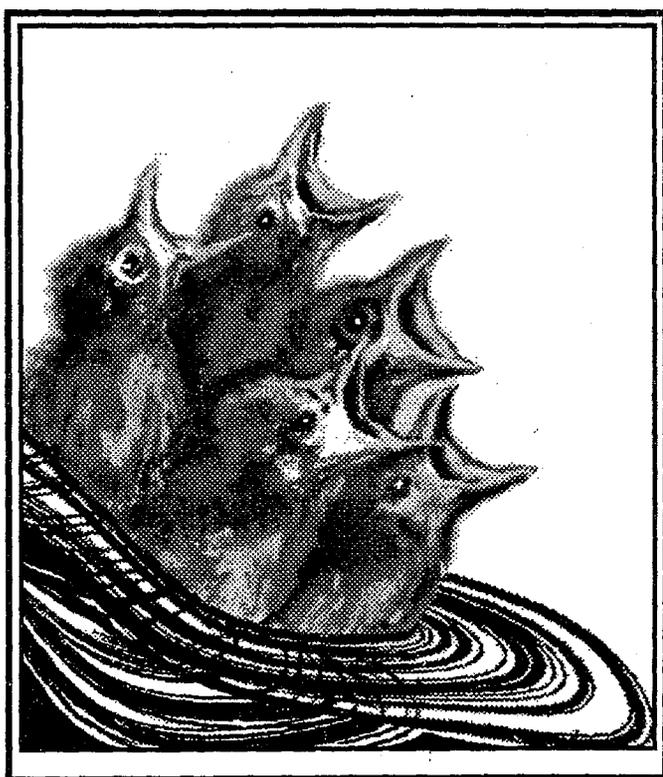


Трикладная нелинейная динамика



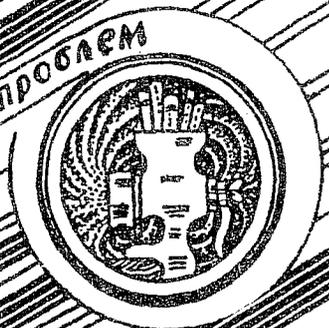
1
1997

*Молодое поколение выбирает...
нелинейную динамику*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



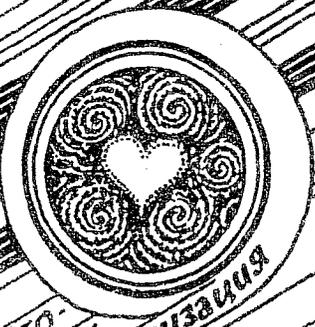
БИФУРКАЦИИ
в динамических
системах различной природы



КОНФЕРЕНЦИИ,
СЕМИНАРЫ,
СИМПОЗИУМЫ



ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ
аос



АВТО-ВОЛНЫ,
САМООРГАНИЗАЦИЯ

ПРИКЛАДНЫЕ
НЕЛИНЕЙНЫЕ
ТЕОРИИ
КОЛЕБАНИЙ
И ВОЛН



НЕЛИНЕЙНАЯ
ДИНАМИКА
В ЛИЦАХ.
ИСТОРИЯ. PERSONALITATU

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пушчино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тушин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СОДЕРЖАНИЕ

Молодое поколение выбирает нелинейную динамику

посвящается 90-летию со дня рождения Венедикта Ивановича Калинина

Анищенко В.С. От редактора 3

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Анищенко В.С., Нейман А.Б. Стохастический резонанс и стохастическая синхронизация 5

Астахов В.В., Шабунин А.В. Синхронизация хаотических осцилляторов посредством периодической модуляции коэффициента связи 15

Никитин А.П. Индуцированный шумом перенос броуновских частиц в стохастических системах с асимметричным периодическим в пространстве потенциалом 30

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В. Динамика цепочки отображений окружности с квазипериодическим воздействием 42

Постнов Д.Э., Баланов А.Г., Черняков В.И. Синхронизация и хаос в моделях динамики популяций 54

Постнов Д.Э., Баланов А.Г. Синхронизация в хаотических системах со счетным числом состояний равновесия 69

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Анищенко Т.Г., Игошева Н.Б., Хохлова О.Н. Нормированная энтропия в оценке особенностей реакций сердечно-сосудистой системы на стрессорные воздействия у особей разного пола 81

Павлов А.И., Янсон Н.Б. Применение методики реконструкции математической модели к электрокардиограмме 93

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Анищенко В.С. Аттракторы динамических систем 109

Список избранных публикаций сотрудников лаборатории нелинейной динамики за 1994–97 гг. 128

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

International conference «Control of oscillations and chaos». August 27–29, 1997, St.Peterburg, Russia 131

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

Патрушев В.Л., Герштейн Г.М., Красильников В.Я. Венедикт Иванович Калинин 134

АНОНС 133

CONTENTS

*The youth fix on nonlinear dynamics**Dedicated to Venedict I. Kalinin memory*

| | |
|---|-----|
| Editorial.V.S. <i>Anishchenko</i> | 3 |
| REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS | |
| Stochastic resonance and stochastic synchronization. V.S. <i>Anishchenko</i> , A.B. <i>Neiman</i> | 5 |
| Synchronization of chaotic oscillators by means of periodic modulation of the coupling coefficient. V.V. <i>Astakhov</i> , A.V. <i>Shabunin</i> | 15 |
| Stochastic ratchets. A.P. <i>Nikitin</i> | 30 |
| DETERMINISTIC CHAOS | |
| Dynamics of the chain of coupled circle maps with quasiperiodic force. T.E. <i>Va-</i> <i>divasova</i> , O.V. <i>Sosnovtseva</i> | 42 |
| Synchronization and chaos in population dynamics models. D.E. <i>Postnov</i> , A.G. <i>Balanov</i> , V.I. <i>Cherniakov</i> | 54 |
| Synchronization in chaotic systems with denumerable set of equilibrium states. D.E. <i>Postnov</i> , A.G. <i>Balanov</i> | 69 |
| APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY | |
| Normalized entropy in the evaluation of sex particularities in cardiovascular re- sponses to stress influences. T.G. <i>Anishchenko</i> , N.B. <i>Igosheva</i> , O.N. <i>Khokh-</i> <i>lova</i> | 81 |
| Application of method for mathematical model reconstruction to electrocardio- gram A.N. <i>Pavlov</i> , N.B. <i>Janson</i> | 93 |
| METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS | |
| Attractors of dynamical systems. V.S. <i>Anishchenko</i> | 109 |
| Selected publications of nonlinear dynamics laboratory specialists over 1994–1997 years | 128 |
| CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS | |
| International Conference «Control of oscillations and chaos». August 27–29, 1997, St. Petersburg, Russia | 131 |
| HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA | |
| Venedict Ivanovich Kalinin. V.L. <i>Patrushev</i> , G.M. <i>Gershtein</i> , V.Ya. <i>Krasilnikov</i> . . . | 134 |
| ANNOUNCEMENTS | 133 |

ОТ РЕДАКТОРА

Настоящий выпуск журнала представляет работы сотрудников лаборатории нелинейной динамики при кафедре радиофизики СГУ, написанные в основном молодыми учеными. Несколько слов об истории создания и направлениях исследований лаборатории.

В 1978 году на физическом факультете в группе профессора Д.И. Трубецкого появились первые результаты по динамическому хаосу. Было обнаружено теоретически, а затем наблюдалось экспериментально явление хаотической автомодуляции при взаимодействии электронного пучка с электромагнитным полем в лампе обратной волны. В 1979 году в УФН был опубликован прекрасный обзор по детерминированному хаосу профессором М.И. Рабиновичем, который привлек к себе внимание молодых ученых, имеющих опыт наблюдения «странных» явлений, объяснить которые в рамках классической теории колебаний не представлялось возможным. Весной 1980 года в Горьком (Нижний Новгород) состоялся первый Всесоюзный семинар по стохастическим автоколебаниям, сыгравший очень важную роль в развитии в России исследований в области динамического хаоса. На семинаре стали достоянием общественности пионерские работы по хаосу профессора В.Я. Кислова и его коллег (ИРЭ АН СССР, Москва), работы коллег и учеников школы А.А. Андропова (Л.П. Шильников, Ю.И. Неймарк, В.Н. Белых и др.). Безусловно важным был доклад известного математика профессора Я.Г. Синая, посвященный детальному анализу результатов работы М. Фейгенбаума.

Сконцентрированный в это время поток научной информации о совершенно нетривиальных явлениях в нелинейных автоколебательных системах поселил надежду и даже уверенность в возможности получить убедительные ответы на множество вопросов на основе парадигмы детерминированного хаоса.

Этот период можно считать началом фундаментальных исследований по проблеме динамического хаоса на физическом факультете СГУ. Эти исследования сосредоточились на кафедре электроники и волновых процессов и кафедре радиофизики, где активно продолжаются и по сей день.

Очень важным было осознать, что фундаментальная основа явления динамического хаоса кроется в динамических свойствах простейших нелинейных диссипативных систем, способных генерировать незатухающие хаотические колебания. Именно в этом направлении приложили свои усилия молодые исследователи кафедры радиофизики, работы которых и заложили базу будущей лаборатории нелинейной динамики. В 1981 году В.С. Анищенко и В.В. Астаховым была введена в рассмотрение и впоследствии детально исследована трехмерная двухпараметрическая модель генератора хаоса, основой которой послужили классический генератор Ван-дер-Поля и генератор с инерционной нелинейностью К.Ф. Теодорчика. Впервые была осознана принципиальная роль флуктуаций в динамических системах с квазигиперболическими свойствами, экспериментально продемонстрированы все классические бифуркационные механизмы перехода к хаосу в одной системе, открыты ряд новых явлений, таких как перемежаемость типа «хаос-хаос», пространственные бифуркации удвоения периода, пространственное насыщение хаоса, бифуркации удвоения двух- и трехмерных торов и др. Важным шагом на пути рождения лаборатории нелинейной динамики послужила защита кандидатской диссертации В.В. Астаховым в 1983 году. Публикация В.С. Анищенко монографии «Стохастические колебания в радиофизических системах» (ч. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985; ч. 2. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986) и защита им докторской диссертации (1986), первой в радиофизике полностью посвященной проблеме динамического хаоса в конечномерных системах, по сути явились днем рождения лаборатории.

Лаборатория сегодня – это дружный коллектив преподавателей, аспирантов и инженеров кафедры радиофизики, которые ведут исследования в нескольких научных направлениях. Одним из основных продолжает оставаться классическое направление: исследование бифуркационных механизмов рождения, структуры и свойств незатухающих хаотических колебаний в нелинейных системах конечной размерности. Другое направление связано с исследованием роли флуктуаций в нелинейных динамических системах. Это направление в последнее время включило исследования стохастического резонанса в бистабильных системах, стохастической синхронизации и так называемого «ratchet»–эффекта в стохастических системах с пространственно–периодическим потенциалом. В самостоятельное направление выделились исследования «controlling chaos» по анализу закономерностей управления структурой автоколебаний хаотических систем. Последние годы интенсивно стало развиваться направление исследований, связанное с приложениями теории динамического хаоса к задачам биологии и медицины. Здесь можно выделить две проблемы: математическое моделирование медико–биологических процессов и систем (включая проблему реконструкции динамических систем по экспериментальным данным) и применение методов нелинейной динамики к решению ряда проблем медико–биологической диагностики. В этом направлении исследования проводятся совместно с кафедрой физиологии человека и животных биологического факультета СГУ. Статьи настоящего журнала иллюстрируют некоторые результаты во всех вышеуказанных направлениях исследований. Для тех читателей, кто заинтересован в более детальном знакомстве с результатами работы лаборатории, в конце журнала мы приводим список избранных публикаций сотрудников за последние три года.

Публикацией этого выпуска мы хотим отметить 90–летие со дня рождения основателя кафедры радиофизики профессора В.И. Калинина. Необходимо помнить, что именно В.И. Калинин еще до войны разработал и читал спецкурс по теории колебаний как преподаватель кафедры общей физики. Его материалы послужили основой общего курса лекций по теории колебаний, который был и является одним из основных, читаемых для студентов–радиофизиков преподавателями кафедры радиофизики с 1951 года. Авторы работ настоящего выпуска гордятся тем, что В.И. Калинин для нескольких поколений его учеников по–прежнему остается учителем.

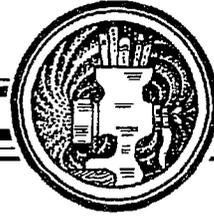
Научный руководитель лаборатории нелинейной динамики,
Заслуженный деятель науки РФ,
профессор, доктор

В.С. Анищенко



Анищенко Вадим Семенович защитил диссертацию на степень кандидата физико–математических наук (1970) и докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. В качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдском университете (Берлин, 1987). С 1988 года заведующий кафедрой радиофизики Саратовского университета. Автор более 200 научных работ, среди которых 6 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Три монографии написаны на английском языке, из них 2 книги опубликованы в Лейпциге (1987, 1989); издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых системах» (1990),

хорошо известная среди специалистов; в издательстве «World Scientific» вышла новая монография «Dynamical Chaos – Models and Experiments» (1995). Соросовский профессор (1994). Заслуженный деятель науки РФ (1995).



СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС И СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

В.С. Анищенко, А.Б. Нейман

Фундаментальное явление синхронизации имеет место в нелинейных автоколебательных системах, находящихся под действием периодической силы или связанных друг с другом. При внешнем воздействии синхронизация проявляется в захвате или подавлении собственной частоты осциллятора периодической силой. В настоящей статье мы обсуждаем удивительные явления синхронизации в стохастических бистабильных системах, которые не имеют собственной детерминированной частоты. Стохастическая бистабильная система характеризуется управляемой шумом средней частотой переключений между метастабильными состояниями, которая является аналогом собственной частоты. *Стохастическая синхронизация* проявляется в захвате средней частоты переключений внешней периодической силой. То же самое явление наблюдается в связанных бистабильных системах. Стохастическая синхронизация неразрывно связана с явлением стохастического резонанса.

Введение

Шум может вызывать нетривиальное поведение нелинейных динамических систем, разрушая тем самым наши интуитивные представления, основанные на «негативном» значении слова «шум». Позитивная роль шума в ряде нелинейных явлений привлекла в последнее время пристальное внимание. В данной статье мы сосредоточимся на явлении синхронизации, которое проявляется в стохастических системах под действием внешней периодической силы и в связанных стохастических системах. Мы начнем с описания явлений резонанса и синхронизации в разделе 1. В разделе 2 мы кратко опишем эффект стохастического резонанса. Явление стохастической синхронизации обсуждается в разделе 3 на примере триггера Шмитта под действием шума и периодического сигнала, и в разделе 4 на примере двух связанных бистабильных систем с шумом.

1. Резонанс и синхронизация в динамических системах

Резонансные свойства очень типичны в природе. Вероятно, резонанс – это первое физическое явление, с которым мы сталкиваемся в нашем детстве, когда качаемся на качелях. Резонансные явления имеют место в колебательных системах, находящихся под действием внешней периодической силы. Эти системы при отклонении от состояния равновесия (в отсутствие внешней силы) начинают

колебаться с *собственной частотой* f_0 . Простейшие примеры механического маятника и колебательного контура хорошо известны из курса общей физики. Когда частота внешней силы f_1 становится равной собственной частоте осциллятора, отклик системы на периодическое воздействие является максимальным, и график зависимости амплитуды колебаний от частоты внешней силы имеет хорошо известную резонансную форму с максимумом при $f=f_0$. Важно отметить, что явления резонанса могут иметь место как в линейных, так и в нелинейных системах.

Явление резонанса в диссипативных системах используется для создания приборов и систем, которые совершают незатухающие периодические колебания или *автоколебания*. В отличие от просто колебаний, амплитуда и частота автоколебаний не зависят в определенных пределах от начальных условий, а только от внутренних (собственных) параметров системы [1]. Автоколебательная система обычно содержит резонансный элемент и нелинейный элемент обратной связи, который определенным образом компенсирует потери энергии в системе. Генераторы незатухающих колебаний (автоколебательные системы) являются диссипативными (открытыми) нелинейными системами. На математическом языке автоколебания отвечают существованию асимптотически устойчивого предельного цикла в фазовом пространстве системы. Возникновению незатухающих колебаний соответствует бифуркация Андронова – Хопфа, то есть бифуркация рождения предельного цикла [2]. Самой популярной моделью автоколебательной системы является осциллятор Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon(1-x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (1)$$

где ε – управляющий параметр, который отвечает за величину обратной связи.

С внешней периодической силой, приложенной к автоколебательной системе, явление *синхронизации* становится возможным для наблюдения [3–5]. Основной эффект синхронизации состоит в совпадении собственной частоты системы и частоты внешней силы. Собственная частота и фаза колебаний системы захватываются внешней периодической силой. При этом явление захвата частоты наблюдается в конечной области пространства параметров, которая называется *областью синхронизации*. Тот же самый эффект имеет место в связанных автоколебательных системах. В этом случае собственные частоты осцилляторов становятся либо равными, либо кратными друг другу [6].

Типичная бифуркационная диаграмма автоколебательной системы под действием периодической силы показана на рис.1, на плоскости параметров (амплитуда периодической силы A , отношение частоты воздействия f_0 к собственной частоте осциллятора f_n) [3,7].

Иррациональные значения отношения f_0/f_n отвечают квазипериодическому движению на двумерном торе, тогда как рациональные значения соответствуют различным типам резонансов на торе. Внутри резонансных областей (клевсов синхронизации) величина отношения f_0/f_n строго постоянна и равна отношению двух рациональных чисел. Это отношение называют *числом вращения Пуанкаре*, а области синхронизации – «языками Арнольда», который внес существенный вклад в развитие математической теории резонансов на торе [7]. Постоянство числа вращения внутри области синхронизации означает, что при изменении частоты внешней силы частота собственных колебаний системы следует за ней! Отсюда и происхождение терминов «захват частоты», «захват фазы». Если мы построим график зависимости числа вращения ρ от обобщенного параметра системы α (в случае рис. 1 таковым является $\alpha=f_0/f_n$), мы получим картинку, которая в литературе по нелинейной динамике известна как «дьявольская лестница» (рис. 2).

Горизонтальные отрезки графика соответствуют режимам захвата частоты с различными числами вращения (то есть различными рациональными соотношениями между собственной частотой и частотой воздействия). Между ними собственная частота системы и частота воздействия находятся в

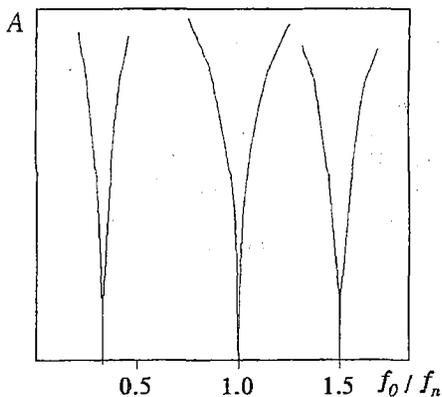


Рис. 1. Схематическая бифуркационная диаграмма автоколебательной системы под действием внешней периодической силы

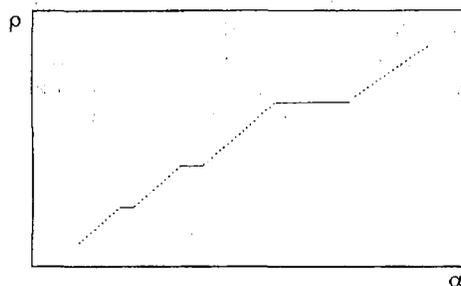


Рис. 2. Число вращений как функция управляющего параметра

иррациональном и зависящем от α соотношении, что отвечает режиму двумерного эргодического тора в фазовом пространстве системы.

Важно отметить, что в отличие от резонанса, который можно наблюдать даже в линейных системах, *синхронизация – принципиально нелинейное явление*. В последнее время классическое определение синхронизации было распространено на хаотические системы [8–12]. Наибольший интерес представляет явление фазовой синхронизации в хаотических системах. Этот эффект можно наблюдать в двух слабо связанных осцилляторах, каждый из которых ведет себя хаотическим образом. Это приводит к тому, что фазы осцилляторов захватываются, в то время как амплитуды меняются хаотически [11].

2. Стохастический резонанс

Обратимся теперь к стохастическим системам, то есть к системам с шумом. В качестве примера мы рассмотрим бистабильные системы под действием шума. В пределе большого затухания (передемпфированные осцилляторы) такие системы не имеют собственной частоты, за исключением управляемого шумом характерного временного масштаба, который представляет собой среднее время выхода из метастабильного состояния [13]. Модель, которая широко используется в литературе и описывает движение передемпфированной броуновской частицы в симметричном двухямном потенциале $U(x)$, определяется стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$\dot{x} = -dU(x)/dx + (2D)^{1/2}\xi(t), \quad (2)$$

где $\xi(t)$ – гауссов белый шум интенсивности D . Когда высота барьера ΔU очень велика, то есть $\Delta U \gg D$, средняя частота f_s переключений между метастабильными состояниями подчиняется известному закону Крамерса

$$f_s = \nu \exp(-\Delta U/D), \quad (3)$$

где ν – коэффициент, определяемый формой потенциала. Как видно из (3), характерная частота системы экспоненциально чувствительна к изменению интенсивности шума.

Явление *стохастического резонанса* (СР) было открыто авторами работы [14] и характеризует особенности динамики бистабильных стохастических систем, возмущаемых внешней периодической силой. Это явление привлекло большое внимание в последние десять лет [15–19] как прекрасный пример нетривиального

индуцированного шумом перехода в нелинейных системах и как механизм управляемой шумом самоорганизации в сложных системах [20]. В широком классе нелинейных динамических систем с увеличением шума отклик этих систем на малые периодические возмущения может быть значительно усилен. Отношение интенсивностей сигнала и шума (SNR), впервые использованное в работе [21], или усиление мощности [22,23] имеет максимум при оптимальной интенсивности шума, когда управляемый шумом временной масштаб системы близок к периоду внешней силы. Таким образом, СР представляет обобщение резонансных явлений на случай, когда система обладает характерным временным масштабом только в статистическом смысле. Добавляя периодическую силу с амплитудой A и частотой f_0 в (2), мы приходим к СДУ

$$\dot{x} = -dU(x)/dx + A \sin(2\pi f_0 t + \phi) + (2D)^{1/2} \xi(t), \quad (4)$$

где ϕ – равномерно распределенная случайная фаза. Амплитуда периодической силы A полагается достаточно малой, так что периодическая сила сама не может перебросить частицу из одной потенциальной ямы в другую.

Теоретические исследования показали, что явление СР в случае относительно слабого сигнала ($A/D \ll 1$) может быть корректно описано в терминах теории линейного отклика [22,24]. Для усиления мощности η и для SNR можно получить следующие выражения:

$$\eta = |\chi(f_0)|^2, \quad \text{SNR} = 1/4 A^2 |\chi(f_0)|^2 / S_0(f_0), \quad (5)$$

где $\chi(f)$ – восприимчивость системы и $S_0(f)$ – спектр мощности системы в отсутствие периодической силы. Самая простая аппроксимация восприимчивости симметричной стохастической бистабильной системы, которая учитывает только процесс переключений бистабильной системы, приводит к известному результату для коэффициента усиления мощности и SNR

$$\eta = (1/D^2) \langle x^2 \rangle_{st} 2f_s^2 / (f_s^2 + 4\pi^2 f_0^2), \quad \text{SNR} = \pi A^2 / (2D^2) \langle x^2 \rangle_{st} f_s, \quad (6)$$

где $\langle x^2 \rangle_{st}$ – второй момент невозмущенной системы в стационарном состоянии и f_s – средняя частота переключений между метастабильными состояниями, которая соответствует глобальному временному масштабу динамики переключений. График зависимости как SNR, так и усиления мощности от интенсивности шума D показывает колоколообразный максимум при оптимальной интенсивности шума. Однако в отличие от обычного резонанса в колебательной системе как SNR, так и усиление мощности не демонстрируют резонансной зависимости от частоты воздействия f_0 .

3. Нелинейный стохастический резонанс. Стохастическая синхронизация

Когда амплитуда периодического воздействия становится достаточно большой, бистабильная система может демонстрировать ряд нелинейных эффектов. Следуя нашим основным целям, отметим здесь исследования явлений синхронизации, проведенные в [25,26]. В работе [25] при использовании другого статистического описания СР, основанного на анализе *распределения времен пребывания*, было показано, что резонансное поведение может наблюдаться как относительно интенсивности шума, так и относительно частоты внешней силы. С другой стороны, в работе [26] было показано, что при достаточно сильном периодическом воздействии зависимость SNR от частоты воздействия демонстрирует резонансное поведение в результате сильной синхронизации между стохастической динамикой переключений и внешней периодической силой.

Проводя параллель с обычными колебательными системами, разумно попытаться для стохастических систем найти эффекты, подобные классическим

явлениям синхронизации. Действительно, стохастические бистабильные системы в некотором смысле схожи с автоколебательными системами. Аналогом собственной частоты стохастические бистабильные системы имеют среднюю частоту переключений (СЧП). Поэтому мы предполагаем, что в нелинейном режиме работы стохастической бистабильной системы под действием периодической силы могут наблюдаться такие же области синхронизации, где СЧП захватывается периодическим воздействием. Эта гипотеза была обоснована экспериментально в [27] с использованием в качестве бистабильного элемента триггера Шмитта.

Триггер Шмитта представляет собой электронный прибор с двумя состояниями, демонстрирующий в чистом виде динамику переключений. Стохастический резонанс был впервые исследован экспериментально [21] и теоретически [28] с применением именно этого устройства. Сигнал на входе триггера является случайной функцией времени $V_i(t)$, а на выходе могут быть только два возможных значения $\pm V_{out}$. Триггер Шмитта может быть реализован на основе операционного усилителя (рис. 3). Эта система характеризуется пороговым значением напряжения $V_{th} = R_2 V_0 / (R_1 + R_2)$. Если интервал значений напряжения $|V_i(t)| \geq V_{th}$, триггер Шмитта является бистабильным. Идеальный триггер Шмитта под действием периодической силы и шума $\xi(t)$ подчиняется уравнению

$$y = \text{sgn} [\gamma y - A \cos(2\pi f_0 t) - \xi(t)], \quad (7)$$

где γ определяет порог триггера. В наших экспериментах триггер Шмитта находился под действием периодического сигнала и шума в полосе частот $0 \leq f \leq \leq 100$ кГц. Амплитуда периодического сигнала A во всех экспериментах выбиралась достаточно малой, чтобы избежать переключений триггера в отсутствие шума, $A < \Delta V$, где $\Delta V = 150$ мВ – уровень порога триггера Шмитта. На выходе триггера мы имели дихотомический стохастический процесс, который может характеризоваться средними длительностями пребывания в верхнем и нижнем состояниях T_+ , T_- . Мы вычисляли эти величины, используя компьютер, связанный через АЦП с выходом системы. Средний период переключений, таким образом, $T_s = T_+ + T_-$. В частотной области эта величина соответствует средней частоте переключений $f_s = 1/T_s = 1/(T_+ + T_-)$.

В отсутствие периодического воздействия средняя частота переключений полностью управляется шумом и характеризуется экспоненциальным законом Аррениуса: $f_s^{(0)} \propto \exp(-\Delta V/D)$, где D – интенсивность шума. При наличии

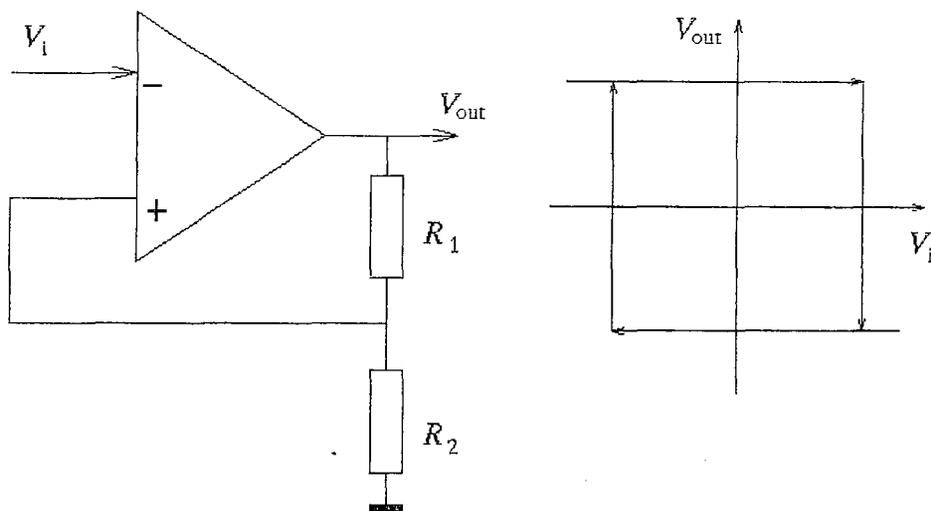


Рис. 3. Типичная схема и входная/выходная характеристики триггера Шмитта

периодического возбуждения средняя частота переключений становится функцией параметров периодической силы, в частности, зависит от амплитуды.

Результаты расчетов средней частоты переключений для триггера Шмитта как функции интенсивности шума показаны на рис. 4.

В отсутствие периодического воздействия, также как и в случае слабой периодической силы, зависимость средней частоты переключений (СЧП) от интенсивности шума ведет себя по экспоненциальному закону в полном соответствии с законом Крамерса (3). Для достаточно большой амплитуды периодической силы экспоненциальная зависимость нарушается. Ясно видно, что существует интервал интенсивности шума, в котором средняя частота переключений остается практически постоянной и совпадает с частотой периодической силы f_0 . Изменения средней частоты переключений в этой области не превышают $\pm 0.5\%$, что меньше ошибки измерений. Таким образом, СЧП между двумя состояниями бистабильной системы с шумом *захватывается* внешней периодической силой: в определенной области СЧП равна частоте воздействия!

Проводя такие же вычисления для различных значений амплитуды периодической силы, мы получили область на плоскости параметров (амплитуда шума, амплитуда периодического воздействия), в которой СЧП равна частоте периодической силы в пределах ограничений точности экспериментов, приведенной выше. Эти области «синхронизации» показаны на рис. 5 для некоторых значений управляющей частоты f_0 .

Начало каждой из областей определяет пороговое значение A_{th} амплитуды модуляции. Поэтому явление имеет пороговое свойство, также как и в связанных автоколебательных системах. Рис. 5 демонстрирует также пороговые значения синхронизации A_{th} от частоты воздействия и интенсивности шума: чем выше частота воздействия, тем больше пороговое значение A_{th} и тем сильнее шум мы должны ввести для того, чтобы получить эффект захвата средней частоты переключений. Тот же самый эффект наблюдался в физическом и в численном экспериментах для симметричной двухъямной системы.

Как мы и ожидали, области синхронизации на рис. 5 очень схожи с языками Арнольда в классическом неавтономном автоколебательном осцилляторе (см. рис. 1). Однако есть принципиальное различие между эффектами захвата частоты в автоколебательной системе и явлением захвата средней частоты переключений. В стохастической бистабильной системе не существует собственной частоты в классическом смысле. Роль собственной частоты осциллятора играет статистическая величина — средняя частота переключений между двумя состояниями системы. Для случая стохастического переключения трудно ввести

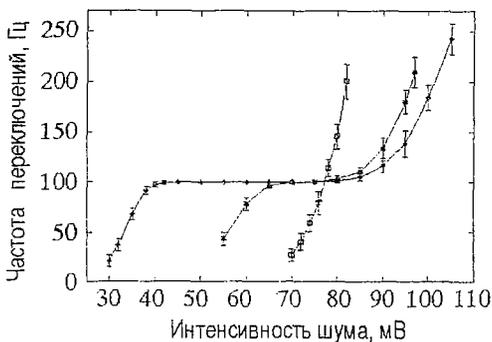


Рис. 4. Результаты измерений средней частоты переключений в зависимости от интенсивности шума при различных амплитудах периодического сигнала для триггера Шмитта: $A = 0$ мВ (\blacklozenge), $A = 60$ мВ (\square), $A = 100$ мВ ($*$). Частота сигнала $f_0 = 100$ Гц, пороговый уровень триггера $V_{th} = 150$ мВ [27]



Рис. 5. Области синхронизации для триггера Шмитта при различных частотах периодического воздействия: $f_0 = 100$ Гц ($*$), $f_0 = 250$ Гц (Δ), $f_0 = 500$ Гц (\square). Пороговый уровень триггера $V_{th} = 150$ мВ [27]

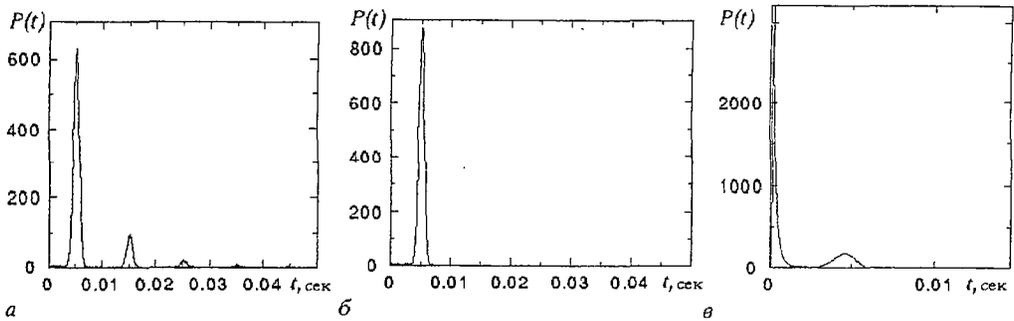


Рис. 6. Вычисленное распределение времен пребывания для триггера Шмитта под действием периодического сигнала с амплитудой $A = 100$ мВ и частотой $f_0 = 100$ кГц для различных уровней шума: а – 35 мВ; б – 70 мВ; в – 115 мВ

определение «фазы». В результате мы не наблюдаем захвата частоты на гармониках и субгармониках, как в классических автоколебательных системах. В то же время зависимость средней частоты переключений от интенсивности шума (см. рис. 4) очень схожа с частью графика «дьявольской лестницы» (см. рис. 2), соответствующей резонансу на основном тоне (число вращения $\rho=1$).

Другой характеристикой, ясно показывающей это синхронное поведение, является распределение времен пребывания [25]. Результаты вычислений этой величины показаны на рис. 6. Для слабого шума ниже области синхронизации (рис. 6, а) распределение времен пребывания состоит из пиков, локализованных на временах, близких нечетным кратным половине периода внешнего периодического воздействия $T_0/2$. Внутри области синхронизации (рис. 6, б) распределение времен пребывания имеет один узкий пик на $T_0/2$, который свидетельствует о сильной синхронизации между периодическим сигналом и динамикой переключений: почти все переключения происходят с частотой сигнала. Выше области синхронизации интенсивность шума становится такой большой, что приводит к возможности появления невероятно коротких интервалов времени между моментами переключений, о наличии которых свидетельствует резкий пик зависимости $p(\tau)$ вблизи нуля (рис. 6, в).

4. Стохастическая синхронизация в двух связанных бистабильных системах

Как мы отметили выше, явление синхронизации можно наблюдать в связанных автоколебательных осцилляторах. Явления синхронизации в связанных стохастических бистабильных системах [29] были исследованы в работе [30]. В качестве простого примера связанных стохастических бистабильных осцилляторов рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + \gamma(y-x) + (2D)^{1/2}\xi_1(t), \quad (8)$$

$$\dot{y} = \beta y - y^3 + \gamma(x-y) + (2D)^{1/2}\xi_2(t),$$

где α и β – параметры, характеризующие высоту барьера в подсистемах, $\xi_{1,2}(t)$ – статистически независимый белый гауссов шум. Параметр γ (коэффициент связи) характеризует степень взаимодействия подсистем. В случае несвязанных систем ($\gamma=0$) стохастические процессы в подсистемах являются статистически независимыми с различными средними частотами переключений, определяемыми параметрами α и β . Однако с увеличением связи γ может наблюдаться определенная степень когерентности, при которой средние частоты переключений стремятся к одному и тому же значению. На рис. 7 показана зависимость средних

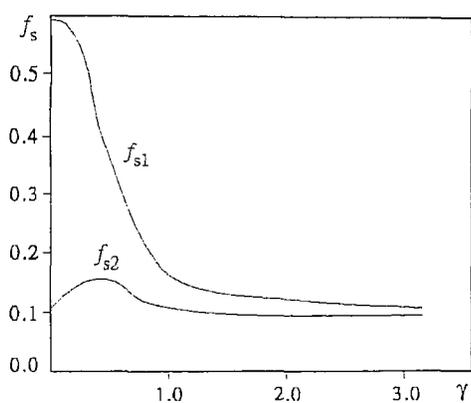


Рис. 7. Зависимости средних частот переключений от величины связи для значимых параметров $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.0$, $D = 0.1$

частот переключений f_s в подсистемах: от γ для фиксированных значений D , α и β .

Как видно из графика, СЧГ в подсистемах становятся практически равными, когда степень связи возрастает. Такое поведение парциальных частот типично для явления синхронизации в классических системах связанных генераторов.

Обсуждение

Как хорошо известно, эффект синхронизации взаимодействующих осцилляторов – это один из механизмов самоорганизации в открытых системах [20]. В данной работе мы показали, что в стохастических системах, которые не имеют собственных частот в обычном детерминированном смысле, может наблюдаться явление, во многом схожее с синхронизацией в классическом понимании этого определения. Нелинейное взаимодействие характерных временных масштабов (среднего времени выхода из метастабильного состояния и внешнего детерминированного временного масштаба) дает начало этим явлениям. Как было показано недавно в работе [31], явление стохастической синхронизации может характеризоваться в терминах меры энтропии, показывающей минимум в зависимости энтропии системы от уровня шума. Этот минимум достигается именно в режиме стохастической синхронизации.

Последние исследования свидетельствуют, что описанные в настоящей работе явления стохастического резонанса и стохастической синхронизации проявляют себя в детерминированных хаотических системах с бистабильными свойствами [12,32,33]. В этом случае для реализации эффектов нет необходимости добавлять внешний шум. Хаотичность процесса переключений осуществляется здесь за счет детерминированной хаотической динамики.

Мы благодарны профессорам В. Эбелингу, Л. Шиманскому–Гайеру и Ю.Л. Климонтовичу за ценные обсуждения. Мы благодарим Б.В. Шульгина за помощь в проведении физического эксперимента.

Работа частично финансировалась за счет грантов Госкомвуза РФ (95-0-8.3-66) и совместного гранта Физического общества Германии (436 RUS 113/334).

Библиографический список

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
2. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., and Maier A.G. Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems. New York: Wiley, 1973.
3. Hayashi Ch. Nonlinear Oscillation in physical systems. McCraw-hill book company, 1964.
4. Berge P., Pomeau Y., and Vidal C.H. Order within Chaos. N-Y: John Wiley and Sons, 1984.
5. Анципенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

6. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
7. Арнольд В.И. Потеря устойчивости колебаний вблизи резонансов // Нелинейные волны / Ред. А.В.Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979. С.116.
8. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Stochastically synchronized oscillations in dissipative systems // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Вып.29. С.1050.
9. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., and Safonova M.A. Synchronization of chaos // Int.Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
10. Pecora L.M., and Carroll T.J. Synchronization in chaotic systems // Phys.Lett.A. 1990. Vol. 64. P. 821.
11. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., and Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys.Rev.Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
12. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995.
13. Hänggi P., Talkner P., and Borkovec M. Reaction–rate theory: Fifty years after Kramers // Rev.Mod.Phys. 1990. Vol. 62. P. 251.
14. Benzi R., Sutera S., and Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J.Phys. 1981. Vol. A14. P. L453.
15. Proc. NATO ARW on Stochastic Resonance in Physics and Biology / Eds F.Moss, A.Bulsara, and M.F.Shlesinger // J.Stat.Phys. 1993. Vol. 70. P. 1.
16. Moss F., Pierson D., and O’Gorman D. Stochastic resonance: tutorial and update // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. 1994. Vol. 4. P. 1383.
17. Wiesenfeld K., and Moss F. Stochastic resonance and the benefits of noise: from ice ages to crayfish and SQUIDS // Nature. 1995. Vol. 373. P. 33.
18. Proc. of the International Workshop on fluctuations in physics and biology: Stochastic Resonance, Signal Processing and Related Phenomena / Eds A.Bulsara, S.Chillemi, L.Kiss, P.V.E.McClintock, R.Mannella, F.Marchesoni, K.Nikolis, and K.Wiesenfeld // Nuovo Cimento. 1995. Vol. D17.
19. Bulsara A., and Gammaitoni L. Tuning into noise // Physics Today. 1996. March. P. 39.
20. Haken H. Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self–Organizing Systems and Devices. Berlin: Springer, 1983.
21. Fauve S., and Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system // Phys.Lett. A. 1983. Vol. 97. P. 5.
22. Jung P., and Hänggi P. Amplification of small signals via stochastic resonance // Phys.Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 8032.
23. Jung P. Periodically driven stochastic systems // Phys.Rep. Vol. 234. P. 175.
24. Dykman M.I., McClintock P.V.E., Mannella R., and Stocks N.G. Stochastic resonance in the linear and nonlinear responses of a bistable system to a periodic field // Soviet Phys. JETP Lett. 1990. Vol. 52. P. 141.
25. Gammaitoni L., Marchesoni F., and Santucci S. Stochastic resonance as a bona fide resonance // Phys.Rev.Lett. 1995. Vol. 74. P. 1052.
26. Stocks N.G. A theoretical study of the non–linear response of a periodically driven bistable system // Nuovo Cimento. 1995. Vol. D17. P. 925.
27. Shulgin B., Neiman A., and Anishchenko V. Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // Phys.Rev.Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
28. McNamara B., and Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance // Phys.Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 4854.
29. Malchow H., and Schimansky–Geier L. Noise and Diffusion in Bistable Non–equilibrium Systems. Leipzig: Teubner–Texte, 1984.
30. Neiman A. Synchronization–like phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys.Rev.E. 1994. Vol. 49. P. 3485.
31. Neiman A., Shulgin B., Anishchenko V., Ebeling W., Schimansky–Geier L., and Freund J. Dynamical entropies applied to stochastic resonance // Phys.Rev.Lett. 1996. Vol. 76. P. 4299.

32. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic Resonance in Chua's Circuit // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 2. P. 397.

33. Хованов И.А., Анищенко В.С. Механизм стохастического резонанса в системе с перемежаемостью типа «хаос–хаос» // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 20. С. 75.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 8.01.97
после переработки 5.05.97

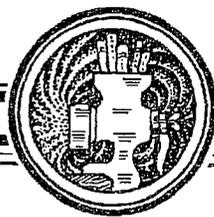
STOCHASTIC RESONANCE AND STOCHASTIC SYNCHRONIZATION

V.S. Anishchenko, A.B. Neiman

The fundamental phenomenon of synchronization occurs in non-linear self-sustained oscillators subjected to a periodic force or coupled with each other. This phenomenon manifests itself in locking or suppressing of the natural frequency of the oscillator by periodic force. In this paper we discuss surprising synchronization-like phenomena in stochastic bistable systems which have no natural frequency at all. A stochastic bistable system possesses a noise-controlled mean switching frequency between metastable states being an analogy of the natural frequency. The stochastic synchronization reveals locking of the mean switching frequency by external periodic force. The same phenomenon can be observed in coupled stochastic bistable systems.



Нейман Александр Борисович – родился в октябре 1962 года. Окончил физический факультет Саратовского университета (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1991). В настоящее время – докторант кафедры радиофизики. Автор более 35 публикаций в международных и отечественных изданиях. Область научных интересов: нелинейная динамика, стохастическая динамика нелинейных систем, теория случайных процессов и теория информации.



СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПОСРЕДСТВОМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА СВЯЗИ

В.В. Астахов, А.В. Шабунин

В работе показано, что синхронизация взаимодействующих хаотических систем может быть обеспечена с помощью параметрического периодического воздействия на элементы связи. Данный эффект демонстрируется для связанных неавтономных осцилляторов и для связанных автоколебательных систем. Исследуется возможность синхронизации цепочки идентичных хаотических осцилляторов с периодическими граничными условиями. В результате численных экспериментов и линейного анализа на устойчивость установлено, что при определенных значениях амплитуды и частоты параметрическое воздействие может стабилизировать пространственно однородные хаотические движения, однако только в цепочках конечной длины.

Введение

В последнее время вопросы синхронизации и управления хаосом в различных динамических системах привлекают к себе большое внимание. Для взаимодействующих нелинейных систем установлено, что при определенных значениях параметра связи в них может наблюдаться явление синхронизации хаотических колебаний [1–7]. Режим синхронизации между хаотическими динамическими системами можно также обеспечить, используя различные методы управления хаосом [8–12]. Как правило, в этих методах применяется пропорциональная обратная связь, с помощью которой достигается стабилизация хаотической фазовой траектории в симметричном подпространстве $X_1=X_2$ объединенного фазового пространства идентичных систем. В данной работе для стабилизации фазовой траектории в симметричном подпространстве предлагается использовать периодическое параметрическое воздействие на элементы связи. Использование периодических параметрических возмущений для целенаправленного изменения динамики хаотической системы рассматривалось в работах [13–16]. В них на примерах модели контакта Джозефсона и осциллятора Дуффинга – Холмса теоретически и экспериментально было показано, что резонансные параметрические возмущения могут привести к подавлению хаоса. Идея использования параметрического воздействия для синхронизации связанных хаотических систем базируется на хорошо известной классической задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса [17,18]. В такой системе, начиная с некоторых пороговых значений амплитуды и частоты, вибрации точки подвеса превращают неустойчивое состояние равновесия в устойчивое.

В данной работе показано, что синхронизация взаимодействующих хаотических систем может быть обеспечена посредством периодической модуляции коэффициента связи. Это демонстрируется для различных динамических систем: двух связанных неавтономных осцилляторов, двух связанных автоколебательных систем, цепочки осцилляторов с периодическими граничными условиями.

В разделе 1 теоретически и с помощью численных экспериментов продемонстрирована возможность синхронизации на простом примере двух идентичных неавтономных осцилляторов с кусочно-линейными характеристиками. Определены условия устойчивости симметричных движений. Построена область синхронизации хаотических осцилляторов на плоскости параметров (амплитуда, частота параметрического воздействия).

В разделе 2 исследована возможность стабилизации синфазных движений посредством параметрической накачки применительно к связанным автоколебательным системам. В качестве модели использовались два связанных через емкость генератора Чуа. Результатами компьютерных экспериментов показано, что существует область значений амплитуды и частоты параметрического воздействия, при которых синфазные колебания взаимодействующих генераторов становятся устойчивыми. Возможность синхронизации исследовалась при различных значениях параметров парциальных генераторов. Рассмотрена зависимость пороговых значений амплитуды синхронизирующего воздействия от величины коэффициента связи.

В разделе 3 исследована возможность синхронизации цепочки идентичных хаотических осцилляторов с периодическими граничными условиями. Результатами численных экспериментов и линейного анализа на устойчивость продемонстрировано, что при определенных значениях амплитуды и частоты параметрическое воздействие может стабилизировать пространственно однородные хаотические движения. Показано, что переход от несинхронных хаотических колебаний к синхронным имеет место только в цепочках конечной длины. Максимальное число элементов цепочки, при котором может быть достигнута синхронизация, зависит от частоты параметрического воздействия.

1. Стабилизация синфазных движений в двух связанных неавтономных осцилляторах

Рассмотрим два связанных идентичных нелинейных неавтономных осциллятора вида

$$\ddot{x}_{1,2} + \alpha \dot{x}_{1,2} + f(x_{1,2}) - \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}) = B \sin(\omega t), \quad (1)$$

где

$$f(x) = (b-1)x + 0.5(b-a)(|x-1| - |x+1|), \quad (2)$$

α – параметр диссипации, γ – коэффициент связи, B и ω – амплитуда и частота внешнего воздействия.

При $\gamma=0$ получаем уравнение индивидуальной системы. В отсутствие внешнего воздействия это нелинейный затухающий осциллятор с тремя состояниями равновесия

$$\begin{aligned} P_1: & (x_1=0, y_1=0), \\ P_2: & (x_2=(b-a)/(b-1), y_2=0), \\ P_3: & (x_3=-(b-a)/(b-1), y_3=0). \end{aligned}$$

Если

$$0 < a < 1, \quad b > (1+\alpha^2/4), \quad \alpha > 0.$$

то неподвижная точка P_1 является седлом, а точки $P_{2,3}$ – устойчивыми фокусами. При внешнем воздействии в некоторой области значений параметров нелинейный осциллятор демонстрирует хаотические колебания. В связанных осцилляторах ($\gamma > 0$) наблюдаются различные виды регулярных и хаотических движений, в том числе и режим несинхронизованных хаотических колебаний подсистем.

В системе (1) режим синхронизации хаотических колебаний осцилляторов можно обеспечить с помощью параметрического периодического воздействия на элемент связи. Предположим, что коэффициент связи γ можно менять периодическим образом во времени относительно некоторого постоянного уровня γ_0

$$\gamma = \gamma_0 + F(t), \quad (3)$$

где $F(t)$ – периодическая функция с периодом $T=2\pi/\Omega$ (Ω – частота параметрической накачки). Для того чтобы более наглядно проиллюстрировать механизм стабилизации симметричных движений, зададим параметрическое воздействие в виде

$$F(t) = \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t)), \quad (4)$$

ε – амплитуда параметрической накачки.

С учетом (4) перепишем уравнения связанных осцилляторов следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= y_{1,2}, \\ \dot{y}_{1,2} &= -\alpha y_{1,2} - f(x_{1,2}) + [\gamma_0 + \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t))](x_{2,1} - x_{1,2}) + B \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя замену переменных

$$u = (x_1 - x_2)/2, \quad u_1 = (x_1 + x_2)/2,$$

$$v = (y_1 - y_2)/2, \quad v_1 = (y_1 + y_2)/2,$$

можно записать уравнения

$$\dot{u} = v, \quad (6)$$

$$\dot{v} = -\alpha v - \omega_0^2(t)u, \quad (7)$$

$$\dot{u}_1 = v_1, \quad (8)$$

$$\dot{v}_1 = -\alpha v_1 - f(u_1) + B \sin(\omega t), \quad (9)$$

описывающие динамику системы в окрестности симметричного подпространства $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Здесь

$$\omega_0^2(t) = A + 2\gamma_0 + 2\varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t)),$$

$$f(u_1) = (f(x_1) + f(x_2))/2.$$

$$A = \begin{cases} a-1, & \text{при } |x| \leq 1, \\ b-1, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Уравнения (8),(9) представляют собой уравнения индивидуального осциллятора и описывают динамику системы в симметричном подпространстве ($x_1 = x_2, y_1 = y_2$) ее полного фазового пространства. Режиму синхронизации соответствует $u=0, v=0$. Для того чтобы получить условия стабилизации симметричных движений хаотических осцилляторов, исследуем эволюцию малых возмущений в окрестности неподвижной точки $u=0, v=0$ (уравнения (6), (7)) за период параметрического

воздействия $T=2\pi/\Omega$. Это можно сделать, используя известные процедуры (см., например, [19]).

Период параметрического воздействия разделим на два интервала: от 0 до $T/2$ и от $T/2$ до T . На каждом из этих интервалов уравнения (6), (7) являются линейными и автономными и могут быть решены аналитически. Запишем матрицы, связывающие возмущения в моменты времени 0 и $T/2$ и в моменты $T/2$ и T

$$\begin{bmatrix} u(T/2) \\ v(T/2) \end{bmatrix} = [M_1] \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u(T) \\ v(T) \end{bmatrix} = [M_2] \begin{bmatrix} u(T/2) \\ v(T/2) \end{bmatrix}.$$

Устойчивость решения $u=0, v=0$ определяется собственными значениями матрицы $[M]=[M_2][M_1]$, которые имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \exp(-\alpha\pi/\Omega)(0.5S \pm (0.25S^2 - 1)^{1/2}), \quad (10)$$

где

$$S = 2(\operatorname{ch}\beta_1 \operatorname{ch}\beta_2 + K \operatorname{sh}\beta_1 \operatorname{sh}\beta_2),$$

$$\beta_1 = (\pi/\Omega)(0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0 - 2\varepsilon\Omega^2)^{1/2},$$

$$\beta_2 = (\pi/\Omega)(0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0 + 2\varepsilon\Omega^2)^{1/2},$$

$$K = (0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0) / ((0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0)^2 - 4\varepsilon^2\Omega^4)^{1/2}.$$

Симметричные движения устойчивы, если $|\mu| < 1$. Причем это условие должно выполняться при любых значениях динамических переменных в окрестности симметричного подпространства, то есть для $A=a-1$, и для $A=b-1$.

На рис. 1 на плоскости (амплитуда, частота параметрического воздействия) выделена область, где выполняется условие устойчивости симметричных движений. Значения других параметров системы связанных осцилляторов ($B=1.5$, $\alpha=0.1$, $\omega=1$, $\gamma=0.1$, $a=0.5$, $b=2$) соответствуют случаю, когда в отсутствие параметрической накачки ($\varepsilon=0$) наблюдается режим несинхронизованных хаотических колебаний.

Проведенные численные исследования системы (5) подтвердили, что режим

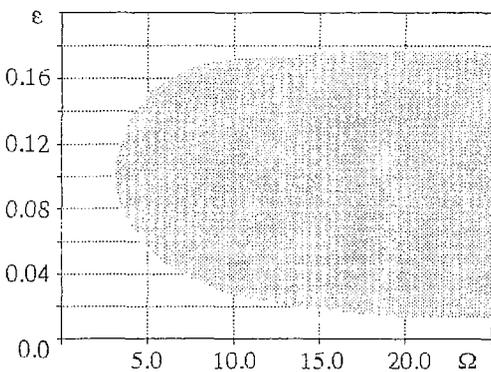


Рис. 1. Области синхронизации колебаний связанных нелинейных осцилляторов на плоскости параметров (ε, Ω)

синхронизации хаотических осцилляторов можно обеспечить с помощью параметрических периодических возмущений элемента связи, и синхронизация хаотических колебаний происходит именно при тех значениях амплитуды и частоты параметрической накачки, которые получены в результате теоретического анализа. Численные эксперименты проводились следующим образом. При указанных выше значениях параметров задавались начальные условия с незначительной расстройкой от симметричного режима $x_1(0) = x_2(0) + \Delta x$, $y_1(0) = y_2(0) + \Delta y$. Обычно выбиралось $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.02$. Затем

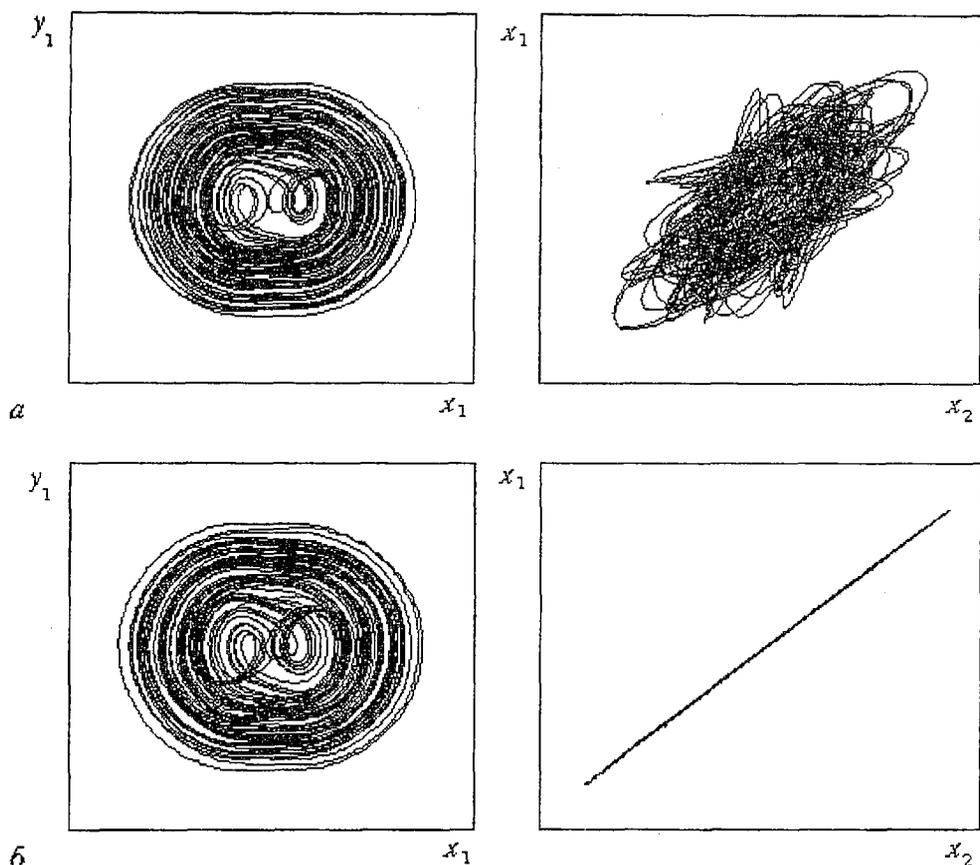


Рис. 2. Проекция фазовых портретов аттракторов без параметрического воздействия (а) и с воздействием (б)

строились проекции фазовых портретов и временные реализации колебательных режимов при различных значениях амплитуды ϵ и частоты Ω . В отсутствие параметрической накачки ($\epsilon=0$) фазовая траектория покидает окрестность симметричного подпространства и наблюдаются несинхронизованные хаотические колебания осцилляторов (рис. 2, а). При параметрическом воздействии (рис. 2, б) начальные отклонения Δx и Δy затухают, фазовая траектория входит в симметричное подпространство и уже не покидает его, если значения ϵ и Ω принадлежат выделенной на рис. 1 области. Если значения выбирались вне этой области, начальные отклонения нарастали во времени, и синхронизация не наблюдалась.

Из рис. 1 видно, что эффект стабилизации симметричных движений имеет пороговый характер. Причем частота параметрических возмущений Ω должна в несколько раз превышать характерную частоту невозмущенных движений (в данном случае частоту $\omega=1$). Чем меньше амплитуда параметрического воздействия, тем больше должна быть его частота Ω . В рассматриваемой системе для синхронизации хаотических осцилляторов достаточно незначительных возмущений коэффициента связи (ϵ порядка 20 процентов от $\gamma_0=0.1$) на частоте Ω , в 15–20 раз превышающей частоту $\omega=1$ (см.рис. 1).

Предварительные исследования показали, что режим синхронизации хаоса возникает и в том случае, когда к моменту включения параметрической накачки изображающая точка находится далеко от симметричного подпространства полного фазового пространства системы. Однако при этом существенно

возрастает время переходного процесса, после которого наблюдается режим установившихся синхронных хаотических колебаний. Время достижения окрестности симметричного подпространства, где начинает работать механизм стабилизации симметричных движений, в возмущенной системе значительно больше, чем в невозмущенной.

2. Стабилизация синфазных колебаний в двух связанных через емкость генераторах Чуа

В качестве модели взаимодействующих автоколебательных систем использовались два связанных через емкость генератора Чуа, схема которых представлена на рис. 3. Предположим, что емкость связи C_c можно менять периодически образом во времени относительно некоторого постоянного уровня C_0 , то есть

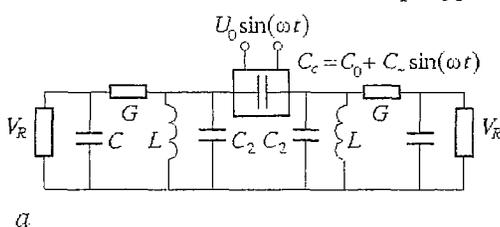
$$C_c = C_0 + C_- \sin(\omega t).$$

Уравнения, описывающие схему на рис. 3 при параметрическом периодическом воздействии на емкость связи, имеют следующий вид:

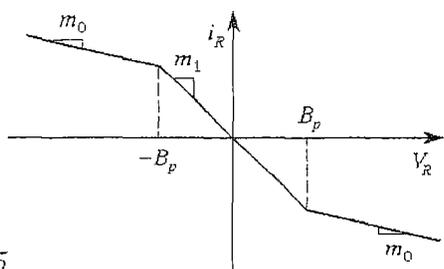
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha (y_1 - x_1 - f(x_1)), \\ \dot{y}_1 &= (1+\gamma)(x_1 - y_1 + z_1)/(1+2\gamma) + \gamma(x_2 - y_2 + z_2)/(1+2\gamma) + \gamma_1(y_2 - y_1)/(1+2\gamma), \\ \dot{z}_1 &= -\beta y_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha (y_2 - x_2 - f(x_2)), \\ \dot{y}_2 &= (1+\gamma)(x_2 - y_2 + z_2)/(1+2\gamma) + \gamma(x_1 - y_1 + z_1)/(1+2\gamma) + \gamma_1(y_1 - y_2)/(1+2\gamma), \\ \dot{z}_2 &= -\beta y_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $f(x) = bx + 0.5(a-b)(|x+1| - |x-1|)$, $\alpha = C_2/C_1$, $\beta = C_2/(LG^2)$, $\gamma = \gamma_0 + \xi \sin(\Omega t)$, $\gamma_0 = C_0/C_2$, $\xi = C_-/C_2$, $\gamma_1 = \xi \Omega \cos(\Omega t)$, $a = m_1/G$, $b = m_0/G$, $x_{1,2} = (V_{c1})_{1,2}/B_p$, $y_{1,2} = (V_{c2})_{1,2}/B_p$, $z_{1,2} = (i_L)_{1,2}/GB_p$, $x = dx/dt$, $\tau = tG/C_2$, $\Omega = C_2/G\omega$.

В отсутствие параметрического воздействия ($\xi=0$) при нулевой связи ($\gamma_0=0$) получаем уравнения одиночного генератора Чуа, динамика которого детально исследована и описана в литературе (см., например, [24]). Эта система при



а



б

Рис. 3. Схема связанных генераторов Чуа (а) и вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (б)

вариации параметров демонстрирует переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Эволюция хаоса приводит к образованию хаотического аттрактора, получившего в литературе название «double scroll» [20]. При включении связи ($\gamma_0 > 0$, $\xi = 0$) система (11) ведет себя существенно более сложным образом [21]. Помимо бифуркаций удвоения периода циклов, происходят бифуркации потери симметрии, рождения тора и образования хаоса через разрушение квазипериодических движений. Наблюдается ряд глобальных бифуркаций, в результате которых происходит объединение различных хаотических множеств. Возбуждение автоколебаний и переход к хаосу в связанных системах происходит при меньших значениях управляющего

параметра α , чем в одиночном генераторе. Поэтому при значениях α , соответствующих регулярным режимам в одиночном генераторе, в связанной системе при определенных γ_0 может существовать развитый хаос со встроенными в аттрактор седловыми симметричными циклами. Для данной системы характерна мультистабильность, когда при фиксированных значениях параметров сосуществует несколько устойчивых состояний (регулярных или хаотических аттракторов).

На рис. 4 на плоскости параметров (α, γ_0) при фиксированных значениях $a=-8/7$, $b=-5/7$, $\beta=22$ построены области существования устойчивых симметричных режимов (выделены штриховкой). Вне этих областей синфазные колебания являются неустойчивыми и в эксперименте не реализуются. Исследуем возможность их стабилизации посредством высокочастотного параметрического воздействия на элемент связи, варьируя амплитуду и частоту в интервалах значений $[0, 0.25]$ и $[0, 30]$, соответственно. Начальные условия будем задавать в малой окрестности симметричного подпространства.

Проведенные эксперименты показали, что в областях, ограниченных линиями l на рис. 4, симметричные колебания могут быть стабилизированы при соответствующем подборе значений амплитуды и частоты параметрического воздействия. На рис. 5 представлены проекции фазовых портретов колебательных режимов при различных значениях α и γ_0 без воздействия и с воздействием. В левой колонке изображены периодические (рис. 5, а) и хаотические (рис. 5, г, ж) несинфазные колебания, которые наблюдаются в системе без воздействия. В средней и правой колонках показаны проекции фазовых портретов на плоскость (x_1, x_2) (рис. 5, б, д, з) и (x_1, y_1) (рис. 5, в, е, и) синфазных колебательных режимов, которые существуют в системе в устойчивом виде при периодической модуляции коэффициента связи. Характер результирующих симметричных движений зависит от параметров индивидуальной системы (то есть от значений α). В связанной системе хаотические колебания возникают при меньших значениях параметра α , чем в одиночном генераторе [21]. Следовательно, стабилизация симметричных движений будет приводить к регуляризации колебаний. Система переходит из хаотических режимов (рис. 5, г, ж) к периодическим (рис. 5, е, и). Переход к синфазным хаотическим колебаниям в рассмотренной нами области значений параметров не наблюдался.

На рис. 6 на плоскости параметров (амплитуда, частота параметрического воздействия) для различных значений коэффициента связи γ_0 построены области значений, при которых происходит стабилизация синхронных состояний. По формам областей синхронизации можно заключить, что явление стабилизации не имеет выраженного резонансного характера. Это схоже со случаем связанных неавтономных осцилляторов, рассмотренным в предыдущем разделе. Зависимость амплитуды синхронизирующего воздействия от частоты носит пороговый характер. Если частота Ω меньше некоторого минимального значения, то синхронизация отсутствует, но если Ω выше этого порогового значения, то минимальная величина синхронизирующей амплитуды уже не зависит от частоты. Из рисунка видно, что расположение областей синхронизации на плоскости (ξ, Ω) зависит от значений коэффициента связи γ_0 . При увеличении связи области синхронизации сдвигаются вверх.

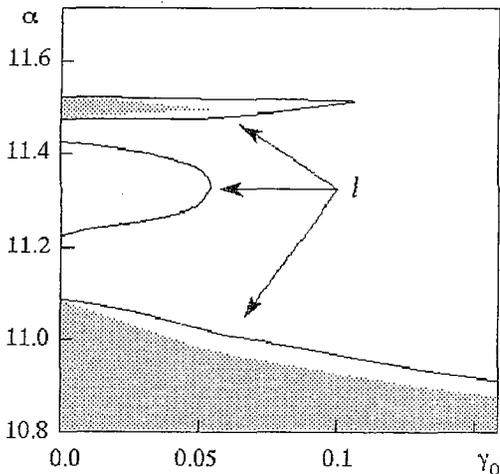


Рис. 4. Области синхронизации колебаний связанных генераторов на плоскости параметров (γ_0, α)

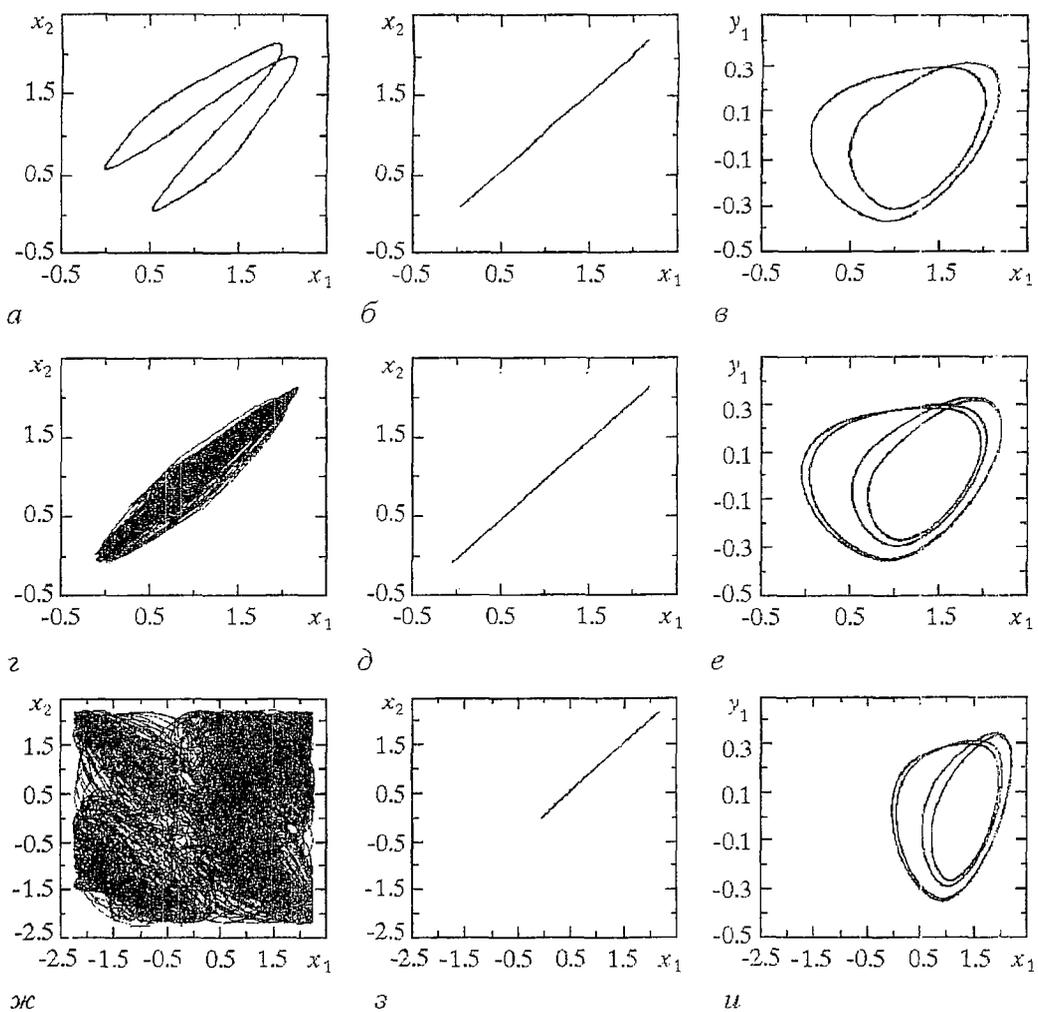


Рис. 5. Проекция фазовых портретов колебательных режимов в отсутствие параметрического воздействия (*а, з, ж*) и с параметрической модуляцией частотой $\Omega=30$ (*б, в, д, е, з, и*), со следующими значениями параметров $\alpha=11.26$, $\gamma_0=0.06$, $\xi = 0.23$ (*а, б, в*); $\alpha=11.475$, $\gamma_0=0.048$, $\xi = 0.17$ (*з, д, е*); $\alpha=11.475$, $\gamma_0=0.06$, $\xi = 0.17$ (*ж, з, и*)

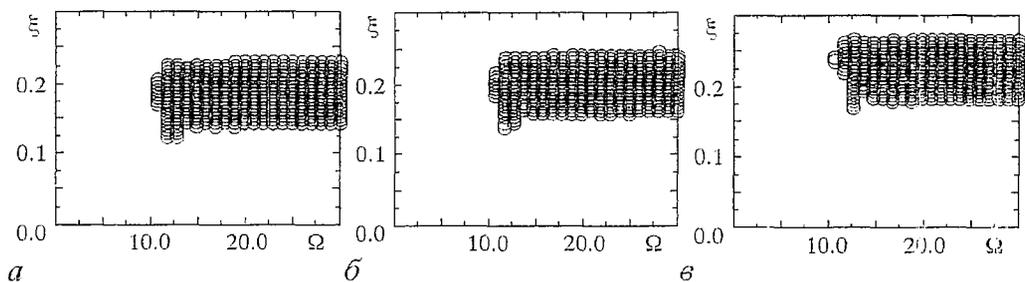


Рис. 6. Области синхронизации колебаний связанных генераторов на плоскости параметров (Ω, ξ) при $\alpha=11.475$ и различных значениях коэффициента связи γ_0 : *а* – 0.055; *б* – 0.006; *в* – 0.07

На рис. 7 представлена зависимость минимальной амплитуды синхронизирующего воздействия от коэффициента связи γ_0 для различных режимов невозмущенной системы. Если при выбранных значениях параметра α в некотором интервале γ_0 существуют устойчивые синфазные колебания (см. заштрихованные области на рис. 4), то часть соответствующей кривой на рис. 7 будет лежать на оси абсцисс (кривые 2,3,4). «Ненулевые» части представленных кривых располагаются практически параллельно друг другу. При горизонтальных сдвигах зависимости пороговых значений синхронизирующей амплитуды от коэффициента связи γ_0 совпадают друг с другом. Интересно, что пороговое значение амплитуды модуляции не зависит от типа колебаний в невозмущенной системе. Кривая 2, соответствующая хаотическим колебаниям в невозмущенной системе, располагается между кривыми 1 и 4, которые соответствуют периодическим режимам.

В предыдущем разделе для случая связанных неавтономных осцилляторов было показано, что стабилизация синфазных движений может быть достигнута при достаточно малых значениях амплитуды параметрического воздействия. Для используемых связанных генераторов наблюдается несколько иная ситуация. Малыми возмущениями можно обеспечить синхронизацию только в очень узкой области на плоскости параметров (α, γ_0) . На рис. 7 прямой штриховой линией выделены области параметра γ_0 при различных значениях параметра α , где коэффициент модуляции ξ/γ_0 меньше единицы. Это соответствует обычному случаю модуляции параметра. Вне этих областей синхронизация наблюдается только при больших амплитудах воздействия, когда значения емкости связи в некоторые моменты времени становятся отрицательными, хотя ее среднее значение остается положительным. Естественно, что реализовать подобные условия в эксперименте затруднительно. Тем не менее существует некоторая область значений параметров, в которой параметрическое воздействие обеспечивает синхронизацию при значениях коэффициента модуляции меньше единицы, что вполне реализуемо в физическом эксперименте.

На рис. 8 представлены проекции фазовых портретов колебательных режимов, наблюдаемых в системе при плавном уменьшении амплитуды модуляции ξ от значения, обеспечивающего синфазные колебания. На начальном этапе происходит постепенное «разбухание» аттрактора в проекции (x_1, x_2) , что отражено на рис. 8, б, в. Затем при некотором значении ξ система жестко переходит на другой аттрактор (рис. 8, г). При дальнейшем уменьшении параметра наблюдается переход к аттрактору, фазовый портрет которого изображен на рис. 8, д. «Разбухание» аттракторов, отраженное на рис. 8, б, в, происходит в результате усиления шума вблизи бифуркационной точки, который добавлялся нами в систему при исследовании эффекта стабилизации синфазных движений. В отсутствие шума колебания остаются строго синфазными вплоть до отмеченного выше жесткого перехода.

Анализируя различные проекции фазовых портретов колебательных режимов, представленных на рис. 8, г, д можно заметить, что они схожи с режимами, которые существуют в невозмущенной системе. Конечно, движения в

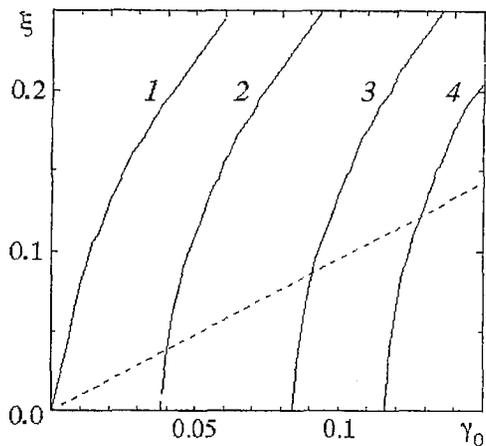


Рис. 7. Зависимость минимальной амплитуды синхронизирующего воздействия от коэффициента связи при $\Omega=30$, $\alpha=11.27$ (кривая 1), 11.475(2), 10.95 (3), 10.90 (4)

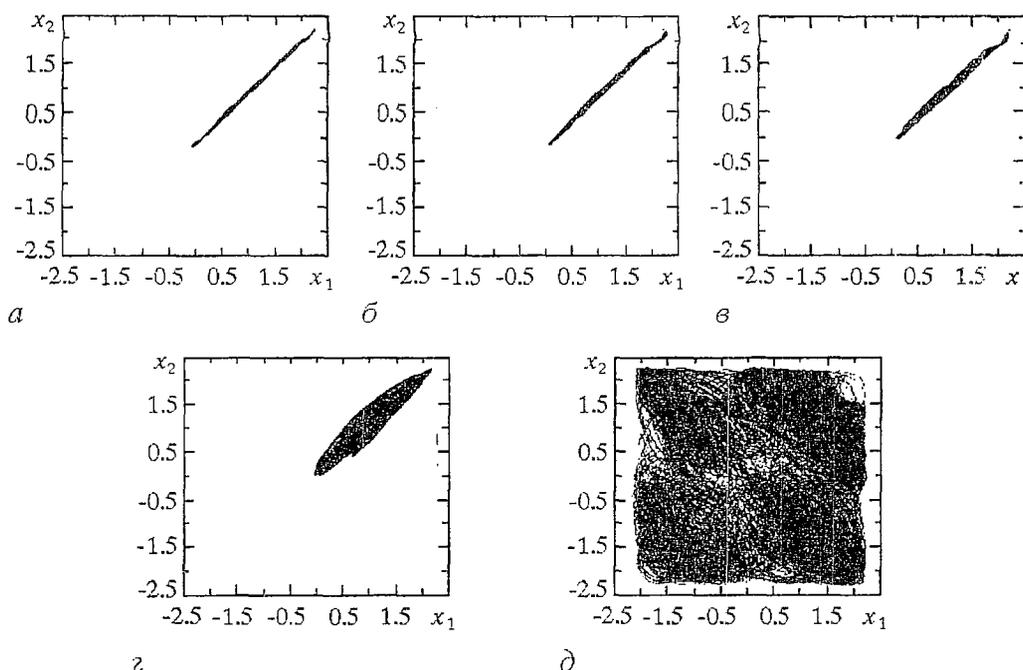


Рис. 8. Проекция фазовых портретов аттракторов, сменяющих синхронный режим при уменьшении амплитуды параметрического воздействия $\xi = 0.17$ (а), 0.169 (б), 0.1682 (в), 0.168 (г) и 0.14 (д); $\alpha=11.475$; $\gamma_0=0.07$; $\Omega=30$

системе с параметрическим воздействием не могут быть совершенно такими же, как в автономной системе, поскольку добавляется еще один временной масштаб $2\pi/\Omega$. В рассматриваемом случае колебания могут быть представлены в виде суммы «быстрых» движений с характерным временным масштабом $2\pi/\Omega$ и «медленных» с характерным собственным временным масштабом автономной системы. Поскольку период воздействия значительно отличается от собственного временного масштаба, «амплитуда» быстрых колебаний существенно меньше «амплитуды» медленных движений. Усредненные по периоду внешнего воздействия движения соответствуют режимам, которые могут наблюдаться в автономной системе. Аттрактор, представленный на рис. 8, д, соответствует аттрактору «double scroll». На рис. 8, г представлен аттрактор, который соответствует колебательному режиму, существующему в невозмущенной системе, но при данных значениях α и γ_0 являющемуся неустойчивым. Эти наблюдения позволяют предположить, что высокочастотное параметрическое воздействие не индуцирует в системе новых режимов (имеется в виду, усредненных по периоду «быстрых» движений), а меняет их характер устойчивости. Однако для подтверждения этого предположения требуются дополнительные исследования.

3. Синхронизация цепочки хаотических осцилляторов

Исследуем возможность стабилизации пространственно однородных движений в цепочке связанных хаотических осцилляторов с помощью параметрического воздействия на элементы связи.

Рассмотрим цепочку нелинейных неавтономных идентичных осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= y_m, \\ \dot{y}_m &= -\alpha y_m - f(x_m) + (\gamma/2)(x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1}) + B \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (12)$$

(где $m=1, \dots, N$, N – число осцилляторов в цепочке) с периодическими граничными условиями

$$x_0 = x_N, \quad y_0 = y_N, \quad x_{N+1} = x_1, \quad y_{N+1} = y_1.$$

Здесь также как и в разделе 2 нелинейность $f(x)$ задана соотношением (2), а периодическое параметрическое воздействие – в виде соотношений (3), (4). При $N=2$ система (12) переходит в систему (5).

Для того чтобы определить условия устойчивости синхронных движений в цепочке в зависимости от амплитуды и частоты параметрической накачки, линеаризуем систему (12) в окрестности пространственно однородного состояния $x_m = \bar{x}$ и $y_m = \bar{y}$. В результате получим уравнения для возмущений относительно x и y

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_m^{(1)} &= \eta_m^{(2)}, \\ \dot{\eta}_m^{(2)} &= -\alpha \eta_m^{(2)} - [A + 2\Gamma(t)]\eta_m^{(1)} + \Gamma(t)[\eta_{m+1}^{(1)} + \eta_{m-1}^{(1)}], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_m^{(1)} &= x_m - \bar{x}, \\ \eta_m^{(2)} &= y_m - \bar{y}, \\ \Gamma(t) &= (1/2)[\gamma_0 + \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\omega t))], \end{aligned} \quad (14)$$

$$A = f'(\bar{x}) = \begin{cases} a-1, & \text{если } |x| \leq 1, \\ b-1, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Используя преобразование переменных

$$\xi_j^{(1)} = (1/N) \sum_{m=1}^N \exp(-km) \eta_m^{(1)}, \quad (15)$$

$$\xi_j^{(2)} = (1/N) \sum_{m=1}^N \exp(-km) \eta_m^{(2)}$$

(где $k = i2\pi j/N$, $i^2 = -1$, $j = 1, \dots, N$), перепишем систему (13) в виде

$$\dot{\xi}_j^{(1)} = \xi_j^{(2)}, \quad (16)$$

$$\dot{\xi}_j^{(2)} = -\alpha \xi_j^{(2)} - \omega^2(t, j) \xi_j^{(1)},$$

где

$$\omega^2(t, j) = A + [\gamma_0 + \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t))][1 - \cos(2\pi j/N)]. \quad (17)$$

Уравнения (16) описывают динамику пространственных возмущений в окрестности синхронного состояния $x_m = \bar{x}$, $y_m = \bar{y}$. Пространственно однородным возмущениям соответствует $j=N$, пространственно неоднородным – $j=1, \dots, N-1$. Синхронное состояние будет устойчивым, если все возможные в системе несинфазные возмущения будут затухать.

Отметим, что уравнения (16) имеют такой же вид, как и уравнения (6), (7) в разделе 1, описывающие динамику трансверсальных к симметричному подпространству возмущений в двух связанных осцилляторах, а при $N=2$, $j=1$ полностью совпадают с ними. Это позволяет использовать полученные в разделе 1

результаты при определении собственных значений $\mu_{1,2}$, характеризующих эволюцию трансверсального возмущения с номером j за период параметрического воздействия $T = 2\pi/\Omega$. Выражения для собственных значений имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2}(j) = \exp(-\alpha\pi/\Omega) \{0.5S(j) \pm [0.25 S^2(j) - 1]^{1/2}\}, \quad (18)$$

где

$$S(j) = 2 \operatorname{ch}\beta_1(j) \operatorname{ch}\beta_2(j) + K(j) \operatorname{sh}\beta_1(j) \operatorname{sh}\beta_2(j),$$

$$\beta_1(j) = (\pi/\Omega)[C_1(j) - C_2(j)]^{1/2},$$

$$\beta_2(j) = (\pi/\Omega)[C_1(j) + C_2(j)]^{1/2},$$

$$K(j) = 2C_1(j)/[(C_1(j) - C_2(j))(C_1(j) + C_2(j))]^{1/2},$$

$$C_1(j) = (\alpha^2/4) - A - (1 - \cos(2\pi j/N))\gamma_0,$$

$$C_2(j) = (1 - \cos(2\pi j/N))\varepsilon\Omega^2.$$

Синхронные движения в цепочке связанных хаотических осцилляторов будут устойчивыми, если при всех $j=1, \dots, N-1$ выполняется условие $|\mu(j)| < 1$, как для $A = -a-1$, так и для $A = b-1$.

На рис. 9 отрезками прямых вертикальных линий показаны области значений амплитуды параметрической накачки ε , где выполняются условия устойчивости синхронных движений в цепочках с различным числом элементов N при фиксированном $\Omega = 25$. Значения других параметров системы ($B=1.5$, $\omega=1$, $\alpha = -0.1$, $\gamma_0 = 0.1$, $a=0.5$, $b=2$) соответствуют случаю, когда в отсутствие параметрической накачки ($\varepsilon=0$) наблюдаются режимы пространственно-временного хаоса. Из

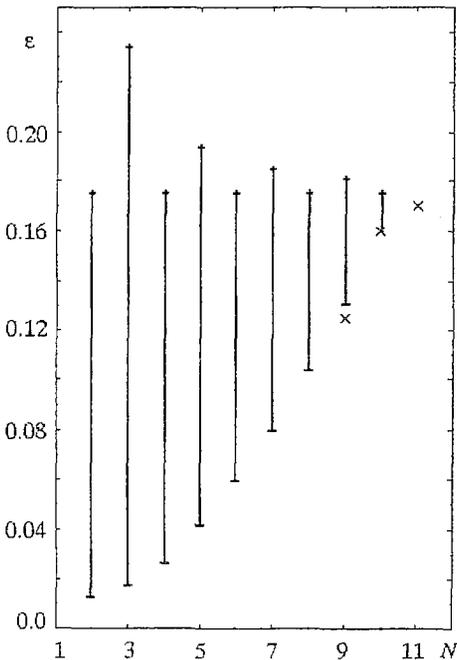


Рис. 9. Области существования пространственно-однородных колебаний в цепочках различной длины (N) в зависимости от амплитуды воздействия (ε) при фиксированном значении частоты воздействия ($\Omega=25$)

рисунка видно, что по мере увеличения числа элементов N область синхронизации постепенно уменьшается, ее нижняя граница смещается вверх по амплитуде. Когда цепочка содержит более 10 осцилляторов, параметрическое воздействие указанной частоты уже не обеспечивает подавления всего спектра трансверсальных возмущений. Дело в том, что стабилизация синхронного состояния по отношению к трансверсальному возмущению к определенному номеру j происходит в определенном конечном интервале значений амплитуды воздействия ε . Границы этих интервалов не совпадают. Синхронизация в цепочке возможна только в том случае, если существует общая, принадлежащая каждому из этих интервалов область значений ε . При $N > 10$ часть интервалов не перекрывается.

Представленные теоретические результаты находятся в хорошем соответствии с результатами компьютерных экспериментов. Практически все значения амплитуды, при которых наблюдалась синхронизация в системе (12), лежат в интервалах устойчивости,

построенных по результатам теоретического анализа. Несколько точек (отмеченные на рис. 9 крестиками) располагаются за их пределами, что объясняется следующим. При анализе на устойчивость накладывалось условие, чтобы модуль собственных значений был меньше единицы как для $A=a-1$, так и для $A=b-1$, то есть в каждой точке фазовой траектории. Это является завышенным требованием. Для устойчивости однородного состояния достаточно, чтобы усредненные величины собственных значений были по модулю меньше единицы. Поэтому в результате численных экспериментов получаются более широкие области синхронизации, чем построенные теоретически.

Посредством периодической модуляции коэффициента связи можно обеспечить стабилизацию пространственно однородных движений только в цепочках конечной длины. Максимальное число элементов цепочки, при котором может наблюдаться синхронизация, зависит от частоты параметрического воздействия. Так, например, при $\Omega = 15; 25; 50; 100$ оно не превышает значений 8; 10; 15; 21, соответственно. В случаях, когда длина цепочки больше, параметрическая накачка оказывает только частичное стабилизирующее воздействие. Пространственно однородное состояние приобретает устойчивость по отношению только к некоторой части спектра трансверсальных возмущений.

Заключение

На примере двух связанных неавтономных осцилляторов, двух связанных автоколебательных систем и цепочки хаотических осцилляторов с периодическими граничными условиями продемонстрирована возможность стабилизации синхронных состояний посредством периодической модуляции коэффициента связи. Показано, что переход от несинхронных хаотических колебаний к синхронным имеет место только в цепочках конечной длины.

Отметим, что предложенный способ синхронизации хаоса с помощью параметрического периодического воздействия на элементы связи можно рассматривать как один из методов управления хаосом. Хаотический аттрактор, соответствующий несинхронным колебаниям осцилляторов, содержит хаотическое (или регулярное) подмножество, расположенное в симметричном подпространстве полного фазового пространства системы. При параметрическом воздействии симметричные состояния становятся устойчивыми к трансверсальным возмущениям. В то же время на форму симметричных движений это воздействие не оказывает никакого влияния.

Работа была поддержана Госкомитетом по высшему образованию России (грант 95-0-8.3-66).

Библиографический список

1. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motions in coupled oscillator systems // Progr. Theor. Phys. 1984. Vol.69. P.32.
2. Pikovsky A.S. On the interaction of strange attractors // Z. Phys. 1984. Vol. B55. P.149.
3. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. С.795.
4. Pecora L.M., Carrol T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64. P.821.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Внешняя и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т.36. С.338.

6. De Sousa Viera M.C., Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. Synchronization of regular and chaotic systems // Phys. Rev. 1992. Vol. A46. P.R7359.

7. Rul'kov N.F., Volkovskii A.R., Rodriguez-Lozano A., Del Rio E., Velarde M.G. Mutual synchronization of chaotic self-oscillators with dissipative coupling // Int. J. Bif. Chaos. 1992. Vol.2. P.669.

8. Lai Y.-Ch., Grebogi C. Synchronization of chaotic trajectories using control // Phys. Rev. 1993. Vol. E47. P.2357.

9. Kocarev L., Shang A., Chua L.O. Transitions in dynamical regimes by driving: A unified method of control and synchronization of chaos // Int. J. Bif. Chaos. 1993. Vol.3. P.479.

10. Murali K., Lakshmanan M. Drive – response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems // Phys. Rev. 1994. Vol. E49. P.4882.

11. Ushio T. Chaotic synchronization and controlling chaos based on contraction mappings // Phys. Lett. 1995. Vol. A198. P.14.

12. Астахов В.В., Сильченко А.Н., Стрелкова Г.И., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Управление и синхронизация хаоса в системе связанных генераторов // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. С. 1323.

13. Lima R., Pettini M. Suppression of chaos by resonant parametric perturbations // Phys. Rev. 1990. Vol. A41. P.726.

14. Cicogna G., Fronzoni L. Effects of parametric perturbations on the onset of chaos in the Josephson-junction model: Theory and analog experiments // Phys. Rev. 1990. Vol. A42. P.1901.

15. Fronzoni L., Giocondo M., Pettini M. Experimental evidence of suppression of chaos by resonant parametric perturbations // Phys. Rev. 1991. Vol. A43. P.6483.

16. Chason R. Suppression of chaos by selective resonant parametric perturbations // Phys. Rev. 1995. Vol. E51. P.761.

17. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т.21. С.588.

18. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т.44. С.7.

19. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.

20. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-33, 1986. P. 1072.

21. Астахов В.В., Шабунин А.В., Сильченко А.Н., Стрелкова Г.И., Анищенко В.С. Динамика двух связанных через емкость генераторов Чуа // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. С. 320.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 3.04.97
после переработки 25.04.97

SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC OSCILLATORS BY MEANS OF PERIODIC MODULATION OF THE COUPLING COEFFICIENT

V.V. Astakhov, A.V. Shabunin

We investigate synchronization of oscillators with chaos by high frequency periodic modulation of the coupling coefficient. As models we use non-autonomous nonlinear oscillators and Chua's self-oscillators coupled via a capacity. For the non-autonomous oscillators regions of stability of in-phase oscillations were determined both analytically and in numeric experiment. Phenomena of stabilization of synchronous motions in the self-oscillators were investigated by numeric experiments. Besides low-dimensional systems we consider the spatial synchronization in a chain of coupled

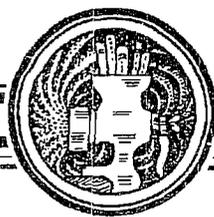
oscillators with periodic boundary conditions. The effect of synchronization is investigated in dependence on the number of elements in the chain. We show that spatial synchronization by parametric modulation of the coupling takes place only in chains of finite length.



Астахов Владимир Владимирович окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую диссертацию (1983). Работает доцентом кафедры радиофизики СГУ, докторант этой кафедры. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос. Имеет более 40 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Шабунин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1966). Закончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизик (1990). Аспирант кафедры радиофизики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос. Автор четырех опубликованных работ.



ИНДУЦИРОВАННЫЙ ШУМОМ ПЕРЕНОС БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С АСИММЕТРИЧНЫМ ПЕРИОДИЧНЫМ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОТЕНЦИАЛОМ

А.П. Никитин

Рассматриваются проблемы нелинейного броуновского движения в «stochastic ratchets»-системах с асимметричным периодичным в пространстве потенциалом в приложении к задачам молекулярной биологии, радиофизики и нанотехнологии.

Введение

«Stochastic ratchets» – это нелинейные системы, которые описывают броуновское движение в асимметричных, периодичных в пространстве потенциальных полях

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + \partial/\partial x(g(t)V(x) - z(t)x) = \xi(t). \quad (1)$$

Здесь M – масса частицы; β – вязкость; x – координата частицы; $V(x)$ – асимметричный периодичный потенциал¹; $\xi(t)$ – гауссов белый шум с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$; D – спектральная интенсивность шума. В (1) $g(t)$, $z(t)$ – случайные коррелированные во времени процессы или детерминированные функции. Они вносят неравновесность в исследуемую систему.

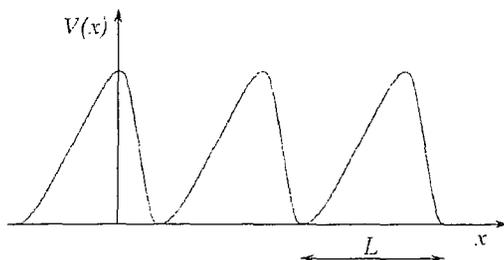


Рис.1. Типичный вид ratchet-потенциала

Задача о нелинейном броуновском движении имеет давнюю историю. Еще в 1912 году М.В.Смолуховский [1] рассмотрел возможность функционирования выпрямляющих устройств мезоскопических размеров: может ли клапан выпрямлять тепловые флуктуации, если он сам подвержен броуновскому движению?

Спустя полвека к этой проблеме вернулся Р.Фейнман [2]. Он рассмотрел

¹ Свое название «stochastic ratchets» получили из-за формы профиля анизотропного (асимметричного) периодичного потенциала (ratchet-потенциала) (рис.1)

модель теплового двигателя, который, предположительно, должен черпать энергию тепловых флуктуаций и превращать ее в полезную работу. Поясняя смысл второго закона термодинамики, Фейнман показал, что тепловая машина не может непрерывно совершать работу за счет охлаждения единственного резервуара теплоты.

А что произойдет, если этот единственный резервуар не будет находиться в тепловом равновесии? Подобная ситуация типична для биологических объектов. Например, в клетках тепловое равновесие нарушается постоянно протекающими химическими реакциями.

В «примитивных» клетках (прокариоты – клетки без ядер) перемещение молекул происходит, скорее всего, диффузионным способом. Для более совершенных клеток (ядерные клетки – эукариоты) такое объяснение не годится. Линейные размеры эукариотов достаточно велики: примерно на порядок больше, чем у прокариотов. Согласно формуле Эйнштейна для среднего квадрата

смещения броуновской частицы $\overline{(x-x_0)^2} = 2D(t-t_0)$, увеличение линейных размеров в 20 раз должно замедлить процессы в клетке в 400 раз! Но само существование эукариотов доказывает обратное – процессы не замедляются. Движение молекул в клетках, по-видимому, должно быть направленным, а не диффузионным.

M.Magnasco [3] исследовал броуновское движение макромолекул около молекулярных полимерных цепей в клетках. Он обнаружил, что асимметричное поле полимера ведет себя как вентиль, то есть выпрямитель неравновесных (вследствие химических реакций) флуктуаций. Magnasco с помощью модели «stochastic ratchets» объяснил направленное движение молекул в клетках в отсутствие постоянного теплового либо химического градиента.

Модель «stochastic ratchets» стала достаточно популярной. Например, в молекулярной биологии S.M.Simon, C.S.Peskin, G.F.Oster, W.Sung и P.J.Park используют ее для объяснения направленного перемещения полимеров через поры мембран клеток [4,5]. В работах [6–7] Д.Э.Постнов, В.С.Анищенко, А.Г.Баланов и автор настоящей работы показали, что радиотехническая система фазовой автоподстройки частоты может соответствовать уравнению (1) и проявлять соответствующие свойства «stochastic ratchets».

Кроме того, в настоящее время J.Rousselet, L.Salome, A.Ajdari, J.Prost, L.P.Faucheux, L.S.Bourdieu, P.D.Kaplan и A.J.Libchaber применяют «stochastic ratchets» в нанотехнологии для направленного перемещения и сортировки групп молекул [9,10]. Перспектива такого инженерного применения «stochastic ratchets», а также приложение результатов исследования этих систем к решению задач современной медицины являются стимулом для многих ученых.

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы дать обзор наиболее интересных и важных результатов исследования нелинейных систем типа «stochastic ratchets».

Исследование уравнения (1) в общем случае представляет собой исключительно сложную задачу. Большинство ученых изучают не уравнение (1), а частные случаи, которые можно разделить на следующие группы.

«Correlation ratchet», $g(t) \equiv 1$; случайный процесс $z(t)$ коррелирован во времени, имеет нулевое среднее значение и симметричную стационарную плотность вероятности;

«Rocking ratchet», $g(t) \equiv 1$; действует аддитивная периодическая сила $z(t)$ с нулевым средним значением;

«Flashing ratchet», $z(t) \equiv 0$; периодический или стохастический процесс переключения $g(t)$ между несколькими состояниями $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$.

Подавляющее число работ посвящено случаю передемпфирования, когда инерционные силы очень малы по сравнению с вязкими, и в уравнении (1) слагаемым, содержащим M , можно пренебречь. Такое упрощение способствует понижению порядка дифференциального уравнения и облегчает процедуру получения его решения. Кроме того, предположения о безынерционности процесса

и о пропорциональности силы трения скорости справедливы для очень широкого круга физических процессов.

В соответствии с представленной выше классификацией рассмотрим последовательно перечисленные частные случаи «stochastic ratchets».

1. Случай коррелированного процесса $z(t)$

Magnasco [3], исследуя уравнение Ланжевена

$$\dot{x} = -dV(x)/dx + z(t) + \xi(t), \quad (2)$$

обнаружил, что периодичный асимметричный потенциал $V(x)$ может выпрямить коррелированные во времени флуктуации $z(t)$ даже с симметричным распределением плотности вероятности $q(z)$ и нулевым средним значением $\langle z(t) \rangle = 0$. С этого момента началось активное изучение уравнения (2)². При этом очень эффективными оказались методы, основанные на теории марковских процессов [11,12]. Эти методы позволяют определять плотность вероятности координат нелинейной системы и поток этой плотности вероятности. Поскольку $z(t)$ – коррелированный шум, то процесс $x(t)$ в общем случае не обязан быть марковским. Если же мы сможем записать дополнительно к (2) стохастическое дифференциальное уравнение для шума $z(t)$, например, в виде

$$\dot{z} = F(z,t) + \xi_2(t), \quad (3)$$

где $\xi_2(t)$ – независимый от $\xi(t)$ гауссов белый шум с корреляционной функцией $\langle \xi_2(t)\xi_2(t') \rangle = 2Q\delta(t-t')$, Q – спектральная интенсивность шума; $F(z,t)$ – детерминированная функция, удовлетворяющая условию Липшица, то по теореме Дуба [13] двухкомпонентный процесс $\{x, z\}$ будет марковским. Для него можно записать уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (уравнение эволюции плотности вероятности $\rho(x,z,t)$). Представим его в виде уравнения непрерывности

$$\partial/\partial t \rho(x,z,t) = -\partial/\partial x J_x(x,z,t) - \partial/\partial z J_z(x,z,t), \quad (4)$$

$$J_x(x,z,t) = (-d/dx V(x) + z - D\partial/\partial x)\rho(x,z,t),$$

$$J_z(x,z,t) = (F(z,t) - Q\partial/\partial z)\rho(x,z,t).$$

Здесь $J_x(x,z,t)$ и $J_z(x,z,t)$ – составляющие вектора потока вероятности $\mathbf{J}(x,z,t)$. Проинтегрируем J_x по всем возможным z и найдем поток вероятности $J(x,t)$ вдоль координаты x

$$J(x,t) = -(d/dx V(x) + D\partial/\partial x)p(x,t) + \int z\rho(x,z,t)dz, \quad (5)$$

где $p(x,t) = \int \rho(x,z,t)dz$. Вследствие периодичности потенциала $V(x)$ удобно выбрать для плотности вероятности $p(x,t)$ условие нормировки $\int_0^L p(x,t)dx=1$, где L – длина периода потенциала, и граничное условие $p(0,t) = p(L,t)$. В стационарном случае, то есть при $t \rightarrow \infty$, поток вероятности J постоянен и не зависит от x . Причем

² Уравнение (2) исследовалось и ранее. Оно описывает широкий круг систем и явлений: системы фазовой синхронизации, синхронизируемый генератор, явления на контакте Джозефсона и др. Однако случай с асимметричным периодичным потенциалом специально до этого еще не рассматривался.

стационарный поток вероятности оказывается пропорциональным средней скорости движения $\langle dx/dt \rangle = LJ$.

Ch.R.Doering, W.Horsthemke, и J.Riordan [14], исследуя (2) для случая кусочно-линейного потенциала $V(x)$ и дихотомического шума³ $z(t)$, получили аналитическое решение, из которого видно, что стационарный поток J имеет резонансный характер зависимости от интенсивности шума $z(t)$. То есть существует некоторая оптимальная интенсивность шума, для которой поток вероятности будет максимальным по абсолютной величине⁴.

Для марковских процессов $z(t)$ с малым временем корреляции τ_c (приближение белого шума) в работе [14] представлена найденная приближенными методами зависимость направления потока J от величины, называемой коэффициентом гладкости («flatness»), которая определяется как отношение четвертого момента к квадрату второго

$$\phi = \langle z^4 \rangle / \langle z^2 \rangle^2,$$

$$\langle z^n \rangle = \int z^n q(z) dz,$$

где $q(z)$ – стационарное распределение z . Эта зависимость имеет вид $J \sim (2 - \phi)$. Для дихотомического шума $\phi = 1$. Для гауссова шума $\phi = 3$. Ясно, что потоки вероятностей, вызванные дихотомическим и гауссовым шумами, при малых временах корреляции шумов будут направлены в противоположные стороны.

Кроме того, в [14] численным методом (методом Монте-Карло) установлено, что зависимость потока вероятности от интенсивности гауссова шума также имеет резонансный характер.

Аналогичные [14] результаты, но уже экспериментально, получили Д.Э.Постнов, А.П.Никитин и В.С.Анищенко [6]. В [6] показано, что система фазовой автоподстройки частоты (ФАП)⁵ может соответствовать уравнению (2). Роль пространственной переменной в радиофизической «correlation ratchet» играет взаимная фаза двух генераторов: генератора сигнала и синхронизируемого гетеродина. Гармонические колебания генератора сигнала и синхронизируемого гетеродина воздействуют на фазовый детектор, напряжение на выходе которого зависит периодически (например, по закону синуса) от разности фаз колебаний генераторов. Через петлю обратной связи это напряжение изменяет частоту синхронизируемого гетеродина, приводя ее к совпадению с частотой генератора сигнала. При этом устанавливается некоторая разность фаз между колебаниями генераторов, обеспечивающая их синхронную работу. Отмечено, что если в петле обратной связи установить нелинейный элемент с соответствующими характеристиками, то система ФАП начинает проявлять анизотропные свойства по отношению к внешнему шумовому воздействию аналогично мезоскопическим «stochastic ratchets», при этом можно добиться совпадения их математических моделей. На рис.2 представлены экспериментальные результаты [6], полученные на системе ФАП, когда $z(t)$ представляет собой дихотомический шум.

Следующий важный шаг в исследовании «stochastic ratchets» сделан в [16]. M.Bier очень удачно подобрал в качестве z дискретный марковский процесс с тремя состояниями $+Z$, 0 и $-Z$. Это шум с относительно простой статистикой, у которого можно менять коэффициент гладкости в широких пределах $\phi \in [1, +\infty)$. Коэффициент гладкости характеризует относительное время пребывания $z(t)$ в 0

³ Дихотомический шум – дискретный марковский процесс с непрерывным временем и двумя равновероятными состояниями $+Z$ и $-Z$.

⁴ Под интенсивностью шума понимается средняя спектральная интенсивность $D_z = \tau_c \langle z^2 \rangle$, где τ_c – время корреляции шума; под резонансным характером зависимости подразумевается в данном случае наличие такой оптимальной интенсивности шума.

⁵ См. обзор по таким системам [15].

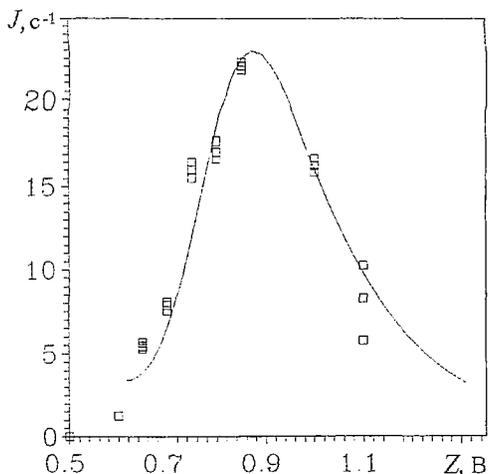


Рис. 2. Зависимость потока J от амплитуды Z дихотомического шума $z(t)$ (физический эксперимент). Расстояния, соответствующие пологому и крутому склонам потенциала, составляют 65 и 35% от его периода L

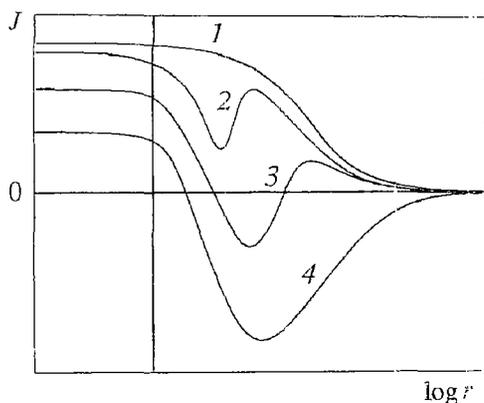


Рис. 3. Качественная зависимость потока от γ для различных коэффициентов гладкости ϕ . Кривая 1 соответствует дихотомическому шуму, $\phi=1$; 2 - $\phi=1.2$; 3 - $\phi=2.5$; 4 - $\phi=3.5$

состоянии по отношению к $+Z$ и $-Z$ состояниям. Чем больше времени z находится в 0 состоянии по сравнению с $+Z$ и $-Z$, тем больше ϕ .

М. Виг, воспользовавшись пакетом компьютерных программ «МАТНЕМА-ТИСА», исследовал зависимость потока от скорости γ переходов шума между его состояниями (величина, обратная времени корреляции шума). Он построил семейство зависимостей потока от γ , где параметром выступал коэффициент гладкости ϕ (рис. 3). Выяснилось, что имеет место обращение (инверсия) потока, причем как на низких частотах (малые γ), так и на высоких частотах (большие γ).

Объяснить обращение потока в области низких частот при нулевой температуре можно следующим образом. Пусть $+Z$ и $-Z$ значительно больше сил потенциала $V(x)$. Будем считать γ достаточно малым, чтобы за время пребывания z в каждом из состояний плотность вероятности $p(x,t)$ успевала релаксировать: в состояниях $+Z$ и $-Z$ она почти равномерно «размажется» вдоль координаты x , в состоянии 0 плотность $p(x,t)$ релаксирует к δ -функциям в состояниях равновесия. Сначала рассмотрим дихотомический шум и соответствующий ему механизм генерации потока. Поток можно представить в виде суммы $J=J(-Z)+J(+Z)$. Поскольку в состоянии $-Z$ шум действует против сил более крутого склона потенциала, то $|J(+Z)|$ будет больше, чем $|J(-Z)|$, и поток будет направлен в сторону пологого склона потенциала $V(x)$.

Если теперь включить 0 состояние, то, поскольку бассейн притяжения у пологого склона потенциала больше, чем у крутого, релаксация плотности вероятности к состояниям равновесия системы будет сопровождаться смещением центра масс (очевидно, плотность вероятности $p(x,t)$ можно рассматривать как плотность невзаимодействующих частиц вдоль координаты x) в сторону крутого склона потенциала $V(x)$. Это второй механизм генерации потока. То есть имеет место конкуренция между двумя механизмами генерации направленного движения. Для близких к единице значений ϕ преобладает один механизм, а начиная с некоторого значения $\phi > 1$, побеждает второй механизм.

В [16] показано, что для определенных значений ϕ при изменении времени корреляции шума $z(t)$ поток J обращается в противоположный. Поскольку различные молекулы отличаются по размерам и им соответствуют неодинаковые по величине коэффициенты вязкого трения, то они по-разному должны «чувствовать» частотный спектр одного и того же шума. Можно подобрать шум с

такой статистикой, что две различные группы молекул будут двигаться в противоположных направлениях. Этому эффекту можно найти инженерное применение, например, в нанотехнологии для сортировки молекул.

2. Случай аддитивной периодической силы $z(t)$

То, что коррелированный шум способен вызвать поток в ratchet, показано в [3,14,16] и других работах. А что, если вместо коррелированного шума на ratchet будет действовать периодичная во времени сила с нулевым средним значением? Не поможет ли такое исследование вскрыть физический механизм направленного движения? R.Bartussek, P.Hänggi, J.G.Kissner [17] в связи с этим рассмотрели поведение мультстабильного осциллятора, возбуждаемого периодичной во времени силой

$$\dot{x} = -\partial/\partial x(V(x) - xA\sin(\omega t)) + \xi(t), \quad (6)$$

названного «rocking ratchet». В качестве асимметричного периодичного потенциала была выбрана функция

$$V(x) = -k^{-1}[\sin(kx) + 1/4\sin(2kx)]. \quad (7)$$

По-прежнему $\xi(t)$ – гауссов белый шум. Для уравнения Ланжевена запишем уравнение непрерывности

$$\partial/\partial t p(x,t) = -\partial/\partial x J(x,t), \quad (8)$$

в котором поток вероятности

$$J(x,t) = [\cos(kx) + 1/2\cos(2kx) + A\sin(\omega t) - D\partial/\partial x] p(x,t). \quad (9)$$

Если определить средний поток как

$$\bar{J} = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/TL \int_0^T dt' \int_0^L dx J(x,t'), \quad (10)$$

где $T=2\pi/\omega$ и $L=2\pi/k$, то в адиабатическом пределе ($\omega \rightarrow 0$) поток можно представить следующим выражением:

$$\bar{J} = D/T \int_0^T dt \{ [1 - \exp(\Phi(L,t))]^{-1} \int_0^L dy \exp(\Phi(y,t) - \Phi(x,t)) - \int_0^L dx \int_0^x dy \exp(\Phi(y,t) - \Phi(x,t)) \}^{-1}. \quad (11)$$

Здесь $\Phi(x,t) = [V(x) - xA\sin(\omega t)]/D$. Проанализировав (11), можно видеть, что зависимости потока \bar{J} от амплитуды A периодичной силы и \bar{J} от интенсивности D белого шума имеют резонансный характер. Если теперь отойти от адиабатического предела, то зависимость \bar{J} от A приобретает несколько локальных минимумов. Кроме того, для определенных величин ω поток инвертируется (рис.4), но не так, как в [14].

R.Bartussek, P.Hänggi, J.G.Kissner показали, что в отсутствие белого шума ($D=0$) инверсии потока нет ни при каких величинах A и ω , но сама зависимость

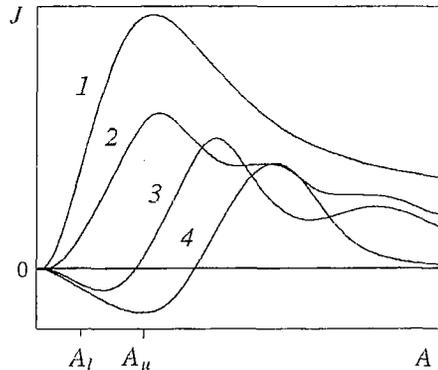


Рис. 4. Качественная зависимость потока от амплитуды A . Верхняя кривая (1) соответствует адиабатическому приближению, $\omega = 0.01$; 2 – $\omega = 4$; 3 – $\omega = 7$; 4 – $\omega = 10$

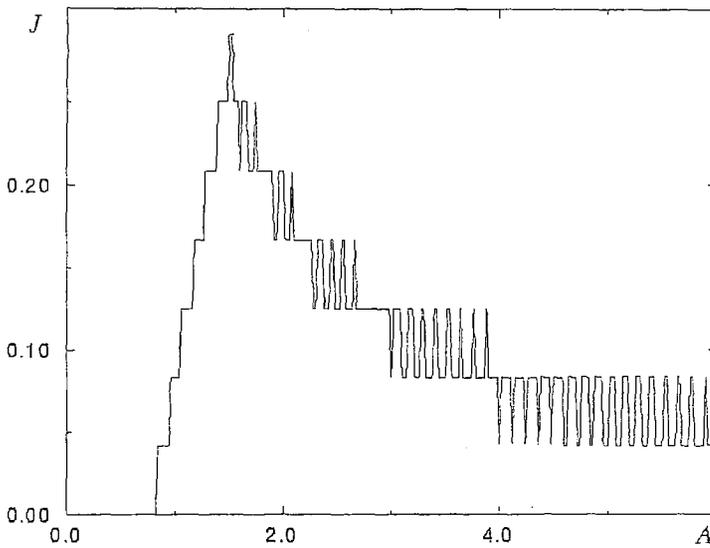


Рис. 5. Зависимость детерминированного потока от амплитуды A

J от A приобретает сложную ступенчатую структуру (рис. 5). Очевидно, чтобы в адиабатическом пределе переместиться на расстояние L , частице нужно время t

$$t(\Theta) = \int_0^L dy / [\cos(ky) + 1/2 \cos(2ky) + A \sin\Theta]. \quad (12)$$

Здесь Θ есть фаза медленно изменяющейся силы ($\omega \rightarrow 0$). Интеграл по всем Θ даст детерминированный поток

$$\bar{J} = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} d\Theta / t(\Theta). \quad (13)$$

Пока A меньше некоторой величины A_1 , в общем случае зависящей от ω , поток $\bar{J} = 0$.

Но стоит величине A превысить A_1 , как появляется поток, направленный в сторону пологого склона потенциала, причем само движение можно разбить на две фазы: часть периода периодической силы $A \sin\Theta$ частица преодолевает пологие склоны потенциала, другую часть периода она находится в пределах одного периода потенциала $V(x)$. Если A превышает некоторую величину A_2 , которая, как и A_1 , в общем случае зависит от ω , то движение частицы будет представлено периодической сменой движений навстречу крутому и навстречу пологому склонам потенциала. Следует заметить, что максимум потока будет при величине A , близкой к A_2 .

Другим замечательным свойством детерминированного потока является его квантование с шагом по высоте $L\omega/(2\pi)$. Ясно, что в системе, в которой с течением

времени устанавливается периодическое движение, когда $\dot{x}(t)$ является периодической функцией t с периодом T , положение частицы в момент времени t отличается от положения во время $t+T$ на целое число периодов L . Это и означает квантование. Кроме квантования по высоте, поток обладает некоторой «гребенчатой» зависимостью от амплитуды A : с ростом A сменяющие друг друга «гребни» потока монотонно убывают по своей ширине (см.рис.5).

Поскольку в случае детерминированного процесса и в адиабатическом приближении обращение потока отсутствует, R.Bartussek, P.Hänggi и J.G.Kiszner сделали вывод, что причина ранее упомянутой инверсии потока кроется во взаимодействии шума и сигнала с конечным спектром.

3. Случай периодического или стохастического процесса переключения $g(t)$

Одной из популярных моделей, описывающей молекулярные моторы, является «flashing ratchet». Пусть некоторая достаточно крупная молекула совершает тепловое броуновское движение около полимера. Благодаря периодичности структуры полимера его электростатическое поле также обладает периодичной структурой. Броуновская частица – молекула участвует в обратимой химической реакции [18,19], в результате которой частица приобретает и теряет случайным образом свою электронейтральность, то есть становится и перестает быть заряженной частицей. Когда частица заряжена, она взаимодействует с полем полимера, которое можно аппроксимировать периодичным в пространстве асимметричным потенциалом $V(x)$. Если частица стала электронейтральной, то она не взаимодействует с полем полимера и для нее можно считать потенциал нулевым. Для броуновской частицы запишем уравнение Ланжевена

$$\beta \dot{x} = -\partial/\partial x U(x,t) + \xi(t), \quad (14)$$

в котором

$$U(x,t) = g(t) V(x) = \begin{cases} V(x) \\ \uparrow \downarrow \\ 0 \end{cases}. \quad (15)$$

По-прежнему $\xi(t)$ – гауссов белый шум, $g(t)$ последовательно принимает значения 0 и 1 случайным во времени образом. Предположим, что процесс переключения $g(t)$ между 0 и 1 является марковским. Запишем уравнение для вероятностей состояний 0 и 1 в матричном виде

$$d/dt \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_0(t) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -b & a \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь a и b вероятности переходов. Они характеризуют «времена жизни» в соответствующих состояниях. Частота γ является обратной величиной времени корреляции процесса $g(t)$ ($\tau_c = \gamma^{-1}$). Поведение броуновской частицы в переключающемся потенциале описывается парой уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова. Представим их в матричном виде

$$d/dt \begin{pmatrix} p_1(x,t) \\ p_0(x,t) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} K_1 - b\gamma & a\gamma \\ b\gamma & K_0 - a\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$K_1 = 1/\beta \partial/\partial x \{d/dx V(x) + D\partial/\partial x\},$$

$$K_0 = D/\beta \partial^2/\partial x^2,$$

где $p_1(x,t)$ – плотность вероятности найти частицу в координате x в момент времени t при «включенном» потенциале, $p_0(x,t)$ – при «выключенном» потенциале. Поскольку частицы не рождаются и не исчезают, марковский процесс удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial/\partial t p(x,t) = -\partial/\partial x J(x,t), \quad (18)$$

в котором суммарная плотность вероятности $p(x,t) = p_1(x,t) + p_0(x,t)$ нормирована на единицу на периоде потенциала $[0, L]$. Легко видеть, что в стационарном случае ($t \rightarrow \infty$) поток вероятности перестает зависеть от x . Найти точное аналитическое решение для стационарного потока вероятности J не удастся. Однако поток J можно вычислить в приближении «медленного» либо «быстрого» переключения потенциала, раскладывая искомое решение в ряд по параметру γ

или $\tau_c = 1/\gamma$

$$J = \gamma J^{(1)} + \gamma^2 J^{(2)} + \dots \quad (19)$$

$$J = \tau_c J_{(1)} + \tau_c^2 J_{(2)} + \dots \quad (20)$$

В этих предельных случаях можно показать, что поток ведет себя резонансным образом в зависимости от интенсивности D белого шума $\xi(t)$ [20] (рис. 6).

Появление потока в рассматриваемой системе можно объяснить следующими рассуждениями (рис. 7). Пусть первоначально включен периодический потенциал и имеется множество невзаимодействующих друг с другом частиц, положение которых характеризуется плотностью $p(x,t)$. Все частицы сначала локализованы в пределах одного периода потенциала около состояния равновесия⁶, то есть потенциальные барьеры очень высоки. Пусть теперь потенциал переключился и стал нулевым. Тепловые флуктуации с течением времени раскидают частицы на расстояния, соизмеримые по величине с периодом потенциала. Распределение частиц вдоль пространственной координаты будет близким к гауссову.

Если снова включится периодичный потенциал, то частицы локализируются около состояний равновесия, причем возле тех, в бассейнах притяжения которых они оказались. Из-за разницы в величине бассейнов притяжений, соответствующих крутым склонам потенциала и пологим склонам, будет иметь место смещение центра масс частиц, причем в сторону крутого склона потенциала. Понятно, если потенциал будет переключаться очень часто, то за короткие времена «выключенного» потенциала тепловые флуктуации не раскидают частицы на достаточное расстояние и они не окажутся в бассейнах притяжения соседних состояний равновесия, вследствие чего поток будет почти нулевым. Также, если потенциал будет переключаться очень редко, то редко будет нарушаться равновесность системы, и поэтому поток будет очень малым. Этим объясняется резонансная зависимость потока от γ .

Очевидно, если $g(t)$ будет не случайным процессом, а периодической функцией времени, то сам механизм направленного движения сохранится. Этому посвящены экспериментальные работы [10,6]. В работе [10] периодический потенциал создавался лазерным излучением, в поле которого двигались броуновские частицы.

Однако для исследования общих свойств «flashing ratchet» вовсе не обязательно ставить эксперименты непосредственно на броуновских частицах. В

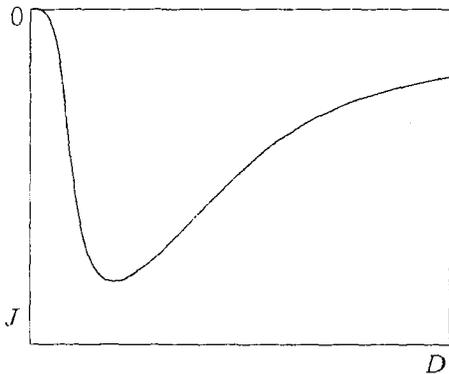


Рис. 6. Качественная зависимость потока от интенсивности белого шума

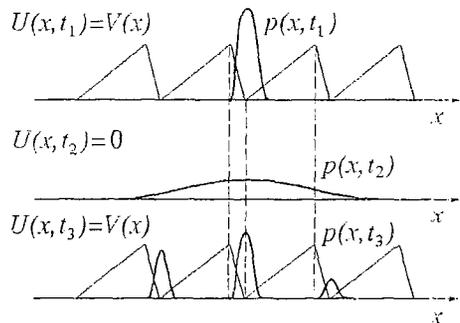


Рис. 7. Эволюция плотности вероятности в «flashing ratchet». Плотность $p(x,t)$ изображена для трех моментов времени t_1 , t_2 и t_3 , соответствующих разным фазам механизма генерации потока

⁶ Состояние равновесия – минимум потенциала.

работах [6,8] Д.Э. Постнов, В.С. Анищенко и автор настоящей работы показали, как на основе мультистабильного осциллятора типа фазовой автоподстройки частоты можно построить модель «flashing ratchet». На рис. 8 представлены экспериментальные результаты [8], которые получены на ФАП, когда $g(t)$ представляет собой процесс переключения между 0 и 1. Кривой 1 соответствует периодический, а кривой 2 – случайный процесс переключения $g(t)$ – бинарный шум⁷. Сравним обе кривые. На высоких частотах f переключения $g(t)$ кривая 1 лежит выше, чем кривая 2. Объясним этот экспериментальный факт на языке броуновского движения. На рис.8 одной и той же величине f соответствует частота периодического переключения $g(t)$ и средняя частота случайных переключений $g(t)$. Случайный процесс $g(t)$ обладает широким спектром времен пребывания в состояниях 0 и 1, кратных T_0 , в то время как периодическому процессу $g(t)$ будет соответствовать только один временной масштаб T_0 . Следовательно, как показано выше, за короткие времена T_0 «выключенного» потенциала тепловые флуктуации не раскидают частицы на достаточное расстояние, и они не окажутся в бассейнах притяжения соседних состояний равновесия. Поэтому для периодического переключения $g(t)$ поток будет близким к нулевому, в то время как для случайного процесса из-за присутствия в его спектре времен пребывания в состояниях 0 и 1 компонентов с достаточно длительным временем, механизм генерации потока будет продолжать работать, и поток будет больше по абсолютной величине, чем при периодическом процессе переключений $g(t)$.

Очень интересной представляется работа [21]. В ней $g(t)$ представляет собой дискретный случайный процесс с тремя возможными состояниями +1, 0 и -1.

$$U(x,t) = g(t) V(x) = \begin{cases} V(x) \\ \mu\lambda \uparrow \downarrow \mu\gamma \\ 0 \\ \lambda\gamma \uparrow \downarrow \gamma \\ -V(x) \end{cases} \quad (21)$$

Здесь λ и μ характеризуют вероятности переходов случайного процесса между состояниями +1 и -1, причем смена состояний возможна только в фиксированные моменты времени $t_k = \Delta \pm kT_0$, где $T_0 = \text{const}$, $k = 0, 1, 2 \dots$ – целое неотрицательное число, Δ – случайная величина, не зависящая от $z(t)$ и равномерно распределенная на отрезке $[0, T_0]$.

Выше мы рассмотрели механизм возникновения направленного движения в системе при переключении $g(t)$ между состояниями 0 и 1. Очевидно, если бы $g(t)$ переключалась между 0 и -1, направление потока было бы противоположным по отношению к рассмотренному случаю. Можно предположить, что для случайного

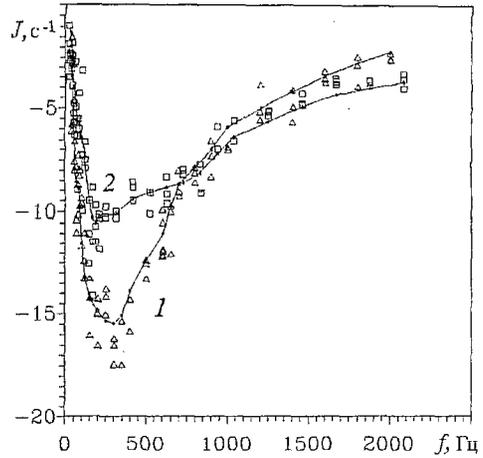


Рис. 8. Зависимость потока от частоты (для случайного процесса – средней частоты) переключения процесса $g(t)$ между 0 и 1 (физический эксперимент). Расстояния, соответствующие пологому и крутому склонам потенциала, составляют 75 и 25% от его периода L

⁷ Бинарный шум – дискретный случайный процесс, имеющий два возможных равновероятных состояния $+Z$ и $-Z$, причем смена состояний возможна только в фиксированные моменты времени $t_k = \Delta \pm kT_0$, где $T_0 = \text{const}$, $k = 0, 1, 2 \dots$ – целое неотрицательное число, Δ – случайная величина, не зависящая от $z(t)$ и равномерно распределенная на отрезке $[0, T_0]$.

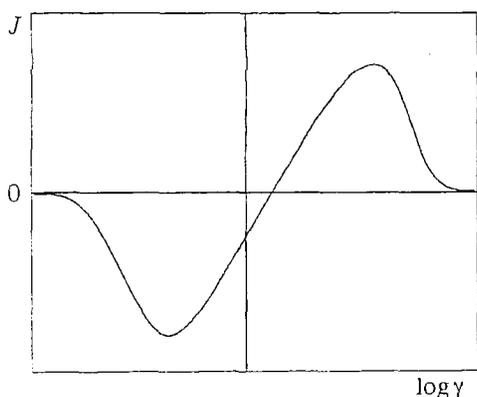


Рис. 9. Качественная зависимость потока от γ для шума с тремя состояниями

процесса трех состояний оба механизма возникновения направленного движения противостоят друг другу. Вследствие отличия «времен жизни» в состояниях $+1$ и -1 , каждый из механизмов побеждает в своей области частот γ . Отсюда должна следовать инверсия потока J при изменении скорости потока переключений γ . Этому эффекту можно найти, также как и в случае «correlation ratchet», инженерное применение, например, в нанотехнологии для сортировки молекул.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены некоторые проблемы нелинейного броуновского движения в «stochastic ratchets». Сейчас ведутся активные исследования подобных систем. Несколько интересных, по мнению автора, работ по этому научному направлению еще не опубликованы, но о них хотелось бы упомянуть, поскольку они дают общее представление о направлениях и перспективах на ближайшее будущее в исследовании «stochastic ratchets»: о моделировании «stochastic ratchets» системой контактов Джозефсона [22]; о моделировании «stochastic ratchets» с учетом массы частицы системой, основанной на ФАП [8]; о сортировке частиц по признаку различия их масс (L.Schimansky-Geier и [23]); а также работа M.Bier о «stochastic ratchets» с двумерным потенциалом.

Автор выражает благодарность А.Г.Баланову, Д.Э.Постнову и В.С.Анищенко за интерес к работе и ценные замечания.

Работа частично была поддержана Госкомвузом России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66) и российско-германским грантом DFG and RFFI 436 RUS 113/334/0(R).

Библиографический список

1. Smoluchowski M.V. Experimentell nachweisbare, der Hüblichen Thermodynamik widersprechende Molekularphänomene // Phys. Zeitschr. 1912. Vol.13. P. 1069.
2. Feynman R.P., Leighton R.B. and Sands M. The Feynman Lectures on Physics. Addison-Westley Reading, 1963.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 4. Кинетика. Тепло. Звук. М.: Мир, 1965.
4. Magnasco M. Molecular Combustion Motors // Phys.Rev.Lett. 1994. Vol.72. P. 2656.
5. Simon S.M., Peskin C.S. and Oster G.F. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1992. Vol.89. P. 3770.
6. Sung W. and Park P.J. Polymer Transport through a Pore in Membrane // Submitted to Phys. Rev. Lett., 1996.
7. Постнов Д.Э., Никитин А.П., Анищенко В.С. Управление потоком вероятности в системе фазовой автоподстройки частоты // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 9. С. 24.
8. Postnov D.E., Nikitin A.P., Balanov A.G., Anishchenko V.S. Symmetric and asymmetric hopping dynamics in noisy electronic circuits // Book of abstracts. The Inter-

national Conference on Nonlinear Dynamics and Chaos (ICND-96). Saratov, Russia. July 8 – 14. 1996. P.195.

8. *Nikitin A.P., Postnov D.E., Anishchenko V.S.* Electronic simulation of stochastic ratchets // Submitted to IEEE Trans. on Circuits and Systems I.

9. *Rousselet J., Salome L., Ajdari A. and Prost J.* // Nature 1994. Vol.370. P. 113.

10. *Faucheux L.P., Bourdieu L.S., Kaplan P.D., and Libchaber A.J.* Optical Thermal Ratchet // Phys.Rev.Lett. 1995. Vol.74. P. 1504.

11. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов.радио, 1977.

12. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.

13. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

14. *Doering Ch. R., Horsthemke W. and Riordan J.* Nonequilibrium Fluctuation-Induced Transport // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol.72. P. 2984.

15. *Шахильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: СВЯЗЬ, 1972.

16. *Bier M.* Reversals of noise induced flow // Phys. Lett. A. 1996. Vol.211. P.12.

17. *Bartussek R., Hänggi P. and Kissner J.G.* Periodically Rocked Thermal Ratchets // Europhys.Lett. 1994. Vol.28. P. 459.

18. *Astumian R.D., Bier M.* Fluctuation Driven Ratchets: Molecular Motors // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol.72. P. 1766.

19. *Prost J., Chauwin J.F., Peliti L., Ajdari A.* Asymmetric Pumping of Particles // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol.72. P. 2652.

20. *Doering Ch. R.* Randomly Rattled Ratchets // Proceedings of the Workshop on Fluctuations in Physics and Biology, Elba International Physics Center, 5–10 June, 1994.

21. *Bier M.* Reversals of noise induced flow in a 3-state fluctuating potential // Book of abstracts. The International Conference on Nonlinear Dynamics and Chaos (ICND-96). Saratov, Russia. July 8 – 14. 1996. P.33.

22. *Zapata I., Bartussek R., Sols F. and Hänggi P.* Voltage rectification by a SQUID ratchet // Submitted to Phys.Rev.Lett., 1996.

23. *Никитин А.П., Постнов Д.Э.* Влияние массы частиц на поведение «stochastic ratchets» // Направлено в «Письма ЖТФ».

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 10.02.97
после переработки 18.03.97

STOCHASTIC RATCHETS

A.P. Nikitin

In the present paper the problems of nonlinear Brownian motion in «stochastic ratchets», namely, the systems with asymmetric spatially periodic potential were considered in application to molecular biology, radiophysics and nanotechnology.



Никитин Александр Петрович – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры радиофизики СГУ. Область научных интересов – броуновское движение в нелинейных системах.



ДИНАМИКА ЦЕПОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Т.Е. Вадивасова, О.В. Сосновцева

Анализируется пространственная эволюция квазипериодических режимов в цепочке связанных отображений окружности. Исследуются механизмы возникновения странной нехаотической динамики и свойства нерегулярных аттракторов.

Введение

В последние годы в ряде работ, посвященных проблемам нелинейной динамики, внимание исследователей было привлечено к такому необычному объекту в фазовом пространстве динамических систем, как странный нехаотический аттрактор (СНА). Впервые понятие СНА было введено в [1]. Это притягивающее множество, сложное с точки зрения его геометрии: оно не является совокупностью конечного числа точек, не является кусочно-дифференцируемым и не представляет собой элемента фазового объема с кусочно-дифференцируемой границей. Однако фазовые траектории на нем устойчивы по Ляпунову и, таким образом, динамика не является хаотической.

Как показали исследования, СНА типичен для систем с квазипериодическим воздействием (как потоковых, так и отображений). В таких системах СНА может существовать на множестве значений параметров, имеющем ненулевую меру. В работах [1–14] были обнаружены странные нехаотические аттракторы в различных системах с квазипериодическим возбуждением, а также изучены их характеристики. Показана грубость СНА по отношению к слабому сигналу и шуму [1,12]. Установлено, что СНА характеризуется целым значением емкостной размерности [5,7], имеет особый тип спектра (так называемый сингулярно-непрерывный спектр) и спадающую до определенного уровня автокорреляционную функцию [10]. Были разработаны методы, позволяющие отличить СНА от квазипериодического аттрактора, в основе которых лежит чувствительность к фазе воздействия и сложное устройство множества точек, получаемого при рациональной аппроксимации числа вращения, определяемого соотношением частот воздействия [9].

Обнаружены два универсальных механизма возникновения СНА из квазипериодических режимов [8,11–13]: 1) кризис эргодического тора, наступающий в результате касания устойчивого тора с неустойчивым и сопровождающийся мгновенным разрушением квазипериодического режима и возникновением множества, не являющегося кусочно-дифференцируемым;

2) постепенная потеря гладкости эргодическим тором, в результате чего предельное множество перестает быть дифференцируемым. Было установлено, что возникновению хаотической динамики в системах с грубыми квазипериодическими движениями всегда предшествует образование СНА [4,6,12,13]. Не исключено, что СНА существуют в более широком классе систем, чем системы с квазипериодическим воздействием. В автономных и периодически возбуждаемых системах странные нехаотические аттракторы, также как и квазипериодические аттракторы, не могут быть грубыми, но, возможно, существуют на множестве ненулевой меры в пространстве параметров [14].

Развитие хаоса через разрушение квазипериодических движений рассматривается как один из типичных сценариев возникновения турбулентности [15]. Если предположить однонаправленный характер взаимодействия элементов среды, то вполне возможным становится возникновение с движений, соответствующих движениям на странном нехаотическом аттракторе, и известный сценарий Рюэля – Такенса – Ньюхауса может принять вид: периодическое движение → квазипериодическое движение → странный нехаотический аттрактор → хаос.

Простейшей моделью среды служит цепочка связанных осцилляторов. Если выбрать в качестве элемента цепочки дискретное отображение, то модель еще более упростится, так как и время и пространственная координата окажутся дискретными. Цепочки и решетки, составленные из простых дискретных отображений (чаще всего логистических отображений), были исследованы в ряде работ [17–27]. Для анализа развития квазипериодических режимов и СНА в качестве базового элемента цепочки наиболее подходит отображение окружности, для которого характерно периодическое, квазипериодическое и хаотическое поведение [16]. Исследование пространственно–временного поведения цепочки отображений окружности с однонаправленным взаимодействием и анализ роли странных нехаотических аттракторов в динамике такой цепочки является целью настоящей работы.

1. Цепочка отображений окружности

Отображение окружности

$$x(n+1) = x(n) + \Omega - K/(2\pi)\sin(2\pi x(n)), \text{ mod } 1$$

моделирует динамику фазы в автогенераторе с сильной фазовой нелинейностью, находящемся под действием периодических толчков. Параметр K (параметр нелинейности) характеризует интенсивность воздействия, а параметр Ω (число вращения) – соотношение частот, n – дискретное время. Периодическая модуляция параметра Ω с частотой, определяемой иррациональным числом, соответствует квазипериодическому возмущению фазы автогенератора. Если в качестве одной из мод воздействия рассматривать сигнал другого, аналогичного автогенератора, то можно перейти к цепочке однонаправленно связанных отображений окружности

$$x_j(n+1) = x_j(n) + \Omega_j - K_j/(2\pi)\sin(2\pi x_j(n)) + \gamma_j \cos(2\pi x_{j-1}(n)), \text{ mod } 1$$

где j – номер парциальной ячейки (пространственная координата), n – дискретное время. Пусть цепочка ограничена с одного конца, $j=0,1,2,\dots$ и $\gamma_0=0$. Если предположить $K_0=0$ и $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$, то два первых звена цепочки составят хорошо изученную систему: отображение окружности с квазипериодическим воздействием, в которой наблюдаются двух- и трехчастотные квазипериодические движения, странные нехаотические и хаотические аттракторы [2,4,6,11]. Объектом исследования в настоящей работе является цепочка идентичных отображений

окружности ($\Omega_j = \Omega$, $K_j = K$, $\gamma_j = \gamma$ при $j \geq 2$), на первый элемент которой подается квазипериодическое воздействие с амплитудой $\gamma_1 = A$ и иррациональным числом вращения Ω_0 .

2. Развитие сложной динамики вдоль цепочки

Свойства парциального отображения окружности зависят от того, в какой области значений параметра K оно рассматривается. При $K < 1$ отображение окружности обратимо и не может породить хаотическую динамику. Оно демонстрирует только периодические и квазипериодические режимы. Введение однонаправленной связи между отображениями не может привести к возникновению хаоса в цепочке, но может вызвать возникновение странных нехаотических аттракторов.

В закритической области при $K > 1$ отображение окружности становится необратимым. Оно обладает периодическими и хаотическими движениями, а квазипериодические режимы перестают существовать. Введение однонаправленной связи между отображениями приводит к развитию хаоса и гиперхаоса вдоль цепочки. Однако квазипериодическое воздействие на первый элемент цепочки может существенно повлиять на ее динамику, приводя к таким эффектам, как прерывание последовательности пространственных бифуркаций удвоения в результате разрушения квазипериодических движений и возникновения странного нехаотического аттрактора, подавление или, напротив, возбуждение хаотической динамики.

2.1 Возникновение странного нехаотического аттрактора в закритической области парциального отображения. При отсутствии квазипериодического возбуждения цепочки в закритической области $K > 1$ при соответствующем выборе параметров можно обнаружить хорошо известный механизм пространственного развития хаоса через конечную последовательность бифуркаций удвоения периодов циклов вдоль цепочки [22]. При введении квазипериодического воздействия на цепочку в первых ее звеньях вместо периодического режима возникает двухчастотный квазипериодический режим, которому соответствует инвариантная кривая отображения. Инвариантная кривая деформируется с ростом пространственной координаты j . Даже очень слабое квазипериодическое воздействие на цепочку приводит к возникновению СНА. На рис.1,а представлены (x_0, x_j) проекции фазовых траекторий для ячеек с номерами $j=4,5,6$ в отсутствие квазипериодического воздействия ($A=0$). При этом в пятой ячейке возникает хаотическая динамика. Соответствующий данной подсистеме ляпуновский показатель положителен $\lambda = +0.0434$. Последующие ячейки не добавляют положительных ляпуновских показателей, а как бы ретранслируют хаотическую динамику, возникающую в пятой ячейке. На рис.1,б изображены фазовые портреты в тех же ячейках, при тех же значениях параметров и тех же начальных условиях, но при слабом квазипериодическом воздействии $A=0.001$ с числом вращения, равным золотому сечению $\Omega_0 = (5^{1/2} - 1)/2$. Вместо хаоса в пятой и последующих ячейках наблюдается режим СНА ($\lambda = -0.0516$). Дальнейшее увеличение воздействия приводит к разрушению инвариантной кривой и возникновению СНА в ячейках с номерами $j < 5$.

Развитие сложной динамики вдоль квазипериодически возбуждаемой цепочки в закритической области отражено на бифуркационной диаграмме, представленной на рис.2. В соответствии с качественно различным динамическим поведением элементов цепочки на диаграмме выделены три области. Белая область соответствует двухчастотным квазипериодическим движениям, представленным инвариантной кривой, состоящей из двух или четырех частей. В 2СНА области диаграммы инвариантная кривая уже разрушилась, но все ляпуновские показатели

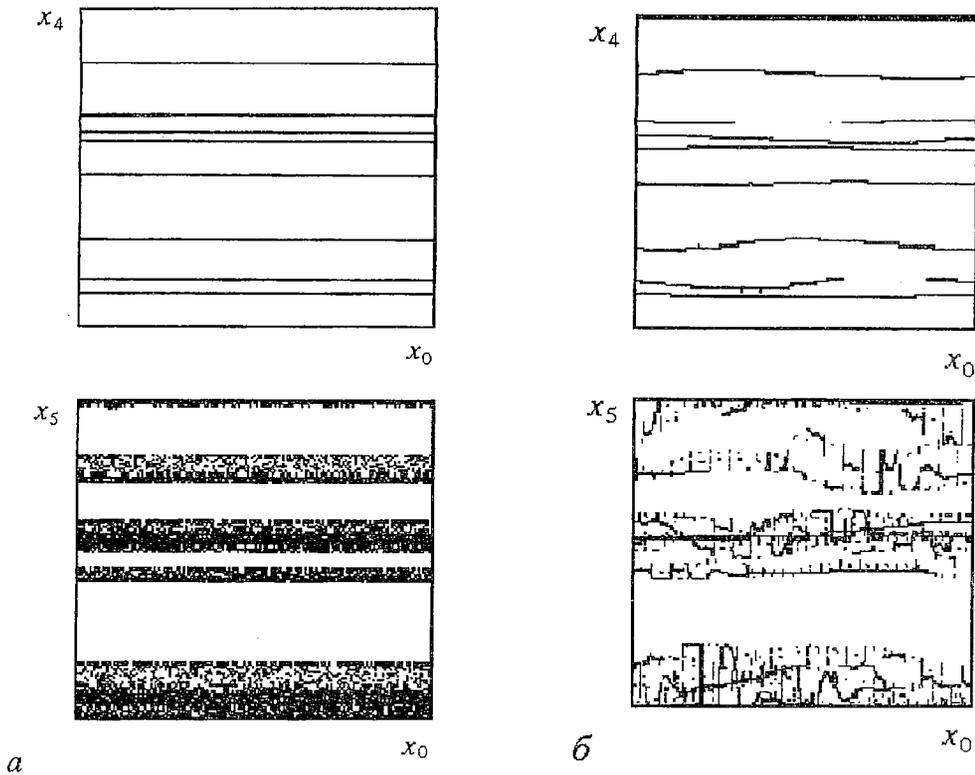


Рис. 1. (x_0, x_j) проекции фазовых траекторий для $j=4,5,6$ при $K=1.55$, $\Omega=0.5$, $\gamma=0.13$: *a* – в отсутствие внешнего воздействия; *б* – при внешнем квазипериодическом воздействии

еще отрицательны. Это область существования странного нехаотического аттрактора. Можно наблюдать два известных механизма возникновения СНА с ростом пространственной координаты j . Сплошная линия на рис. 2 соответствует кризису квазипериодического аттрактора, в результате которого происходит объединение его частей и рождается СНА. Второй механизм состоит в постепенной потере дифференцируемости инвариантной кривой при отсутствии кризиса. Ему соответствует часть границы области СНА, отмеченная на рис. 2 штриховой линией. При увеличении амплитуды воздействия происходит переход от СНА к хаотической динамике.

Как уже отмечалось, квазипериодическое воздействие на элементы цепочки в области $K > 1$ может не только разрушать, но и индуцировать развитие хаотической динамики вдоль цепочки. Например, при $K=1.65$, $\Omega=0.5$, $A=0.15$, $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$ в первой ячейке ($j=1$) имеет место режим СНА, а в

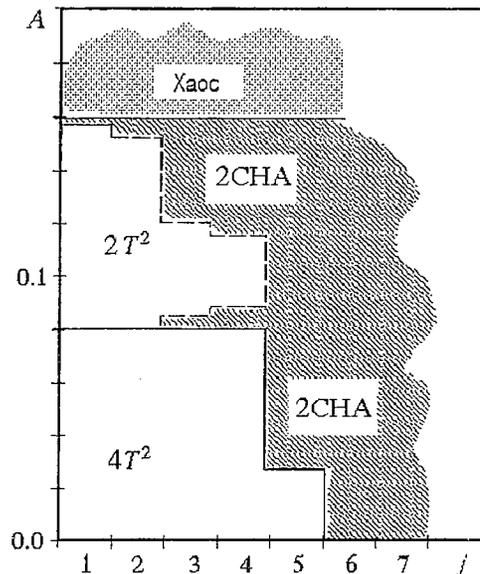


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма режимов на плоскости (j, A) для значений параметров $K=1.55$, $\Omega=0.5$, $\gamma=0.1$, $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$; $2T^2$ – область двухчастотных квазипериодических колебаний, образом которых в фазовом пространстве системы является двухобходный тор; $4T^2$ – четырехобходный тор; $2СНА$ – область существования странного нехаотического аттрактора с двумя лентами

последующих в некоторой области изменения параметра связи $\gamma \in [0.13, 0.29]$ возможно развитие хаоса. Так при $\gamma=0.2$ каждая последующая ячейка $j=2, 3, \dots, 9$ добавляет положительный ляпуновский показатель в спектр ляпуновских характеристических показателей (ЛХП). Таким образом, вдоль цепочки развивается гиперхаос. Вне отмеченной области значений γ хаос не возникает ни в одной ячейке.

2.2. Возникновение странного нехаотического аттрактора в результате разрушения многочастотных квазипериодических колебаний. В докритической области парциального отображения $K < 1$, как уже отмечалось, хаотическая динамика не может возникнуть, но возможны многочастотные квазипериодические движения. Нам уже известно, что двухчастотные квазипериодические режимы разрушаются с ростом пространственной координаты j , приводя к образованию СНА. Рассмотрим, что происходит при добавлении третьей несоизмеримой частоты. Для этого выберем параметры парциального отображения так, чтобы обеспечить квазипериодическую динамику автономного отображения с числом вращения, приблизительно равным золотому сечению, и подадим на цепочку квазипериодическое воздействие с числом вращения $\Omega_0 = 2^{1/2} - 1$ (серебряное сечение). Таким образом, мы обеспечили трехчастотный квазипериодический режим, по крайней мере, в первых звеньях цепочки. Для некоторых значений амплитуды воздействия наблюдается синхронизация двух из трех частот и переход к двухчастотному квазипериодическому движению с последующим его разрушением вдоль цепочки и возникновением СНА. Разрушение инвариантной кривой, возникшей в результате резонанса на трехмерном торе (аттракторе, соответствующем трехчастотному квазипериодическому режиму), отражено на рис. 3.

Можно выбрать значение амплитуды воздействия A так, что синхронизации не будет. На рис. 4, а представлены (x_0, x_j) проекции фазовых траекторий в ячейках с номерами $j=4, 5, 6$ для случая $A=0.058$. В первых элементах цепочки имеет место трехчастотный квазипериодический режим. Его эволюцию с ростом j трудно проследить по двумерной проекции фазовой траектории. Поэтому для анализа характера динамики вводится сечение фазовой траектории плоскостью, что позволяет снизить размерность исследуемого множества на единицу. На рис. 4, б представлены (x_0, x_j) проекции таких сечений плоскостью $x_1=0.5$ для $j=4, 5, 6$. Точность построения сечений задана равной 10^{-4} . Можно видеть, что при $j=4, 5$ кривая, получаемая в сечении, еще является гладкой, что соответствует трехчастотному квазипериодическому режиму. В шестой ячейке наблюдается разрушение кривой в сечении, аналогично тому, как происходит разрушение инвариантной кривой, соответствующей двухчастотным квазипериодическим колебаниям (см. рис. 3), что должно приводить к возникновению СНА. По-видимому, та же судьба ожидает и квазипериодические движения с еще большим числом несоизмеримых частот, но численных методов диагностики их разрушения в настоящее время нет.

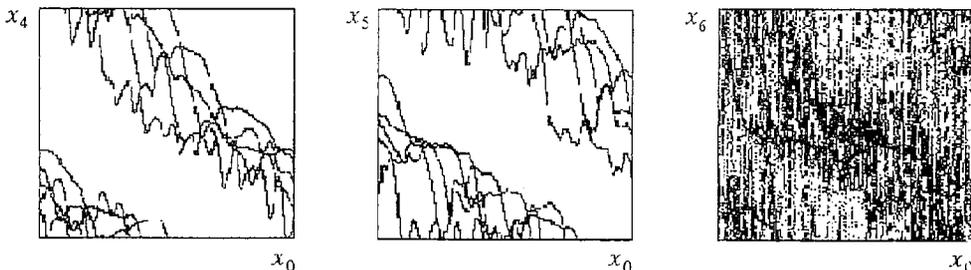


Рис. 3. (x_0, x_j) проекции фазовых траекторий в ячейках с номерами $j=4, 5, 6$ для случая квазипериодического воздействия с амплитудой $A=0.060$ и числом вращения $\Omega_0=2^{1/2}-1$ при $K=0.8$, $\Omega=0.610074$, $\gamma=0.2$

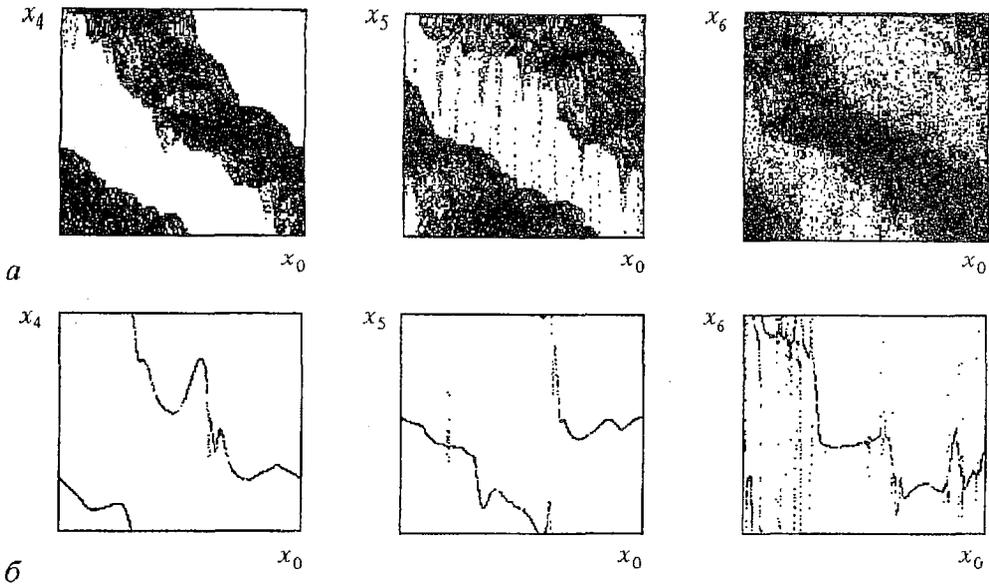


Рис. 4. Аттракторы для $j=4,5,6$ при $K=0.8$, $\Omega=0.610074$, $\gamma=0.2$, $A=0.058$, $\Omega_0=2^{1/2}-1$: а – (x_0, x_j) проекции фазовых траекторий; б – сечения Пуанкаре плоскостью $x_1=0.5$

3. Исследование пространственных структур

Мы рассмотрели, как происходит эволюция временной динамики в начальных звеньях цепочки. В разных звеньях она носит различный характер, как правило, усложняясь с ростом пространственной координаты. Если, начиная с некоторого значения j , во всех звеньях цепочки наблюдается качественно одна и та же временная динамика, будем называть ее пространственно установившейся.

Обратимся к рассмотрению пространственно установившихся режимов, наблюдаемых при различных значениях параметров, ставя им в соответствие зависимость динамической переменной от пространственной координаты в фиксированный момент времени (мгновенный профиль волны). В этих целях исследовалась цепочка, состоящая из 900 звеньев, при фиксированных значениях параметров и различных K и γ . Начальные условия выбирались однородными. Была построена диаграмма пространственно установившихся режимов на плоскости параметров (K, γ) (рис. 5). На диаграмме отмечены 6 областей, соответствующих различным установившимся вдоль цепочки динамическим режимам и различному характеру мгновенного профиля волны. В области 1 во всех звеньях цепочки, начиная с некоторого номера, существует цикл отображения с

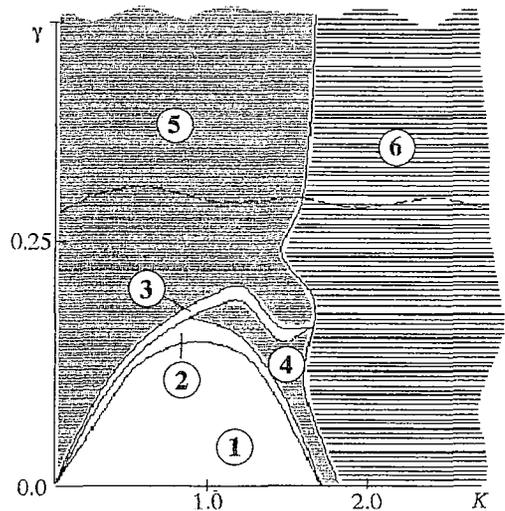


Рис. 5. Диаграмма пространственно установившихся режимов на плоскости параметров (K, γ) при фиксированных значениях параметров $\Omega=0.5$, $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$, $A=0.15$ и однородных начальных условиях $x_j(0)=0.1$

периодом, равным двум. Квазипериодическое воздействие затухает вдоль цепочки и перестает влиять на динамику элементов цепочки, параметры которых соответствуют существованию цикла с периодом 2 в автономном отображении окружности. Все звенья цепочки колеблются в одной фазе, и мгновенный профиль представляет собой прямую линию (пространственно однородный режим, рис. 6, *a*). С ростом параметра нелинейности K или связи γ происходит разрушение пространственно однородного режима. Сигнал воздействия распространяется вдоль цепочки, влияя на динамику всех ее элементов. В простейшем случае во всех звеньях цепочки происходят двухчастотные квазипериодические колебания. Такое поведение цепочки наблюдается в узкой области, отмеченной на диаграмме цифрой 2. Мгновенный профиль волны в этой области имеет вид периодических (рис. 6, *б*) или квазипериодических колебаний. Область 3, также как и область 1, соответствует существованию цикла с периодом 2 в каждой ячейке, но при этом в разных ячейках возможны два различных цикла, чередование которых вдоль цепочки выглядит хаотическим. На мгновенном профиле волны (рис. 6, *в*) можно различить четыре уровня, соответствующих точкам двух циклов. В области 4 бифуркационной диаграммы вдоль цепочки в результате разрушения инвариантной кривой устанавливается режим СНА. Аттрактор состоит из двух частей, посещаемых изображающей точкой в фазе во всех звеньях цепочки. Мгновенный профиль, характерный для данной области, представлен на рис. 6, *г*.

По-видимому, в цепочке наблюдается явление мультистабильности, и бифуркационная диаграмма должна быть представлена на многолистной поверхности. Мы можем отметить, что пространственно установившийся режим, существующий в области 3, на границе области претерпевает кризис, объединяясь с аттрактором, эволюционирующим из квазипериодического аттрактора в области

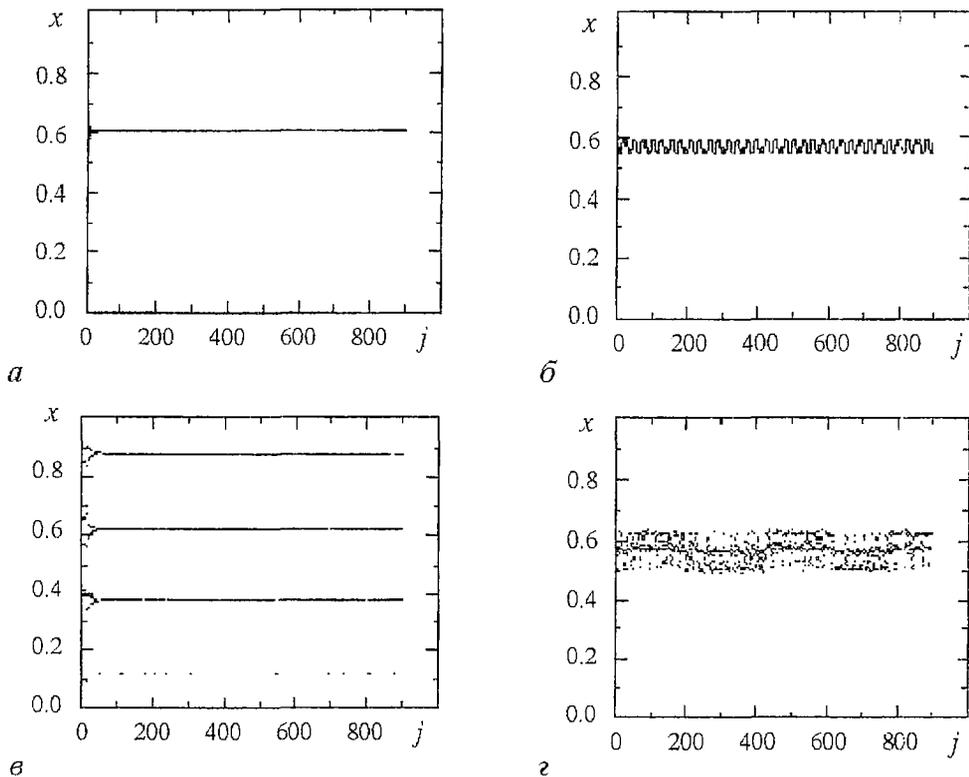


Рис. 6. Зависимости динамической переменной от пространственной координаты в фиксированный момент времени, наблюдаемые в различных областях бифуркационной диаграммы, представленной на рис.5: *a* – в области 1; *б* – в области 2; *в* – в области 3; *г* – в области 4

2. Этот кризис приводит к возникновению развитого странного нехаотического аттрактора, являющегося пространственно установившимся режимом в области 5. Мы не можем с уверенностью сказать, ограничена ли область 5 при малых значениях параметра нелинейности K или СНА является предельным режимом при любом сколь угодно малом, но конечном значении K . Дело в том, что в области малых K в цепочке развиваются многочастотные квазипериодические колебания. Они также могут, разрушаясь, порождать СНА, но диагностировать их разрушение, как уже отмечалось, не представляется возможным.

Область 6, отмеченная на диаграмме, соответствует возникновению в цепочке хаотической динамики. Мгновенные профили волны, типичные для областей 5 и 6, не имеют визуальных отличий. Для более наглядного представления о пространственно-временной динамике цепочки строились диаграммы мгновенных состояний элементов цепочки. Интервал изменения динамической переменной $[0,1]$ разбивался на 30 частей, которым сопоставлялись 30 различных полутонов от белого до черного цветов. С помощью различных полутонов изображалось мгновенное состояние каждой пространственной ячейки ($j=0,1,2,\dots,200$) в каждый момент времени ($n=0,1,2,\dots,200$). Диаграммы мгновенных состояний цепочки, представленные на рис. 7, а, б, соответствуют пространственно установившимся режимам СНА (область 5, рис. 5) и хаоса (область 6, рис. 5). Обе диаграммы внешне выглядят одинаково нерегулярно.

На бифуркационной диаграмме (см.рис. 5) штриховой линией обозначена граница пространственного роста неустойчивости в цепочке. Если считать, что состояние j -го элемента цепочки в момент времени n не зависит от состояния предыдущего, $(j-1)$ -го элемента в тот же момент времени, а зависит только от его состояния в момент времени $n-1$, то малое возмущение фазы воздействия δx_0 в начальный момент времени $n=0$ приводит к возмущению δx_j состояния j -ой ячейки в момент времени $n=j$

$$\delta x_j(j) = \mu_j(j)\delta x_0(0),$$

где множитель $\mu_j(j)$ определяется как

$$\mu_j(j) = \prod_{i=1}^k \partial x_i(i) / \partial x_{(i-1)}(i-1).$$

Можно ввести «пространственный» ляпуновский показатель, характеризующий поведение возмущения вдоль цепочки

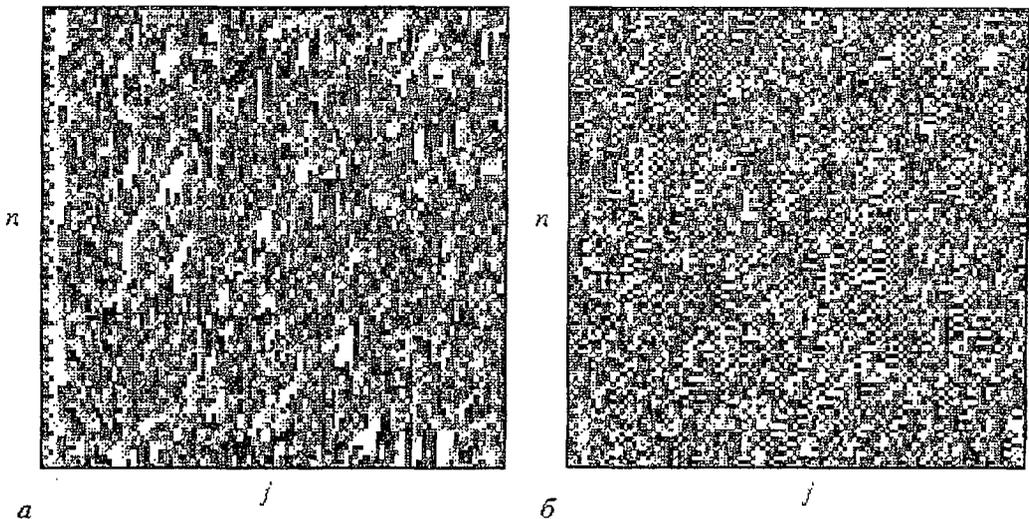


Рис. 7. Диаграммы мгновенных состояний элементов цепочки: а – пространственно установившегося режима СНА (область 5, рис. 5); б – пространственно установившегося режима хаоса (область 6, рис. 5)

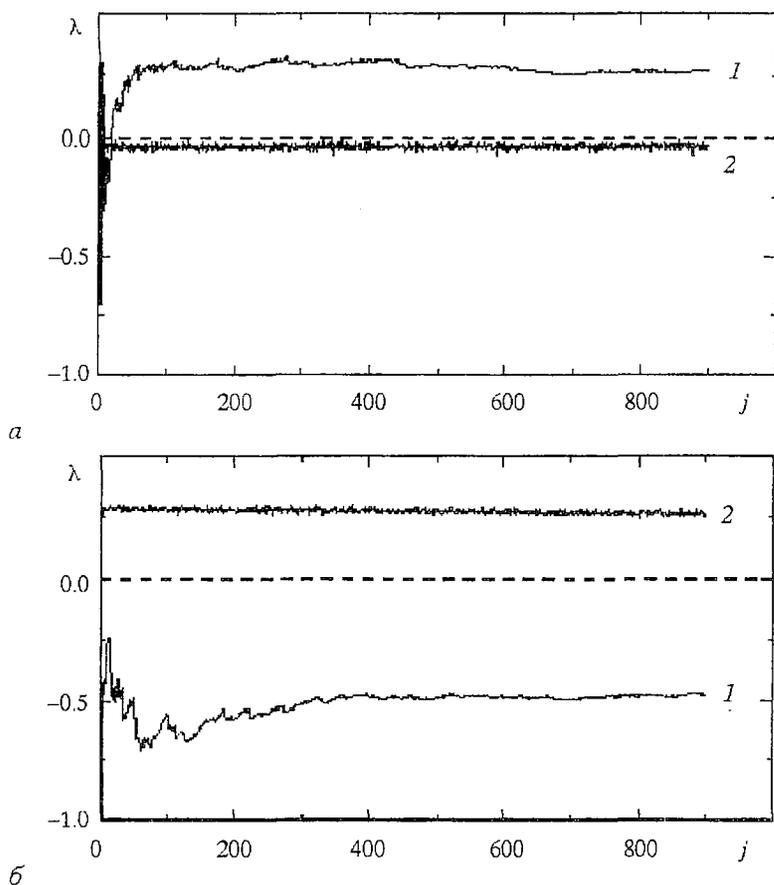


Рис. 8. Зависимости ляпуновских показателей λ_j (линия 2) и λ_s (линия 1) от j , полученные при $K=2.0$, $\Omega=0.5$, $A=0.15$, $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$ и различных значениях параметра связи γ : а – $\gamma=0.2$ (вче области пространственной неустойчивости); б – $\gamma=0.4$ (в области неустойчивости)

$$\lambda_s(j) = (1/j) \ln |\mu_j(j)|.$$

Для небольших j значение $\lambda_s(j)$ зависит от выбора начального состояния звеньев цепочки, но с ростом пространственной координаты такая зависимость пропадает. Если вдоль цепочки устанавливается $\lambda_s(j) > 0$, это означает, что возмущение состояния растет вдоль пространственной координаты. На бифуркационной диаграмме область нарастания неустойчивости по j располагается выше отмеченной штриховой линией границы.

В области, где вдоль цепочки устанавливается режим странного нехаотического аттрактора, переход через линию пространственного роста неустойчивости не влечет за собой каких-либо заметных изменений пространственно-временной динамики цепочки. Иначе обстоит дело в области хаоса (область 6, рис. 5).

Выше границы неустойчивости хаотическая динамика развивается только в первых звеньях цепочки, которые характеризуются положительными ляпуновскими показателями (часто положительный ляпуновский показатель имеется только в первом звене цепочки). Последующие звенья просто ретранслируют хаос вдоль цепочки. Соответствующие зависимости ляпуновских показателей λ_j и λ_s от j представлены на рис. 8, а. В цепочке наблюдается стабилизация числа положительных ляпуновских показателей и энтропии Колмогорова (стабилизация хаоса).

Ниже линии неустойчивости собственная хаотическая динамика присуща большинству элементов цепочки. Почти каждое (или даже **каждое**) парциальное отображение вносит вклад в экспоненциальную неустойчивость системы во времени, характеризующуюся положительным ляпуновским показателем λ_j . Зависимости обычного ляпуновского показателя (линия 2) и показателя λ_s (линия 1) от пространственной координаты j , типичные для хаоса в области пространственной неустойчивости, представлены на рис. 8, б. В цепочке развивается гиперхаос, причем число положительных ляпуновских показателей и суммарная энтропия Колмогорова ($H(j) = \sum_{i=1}^j \lambda_i^+$) линейно увеличиваются с ростом пространственной координаты. Стабилизация хаоса, отмечаемая в [25], в данном случае не наблюдается.

Зависимости энтропии Колмогорова от пространственной координаты в областях хаотической динамики ниже и выше границы пространственной неустойчивости представлены на рис. 9.

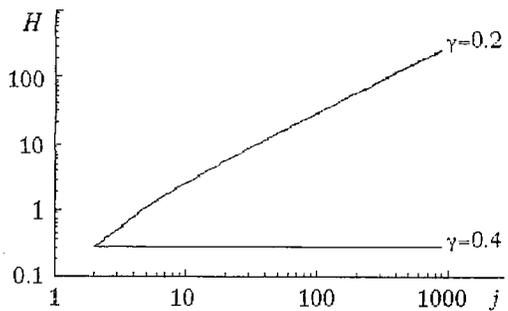


Рис. 9. Зависимость полной энтропии Колмогорова от пространственной координаты в областях хаотической динамики ниже и выше границы пространственной неустойчивости

Заключение

Таким образом, проведенные исследования показали, что для цепочки отображений окружности характерны как явления, уже исследованные на цепочках с другими парциальными элементами (бифуркации удвоения периода и развитие хаоса вдоль пространственной координаты, мультистабильность, насыщение хаоса вдоль цепочки и т.д.), так и новые явления, связанные с возможностью реализации квазипериодических режимов. Задание квазипериодического режима хотя бы в нулевом элементе цепочки (квазипериодическое воздействие) своим типичным следствием имеет возникновение в ячейках цепочки, начиная с некоторого номера j , грубых режимов странных нехаотических аттракторов в широкой области значений параметров. Мы предполагаем, что в любой цепочке однонаправленно-связанных осцилляторов с квазипериодической динамикой наиболее типичным режимом, устанавливающимся с ростом пространственной координаты, наряду с хаосом, является странный нехаотический аттрактор. СНА возникает в результате разрушения квазипериодических движений и, как правило, предшествует переходу к хаосу. Можно предположить, что в среде с однонаправленным взаимодействием режим СНА тоже достаточно типичен.

Работа частично финансировалась на средства гранта Госкомвуза России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66).

Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica. 1984. Vol. 13D. P. 261.
2. Romeiras F.J., Bondeson A., Ott E., Antonsen Th.M., Grebogi C. Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors // Physica. 1987. Vol. 26D. P. 277.

3. Romeiras F.J., Ott E. Strange nonchaotic attractors of the damped pendulum with quasiperiodic forcing // Phys.Rev. 1987. Vol. 35A, № 10. P. 4404.
4. Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // Phys.Rev. 1989. Vol. 39A, № 5. P. 2593.
5. Ding M., Grebogi C., Ott E. Dimension of strange nonchaotic attractors // Phys.Lett. 1989. Vol. 137A. P. 167.
6. Kapitaniak T., Ponce E., Wojewoda J. Route to chaos via strange nonchaotic attractors // J.Phys. 1990. Vol. 23A. P. L383.
7. Kapitaniak T. On strange nonchaotic attractors and their dimensions// Chaos, solutions and fractals. 1991. Vol.1, № 1. P.67.
8. Heagy J.F. and Hammel S.M. The birth of strange nonchaotic attractors // Physica. 1994. Vol. 70D. P. 140.
9. Pikovsky A.S., Feudel U. Characterizing strange nonchaotic attractors. Preprint Nid-002. Universitat Potsdam, 1994.
10. Pikovsky A.S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // J.Phys. 1994. Vol. 27A. P.5209.
11. Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.S. Strange nonchaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map // Physica. 1995. Vol.88D. P.176.
12. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В. Механизмы разрушения странного нехаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием // Изв. вузов, Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, № 3. С.34.
13. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V. Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractor // Phys.Rev. 1996. Vol.53E, № 5. P.4451.
14. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V. Strange nonchaotic attractors in autonomous and periodically driven systems // Phys.Rev. 1996. Vol.54E, № 4. P.3231.
15. Newhouse S., Ruelle D., Takens F. Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m , $m \geq 3$ // Commun.math.phys. 1978. Vol.64. P.35.
16. Rend D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D. Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // Phys.Rev.Lett. 1982. Vol.49, № 2. P.387.
17. Кузнецов С.П. О критическом поведении одномерных цепочек // Письма в ЖТФ. 1983. Т.9, вып. 2. С. 94.
18. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984 Т. 39, вып.12. С.561.
19. Кузнецов С.П. О модельном описании цепочки связанных динамических систем вблизи точки перехода порядок-беспорядок // Изв.вузов. Физика. 1984. Т.27, № 6. С.87.
20. Кузнецов С.П., Пиковский А.С. Универсальность бифуркаций удвоения периода в одномерной диссипативной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 3. С.308.
21. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // Письма в ЖТФ. 1985. Т.12, вып.24. С.1505.
22. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т.286, № 5. С. 1120.
23. Crutchfield J.P., Kaneko K. Phenomenology of spatio-temporal chaos // Direction in chaos. Singapore: World scientific publ. co., 1987.

24. Kaneko K. Spatio-temporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // Physica. 1989. Vol.37D. P.60.

25. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Пространственные структуры в диссипативных средах у порога возникновения хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т.34, № 2. С.142.

26. Kuznetsov S.P. Universality and scaling in two-dimensional coupled map lattices // Chaos, solitons and fractals. 1992. Vol.2, № 3, P. 281.

27. Belykh V.N., Mosekilde E. One-dimensional map lattices: Synchronisation, bifurcations, and chaotic structures // Phys.Rev. 1996. Vol.54E, № 4. P.3196.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
после переработки

5.02.97
25.02.97

DYNAMICS OF THE CHAIN OF COUPLED CIRCLE MAPS WITH QUASIPERIODIC FORCE

T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva

We analyze a spatio-temporal evolution of quasiperiodic regimes in the chain of coupled circle maps. The mechanisms of appearance of strange nonchaotic dynamics and properties of nonregular attractors are investigated.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), аспирантуру на кафедре радиофизики СГУ и защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (1986). В настоящее время является доцентом кафедры радиофизики Саратовского университета. Имеет 27 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



Сосновцева Ольга Владимировна – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Работала инженером в НИИ механики и физики при Саратовском университете (1989–1992). Защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1996) по структурам и свойствам аттракторов неавтономных и связанных динамических систем. Имеет 10 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



СИНХРОНИЗАЦИЯ И ХАОС В МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

Д.Э.Постнов, А.Г.Баланов, В.И.Черняков

Рассматривается микробиологическая система, состоящая из нескольких популяций бактерий и вирусов, связанных между собой через общий источник ресурсов питания. Обсуждается динамика как дифференциальных моделей, так и предлагаемых моделей с дискретным временем. Показано возникновение сложных колебательных режимов за счет свойств связи между осцилляторами с собственной регулярной динамикой. Демонстрируется механизм возникновения пространственной неоднородности стационарных характеристик колебаний в одномерном массиве изучаемых моделей популяций.

Введение

В течение последних десятилетий динамика популяций стала важной дисциплиной математической биологии и одним из интересных разделов нелинейной динамики. С одной стороны, она важна для понимания закономерностей функционирования реальных биологических, микробиологических и экологических систем. С другой – изучение типов моделей и способов связи, характерных для живых систем, служит развитию самой нелинейной динамики.

Модели динамических систем биологического происхождения были в числе первых наглядных примеров рождения хаоса [1–3]. К настоящему времени имеется немало интересных работ, описывающих сложную динамику экологических систем [4–8], физиологические процессы [9–12], модели эпидемий [13–15], микробиологические системы [16,17].

Сам стиль общности подхода, столь характерный для нелинейной динамики как науки, предполагает переход к неким обобщенным моделям, демонстрирующим изучаемый эффект. Де-факто, большинство актуальных задач нелинейной динамики решаются сегодня с использованием ограниченного числа хорошо себя зарекомендовавших модельных систем таких, как уравнения Лоренца, система Ресслера или осциллятор Дуффинга. В большом числе случаев такой подход достаточно адекватен. Однако там, где речь идет о сопоставлении результатов с поведением реальных систем, вопрос о специфике применяемых моделей становится весьма важным. Примером может служить изучение динамики связанных нейронов (для обзора см. [18]). Обилие используемых моделей (порядка 12) говорит само за себя.

Как правило, реалистичный подход к моделированию живых систем требует учета большого числа переменных (например, видов в экосистеме). Кроме того,

большую роль играет адекватный выбор управляющих параметров и диапазона их изменения, поскольку многие из них в живых системах трудноизменяемы или просто недоступны исследователю.

В данной работе мы показываем, как введение биологически обоснованной связи между популяциями с собственной регулярной динамикой приводит к развитию и эволюции хаотических режимов.

Достигнутое на основе исследования дифференциальной модели понимание особенностей функционирования изучаемой системы позволяет записать модельное отображение, реализующее определенный уровень представлений о роли и специфике связи. Сопоставление динамики модели с дискретным временем и результатов исследования дифференциальной модели дает возможность оценить адекватность такого подхода.

1. Модель

В качестве базовой модели мы используем уравнения двухуровневой биологической системы, которые включают в качестве переменных концентрации ресурсов питания, бактерий и вирусов-бактериофагов. Предполагается, что среда обитания представляет собой проточный реактор – хемостат, в котором с одного конца обеспечен непрерывный приток свежего питательного раствора, а с другого – удаление с раствором как неиспользованных ресурсов, так и части бактерий и вирусов. По-видимому, впервые подобная модель микробиологической системы была использована в [17].

Еще в 1950 году в [19] была предложена зависимость, описывающая рост бактерий на питательном растворе,

$$dB/dt = vBS/(S+K), \quad (1)$$

где B и S – концентрации бактерий и питательного раствора, соответственно. Параметр v задает максимальную скорость роста бактерий, когда еды в избытке, а K – концентрацию питательных ресурсов, когда скорость роста составляет половину от максимальной. В этом случае размножение бактерий в хемостате описывается следующими уравнениями:

$$\dot{B} = [vS/(K+S)]B - \rho B, \quad (2)$$

$$\dot{S} = \rho\sigma - \rho S - \gamma BvS/(K+S),$$

где ρ – приток/отток питательного раствора, σ – концентрация поступающего свежего раствора, а γ – параметр потребления раствора бактериями.

Если на колонии бактерий поселяются вирусы, то они с вероятностью α встречаются с бактериями и с вероятностью ω поражают их. В случае заражения бактерия в течение времени τ пребывает в инфицированном состоянии, концентрация таких бактерий – I (если вирус встречается с уже инфицированной клеткой, то сам он погибает). По прошествии времени τ инфицированная клетка разрушается, высвобождая β новых вирусов.

Вышесказанное приводит к следующей системе уравнений:

$$\dot{B} = [vS/(K+S)]B - \rho B - \alpha\omega BP,$$

$$\dot{I} = \alpha\omega BP - \rho I - I/\tau, \quad (3)$$

$$\dot{P} = \varphi - \rho P - \alpha BP - \alpha IP + \beta I/\tau,$$

$$\dot{S} = \rho\sigma - \rho S - \gamma BvS/(K+S),$$

где концентрация вирусов обозначена через P , а φ – некоторое небольшое начальное их количество.

В данной работе мы использовали типичные значения параметров, взятые из работ [16,20], $\nu=0.024$ мин⁻¹, $\gamma=0.01$ нг, $K=10$ мкг/мл, $\omega=0.8$, $\tau = 30$ мин, $\beta=100$.

Параметр $\varphi=10^{-6}$ мл⁻¹мин⁻¹, характеризующий попадание в реактор вирусов из внешней среды, был выбран достаточно малым. Концентрации B , I , P были нормированы на 10^6 мл⁻¹. По этой причине взамен типичного значения 10^{-9} мл/мин было использовано $\alpha=10^{-3}$ мл/мин.

На базе уравнений (3) могут быть рассмотрены случаи различной конфигурации исследуемой микробиологической системы. Так, в [16] рассмотрен случай, когда несколько популяций бактерий разного вида конкурируют в борьбе за общий источник питания. Подобная модель демонстрирует так называемую «хаотическую иерархию», когда увеличение числа конкурирующих популяций сопровождается ростом порядка гиперхаоса – увеличением числа положительных ляпуновских показателей.

В рамках данной работы мы исследуем другой практически важный случай – последовательную связь через потребляемые ресурсы, которая может быть отнесена к так называемой «food chain» – цепи питания. В этом случае количество получаемых популяцией ресурсов питания определяется деятельностью другой популяции (или нижестоящего вида в сложной экосистеме). Применительно к системе (3) достаточно модифицировать последнее уравнение

$$\begin{aligned} dB_i/dt &= \nu B_i S_i / (S_i + K) - B_i (\rho - \alpha \omega P_i), \\ dI_i/dt &= \alpha \omega B_i P_i - \rho I_i - I_i / \tau, \\ dP_i/dt &= \varphi - P_i [\rho + \alpha (B_i + I_i)] + \beta I_i / \tau, \\ dS_i/dt &= \rho (S_{i-1} + \sigma_i - S_i) - \gamma \nu B_i S_i / (S_i + K). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь индекс $i=1 \dots N$ обозначает номер популяции в исследуемой структуре, а член $(S_{i-1} + \sigma_i)$ задает структуру получаемого ею потока питательных ресурсов.

Система (4) описывает динамику N последовательно соединенных хемостатов, когда единый поток питания используется для поддержания жизнедеятельности нескольких популяций (считается, что уносимые потоком из каждой популяции бактерии и вирусы отфильтровываются). Другая возможная интерпретация структуры связи в (4) – пространственно протяженная экосистема в виде цепи озер, соединенных протоками. В этом варианте σ_i описывает количество пищевых ресурсов, попадающих непосредственно в i -ое озеро.

Итак, мы имеем дело с моделью, достаточно типичной для биологических и экологических систем, в которой парциальная подсистема обладает всеми чертами уравнений типа хищник–жертва, а способ связи отражает специфику реальных систем. В частности, уровень связи всегда конечен по причине того, что популяция не может израсходовать ресурсы полностью. Кроме того, несмотря на формально аддитивное включение переменной S_{i-1} предыдущей популяции в модель (4), связь управляет неким эффективным параметром возбуждения парциальной подсистемы, влияя на процессы возбуждения или подавления колебаний.

2. Динамика дифференциальных моделей

2.1. Динамика популяции бактерий при внешней модуляции потока питания. Возможное поведение единичной популяции (3) сводится либо к состоянию равновесия, либо к предельному циклу при $\sigma > 7.0152$. Неавтономный случай представляет собой минимальное усложнение модели одной популяции, приводящее к появлению сложной динамики. Предположим, что источник питания периодически отключается от хемостата. Концентрация питательного субстрата на входе при этом скачком меняется от некоторого значения σ до 0 (и наоборот). Как

оказалось, этого достаточно для появления каскада бифуркаций удвоения и хаотических режимов в широком диапазоне значений частоты модуляции.

Ниже детально рассмотрен более общий случай гармонической модуляции входной концентрации σ

$$\sigma = \sigma_0 \{1 - 1/2 m [1 + \sin(\Omega t)]\}, \quad (5)$$

где Ω – частота модуляции. Выражение (5) задает изменение $\sigma(t)$ в диапазоне от $(1-m)\sigma_0$ до σ_0 . Таким образом, параметр m определяет амплитуду переменной компоненты $\sigma(t)$ с учетом того, что в отсутствие модуляции ($m=0$)

$$\sigma(t) \equiv \sigma_0. \quad (6)$$

При этом, поскольку $\sigma(t)$ всегда неотрицательна, то должно выполняться соотношение $0 \leq m \leq 1$.

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1, где приведена бифуркационная диаграмма устойчивых колебательных режимов на плоскости параметров (Ω, m) . Для малых m наблюдаемая картина вполне соответствует классическому случаю неавтономного осциллятора при слабой связи [21]. При вариации Ω здесь наблюдаются сменяющие друг друга области сильных и слабых (на рисунке не показаны) резонансов. Однако при увеличении m до значений $m > 0.2$ вскрывается сложная структура сосуществующих регулярных и квазипериодических движений.

Повторяющаяся бифуркационная структура областей синхронизации схематично приведена на рис. 2. Как можно видеть, для малых m граница существования синхронного режима ограничена линиями седло-узловых бифуркаций SN_1 и SN_2 . Однако левая граница области синхронизации при этом не является обычным переходом от резонансного тора к эргодическому, поскольку последний существует и справа от SN_1 .

В целом структура рис. 2 сформирована линиями седло-узловых и «седло-седловых» (седло-узловая бифуркация для уже седловых циклов) бифуркаций трех циклов. Всюду седловой цикл C_s существует внутри треугольной зоны. Цикл C_1 устойчив выше линии бифуркации рождения тора T_2 и исчезает, сливаясь с C_s на линии SN_1 . «Посторонний» цикл C_2 (синхронный режим для предыдущего, более низкочастотного резонанса) устойчив выше линии T_2 и исчезает, сливаясь с C_s на линии SN_3 как устойчивый и на линии SSN_1 как дважды

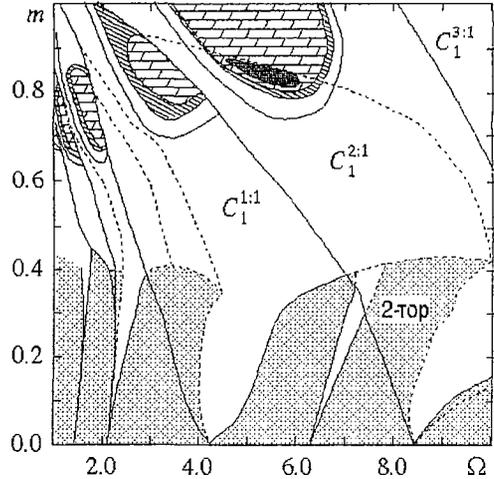


Рис. 1. Диаграмма режимов для неавтономной модели популяции бактерий. Штриховые линии ограничивают области сосуществующих режимов

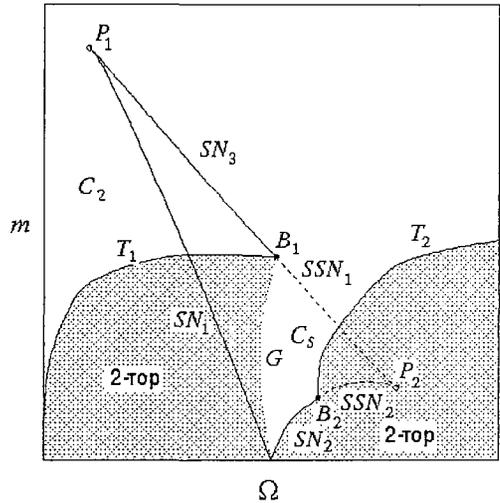


Рис. 2. Типичная бифуркационная структура области синхронизации. SN_i – линии седло-узловой бифуркации; SSN_i – линии той же бифуркации для пары из седлового и дважды седлового циклов; T_i – линии бифуркации рождения тора; G – линия нелокальной бифуркации (гетероклиническое касание); $P_{1,2}$ – точки вершины сборки (трехкратное равновесие); $B_{1,2}$ – точки Такемы – Богданова (два мультипликатора цикла равны единице)

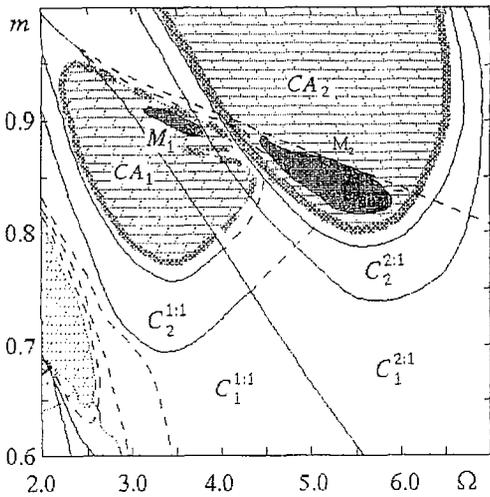


Рис. 3. Детальная структура режимов в области больших m (увеличенная область бифуркационной диаграммы на рис. 1). $M_{1,2}$ - зоны метастабильного хаоса (см. текст)

седловой. Линия SSN_2 соответствует слиянию и исчезновению цикла C_s как седлового и C_1 как дважды седлового. Вся структура в целом дополняется двумя точками вершин структур типа сборки (P_1 и P_2) в углах треугольной области, а также так называемыми точками Такенса - Богданова B_1 и B_2 , в которых цикл имеет два единичных мультипликатора. Линия G соответствует нелокальной бифуркации появления гетероклинической траектории. Здесь двумерный тор, сосуществующий в этой области с циклами C_1 и C_s , касается границы своей области притяжения, которая представляет собой устойчивое многообразие C_s . При этом инвариантная кривая его сечения размыкается, и тор перестает существовать, как таковой. Заметим, что область, образованная линиями SSN_1 , SSN_2 и T_2 , соответствует трехмерному тору, поскольку

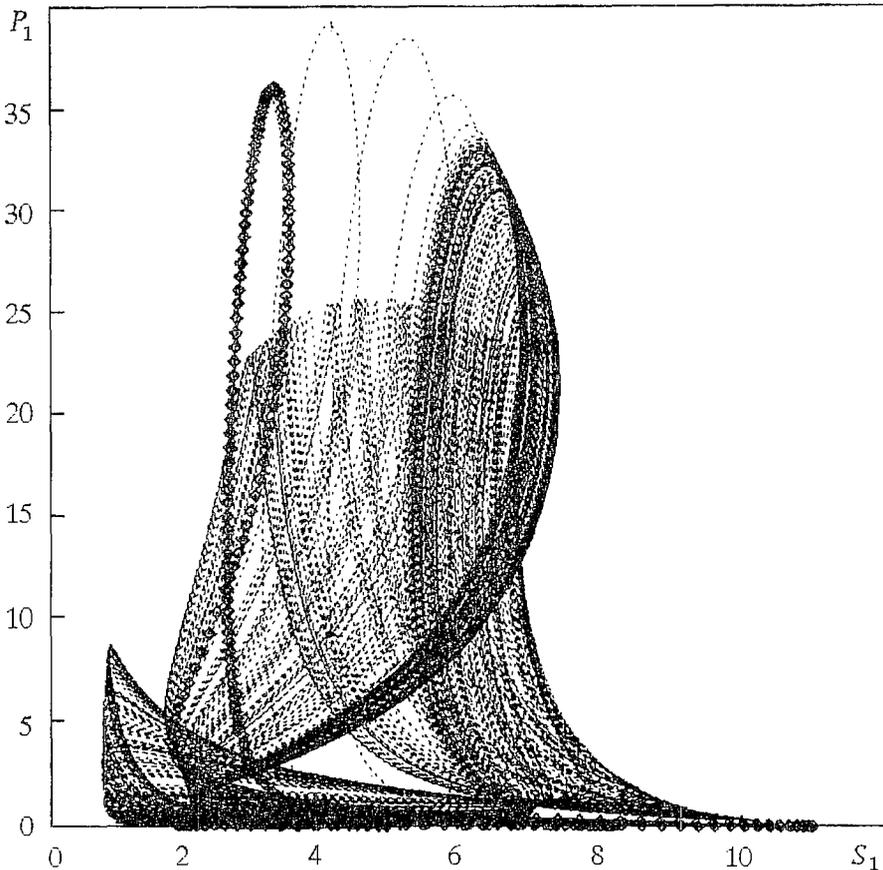


Рис. 4. Метастабильный хаос - после долгого вращения на потерявшем устойчивость хаотическом множестве траектория выходит на регулярный режим (выделен ромбами)

резонансный двумерный тор (на поверхности которого лежат C_1 и C_s) продолжает существовать, в то время как новая бифуркация рождения тора происходит на T_2 .

Мы наблюдали описанную выше структуру для нескольких областей наиболее сильных резонансов. Базируясь на ряде работ по исследованию систем химического происхождения типа реакции–диффузии [22–25] или модели регуляции инсулина в человеческом организме [12], можно заключить, что подобный способ устройства резонансных зон в области сильной связи является типичным для систем химического или биологического происхождения. В нашем случае специфично расположена линия G гетероклинической бифуркации. По этой причине классический вариант структуры языка Арнольда не наблюдается даже при предельно малой глубине модуляции m .

Зоне больших m на диаграмме рис.1 соответствуют перекрывающиеся области бифуркаций удвоения периода и хаотических режимов. На рис. 3 приведена детальная диаграмма небольшой области вблизи резонансов 1:1 и 2:1. Хорошо видно, что два каскада удвоений на базе циклов $C_1^{1:1}$ и $C_1^{2:1}$ и соответствующие хаотические режимы лежат на разных «листьях» структуры типа сборка. Нас будут интересовать области M_1 и M_2 . На их границе «распухание» хаотического аттрактора при вариации управляющего параметра приводит к нелокальной бифуркации, связанной с касанием аттрактором области своего притяжения. При этом, подобно рассмотренному выше случаю для двумерного тора, хаотическое множество перестает быть притягивающим. Таким образом, зоны M_1 и M_2 на рис. 3 могут трактоваться как «дырки» в поверхности сборки. В отличие от случая квазипериодического режима, траектория может оставаться на уже потерявшем устойчивость хаотическом множестве неопределенно долгое время – случай так называемого «метастабильного хаоса» [26]. Подобная ситуация иллюстрируется рис. 4. Интересно, что в масштабе времени исходной микробиологической системы подобный, в сущности, переходный процесс может длиться месяцы или даже годы, после чего концентрации бактерий и вирусов выйдут на устойчивый колебательный режим с примерно суточной периодичностью.

2.2. Динамика двух связанных популяций. Рассмотренный выше случай неавтономной модели динамики популяций вирусов и бактерий важен для понимания возможных путей возникновения типичных колебательных режимов (в особенности сложных). Однако лишь часть из них имеет отношение к исходной микробиологической системе. В этом разделе мы рассматриваем более реальный случай, а именно, модель двух связанных по потоку питания популяций.

Для этого в (4) достаточно положить $N=2$, $S_0=0$. При этом σ_1 и σ_2 характеризуют количество ресурсов питания, получаемых непосредственно каждой из популяций. Полученные результаты представлены на рис. 5, где на плоскости параметров (σ_1, σ_2) представлена бифуркационная диаграмма основных режимов рассматриваемой системы. Здесь может быть выделено четыре основных зоны.

При достаточно малых σ_1 и σ_2 обе популяции достигают состояния равновесия, поскольку количество ресурсов питания недостаточно для возбуждения колебаний. Линия H_1 соответствует бифуркации Андронова – Хопфа. На ней возникают автоколебания во второй популяции, тогда как парциальный режим первой остается прежним. По этой причине область параметров справа от H_1 и ниже линии T_1 соответствует единственному предельному циклу. С точки зрения восьмимерного фазового пространства это значит, что фазовая траектория «вложена» в четырехмерное подпространство. Заметим, что влияние первой популяции все же проявляется в зависимости бифуркационного значения σ_1 от σ_2 , поскольку даже находясь в равновесии, первая популяция потребляет некоторое количество ресурсов, остаток от которых добавляется к σ_2 .

Линия T_1 соответствует рождению тора. При $\sigma_1 \approx 7.0152$ выполняются

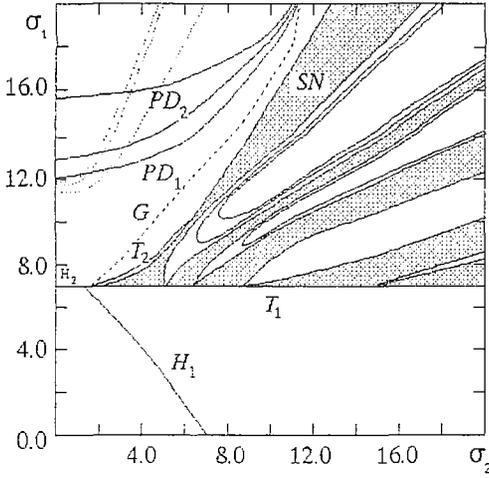


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма для модели двух связанных популяций: H_1 – линии бифуркации Хопфа; PD_i – линии бифуркации удвоения; T_i – соответствует бифуркациям рождения тора; G и SN – линии нелокальной бифуркации гетероклинического касания и седло–узловой бифуркации, соответственно

условия возбуждения автоколебаний во второй популяции. Как результат, в системе в целом возникает квазипериодический режим. Заметим, что в автономной популяции период колебаний практически линейно зависит от σ . В соответствии с этим на линии T_1 берет начало счетное множество резонансных областей, наиболее крупные из которых приведены на рис. 5. Как само наличие этих областей, так и последовательность бифуркаций удвоения внутри них представляются достаточно ожидаемыми в подобной системе в соответствии с результатами предыдущего раздела. По этой причине сконцентрируем свое внимание на области основного резонанса, которая имеет качественно отличную структуру.

Эта область опирается на линию H_2 , которая соответствует бифуркации Андронова – Хопфа в первой популяции. Вследствие однонаправленного характера связи, родившиеся там колебания играют роль внешнего воздействия для второй популяции (для

$\sigma_1 < \sigma_0$ она будет вести себя как передемпфированный осциллятор). Однако при достаточно больших σ_1 становятся возможными собственные колебания и во второй популяции. В результате, в большей части области синхронизации существуют как минимум два цикла периода один, а при $\sigma > 11.5$ можно обнаружить соответствующие каскады удвоения периода. Два из них изображены на рис. 5. Важно отметить, что наблюдаемая ситуация в корне отличается от хорошо известного случая мультистабильности при взаимодействии систем с удвоениями, когда многообразие возможных синхронных режимов определяется различными вариантами «зацепления» фаз колебаний [27–29]. Напротив, здесь сосуществуют режимы, близкие по конфигурации и расположенные в фазовом пространстве весьма схожим образом (рис. 6).

Можно видеть, что структура основной области резонанса в исследуемом случае весьма далека от классической. Так, в основании этой области лежит конечной длины отрезок линии бифуркации Хопфа. Структура границы этой области также весьма своеобразна. Для $\sigma_1 < 10.0$ при возрастании σ_2 синхронный периодический режим теряет устойчивость через бифуркацию рождения тора на

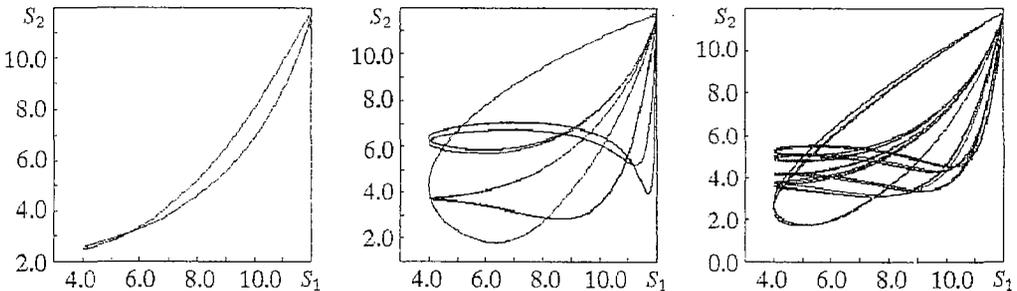


Рис. 6. Три сосуществующих решения для $\sigma_1=12.03$, $\sigma_2=0.0$

линии T_2 , а затем исчезает, сливаясь с седловым циклом. Для достаточно больших σ_1 граница области синхронизации имеет характер, уже обсуждавшийся в предыдущем разделе: устойчивый периодический режим исчезает, сливаясь с седловым циклом, однако тор сосуществует с ним в некоторой области параметров и исчезает через гетероклиническую бифуркацию на линии G рис.5.

3. Модели с дискретным временем

Результаты предыдущего раздела убеждают в том, что даже в случае весьма несложной динамики парциальной подсистемы (устойчивый предельный цикл либо состояние равновесия) исследуемый тип связи приводит к разнообразным квазипериодическим и хаотическим режимам уже в случае двух популяций. Заметим, что воздействие на популяцию (осциллятор) осуществляется через модуляцию единственного параметра: количество поступающих ресурсов питания. По этой причине представляется интересным описать особенности динамики изучаемой системы с помощью простейших отображений, опираясь на качественное описание характера взаимодействия популяций. Особенное значение такой подход [30] приобретает при рассмотрении структур, состоящих из значительного числа популяций, когда высокая размерность дифференциальной модели резко затрудняет детальное численное исследование. Кроме того, подобная упрощенная модель неизбежно носит обобщенный характер, что позволяет оценить типичность наблюдаемых эффектов.

3.1. Построение модельного отображения. Построение модели с дискретным временем основано на том, что каждая популяция может рассматриваться в качестве квазигармонического осциллятора, характеристики колебаний которого (частота и амплитуда) определяются средней концентрацией поступающих ресурсов питания. Данное предположение не в последнюю очередь основано на том, что объем хемостата играет роль интегратора, усредняя во времени входную концентрацию. Взаимодействие квазигармонических осцилляторов традиционно описывается моделями с дискретным временем типа отображения окружности [31]. В нашем случае, однако, как взаимная расстройка по частоте, так и сила взаимодействия косвенно определяются соотношением общих потоков питательных ресурсов и амплитуд колебаний в связанных популяциях.

Определим общее количество ресурсов f^i , получаемых i -ой ($i=1, \dots, N$) популяцией, через рекуррентное соотношение

$$f^i = \sigma^i + r f^{i-1} - a^{i-1}/2, \quad (7)$$

где учтено, что концентрация ресурсов питания на выходе каждой популяции есть входная концентрация, уменьшенная на величину, определяемую как среднее от размаха колебаний концентрации в хемостате (в приближении квазигармонических колебаний это и есть $a^i/2$). Коэффициент $r \leq 1$ отражает тот факт, что популяция потребляет некоторое количество питательных ресурсов и в том случае, когда их количество недостаточно для возбуждения автоколебаний ($a^i=0$). При исследовании автоколебательных режимов положим $r=1.0$.

В общем виде зависимость амплитуды колебаний в подсистеме от f^i может быть задана отображением вида

$$a_{n+1}^i = f^i A(a_n^i), \quad (8)$$

где функция последования A должна отвечать следующим условиям.

1. При малых $f^i < f_{cr}^i$ отображение (8) должно иметь единственную устойчивую неподвижную точку в нуле $a_n^i=0$ (колебания концентрации вирусов и бактерий отсутствуют).

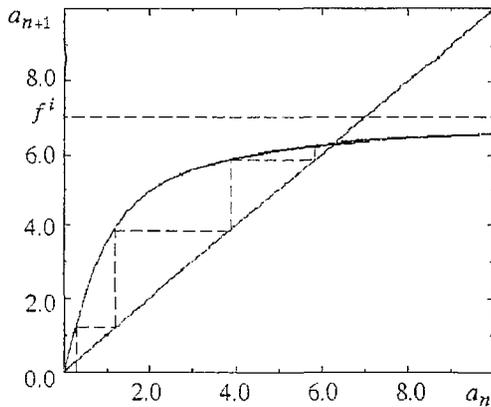


Рис. 7. Вид функции последования $A(a_n)$ для отображения амплитуд в модели с дискретным временем (12)

2. При превышении порога $f^i > f_{cr}^i$ рождается единственная (кроме нулевой) всюду устойчивая неподвижная точка $a_n^i > 0$, что соответствует наличию в популяции устойчивых периодических колебаний.

3. При больших значениях притока питательных ресурсов размах колебаний в системе ограничивается величиной f^i , $\lim_{f_i \rightarrow \infty} a_n^i = f^i$.

Указанным выше условиям удовлетворяет выбор

$$A(a_n^i) = (2/\pi) \arctan(a_n^i). \quad (9)$$

Отображение для амплитуды колебаний при этом принимает вид, показанный на рис.7.

Величина расстройки по частотам между популяциями Ω^i может быть введена из соображения близости к линейной зависимости частоты колебаний от величины f^i . Тогда

$$\Omega^i = \beta(f^i - f^{i-1}), \quad (10)$$

где β – масштабный коэффициент.

Наконец, параметр связи K^i разумно принять пропорциональным «глубине модуляции» поступающего в популяцию потока питания, которая выражается соотношением (11) с масштабным коэффициентом γ

$$K^i = \gamma a^{i-1} / f^i. \quad (11)$$

Теперь можно записать отображение для взаимной фазы ϕ двух соседних популяций

$$\begin{aligned} f_n^i &= \sigma^i + r f_n^{i-1} - a_n^{i-1} / 2, \\ a_{n+1}^i &= (2/\pi) f_n^i \arctan(a_n^i), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\phi_{n+1}^i = \phi_n^i + \beta(f_n^i - f_n^{i-1}) + \gamma[a_n^{i-1} / (2\pi f_n^i)] \sin(\phi_n^i) \bmod{2\pi}.$$

Совокупность выражений (12) задаст модель с дискретным временем, описывающую динамику i -ой популяции бактерий и вирусов, связанной с $(i-1)$ -ой популяцией общим потоком питания. Фактически построенное отображение отражает динамику однонаправленно связанных существенно неизохронных осцилляторов с относительно «слабой» нелинейностью. Разумеется, использованные нами предположения о свойствах единичной популяции и особенностях связи носят весьма обобщенный характер. По этой причине такая модель не претендует на детальное описание режимов функционирования исходной микробиологической системы. Однако представляется интересным выяснить, в какой мере именно такой подход способен отразить характерные особенности динамики изучаемых систем.

3.2. Динамика модели с дискретным временем для случая двух популяций. Случай двух связанных популяций реализуется системой (12) при условиях $N=2$, $a_0=0$, $f^0=0$. Поскольку в уравнениях присутствуют два масштабных коэффициента γ и β , первоочередной задачей является их выбор в соответствии с целью моделирования (4). Будем использовать как опорную информацию набор

колебательных режимов, наблюдаемый в случае $\sigma_2=0, \sigma_1=0 \dots 20.0$.

На диаграмме рис. 8 приведены результаты исследования отображения (12) на плоскости параметров (β, σ_1) . Очевидно, выбор различных значений β соответствует изменению степени неизохронности исходной модели популяции (осциллятора). Большим значениям β (большая расстройка частот) при увеличении σ_1 соответствует переход к квазипериодическому режиму Q . Значение $\beta=0.0397$ соответствует точке бифуркации коразмерности 2 – это вершина сборки, наличие которой отражает факт сосуществования двух семейств циклов, включая каскады удвоений и хаотические режимы на их базе. Очевидно, с учетом результатов раздела 2, случаю исследуемой дифференциальной модели более соответствует $\beta < 0.0397$. Наблю-

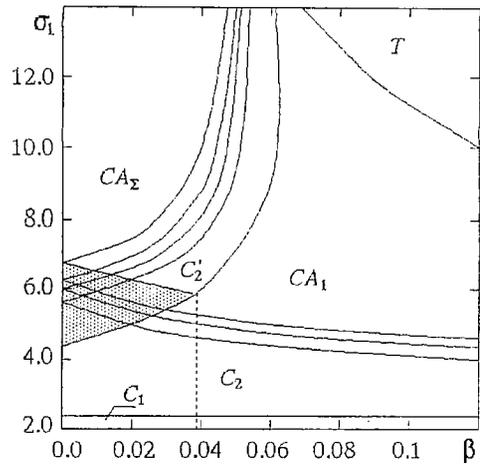


Рис. 8. Основные режимы динамики отображения (12) в плоскости параметров (β, σ_1) для $\gamma=14.0$: C_i – i -тактные циклы; штриховкой выделена область сборки, в которой сосуществуют два семейства режимов на базе C_2 и C_2' ; CA_Σ – объединенный аттрактор на базе обоих семейств

даемые при вариации σ_1 режимы отображены на однопараметрической диаграмме рис. 9, а, построенной в полярных координатах (a_2, φ_2) . Такое отображение динамики системы представляется достаточно удобным, поскольку a_2 монотонно растет с увеличением управляющего параметра σ_1 , а локализация точек на окружности позволяет наглядно оценить структуру режима. Как можно видеть, увеличению σ_1 от 0 до 6.05 отвечает эволюция синхронных периодических режимов, включающая каскад бифуркаций удвоения и рождения хаотического аттрактора, локализованного на небольшой части окружности. Эволюция этого семейства завершается потерей устойчивости хаотическим режимом и «переключением» системы на другое семейство, существующее при значениях $\sigma_1 \geq 4.49$. При $\sigma_1 > 7.05$ хаотический режим захватывает области (по фазе φ_2) обоих

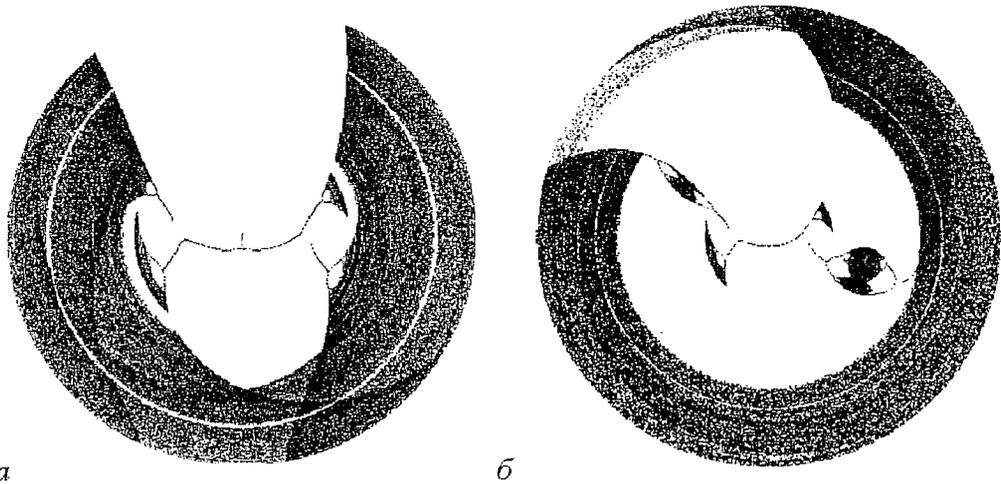


Рис. 9. Однопараметрические диаграммы в полярных координатах (a_2, φ_2) для $\beta=0.03$: а – $\gamma=14.0$, б – $\gamma=13.0$

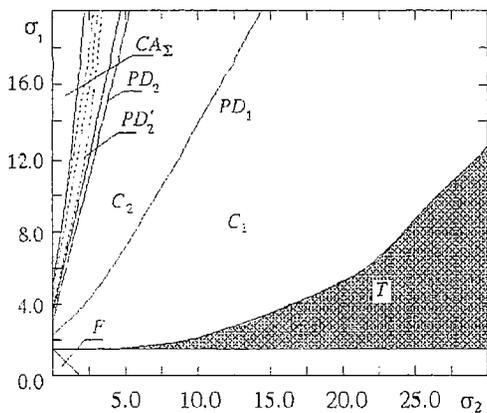


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма для дискретной модели двух связанных популяций. Серым цветом выделена область существования квазипериодических решений (многочисленные области резонансов не показаны). PD_i и PD'_i определяют линии бифуркаций удвоения на базе сосуществующих семейств циклов

хорошо соответствуют эволюции режимов дифференциальной модели (14) при $\sigma_2=0$. С целью уточнения степени схожести динамики этих двух систем была построена бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (σ_2, σ_1) . Сравнивая рис. 10 и 5, нетрудно убедиться в качественной эквивалентности разбиения плоскости параметров на типы режимов. Так, область F соответствует режиму $a_1=a_2=0$, который соотносится с отсутствием колебаний в обеих популяциях. При $\sigma_1 > 1.5$ в зависимости от σ_2 наблюдаются сосуществующие каскады удвоений, относительно широкая область регулярных режимов периода 1 и 2 или область квазипериодического режима с многочисленными узкими языками резонансов. Интересно, что как для дифференциальной модели, так и для модели с дискретным временем характерно уменьшение порядка резонанса по мере увеличения σ_2 . Этот факт еще раз подтверждает, что основная зона синхронизации не является резонансом 1:1 в привычном понимании.

Итак, сравнение бифуркационных диаграмм систем, построенных на базе дифференциальной модели (4) и отображения (12), позволяет заключить, что бифуркационная диаграмма модели с дискретным временем (12) имеет качественно эквивалентное разбиение плоскости параметров на типы режимов. Это свидетельствует о достаточной корректности предположений, использованных для ее построения.

3.3. Структуры из большого числа популяций. Результаты исследования дискретной модели в случае $N=2$ вселяют оптимизм по поводу возможности моделирования систем, включающих большое число популяций. Однако к этому следует подходить с осторожностью. В приближении (12) квазипериодический или хаотический режим рассматривается как слабая модуляция колебаний популяции. Это позволяет считать, что неавтономная система реагирует именно на среднее количество поступающих ресурсов. Как результат, динамика взаимной фазы ϕ , определяется усредненными характеристиками, а не тонкой структурой сигнала. В итоге модель (12) априори допускает наличие сколь угодно многомерных торов без их разрушения или же гиперхаоса высокого порядка, поскольку для получения временной зависимости фазы ϕ_n для n -ой ячейки необходимо сложить все фазовые сдвиги

семейств, занимая все большую часть окружности.

Таким образом, для выбранных значений параметра γ и β при вариации σ_1 для модели (12) характерно наличие двух сосуществующих семейств регулярных и хаотических режимов, а также жесткий переход к объединенному хаотическому режиму, включающему области обоих семейств. Заметим, что переход к объединенному хаотическому режиму является самостоятельным кризисом, а не эволюцией хаоса на базе удвоений. В доказательство приведем диаграмму для $\gamma=13.0, \beta=0.03$ (рис. 9, б), на которой слабо развитый хаос на базе обоих семейств и объединенный хаотический аттрактор разделены зонами регулярных режимов.

В целом, результаты исследования дискретной модели при $\gamma=14.0, \beta=0.03$

$$\phi_n(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t). \quad (13)$$

Поскольку в уравнениях (12) обратная связь $\phi \rightarrow a_i$ отсутствует, достаточно квазипериодического поведения в каждой ячейке, чтобы размерность результирующего режима могла расти без ограничений!

В случае, рассмотренном в предыдущем разделе, указанная проблема не актуальна, однако для построения моделей более сложной структуры уравнение относительно a_i в (12) должно быть дополнено членом, содержащим ϕ_i .

Исследование такой модифицированной модели представляется весьма интересным в свете задач эволюции многомерных торов и гиперхаотических режимов, однако выходит за рамки данной работы. Ниже мы кратко рассмотрим в приближении (12) другую интересную задачу для случая больших N .

Предположим, что мы имеем бесконечно протяженную цепочку отображений вида (12). Будем считать, что текущее время достаточно велико и в каждой ячейке достигнут установившийся режим, характеризуемый стационарной амплитудой a_i . В этих условиях возможно перейти к отображению по пространственной координате i , где i – номер ячейки в цепочке связанных отображений вида (12).

Для количества питательных ресурсов в $(i+1)$ -ой ячейке согласно (7) имеем

$$f_{i+1} = \sigma + rf_i - a_i/2, \quad (14)$$

где $\sigma_i = \sigma$ принято одинаковым для всех ячеек. В установившемся режиме колебаний с учетом (8) и (9) можно записать

$$f_i = (\pi/2)(a_i/\arctana_i) = F(a_i). \quad (15)$$

Обозначим обратную функцию от $F(a_i)$ через $\Psi(f_i) = F^{-1}(a_i)$ и подставим в (14)

$$f_{i+1} = \sigma + rf_i - \Psi(f_i)/2. \quad (16)$$

Соотношение (16) задает отображение, в котором i соответствует номеру ячейки в цепочке, а f_i описывает установившуюся величину концентрации ресурсов питания. Явный вид $\Psi(f_i)$ нетрудно получить численно.

На рис. 11, а приведен вид функции последования для отображения (16) при трех различных значениях параметра σ , а на рис. 11, б – соответствующие графики 20 итераций при начальном значении $f_0=0$. Можно видеть, что как для достаточно больших, так и для малых σ отображение (16) имеет единственную и устойчивую неподвижную точку. При этом вдоль цепочки достигается стационарное значение

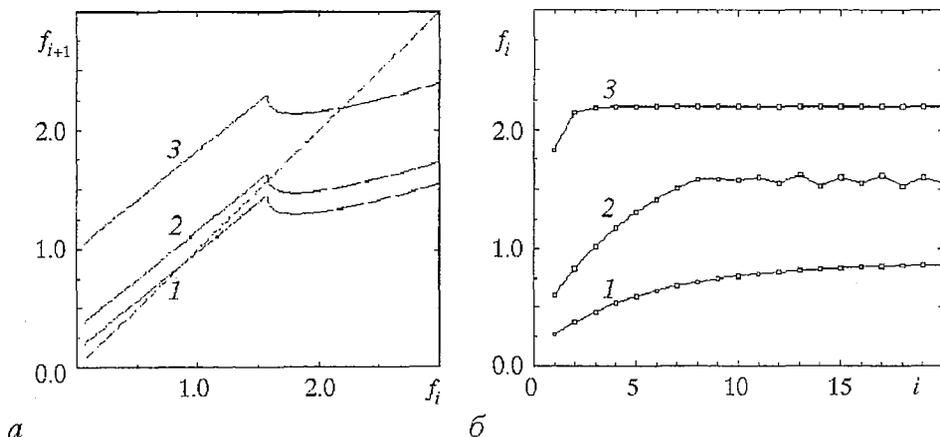


Рис. 11. Вид функции последования (а) и графики 20 итераций (б) для отображения (16) по номеру ячейки i . 1 – $\sigma=0.20$, 2 – $\sigma=0.33$, 3 – $\sigma=1.0$

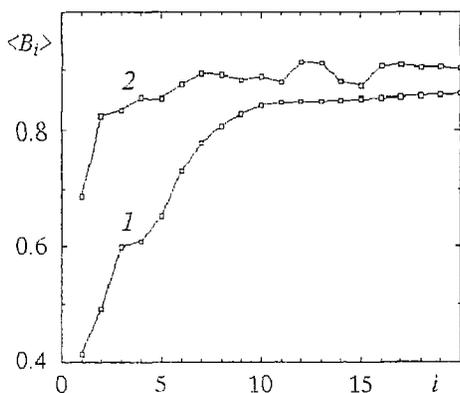


Рис. 12. Изменение средней концентрации бактерий вдоль цепочки из 20 популяций (дифференциальная модель из 80 уравнений). 1 - $\sigma=5.0$, 2 - $\sigma=18.0$

был экспериментально обнаружен в одномерном массиве хаотических осцилляторов с диффузионной связью [32]. Таким образом, отображение (16) демонстрирует неспецифичный для конкретных моделей популяционной динамики механизм. В данном случае особый интерес представляет то, что факт наличия подобного пространственно неоднородного режима следует из достаточно общих предположений о логике функционирования исследуемой системы.

Выводы

В рамках данной работы мы старались показать, к каким особенностям динамики приводит учет специфических черт микробиологических моделей популяций. В рассмотренных случаях такими чертами можно считать существенную неизохронность осциллятора и способ связи подсистем, близкий к параметрической модуляции. Именно эти предпосылки и были использованы при построении модели с дискретным временем. Хорошее качественное соответствие динамики дифференциальной модели (4) и отображения (16) позволяет использовать последнее при решении актуальных задач динамики популяций, а именно: какие режимы функционирования характерны для систем с большим числом компонентов (популяций или видов). Центральными здесь являются проблемы, связанные с путями эволюции многомерных торов или с порядком гиперхаоса.

Авторы выражают свою благодарность профессору Датского Технического университета Е. Mosekilde, сотрудничество с которым инициировало данную работу.

Библиографический список

1. May R.M. Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos // *Science* 186 (1974) 645–667.
2. May R.M. Simple Mathematical Models with very Complex Dynamics // *Nature* 261 (1976) 459–467.
3. May R.M. and Oster G.F. Bifurcations and Dynamical Complexity in Simple Ecological Models // *American Naturalist* 110 (1976) 573–599.
4. Gilpin M.E. Spiral Chaos in a Predator Prey Model // *American Naturalist* 107 (1979) 306–308.
5. Scheffer M. Should We Expect Strange Attractors Behind Plankton Dynamics –

and if so, Should we Bother? // *J. Plankton Res.* 13 (1991) 1291–1305.

6. *Doveri F., Scheffer M., Rinaldi S., Muratori S., and Kuznetsov Y.* Seasonality and Chaos in a Plankton–Fish Model // *Theor. Population Biol.* 43 (1993) 159–183.

7. *Liberth M., Barfred M., and Mosekilde E.* Dynamics of a Food–Web Model of an Aquatic Ecosystem // *Open Systems and Information Dynamics.* 1995.

8. *McCauley E. and Murdoch W.W.* Cyclic and Stable Populations: Plankton as a Paradigm // *American Naturalist.* 129 (1987) 97–121

9. *Kaufman M. and Thomas R.* Model Analysis of the Basis of Multistationarity in the Humoral Immune Response // *J. Theor. Biol.* 129 (1987) 141–162.

10. *Layne S.P., Spouge J.L., and Dembo M.* Quantifying the Infectivity of Human Immunodeficiency Virus // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 86 (1989) 4644–4648.

11. *Nowak M. and May R.M.* AIDS Pathogenesis: Mathematical Models of HIV and SIV Infections // *AIDS* 7 Suppl. 1 (1993) S3–S18.

12. *Sturis J., Knudsen C., O'Meara N.M., Thomsen J.S., Mosekilde E., Van Cauter E., Polonsky K.S.* Phase-locking regions in a forced model of slow insulin and glucose oscillations // *Chaos* 5(1), (1995) 193–199.

13. *Aron J.L. and Schwartz I.B.* Seasonality and Period–Doubling Bifurcations in an Epidemic Model // *J. Theor. Biol.* 110 (1984) 665–679.

14. *Schaffer W.M.* Order and Chaos in Ecological Systems // *Ecology* 66 (1985) 93–106.

15. *Schaffer W.M. and Kot M.* Chaos in Ecological Systems: The Coals that Newcastle Forgot // *Trends in Ecological Evolution* 1 (1986) 58–63.

16. *Baier G., Thomsen J.S., Mosekilde E.* Chaotic hierarchy in a model of competing populations // *J.Theor.Biol.* 163(1993) 593–607.

17. *Levin B.R., Stewart F.M., and Chao L.* Resource–Limited Growth, Competition and Predation: A Model and Experimental Studies with Bacteria and Bacteriophage // *American Naturalist* 111 (1977) 3–25.

18. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суцник М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *УФН.* 1996. Т. 166, № 4. С. 365.

19. *Monod J.* La technique de culture continue: Theorie et applications // *Ann. Inst.Pasteur* 79(1950) 390–410.

20. *Mosekilde E., Stranddorf H., Thomsen J.S., and Baier G.* A Hierarchy of Complex Behaviors in Microbiological Systems // *Cooperation and Conflict in General Evolutionary Processes* / Eds J.L. Casti and A. Karlqvist. John Wiley (1994).

21. *Арнольд В.И., Абрамович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций. Серия: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1986.

22. *Kevrekidis I.G., Schmidt L.D., Aris R.* Some common features of periodically forced reacting systems // *Chemical Engineering Science.* 1986. Vol.41, № 5. P.1263.

23. *Kevrekidis I.G., Aris R., Schmidt L.D.* Forcing an entire bifurcation diagram: case studies in chemical oscillators // *Physica* 23D (1986) P. 391.

24. *Taylor M.A. and Kevrekidis I.G.* Some common dynamic features of coupled reacting systems // *Physica D* 51(1991) P. 274.

25. *Knudsen C., Sturis J., and Thomsen J.S.* Generic bifurcation structures of Arnol'd tongues in forced oscillators // *Phys.Rev A.*1991. Vol. 44(6). P. 3503.

26. *Anishchenko V.S.* Dynamical chaos – models and experiments. Singapore: World Scientific, 1995.

27. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.

28. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // *Радиофизика и электроника.* 1991. № 2. С.338.

29. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Sosnovtzeva O.V., Chua L.O., Wu C.W.* Dynamics of nonautonomous Chua's circuit // *Int.J. Bifurcation and Chaos.* 1995. Vol.5, № 6. P. 1525.

30. *Бутенин Н.Б., Неймарк Ю.И., Фужаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.

31. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.

32. Anishchenko V.S., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Khovanov I.A. Dynamics of the Chain of unidirectional coupled Chua's circuit. Differential Equations: Bifurcations and Chaos // The Abstracts of the School-Conference. Inst. of Math., Ukrainian Ac. Sc. Kiev, 1994. P. 8.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 24.02.97
после переработки 10.04.97

SYNCHRONIZATION AND CHAOS IN POPULATION DYNAMICS MODELS

Postnov D.E., Balanov A.G., Cherniakov V.I.

We consider a microbiological system consisting of several bacteria-virus populations which are coupled via the flow of resources. The behavior of both continuous time mathematical models and discrete time ones is discussed. The origin of complex behavior due to properties of coupling between the oscillators with regular dynamics is illustrated. While studying the one-dimensional array of discrete time population models we reveal the mechanism of rise of spatial inhomogeneity of stationary oscillatory regimes characteristics.



Postnov Дмитрий Энгелевич в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года – инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 25 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



Баланов Александр Геннадьевич – родился в 1973 году. Окончил физический факультет СГУ (1995). Работает инженером на кафедре радиофизики. Область научных интересов – нелинейная динамика и стохастические процессы. Автор 3 научных работ.



Черняков Владислав Игоревич – родился в 1975 году. В 1992 поступил на физический факультет СГУ. В настоящее время является студентом 5 курса, выполняет дипломную работу на кафедре радиофизики.



СИНХРОНИЗАЦИЯ В ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Д.Э. Постнов, А.Г. Баланов

Исследуются связанные динамические системы, сложный хаотический режим каждой из которых может быть охарактеризован набором нескольких характерных времен. Вариация параметров вызывает изменение характерных времен системы и при определенных условиях позволяет наблюдать ряд эффектов, которые могут быть интерпретированы на языке общих представлений о синхронизации хаотических систем как явления согласования временных характеристик процессов. Показано, что понятие захвата может быть применено как к среднему времени пребывания состояния системы в окрестности одной из точек равновесия, так и к времени, характеризующему среднюю скорость дрейфа состояния системы.

Введение

За два последних десятилетия бурное развитие нелинейной теории колебаний, во многом инициированное открытием динамического хаоса, заставило по-новому взглянуть на многие классические эффекты и явления. Одним из наиболее ярких примеров в этой области можно считать эволюцию взглядов на понятие синхронизации, первоначально сформулированное как установление колебаний одинаковой частоты в двух взаимодействующих неидентичных осцилляторах. Продвижение в область более сильной нелинейности привело к расширению понятия синхронизации на гармоники и субгармоники – теперь уже условием синхронности двух колебаний являлось рациональное соотношение их частот. Наиболее общее определение для случая нехаотических режимов можно найти в [1], где в рассмотрение введены как колебательные, так и вращательные движения.

Результаты исследований синхронизации систем с динамическим хаосом заставили взглянуть на проблему с более широких позиций [2]. Поскольку требование кратности частот на новом уровне понимания оказалось трудноприменимым, было предложено под критерием синхронизации понимать установление определенных соотношений между функционалами, отражающими характерные временные свойства рассматриваемых процессов. Стало ясно, что многообразие проявлений синхронизации в хаотических системах требует применения расширенного набора диагностических средств, например, вычисления метрических характеристик аттракторов, анализа их топологии и др. Было найдено, что все характерные черты классических механизмов синхронизации наблюдаются и в случае взаимодействия хаотических седло–фокусных аттракторов [3–6]. В настоящее время детали механизмов синхронизации хаоса,

возникающего в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, для которого характерно наличие четко различимого пика в спектре мощности, продолжают интенсивно исследоваться [7–9].

Однако уже сегодня имеются результаты, позволяющие взглянуть на проблему синхронизации с еще более общих позиций. В [10] обнаружено, что введенное для детерминированных динамических систем понятие захвата частоты может быть с полным правом применено к стохастической системе, проявление нелинейных свойств которой управляется интенсивностью шума. При этом эффект синхронизации внешним периодическим сигналом наблюдается для средней частоты переключений в бистабильной системе, которая даже не отражена пиком в Фурье–спектре. Несколько ранее аналогичный по сути эффект был обнаружен при взаимодействии двух стохастических систем и получил название «стохастической синхронизации» [11].

Совокупность имеющихся на сегодняшний день результатов в определенной степени позволяет вернуться к наиболее общим определениям [1,2], заменив требование кратного соотношения частот на аналогичное для характерных времен изучаемой нелинейной системы, под которыми могут пониматься не только детерминированные величины типа периода предельного цикла, но и статистические по своей сути характеристики типа среднего времени возврата в плоскость сечения Пуанкаре для седло–фокусного хаоса (именно оно определяет положение пика базовой частоты в Фурье–спектре колебаний) либо среднего времени нахождения траектории в одном из метастабильных хаотических режимов [12]. Указанный подход еще раз подтверждает, что синхронизация выступает как весьма общий эффект, в той или иной форме присущий нелинейным системам вне зависимости от конкретного типа их режима функционирования.

В рамках данной работы мы ставим своей целью показать наличие эффекта синхронизации в указанном выше смысле при взаимодействии хаотических систем с несколькими характерными временами, часть из которых вообще не может быть ассоциирована с колебательным либо вращательным (в смысле, использованном в работе [1] движением).

1. Модель

В качестве исходной была выбрана трехмерная модель модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (ГИН) [13–17], богатая и хорошо изученная динамика которой удовлетворяет всем требованиям базовой модельной системы. К тому же, что немаловажно, она имеет адекватный радиофизический аналог.

Запишем уравнения ГИН в обобщенном виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx - zx + Q(y), \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gF(x),\end{aligned}\tag{1}$$

где x, y, z – фазовые переменные, m и g – управляющие параметры, отвечающие за диссипацию и за инерционное ограничение амплитуды, соответственно.

Выбор функций $Q(y)$ и $F(x)$ позволяет существенно менять свойства исследуемой системы. Так, соотношения $Q(y)=y$ и $F(x)=x^2$ задают генератор с инерционной нелинейностью в его классическом варианте [13,14]. Выбор $F(x)=-\chi(x)x^2$ или $F(x)=\exp(x)$ [17] порождает то многообразие регулярных и хаотических типов колебаний автономного генератора, которое и делает ГИН одной из классических моделей с динамическим хаосом.

В общем случае наличие и характер сложных колебательных режимов

определяется свойствами симметрии $F(x)$, тогда как количество и расположение корней $Q(y)$ задает набор состояний равновесия (1).

Представим $Q(y)$ в виде $Q(y)=\alpha P(y)+\beta L(y)$, где $Q(y)$ – периодический компонент, а $L(y)$ – монотонный по y компонент. Тогда набор возможных состояний равновесия системы будет определяться соотношением

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ \alpha P(y) + \beta L(y) &= 0, \\ z &= -F(0). \end{aligned} \quad (2)$$

Задавая вид $P(y)$, $L(y)$ и коэффициенты α , β , можно управлять количеством и расположением состояний равновесия системы. Из общих соображений выберем

$$P(y) = \sin(\nu y), \quad L(y) = y. \quad (3)$$

Тогда случай $\alpha=0$, $\beta=1$ приводит нас к исходной модели ГИН [17]. Произвольные вариации α и β задают набор из $\alpha\nu/\pi\beta$ пар состояний равновесия, локализованных в интервале $y \in [-\alpha/\beta, \alpha/\beta]$. В рамках данной работы мы исследуем случай $\alpha \neq 0$, $\beta=0$. Он соответствует счетному π/ν периодическому множеству состояний равновесия системы (1).

Выбор вида $F(x)$ осуществлялся из соображений максимальной симметрии, сохраняющей сложную динамику системы

$$F(x) = \begin{cases} (a+\varepsilon)x^4, & x \geq 0, \\ (a-\varepsilon)x^4, & x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Мы использовали значения $a=3.1355$, $\varepsilon=1.5845$. Заметим, что полученная в результате модель имеет ясную радиофизическую интерпретацию в виде системы фазовой автоподстройки (ФАП) с автоматической регулировкой усиления (АРУ) в цепи обратной связи (ОС), структурная схема которой приведена на рис.1. В этом случае $F(x)$ отражает неидеальную характеристику двухполупериодного детектора, а g – постоянную времени фильтра цепи АРУ (блок б); $(m-z)$ задает коэффициент передачи инерционного (с конечной полосой пропускания) усилителя в цепи ОС.

Исследованию динамики ФАП посвящено значительное количество работ (см. обзор в работах [18.19]). В том числе продолжается исследование модели со сложной динамикой [20]. Специфический подход к рассмотрению процессов в стохастической нелинейной системе ФАП реализован в [21], где на ее базе экспериментально моделируются задачи нелинейного броуновского движения. В нашем случае комбинация хаотической динамики и счетного множества состояний равновесия порождает особый тип хаотического режима, образование и характеристики которого обсуждаются ниже.

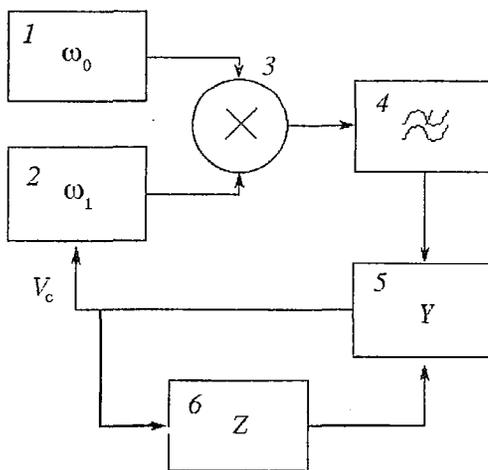


Рис. 1. Блок схема ФАП с усилителем в цепи управляемого генератора: 1 – эталонный генератор, 2 – управляемый генератор, 3 – фазовый детектор, 4 – фильтр низких частот, 5 – усилитель, 6 – цепь обратной связи усилителя, V_c – управляющее напряжение

2. Динамика автономной системы

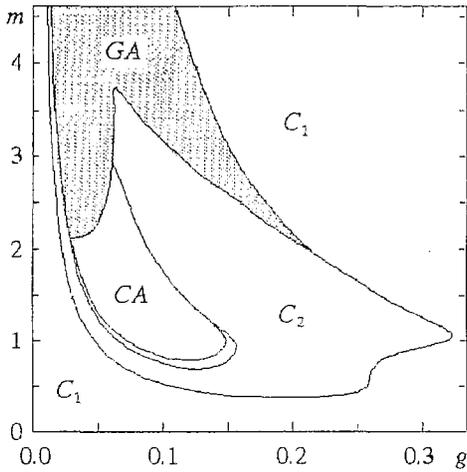


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма парциальной системы: C_1 – область существования однократного цикла, C_2 – двухкратного цикла, CA – хаотического аттрактора, возникшего на базе удвоения, GA – объединенного хаотического режима, характеризуемого дрейфом состояния системы вдоль координаты y . Здесь и далее параметр $\nu=2$

Заметим, что при достаточно больших $\alpha=1/\nu$ функция $\alpha P(y)=\alpha \sin(\nu y)$ близка к линейной в окрестности каждого из состояний равновесия. По этой причине следует ожидать сохранения основных закономерностей динамики [17] с учетом несколько иного выбора $F(x)$. Действительно, для значений $m=0\dots 2.0$, $g=0\dots 0.3$ характерным является наличие бифуркаций удвоения периода и хаотических аттракторов на их базе (рис.2). Заметим, что близкий к симметричному вид $F(x)$ приводит к сосуществованию двух семейств режимов, «опирающихся» на ее левую и правую ветви. В рамках данной работы, однако, нас интересует случай более развитого хаоса, при котором реализуется принципиально иной вид динамики системы.

На рис. 3, *a* приведена фазовая проекция объединенного хаотического аттрактора при $m=4.09$, $g=0.05$, где можно различить два симметрично

расположенные хаотические подмножества, несколько отличающиеся размерами.

При увеличении m хаотический аттрактор «распухает», приближаясь к границам своего бассейна притяжения, который при достаточно малых m имеет однородный, четко ограниченный вид (рис. 4, *a*). При больших значениях m внутри бассейна появляется множество начальных условий, принадлежащее соседним бассейнам притяжения (рис. 4, *b*)

При дальнейшем увеличении параметра структура локального бассейна притяжения еще более фрактализуется, однако притягивающее хаотическое множество еще существует как таковое в окрестности данного равновесия. Наконец, при $m>3.5$ (рис. 4, *z*) единственным устойчивым видом колебаний системы остается сложно устроенный хаотический режим. Типичный вид соответствующей ему фазовой проекции приведен на рис.3,б. Поведение фазовой траектории в этом случае может быть разбито на два вида движений: вращение

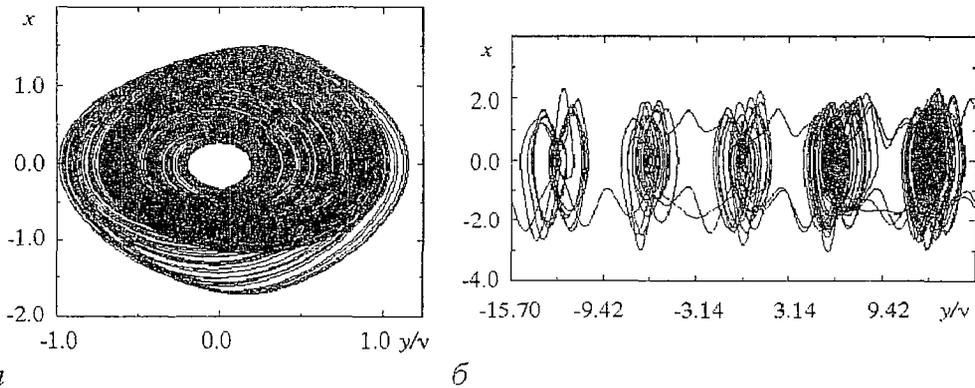


Рис. 3. Фазовые портреты, характерные для системы (1): *a* – хаотический аттрактор, родившийся на базе бифуркаций удвоения; *b* – сложный хаотический режим, характеризуемый дрейфом по переменной y . Здесь и далее $g=0.05$

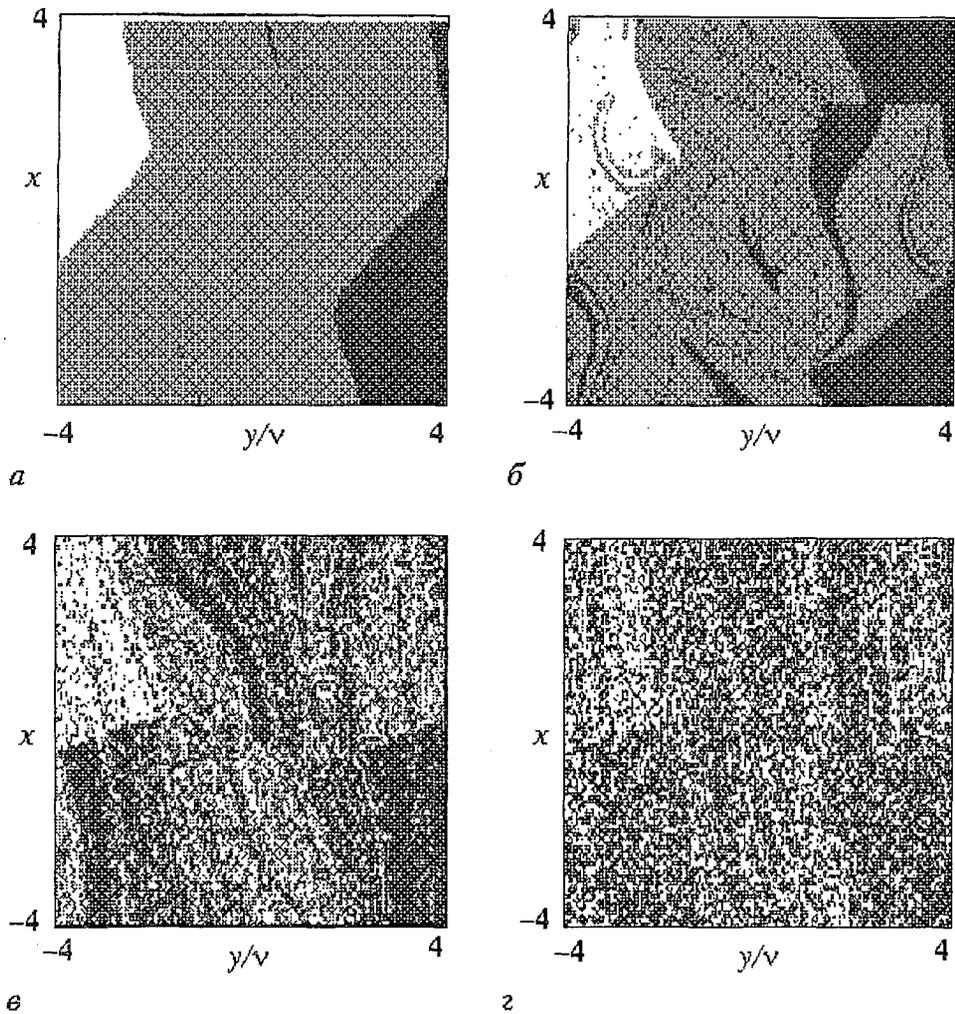


Рис. 4. Бассейн притяжения (серый цвет) хаотического аттрактора в зависимости от параметра m : $a - m=1.8$; $б - 2.5$; $в - 3.5$; $г - 4.2$. С увеличением m возникает и эволюционирует множество начальных условий, приводящих к уходу траектории в окрестность соседних (левого – белый цвет) или правого – черный цвет) состояний равновесия

вокруг одного из состояний равновесия и относительно редкие переходы из одного «бывшего» бассейна притяжения в другой.

Доказательное исследование описанного выше кризиса хаотического режима мы оставляем на будущее, здесь же нас интересуют свойства и возможная интерпретация колебаний в системе при $m > 3.5$. Двум упомянутым выше типам движения можно поставить в соответствие два характерных времени. Одно из них T – среднее время возврата в секущую плоскость $x=0$. Оно характеризует квазипериод колебаний при вращении вокруг локального состояния равновесия O_i . Второе время τ имеет смысл среднего времени пребывания траектории в окрестности O_i .

Заметим, что в силу ненулевой асимметрии $F(x)$ исследуемый хаотический режим нестационарен в том смысле, что переходы в одну сторону более вероятны, чем в другую. Как результат, состояние системы, хаотически переключаясь между окрестностями точек равновесия, медленно дрейфует в сторону увеличения y . Такому движению может быть поставлено в соответствие еще одно, также зависящее от параметров, характерное время системы, связанное со средней скоростью дрейфа $J = \langle \dot{y} \rangle$, которую мы определяем здесь аналогично определению

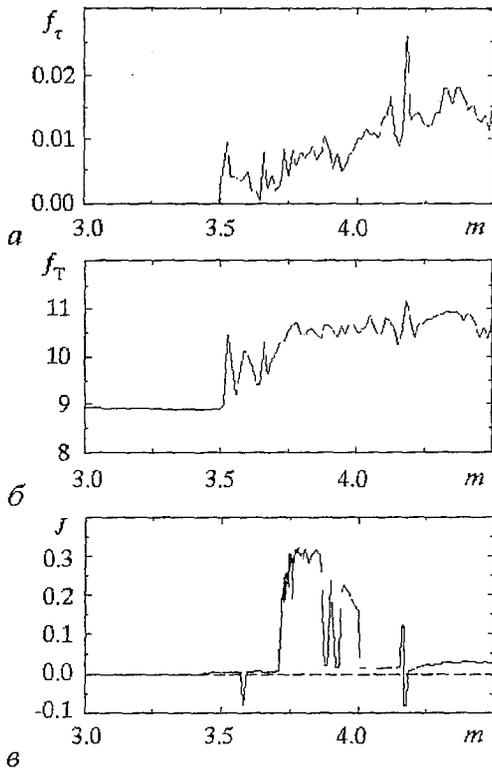


Рис. 5. Зависимость средней частоты переходов из окрестности одного состояния равновесия в окрестность другого (а); средней частоты возврата в секущую плоскость (б); средней скорости движения вдоль координаты y (в) от параметра m

потока вероятности для пространственно периодических стохастических систем [22]¹.

Таким образом, исследуемая трехмерная динамическая модель демонстрирует в широкой области параметров весьма сложный по структуре хаотический режим, в котором, тем не менее, возможно выделить (и измерить!) как минимум три зависящих от параметров характерных времени системы. При численном эксперименте, однако, удобнее пользоваться не временами T , τ , которые для ряда значений параметров исследуемой системы устремляются в бесконечность, а соответствующими частотными характеристиками $f_T=1/T$, $f_\tau=1/\tau$. Изменение указанных величин при вариации m иллюстрирует рис. 5.

Наша дальнейшая задача заключается в выяснении характера взаимодействия этих носящих статистический характер времен в условиях диффузионной связи двух систем типа (1).

3. Динамика двух связанных систем

Введем радиофизически обоснованную связь между двумя системами вида (1) с учетом (3)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= m_1 x_1 - z_1 x_1 + \alpha \sin(\nu y_1) + \gamma(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= -x_1, \\
 \dot{z}_1 &= -g z_1 + g F(x_1), \\
 \dot{x}_2 &= m_2 x_2 - z_2 x_2 + \alpha \sin(\nu y_2) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= -x_2, \\
 \dot{z}_2 &= -g z_2 + g F(x_2),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где γ – параметр связи. С точки зрения моделирования исследуемой системы двумя ФАП, уравнения (5) соответствуют связи через разностный сигнал управляющего напряжения V_c (см. рис.1).

¹ Доводя до логического завершения идею статистического описания подобного хаотического движения, можно записать (1) в виде пространственно периодической потенциальной системы, возбуждаемой коррелированным шумом, роль которого играет собственный хаотический сигнал.

Следуя подходу одной из первых работ по хаотической синхронизации [3], рассмотрим сначала взаимодействие двух идентичных подсистем, для чего достаточно выбрать $m_1=m_2$. В этом случае существует инвариантное подпространство, задаваемое условиями $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$, на котором связанные подсистемы ведут себя тождественно. Наличие аттрактора, лежащего в указанном подпространстве, соответствует полной хаотической синхронизации [23]. В общем случае для решения этой задачи необходимо записать уравнения в разностях (x_1-x_2) , (y_1-y_2) , (z_1-z_2) и исследовать состояние равновесия полученной системы на устойчивость. В нашем случае указанная выше процедура осложняется тем, что состояние системы неограниченно дрейфует по переменной y . По указанной причине как инструмент исследования предпочтительнее численный эксперимент.

К настоящему времени сама возможность появления полностью синхронных хаотических колебаний в идентичных связанных системах не является неожиданной [3,23–25]. Однако исследуемый нами случай имеет существенные особенности. Действительно, как можно видеть из рис. 4, 2, даже небольшое различие в начальных условиях парциальных подсистем может с большой вероятностью приводить к переходам в противоположные стороны. Будут ли с течением времени траектории в проекциях парциальных подсистем сближаться настолько, чтобы все переходы из окрестности одного состояния равновесия к другому происходили синхронно?

На рис. 6 приведена зависимость дисперсии $\sigma_{\Delta y/\nu}^2$ разности координат $\Delta y/\nu$ от степени связи γ . Заметим, что поскольку режим полной синхронизации в нашей системе определен с точностью до постоянного сдвига, необходимо использование дисперсии взамен обычно применяемого [26] среднеквадратичного отклонения. Нормировка y на ν приводит к 2π -периодичности состояний равновесия. Как можно видеть из графика, увеличению степени связи отвечает спад $\sigma_{\Delta y/\nu}^2$. Режим полной синхронизации², $\sigma_{\Delta y/\nu}^2 \approx 0$, достигается при $\gamma > 0.092$. Таким образом, даже в случае полной идентичности связанных подсистем существует некоторое пороговое значение степени связи, ниже которого синхронный режим не достигается. Интересно, что аналогичные результаты получены для стохастического бистабильного осциллятора [10].

Приведенные выше результаты, по сути, не затрагивают проблему соотношения характерных времен взаимодействующих подсистем, поскольку выбором $m_1=m_2$ еще при $\gamma=0$ мы задали $T_1=T_2$, $\tau_1=\tau_2$, $J_1=J_2$. В этом смысле рассмотренная выше задача, являясь наиболее очевидной в плане ее постановки, относится, по сути, к вопросу «второй очереди»: как меняется при увеличении связи поведение подсистем, когда их характерные времена *уже* совпадают? Наиболее же общая постановка вопроса требует задания изначального различия парциальных подсистем, для чего, в соответствии с рис. 5, достаточно выбрать $m_1 \neq m_2$.

На рис.7 приведены результаты такого эксперимента в случае $m_1=4.2$, $m_2=3.85$. Сопоставление изменения характеристик колебаний во взаимодействующих подсистемах при увеличении степени связи позволяет выделить соответствующие уровни хаотической синхронизации.

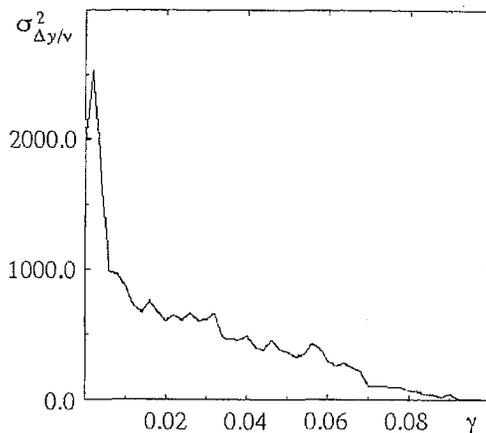


Рис. 6. Квадрат дисперсии величины $\Delta y/\nu$ в зависимости от параметра связи γ (случай идентичных систем)

² Мы использовали условие $\sigma_{\Delta y/\nu}^2 < 0.01$.

При $\gamma > 0.14$ устанавливается $T_1/T_2 \approx 1$ – в окрестности каждой точки равновесия траектории частичных подсистем теперь вращаются с одинаковой частотой. Указанный переход легко диагностируется по виду перекрестной фазовой проекции (рис. 7, а, б), он аналогичен синхронизации седло-фокусного хаоса [5,6,8].

При значениях $\gamma > 0.35$ выравниваются средние скорости дрейфа во взаимодействующих подсистемах $J_1/J_2=1$, однако средние времена пребывания в окрестности состояния равновесия еще не совпадают. Условие их равенства $\tau_1 \approx \tau_2$ выполняется при достижении $\gamma \approx 0.38$ (рис. 7, в).

Однако лишь при $\gamma > 0.6$ достигается синхронизация в смысле $\sigma_{\Delta y/\nu}^2 \approx 0$. Вид логарифмической зависимости $\sigma_{\Delta y/\nu}^2$ от γ приведен на рис. 7, г. Ее характерной

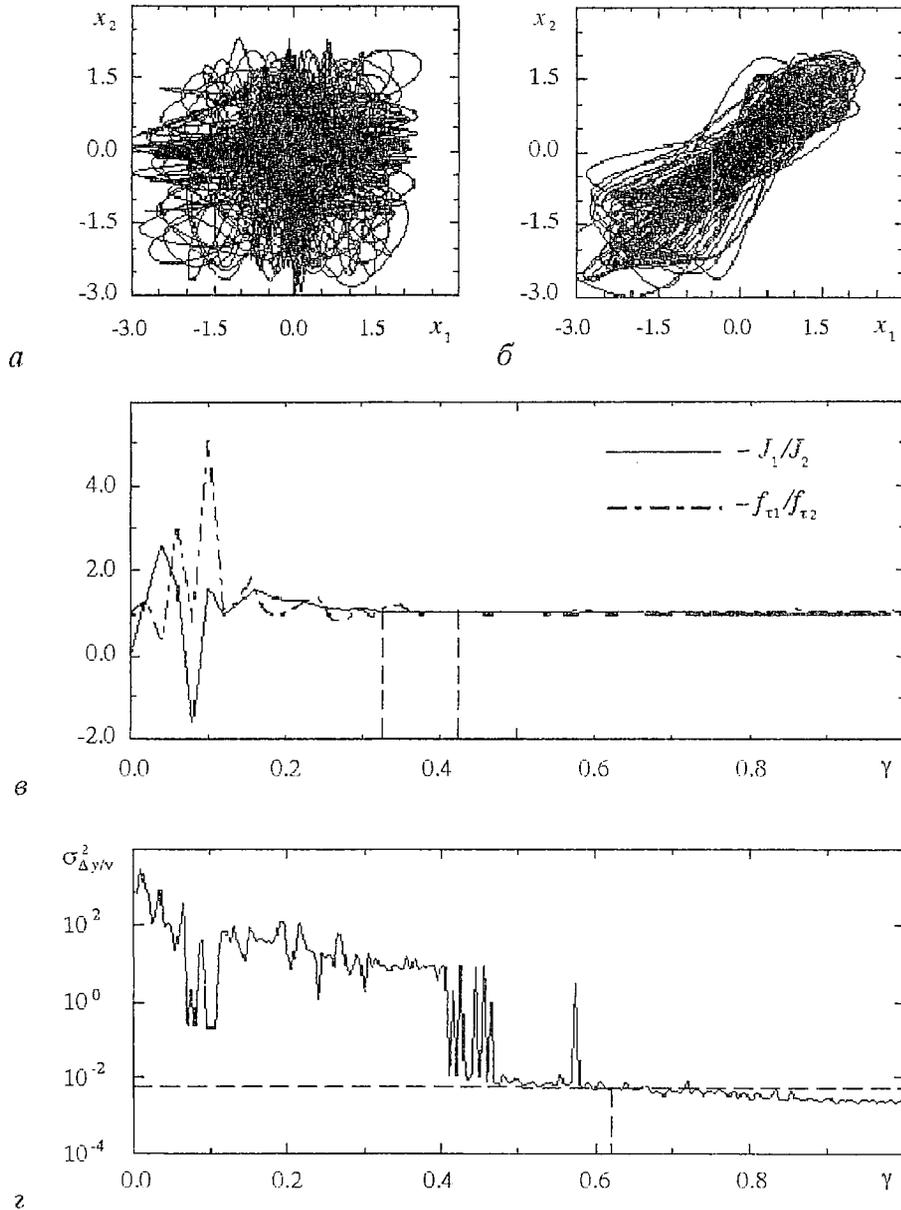


Рис. 7. Взаимодействие временных масштабов в системе с расстройкой $m_1=4.2$, $m_2=3.85$: а, б – перекрестная фазовая проекция в плоскости (x_1, x_2) при $\gamma=0.0$ (а) и $\gamma=0.14$ (б); в – отношение средних скоростей J_1/J_2 и средних частот переходов f_{t1}/f_{t2} в зависимости от параметра связи γ ; г – зависимость квадрата дисперсии величины $\Delta y/\nu$ от параметра γ

особенностью является наличие двух уровней $\sigma^2_{\Delta y/v}$, различающихся в среднем на 3 порядка, что дает возможность четко разделить несинхронный и синхронный режимы с точки зрения этой характеристики. Интересно, что переход между ними осуществляется по типу переключений (см. область $\gamma=0.4\dots 0.47$ на рис. 7, в).

Таким образом, можно говорить о раздельном попарном захвате характерных времен (средних значений) и о последующей эволюции колебаний, при которой они становятся все более похожими. Заметим, что каждое из характерных времен может быть описано как на уровне среднего значения, так и с точки зрения дисперсии. Тогда процесс синхронизации в целом также может характеризоваться как синхронизация первых моментов (среднего) и вторых моментов (дисперсии) по каждому из времен. При этом наиболее жестким критерием остается условие $\sigma^2_{\Delta y/v} \approx 0$, которое можно считать условием полной синхронизации.

Рис. 8 иллюстрирует эволюцию распределения разности фазовых переменных $^3 p(\Delta y/v)$ при увеличении степени связи.

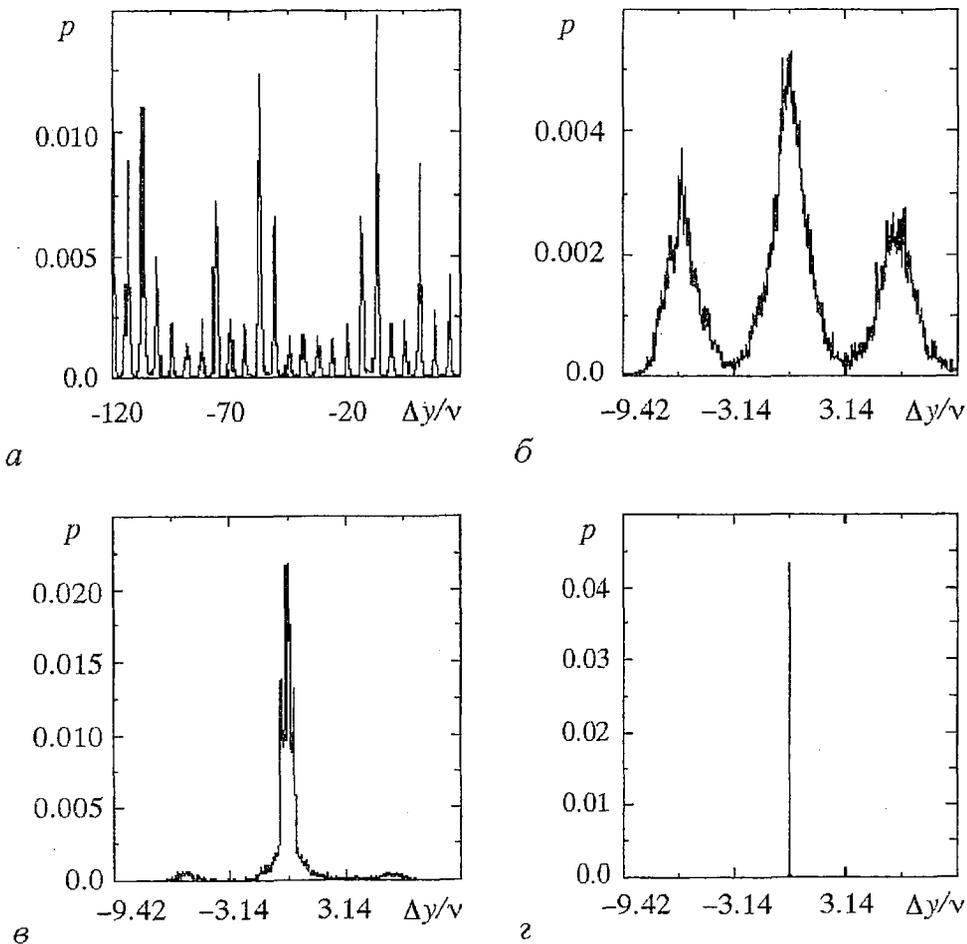


Рис. 8. Эволюция распределения разности фазовых переменных $\Delta y/v$ при увеличении степени связи γ : а - $\gamma=0$; б - 0.05; в - 0.1; г - 0.6

³ Это не есть плотность распределения вероятности $\Delta y/v$, поскольку мы не можем гарантировать стационарности процесса для всех γ . Однако такое распределение, посчитанное за определенное конечное время при определенном начальном $\Delta y/v$, наглядно характеризует динамику системы.

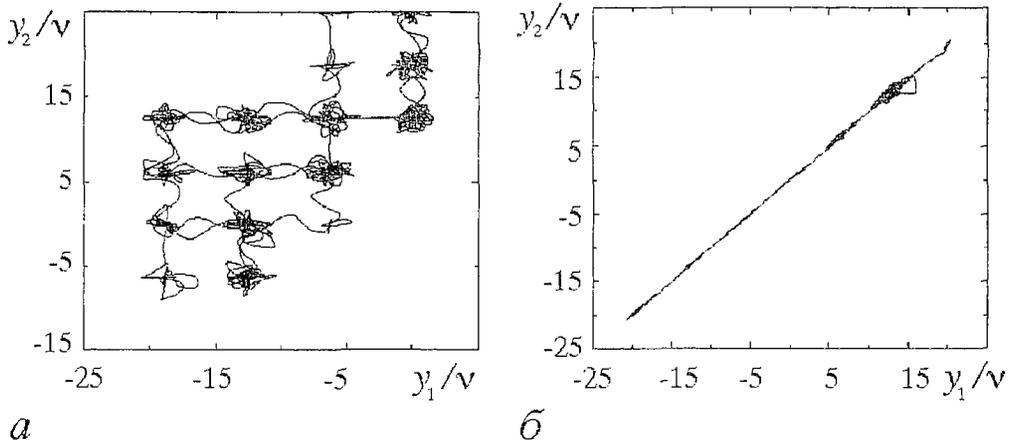


Рис. 9. Перекрестная фазовая проекция в плоскости нормированных координат (y_1, y_2) : $a - \gamma = 0$; $b - \gamma = 0.6$

Случаю $\gamma = 0$ отвечает линейчатая структура, каждый максимум которой соответствует относительно более длительному пребыванию траектории в окрестности одного из состояний равновесия (рис. 8, a). Траектория при этом хаотически блуждает на поле возможных состояний равновесия O_{ij} , где i и j относятся к первой и второй подсистеме, соответственно (рис. 9, a).

Увеличению γ отвечает локализация разности $\Delta y/v$ в окрестности трех соседних состояний равновесия (рис. 8, b , $в$). Наконец, большим значениям γ соответствует δ -пик в распределении рис. 8, $г$, что и отвечает синхронизации в смысле $\sigma^2_{\Delta y/v} \approx 0$. Соответствующая фазовая проекция имеет вид диагонали (рис. 9, b).

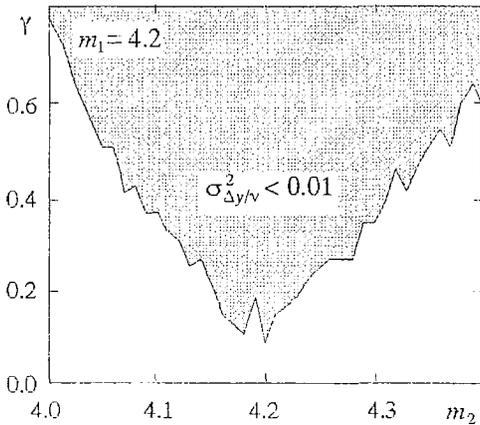


Рис. 10. Область параметров в плоскости (m_2, γ) , соответствующая синхронным движениям в парциальных подсистемах (серый цвет)

Разумеется, обсуждаемые выше процессы существенно зависят от выбора параметров m_1 и m_2 . На рис. 10 приведена зона синхронизации, определенная из условия $\sigma^2_{\Delta y/v} < 0.01$. Хорошо видно, что она имеет характерную треугольную форму, наблюдаемую как в случае классической синхронизации, так и для хаотических или стохастических систем. В нашем случае обращает на себя внимание изрезанность границы области синхронизации, что, по-видимому, обусловлено характером изменения свойств системы при вариации параметра (см. рис. 5).

Выводы

В рамках данной работы мы продемонстрировали подход, основанный на диагностике хаотической синхронизации как явления захвата характерных времен взаимодействующих систем.

Существенно, что указанные времена могут быть связаны не только с колебательным движением. Как было показано выше, это может быть и среднее

же время, характеризующее среднюю скорость дрейфа динамической переменной системы вдоль счетного числа состояний равновесия.

В численном эксперименте по мере увеличения параметра связи обнаружен последовательный, попарный захват характерных времен. Это позволяет выделить определенные уровни в процессе сближения колебаний парциальных подсистем, качественно характеризующая степень синхронизации.

Наконец, по каждому из временных масштабов можно различать два этапа синхронизации, первый из которых отвечает синхронизации в среднем (например $f_1=f_2$), а второй – достижению близкой к нулю дисперсии $\sigma^2_{\Delta y/v} \approx 0$ (переходы происходят одновременно). В зависимости от природы взаимодействующих подсистем и их режима функционирования указанные этапы могут как совпадать в пространстве параметров, так и существенно различаться. Так в классическом случае синхронизации гармонических колебаний захват частоты автоматически гарантирует нулевую дисперсию разности фаз. В рамках данной работы проиллюстрирован случай, когда синхронизация в смысле $\sigma^2_{\Delta y/v}$ имеет четко выраженную границу, достигаемую при конечных значениях степени связи. Чем более сложный режим демонстрируют исследуемые системы, тем более удобен описанный подход к рассмотрению явления хаотической синхронизации. При этом само понимание явления синхронизации как процесса уменьшения числа независимых временных масштабов при вариации связи представляется полезной концепцией, помогающей связать понятие синхронизации колебаний в его классическом смысле с актуальными сегодня проблемами кооперативной динамики нелинейных динамических и стохастических систем.

Работа частично была поддержана Госкомвузом России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66) и российско-германским грантом DFG and RFFI 436 RUS 113/334/0 (R).

Библиографический список

1. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.:Наука, 1981.
2. Blekhtman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems // Appl.Mech.Rev. 1995. Vol.48, № 11. P.733.
3. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 29, № 9. С. 1050.
4. Ланда П.С., Перминов С.М. Взаимодействие периодических и стохастических автоколебаний // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 4. С.424.
5. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 6. С. 569.
6. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A. Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
7. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E. Synchronization of chaos // Proc. First International Conference on Applied Synergetic and Synergetic Engineering, Erlangen, Germany. June 21–23, 1994. P. 200.
8. Rosenblum M., Picovsky A. and Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett.. 1996. Vol. 76. P. 1804.
9. Pikovsky A., Rosenblum M. and Kurths J. Effect of phase synchronization in driven chaotic oscillators // IEEE Trans. CAS-I, 1997.
10. Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S. Mean Switching Frequency Locking in Stochastic Bistable Systems Driven by Periodic Force // Phys.Rev.Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
11. Neiman A.B. Synchronization-like phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol.49. P.3484.

12. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A.* Stochastic Resonance in chaotic systems // *J. Stat. Phys.* Vol. 70, № 1/2, 1993. P. 183.
13. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью // *ЖТФ.* 1946. Т. 16, вып. 7. С. 845.
14. *Капцов Л.Н., Сенаторов К.Я.* О работе RC-генератора пилообразных колебаний с инерционным активным двухполосником // *Радиотехника и электроника.* 1964. Т. 9, вып.10. С.1757.
15. *Капцов Л.Н.* Возникновение пикового режима в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью // *Радиотехника и электроника.* 1975. Т.20, вып.12. С.2496.
16. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.:Наука, 1980.
17. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990.
18. *Шахгильдян В.В., Ляховский А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
19. *Фазовая синхронизация / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной.* М.: Связь, 1975.
20. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Роль инерционности и начального рассогласования в развитии колебательных режимов в бистабильной системе с фазовым управлением // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т. 3, № 5. С. 26.
21. *Постнов Д. Э., Никитин А. П., Анищенко В. С.* Управление потоком вероятности в системе фазовой автоподстройки частоты // *Письма в ЖТФ.* 1996. Т. 22, вып. 9. С. 24.
22. *Bartussek R., Hänggi P. and Kissner J. G.* Periodically Rocked Thermal Ratchets // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 28. P.459.
23. *Pecora L. and Carroll T.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 821–823.
24. *Волковский А.Р., Гульков Н.Ф.* Экспериментальное исследование бифуркаций на пороге стохастической синхронизации // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, вып. 7. С. 5.
25. *Chua L., Itoh M., Kocarev L. and Eckert K.* Chaos synchronization in Chua's circuit. Chua's Circuits // *A Paradigma for Chaos / Ed. R.N. Madan.* Singapore: World Scientific, 1993. P. 309.
26. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суцук М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *УФН.* 1996, Т. 166, № 4. С. 365.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 14.03.97
после переработки 29.04.97

SYNCHRONIZATION IN CHAOTIC SYSTEMS WITH DENUMERABLE SET OF EQUILIBRIUM STATES

D.E. Postnov, A.G. Balanov

Coupled chaotic systems, in each of which the set of a few characteristic time describes the complex oscillatory regimes, are investigated. Variation of parameters changes these characteristic times and allows us under certain conditions to observe the processes which can be interpreted in terms of synchronization phenomenon. It is shown, that the «locking» mechanism can be extended both to the mean resident time of system's state near the one of the equilibrium points and to the time which corresponds to the mean drift rate of system's state.



НОРМИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ В ОЦЕНКЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕАКЦИЙ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ НА СТРЕССОРНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ У ОСОБЕЙ РАЗНОГО ПОЛА

Т.Г. Анищенко, Н.Б. Игошева, О.Н. Хохлова

В опытах на людях и животных исследовали особенности реакций сердечно-сосудистой системы на разнообразные стрессорные воздействия в зависимости от пола испытуемых с использованием физиологических параметров, частоты сердечных сокращений, кровяного давления, а также нового критерия – нормированной энтропии, характеризующей вариабельность электрической активности сердца и кровяного давления. Результаты опытов показали, что кардиоваскулярная реактивность зависит от вида стресса и пола испытуемых. Значения нормированной энтропии при стрессах и после их отмены могли как увеличиваться, так и уменьшаться. Изменения вариабельности электрической активности сердца и кровяного давления были более выраженными и длительными, чем изменения традиционных параметров. Было показано, что нормированная энтропия является более чувствительным маркером половых и индивидуальных особенностей кардиоваскулярной стресс-реактивности. Результаты свидетельствуют о перспективности использования нового критерия как показателя вариабельности электрической активности сердца и кровяного давления у женских и мужских особей.

Введение

Жизнь современного человека перенасыщена стрессорными ситуациями, что часто приводит к срывам механизмов адаптации, проявляющимся в росте числа «болезней цивилизации», среди которых лидируют сердечно-сосудистые заболевания. Чрезвычайно важным является тот факт, что мужчины более, чем женщины, подвержены заболеваниям сердечно-сосудистой системы [1], что привело к резкому увеличению смертности мужчин и уменьшению продолжительности их жизни.

В этой связи особую актуальность приобретает проблема исследования половых особенностей реакций сердечно-сосудистой системы (ССС) на разнообразные стрессорные воздействия.

Классическими количественными характеристиками функциональной активности ССС являются частота сердечных сокращений (ЧСС), систолическое (САД) и диастолическое давление (ДАД) и электрокардиограмма (ЭКГ), отражающая электрическую активность сердца. В последние годы, благодаря развитию нелинейной динамики, формируются новые количественные характеристики и критерии, которые все чаще применяются при исследовании функциональной активности ССС. В основу положены представления о функциональных системах живого организма как об открытых диссипативных

динамических системах, подверженных внутренним и внешним влияниям. На основе такого подхода установлено, в частности, что сигналы ЭКГ можно трактовать как режим динамического хаоса [2–4]. Это представление позволяет существенно расширить спектр количественных критериев для диагностики режимов функционирования ССС, используя совокупность характеристик для диагностики хаоса. Так, например, в работах [5,6] с помощью измерительно-вычислительного комплекса продемонстрирована возможность получения ряда динамических и статистических характеристик сигналов ЭКГ и кровяного давления с позиций современной теории колебаний. Авторы убедительно показали, что наиболее чувствительным индикатором изменений в электрической активности сердца и кровяного давления является энтропия, нормированная на среднюю энергию системы. Этот показатель получил название нормированной энтропии E/N [7]. В наших совместных исследованиях этот вывод был подтвержден и дополнительно обоснована высокая чувствительность и информативность E/N сигнала ЭКГ как нового критерия оценки реакций ССС на стрессорные воздействия [8–10].

Целью настоящих исследований явилось изучение половых особенностей реакций ССС на разнообразные стрессорные воздействия с использованием нового критерия – нормированной энтропии и традиционных показателей – кровяного давления и частоты сердечных сокращений.

1. Материалы и методы

В первой серии опытов на 15 здоровых юношах и 21 девушке из числа студентов исследовали влияние шумового воздействия на состояние ССС. Все испытуемые подвергались действию шума при прослушивании с помощью наушников записи программы для персонального компьютера в течение 4 минут. Запись ЭКГ в первом отведении проводилась в исходном состоянии, через 1 минуту после включения шума, через 1, 3, 6 минут после его отключения. САД и ДАД измерялось по методу Короткова сразу после окончания ввода в ЭВМ соответствующих кардиограмм. Значения ЧСС определялись по спектру анализируемой реализации.

Вторая группа испытуемых из 36 юношей и 54 девушек была сформирована для изучения влияния ментального стресса на ССС. Испытуемые должны были в уме в условиях дефицита времени произвести арифметические подсчеты в виде вычитания, а затем умножения различных цифровых комплексов. Задания были отделены друг от друга восстановительным периодом. Значения САД и ДАД регистрировались до, во время и после выполнения задания.

В третьей серии опытов исследовали реакции ССС на ментальный стресс в условиях шума. Испытуемые в количестве 25 юношей и 27 девушек решали в уме одну арифметическую задачу на фоне описанного выше шумового воздействия.

В четвертой серии опытов на 23 юношах и 26 девушках исследовали реакции ССС на экзаменационный стресс. Измерение всех показателей проводили во время ознакомления испытуемых с вопросами экзаменационного билета, сразу после сдачи экзамена и через 30–40 минут после окончания экзамена.

В следующей серии опытов изучали влияние эмоционально-болевого стресса на ССС самок и самцов белых крыс. Стресс у животных вызывали привязыванием их к дощечке на 60 минут. За день до эксперимента животным под наркозом имплантировали катетер в сонную артерию. В день эксперимента внешний конец катетера через систему заполненных физиологическим раствором катетеров соединялся с электроманометром. Среднее артериальное давление (ср.АД) регистрировали у животных до стресса, каждые 5–10 минут после привязывания и каждые 10–20 минут после отвязывания.

Для исследования степени хаотичности сигналов ЭКГ у людей и кровяного давления у крыс использовали измерительно-вычислительный комплекс, описанный в [5.6]. Кратко структуру этого комплекса можно охарактеризовать

следующим образом: электрокардиограф снимает с помощью электродов в 1 отведении кардиосигнал, который усиливается линейным широкополосным усилителем и с помощью 10-разрядного АЦП вводится в ЭВМ типа IBM PC/AT. У крыс регистрация кровяного давления осуществлялась прямым способом с помощью электроманометра. Получаемые сигналы также усиливались и вводились с помощью вышеуказанного АЦП в компьютер. Полученные реализации обрабатывались программным комплексом «Observe».

Полученные результаты подвергались статистической обработке с использованием параметрических и непараметрических критериев для сопряженных и несопряженных выборок.

2. Результаты опытов

Использование разнообразных по силе и длительности стрессорных воздействий в опытах на юношах и девушках дает возможность провести сравнительный анализ информативности физиологических показателей и показателя нормированной энтропии как индикаторов состояния ССС в условиях психоэмоционального напряжения у лиц разного пола. Рассмотрим, как изменяются ЧСС, величина САД и ДАД, а также показатели E/H , характеризующие хаотичность аттрактора ЭКГ, при стрессах возрастающей интенсивности и длительности у юношей и девушек.

2.1. Кардиоваскулярные реакции у юношей и девушек при шумовом стрессе. Шумовое воздействие продолжительностью 4 минуты можно считать пассивным стрессом, в отличие от всех других использованных воздействий, поскольку в этом случае испытуемый не может повлиять на ход событий и не проявляет активных действий [11]. Кроме того, ответом на шумовое воздействие является слабый стресс, поскольку ни у девушек, ни у юношей не отмечалось каких-либо существенных изменений в ЧСС, у 14% девушек и 47% юношей не наблюдалось сдвигов и в уровне кровяного давления. Слабые гипертензивные реакции со стороны САД наблюдались у 24% девушек и 20% юношей. И, наконец, у 62% девушек и 33% юношей отмечалось незначительное (на 7–10%) кратковременное снижение САД в первую минуту стресса. Таким образом, при шумовом стрессе у большинства девушек отмечались гипотензивные реакции, в то время как у большинства юношей давление существенно не изменялось (рис.1). Важно отметить, что в состоянии покоя у девушек по сравнению с юношами были выше значения ЧСС, но ниже уровни САД и ДАД.

При отсутствии изменений в ЧСС на фоне нестабильных, слабых и

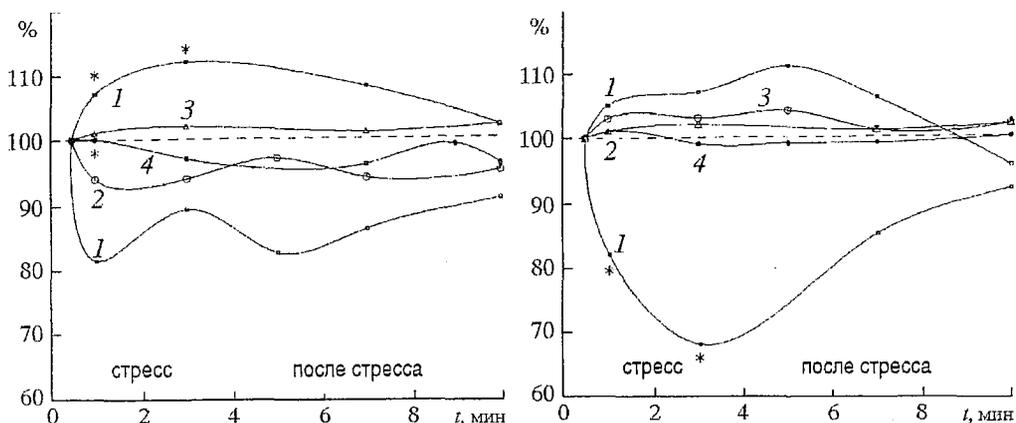


Рис. 1. Изменения E/H при шумовом стрессе сигнала ЭКГ (1), САД (2), ДАД (4) и ЧСС (3) у девушек (а) и юношей (б). Здесь и далее точки, отмеченные символом «*», определены с уровнем достоверности в интервале $0.001 \div 0.05$ по отношению к исходному уровню

кратковременных гипотензивных и гипертензивных реакций, изменения в E/H носили более выраженный по силе и длительности характер, проявлялись у всех испытуемых и зависели от пола. Так, увеличение E/H на 10% отмечалось у 79% девушек и лишь у 13% юношей. Соответственно, снижение этого показателя наблюдалось у 21% девушек и у 87% юношей, для которых оно составило 30%. Таким образом, при шумовом стрессе у большинства девушек отмечалось увеличение, а у большинства юношей снижение E/H . При этом к 6 минуте после окончания стресса у большинства девушек показатели E/H нормализовались, в то время как у юношей оставались пониженными.

Следовательно, при слабом шумовом стрессе наиболее чувствительным показателем кардиоваскулярной реактивности является E/H , отразившая изменение степени хаотичности сигнала ЭКГ при стрессе как в сторону ее увеличения, так и в сторону снижения. При этом девушки чаще, чем юноши, демонстрировали увеличение степени хаотичности сигнала ЭКГ, у них чаще наблюдались гипотензивные ответы на стресс, а исходные уровни давления, несмотря на повышенную ЧСС, были ниже, чем у юношей.

2.2. Кардиоваскулярные реакции у юношей и девушек при ментальном стрессе. Решение в уме арифметических задач в условиях дефицита времени является активным стрессом, включающим умственную деятельность испытуемого. Данное стрессорное воздействие в отличие от предыдущего сопровождалось типичными стрессорными реакциями по показателям ЧСС и давления (рис. 2). У испытуемых наблюдалось значительное увеличение ЧСС при решении как первой, так и второй задачи. При этом у девушек базальные значения ЧСС, а также степень ее увеличения при стрессе были выше, чем у юношей. Так, у девушек при выполнении первого и второго задания ЧСС возрастала, соответственно, на 30 и 29%, а у юношей – на 12 и 23%.

У подавляющего большинства юношей и девушек умственное напряжение сопровождалось повышением САД и ДАД. При этом, несмотря на более существенное увеличение ЧСС, у девушек интенсивность гипертензивных ответов была такой же, как у юношей, составляя 12–14% для САД и 12–18% для ДАД. Следует отметить, что число испытуемых, реагирующих повышением давления на ментальный стресс, у девушек было несколько ниже, чем у юношей. Так, повышение САД отмечалось у 80% девушек и у 86% юношей. Повышение ДАД – у 76% девушек и 81% юношей. Повышенные уровни кровяного давления, как и ЧСС, сохранялись у испытуемых в течение 3–4 минут после выполнения первого задания и 1–2 минуты после выполнения второго.

При данном стрессе на фоне увеличения ЧСС и кровяного давления как у юношей, так и у девушек отмечалось два типа реакций со стороны E/H . Снижение

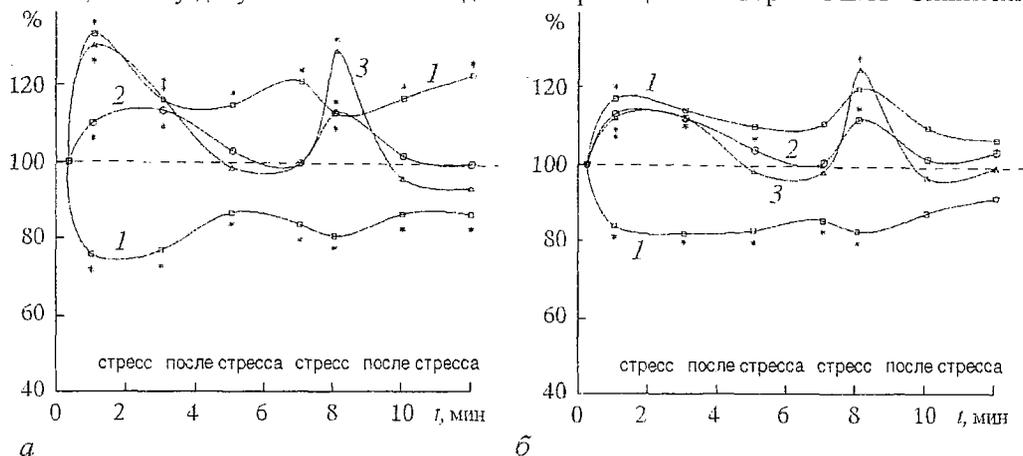


Рис. 2. Изменения E/H (1) сигнала ЭКГ, САД (2) и ЧСС (3) у девушек (а) и юношей (б) при умственном стрессе

E/H при выполнении первого и второго задания регистрировалось у 65% девушек и 46% юношей. При этом максимальное снижение этого показателя составляло 25% у девушек и 18% у юношей. Увеличение E/H при стрессах наблюдалось в среднем у 30% девушек и 36% юношей. Максимальное увеличение E/H составляло 33% у девушек и 20% у юношей.

В восстановительные периоды не наблюдалось нормализации значений E/H , в отличие от ЧСС и кровяного давления, однако в эти периоды число испытуемых с повышенными значениями E/H возрастало вдвое. При этом, как и в периоды стресса, у девушек значения E/H были выше, чем у юношей.

Таким образом, ментальный стресс, в отличие от шумового, вызывал увеличение ЧСС и кровяного давления. Изменения E/H , как и при шумовом стрессе, отражали возможность как усиления, так и подавления степени хаотичности сигнала ЭКГ, более выраженных у девушек, чем у юношей. Для восстановительного периода характерна не нормализация E/H , а увеличение процента испытуемых с повышенными значениями этого показателя. Степень повышения хаотичности аттрактора ЭКГ у девушек была выше, чем у юношей, как при стрессах, так и в периоды релаксации. Кроме того, гипертензивные реакции у девушек, несмотря на более высокие у них базальные и стрессорные уровни ЧСС, по амплитуде не превышали гипертензивные реакции у юношей и проявлялись у меньшего числа испытуемых.

2.3. Кардиоваскулярные реакции у юношей и девушек при ментальном стрессе на фоне шума. Можно предположить, что шумовой фон затрудняет решение в уме арифметических задач, что должно привести к более высокому уровню эмоционального напряжения. Однако увеличение ЧСС при данном стрессе было примерно таким же, как при одном ментальном стрессе, составляя у девушек 25, а у юношей 20% (рис.3). Повышенные значения ЧСС сохранялись, как и в предыдущем опыте, в течение 3–4 минут. Следует отметить, что в данной серии экспериментов базальные и стрессорные значения ЧСС у девушек были ниже, чем у юношей.

Интенсивность увеличения САД и ДАД, примерно одинаковая у юношей и девушек (13–14%), также не отличалась от данных показателей в предыдущем опыте. Однако при этом стрессе число девушек, реагирующих повышением САД, возросло до 96% против 80, характерных для ментального стресса без шумового фона. Кроме того, нормализация повышенных уровней ДАД при данном стрессе задерживалась по сравнению с предыдущим стрессом. Существенно то, что базальные и стрессорные уровни САД и ДАД в этой серии у девушек были ниже, чем у юношей. Более того, у девушек, по сравнению с юношами, быстрее происходила нормализация уровней давления после стресса.

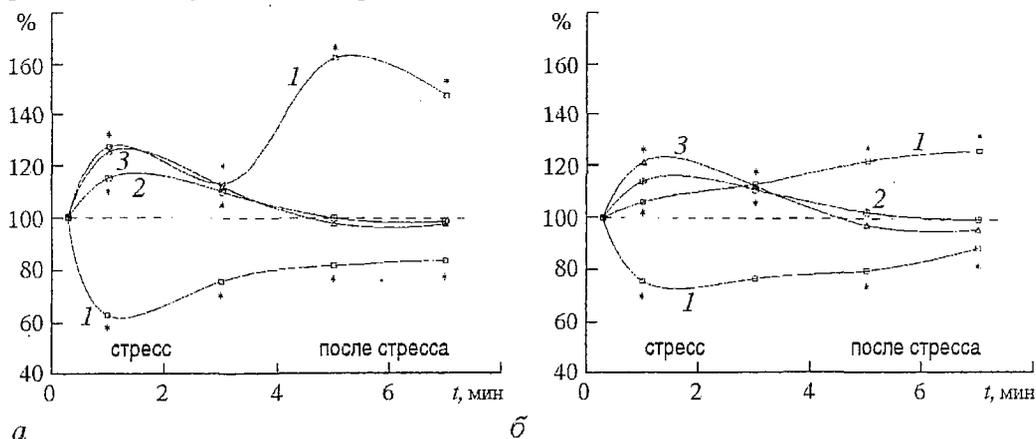


Рис. 3. Изменения E/H (1) сигнала ЭКГ, САД (2) и ЧСС (3) у девушек (а) и юношей (б) при умственном стрессе на фоне шума

Таким образом, показатели кровяного давления более чувствительны к добавлению шума при решении арифметических задач, нежели показатели ЧСС. Это проявилось в более длительных процессах нормализации ДАД как у юношей, так и у девушек, а также в увеличении числа девушек, реагирующих на стресс повышением САД.

Изменения E/H , как и в предыдущих опытах, были разнонаправленны и более длительны по сравнению с традиционными параметрами. При этом E/H снижалась в большей степени и у большего числа испытуемых по сравнению с предыдущим опытом. Так, у 71% девушек и 59% юношей E/H уменьшалась, соответственно, на 40 и 26%. В то же время увеличение E/H было менее выраженным и проявлялось у меньшего числа юношей и девушек по сравнению с предыдущим опытом (на 27% у 19% девушек и всего на 7% у 27% юношей).

В восстановительном периоде, по сравнению со временем действия шума, как и в предыдущем опыте, примерно в 2 раза возрастал процент испытуемых с повышенными значениями E/H . Кроме того, в данном опыте в отличие от предыдущего, прекращение стресса сопровождалось дальнейшим увеличением E/H . Это увеличение через 4 минуты после окончания стресса достигало 62% у девушек и 25% у юношей.

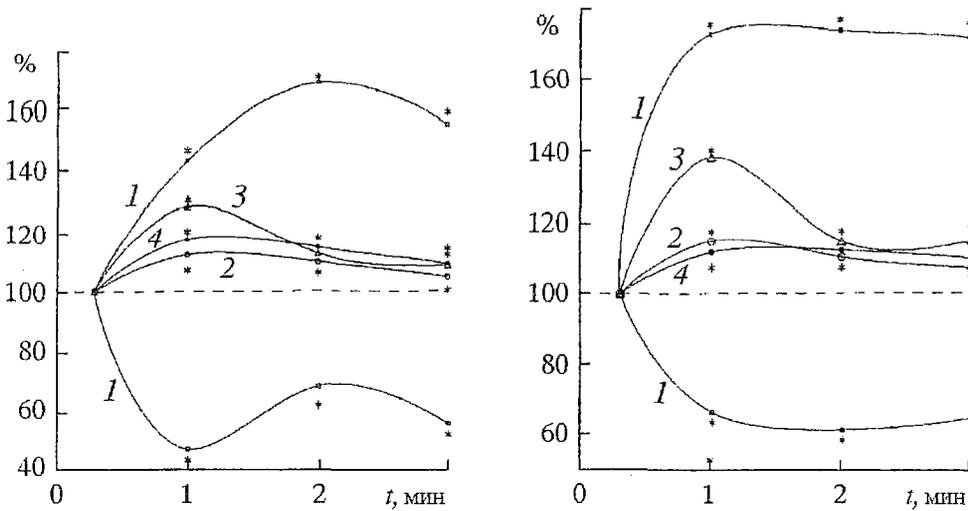
Таким образом, добавление шума не изменяло реакции ССС на ментальный стресс по показаниям ЧСС, но усилило эти реакции по показаниям кровяного давления и в большей степени по показаниям E/H . При этом, как и в предыдущих опытах, изменения степени хаотичности ЭКГ были разнонаправленны и более выражены у девушек по сравнению с юношами. Восстановительный период характеризовался дальнейшим увеличением E/H и ростом числа испытуемых с повышенными значениями данного показателя. Как и в предыдущем опыте, увеличение степени хаотичности ЭКГ как при стрессе, так и в период релаксации у девушек было выше, чем у юношей. Наряду с этим базальные и стрессорные значения ЧСС, САД и ДАД у девушек были ниже, чем у юношей.

2.4. Кардиоваскулярные реакции у юношей и девушек при экзаменационном стрессе. Продолжительность этого стресса была достаточно велика, поскольку эмоциональное напряжение, безусловно, имело место в течение нескольких часов, предшествовавших экзамену. С учетом этого обстоятельства контрольные измерения ЧСС, давления и E/H проводили спустя несколько недель после экзаменационной сессии.

Изменения ЧСС, САД и ДАД были максимальными в период знакомства испытуемых с экзаменационным билетом (рис. 4). Так, ЧСС возрастала у девушек и юношей на этой стадии на 27 и 36%, соответственно. Сразу после сдачи экзамена наблюдалось снижение ЧСС более, чем в 2 раза по сравнению с максимальными значениями, однако и через 40 минут после окончания экзамена значения ЧСС оставались выше нормы как у девушек, так и у юношей. Отметим, что у юношей увеличение ЧСС на первой стадии стресса было более значительным, чем у девушек, а процессы нормализации ЧСС протекали медленнее. При этом максимальная степень увеличения ЧСС у девушек при данном стрессе была примерно такой же, как и при коротких стрессах, а у юношей значительно выше. Вследствие этого, на всех этапах стресса значения ЧСС у девушек были ниже, чем у юношей.

Увеличения САД и ДАД по интенсивности были примерно такими же, как при кратковременных стрессах, составляя 12–14% для САД и 11–17% для ДАД в период знакомства студентов с экзаменационным билетом. Сразу после сдачи экзамена уровень давления несколько снижался, однако и через 40 минут после экзамена не наблюдалось окончательной нормализации этих показателей. Отметим, что и в данной серии опытов базальные и стрессорные уровни САД и ДАД у девушек были ниже, чем у юношей.

Таким образом, экзаменационный стресс, по сравнению с предыдущими, вызывал более длительные, а у юношей и более существенные увеличения ЧСС, что сопровождалось более продолжительными гипертензивными реакциями.



а б
 Рис. 4. Изменения E/N (1) сигнала ЭКГ, САД (2), ДАД (4) и ЧСС (3) у девушек (а) и юношей (б) при экзаменационном стрессе. По оси абсцисс – периоды экзаменационного стресса: 1 – при ознакомлении с экзаменационным билетом; 2 – сразу после сдачи экзамена; 3 – через 30–40 минут после сдачи экзамена

Наиболее сильно при данном стрессе изменялась степень хаотичности сигнала ЭКГ. Как и в предыдущих опытах, наблюдалось два типа реакции со стороны этого показателя, однако эти изменения были более выраженными по амплитуде и длительности. Так, при взятии экзаменационного билета и сразу после экзамена примерно у половины девушек и юношей E/N снижалась, соответственно, на 53%, 32% у девушек и 32%, 38% у юношей. У другой половины девушек и юношей величина E/N на этих этапах стресса повышалась, соответственно, на 43%, 68% и 69%, 70%. Повышенные и пониженные уровни E/N сохранялись и через 40 минут после окончания экзамена. В отличие от кратковременных стрессов, окончание экзаменационного стресса не приводило к увеличению числа испытуемых с повышенными значениями E/N , что указывает на более высокую степень эмоционального напряжения в данной ситуации. При этом, в целом, на разных этапах исследования у девушек чаще, чем у юношей, наблюдалось повышение E/N , что сочеталось с более низкими у девушек стрессорными значениями ЧСС, а также более низкими базальными и стрессорными уровнями САД и ДАД.

Таким образом, самый продолжительный, экзаменационный стресс сопровождался наиболее длительными изменениями ЧСС, САД и ДАД и наиболее выраженными и продолжительными изменениями степени хаотичности электрической активности сердца. При этом индуцированные стрессом изменения E/N были разнонаправленны, более выражены по амплитуде и более устойчивы по сравнению с традиционными показателями и различались у юношей и девушек.

2.5. Кардиоваскулярные реакции самок и самцов белых крыс при эмоциональном стрессе. Рассмотрим, как изменяются показатели ЧСС, ср. АД и нормированной энтропии сигнала кровяного давления у крыс обоего пола при 60-минутном стрессе (рис.5). Как у самок, так и у самцов ЧСС существенно возрастала с первой минуты стресса, оставаясь примерно на таком уровне до его окончания. Однако у самок при более высоких исходных значениях ЧСС амплитуда ее увеличения была ниже, чем у самцов (35% против 51). Прекращение стрессорного воздействия (отвязывание животных) вызывало резкое снижение ЧСС как у самок, так и у самцов. Однако, если у самок это снижение приводило к нормализации ЧСС через 40 минут, то у самцов ЧСС оставалась повышенной и через 60 минут после стресса. Таким образом, у самок при стрессе ЧСС возрастала в меньшей степени и нормализовалась быстрее, чем у самцов.

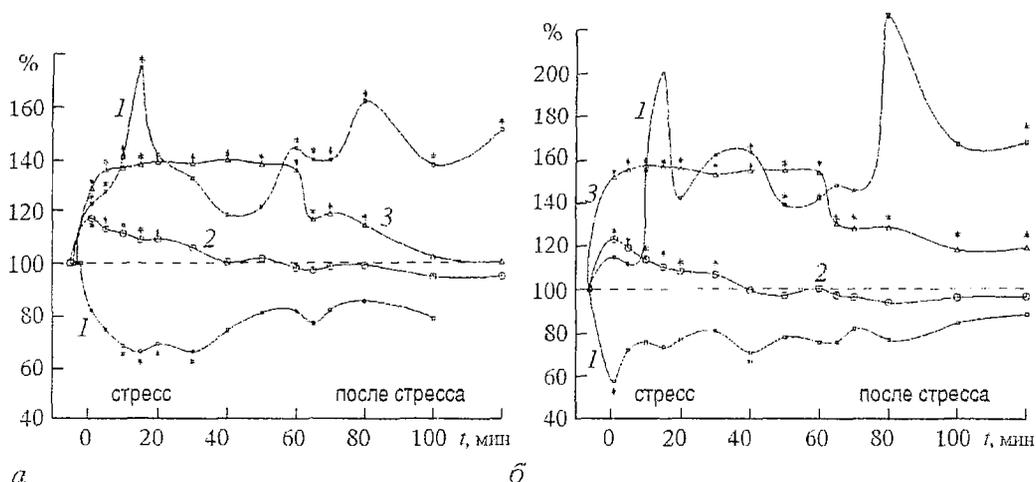


Рис. 5. Изменения E/N сигнала кровяного давления (1), ср. АД (2) и ЧСС (3) у самок (а) и самцов (б) белых крыс

Изменения ср. АД у крыс были не столь продолжительны, как изменения ЧСС. Действительно, максимальное увеличение этого показателя, достигающее 16% у самок и 21% у самцов наблюдалось на первой минуте стресса, а затем давление начинало снижаться, достигая базальных значений к 40 минуте стресса. До окончания стресса и на протяжении 60 минут после его отмены отмечались слабые гипотензивные реакции. Эти факты можно расценить как развитие у животных компенсаторных реакций в виде снижения общего периферического сопротивления, приводящего к снижению давления, несмотря на повышенную ЧСС. Важно отметить, что базальные и стрессорные уровни давления у самок были ниже, чем у самцов.

Изменения нормированной энтропии сигнала кровяного давления на всех этапах стресса и постстрессорного периода были разнонаправленными. При этом в восстановительном периоде также отмечалось увеличение числа особей с возрастающей E/N . Различия в динамике E/N в зависимости от пола особей наблюдались наиболее ярко в первые 10 минут стресса, когда реакции по показателям ЧСС и ср. АД были максимальны, а также в восстановительном периоде. Так, к 1, 5 и 10 минуте стресса число особей с уменьшенной E/N составляло у самок 58, 58 и 67%, соответственно, а у самцов – 80, 79 и 80%. Соответственно, число особей с увеличенной E/N у самок было в 1.5–2 раза выше, чем у самцов. К 40 и 60 минутам восстановительного периода число особей с увеличенной E/N у самок достигало 75 и 100%, в то время как у самцов – 50 и 80%. Максимальное снижение E/N у самок и самцов составляло в период стресса 34 и 43%, соответственно, в постстрессовом периоде 23 и 25%. Максимальное увеличение E/N у самок и самцов в период стресса составляло, соответственно, 75 и 99%, а после его отмены 62 и 124%.

Сравнение полученных результатов показывает, что E/N снижается в наибольшей степени и у большего числа особей при стрессе в фазе гипертензивных реакций, на фоне значительного увеличения ЧСС. И, напротив, E/N увеличивается у большего числа особей в восстановительном периоде на фоне гипотензивных реакций и нормализации ЧСС. Анализ выявил высокую степень корреляции между изменениями в E/N и изменениями в ЧСС и давлении. Как и в предыдущих опытах, изменения степени хаотичности сигнала кровяного давления были более продолжительными, чем изменения традиционных показателей.

Таким образом, при эмоционально-болевым стрессе, а также в восстановительном периоде, самки чаще, чем самцы демонстрировали повышение степени хаотичности сигнала кровяного давления, что сочеталось с менее значительным увеличением ЧСС у них и более низкими базальными и стрессорными уровнями кровяного давления.

Обсуждение результатов

Изучение реакций ССС на разнообразные стрессорные воздействия у мужских и женских особей с использованием традиционных физиологических показателей и нового критерия – нормированной энтропии сигналов ЭКГ (опыты на людях) и сигналов кровяного давления (опыты на крысах) позволило выявить ряд интересных закономерностей. Результаты исследований на людях свидетельствуют о том, что реактивность ССС определяется природой стресса. Так, слабый и кратковременный шумовой стресс, не влияя на ЧСС, сопровождался нестабильными, слабыми и кратковременными изменениями САД. Более сильные стрессы – ментальный, ментальный на фоне шума, экзаменационный – приводили к увеличению как ЧСС, так и артериального давления. При этом амплитуда увеличения ЧСС, САД, ДАД была практически одинаковой при разных стрессах, однако длительность этих изменений увеличивалась при переходе к более сильным стрессам.

Результаты опытов выявили существенные различия в активности ССС в покое и при стрессах в зависимости от пола испытуемых. При этом половые различия по показаниям ЧСС носили факультативный характер, что делает понятным разногласия различных авторов в этом вопросе [12–14]. В целом, у девушек в покое ЧСС чаще была выше, а при стрессах ниже, чем у юношей. Повышенные базальные уровни ЧСС при сниженной стресс-реактивности этого показателя обнаружены нами и у самок крыс по сравнению с самцами.

Различия у особей разного пола в базальных уровнях и в стрессорной динамике кровяного давления были устойчивы, проявляясь практически во всех сериях опытов на людях и животных.

Важно отметить, что у девушек, несмотря на повышенные в ряде опытов значения ЧСС, уровни кровяного давления никогда не превышали уровней такового у юношей как в покое, так и при стрессе, а в подавляющем большинстве опытов были ниже, чем у юношей. Более низкие базальные и стрессорные показатели давления обнаружены нами и у самок крыс по сравнению с самцами. Подобные закономерности, выявленные и в предыдущих наших опытах [9,10], соответствуют результатам других авторов [13–16]. В целом эти данные позволяют говорить о более благоприятном режиме функционирования ССС в покое и при стрессе у женских особей по сравнению с мужскими, поскольку повышенные гипертензивные ответы на стрессы считаются предпосылкой развития сердечно-сосудистой патологии [17–20].

Изменения E/H , как показали исследования на людях и на животных, также зависели от вида стресса и пола испытуемых, но имели при этом характерные особенности. Во-первых, в отличие от традиционных показателей, изменения E/H обнаруживались у всех испытуемых и при любых стрессорных воздействиях. Далее, изменения E/H всегда были разнонаправленны, то есть у одних испытуемых ее значения при стрессах возрастали, у других, напротив, снижались. При этом изменения E/H были более продолжительными, чем изменения ЧСС и кровяного давления. Важно отметить, что в периоды релаксации, когда отмечалась более или менее быстрая нормализация ЧСС и кровяного давления, существенно возрастал процент испытуемых с повышенными значениями E/H .

С увеличением силы стресса возрастала не только длительность интервала времени, в течение которого сохранялось изменение E/H , как это наблюдалось в отношении ЧСС и давления, но и амплитуда этих изменений. Это привело к тому, что в ситуации самого сильного экзаменационного стресса амплитуда изменений E/H превышала амплитуду изменения для ЧСС примерно в 2 раза, а давления – в 5–7 раз.

Изменения показателей E/H при стрессах подтверждают факт различий в реакциях ССС по показаниям ЧСС и давления в зависимости от пола. Оказалось, что в периоды стресса и релаксации E/H увеличивается в большей степени и (или) у большего числа девушек по сравнению с юношами. Можно полагать, что эти различия в стрессорной динамике E/H отражают более близкий к оптимальному

характер изменений степени хаотичности ЭКГ и сигнала кровяного давления у женских особей. Это предположение базируется на двух выявленных фактах. Во-первых, при любом стрессе в восстановительном периоде существенно возрастает процент испытываемых (до 100% в отдельных случаях) с повышенными значениями E/N , что происходит на фоне нормализации ЧСС и давления. Во-вторых, у женских особей режим функционирования ССС в покое и при стрессах по показаниям давления и ЧСС более близок к оптимальному. Кроме того, литературные данные свидетельствуют о том, что увеличение регулярности и периодичности в ЭКГ предшествует приступам стенокардии, инфаркту миокарда, внезапной смерти [4,21].

Таким образом, можно предполагать, что более выраженное у женских особей увеличение E/N сигнала ЭКГ и кровяного давления при стрессе, наряду с более благоприятной у них динамикой кровяного давления, а в ряде случаев и ЧСС, являются факторами, повышающими их устойчивость по отношению к стресс-индуцированным сердечно-сосудистым заболеваниям.

В целом, результаты наших исследований, выполненных на большом количестве людей и животных, свидетельствуют о высокой чувствительности и информативности нового критерия – нормированной энтропии сигналов ЭКГ и кровяного давления в оценке индивидуальных и половых особенностей кардиоваскулярной стресс-реактивности. Эти выводы, подтверждающие полученные нами ранее данные [8–10], наряду с результатами клинических исследований [22,23], обосновывают перспективность использования E/N как дополнительного критерия при оценке функциональных резервов ССС у здоровых и больных людей.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Анищенко В.С. за помощь при обсуждении полученных результатов.

Исследования финансировались по гранту в области фундаментального естествознания (шифр N 95-0-10.0-238).

Библиографический список

1. Stoney C., Davis M., Matthews K. Sex differences in physiological responses to stress and coronary heart disease: a causal link? // *Psychophysiol.* 1987. Vol.24. P.127.
2. Babiloyantz A., Destexhe A. Low-dimensional chaos in the instance of epilepsy // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 1986. Vol.83. P.3513.
3. Glass L., Makey C. *From Clocks to Chaos. The rhythm of life.* Princeton University. 1988.
4. Golgberger A. Is the normal heartbeat chaotic or homeostasis? // *New in physiological sciences.* 1991. Vol.6. P.87.
5. Анищенко В.С., Сапарин П.И., Сафонова М.А. Измерительно-вычислительный комплекс для диагностики сложных режимов автоколебаний // *Радиотехника и электроника.* 1992. Т.37. N3. P.467.
6. Anishchenko V.S., Saparin P.I., Igosheva N.B. Diagnostic of human being physical and mental conditions on the basis of electrocardiogram analysis by methods of chaotic dynamics // *Proc. SPIE.* 1993. Vol.1981. P.141.
7. Климонтович Ю.Л. Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессе самоорганизации // *УФН.* 1989. Т.158, № 1. С.59.
8. Anishchenko V.S., Saparin P.I., Anishchenko T.G. On the criterion of the relative degree of order of self-oscillating regimes. Illustration of Klimontovich's S-theorem // *Proc. SPIE.* 1994. Vol.2098. P.130.
9. Anishchenko T.G., Igosheva N.B., Saparin P.I. The sex differences in human cardiovascular stress responses. Mathematical and physiological approaches // *Proc. SPIE.* 1993. Vol.1981. P.151.

10. *Anishchenko T.G., Saporin P.I., Igosheva N.B., Anishchenko V.S.* Sex differences in human cardiovascular responses to external excitation // *Nuovo chimento*. 1995. Vol.17D, № 7. P.699
11. *Obrist P., Gaebelen C., Teller E., Langer A., Grignolo A., Light K., McCubbin J.* The relationship among heart rate, carotid dp/dt and blood pressure in humans as a function of the type of stress // *Psychophysiol*. 1978. Vol.15. P.102.
12. *Frankenhaeuser M., Dunne E., Lundberg U.* Sex differences in sympathetic-adrenal medullary reactions induced by different stressors // *Psychopharmacol*. 1978. Vol.47. P.1.
13. *Hastrup J., Light K.* Sex differences in cardiovascular stress responses: modulation as a function of menstrual cycle phases // *J. Psychosomatic Res*. 1984. Vol.28. P.475.
14. *Eiff A.* The importance of hypothalamic centers for the pathogenesis of essential hypertension // *Activ. nerv. super*. 1990. Vol.32, № 3. P.184.
15. *Van Doornier L.* Sex differences in physiological reactions to real life stress and their relationship to physiological variables // *Psychophysiol*. 1986. Vol.28. P.657.
16. *Демидов В.А.* Половые особенности кардиоваскулярных коррелятов эмоционального стресса у юношей и девушек. Эмоциональный стресс: физиологические, медицинские и социальные аспекты. Харьков: Прапор, 1990.
17. *Falkner B., Onesit G., Hamstra B.* Stress response characteristics of adolescents with genetic risk for essential hypertension: a five year follow-up // *Clin. Exp. Hypertens*. 1981. Vol.3. P.183.
18. *Dlin R., Hanne N., Silverberg D., Bar-Or O.* Follow-up of normotensive men with exaggerated blood pressure responses to exercise // *Amer. Heart J*. 1983. Vol.106. P.316.
19. *Kasprowicz A., Manuck S., Malkoff S., Krantz D.* Individual differences in behaviorally evoked cardiovascular responses: temporal stability and hemodynamic patterning // *Psychophys*. 1990. Vol.27, № .6. P.605.
20. *Carrol G., Harris M., Cross G.* Haemodynamic adjustments to mental stress in normotensives and subjects with mildly elevated blood pressure // *Psychophysiology*. 1991. Vol.4. P.438.
21. *Pool R.* Is healthy to be chaotic? // *Science*. 1989. Vol.243. P.604.
22. *Kurths J., Saporin P., Vossing H.J., Witt A., Voss A., Deitz R., Fiehrinf H., Kleiner H.* Nonlinear dynamics, heart rate variability and frequency analysis of high resolution ECG // *Computer in cardiology*. 1993. P.253.
23. *Wessel N., Voss A., Kurths J., Saporin P., Witt A., Kleiner H.J., Dietz R.* Re-normalised entropy: A new method of non-linear dynamics for the analysis of heart rate variability // *Computer in cardiology*. 1994. P.137.

*Саратовский госуниверситет,
кафедра физиологии человека и
животных*

Поступила в редакцию 17.03.97

NORMALIZED ENTROPY IN THE EVALUATION OF SEX PARTICULARITIES IN CARDIOVASCULAR RESPONSES TO STRESS INFLUENCES

T.G. Anishchenko, N.B. Igosheva, O.N. Khokhlova

The sex particularities in cardiovascular responses to different stress stimuli in humans and rats were investigated using the physiological parameters, heart rate and blood pressure, and a new sensitive criterion of electrical heart and blood pressure variability, a normalized entropy. The result showed that cardiovascular reactivity depended on the type of stress and the sex of individual involved. The values of normalized entropy increased or decreased during and after stress. The changes in

electrical heart and blood pressure variability were more pronounced and more prolonged when one compared with those in heart rate and blood pressure. Normalized entropy was demonstrated to be more sensitive criterion of sex and individual differences in cardiovascular responses to stressors than heart rate and blood pressure. So, results illustrate a perspective of new parameter using as a characteristic of electrical heart and blood pressure variability in male and female organism under stress conditions.



Анищенко Татьяна Григорьевна – родилась в Ульяновске, окончила биологический факультет СГУ (1964). С 1966 и по настоящее время работает в СГУ на кафедре физиологии человека и животных. С 1995 года заведует кафедрой физиологии человека и животных. Защитила кандидатскую диссертацию (1967), докторскую диссертацию на тему «Половые аспекты проблемы стресса и адаптации» в НИИ Нормальной физиологии им. П.К. Анохина (1993, Москва). Имеет 55 опубликованных работ, принимала участие в работе трех Международных и семи Всероссийских конференций. В последние годы занимается исследованием возможности применения методов нелинейной динамики к анализу стрессорных изменений сердечно-сосудистой системы. Исследования, проводимые совместно с коллективом лаборатории нелинейной динамики кафедры радиофизики СГУ (зав. кафедрой – профессор Анищенко В.С.), открывают перспективу разработки новых

методов диагностики состояния сердечно-сосудистой системы при стрессах.



Игощева Наталья Борисовна – родилась в Саратове (1968), окончила биологический факультет СГУ (1990). С 1990 года работает ассистентом на кафедре физиологии человека и животных СГУ. Опубликовала 14 работ. Принимала участие в работе трех Международных и семи Всероссийских конференций. Подготовила к защите кандидатскую диссертацию. В последние годы занимается исследованиями, связанными с разработкой новых прогностических критериев индивидуальной стресс-устойчивости сердечно-сосудистой системы. Исследования проводятся совместно с коллективом лаборатории нелинейной динамики кафедры радиофизики СГУ с привлечением традиционных физиологических методов изучения сердечно-сосудистой системы и методов нелинейной динамики.



Хохлова Оксана Николаевна – родилась в Кузнецке Пензенской обл. (1971), окончила биологический факультет СГУ (1993). С 1993 года работает ассистентом на кафедре физиологии человека и животных СГУ. Имеет 5 опубликованных работ. Принимала участие в работе Международных и Всероссийских конференций. В настоящее время работает над кандидатской диссертацией. Занимается исследованиями по оценке индивидуальной стресс-реактивности и стресс-устойчивости сердечно-сосудистой системы.



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ РЕКОНСТРУКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ К ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММЕ

А.Н. Павлов, Н.Б. Янсон

Подробно изложена методика реконструкции математической модели. Собраны воедино и проанализированы результаты ее применения к ЭКГ. Рассмотрена возможность моделирования в рамках традиционных методов восстановления фазовых портретов, отмечены недостатки такого подхода. Приведены результаты, полученные при применении предложенного авторами способа восстановления координат вектора состояния. Исследована возможность получения грубой математической модели при использовании статистического метода. Обсуждаются проблемы, связанные с адекватностью математического описания, отмечаются серьезные недостатки методики глобальной реконструкции и излагаются рассуждения авторов по поводу перспективности такой методики для задач моделирования.

Введение

Один из способов изучения различных процессов и явлений реальной жизни состоит в построении и исследовании их математических моделей. Такой подход является универсальным, поскольку он позволяет абстрагироваться от изучаемого объекта, рассматриваемого в рамках конкретной области естествознания, путем перехода на язык математического описания. В зависимости от вида модели к исследованиям могут быть привлечены методы нелинейной динамики и теории колебаний (в том случае, если математическое описание представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или дискретных отображений), теории волновых процессов (если модель выбрана в виде уравнений в частных производных) и т.д. Наличие модели исследуемой системы значительно расширяет возможности ее изучения, позволяя решать задачу предсказания как ее поведения во времени, так и эволюцию режимов ее функционирования при изменении управляющих параметров.

Работая с тем или иным математическим описанием, исследователь должен иметь четкое представление об адекватности такого описания реальному явлению. Соответственно, при построении модели в нее должны быть заложены все наиболее существенные факторы, оказывающие влияние на поведение системы. Разумеется, адекватность любого математического описания будет зависеть от степени осведомленности исследователя об изучаемом объекте.

Наиболее сложная, хотя и широко распространенная ситуация будет в случае так называемого «черного ящика», когда доступной для наблюдения является только зависимость одной из характеристик a , описывающих состояние системы в данный момент, от времени. Такая зависимость $a(t)$, измеренная в течение

конечного времени t_0 , называется наблюдаемой (или реализацией) системы, а при дискретизации с шагом Δt ($a(i\Delta t) = a_i, i=1, N; N = \lfloor t_0/\Delta t \rfloor$) она носит название временного ряда. Делается достаточно серьезное предположение о том, что наблюдаемая $a(t)$ является детерминированно порожденной, то есть представляет собой реализацию некоторой динамической системы (ДС). Это предположение существенно сужает класс систем, пригодных для глобального моделирования описанным в настоящей работе методом.

До 1980 года считалось, что для описания нелинейных динамических систем в терминах фазового пространства (или пространства состояний) необходимо знание временных зависимостей всех фазовых переменных, которые в действительности доступны для наблюдения крайне редко, тогда как ситуация «черного ящика» представляется более типичной. В 1980 году была опубликована работа Паккарда [1], в которой отмечалось, что фазовый портрет динамической системы может быть восстановлен по скалярному временному ряду a_i , если в качестве недостающих координат вектора состояния используется тот же самый ряд a_i , взятый с некоторым запаздыванием. В 1981 году появилась работа [2], где Такенсом была доказана теорема, утверждавшая, что по одномерной незашумленной реализации $a(t)$ ДС, обладающей аттрактором размерности d , методом задержки

$$x(t) = \{a(t), a(t+\tau), \dots, a(t+(m-1)\tau)\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad (1)$$

(τ – задержка по времени, которая может быть практически любой, m – размерность пространства вложения, $m \geq 2d+1$), можно восстановить множество x , являющееся топологически эквивалентным аттрактору исходной системы.

Появление теоремы Такенса создало предпосылки для решения на ее основе задач предсказания по временному ряду [3,4], а в 1987 году была опубликована работа Кремерса и Хюблера [5], где предлагался метод восстановления уравнений ДС по ее одномерной реализации. Таким образом, была продемонстрирована возможность поставить в соответствие экспериментальному сигналу математическую модель в виде системы ОДУ или дискретных отображений, решение которой при удачном априорном задании общего вида эволюционного оператора могло бы с достаточной степенью точности воспроизвести исходный сигнал. Идея такого метода была сразу же воспринята многими исследователями, в результате чего работа [5] получила широкую известность. В течение нескольких лет появился ряд статей по данной тематике, обзор которых с более подробным изложением методики реконструкции математической модели приведен в разделе 1.

В настоящей работе рассматривается применение алгоритма глобальной реконструкции к сигналу, описывающему электрическую активность сердца человека – электрокардиограмме (ЭКГ). Кратко обоснуем наш интерес к этому сигналу.

Во-первых, в последние годы стал очевидным рост интереса к объектам биологического происхождения со стороны специалистов в области нелинейной динамики. Биологические системы представляют собой обширное поле деятельности, где достижения теории динамических систем могут находить свое практическое применение.

Во-вторых, сигнал ЭКГ является достаточно сложным по форме и обладает некоторыми особенностями, которые выделяют его из реализаций других колебательных систем, демонстрирующих хаотическое поведение как биологического, так и физического происхождения. Кроме того, поскольку исследование электрокардиограмм с давних пор является популярным и эффективным методом диагностики, данный сигнал широко распространен и легко доступен.

Появление в современной нелинейной динамике направления, связанного с изучением сердечной деятельности, произошло сравнительно недавно [6,7]. С одной стороны, стало появляться большое количество работ, имеющих отношение

к задачам анализа по экспериментальным данным: диагностика нормы и патологии [8–13], изучение структуры фазового пространства ЭКГ [14]; с другой стороны, делаются попытки решения задачи синтеза ДС [15,16].

Данная работа представляет собой обзор, в котором будут собраны воедино и проанализированы результаты применения методики реконструкции математической модели к ЭКГ, полученные авторами в разное время. В этом обзоре мы постараемся изложить степень нашего сегодняшнего понимания возможности решения задачи реконструкции применительно к ЭКГ, отметив те сложности и проблемы, с которыми неизбежно будет сталкиваться исследователь при ее решении.

В разделе 2 настоящей работы рассматриваются результаты моделирования с применением традиционных методов восстановления фазовых портретов, отмечаются недостатки такого подхода. В разделе 3 приводятся результаты, полученные при применении предложенного авторами в [17] способа восстановления координат вектора состояния. В разделе 4 рассматривается возможность получения грубой математической модели при использовании статистического метода. И, наконец, в заключении обсуждаются проблемы, связанные с адекватностью математического описания, отмечаются серьезные недостатки методики глобальной реконструкции и излагаются рассуждения авторов по поводу перспективности такой методики для задач моделирования.

1. Описание алгоритма глобальной реконструкции ДС

Задать динамическую систему означает указать набор величин, однозначно определяющих ее состояние в данный момент времени, и оператор эволюции, то есть способ, по которому можно определить состояние в любой момент времени t по известному состоянию в момент t_0 [18]. Само определение ДС подразумевает наличие 2-х этапов реконструкции математической модели по скалярному временному ряду, а именно восстановление фазового портрета ДС и запись конкретного вида эволюционного оператора. Рассмотрим эти этапы более подробно.

1.1. Реконструкция фазового портрета. Предположим, что в результате эксперимента измеряются значения некоторой физической величины a , то есть набор $a_i = a(i\Delta t)$, $i = 1, N$. Считаем, что ряд a_i является детерминированно порожденным некоторой динамической системой с непрерывным или дискретным временем, представляя собой дискретизованную с шагом Δt временную зависимость одной из переменных, определяющих состояние данной ДС, то есть, как отмечается в [19], является одномерной проекцией фазовой траектории динамической системы. Предполагается, что эта траектория принадлежит аттрактору системы, размерность которого равна d . В этом случае, согласно Такенсу, задать вектор состояния можно по методу (1).

На практике при вычислении метрических (размерность) или динамических (ляпуновские показатели) характеристик аттрактора значение m , определяемое формулой Манэ [20] ($m \geq 2d+1$), часто оказывается завышенным [21], и бывает достаточно ограничиться пространством вложения с меньшей размерностью (но, естественно, большей, чем d).

В связи с этим возникает необходимость определения размерности аттрактора. Данная проблема представляет собой отдельное направление в задаче реконструкции, которой посвящено множество работ. Обычно вместо размерности Хаусдорфа d вычисляют так называемую корреляционную размерность D_c [22–25], используя формулу

$$D_c = \lim_{e \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} [\ln C(e, N) / \ln e], \quad (2)$$

где $C(e, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} v(e - |x_i - x_j|)$ – корреляционный интеграл, e – размер ячейки разбиения фазового пространства, N – число точек, используемых для оценки размерности, v – функция Хевисайда.

Несмотря на то, что теорема Такенса не предусматривает никаких ограничений на величину τ , выбор задержки может оказывать очень существенное влияние на значение D_c . В самом деле, в случае малого τ восстановленный аттрактор в фазовом пространстве будет очень вытянут и расположен вдоль прямой, определяемой уравнением $x_1 = x_2 = \dots = x_m$, в результате чего теряется информация о структуре аттрактора, а также уменьшается расстояние между его соседними точками, что приводит к изменению величины размерности (к ее уменьшению). С другой стороны, слишком большое τ также ведет к геометрическим искажениям реконструированного множества, а следовательно, опять – таки к изменению D_c .

Различными исследователями было предложено использовать множество способов выбора оптимального τ . Например, на основе расчета функции взаимной информации [24], первого минимума логарифма обобщенного корреляционного интеграла [25] и т.п.

Иногда для практических целей значение τ определяется менее строгим образом, «на глаз», исходя из геометрии реконструированного множества (чтобы аттрактор не был слишком вытянут ни в одном из направлений).

Метод задержки Паккарда – Такенса является не единственным способом задания вектора состояния, хотя, пожалуй, наиболее известным и широко используемым. Альтернативой ему может служить так называемый метод последовательного дифференцирования [26–32]. Как будет показано ниже, он имеет определенные преимущества при решении задачи реконструкции математической модели. В общих чертах идея данного метода состоит в следующем. Также, как и ранее, пусть имеется временной ряд $a(i\Delta t) = a_i$, $i = 1, N$. Вектор состояния в фазовом пространстве может быть задан следующим способом:

$$x(t) = \{a(t), da(t)/dt, \dots, d^{m-1}a(t)/dt^{m-1}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}. \quad (3)$$

Поскольку известны значения a_i только в дискретные моменты времени $i\Delta t$, координаты x_j вектора x определяются путем численного дифференцирования исходного временного ряда по приближенным математическим формулам. Очевидно, что точность вычисления производных будет определяться малостью величины шага дискретизации Δt .

Серьезным недостатком метода последовательного дифференцирования является чувствительность к шуму при работе с экспериментальными данными, что делает его практически неприменимым для пространств вложения большой размерности (по крайней мере, без проведения предварительной процедуры фильтрации).

Существует еще ряд способов задания состояния, которые являются менее известными, чем два вышеуказанных [26,33]. К их числу можно отнести метод, предложенный в работе [17] для реконструкции фазового портрета по одномерной реализации фазовой траектории, принадлежащей неоднородному аттрактору, то есть притягивающему множеству, содержащему чередующиеся участки со значительно более медленным и значительно более быстрым движением, чем в среднем по аттрактору. Дифференцирование такой реализации будет приводить к получению временной зависимости, состоящей из участков с еще более медленным и еще более быстрым движением по сравнению с исходной, что в результате сильно затрудняет получение модельных уравнений.

Предложенный метод восстановления фазового портрета состоит в следующем. Типичная экспериментальная реализация $a(t)$ может быть рассмотрена в виде суммы 4-х слагаемых

$$a(t) = O(t) + S(t) + \xi(t) + C, \quad (4)$$

где $O(t)$ – стационарная составляющая автоколебательного процесса, среднее по времени значение которой равно нулю; $S(t)$ – компонент, появляющийся при нестационарности процесса и отвечающий за «плавание» среднего уровня, которое обычно является очень низкочастотным; $\xi(t)$ – аддитивный шум; C – постоянная составляющая сигнала $a(t)$.

После предварительной обработки экспериментальной реализации (фильтрации низкочастотной области спектра, позволяющей избавиться от нестационарности, фильтрации от шума и приведения исходных данных к нулевому среднему) сигнал $a(t)$ будет содержать только компонент $O(t)$.

Если в качестве одной из координат вектора состояния рассмотреть интеграл от $a(t)$ с переменным верхним пределом

$$a_1(t) = \int_0^t a(t_1) dt_1 = \int_0^t O(t_1) dt_1, \quad (5)$$

то поскольку интегрирование медленных участков даст более быстро меняющиеся зависимости и наоборот, фазовые портреты, восстановленные одним из способов

$$x(t) = \left\{ \int_0^t a(t_1) dt_1, a(t), da(t)/dt, \dots, d^{m-2}a(t)/dt^{m-2} \right\} \quad (6)$$

или

$$x(t) = \left\{ \int_0^t a(t_1) dt_1, a(t), a(t+\tau), \dots, a(t+(m-2)\tau) \right\}, \quad (7)$$

будут более однородными, чем при использовании формул (1) или (3).

1.2. Реконструкция математической модели. После восстановления фазового портрета аттрактора ДС любым из вышеперечисленных методов, может быть решена задача реконструкции оператора эволюции [5,17,27–32,34–38]. Наиболее простой способ для этого – создание m -мерного дискретного отображения

$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= f_1(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{m,i}), \\ x_{m,i+1} &= f_m(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{m,i}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $x_{j,i}$ – координаты вектора состояния, рассмотренного в моменты времени $i\Delta t$, f_j – нелинейные функции.

В рамках алгоритма глобальной реконструкции для получения конкретного вида эволюционного оператора необходима априорная информация об этих функциях. Иначе говоря, экспериментатор должен сам, из каких-то соображений, сделать предположение о виде нелинейностей в правых частях уравнений.

В простейшем случае задание f_j может осуществляться полиномами некоторой степени ν

$$f_j(x_i) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_m} \prod_{k=1}^m x_{k,i}^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^m l_k \leq \nu, \quad (9)$$

где $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_m}$ – неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. Для аппроксимации могут применяться полиномы Лежандра [5], либо может использоваться более сложная методика построения математической модели [27]. При дальнейшем изложении мы ограничимся формулой (9) для задания f_j .

Система уравнений (8) допускает запись для любого номера i , а следовательно, для нахождения коэффициентов каждой функции f_j необходимо решить систему N линейных алгебраических уравнений

$$x_{j,i+1} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_m} \prod_{k=1}^m x_{k,i}^{l_k}, \quad i = 1, \dots, N \quad (10)$$

с неизвестными $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_m}$, в которой N – число точек скалярного временного ряда, используемых для аппроксимации правых частей, ν – степень полинома.

При заданных m и ν число коэффициентов K полиномов (9) может быть определено по формуле $K=(m+\nu)!/(m! \nu!)$. Поскольку, как правило, $N \gg K$, то для конкретизации эволюционного оператора система уравнений (10) решается методом наименьших квадратов. Получающаяся в результате такой процедуры математическая модель является очень громоздкой, однако при условии удачного выбора общего вида нелинейных функций она позволяет восстановить сигнал с достаточной степенью точности.

Аналогичным образом можно реконструировать не только дискретные отображения, но и математические модели в виде системы ОДУ 1-го порядка.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ &\dots \\ \dot{x}_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (11)$$

Смысл функций в правых частях тот же, что и ранее. Так как на первом этапе алгоритма была осуществлена реконструкция фазовой траектории, это значит, что все $x_i(t)$ известны; следовательно, можно определить производные от них. Поэтому (11) снова есть не что иное, как система линейных относительно неизвестных коэффициентов алгебраических уравнений.

Если в качестве способа задания вектора состояния в фазовом пространстве используется метод последовательного дифференцирования, то математическую модель можно восстановить в более простом виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_m = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (12)$$

в силу того, что взаимосвязь между координатами однозначно задается формулой (3). Тот же вид математического описания (12) получается и для реконструкции вектора состояния по формуле (6).

Таким образом, приведенный алгоритм позволяет скалярному временному ряду поставить в соответствие математическую модель. Однако следует отметить ряд сложностей, с которыми приходится сталкиваться при практической реализации данного алгоритма.

Основной проблемой является правильный выбор нелинейных функций в правых частях модельных уравнений. Если используется метод последовательного дифференцирования для задания координат вектора состояния, то математическая модель будет содержать только одну неизвестную функцию. Как уже отмечалось, наиболее простой способ задания нелинейности состоит в полиномиальной аппроксимации.

Однако возникает вопрос: насколько это правомерно? Рассмотрим в качестве примера известную модель Ресслера. Как показано в [27], только для случая, когда считается заданной лишь вторая координата этой модели, система Ресслера путем замены переменных может быть сведена к виду (12), где f – полином, задаваемый формулой (9). Если в качестве исходной выбирается любая другая координата, то функция f будет представлять собой отношение полиномов $f = P/Q$. А это значит, что выбор полиномиальной нелинейности не всегда оправдан. Некоторые авторы (например, [29,30,37,38]) предлагают осуществлять поиск математической модели в форме

$$g_j \dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (13)$$

то есть домножать систему (11) на $g_j = g_j(\mathbf{x})$ – на одну из функций $1, x_j, x_j^2, x_j x_k; j, k = 1, 2, \dots, m$. В ряде ситуаций такой подход может оказаться весьма полезным. Однако при работе с экспериментальными временными рядами, порожденными ДС с неизвестным оператором эволюции, проблема подбора нелинейностей остается очень сложной задачей. Говорить о том, что математическая модель восстановлена, можно только с большой осторожностью даже в случае, когда удастся добиться большой степени сходства реализаций и фазовых портретов аттракторов для исходных данных и для решения реконструированной системы уравнений.

Другая проблема состоит в необходимости работать с зашумленными данными при обработке экспериментальных временных рядов. С одной стороны, более желательным является использование метода последовательного дифференцирования для восстановления фазовой траектории, поскольку при этом можно получить модель, содержащую приблизительно в m раз меньше коэффициентов при различных нелинейностях, чем при использовании задержки.

Однако, дифференцирование неизбежно будет приводить к усилению шумового компонента в производных высокого порядка. Без предварительной фильтрации уже реализация второй производной может оказаться чисто шумовым процессом.

При практическом применении алгоритма глобальной реконструкции возникает еще ряд проблем, которые связаны с оптимальным выбором параметров численной схемы, но они уже не носят принципиального характера и, как будет показано в 4 разделе, могут успешно решаться при использовании статистического метода для конкретизации эволюционного оператора.

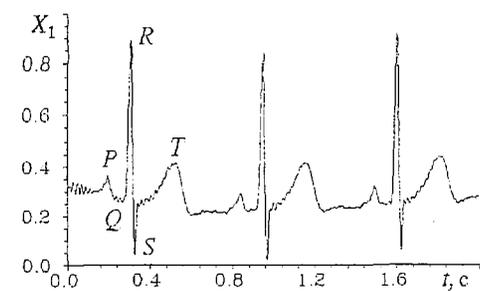
Заканчивая изложение методики глобальной реконструкции, хотелось бы еще раз обратить внимание на то, что произвольный выбор нелинейностей не всегда позволяет осуществить удачную реконструкцию. В частности, в работах [27,30] указывается на возможность нескольких случаев при решении задачи моделирования. В рамках данного обзора мы решили не проводить анализа этих случаев, ограничившись ссылками на статьи, в которых они разобраны достаточно подробно.

Отметим также, что алгоритм глобальной реконструкции в последнее время стал находить свое применение не только в задачах построения математической модели, но и, например, в задачах классификации динамических режимов [28,34,39].

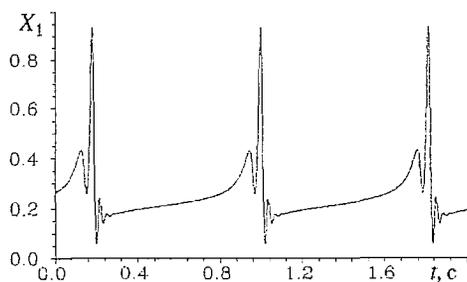
2. Моделирование в рамках традиционных методов реконструкции аттрактора ДС

В данной главе будут приведены результаты моделирования по одномерной реализации ЭКГ при использовании метода последовательного дифференцирования для задания координат вектора состояния в фазовом пространстве. Исходный сигнал (рис. 1, а) представляет собой чередующуюся последовательность участков, содержащих P, Q, R, S, T – зубцы, и «пауз» – интервалов между зубцами T и P [40,41]. Интерес исследователей к моделированию динамики сердечной деятельности основан на том, что ряд патологий находит свое выражение в изменении формы зубцов ЭКГ, их исчезновении, смене полярности и т.п. С этой точки зрения наличие модели позволило бы рассматривать переход от нормы к патологии как некую бифуркационную перестройку режима работы сердца, изучение которой могло бы быть весьма полезным для решения задач диагностики динамических режимов. Однако в этом вопросе еще очень многое неясно. В частности, следует ли рассматривать переходы от нормы к патологии как бифуркации в одной и той же ДС, либо как результат перестройки самой динамической системы [7]? Наличие хорошей модели могло бы внести некоторую ясность в этот вопрос.

Ставя задачу получения модели методом глобальной реконструкции,



а



б

Рис. 1. Исходная ЭКГ (а) и решение математической модели, реконструированной при использовании метода последовательного дифференцирования (3) на первом этапе алгоритма (б)

указанных в [31,36], удалось восстановить динамическую систему, решение которой приведено на рис.1,б. Данная система позднее [42,43] была достаточно тщательно исследована, поэтому в данной работе мы сконцентрируем внимание в большей степени на недостатках как самой модели, так и метода последовательного дифференцирования применительно к рассматриваемой задаче.

Во-первых, получить грубую модель для ЭКГ, изображенной на рис. 1, а, удалось только при конкретных значениях параметров численной схемы, определенных путем тщательного перебора возможных значений. Попытки применения методики глобальной реконструкции к другим электрокардиограммам с использованием последовательного дифференцирования для задания вектора состояния, равно как и метода задержки Паккарда – Такенса, оказались безуспешными. Кроме того, несмотря на то, что решение реконструированных уравнений модели (рис. 1,б) качественно повторяет структуру ЭКГ (содержит все необходимые P, Q, R, S, T -зубцы), количественное различие между полученным решением и исходными данными достаточно велико.

Во-вторых, реконструировать грубую модель оказалось возможным только при работе с зашумленными данными, использование же фильтрованных временных рядов не давало результата.

Казалось, что получается парадокс: чем хуже качество записи сигнала ЭКГ, тем лучше результат моделирования, несмотря на то, что дифференцирование зашумленного сигнала неизбежно приводит к резкому возрастанию ошибки вычисления производных.

Постараемся внести ясность в сложившуюся ситуацию. Рассмотрим электрокардиограмму, отфильтрованную от шума методом, приведенным в работе [44] (рис. 2, а). Она содержит участки с быстрыми (между зубцами P и T) и медленными (между T и P) изменениями временной зависимости исходного сигнала ЭКГ. Ясно, что при последовательном дифференцировании участку между T и P зубцами будет соответствовать еще более медленно меняющаяся зависимость, чем для временного ряда (см. рис. 2, а), и наоборот. Следовательно, в восстановленной

предварительно необходимо определиться с выбором минимально возможной размерности пространства вложения. С этой целью необходимо провести расчет размерности Хаусдорфа или оценить ее путем вычисления корреляционной размерности D_c (2). Для сигнала, приведенного на рис. 1,а, эта оценка позволила получить значение $D_c=2.79$, хотя данная величина является несколько меньшей, чем приводимые в других работах [7]. Она позволяет ограничиться трехмерным пространством для реконструкции фазового портрета. Мы не приводим проекции фазовых портретов, поскольку они уже были представлены в предыдущих работах [31,36].

В рассматриваемом примере из-за низкой частоты дискретизации исходных данных (запись ЭКГ производилась с частотой выборки 200 Гц, что является недостаточным для вычисления с большой точностью производных от столь сложного сигнала) осуществлялась интерполяция временного ряда полиномом высокой степени. При значениях параметров численной схемы,

фазовой траектории (см. рис. 2, б) будут присутствовать интервалы времени, в течение которых все координаты практически не меняются. Если бы они совсем не менялись (что соответствует точке в фазовом пространстве), то изучаемую систему уже нельзя было бы считать динамической, поскольку происходила бы потеря однозначности и реконструировать модель не представлялось бы возможным. За счет пусть слабого, но все же имеющего место изменения фазовых координат в области «паузы» потери однозначности не происходит, однако возникает проблема, связанная с реконструкцией модели, поскольку аппроксимация правых частей осуществляется методом наименьших квадратов, а наличие ярко выраженной неоднородности фазового портрета является, по всей видимости, основным препятствием для данного алгоритма моделирования.

При работе с зашумленными данными частично удается снять проблему неоднородности за счет большой ошибки вычисления производных. Как следствие, участку «паузы» будет соответствовать быстро меняющийся процесс, обусловленный усилением шумового компонента в производных высокого порядка. Очевидно, именно это и послужило причиной того, что восстановить модель (рис. 1, б) удалось как раз для зашумленного сигнала.

Если вместо формулы (3) используется метод Паккарда – Такенса (1) для задания вектора состояния, то возможны следующие ситуации. Для малой величины задержки (τ много меньше длительности «паузы») (рис. 2, в) вновь возникает проблема, связанная с неоднородностью фазового портрета. Если τ сравнимо с длительностью «паузы», то фазовый портрет будет более однородным с точки зрения скорости движения вдоль фазовой траектории, но станет менее гладким (рис. 2, г). Попеременно, в то время как две из трех координат фазового портрета будут оставаться практически постоянными, третья начнет сравнительно быстро меняться.

Реконструирование математической модели с подобным аттрактором также представляет собой весьма сложную задачу. Кроме того, как уже отмечалось, метод Паккарда – Такенса будет приводить к модели более громоздкой, чем при использовании метода последовательного дифференцирования.

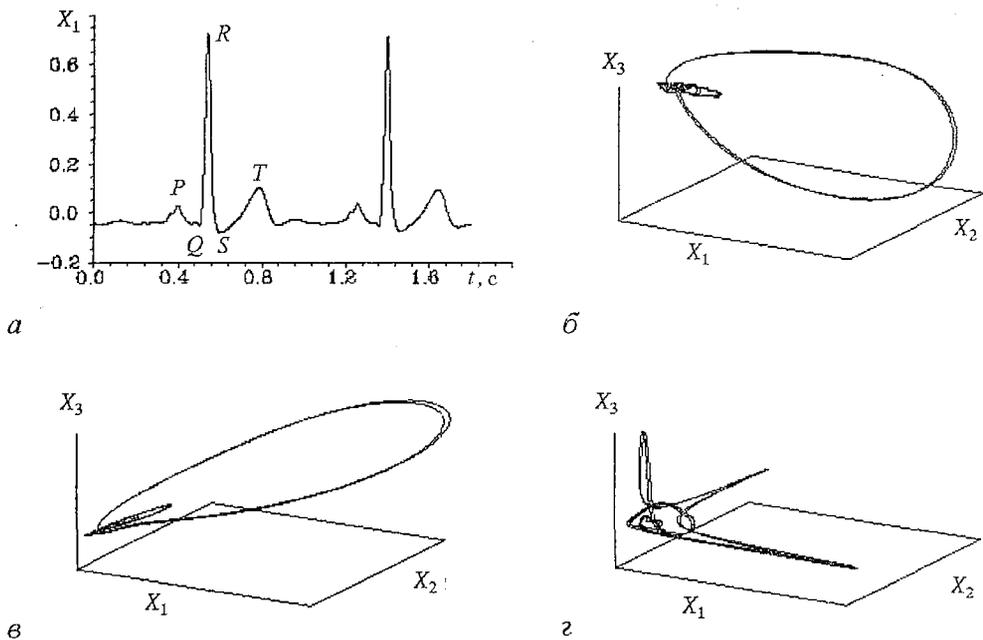


Рис. 2. Сигнал ЭКГ, отфильтрованный от шума методом [44] (а); фазовый портрет, восстановленный по одномерной реализации (а) методом последовательного дифференцирования (3) (б); фазовые портреты, восстановленные методом задержки (1) для малого τ (в) и большого τ (г)

3. Моделирование при использовании метода интегрирования для реконструкции фазового портрета

Учитывая особенности сигнала ЭКГ, связанные с наличием неоднородности фазового портрета, более целесообразным является применение методов вложения (6) или (7) вместо (1) или (3). Однако даже в этом случае задача реконструкции математической модели по одномерной реализации ЭКГ остается крайне сложной. Использование интеграла позволило повысить вероятность получения грубой ДС, демонстрирующей хаотическое поведение, но добиться хорошего локального соответствия ее решения сигналу ЭКГ нам не удалось.

Ориентируясь на оценки фрактальной размерности фазового портрета ЭКГ, сделанные в работе [7], необходимо увеличить размерность пространства вложения по крайней мере до 4-х. При восстановлении фазового портрета методами (1) или (7) это приводит к существенному усложнению модельных уравнений. Использование (3) или (6) даже для фильтрованных данных увеличивает ошибку за счет необходимости большего количества вычислений производных от исходного скалярного временного ряда, что создает проблемы при аппроксимации правых частей модели.

В то же время одной из особенностей ЭКГ является тот факт, что один ее характерный период, то есть повторяющаяся последовательность «зубцы P, Q, R, S, T – пауза», содержит в себе всю информацию о структуре QRS -комплекса, P и T зубцов, которой может быть достаточно для диагностики ряда патологических изменений.

Поэтому на первом этапе было решено ограничиться более простой задачей – моделированием ДС, решением которой является периодический сигнал, с большой степенью точности воспроизводящий один период ЭКГ. Такую модель можно было бы поставить в соответствие сигналу электрокардиограммы в случае периодичности сердечного ритма, что не соответствует действительности. Поэтому, несомненно, такой подход к моделированию может вызывать определенные нарекания. Однако без ответа на вопрос о решаемости даже такой упрощенной задачи применение методов реконструкции к ЭКГ теряет смысл.

Для решения задачи моделирования рассматривались две ЭКГ с несколько отличным поведением, предварительно подвергнутые фильтрации от шума методом, описанным в [44] (рис. 3, а, в). Для каждой из них произвольным образом

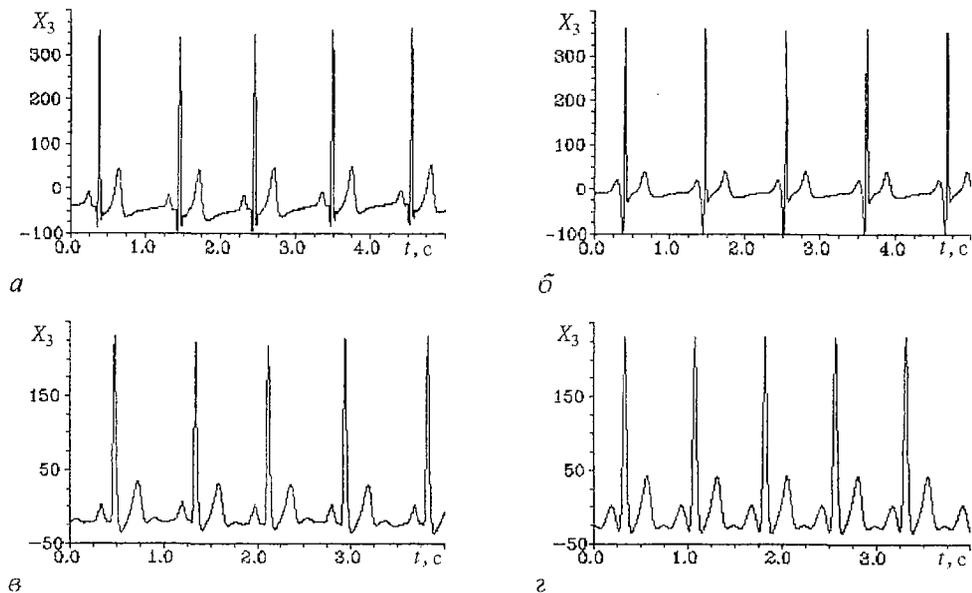


Рис. 3. Периодические сигналы, полученные путем замыкания одного периода ЭКГ (а, в) и решения реконструированных систем ОДУ (б, г)

выбирался один период. Осуществлялось многократное повторение выбранных участков ЭКГ для получения периодических временных рядов достаточной длины. В дальнейшем эту процедуру будем называть «замыканием», поскольку она позволяет сформировать в фазовом пространстве замкнутую траекторию. Исходному периоду для каждой реализации соответствовал интервал между двумя последовательными R -зубцами, поэтому искажения, вносимые за счет искусственного преобразования, состояли лишь в весьма незначительном изменении величины одного из этих зубцов.

Для рассматриваемых в настоящей главе примеров, в отличие от (6), осуществлялось последовательное вычисление двух интегралов.

Пусть $a(t)$ – исходный сигнал (искусственно полученная периодическая реализация, приведенная к нулевому среднему значению). Вычислялись

$$b(t) = \int_0^t a(t_1) dt_1, \quad c(t) = \int_0^t b(t_1) dt_1. \quad (14)$$

После этого $c(t)$ использовалась в качестве исходной реализации. Методом последовательного дифференцирования восстанавливались остальные координаты вектора состояния, который, таким образом, имел следующий вид:

$$x(t) = \{c(t), dc(t)/dt, d^2c(t)/dt^2, \dots, d^{m-1}c(t)/dt^{m-1}\}. \quad (15)$$

Ясно, что $d^2c(t)/dt^2$ есть исходный сигнал $a(t)$.

Приведенный способ позволяет получить фазовые портреты, являющиеся менее неоднородными, по сравнению с фазовыми портретами, восстановленными с помощью традиционных методов. Поэтому применение метода наименьших квадратов для нахождения коэффициентов правых частей модели становится более эффективным. Для выбранных периодов от различных ЭКГ (см. рис. 3, *a, в*) были восстановлены две модели (3-х и 4-х мерная, соответственно) в виде систем ОДУ в форме (12), решения которых приведены на рис. 3, *б, г*.

Применение вышеописанной методики (использование двух интегралов с переменными верхними пределами от сигнала, полученного замыканием одного периода ЭКГ) сделало возможным получать грубые математические модели в виде систем дискретных отображений (рис. 4, *б*), моделировать некоторые патологии

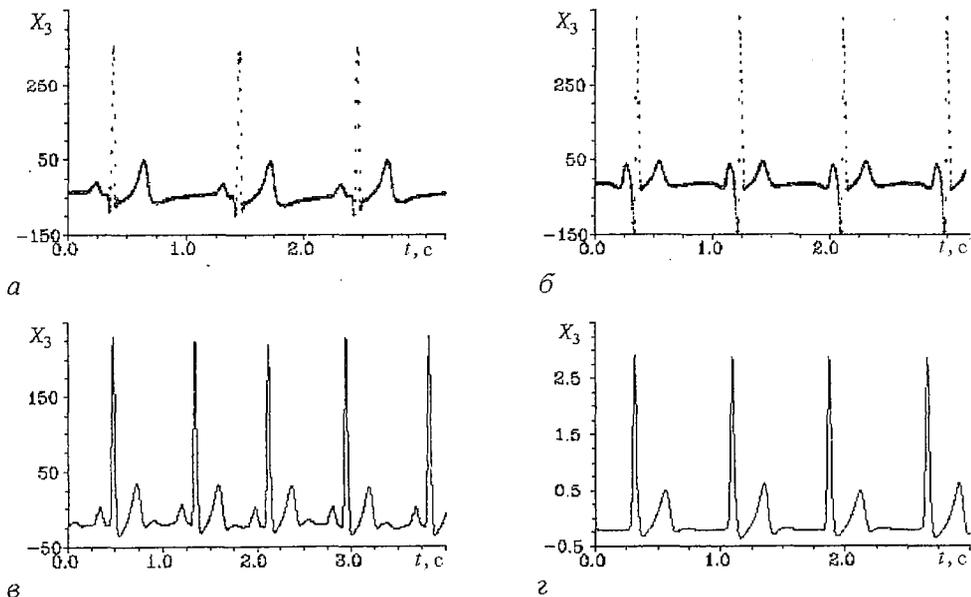


Рис. 4. Исходный временной ряд, соответствующий замыканию одного периода ЭКГ (*a*); решение реконструированной системы дискретных отображений (*б*); сигнал, соответствующий случаю патологии (*в*), и решение модельной системы ОДУ (*г*)

(рис. 4, з) и т.д. Приведенные результаты наглядно демонстрируют преимущества используемого метода восстановления фазового портрета неоднородного аттрактора для задачи глобальной реконструкции.

4. Применение статистического метода

При описании алгоритма глобальной реконструкции отмечалось, что для конкретизации эволюционного оператора необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами C_{j_1, j_2, \dots, j_m} методом наименьших квадратов. Однако при практическом использовании алгоритма будет существовать зависимость значений этих коэффициентов от выбора параметров численной схемы (размерности пространства вложения m , степени полиномов ν , количества точек восстановленного фазового портрета, используемых для аппроксимации правых частей модельных уравнений N , и т.д.), в связи с чем более строгий подход к задаче моделирования предполагает изучение зависимости C_{j_1, j_2, \dots, j_m} от параметров. В настоящей работе будут проиллюстрированы зависимости значений искомых коэффициентов от количества рассматриваемых точек в фазовом пространстве.

В предыдущем разделе были приведены результаты решения задачи реконструкции математической модели для одного периода ЭКГ. На двух конкретных примерах (для сигналов, изображенных на рис. 3, в и 4, в) исследуем возможность получения грубой математической модели, выбор коэффициентов для которой осуществляется с помощью статистического метода.

С этой целью фиксировались все параметры алгоритма глобальной реконструкции, кроме числа N , при изменении которого осуществлялась аппроксимация неизвестных коэффициентов*.

Для каждой зависимости C_{j_1, j_2, \dots, j_m} вычислялась плотность распределения вероятности значений коэффициентов. Окончательный вид оператора эволюции определялся путем выбора значений C_{j_1, j_2, \dots, j_m} , соответствующих максимумам плотностей вероятности.

Интегрирование полученных таким образом модельных систем позволило убедиться в том, что максимумам плотностей вероятности соответствуют грубые решения (рис. 5, а, б), с достаточной степенью точности воспроизводящие исходные сигналы (см. рис. 3, в и 4, в). Следует также отметить, что вариация C_{j_1, j_2, \dots, j_m} в достаточно широких пределах относительно максимумов вероятности не приводила к разрушению динамического режима.

Как показали исследования, применение статистического метода позволяет ограничиться для моделирования достаточно коротким скалярным временным

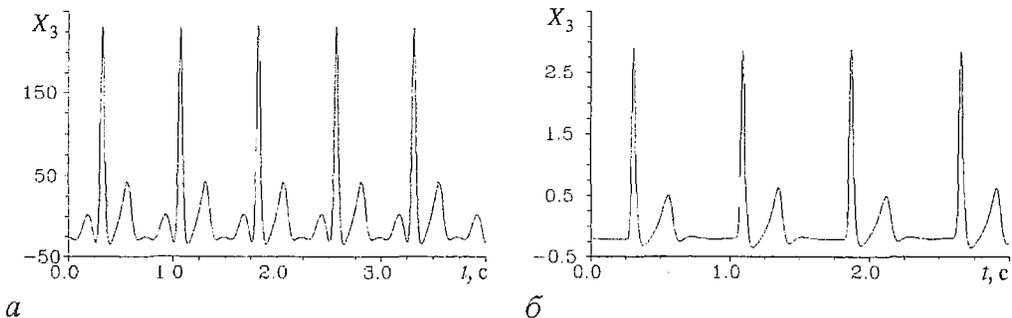


Рис. 5. Решения реконструированных систем ОДУ при использовании статистического метода для конкретизации оператора эволюции

* Поскольку математические модели для рассматриваемых примеров имели вид (12), то есть содержали только одну нелинейную функцию, индекс j в номере коэффициента в дальнейшем будем опускать.

рядом. Данные результаты были достаточно подробно изложены в [45], поэтому в настоящей работе они не приводятся.

Заключение

В настоящей работе приведены результаты применения методики реконструкции математической модели к сигналу, описывающему электрическую активность сердца человека – ЭКГ. Использовались различные способы восстановления фазовой траектории по одномерной реализации, указаны преимущества и недостатки этих методов применительно к задаче глобального моделирования. Проанализируем полученные результаты.

Во введении отмечалось, что любая модель должна рассматриваться с точки зрения ее адекватности моделируемому явлению или процессу. Задача глобальной реконструкции является принципиально неоднозначной: имеет место большая зависимость от априорного задания общего вида правых частей модельных уравнений. Поэтому, меняя априорный вид нелинейных функций, можно получить целый набор математических описаний, позволяющих с какой-то степенью точности воспроизвести исходный сигнал.

Однако факт получения модельных уравнений, с нужной степенью точности воспроизводящих исходный сигнал, не дает основания говорить о реконструкции порождающей этот сигнал системы. Поэтому в данной ситуации можно вести речь только о динамическом описании сигнала, что позволяет, например, решать задачи предсказания поведения системы на конечных временах, расчета метрических и динамических характеристик аттрактора по короткому временному ряду [45].

Несмотря на невозможность на данном этапе восстановления с помощью метода глобальной реконструкции вида динамической системы, генерирующей изучаемый сигнал, данный алгоритм позволяет осуществлять математическое описание очень сложных сигналов (таких, как ЭКГ), когда никакие другие способы моделирования этого сделать не могут. Следовательно, данная методика может быть использована для построения математических моделей сложных процессов и явлений, когда модели, построенные из каких-то аналитических соображений в качестве составных частей, содержали бы математические описания, полученные с применением алгоритма глобальной реконструкции.

Янсон Н.Б. благодарит международную программу “Соровские студенты и аспиранты” за поддержку (грант а 96–2593).

Библиографический список

1. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., and Shaw R.S. Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P.712.
2. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // *Warwick*. 1980. Vol. 898 of *Lecture Notes in Mathematics* / Eds D.A.Rang, L.S.Young (Springer) Berlin. 1981. P. 366.
3. Farmer J.D. and Sidorowich J.J. Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.
4. Casdagli M. Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D*. 1989. Vol. 35. P. 335.
5. Cremers J., Hübler A. Construction of differential equations from experimental data // *Z. Naturforsch. A*. 1987. Vol. 42, № 8. P. 797.
6. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.
7. Babloyantz A., Deslexhe A. Is a normal heart a periodic oscillator // *Biol. Cybernetics*. 1988. Vol. 58. P. 203.
8. Zebrowski J.J., Poplawska W., Baranowski R. Pattern entropy a tool for non-

linear dynamical analysis of a biological nonstationary system: the human heart // *Acta Physica Polonica B*. 1995. Vol. 26, № 6. P. 1055.

9. *Baranowski R., Zebrowski J.J., Poplawska W.* et al. 3-dimensional Poincare plots of the QT intervals – an approach to nonlinear QT analysis // *Computers in Cardiology*. 1995. P. 789.

10. *Peng C.K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // *Chaos*. 1995. Vol. 5, № 1. P. 82.

11. *Kurths J., Voss A., Saparin P., Witt A., Kleiner H.J., Wessel N.* Quantitative analysis of heart rate variability // *CHAOS*. 1995. Vol. 5, № 1. P. 88.

12. *Voss A., Kurths J., Kleiner H.J., Witt A., Saparin P., Dietz R., Fiehring H., Wessel N.* Neue Methoden für die Erkennung von Hochrisikopatienten in der Kardiologie // *Biomedizinische Technik*. 1994. Band 39. Heft 6. Seite 134.

13. *Анищенко В.С., Сафонова М.А., Сапарин П.И.* Измерительно-вычислительный комплекс для диагностики сложных режимов автоколебаний // *Радиотехника и электроника*. 1992. Т. 37, № 3. С. 467.

14. *Saparin P.I., Zaks M.A., Kurths J., Voss A., Anishchenko V.S.* Reconstruction and structure of electrocardiogram phase portraits // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54, № 1. P. 1.

15. *Rosenblum M., Kurths J.* A model of neural control of the heart rate // *Physica A*. 1995. Vol. 215. P. 439.

16. *Seidel H., Herzel H.* // *Modelling the Dynamics of Biological Systems* / Eds E. Mosekilde and O.G. Mouritsen. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 1995. P. 205.

17. *Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н.* Об одном методе восстановления неоднородных аттракторов // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 22, № 7. Р. 1.

18. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

19. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Рахманов А.И.* Ограничения возможностей реконструкции аттрактора для хаотических динамических систем. Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР. 1993, № 10.

20. *Mane R.* On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps // *Warwick*. 1980. Vol. 898 of *Lecture Notes in Mathematics* / Eds D.A. Rang, L.S. Young. Springer. Berlin. 1981. P. 230.

21. *Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.* Embedology // *Journal of Statistical Physics*. 1991. Vol. 65, № 3/4. P. 579.

22. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.

23. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Об одном методе оценки размерности вложения аттрактора по результатам эксперимента // *ЖТФ*. 1989. Т. 59, № 1. Р. 13.

24. *Fraser A.M., Swinney H.L.* Independent coordinates from mutual information // *Phys. Rev. A*. 1986. Vol. 33. P. 1134.

25. *Liebert W., Schuster H.G.* Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series // *Phys. Lett. A*. 1989. Vol. 142. P. 107.

26. *Breeden J.L., Packard N.H.* A learning algorithm for optimal representation of experimental data // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1994. Vol. 4, № 2. P. 311.

27. *Gouesbet G. and Letellier C.* Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 4955.

28. *Kremliovsky M., Kadtko J., Inchiosa M., Moore P.* Characterization of dolphin acoustic echo-location data using a dynamical classification method // (submitted to *Int. J. of Bif. and Chaos*).

29. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A., Surovyatkina E.D.* Predictable nonlinear dynamics: advantages and limitations // *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 71.

30. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // *Радиотехника и электроника*. 1994, вып. 2. С. 269.

31. *Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Моделирование динамических систем по

экспериментальным данным // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 3, 1995. № 3. С. 112.

32. Янсон Н.Б., Павлов А.Н., Баланов А.Г., Анищенко В.С. Задача реконструкции математической модели применительно к электрокардиограмме // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 16. Р. 57.

33. Breeden J.L., Packard N.H. Nonlinear analysis of data sampled nonuniformly in time // Physica D. 1992. Vol. 58. P. 273.

34. Kadtko J., Kremliovsky M. Signal classification using global dynamical models // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 189.

35. Anishchenko V.S., Smirnova N.B. Analysis and synthesis of dynamical systems from experimental data // SPIE. 1993. Vol. 2098. P. 137.

36. Janson N.B., Anishchenko V.S. Modeling the dynamical systems on experimental data // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 688.

37. Gribkov D.A., Gribkova V.V., Kuznetsov Y.I., Rzhanov A.G. Global dynamical modeling of time series and application to restoration of broadband signal characteristics // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 181.

38. Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кузнецов Ю.И. Восстановление внешнего воздействия по реализации одной переменной автостохстической системы // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. 1995. Т. 36, № 1. С. 76.

39. Brush J.S. Classifying transient signals with nonlinear dynamic filter banks // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 145.

40. Орлов В.Н. Руководство по электрокардиографии М.: Медицина, 1983.

41. Инструментальные методы исследования сердечно-сосудистой системы. Справочник. Под ред. Т.С. Виноградовой. М.: Медицина, 1986.

42. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. Седло-фокус в модели электрической активности сердца человека // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 4. С. 78.

43. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. Может ли режим работы сердца здорового человека быть регулярным? // Радиотехника и электроника. 1977 (в печати).

44. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Numerical Recipes in C: the art of scientific computing. Cambridge University Press. 1987. P. 514.

45. Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С. Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // Письма в ЖТФ. 1977. № 8.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 07.02.97
после переработки 28.03.97

APPLICATION OF METHOD FOR MATHEMATICAL MODEL RECONSTRUCTION TO ELECTROCARDIOGRAM

A.N. Pavlov, N.B. Janson

The algorithm for reconstruction of a mathematical model on one-dimensional realization of system under study is described. The results of its application to ECG are gathered and analysed. The possibility of modeling using the traditional methods for phase portraits reconstruction and the shortcomings of these methods in application to ECG are discussed. The results are presented obtained as the method for state vector coordinates restoration suggested by the authors was applied. The possibility for

obtaining a robust mathematical model with the help of statistical approach is considered. The problems connected with mathematical description adequacy are discussed, the serious shortcomings of the global reconstruction algorithm and the prospects of such method for the aims of modeling are mentioned.



Павлов Алексей Николаевич – родился в 1973 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1995). В настоящее время является аспирантом кафедры радиофизики СГУ. Область научных интересов – анализ временных рядов, реконструкция динамических систем по экспериментальным данным. Автор 5 статей по данной тематике.



Янсон Наталья Борисовна – родилась в Саратове (1971). Окончила Саратовский государственный университет по специальности радиофизика (1993). С 1993 года является аспиранткой кафедры радиофизики СГУ. Соросовская аспирантка (1996). Участница 4-х международных конференций (Volga Laser Tour'93, Russia; 3-rd Technical Conference on Nonlinear Dynamics (CHAOS) and Full Spectrum Processing, 95, Mystic, CT, USA; International Workshop on Nonlinear Techniques in Physiological Time-Series Analysis, 95, Dresden, Germany; ICND-96, Saratov, Russia). Автор нескольких статей. Область научных интересов – анализ временных рядов, реконструкция динамических систем по экспериментальным данным.



Предлагаемая вниманию читателя лекция «Аттракторы динамических систем» входит в содержание учебника «Избранные лекции по нелинейной динамике» (название ориентировочное), работа над которым находится в стадии завершения. Издание учебника планируется в 1998 году. Учебник состоит из 12 лекций по фундаментальным разделам нелинейной динамики, прочитанных автором в качестве спецкурса студентам и аспирантам кафедры радиофизики в осеннем семестре 1996/97 учебного года. Книгу отличают две особенности: первая – каждая из лекций по существу представляет одно из научных направлений в области знаний, которая именуется нелинейной динамикой; вторая – практически каждая из лекций в качестве основы содержит научные результаты, полученные автором совместно с учениками в лаборатории нелинейной динамики кафедры радиофизики СГУ. Последнее обстоятельство, по сути, и определило содержание учебника. Выбор лекции «Аттракторы динамических систем» для публикации в журнале не случаен. Лекция посвящена актуальной научной проблеме, которую на сегодня нельзя считать окончательно разрешенной. Ряд сформулированных в лекции положений, по-видимому, является дискуссионным, и автор будет благодарен всем заинтересованным читателям за критику и конструктивные замечания.

Автор

АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.С. Анищенко

В лекции вводится общее определение аттрактора диссипативной динамической системы, дается классификация существующих типов аттракторов, анализируются их основные характеристики. На ряде конкретных примеров изложенный материал иллюстрируется результатами численного моделирования, что дает возможность легче понять основные свойства, сходства и различия рассматриваемых типов аттракторов.

Введение

Одним из основных методов исследования автоколебательных систем является формулировка и анализ решений уравнений, описывающих их динамику. Поэтому математический раздел *Динамические системы* является одной из основ фундаментальной подготовки по теории нелинейных колебаний. В классической теории колебаний были и остаются важными вопросы исследования периодических и квазипериодических режимов, необходимых для описания эффектов генерации и модуляции колебаний. Математические образы указанных режимов колебаний (предельный цикл и n -мерный тор) не выступали в качестве основных объектов исследования, а являлись как бы дополнением, служащим альтернативной иллюстрацией указанных режимов в фазовом пространстве исследуемых систем. Действительно, основные свойства периодических колебаний исчерпывающим образом можно диагностировать по виду реализации одной из

фазовых координат $x(t)$ на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$ (T – период колебаний), дополнив эти данные расчетом спектра Фурье или автокорреляционной функции. Квазипериодические колебания в этом плане мало отличаются. В качестве времени наблюдения t_n реализации $x(t)$ нужно взять наибольшее из характерных времен, отвечающее минимальной частоте дискретного спектра. Другими словами, наличие хорошего осциллографа и анализатора спектра позволяло экспериментаторам достаточно полно исследовать свойства генераторов, включая эффекты модуляции.

Положение дел принципиально изменилось с открытием эффекта динамического хаоса. Хаотические автоколебания не являются периодическими или квазипериодическими. Поэтому наблюдение реализации $x(t)$ на любом конечном интервале времени не дает полной информации. Более того, очень трудно предсказать конкретные времена наблюдения, при которых возможно диагностировать особенности режима колебаний. В этой ситуации оказывается полезным детально анализировать геометрический образ автоколебательного режима в фазовом пространстве системы – *аттрактор*. Отметим сразу, что анализ геометрической структуры аттракторов как образов автоколебаний в диссипативных динамических системах безусловно не может дать исчерпывающей информации о колебаниях, но позволяет существенно дополнить и расширить возможности эксперимента.

Как известно, с образом динамического (детерминированного) хаоса связывается так называемый *странный аттрактор* [1–3]. Первоначально все нетривиальные режимы автоколебаний, общим свойством которых является отсутствие периодичности во времени, ассоциировались именно с образом странного аттрактора. Позднее пришло понимание того, что хаотические автоколебания по своим свойствам могут быть существенно различными, и это однозначно ведет к различию структуры и свойств соответствующих им аттракторов. Так, например, выяснилось, что странный аттрактор есть образ некоторого «идеального» хаоса, удовлетворяющего ряду строгих математических требований. Было установлено, что в реальных системах режим странного (в смысле математического определения) аттрактора не реализуется. То, что мы наблюдаем в экспериментах, чаще всего отвечает режимам так называемого *квазигиперболического* аттрактора, который более сложно устроен и пока не поддается стройному математическому описанию [4]. Отличительной особенностью как странных, так и квазигиперболических хаотических аттракторов является экспоненциальная неустойчивость фазовых траекторий и дробная размерность. Так как с этими свойствами ассоциируется наше представление о детерминированном хаосе, то на некотором этапе различиям между странными и квазигиперболическими аттракторами не придавалось существенного значения. Более того, недавно выяснилось, что режимы непериодических колебаний могут характеризоваться устойчивостью траекторий при наличии дробной размерности аттрактора или целой размерностью аттрактора при наличии экспоненциального разбегания траекторий на нем! Так возникли представления о странных нехаотических аттракторах и хаотических нестранных аттракторах.

Учитывая, что практически каждый специалист в области нелинейной динамики неизбежно сталкивается с проблемой анализа сложных непериодических режимов колебаний и их образов – аттракторов, понимание указанных выше вопросов и проблем сегодня становится просто необходимым.

В настоящей лекции мы приводим определения, примеры и свойства различных типов аттракторов динамических систем. В основу положены представления теории динамических систем. Анализируются системы N обыкновенных дифференциальных уравнений или конечномерных отображений. Изложенные результаты не претендуют на математическую строгость (хотя, безусловно, базируются на теоретических выводах) и имеют целью дать необходимую информацию, доступную экспериментаторам, специалистам в вопросах прикладной нелинейной динамики.

1. Что мы называем аттрактором

Изменение во времени состояния системы с $N/2$ степенями свободы описывается детерминированной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (динамической системой)

$$dx_i/dt = \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_N, \mu_1, \dots, \mu_n), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь $x_i(t)$ – переменные, однозначно описывающие состояние системы (фазовые координаты), μ_k – параметры системы, $f_i(x, \mu)$ – гладкие, в общем случае нелинейные функции фазовых координат, зависящие от параметров. Решение системы (1) существует, единственно для заданных начальных условий $x_i(0)$ и гладко зависит от изменения параметров и начального состояния (теорема Коши).

Эволюции системы во времени можно однозначно поставить в соответствие фазовую траекторию в N -мерном декартовом пространстве, координатами которого служат фазовые переменные, стартующую из заданной начальной точки $x_i(0)$, $i=1, 2, \dots, N$.

Мы будем говорить, в основном, об автоколебательных решениях системы (1). С точки зрения физики это означает, что в системе существует некоторый тип установившихся колебаний, характеристики которого в определенных пределах не зависят от выбора начального состояния. Как мы увидим, классической физической интерпретацией определения аттрактора динамической системы является понятие автоколебательного режима, введенное в рассмотрение Андроновым.

Обратимся к фазовому пространству \mathcal{R}^N системы (1), зафиксировав значения всех параметров системы μ_k . Пусть имеется некоторая конечная (или бесконечная) область G_1 , принадлежащая \mathcal{R}^N , которая включает в себя подобласть G_0 . Области G_1 и G_0 удовлетворяют следующим условиям: для любых начальных условий $x_i(0)$ из области G_1 при $t \rightarrow \infty$ все фазовые траектории рано или поздно достигают области G_0 ; если фазовая траектория принадлежит области G_0 в момент времени $t=t_1$, то она будет принадлежать G_0 всегда, то есть для любых $t \geq t_1$ фазовая траектория будет находиться в области G_0 [1,3].

Если эти условия выполняются, то область G_0 называется *аттрактором динамической системы* (1). Другими словами, аттрактор G_0 – это инвариантное относительно потока (1) предельное множество траекторий системы, куда стремятся и там остаются любые траектории из области G_1 , охватывающей G_0 . Область G_1 называется *областью (или бассейном) притяжения аттрактора* G_0 . В области G_1 по определению могут существовать исключительно переходные, нестационарные типы движений. Область G_0 отвечает установившимся (предельным) типам движения. В этом смысле можно сказать, что аттрактор G_0 есть изолированное предельное множество фазовых траекторий системы. Изолированное в том смысле, что любые типы движения системы в окрестности аттрактора имеют исключительно переходный характер, и в итоге при $t \rightarrow \infty$ фазовые траектории притягиваются областью G_0 . Отсюда и название – аттрактор (слово «attract» в переводе с английского означает «притягивать»).

2. Регулярные аттракторы

До открытия детерминированного хаоса было известно всего три типа устойчивых установившихся решений динамической системы (1): состояние равновесия, когда после переходного процесса система достигает стационарного (не меняющегося во времени) состояния, устойчивое периодическое решение и

устойчивое квазипериодическое решение. Соответствующими аттракторами в этих случаях являются точка в фазовом пространстве, предельный цикл и предельный n -мерный тор. Сигнатура спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) фазовой траектории в этих случаях будет:

$$\begin{aligned} &\langle - \rangle, \langle - \rangle, \dots, \langle - \rangle - \text{состояние равновесия,} \\ &\langle 0 \rangle, \langle - \rangle, \langle - \rangle, \dots, \langle - \rangle - \text{предельный цикл,} \\ &\underbrace{\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle, \dots, \langle 0 \rangle, \langle - \rangle, \dots, \langle - \rangle}_n - n\text{-мерный тор, } n \geq 2. \end{aligned}$$

Как мы увидим в дальнейшем, непериодическим решениям системы (1) могут соответствовать странные хаотические аттракторы сложной геометрической структуры, которые имеют по крайней мере один положительный ляпуновский показатель и дробную размерность. Для оценки фрактальной размерности часто используют формулу Каплана – Йорке [2]

$$D = j + [\sum_{i=1}^j \lambda_i] / |\lambda_{j+1}|, \quad (2)$$

где j – наибольшее целое число, для которого сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$. Если применить формулу (2) к указанным трем типам аттракторов, то мы получим нулевую размерность для точки, $D=1$ для предельного цикла и $D=n$ для n -мерного тора. Интересно, что во всех этих случаях фрактальная размерность строго совпадает с метрической размерностью аттракторов. То обстоятельство, что указанные типы решений являются асимптотически устойчивыми по Ляпунову, а размерность соответствующих аттракторов дается целым числом и строго совпадает с метрической, позволяет назвать указанные типы аттракторов регулярными. Нарушение одного из сформулированных условий исключает аттрактор из класса регулярных. Как сейчас стало ясно, необходимо ввести специальную классификацию нерегулярных (странных) аттракторов [3].

3. Странные хаотические аттракторы

Новый тип аттрактора динамической системы (1) был впервые обнаружен Лоренцем в 1963 году при численном исследовании знаменитой теперь модели Лоренца [5]. Строгое математическое доказательство существования непериодических решений системы (1) было дано в 1971 году Рюэлем и Такенсом, ими же было введено понятие странного аттрактора как образа детерминированного хаоса [6]. С тех пор вот уже более 25 лет явление детерминированного хаоса и понятие странного аттрактора во многих работах практически однозначно связывают друг с другом. Однако при более детальном рассмотрении это оказывается не всегда справедливым и требует пояснений.

3.1. Грубые гиперболические аттракторы. Если внимательно прочитать работу [6], то выясняется, что доказательство существования странного аттрактора было дано в жестком предположении, что динамическая система (1) является грубой гиперболической. Что это означает? Система является гиперболической, если все ее фазовые траектории седловые. Точка как образ траектории в сечении Пуанкаре в гиперболической системе всегда является седлом. Грубость означает, что при малом возмущении правых частей (1) и малой вариации управляющих параметров все траектории продолжают оставаться седловыми. Не происходит никаких бифуркаций решений системы (1)! В частности, не возникает и особых траекторий типа сепаратрисных контуров (петель). Наличие последних может быть причиной рождения устойчивых предельных циклов.

Таким образом, необходимо понимать, что странные (в смысле Рюэля –

Такенса) аттракторы всегда являются грубыми гиперболическими предельными множествами. Основной чертой, отличающей странные хаотические аттракторы от регулярных, является экспоненциальная неустойчивость фазовой траектории на аттракторе. Спектр ляпуновских экспонент в этом случае содержит как минимум один положительный показатель

$$\langle + \rangle, \langle 0 \rangle, \langle - \rangle, \dots, \langle - \rangle,$$

$$D = 2 + \lambda^+ / |\lambda_3| > 2.$$

Как видно из формулы Каплана – Йорке, фрактальная размерность аттрактора всегда будет больше двух и в общем случае не будет выражаться целым числом. Минимальная размерность фазового пространства, в которое можно «вложить» странный аттрактор, оказывается равной трем. Таким образом, режим детерминированного хаоса можно наблюдать в дифференциальных динамических системах размерности $N \geq 3$.

К сожалению, в реальных системах естествознания режим строго гиперболического грубого хаоса до сих пор не обнаружен! Истинно «странные» аттракторы являются идеальной, но недостижимой пока моделью детерминированного хаоса. В реальной жизни, как всегда, все оказывается гораздо сложнее в сравнении с идеализацией.

3.2. Аттракторы типа Лоренца. Удивительно, но это факт, что именно хаотический аттрактор в модели Лоренца оказался наиболее близким по своим свойствам и структуре к грубым гиперболическим. Аттрактор Лоренца является гиперболическим (это очень важно!), но не грубым. Негрубость аттрактора Лоренца связана с существованием счетного всюду плотного множества особых траекторий типа петель сепаратрис, что в численных экспериментах практически не проявляется. Главное, что в аттракторе Лоренца все траектории седловые и при вариации параметров не возникает устойчивых точек или циклов [7].

Уравнения Лоренца были получены из уравнений Навье – Стокса в задаче о тепловой конвекции и имеют вид

$$\dot{x} = -\sigma(x-y), \quad \dot{y} = rx-y-xz, \quad \dot{z} = xy-bz, \quad (3)$$

где σ , b и r – управляющие параметры. К уравнениям типа (3) сводятся некоторые модели лазеров, а также модель дискового динамо [7].

Система (3) инвариантна к замене $(-x, -y, z) \rightarrow (x, y, z)$ и характеризуется тремя состояниями равновесия. Если зафиксировать значения параметров $\sigma=10$, $b=8/3$ и исследовать поведение траекторий системы (3) при вариации r , то можно убедиться, что выше критической точки $r_{cr} \approx 24.74$ в системе (3) реализуется единственный хаотический аттрактор – аттрактор Лоренца.

Областью притяжения аттрактора Лоренца является все фазовое пространство. Аттрактор Лоренца есть притягивающее множество фазовых траекторий, которые характеризуются индивидуальной экспоненциальной неустойчивостью. Указанные свойства сохраняются при вариации

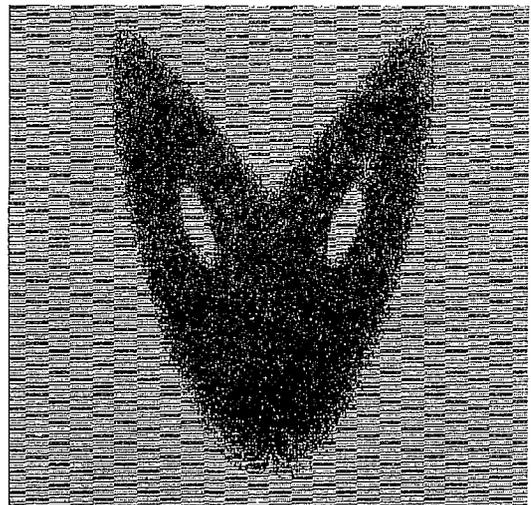


Рис. 1. Проекция аттрактора Лоренца на плоскость переменных (x, z) (черный цвет) и бассейн его притяжения в секущей плоскости $y=1$ (серый цвет). Значения параметров: $r=28$, $\sigma=10$, $b=8/3$

параметров в конечной области их значений. На рис. 1 представлена проекция аттрактора Лоренца на плоскость переменных (x, z) с указанием его бассейна притяжения.

Аттрактор Лоренца демонстрирует практически все свойства и качества, которые были предсказаны в отношении грубых гиперболических аттракторов. Основные его свойства:

1. Наличие счетного множества петель сепаратрис состояний равновесия системы Лоренца при ее возмущении не приводит к рождению устойчивых регулярных типов движений.

2. При вариации параметров системы (3) в конечной области значений в аттракторе Лоренца не происходит бифуркаций и никаких других устойчивых притягивающих подмножеств не возникает.

3. При малых возмущениях уравнений и воздействии шума малой интенсивности изменения структуры аттрактора оказываются также малыми. Собственная динамическая природа хаотичного поведения оказывается намного сильнее навязываемой извне.

4. Аттрактор Лоренца допускает построение гладкой функции плотности распределения $p(x, y, z)$, то есть вероятностной меры аттрактора. При этом малые возмущения потока (3) вызывают малые изменения вероятностной меры в полном соответствии с теоретическими результатами Кифера, сформулированными для гиперболических систем.

Аттрактор Лоренца имеет классический спектр ляпуновских характеристических показателей (ЛХП):

$$\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -14.57, (r=26), \quad (4)$$

что дает значение ляпуновской размерности $D=2.06$. Близкая к нулю величина дробной части размерности обусловлена сильным сжатием потока в диссипативной системе (3)

$$\text{div } F = -(\sigma + b + 1). \quad (5)$$

Это обстоятельство объясняет тот факт, что отображение Пуанкаре аттрактора Лоренца очень близко к одномерному. В силу того, что $\text{div } F$ (5) не зависит от фазовых переменных, в системе (3) не может родиться режим двухчастотных квазипериодических колебаний. Поэтому множество неособых фазовых траекторий системы исчерпывается точками, циклами и аттрактором Лоренца.

Отметим, что система (3) демонстрирует с экспериментальной точки зрения практически грубый гиперболический хаос в конечной области значений ее управляющих параметров. На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма системы (3).

Существованию аттрактора Лоренца отвечает заштрихованная область в параметрическом пространстве. Вне указанной области свойства хаотического аттрактора будут существенно иными; система Лоренца здесь будет вести себя уже как квазигиперболическая [8].

Проиллюстрируем типичные характеристики и свойства аттрактора Лоренца. Спектр ЛХП не изменяется

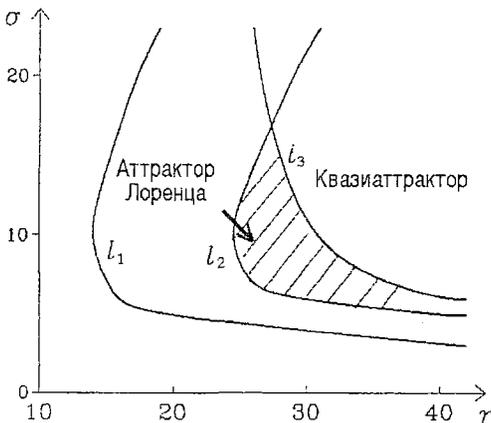


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма системы Лоренца на плоскости параметров (r, σ) для $b=8/3$: l_1 – линия существования симметричной петли сепаратрисы нулевого состояния равновесия, l_2 – линия рождения аттрактора Лоренца, l_3 – линия бифуркационного перехода к квазиаттрактору

при вариации начальных условий, так как аттрактор Лоренца является единственным, бассейном притяжения которого служит все фазовое пространство (см. рис. 2 и рис. 3).

Спектр ЛХП практически не меняется при варьировании управляющих параметров системы в пределах области существования аттрактора Лоренца (см. рис. 2). Эти свойства наглядно иллюстрируют грубость аттрактора Лоренца в эксперименте: основные свойства аттрактора сохраняются при вариации параметров и начальных условий, бифуркации аттрактора отсутствуют.

Типичными для перемешивающих систем являются автокорреляционная функция и спектр мощности аттрактора Лоренца, представленные на рис. 4.

Автокорреляционная функция экспоненциально спадает с увеличением времени практически монотонно (см. рис. 4, а). Спектр мощности представляет собой непрерывную спадающую функцию частоты, причем в спектре отсутствуют ярко выраженные пики на каких-либо характерных частотах (см. рис. 4, в).

Все характеристики и свойства аттрактора Лоренца практически не

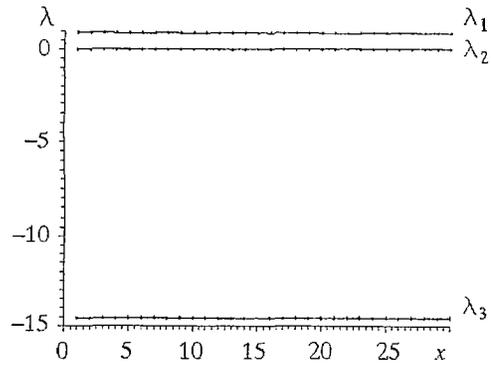


Рис. 3. Спектр ЛХП аттрактора Лоренца в зависимости от начального значения координаты x . Параметры системы: $\sigma=10, b=8/3, r=28$

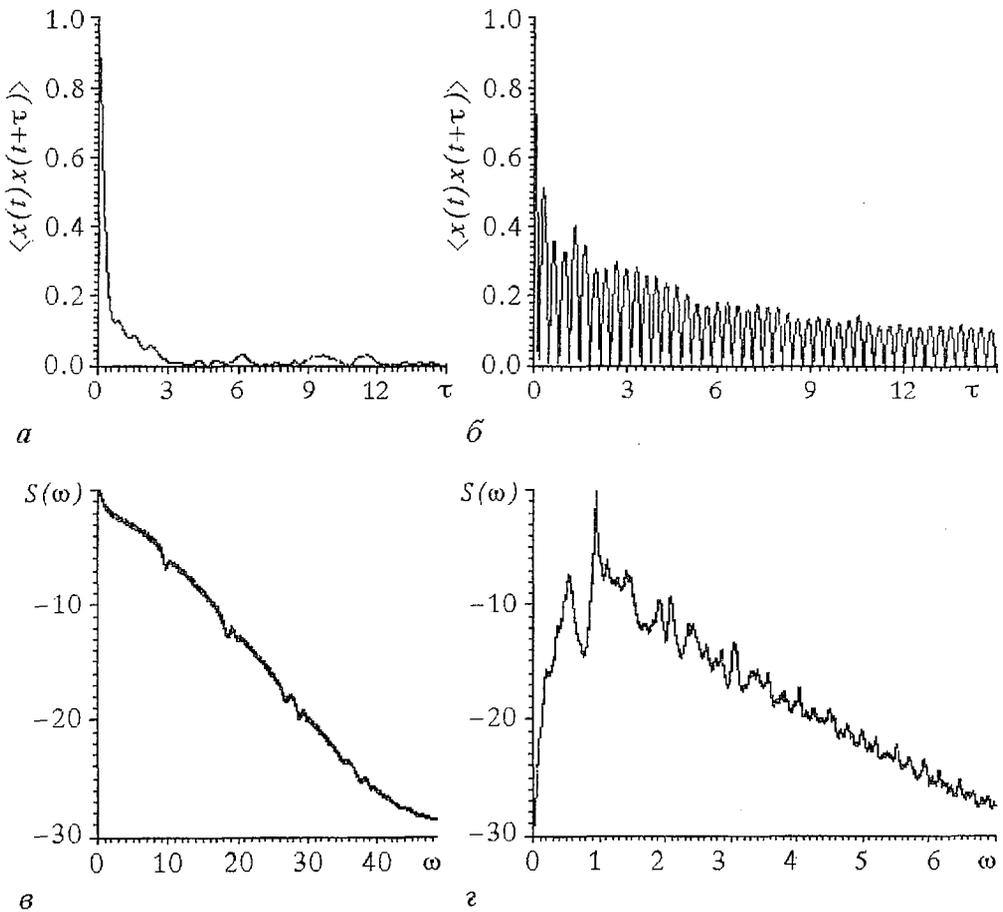


Рис. 4. Автокорреляционная функция и спектр мощности аттрактора Лоренца (а,в) и генератора Анищенко – Астахова (б,г)

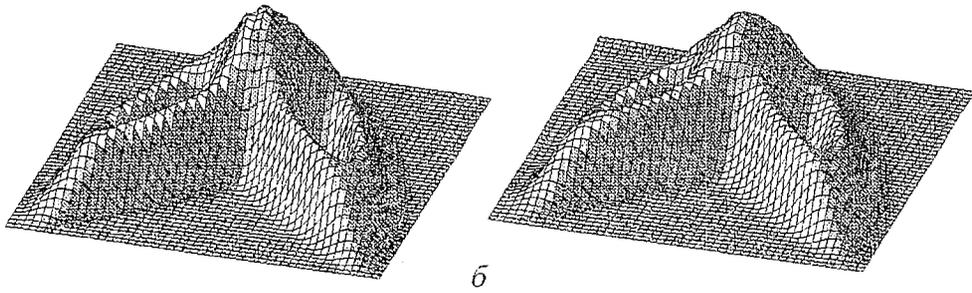


Рис. 5. Плотность распределения вероятностей $p(x,z)$ аттрактора Лоренца в отсутствие шума (а) и при наличии аддитивного белого шума интенсивности $d=0.8$ (б)

меняются при добавлении в уравнения (3) аддитивного (или мультипликативного) шума малой интенсивности. Иллюстрацией служит рис. 5, где представлены графики стационарной двумерной плотности распределения вероятностей $p(x,z)$ аттрактора Лоренца в отсутствие и при наличии аддитивного шума, вводимого во все три уравнения системы [8].

3.3. Квазигиперболические аттракторы. Наиболее типичными в исследованиях являются так называемые квазигиперболические аттракторы, которые иллюстрируют экспериментально наблюдаемый хаос во многих динамических системах [3,8–10]. В системах с квазигиперболическими аттракторами реализуются режимы детерминированного хаоса, характеризующиеся экспоненциальной неустойчивостью траекторий и фрактальной геометрией аттрактора. С этой точки зрения характеристики указанных режимов автоколебаний идентичны основным характеристикам грубых гиперболических аттракторов и аттракторов типа Лоренца. Однако есть весьма существенные, принципиальные различия, которые необходимо учитывать во избежание неверной трактовки экспериментальных результатов. Отличительной чертой квазигиперболических аттракторов является одновременное сосуществование счетного множества различных хаотических и регулярных аттракторов в ограниченном элементе объема фазового пространства системы при фиксированных значениях ее параметров. Эта совокупность всех сосуществующих предельных множеств траекторий в ограниченной области G_0 фазового пространства, куда стремятся все или почти все траектории из области G_1 , включающей G_0 , и называется *квазиаттрактором* динамической системы.

Квазиаттракторы характеризуются чрезвычайно сложной структурой вложенных бассейнов притяжения. Но этим сложность не ограничивается. При конечной вариации параметров квазигиперболической системы реализуются каскады различных бифуркаций как регулярных, так и хаотических аттракторов. Соответственно осуществляется бифуркационная перестройка их бассейнов притяжения. Причиной такой сложности квазиаттракторов являются эффекты гомоклинического касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек в сечении Пуанкаре, которые имеют место на множестве значений параметров ненулевой меры.

Если при этом учесть, что бассейны притяжения сосуществующих предельных множеств могут иметь фрактальные границы и составлять чрезвычайно узкие области в фазовом пространстве, то понятно, насколько важными становятся проблемы точности расчетов на ЭВМ и влияния внешних шумов. Проиллюстрируем свойства квазигиперболических аттракторов на ряде примеров.

Рассмотрим типичную квазигиперболическую систему, хаотическая динамика которой исчерпывающим образом иллюстрирует теорему Шильникова о свойствах динамических систем с петлей сепаратрисы седло–фокуса состояния равновесия [3]. Эта система получила название модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (генератора Анищенко – Астахова) и представляет

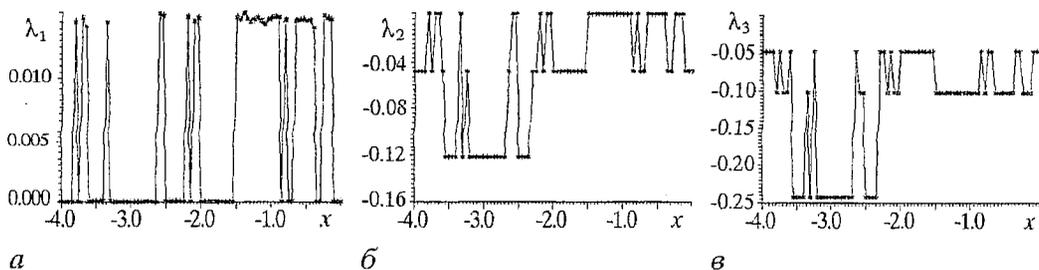


Рис. 6. Спектр ЛХП системы (6) в зависимости от выбора начальной координаты x для значений параметров $m=1.42, g=0.097$

собой трехмерную двухпараметрическую дифференциальную систему уравнений

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad (6)$$

где

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Зафиксируем значения параметров $m=1.42, g=0.097$ и вычислим зависимость показателей спектра ЛХП от начальных условий. Результаты представлены на рис. 6 и свидетельствуют о сосуществовании хаотического и периодических режимов колебаний.

Более внимательный анализ данных рис. 6 показывает, что для $-2.0 < x < 0$ проявляют себя режимы одного из предельных циклов и хаотический; в области $-4.0 < x < -2.0$ добавляется предельный цикл иного семейства (сравни значения третьего показателя спектра ЛХП). Более наглядно ситуация отражена на рис. 7, который визуализирует проекции трех сосуществующих аттракторов системы (6) и бассейны их притяжения. Действительно, в системе сосуществуют однотактный и двухтактный предельные циклы и хаотический аттрактор.

При изменении параметров системы, в силу ее негрубости, совокупность предельных множеств системы претерпевает бифуркации. Иллюстрацией этого факта может служить график зависимости показателей спектра ЛХП от параметра m , представленный на рис. 8. Обращение в ноль показателя λ_1 свидетельствует о рождении одного из множества предельных циклов, демонстрирующей каскады бифуркаций удвоения периода. При этом показатель λ_1 остается равным нулю, а λ_2 принимает различные отрицательные значения. Бифуркации аттракторов сопровождаются изменением структуры бассейнов их притяжения, границы которых приобретают фрактальные свойства.

Присутствие в квазиаттракторе устойчивых и седловых циклов наряду с хаотическими предельными множествами проявляется в структурах автокорреляционной функции (АКФ) и спектра мощности. На рис. 4, б, г представлены результаты, рассчитанные для хаотического режима системы (6) при $m=1.5, g=0.2$. АКФ в среднем экспоненциально спадает во времени, и

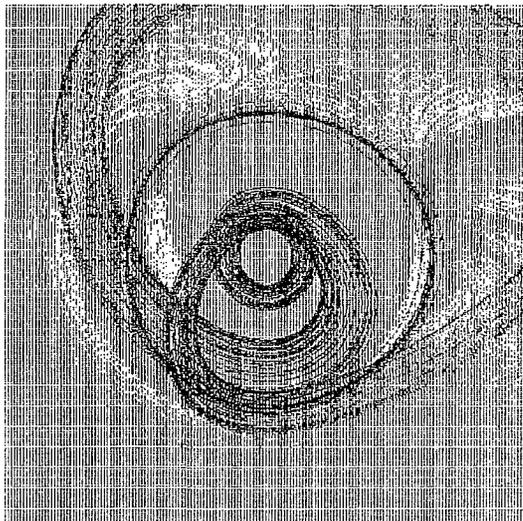


Рис. 7. Проекция сосуществующих аттракторов в системе (6) при $m=1.42, g=0.097$ и структура бассейнов их притяжения в секущей плоскости $z=1$. Бассейн притяжения цикла периода T_0 – белый цвет, бассейн притяжения цикла периода $2T_0$ – серый цвет, бассейн притяжения хаотического аттрактора – серый в полосу цвет

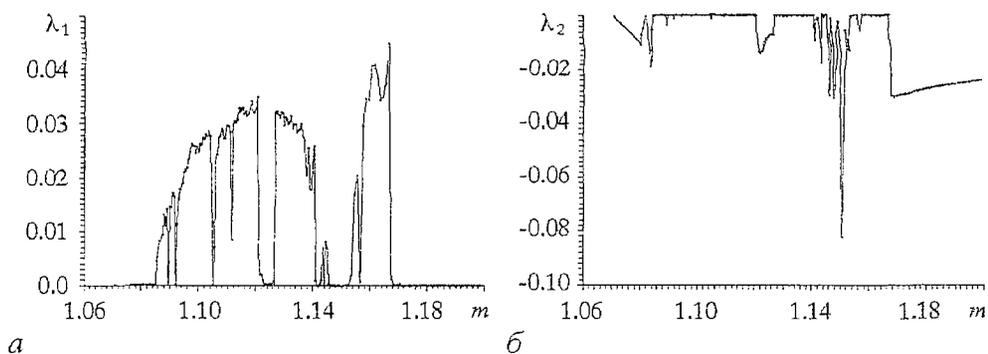


Рис. 8. Показатели Ляпунова λ_1 и λ_2 в зависимости от параметра m ($g=0.2$) для системы (6)

спектр является сплошным. Однако при внимательном рассмотрении виден периодический компонент в структуре АКФ и в спектре заметны резкие выбросы на некоторых характерных частотах. Эти особенности АКФ и спектра квазигиперболического хаоса являются типичными и существенно отличают квазиаттрактор от аттрактора Лоренца (сравни данные, представленные на рис. 4).

Фрактальность границ и изрешеченность бассейнов притяжения совокупности сосуществующих регулярных и хаотических аттракторов квазигиперболической системы делает ее чрезвычайно чувствительной к шумовым возмущениям. Рассмотрим режим хаотического аттрактора в системе (6) при $m=1.5$, $g=0.2$. На рис. 9 представлены графики двумерной плотности распределения $p(x,y)$ в отсутствие шума и при аддитивном введении гауссового шума в правые части трех уравнений системы. Как видно из графиков, добавление шума малой интенсивности приводит к явным изменениям в структуре функции распределения.

Режим сосуществования конечного числа аттракторов выбран нами для наглядной иллюстрации сложности устройства квазиаттрактора. Теоретически квазиаттрактор включает бесконечное множество сосуществующих предельных режимов, которые при малых вариациях параметров претерпевают бесконечную

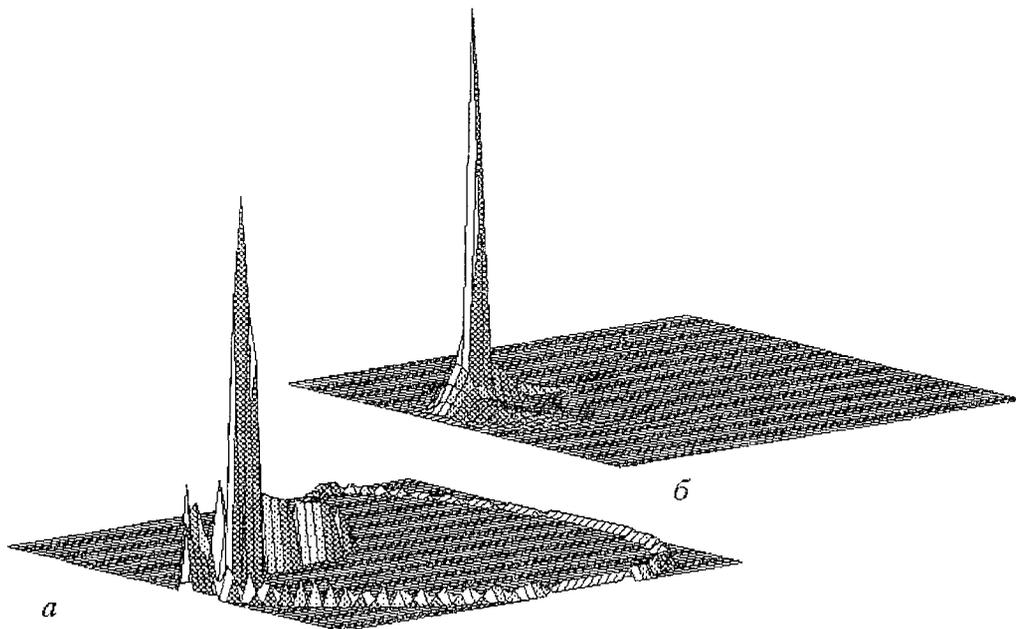


Рис. 9. Плотность распределения вероятностей $p(x,y)$ хаотического режима в генераторе Анищенко – Астахова ($m=1.5$, $g=0.2$) в отсутствие шума (а) и при введении аддитивного шума интенсивности $d=10^{-3}$ во все уравнения системы (б) (б)

последовательность различных бифуркаций. При этом могут иметь место области значений параметров, в которых (с экспериментальной точки зрения) система имеет лишь один хаотический аттрактор, который притягивает все траектории фазового пространства. Если в эксперименте такой режим обнаружен и установлена область его существования по параметрам, то можно говорить о режиме странного аттрактора, близкого по своим свойствам к грубым гиперболическим.

В качестве примера рассмотрим дискретную динамическую систему в виде двух связанных логистических отображений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha x_n^2 + \gamma(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= 1 - \alpha y_n^2 + \gamma(x_n - y_n). \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (7) может реализоваться единственный режим гиперхаоса, область притяжения которого представляет собой ограниченный ромб на плоскости (x_n, y_n) . Однако, если изменить значения управляющих параметров, число сосуществующих аттракторов возрастает, и резко усложняется структура их бассейнов притяжения. Результаты показаны на рис. 10. Рис. 10, б, в частности, наглядно иллюстрирует влияние неопределенности в задании начальных условий на режим функционирования системы.

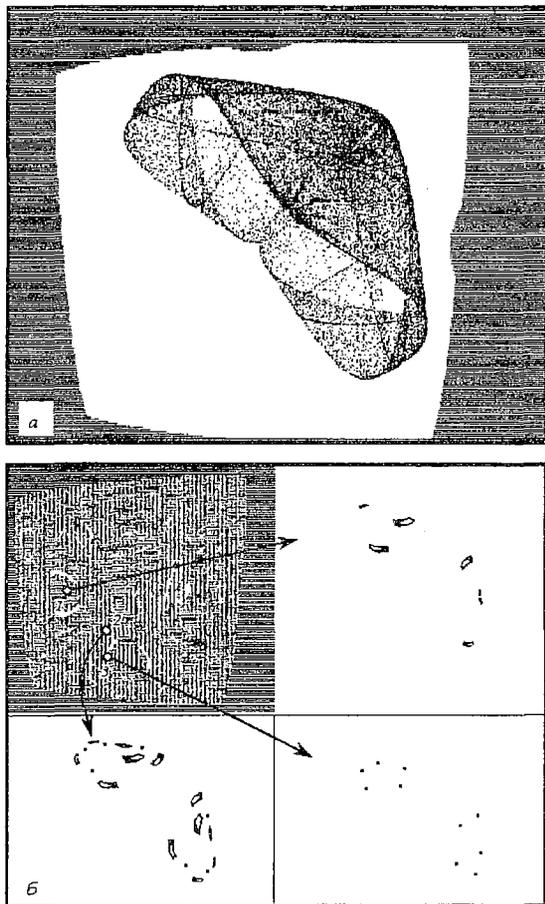


Рис. 10. Гиперхаос в системе (7) для значений параметров $\alpha=0.9$, $\gamma=0.285$ (а), режим сосуществования аттракторов и структура бассейнов их притяжения в той же системе для $\alpha=0.78$, $\gamma=0.2876$ (б) в фазовом пространстве x_n, y_n . Цифрами 1,2,3 обозначены области неопределенности в задании начальных данных, ведущие к соответствующим предельным множествам, указанным стрелками

4. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы

Хаотические аттракторы любого из описанных выше трех типов объединяют два принципиальных свойства: сложная геометрическая структура аттрактора (как следствие – его дробная метрическая размерность) и экспоненциальная неустойчивость индивидуальных траекторий на аттракторе. Именно эти свойства используются экспериментаторами в качестве критерия при диагностике режимов детерминированного хаоса.

Однако нерегулярные аттракторы, как математические образы сложной динамики, вышеописанными типами хаотических аттракторов не исчерпываются. Выяснилось, что хаотическое поведение в смысле наличия перемешивания и геометрическая «странность» аттрактора могут не соответствовать друг другу. Странные в геометрическом понимании аттракторы могут не быть хаотическими ввиду отсутствия экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий. С другой стороны, есть примеры перемешивающих диссипативных систем, аттракторы которых не являются в строгом смысле странными, то есть не характеризуются фрактальной структурой и дробной метрической размерностью.

Другими словами, существуют конкретные примеры диссипативных динамических систем, аттракторы которых характеризуются следующими свойствами:

1. Аттрактор имеет регулярную геометрическую структуру с точки зрения целочисленной метрической размерности. При этом индивидуальные фазовые траектории на аттракторе в среднем экспоненциально неустойчивы.

2. Аттрактор характеризуется сложной геометрической структурой. При этом траектории на нем асимптотически устойчивы по Ляпунову. Перемешивание отсутствует.

Первый тип называют *хаотическими нестранными аттракторами* (ХНА), второй – *странными нехаотическими аттракторами* (СНА).

4.1. Хаотические нестранные аттракторы. Хаотические аттракторы, не являющиеся с точки зрения их геометрии странными, то есть фрактальными предельными множествами, известны относительно давно, однако до сих пор изучены недостаточно. В качестве примера динамической системы с ХНА можно привести модифицированное отображение Арнольда [11]. Это отображение представляет собой известное «cat map» с добавлением нелинейного периодического слагаемого

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n, & \text{mod } 1 \\y_{n+1} &= x_n + 2y_n, & \text{mod } 1.\end{aligned}\tag{8}$$

При условии, что $\delta < 1/2\pi$, отображение (8) есть диффеоморфизм на торе. Другими словами, отображение (8) взаимно однозначно (обратимо) и переводит единичный квадрат на плоскости (x_n, y_n) в себя. Отображение (8) является диссипативным, то есть при каждой итерации элемент площади сжимается. Это свойство легко доказать, если вычислить якобиан преобразования (8)

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\pi\delta \sin 2\pi y_n \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta < 1/2\pi.\tag{9}$$

Среднее по времени значение $|J| < 1$. При этом спектр ляпуновских экспонент представляет собой «+», «-», то есть фиксируется наличие перемешивания.

Казалось бы, мы имеем дело с обычным хаотическим странным аттрактором. Но это не так. Главной отличительной особенностью рассматриваемого случая является то, что несмотря на сжатие площади, движение изображающей точки отображения (8) является эргодическим! Точка при $n \rightarrow \infty$

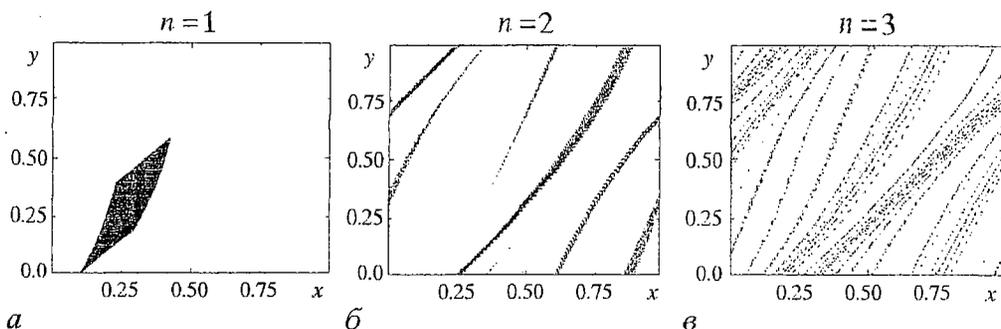


Рис. 11. Эволюция начального элемента площади в отображении Арнольда (8) через 1, 3 и 5 итераций, соответственно

посещает любой элемент единичного квадрата, представляющего полную развертку двумерного тора! Свидетельством этого факта является то, что метрическая размерность аттрактора (емкость по Колмогорову) равна 2. Таким образом, несмотря на сжатие, аттрактором системы (8) является весь единичный квадрат. В этом смысле аттрактор Арнольда не является странным, так как ему нельзя приписать фрактальную геометрию.

Рассмотрим процесс формирования аттрактора, чтобы более детально понять особенности его структуры. С этой целью выберем малый элемент площади в качестве начальных условий ($0 \leq x_n \leq 0.2$, $0 \leq y_n \leq 0.2$) и проследим эволюцию этого элемента при итерациях отображения (8).

На рис. 11 представлены последовательные образы исходного малого квадрата, которые свидетельствуют о следующем. За счет сжатия по одному направлению и растяжению по другому исходный квадрат эволюционирует в бесконечное множество «полос», которые с ростом числа итераций стремятся покрыть всю поверхность единичного квадрата. В итоге при $n \rightarrow \infty$ так и получается.

Однако, как видно из фазового портрета аттрактора (рис. 12), хотя точки практически полностью покрывают квадрат, плотность их распределения явно неоднородна! Количественной мерой этой неоднородности является величина информационной размерности $1 < D_1 < 2$. Например, для значения $\delta = 0.05$ величина $D_1 < 1.96$, для $\delta = 0.10$ – $D_1 < 1.84$. При этом, как уже говорилось, емкость $D_c = 2.0$ (это строгий результат Синая). Как следствие неоднородности плотности распределения вероятностей точек на аттракторе, значения всех вероятностно-метрических размерностей аттрактора Арнольда будут лежать в интервале $1 < D < 2$. Эти размерности учитывают не только геометрические, но и динамические свойства аттрактора.

ХНА обнаружены в ряде других отображений на торе. Можно предположить, что эргодические хаотические движения типичны для диффеоморфизмов на торе. Доказательство факта существования ХНА в таких отображениях позволяет утверждать, что есть потоковые (дифференциальные) системы в \mathbb{R}^N , $N \geq 4$, имеющие режимы ХНА. Однако до настоящего времени ХНА в дифференциальных динамических

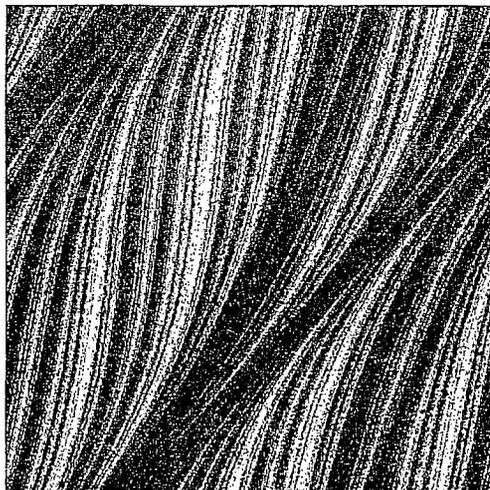


Рис. 12. Хаотический нестранный аттрактор в отображении Арнольда (8) ($\delta = 0.15$)

системах не обнаружены. В связи с этим, в частности, до сих пор является открытым вопрос о возможности существования хаотического аттрактора на поверхности трехмерного тора, вложенного в фазовое пространство размерности $N \geq 4$.

Обратим внимание на одно важное обстоятельство. Как видно из рис. 12, хаотическое множество точек отображения (8) плотно покрывает единичный квадрат поверхности с некоторой непрерывной вероятностной мерой. То есть аттрактором является весь единичный квадрат! Как же быть с определением аттрактора как изолированного предельного множества, что здесь является областью притяжения? Дело в том, что отображение (8) описывает только аттрактор и не содержит информации о переходных процессах. Рассуждать здесь нужно так. Пусть задана некоторая дифференциальная система в \mathcal{R}^N ($N \geq 4$), имеющая в качестве аттрактора трехмерный тор T^3 (система диссипативна!). Рассмотрим структуру фазовых траекторий на T^3 . С этой целью введем отображение Пуанкаре на нем. В этом случае мы будем иметь отображение на двумерном торе T^2 . Именно таковым и является отображение (8), которое моделирует свойства предельных траекторий, лежащих в исходной системе на T^3 , то есть на аттракторе. Поэтому рис. 12 иллюстрирует структуру аттрактора, а область его притяжения остается вне пределов возможности модельного дискретного описания.

4.2. Странные нехаотические аттракторы. Как мы уже говорили, странные хаотические аттракторы обладают геометрической «странностью» и перемешиванием. Другими словами, сложная динамика перемешивающей системы порождает и геометрическую сложность соответствующего аттрактора. Тем не менее в случае ХНА мы вынуждены разделить эти свойства: перемешивание может не приводить к геометрической «странности» аттрактора. Здесь мы рассмотрим возможность реализации противоположной ситуации, когда система демонстрирует сложный неперiodический режим колебаний, асимптотически устойчивый по Ляпунову (без перемешивания), а аттрактор при этом явно не является регулярным с точки зрения его геометрической структуры.

В этом случае целесообразно ввести определение «странности» аттрактора вне связи с динамикой системы, а положив в основу его геометрическую структуру. В работе [12] такое определение дано: «Странный аттрактор – это аттрактор, который не состоит из конечного множества точек и не является кусочно-дифференцируемым. Кусочно-дифференцируемым аттрактором мы называем кусочно-дифференцируемую кривую, поверхность или объем, который ограничен кусочно-дифференцируемой поверхностью.» Если поразмышлять, то примеры негрубых СНА привести совсем нетрудно. По сути дела любой странный хаотический аттрактор в критической точке перехода к хаосу является собой пример СНА. Действительно, возьмем, к примеру, аттрактор Фейгенбаума в логистическом отображении

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n). \quad (10)$$

В критической точке $r^* = 3.57 \dots$ предельное множество представляет собой счетное множество точек $x_n \in [0, 1]$. При этом ляпуновский показатель равен нулю (хаоса нет!). По определению такой аттрактор является СНА. Однако он негрубый. С точки зрения физики интерес представляют грубые аттракторы, которые существуют на множестве значений параметров ненулевой меры и сохраняют свою структуру при возмущениях. Как оказалось, динамические системы с грубыми СНА существуют как в дифференциальных, так и в дискретных динамических системах.

СНА типичны для динамических систем с квазипериодическим возбуждением. Уместно уточнить, что мы понимаем под аттрактором неавтономной системы. Предположим, что автономная динамическая система в \mathcal{R}^N находится под действием периодической силы с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Будем

анализировать сечение Пуанкаре через период внешней силы. В секущей поверхности $t=nT_0$ мы каждый раз (при любом n) будем наблюдать некоторое множество точек. Аттрактором в этом случае называют проекцию этого множества точек в секущих, полученных для последовательности $n \rightarrow \infty$, на исходную секущую поверхность при $n=0$. Можно поступить другим способом: путем введения новых переменных свести исходную неавтономную систему к автономной, ограничив области значений новых переменных длительностью периода. В расширенном таким образом фазовом пространстве можно пользоваться понятием аттрактора, введенном в рассмотрение в разделе 1.

Особенностью систем с квазипериодическим воздействием является то, что введение двух новых независимых переменных, по сути, означает введение в рассмотрение двух масштабов времени, которые не связаны с переменными состояния исходной автономной системы и независимы друг от друга.

В простейшем случае отображение, в котором реализуется СНА, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \phi_n, r), \\ \phi_{n+1} &= \omega + \phi_n, \quad \text{mod } 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где x_n – динамическая переменная; ϕ_n – фаза воздействия; r – параметр (или параметры) системы; f – нелинейная функция, периодическая относительно ϕ_n с периодом 1; ω – иррациональное число. Если ω – иррационально, то воздействие будет являться квазипериодическим, так как не существует периода k такого, что $f(\phi_{n+k}) = f(\phi_n)$. Таким образом, отображения типа (11) моделируют динамику дифференциальных систем с квазипериодическим (двухчастотным) внешним воздействием. Имеются два характерных временных масштаба: $k_1=1$ (итерация отображения) и $k_2=1/\omega$, ω – сдвиг фазы за одну итерацию. Поэтому ω называют числом вращения, которое характеризуется отношением двух частот квазипериодического воздействия.

Впервые СНА был обнаружен и исследован [12] в отображении

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda \operatorname{th}(x_n) \cos 2\pi\phi_n, \\ \phi_{n+1} &= \omega + \phi_n, \quad \text{mod } 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Иррациональное значение параметра ω чаще всего выбирается равным так называемому «золотому сечению»: $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$. Для значений $\lambda > 1$ в отображении (12) строго доказано существование СНА. Кроме системы (12) СНА обнаружены при введении квазипериодического воздействия в отображение окружности, в логистическое отображение, в отображение Хенона и др. Примеры СНА в отображении (12) и в отображении Фейгенбаума (13)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha (1 - s \cos 2\pi\phi_n) x_n (1 - x_n), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \omega, \quad \text{mod } 1 \end{aligned} \quad (13)$$

приведены на рис. 13. Основные особенности СНА, требующие выделения этих объектов в отдельный класс:

1. *Геометрические характеристики СНА.* Аттрактор (например, на фазовой плоскости) образован кривой бесконечной длины, недифференцируемой на плотном множестве точек. Эта кривая, подобно кривой Пеано, плотно покрывает часть фазовой плоскости так, что метрическая размерность (емкость) СНА оказывается строго равной 2. В связи с отсутствием положительного показателя в спектре ЛХП, ляпуновская размерность СНА равна единице. Несмотря на целочисленную метрическую размерность, СНА, как правило, демонстрирует самоподобие структуры и, вследствие этого, – свойства скейлинга.

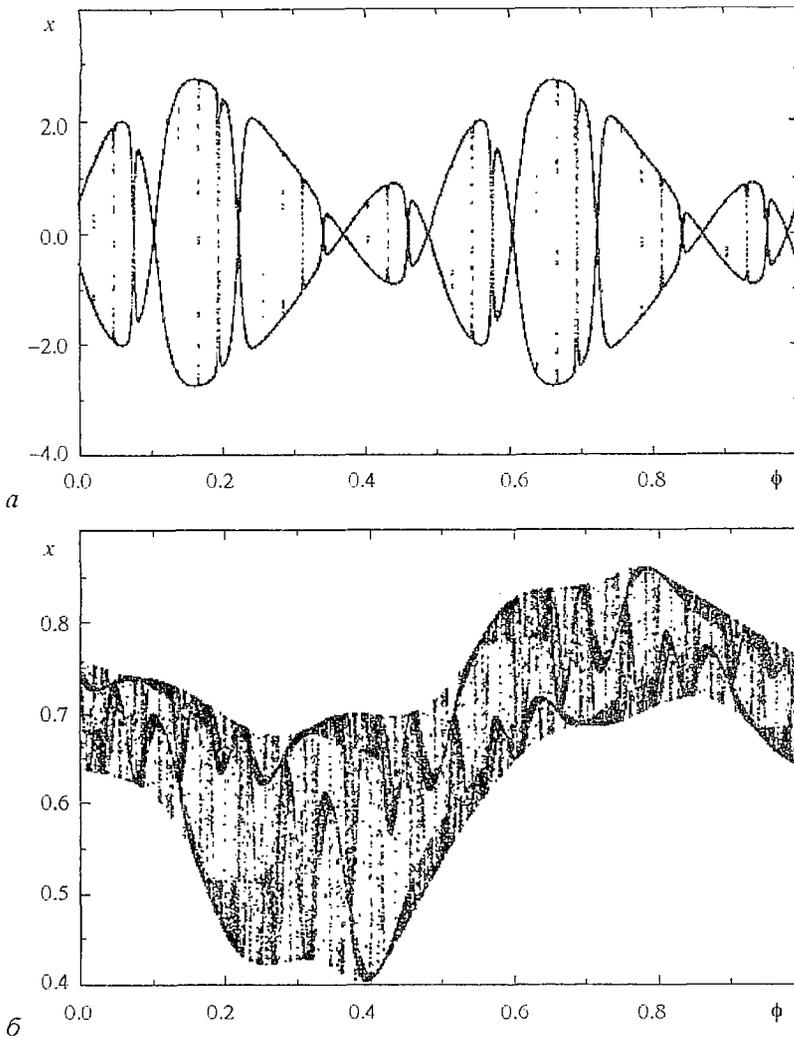


Рис. 13. Странные нехаотические аттракторы в отображении (12) для $\lambda=1.5$ (а) и в отображении (13) при $s=0.1$, $\alpha=3.277$ и $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ (б)

Совокупность указанных свойств позволяет говорить о «странной» геометрии СНА.

2. *Спектр ЛХП странного нехаотического аттрактора.* Динамика системы в режиме СНА не является хаотической ввиду отсутствия перемешивания. Экспоненциальной неустойчивости траекторий на аттракторе в среднем нет. В спектре ЛХП отсутствует положительный показатель. Сигнатура спектра ЛХП фазовых траекторий на СНА не отличается от соответствующей сигнатуры спектра ЛХП квазипериодического движения. Однако СНА нельзя считать квазипериодическим аттрактором, в частности потому, что локальный (рассчитанный на конечном интервале времени) старший показатель спектра ЛХП траектории на СНА будет положительным. В частности доказано: вероятность того, что старший локальный ляпуновский показатель будет положительным, отлична от нуля.

3. *Спектр и автокорреляционная функция.* Отсутствие перемешивания в режиме СНА ведет к отсутствию в строгом смысле непрерывного (сплошного) компонента в спектре мощности. В то же время, спектр траектории на СНА не является дискретным! Спектр СНА занимает как бы промежуточное положение между дискретным и непрерывным и имеет специальное название: сингулярно-

непрерывный спектр. Особенность сингулярно-непрерывного спектра в том, что он содержит плотное множество δ -пиков самоподобной структуры и обладает свойствами фракталов.

Так как спектр СНА не является непрерывным, то и автокорреляционная функция $\Psi(\tau)$ не стремится к нулевому пределу при $\tau \rightarrow \infty$. Для траекторий на СНА, как правило, наблюдается спадание $\Psi(\tau)$ до некоторого предельного ненулевого уровня. При этом $\Psi(\tau)$, также как и спектр, будет демонстрировать масштабно инвариантные свойства.

В качестве примера на рис. 14 приведен спектр СНА в системе (12), рассчитанный для координаты x_n аттрактора рис. 13, а. Как видно из графика, спектр действительно представляет собой всюду плотное множество δ -пиков и не содержит ярко выраженного сплошного компонента. По виду спектральной функции $|S_N|$ трудно убедиться в том, что распределение спектральных компонентов подчиняется масштабно инвариантным свойствам. С этой целью рассмотрим автокорреляционную функцию $\Psi(\tau)$ аттрактора рис. 13, а, представленную на рис. 15.

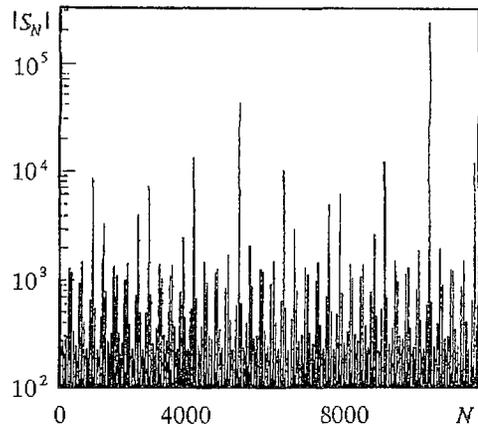


Рис. 14. Сингулярно-непрерывный спектр СНА в отображении (12) для $\lambda=1.5$

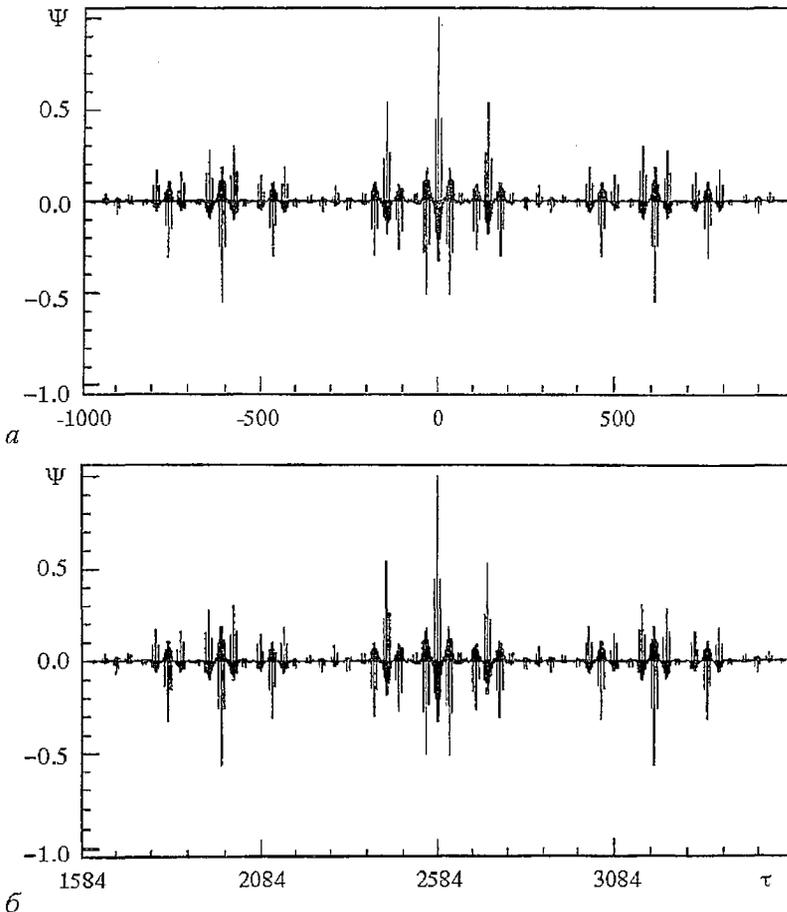


Рис. 15. Самоподобие автокорреляционной функции СНА в системе (12)

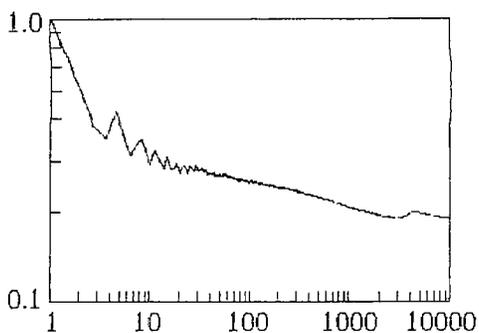


Рис. 16. Типичный график зависимости автокорреляционной функции $|\Psi(\tau)|$ от времени в режиме СНА

Сравнение зависимостей $\Psi(\tau)$ на интервалах времени $-1000 \leq \tau \leq 1000$ и $1584 \leq \tau \leq 3584$ свидетельствует о полной идентичности структуры автокорреляционной функции. График $\Psi(\tau)$ рис. 15, а полностью воспроизводится на рис. 15, б, что является следствием свойства масштабной инвариантности. Огибающая $|\Psi(\tau)|$ в режиме СНА представляет собой спадающую функцию, которая с ростом τ ($\tau \rightarrow \infty$) стремится к некоторому отличному от нуля пределу. Типичный график $|\Psi(\tau)|$ в режиме СНА представлен на рис. 16.

Необходимо отметить, что диагностика режима СНА в численных экспериментах представляет собой весьма трудную, нестандартную задачу и требует проведения тонких вычислений с использованием хорошей современной техники. В противном случае режим СНА и квазипериодический режим с большим числом комбинационных частот в спектре различить не удастся.

Выводы

Анализ структуры и свойств аттракторов нелинейных диссипативных систем как образов сложных непериодических автоколебаний, проведенный в настоящей лекции, позволяет сделать следующие выводы:

1. Классические свойства детерминированного хаоса, как непериодических экспоненциально неустойчивых решений соответствующих динамических систем, демонстрируют грубые гиперболические системы и системы типа Лоренца. Им соответствуют в качестве математических образов странные (или практически странные) аттракторы. Их отличительной особенностью является фрактальность геометрической структуры аттрактора, дробная метрическая размерность и наличие хотя бы одного положительного показателя спектра ЛХП как следствие перемешивания. Грубые гиперболические аттракторы и аттракторы типа Лоренца малочувствительны к шумовому воздействию. Бассейны притяжения таких аттракторов являются гладкими, однородными; свойства аттрактора не чувствительны к изменению начальных условий.

2. Более сложными объектами являются квазиаттракторы, которые включают конечную или бесконечную совокупность регулярных и хаотических притягивающих подмножеств, сосуществующих одновременно при фиксированных параметрах системы. Вариация параметров системы приводит к различным бифуркациям этих подмножеств, которых может быть бесконечное число при конечном изменении параметров. Бассейны притяжения сосуществующих аттракторов представляют собой чрезвычайно сложную структуру вложенных областей, обладающих фрактальной геометрией. В результате квазиаттракторы демонстрируют высокую чувствительность к изменению начальных условий и действию шума.

3. Экспоненциальная неустойчивость индивидуальных траекторий и «странная» геометрия аттрактора могут не быть связаны однозначно. Существуют режимы хаотических (неустойчивых) автоколебаний, которым соответствуют регулярные в геометрическом смысле аттракторы. Это так называемые хаотические нестранные аттракторы. С другой стороны, можно наблюдать непериодические устойчивые по Ляпунову колебания, соответствующий аттрактор

которых является странным геометрическим объектом. Здесь мы имеем дело со странными нехаотическими аттракторами.

Изложенные в настоящей лекции представления нельзя считать абсолютно непротиворечивыми и общепринятыми. Некоторые из затронутых вопросов до сих пор являются предметом детальных исследований и научных споров, что нужно воспринимать как лишнее доказательство фундаментальной важности предмета исследований.

В заключение считаю своим долгом поблагодарить моих учеников и коллег Т.Е. Вадивасову, Г.И. Стрелкову, А.Б. Неймана и И.А. Хованова за полезные обсуждения и помощь в работе над лекцией. Я благодарен также профессору В.Н. Белых за консультации по ряду математических проблем и профессору Б.П. Безручко за ряд замечаний, позволивших улучшить изложение материала.

Работа частично финансировалась за счет грантов Госкомвуза РФ (95–0–8.3–66) и совместного гранта Физического общества Германии (436 RUS 113/334).

Библиографический список

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
3. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
4. Афраймович В.С. Принцип кольца и квазиаттракторы // Труды международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1984. С. 34.
5. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
6. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
7. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 317.
8. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1995.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
10. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1989.
11. Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A. The dimension of chaotic attractors // Physica 7D. 1983. P.153.
12. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica 13D. 1984. P.261.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 18.02.97
после переработки 19.03.97*

ATTRACTORS OF DYNAMICAL SYSTEMS

V.S. Anishchenko

In this lection the definition of an attractor of a dissipative dynamical system is introduced. Classification of existing types of attractors and analysis of their characteristics are presented. The discussed problems are illustrated by the results of

numerical simulation using a number of real examples. This gives the possibility to understand easily the main properties, similarities and differences of the considered types of attractors.

**СПИСОК ИЗБРАННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ
СОТРУДНИКОВ ЛАБОРАТОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ
ЗА 1994 – 1997 г.г.**

1. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Ebeling W.* Power low distributions of spectral density and higher order entropies // *J. Chaos, Solitons and Fractals.* 1994. Vol. 4, № 1. P. 69.

2. *Anishchenko V.S., Smirnova N.B.* Analysis and synthesis of dynamical systems from experimental data // *Proc. SPIE.* 1994. Vol. 2098. P. 137.

3. *Anishchenko V.S., Anishchenko T.G.* On the criterion of the relative degree of order for self-oscillating regimes. Illustration of Klimontovich's S-theorem // *Proc. SPIE.* 1994. Vol. 2098. P. 130.

4. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Сафонова М.А., Хованов И.А.* Стохастический резонанс при многочастотном воздействии // *Радиотехника и электроника.* 1994. Т. 39, № 8–9. С. 1380.

5. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Kurths J.* Period-doubling bifurcations on the presence of colored noise // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 5. P. 3801.

6. *Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O.* Stochastic resonance in Chua's circuit driven by amplitude or frequency modulated signals // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1994. Vol. 4, № 2. P. 441.

7. *Anishchenko V.S., Safonova M.A., Feudel U., Kurths J.* Bifurcation and transition to chaos through three-dimensional tori // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1994. Vol. 4, № 3. P. 595.

8. *Anishchenko V.S., Kapitaniak T., Safonova M.A., Sosnovtseva O.V.* Birth of double-double scroll attractor in coupled Chua's circuits // *Phys. Lett. A.* 1994. A192. P. 207.

9. *Anishchenko V.S., Saparin P., Witt A., Kurths J.* The renormalized entropy – an appropriate complexity measure? // *J. Chaos, Solitons and Fractals.* 1994. Vol. 4, № 10. P. 1907.

10. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Chua L.O.* Chaos-chaos intermittency and $1/f$ -noise in Chua's circuit // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1994. Vol. 4, № 1. P. 99.

11. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шулгин Б.В.* Использование стохастического резонанса для повышения отношения сигнал/шум в радиотехнических системах // *Радиотехника и электроника.* 1994. Т. 39, № 12. С. 2004.

12. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E.* Synchronisation of chaos // *Proc. of the 1-st Int. conf. on appl. synergetic and synergetic eng. Juni 21–23, 1994, Erlangen, Germany.* P. 200.

13. *Анищенко В.С., Сапарин П.И., Куртс Ю., Витт А., Фосс А.* Анализ динамики сердечного ритма человека на основе критерия перенормированной энтропии // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1994. Т. 2, № 3–4. С. 55.

14. *Анищенко В.С., Сапарин П.И., Анищенко Т.Г.* О критерии степени упорядоченности режимов автоколебаний. Иллюстрация S-теоремы Климонтовича // *Журнал технической физики.* 1994. Т. 64, вып. 11. С. 1.

15. *Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by periodic force // *Phys.Rev.Lett.* 1995. Vol. 75. P. 4157.

16. *Astakhov V.V., Anishchenko V.S., Shabunin A.V.* Controlling spatiotemporal chaos in a chain of the coupled logistic maps // *IEEE Trans. on Circuits and Systems I.* 1995. Vol. 42, № 6. P. 352.

17. *Astakhov V.V., Anishchenko V.S., Strelkova G.I.* Controlling chaos in the

modified oscillator with inertial nonlinearity // IEEE Trans. on Circuits and Systems I. 1995. Vol. 42, № 6. P. 366–368.

18. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.O.* Dynamics of the nonautonomous Chua's circuit // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, № 6.

19. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Astakhov V.V., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.O.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, № 6.

20. *Нейман А.Б.* Применение кумулянтного анализа для исследования бифуркаций динамических систем, возмущаемых внешним шумом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 8.

21. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В.* Механизмы рождения странного нехаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 34.

22. *Анищенко В.С., Хованов И.А., Шульгин Б.В.* Стохастический резонанс в цепи Чуа при взаимодействии различных типов аттракторов системы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 91.

23. *Постнов Д.Э.* Стохастический резонанс в автогенераторах с жестким возбуждением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 100.

24. *Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Моделирование динамических систем по экспериментальным данным // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 112.

25. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V.* Bifurcations and chaos in an oscillator with inertial nonlinearity // Nonlinear Dynamics In Circuits / edited by T. Carroll and L. Pecora, World Scientific. 1995. P. 55.

26. *Astakhov V.V., Anishchenko V.S., Strelkova G.I., Shabunin A.V.* Controlling spatiotemporal chaos in one- and two dimensional coupled logistic map lattices // Chaotic, fractal and nonlinear signal processing. (Mystic, CT July 10–14, 1995. Ed. by R.A. Katz). P.104.

27. *Anishchenko V.S., Khovanov I.A., Shulgin B.V.* Stochastic resonance in passive and active electronic circuits // Chaotic, fractal and nonlinear signal processing. (Mystic, CT July 10–14, 1995. Ed. by R.A. Katz). P.363.

28. *Anishchenko V.S., Kapitaniak T.* Chaotic resonance: birth of double – double scroll attractor // Chaotic, fractal and nonlinear signal processing. (Mystic, CT July 10–14, 1995. Ed. by R.A. Katz). P.420.

29. *Janson N.B., Anishchenko V.S.* Modeling the dynamical systems on experimental data // Chaotic, fractal and nonlinear signal processing. (Mystic, CT July 10–14, 1995. Ed. by R.A. Katz). P.688.

30. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В.* Стохастический резонанс в бистабильной электрической цепи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 5. С. 16.

31. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Стрелкова Г.И., Шабунин А.В.* Стабилизация симметричных седловых циклов в связанных системах с хаотической динамикой // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 4. С. 73.

32. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.* Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4451.

33. *Neiman A., Shulgin B., Anishchenko V., Ebeling W., L. Schimansky-Geier, Freund J.* Dynamical entropies applied to stochastic resonance // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P.4299.

34. *Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н.* Седло–фокус в модели электрической активности человека // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 4. С. 78.

35. *Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.И.* Об одном методе восстановления неоднородных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 7. С. 1.

36. *Pikovskiy A., Sosnovtseva O., Feudel U., Kurths J.* Multiband strange non-

chaotic attractors in quasiperiodically forced systems // Phys. Lett. A. 1996. Vol. 218, № 3–6. P. 255.

37. Постнов Д.Э., Никитин А.П., Анищенко В.С. Управление потоком вероятности в системе фазовой автоподстройки частоты // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 9. С. 24.

38. Saporin P.I., Zaks M.A., Kurths J., Voss A., Anishchenko V.S. Reconstruction and structure of electrocardiogram phase portraits // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 1. P. 1.

39. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O. Strange nonchaotic attractor in autonomous and periodically driven systems // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 3

40. Хованов И.А., Анищенко В.С. Механизм стохастического резонанса в системе с перемежаемостью типа «хаос–хаос» // Письма в ЖТФ. Т.22, № 10. С.75.

41. Астахов В.В., Сильченко А.Н., Стрелкова Г.И., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Управление и синхронизация хаоса в системе связанных генераторов // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 11. С. 1323.

42. Янсон Н.Б., Павлов А.Н., Баланов А.Г., Анищенко В.С. Задача реконструкции математической модели применительно к электрокардиограмме // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, №. 16. С. 57.

43. Feudel U., Safonova M.A., Kurths J., Anishchenko V.S. On the destruction of three-dimensional tori // Int. Journal of Bif. and Chaos. 1996. Vol.6, №. 7. P.1319.

44. Хованов И.А., Анищенко В.С. Воздействие периодического сигнала на среднюю частоту переключений хаотической бистабильной системы // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 8–10 (принято к печати).

45. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. Может ли режим работы сердца здорового человека быть регулярным? // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 8–10 (принято к печати).

46. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42 (принято к печати).



Изв.вузов «ПНД», т.5, № 1, 1997



International Conference

CONTROL OF OSCILLATIONS AND CHAOS

COC'97

St. Petersburg, Russia, August 27–29, 1997

Organizers

- St.Petersburg Informatics and Control Society
- St.Petersburg State University
- Institute for Problems of Mechanical Engineering of Russian Academy of Sciences

Co-sponsored by

- Russian Academy of Sciences
- IEEE Circuits and Systems Society
- The International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM)

With Technical Co-sponsorship of

- Russian Scientific Society of Control Systems and Processes
- IEEE Control Systems Society

International Program Committee

F.L.Chernousko, (Chairman, Russia), G.Chen (Vice-Chairman, USA), K.Furuta (Vice-Chairman, Japan), R.Genesio (Vice-Chairman, Italy), V.A.Yakubovich (Vice-Chairman, Russia)

National Organizing Committee

A.L.Fradkov (Chairman), D.A.Indejtsev (Vice-Chairman, Audit Committee), G.A.Leonov (Vice-Chairman), A.Yu.Pogromsky (Secretary), C.F.Burdakov (Local Arrangements), A.N.Churilov (Publications), I.V.Miroshnik (Accommodations), V.B.Smirnova (Social Program), M.G.Zeitlin (Publicity), E.Abed (USA), L.D.Akulenko (Russia), N.E.Barabanov (Russia), I.I.Blekhman (Russia), L.O.Chua (USA), A.L.Fradkov (Russia), G.Hu (P.R. China), G.A.Leonov (Russia), I.M.Y.Mareels (Australia), H.Nijmeijer (The Netherlands), A.A.Pervozvansky (Russia), M.I.Rabinovich (Russia), W.Schiehlen (Germany), A.Tesi (Italy), T.Ushio (Japan), K.J.Astrom (Sweden), V.S.Anischenko (Russia), V.N.Belykh (Russia), D.H. van Campen (The Netherlands), W.Ditto (USA), M.Hasler (Switzerland), E.Kreuzer (Germany), M.Marek (Czech Republic), A.I.Mees (Australia), M.Ogorzalek (Poland), F.Pfeiffer (Germany), E.N.Rozenvasser (Russia), A.N.Sharkovsk (Ukraine), J.M.T.Thompson (UK)

Secretariat of COC'97

Prof.A.L.Fradkov
The Institute for Problems of Mechanical Engineering
61 Bolshoy, V.O. 199178, St.Petersburg, Russia
Tel: +7(812)217-8185, Fax: +7(812)217-8614 (no manuscripts)
E-mail: coc97@ccs.ipme.ru

Dear Colleagues, Dear Friends,

It is our pleasure to invite you to participate in the International Conference «CONTROL OF OSCILLATIONS AND CHAOS» (COC'97). This will be the first international conference focusing on the subject of controlling complex oscillatory dynamical systems, with emphasis on both theory and applications.

Control of oscillations and chaos is an emerging field. It has been demonstrated by dramatically growing number of publications in the international journals and conferences and as well as by the exciting interest in the COC'97. About 190 papers has been selected by the International Programme Committee from 246 submissions. 15 plenary and semi-plenary talks will focus on the hot topics. Regular and poster technical sessions are splitted into 8 theme sections. Papers included into the Conference Programme represent authors from 38 countries of all continents. About 70 papers have come from out of the former Soviet Union and 12 more have East-West coauthorship that demonstrates the growing interest in the international collaboration in the field. The IPC has selected also 5 finalists of the Young Author Contest from some 30 papers submitted. The final decision will be taken at the Conference by special Committee.

A major goal of the Conference is to bring together researchers from various fields, to advance the state-of-the-art control theory and technology for complex oscillatory dynamical systems, and to gain some general and unified perspectives in the control of nonlinear dynamical behavior. In accordance with this goal the papers from various scientific fields will be presented: mathematics, physics, mechanics, chemistry, mechanical, electrical and civil engineering, biology, economics, etc.

Another goal of the Conference is to get the world scientific community acquainted with the recent achievements of Russian experts in nonlinear dynamics and nonlinear control which are not well published in English before. It would promote future cooperation in the field.

Finally we would like to create a friendly atmosphere for work and rest and to encourage making new personal contacts, exchanging ideas and enjoying the beauties of St.Petersburg including the masterpieces of the Hermitage, Tsars' palaces of suburbs, picturesque islands and embankments. So make your plans to stay over the weekend to attend various sightseeing tours.

The Conference will take place in the «Dom Uchenyh» («House of Scientists») which is the beautiful palace next to the Hermitage museum.

The organization novelty of COC'97 is welcoming submission of «standby» papers which will be included into the final programme instead of existing ones in cases of nonattendance or not registering. It would avoid the problem of «No-Show» papers and attract new papers with the last minute results. We look forward to seeing you in St.Petersburg in August 1997.

*Felix Chernousko, IPC Chairman
Alexander Fradkov, NOC Chairman*

Conference Schedule

Tuesday 27 August, 1997

10:00–13:00. Opening Ceremony. Plenary Session 1.
14:30–17:10. Regular Sessions A1, C1, D1, G.
17:30–18:30. Poster Session P1.

28 August, 1997

10:00–13:00. Plenary Session 2.
14:30–17:10. Regular Sessions B1, D2, E1, F1.
17:30–18:30. Poster Session P2.

29 August, 1997

9:30–13:00. Regular Sessions A2, B2, C2, E2.
14:30–16:50. Regular Sessions B3, E3, F2, H.
17:10–18:00. Poster Session P3.
18:00–18:30. Closing Plenary Session.

List of sections

Section A. Control of Oscillations (Chairman Prof. F.Chernousko)
Section B. Control of Chaos (Chairman Prof. R.Genesio)
Section C. Mathematical Methods of Nonlinear Analysis (Chairman Prof. G.Leonov)
Section D. Control Theory (Chairman Prof. V.Yakubovich)
Section E. Nonlinear Mechanics (Chairman Prof. D.Indeitsev)
Section F. Control Systems (Chairman Prof. A.Pervozvansky)
Section G. Synchronization (Chairman Prof. I.Blekhman)
Section H. Neurodynamics (Chairman Prof. M.Rabinovich)

Working Language

English will be the official language. No simultaneous translation will be provided

Welcome to COC'97 home page

<http://www.ipme.ru/coc97.html> (Russia)

<http://www.egr.uh.edu/Departments/ECE/Conferences/coc97.html> (USA)



В издательстве ГосУНЦ «Колледж» в конце 1997 года выходит учебное пособие

Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев: учебное пособие для вузов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997.

Современная наука о колебаниях и волнах представлена в книге своими эффектами и явлениями, встречающимися в медицине, химии, экологии, гидродинамике, электронике, экономике, социальных и других науках. Цель книги – показать, что такие понятия, как колебания и волны, неустойчивость и нелинейность, хаос и структуры позволяют понять единство современной картины мира. В книге также показано как колебательно-волновые идеи проникают в разные науки. Математический аппарат книги прост и предполагает знание школьного курса математики. Широко используется анализ размерности.

Учебное пособие предназначено для студентов-гуманитариев, изучающих курс «Современное естествознание», для направлений: 520000 – гуманитарные и социально-экономические науки, кроме направления 521900– физическая культура; 540200 – гуманитарные знания; 540300 – социально-экономические знания; 540500 – педагогика; 540600 – искусство. Оно также доступно для школьников старших классов и всех, кого интересует современное естествознание и история науки.

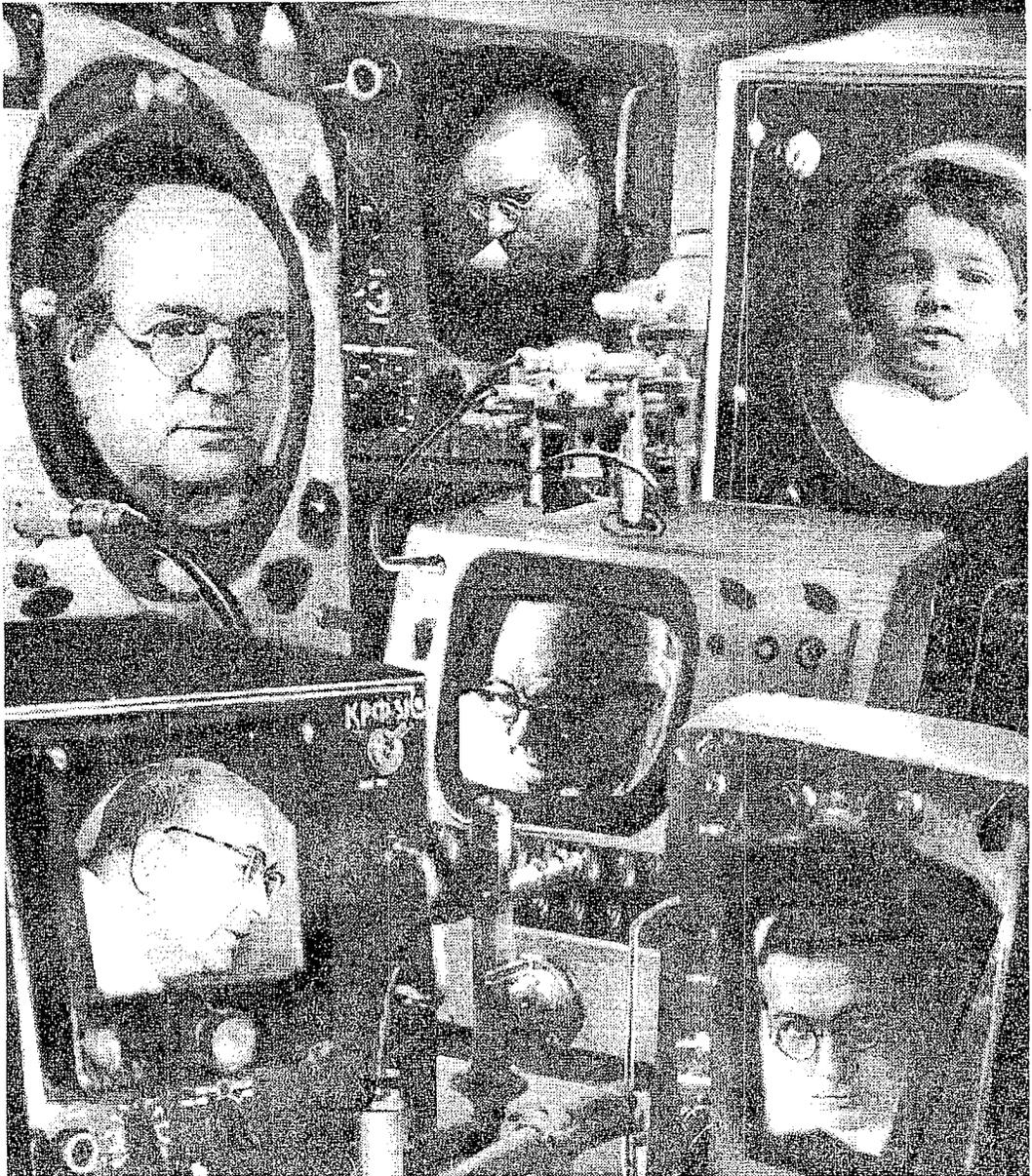
Соавтор «Плодов раздумий» и художник к.ф.-м.н. Д.В.Соколов.

*Ваш предварительный заказ на книгу,
который поможет нам определить тираж издания,
присылайте по адресу:*

410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ, редакция журнала «ПНД»

E-mail: and@ccollege.saratov.su, телефон: (845-2)51-42-98

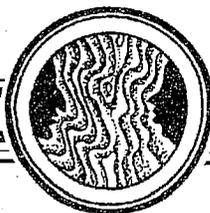




16 марта 1997 года исполнилось 90 лет со дня рождения профессора Венедикта Ивановича Калинина – одного из основателей радиофизического направления в Саратовском университете. Профессор В.И. Калинин был создателем и первым заведующим кафедрой радиофизики, которая сейчас успешно развивает учебную и научную деятельность в области фундаментальной радиофизики на принципах, заложенных основателем кафедры. Эти принципы обогащались и совершенствовались его учениками, а сейчас бережно сохраняются и передаются молодым сотрудникам и студентам учениками его учеников.

К 75-летию со дня рождения В.И.Калинина под редакцией Г.М.Герштейна был выпущен специальный сборник «Вопросы электроники СВЧ» (Изд-во СГУ, 1983), посвященный его памяти. В этот сборник, в частности, была помещена статья «Венедикт Иванович Калинин», написанная профессорами В.Л.Патрушевым, Г.М.Герштейном и доцентом В.Я.Красильниковым. Авторы статьи много лет работали вместе с В.И.Калининым, были его коллегами и друзьями. Учитывая непреходящую ценность, которую представляют воспоминания близких коллег и товарищей, мы решили перепечатать эту статью без каких-либо изменений и дополнений. Тем самым мы хотели бы выразить глубокое уважение и благодарность авторам этой статьи – нашим учителям, вклад которых в развитие физического факультета также достоин признания и памяти.

Редакционная коллегия



Изв. вузов «ПНД», т.5, № 1, 1997

ВЕНЕДИКТ ИВАНОВИЧ КАЛИНИН

Радиофизики старшего поколения хорошо помнят Венедикта Ивановича Калинина – крупного ученого и незаурядного человека, затратившего много труда для развития радиофизического направления в Саратовском университете. Молодежи это имя известно по его книгам и научным исследованиям.

В.И.Калинин родился 16 марта 1907 года в Саратове в семье железнодорожного служащего. В 1923 году окончил среднюю школу и поступил на физико–техническое отделение педагогического факультета Саратовского университета, в стенах которого и прошла почти вся его сознательная жизнь от студента до заведующего созданной им кафедрой радиофизики.

Вскоре после начала учебы отчетливо проявилась склонность Венедикта Ивановича к самостоятельной творческой работе. Ещё будучи студентом, он начал активно заниматься научной работой под руководством профессора К.А.Леонтьева – основателя радиофизического направления в Саратовском университете – и в 1929 году опубликовал свою первую статью, посвященную исследованию областей колебаний в схеме Баркгаузена–Курца – одного из основных типов СВЧ генераторов того времени. Хорошее знание иностранных языков позволяло В.И.Калинину получать «из первых рук» сведения о развитии научной мысли за рубежом. Колебания дециметрового и сантиметрового диапазонов продолжали привлекать к себе его внимание. В 1931 году вышла его статья «К вопросу о генерации электронных колебаний в схеме Баркгаузена–Курца». В ней, в результате исследований, предлагалась обобщенная формула Баркгаузена–Курца.

В 1931 году В.И.Калинин был приглашен в Центральную радиолобораторию (ЦРЛ), основанную по указанию В.И.Ленина в 1923 году в Ленинграде. Это была ведущая научная лаборатория страны в области радиотехники. Там молодой ученый организовал группу сотрудников, исследующих дециметровые волны (этот диапазон волн только начали изучать и осваивать). Он привлек к работе в этой группе еще двух физиков – выпускников Саратовского университета: Юрия Константиновича Коровина и Владимира Александровича Тропилло. В результате весьма интенсивной, пионерской работы этой группы под руководством В.И.Калинина в течение 1931–1933 годов была создана приемно–передающая аппаратура дециметровых волн. В передатчиках широко использовались

разработанные Калинин лампы с аperiodической сеткой, допускающие перестройку частоты в достаточно широких пределах.

Интенсивная, хотя и кратковременная деятельность В.И.Калинина в ЦРЛ, вскоре после его отъезда (осенью 1933 года он вернулся в Саратов), дала свои плоды. Разработанные под его руководством генераторные лампы были использованы в проведенных ЦРЛ 3 января 1934 года в Ленинграде (первых в СССР) опытах радиолокационного обнаружения самолетов. Эти эксперименты были осуществлены под руководством Ю.К.Коровина и сыграли важную роль в развитии в нашей стране работ по радиолокации.

В 1933 году В.И.Калинин начал работать в Саратовском университете в должности доцента, а затем профессора кафедры общей физики. Здесь он продолжил свои работы в области генерации СВЧ колебаний. Теперь в поле его зрения появились магнетроны, и он опубликовал статью «К вопросу о возникновении колебаний в магнетроне» (1936). Но вопрос о характере процессов, происходящих в магнетронах, оставался открытым, нужны были экспериментальные исследования. Венедикт Иванович взялся за дело со свойственным ему энтузиазмом, вовлекая окружающих в сферу своих устремлений. Началась разработка лабораторных макетов различных типов магнетронов. Вначале это были магнетроны с ленточным анодом – «Греховские» – по типу, предложенному ГФТИ, потом появились магнетроны с разрезными анодами – многоцелевые и т.п. Шли попытки объяснить механизм возникновения колебаний при взаимодействии электронного потока с электромагнитными полями. Ставились опыты по определению «кольцевых» токов, изучению зависимости частоты колебаний от конфигурации анодов, выяснению некоторых тонких эффектов. В первые послевоенные годы изготовленные в лаборатории В.И.Калинина магнетроны использовались для исследований и в других университетах страны (МГУ, Ростовском и Воронежском госуниверситетах и др.)

При всей своей увлеченности вопросами генерации дециметровых и сантиметровых волн Венедикт Иванович находил время, чтобы заниматься и их применением (в частности, для измерения диэлектрической проницаемости в диапазоне СВЧ). В 1936 году появилась его статья «О методике определения диэлектрических постоянных на очень высоких частотах». В 1938–41 годы были опубликованы еще три статьи, посвященные этому направлению.

Широкий кругозор и большая эрудиция позволили В.И.Калинину создать по проблеме генерирования сверхвысоких частот ряд ценных научных монографий, изданных в Москве: в 1935 году вышла книга «Дециметровые волны» (первая в мире монография на эту тему), в 1939 – «Дециметровые и сантиметровые волны» и в 1948 – «Генерирование дециметровых и сантиметровых волн».

Наряду с этим он выполнил много оригинальных исследований, результаты которых изложены в 50 статьях. Разработка вопросов кинематической теории генераторов сверхвысоких частот, основанной на применении представлений фазовой фокусировки к электронному потоку, модулированному по скорости, позволила рассмотреть различные типы генераторов СВЧ с единой точки зрения. Эта теория послужила темой его докторской диссертации, успешно защищенной в 1944 году в Ученом Совете Ленинградского университета.

Деятельность В.И.Калинина в СГУ в период 1933–1941 годы не ограничивалась только научной работой. Кроме традиционного курса «Общей физики», он начал разрабатывать и читать новый спецкурс «Теория колебаний». В этом курсе общие вопросы теории колебаний иллюстрировались примерами из механики, акустики, радиотехники. Лекции отличались своеобразием: нередко на них выступали студенты с рефератами по отдельным вопросам, для чего использовались журнальные статьи. Такие активные занятия походили на научный

семинар в группе радиофизиков, которому В.И.Калинин придавал исключительно большое значение.

Не замыкаясь в рамках чистой науки, Венедикт Иванович всегда живо откликался на запросы практики. В условиях ограниченного ассортимента фабричной аппаратуры и отсутствия необходимых приборов осуществление новых установок требовало немало находчивости и изобретательности. Особенно это проявилось в грозные годы Великой Отечественной Войны, когда он много сил и труда отдавал работе над оборонной тематикой, принимая активное участие в разработке вопросов научно-производственного характера по заданию промышленных организаций. Уже в 1942 году группой радиофизиков Саратовского университета под руководством В.И.Калинина была предложена технология регенерации электроламп, использованная многими организациями в различных областях страны. Об этой инициативе положительно отозвалась газета «Правда» в номере от 19 февраля 1942 года.

Исключительная работоспособность В.И.Калинина позволила ему не только успешно вести научно-исследовательскую и педагогическую работу, но и заниматься общественной деятельностью. Еще будучи студентом, он с увлечением проводил астрономические вечера не только для астрономов-любителей, но и для всех заинтересованных слушателей города. После окончания университета он принимал участие в работе общества «Знание», выступая с лекциями среди широких кругов населения и по радио. Текст его лекций по истории развития радиотехники в нашей стране был издан брошюрой под названием «Россия – родина радио». Плодотворная научная деятельность в области радиоэлектроники СВЧ и высокая оценка работ В.И.Калинина специалистами сделали естественным избрание Венедикта Ивановича членом радиосовета АН СССР. В родном городе он избирался народным заседателем Народного суда Кировского района, заместителем председателя участковой комиссии по выборам в Верховный Совет.

Осенью 1945 года организовался НИИ механики и физики при СГУ. Венедикт Иванович возглавил лабораторию радиофизики, которой уделял много внимания. Коллектив лаборатории явился основой будущей кафедры радиофизики, на создание которой ученому пришлось потратить немало усилий. В 1951 году в Саратовском университете была создана кафедра радиофизики, В.И.Калинин заведовал ею со времени основания до своей кончины в 1960 году.

Профессор В.И.Калинин всегда отдавал много сил учебной работе. Он с увлечением готовил и читал курсы радиофизического направления, принимал участие в постановке работ в радиофизических практикумах. Ощущалась большая потребность в учебных пособиях по новым лекционным курсам и практикумам, и Венедикт Иванович напряженно трудится над их созданием. В 1955 году под редакцией В.И.Калинина издательством СГУ было выпущено первое издание «Радиофизического практикума», а в 1960 году вышло второе издание этого пособия. В 1957 году в Москве была напечатана книга В.И.Калинина и Г.М.Герштейна «Введение в радиофизику», допущенная Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для университетов и вузов.

Особое внимание Венедикт Иванович уделял воспитанию научных кадров, привлекая молодежь к исследовательской работе. Он умел создавать творческую атмосферу. Под его руководством более десяти человек выполнили и успешно защитили кандидатские диссертации.

Плодотворная деятельность Венедикта Ивановича была высоко оценена: он был награжден медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной Войне 1941–1945», многократно получал благодарность МВО СССР за успехи в подготовке высококвалифицированных кадров, награжден Почетной грамотой Горисполкома г. Саратова, а в 1959 году ему было присвоено почетное звание Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР.

Все, кому посчастливилось общаться с Венедиктом Ивановичем, знали его как человека высокой культуры, прямого и принципиального, скромного и трудолюбивого. Исключительная любознательность и внутренняя интеллигентность обусловили широту его интересов. Он живо интересовался литературой и искусством, увлекался художественной фотографией, страстно любил родную природу, был горячим патриотом своей Родины. Таким Венедикт Иванович и остался в памяти всех знавших его.

Заведующий кафедрой физики
Саратовского сельскохозяйственного института,
Заслуженный деятель науки РСФСР,
д.т.н., профессор

В.Л. Патрушев

Заведующий кафедрой радиофизики
Саратовского университета,
д. ф.-м.н., профессор

Г.М. Герштейн

Доцент кафедры электрорадиотехники
Саратовского университета,
к.ф.-м.н.

В.Я. Красильников

СОДЕРЖАНИЕ

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Купцов П.В., Кузнецов С.П.* О динамике модельных систем с дискретным временем под действием бинарных самоподобных последовательностей
- Кипчатов А.А., Короновский А.А.* Тонкие эффекты самоподобного поведения кусочно-линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора
- Короновский А.А.* Мультипликаторы периодических решений для генератора с кусочнолинейным элементом

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Андреев А.В., Шитлин С.Л.* Сверхизлучение двухкомпонентных пространственно неоднородных сред
- Безручко Б.П., Жалнин А.Ю., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П.* Дискретные нелинейные модели периодически возбуждаемой RL -диод цепи
- Короновский А.А., Пономаренко В.И., Трубецков Д.И.* Динамика отображений с пороговым типом связи
- Кипчатов А.А., Подин С.В.* Применение методики адаптивной фильтрации для определения периода колебаний потоковых систем
- Музычук О.В.* Вероятностные характеристики системы «хищник-жертва» со случайно изменяющимися параметрами

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Астахов С.А., Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.* Эволюция бассейнов притяжения аттракторов связанных систем с удвоением периода

ДЕБЮТЫ

- Кащенко Д.С.* Синхронизация в системе из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью
- Иваньков Н.Ю.* Свойства скейлинга пространства параметров логистического отображения под внешним периодическим воздействием

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Правила оформления рукописей

1. Статьи объемом не более 16 страниц должны быть напечатаны на белой бумаге через два интервала и представлены в двух экземплярах. При компьютерном наборе размер шрифта – не меньше стандартного машинописного.

2. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, *краткий реферат статьи, составленный по форме удобной для непосредственного включения его в РЖ «Физика», издаваемый ВИНТИ* (см. ниже). К статье прилагаются:

а) перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, краткого реферата;

б) краткие сведения об авторах с фотографиями любого формата.

Приложения даются в двух экземплярах.

3. Весь иллюстративный материал представляется в двух экземплярах. Рисунки выполняются тушью на белой бумаге. Рисунки, полученные машинной графикой, должны быть достаточно четкими и яркими. На обороте указываются: порядковый номер рисунка, фамилии авторов, название статьи. Подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

4. Все формулы должны быть вписаны черными чернилами четко и ясно. Формулы должны быть размечены во всех случаях, когда строчные и прописные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своими размерами (С и с, V и v, U и u, W и w, S и s, P и p, K и k, X и x, Y и y, Z и z, Q и q, J и j) Необходимо прописные буквы подчеркивать простым карандашом двумя черточками снизу (C, V), а строчные – двумя черточками сверху (\bar{c} и \bar{v}). При написании необходимо также делать ясное различие между буквами J и I и пояснять их на полях. Буква O подчеркивается двумя черточками снизу, цифра 0 не подчеркивается. Особенно четко следует вписывать схожие по написанию l и e (l подчеркивается зеленым карандашом), k (русское) и k (латинское), h и n, q и g, «,» (запятую), «'» (апостроф), «1» (единицу), «2» (двойку), r и z. Особое внимание должно быть обращено на аккуратное написание индексов и показателей степеней. Надстрочные знаки нужно отчеркивать дугой – \cup , подстрочные дугой – \cap . Индексы, являющиеся сокращениями слов, должны быть пояснены отдельно. В вещественных числах ставится десятичная точка.

5. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, прописные указываются особо. Для обозначения вектора используются стрелки над буквой, для усреднения величины – черта сверху.

6. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке должны быть указаны:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны.

7. Статьи, направляемые авторам на переработку, должны быть возвращены в редакцию не позднее двух месяцев после получения. При нарушении этого условия статья рассматривается как вновь поступившая.

Статьи, присланные без соблюдения перечисленных выше правил, к рассмотрению редакцией не принимаются.

Рекомендации по составлению «краткого реферата» и «сведений об авторах»

1. Публикация реферата преследует две основные цели:

а) помочь ученым, работающим над теми же вопросами, по которым написана статья, уточнить, имеет ли смысл читать статью полностью;

б) упростить и ускорить работу реферативных журналов, которые получают возможность немедленно перепечатывать авторские рефераты;

Реферат должен представлять собой самостоятельное законченное сообщение объемом не более 200–250 слов. В нем должны быть обозначены основные идеи и результаты, содержащиеся в статье. Авторы должны иметь в виду, что рефераты могут оказаться единственными материалами, которые будут прочитаны.

2. *Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:*

Иванов Петр Сидорович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и соавтор учебника «Волны в экологии». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

Статьи принимаются на дискетах для компьютера IBM PC, формат MS DOS – 5,25" или 3,5". Текстовые файлы записываются в ASC II- кодировке. Иллюстрации – в виде файлов в формате PCX, TIFF или GIF. Наличие текста на дискете не исключает необходимость представления размеченной распечатки статьи (в двух экз.), с которой работает рецензент и из которой вносятся формулы в макет статьи. В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

Редакция

E-mail:and@ccollege.saratov.su
E-mail:and@cas.ssu.runnet.ru

для писем
для статей

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты – р/с № 000609446 в АКБ «Экономбанк»
г. Саратова, БИК 046311722, корсчет банка 700161122

Подписка на II-ое полугодие 1997 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498

Сдано в набор 15.03.97. Подписано к печати 18.05.97. Формат 70x108/16
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 12,425 (8,875). Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 200 экз. Заказ 44

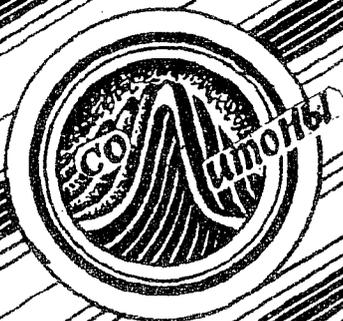
Издательство ГосУНЦ «Колледж»
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446
E-mail:and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

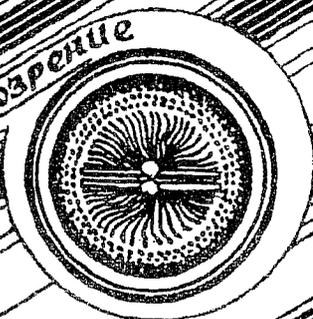
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1997



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



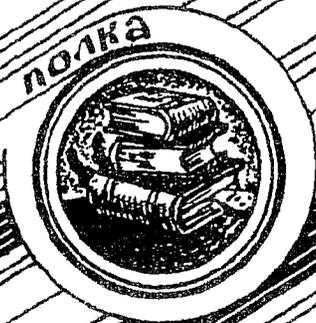
для в журнале

студентов и преподавателей



методические заметки

Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики

**Жизнь
представляется Вам
бесмысленной
и хаотичной?**

**Журнал ПНД
поможет
распутать клубок
Ваших проблем!**

