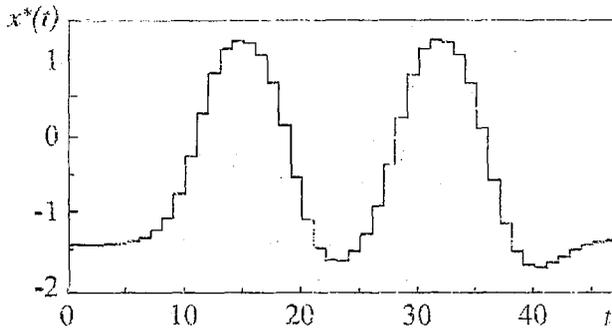
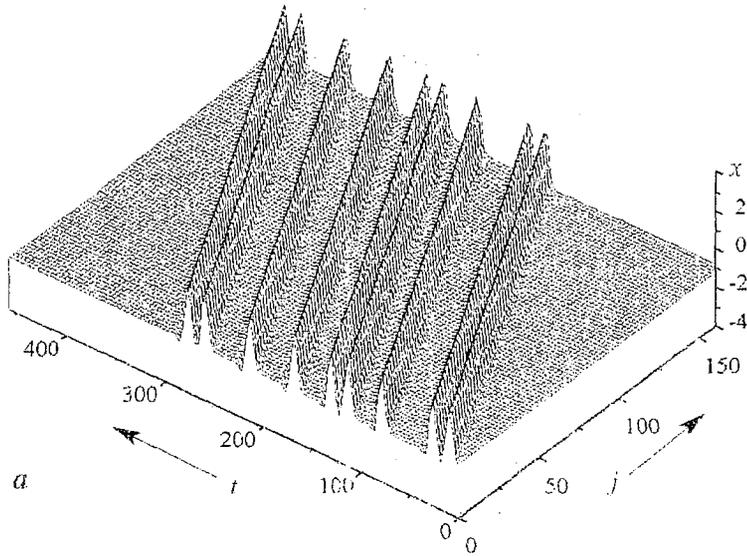
**4.3. Устойчивые и неустойчивые импульсы.** Исследование свойств устойчивости бегущих импульсов показало, что не при всех значениях параметров решения того или иного типа являются эволюционно устойчивыми в цепочке. Как следует из геометрического положения бифуркационной кривой  $\Gamma_1^+$  на плоскости  $(k, \alpha')$  (см. рис. 3), при фиксированных параметрах системы (1) ( $\alpha'=\alpha=\text{const}$ ) в цепочке могут распространяться два импульса «светлого» профиля, имеющие разные скорости (разные  $k$ ). Эти импульсы имеют сходную форму, однако те, которые отвечают правой ветви кривой  $\Gamma_1^+$ , имеют меньшую ширину и меньшую амплитуду. Они оказались неустойчивыми. Кривая  $\Gamma_1^-$  также имеет две ветви, отвечающие двум различным импульсам «затемнения». Здесь неустойчивыми оказываются решения, соответствующие левой ветви бифуркационной кривой, то есть импульсы, имеющие наибольшую скорость. Оставшиеся ветви кривых  $\Gamma_1^+, \Gamma_1^-$  в диапазоне параметров, представленном на рис. 3, определяют устойчивые импульсы соответствующего типа (см. рис. 6, 7, а).

Как уже отмечалось ранее, здесь мы говорим только о *практической* устойчивости или неустойчивости решений.

## 6. Импульсы в направленном электронном волокне ( $D_1 > D_2$ )

Рассмотрим цепочку (1) в случае направленной связи между элементами ( $D_1 > D_2$ ). Свойства волновых движений в такой системе будут существенно зависеть от направления распространения. В частности, при однонаправленном взаимодействии ( $D_1=D, D_2=0$ ) каждый элемент в цепочке воздействует только на последующий, и волн обратного направления просто не существует.

Профили возможных волновых движений, как и в случае взаимной связи, определяются ограниченными траекториями системы (5). Выберем параметры этой системы в точке ( $\alpha'=\alpha^*, k=k^*$ ) одной из бифуркационных кривых рис. 3. Из



б

Рис. 10. Передача последовательности импульсов по направленной электронной волокну (однонаправленная связь) при воздействии внешнего сигнала на первый элемент цепочки,  $\alpha=0,8$ ,  $D=0,83$ : а – пространственно-временная диаграмма распространения волны; б – фрагмент внешнего сигнала, отвечающий распространению двугорбого импульса

формулу (6) получаем, что для фиксированных коэффициентов взаимодействия  $D_1$  и  $D_2$  данное бифуркационное значение определяет волну, бегущую по цепочке вправо (в направлении наибольшей связи) со скоростью

$$c = (D_1 + D_2) / \{ [(D_1 - D_2)^2 k^* + 2k^*(D_1 + D_2)]^{1/2} - (D_1 - D_2)k^* \} > 0$$

при значениях параметра  $\alpha > 0$ , а именно:

$$\alpha = \alpha^* [1 - (D_1 - D_2)/c].$$

Рассмотрим конкретный пример однонаправленной связи ( $D_1 = D$ ,  $D_2 = 0$ ). Предположим, что цепочка находится в невозбужденном состоянии  $P^-$ , и на первый элемент ее наложим внешнее воздействие  $x^*(t)$ , в точности отвечающее профилю импульса  $x(\xi)$  (или последовательности импульсов) «светлого» типа

$$\dot{x}_1 = \alpha(y_1 - x_1 - f(x_1)) + D(x^*(t) - x_1).$$

Нетрудно видеть, что такое воздействие отвечает распространению по цепочке стационарной волны соответствующего профиля. Другими словами, в начале цепочки находится передающий генератор, «согласованный» с линией передачи.

Численное моделирование такой системы иллюстрирует рис. 10, а. Здесь в цепочку посылаются произвольная последовательность одно- и двугорбых импульсов, которые распространяются с постоянной скоростью и без изменения своей формы. Импульсы поглощаются на конце цепочки, где, например, может находиться «приемник», «согласованный» аналогичным образом с линией передачи.

Поскольку бегущие импульсы являются эволюционно устойчивыми и отсутствует обратное воздействие (следовательно, любые отраженные волны), точного согласования не требуется, и задающий генератор должен воспроизводить лишь основные характеристики данного импульса (рис. 10, б), такие как его характерная длина и амплитуда. Заметим, что подобная система с генератором и приемником может быть сконструирована и в случае взаимной связи. Однако в этом случае на концах системы будет необходимо более точное «согласование», так как существует «отражение» от каждого последующего элемента цепочки.

### Заключение

Проведенное исследование показало, что в цепочке взаимосвязанных электронных элементов Чуа может быть реализовано большое разнообразие волновых движений, включая устойчивое распространение одно- и многогорбых импульсов, волновых фронтов, а также волновых составов, состоящих из произвольных (хаотических) последовательностей бегущих импульсов. Профили этих волн соответствуют ограниченным траекториям вспомогательной (автомодельной) системы четвертого порядка. Исследование гомо- и гетероклинических бифуркаций в этой системе позволило получить множество параметров, отвечающих существованию в цепочке импульсов и волновых фронтов, а также определить некоторые характеристики этих решений, включая зависимость скорости их распространения от коэффициента связи. Численное моделирование системы показало эволюционную (практическую) устойчивость широкого класса возможных волновых решений.

Цепочка (1) имеет два устойчивых пространственно однородных состояния, каждое из которых обладает возбудимыми свойствами. Вследствие этого существуют два типа возбуждений в виде импульсов, распространяющихся на «фоне» соответствующего однородного состояния. По аналогии с импульсами в оптоволоконных линиях передачи их можно классифицировать как «светлые» импульсы и импульсы «затемнения». Оба этих типа являются эволюционно устойчивыми, однако при выбранных параметрах «светлые» импульсы имеют меньшую скорость.

В случае взаимной связи цепочка представляет собой дискретный аналог возбудимой трехкомпонентной среды типа «реакция–диффузия». В случае направленной связи между элементами можно говорить о цепочке как о направленной активной линии передачи, позволяющей эффективно осуществлять транспорт информации, закодированной в виде последовательности импульсов.

Возможность реализации в цепочке широкого спектра волновых движений позволяет надеяться, что наше исследование будет интересно как с точки зрения фундаментального изучения динамики неравновесных сред, так и с точки зрения прикладных аспектов аналогового моделирования нелинейных систем с распределенным в пространстве источником энергии. Например, в биологии такой системой являются нервные волокна, осуществляющие информационный транспорт внутри живого организма.

*Работа поддержана грантом РФФИ (проект 97–02–16550), грантом поддержки ведущих научных школ РФ 96–1596593 и программой «Соросовские аспиранты» (грант а97–853).*

## Библиографический список

1. Хаус Х. Волны и поля в оптико-электронике / Пер. с англ; Под ред. К.Ф. Шенникова. М.: Мир, 1988.
2. Агравал Г. Нелинейная волновая оптика / Пер. с англ; Под ред. П.В. Мальшица. М.: Мир, 1996.
3. Hasegawa A., Kodama Y. Solitons in Optical Communications. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
4. Guoxiang Huang, Velarde M.G. Head-on collisions of dark solitons near the zero-dispersion point in optical fibers // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3048.
5. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. Сов. радио, 1977. 368 с.
6. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
7. Murray J.D. Mathematical Biology. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
8. Крицкий В.И., Медведицкий А.Б., Панфилов А.В. Эволюция автоволновых вихрей // Математика и кибернетика. 1986. Т.8.
9. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981.
10. Бароне А., Патерно Д. Эффект Джозефсона. М.: Мир, 1984.
11. CNNA'96 // 1996 Fourth IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications. Proceedings. Sevilla, Spain, 1996.
12. Chua's circuit: a Paradigm for Chaos / Ed. R.N. Madan. Singapore: World Scientific, 1993.
13. Nekorkin V.I., Chua L.O. Spatial disorder and wave fronts in a chain of coupled Chua's circuits // Int. J. Bifurc. Chaos. 1993. Vol. 3. P. 1282.
14. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Rulkov N.F., Velarde M.G., Chua L.O. Homoclinic orbits and solitary waves in a one-dimensional array of Chua's circuits // IEEE Trans. Circ. Syst. 1995. Vol. 42, № 10. P. 785.
15. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Velarde M.G. Travelling waves in a circular array of Chua's circuits // Int. J. Bifurc. Chaos. 1996. Vol. 6. P. 4734.
16. Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Velarde M.G. Pulses, fronts and chaotic wave trains in a one-dimensional Chua's lattice // Int. J. Bifurc. Chaos. 1997 (в печати).
17. Шильников Л.П. Новый тип бифуркации в многомерных динамических системах // Математический сборник. 1969. Т. 10. С. 1368.
18. Шильников Л.П. К вопросу о расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Математический сборник. 1970. Т. 10. С. 91.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию 9.05.98

## INFORMATION TRANSPORT IN ACTIVE ELECTRONIC FIBERS

### Part I. Solitary waves

V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin

We consider the chain of coupled electronic cells as active electronic fiber capable to make the effective transport of information coded in sequences of solitary pulses. The problem of the existence of solitary pulses is reduced to the analysis of bounded trajectories of some auxiliary ODE system of the fourth order. It is shown that for certain parameter values there realize homo- and heteroclinic orbits of different types including complicated, multi-looped solutions. These orbits define the profiles of pulses, wave fronts and wave trains steady translating in the original chain.



*Виктор Борисович Казанцев* – родился в 1973 году в Дзержинске Горьковской области. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1996). В настоящее время является аспирантом кафедры теории колебаний указанного факультета. Область научных интересов – теория колебаний и волн, нелинейная динамика дискретных сред. Является соавтором нескольких научных статей по указанным направлениям.



*Владимир Исаакович Некоркин* – родился в 1948 году на Украине, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981) в ГГУ и доктора физико-математических наук (1992) в Саратовском государственном университете.

С 1971 года работал в Горьковском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 – в Горьковском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях. Соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.



## ИНФОРМАЦИОННЫЙ ТРАНСПОРТ В АКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛОКНАХ

### Часть II. Волокно – система «реакция–диффузия»

*В.Б. Казанцев, В.И. Некоркин*

В этой части работы активное электронное волокно, состоящее из резистивно связанных элементов Чуа, рассматривается как дискретная трехкомпонентная система «реакция–диффузия». Изучается динамика неустойчивостей бегущих импульсов в такой системе и взаимодействие импульсов при столкновении. Установлено, что волокно обладает как традиционными для систем «реакция–диффузия», так и принципиально новыми динамическими свойствами.

### Введение

В настоящей статье мы продолжаем исследование свойств активного электронного волокна, реализованного в виде цепочки резистивно связанных электронных элементов Чуа [1]. Здесь мы сосредоточим внимание на свойствах волокна, рассматривая его с точки зрения систем «реакция–диффузия» и покажем, что оно обладает как традиционными для таких систем, так и совершенно новыми динамическими характеристиками.

Для удобства дальнейшего изложения приведем некоторые общие сведения и термины по системам «реакция–диффузия» (см., например, [2–4]). Множество задач по изучению динамики неравновесных сред в современной нелинейной физике, химии, биохимии и биологии приводят к модельным динамическим системам, которые можно записать в следующем достаточно общем виде:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{U}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  – вектор динамических переменных  $n$ -компонентной системы ( $n$  – число «реагентов реакции»),  $\mathbf{F}$  – нелинейная вектор–функция,  $\Delta\mathbf{U}$  – оператор Лапласа,  $\mathbf{D}$  – постоянная положительная диагональная  $n \times n$  матрица. При этом уравнение

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad (2)$$

задает так называемую *кинетику реакции* или определяет динамику системы в локальной точке среды, а слагаемое  $\mathbf{D}\Delta\mathbf{U}$  отвечает за процессы распространения,

диффузии локальных возмущений в пространстве. Системы «реакция–диффузия» могут быть классифицированы по типу нелинейной кинетики реакции на три основных типа: бистабильные, возбудимые и автоколебательные.

В бистабильном случае уравнение (2) имеет два устойчивых состояния равновесия, и типичными динамическими процессами в среде, описываемой уравнением (1), являются волновые процессы «переключения» между этими состояниями – волновые фронты. Примером такой системы является однокомпонентное уравнение Нагумо (см., например, [5]). В возбудимых средах (например, система Фитц – Хью – Нагумо [2]) уравнение (2) имеет одно устойчивое состояние равновесия, обладающее *возбудимыми* свойствами. Это означает, что при наложении в определенную точку среды локального возмущения по отношению к этому состоянию, превышающего некоторое пороговое значение, происходит «возбуждение» этой точки в форме импульса, после чего точка среды возвращается (восстанавливается) в исходное равновесное состояние. Распространение этого возбуждения по цепочке происходит за счет диффузионного переноса и осуществляется в форме бегущих импульсов. Автоколебательные среды определяются существованием в уравнении (2) устойчивого предельного цикла. Процессы в таких средах можно представить как некоторые «коллективные» колебания локальных «точек среды», определенным образом «сфазированные» между собой. Это, например, периодические волны в системах с кольцевой геометрией, спиральные и концентрические волны в двумерных средах [6].

Отметим, что большинство классических моделей сред «реакция–диффузия» являются одно– или двухкомпонентными ( $n=2$ ) или сводятся к таковым. При переходе к трехкомпонентным средам, как и в случае перехода от систем на плоскости к трехмерным системам в сосредоточенных моделях, можно ожидать появления принципиально новых эффектов в их пространственно–временной динамике.

Динамическую систему для цепочки элементов Чуа (см. формулу (1) первой части [1]) в терминах общей формы записи (1) в одномерном случае можно представить в виде

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \alpha(y - x - f(x)) \\ x - y + z \\ -\beta y - \gamma z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Отметим, что в нашем случае дискретной цепочки оператор Лапласа заменяется его дискретным аналогом (см., например, [6,7])

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_{j+1} - 2 \mathbf{U}_j + \mathbf{U}_{j-1}.$$

Напомним, что при выбранных параметрах (см. [1]) кинетика реакции (2) такой системы имеет два устойчивых состояния равновесия ( $P^+$  и  $P^-$ ), которые в то же время обладают и возбудимыми свойствами. Таким образом, мы рассматриваем *бистабильную возбудимую* среду с одной диффундирующей компонентой. Показано, что в такой системе существуют как волновые фронты переключения (проявление бистабильных свойств), так и бегущие импульсы «темного» и «светлого» типов (проявление возбудимых свойств), отвечающие возбуждениям по отношению к соответствующему из двух однородных состояний ( $P^+$  или  $P^-$ ). Ниже исследуются динамические характеристики такой среды, а также возможность управления ими на примере изменения свойств бегущих импульсов и характера взаимодействий между ними.

## 1. Неустойчивости бегущих импульсов

Исследование динамики бегущих импульсов показало, что не при всех значениях параметров решения того или иного типа являются эволюционно

устойчивыми в цепочке. Проиллюстрируем это на примере распространения простейших одnogорбых импульсов «светлого» и «темного» типов.

Оказывается, что при увеличении параметра  $\alpha$  импульсы становятся неустойчивыми. Рис. 1 иллюстрирует в плоскости  $(\alpha, D)$  кривые потери устойчивости ( $B_1$  и  $B_4$ ) соответственно для импульсов «светлого» и «темного» профиля. Типичный «сценарий» разрушения импульса «светлого» типа представлен на рис. 2, а. Увеличение амплитуды осцилляций на «хвосте» импульса приводит к тому, что при возбуждении данная «точка среды» (элемент цепочки) не возвращается в исходное устойчивое состояние  $P^-$ , а переходит в другое устойчивое состояние  $P^+$ . Таким образом, образуются два фронта переключения «светлого» типа (один из которых сложной формы), бегущих в противоположные стороны. Другими словами, однородное устойчивое состояние среды

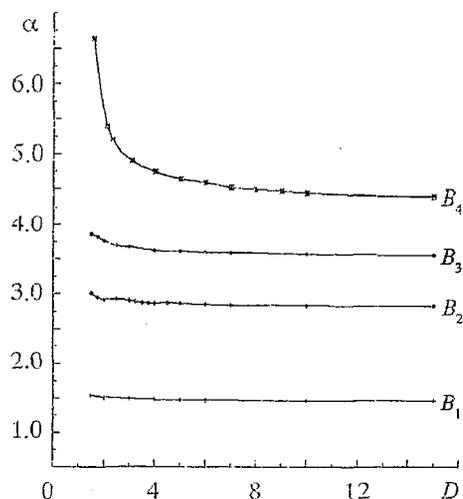


Рис. 1. Границы изменения динамических свойств возбудимой среды в плоскости параметров  $(\alpha, D)$ .  $B_1$  – кривая потери устойчивости импульсов «светлого» типа;  $B_4$  – кривая потери устойчивости импульсов «затемнения»; область параметров от  $B_2$  до  $B_3$  – «темные» импульсы ведут себя как диссипативные солитоны – волн-частицы

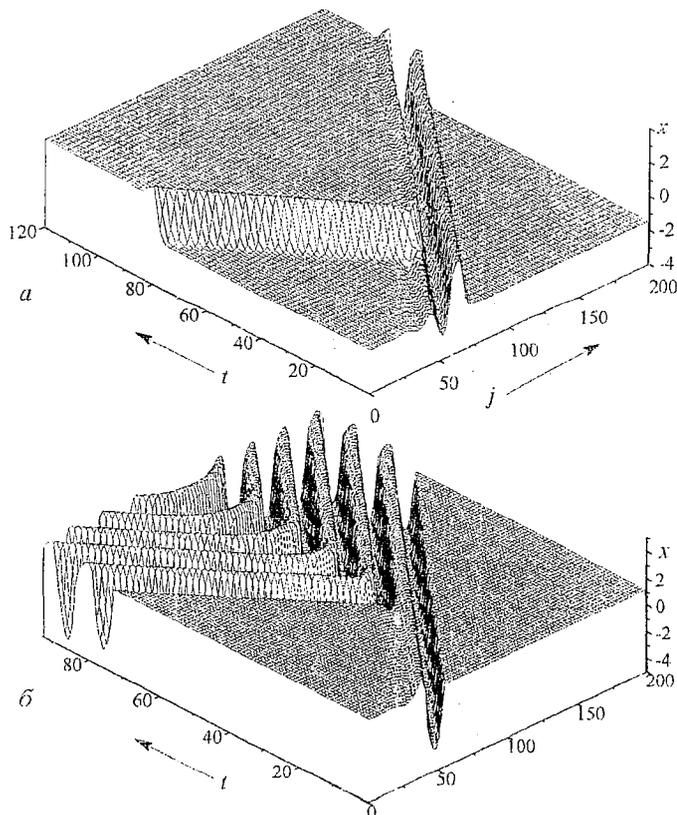


Рис. 2. а – типичный «сценарий» потери устойчивости «светлых» импульсов при переходе через границу  $B_1$ , параметры:  $\alpha=1.48$ ,  $D=4$ ; б – разрушение «темных» импульсов при переходе через границу  $B_4$ ,  $\alpha=4.7$ ,  $D=4$ ; цепочка приобретает свойства автоколебательной среды

$P^-$  теряет свойство возбудимости в том смысле, что оно больше не восстанавливается при распространении возбуждения по цепочке.

Для значений параметра  $\alpha$ , превышающих значения, определяемые кривой  $B_4$ , импульсы «темного» типа также становятся неустойчивыми. На рис. 2, б представлен «сценарий» разрушения такого импульса, который можно интерпретировать следующим образом. Прежде всего, отметим, что при  $\alpha \geq 2.85$  принципиально изменяется динамика отдельного элемента цепочки («кинетика реакции»). В его фазовом пространстве рождается устойчивый предельный цикл (седло–узловая бифуркация  $(+1)$ ) конечного размера. Элемент становится мультистабильным. В зависимости от начальных условий в нем реализуются одно из статических равновесных состояний  $P^+$  или  $P^-$ , либо состояние осцилляторной активности, отвечающее предельному циклу. Следовательно, «кинетика реакции» обладает теперь еще и колебательными свойствами. При распространении «темного» импульса (см. рис. 2, б) для параметров, превышающих значения, определяемые кривой  $B_4$ , свойство «восстанавливаемости» теряет также и равновесное состояние  $P^+$ . Это означает, что при возбуждении данная «точка среды» не возвращается в исходное состояние, а переходит в колебательный режим.

Таким образом, в области параметров выше кривой  $B_4$  цепочка полностью утрачивает свои свойства *возбудимого* волокна, «пригодного» для распространения импульсов, и представляет собой систему «реакция–диффузия» с *автоколебательной* «кинетикой реакции».

## 2. Взаимодействие импульсов. Автоволны или волны–частицы?

Рассмотрим, как в зависимости от изменения параметра  $\alpha$  меняется характер взаимодействия «темных» импульсов в цепочке.

При достаточно малых  $\alpha$  (см. рис. 6, 7 работы [1]) импульсы как «светлого», так и «темного» профиля в ограниченной цепочке поглощаются на ее границах. При столкновении импульсов, бегущих навстречу друг другу (рис. 3, а), происходит

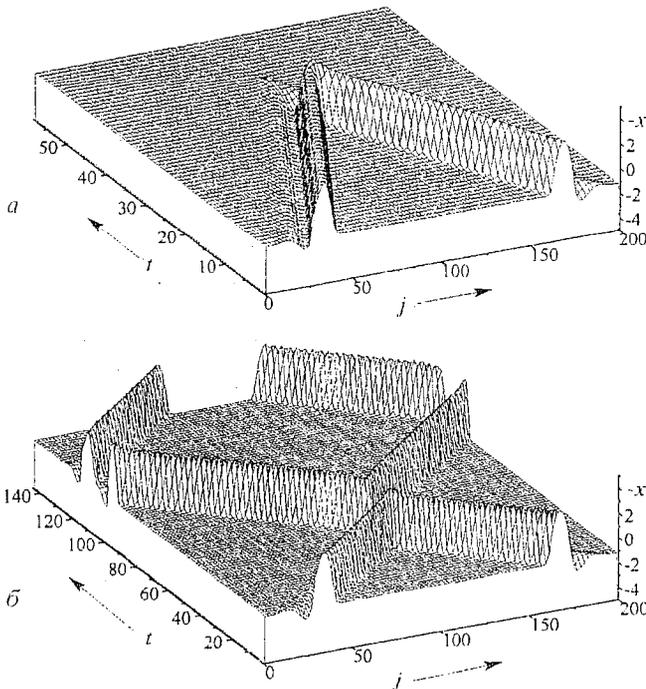


Рис. 3. Взаимодействие двух одиночных импульсов «темного» типа: а – аннигиляция импульсов при столкновении,  $\alpha=2.8$ ,  $D=4$ ; б – отражение импульсов от границ цепочки и при столкновении друг с другом,  $\alpha=2.9$ ,  $D=4$ . Импульсы ведут себя как солитоны – волны–частицы

их аннигиляция и цепочка возвращается в исходное однородное состояние. Эти свойства являются типичными для автоволн в возбудимых средах типа «реакция–диффузия». Подобным образом, например, взаимодействуют автоволновые решения в известной модели Фитц – Хью – Нагумо. Однако в отличие от классических моделей наша возбудимая среда может принципиально изменять свои динамические характеристики. На рис. 3, б представлена пространственно–временная диаграмма взаимодействия двух одиночных импульсов при выборе значений параметров из области выше кривой  $B_2$  (см. рис. 1). Импульсы здесь ведут себя подобно классическим солитонам – волнам–частицам. Они отражаются друг от друга и от границ цепочки. Однако это свойство сохраняется лишь до определенной границы (кривая  $B_3$ ), когда в достаточной мере начинают сказываться колебательные свойства среды. Выше этой границы столкновение импульсов приводит к возникновению некоторого когерентного колебательного режима (рис. 4, а).

Заметим, этот переход к преобладанию колебательных свойств среды происходит не скачкообразно (кривая  $B_3$  дает лишь оценку сверху, полученную из численного эксперимента). Вблизи границы возможны экзотические типы взаимодействий. Так, например, рис. 4, б иллюстрирует ситуацию, когда при столкновении двух импульсов среда динамически воспроизводит два дополнительных импульса, бегущих вслед за отраженными.

В качестве кратких выводов приведем таблицу изменения динамических свойств цепочки как модели трехкомпонентной системы «реакция–диффузия» согласно диаграмме рис. 1.

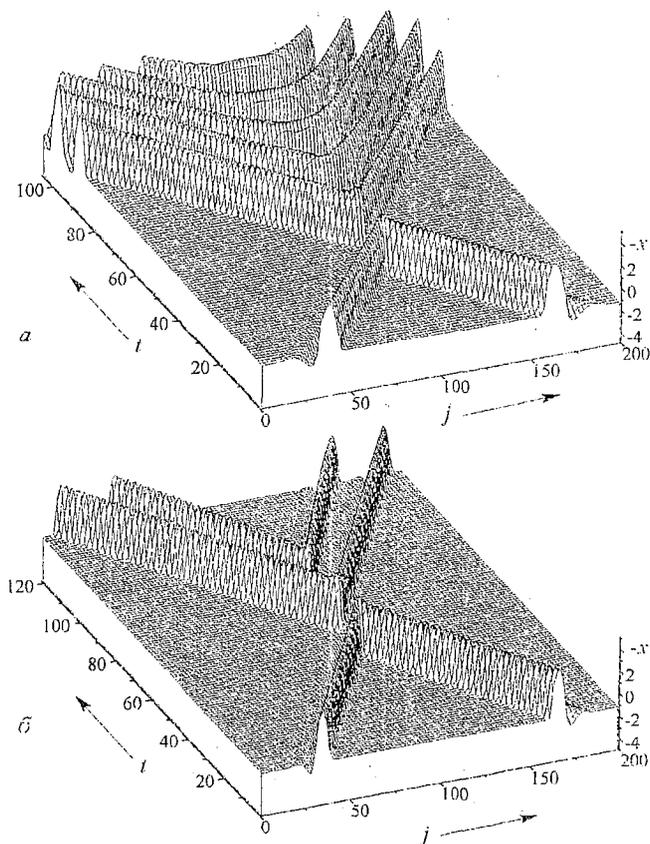


Рис. 4. а – разрушение импульсов при столкновении, переход среды в автоколебательный режим,  $\alpha=3.63$ ,  $D=4$ ; б – возникновение двух дополнительных импульсов при отражении,  $\alpha=3.761$ ,  $D=2$

Таблица

Диапазон изменения параметров	Свойства среды	Свойства бегущих импульсов
Ниже $V_1$	Возбудимая среда с двумя возбудимыми состояниями	Автоволны «светлого» и «темного» типов
От $V_1$ до $V_2$	Возбудимая среда с одним возбудимым состоянием $P^+$	Автоволны «темного» типа
От $V_2$ до $V_3$	Возбудимая среда с одним возбудимым состоянием $P^+$	Солитоны «затемнения»
От $V_3$ до $V_4$	Является одновременно возбудимой и автоколебательной	Импульсы «темного» типа, разрушаются при взаимодействии
Выше $V_4$	Автоколебательная	

### Заключение

Мы исследовали динамику бегущих импульсов в цепочке резистивно связанных электронных осцилляторов Чуа, которую можно трактовать как дискретную трехкомпонентную систему типа «реакция–диффузия». Такая система одновременно может сочетать в себе свойства всех трех основных типов классических сред «реакция–диффузия» – бистабильные, возбудимые и автоколебательные.

Изучение взаимодействия импульсов при столкновении показало наличие новых эффектов, обусловленных трехкомпонентной кинетикой реакции. В частности, в зависимости от управляющего параметра импульсы ведут себя либо как классические автоволны в системах «реакция–диффузия», поглощаясь на границах и исчезая при столкновении, либо как диссипативные солитоны, отражаясь от границы и при столкновении друг с другом. Кроме того, импульсы в такой цепочке могут взаимодействовать и более сложным образом, например, возбуждая дополнительную пару импульсов при столкновении (см. рис. 4, б). Этот эффект умножения импульсов можно с уверенностью отнести к еще одному нетривиальному проявлению *самоорганизации* в системах «реакция–диффузия».

*Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 97–02–16550), грантом поддержки ведущих научных школ РФ 96–1596593 и программой «Соросовские аспиранты» (грант а97–853).*

### Библиографический список

1. Казанцев В.Б., Некоркин В.И. Информационный транспорт в активных электронных волокнах. Часть I // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 3. С. 49.
2. Murray J.D. *Mathematical Biology*. Berlin: Springer–Verlag, 1993.
3. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
4. Кринский В.И., Медвединский А.Б., Панфилов А.В. Эволюция автоволновых вихрей // Математика и кибернетика. 1986. Т.8.
5. Keener J.P. Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. Appl. Math. 1987. Vol. 47. P. 556.

6. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1987.

7. Nekorkin V.I., Chua L.O. Spatial disorder and wave fronts in a chain of coupled Chua's circuits // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 1993. Vol. 3. P. 1282.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию 9.05.98

## INFORMATION TRANSPORT IN ACTIVE ELECTRONIC FIBERS.

### Part II. The fiber as «reaction–diffusion» system

*V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin*

In this part we consider the active electronic fiber composed of resistively coupled Chua's circuits as a discrete three–species «reaction–diffusion» system. The dynamics of instabilities of the travelling pulses and effects of their interactions are studied. It is shown that the fiber can display both typical for «reaction–diffusion» system and quite new dynamical characteristics.



## ОПЫТ КЛАССИФИКАЦИИ СУБЪЕКТОВ САМООРГАНИЗАЦИИ МАТЕРИИ И ИНФОРМАЦИИ

*Б.Н. Пойзнер, Э.А. Соснин*

На основе понятия «субъекта» самоорганизации выдвинуты гипотезы о существовании «субфизических» и «гиперкультурных» субъектов самоорганизации, об их особенностях. Построена иерархия реальных и гипотетических субъектов самоорганизации материи и информации. Иерархию предложено рассматривать в контексте идей глобального эволюционизма, интерпретаций антропного космологического принципа, положений космической этики и как обоснование содержания «субъектно-самоорганизационного» измерения эволюции.

С самого ее зарождения этика самосовершенствования была космической, так как самосовершенствование может заключаться только в том, что человек становится в истинное отношение к бытию, находящемуся в нем и вне его.

*А. Швейцер, 1923*

Человек в современном суперреалистическом мире, используя предписанное ему восприятие мира, возможно, чувствует исчерпанность этого восприятия. Он интуитивно тянется к иным, скрытым возможностям своего сознания, которые могут раскрыть ему новые формы и смыслы бытия.

*В.В. Налимов, 1993*

Эвристическая сила синергетики получает все более широкое признание в научном сообществе и отмечена многими авторами. Пожалуй, в наиболее систематизированном виде познавательный потенциал концепции самоорганизации раскрыт в докладе Е.Н. Князевой и С.П. Курдюмова [1]. Реализация этих возможностей в образовательном процессе составляет задачу, которая, судя по всему, не утратит актуальности и в начале нового тысячелетия. К ее решению приближают учебники, ориентированные на формирование у студентов синергетического мышления, сложной панорамы эволюционирующего бытия. В их ряду обращают на себя внимание книги последних лет, написанные Т.Я. Дубиницовой, Д.И. Грубецковым, П.С. Ландой, Г.Г. Малинецким [2–5].

Новым испытанием эвристической силы синергетики обещает стать ее участие в создании полидисциплинарного синтеза, названного Г.Г. Малинецким «постсинергетической научной картиной мира», или «третьей парадигмой» синергетики (с первыми двумя связаны теории диссипативных структур и динамического хаоса). В статье 1997 года «Синергетика. Король умер, да здравствует король!» Г.Г. Малинецкий пишет: «Можно предположить, что одной

из задач постсинергетики станет междисциплинарный анализ нашего незнания и целей, которые мы можем себе ставить.»

Не претендуя на решение столь крупномасштабной задачи, авторы стремились наметить лишь контуры темы, обсуждение которой так или иначе ориентирует на анализ незнания. В статье сделана попытка обосновать содержание еще одного измерения эволюции материи, оперируя понятием «субъект» самоорганизации [6] и выдвигая гипотезы относительно иерархии и природы таких «субъектов». Авторы искренне благодарны Ю.А. Данилову за самую ценную форму помощи – поощрение их усилий.

### Репликаторы всюду

Некоторые выводы статьи [6] можно обобщить и дополнить так.

1. Самоорганизация, то есть установление эволюционирующих пространственно-временных структур в динамической системе, преобразующей поток ресурсов «низкого» качества в продукт «высокого» качества и энтропийно необратимые «отходы» (где понятие качества соответствует концепции незаменимости [7] С.И. Яковленко), имеет своим субъектом, или инициатором, самооспроизводящуюся единицу информации, называемую в генетике репликатором.

2. Репликаторами процессов в технических и природных автогенераторах служат флуктуации физического поля (кванты спонтанного излучения в случае лазера и мазера; флуктуации поля концентраций и/или скоростей молекул в случае колебательных химических реакций и ячеек Бенара и т.д.).

3. В биологических системах, обладающих центральной нервной системой (ЦНС), помимо гена («внутривидового» репликатора) имеется еще «внутриорганизменный» репликатор процессов в ЦНС: электрические импульсы с характерным частотным спектром, создаваемые нервными клетками, называемыми пейсмекерами [8] (от англ. pacemaker), то есть датчиками ритма.

4. Репликаторами процессов самоорганизации в социокультурной сфере являются культурные образцы (объекты любой природы, с которыми люди соотносят элементы своего сознания и поведения), или так называемые мемы (от англ. memos – память [9]), и юнговские архетипы (структурирующие образцы психической деятельности, связанные с инстинктом, интуицией и составляющие наследуемую часть психики [10]).

5. Самоорганизация в литературе, искусстве, науке осуществляется благодаря конкурентному отбору культурных образцов, отдельные аспекты которого раскрыты в концепциях В.Б. Шкловского («искусство как прием»), Ю.Н. Тынянова («конструктивный привкус» в литературе), К.С. Малевича («прибавочный элемент в живописи»), К. Поппера и Д. Кемпбелла (гипотеза «слепой вариации» известной научной идеи; угадывание верной теории), Ю.М. Лотмана («Клио на распутье»), Ю. Неемана (исследовательское везение).

6. Долговечность культурных образцов варьирует в широком диапазоне (что соответствует схеме Ф. Броделя, различавшего три вида продолжительности в истории [11]), но даже фундаментальные и древние мемы подвержены изменениям (как, скажем, художественные модели мироздания, выражающие идеи мирового порядка, гармонии, красоты [12], «вечные» ценности [13] и др., а некоторые из них сохраняются – под маской, под вуалью новизны – в обстановке, где, казалось бы, им совсем нет места: так, официальное именование советских писателей (с 1932 года) – «инженеры человеческих душ» – скорее всего восходит к евангельскому выражению «ловцы человеков» [14], в ту пору табуированному; то, насколько высок был тогда престиж инженера, помогает уяснить статья драматурга-авангардиста С.М. Третьякова (Советский экран, 1926, № 1), восхищенно отзывавшемся о своем знамените единомышленнике Эйзенштейне как о режиссере-инженере), причем в точке бифуркации возможно «воскрешение» культурного образца, некогда вытесненного другим – также в результате смены

социокультурной парадигмы и/или предпринятого вмешательства в процесс культуронаследования (именно таков механизм нынешнего ухода из государственного и общественного быта России красной пятиконечной звезды как символа советского мира, в 1920–х годах заместившего в массовом сознании «звезду светлую» – символ Христа [15]).

7. Продолжительность бытования данного мема и динамика числа его носителей зависят от силы влияния того или иного репликатора биологического процесса на вид жизнедеятельности, регламентируемый этим культурным образцом (примерами взаимообусловленности двух процессов самоорганизации – с участием «внутриорганизменного» репликатора процессов в ЦНС и мема, регулирующего активность индивида, могут служить: молчание как форма речевого поведения, имеющая наряду с медико–психолингвистическим измерением социо–политологическое, фольклорно–этнографическое, художественное, религиозное измерения [16]; сквернословие как инструмент эмоциональной разрядки и как средство выражения отношений между индивидами, обладающее этнокультурной спецификой [17]; жестикаляция, не только спонтанно передающая эмоциональное состояние человека, но и позволяющая ему продемонстрировать его социальную, половую, национальную, конфессиональную принадлежность [18], а также выполняющая особую функцию в ситуациях молчания [16] и оскорбления словом [17]).

8. Интерференция юнговских архетипов и господствующих в общественном сознании мемов: идеологических, религиозных, этнокультурных и т. д., – то есть их противостояние, резонанс, независимое сосуществование и т.п., определяет «дух времени» и эстетические доминанты искусства данного времени (это весьма рельефно и однотипно проявилось в базовых метафорах советского кино 1930–40–х годов, позволив В.И. Мильдону увидеть в них «выражения устойчивых, мало и медленно меняющихся, черт национального мироотношения» [19]).

Сравнение перечисленных выше движителей самоорганизации материи свидетельствует об отличиях в структурной и/или функциональной сложности репликаторов различной природы. По нашим оценкам, наименьшая сложность – у флуктуаций физического поля в технических и природных автоколебательных системах, представляющих собою «белый» шум либо фликкер–шум (или их комбинацию) [20]. Близок к ним либо более высок уровень сложности флуктуаций поля концентраций и/или скоростей молекул в химических системах [21], а также уровень сложности создаваемых пейсмейкерами электрических сигналов [8] (благодаря которым континуум поведенческой активности организма дискретизируется, расчленяется на «кванты», согласно представлениям физиологии [22]). Строение генов несравнимо сложнее (хотя бы в силу большого числа элементов). А среди культурных образцов, дискретизирующих деятельность человека и работу его сознания, имеются такие, чья структура отличается еще большей сложностью.

При этом свойства относительно простых репликаторов (скажем, сигналов пейсмейкеров в ЦНС человека) обуславливают характер динамики с участием более сложных репликаторов (культурных образцов). Известно, что в философии [23], психологии и педагогике [24] принято рассматривать человека как целостное единство трех начал: индивидуального, субъективного и личностного. Тогда, прибегая к сильному упрощению, можно предположить, что специфику индивидуального в значительной мере обуславливает генетический уровень (грубо говоря, результат репликации генома) и в некоторой степени – уровень процессов, управляемых сигналами пейсмейкеров. Специфику же субъективного начала задает главным образом уровень процессов, управляемых сигналами пейсмейкеров [25], и отчасти – уровень, где проявляется действие юнговских архетипов. Аргументом в поддержку этого суждения может служить экспериментально установленный Ст. Грофом факт воздействия физического начала (галлюциногенного препарата LSD) на глубины сознания, оцениваемый В.В. Налимовым как принципиально важный [23]. Наконец, для личностного начала определяющее значение имеет восприятие культурных образцов (мемов), «фоном» которого служат архетипы [6,9,10,13].

Дополним описание этой трехуровневой схемы ценным замечанием С.М. Розова: «Однако же, реально не существует никакой линии разграничения сфер влияния генов и мемов, что порой может приводить к возникновению геномеметических конфликтов» [9]. Разделяя его мысль, добавим, что возможны и другие конфликты: как между репликаторами разных уровней, так и – одного, то есть между архетипом и мемом (о чем свидетельствует, например, символика советского кино 1930–40-х годов [19] и, по-видимому, других семиотических систем, выражающих так называемую мифологию современности). В пользу высказанных утверждений говорит также теория А. Маслоу о биологических корнях высших ценностей [24].

### Гипотетическая эволюция субъектов самоорганизации

Согласно эволюционной гипотезе в редакции С.Д. Хайтуна, «материя в ходе эволюции в сторону возрастания энтропии перешла от гауссовых систем природы к негауссовым системам социального мира». Здесь гауссовыми называют системы, для которых стационарные статистические распределения вероятности случайных событий в системе имеют вид функции Гаусса. Природные неорганические распределения в большинстве случаев гауссовы. А стационарные статистические распределения, характеризующие человека, его деятельность (особенно – творческую) и процессы в обществе, оказываются в большинстве своем негауссовыми, то есть имеют при больших значениях переменной  $n$  форму распределения Ципфа (оно же – Парето, Уиллиса, Гутенберга – Рихтера, Манцельброта и т. д.):  $p(n) \approx 1/n^{1+\alpha}$ , где показатель Ципфа  $\alpha$  – некоторый «паспортный» параметр гиперболического распределения (обычно  $3 > \alpha > 0$ ). В качестве  $p$ , например, выступает доля авторов, имеющих  $n$  научных публикаций. В этом случае (так называемый закон обратных квадратов, или закон Лотки)  $\alpha = 1$ . (Немногочисленные гауссовы социальные распределения вписываются в негауссову картину социальных распределений.) Органическим системам в силу их промежуточного положения должны отвечать малые значения  $\alpha$ . Ожидается, что сенсорные и нейронные структуры головного мозга человека генерируют исключительно негауссовы распределения [26].

Исходя из принадлежащих С.Ф. Тимашеву, Г.Г. Малинецкому, А.Б. Потанову, А.В. Подлазову интерпретаций механизма самоорганизованной критичности [20, 27, 28], в режиме которой для случайных событий в динамической системе характерно именно распределение Ципфа, факты, обобщенные гипотезой С.Д. Хайтуна, предлагается объяснять тем, что взаимосвязи элементов социокультурных систем более сложны в структурном и в функциональном отношениях, сильны, многообразны, высокоразмерны, крупномасштабны (large scale) и нелинейны, чем в биологических системах (за исключением, видимо, мозга человека [29]), а тем более – в неорганических системах.

По нашему предположению, за «жесткой» оппозицией *гауссовы–негауссовы системы* можно различить «мягкую» оппозицию *простые–сложные субъекты самоорганизации*. Такой переход на другой язык описания позволяет дать «квантовогетическую» формулировку эволюционной гипотезы: *материя, эволюционируя в сторону возрастания энтропии, перешла от простых субъектов самоорганизации материи в виде флуктуаций физического поля к сигналам неймейкеров и генам, а затем – к более сложным репликаторам: юнговым архетипам и культурным образцам восприятия, мышления и поведения.*

Предлагаемая редакция эволюционной гипотезы рождает ряд догадок.

**Гипотеза 1.** *Возможно существование субъектов самоорганизации материи и/или информации, более сложных, чем культурные образцы. Динамика, порождаемая этими репликаторами (условно говоря, «гиперистория»), приблизительно так связана, сцеплена с переживаемой нами историей культуры, как эта последняя – с эволюцией генетических программ.*

Об эволюции же К. Гиртц (1973), изучавший развитие человеческого тела и мозга почти за три миллиона лет, заключает: «Нервная система человека не просто позволяет ему обрести культуру, она, безусловно, требует, чтобы он делал это, если она вообще должна функционировать. Культура действует, не только обеспечивая, развивая и расширяя основанные на органике и логические и генетически первичные по отношению к ней способности, но скорее является составной частью этих способностей как таковых» (цит. по [30]). Сходным образом М. Коул считает, что «культуру следует рассматривать как некий уровень организации, не записанный непосредственно в человеческих генах, а соединяющий ламаркианские (культурно-исторические) принципы с дарвиновскими (филогенетическими)» [30]. Независимо от М. Коула И.А. Евин, обобщив разнообразный искусствоведческий материал (в том числе результаты количественного анализа художественных произведений), заключает: «...к искусству следовало бы относиться как к системе, которая продолжает эволюцию материи» [31]. Дополнительные иллюстрации к этому тезису содержатся в концепции эволюционных синхронизмов, примером которых, по мысли В.Г. Буданова, является золотое сечение, характерное и для природных, и для культурных объектов [32].

Учитывая аргументированность цитированных мнений, нельзя не задуматься о закономерности появления следующего за культурой уровня организации, «не записанного непосредственно» в культурных образцах. Подобная догадка отнюдь не идет вразрез с так называемой финалистской версией антропного космологического принципа, предложенной А.Дж. Типлером: «Во Вселенной должна возникнуть разумная обработка информации, а однажды возникнув, она никогда не кончится» (цит. по [33]).

Можно ожидать, что эти гипотетические субъекты самоорганизации материи и/или информации функционируют в рамках динамической «гиперсистемы» наивысшей степени сложности. Наивысшей, – поскольку она содержит (скажем, а-ля матрешка) не только физические и биологические, но также социальные и некие «гиперкультурные» измерения. Возможно, что качественный скачок сложности, переплетенности (в том смысле, какой вкладывают в новое понятие perplexity [34, 1]) способен породить некую «самоорганизованную суперкритичность» (имеющую своим прототипом явление самоорганизованной критичности [2, 20, 27, 28]), обрекая «гиперсистему» на перманентную неустойчивость, крайнюю лабильность, а потому – на эфемерность. Предположение о кратковременности бытия «гиперсистемы» поддерживается фактом существенного превышения темпов культурной (меметической) эволюции над темпами биологической. «Человеческая культура (то есть полный набор мемов) за последние 10 тысяч лет претерпела столь радикальные изменения, что ее эволюция за это время сравнима только с разнообразием форм, возникшим со времени выхода первых организмов на сушу», – констатирует С.М. Розов. Он приводит следующую оценку: если условно все время биологической эволюции на Земле приравнять одним суткам, то весь период культурной эволюции займет последнюю четверть секунды перед полночью [9]. В свою очередь, нарастающее ускорение социокультурной эволюции развитых стран после второй мировой войны (особенно США – лидера «технической цивилизации») еще в середине 1960-х годов дало повод А. Тоффлеру заявить о шоке из-за столкновения с будущим [35]. Систематизация закономерных скачкообразных увеличений темпа эволюции, приведенная в монографии И.В. Мелик-Гайказян, помогает увидеть тенденцию усложнения «нашего мира». Возраст генетической информации составляет около 1.5 миллиарда лет, поведенческой – приблизительно 40 миллионов лет, логической информации – около 25 тысяч лет [36, рис. 3.1]. При этом количество последней «настолько велико по сравнению с остальными видами, что высказывается мнение о неизбежном новом информационном скачке, способном изменить темп течения современной эволюции» [36].

Аргументируя гипотезу о «гиперсистеме», уместно также вспомнить об игре, то есть *непродуктивной* деятельности, мотив которой заключается в самом

процессе, а не в результатах. Согласно концепции Й. Хейзинги, культура возникла в форме игры: человеческое сообщество поднялось до сверхбиологических форм, придавших ему высшую ценность посредством игр. По мнению Е. Финка, игра пронизывает все базисные феномены человеческого существования. Напротив, живя, человек не знает игры—фантазии как общения с возможностями, оно не играет, относя себя к воображаемой видимости [37]. Насколько же значима игра сегодня? Здесь следует назвать тенденцию развития цивилизации, упоминаемую Н.И. Богдановым, исследующим (в контексте построения метатеории игр [38]) истоки возникновения игр в процессе *неигровой* социальной активности: «неуклонное игровое смещение всех областей человеческой деятельности». Мы склонны усмотреть в этом вытеснении неигрового компонента непродуктивным прецедент спонтанного накопления культурных образцов (активность по правилам «дела» и одновременно по правилам «игры»), более сложных, чем исходные мемы (неигровая, сугубо деловая активность), когда «самоорганизовавшаяся» игровая ситуация может и не восприниматься ее участниками как игра. (Пожалуй, последним примером здесь является создание репликаторов особого типа: компьютерных «вирусов».) По аналогии можно вообразить себе формирование массива «гиперкультурных» репликаторов внутри гипотетической «гиперсистемы». Экстраполируя на случайные процессы в ней «синергетическую» формулировку эволюционной гипотезы, логично заключить, что их отличает максимальная энтропия. Причем сам этот максимум энтропии допустимо считать признаком «самоорганизованной суперкритичности», ведущей к эфемерности.

*Гипотеза 2.* Не исключена возможность существования субъектов самоорганизации материи и/или информации, более простых, чем флуктуации физического поля. Не входя в противоречие с теорией Большого Взрыва [2] и главными формулировками антропного космологического принципа [33], естественно предположить, что активность таких «субфизических» самовоспроизводящихся единиц информации: а) существеннее всего проявлялась на самой ранней стадии развития Вселенной; б) повлияла на становление скорости света, постоянной Планка и остальных характеристик репликаторов, инициирующих физические процессы самоорганизации.

Повлиять — приблизительно в том плане, в каком физические и химические свойства материи (то есть электрона, атомов, молекул etc.) обусловили направление, содержание и темп биологической эволюции на Земле. Физико-химический и биохимический аспекты возможной доклеточной стадии этой эволюции раскрыты Г. Кастлером, М. Кальвиным, А.П. Руденко, М. Кимурой и развиты М. Эйгеном в учении о гиперцикле — формализованной модели самоорганизации функциональных макромолекул, способных к самовоспроизведению, обмену веществ, мутациям, отбору через конкуренцию в среде с ограниченным ресурсом питания, объединению в систему, испытывающую эволюцию, и т. д. [2, 26, 39]. Если допустить, что формирование элементарных частиц и квазичастиц на некотором этапе происхождения Вселенной носило черты процесса самоорганизации, то «субфизические» репликаторы по отношению к последнему представляются аналогами (по их роли, но не по их субстанции) тех молекул и атомов, что послужили «подручным» строительным материалом для «первых» на Земле нуклеиновых кислот и белков. Их синтез в результате актов самоорганизации обычно квалифицируется как переход от неживой к живой (в земных формах) системе [39].

Подобным образом можно допустить, что имевший некогда место переход от материи «хаотической» к материи «неживой», но организованной (в современных формах, изучаемых теоретической и ядерной физикой, квантовой механикой и электродинамикой etc.) был итогом процессов самоорганизации, инициированных гипотетическими «субфизическими» репликаторами. Идея такого перехода встречается еще в древности. Вот, например, отрывок из 25-го стиха «Дао дэ цзы» — «Книги Пули и Благодати», написанной в VI в. до н. э. Лао-цзы, основоположником даосского учения [40]:

Есть нечто бесформенное, рожденное раньше Небес и Земли.  
О, как безмолвно, как бестелесно!  
Только оно стоит, не меняясь,  
Кружится, не встречая преград.  
Его можно считать (Пра)матерью Мира.

Логично думать, что «субфизические» самовоспроизводящиеся единицы информации отличает простота, которую в философии принято называть примордиальной (от лат. *primordium* – первоначало, происхождение). Мы остановились на термине примордиальность, стремясь подчеркнуть исключительность структурных свойств репликаторов «субфизических» процессов самоорганизации, задающих режимы базисной нелинейной динамики материи. Развивая эту догадку, можно предположить, что системе, в чьих рамках эти репликаторы действуют, присуща предельная симплектность (от лат. *simplex* – простой, не составной; словарь Э. Бенвениста разъясняет технологическое происхождение термина: *simplex* – согнутое лишь единожды, от лат. *plecto* – складывать, чтобы сплетать вместе крученые нити). (Источник неравновесности «симплексной системы» здесь не обсуждается.)

Будь это так, базисной нелинейной динамике материи гарантировалась бы некая «самоорганизованная нескритичность», то есть фундаментальная метастабильность, самоподдерживающаяся сверхустойчивость, и, следовательно, говоря житейским языком, – максимальная долговечность, с какой ассоциируется возраст Вселенной. Принимая во внимание успешное объяснение Г.Г. Малинецким и А.В. Подлазовым природы явления самоорганизованной критичности с позиций теории ветвящихся процессов [28], можно высказать догадку о том, что гипотетическая «самоорганизованная нескритичность» вызвана «запретом» на ветвление процессов. Если распространить «синергетическую» формулировку эволюционной гипотезы на случайные процессы в гипотетической «симплексной системе», то правомерно ожидать, что динамике «субфизических» процессов свойственна минимальная энтропия. Заметим, что представление о «запрете» на ветвление не противоречит нашему предположению о примордиальной простоте «субфизических» субъектов самоорганизации. Поэтому оно дает повод развивать – в поле гипотезы, конечно, – соображения о том, что «симплектность» системы, «запрет» на ветвление процессов, *minimum minimum* энтропии процесса самоорганизации и примордиальность репликатора, инициирующего такой процесс, взаимосвязаны и служат симптомами друг для друга.

Высказанные гипотезы позволяют построить иерархическую схему реальных и гипотетических субъектов самоорганизации материи и информации, приведенную ниже в таблице.

Авторы признают, что иерархия эта дает много поводов для критики и дискуссии. Тем не менее ее содержание и высказанные выше догадки можно рассматривать как необходимое дополнение к:

1) синергетическим принципам сравнения социальных систем с природными, а также схеме «структурных уровней природы и общества» В. Вайдлиха [41, табл. I.1, 1.1, 1.2];

2) градациям «рационализма, обеспечивающего эволюционное движение материи» Л.А. Цымбала [42, табл. 7];

3) типологии «видов эволюционирующей информации» и «этапов универсальной эволюции» И.В. Мелик-Гайказян [36, табл. 3.1 и рис. 3.1];

4) идеям глобального эволюционизма [1, 2, 7, 9, 20, 23, 32, 42–44] (тем более что В.В. Налимову «представляется интересной сама попытка построения модели глобального эволюционизма, инвариантной к особенностям отдельных, конкретно взятых процессов» [23], а предлагаемая нами иерархия может считаться вариантом именно такой попытки);

5) интерпретациям антропного космологического принципа [1, 2, 32, 33, 41, 43];

6) подходам к проблеме внесменных цивилизаций [45, 46];

7) положениям экологической [9, 26, 47–49] и космической [1, 45] этики.

Иерархия реальных и гипотетических субъектов самоорганизации материи и информации

Уровень	Репликатор	Функция распределения	Особенности динамики	Энтропия состояний	Устойчивость системы
«Субфизический»	?	?	Предположительно «самоорганизованная некритичность»	Минимальная	Максимальная
Физический	Флуктуация физического поля	В основном гауссова: $\exp(-n^2/\sigma^2)$	Независимость случайных процессов в элементах системы	Относительно низкая	Относительно высокая
Биологический	Сигнал пейсмейкера и ген	Между гауссовой и ципфовой	Самоорганизованная критичность	Относительно умеренная	Относительно умеренная
Социальный	Юнгов архетип и культурный образец	В основном ципфова: $n^{-\alpha}$ , ( $\alpha > 0$ )	Самоорганизованная критичность	Относительно высокая	Относительно низкая
«Гиперкультурный»	?	?	Предположительно «самоорганизованная суперкритичность»	Максимальная	Минимальная

### Субъект самоорганизации в контексте биоэтики

Не развивая названных аспектов (чья многочисленность и разнообразие свидетельствуют о широте обозначившегося проблемного поля), белло коснемся самого последнего. В.А. Петрицкий, констатируя общность мировоззрения К.Э. Циолковского и А. Швейцера, подчеркивает: «Швейцер не устанавливает границы живого, не проводит ценностной градации между различными уровнями развития жизни. Известно, что он ратовал за нравственное отношение не только к флоре и фауне, но и к почвам, атмосфере и гидросфере. Циолковский же своей концепцией «всегда живого атома» подводит к выводу о том, что «весь космос... всегда жив в абсолютном смысле» [45].

Разделяя этическую позицию этих мыслителей, но не вкладывая в их суждения мистического содержания, выберем в качестве «мягкого» критерия жизни и живой субстанции способность к самоорганизации, инициируемой репликатором любой природы. Тогда можно видеть, что направление наших усилий вычленив субъект самоорганизации как еще одну общую характеристику известных и гипотетических форм существования материи и информации естественно сопрягается с пафосом приведенных высказываний Швейцера и Циолковского. Вследствие открывающихся возможностей клонирования человеческой особи уместно ожидать новый всплеск интереса к их идеям и к учению Н.Ф. Федорова о воскрешении отцов (патрофикации), повлиявшему на Циолковского. Конфликтность мнений относительно целесообразности и допустимых условий клонирования придает актуальность вопросу о субъектах самоорганизации материи в контексте вариативности режимов их репликации. Дискуссия же о допустимости клонирования человека обещает продемонстрировать спектр различных комбинаций тройного взаимоотношения: 1) архетипа матери (отца); 2) фундаментального («вертикального» по своей структуре) культурного образца, регламентирующего отношения родства как в моногамных, так и в полигамных сообществах; 3) технологии клонирования, то есть новейшего мома (генерирующего, наоборот, «горизонтальную» структуру родственных

связей), в принципе составляющего конкуренцию известному способу размножения, но вдали от точки бифуркации остающегося всего лишь потенциальной альтернативой.

Комментируя разработку математиком из Утрехтского университета Х. Фройденталем космического языка *lincos*, В.А. Петрицкий сообщает о предложении использовать – в качестве одной из образующих языка межпланетной коммуникации – универсальные нравственные принципы космической этики [45]. Предложения эти правомерно рассмотреть в контексте выдвигаемых нами соображений.

Насколько можно судить, в формировании глобальной этики XXI века важная роль принадлежит синергетическому мировидению [1, 7, 26, 43, 49] и характерному для Постмодерна отношению к технике как к объекту гуманизации и даже ее стимулятору. Отношение это находим, например, у германского культурфилософа П. Козловски: «Так как техника есть своего рода раскрытие бытия, то она усиливает требование к нашей культуре, чтобы ... явление человеческого лика в технике и культуре просияло как их последующий шаг» [48]. Поэтому следовало бы предусмотреть в составе образующих *lincos* частей не только принцип «взаимобусловленности многообразных форм жизни в универсуме» [45], но и принцип взаимобусловленности форм жизни спецификой субъектов самоорганизации, придающей неповторимость каждой форме. Синергетическому мышлению органически присущи диалогичность и терпимость [1,49]. А это позволяет надеяться, что при обмене сообщениями с гипотетическими «братьями по разуму» (возможность чего живо дискутируется с различных позиций [42,45,46]) одним из тем мог бы стать феномен самоорганизации и ее субъект, определяющий уникальный способ существования каждой из высоких договаривающихся сторон.

## Выводы

Усилия авторов статьи, использовавших эвристический потенциал нелинейной динамики и результаты указанных выше работ, были направлены на обоснование еще одного из возможных *измерений эволюции материи и информации*, содержание которого иллюстрирует таблица. Его следовало бы назвать субъектно-самоорганизационным, или репликаторным. Измерение эволюции материи, раскрываемое гипотезой С.Д. Хайтуна [26], наверное, стоит именовать статистико-распределительным, а измерение эволюции, выявляемое изучением самоорганизованной критичности, перемежаемости (стохастических автоколебаний), фрактальных объектов [1–5,20,27,28,31,32], – масштабно-инвариантным измерением. Идеи, развиваемые Д.С. Чернавским, В.И. Корогодиным, И.В. Мелик-Гайказян [36], составляют, на наш взгляд, содержание ценностно-информационного измерения эволюции материи. Эволюционная диатропика (учение о разнообразии [50], связываемое с именами С.В. Мейена и Ю.В. Чайковского) обещает раскрыть измерение эволюции, не поддающееся традиционным методам системного анализа. Неожиданный – фильтрационный – аспект эволюции [51] находим у культурфилософа М.Н. Эпштейна. Развитие полидисциплинарных исследований, по-видимому, укажет и на другие измерения эволюции материи и информации. Есть основание надеяться, что их комплексное рассмотрение составит один из аспектов «синергетики–2» и «синергетики–3» (по терминологии В.И. Аршинова). Можно думать, что оно также будет способствовать формированию того сектора постсинергетики (в смысле Г.Г. Малинецкого), который займется обоснованием принципов перехода к «гиперкультурному» этапу эволюции. То есть выработкой *парадигмы смены парадигмы*, смягчающей шок от очередного столкновения с будущим (трудно обойти без этого термина А. Тоффлера [35], поскольку речь идет именно об информационном скачке [36]). И мы разделяем убеждение Г.Г. Малинецкого в том, что «ценностный аспект здесь будет представляться не менее важным, чем целевой». Ведущую роль в разработке

парадигмы смены парадигмы могло бы сыграть университетское образование [52], тем более что синергетические модели его функционирования имеются в работах [5,49].

На наш взгляд, знание измерений эволюции материи и информации полезно как для преподавания основ нелинейной науки, так и для формирования идеала образованности, предполагающего особую восприимчивость к динамичности бытия. Пожалуй, лучше всего о ней говорится в средневековом даосском трактате «Гуань Инь-цзы» [53]: «Естественный ход вещей нельзя остановить ни на миг. Обыкновенные люди видят то, что проявилось, и не могут заметить сокрытого. Достойные люди видят сокрытое, но не могут довериться переменам. Мудрый доверяет переменам, чтобы пребывать в неизменном». И далее, словно из уст мудрого: «Твари, обитающие в морской пучине, претерпевают бесчисленные превращения, но вода одна для всех. Мое я и вещи вокруг непрестанно меняются в великом превращении мира, но природа одна для всех. Зная, что природа одна для всех, поймешь, что нет ни других, ни моего я, ни смерти, ни жизни».

*Доверять переменам – чем не девиз для изучающих нелинейную динамику?*

### Библиографический список

1. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Антропный принцип в синергетике // Вопросы философии. 1997. № 3. С. 62; *Они же*. Синергетика и новое мировидение. Модели развития открытых нелинейных сложных систем // Математика и искусство: Тр. Междунар. конф. 23–28 сентября 1996 г., Суздаль. М., 1997. С. 89.
2. Дубнищева Т.Я. Концепции современного естествознания. Новосибирск: Изд-во ЮКЭА, 1997.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
4. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997.
5. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев: Учебное пособие для вузов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997.
6. Пойзнер Б.Н. О «субъекте» самоорганизации // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4,5. С. 149.
7. Яковленко С.И. Философия незамкнутости // Вопросы философии. 1996. № 2. С. 41.
8. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
9. Розов С.М. Дарвинизм и эпистемология: генетика и меметика // На теневой стороне: Матер. к истории семинара М.А. Розова по эпистемологии и философии науки в Новосибирском Академгородке. Новосибирск: НГУ, 1996. С. 311.
10. Сэмьюэлз Э., Шортер Б., Плот Ф. Критический словарь аналитической психологии К. Юнга. М.: МНПП «ЭСИ», 1994.
11. Горюнов Е.В. Ж. Дюби. История ментальностей // История ментальностей, историческая антропология. Зарубежные исследования в обзорах и рефератах. М.: РГГУ, 1996. С. 18.
12. Толстой В.П., Швидковский Д.О. Синтез пространственных искусств как образ мироздания // Художественные модели мироздания: Взаимодействие искусств в истории мировой культуры. Кн. 1. М.: ТОО «Пассим», 1997. С. 5.
13. Пойзнер Б.Н. О стимулах становления человека и смены его ценностей // Высшее образование в России. 1996. № 3. С. 57.
14. Ронен О. «Инженеры человеческих душ»: к истории изречения // Логмановский сб. Т. 2 / Сост. Е.В. Пермяков. М.: Изд-во РГГУ; ИЦ-Гарант, 1997. С. 393.
15. Чудакова М.О. Антихристианская мифология советского времени // Библия в культуре и искусстве: Матер. научн. конф. «Вилперовские чтения – 1995». 23–26 января 1996 г., Москва. Вып. XXVIII/ Под ред. И.Е. Даниловой. М.: ГМИИ, 1996. С. 331.

16. *Богданов К.А.* Очерки по антропологии молчания. Homo tacens. СПб.: РХГИ, 1997.
17. *Жельвис В.И.* Поле брани. Сквернословие как социальная проблема в языках и культурах мира. М.: Ладомир, 1997.
18. *Марасинова Е.Н., Бромберг Д.Э.* Культурная история жеста // История ментальностей, историческая антропология. Зарубежные исследования в обзорах и рефератах / Под ред. Я. Бреммера и Г. Руденбурга. М.: РГГУ, 1996. С. 119.
19. *Мильтон В.И.* Метафизика головного мозга. О некоторых основных метафорах советского кино 30–40–х годов: наблюдения филолога // Киноведческие записки. 1997. № 33. С. 160.
20. *Тимашев С.Ф.* Проявления макрофлуктуаций в динамике нелинейных систем // Ж. физ. химии. 1995. Т. 69. № 8. С. 1349.
21. *Винфри А.* Организующие центры химических волн в двух- и трехмерных средах // Колебания и бегущие волны в химических средах / Под ред. Р. Филда, М. Бургер. М.: Мир, 1988. С. 474.
22. *Судаков С.К.* Пищевые и оборонительные мотивации у кроликов на фоне блокады синтеза белка циклогексамида // Ж. высш. нервн. деятельности. 1983. № 2. С. 378.
23. *Налимов В.В.* Теория смыслов: Конструктивистские аспекты математической модели сознания // Математика и искусство: Тр. Междунар. конф. 23–28 сентября 1996 г., Суздаль. М., 1997. С. 21.
24. *Маслоу А.Г.* Дальние пределы человеческой психики. СПб.: Евразия, 1997.
25. *Соснин Э.А., Пойзнер Б.Н.* Лазерная модель творчества (от теории доминанты к синергетике культуры): Учебное пособие. Томск: Изд-во ТГУ, 1997.
26. *Хайтун С.Д.* Механика и необратимость. М.: Янус, 1996.
27. *Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б.* Нелинейность. Новые проблемы, новые возможности // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука, 1996. С. 165.
28. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 5. С. 89.
29. *Кругликов Р.И., Рузавин Г.И.* Синергетика и мозг // Мозг и разум. М.: Наука, 1994. С. 56.
30. *Коул М.* Культурно-историческая психология: наука будущего. М.: Когито-Центр; «Ин-т психологии РАН», 1997.
31. *Yeviv I.A.* Art as a self-organizing system // Математика и искусство: Тр. Междунар. конф. 23–28 сентября 1996 г., Суздаль. М., 1997. С. 104.
32. *Буданов В.Г.* Принципы гармонии как эволюционные синхронизмы. Начала демистификации // Математика и искусство: Тр. Междунар. конф. 23–28 сентября 1996 г., Суздаль. М., 1997. С. 116.
33. *Павленко А.Н.* Антропный принцип: истоки и следствия в европейской научной рациональности // Философско-религиозные истоки науки / Под ред. П.П. Гайденко. М.: Мартис, 1997. С. 178.
34. *Horgan J.* From Complexity to Perplexity // Scientific American. 1995, June. P. 74.
35. *Тотфлер А.* Футурошок. СПб.: Лань, 1997.
36. *Мелик-Гайкалян И.В.* Информационные процессы и реальность. М.: Наука, 1998.
37. *Гуревич П.С.* Игра // Культурология. XX век. Словарь. СПб.: Университетская книга, 1997. С. 133.
38. *Богданов Н.И.* Ложь и игра (психогомеостатика переосмысления) // Вестн. ХГАДТУ. 1997. № 4. С. 52–54.
39. *Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл. Принципы самоорганизации молекул. М.: Мир, 1982.
40. *Лао-цзы.* Книга Пути и Благодати / Вступит. ст., перевод, комм. И. Лисевича. М.: Друза, 1994.
41. *Weidlich W.* Physics and social science – the approach of synergetics // Phys. Reports. 1991. Vol. 204. P. 1.

42. Цымбал Л.А. Синергетика информационных процессов. Закон информативности и его следствия. М.: Наука, 1995.
43. Карпинская Р.С., Лисеев И.К., Огурцов А.П. Философия природы: коэволюционная стратегия. М.: Интерпракс, 1995.
44. Блауберг И.И. Предисловие // Бергсон А. Творческая эволюция. М.: КАНОН-пресс; Кучково поле, 1998. С. 5.
45. Петрицкий В.А. К.Э. Циолковский и А. Швейцер: У истоков космической этики // Изв. Санкт-Петербургской лесотехнической академии. Вып. 4 (162). СПб., 1996. С. 142.
46. Рубцов В.В., Урсул А.Д. Проблема внеземных цивилизаций: Философско-методологические аспекты. Кишинев: Штиинца, 1988.
47. Василенко Л.И. Экологическая этика: от натурализма к философскому персонализму // Вопросы философии. 1995. № 3. С. 37.
48. Козловски П. Культура постмодерна: Общественно-культурные последствия технического развития. М.: Республика, 1997.
49. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука, 1997.
50. Чайковский Ю.В. К общей теории эволюции // Путь. 1993. № 4. С. 101.
51. Эпштейн М.Н. Самоочищение. Гипотеза о происхождении культуры // Вопросы философии. 1997. № 5. С. 72.
52. Поизнер Б.Н. Смена норм как актуальная норма: взгляд из университета // Вопросы совершенствования технологии обучения: Материалы регионального научно-метод. семинара по проблемам высшей школы при Хабаровском гос. техн. университете / Под ред. Т.В. Гомза. Вып.3. Хабаровск, 1996. С. 10.
53. Простые тайны Дао. Из книги «Гуань Инь-цзы» (Пер. с кит. В.В. Малявина) // Восхождение к Дао / Сост. В.В. Малявин. М.: Наталис, 1997. С.22.

Томский государственный  
университет

Поступила в редакцию 27.01.98  
после переработки 5.05.98

## CLASSIFICATION EXPERIENCE OF MATTER AND INFORMATION SELF-ORGANIZATION SUBJECTS

*B.N. Poizner, E.A. Sosnin*

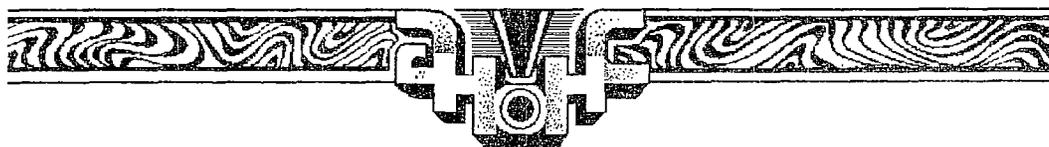
Authors basing on a concept of self-organization subject propose some hypotheses concerning existence of «subphysical» and «hypercultural» self-organization subjects and their peculiarities. A hierarchy of real and hypothetical self-organization subjects of matter and information is constructed. It is suggested to consider this hierarchy in the context of global evolutionism, the Anthropic cosmological Principle interpretations, cosmic ethics propositions and as a content foundation of so named subjectively-self-organizational dimension of evolution.



*Поизнер Борис Николаевич* – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Автор четырех учебных пособий (три из них – с соавтором) в издательстве ТГУ. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.



*Соснин Эдуард Анатольевич* – родился в Томске (1971). После окончания Томского государственного университета (1994) работает в Институте сильноточной электроники СО РАН. Кандидат физико-математических наук (1997). Область научных интересов – физика эксимерных и эксиплексных молекул в условиях газоразрядного возбуждения, процессы в химических лазерах, методология научных исследований. Соавтор 18 статей и 4 патентов, учебного пособия «Лазерная модель творчества» (с Б.Н. Пойзнером, 1997). Лауреат Премии Томской области в сфере образования и науки (1997).



*В Издательстве СГУ вышло в свет учебное пособие*

**А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Л.А. Мельников.** Физические задачи для научных работников младшего возраста. Учебное пособие. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1998. 32 с. Илл. ISBN 5-292-02168-7

В сборник включены задачи студенческих олимпиад по физике, оптике, радиофизике и компьютерной физике. Представлены «нестандартные» задачи на оценки подобия, метод размерностей, задачи для домашнего компьютера и др. Задачник будет полезен студентам и аспирантам-физикам, а также всем, кто интересуется физикой.

### Содержание

Предисловие 5. Оценки 6. Размерность 8. Подобие 9. Задачи для домашней лаборатории 11. Задачи для домашнего компьютера 13. Задачи-проблемы 16. Механика 18. Термодинамика и молекулярная физика 21. Электричество и магнетизм 23. Оптика 25. Колебания и волны 26. Радиофизика 29. Послесловие и комментарий 30.

*Более подробная информация об издании в журнале Изв. вузов «ПНД», 1998. Т. 6, № 2. С. 117. Заинтересованный читатель может получить Задачник наложенным платежом. Стоимость наложенного платежа с почтовыми расходами 10 руб.*

Заказы направлять по адресу  
410601, Саратов, главпочтамт, а/я 3150  
Лёвиной Н.Н.  
или по электронной почте  
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru



Московское Физическое Общество

И М Е Н И

П. Н. Лебедева.

О Т Ч Е Т Ъ

за 1916 — 1917 годъ.



МОСКВА.

Типография Н-въ М. С. Грамакова, Газетный 9, Телефокаъ 1-01-46.  
1917.

Отчет Московского Физического Общества был обнаружен в архиве академика Введенского Бориса Алексеевича (1893-1969) профессором, доктором физико-математических наук, Лауреатом Государственной премии СССР Натальей Александровной Ирисовой и передан Дмитрию Ивановичу Трубецкову с предложением опубликовать его. Непосредственно к нелинейной динамике Отчет отношения не имеет, но в нем история Российской физики, в нем имена, известные миру. Хочется обратить внимание читателя на «отчетный период» - историческое время, в которое составлялся документ, отмеченное «тяжелыми затруднениями, связанными с переживаемой войной» и предреволюционными событиями.

# Московское Физическое Общество

## Московское Физическое Общество

имени П. Н. Лебедева.

Первый председатель Общества П. Н. Лебедев † 1 марта 1912 г.

### Советъ Общества.

Предсѣдатель: А. А. Эихенвальдъ.

Товарищъ предсѣдателя: ~~Н. П. Лазаревъ~~ *Вульфъ*.

Членъ совѣта: ~~Г. В. Вульфъ~~ *Млодзѣевскій*.

Н. Е. Жуковскій.

К. А. Тимирязевъ

Секретари: ~~Н. Н. Лебедевичъ~~ *Титовъ*.

А. К. Тимирязевъ.

Казначей: В. И. Романовъ.

Библиотечарь: А. В. Млодзѣевскій.

Члены ревизионной коммисіи: ~~А. А. Титовъ~~ *Успенскій*

Б. С. Швецовъ

А. В. Цингеръ.

### Списокъ членовъ.

Авраменко Евгенія Ивановна.

Андреевъ Николай Николаевичъ.

Архадьевъ Владиміръ Константиновичъ.

Бачинскій Алексѣй Іосифовичъ.

Блажко Сергѣй Николаевичъ.

Богословскій Евгеній Васильевичъ.

Богуславскій Сергѣй Анатольевичъ.

Боргманъ Иванъ Ивановичъ  
† 9 мая 1914.

Брюсовъ Евграфъ Ивановичъ  
† 13 июля 1911.

Бѣликовъ Петръ Николаевичъ.

Вавиловъ Сергѣй Ивановичъ.

Велиховъ Павель Аполлоновичъ.

Величковскій Анатолій Порфирьевичъ.

Вильборгъ Михаилъ Васильевичъ.

Вильзаръ Андрей Карловичъ  
† 26 октября 1915.

Виноградовъ Дмитрій Ивановичъ.

Волошинъ Федоръ Ефимовичъ.

Вульфъ Георгій Викторовичъ.

Галанинъ Дмитрій Дмитриевичъ  
(мл.).

- Гезехусъ Николай Александровичъ.  
 Глаголева Александра Андреевна.  
 Гопіусъ Евгеній Александровичъ.  
 Егоровъ Николай Григорьевичъ.  
 Жуковскій Николай Егоровичъ.  
 Зелинскій Николай Дмитриевичъ.  
 Зерновъ Владиміръ Дмитриевичъ.  
 Ивановъ Константинъ Ивановичъ.  
 Ильинъ Борисъ Владиміровичъ.  
 Іевлева Варвара Петровна.  
 Іоллосъ Александръ Григорьевичъ † 13 юня 1911.  
 Іоффе Абрамъ Федоровичъ.  
 Каблуковъ Иванъ Алексѣевичъ.  
 Казанскій Всеволодъ Сергѣевичъ.  
 Кандидовъ Петръ Петровичъ.  
 Капцовъ Николай Александровичъ.  
 Кастеринъ Николай Петровичъ.  
 Колли Андрей Робертовичъ.  
 Кольцовъ Николай Константиновичъ.  
 Корольковъ Алексѣй Львовичъ.  
 Кравецъ Торичанъ Павловичъ.  
 Краснощековъ Федоръ Ивановичъ.  
 Крашенинниковъ Федоръ Николаевичъ.  
 Кругъ Карлъ Адольфовичъ.  
 Крыловъ Алексѣй Николаевичъ.  
 Курелинъ Федоръ Константиновичъ.  
 Лазаревъ Петръ Петровичъ.  
 Ландсбергъ Григорій Самуиловичъ.  
 Лебеденко Николай Николаевичъ.  
 Лебедевъ Петръ Николаевичъ † 1 марта 1912.  
 Лейбергъ Павелъ Борисовичъ.  
 Леонтьевъ Константинъ Александровичъ.  
 Лисицинъ Леонтій Ивановичъ † 21 августа 1915.  
 Лютцау Григорій Ивановичъ.  
 Манделъштаммъ Леонидъ Исаковичъ.  
 Мейеръ Павелъ Константиновичъ.  
 Михельсонъ Владиміръ Александровичъ.  
 Млодзѣевскій Анатолій Болеславовичъ.  
 Млодзѣевскій Болеславъ Корнеліевичъ.  
 Молодой Трофимъ Кононовичъ.  
 Морошкинъ Александръ Ивановичъ.  
 Муравьевъ Александръ Георгиевичъ.  
 Некрасовъ Александръ Ивановичъ.  
 Орловъ Сергѣй Владиміровичъ.  
 Павловъ Владиміръ Петровичъ.  
 Павловъ Иванъ Петровичъ.  
 Павловъ Павелъ Петровичъ.  
 Павша Алексѣй Васильевичъ.  
 Папалекси Николай Дмитриевичъ.  
 Писаржевскій Левъ Владиміровичъ.  
 Пришлецовъ Василій Ивановичъ.  
 Портъ Гебгардтъ Бруновичъ.  
 Ржевкинъ Сергѣй Николаевичъ.  
 Розановъ Борисъ Федоровичъ.  
 Романовъ Вячеславъ Ильичъ.  
 Селяковъ Николай Яковлевичъ.  
 Семеновъ Юлій Федоровичъ.  
 Сиротинская Нина Евгеньевна.  
 Сиротинъ Ефимъ Еремѣевичъ.  
 Смирновъ Леонидъ Петровичъ.  
 Соколовъ Алексѣй Петровичъ.

Стрѣлецкій Николай Станиславовичъ.	Цингеръ Александръ Васильевичъ.
Тимирязевъ Аркадій Климентовичъ.	Чичибабинъ Алексѣй Евгеньевичъ.
Тимирязевъ Климентъ Аркадьевичъ.	Чугаевъ Левъ Александровичъ.
Титовъ Александръ Андреевичъ.	Чупрова Марія Александровна.
Титовъ Веніаминъ Семеновичъ.	Шапошниковъ Константинъ Николаевичъ.
Трапезниковъ Александръ Константиновичъ.	Шатерниковъ Михаилъ Николаевичъ.
Умовъ Николай Алексѣевичъ † 2 января 1915.	Швецовъ Борисъ Сергѣевичъ.
Усагинъ Александръ Ивановичъ.	Шиловъ Николай Александровичъ.
Усагинъ Иванъ Филипповичъ.	Шмаковъ Павелъ Васильевичъ.
Успенскій Николай Евгеньевичъ.	Щегляевъ Владиміръ Сергѣевичъ.
Ферингеръ Анна Богдановна.	Щдро Николай Ксаверьевичъ.
Фишеръ Владиміръ Максимовичъ.	Эйхенвальдъ Александръ Александровичъ.
Фредериксъ Всеволодъ Константиновичъ.	Эренфестъ Павелъ Сигизмундовичъ.
Хвольсонъ Орестъ Даниловичъ.	Эренфестъ Татьяна Алексѣевна.
Цебрикова Лидія Владиміровна.	Эсмархъ Василій Ивановичъ.
	Эпштейнъ Павелъ Сигизмундовичъ.
	Яковлевъ Константинъ Павловичъ.

### Отчетъ за 1916—17 годъ.

Въ истекшемъ академическомъ году Общество имѣло 22 очередныхъ засѣданія, одно соединенное съ Обществомъ изученія и распространенія физическихъ знаній имени Н. А. Умова и одно публичное. Всего 24 засѣданія на которомъ членами общества и сторонними посѣтителями было прочтено 49 докладовъ. Обиліе темъ и ихъ разнообразіе, какъ это видно изъ прилагаемаго списка докладовъ, свидѣтельствуесть объ упорной научной работѣ, которую продолжали вести члены общества, несмотря на тяжелыя затрудненія связанныя съ переживаемой войной.

Секретарь *А. Тимирязевъ.*

## Отчет

---

— 4 —

### Отчетъ Казначея за 1916 годъ.

Средства Физическаго Общества за 1916 годъ составлялись, какъ обычно изъ членскихъ взносов, изъ пожертвованій отдѣльныхъ лицъ, предназначавшихся преимущественно на приобрѣтеніе книгъ для пополненія библіотеки Общества, и изъ суммъ вырученныхъ отъ продажи сочиненій П. Н. Лебедева.

Всего поступило членскихъ взносов въ 1916 году 290 руб. и пожертвованій на сумму 909 руб. 21 коп. Отъ продажи сочиненій П. Н. Лебедева выручено 88 руб. Вышеуказанныя суммы вмѣстѣ съ остаткомъ отъ прошлаго года въ размѣрѣ 1767 руб. 55 коп. составили общій приходъ за 1916 годъ въ суммѣ 3054 р. 76 коп. Изъ этой суммы было израсходовано на устройство засѣданій и другіе текущіе расходы 276 руб. 68 коп. и на исполненіе библіотеки 578 руб. 28 коп. т. е. всего 854 руб. 96 коп. Такимъ образомъ 1916 годъ заключенъ съ остаткомъ въ пользу 1917 года въ размѣрѣ 2199 руб. 80 коп.

Казначей *В. Романовъ.*

### Отчетъ Библіотекаря.

Къ 1-му января 1917 года библіотека Общества состояла изъ 217 томовъ книгъ и 322 томовъ журналовъ. Во временномъ пользованіи Общества находилась также библіотека П. Н. Лебедева состоящая изъ 176 томовъ книгъ и 210 томовъ журналовъ. 36 томовъ журнала были переданы во временное пользованіе обществу К. А. Тимирязевымъ.

Въ отчетномъ году въ библіотеку выписывались 5 иностранныхъ научныхъ журналовъ.

Средства библіотеки въ отчетномъ году какъ и въ предыдущіе года, составлялись изъ суммъ, жертвуемыхъ

частными лицами, и изъ процентовъ съ полученныхъ рѣнѣ и еще не израсходованныхъ пожертвованій. Къ концу отчетнаго года средства библіотеки дали остатокъ въ 1213 руб. 04 коп.

Библіотекаръ *А. Млодзѣвскій*.

**Списокъ докладовъ прочитанныхъ на засѣданіяхъ Общества.**

1. Г. В. Вульфъ: «Капиллярная теорія кристаллической формы».
2. Б. С. Швецовъ: «Кристаллическое строеніе стекла».
3. Г. В. Вульфъ: «Объ упругихъ свойствахъ стекла».
4. Н. Н. Андреевъ: «Поглощеніе газовъ углемъ».
5. А. К. Тимирязевъ: «О частицѣ водорода изъ трехъ атомовъ».
6. А. Н. Бойко: «О постоянныхъ магнитахъ».
7. В. К. Аркадьевъ: «Газовая борьба».
8. В. С. Титовъ: «Растворимость хлора».
9. А. К. Тимирязевъ: «Скольженіе разрѣженныхъ газовъ вдоль поверхности твердаго тѣла».
10. Н. Е. Успенскій: «О рентгеновскихъ спектрахъ» (Работы Вагнера и Зеемана).
11. Н. Е. Успенскій: «Демонстрація пробиванія діэлектрика искрой высокаго напряженія».
12. К. Н. Шапошниковъ: «Объ электро-магнитномъ уравненіи энергій для вращающагося діэлектрика съ точки зрѣнія Микковскаго».
13. Н. Е. Успенскій: «Демонстрація отраженія рентгеновскихъ лучей отъ слюды».
14. А. А. Эйхенвальдъ: «Современная теорія ферромагнетизма» (I-ая часть).
15. А. В. Млодзѣвскій: «О водяномъ микрофонѣ».
16. А. К. Тимирязевъ: «О работахъ Трубе по опредѣленію размѣра молекулъ».

## Отчет

— 6 —

17. В. Г. Муравьевъ: «Объ одномъ изъ способовъ заряженія конденсатора».
18. А. А. Эйхенвальдъ: «Современныя теоріи ферромагнетизма (II-ая часть)».
19. А. Б. Млодзѣевскій: «Новыя послѣдованія въ области жидкихъ кристалловъ».
20. С. А. Богуславскій: «Объ отклоненіяхъ отъ состоянія термодинамическаго равновѣсія».
21. К. Н. Ивановъ: «Природа лучеспусканія свѣтящихся металлическихъ паровъ въ пламени».
22. К. Н. Ивановъ: «О затуханіи въ дисперсіонныхъ центрахъ».
23. В. Н. Ремановъ: «О затуханіи электро-магнитныхъ волнъ въ проволокахъ».
24. Г. В. Вульфъ: «Распространеніе лучей Рентгена въ кристаллахъ».
25. А. А. Эйхенвальдъ: «Вступительное слово на соединенномъ засѣданіи съ обществомъ имени Н. А. Умова (на засѣданіе были приглашены члены рентгенологическаго съѣзда)».
26. Н. Е. Успенскій: «Электронные процессы въ трубкѣ рентгена».
27. Н. Н. Андреевъ: «Вліяніе температуры на дисперсію».
28. А. К. Тимпрязевъ: «Столкновенія  $\alpha$  частицъ съ атомами водорода» (работа Бозе).
29. К. Н. Шапошниковъ: «Къ теоріи тяготѣнія».
30. В. К. Млодзѣевскій: «Нѣсколько словъ по поводу доклада Шапошникова».
31. А. Б. Млодзѣевскій: «О мѣлиновыхъ формахъ».
32. П. А. Шилловъ: «Абсорбція и адсорбція газовъ углемъ».
33. Г. В. Вульфъ: Демонстрація экрановъ для «просвѣчиванія» рентгеновыми лучами сдѣланныхъ Г. Г. Богословскимъ и Мамуровскимъ въ лабораторіи Г. В. Вульфа.
34. Н. Н. Черкасовъ: «Нѣсколько словъ относительно усиливающихъ экрановъ собственной системы».

35. А. И. Бачинскій: «О вязкости жидкостей».
36. И. Ф. Усагинъ и Н. П. Метелкинъ: «Фосфоресценція газовъ» (I-ая часть съ демонстраціями).
37. И. Ф. Усагинъ и Н. П. Метелкинъ: «Фосфоресценція газовъ» (II-ая часть съ демонстраціями).
38. А. И. Некрасовъ: «Волны установившагося типа на поверхности тяжелой жидкости».
39. К. Н. Шапошниковъ: «По поводу второго изданія книги докладчика о подеромоторномъ моментѣ вращенія въ діэлектрикахъ при прохожденіи электро-магнитныхъ волнъ».
40. И. Ф. Усагинъ и Н. П. Метелкинъ: «Фосфоресценція газовъ (III сообщеніе)».
41. С. А. Богуславскій: «Классическая механика и теорія квантъ».
42. Н. Е. Успенскій: «Лучи рентгена изотропныя тѣла и кристаллическіе порошки».
43. В. И. Романовъ: «Абсорбція электро-магнитныхъ волнъ».
44. К. Н. Шапошниковъ: «Модель Бора и спектральныя формулы».
45. Е. Е. Успенскій: «Двойное преломленіе растительныхъ клеточныхъ оболочекъ и крахмальныхъ зеренъ».
46. К. И. Ивановъ: «Число дисперсионныхъ центровъ».
47. Н. Н. Андреевъ: «О примѣненіи метода собственныхъ колебаній въ теоріи квантъ».
48. А. К. Тимирязевъ: «О новыхъ насосахъ Гаде и Лангмюра».
49. А. А. Эйхенвальдъ: Рѣчь - на годичномъ собраніи Общества: «Магнетизмъ въ природѣ».

Засѣданія происходили въ помѣщеніи Института Инженеровъ Путей Сообщенія.



*В редакции журнала имеется в наличии сборник*

**Пределы предсказуемости / Под редакцией Ю.А.Кравцова. М.: ЦентрКом, 1997. 256 с. ISBN 5-87129-021-3**

Статьи сборника посвящены проблеме предсказуемости разнообразных явлений как физических (погода, климат, землетрясения, биологическая среда, динамический хаос), так и социальных (результаты выборов, закономерности этногенеза и др.) Предсказательная сила современной науки анализируется в статьях крупнейших специалистов: академиком В.И. Кейлиса-Борока и М.А. Садовского, чл.-корр. АН СССР Г.Р. Бестужева-Лады, Л.Н. Гумилева (последняя прижизненная статья) и др. Популярный стиль изложения удачно сочетается с глубокой постановкой вопросов. Актуальность проблемы, привлекательность материалов и уникальность авторского коллектива делают книгу интересной как рядовому читателю, так и специалистам.

### СОДЕРЖАНИЕ

Расширенная аннотация . . . . .	4
Предисловие . . . . .	6
<b>Климатология</b>	
<i>Монин А.С., Питербарг Л.И.</i> О предсказуемости погоды и климата . . . . .	12
<b>Биофизика</b>	
<i>Иваницкий Г.Р.</i> Как активная автоволновая среда предсказывает будущее . . .	50
<b>Синергетика</b>	
<i>Малинецкий Г.Г.</i> Синергетика, предсказуемость и детерминированный хаос . . .	78
<b>Кибернетика и информатика</b>	
<i>Лисичкин В.А.</i> Теоретико-информационный подход к оценке достоверности прогнозов . . . . .	140
<b>Физика</b>	
<i>Садовский М.А., Писаренко В.Ф.</i> О прогнозе временных рядов . . . . .	158
<i>Кравцов Ю.А.</i> Фундаментальные и практические пределы предсказуемости . .	170
<b>Социология</b>	
<i>Бестужев-Лада И.В.</i> Будущее предвидимо, но не предсказуемо: эффект Эдипа в социальном прогнозировании . . . . .	201
<i>Кейлис-Борок В.И., Лихтман А. Дж.</i> Самоорганизация американского общества при выборах президента и сенаторов США . . . . .	221
<b>Этнология</b>	
<i>Гумилев Л.Н., Ермолаев В.Ю.</i> Проблема предсказуемости в изучении процессов этногенеза. . . . .	236

*Книгу можно заказать наложенным платежом (20 руб) в редакции:*

E-mail: [and@cas.ssu.runnet.ru](mailto:and@cas.ssu.runnet.ru)

*а также по телефону: (095)333-42-56 Н.Ю. Комаровой*



Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал–макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно–научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты –  
р/с №40503810000000000378 ЗАО АКБРиР «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

**Подписка на I–ое полугодие 1999 года**  
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498  
и по заявочным письмам непосредственно в редакции  
Стоимость подписки на I полугодие 60 рублей

Сдано в набор 15.09.98. Подписано к печати 15.01.99. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 8,40 (6,0). Уч.–изд. л. 8,25. Тираж 200 экз. Заказ 95

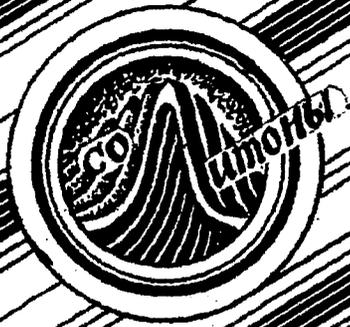
Издательство ГосУНЦ «Колледж»  
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.  
Тел. (845–2)514298, факс (845–2) 514298  
E–mail:and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

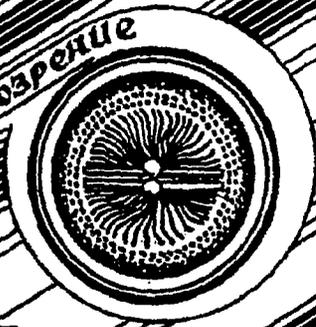
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1998



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

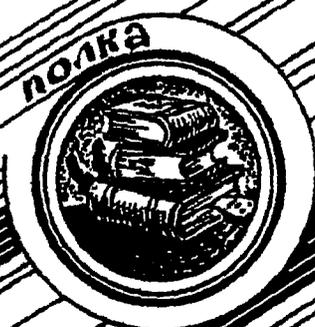


для студентов и преподавателей

в журнале



методические заметки



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики



## НОВАЯ РУБРИКА

## "КВАНТОВЫЙ ХАОС"

Начиная с этого номера, наш журнал открывает новую рубрику **КВАНТОВЫЙ ХАОС**. Термин "хаос" уже прочно ассоциируется с таким режимом динамики нелинейных систем, которому присущи свойства перемешивания, локальной неустойчивости, сплошной спектр, затухание корреляций.

Однако на фундаментальном уровне описание динамики подразумевает использование квантовой механики, а в ней, в силу принципа Гейзенберга, теряет смысл говорить об определенном положении изображающей точки в фазовом пространстве. Приходится заключить, что квантовая механика и хаос - вещи несовместимые. Но столь же несомненно то, что классическая механика должна получаться из квантовой посредством определенного предельного перехода, а результатом часто оказывается хаос!

Квантовый хаос - это термин-кентавр, как волна-частица. Это не название какого-то феномена квантовой динамики, а обозначение области исследований в попытках ответить на вопрос - в чем особенность квантовых систем, классические аналоги которых обладают хаотическим поведением? Замечательно, что полученные в этом направлении теоретические результаты уже получают экспериментальную основу, например, в опытах с ионизацией высоких атомных уровней излучением, с микроволновыми резонаторами, моделирующими движение квантовой частицы в бильярде.

Прогресс современной техники эксперимента (лазерная физика и нелинейная оптика, нанотехнология, СКВИДы, методы удержания и охлаждения атомов в вакуумных ловушках) позволяют реализовать и наблюдать такие парадоксальные проявления квантовой природы, как конденсация Бозе-Эйнштейна, квантовые корреляции пространственно удаленных систем (парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена), разрушение интерференционных эффектов в результате наблюдения над квантовой системой. То, что было для основоположников квантовой механики предметом мысленных экспериментов, становится предметом экспериментов реальных. Это оживило интерес к старым, но никогда не прекращавшим волновать физиков, проблемам интерпретации квантовой механики (теория измерений, взаимодействие квантового объекта с макроскопическим окружением, редукция волновой физики). В обиход вошли новые представления - декогерентность, квантовый эффект Зенона и другие. Ведется успешная разработка такого направления как квантовая криптография - использование парадоксальных особенностей квантовых систем для скрытой передачи сообщений. Рассматривается возможность создания квантового компьютера.

Можно констатировать, что контринтуитивные и парадоксальные свойства квантовых систем чем дальше, тем больше начинают приобретать прикладной аспект.

В этой связи кажется очень важным именно сейчас привлечь внимание отечественных исследователей к направлению, осуществляющему синтез квантовой механики и нелинейной динамики - квантовому хаосу. Редколлегия надеется, что новая рубрика вызовет интерес читателей и авторов. Будут приветствоваться как оригинальные исследования, так и работы обзорного и учебного характера. Открывает рубрику обзорная статья С.П. Кузнецова "Отображение "Кот Арнольда": Квантовый хаос и динамика операторов в представлении Гейзенберга", посвященная исследованию простейшей квантовой системы, классический аналог которой - известное модельное отображение, демонстрирующее хаос.