

# Трикладная Делнейная Динамика

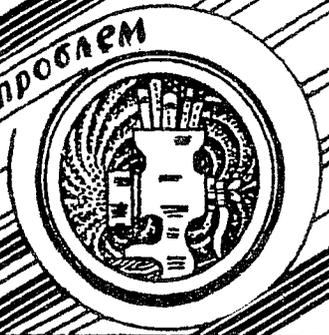


125 лет  
со дня  
рождения  
Обри  
Бердлея





Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы



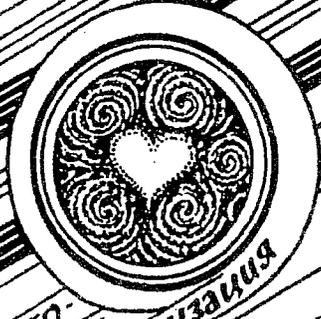
Обзоры актуальных проблем  
нелинейной  
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



Детерминированный  
хаос



Автоволны,  
самоорганизация



Прикладные задачи  
нелинейной  
теории  
колебаний  
и волн



Нелинейная  
динамика  
в лицах.  
История персоналий

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*В.И. Кринский*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пуцино

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет

*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

*В.К. Юлатов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

**СОДЕРЖАНИЕ**

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

*Купцов П.В., Кузнецов С.П.* О динамике модельных систем с дискретным временем под действием бинарных самоподобных последовательностей . . . . . 3

*Кипчатов А.А., Короновский А.А.* Тонкие эффекты самоподобного поведения кусочно-линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора . . . . . 17

*Короновский А.А.* Мультипликаторы периодических решений для генератора с кусочно-линейным элементом . . . . . 24

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

*Андреев А.В., Шитлин С.Л.* Сверхизлучение двухкомпонентных пространственно неоднородных сред . . . . . 35

*Безручко Б.П., Жалнин А.Ю., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П.* Дискретные нелинейные модели периодически возбуждаемой *RL*-диод цепи . . . . 48

*Короновский А.А., Пономаренко В.И., Трубецков Д.И.* Динамика отображений с пороговым типом связи . . . . . 63

*Кипчатов А.А., Подин С.В.* Применение методики адаптивной фильтрации для определения периода колебаний потоковых систем . . . . . 72

*Музычук О.В.* Вероятностные характеристики системы «хищник-жертва» со случайно изменяющимися параметрами . . . . . 80

**ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС**

*Астахов С.А., Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.* Эволюция бассейнов притяжения аттракторов связанных систем с удвоением периода . . . . . 87

**ДЕБЮТЫ**

*Кащенко Д.С.* Синхронизация в системе из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью . . . . . 100

*Иваньков Н.Ю.* Свойства скейлинга пространства параметров логистического отображения под внешним периодическим воздействием . . . . . 118

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA**

Руслан Леонтьевич Стратонович . . . . . 128

*Стратонович Р.Л.* Немарковская теория флуктуаций в нелинейных динамических системах с линейным трением . . . . . 131

АНОНС . . . . . 79

## CONTENTS

## BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Dynamics of model systems with discrete time driven by binary self-similar sequences. *P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov* . . . . . 3
- The subtle effects of the piece-wise linear system self-similar behaviour near the line of the torus birth bifurcation. *A.A. Kipchatov, A.A. Koronovskiy* . . . . . 17
- The multipliers of periodical solutions for the generator with the piece-wise linear element. *A.A. Koronovskiy* . . . . . 24

## APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Superradiance of two-component spatial inhomogeneous media. *A.V. Andreev, S.L. Sheetlin* . . . . . 35
- Large discrete nonlinear models of periodically driven *RL*-diode circuit. *B.P. Bezruchko, A.U. Zhalnin, M.D. Prokhorov, Ye.P. Seleznev* . . . . . 48
- The dynamics of maps with the threshold type of coupling. *A.A. Koronovskiy, V.I. Ponomarenko, D.I. Trubetskov* . . . . . 63
- Application of the adaptive filtering method to evaluation of the oscillation period of the flow systems. *A.A. Kipchatov, S.V. Podin* . . . . . 72
- Probability characteristics of «beast-sacrifice» system with random fluctuations of parameters. *O.V. Muzychuk* . . . . . 80

## DETERMINISTIC CHAOS

- Evolution of basins of attraction for coupled period doubling systems. *S.A. Astakhov, B.P. Bezruchko, Ye.P. Seleznev, D.A. Smirnov* . . . . . 87

## DEBUTS

- Synchronization in a system of two connected oscillators of the first order with relay delayed feedback. *D.S. Kaschenko* . . . . . 100
- The scaling properties of the parameter space of the periodically forced logistic map. *N.Yu. Ivankov* . . . . . 118

## HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- Rouslan L. Stratonovich . . . . . 128
- Non-markov theory of quantum fluctuations in the nonlinear dynamical systems with linear friction. *Rouslan L. Stratonovich* . . . . . 131

- ANNOUNCEMENTS . . . . . 79



## О ДИНАМИКЕ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БИНАРНЫХ САМОПОДОБНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

*П.В. Купцов, С.П. Кузнецов*

Рассматривается динамика модельных систем – частицы, совершающей одномерное блуждание, и отображения, демонстрирующего бифуркацию вилки, – при воздействии бинарных последовательностей, которые сконструированы из двух символов с помощью специальных правил подстановки. Среди этих последовательностей выделено три класса, соответствующих качественно различным типам динамики под их воздействием. Показано, что с каждой последовательностью ассоциируется матрица  $2 \times 2$ , причем принадлежность последовательности к тому или иному классу определяется меньшим по абсолютной величине собственным числом этой характеристической матрицы.

### Введение

Одной из общих задач нелинейной динамики является задача о поведении различных систем под внешним воздействием. В зависимости от свойств системы и характера воздействия могут наблюдаться такие нетривиальные эффекты, как рождение странного нехаотического аттрактора [1], On–Off перемежаемость [2,3], стохастический резонанс [4] и т. д.

В нелинейной динамике часто используются модельные системы с дискретным временем, которые математически описываются рекуррентными отображениями. Во многих случаях это позволяет исследовать эффекты, анализ которых для систем с непрерывным временем затруднен. Кроме того, переход к отображениям позволяет значительно уменьшить объем вычислений при анализе динамики с помощью компьютера. В настоящей работе будет рассматриваться динамика отображений под воздействием бинарных последовательностей, то есть последовательностей, построенных из двух символов.

Обращение к бинарным последовательностям обусловлено тем, что это простейший класс числовых последовательностей, а также широким использованием двоичного представления сигналов – в вычислительной технике, в цифровых устройствах, в разнообразных теоретических исследованиях (теория информации и пр.). Кроме того, последовательности такого рода возникают, когда некоторая динамическая система исследуется с применением методов символической динамики: если используется кодирование с помощью двух символов, система выступает как генератор бинарной последовательности.

Мы будем обсуждать специальный тип бинарных последовательностей,

которые не имеют конечного периода, но обладают регулярной структурой, воспроизводящей себя при рассмотрении фрагментов различной длины [5]. Это соответствует пограничной ситуации между порядком и хаосом, в силу чего можно ожидать разнообразной и интересной феноменологии, в частности, возникновения критических явлений. Благодаря самоподобию структуры рассматриваемых последовательностей, оказывается возможным привлечь теоретический аппарат, основанный на ренормгрупповом анализе.

В разделе 1 описывается процедура построения бинарных самоподобных последовательностей и приводятся некоторые примеры. В разделе 2 рассматривается ситуация, аналогичная одномерному случайному блужданию броуновской частицы, но с заменой случайного воздействия на бинарную самоподобную последовательность. В разделе 3 вводится характеристическая матрица и характеристический показатель бинарной самоподобной последовательности. В разделе 4 развивается ренормгрупповой анализ задачи об одномерном блуждании и, в зависимости от характера порождаемых траекторий, выделяются три класса бинарных самоподобных последовательностей. В разделе 5 обсуждается задача о мультипликативном воздействии бинарных самоподобных последовательностей на нелинейное модельное отображение, которое в отсутствие воздействия демонстрирует бифуркацию вилки.

## 1. Правила построения и примеры бинарных самоподобных последовательностей

Рассмотрим итерационную процедуру построения бинарной самоподобной последовательности. Пусть имеется некоторый набор нулей и единиц и правило подстановки, ставящее в соответствие каждому из этих символов блок, который также состоит из нулей и единиц. Один шаг построения состоит в замене всех символов последовательности на соответствующие блоки, в результате чего получается новая последовательность. При многократном повторении этой процедуры в пределе получим последовательность, которая обладает свойством самоподобия. Например, используя правило

$$0 \rightarrow 0100, \quad 1 \rightarrow 1011 \quad (1.1)$$

и стартуя с символа 0, получим последовательность, начальный фрагмент которой 0100101101000100...

Правило подстановки в общем виде можно записать следующим образом:

$$0 \rightarrow \eta_{00} \eta_{01} \eta_{02} \dots \eta_{0m_0-1}, \quad 1 \rightarrow \eta_{10} \eta_{11} \eta_{12} \dots \eta_{1m_1-1}, \quad (1.2)$$

где  $\eta_{ij}$  обозначает 0 или 1, числа  $m_0$  и  $m_1$  определяют количество символов в блоках подстановки. Целесообразно исключить из рассмотрения такие правила, в которых  $\eta_{00}=1$ ,  $\eta_{10}=0$ . Тогда при многократном повторении правила подстановки в пределе получится вполне определенный результат. Действительно, возникший на некотором шаге построения набор символов сохраняется на следующих шагах в качестве начального участка последовательности.

Заметим, что для каждого правила можно построить правило двукратной подстановки, которое порождает ту же последовательность, что и исходное. Для этого нужно заменить символы в блоках на сами эти блоки. Например, для (1.1) правило двукратной подстановки таково:

$$0 \rightarrow 0100 \ 1011 \ 0100 \ 0100, \quad 1 \rightarrow 1011 \ 0100 \ 1011 \ 1011.$$

Рассмотрим некоторые известные примеры бинарных самоподобных последовательностей [5].

Если итерировать логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2,$$

стартуя с  $x_0=0$  при значении параметра  $\mu=1.401155189 \dots$  (точка накопления бифуркаций удвоения периода) и выписывать 0, если  $x < 0$ , и 1, если  $x > 0$ , то получим последовательность 101110101011101110... Как нетрудно проверить, она воспроизводит себя при использовании правила подстановки

$$1 \rightarrow 10, \quad 0 \rightarrow 11, \quad (1.3)$$

или правила двукратной подстановки

$$1 \rightarrow 1011, \quad 0 \rightarrow 1010. \quad (1.4)$$

Другая известная самоподобная бинарная последовательность возникает при описании динамики популяции кроликов, которую рассматривал еще Фибоначчи. Пусть имеется пара молодых кроликов, которая через год вырастает и дает потомство – еще одну пару молодых кроликов. Взрослые пары дают потомство каждый год, и кролики живут вечно. Обозначим молодую пару символом 0, а взрослую – символом 1. Используя правило подстановки

$$0 \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow 10, \quad (1.5)$$

находим последовательность 101101011011010101... Она же получается при использовании правила двукратной подстановки

$$0 \rightarrow 10, \quad 1 \rightarrow 101. \quad (1.6)$$

Еще одним примером служит последовательность Морса – Туэ, элементы которой суть суммы по модулю 2 цифр двоичного представления натуральных чисел: 0110100110010110100... Эта последовательность строится с помощью правила подстановки

$$0 \rightarrow 01, \quad 1 \rightarrow 10. \quad (1.7)$$

## 2. Задача об одномерном блуждании под действием самоподобных бинарных последовательностей

Классическая задача об одномерном блуждании броуновской частицы под действием бинарного шума описывается уравнением

$$x_{n+1} = x_n + \xi_n,$$

где  $\xi_n$  – случайная переменная, принимающая в каждый момент дискретного времени  $n$  одно из двух значений  $a$  или  $b$  с определенными вероятностями.

Рассмотрим аналогичную постановку задачи, когда воздействие на частицу задается некоторой бинарной самоподобной последовательностью  $\zeta_n$ :

$$x_{n+1} = x_n + \xi_n, \quad (2.1)$$

где

$$\xi_n = \begin{cases} a, & \text{если } \zeta_n = 0, \\ b, & \text{если } \zeta_n = 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Величины  $a$  и  $b$  можно рассматривать как управляющие параметры задачи о блуждании частицы. Условием отсутствия направленного дрейфа является соотношение

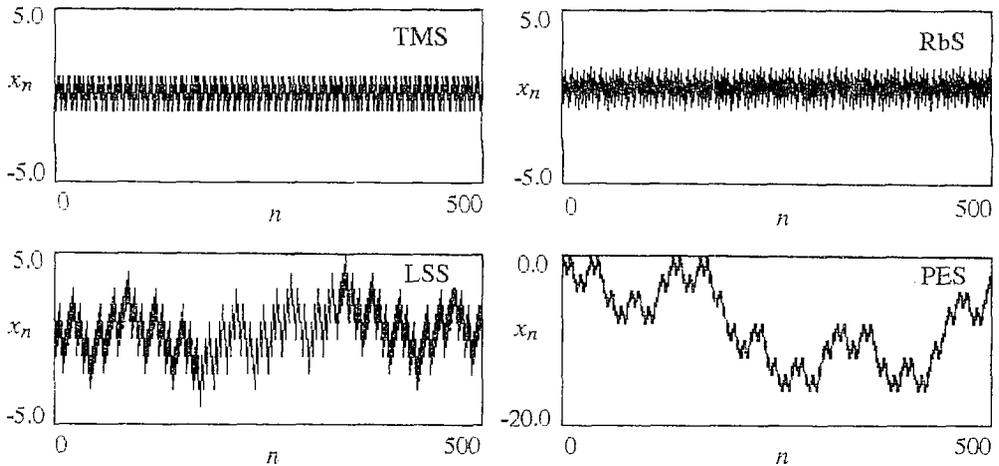


Рис. 1. Зависимость от времени динамической переменной  $x_n$  для частицы, совершающей одномерное блуждание при воздействии различных последовательностей. Во всех случаях  $b = 1$ , значение  $a$  выбрано так, чтобы  $\langle \xi_n \rangle = 0$

$$\langle \xi_n \rangle = ap_0 + bp_1 = 0, \quad (2.3)$$

где  $p_0$  и  $p_1$  — частоты появления в последовательности  $\zeta_n$  символов 0 и 1, соответственно.

На рис. 1 представлены диаграммы, иллюстрирующие одномерное блуждание частицы под действием последовательностей, обсуждавшихся в разделе 1. Из рисунка видно, что качественно различаются диаграммы трех типов:

(I) блуждания в ограниченной области (при воздействии последовательности Морса – Туэ, TMS (1.7), и кроликов, RbS, (1.5));

(II) траектория ограничена, но имеет фрактальный вид (для логистической сигнум последовательности, LSS, (1.3));

(III) неограниченная траектория фрактального вида (для последовательности PES (1.1), «Positive Exponent Sequence», обладающей положительным характеристическим показателем, см. раздел 3).

Замечательно, что и для других бинарных самоподобных последовательностей в задаче об одномерном блуждании наблюдаются эти же три типа поведения.

### 3. Характеристическая матрица бинарных самоподобных последовательностей

Прежде чем продолжать анализ задачи об одномерном блуждании, введем некоторые понятия и характеристики бинарных самоподобных последовательностей.

Определим матрицу

$$S = \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

элементы которой  $s_{00}$  и  $s_{01}$  задают, соответственно, количество нулей и единиц в блоке, подставляемом вместо 0, а  $s_{10}$  и  $s_{11}$  — в блоке, подставляемом вместо 1. Очевидно, матрица  $S$  определяет закон эволюции числа нулей и единиц в бинарной последовательности при ее построении. Если на  $k$ -ом шаге эти числа обозначить  $N_k^{(0)}$ ,  $N_k^{(1)}$ , то имеем

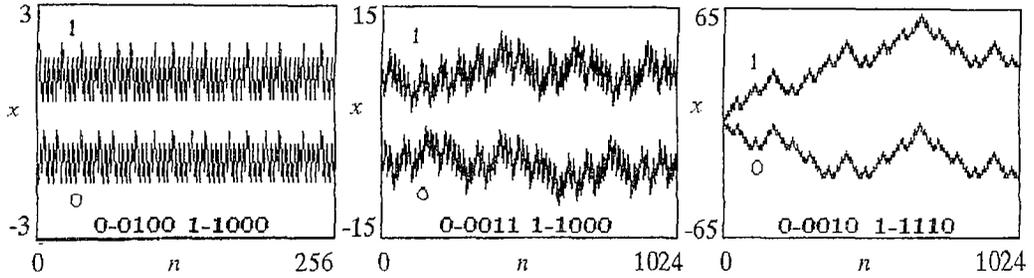


Рис. 2. Одномерное блуждание частицы при воздействии бинарных самоподобных последовательностей разных классов, построенных начиная с 0 (нижние кривые) и с 1 (верхние кривые). Правила приведены на рисунках. Слева класс I ( $\Lambda < 0$ ), в центре класс II ( $\Lambda = 0$ ), справа класс III ( $\Lambda > 0$ ). Значения управляющих параметров  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношению (2.3)

$$N_{k+1}^{(0)} = N_k^{(0)}s_{00} + N_k^{(1)}s_{10},$$

$$N_{k+1}^{(1)} = N_k^{(0)}s_{01} + N_k^{(1)}s_{11}$$

или

$$(N_{k+1}^{(0)}, N_{k+1}^{(1)}) = (N_k^{(0)}, N_k^{(1)})\mathbf{S}. \quad (3.2)$$

Заметим, что оба собственных числа матрицы  $\mathbf{S}$  вещественные\*. Первое из них  $\lambda_1$  всегда больше единицы; это не что иное как фактор увеличения общего числа символов в последовательности за один шаг построения. Соответствующий этому собственному числу левый собственный вектор  $(p_0, p_1)$  задает частоты появления в последовательности символов 0 и 1.

Для выяснения смысла второго собственного числа  $\lambda_2$ , выразим  $N_k^{(0)}$  и  $N_k^{(1)}$  через начальные значения  $N_0^{(0)}$  и  $N_0^{(1)}$

$$N_k^{(i)} = p_i(\lambda_1)^k G_1(N_0^{(0)}, N_0^{(1)}) + q_i(\lambda_2)^k G_2(N_0^{(0)}, N_0^{(1)}), \quad i = 0, 1, \quad (3.3)$$

где  $q_0$  и  $q_1$  — компоненты левого собственного вектора, отвечающего  $\lambda_2$ , а коэффициенты  $G_1$  и  $G_2$  зависят от  $N_0^{(0)}$  и  $N_0^{(1)}$ . Рассмотрим взвешенную сумму  $N_k^{(\Sigma)} = \alpha N_k^{(0)} + \beta N_k^{(1)}$ , где величины  $\alpha$  и  $\beta$  подобраны так, чтобы исключить собственный вектор  $p_0, p_1$ :

$$N_k^{(\Sigma)} = (\alpha q_0 + \beta q_1) G_{2i}(\lambda_2)^k, \quad (3.4)$$

$$\alpha p_0 + \beta p_1 = 0.$$

Очевидно, что такой выбор  $\alpha$  и  $\beta$  совпадает с условием отсутствия направленного дрейфа в задаче об одномерном блуждании. Введем в рассмотрение характеристический показатель бинарной самоподобной последовательности

$$\Lambda = \ln \lambda_2. \quad (3.5)$$

Если  $\Lambda < 0$ , то в асимптотике  $k \rightarrow \infty$  взвешенная сумма  $N_k^{(\Sigma)}$  не зависит от выбора стартового набора и стремится к нулю. Когда  $\Lambda > 0$ , количество нулей и единиц в последовательности будет существенно разным в зависимости от выбора начальных условий. Случай  $\Lambda = 0$  отвечает промежуточной, критической ситуации.

На рис. 2 показано блуждание частицы при воздействии

\* Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением матриц с положительными собственными числами. В противном случае можно перейти к правилу двукратной подстановки. Это соответствует возведению матрицы  $\mathbf{S}$  в квадрат, так что собственные числа новой матрицы заведомо будут положительны.

последовательностей, заданных некоторыми идентичными правилами, но построенных, начиная с разных стартовых символов – 0 и 1. Видно, что в случае  $\Lambda > 0$  траектория существенным образом зависит от выбора стартового символа.

В известном смысле,  $\Lambda$  – величина, аналогичная классическому показателю Ляпунова.

В заключение этого раздела выпишем матрицы  $S$ , собственные числа и характеристические показатели для последовательностей, рассмотренных выше в качестве примеров.

$$\text{TMS (1.7):} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (2, 0), \quad \Lambda = -\infty, \quad (3.6)$$

$$\text{RbS (1.6):} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (3 \pm 5^{1/2})/2, \quad \Lambda \approx -0.962, \quad (3.7)$$

$$\text{LSS (1.4):} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (4, 1), \quad \Lambda = 0, \quad (3.8)$$

$$\text{PES (1.1):} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (4, 2), \quad \Lambda \approx 0.693. \quad (3.9)$$

Для логистической сигнум последовательности и последовательности кроликов здесь использованы правила двукратной подстановки.

#### 4. Ренормгрупповой анализ задачи об одномерном блуждании под действием самоподобных бинарных последовательностей

Самоподобная бинарная последовательность  $\zeta_n$  построена из блоков  $\eta_{00}\eta_{01}\eta_{02}\dots\eta_{0m_0-1}$  и  $\eta_{10}\eta_{11}\eta_{12}\dots\eta_{1m_1-1}$ , при замене которых на соответствующие символы 0 и 1 получается та же самая последовательность. В контексте задачи об одномерном блуждании такая замена соответствует перенормировке времени на  $\lambda_1$ , то есть на первое собственное число характеристической матрицы  $S$ . Используя эту особенность структуры последовательностей, можно развить ренормгрупповой анализ задачи об одномерном блуждании.

Занумеруем блоки индексом  $l$ . Тогда блок с номером  $l$  будет иметь длину  $m_{\zeta_l}$ . Проитерировав отображение (2.1) вдоль этих блоков, получим перенормированное уравнение

$$x'_{l+1} = x'_l + \xi'(\zeta_l), \quad (4.1)$$

в котором в качестве дискретного времени фигурирует индекс  $l$ . Один шаг по  $l$  соответствует  $m_{\zeta_l}$  шагам исходного времени  $n$ . Переменная  $\xi'(\zeta_l)$  принимает значения  $a'$  и  $b'$ , которые связаны с  $a$  и  $b$

$$\begin{aligned} a' &= s_{00}a + s_{01}b \\ b' &= s_{10}a + s_{11}b \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где  $S$  – характеристическая матрица последовательности  $\zeta_n$ .

Условие отсутствия направленного дрейфа (2.3) означает, что вектор параметров  $(a, b)$  является правым собственным вектором матрицы  $S$  с собственным числом  $\lambda_2$ . Считая, что это условие выполняется, из (4.2) получаем

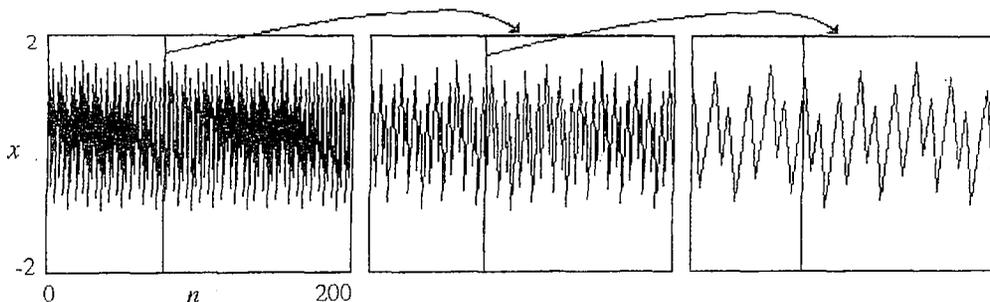


Рис. 3. Перенормировка траектории частицы, описываемой уравнением (2.1), находящейся под действием последовательности кроликов (1.5). Фактор пересчета по оси  $n$   $\lambda_1=2.618$ , по оси  $x$  пересчета нет

$$a' = \lambda_2 a, \quad b' = \lambda_2 b. \quad (4.3)$$

Заменой  $x'_j = \lambda_2 x_j$  отображение (4.1) можно привести к исходному виду (2.1). Учитывая, что  $l \sim n/\lambda_1$ , получаем для динамической переменной скейлинговое соотношение

$$x_{\lambda_1 n} = \lambda_2 x_n. \quad (4.4)$$

Если  $0 \leq \lambda_2 < 1$ , то есть  $\Lambda < 0$ , то частица движется в ограниченной области, поскольку, в силу (4.4), размах ее траектории к моменту времени  $(\lambda_1 n)$  не может быть больше, чем он был в момент  $n$ . Траектория не обладает самоподобием (см. рис. 3, который относится к случаю воздействия последовательности кроликов).

Когда  $\lambda_2 = 1$ , то есть  $\Lambda = 0$ , движение частицы, также как и в предыдущем случае, ограничено. При этом траектория обладает свойством самоподобия (скейлинга) – см. рис. 4.

Наконец, при  $\lambda_2 > 1$  имеем  $\Lambda > 0$ , поэтому из (4.4) следует, что при блуждании под действием такой последовательности размах траектории нарастает со временем (рис. 5).

Таким образом, мы приходим к определению трех классов бинарных самоподобных последовательностей, отвечающих качественно различному поведению в задаче об одномерном блуждании:

I класс, докритический –  $\Lambda < 0$ , к этому классу относятся последовательности Морса – Туэ и кроликов;

II класс, критический –  $\Lambda = 0$ , к нему относится логистическая сигнум-последовательность;

III класс, закритический –  $\Lambda > 0$ , сюда относится последовательность, задаваемая правилом (1.1).

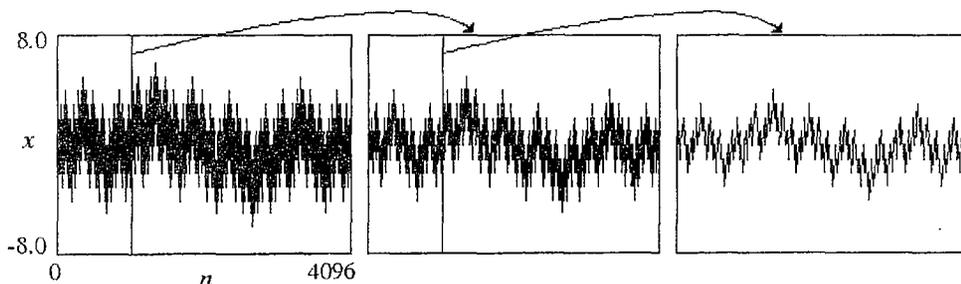


Рис. 4. Перенормировка траектории частицы (2.1), находящейся под действием логистической сигнум последовательности (1.3). Фактор пересчета по оси  $n$   $\lambda_1=4$ , по оси  $x$   $\lambda_2=1$

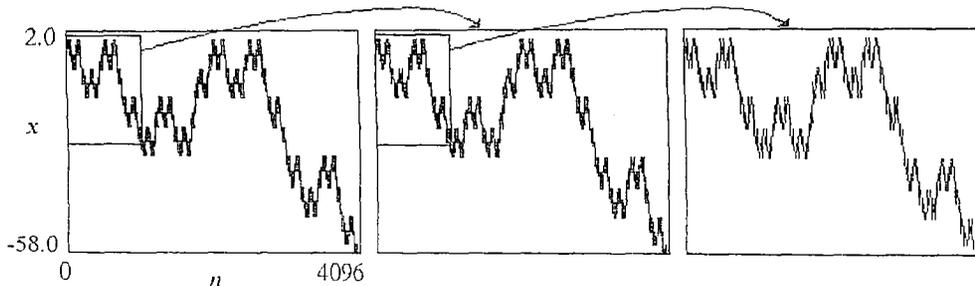


Рис. 5. Перенормировка траектории частицы (2.1), находящейся под действием последовательности (1.1). Фактор пересчета по оси  $n$   $\lambda_1=4$ , по оси  $x$   $\lambda_2=2$

В первый класс естественно включить также периодические бинарные последовательности. Действительно, любую такую последовательность можно задать правилом типа (1.2), у которого блоки подстановок для 0 и 1 совпадают. В этом случае характеристическая матрица имеет две одинаковые строки и, следовательно,  $\lambda_2=0$ .

### 5. Динамика нелинейного модельного отображения, демонстрирующего бифуркацию вилки, под воздействием самоподобной бинарной последовательности

Рассмотрим далее модельное отображение

$$x_{n+1} = \xi x_n / (1 + x_n^2)^{1/2}, \quad (5.1)$$

которое при значениях параметра  $\xi < 1$  имеет в качестве аттрактора точку  $x^*=0$ . При  $\xi=1$  эта точка теряет устойчивость, и происходит бифуркация вилки («pitch-fork»). При  $\xi > 1$  имеются две симметрично расположенные неподвижные точки  $x^* = \pm(\xi^2 - 1)^{1/2}$  (рис. 6).

Пусть теперь система (5.1) находится под внешним мультипликативным воздействием, то есть вместо параметра  $\xi$  в (5.1) фигурирует переменная величина  $\xi_n$ . Динамика системы (5.1) с различным по характеру воздействием такого типа рассматривалась в работах [6–8]. В работе [8] обсуждалась ситуация, когда  $\xi_n$  меняется во времени по закону логистической сигнум последовательности. Здесь мы обратимся к более общему случаю, когда изменение во времени  $\xi_n$  задается произвольной бинарной самоподобной последовательностью. С этой целью рассмотрим модельное уравнение следующего вида:

$$x_{n+1} = \xi_n x_n / (1 + x_n^2)^{1/2}, \quad (5.2)$$

$$\xi_n = \begin{cases} a, & \text{если } \zeta_n=0, \\ b, & \text{если } \zeta_n=1, \end{cases} \quad (5.3)$$

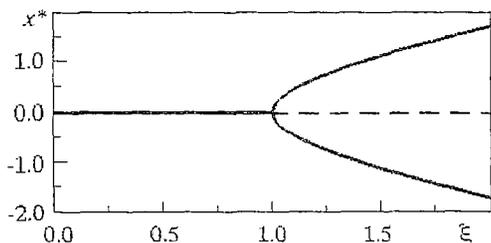


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма системы (5.1). По горизонтальной оси отложен управляющий параметр  $\xi$ , по вертикальной — положение устойчивой неподвижной точки отображения (5.1): при  $\xi < 1$   $x^*=0$ , при  $\xi > 1$   $x^* = \pm(\xi^2 - 1)^{1/2}$

где  $\zeta_n$  — бинарная самоподобная последовательность, а величины  $a$  и  $b$  выступают в качестве управляющих параметров.

Заметим, что фигурирующая в

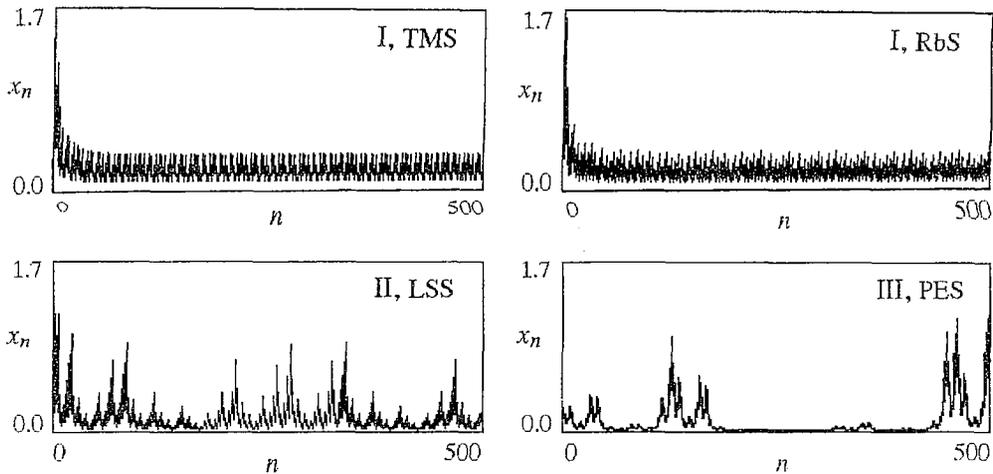


Рис. 7. Зависимость от времени динамической переменной  $x_n$  системы (5.2) в закритической области при воздействии различных бинарных самоподобных последовательностей: TMS – ( $a=0.52, b=2$ ), класс I; RbS – ( $a=0.34, b=2$ ), класс I; LSS – ( $a=0.26, b=2$ ), класс II; PES – ( $a=0.52, b=2$ ), класс III

(5.2) нелинейная функция обладает тем свойством, что если  $F_1(x)=A_1x/(1+x^2)^{1/2}$  и  $F_2(x)=A_2x/(1+x^2)^{1/2}$ , то  $F_1(F_2(x))=A_1A_2x/[1+(1+A_2^2)x^2]^{1/2}$ . Отсюда следует, что бифуркация в системе (5.2) происходит, когда произведение  $\xi_0\xi_1\xi_2\dots\xi_n$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится к 1 или, иначе говоря,  $\langle \ln x_n \rangle = 0$ . Это условие бифуркации можно записать так:

$$p_0 \ln a + p_1 \ln b = 0, \quad (5.4)$$

где  $p_0$  и  $p_1$  – частоты появления в последовательности  $\zeta_n$  символов 0 и 1, соответственно.

На рис. 7 показано временное поведение динамической переменной системы (5.2) при воздействии последовательностей различных классов. На рис. 8 приведены соответствующие бифуркационные диаграммы. Вид представленных зависимостей, также как и в задаче об одномерном блуждании, коррелирует с разбиением воздействующих последовательностей на три класса.

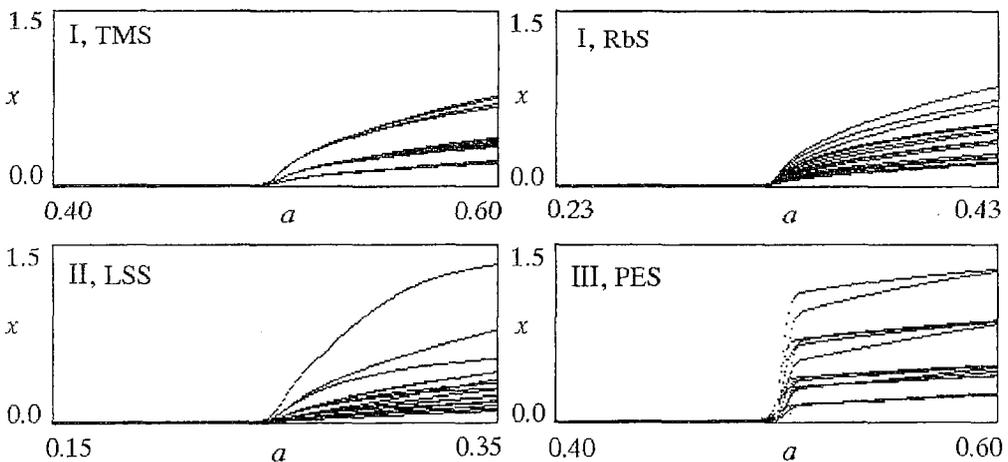


Рис. 8. Бифуркационные диаграммы системы (5.2) при воздействии на нее различных бинарных самоподобных последовательностей: TMS, RbS – класс I; LSS – класс II; PES – класс III. Параметр  $a$  меняется,  $b = 2$  для всех диаграмм

Как видно из рис. 7, при воздействии последовательности третьего класса (1.1) система демонстрирует Оп–Off перемежаемость: всплески хаотических осцилляций динамической переменной чередуются с протяженными участками, когда она флуктуирует вблизи нуля.

Этот новый вид перемежаемости, описанный в работах [2, 3], возникает в системах, находящихся под мультипликативным воздействием случайного или хаотического процесса. В работе [7] была рассмотрена Оп–Off перемежаемость в системе (5.2) при воздействии бинарного шума. Теперь мы видим, что этот феномен возможен и при замене шума на бинарную самоподобную последовательность, если она относится к классу III.

Применим к обсуждаемой задаче метод ренормгруппы. Как обычно, его содержание будет состоять в том, чтобы проследить за изменением вида уравнений, описывающих динамику системы на последовательно нарастающих временных интервалах.

Сделаем в (5.2) замену

$$x_n = [\exp(2A_n)/C_n]^{1/2} \quad (5.5)$$

и положим  $A_0=1$ . Тогда получим

$$C_{n+1} = C_n + \exp(2A_n), \quad (5.6)$$

$$A_{n+1} = A_n + \ln \xi_n.$$

Здесь компонента  $C_n$  описывает глобальное поведение исходной переменной  $x_n$ , а  $A_n$  отвечает за ее быстрые осцилляции. При этом динамика подсистемы для переменной  $A_n$  по существу соответствует задаче об одномерном блуждании, рассматривавшейся в разделах 2 и 4.

Как и при анализе системы (2.1), выделим в последовательности  $\xi_n$  блоки подстановки (см. (1.2)) и проитерируем динамические уравнения (5.6) вдоль каждого блока. После  $r$ -го шага этой процедуры перенормировки уравнения сводятся к форме, аналогичной (5.6)

$$C_{n+1} = C_n + \exp(2A_n)H_r(\zeta_n), \quad (5.7)$$

$$A_{n+1} = A_n + Q_r(\zeta_n),$$

причем для  $H_r(\zeta_n)$  и  $Q_r(\zeta_n)$  справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} H_{r+1}(0) &= d_{00}H_r(0) + d_{01}H_r(1) \\ H_{r+1}(1) &= d_{10}H_r(0) + d_{11}H_r(1) \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} H_{r+1}(0) \\ H_{r+1}(1) \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} H_r(0) \\ H_r(1) \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} Q_{r+1}(0) &= s_{00}Q_r(0) + s_{01}Q_r(1) \\ Q_{r+1}(1) &= s_{10}Q_r(0) + s_{11}Q_r(1) \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} Q_{r+1}(0) \\ Q_{r+1}(1) \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} Q_r(0) \\ Q_r(1) \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$H_0(\zeta) = 1, \quad Q_0(\zeta) = \ln(\xi(\zeta)).$$

Здесь  $\mathbf{S}$  – характеристическая матрица воздействующей последовательности, а  $\mathbf{D}$  – матрица с элементами

$$d_{\zeta 0} = \sum_{k=0}^{m_{\zeta}^{\zeta}-1} \{(1-\eta_{\zeta k})\exp[2(k-\sigma_{\zeta}(k))Q_r(0) + 2\sigma_{\zeta}(k)Q_r(1)]\}, \quad (5.10)$$

$$d_{\zeta 1} = \sum_{k=0}^{m_{\zeta}^{\zeta}-1} \{\eta_{\zeta k}\exp[2(k-\sigma_{\zeta}(k))Q_r(0) + 2\sigma_{\zeta}(k)Q_r(1)]\},$$

$$\sigma_{\zeta}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_{\zeta j}. \quad (5.11)$$

Обратимся к ситуации, когда система находится в критической точке, то есть выполняется условие (5.4). В этом случае соотношения (5.9) и (5.10) преобразуются к виду

$$Q_{r+1}(0) = \lambda_2 Q_r(0), \tag{5.12}$$

$$Q_{r+1}(1) = \lambda_2 Q_r(1),$$

$$d_{\zeta_0} = \sum_{k=0}^{m_{\zeta}-1} [(1 - \eta_{\zeta k}) \exp(F_{\zeta k} \lambda_2^r \ln a)], \tag{5.13}$$

$$d_{\zeta_1} = \sum_{k=0}^{m_{\zeta}-1} [\eta_{\zeta k} \exp(F_{\zeta k} \lambda_2^r \ln a)],$$

где

$$F_{\zeta k} = 2[k - \sigma_{\zeta}(k)(s_{01} + s_{10})/s_{01}].$$

Обсудим, каким образом характер бифуркации в системе (5.2) определяется классом воздействующей на нее последовательности.

Если внешнее воздействие вообще отсутствует, то в точке бифуркации зависимость динамической переменной от времени имеет степенной характер. Действительно, преобразовав (5.1) при  $\xi=1$  к виду  $1/(x_{n+1})^2 = 1/(x_n)^2 + 1$ , получаем, что  $x_n \sim n^{\gamma}$ , где  $\gamma = -1/2$  можно трактовать как критический индекс.

Пусть последовательность  $\zeta_n$  принадлежит классу I, то есть  $0 \leq \lambda_2 < 1$ . Тогда, как видно из формулы (5.13), при  $r \rightarrow \infty$  матрица **D** стремится к характеристической матрице **S**. Это означает, что в асимптотике  $C_n \sim n$ . С ростом  $r$  функция  $Q_r(\zeta)$  стремится к нулю (см. (5.12)), поэтому  $A_n \rightarrow \text{const}$ . Следовательно, критическое затухание динамической переменной  $x_n$  описывается степенным законом  $x_n \propto n^{-1/2}$ , что аналогично ситуации, когда воздействие отсутствует.

Пусть теперь имеем последовательность класса II, то есть  $\lambda_2 = 1$ . В этом случае матрица **D** не меняется с ростом  $r$ , и при этом ее элементы зависят от значения управляющего параметра  $a$  (см. (5.13)). Фактически, в силу (5.4), можно говорить о зависимости матрицы **D** от положения системы на критической линии в плоскости параметров  $(a, b)$ . Это означает, что асимптотическое поведение компоненты  $C_n$  характеризуется зависимостью от параметра  $a$ . При этом  $A_n \sim \text{const}$ , так как функция  $Q_r(\zeta)$  не меняется при перенормировке (см. (5.12)). Следовательно, затухание динамической переменной  $x_n$  описывается критическим индексом, который является функцией управляющего параметра системы.

В случае воздействия последовательности класса III  $\lambda_2 > 1$ , элементы матрицы **D** с ростом  $r$  либо нарастают, либо стремятся к нулю, что определяется знаками  $F_{\zeta k}$  в формуле (5.13). При этом закон затухания динамической переменной  $x_n$  в критической точке не является степенным.

Проведенные рассуждения о характере критического поведения иллюстрирует рис. 9, где в двойном логарифмическом масштабе показана

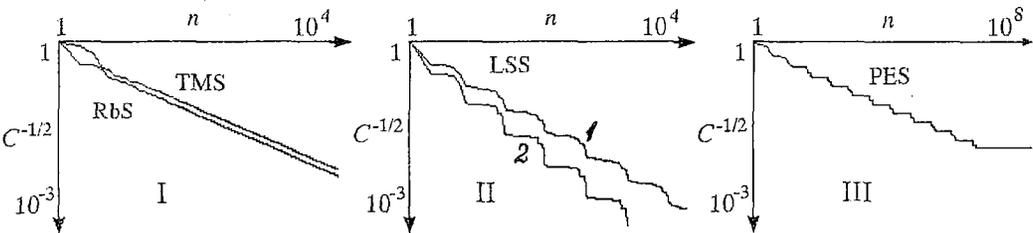


Рис. 9. Зависимость от времени компоненты системы (5.6) в критической точке при разных видах воздействия. Критический индекс для последовательности Морса – Туэ:  $-0.50$  ( $a = 0.50, b = 2.00$ ); для последовательности кроликов:  $-0.50$  ( $a=0.33, b=2.00$ ); для логистической сигнум последовательности, кривая 1:  $-0.70$  ( $a=0.25, b=2.00$ ), кривая 2:  $-0.76$  ( $a=0.11, b=3.00$ ); для последовательности (1.1) критический индекс не определен ( $a=0.50, b=2.00$ )

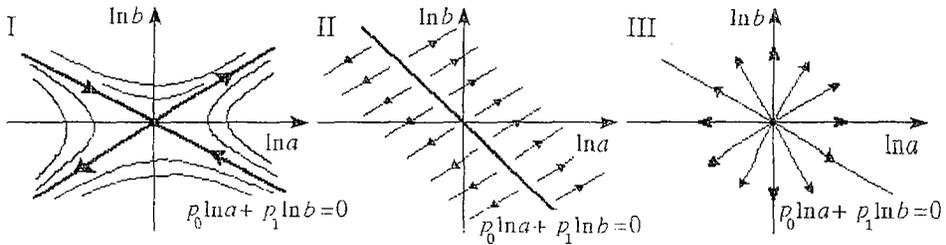


Рис. 10. Изменения характера бифуркации в системе (5.2), находящейся под действием бинарных самоподобных последовательностей. Класс I,  $0 \leq \lambda_2 < 1$ : критическая линия – устойчивая сепаратриса седла. Класс II,  $\lambda_2 = 1$ : критическая линия – континуум неустойчивых неподвижных точек. Класс III,  $\lambda_2 > 1$ : критическая линия не имеет специальных свойств

зависимость медленно меняющейся компоненты  $C_n^{-1/2}$  от времени для системы (5.6) при воздействии последовательностей разных классов. В случае воздействия последовательностей класса I линии всегда имеют наклон  $(-1/2)$ , который равен критическому показателю спада динамической переменной. Для воздействия последовательностей класса II наклон отличается от классического значения  $(-1/2)$  и определяется величиной управляющего параметра. Наконец, при воздействии последовательностей класса III наклон не определен.

Наблюдаемое изменение характера перехода в системе (5.2) при движении по параметру  $\lambda_2$  от класса I к классу III может быть интерпретировано как бифуркация в уравнениях ренормгруппы. Для этого обратимся к фазовым портретам уравнения ренормгруппы (5.9), показанным на рис. 10. При воздействии последовательностей класса I имеем единственную неподвижную точку на фазовой плоскости ( $a=1, b=1$ ). Это седло, устойчивой сепаратрисой которого является критическая линия (5.4). При воздействии последовательностей класса II условие критичности (5.4) определяет инвариантное множество на фазовой плоскости уравнения (5.9) – линию, составленную из неустойчивых неподвижных точек. Наконец, воздействию последовательности класса III соответствует фазовый портрет, на котором единственная неподвижная точка ( $a=1, b=1$ ) представляет собой неустойчивый узел.

Точке бифуркации отвечает случай, когда  $\lambda_2=1$ , то есть воздействующая последовательность принадлежит ко второму классу. В этой точке переход в системе (5.2) характеризуется «неклассическим» критическим индексом – показателем степенного закона затухания во времени, величина которого зависит от управляющего параметра. «Классическим» критическим индексом в этой трактовке служит величина  $(-1/2)$ , отвечающая воздействию последовательностей первого класса. Заметим, что ранее бифуркация в уравнениях ренормгруппы была описана в работе [9], где рассматривалось воздействие фрактального сигнала на систему, демонстрирующую каскад удвоений периода.

### Заключение

При анализе задачи об одномерном блуждании частицы под действием толчков, чередующихся во времени по закону бинарной самоподобной последовательности, выяснилось, что все последовательности такого рода распадаются на три класса. В основе классификации лежит различный характер динамики этой частицы: блуждание в ограниченном интервале, фрактальная траектория и неограниченное блуждание.

Изучение воздействия бинарных самоподобных последовательностей на нелинейную систему с бифуркацией вилки («pitch-fork») показало, что характер перехода в такой системе также определяется тем, к какому из введенных трех классов относится воздействующая последовательность. Для класса I критическое

затухание динамической переменной характеризуется показателем  $(-1/2)$ . При воздействии последовательностей класса II система имеет неклассический критический индекс, который зависит от значения управляющего параметра. И наконец, при воздействии последовательности третьего класса критический индекс, характеризующий затухание, не определен. Поведение динамической переменной в критической точке описывается некоторым не степенным законом. При этом в закритической области система демонстрирует режим On-Off перемежаемости.

Если ограничить длину блоков подстановок, которые используются для построения бинарных самоподобных последовательностей, то возникает ограниченный набор вариантов. В каком-то смысле это аналогично ситуации, возникающей при рассмотрении вопроса о классификации клеточных автоматов. Первоначально эмпирическую классификацию клеточных автоматов предложил Wolfram в работе [10]. Затем в работах [11–13] рассматривалась возможность трактовать изменение типа поведения клеточных автоматов как фазовый переход. Идея состояла в том, чтобы для автоматов с заданным количеством соседей и состояний клетки определить некоторый параметр так, чтобы автоматам с разными типами поведения соответствовали определенные области на оси этого параметра. Для клеточных автоматов сделать это до конца не удастся. В то же время, в рассмотренных нами здесь задачах о динамике под действием бинарных самоподобных последовательностей аналогичную программу можно считать вполне реализованной.

Авторы выражают благодарность А. П. Кузнецову за полезное обсуждение.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-16414).*

## Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelican S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // *Physica D*. 1984. Vol. 13. P. 261.
2. Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. On-off intermittency: a mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. P. 279.
3. Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M. Characterization of on-off intermittency // *Phys. Rev.* 1994. Vol. E49. P. 1140.
4. Moss F., Pierson D., O'Gorman D. Stochastic resonance: Tutorial and update // *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*. 1994. Vol. 4. P. 1383.
5. Schroeder M. *Fractal, Chaos, Power Laws*. Freeman & C®. NY. 1991.
6. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S., Feudel U. Birth of strange nonchaotic attractor: renormalization group analysis // *Phys. Rev.* 1995. Vol. E51. P. R1629.
7. Kuznetsov S.P., Kuptsov P.V. Transition to a fractal attractor via on-off intermittency in a model with dichotomous noise // *Proc. of First Int. Conf. UPoN-96*, 3–7 September 1996, Szeged, Hungary.
8. Kuptsov P.V. Critical dynamics of pitch-fork bifurcation in a system driven by a fractal sequence // *Proc. of Int. Conf. ICND-96*, 8–14 July 1996, Saratov, Russia.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С. П., Сатаев И.П. Фрактальный сигнал и динамика систем, демонстрирующих удвоение периода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, № 5. С. 64.
10. Wolfram S. Universality and complexity in cellular automata // *Physica D*. 1984. Vol. 10. P. 1.
11. Langton C.G. Studying artificial life with cellular automata // *Physica D*. 1986. Vol. 22. P. 120.
12. Li W., Packard N., Langton C.G. Transition phenomena in cellular automata rule space // *Physica D*. 1990. Vol. 45. P. 77.

13. Wootters W.K., Langton C.G. Is there sharp phase transition for deterministic cellular automata? // Physica D. 1990. Vol. 45. P. 95.

Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники РАН

Поступила в редакцию 21.03.97

## DYNAMICS OF MODEL SYSTEMS WITH DISCRETE TIME DRIVEN BY BINARY SELF-SIMILAR SEQUENCES

*P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov*

The dynamics of the 1D walking particle and the map with pitch-fork bifurcation is considered when these model systems are forced by the self-similar sequences of two symbols constructed in accordance with substitution (inflation) rules. All such sequences are found to be divided into three classes which correspond to qualitatively different sorts of observed dynamics. It is shown that the matrix  $2 \times 2$  is associated with the binary self-similar sequence and the one of eigenvalues of this characteristic matrix determines the class to what respective sequence belongs.



*Купцов Павел Владимирович* родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского университета (1994). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория критических явлений. Автор 3 научных работ.



*Кузнецов Сергей Петрович* родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал свыше 100 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора в 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.



## ТОНКИЕ ЭФФЕКТЫ САМОПОДОБНОГО ПОВЕДЕНИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ ЛИНИИ БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ТОРА

А.А. Кипчатов, А.А. Короновский

В работе исследуется кусочно-линейная система с 1.5 степенями свободы, способная демонстрировать двухчастотную динамику без внешнего воздействия. Показано, что поведение этой системы вблизи линии бифуркации рождения тора носит сложный самоподобный характер: на листах синхронизации, сходящихся к линии бифуркации, существуют новые линии бифуркации рождения тора, пересечение которых при движении по плоскости управляющих параметров приводит к появлению новых квазипериодических режимов колебаний и так далее.

Бифуркация рождения двумерного тора из предельного цикла встречается в различных системах и достаточно хорошо изучена (см., например, [1]). Хорошо известно также, что в двухчастотных системах области резонансных колебаний (так называемые языки Арнольда) стягиваются, сужаясь, к линии бифуркации рождения двумерного тора, имеют на этой линии меру нуль и располагаются в определенной последовательности [2]. Несмотря на то, что поведение систем вблизи линии бифуркации рождения двумерного тора из предельного цикла изучено, казалось бы, достаточно подробно, нам при исследовании радиотехнического генератора с 1.5 степенями свободы, описанного в [3, 4], удалось обнаружить новый тонкий механизм поведения языков Арнольда в окрестности этой линии.

Радиотехнический генератор «Торус», предложенный Л. Чуа с соавторами в [3], представляет собой автономную систему с тремя реактивными элементами (рис. 1) и нелинейным элементом (рис. 2), имеющим трехсегментную кусочно-

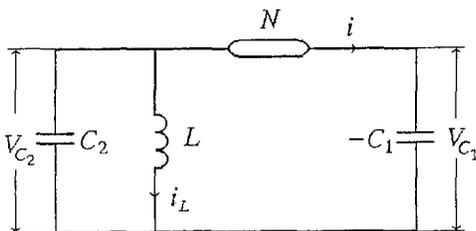


Рис. 1. Эквивалентная схема радиотехнического генератора

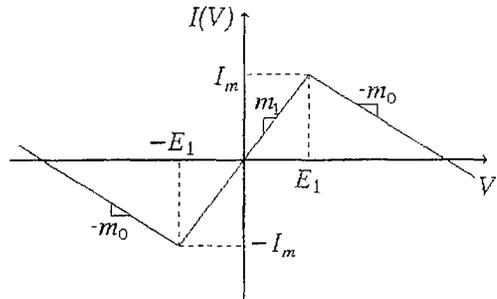


Рис. 2. Вольт-амперная характеристика кусочно-линейного элемента

линейную вольт–амперную характеристику (ВАХ). Генератор описывается тремя безразмерными дифференциальными уравнениями, полученными на основе законов Кирхгофа [5]

$$\begin{aligned} dx_1/d\tau &= (\alpha-1)f(x_1)/\gamma - x_3/\gamma, \\ dx_2/d\tau &= -\alpha f(x_1)/\gamma, \\ dx_3/d\tau &= \gamma(x_1 + x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f(x_1) = -(m_0/m_1)x_1 + 1/2(m_0/m_1 + 1)[|x_1 + 1| - |x_1 - 1|]$  – безразмерная кусочно–линейная ВАХ;  $m_0/m_1 = 1/2$ ;  $\alpha$  и  $\gamma$  – управляющие параметры. Замечательным свойством генератора «Торус» является возможность возникновения в нем двухчастотной динамики без внешнего периодического воздействия при минимальном необходимом для этого числе степеней свободы. При этом, несмотря на предельную простоту самой системы, ее поведение в пространстве управляющих параметров оказывается довольно сложным из–за существенной неоднозначности режимов. Нетривиальным свойством этого генератора является «жесткий» характер рождения второй частоты в системе, влекущий за собой гистерезис вблизи линии бифуркации и значительно искажающий привычную картину расположения кловов синхронизации. Поведение этого генератора было детальным образом исследовано в [4] как экспериментально, на радиотехнической модели, так и численно, по семейству однопараметрических бифуркационных диаграмм, в результате чего построены подробные многолистные двух–параметрические карты режимов на плоскости управляющих параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  (параметр диссипации и параметр соотношения собственных частот). В общих чертах было выяснено также и поведение листов синхронизации вблизи линии рождения двумерного тора ( $\alpha \approx 1$ ), где языки Арнольда «нависают» друг над другом, что ведет к возникновению сложной мультистабильности и существенно затрудняет понимание поведения рассматриваемой системы.

Для более детального изучения динамики системы вблизи линии бифуркации рождения двумерного тора с неоднозначным гистерезисным поведением необходим качественно иной метод исследования, нежели поиск бифуркационных значений параметров при прямом численном интегрировании уравнений (1), или нахождение этих значений из эксперимента. Такой метод анализа бифуркаций, возможный для кусочно–линейных систем, к которым относится генератор «Торус», был предложен в работе [6] для другой хорошо известной кусочно–линейной системы – генератора типа «двойная спираль» (см., например, [7–9]).

Суть этого метода заключается в использовании линейности системы между переключениями генератора с одного участка ВАХ на другой, что позволяет от системы обыкновенных дифференциальных уравнений перейти к системе алгебраических уравнений, связывающих между собой моменты времени переключения генератора на различные участки кусочно–линейной ВАХ. Таким образом, для периодических решений поведения генератора может быть сведен к линейной теории устойчивости Флоке, что позволяет, во–первых, аналитически<sup>1</sup> определить, существует ли искомое периодическое решение в заданной области управляющих параметров, и, во–вторых, определить тип бифуркации периодического решения при потере им устойчивости.

Формализм нахождения мультипликаторов периодических решений из системы уравнений, описывающих генератор «Торус», развит в [5]. Основываясь на нем и анализируя поведение системы по поведению ее мультипликаторов при изменении управляющих параметров, в настоящей работе проведено детальное исследование бифуркационной картины генератора «Торус» вблизи линии бифуркации рождения двумерного тора.

<sup>1</sup> Если удастся аналитически решить систему алгебраических уравнений. В противном случае требуется численное решение.

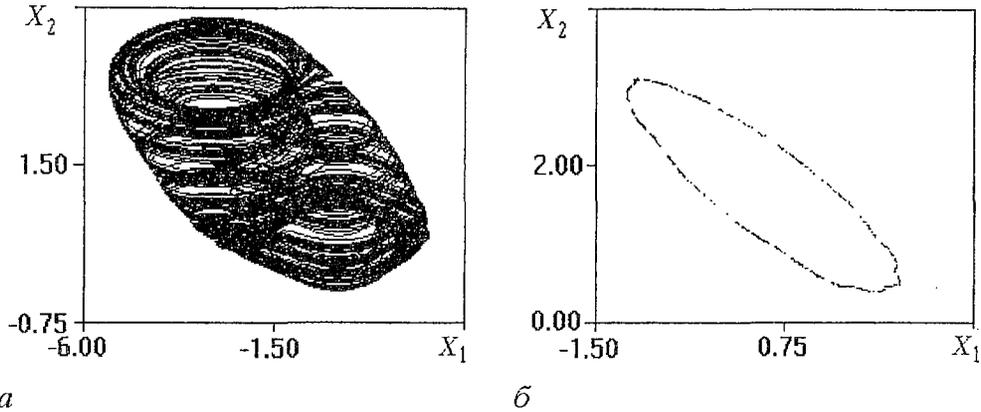


Рис. 3. Двумерный тор, рожденный на базе предельного цикла при  $\alpha=3.5$ ,  $\gamma=5.5$ : *a* – фазовый портрет; *b* – сечение Пуанкаре

Стартуя из области, где реализуется однооборотный предельный цикл ( $\alpha < 1$ ), найдем характер бифуркации, возникающей при увеличении  $\alpha$ . В соответствии с [5], мультипликаторы периодического режима уверенно находятся из довольно простой системы нелинейных алгебраических уравнений. Как и следовало ожидать, в этой ситуации пара комплексно-сопряженных мультипликаторов  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  выходят за единичную окружность, подтверждая рождение в системе второй частоты. Прямое численное интегрирование системы (1), сведенной заменой переменных к безразмерному виду [4], методом Рунге–Кутты четвертого порядка дает характерный для квазипериодической динамики двумерный тор, изображенный на рис. 3. Однако, как уже отмечалось выше, линия бифуркации рождения тора, разделяющая периодический и квазипериодический режимы, носит гистерезисный характер. Картина квазипериодического поведения, известная, например, по отображению окружности на себя и состоящая из характерных кловов синхронизации, сходящихся к линии бифуркации рождения тора, существенно искажена. В рассматриваемом генераторе бифуркация рождения двумерного тора носит суперкритический характер – возникновение второй частоты происходит «жестким путем» и система оказывается в области перекрытия кловов синхронизации (как в отображении окружности на себя при  $k > 1$ ). Вероятность попадания на участок квазиопериодики становится очень малой, так как возникает структура широких перекрывающихся резонансных кловов, описанная в [4], и в системе реализуется один из периодических режимов, например, режим  $1/8$ , изображенный на рис. 4. При выходе из области двухчастотной динамики имеет место гистерезис, и резонансные кловы нависают над линией бифуркации рождения тора, найденной при входе в эту область.

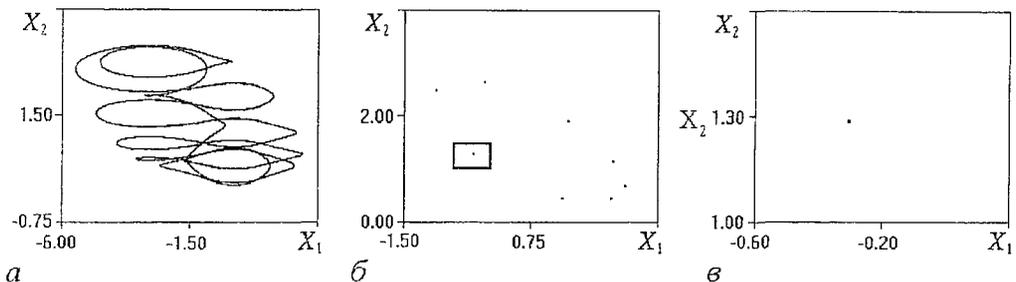


Рис. 4. Режим, соответствующий листу синхронизации периода 8 при  $\alpha=1.05$ ,  $\gamma=2.5$ : *a* – фазовый портрет; *b* – сечение Пуанкаре; *в* – фрагмент сечения Пуанкаре

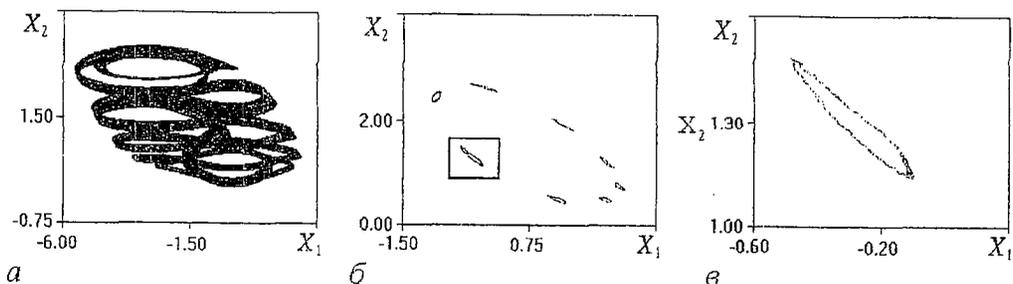


Рис. 5. Двумерный тор, рожденный на базе периода 8 при  $\alpha=1.00$ ,  $\gamma=2.50$ : а – фазовый портрет; б – сечение Пуанкаре; в – фрагмент сечения Пуанкаре

Для анализа особенностей выхода из кловов синхронизации рассмотрим поведение мультипликаторов этих периодических режимов. Для сложнопериодического режима, существующего на клове синхронизации с числом вращения  $\rho=1/8$ , система нелинейных уравнений в соответствии с методикой [5] будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 & [\Omega(t_{i+1}, s_i)K(t_i, s_i) + K(t_{i+1}, s_{i+1})] \mathbf{h}_2 = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, 9 \\
 & \Omega(t_{11}, s_{10})K(t_{10}, s_{10}) \mathbf{h}_2 - K(t_{11}, s_{11}) \mathbf{h}_1 = \mathbf{0}, \\
 & [\Omega(t_{i+1}, s_i)K(t_i, s_i) - K(t_{i+1}, s_{i+1})] \mathbf{h}_1 = \mathbf{0}, \quad i = 11, 12 \\
 & \Omega(t_1, s_{13})K(t_{13}, s_{13}) \mathbf{h}_1 + K(t_1, s_1) \mathbf{h}_2 = \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\mathbf{h}_2 = (-1, 1, 1)^T$  (остальные обозначения см. в [5]). Как нетрудно видеть, (2) содержит 26 независимых нелинейных уравнений относительно 26 неизвестных  $t_i, s_i$  ( $i=1, \dots, 13$ ). Решение вышеописанных систем уравнений проводилось численно с использованием гибридного метода: внешние итерации осуществлялись по Зейделю, внутренние – по Ньютону [10].

При уменьшении параметра  $\alpha$  мультипликаторы  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  оказываются парой комплексно сопряженных величин, которые выходят на единичную окружность при  $\alpha \approx 1$ . Таким образом, выяснилось, что при пересечении линии  $\alpha \approx 1$  (в этом случае параметр  $\alpha$  уменьшается) пара комплексно-сопряженных мультипликаторов режима, соответствующего листу синхронизации на двумерном торе, выходит за единичную окружность на комплексной плоскости. Это соответствует, опять-таки, рождению двумерного тора, но уже на базе режима, существующего на листе синхронизации. Прямое численное интегрирование системы (1) с найденными управляющими параметрами подтвердило возникновение нового квазипериодического движения на базе клова синхронизации, характеризующегося числом вращения  $\rho=1/8$ , с характерным видом 8-оборотной трубки тора (рис. 5), существенно отличного от двумерного тора, изображенного на рис. 4. Следует подчеркнуть, что этот двумерный тор «второго порядка» находится в докритической области параметров относительно линии бифуркации рождения тора «первого порядка». Стартуя из других начальных условий при тех же самых значениях управляющих параметров, можно найти в системе предельный цикл. Эта найденная новая линия бифуркации рождения тора «второго порядка» принадлежит только листу синхронизации  $1/8^2$ . Поэтому очередная бифуркация, хотя и приводит к рождению третьей по счету собственной частоты, но не приводит к трехчастотной квазипериодике, так как первые две

<sup>2</sup> На других листах синхронизации порядка  $1/n$  наблюдается аналогичное поведение.

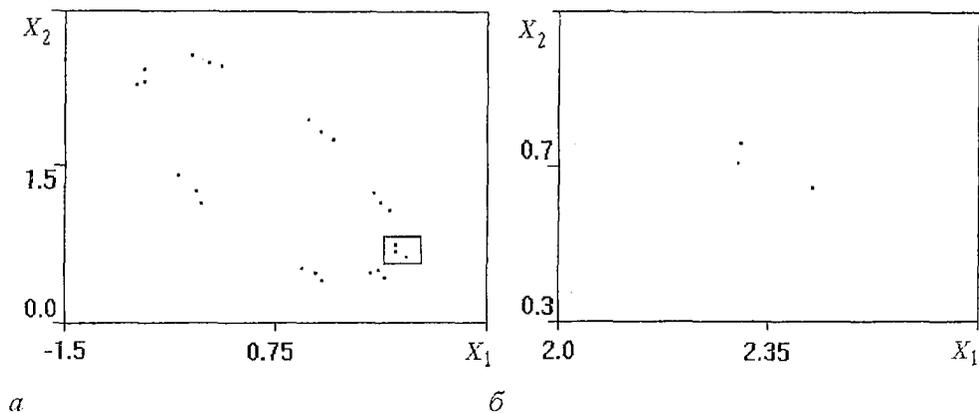


Рис. 6. Синхронизация на торе «второго порядка» (число вращения 2:3) при  $\alpha=1.0169$ ,  $\gamma=2.5$

частоты связаны резонансом. Дальнейшее исследование эволюции системы (1) вблизи линии бифуркации рождения тора выявило следующие интересные особенности.

1. Область параметров, в которой существует двумерный тор второго порядка, весьма узкая, и небольшие отклонения параметров или начальных условий приводят к переходу системы в качественно иное состояние.

2. Вдоль линии бифуркации рождения тора второго порядка числа вращения увеличиваются с увеличением параметра  $\gamma$ , и на двумерном торе второго порядка возможно существование как квазипериодических колебаний (которым соответствует иррациональное число вращения), так и своих листов синхронизации (с рациональными числами вращения). На рис. 6 показано сечение Пуанкаре для листа синхронизации 2:3 на двумерном торе «второго порядка».

3. На базе листов синхронизации на торе «второго порядка» при изменении управляющих параметров может рождаться двумерный тор «третьего порядка». Более того, в рассматриваемой системе могут существовать двумерные торы более высоких порядков: сечение Пуанкаре для одного из таких режимов показано на рис. 7 для системы (1). При первом рассмотрении может казаться, что это двумерный тор «третьего порядка», но при дальнейшем масштабировании видна самоподобная структура аттрактора.

К сожалению, в ходе эксперимента не удалось выяснить, как, детально, расположены листы, соответствующие различным режимам «высоких порядков», на плоскости управляющих параметров вблизи линии бифуркации рождения тора. Это объясняется тем, что чем более тонкий режим исследуется, тем с меньшим шагом интегрирования по времени приходится проводить численное моделирование системы, в то время как длительность переходного процесса существенно возрастает (поведение листов синхронизации на торе первого порядка

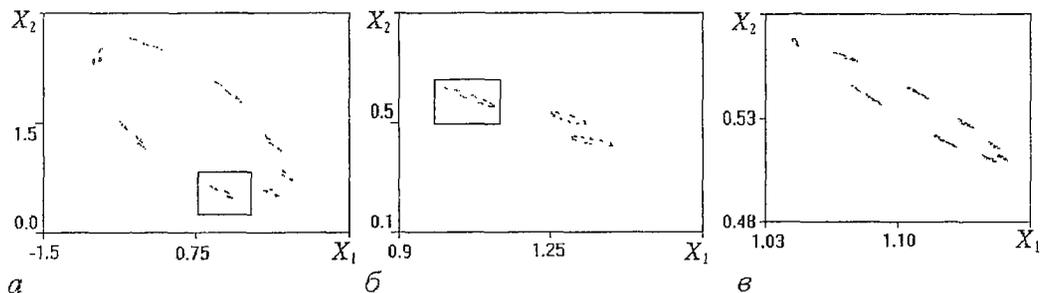


Рис. 7. Двумерный тор «порядка выше третьего» при  $\alpha=1.0$ ,  $\gamma=2.47$ , полученный из начальных условий (0.3499, 0.7683, -4.2814)

описано в [4]). Тем не менее, мы можем предполагать, что листы синхронизаций более высоких порядков ведут себя аналогичным образом, образуя на плоскости управляющих параметров самоподобную структуру. Более того, с уверенностью можно утверждать, что описанные эффекты действительно имеют место в системе (1), а не являются результатами невыбранного переходного процесса или погрешностей метода интегрирования. Во-первых, возникновение квази-периодики «второго порядка» подтверждается анализом поведения мультипликаторов, то есть почти аналитически. Во-вторых, поведение системы остается неизменным при различных значениях шага интегрирования по времени (от 0.00025 до 0.0025) и при различном внутреннем представлении данных (использовался как тип single, так и extended языка программирования Паскаль). В-третьих, для того, чтобы убедиться, что результаты получены при полностью выбранном переходном процессе, мы осуществили  $1.2 \cdot 10^8$  итераций с шагом 0.001 из начальных условий (0.3499, 0.7683, -4.2814) для режима, изображенного на рис. 7.

Таким образом, проведенное исследование позволило выявить самоподобное поведение кусочно-линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора, которое описывается следующим сценарием. На двумерном торе при изменении управляющих параметров возникает синхронизация собственных частот системы (иными словами, частоты данной двухчастотной системы находятся в рациональном соотношении), после чего на базе этого сложного периодического режима вновь рождается двумерный тор уже более «высокого порядка» (в системе появляется еще одна частота), на котором вновь возникает синхронизация двух собственных частот, где вновь рождается двумерный тор и т.д., причем режимы становятся все «тоньше» и «тоньше». По всей видимости, мы можем говорить о новом сценарии поведения нелинейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора.

## Библиографический список

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М: Мир, 1991.
2. Allen T. On the arithmetic of phase locking: coupled neurons as a lattice on  $r^2$  // *Physica D*. 1983. Vol. 6. P. 305.
3. Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R. // *IEEE Trans. Circuits and Syst.* 1987. Vol. 34, № 3. P.240.
4. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Экспериментальное двухпараметрическое исследование неоднозначных режимов колебаний при разрушении квазипериодических торов // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1995. Т. XXXVIII, № 11. С. 1195.
5. Короновский А.А. Мультипликаторы периодических решений для генератора с кусочно-линейным элементом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1997. Т. 5, № 2. С. 24.
6. Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L.O., Hotta A. Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // *International Journal of Bifurcation and chaos*. 1991. Vol. 1, № 1. P. 139.
7. Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M. The double scroll // *IEEE Trans. Circuit Syst.* 1985. Vol. 32. P. 797.
8. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // *IEEE Trans Circuit Syst.* 1986. Vol. 33. P. 1072.
9. Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M. Birth and death of the double scroll // *Physica D*. P. 97.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М: Наука. 1989. С.212.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 18.02.97  
после переработки 28.03.97

## THE SUBTLE EFFECTS OF THE PIECE-WISE -LINEAR SYSTEM SELF-SIMILAR BEHAVIOUR NEAR THE LINE OF THE TORUS BIRTH BIFURCATION

*A.A. Kipchatov, A.A. Koronovski*

The piece-wise linear system with 1.5 degrees of freedom which is able to demonstrate the two-frequency dynamics without the external action has been investigated in this article. It has been shown that the behaviour of this system near the line of the torus birth bifurcation is self-similar and very complicated. The tongues of synchronisation converge to the line of the torus birth bifurcation. There are another lines of torus birth bifurcation on the tongues of synchronisation. The intersection of these lines results in the birth of the new quasiperiodic oscillation types, and so on.



*Кипчатов Алексей Александрович* – родился в 1958 году, окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики и нелинейной динамики (1996). Заведующий научным сектором Колледжа прикладных наук Саратовского госуниверситета, доцент кафедры электроники и волновых процессов. Научные интересы – анализ сложного поведения нелинейных систем в пространстве параметров, оценка количественных характеристик сложности по временным реализациям различных процессов, трансформация характеристик хаотических колебаний в инерционных цепях и средах. Автор ряда статей по этим направлениям.



*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышла монография в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым «Нелинейная динамика в действии» (1996). Автор нескольких статей в центральной печати.



## МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРА С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

*А.А. Короновский*

В настоящей работе рассматриваются системы, фазовое пространство которых состоит из трех линейных подпространств. Подобные системы описываются  $n$  обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с кусочно-линейными функциями в правой части. Получены уравнения, позволяющие найти периодические режимы колебаний в таких системах и их мультипликаторы, в зависимости от значений управляющих параметров системы, что открывает возможность построения карт режимов в пространстве управляющих параметров.

### Введение

Изучение систем с кусочно-линейными элементами приобретает в последнее время все большее распространение. Так, например, известно целое семейство радиофизических схем Чуа (см., например, [1]), которые, являясь простыми кусочно-линейными системами, демонстрируют сложное поведение и, в какой-то мере, служат классическими эталонными генераторами, порождающими в зависимости от значений управляющих параметров, периодические или хаотические колебания. Более того, исследование радиофизических систем, в которых нелинейный элемент заменен кусочно-линейным, позволяет иногда уточнить поведение исходной системы [2]. Поведение же самих кусочно-линейных схем, как показывают результаты исследований, несмотря на их внешнюю простоту, оказывается подчас чрезвычайно сложным: в этом отношении кусочно-линейные схемы несколько не уступают своим нелинейным «собратьям».

Исследование поведения простых нелинейных динамических систем в большинстве случаев сводится либо к натурному эксперименту, либо к численному моделированию обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих данную систему, и последующей обработке полученных временных реализаций: определению размерности аттрактора, анализу спектра колебаний, получению сечений Пуанкаре и, иногда, построению двухпараметрических карт режимов колебаний на плоскости управляющих параметров [3-5] (последний подход оказывается весьма эффективным с точки зрения комплексного анализа поведения системы, но требует очень много времени и сил, особенно в численном эксперименте, и поэтому используется далеко не всегда).

Следует отметить, что изучение некоторых «тонких» режимов подобным образом осуществить не удается: в натурном эксперименте мешают собственные

шумы системы и «грубое» изменение параметров, а в численном эксперименте неимоверно возрастает время счета. При анализе же кусочно-линейных систем ситуация несколько иная: помимо методов, описанных выше, **МОЖНО ВОСПОЛЬЗОВАТЬСЯ** тем, что система на каждом из сегментов своей характеристики линейна и, следовательно, на каждом участке возможно получить аналитическое решение. Другое дело, возникают существенные трудности при «сшивании» этих решений, но иногда эти трудности удается с успехом преодолеть и получить интересные результаты.

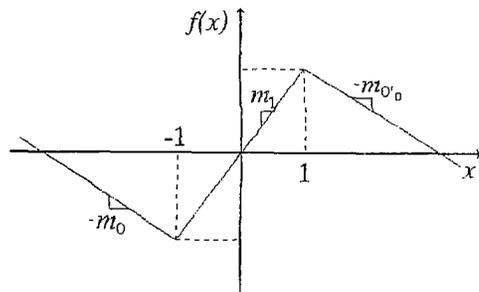


Рис. 1. Кусочно-линейная нечетная функция с тремя сегментами

Подобная ситуация возникла при исследовании радиофизического генератора «Торус» [6], предложенного Л. Чуа с соавторами в работе [7]: отличительным свойством этого генератора является возникновение в нем двухчастотной динамики без какого бы то ни было внешнего воздействия при минимально необходимом для этого числе степеней свободы. Было совершенно непонятно, как ведут себя листы синхронизации (языки Арнольда) вблизи линии бифуркации рождения тора, и ни натурный, ни численный эксперименты не позволили до конца прояснить этот вопрос. Но, к счастью, в силу кусочной линейности системы, оказалось возможным, используя идеи работы [8], определить мультипликаторы периодических режимов (каковыми и являются листы синхронизации) и по поведению мультипликаторов определить: во-первых, границы языков Арнольда, а во-вторых, характер бифуркации при потере устойчивости этими режимами. В [8] приведен ряд оригинальных идей, позволяющих проделать все вышеописанное для другой кусочно-линейной системы, а именно, «двойной спирали» [9–11], но сделанное утверждение доказывается в этой работе только лишь для одного частного случая. Докажем это утверждение в общем виде для любой кусочно-линейной системы с 1.5 степенями свободы, которая описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения или содержат нечетную кусочно-линейную функцию с тремя сегментами, например такую, как на рис. 1, или линейны, а фазовое пространство системы состоит из трех подпространств. Все рассмотрение будем проводить на примере генератора «Торус» [6,12], используя обозначения, принятые в [8].

## 1. Основные обозначения

Перепишем систему безразмерных дифференциальных уравнений, которыми описывается динамика генератора «Торус» [6], в несколько ином виде

$$\begin{aligned} dx_1/d\tau &= (\alpha - 1)f(x_1)/\gamma - (1/\gamma) x_3, \\ dx_2/d\tau &= (\alpha/\gamma) f(x_1), \\ dx_3/d\tau &= \gamma(x_1 + x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1 = y - x$ ;  $x_2 = x$ ;  $x_3 = z$ ;  $f(x_1) = -(m_0/m_1)x_1 + 1/2(m_0/m_1 + 1)[|x_1 + 1| - |x_1 - 1|] -$  безразмерная кусочно-линейная вольт-амперная характеристика (ВАХ);  $m_0/m_1 = = 1/2$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – управляющие параметры. Тогда динамика рассматриваемой системы может быть описана следующим образом:

$$dx/d\tau = F(x), \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$  – вектор состояния системы в трехмерном фазовом пространстве,  $\mathbf{x} \in R^3$ . Векторное поле  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  может быть записано как

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), & \mathbf{x} \in R_+^3, \\ \mathbf{A}\mathbf{x}, & \mathbf{x} \in R_0^3, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{p}), & \mathbf{x} \in R_-^3, \end{cases} \quad (3)$$

где  $R_{\pm}^3 = \{\mathbf{x} \in R^3 | (\pm x_1 - 1) > 0\}$ ,  $R_0^3 = \{\mathbf{x} \in R^3 | |x_1| < 1\}$  – три области фазового пространства с линейной динамикой, соответствующие трем сегментам кусочно-линейной ВАХ генератора (рис. 2);

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\alpha-1)/\gamma & 0 & -1/\gamma \\ -\alpha/\gamma & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)/\gamma (m_0/m_1) & 0 & -1/\gamma \\ (\alpha/\gamma)(m_0/m_1) & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

матрицы параметров системы;  $\mathbf{p} = [(m_0+m_1)/m_0](1, -1, 0)^T$  – вектор наклона ВАХ. Векторное поле  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  является в данном случае трехсегментным кусочно-линейным и непрерывным во всем пространстве  $R^3$ . Области линейности «сшиваются» на границах  $V_{\pm 1} = \{\mathbf{x} \in R^3 | x_1 = \pm 1\}$ . Изображающая точка, перемещаясь в фазовом пространстве  $R^3$  из области  $R_0^3$  в области  $R_{\pm}^3$  и обратно, «пронизывает» граничные плоскости  $V_{\pm 1}$  и образует последовательность точек пересечения фазовой траектории с разделительными плоскостями. Зная точку фазовой траектории на плоскости раздела  $V_{+1}$  (или  $V_{-1}$ ), можно, пользуясь линейностью системы в соответствующем подпространстве  $R_0^3(R_{\pm}^3)$ , проследить дальнейшую динамику системы вплоть до того момента, когда изображающая точка покинет эту область и вновь пересечет плоскость раздела  $V_{\pm 1}$ . Таким образом, точки фазовой траектории, лежащие на плоскостях  $V_{\pm 1}$ , разделяющих линейные подпространства векторного поля  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  в пространстве  $R^3$ , полностью определяют всю фазовую траекторию в фазовом пространстве и, следовательно, содержат всю информацию о динамике системы.

Основная идея работы [8] заключается в том, чтобы рассматривать не точки  $\mathbf{x}_i$ , принадлежащие плоскостям раздела  $V_{\pm 1}$ , а интервалы времени, за которые изображающая точка фазовой траектории в фазовом пространстве, покинув одну

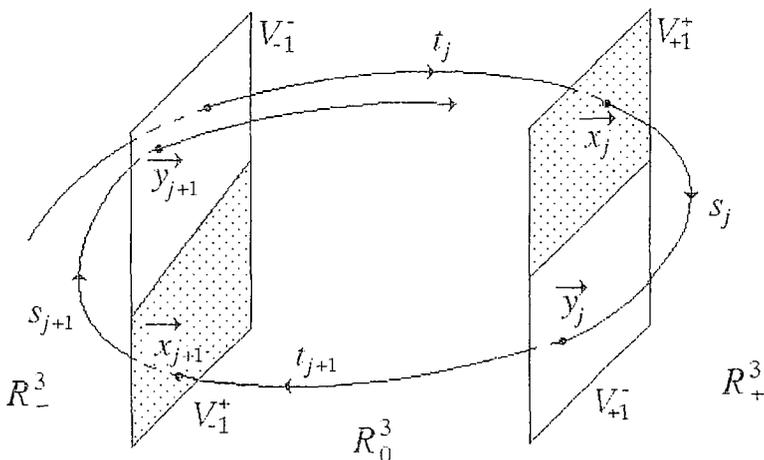


Рис. 2. Последовательность точек пересечения, образованная фазовой траекторией и плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$ , разделяющими области линейности  $R_0^3$  и  $R_{\pm}^3$  рассматриваемой системы

из плоскостей раздела и перемещаясь в одной из линейных областей, вновь достигнет какой-либо плоскости раздела. Таким образом, рассматриваются скалярные величины, что несколько проще.

Введем в рассмотрение в трехмерном фазовом пространстве вектор  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^T$  и с его помощью определим подмножества  $V_{\pm 1}^{\pm}$  множеств  $V_{\pm 1}$  следующим образом:

$$V_{\pm 1}^+ = \{x \in V_{\pm 1} | \pm \langle \mathbf{a}, \mathbf{A}x \rangle > 0\}, \quad V_{\pm 1}^- = \{x \in V_{\pm 1} | \pm \langle \mathbf{a}, \mathbf{A}x \rangle < 0\}.$$

Иными словами,  $V_{\pm 1}^+$  – это подмножества точек разделяющих плоскостей  $V_{\pm 1}$ , на которых векторное поле  $\mathbf{F}(x)$  направлено наружу относительно подмножества  $R_0^3$ , то есть в этих точках фазовая траектория выходит из области  $R_0^3$  в области  $R_{\pm}^3$ , соответственно. С другой стороны,  $V_{\pm 1}^-$  – это подмножества разделяющих плоскостей  $V_{\pm 1}$ , на которых векторное поле  $\mathbf{F}(x)$  направлено внутрь подмножества  $R_0^3$ . В точках этих подмножеств фазовая траектория из областей  $R_{\pm}^3$  входит в область  $R_0^3$ . Условимся обозначать: точки, принадлежащие подмножествам  $V_{\pm 1}^+$ , символами  $x_i$ ; точки, принадлежащие  $V_{\pm 1}^-$ , – символами  $y_i$ ; интервалы времени, в течение которых изображающая точка движется от подмножеств  $V_{\pm 1}^-$  к подмножествам  $V_{\pm 1}^+$  (то есть, в области  $R_0^3$ ), – символами  $t_i$ ; интервалы времени, в течение которых изображающая точка движется в областях  $R_{\pm}^3$  от  $V_{\pm 1}^+$  до  $V_{\pm 1}^-$ , – символами  $s_i$ , где  $i$  – номер точки в последовательности точек пересечения, образованной пересечениями фазовой траектории с разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}$  (см. рис. 2).

Существует взаимно однозначное соответствие между величинами  $x_i$ ,  $y_i$  и  $t_i$ ,  $s_i$  [8]. Поэтому для периодических режимов, зная последовательность, в которой фазовая траектория пересекает плоскости  $V_{\pm 1}$ , можно получить систему нелинейных уравнений относительно  $t_i$  и  $s_i$ , в которую входят управляющие параметры системы. Наличие решения у этой системы<sup>1</sup> при конкретных значениях управляющих параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  свидетельствует о существовании искомого периодического решения (которое может быть как устойчивым, так и неустойчивым). Варьируя  $\alpha$  и  $\gamma$ , можно также найти границы устойчивости режима, то есть бифуркационные значения управляющих параметров.

Не останавливаясь подробно на математических выкладках, которые во многом аналогичны выкладкам, проведенным в [8], заметим, что для предельного цикла, реализующегося в генераторе «Торус» при  $\alpha < 1$ , система нелинейных уравнений будет состоять всего из двух<sup>2</sup> соотношений, которые в векторном виде могут быть записаны следующим образом:

$$[\Omega(t, s) - E]K(t, s)\mathbf{h}_1 = 0, \quad (4)$$

где  $\Omega(t, s) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{C}s}$ ;  $E$  – единичная матрица;  $\mathbf{h}_1 = (1, 1, 1)^T$ ;

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)/\gamma(m_0/m_1) & 0 & (1/\gamma)(m_0/m_1) \\ (\alpha-1)/\gamma(m_0+m_1)/m_1 - \alpha/\gamma & 0 & -(1/\gamma)(m_0+m_1)m_1 \\ \gamma & \gamma & 0 \end{bmatrix},$$

$K(t, s) = [e_1 \mathbf{a}^T e^{-\mathbf{A}t} + e_2 \mathbf{a}^T + e_3 \mathbf{a}^T e^{\mathbf{C}s}]^{-1}$ , где  $e_1, e_2, e_3$  – единичные векторы:  $e_1 = (1, 0, 0)^T$ ;  $e_2 = (0, 1, 0)^T$ ;  $e_3 = (0, 0, 1)^T$ .

<sup>1</sup> Разумеется, имеется в виду, как правило, не аналитическое, а численное решение.

<sup>2</sup> Заметим, что в (4) содержатся три нелинейных уравнения при двух неизвестных. Однако, так как величины  $t$  и  $s$  однозначно определяют точку на разделительной плоскости  $V_{\pm 1}$ , независимых уравнений только два.

## 2. Анализ результатов

Итак, пусть в фазовом пространстве при определенных значениях параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  существует замкнутая (периодическая) орбита, точками пересечения которой с разделительными плоскостями являются  $x_i, y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а  $t_i, s_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – интервалы времени, соответствующие точкам  $x_i, y_i$ . Тогда матрица  $M = e^{B s_n} e^{A t_n} e^{B s_{n-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1}$  имеет собственные значения  $(\lambda_1^M, \lambda_2^M, \lambda_3^M)$ , причем  $\lambda_1^M = 1$ . Собственные значения  $\lambda_2^M, \lambda_3^M$  являются, фактически, мультипликаторами периодической орбиты, которая устойчива только в том случае, когда  $|\lambda_2^M| < 1, |\lambda_3^M| < 1$ .

Для доказательства вышеприведенного утверждения сформулируем и докажем теорему, опирающуюся на следующие две вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $y_0, x_0$  – две последовательные точки пересечения, порожденные произвольной фазовой траекторией и разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$ . Тогда производная отображения  $f(y)$ , которое ставит в соответствие первой из двух рассматриваемых точек (точке  $y_0$ ) вторую рассматриваемую точку ( $x_0$ )  $f: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^+, f(y_0) = x_0$ , имеет вид

$$Df(y_0) = \left[ E - \frac{Ax_0 a^T}{a^T Ax_0} \right] e^{A t_0},$$

где  $t_0$  – время движения от точки  $y_0$  к точке  $x_0$  изображающей точки в линейном подпространстве  $R_0^3$  фазового пространства.

### Доказательство леммы 1.

Так как изображающая точка движется в линейном подпространстве  $R_0^3$  фазового пространства и динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением  $dx/dt = Ax$  (см. (2)), то в силу этого соотношения  $x_0 = e^{A t_0} y_0$ . Рассмотрим функцию  $F(y, t) = a^T e^{A t} y - 1$  (Знак «-» перед единицей берется в том случае, если  $x_0 \in V_{+1}^+$ , и «+» – если  $x_0 \in V_{-1}^+$ ). Так как  $F(y_0, t_0) = a^T e^{A t_0} y_0 - 1 = 0$  и  $\partial F(y_0, t_0) / \partial t = a^T A e^{A t_0} y_0 = a^T A x_0 \neq 0$ , то по теореме о существовании неявно заданной функции [13, 14] существует функция  $t: V_{\pm 1}^- \rightarrow R$  такая, что  $F(y, t(y)) = 0$  и  $t(y_0) = t_0$ , дифференцируемая в окрестности точки  $y_0$ . Тогда, дифференцируя  $t(y)$  по правилу дифференцирования неявно заданной функции в точке  $y_0$ , получим

$$Dt(y_0) = -[\partial F(y_0, t_0) / \partial t]^{-1} [\partial F(y_0, t_0) / \partial y] = -[a^T A e^{A t_0} y_0]^{-1} a^T e^{A t_0} = -[a^T A x_0]^{-1} a^T e^{A t_0}.$$

Рассмотрим теперь отображение  $f: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^+, f(y) = e^{A t(y)} y, f(y_0) = e^{A t(y_0)} y_0 = e^{A t_0} y_0 = x_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} Df(y_0) &= A e^{A t(y_0)} y_0 Dt(y_0) + e^{A t_0} = A e^{A t_0} y_0 [a^T A x_0]^{-1} a^T e^{A t_0} + e^{A t_0} = \\ &= \left[ E - \frac{A e^{A t_0} y_0 a^T}{a^T A x_0} \right] e^{A t_0} = \left[ E - \frac{A x_0 a^T}{a^T A x_0} \right] e^{A t_0}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $x_0, y_0$  – две последовательные точки пересечения, порожденные произвольной фазовой траекторией и разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$ . Тогда производная отображения  $g(x)$ , которое ставит в соответствие первой из двух рассматриваемых точек (точке  $x_0$ ) вторую рассматриваемую точку ( $y_0$ )  $g: V_{\pm 1}^+ \rightarrow V_{\pm 1}^-, g(x_0) = y_0$ , имеет вид

$$Dg(x_0) = \left[ E - \frac{Ay_0 a^T}{a^T Ay_0} \right] e^{Bs_0},$$

где  $s_0$  – время движения изображающей точки в линейном подпространстве  $R_{\pm}^3$  фазового пространства, от точки  $x_0$  к точке  $y_0$ .

**Доказательство леммы 2.**

Так как изображающая точка движется в линейном подпространстве  $R_{\pm}^3$  фазового пространства и динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением  $dx/dt = B(x \mp p)$  (см. (2)), то в силу этого соотношения  $y_0 = e^{Bs_0}(x_0 \mp p) \pm p$ . Рассмотрим функцию

$$H(x, s) = a^T \{ e^{Bs}(x \mp p) \pm p \} \mp 1,$$

знак «-» перед единицей берется в том случае, если  $y_0 \in V_{+1}^-$ , и «+» – если  $x_0 \in V_{-1}^-$ . Заметим, что

$$H(x_0, s_0) = a^T \{ e^{Bs_0}(x_0 \mp p) \pm p \} \mp 1 = a^T y_0 \mp 1 = 0$$

$$\partial H(x_0, s_0) / \partial s = a^T B e^{Bs_0}(x_0 \mp p) = a^T e^{Bs_0} B(x_0 \mp p).$$

В силу того что, во-первых,  $y_0 \in V_{\pm 1}^-$  и, во-вторых, на плоскостях раздела  $V_{\pm 1}^{\pm}$  выполняется условие непрерывности векторного поля  $dx/dt$

$$Aw = B(w \mp p), \quad w \in V_{\pm 1}^{\pm}, \quad (5)$$

то  $Ay_0 = B(y_0 \mp p)$ . Тогда

$$\partial H(x_0, s_0) / \partial s = a^T e^{Bs_0} \{ B(x_0 \mp p) \pm p \mp p \} = a^T e^{Bs_0} B(y_0 \mp p) = a^T Ay_0 \neq 0$$

и по теореме о существовании неявно заданной функции существует функция  $s: V_{\pm 1}^+ \rightarrow R$  такая, что  $H(x, s(x)) = 0$  и  $s(x_0) = s_0$ , дифференцируемая в окрестности точки  $x_0$ . Тогда, дифференцируя  $s(x)$  по правилу дифференцирования неявно заданной функции в точке  $x_0$ , получим

$$Ds(x_0) = -[\partial H(x_0, s_0) / \partial s]^{-1} [\partial H(x_0, s_0) / \partial x] = -[a^T Ay_0]^{-1} a^T e^{Bs_0}.$$

Рассмотрим теперь отображение  $g: V_{\pm 1}^+ \rightarrow V_{\pm 1}^-$

$$g(x) = e^{Bs(x)}(x \mp p) \pm p, \quad g(x_0) = e^{Bs(x_0)}(x_0 \mp p) \pm p = y_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Dg(x_0) &= B e^{Bs(x_0)}(x_0 \mp p) Ds(x_0) + e^{Bs_0} = B \{ e^{Bs_0} [x_0 \mp p] \pm p \mp p \} Ds(x_0) + e^{Bs_0} = \\ &= B [y_0 \mp p] Ds(x_0) + e^{Bs_0} = -Ay_0 [a^T Ay_0]^{-1} a^T e^{Bs_0} + e^{Bs_0} = \left[ E - \frac{Ay_0 a^T}{a^T Ay_0} \right] e^{Bs_0}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Теперь, когда мы доказали две вспомогательные леммы, перейдем к теореме.

**Теорема.** Пусть  $y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$  – последовательность точек пересечения, порожденная произвольной фазовой траекторией и разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$ , а  $t_1, s_1, t_2, s_2, \dots, t_n, s_n$  – интервалы времени движения изображающей точки в линейных областях фазового пространства, соответствующие этим точкам пересечения. Пусть  $\pi_n$  – отображение,

которое ставит в соответствие первой из рассматриваемых точек пересечения фазовой траектории с разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$  (точке  $y_0$ ) последнюю рассматриваемую точку ( $y_n$ ) из последовательности пересечения, а именно,  $\pi_n: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^+$ ,  $\pi_n(y_0) = y_n$ . Тогда производная  $D\pi_n(y_0)$  отображения  $\pi_n$  будет определяться соотношением

$$D\pi_n(y_0) = \left[ E - \frac{Ay_n a^T}{a^T Ay_n} \right] e^{B_{S1} e^{A/n} e^{B_{S1-1} e^{A/n-1}} \dots e^{B_{S1} e^{A/n}}}$$

### Доказательство.

Будем доказывать теорему с помощью метода математической индукции. Рассмотрим сначала случай, когда  $n=1$  ( $y_0 \rightarrow x_1 \rightarrow y_1$ ). Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции получим, что  $D\pi_1(y_0) = Dg_1(x_1) \times Df_1(y_0)$ . Пользуясь только что доказанными леммами, получим

$$\begin{aligned} D\pi_1(y_0) &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] e^{B_{S1}} \left[ E - \frac{Ax_1 a^T}{a^T Ax_1} \right] e^{A/n} = \\ &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] \left[ e^{B_{S1}} - \frac{e^{B_{S1}} Ax_1 a^T}{a^T Ax_1} \right] e^{A/n}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$e^{B_{S1}} Ax_1 = e^{B_{S1}} B(x_1 \mp p) = B(e^{B_{S1}}(x_1 \mp p) \pm p \mp p) = B(y_1 \mp p) = Ay_1,$$

и тогда

$$\begin{aligned} D\pi_1(y_0) &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] e^{B_{S1} e^{A/n}} \left[ \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ax_1} - \frac{Ay_1 (a^T Ay_1) a^T}{(a^T Ay_1) a^T Ax_1} \right] e^{A/n} = \\ &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] e^{B_{S1} e^{A/n}} - \left[ \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ax_1} - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ax_1} \right] e^{A/n} = \\ &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] e^{B_{S1} e^{A/n}}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение теоремы при  $n=1$  доказано.

Предположим теперь, что утверждение теоремы верно при  $n=m-1$ , то есть

$$D\pi_{m-1}(y_0) = \left[ E - \frac{Ay_{m-1} a^T}{a^T Ay_{m-1}} \right] e^{B_{S1} e^{A/n-1}} \dots e^{B_{S1} e^{A/n}}.$$

Докажем, используя леммы 1 и 2, что условие теоремы выполняется и при  $n=m$ . По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\begin{aligned} D\pi_m(y_0) &= Dg_1(x_m) \times Df_1(y_{m-1}) \times D\pi_{m-1}(y_0) = \\ &= Dg(x_m) \times \left[ E - \frac{Ax_m a^T}{a^T Ax_m} \right] e^{A/n-1} \times \left[ E - \frac{Ay_{m-1} a^T}{a^T Ay_{m-1}} \right] e^{B_{S1} e^{A/n-1}} \dots e^{B_{S1} e^{A/n}}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $e^{A/n} Ay_{m-1} = Ae^{A/n} y_{m-1} = Ax_m$ . Тогда

$$\begin{aligned}
D\pi_m(y_0) &= Dg(x_m) \times \left[ E - \frac{Ax_m a^T}{a^T Ax_m} \right] e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1} = \\
Dg(x_m) &\times \left[ \frac{Ax_m a^T}{a^T Ay_{m-1}} - \frac{Ax_m (a^T Ax_m) a^T}{(a^T Ax_m) a^T Ay_{m-1}} \right] e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1} = \\
&= \left[ E - \frac{Ay_m a^T}{a^T Ay_m} \right] e^{B s_m} \left[ E - \frac{Ax_m a^T}{a^T Ax_m} \right] e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1}.
\end{aligned}$$

Так как

$$e^{B s_m} Ax_m = e^{B s_m} B [x_m \mp p] = B \{ e^{B s_m} (x_m \mp p) \pm p \mp p \} = B (y_m \mp p) = A y_m,$$

то

$$\begin{aligned}
D\pi_m(y_0) &= \left[ E - \frac{Ay_m a^T}{a^T Ay_m} \right] e^{B s_m} e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1} - \\
&- \left[ \frac{Ay_m a^T}{a^T Ax_m} - \frac{Ay_m (a^T Ay_m) a^T}{(a^T Ay_m) a^T Ax_m} \right] e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1} = \\
&= \left[ E - \frac{Ay_m a^T}{a^T Ay_m} \right] e^{B s_m} e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1}.
\end{aligned}$$

Итак, производная от рассматриваемого отображения  $\pi_n: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^-$ ,  $\pi_n(y_0) = y_n$  для случая  $n=m$  имеет вид

$$D\pi_m(y_0) = \left[ E - \frac{Ay_m a^T}{a^T Ay_m} \right] e^{B s_m} e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1},$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана полностью.

Рассмотрим периодическую орбиту в фазовом пространстве и определим характер ее устойчивости. Пусть  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_n, x_n$  – точки пересечения замкнутой фазовой траектории с разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}$ . Рассмотрим отображение  $\pi_n: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^-$ , которое ставит в соответствие точке  $z \in V_{\pm 1}^-$  (из  $\varepsilon$ -окрестности  $y_n$ ) точку, порождаемую пересечением фазовой траектории, выходящей из  $z$ ,  $\delta(\varepsilon)$ -окрестности  $z$ , лежащей на плоскости  $V_{\pm 1}^-$ . Пусть также для этого отображения выполняется условие  $\pi_n(y_0) = y_n$ . Очевидно, что точка  $y_n$  является неподвижной точкой этого отображения. Для того, чтобы определить характер устойчивости неподвижной точки  $y_n$  отображения  $\pi_n: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^-$  (и, соответственно, характер устойчивости периодической орбиты, порождающей последовательность точек пересечения  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_n, x_n$ ), линеаризуем отображение  $\pi_n(y_n)$  в окрестности неподвижной точки  $y_n$

$$\pi_n(y_n + \delta y_n) = \pi_n(y_n) + D\pi_n(y_n) \delta y_n.$$

Тогда об устойчивости неподвижной точки  $y_n$  можно судить по собственным числам матрицы Флоке  $D\pi_n(y_n)$  [15], а именно: неподвижная точка  $y_n$  устойчива (и, соответственно, устойчива периодическая орбита), если все собственные числа матрицы Флоке по модулю меньше единицы. Так, для последовательности точек пересечения  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_n, x_n$  при условии периодичности  $y_0 = y_n$  матрица Флоке, в соответствии с приведенной теоремой, будет иметь вид

$$D\pi_n(y_n) = \left[ E - \frac{Ay_n a^T}{a^T Ay_n} \right] e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{B_{S1}} e^{A_{I1}},$$

а ее собственные значения  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  полностью определяют характер устойчивости рассматриваемой периодической орбиты.

Заметим теперь, что

$$\pi_n(y_n) = e^{C_{Sn} e^{A_{In}} e^{C_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{C_{S1}} e^{A_{I1}} y_n = y_n, \quad (6)$$

где  $C=A^{-1}BA$ . Действительно,  $x_1 = e^{A_{I1}} y_n$ ,  $y_1 = e^{B_{S1}}(x_1 \mp p) \pm p$ . В силу соотношения (5) получим

$$\begin{aligned} y_1 &= A^{-1}A\{e^{B_{S1}}(x_1 \mp p) \pm p\} = A^{-1}B e^{B_{S1}}(x_1 \mp p) = \\ &= A^{-1}e^{B_{S1}}B(x_1 \mp p) = A^{-1}e^{B_{S1}}Ax_1. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $A^{-1}e^{B_{S1}}A = e^{C_{S1}}$  (в чем нетрудно убедиться, используя непосредственно определение экспоненты от матрицы в виде степенного ряда [16]), получим  $y_1 = e^{C_{S1}}x_1 = y_1 = e^{C_{S1}}e^{A_{I1}}y_n$ . Продолжая по цепочке  $x_2, y_2, \dots, y_n, x_n$  проводить выкладки, аналогичные проделанным только что, получим соотношение (6).

Представим теперь  $D\pi_n(y_n)$  в виде  $D\pi_n(y_n) = L(y_n)M$ , где

$$L(y_n) = \left[ E - \frac{Ay_n a^T}{a^T Ay_n} \right], \quad M = e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{B_{S1}} e^{A_{I1}}.$$

Заметим, что матрица  $M$  имеет собственный вектор  $u_1 = Ay_n$  и соответствующее ему собственное число  $\lambda_1^M = 1$ . Действительно,

$$\begin{aligned} M(Ay_n) &= e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{B_{S1}} e^{A_{I1}} Ay_n = e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{B_{S1}} A e^{A_{I1}} y_n = \\ &= e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots A e^{C_{S1}} e^{A_{I1}} y_n = \dots = A e^{C_{Sn} e^{A_{In}} e^{C_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{C_{S1}} e^{A_{I1}} y_n \end{aligned}$$

и в силу соотношения (6) получим  $M(Ay_n) = \lambda_1^M Ay_n$ , где  $\lambda_1^M = 1$ . Нетрудно убедиться также, что матрица  $L(y_n)$  проецирует точки пространства  $R^3$  на плоскость  $x_1 = 0$  вдоль вектора  $Ay_n$ , и, следовательно, матрица  $D\pi_n(y_n)$  имеет собственный вектор  $Ay_n$  и соответствующее ему собственное значение  $\lambda_1 = 0$ . Более того, если матрица  $M$  имеет два других собственных вектора  $u_2, u_3$  и соответствующие им собственные значения  $\lambda_2, \lambda_3$ , то тогда собственными векторами матрицы  $D\pi_n(y_n)$  будут векторы  $L(y_n)u_2, L(y_n)u_3$ , а собственными числами  $-\lambda_2, \lambda_3$  [8]. Следовательно, зная собственные значения матрицы (одно из которых единица), можно однозначно определить характер устойчивости рассматриваемого периодического режима. Фактически  $\lambda_2^M = \lambda_2$  и  $\lambda_3^M = \lambda_3$  являются мультипликаторами предельного цикла.

### Заключение

Все проделанные выкладки, несмотря на их громоздкость, позволили получить новые весьма интересные и необычные результаты для генератора «Торус» [12], которые вряд ли бы удалось получить каким-либо иным способом и которые были подтверждены в ходе специально поставленного численного эксперимента. Следует обратить внимание также на то обстоятельство, что несмотря на то, что все выкладки были проведены для систем с 1.5 степенями свободы, возможно их обобщение для систем с числом степеней свободы большим,

чем 1.5. Действительно, заменяя пространство размерности 3 ( $R^3$ ) на пространство размерности  $n$  ( $R^n$ ), вектора из пространства  $R^3$  на соответствующие вектора из пространства  $R^n$ , матрицы параметров порядка 3 на матрицы порядка  $n$  и т.д., можно проделать выкладки, полностью аналогичные выкладкам, приведенным в настоящей работе, для динамической системы с  $n/2$  степенями свободы, которая описывается  $n$  обыкновенными дифференциальными уравнениями, некоторые из которых содержат нечетную кусочно–линейную функцию с тремя сегментами, остальные дифференциальные уравнения линейны, а фазовое пространство системы оказывается состоящим из трех подпространств. Вполне понятно, что полученные результаты для системы с  $n/2$  степенями свободы будут аналогичны результатам, полученным в данной работе. Заметим, что мы рассматривали систему с 1.5 степенями свободы, во–первых, потому, что в этом случае возможно наглядно пространственное исследовать конкретную систему с 1.5 степенями свободы. Следует обратить внимание также на то обстоятельство, что подход, описанный в [8] и развитый в данной работе, может, по всей видимости, быть использован и для анализа систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с кусочно–линейными функциями (причем, необязательно нечетными) и фазовым пространством, состоящим из подпространств, число которых больше, чем 3.

В заключение выражаю искреннюю признательность А.А.Кипчатову (который фактически «спровоцировал» автора на выполнение данной работы) за ряд ценных советов и плодотворные обсуждения.

## Библиографический список

1. *Shuxin Wu*. Chua's circuit family // Proc. IEEE. 1987. Vol. 75, № 8. P. 1022.
2. *Андрюшкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А.* Путь к хаосу в кусочно–линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. ПНД.. 1993. Т. 1, № 1, № 2. С. 93.
3. *Кипчатов А.* Особенности сложной динамики неавтономного нелинейного контура // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 2. С. 182.
4. *Bezruchko V.P., Kipchatov A.A., Krasichkov L.V., Seleznev E.P.* Complex dynamics of driven piece–wise linear oscillator // Proc. of International Symposium on Nonlinearity theory and applications (NOLTA'93). Hawaii, USA. 1993. Vol. 2. P. 471.
5. *Кипчатов А.А., Подин С.В.* Исследование поведения неавтономного релаксационного генератора в пространстве параметров // Изв. вузов. ПНД. 1996. Т. 4, № 4, 5. С. 30.
6. *Андрюшкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А.* Экспериментальное двухпараметрическое исследование неоднозначных режимов колебаний при разрушении квазипериодических торов // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII, № 11. С. 1195.
7. *Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R.* // IEEE Trans. Circuits and Syst. 1987. Vol. 34, № 3. P.240.
8. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L.O., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // International Journal of Bifurcation and chaos. 1991. Vol. 1. №. 1. PP. 139.
9. *Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* The double scroll // IEEE Trans. Circuit Syst. 1985. Vol. 32. P. 797.
10. *Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family // IEEE Trans Circuit Syst. 1986. Vol. 33. P. 1072.
11. *Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* Birth and death of the double scroll // Physica 24D. P. 97.
12. *Кипчатов А.А., Короновский А.А.* Тонкие эффекты самоподобного поведения кусочно–линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5, № 2. С. 17.

13. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. М.: Наука, 1967. 736 с.

14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.

15. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.

16. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. 780 с.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 18.02.97  
после переработки 21.03.97*

## **THE MULTIPLICATORS OF PERIODICAL SOLUTIONS FOR THE GENERATOR WITH THE PIECE-WISE LINEAR ELEMENT**

*A.A. Koronovskiy*

This article deals with systems with the phase space consisting of three linear subspaces. These systems are described by  $n$  ordinary linear differential equations with piece-wise linear functions in their right side. The equations allowing to find the periodical solutions of these systems and its multipliers depending upon the values of control parameters have been obtained. It allows to trace the regimes maps in the space of control parameters.



## СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

*А.В. Андреев, С.Л. Шитлин*

Двухкомпонентные сверхизлучающие среды состоят из смеси квазирезонансных атомов, отличающихся величиной дипольного момента перехода. Атомы с меньшим дипольным моментом находятся изначально в возбужденном состоянии и являются усиливающими, тогда как атомы с большим дипольным моментом являются поглощающими, так как в начальный момент они пребывают в основном состоянии. Варьируя концентрацию резонансно поглощающего компонента, можно более чем на порядок повысить интенсивность импульсов сверхизлучения, по сравнению со случаем однокомпонентной среды, состоящей только из усиливающих атомов.

В настоящей работе показано, что параметры импульсов сверхизлучения двухкомпонентной среды зависят не только от концентрации резонансно поглощающего компонента, но и от профиля ее распределения. Используя указанные зависимости, можно еще на порядок повысить интенсивность импульсов сверхизлучения и сократить их длительность. Физический механизм такого увеличения интенсивности и сокращения длительности импульсов состоит в возможности эффективной селекции пространственных мод генерации в пространственно неоднородных средах. Обсуждаются также алгоритмы, с помощью которых проводились численные эксперименты. Показано, что к данному классу задач применимы методы повышенного порядка точности.

### Введение

Существенный прогресс в разработке лазерных систем, генерирующих короткие и ультракороткие импульсы, был связан с использованием методов модуляции добротности и синхронизации мод [1,2]. Значительное число подобных схем основано на введении в резонатор лазера резонансно поглощающей среды, так называемого насыщающегося поглотителя. Таким образом, активная среда лазера оказывается двухкомпонентной. Она содержит как резонансно усиливающий, так и резонансно поглощающий компоненты. Однако более правильно такую среду назвать составной, поскольку она состоит из двух физически разделенных объемов усиливающей и поглощающей сред. Взаимное влияние процессов усиления и поглощения в этих двух средах осуществляется через посредство поля в резонаторе и оно тем слабее, чем ниже добротность резонатора. Если добротность резонатора близка к нулю, то динамика населенностей в поглощающей среде перестает оказывать влияние на динамику населенностей в усиливающей среде. Поэтому в безрезонаторных схемах генерации когерентного излучения, каковыми являются, например,

сверхизлучающие среды, использование составных двухкомпонентных сред не приведет к изменению параметров импульсов, генерируемых инвертированной средой.

Однако введение в сверхизлучающую среду второго компонента, как было недавно показано в работах [3,4], позволяет существенно изменить динамику сверхизлучения (СИ), что дает возможность управления параметрами генерируемых импульсов. Характерные черты динамики двухкомпонентных сред значительно отличаются от таковых для однокомпонентных. Так, например, время задержки двухкомпонентного СИ намного превышает длительность импульса, что дает возможность преобразования длинных импульсов накачки в ультракороткие импульсы СИ [5]. В двухкомпонентных средах наблюдается «безынерционное» СИ [6], когда концентрация резонансно поглощающих атомов превышает концентрацию резонансно усиливающих и суммарная инверсия населенностей остается отрицательной в течение всего процесса генерации. В двухкомпонентных средах наблюдается подпороговое усиление импульсов, эффективность которого существенно превышает эффективность усиления в однокомпонентных средах [7]. Следует отметить, что двухкомпонентное СИ отличается от лазеров с насыщающимся поглотителем не только тем, что два компонента перемешаны в одном объеме, но и тем, что как усиливающий, так и поглощающий компоненты являются когерентными, то есть длительность импульса двухкомпонентного СИ меньше времен релаксации для каждого из компонентов.

Динамика двухкомпонентного СИ исследовалась в работах [3–7] в рамках одномерных моделей. Настоящая работа состоит из двух частей. В первой части проведено исследование динамики СИ с учетом поперечной неоднородности активной среды. Определено влияние геометрии среды на параметры генерируемых импульсов. Показано, что использование отражающих покрытий на боковых поверхностях активного объема позволяет не только компенсировать эффекты поперечной диффузии поля, но и дает дополнительные возможности управления параметрами генерируемых импульсов. Во второй части работы исследуется динамика двухкомпонентного СИ в среде, у которой плотность поглощающего компонента является неоднородной по длине образца. Проведенные численные эксперименты показали, что параметры импульсов двухкомпонентного СИ существенно зависят от профиля распределения плотности поглощающего компонента. Это дает возможность управления интенсивностью и длительностью генерируемых импульсов в большом динамическом диапазоне.

Исследование одномерных задач динамики СИ с математической точки зрения показало, что они обладают рядом полезных свойств, благодаря которым удастся построить эффективные численные алгоритмы их решения.

## 1. Уравнения динамики двухкомпонентного СИ поперечно неоднородных сред

Пусть активный объем в виде прямоугольника  $0 \leq x \leq L$ ,  $-d/2 \leq z \leq d/2$ , где  $L$  – длина активной среды, а  $d$  – поперечный размер, состоит из атомов двух сортов, имеющих одинаковые частоты переходов и отличающихся по величине дипольного момента перехода. Атомы с меньшей величиной дипольного момента резонансного перехода в начальный момент возбуждены, а атомы второго сорта находятся в начальном момент в основном состоянии. Сверхизлучательные среды характеризуются, как правило, тем, что число Френеля  $F=d^2/(\lambda L)$  лежит в пределах  $0.1 \leq F < 10.0$ . Следовательно, мы можем положить, что амплитуда векторного потенциала  $A(\mathbf{r}, t)$  электромагнитной волны

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0(x, z, t) \exp[i(\omega t - kx)] \quad (1)$$

является медленно меняющейся функцией продольной координаты  $x$  и времени  $t$ , но может быть быстро осциллирующей по поперечной координате  $z$ . В этом

случае мы можем воспользоваться приближением квазиоптики, состоящим в использовании следующего приближения для оператора Даламбера:

$$\Delta A - (1/c^2)\partial^2 A/\partial t^2 \approx \partial^2 A/\partial z^2 - (2i\omega/c^2)\partial A/\partial t - 2ik\partial A/\partial x + (\omega^2/c^2 - k^2)A. \quad (2)$$

Представляя поле в среде в виде двух встречных волн, распространяющихся вдоль и против оси  $x$ , и пользуясь приближением (2), несложно получить следующую систему уравнений из полной системы уравнений Максвелла – Блоха:

$$\begin{aligned} \partial a_1/\partial t + \partial a_1/\partial x + i\gamma \partial^2 a_1/\partial z^2 + i\delta a_1 &= p_1 + q_1 + \beta_1^{1/2} p_0 (1+R)/2 + \beta_2^{1/2} q_0 (1+r)/2, \\ \partial a_2/\partial t - \partial a_2/\partial x + i\gamma \partial^2 a_2/\partial z^2 + i\delta a_2 &= p_2 + q_2 + \beta_1^{1/2} p_0 (1+R)/2 + \beta_2^{1/2} q_0 (1+r)/2, \\ \partial p_{1,2}/\partial t - \alpha_1 p_{1,2} &= \beta_1 a_{1,2} R, \\ \partial q_{1,2}/\partial t - (\alpha_2 + i\Delta) q_{1,2} &= \beta_2 a_{1,2} r, \\ \partial R/\partial t &= -\sum_{n=1}^2 (p_n a_n^* + p_n^* a_n), \\ \partial r/\partial t &= -\sum_{n=1}^2 (q_n a_n^* + q_n^* a_n), \end{aligned} \quad (3)$$

где безразмерные время  $t$  и координаты  $x, z$  связаны с размерными величинами  $x', z', t'$  следующими соотношениями:

$$t=t'/\tau, \quad x=x'/L, \quad z=z'/d, \quad (4)$$

то есть  $x \in [0, 1]$ ,  $z \in [-1/2, 1/2]$ , а время нормировано на время пролета кванта через среду  $\tau=L/c$ . Безразмерные параметры  $\alpha_n, \beta_n, \gamma, \delta$  имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \tau/T_2^{(1,2)}, \quad \beta_{1,2} = (2\pi\omega d_{1,2}^2)N\tau^2/\hbar V, \\ \gamma &= L/(2\chi d^2) = \lambda L/(4\pi d^2) = 1/(4\pi F), \quad \delta = c^2/(2\omega)(\omega^2/c^2 - k^2)\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $T_2^{(1,2)}$  – время поперечной релаксации,  $d_{1,2}$  – дипольные моменты резонансных переходов для первого и второго компонентов,  $F=d^2/(\lambda L)$  – число Френеля. Параметр  $\Delta$  в (3) определяет величину отстройки резонансных частот компонентов. Безразмерные плотности инверсии населенностей первого компонента, изначально возбужденного ( $R$ ), и второго компонента, изначально поглощающего ( $r$ ), нормированы следующим образом:

$$R(\mathbf{r}, t) = \rho_1(\mathbf{r}, t)/(N/V), \quad r(\mathbf{r}, t) = \rho_2(\mathbf{r}, t)/(N/V), \quad (6)$$

где  $N/V$  – плотность числа атомов первого компонента. Следовательно,  $-1 \leq R \leq 1$ ,  $-r_0 \leq r \leq r_0$ , где  $r_0$  – концентрация поглощающего компонента. Безразмерные медленно меняющиеся амплитуды встречных волн  $a_{1,2}$  в (3) нормированы таким образом, что плотность энергии поля определяется выражением

$$w(\mathbf{r}, t) = \hbar\omega(N/V) \sum_{n=1}^2 |a_n(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (7)$$

Нормировка амплитуд волн поляризации, создаваемых первым ( $p_{1,2}$ ) и вторым ( $q_{1,2}$ ) компонентами, однозначно определяется выражениями (4), (6), (7). Слагаемые, пропорциональные  $p_0$  и  $q_0$  в правых частях уравнений для поля системы уравнений (3), моделируют источники спонтанной поляризации.

Система уравнений (3) решается со следующими начальными

$$a_{1,2}(x, z, 0) = 0, \quad p_{1,2}(x, z, 0) = q_{1,2}(x, z, 0) = 0, \quad (8)$$

$$R(x,z,0) = 1, \quad r(x,z,0) = -r_0$$

и граничными

$$a_1(x=0,z,t) = a_2(x=1,z,t) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial z}(x,z=0,t)=0, \quad \frac{\partial a_{1,2}}{\partial z}(x,z=\pm Z,t)=0 \quad (10)$$

условиями.

Пусть  $\beta_1 < \beta_2$  или  $d_1 < d_2$ , тогда начальные условия (8) означают, что компонент с меньшей величиной дипольного момента перехода в начальный момент возбужден, а второй компонент находится на нижнем уровне резонансного перехода. Поскольку частота Раби пропорциональна величине дипольного момента перехода, то мы будем называть среду «1» медленной, а среду «2» – быстрой.

Условия (9) означают отсутствие отражения поля на торцах активной среды. Первое из условий (10) следует из начальных условий (8) и означает, что при симметричных относительно замены  $z \rightarrow -z$  начальных условиях решение также будет симметрично относительно указанной замены. Действительно, система уравнений (3) симметрична относительно преобразования  $z \rightarrow -z$ , поэтому её решения должны удовлетворять следующим условиям:  $a(x,-z,t) = \pm a(x,z,t)$ ,  $p_n(x,-z,t) = \pm p_n(x,z,t)$ ,  $q_n(x,-z,t) = \pm q_n(x,z,t)$ . Поскольку при выводе уравнений (3) производилось усреднение по физически малому объему, то однородные условия (8) соответствуют ситуации, когда поперечный размер среды много больше межатомного расстояния, и, следовательно, мы можем не учитывать флуктуаций спонтанного поля.

## 2. Влияние поперечной диффузии поля на динамику двухкомпонентного СИ

**2.1. Планарный слой.** На рис. 1 показана зависимость пиковой интенсивности импульса от величины параметра  $\gamma$  при различных значениях отстройки  $\Delta$  резонансных частот компонентов среды. Параметр  $\gamma$  обратно пропорционален числу Френеля  $F$ . При  $\gamma = 0$  система уравнений (3) совпадает с одномерной системой уравнений Максвелла – Блоха. Мы видим, что с ростом  $\gamma$  происходит уменьшение интенсивности генерируемых импульсов. Это связано с тем, что при  $F \ll 1$  характерная ширина распределения поля по координате  $z$  за счет эффектов поперечной диффузии становится больше толщины среды  $d$  и эффективность взаимодействия поля и среды уменьшается. При  $\Delta \neq 0$  зависимость интенсивности импульса от  $\gamma$  становится не монотонной. Это связано с проявлением модовой структуры поля по поперечной координате. Ранее было показано [8], что в рамках одномерной модели интенсивность двухкомпонентного СИ выше при отстройке быстрого компонента, чем в точном резонансе. Как видно из рис.1, это имеет место и при  $\gamma > 0$ . Однако динамика генерации пространственно ограниченных сред зависит от знака отстройки  $\Delta$ .

На рис. 2 показана зависимость пиковой интенсивности импульса двухкомпонентного СИ от величины отстройки  $\Delta$  при различных значениях  $\gamma$ . В одномерном случае, то есть при  $\gamma = 0$ , как было показано в [8], существует оптимальная величина расстройки  $\Delta_0$  резонансных частот компонентов. Как показали теоретические исследования и численные эксперименты,  $\Delta_0 \approx \alpha_2$ , то есть оптимальная величина отстройки равна полуширине линии резонансного перехода быстрых атомов. При  $\gamma = 0$  зависимость  $I_0(\Delta)$  является симметричной. При  $\gamma > 0$  указанная симметрия пропадает. Такое поведение  $I_0(\Delta)$  объясняется различиями в поперечной структуре поля при  $\Delta = \pm \Delta_0$ . На линейной стадии развития коллективного спонтанного распада, когда  $|a| \ll 1$ , а  $R \approx 1$  и  $r \approx -r_0$ , мы можем

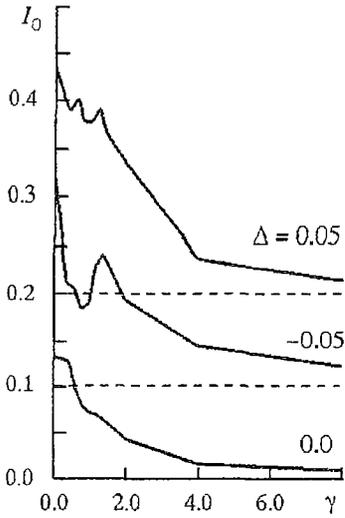


Рис. 1. Пиковая интенсивность импульсов СИ двухкомпонентной среды как функция параметра  $\gamma$  при различных отстройках  $\Delta$

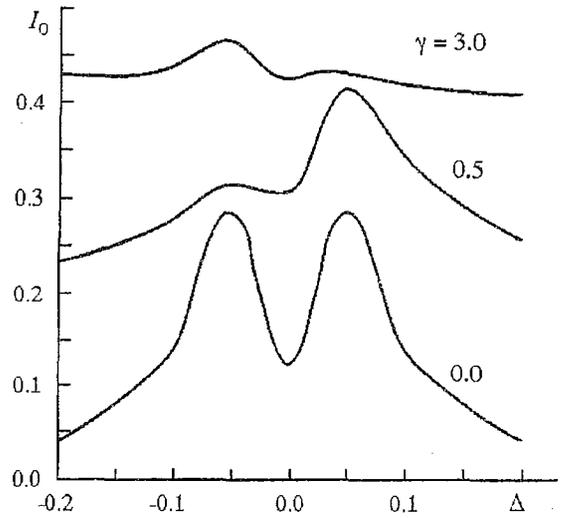


Рис. 2. Пиковая интенсивность импульсов двухкомпонентного СИ как функция отстройки  $\Delta$  при различных значениях  $\gamma$

говорить о диэлектрической проницаемости среды, определяющей связь  $k$  и  $\omega$  в выражении (1)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \approx \{1 + (2/\omega)\beta_2 r_0 \Delta / (\Delta^2 + \alpha_2^2) + i(2/\omega)[\beta_1 R_0 / \alpha_1 - \beta_1 r_0 \alpha_2 / (\Delta^2 + \alpha_2^2)]\}^{1/2}.$$

При  $\varepsilon'(\omega) > 1$  на границе раздела среда – вакуум мы будем иметь полное внутреннее отражение для скользящего падения поля на границу раздела. Это означает, что при  $\Delta > 0$  поле концентрируется в образце и эффективность взаимодействия поля и среды растет. При  $\Delta < 0$  действительная часть диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'(\omega) < 1$  и ширина поперечного распределения поля растет. Таким образом, мы видим, что в поперечно неоднородных средах появляется селективность по отстройке частоты быстрых атомов относительно частоты медленных. Величина отстройки  $\Delta_0$ , при которой достигается абсолютный максимум интенсивности генерации, лежит также вблизи  $\Delta_0 \approx \alpha_2$ . Однако, как это видно из рис. 2, ее знак зависит от величины числа Френеля, то есть от поперечной структуры поля в среде. На рис. 3 показаны профили импульсов двухкомпонентного СИ при различных

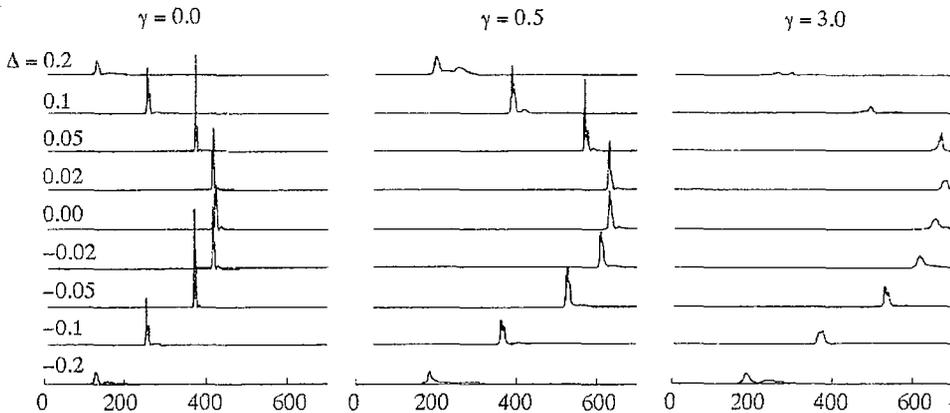


Рис. 3. Профили импульсов СИ на выходе двухкомпонентной среды при различных  $\gamma, \Delta$

значениях параметров  $\gamma$  и  $\Delta$ . Мы видим, что с ростом  $|\Delta|$  происходит уменьшение времени задержки  $t_0(\Delta)$  импульса СИ. Из рисунка также видно, что скорость спадания времени задержки с ростом  $\Delta$  зависит от величины параметра  $\gamma$ , то есть числа Френеля. При  $\gamma = 0.5$  в диапазоне  $-\alpha_2 \leq \Delta \leq \alpha_2$  разброс времени задержки составляет не более 10% от его величины. Это обстоятельство имеет большое практическое значение, поскольку дает возможность формирования узкого импульса СИ с большим временем задержки в неоднородно уширенной среде. Отметим, что время задержки импульса СИ определяет предельную длительность импульса накачки, поэтому возможности преобразования длинного импульса накачки в ультракороткий импульс СИ однозначно определяются величиной отношения времени задержки к длительности импульса СИ.

**2.2. Планарный слой с отражением на боковых границах.** Рассмотрим теперь случай, когда боковые грани планарного слоя являются полностью отражающими. В этом случае граничные условия (10) заменяются следующими:

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial z}(x, z=0, t) = 0, \quad a_{1,2}(x, z=\pm 1/2, t) = 0. \quad (11)$$

На рис. 4 показаны зависимости пиковой интенсивности импульса СИ от величины параметра  $\gamma$  при различных значениях отстройки  $\Delta$ . Как видно из рисунка, проявления поперечной модовой структуры поля в этом случае выражены значительно более ярко. Изменение поперечной толщины слоя в области  $0 \leq \gamma \leq 2$  приводит к значительному изменению соотношения пиковых интенсивностей импульсов для различных отстроек  $\Delta$ . Пиковая интенсивность импульсов перестает падать с ростом  $\gamma$ , то есть с изменением поперечной толщины слоя  $d$ . При больших значениях  $\gamma$  пиковая интенсивность импульсов перестает сильно зависеть от отстройки  $\Delta$ , а ее величина становится близка к значению  $I(\Delta=0)$  для  $\gamma = 0$ .

При нулевой отстройке частот компонентов ( $\Delta = 0$ ) вариацией  $\gamma$  можно приблизительно вдвое увеличить пиковую интенсивность импульсов. Наиболее

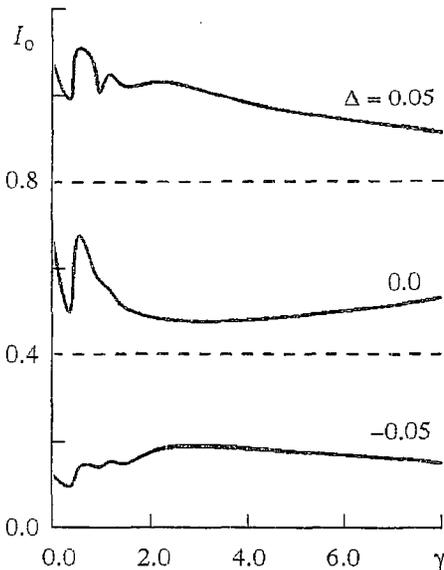


Рис. 4. Зависимость пиковой интенсивности импульсов СИ двухкомпонентной среды от параметра  $\gamma$  при различных значениях  $\Delta$  при наличии отражающих покрытий

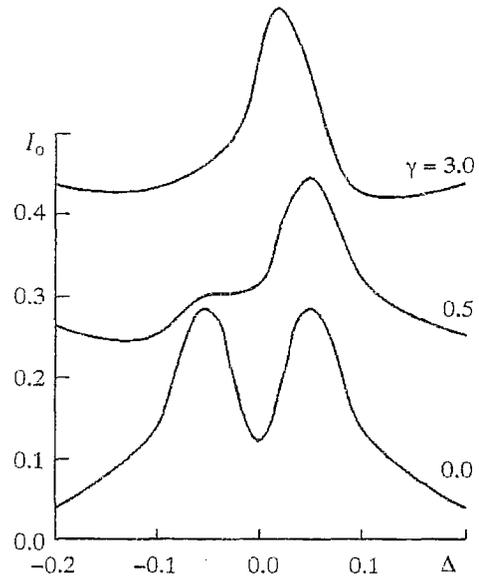


Рис. 5. Зависимость пиковой интенсивности импульса двухкомпонентного СИ от  $\Delta$  для различных  $\gamma$  при использовании отражающих покрытий

значительно поперечная структура поля проявляется при ненулевых значениях отстройки. Как видно из сравнения кривых для  $\Delta=0.05$  и  $\Delta=-0.05$ , при  $\gamma \neq 0$  параметры импульсов зависят от знака отстройки  $\Delta$ . Зависимость пиковой интенсивности импульсов от величины отстройки  $\Delta$  при различных значениях  $\gamma$  показана на рис. 5.

**2.3. Особенности динамики двухкомпонентного СИ поперечно неоднородных сред.** Таким образом, проведенные численные эксперименты показывают, что параметры импульсов, генерируемых двухкомпонентными поперечно неоднородными средами, существенно зависят от геометрии активного объема. Оптимальными являются среды, для которых поперечная толщина  $d$  удовлетворяет условию  $\gamma \leq 2$ . При  $\gamma > 2$  интенсивность импульсов значительно ниже, чем в области  $0 < \gamma \leq 2$ , и она монотонно убывает с ростом  $\gamma$ . В пространственно неоднородных средах в области  $0 < \gamma \leq 2$  параметры импульсов СИ зависят от знака отстройки  $\Delta$ , что связано с проявлением поперечной модовой структуры поля.

Использование полностью отражающих покрытий на боковых гранях активного объема позволяет эффективно управлять динамикой различных спектральных компонентов неоднородно уширенных сред. В области  $0 \leq \gamma \leq 1$  незначительное изменение  $\gamma$  приводит к значительному изменению соотношения скоростей коллективного распада различных компонент неоднородного спектра. В противоположность этому, при больших значениях  $\gamma$  скорости коллективного распада различных спектральных компонентов уравниваются. Следовательно, варьируя расстояние между зеркалами, ограничивающими поперечный размер активной среды, мы можем эффективно управлять спектром импульсов, генерируемых двухкомпонентными неоднородно уширенными средами.

### 3. Управления параметрами импульсов двухкомпонентного СИ вариацией продольного профиля распределения компонентов

Выше мы рассмотрели случай, когда оба компонента среды находятся в одном и том же объеме  $V$ . Пусть теперь объемы, занятые медленным и быстрым компонентом, не совпадают. Ограничимся для простоты случаем  $\gamma \ll 1$ , когда применима одномерная модель. Пусть  $L$  – длина медленной среды, то есть в безразмерных единицах медленный компонент находится в области  $0 \leq x \leq 1$ . Будем считать, что быстрая среда находится в области  $x_1 \leq x \leq 1$ , где  $x_1 \in [0, 1]$ . Следовательно, при  $x_1=0$  мы имеем однородную двухкомпонентную среду, у которой быстрые и медленные атомы равномерно распределены в области  $0 \leq x \leq 1$ . При  $x_1 = 1$  среда становится однокомпонентной, состоящей лишь из медленных атомов. Выберем следующие значения безразмерных параметров сред:

$$\alpha_1 = 0.01, \beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 0.04, \beta_2 = 4.0, R_0 = 1.0, r_0 = 0.75, \Delta = 0.0.$$

Значение  $r_0$  выбрано из тех соображений, что при указанных значениях остальных параметров задачи в случае  $x_1 = 0$  достигается максимальное значение интенсивности СИ двухкомпонентной среды.

На рис. 6 показана зависимость пиковой интенсивности, длительности и времени задержки импульса генерации от величины параметра  $x_1$ . Мы видим, что варьируя длину объема, занятого быстрыми атомами, мы можем на порядок величины поднять интенсивность импульса генерации и более чем в три раза сократить его длительность. Одновременно с сокращением импульса происходит и уменьшение времени задержки  $t_0$ . Однако, при  $x_1 \approx 0.1$ , для которого максимальна интенсивность и минимальна длительность импульса, время задержки более чем на два порядка превосходит длительность импульса. Следовательно, мы не теряем

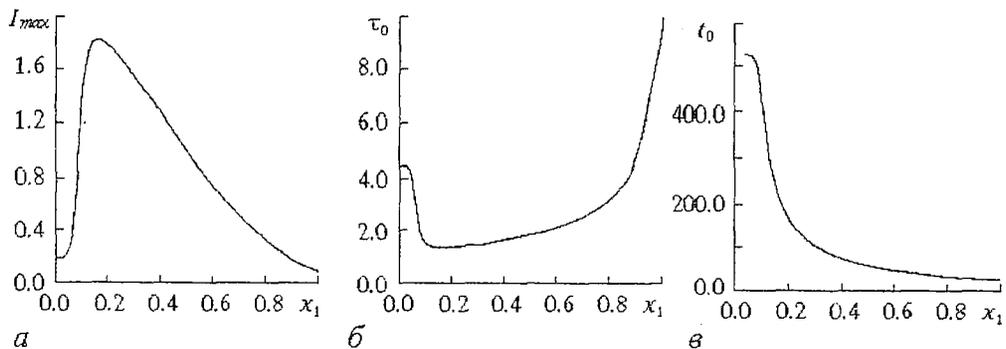


Рис. 6. Зависимости пиковой интенсивности (а), длительности (б) и времени задержки (в) импульсов СИ от величины параметра  $x_1$  составной двухкомпонентной среды

возможности преобразования широких импульсов накачки в ультракороткие импульсы СИ.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что существует оптимальное соотношение длин, занятых медленными  $L_1 = 1$  и быстрыми  $L_2 = 1 - x_1$  атомами, которое зависит от соотношения дипольных моментов, ширины линий и концентрации компонентов. В чем причина резкого возрастания интенсивности коллективного распада двухкомпонентных составных сред? Таких причин две. Первая заключается в том, что составная среда селективна по направлению генерации. На рис. 6 показана интенсивность волны, распространяющейся слева направо, то есть в точке  $x = 1$ . Интенсивность встречной волны на левом конце активной среды  $x = 0$  пренебрежимо мала, как это показано на рис. 7. Вторая причина состоит в том, что спонтанный распад медленных атомов в области, занятой двухкомпонентной средой, подавлен по сравнению с процессом, происходящим в однокомпонентной среде ( $0 \leq x \leq x_1$ ) медленных атомов. Это и приводит к резкой асимметрии пространственно-временной динамики волн, распространяющихся в составной среде слева направо и справа налево. Варьируя соотношение  $L_1/L_2$ , мы можем практически полностью подавить одну из волн, как это видно из сравнения рис. 6 и 7, и получить однонаправленную коллективную генерацию.

На рис. 8 показана зависимость параметров импульсов генерации для другой

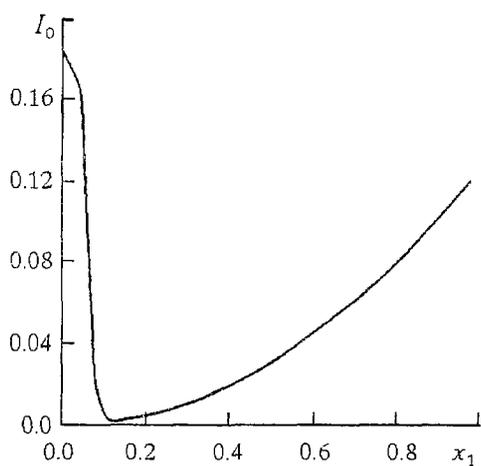


Рис. 7. Пиковая интенсивность обратной волны составной двухкомпонентной среды в зависимости от значения параметра  $x_1$

геометрии эксперимента. В этом случае двухкомпонентная среда, состоящая из медленных и быстрых атомов, находится в области  $0 \leq x \leq 1$ , а в области  $-l \leq x \leq 0$  находится однокомпонентная среда медленных атомов. Представленные на рисунке графики есть зависимости пиковой интенсивности, длительности и времени задержки импульса генерации от длины участка  $l$ , занятого лишь медленными атомами. Как видно из рисунка, резкое нарастание пиковой интенсивности и сокращение длительности импульса происходит лишь до тех пор, пока  $l$  не достигнет оптимального значения  $l_{opt}$ . Дальнейшее увеличение  $l$  приводит к медленному нарастанию интенсивности импульса и практически не изменяет его длительность.

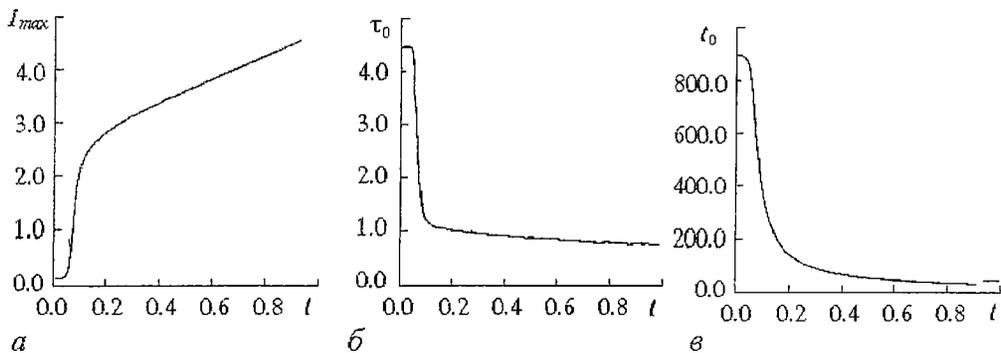


Рис. 8. Зависимости пиковой интенсивности (а), длительности (б) и времени задержки (в) импульсов СИ от длины участка  $l$  для составной двухкомпонентной среды

### Заключение

Проведенные численные эксперименты позволяют сделать вывод: зависимость динамики СИ двухкомпонентных сред от геометрии среды принципиально отличается от соответствующих зависимостей для однокомпонентных сред. Это открывает новые возможности управления параметрами импульсов двухкомпонентного СИ. Варьируя размер поперечной и продольной неоднородностей среды, мы можем в широких пределах управлять интенсивностью и длительностью импульсов СИ. При оптимальных значениях поперечной и продольной неоднородностей возможно более чем на порядок увеличить интенсивность и сократить длительность импульсов. Такая резкая зависимость параметров импульсов генерации от геометрии среды связана с селекцией пространственных мод поля в активном объеме. Как известно [9], при коллективной генерации интенсивность генерации каждой моды падает квадратично с увеличением числа мод генерации. Поэтому селекция пространственных мод на начальном этапе генерации позволяет существенно увеличить интенсивность генерируемого импульса.

### Приложение 1

#### Некоторые математические аспекты численного моделирования одномерных задач динамики СИ

С математической точки зрения рассмотренные в разделе 3 задачи описываются системами гиперболических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x} &= R_k(\mathbf{u}), & k=1, \dots, N_1, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial u_k}{\partial x} &= R_k(\mathbf{u}), & k=N_1+1, \dots, N_2-1, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} &= R_k(\mathbf{u}), & k=N_2, \dots, N, \quad \mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_N\}, \quad (x, t) \in P = (0, X) \times (0, T], \end{aligned} \quad (12)$$

где  $N_1$  – число неизвестных функций, удовлетворяющих уравнению первого типа, а  $N$  – полное число неизвестных функций. Введем обозначения

$$\mathbf{u}^+ = \{u_1, \dots, u_{N_1}\}, \quad \mathbf{u}^- = \{u_{N_1+1}, \dots, u_{N_2-1}\}, \quad \mathbf{u}^0 = \{u_{N_2}, \dots, u_N\}.$$

Для системы (12) ставятся начальные и граничные условия

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{p}(x), \quad \mathbf{u}^+(0, t) = \mathbf{q}^+(t), \quad \mathbf{u}^-(X, t) = \mathbf{q}^-(t). \quad (13)$$

Опишем численный метод решения (12), (13). Введем равномерную сетку

$$\omega_h = \{(x_i, t_n) : x_i = ih, t_n = nh, h = X/N_x, T = N_t h\}. \quad (14)$$

На ней определим следующую аппроксимацию начально–краевой задачи (12), (13):

$$\begin{aligned} [(\mathbf{y}^+)_{n+1}{}^{i+1} - (\mathbf{y}^+)_n{}^i]/h &= \mathbf{R}(((\mathbf{y})_{n+1}{}^{i+1} + (\mathbf{y})_n{}^i)/2), \\ [(\mathbf{y}^-)_{n-1}{}^{i+1} - (\mathbf{y}^-)_n{}^i]/h &= \mathbf{R}(((\mathbf{y})_{n-1}{}^{i+1} + (\mathbf{y})_n{}^i)/2), \\ [(\mathbf{y}^0)_{n+1}{}^{i+1} - (\mathbf{y}^0)_n{}^i]/h &= \mathbf{R}(((\mathbf{y})_{n+1}{}^{i+1} + (\mathbf{y})_n{}^i)/2). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть начальные и граничные условия аппроксимируются точно

$$\begin{aligned} (\mathbf{y})_n{}^0 &= \mathbf{p}(nh), & n &= 0, \dots, N_x, \\ (\mathbf{y}^+)_0{}^i &= \mathbf{q}^+(ih), & i &= 0, \dots, N_t, \\ (\mathbf{y}^-)_{N_x}{}^i &= \mathbf{q}^-(ih), & i &= 0, \dots, N_t. \end{aligned} \quad (16)$$

Предположим, что для рассмотренных в разделе 3 задач динамики СИ точка разрыва плотности поглощающих атомов приходится на узел сетки. Тогда для достаточно гладких начальных и граничных функций численный метод (15), (16) имеет второй порядок точности и является консервативным. На его основе, применяя методику, изложенную в [10], удастся разработать методы повышенного порядка точности. Можно показать, что имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Предположим, что  $p_k(x) \in C^{2r+3}(0, X)$ ,  $k=1, \dots, N$ ;  $q_k(t) \in C^{2r+3}(0, T)$ ,  $k=1, \dots, N_2-1$ , где  $r \geq 0$  – заданное целое число. Зафиксируем числа  $0 < N_1 < \dots < N_{r+1}$  и построим последовательность сеток  $\omega_{h_1}, \omega_{h_2}, \dots, \omega_{h_{r+1}}$  с шагами  $h_k = 1/(N_k M)$ . На каждой из сеток  $\omega_{h_k}$  рассмотрим разностную задачу (15), (16), для которой будем предполагать существование единственного решения  $y_k$ . Составим линейную комбинацию, определенную на сетке  $\omega_{h'}$  с шагом  $h' = 1/M$ ,

$$y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{r+1} y_{r+1}. \quad (17)$$

Веса  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}$  удовлетворяют системе

$$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{r+1} h^{2j} \lambda_k = 1, \quad j=1, \dots, r. \quad (18)$$

Определитель системы (18) отличен от нуля, следовательно, её решение существует. Тогда имеет место оценка

$$\|y - R_h \mathbf{u}\|_{C, h} \leq C_1 h^{2(r+1)}. \quad (19)$$

где  $R_h$  – оператор, ставящий в соответствие функции, определенной на прямоугольнике  $P$ , сеточную функцию по правилу

$$R_h \mathbf{u}(nh, ih) = \mathbf{u}(nh, ih), \quad n=0, \dots, N_x, \quad i=1, \dots, N_t.$$

## Приложение 2

### Оптимизация профиля распределения плотностей компонентов и методы оптимального управления в задачах динамики СИ

Введем в задачу (12), (13) управляющие воздействия и запишем ее следующим образом:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \Lambda \partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1(x, t), \mathbf{v}_2(x), \mathbf{v}_3(t), \mathbf{v}_4). \quad (20)$$

Здесь  $(x, t) \in P$ ,  $\Lambda$  – диагональная матрица,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$  –  $N$ -мерный вектор состояния;  $\mathbf{v}_1(x, t), \mathbf{v}_2(x), \mathbf{v}_3(t), \mathbf{v}_4$  – управляющие функции. В обозначениях приложения 1 для системы (20) поставим граничные и начальные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{p}(\mathbf{v}_1^0(x), \mathbf{v}_2^0, x), \quad x \in [0, X], \\ \mathbf{u}^+(0, t) &= \mathbf{g}^+(\mathbf{v}_1^+(t), \mathbf{v}_2^+, t), \quad t \in [0, T], \\ \mathbf{u}^-(X, t) &= \mathbf{g}^-(\mathbf{v}_1^-(t), \mathbf{v}_2^-, t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (21)$$

В (20) и (21)  $\mathbf{v}_1(x, t), \mathbf{v}_2(x), \mathbf{v}_3(t), \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1^0(x), \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_1^+(x), \mathbf{v}_2^+, \mathbf{v}_1^-(x), \mathbf{v}_2^-$  – векторные управления, причем  $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_2^+, \mathbf{v}_2^-$  не зависят от  $x$  и  $t$ . Ставится задача минимизации функционала

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^X \varphi(\mathbf{u}(x, 0), x) dx + \int_0^T [\varphi_0(\mathbf{u}^-(0, t), t) + \varphi_1(\mathbf{u}^+(X, t), t)] dt + \iint_P \Phi(\mathbf{u}(x, t), x, t) dx dt \quad (22)$$

на множестве допустимых управлений, которыми являются наборы функций со значениями из заданных ограниченных множеств соответствующих евклидовых пространств. Один из подходов к исследованию задач оптимального управления для гиперболических систем уравнений основан на применении принципа максимума [11]. Мы рассмотрим конечно-разностный метод решения поставленной задачи минимизации.

Опишем сеточный аналог (20), (21). Для этого введем в рассмотрение дискретные управления в виде сеточных функций. Аппроксимируем (20), (21) разностным методом (15), (16). На решении полученной системы разностных уравнений ищем минимум функционала

$$\begin{aligned} I_h(\mathbf{u}) &= \sum_j \varphi(\mathbf{u}_h(jh, 0), jh) h + \sum_i [\varphi_0^-(\mathbf{u}_h(0, ih), ih) + \varphi_0^+(\mathbf{u}_h(X, ih), ih)] h + \\ &+ \sum_{j,i} \Phi(\mathbf{u}_h(jh, ih), jh, ih) h^2 \end{aligned} \quad (23)$$

на множестве допустимых управлений, значения которых выбираются из тех же ограниченных множеств, что были введены для допустимых управлений дифференциальной задачи. Здесь  $\mathbf{u}_h(jh, ih)$  – решение разностной системы. Методы численного моделирования дискретных задач оптимального управления хорошо известны [12–14]. Будем предполагать, что решения задач оптимизации в дискретном и непрерывном случаях существуют.

Обозначим какое-нибудь оптимальное управление непрерывной задачи через  $\bar{\xi} = \{\mathbf{v}_{1, \text{opt}}(x, t), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}(x), \mathbf{v}_{3, \text{opt}}(t), \mathbf{v}_{4, \text{opt}}, \mathbf{v}_{1, \text{opt}}^0(x), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^0, \mathbf{v}_{1, \text{opt}}^+(x), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^+, \mathbf{v}_{1, \text{opt}}^-(x), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^-\}$ , соответствующее решение через  $z(x, t)$ . Оптимальное управление дискретной задачи –  $\bar{\xi}_h$ , а соответствующее решение –  $\bar{x}_h(ih, jh)$ . Пусть  $\xi_h$  – дополнение управления  $\bar{\xi}_h$  кусочно-линейным образом, совпадающее с ним в узловых точках,  $z_h(x, t)$  – соответствующее  $\xi_h$  решение дифференциальной задачи. Можно показать, что имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Предположим, что  $\mathbf{f}, \mathbf{p}, \mathbf{g}^+, \mathbf{g}^-, \varphi, \varphi_0^-, \varphi_0^+, \Phi$  – непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t) &= \mathbf{f}(z(x, t), \mathbf{v}_{1, \text{opt}}(x, t), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}(x), \mathbf{v}_{3, \text{opt}}(t), \mathbf{v}_{4, \text{opt}}), \\ \mathbf{q}_0(x) &= \mathbf{p}(\mathbf{v}_{1, \text{opt}}^0(x), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^0, x), \\ \mathbf{q}^+(t) &= \mathbf{g}^+(\mathbf{v}_{1, \text{opt}}^+(t), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^+, t), \\ \mathbf{q}^-(t) &= \mathbf{g}^-(\mathbf{v}_{1, \text{opt}}^-(t), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^-, t). \end{aligned} \quad (24)$$

Допустим, выбранное оптимальное управление непрерывной задачи таково, что функция  $q(x,t)$  непрерывно дифференцируема вдоль любой характеристики системы за исключением конечного числа (меньше заданного  $k \geq 0$ ) точек разрыва первого рода. Пусть функции  $q^0(x)$ ,  $q^+(t)$ ,  $q^-(t)$  также непрерывно дифференцируемы и имеют только разрывы первого рода в количестве, меньшем  $k$ . Тогда оптимальное управление дискретной задачи сходится при  $h \rightarrow 0$  к оптимальному управлению непрерывной задачи по функционалу и имеет место оценка

$$0 \leq I(\bar{z}_h) - I(\bar{z}) \leq C_2 h. \quad (25)$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания Гособразования РФ (шифр проекта 95-0-5.5-177).*

### Библиографический список

1. Ханин Я.И. Динамика квантовых генераторов. М.: Советское радио, 1975.
2. Крюков П.Г., Летохов В.С. Распространение импульса света в резонансно усиливающей (поглощающей) среде // УФН. 1969. Т. 99, № 2. С. 169.
3. Андреев А.В., Полевой П.В. Сверхизлучение двухкомпонентных сред // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57, № 2. С. 99.
4. Andreev A.V., Polevoy P.V. Superradiance of two-component media // Quantum Optics. 1994. Vol. 6. P. 57.
5. Андреев А.В., Полевой П.В. Генерация ультракоротких импульсов двухкомпонентными сверхизлучающими средами // Квантовая электроника. 1993. Т. 20, № 10. С. 991.
6. Andreev A.V., Polevoy P.V. Superradiance in IR and optical transitions of molecules // Infrared Phys. Tech. 1995. Vol. 36. P. 15.
7. Андреев А.В., Полевой П.В. Динамика усиления и распространения импульсов в двухкомпонентных средах // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, № 5. С. 1343.
8. Андреев А.В., Полевой П.В. Сверхизлучение двухкомпонентных квазирезонансных сред // Квантовая электроника. 1996. Т. 23. С. 647.
9. Andreev A.V., Emelyanov V.I., Ilinskii Ya.A. Cooperative Effects in Optics. Bristol and Philadelphia: IOP Publ., 1993.
10. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности разностных схем. М.: Наука, 1979.
11. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление / Под ред. О.В. Васильева, В.А. Срочко, В.А. Телецкого. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990.
12. Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Г.И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. Киев: Наукова думка, 1978.
13. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
14. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1979.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию 25.12.96  
после переработки 25.03.97

## SUPERRADIANCE OF TWO-COMPONENT SPATIAL INHOMOGENEOUS MEDIA

*A.V. Andreev, S.L. Sheetlin*

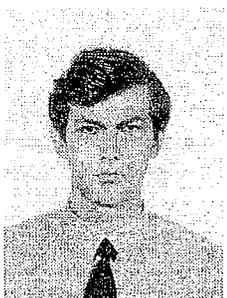
The two-component superradiative medium consists of two species of atoms with the different dipole moments of the quasi-resonant transitions. The atoms with the smaller dipole moment are initially in the excited state, while the atoms of the second type are initially in the ground state. In the initial stage of the superradiance dynamics the first component is amplifying one, the second component is resonantly absorbing.

By varying the concentration of the resonantly absorbing atoms it is possible to increase the intensity of superradiance in the few order of magnitude with respect to the monocomponent medium of the amplifying atoms alone.

Here we show that the variation in the distribution of the component densities enables us the additional possibilities in the control of the superradiance pulse parameters. The additional increase in the order of magnitude for the peak pulse intensity is obtained at the optimal distribution. The nature of such variation in the pulse profile and its intensity is due to the opportunity for the effective spatial mode selection in the spatial inhomogeneous media. We discuss the algorithms of the numerical solution and show that the enhanced accuracy methods can be developed in this case.



*Андреев Анатолий Васильевич* – родился в 1951 году, окончил физический факультет Московского государственного университета (1975). После окончания аспирантуры (1978) работает на физическом факультете МГУ, с 1993 года – в должности профессора кафедры общей физики и волновых процессов. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1978) и доктора физико-математических наук (1989) в области теоретической квантовой электроники, теории волн, рентгеновской оптики. Соавтор монографий «Кооперативные явления в оптике» (Наука, 1988), «Cooperative Effects in Optics» (IOP Publ., 1993).



*Шитлин Сергей Леонидович* – родился в 1971 году, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета (1993), аспирантуру (1996). Занимается математическим моделированием процессов сверхизлучения многоуровневых и многокомпонентных сред.



## ДИСКРЕТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ $RL$ -ДИОД ЦЕПИ

*Б.П. Безручко, А.Ю. Жалнин, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев*

По экспериментально наблюдаемым временным реализациям собственных и вынужденных колебаний построены и исследованы точечные отображения, моделирующие сложную динамику колебательного контура с диодом при периодическом внешнем воздействии. Обсуждается место сконструированных отображений среди прочих математических моделей этой популярной радиофизической системы.

### Введение

После сообщения Линсея [1] о хаотизации вынужденных колебаний в цепи из последовательно соединенных катушки индуктивности, резистора и варакторного диода этот радиофизический «маятник» ( $RL$ -диод цепь, колебательный контур с диодом, диодный резонатор) занял место в ряду эталонных простых систем со сложной динамикой.\* К настоящему времени нелинейные явления, наблюдаемые в контуре при периодическом внешнем воздействии, широко исследованы экспериментально [3–21] и предложен ряд модельных уравнений, описывающих поведение системы [12–21]. Модели в виде дифференциальных уравнений, сконструированные на основе уравнений Кирхгофа или их модификации, отражают различные аппроксимации характеристик диода [12–15]. Дискретные модели представлены одномерными [16–18] и многомерными [15, 18–21] отображениями.

Отмеченные дискретные модели качественно описывают изменение колебательных состояний системы при вариации одного управляющего параметра, обычно это амплитуда внешнего периодического воздействия. Они отражают такие феномены, как удвоения периода и переход к хаосу, кризисы аттракторов и последовательность добавления периода, но не в состоянии представить особенности сложной динамики системы при существенном изменении двух и более управляющих параметров. Целью нашей работы является построение по экспериментальным временным реализациям отображений, моделирующих вынужденную динамику  $RL$ -диод цепи в широкой области изменения нескольких управляющих параметров.

\* В более ранний, предшествующий работе [1] «дохаотический» период, эта и подобные практически важные системы с диодами всесторонне исследовались как параметрические генераторы, бистабильные и перестраиваемые селективные элементы (см., например, [2]).

Трудности эквивалентного представления диодов в режиме больших амплитуд и широком диапазоне частот до сих пор не позволили сконструировать такую модель на основе традиционного подхода через составление дифференциальных уравнений цепи (на основе уравнений Кирхгофа). Развиваемые в последние годы методы восстановления уравнений по наблюдаемому временному ряду [22–29] направлены, в основном, на построение моделей заданного движения и используют, как правило, громоздкие аппроксимирующие выражения (например, в виде полиномов [26–28] или нейронных сетей [29]), что делает проблематичным экспериментальное определение параметров и описание набора качественно различающихся движений. Вместо универсальных аппроксимирующих рядов в данной работе подбирается достаточно простая функция или алгоритм, качественно отражающие особенности временных реализаций колебаний тока в цепи, а следовательно, и вид симметрии характерных движений для различных типов диодов. При выборе параметров и способа их «включения» в модель используются физические соображения и эксперимент.

Первые два раздела статьи посвящены описанию экспериментальных предпосылок к построению модели, затем конструируются модели двух классов подобных движений и оцениваются их параметры, а в заключение проводится проверка работоспособности полученных уравнений. В качестве критерия адекватности используется способность модели отразить структуру бифуркационных множеств в пространстве параметров реальной системы. В приложения вынесены экспериментальные детали и подробности.

## 1. Собственные колебания в цепях с диодами

Воздействуем на последовательную  $RL$ -диод цепь (рис. 1, *a*) импульсом

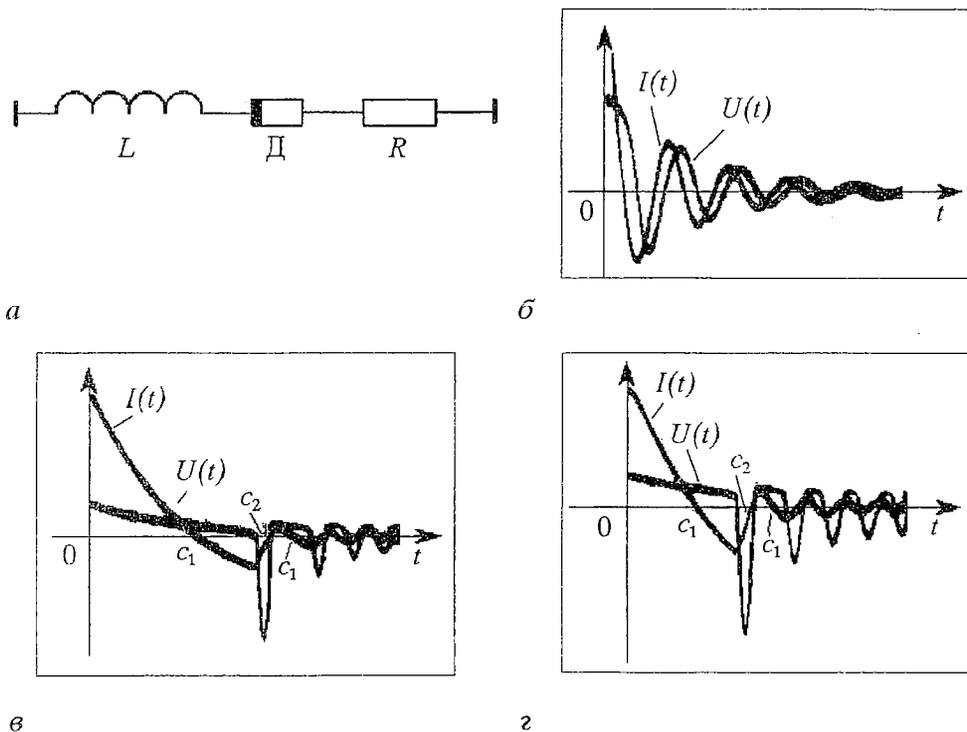


Рис. 1. *a* – электрический маятник,  $RL$ -диод цепь; *б-г* – характерные виды собственных колебаний тока  $I$  и напряжения  $U$  в системе (*a*), выведенной из состояния равновесия импульсом прямого тока: *б* – емкостный тип; *в* – релаксационный тип; *г* – с признаками емкостного и релаксационного типов

прямой для диода полярности от источника с малым внутренним сопротивлением и проанализируем колебательный процесс после окончания импульса. В качестве динамических переменных используем ток цепи  $I$  и напряжение на диоде  $U$ . Будем повторять воздействие лишь после затухания колебаний в цепи (прихода системы в состояние равновесия), а начальное отклонение от равновесия задавать, регулируя амплитуду импульса воздействия.

В зависимости от свойств конкретного образца диода (см. Приложение 1) можно выделить следующие характерные виды собственных колебаний.

а. «Емкостный» – колебания по форме близки к затухающим гармоническим (рис. 1, б), при этом ток и напряжение сдвинуты по фазе на величину, близкую к  $\pi/2$ . Скорость затухания колебаний определяется величиной  $R$ . Временной интервал между соседними экстремумами зависимостей  $U(t)$ ,  $I(t)$  – условный период  $T_n$  – увеличивается с ростом  $L$  и размаха колебаний.

б. «Релаксационный» – характеризуется пилообразным видом зависимости  $I(t)$  с протяженными участками  $c_1$ , имеющими отрицательный наклон ( $dI/dt < 0$ ), и короткими участками  $c_2$ , имеющими большую положительную крутизну (рис. 1, в). Первым участкам соответствует медленное уменьшение положительного напряжения на диоде, а участкам с  $dI/dt > 0$  – пики напряжения отрицательной полярности. Амплитуда пиков и расстояние между ними зависят от начального тока и параметров  $L$  и  $R$  цепи.

в. «Диссипативный» – процессы экспоненциально затухают; на фазовой плоскости ( $I, U$ ) изображающая точка движется вдоль кривой, соответствующей статической вольт–амперной характеристике диода. С диодами этого типа система не демонстрирует сложных колебаний, поэтому они далее не рассматриваются.

В общем случае, собственные колебания в контурах с диодами, позволяющими наблюдать хаос, имеют признаки «емкостного» и «релаксационного» типов поведения (аб тип). При больших отклонениях от состояния равновесия в сторону положительных токов и напряжений поведение системы ближе к б, а при уменьшении амплитуды колебаний сводится к а типу (рис. 1, г).

Из экспериментальных данных можно сделать вывод, что условный период собственных затухающих колебаний в цепи (длительность участков  $c_1$  на временных реализациях) увеличивается с ростом как прямого тока, так и постоянной времени  $L/R$  цепи; наблюдающееся насыщение этих зависимостей, по всей видимости, связано с конечным временем жизни носителей в базе диода.

## 2. Вынужденные движения в контуре с диодом при периодическом воздействии

Рассмотрим случай, когда возбуждающие импульсы амплитуды  $V$  повторяются с частотой  $f$ . При  $V \ll 1$  (линейный режим) в системе существует единственный вид колебаний с периодом внешнего воздействия (в фазовом пространстве один цикл). При достаточно больших  $V$ , если система не успевает прийти в равновесие до прихода следующего импульса, в ней может существовать большое число резонансных циклов и более сложных режимов на их основе, включая хаос (см. Приложение 2). По признаку подобия можно выделить две группы базовых нелинейных циклов. Внутри каждой группы качественно подобны формы временных реализаций, вид аттракторов в фазовом пространстве, а также структуры бифуркационных множеств в пространстве параметров.

Первую группу составляют базовые циклы  $\Gamma_{1/N}$ , имеющие период, равный периоду внешнего воздействия  $T=1/f$ , и существующие при  $f < f_1$ , где  $f_1$  – частота малых собственных колебаний. Такие циклы иногда называют субгармоническими. Так как период воздействия велик по сравнению с временным масштабом собственных движений, временные реализации циклов  $\Gamma_{1/N}$  имеют вид последовательности цугов затухающих колебаний. Квазипериод движений в цуге уменьшается с уменьшением амплитуды (рис. 2, а), стремясь к величине  $T_0 = 1/f_1$ .

Наиболее обширную область пространства параметров воздействия занимает

вторая группа циклов – циклы  $\Gamma_N$  периода  $NT$ , где  $N=1,2,3, \dots$ , и движений на их основе. Характерной для них особенностью является большая проводимость диода основную часть периода цикла. Типичный вид временной реализации  $I(t)$  при движении на таком цикле представлен на рис. 2, б. При увеличении амплитуды воздействия происходит смена базовых циклов, приводящая к формированию последовательности добавления периода. Поэтому циклы  $\Gamma_N$  часто называют циклами «добавления периода». Циклы  $\Gamma_N$  в большинстве описанных в литературе экспериментов с  $RL$ -диод цепями наблюдаются при  $0.6f_1 \div 0.8f_1 < f < 2f_1$  (см. Приложение 2, рис.П.).

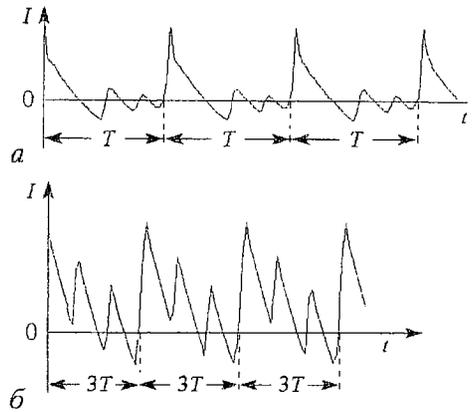


Рис. 2. Временные реализации вынужденных колебаний тока в цепи, полученные с помощью АЦП, для субгармонического режима  $\Gamma_{1/3}$  (а) и режима  $\Gamma_3$  из последовательности добавления периода (б);  $T$  – период внешнего воздействия

### 3. Модели

**3.1. Модель субгармонических колебаний.** Для субгармонических колебаний при прямой для диода полярности импульсов воздействия фазы начальных колебаний в цугах практически одинаковы. Характер же неизохронности аналогичен наблюдаемому у осцилляторов с нелинейностью типа «мягкая пружина»: условный период колебаний в цуге уменьшается по мере уменьшения амплитуды колебаний.

При построении модели будем для простоты полагать, что период затухающих колебаний в цуге является постоянным ( $T_n = \text{const}$ ). Неизохронность в первом приближении учтем, вводя зависимость этого фиксированного периода от начальной амплитуды колебаний в цуге  $x_0$ . Обозначая через  $T_0$  период собственных колебаний малой амплитуды ( $x \rightarrow 0$ ) и считая, что период колебаний  $T_n$  линейно зависит от  $x_0$ , можно записать:  $T_n = T_0 + \alpha x_0 = T_0(1 + \beta x_0)$ , где  $\beta = \alpha/T_0$  – параметр, характеризующий неизохронность. Тогда можно ввести следующее приближение для свободных затухающих колебаний:

$$x(t) = x_0 \exp(-\delta t) \cos(2\pi t / [T_0(1 + \beta x_0)]), \quad (1)$$

где  $x$  – амплитуда колебаний,  $t$  – текущее время, а постоянная  $\delta$  характеризует затухание. Поведению типа «мягкая пружина» соответствует  $\beta > 0$ .

При возбуждении контура импульсами тока прямой для диода полярности амплитуда колебаний тока в цепи увеличивается и по окончании воздействия становится больше на величину  $A$ , пропорциональную амплитуде импульса воздействия, а затем движение продолжается по закону (1), но с новым  $x_0$ . Длительность самих импульсов воздействия не принципиальна, но мы для простоты и определенности далее положим импульсы одинаковыми и короткими. В результате сформируются временные реализации в виде последовательности цугов (рис. 3, а).

Для построения модельного отображения последования выделим на временной реализации колебательного процесса точки, разделенные интервалом времени  $T$  (произведем стробирование), и установим функциональную связь между последовательными значениями  $x_n$ . Вид отображения последования зависит от выбора момента стробирования, который будем характеризовать длительностью временного интервала  $\tau$  от конца импульса внешнего воздействия. Изменение  $\tau$

соответствует замене переменных. Так, в наиболее простом случае, при  $\tau \rightarrow 0$ , для реализации, изображенной на рис. 3, а, из (1) получается следующее одномерное многопараметрическое отображение:

$$x_{n+1} = x_n \exp(-d/N) \cos(2\pi/[N(1+\beta x_n)]) + A, \quad (2)$$

где  $A$  – амплитуда воздействия,  $N=T_0/T$  – нормированная частота воздействия,  $d=\delta T_0$  – коэффициент линейной диссипации,  $\beta$  – параметр нелинейности. Выражение (2) может быть приведено к трехпараметрическому виду

$$z_{n+1} = A_1 z_n \cos(1/[A_2(1+A_3 z_n)]) + 1, \quad (3)$$

где  $z_n = x_n/A$ ,  $A_1 = \exp(-d/N)$ ,  $A_2 = N/2\pi$ ,  $A_3 = \beta A$ . В соотношении (3) по сравнению с (2) все параметры и переменная безразмерны, но физический смысл параметров менее осязаем.

Для уточнения модели (2), не учитывающей изменение периода внутри отдельного цуга свободных колебаний, можно ввести процедуру учета

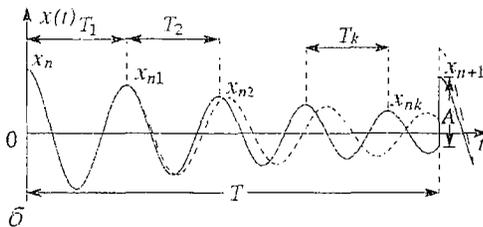
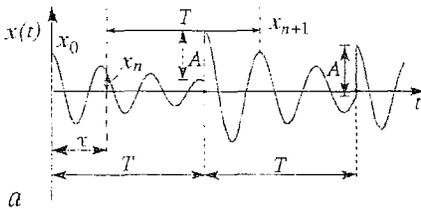


Рис. 3. Временные реализации колебаний в моделях субгармонических режимов. Сплошной линией (б) отмечена реализация в случае учета неизохронности внутри цуга. На интервале времени  $T_1$  она совпадает с реализацией модели (2) – пунктирная линия

неизохронности внутри цугов. Эта процедура предполагает уточнение периода в моменты времени, когда косинус обращается в  $+1$ , и заключается в следующем: уравнение (1) применяется на более коротких интервалах времени, равных одному условному периоду колебаний (рис. 3, б). Однако, хотя такая модель оказывается более точной в области малых  $N$ , как показывают численные исследования, ее отличие от более простой и наглядной модели (2) несущественно.

Уравнения (2) и (3) имеют как регулярные с периодом, кратным  $T$ , так и хаотические решения. Причем, при определенных значениях параметров может существовать несколько решений, то есть в системах возможна мультистабильность, когда вид установившегося колебательного состояния определяется начальными условиями.

**3.2. Модель для циклов «добавления периода».** Сохранив принцип «мягкой пружины» и параметры, присущие модели субгармонических колебаний, построим модель в виде алгоритма (разностной схемы) конструирования последовательности  $x_n$ , учитывающего особенности экспериментальной временной реализации колебаний (см. рис. 2, б).

Будем полагать, что условный период затухающих колебаний в цуге определяется величиной локальных максимумов  $x_i$  (рис. 4, а); в начале цуга  $x_i = x_n$ . Вместо приближения (1) для свободных затухающих колебаний внутри всего цуга будем аппроксимировать каждый участок  $s_1$  реализации тока (см. рис. 1, в, з) следующей зависимостью:

$$x(t) = \exp(-\delta t) (x_i - k t). \quad (4)$$

Время  $t_i$  появления следующего максимума  $x_{i+1}$  связано с амплитудой предыдущего  $x_i$  соотношением  $t_i = T_0(m + \beta x_i)/2$ . Коэффициент  $m$  определяется выбором типа диода и параметрами  $L$  и  $R$  цепи;  $k_i = 4x_i/[T_0(m + \beta x_i)]$  – коэффициент, определяемый из условия  $x(t_i/2) = 0$ .

Длительность во времени участка  $s_2$  реализации достаточно мала, и мы

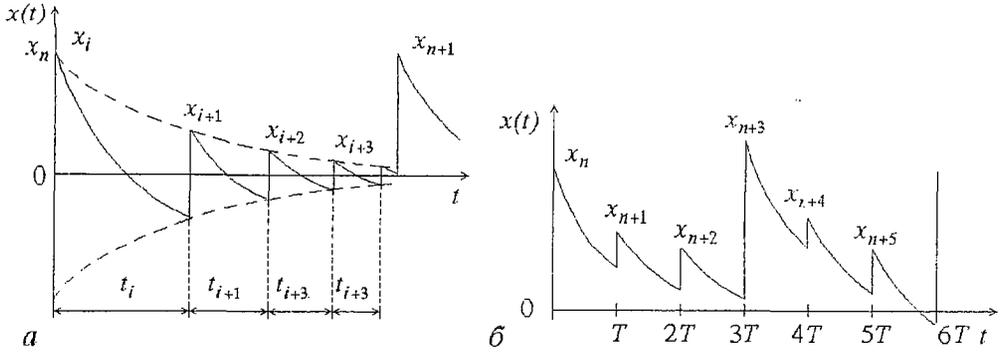


Рис. 4. Временные реализации колебаний в модели для последовательности добавления периода: а – режим  $\Gamma_{1/4}$ ; б – режим  $\Gamma_3$

полагаем ее в модели равной нулю. Тогда в момент времени  $t_i$  имеем резкое увеличение тока до значения  $x_{i+1} = -x(t_i) = x_i \exp(-dt_i)$  (см. рис. 4, а). После этого колебания продолжают по закону (4), но с новыми  $x_i$ ,  $k_i$  и т.д.

Рассмотрим теперь, что происходит в момент импульса внешнего воздействия. Анализ экспериментальных реализаций показывает, что импульс воздействия приводит к увеличению тока в цепи на величину, которая зависит от значения тока на момент прихода импульса. В модели это отражено в зависимости величины скачка тока в цепи от знака токовой переменной на момент воздействия  $t = nT$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x(nT) + A \exp[-b^2 x^2(nT)], & \text{если } x(nT) > 0, \\ x_{n+1} &= x(nT) + A, & \text{если } x(nT) \leq 0, \end{aligned}$$

где  $b$  – коэффициент, зависящий от свойств конкретного диода.

Если в промежутке между двумя импульсами диод не успевает восстановиться, чему соответствует условие  $T < T_0(m + \beta x_n)/2$ , то изменение тока на интервале времени  $T < t < 2T$  до очередного импульса воздействия будет определяться не только значением  $x_{n+1}$ , но и значением  $x_n$  (рис. 4, б). Это связано с тем, что концентрация избыточных неосновных носителей в базе диода, определяемая величиной  $x_n$ , не успевает существенно уменьшиться за время  $T$  и оказывает влияние на величину тока на интервале  $(T, 2T)$  [20, 21].

Экспериментальным фактом является то, что для режимов  $\Gamma_N$  коэффициенты наклона участков реализации, близких к линейным, примерно совпадают (см. рис. 2, б). Учтем это в модели, полагая, что коэффициент  $k$  определяется максимальным значением тока в цуге на интервале  $NT$ , где  $N$  – период базового цикла  $\Gamma_N$ :  $k = 4y_n/[T_0(m + \beta y_n)]$ ,  $y_n$  – максимальное значение тока в цуге, то есть первое  $x_n$  в цуге (см. рис. 4, б). Пересчет  $k$  происходит в том случае, если очередное значение  $x_{n+1}$  больше  $x_n$ , так как это означает начало следующего цуга. Таким образом, можно ввести новую динамическую переменную. Это может быть как  $k$ , так и  $y$ . Так как в промежутке между импульсами  $k$  определяется лишь один раз, становится возможным написание точечного отображения в явном виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \begin{cases} f(x_n, y_n) + A \exp[-b^2 f^2(x_n, y_n)], & \text{если } f(x_n, y_n) > 0, \\ f(x_n, y_n) + A, & \text{если } f(x_n, y_n) \leq 0, \end{cases} \\ y_{n+1} &= \begin{cases} y_n, & \text{если } x_{n+1} \leq x_n, \\ x_{n+1}, & \text{если } x_{n+1} > x_n, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

где  $f(x_n, y_n) = \exp(-d/N)\{x_n - 4y_n/[N(m + \beta y_n)]\}$ .

#### 4. Процедура определения параметров

Для определения параметров моделей (2) и (3) воспользуемся экспериментальной осциллограммой временной реализации тока в цепи. Используя для обозначения тока переменную  $x$ , параметры моделей можно оценить с помощью приведенных на рис. 5 обозначений:

$N = T_0/T$ , где  $T_0$  – условный период колебаний, когда их амплитуда мала,  $T$  – период внешнего воздействия;

$d$  – определяется из экспоненциальной аппроксимации огибающей, выделенной на осциллограмме штрихами;

$A$  – величина скачка тока в цепи во время импульса воздействия;

$\beta = (t_2 - t_1)/(t_1 x_{02} - t_2 x_{01})$ , где  $t_1$  и  $t_2$  – моменты времени, соответствующие некоторому фиксированному значению фазы колебаний (например, экстремуму зависимости  $x(t)$ , как на рис. 5) для различных начальных амплитуд колебаний  $x_{01}$  и  $x_{02}$ , измеренных в тех же единицах, что и  $A$ . Измеренное таким способом значение  $\beta$  для неизохронного маятника зависит от величин  $t_{1,2}/T_0$ , которые целесообразно выбирать такими, чтобы число осцилляций на интервале  $t_{1,2}$  было близко к  $1/N$  в моделируемой реальной системе. Более точное соответствие модельной и экспериментальных реализаций можно получить, если вместо  $\beta$  ввести в уравнения (1) и (2) зависимость  $\beta(x)$ , которую следует предварительно экспериментально получить, вычисляя  $\beta$  при различных отклонениях  $x_0$  от положения равновесия.

Параметр  $N$  можно также определить как отношение частоты воздействия к линейной резонансной частоте; параметр  $d$  – из известного соотношения декремента затухания и добротности  $d = \pi/Q$ , измерив добротность  $Q$  контура при малой амплитуде воздействия; параметр нелинейности  $\beta$  определяется из соотношения

$$\beta = 1/x_0 \{ 2\pi t_l / [T_0 (\arccos [x_1 \exp(dt_l/T_0)/x_0] + 2\pi l)] - 1 \},$$

где  $l$  – целое число осцилляций  $x(t)$  за время  $t_l$  ( $l=4$  для рис. 5).

Дополнительные параметры модели (5)  $m$  и  $b$  определяются свойствами диода и величинами параметров  $L, R$  цепи. Они находятся с помощью аппроксимации экспериментальных зависимостей временных реализаций (см. рис. 2, б) и подгоняются таким образом, чтобы получить качественное соответствие особенностей конфигураций бифуркационных линий в численном и физическом экспериментах.

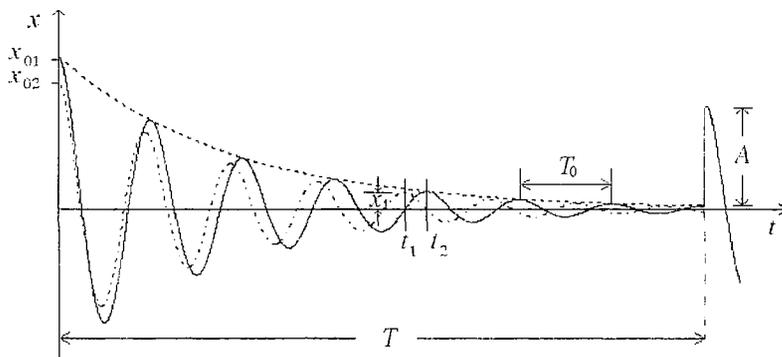
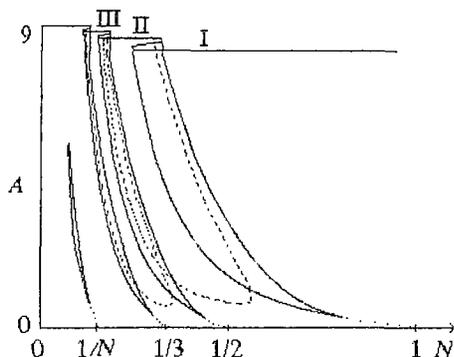


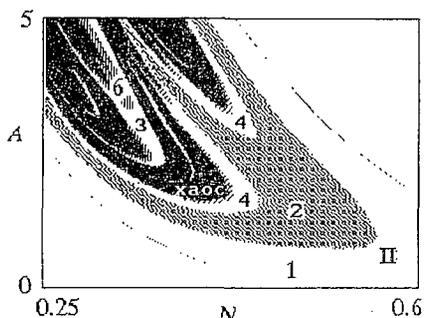
Рис. 5. Временная реализация колебаний, используемая для оценки параметров модели

## 5. Сравнение результатов моделирования с экспериментом

На рис. 6, *a* приведена структура разбиения пространства параметров



*a*

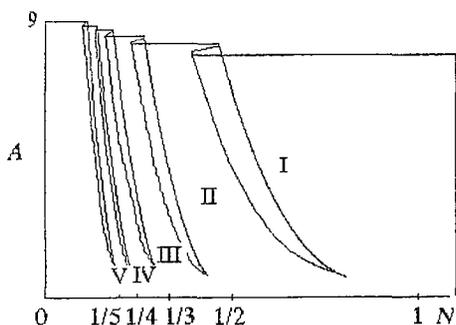


*б*

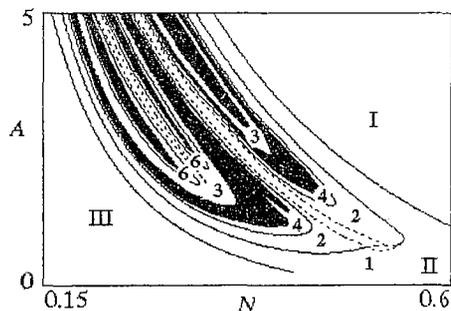
Рис. 6. *a* – Области существования базовых колебательных состояний системы (2) на плоскости параметров воздействия,  $d=0.2$ ,  $\beta=0.2$ . Штриховые линии – линии бифуркации удвоения периода; *б* – области существования различных колебательных режимов на листе II. Цифрами указан период колебаний, область хаоса изображена черным цветом

системы (2) на области существования различных колебательных состояний. Колебания на основе различных циклов  $\Gamma_{1/N}$  изображены лежащими на отдельных листах I, II, ... . Границы соседних листов образуют на плоскости конфигурацию «две складки с одной или двумя точками сборки»; при увеличении диссипации (величины  $R$ ) площадь, ограниченная этими линиями, сокращается. Внутри области перекрытия листов имеет место бистабильность, когда попадание на тот или иной режим определяется начальными условиями. Структура отдельного листа представлена на рис. 6, *б* и содержит иерархию конфигураций, известных под названием «crossroad area». Они представляют собой окрестность точки сборки, от которой отходит пара линий складок (линий седло–узловой бифуркации), а по берегам складок идут линии удвоения периода.

На рис. 7 для сравнения с результатами моделирования приведены экспериментальные карты режимов  $RL$ -диод цепи при ее возбуждении импульсами тока. Как видно из рисунков, наблюдается достаточно хорошее качественное совпадение поведения реальной системы и модели в области частот воздействия ниже линейной резонансной ( $N < 1$ ). Так, близки форма и расположение областей существования циклов одинакового периода, совпадает месторасположение линий жестких переходов и некоторые другие детали.



*a*



*б*

Рис. 7. Экспериментальные плоскости параметров  $RL$ -диод цепи в области субгармонических колебаний

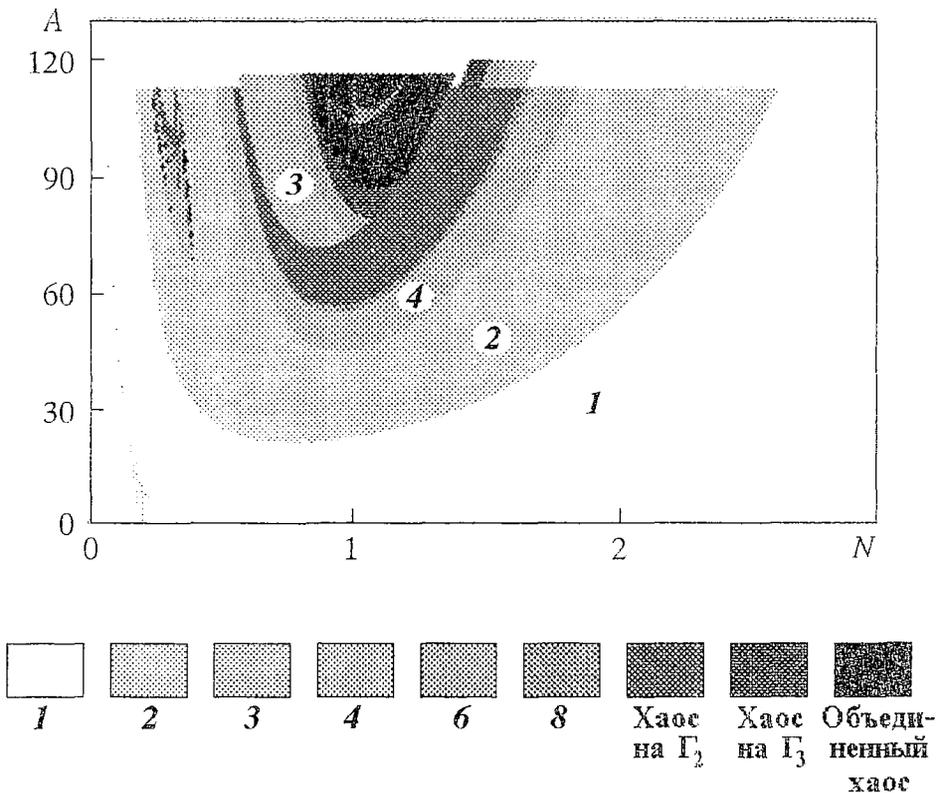


Рис. 8. Устройство плоскости параметров воздействия модели (5),  $d=0.4$ ,  $\beta=0.2$ ,  $b=0.15$ ,  $m=10$

Несмотря на свою простоту, предлагаемая модель в области субгармонических колебаний отражает такие свойства контура, как существование нелинейного резонанса, мультистабильность, гистерезис, хаос. Интересно, что в области  $N < 1$  модель отражает устройство пространства параметров  $RL$ -диод цепи и при гармоническом внешнем воздействии.

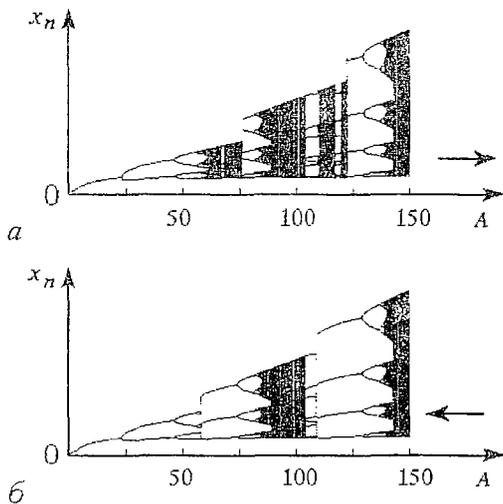


Рис. 9. Бифуркационные диаграммы  $x_n=f(A)$ , полученные при различных направлениях (указано стрелкой) изменения параметра  $A$ ;  $N=1$ ,  $d=0.4$ ,  $\beta=0.2$ ,  $b=0.15$ ,  $m=10$

Результаты численного исследования модели «добавления периода» (5) представлены на рис. 8–10. На рис. 8 изображена карта динамических режимов модели. Как видно из графика, модель отражает существование циклов «добавления периода» и явление бистабильности, когда при одних и тех же значениях параметров в зависимости от начальных условий колебания совершаются либо на листе режима  $\Gamma_2$ , либо на листе  $\Gamma_3$ . Модель также демонстрирует кризисы хаотических аттракторов и перемежаемость. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными (см. Приложение 2 и рис. П, в) свидетельствует о качественном совпадении модельной и реальной систем в области колебаний на основе циклов  $\Gamma_N$ . В частности, модель отражает харак-

терную для контуров с диодами типа аб деформацию листов режимов  $\Gamma_3, \Gamma_4, \dots$ , имеющую место при достаточно малых потерях, обнаруженную и исследованную в работе [8].

Существование в модельной системе (5) последовательности «добавления» периода и связанной с ней бистабильности может быть наглядно продемонстрировано с помощью бифуркационных диаграмм  $x_n=f(A)$  (см. рис. 9) и  $x_n=f(N)$  (см. рис. 10). Вид этих бифуркационных диаграмм качественно хорошо согласуется с экспериментальными, а наличие бистабильности иллюстрируется сопоставлением диаграмм, полученных при различных направлениях изменения управляющего параметра.

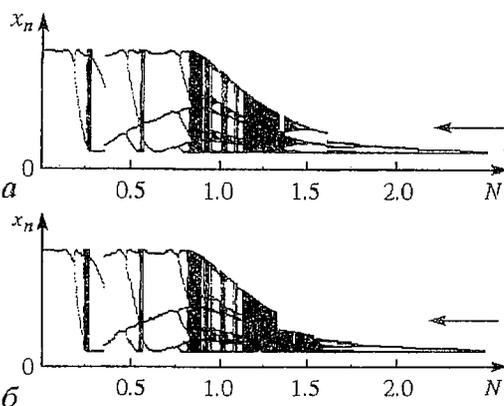


Рис. 10. Бифуркационные диаграммы  $x_n=f(N)$ , полученные при различных направлениях (указано стрелкой) изменения параметра  $N$ ;  $A=110, d=0.4, \beta=0.2, b=0.15, m=10$

### Заключение

Предложены две модели неавтономной  $RL$ -диод цепи, качественно отражающие сложную динамику этой диссипативной осцилляторной системы в широкой области параметров. Первая модель базируется на квазигармоническом характере процессов в резонаторах с диодами, нелинейная емкость которых связана с процессами в барьере, а эквивалентная активная проводимость незначительна. Вторая модель отражает релаксационный характер изменения переменных во времени при наличии инжекции неосновных носителей в базу диода.

Возможно объединение этих моделей, если при малых амплитудах колебаний ввести пороговое значение амплитуды, ниже которого колебания будут происходить по квазигармоническому закону. Однако реально изменение вида временной реализации от «релаксационного» к «квазигармоническому» при уменьшении амплитуды происходит плавно.

Достоинством предложенных моделей является ясный физический смысл входящих в них параметров и наличие процедуры их экспериментального определения. Предложенные модельные отображения расширяют круг моделей рассматриваемой популярной радиофизической системы.

### Приложение 1

#### Связь характерных типов движений в исследуемой системе с процессами в диодах

В данной работе не ставилась цель связать особенности нелинейной динамики исследуемой цепи с полупроводниковой структурой диода и принятыми в технике характеристиками этих элементов. Этот вопрос требует отдельного описания. Отметим лишь, что, во-первых, вследствие большого технологического разброса параметров, эти свойства могут существенно различаться даже для диодов одной промышленной серии, партии выпуска и упаковки; во-вторых, из 40 марок использованных диодов для демонстрации выделенных «чистых» типов собственной динамики контура можно предложить в качестве эталонных: кремниевый диод КД213А – тип а, германиевый фотодиод ФД-7Г – тип б. К типу а можно отнести также, например, элементы КТ908Б, ФД-24К, КТ818БМ; к типу б – КД105, Д210. Примерами полупроводниковых элементов исключенного нами

из рассмотрения диссипативного типа являются диоды КД503, ГД402, Д9. Примерами диодов класса **аб** являются также Д215А, Д242, КД202К, КД206В.

Экспериментальные исследования дают основания считать, что тип **а** собственной динамики определяется емкостными свойствами  $p-n$  перехода. В цепи с поведением типа **б** участки медленного движения связаны с существованием в базе диода инжектированного заряда неосновных носителей, а участки быстрого движения – с возбужденным эдс самоиндукции в катушке контура в момент резкого восстановления диода. Этот тип поведения контура с диодом может быть истолкован как ударное возбуждение колебаний скачком тока восстановления и переход цепи в аperiodическое состояние до следующего скачка.

Для получения дополнительной информации на этот счет, а также в связи с длительной дискуссией по поводу механизмов в нелинейном элементе, ответственных за стохастизацию колебаний [3–5,16,20], рассмотрим нелинейные колебания в  $RL$ -диод цепи, предприняв меры против инжекции неосновных носителей. Для этого или обеспечим на диоде отрицательное напряжение смещения, стараясь, чтобы в процессе колебаний напряжение на нем не имело положительных значений, или используем в качестве нелинейного элемента цепи два диода, включенных навстречу друг другу. Результаты данных экспериментов сводятся к следующему:

- в системе с одним диодом при наличии отрицательного напряжения смещения и гармонического внешнего воздействия удастся обеспечить возбуждение сложных колебаний, включая хаотические, на базе циклов  $\Gamma_{1/N}$  и  $\Gamma_1$ , даже если напряжение на диоде всегда имеет обратную полярность;

- при встречном включении диодов сложная динамика системы имеет место лишь при импульсном периодическом воздействии и только на базе циклов вида  $\Gamma_{1/N}$ . Симметрия системы в этом случае накладывает свою специфику и удвоению периода колебаний предшествует бифуркация потери симметрии исходного цикла. Структура разбиения пространства параметров воздействия на области сложных колебаний имеет конфигурацию, характерную для циклов вида  $\Gamma_{1/N}$ .

Данные результаты позволяют выделить решающую роль явления инжекции и конечного времени существования неосновных носителей для возбуждения только циклов последовательности добавления периода ( $\Gamma_N$  при  $N > 2$ ), существующих в исследуемой системе при частотах воздействия, близких или больших линейной резонансной частоты контура. Это позволяет говорить об излишней категоричности выводов, сделанных в работе [20], о том, что явление стохастизации колебаний определяется инжекцией носителей.

## Приложение 2

### Структура бифуркационных множеств в пространстве параметров возбуждения и диссипации контура с диодом

На рис. П представлен качественный вид типичной структуры разбиения пространства параметров периодически возбуждаемой  $RL$ -диод цепи на области существования и эволюции различных колебательных состояний. В качестве параметров используются амплитуда  $V$  и частота  $f$  периодического воздействия, а также величина сопротивления резистора  $R$ , определяющая линейную диссипацию. Частота воздействия нормирована на частоту линейного (малосигнального  $V \ll 1$ ) резонанса  $f_1$ . При этом используются следующие обозначения: сплошными линиями отмечены линии безгистерезисных (мягких) бифуркационных переходов, пунктирными – линии жестких переходов, заштрихованы области хаоса, а цифры указывают период колебаний в единицах периода воздействия.

Сечения пространства параметров (см. рис. П, *а*) плоскостями  $R = \text{const}$  и  $f = \text{const}$  представлены на рис. П, *б*, *в*. При движении вдоль линии *А* (см. рис. П, *е*) смена базовых циклов представляет последовательность добавления периода ( $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3 \rightarrow \dots$ ).

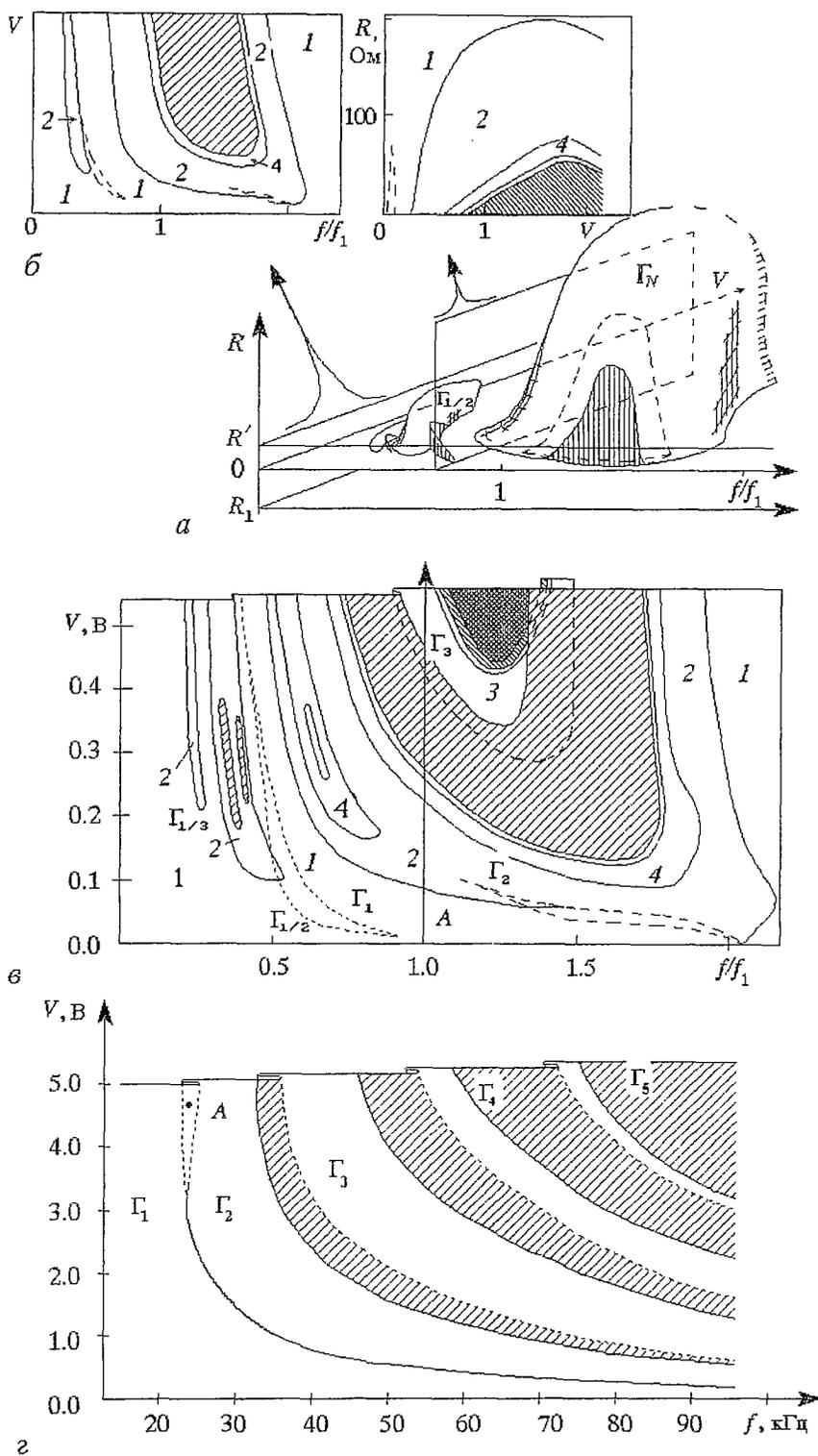


Рис. 11. *a-в* – качественный вид структуры разбиения пространства параметров контура с диодом типа *аб* на области существования различных состояний; *2* – структура плоскости параметров  $V-f$  контура с диодом типа *б* (фотодиодом ФД-7Г при  $U_{CM}=0$  и отсутствии постоянной подсветки)

Динамика системы упрощается с ростом линейных потерь, причем циклы  $\Gamma_{1/N}$  более критичны к диссипации (с уменьшением  $1/N$  максимальные значения  $R$ , при которых еще возможно удвоение периода цикла, уменьшаются).

При движении в пространстве трех параметров циклы могут переходить один в другой мягко. Области их существования в этом случае можно разделить лишь условно, взяв в качестве пограничных точек значения параметров, соответствующих максимальному размаху вынужденных движений (резонансу). При жестком переходе имеет место гистерезис. Границами областей существования различных циклов на плоскости параметров в последнем случае являются линии складок, а резонансная кривая имеет классический для нелинейного резонанса вид.

Нелинейные свойства диодов следующим образом отражаются на характерном виде областей существования различных колебаний:

1) для диодов групп **a** и **аб** при  $(f/f_1) < 1$  существуют режимы, развивающиеся на базе циклов  $\Gamma_{1/N}$ , которые занимают левую нижнюю часть плоскости параметров воздействия. В более высокочастотной части плоскости параметров воздействия, где эволюционируют циклы последовательности «добавления периода»  $\Gamma_N$ , бифуркационная структура (см. рис. П, в) аналогична впервые описанной в [8]. Можно предположить, что в общем случае в литературе описаны эксперименты с диодами именно этой группы;

2) для диодов группы **б** сложные колебания развиваются лишь на базе циклов  $\Gamma_N$ , как при импульсном, так и при синусоидальном воздействиях. При этом структура разбиения плоскости параметров воздействия ( $V, f$ ) имеет вид, представленный на рис. П, г (для диода ФД-7Г). Характерной особенностью представленной картины является горизонтальность (независимость от частоты) нижних границ листов, на которых эволюционируют режимы на базе конкретного  $\Gamma_N$  при достаточно больших частотах воздействия. При этом левые границы листов близки к гиперболам  $V \approx \text{const}(1/f) = \text{const} \cdot T$ . При движении из точки А (см. рис. П, г), где имеет место цикл  $\Gamma_2$ , в сторону больших  $f$  цикл претерпевает бифуркации удвоения периода, а при критических значениях параметров переходит к хаосу с типичными для фейгенбаумовских систем перестройками в закритической области. Закритические значения параметров на рисунке заштрихованы, бифуркационные линии на листах не указаны. При дальнейшем движении по плоскости параметров происходит перескок с одного листа на другой – от хаоса на базе  $\Gamma_2$  к циклу  $\Gamma_3$ , который с ростом  $f$  повторит сценарий эволюции предшественника, и т.д. Зоны бистабильности в областях перекрытия листов бывают очень узкими. В линейных режимах добротность контура с диодами этого типа столь низка, что в эксперименте даже не удастся уверенно выделить резонансную частоту.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96-02-16755, а также при поддержке INTAS, грант 93-2492-ext, в рамках программы Международного центра фундаментальной физики в Москве.*

### Библиографический список

1. Linsay P.S. Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol.47, № 19. P. 1349.
2. Каплан А.Е., Кравцов Ю.А., Рылов В.А. Параметрические генераторы и делители частоты // М.: Сов.радио, 1966.
3. Testa J., Perez J., Jeffries C. Evidence for universal behavior of a driven nonlinear oscillator // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.48, № 11. P. 714.
4. Hunt E.R. Comment on driven nonlinear oscillator // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.49, № 14. P. 1054.
5. Testa J., Perez J., Jeffries C. Testa, Perez and Jeffries respond // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.49, № 14. P. 1055.

6. *Jeffries C., Perez J.* Observation of a Pomeau–Manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator // *Phys. Rev. A.* 1982. Vol.26, № 4. P. 2117.
7. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П., Яворская Е.Е.* Переход к хаосу в нелинейном осцилляторе при импульсном периодическом воздействии // *Лекции по электронике СВЧ и радиофизике.* Саратов. 1984. Кн.2. С. 36.
8. *Купчатов А.А.* Особенности сложной динамики неавтономного нелинейного контура // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1990. Т.33, № 2. С. 182.
9. *Baxter J.H., Vocko M.F., Douglass D.H.* Behavior of a nonlinear resonator driven at subharmonic frequencies // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.41, № 2. P. 619.
10. *Balberg I., Arbell H.* Temperature as a bifurcation parameter in nonlinear electronic circuits // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 1. P. 110.
11. *Linsay P.S.* Nonlinear dynamics in driven and autonomous electronic circuits // *Nonlinear Dynamics in Circuits / Eds. T. Carroll and L. Pecora.* World Scientific. 1995. P. 4.
12. *Bronson S.D., Dewey D., Linsay P.S.* Self-replicating attractor of a driven semiconductor oscillator // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol.28. P.1201.
13. *Klinker T., Meyer–Ilse W., Lauterborn W.* Period doubling and chaotic behavior in a driven Toda oscillator // *Phys. Lett. A.* 1984. Vol.101, № 8. P. 371.
14. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // *Радиотехника и электроника.* 1987. Т.32, № 12. С. 2558.
15. *Buskirk R., Jeffries C.* Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol.31, № 5. P. 3332.
16. *Rollins R.W., Hunt E.R.* Exactly solvable model of a physical system exhibiting universal chaotic behavior // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol.49, № 18. P. 1295.
17. *Perez J.* Mechanism for global features of chaos in a driven nonlinear oscillator // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol.32, № 4. P. 2513.
18. *Yoon T.H., Song J.W., Shin S.Y., Ra J.W.* One-dimensional map and its modification for periodic–chaotic sequence in a driven nonlinear oscillator // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol.30, № 6. P. 3347.
19. *Matsumoto T., Chua L.O., Tanaka S.* Simplest chaotic nonautonomous circuit // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol.30. P. 1155.
20. *Hunt E.R., Rollins R.W.* Exactly solvable model of a physical system exhibiting multi-dimensional chaotic behavior // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol.29, № 2. P. 1000.
21. *Su Z., Rollins R.W., Hunt E.R.* Simulation and characterization of strange attractors in driven diode resonator systems // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol.40, № 5. P. 2698.
22. *Farmer J.D., Sidorowich J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol.59, № 8. P. 845.
23. *Casdagli M.* Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D.* 1989. Vol.35. P. 335.
24. *Breeden J.L., Hubler A.* Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.42, № 10. P. 5817.
25. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравицов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // *Радиотехника и электроника.* 1994. Т.39, В.2. С. 269.
26. *Abarbanel H.D.I., Brown R., Kudtke J.B.* Prediction in chaotic nonlinear systems: methods for time series with broadband Fourier spectra // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.41, № 4. P. 1782.
27. *Brown R., Rulkov N.F., Tracy E.R.* Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol.49, № 5. P. 3784.
28. *Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Моделирование динамических систем по экспериментальным данным // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т.3, № 3. С. 112.
29. *Gencay R., Dechert W.D.* An algorithm for the  $n$  Lyapunov exponents of an  $n$ -dimensional unknown dynamical system // *Physica D.* 1992. Vol.59. P. 142.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 5.03.97  
после переработки 22.04.97

## LARGE DISCRETE NONLINEAR MODELS OF PERIODICALLY DRIVEN $RL$ -DIODE CIRCUIT

*B.P. Bezruchko, A.U. Zhalnin, M.D. Prokhorov, Ye.P. Seleznev*

By experimental observables of natural and driven oscillations the point maps modeling complicated dynamics of periodically driven diode resonator are constructed and investigated. The place of the proposed maps among other mathematical models of this popular radiophysical system is discussed.



*Безручко Борис Петрович* – родился в 1946 году, окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Профессор кафедры электроники и волновых процессов СГУ; ведущий научный сотрудник (по совместительству) Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН; доктор физико-математических наук. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментальной наблюдаемой. Имеет около 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



*Жалнин Алексей Юрьевич* – родился в Балашове (1977). Студент второго курса Колледжа прикладных наук. Область научных интересов – нелинейная динамика, численное моделирование сложных систем.



*Прохоров Михаил Дмитриевич* – родился в Саратове (1968). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1992). Работает младшим научным сотрудником в Саратовском филиале института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах и их математическое моделирование. Имеет 20 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



*Селезнев Евгений Петрович* – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990). Старший научный сотрудник Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН. Автор и соавтор 40 научных работ. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах.



## ДИНАМИКА ОТОБРАЖЕНИЙ С ПОРОГОВЫМ ТИПОМ СВЯЗИ

*А.А. Короновский, В.И. Пономаренко, Д.И. Трубецков*

В данной работе рассматривается система логистических отображений с принципиально новым типом связи, поведение которой существенным образом отличается от поведения логистических отображений с традиционными типами связей. Исследование динамики системы проведено как численно, так и с помощью натурального эксперимента. Получены двухпараметрические карты режимов на плоскости управляющих параметров.

1. Системы с дискретным временем весьма широко исследуются физиками и математиками [1,2] и используются для описания процессов самой различной природы: дискретные отображения весьма успешно описывают не только физические, но и экологические, экономические и социальные процессы [3–5]. Внимание к системам с дискретным временем определяется их относительной простотой и возможностью их довольно быстрого исследования в широком диапазоне изменения значений управляющих параметров. Более того, именно на языке систем с дискретным временем возможно наиболее понятное и «прозрачное» объяснение природы хаотической динамики, сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим. В этом смысле логистическое отображение играет фундаментальную роль в теории критических явлений у порога динамического хаоса [6]. Кроме того, на основе отображений, в том числе и на основе логистического отображения, строятся широкие классы связанных отображений, цепочек и решеток отображений, которые моделируют распределенные системы и играют важную роль в понимании динамики подобных систем [1].

2. В этой работе мы рассмотрим динамику системы, описываемой связанными логистическими отображениями, в поведении которых принципиальную роль играют кусочно–линейные характеристики. Заметим, что простейшие кусочно–линейные отображения очень хорошо изучены и в определенном смысле являются классическими, наряду с логистическим отображением (например, преобразование пекаря [7], «остроконечное» преобразование [8]). Более того, классическое логистическое отображение при определенном значении параметра при помощи взаимно однозначного преобразования может быть преобразовано к виду кусочно–линейного отображения [9]. В этой же работе будут рассматриваться логистические отображения с принципиально новым типом связи, который мы называем «пороговой связью». Кусочно–линейная характеристика и обеспечивает пороговый характер взаимодействия отображений и является принципиально

важной для всей динамики системы в целом. Заметим, что поскольку тип связи является принципиально новым, то одним из важных вопросов будет следующий: насколько существенным окажется влияние нового механизма связи? Иными словами, будет ли поведение хорошо изученных логистических отображений, связанных пороговой связью, каким-либо существенным образом отличаться от поведения тех же самых логистических отображений с «традиционными» типами связей (скажем, с диссипативной связью), которые в настоящее время широко исследуются в литературе (см., например, [10]).

Для начала рассмотрим два логистических отображения, двунаправленным образом связанных друг с другом

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n[a - x_n \pm s \cdot \text{sign}(y_n - y_s)], \\y_{n+1} &= y_n[a - y_n \pm s \cdot \text{sign}(x_n - x_s)],\end{aligned}\tag{1}$$

Выбор параметров  $a$  и  $s$  осуществляется таким образом, чтобы каждое из логистических отображений по отдельности не демонстрировало никакой сложной динамики. Когда же рассматриваются связанные отображения, то поведению каждого из них соответствует устойчивая неподвижная точка ( $a - (1 \pm s)$ ), если в другом отображении значение переменной меньше некоторого порога  $x_s$  (или  $y_s$ ). Как только значение переменной (например  $x_n$ ) превышает этот порог, в другом логистическом отображении притягивающей неподвижной точкой становится ( $a - 1 \pm s$ ) (из-за действия слагаемого  $\text{sign}(x_n - x_s)$ ). Таким образом, если попытаться в нескольких словах кратко описать суть процессов, происходящих в системе, описываемой (1), то можно сказать, что сущностью динамики системы являются переходные процессы. Каждое логистическое отображение стремится к устойчивому состоянию равновесия, и в этом случае, если слагаемые  $s \cdot \text{sign}(x_n - x_s)$  и  $s \cdot \text{sign}(y_n - y_s)$ , отвечающие за взаимосвязь отображений, взяты с одинаковыми знаками, вся система (1) весьма быстро приходит в одно из двух состояний равновесия (в зависимости от начальных условий). Наиболее же интересен случай, когда в отображениях (1) слагаемые, ответственные за связь, входят с разными знаками. В этом случае переходным процессам в каждом из отображений (разумеется, при соответствующих значениях параметров) не суждено закончиться из-за воздействия другого отображения. В рассматриваемом отображении происходит скачкообразная смена устойчивой неподвижной точки, в результате чего в системе реализуются колебательные режимы. Именно поэтому дальнейшее рассмотрение мы проводим для системы двух логистических отображений (1), в которую слагаемые связи входят со знаком «-» в первое отображение и со знаком «+» во второе.

Заметим, что исследовать систему (1) можно по-разному: во-первых, конечно же, можно осуществить численное моделирование (что, разумеется, было проведено нами в первую очередь). Однако, существует еще один способ изучения подобных систем, у которого есть ряд своих преимуществ. Речь идет об исследовании (1) с помощью радиотехнической модели, динамика которой описывается с помощью тех же самых логистических отображений, связанных двунаправленной пороговой связью. Именно при проведении натурального эксперимента появляется возможность исследования систем в реальном времени, что иногда позволяет существенно сократить трудоемкость проводимых исследований. Так натуральный эксперимент оказывает неоценимую услугу при исследовании систем с сильной мультистабильностью [11]. Более того, совпадение результатов натурального и численного экспериментов позволяет с большей степенью доверия относиться к полученным результатам.

Мы провели как численный, так и натуральный эксперименты и, забегая вперед, сразу отметим, что результаты этих экспериментов находятся в очень хорошем соответствии друг с другом.

**3.** При разработке радиотехнической модели для удобства в (1) была сделана

замена переменных  $X_n=5x_n$ ,  $Y_n=5y_n$ . При этом значения динамических переменных увеличиваются в 5 раз и становятся более удобными для экспериментального анализа. Сделав такую подстановку в (1), получаем

$$X_{n+1} = 1/5 X_n [A - X_n - S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)],$$

$$Y_{n+1} = 1/5 Y_n [A - Y_n + S \cdot \text{sign}(X_n - X_s)],$$

где новые параметры отличаются от старых в 5 раз, то есть  $A=5a$ ,  $S=5s$ ,  $X_s=5x_s$ ,  $Y_s=5y_s$ .

Радиотехническая схема соответствует системе отображений (2) и представляет собой два канала ( $X$  и  $Y$ ), каждый из которых моделирует динамику одного из уравнений (2). Блок-схема радиотехнической модели имеет вид, показанный на рис. 1. Рассмотрим его работу на примере канала  $X$ . Канал  $X$  содержит нелинейный блок, формирующий зависимость  $X_{n+1}=f(X_n)$  и линейный блок, в котором осуществляется аналоговое запоминание значений  $X_n$  и  $X_{n+1}$ . Управление электронными ключами 6 и 8 линейного блока осуществляется от тактового генератора 4, причем на ключ 6 сигнал генератора подается через инвертор 5, что обеспечивает противофазное замыкание ключей (когда ключ 6 замкнут, ключ 8 разомкнут, и наоборот). Тактовый генератор является общим для каналов  $X$  и  $Y$ . В процессе работы линейный блок обеспечивает запоминание выходного напряжения нелинейного блока и трансляцию его на вход нелинейного блока, создавая таким образом изменение напряжений на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ , соответствующее дискретной последовательности  $X_{n+1}=f(X_n)$ .

Нелинейный блок содержит компаратор 1, суммирующий усилитель 2 и умножитель 3, а также элементы регулировки параметров  $Y_s$ ,  $A$ ,  $S$ . На один вход компаратора 1 подается постоянное напряжение, соответствующее параметру  $Y_s$ , а на другой вход – переменная  $Y$ , вырабатываемая вторым каналом схемы. Такое включение соответствует связи, действующей со стороны второго канала на первый, со знаком «-». Напряжение на выходе компаратора соответствует функции  $\text{sign}(Y_n - Y_s)$ . Размах выходного напряжения регулируется при помощи резистивного делителя. Результирующее напряжение, равное  $S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)$ , подается на один из входов суммирующего усилителя 2. На второй вход суммирующего усилителя подается регулируемое напряжение, соответствующее параметру нелинейности  $A$ , а на третий вход – напряжение с выхода линейного блока, соответствующее переменной  $X$ . Напряжение с выхода суммирующего усилителя, равное  $A - X + S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)$ , подается на один из входов аналогового умножителя 3, а на другой его вход подается напряжение  $X$ . С выхода его снимается напряжение, равное  $1/10 X [A - X + S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)]$ . Усилитель 10 имеет

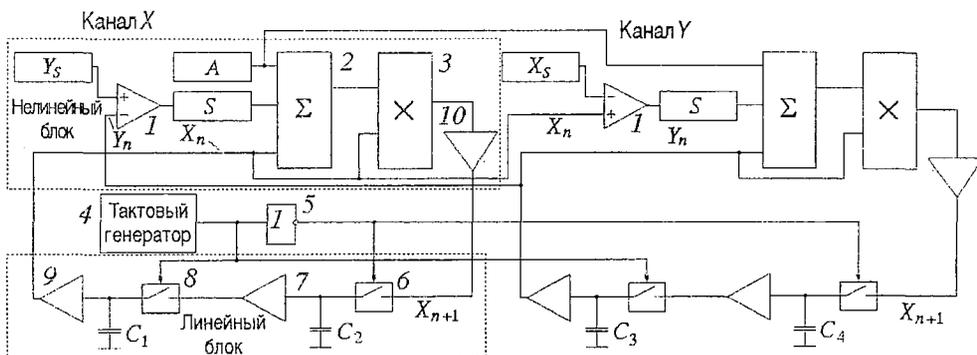


Рис. 1. Блок-схема радиотехнической модели

коэффициент усиления, равный двум, и таким образом, напряжение на его выходе равно

$1/5X[A-X+S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)]$ . Канал  $Y$  отличается от канала  $X$  подключением входов компаратора, при котором реализуется пороговая связь, действующая со стороны канала  $X$  на канал  $Y$  со знаком «+».

4. В ходе численного эксперимента нами было построено несколько карт (рис. 2) на плоскости управляющих параметров  $x_s$  и  $y_s$  (при фиксированных значениях параметров  $a$  и  $s$ ), иллюстрирующих поведение рассматриваемой

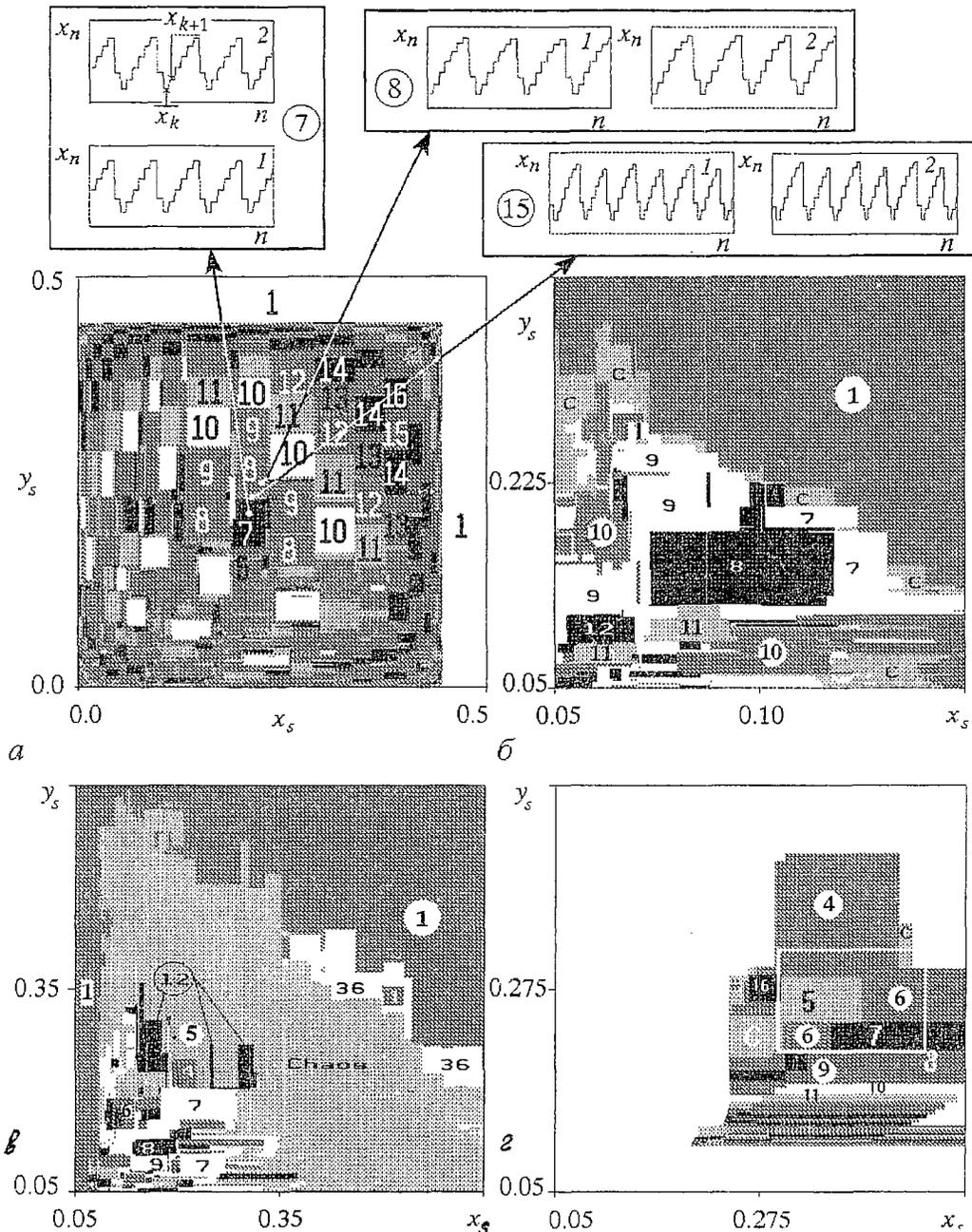


Рис. 2. Карта режимов колебаний при различных значениях параметров  $a$  и  $s$ :  $a - 1.2, 0.25$ , область параметров разделена на «равнину» и «шахматную доску»;  $b - 1.2, 0.5$ ;  $c - 1.4, 0.5$ ;  $d - 1.6, 0.5$ , на плоскости параметров появляются «дыры», где невозможно существование колебаний

системы. Результаты, полученные в ходе натурального и численного экспериментов, находятся в хорошем соответствии друг с другом и результаты натурального эксперимента полностью подтверждают (и повторяют) результаты эксперимента численного. Уже одного беглого взгляда на рисунки достаточно, чтобы понять, что динамика, демонстрируемая системой связанных логистических отображений с пороговой связью (каждое из которых по отдельности вообще не проявляет никаких колебательных режимов), весьма разнообразна: в случае, изображенном на рис. 2, *а*, плоскость управляющих параметров оказывается разделенной на две большие области – «равнину», на которой реализуются устойчивые колебания периода 1, и «шахматную доску», которая, в свою очередь, оказывается разбитой на прямоугольные области, внутри которых реализуются свои колебательные режимы. Причем, для «шахматной доски» можно выделить следующую интересную закономерность: в центре находятся колебательные режимы с малыми периодами колебаний, а при продвижении к краям «доски» происходит увеличение периода колебаний на единицу. Между областями, соответствующими колебаниям периода  $n$  и  $(n-1)$ , находятся более тонкие режимы колебаний более высоких порядков, причем для этих режимов, лежащих между режимами колебаний периода  $n$  и  $(n-1)$ , самым низким является период колебаний  $(2n-1)$ . Следует отметить, что подобный сценарий реализуется и во многих других системах как с дискретным, так и с непрерывным временем [4, 12]. На этом же рисунке показаны «временные реализации»  $x_n = x_n(n)$ , полученные в ходе натурального эксперимента для колебательных режимов (кривые 1) и соответствующие им зависимости для тех же самых режимов численного эксперимента (кривые 2). На рис. 3 приведены фазовые портреты, соответствующие характерным режимам колебаний, которые реализуются при значениях параметров  $a=1.2$ ,  $s=0.25$  и которые иллюстрируют вышеописанную закономерность: при увеличении параметра колебательный режим периода 7 (см. рис. 3, *а* с «временной реализацией» на рис. 2, *а*) сменяется режимом периода 22 (рис. 3, *б*), затем возникает режим периода 15 (рис. 3, *в*), потом режим периода 8 (рис. 3, *г*). Между режимами периодов 8 (рис. 3, *г*) и 9 (рис. 3, *е*) лежит режим периода 17 (рис. 3, *д*), а между режимами периодов 14 (рис. 3, *ж*) и 15 (рис. 3, *и*) находится режим периода 29 (рис. 3, *э*).

Заметим, что по мере приближения к краям «шахматной доски», зоны колебательных режимов становятся все уже и уже и вышеописанный механизм добавления периода колебаний начинает нарушаться. Другой особенностью поведения системы двух логистических отображений с двунаправленной пороговой связью при данных значениях параметров является полное отсутствие хаотических колебаний. Все колебательные режимы однозначно идентифицируются как сложнопериодические.

При изменении значений параметров  $a$  и  $s$  ситуация существенно образом изменяется. Так, при  $a=1.2$ ,  $s=0.5$  (см. рис. 2, *б*) «шахматная доска» уменьшается в размерах, ее внутренняя структура нарушается: теперь уже не удастся проследить закономерность, подобную той, о которой говорилось выше – области периодических колебаний беспорядочно разбросаны по плоскости управляющих параметров. Рядом с областями периодических колебаний находятся области непериодических колебаний, идентифицировать колебательные режимы в которых ни по виду фазового портрета, ни по «временным реализациям» невозможно. Ситуация усугубляется еще и тем, что не удастся выявить классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим (к примеру, сценария Фейгенбаума), которые позволяли бы с уверенностью утверждать, что непериодические режимы являются хаотическими: система переходит с одного листа, где реализуется периодический режим, на другой, где существует непериодический режим, скачком, характерным является существование гистерезисных складок на плоскости управляющих параметров и, соответственно, мультистабильность. Более серьезное исследование показывает, что эти области на плоскости управляющих параметров все-таки соответствуют хаотическим колебаниям: максимальный ляпуновский показатель для таких колебаний существенно положителен. Так, при  $a=1.4$ ,  $s=0.5$   $x_3=0.0845$ ,  $y_3=0.1580$

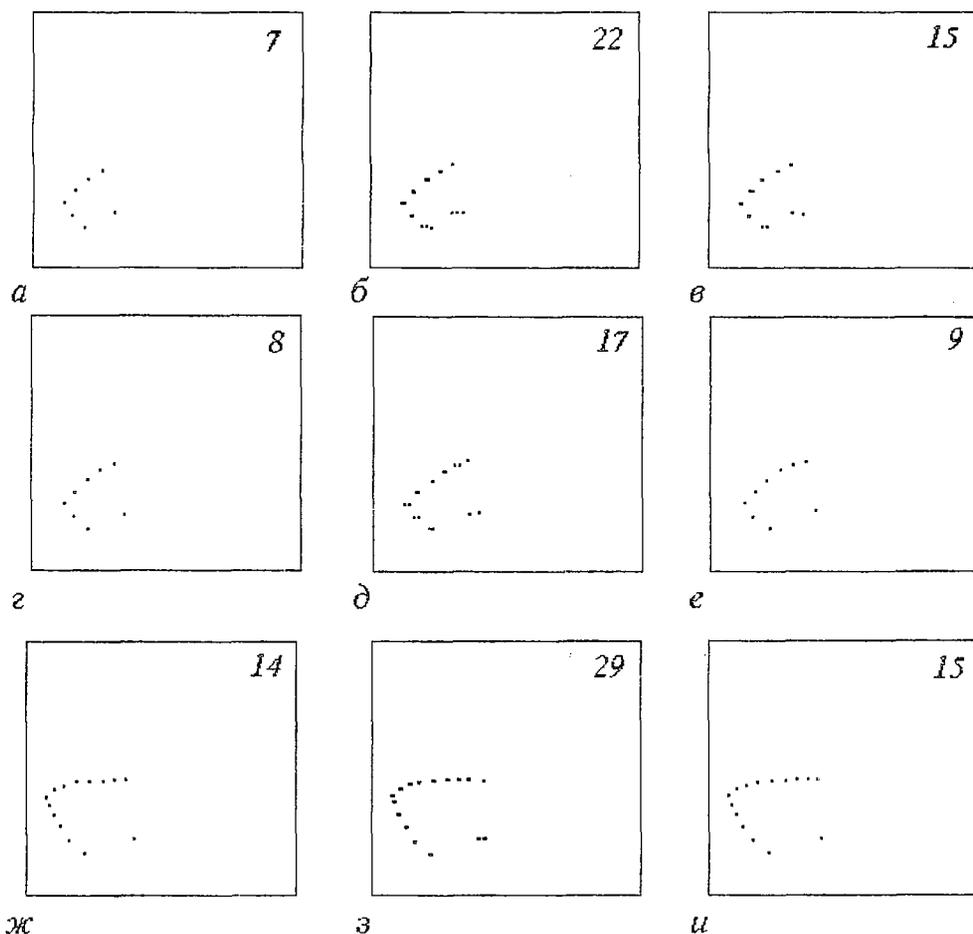


Рис. 3. Фазовые портреты некоторых характерных режимов колебаний при  $a=1.2$ ,  $s=0.25$ : а – период 7,  $x_s=0.2379$ ,  $y_s=0.2379$ ; б – период 22,  $x_s=0.2412$ ,  $y_s=0.2548$ ; в – период 15,  $x_s=0.2412$ ,  $y_s=0.2593$ ; г – период 8,  $x_s=0.2469$ ,  $y_s=0.2784$ ; д – период 17,  $x_s=0.2457$ ,  $y_s=0.3133$ ; е – период 9,  $x_s=0.2457$ ,  $y_s=0.3256$ ; ж – период 14,  $x_s=0.3695$ ,  $y_s=0.3695$ ; з – период 29,  $x_s=0.3695$ ,  $y_s=0.3706$ ; и – период 15,  $x_s=0.3695$ ,  $y_s=0.3796$

максимальный ляпуновский показатель равен  $\lambda_{\max}=+0.64$ . На рис. 4 приведены некоторые типичные фазовые портреты для хаотических колебаний.

С дальнейшим увеличением значений управляющих параметров  $a$  и  $s$  ситуация еще больше усугубляется: все то, что осталось от «шахматной доски», еще больше сжимается, а область, соответствующая хаотическим колебаниям, увеличивается (см. рис. 2, в). Дальнейшее увеличение параметров  $a$  и  $s$  приводит к тому, что на плоскости управляющих параметров  $(x_s, y_s)$  появляются «дыры», в которых решения (1) «разлетаются» – последовательность значений  $\{x_n, y_n\}$  неограниченно возрастает по модулю (см. рис. 2, г).

Еще одной характерной особенностью в поведении рассматриваемой системы двух логистических отображений с двунаправленной пороговой связью является мультистабильность (о чем уже вскользь упоминалось выше), которая проявляется с увеличением параметров  $a$  и  $s$ . При одних и тех же значениях управляющих параметров, в зависимости от предыстории движения по карте режимов, могут реализоваться несколько различных колебательных режимов. На рис. 5 воспроизведен лишь небольшой фрагмент плоскости управляющих параметров, приведенной на рис. 2, г (на рисунке этот фрагмент обведен рамкой).

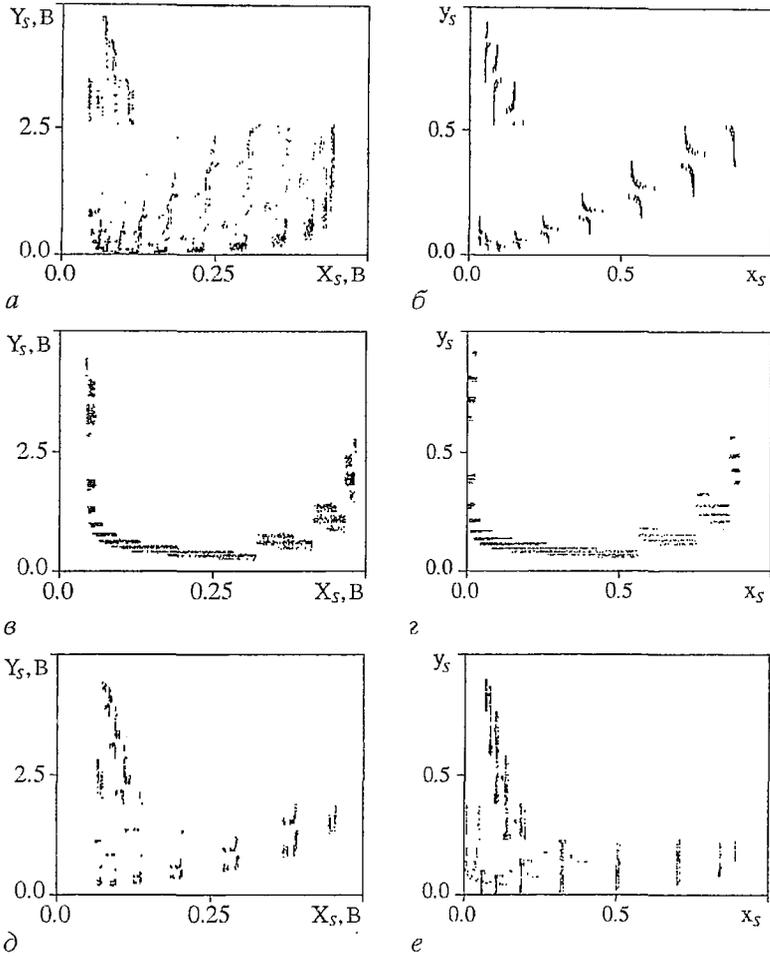


Рис. 4. Фазовые портреты некоторых хаотических режимов колебаний, полученные в ходе натурального эксперимента (а, в, д) и соответствующие им фазовые портреты, построенные в ходе численного эксперимента (б, з, е): а -  $A=6$  В,  $S=0.5$ ,  $X_s=0.26$  В,  $Y_s=1.26$  В; б -  $a=1.2$ ,  $s=0.5$ ,  $x_s=0.052$ ,  $y_s=0.252$ ; в -  $A=7$  В,  $S=2.5$ ,  $X_s=0.37$  В,  $Y_s=0.18$  В; з -  $a=1.4$ ,  $s=0.5$ ,  $x_s=0.37$ ,  $y_s=0.18$ ; д -  $A=7$  В,  $S=2.5$ ,  $X_s=0.4$  В,  $Y_s=0.8$  В; е -  $a=1.4$ ,  $s=0.5$ ,  $x_s=0.08$ ,  $y_s=0.13$

Рис. 5 в полной мере позволяет осознать, насколько сложно поведение рассматриваемой системы: на этом рисунке показаны листы, соответствующие различным режимам колебаний.

Следует отметить, что квадратичный член в отображениях (1) играет существенную роль и попытка сконструировать линейные отображения с пороговой связью по тому же принципу оказывается неудачной: решения нарастают неограниченно и ни о каких колебательных режимах говорить не приходится.

5. Таким образом, подводя итоги всему вышесказанному, еще раз подчеркнем, что нами была изучена динамика системы двух логистических

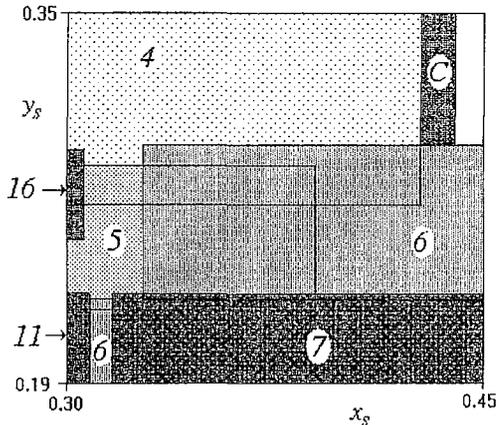


Рис. 5. Фрагмент карты режимов, приведенной на рис. 2, з; показана многострунная структура карты параметров

отображений с принципиально новым типом связи, поведение которой существенным образом отличается от поведения тех же самых логистических отображений с традиционными типами связей. Заметим также, что новый тип связи во многом аналогичен кооперативному и антагонистическому взаимовлияниям, описанным профессором Штуттгартского университета В.Вайдлихом [13, 14], анализ которых играет важную роль при качественном моделировании поведения социально-экономических систем.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 96-02-16753.*

### **Библиографический список**

1. Kaneko K. Theory and applications of coupled map lattices. John Wiley and Sons. Ltd. Baffins Lane. Chichester. West Sussex. PO19 1UD. England. 1993. 191 p.
2. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
3. Смит Дж.М. Модели в экологии. М: Мир, 1976.
4. Kamuro S., Takashi A. Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system // Journal of the physical society of Japan. Vol.59, № 4. April 1990. P.1184.
5. Аллен Дж.Р. Математическая экономия. М.: ИЛ, 1963.
6. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений. Часть I: сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 1,2. С. 15.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир. 1991, 368 с.
8. Korsch H.J., Jodl H.-J. Chaos: a program collection for the PC. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994. P. 196.
9. Jetschke G. Mathematik der Selbstorganisation: Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie. Berlin: Deutsch. Verl. der Wissenschaften. 1989. 336 s.
10. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Мультистабильность и хаос в замкнутой цепочке элементов с удвоением периода: физический и численный эксперимент // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. X школа-семинар. Межвуз. сб. науч. тр. Кн.2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 51.
11. Васкес А. Родригес, Хуэртас Х.Л., Руэда А., Перес-Вердю Б., Чжуа Л.О. // ТИИЭР. 1987. Т.75, № 8. С. 124.
12. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Экспериментальное дупараметрическое исследование неоднозначных режимов колебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII, № 11. С. 1195.
13. Weidlich W. Physics and social science – the approach of synergetics // Phys. Repts. 1991. Vol. 204, № 1. P. 1.
14. Короновский А.А., Трубецков Д.И. Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 27.12.96  
после переработки 21.03.97*

## **THE DYNAMICS OF MAPS WITH THE THRESHOLD TYPE OF COUPLING**

*A.A. Koronovski, V.I. Ponomarenko, D.I. Trubetskov*

This article deals with the system of logistic maps with the radically new coupling type. The behaviour of this system differs radically from the behaviour of the logistic

maps with the traditional coupling types. The investigation of these systems has been carried out both numerically and with the help of the radio–engineering experiment. We have obtained two–parameter regimes maps on the control parameters plane.



*Пономаренко Владимир Иванович* родился в ноябре 1960 года в Саратове. В 1982 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета. В 1992 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук. Работает старшим научным сотрудником в Саратовском филиале института радиотехники и электроники РАН и доцент КИПН. Автор и соавтор 25 научных работ. Область научных интересов – нелинейная динамика, экспериментальное моделирование сложных систем, методы параллельной обработки информации.



*Трубецков Дмитрий Иванович* родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в СГУ (1965) и доктора физико–математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член–корреспондент Российской Академии наук. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана с взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями и с теорией сверхвысокочастотных электронных приборов; теория колебаний и волн; применение методов нелинейной динамики в различных областях науки; история науки.

Автор и соавтор одиннадцати монографий и учебных пособий по сверхвысокочастотной электронике, теории колебаний и волн и истории электронных ламп сверхвысоких частот, в том числе монографии «Аналитические методы расчета в электронике СВЧ» (М.: Сов. радио, 1970; совместно с В.Н. Шевчиком), коллективной монографии «Электроника ламп с обратной волной» (Изд. Сарат. ун–та, 1975), учебного пособия «Введение в теорию колебаний и волн» (первое издание, М.: Наука, 1984; второе – М.: Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем), книги «Формирование радиоэлектроники» (М.: Наука, 1988, раздел «История электронных ламп сверхвысоких частот»). В 1989 году книга «Введение в теорию колебаний и волн» в Нидерландах переведена на английский язык и вышла под названием «Oscillations and waves in linear and nonlinear systems» (The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989). Опубликовал четыре книги лекций по электронике СВЧ и истории электронных ламп и много научных статей по указанным выше направлениям. Зам. главного редактора журнала «Прикладная нелинейная динамика». Член редколлегии журнала «Известия вузов. Радиофизика».



## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ПОТОКОВЫХ СИСТЕМ

*А.А. Кипчатов, С.В. Подин*

В работе описан алгоритм идентификации периодических и сложных периодических колебаний, порождаемых потоковыми системами. Для определения периода установившихся колебаний используется процедура цифровой фильтрации сигнала в сочетании с подстройкой шага интегрирования. Данная методика может быть использована при построении двухпараметрических бифуркационных диаграмм потоковых систем.

Потоковые динамические системы, или системы обыкновенных дифференциальных уравнений, часто выступают в роли математических моделей каких-либо реальных процессов или являются самостоятельными модельными системами, демонстрирующими те или иные сценарии усложнения и хаотизации колебаний. В том и в другом случае потоковые системы служат объектом исследования, базирующегося на применении методов численного интегрирования. Система может иметь один, два или более параметров, изменение которых приводит к качественному изменению характера движения системы, сопряженного с перестройкой структуры ее фазового пространства.

Для качественного и количественного описания характера движения системы при фиксированных значениях параметров могут быть использованы различные характеристики, или меры сложности движения, такие как: вид аттрактора, спектральная плотность сигнала, автокорреляционная функция, показатели Ляпунова, фрактальная размерность и т. д. При исследовании поведения системы в пространстве параметров могут быть использованы также более простые характеристики, содержащие, тем не менее, достаточно много информации о свойствах системы для того, чтобы служить диагностическим критерием выявления свойств системы. Такой простой мерой может быть, например, период колебаний.

Общим свойством динамических систем является увеличение периода колебаний по мере их усложнения при приближении к хаосу. Увеличение периода колебаний сопряжено с рождением субгармоник в спектре колебаний. Основной частотой колебаний в системе остается та, которая имеет максимальную спектральную плотность. В фазовом пространстве таким колебаниям соответствует аттрактор в виде многооборотного предельного цикла: время возвращения траектории в исходную точку определяется частотой самой низкочастотной субгармоники; основной частоте соответствует один оборот траектории вокруг условного центра аттрактора. Наиболее яркой иллюстрацией

этого явления служит сценарий удвоения периода, при котором после каждой бифуркации рождаются новые субгармоники. При этом наименьшая частота в спектре определяется как  $f_{\min} = f_0/2^n$ , где  $f_0$  – основная частота системы,  $n$  – порядковый номер бифуркации. По мере приближения к хаосу период системы стремится к бесконечности  $f_{\min}^{-1} \rightarrow \infty$ .

Таким образом, методика, позволяющая надежно и без значительных дополнительных затрат машинного времени определять период реализующихся в потоковой системе периодических (включая сложные периодические) колебаний, может быть полезной при исследовании закономерностей поведения системы в пространстве управляющих параметров.

### Период колебаний последовательности с произвольным шагом

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, p_1, p_2, \dots, p_k) \quad (1)$$

с некоторыми начальными условиями. Здесь  $x$  – вектор состояния системы,  $\{p_i\}$  – набор параметров системы. В результате численного интегрирования, например, методом Рунге – Кутты 4 порядка может быть получена временная реализация какой-либо переменной состояния в некоторой точке пространства параметров  $\{x_i\} = x(t_0 + ih)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , где  $h$  – шаг интегрирования,  $N$  – длина последовательности. Для простоты будем рассматривать только одну из переменных состояния, хотя приведенные далее рассуждения допускают обобщение и на случай, когда рассматривается последовательность векторов.

Любая временная реализация, полученная из экспериментальных данных или численного моделирования, представляет собой числовой ряд конечной длины с каким-то временем дискретизации (шагом интегрирования).

Предположим, что сигнал имеет некоторый период повторения  $T$  такой, что  $x(t) = x(t+T)$  или более строго

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T \forall t > 0 |x(t+T) - x(t)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Но в общем случае период сигнала  $T$  не кратен шагу интегрирования  $h$  и, в силу дискретности полученной временной реализации, если не делать дополнительных предположений о значениях переменной состояния на промежутках между точками дискретизации, точность определения периода оказывается ограниченной, так как единицей измерения времени в этой ситуации является шаг интегрирования.

Кроме того, величина  $\varepsilon$  в условии (2) не может быть задана меньше некоторого критического значения, зависящего от величины шага интегрирования, так как в противном случае период сигнала может быть не найден, то есть не гарантируется обнаружение имеющегося периода колебаний. Это приводит к возникновению принципиальных трудностей при анализе сложных периодических сигналов, спектр которых содержит субгармоники малой амплитуды. Такая ситуация возникает, в частности, при исследовании систем, демонстрирующих переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Учитывая известные соотношения для амплитуд субгармоник в критических точках [1], для уверенного обнаружения точки бифуркации третьего удвоения периода и, соответственно, режима с периодом 8 (то есть возникновения восьмитактного предельного цикла) точность применяемого метода должна обеспечивать регистрацию появления в спектре сигнала субгармоники, амплитуда которой отличается от амплитуды гармоники основной частоты на 40 дБ и более. Такая точность требует многократного уменьшения шага интегрирования, что приводит к неоправданному увеличению времени счета.

## Содержание методики

Возможны, по-видимому, различные способы преодоления этих трудностей. В настоящей работе показано, что существенного повышения точности идентификации колебательных режимов можно достичь путем применения постоянной (в каждой точке пространства параметров) подстройки шага интегрирования таким образом, чтобы он был кратен периоду сигнала. При фиксированных значениях параметров системы прежде всего с некоторым начальным шагом интегрирования без какой-либо обработки рассчитывается последовательность заданной длины для устранения влияния переходных процессов. После этого с тем же шагом интегрирования рассчитывается промежуточная последовательность точек, в результате обработки которой уточняется шаг интегрирования так, чтобы частота дискретизации была кратна основной частоте сигнала. Далее с уточненным шагом интегрирования рассчитывается контрольная временная реализация, обработка которой позволяет с высокой точностью найти период повторения сигнала.

## Фильтрация сигнала

Для того, чтобы сформулировать условия, позволяющие определить период колебаний на дискретной временной реализации, учитывая соотношения (2), введем преобразование последовательности  $\{x_i\}$ , являющейся решением системы (1), в последовательность  $\{z_i^k\}$ , задаваемое формулой

$$z_i^k = x_i - x_{i-k}. \quad (3)$$

Это преобразование является нерекursивным цифровым фильтром [2],  $\{x_i\}$  и  $\{z_i^k\}$  – входной и выходной сигналы фильтра, соответственно,  $kh$  – задержка фильтра. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра приведена на рис.1. Особенностью АЧХ такого фильтра является наличие эквидистантно расположенных нулевых точек, соответствующих частотам  $1/kh, 2/kh, 3/kh, \dots$ . Отсюда следует важное свойство фильтра: сигнал на выходе равен нулю при ненулевом входном сигнале, если задержка фильтра равна периоду сигнала или больше в целое число раз, так как все спектральные линии такого сигнала приходятся на нулевые точки АЧХ.

Определим меру величины сигнала на выходе фильтра (функцию отклика фильтра) следующим образом:

$$A_k = 1/2(\max_i\{z_i^k\} - \min_i\{z_i^k\}).$$

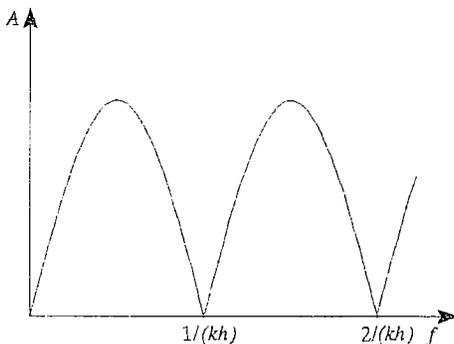


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика фильтра (3)

Величина отклика фильтра всегда неотрицательна и обращается в нуль (при ненулевом сигнале на входе фильтра) лишь в тех случаях, когда задержка фильтра точно равна (или кратна) периоду колебаний. Таким образом, отклик фильтра (3) может быть использован для нахождения периода колебаний.

В общем случае, как было отмечено ранее, период сигнала и шаг интегрирования не связаны какими-либо рациональными соотношениями. Построим зависимость величины сигнала на выходе фильтра  $A_k$  от задержки фильтра  $kh$  (рис. 2, а), которая также является периодической функцией с

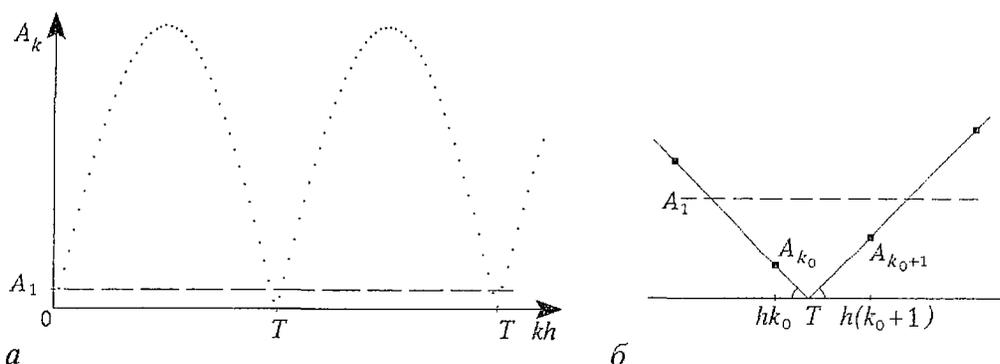


Рис. 2. Зависимость величины сигнала на выходе фильтра от задержки фильтра (а), поведение функции в окрестности точки, соответствующей периоду сигнала, (б)

периодом  $T$ . Величина отклика будет принимать не нулевое, но минимальное значение при задержке  $k_0h$ , близкой (в пределах  $h$ -окрестности) к периоду колебаний. При этом для двух соседних точек зависимости  $A_k(kh)$  таких, что  $k_0h \leq T < (k_0+1)h$  (рис. 2,б), будут выполняться следующие условия:

$$A_{k_0} < A_1, \quad A_{k_0+1} \leq A_1, \quad (4)$$

где  $A_1$  – величина отклика фильтра при единичной задержке – может служить универсальным пороговым значением при анализе отклика фильтра с произвольной задержкой.

Данные условия являются необходимыми условиями существования периода колебаний. Для повышения точности определения периода требуется либо уменьшение шага  $h$ , либо подстройка шага таким образом, чтобы точка  $k_0h$  попала в минимум функции величины отклика.

### Подстройка шага интегрирования

Из анализа функции отклика фильтра, рассчитанной по временной реализации с произвольным шагом  $h$ , в соответствии с условиями (4) определяем предполагаемый период колебаний  $T$ . Рис. 2,б, на котором изображен фрагмент зависимости  $A_k$  от задержки фильтра, иллюстрирует возможность увеличения точности нахождения предполагаемого периода при использовании двух соседних точек зависимости  $A_k(kh)$  и некоторых простых предположений о поведении зависимости в промежутках между ними, выражаемых следующей формулой:

$$(T - hk_0)/A_{k_0} = [h(k_0+1) - T]/A_{k_0+1}.$$

Данные предположения основаны на линейной интерполяции значений исходной временной реализации  $\{x_i\}$  на промежутках между точками дискретизации. Далее находится новое, уточненное значение шага интегрирования  $h'$  из условия  $k_0h' = T$ . В силу того, что новое значение шага интегрирования отличается от старого незначительно, переходных процессов, связанных с изменением шага, не наблюдается. После пересчета шага период колебаний равен (с небольшой погрешностью) целому числу шагов интегрирования, и появляется возможность выяснить, совпадает ли предполагаемый период с истинным. Если это так, то  $A_{k_0} \ll A_1$ . Если же сигнал является сложным периодическим сигналом и его истинный период  $T' = qT$  (где  $q$  – целое), то отклик фильтра при задержке, соответствующей полному периоду колебаний, будет близок к нулю:  $A_{qk_0} \ll A_1$ ,  $A_{qk_0} \ll A_{k_0}$ .

Таким образом, сконструирован алгоритм определения периода колебаний на базе цифровой фильтрации с адаптивной подстройкой параметров метода численного интегрирования, обеспечивающий точную настройку фильтра по периоду реализующихся в системе колебаний. Этот алгоритм позволяет эффективно использовать процедуру фильтрации для идентификации периодических колебательных режимов, повысить чувствительность метода анализа сложных периодических колебаний при сокращении затрат времени.

## Результаты

Описанная процедура определения периода колебаний с помощью адаптивной фильтрации сигнала может быть использована, например, для построения двухпараметрических бифуркационных диаграмм потоковых систем. Несмотря на то, что знание только периода сигнала не всегда позволяет однозначно идентифицировать колебательный режим, период претерпевает характерные изменения при переходе к хаосу через цепочку бифуркаций удвоения периода, при возникновении предельного цикла из хаотического или квазипериодического аттрактора, при других бифуркациях, влекущих изменение периода колебаний.

Возможность выявления в пространстве управляющих параметров границ режимов колебаний с различной структурой спектра субгармоник позволяет однозначно прогнозировать близлежащие непериодические режимы – квазипериоду или хаос, зная закономерности универсальных сценариев хаотизации. В результате может быть восстановлена почти полная карта бифуркационных значений в пространстве управляющих параметров исследуемой системы по анализу только лишь ее временных реализаций.

Построение карты динамических режимов сводится к построчному сканированию плоскости управляющих параметров с заданным разрешением и определению периода установившихся колебаний в каждой точке, то есть при фиксированных значениях параметров. Идентифицируются точки бифуркаций, в которых происходит возникновение, исчезновение или скачкообразное изменение периода. При переходе к новым значениям параметров начальными условиями служат конечные значения соответствующих переменных состояния в предыдущей точке плоскости параметров («наследование» начальных условий). Такая методика сканирования плоскости параметров, принятая при исследовании отображений, хотя и не позволяет удовлетворительно исследовать области мультистабильности, тем не менее обеспечивает автоматизированное построение карты динамических режимов.

Для оценки работоспособности методики адаптивной фильтрации с ее помощью было изучено поведение генератора с инерционной нелинейностью в пространстве управляющих параметров. Данная система достаточно хорошо изучена [3], имеются двухпараметрические бифуркационные диаграммы, построенные по результатам радиофизического и численного эксперимента. На рис. 3 представлены результаты автоматического сканирования плоскости управляющих параметров с использованием методики адаптивной фильтрации. Сравнение карт динамических режимов, построенных ранее, и представленных в настоящей работе, свидетельствует о высокой эффективности методики адаптивной фильтрации, обеспечивающей автоматизированное построение карты режимов потоковой системы при минимальных избыточных затратах времени.

Другой системой, на которой была протестирована методика, является система Ресслера [4] – классическая, хорошо изученная потоковая система третьего порядка с тремя бифуркационными параметрами

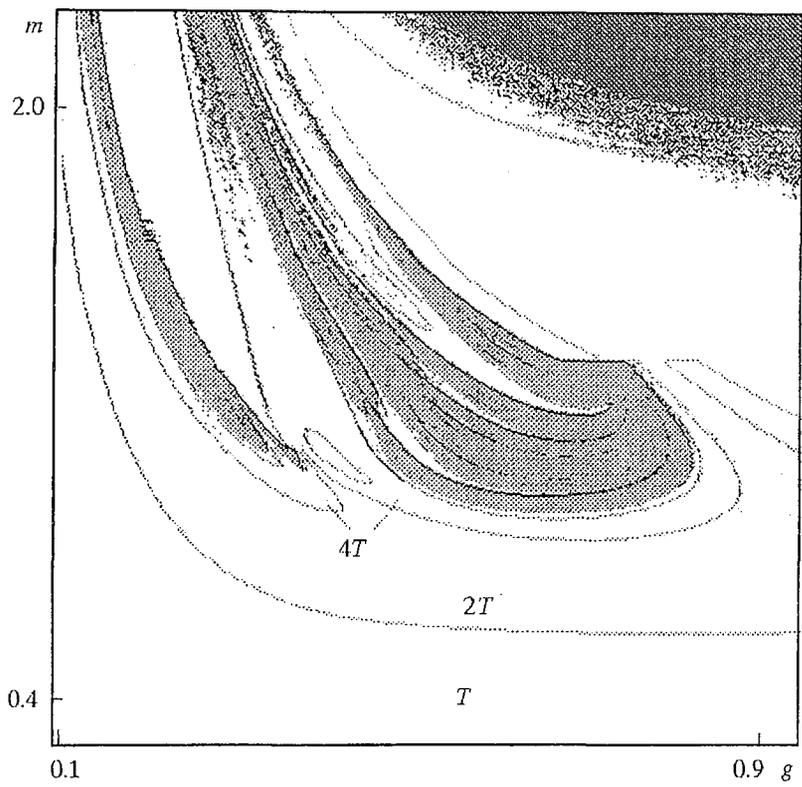


Рис. 3. Карта режимов генератора с инерционной нелинейностью

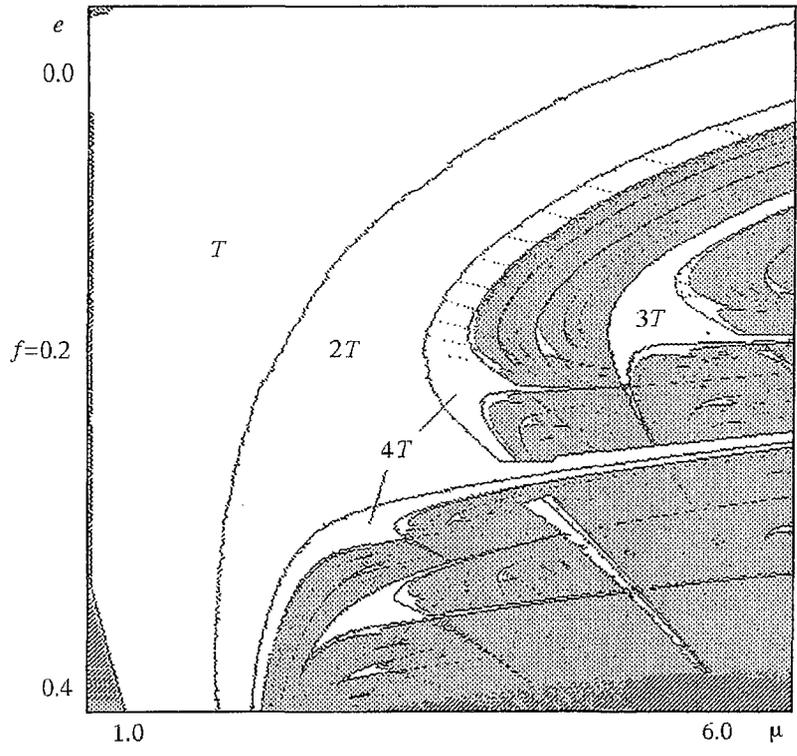


Рис. 4. Карта режимов системы Ресслера при  $f = 0.2$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = -(x + ey), \\ \dot{z} = f - \mu z + xz. \end{cases}$$

Прямого радиофизического аналога данная система не имеет, отсутствует и адекватная модель в виде отображения. Поэтому поведение системы в пространстве управляющих параметров остается не изученным в достаточной мере. Система демонстрирует хаотическое поведение при определенных сочетаниях значений параметров и переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. С помощью процедуры адаптивной фильтрации была построена карта её режимов (рис. 4), являющаяся сечением трехмерного пространства параметров. Можно отметить, что области синхронизации, на базе которых развиваются каскады удвоений периода, имеют форму «crossroad area» [5,6], характерную для двухпараметрической динамики некоторых отображений. При построении карт режимов в других сечениях пространства параметров принципиальных изменений в структуре карты не наблюдалось.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–96–02–16753 Р).*

### **Библиографический список**

1. *Nauenberg M., Rudnik J.* Universality and the power spectrum at the onset of chaos // *Phys. Rev.* 1981. Vol.B24. P.493.
2. *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982.
3. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. World Scientific, 1995.
4. *Rossler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys.Lett.A.* 1976. Vol.57. P.397.
5. *Carcasses J.P., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* «Crossroad area – spring area» transition: (1) parameter plane representation // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. Vol.1, № 1. P.183.
6. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика двумерных отображений. Часть 2: Двухпараметрический переход к хаосу // *Изв. вузов. ПНД.* 1993. Т.1, № 3–4. С.17.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 13.05.97*

## **APPLICATION OF THE ADAPTIVE FILTERING METHOD TO EVALUATION OF THE OSCILLATION PERIOD OF THE FLOW SYSTEMS**

*A.A. Kipchatov, S.V. Podin*

A method of the flow system's oscillation regime determination is developed in this work. To find oscillation period a digital filtering procedure is used in combination with integration step tuning. This method can be used for construction of the flow systems two-parameter bifurcation diagram.



*Подин Станислав Васильевич* – родился в 1972 году, окончил Саратовский государственный университет (1994). Ассистент кафедры электроники и волновых процессов, преподаватель информатики на первой ступени Колледжа прикладных наук. Научные интересы – численное моделирование нелинейных систем, анализ многопараметрической динамики систем. Автор нескольких публикаций.



Международная межвузовская конференция

**Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ**  
Саратов, Россия, сентябрь 1997

**Организаторы и спонсоры**

Министерство общего и профессионального образования РФ  
Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского  
Государственный учебно-научный центр «Колледж»  
Российский фонд фундаментальных исследований

**Программа конференции**

Цель конференции – представить и обсудить современные экспериментальные и теоретические результаты в следующих областях:

- Взаимодействие свободных носителей заряда с электромагнитными полями.
- Вакуумная электроника СВЧ.
- Вакуумная микроэлектроника.
- Твердотельная электроника СВЧ

Будут заслушаны обзорные лекции по указанным вопросам и оригинальные доклады. Предполагается выделение времени и для стендовых докладов. Тезисы докладов будут опубликованы. Отдельные доклады, отобранные Оргкомитетом, войдут в содержание журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

**Оргкомитет**

**Председатель** – Трубецков Д.И., чл.-корр.РАН, ректор СГУ; Алгазинов Э.К., д.ф.-м.н., ВГУ; Девятков Н.Д., академик РАН; Гапонов-Грехов А.В., академик РАН; Григорьев А.Д., д.ф.-м.н., СПбЭТУ; Гуляев Ю.В., академик РАН; Любченко В.Е., д.ф.-м.н. ИРЭ РАН; Победоносцев А.С., д.т.н., «Исток», Фрязино; Тупикин В.Д., к.ф.-м.н., ЦНИИИА; Садалов А.Н., д.ф.-м.н., МГУ; Синецын Н.И., д.ф.-м.н. СФ ИРЭ РАН; Солнцев В.А., д.ф.-м.н., МИЭМ; Соминский Г.Г., д.ф.-м.н., СПбГТУ; Сухоруков А.П., д.ф.-м.н., МГУ; Усанов Д.А., д.ф.-м.н., СГУ; Файнберг Я.Б., академик АН Украины

**Секретарь** – Анфиногентов В.Г., к.ф.-м.н., СГУ

410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ  
Тел. 8(845-2)514298, факс. 8(845-2)514298  
E-mail: conf97@cas.ssu.runnet.ru





## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА» СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

*О.В. Музыкачук*

Рассмотрена известная схема Лотки – Вольтерры для саморегулирующихся сообществ типа «хищник–жертва» при наличии случайных флуктуаций среды обитания. Флуктуации параметров (трофического коэффициента «жертв» и коэффициента смертности «хищников») полагались гауссовыми дельта-коррелированными процессами. Найдены стационарные значения среднеквадратичных характеристик численностей популяций.

Более детально рассмотрен случай, когда имеют место только флуктуации трофического коэффициента жертв. Исследованы стационарные вероятностные распределения численностей сообществ, получены и численно решены замкнутые уравнения, описывающие релаксацию средних значений численностей и соответствующих дисперсий. Показано, в частности, что при сильных флуктуациях указанного параметра, система входит в критический режим, когда максимумы вероятностных распределений смещаются в ноль. При этом время релаксации средних значений и дисперсий увеличивается, а сам процесс установления идет со значительными колебаниями.

Как известно, исследование систем саморегулирующихся сообществ относится к классическим задачам нелинейной динамики [1]. В реальной ситуации параметры среды обитания сообщества испытывают случайные флуктуации, при этом рассматриваемая динамическая система становится стохастической. Некоторые вопросы статистического описания таких систем затрагивались в монографиях [2,3]; в статье [4] впервые были найдены стационарные вероятностные распределения численности «хищников» и «жертв» в модели Лотки – Вольтерры с дельта-коррелированными флуктуациями трофического коэффициента. В настоящей работе предпринята попытка выяснения влияния флуктуаций коэффициента естественной смертности хищников, рассмотрен процесс релаксации средних значений численностей и соответствующих дисперсий.

1. Рассмотрим стохастическую систему, описываемую моделью Лотки – Вольтерры с флуктуирующими параметрами

$$\begin{aligned} Tdx/dt &= (1 + \xi(t))x - \beta xy - \gamma x^2, \\ Tdy/dt &= k\beta xy - \mu(1 + \eta(t))y. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x(t)$  и  $y(t)$  – численности жертв и хищников; используя принятую терминологию, будем называть  $\gamma$  – коэффициентом внутривидовой конкуренции жертв,  $\mu$  – коэффициентом смертности хищников; коэффициент  $\beta$  характеризует взаимное влияние видов;  $k$  принято называть коэффициентом усваиваемости биомассы. Уравнения (1) записаны в безразмерном виде после деления на среднее значение трофического коэффициента жертв  $\nu$ , входящего множителем перед  $x$  в первое уравнение ( $T = 1/\nu$ ). Флуктуации  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  будем считать гауссовыми дельта–коррелированными процессами с нулевыми средними и спектральными интенсивностями  $D_\xi$  и  $D_\eta$ , соответственно.

Рассмотрим сначала стационарные вероятностные характеристики совокупности  $\{x, y\}$ , предполагая, что таковые существуют. Заметим, что в отсутствие флуктуаций коэффициентов условия существования стационарного режима системы (1) можно записать в виде

$$0 < p = \gamma\mu/(k\beta) < 1. \quad (2)$$

Усредняя уравнения (1) после деления их на  $x$  и  $y$ , соответственно, легко видеть, что установившиеся средние значения численностей  $\langle x \rangle, \langle y \rangle$  не зависят от наличия и вида флуктуаций параметров и совпадают с соответствующими невозмущенными величинами

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \mu/(k\beta), & \langle y \rangle &= (1-\gamma\langle x \rangle)/\beta & \text{при} & & p < 1.0, \\ \langle x \rangle &= 1/\gamma, & \langle y \rangle &= 0.0 & \text{при} & & p = 1.0. \end{aligned} \quad (3)$$

В последнем случае, означающем гибель хищников, численность жертв удовлетворяет известному уравнению Ферхюльста. Вероятностные характеристики стохастического уравнения Ферхюльста исследовались в [5,6].

Из (3) видно, что зависимость стационарного значения  $\langle y \rangle$  от коэффициента  $\beta$  (характеризующего взаимодействие популяций) немонотонна, а при

$$\beta = 2\gamma\mu/k, \text{ или } p = 1/2,$$

имеется максимум. Соответствующие значения численностей таковы:

$$\langle x \rangle = 1/(2\gamma), \quad \langle y \rangle = \langle y \rangle_{\max} = 1/(2\beta).$$

Из системы (1) легко видеть, что в отсутствие флуктуаций  $\eta(t)$  стационарные значения численностей являются некоррелированными

$$\langle xy \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle.$$

Используя второе уравнение (1) и дельта–коррелированность флуктуаций параметров, для смешанного момента  $\langle xy^n \rangle$  нетрудно получить соотношение

$$\langle xy^n \rangle = \langle x \rangle (1 - nD_2) \langle y^n \rangle, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где  $D_2 = D_\eta/(2T)$  – эффективная интенсивность флуктуаций  $\eta(t)$ . Очевидно, что в отсутствие последних моменты указанного вида размыкаются. На основании (1) и (4) для дисперсии численности жертв получим выражение

$$D_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x \rangle [(D_1 + D_2)/\gamma - D_2 \langle x \rangle], \quad D_1 = D_\xi/(2T). \quad (5)$$

В силу имеющей место в общем случае статистической зависимости  $x$  и  $y$ , точное выражение для дисперсии численности хищников найти не удастся. Для размыкания смешанных моментов вида  $\langle x^m y^n \rangle$  можно использовать, например, гауссово приближение по статистической связи переменных  $\{x, y\}$  [7]

$$\langle x^2 y \rangle = \langle x^2 \rangle \langle y \rangle + 2 \langle x \rangle (\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle). \quad (6)$$

На основании (3)–(6) для дисперсий численностей сообщества находим формулы

$$D_x / \langle x \rangle = (D_1 + \beta D_2 \langle y \rangle) / \gamma, \quad (7)$$

$$D_y / \langle y \rangle = k D_x / \langle x \rangle + D_2 (\gamma \langle x \rangle - D_1 - \mu D_2) / \beta,$$

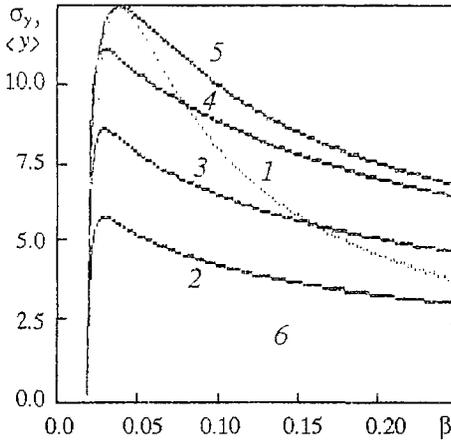


Рис. 1. Средняя численность хищников (кривая 1) и стандартное отклонение численности хищников (кривые 2–5) для различных значений параметров  $D_1$  и  $D_2$ : 2, 3, 4 –  $D_1=0.0$ ,  $D_2=0.1, 0.2, 0.5$ , соответственно; 5 –  $D_1=0.5$ ,  $D_2=0.0$

первая из которых является точной, а вторая справедлива, по крайней мере, при малых  $D_2$ . Как видно из (7), зависимость дисперсий от интенсивности флуктуаций  $D_1$  является линейной; близка к линейной и зависимость от интенсивности  $D_2$  при разумных значениях последней.

На рис. 1 показана зависимость стандартного отклонения численности хищников  $\sigma_y = D_y^{1/2}$  от параметра  $\beta$  при различных значениях  $D_1, D_2$ , которое, как и  $\langle y \rangle$ , имеет экстремум. Для сравнения приведена зависимость средней численности хищников от параметра  $\beta$  (кривая 1). Значения основных параметров системы, использованные в расчетах, результаты которых приведены на рисунках, собраны в таблице.

Таблица

### Значения основных параметров системы для приведенных рисунков

рис. №	$\gamma$	$\beta$	$\mu$	$k$	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$
1	0.02	–	0.5	0.5	–	–
2	0.01	0.05	0.5	0.5	20.0	16.0
3	0.01	0.05	0.5	0.5	20.0	16.0
4	0.015	0.1	0.25	0.5	5.0	9.0
5	0.01	0.05	0.25	0.25	20.0	16.0

На рис. 2–4 кривые, помеченные буквой «а», относятся к характеристикам хищников.

2. В отсутствие флуктуаций  $\eta(t)$  можно получить и более общие вероятностные характеристики системы. Для стационарных значений моментов общего вида стандартным путем приходим к соотношению

$$(m - \mu n + m^2 D) \langle x^m y^n \rangle - \beta m \langle x^{m-1} y^{n+1} \rangle + (k n \beta - \gamma m) \langle x^{m+1} y^n \rangle = 0, \quad (8)$$

$$m, n = 0, 1, \dots$$

Здесь и ниже  $D = D_1$ . Как показывает анализ (см. также [4]), стационарные вероятностные характеристики теперь являются статистически независимыми, что позволяет размыкать любые смешанные моменты в (8). Таким образом нетрудно получить следующие рекуррентные формулы для моментов численности популяций:

$$\langle x^{n+1} \rangle = (\langle x \rangle + nD/\gamma)\langle x^n \rangle, \quad \langle y^{m+1} \rangle = (\langle y \rangle + mkD/\gamma)\langle y^m \rangle, \quad (9)$$

$$\langle x^m y^n \rangle = \langle x^m \rangle \langle y^n \rangle, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

С помощью аппарата марковских процессов нетрудно записать уравнение Фоккера – Планка для совместной плотности вероятности  $W(x,y)$ , а для его решения можно использовать статистическую независимость стационарных вероятностных характеристик. Заменяя в первом уравнении системы (1) переменную  $y$  на  $\langle y \rangle$ , получим, тем самым, статистически эквивалентное (только для стационарных характеристик  $x$ ) стохастическое уравнение

$$Tdx/dt = \gamma(\langle x \rangle - x)x + \xi(t)x. \quad (10)$$

Решение соответствующего (10) стационарного уравнения Фоккера – Планка

$$Dd(xW_x)/dx = \gamma W_x(\langle x \rangle - x) \quad (11)$$

находится элементарно и имеет вид

$$W_x(x) = C_x x^{\langle x \rangle / D - 1} \exp(-\gamma x / D), \quad x > 0. \quad (12)$$

Подставив (12) в двумерное стационарное уравнение Фоккера – Планка, нетрудно получить и соответствующее решение для  $W_y$ :

$$W_y(y) = C_y y^{\langle y \rangle / (kD) - 1} \exp[-\gamma y / (kD)], \quad y > 0. \quad (13)$$

Как отмечалось выше, стационарные средние значения  $\langle x \rangle$  и  $\langle y \rangle$  не зависят от наличия флуктуаций параметров. На основании (12),(13) легко найти наиболее вероятные значения численностей популяций

$$x^* = \langle x \rangle - \bar{D}_x, \quad y^* = \langle y \rangle - \bar{D}_y, \quad (14)$$

где

$$\bar{D}_x = D_x / \langle x \rangle = D/\gamma, \quad \bar{D}_y = D_y / \langle y \rangle = kD/\gamma \quad (15)$$

нормированы на средние значения дисперсии численностей.

Зависимость вероятностных распределений (12),(13) от эффективной интенсивности шума  $D$  показана на рис. 2. С ростом  $D$  максимумы  $x^*$ ,  $y^*$  сдвигаются влево, после чего у кривых появляются особенности в нуле. Появление этих особенностей означает, по-существу, что та или другая популяция оказывается в критическом режиме. Выполненный анализ позволяет установить условия «благоприятного» (некритического) стационарного существования сообщества в среде с флуктуациями трофического коэффициента.

Ограничения на введенный выше (см.(2)) параметр  $p$ , вытекающие из условий положительности значений  $x^*$  и  $y^*$ , соответственно имеют вид:

$$D < p, \quad p_1 < p < p_2, \quad (2a)$$

где  $p_{1,2} = 1/2 [1 \mp (1-4\mu D)^{1/2}]$ .

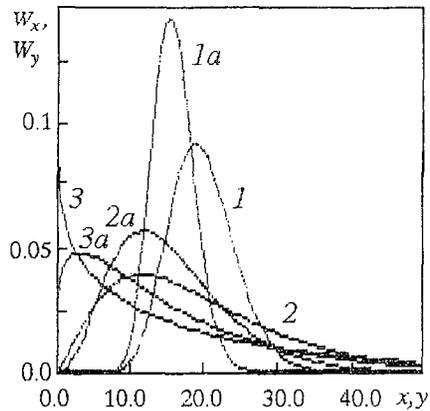


Рис. 2. Стационарные плотности вероятностей для различных значений эффективной интенсивности шума  $D$ : 1, 1a – 0.01,  $x^*=19.0$ ,  $y^*=16.0$ ; 2, 2a – 0.08,  $x^*=12.0$ ,  $y^*=12.0$ ; 3, 3a – 0.25,  $x^*=0.0$ ,  $y^*=3.0$

Следующие из (2а) ограничения на интенсивность флуктуаций таковы:

$$D < \min\{p, 1/(4\mu)\}. \quad (16)$$

Отметим, что при  $p < 1/(4\mu)$  с ростом  $D$  сначала обращается в ноль  $x^*$ , затем  $y^*$ , а при противоположном неравенстве – наоборот. Кривая 3 на рис. 2 соответствует границе критического режима для жертв.

3. Попытаемся теперь рассмотреть процесс установления стационарных вероятностных характеристик системы. Ограничиваясь анализом лишь среднеквадратичных величин, запишем соответствующие уравнения релаксации

$$\begin{aligned} \langle x \rangle' &= (1 + D)\langle x \rangle - \gamma\langle x^2 \rangle - \beta\langle xy \rangle, \\ \langle y \rangle' &= k\beta\langle xy \rangle - \mu\langle y \rangle, \\ 1/2\langle x^2 \rangle' &= (1 + 2D)\langle x^2 \rangle - \gamma\langle x^3 \rangle - \beta\langle x^2 y \rangle, \\ 1/2\langle y^2 \rangle' &= k\beta\langle xy^2 \rangle - \mu\langle y^2 \rangle, \\ \langle xy \rangle' &= (1 + D - \mu)\langle xy \rangle + (k\beta - \gamma)\langle x^2 y \rangle - \beta\langle xy^2 \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь и ниже штрих – производная по безразмерному времени. В силу нелинейности исходных динамических уравнений система (17) не замкнута. Для ее замыкания можно, в принципе, использовать гауссово или высшие кумулянтные приближения [7], но поступим иначе. Поскольку в данном случае известны рекуррентные формулы для стационарных моментов, это целесообразно использовать для замыкания (17). Такой прием гарантирует, по крайней мере, правильную асимптотику релаксации искомым характеристикам. Разумеется, непосредственная подстановка формул (9) в правые части (17) обращает их в нуль, поэтому следует подставлять не сами стационарные значения моментов, а лишь «стационарные связи» между ними. Например, первую формулу из (9) для размыкания высших моментов  $x$  следует использовать в виде

$$\langle x^{n+1} \rangle = (\langle x \rangle + nD_x / \langle x \rangle) \langle x^n \rangle, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9a)$$

Как показывает анализ, для расчета релаксации средних значений и дисперсий можно ограничиться численным решением следующей системы трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle' &= (1 - D - \beta\langle y \rangle) \langle x \rangle - \gamma(\langle x \rangle \langle x \rangle + D_x), \\ \langle y \rangle' &= (k\beta\langle x \rangle - \mu) \langle y \rangle, \\ 1/2D_x' &= D_x [2D - \gamma(2D_x / \langle x \rangle + \langle x \rangle)] + D\langle x \rangle^2, \end{aligned} \quad (18)$$

дополненной «стационарной» формулой для  $D_y$ , вытекающей из (15),

$$D_y(t) = kD_x(t)\langle y(t) \rangle / \langle x(t) \rangle. \quad (18a)$$

Численный анализ системы (18), выполненный на ПЭВМ методом Рунге – Кутты показывает, что заметное влияние на релаксацию средних значений  $\langle x(t) \rangle$ ,  $\langle y(t) \rangle$  оказывают лишь достаточно сильные флуктуации  $\xi(t)$ . Это вполне естественно, поскольку на стационарные значения средних этот шум вообще не оказывает влияния. Как видно из рис. 3, 4, с ростом интенсивности шума увеличивается время релаксации колебаний численности, уменьшается период и подчеркивается их

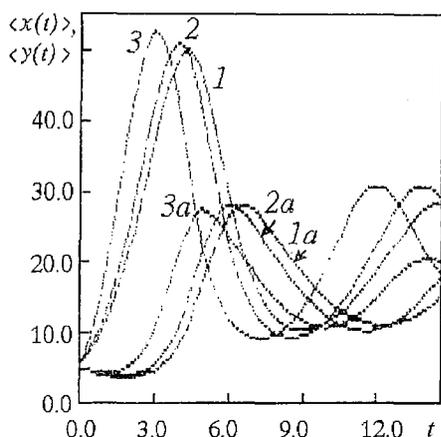


Рис. 3. Релаксация нестационарных средних численностей для  $\langle x \rangle > \langle y \rangle$  (см. табл.) и для различных значений параметра  $D$ : 1,  $1a - 0.0$ ; 2,  $2a - 0.1$ ; 3,  $3a - 0.5$ ; здесь и ниже  $t$  - безразмерное время

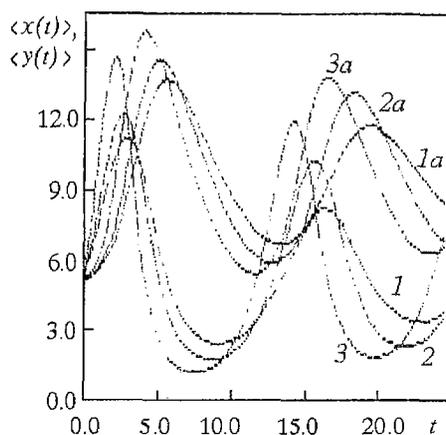


Рис. 4. Релаксация нестационарных средних численностей для  $\langle x \rangle < \langle y \rangle$  (см. табл.) и для различных значений параметра  $D$ : 1,  $1a - 0.0$ ; 2,  $2a - 0.1$ ; 3,  $3a - 0.4$

ангармоничность (см. рис. 4). Все эти эффекты заметны в области, где интенсивность шума  $D$  превышает ограничение (16). При очень сильных флуктуациях ( $\bar{D}_x \gg x^*$ ) «раскачка» может стать значительной, но при этом сами средние значения фактически теряют информационный смысл, являясь меньше нормированных дисперсий.

Релаксация нормированной на  $\langle x(t) \rangle$  дисперсии численности жертв приведена на рис. 5. Для сравнения здесь приведена релаксация нестационарного среднего значения (кривая  $I^*$ ). Как видно из рисунка, установление даже нормированной на нестационарное среднее  $\langle x(t) \rangle$  дисперсии имеет осцилляторный характер (если, конечно, таковой имеет релаксация соответствующего среднего). Расчет показывает, что ненормированная дисперсия  $D_x(t)$  релаксирует по кривой, качественно подобной релаксации среднего значения, и время установления их примерно одинаково.

Как показывает численный анализ, установление дисперсии численности хищников  $D_y(t)$  может быть адекватно описано выражением (18a). При этом практически все, сказанное выше о релаксации  $D_x$ , относится и к релаксации  $D_y$ .

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант 95-0-8.3-36).

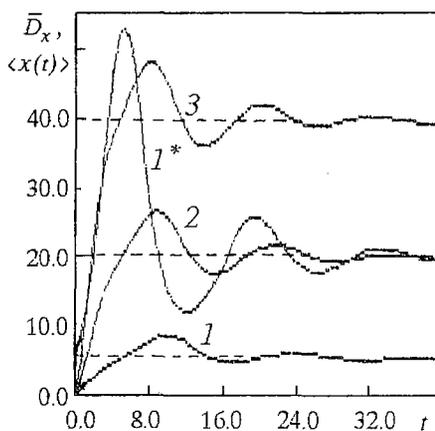


Рис. 5. Релаксация нормированной дисперсии численности жертв и релаксация нестационарной средней численности (кривая  $I^*$ ) для различных значений параметра  $D$ : 1,  $I^* - 0.05$ ; 2 - 0.2; 3 - 0.4; штриховые линии - точные значения стационарной дисперсии

## Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
4. Диментберг М.Ф. Точные решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для некоторых многомерных динамических систем // ПММ. 1983. Т.47, вып.4. С. 5558.
5. Музычук О.В. Некоторые точные результаты для вероятностных характеристик стохастического уравнения Ферхюльста // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 3. С. 19.
6. Музычук О.В. Нестационарные вероятностные характеристики стохастического уравнения Ферхюльста // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 3. С. 26.
7. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.

Нижегородская архитектурно-  
строительная академия

Поступила в редакцию 19.03.97  
после переработки 6.06.97

## PROBABILITY CHARACTERISTICS OF «BEAST-SACRIFICE» SYSTEM WITH RANDOM FLUCTUATIONS OF PARAMETERS

*O.V. Muzychuk*

Well-known Lottky – Volterra scheme for self-regulated «beast-sacrifice» associations with random fluctuations of habitat conditions was considered. Fluctuations of parameters were supposed as the Gaussian delta-correlated stochastic processes. Stationary mean-square characteristics of populations numbers were obtained

The situation was considered in more detail when only trophical coefficient fluctuations of «sacrifices» take place. Stationary probability densities of populations numbers were investigated. Closed equations described relaxation of mean values and dispersions were obtained and solved by computer. It was obtained in particular, that when fluctuations of the trophical coefficient are too intensive, the system enters the critical regime, when maximums of probability densities move to zero. That time the relaxation scales for mean values and dispersions increase and the process of relaxation proceeds with essential oscillations.



*Музычук Олег Владимирович* – родился в городе Ярцево Смоленской области (1947). Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1970). После окончания работал на кафедре статистической радиофизики ГГУ, там же защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1978) в области исследования динамических систем с флуктуирующими параметрами. С 1978 года работает на кафедре физики Нижегородского архитектурно-строительного института. Автор примерно 40 статей в центральных журналах. Круг интересов – стохастические системы с интенсивными не дельта-коррелированными случайными силами.



## ЭВОЛЮЦИЯ БАСЕЙНОВ ПРИТЯЖЕНИЯ АТТРАКТОРОВ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

*С.А. Астахов, Б.П. Безручко, Е.П. Селезнев, Д.А. Смирнов*

Экспериментально (на  $RL$ -диод цепях) и численно (на системе квадратичных отображений) исследованы особенности структуры бассейнов притяжения аттракторов диссипативно связанных систем с удвоением периода. Выделены типичные пути эволюции бассейнов притяжения; в том числе, обнаружены два возможных варианта их фрактализации.

### Введение

Область фазового пространства диссипативной динамической системы, из которой изображающая точка попадает на аттрактор, называется бассейном притяжения. Если аттракторов несколько (мультистабильность), фазовое пространство делится на бассейны притяжения сосуществующих аттракторов. С изменением управляющих параметров эволюционируют как сами аттракторы, так и их бассейны. Информация о структуре бассейнов важна при решении задач управления и переключения, так как от положения начальной точки в бассейне зависят вид и длительность переходного процесса. Более того, структура бассейнов может быть фрактальной, так что при конечной точности задания начальных условий прогноз предельного состояния системы может оказаться невозможным даже при отсутствии хаоса [1,2]. В работе представлены результаты экспериментальных и численных исследований особенностей структуры бассейнов притяжения аттракторов системы, достаточно типичной в нелинейном мире, – ансамбля двух симметрично связанных элементов, каждый из которых индивидуально демонстрирует переход к хаосу при изменении параметра через последовательность бифуркаций удвоения периода. Анализ ведется на основе данных о множестве колебательных состояний этой системы [3] и критериев, сформулированных в работах К.Мира [4,5]. Экспериментально исследуются две резистивно связанные  $RL$ -диод цепи [6,7], синфазно возбуждаемые гармонической внешней силой (на рис. 1 они выделены жирной линией). Динамика каждой из них в ограниченной области параметров, где проводится рассмотрение, качественно моделируется квадратичным отображением с единственным управляющим параметром. Как показано в [3], адекватной моделью этой радиофизической системы являются два квадратичных отображения с диссипативным [8] видом связи

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2), \end{cases} \quad (1)$$

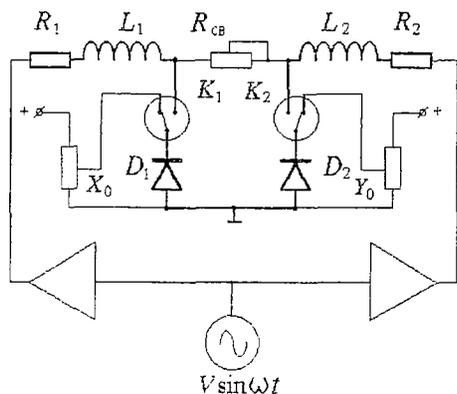


Рис. 1. Схема экспериментальной установки. Жирным выделены резонаторы, составляющие систему,  $R_{св}$  – резистор связи,  $K_1, K_2$  – электронные ключи

продемонстрирована применимость критериев, введенных в [4,5], для объяснения особенностей конфигурации бассейнов, обнаружена фрактализация бассейнов хаотических аттракторов.

## 1. Мультистабильность в связанных системах с удвоением периода

Рассматриваемые базовые системы (неавтономный осциллятор и отображение) инвариантны относительно временного сдвига на величину  $NT$ , где  $N=1,2,3,\dots$ , а  $T$  равно периоду воздействия в экспериментальной системе и  $T=1$  в модели. Это означает, что движения периода  $NT$  могут быть реализованы  $N$  способами, отличающимися сдвигом колебаний в подсистемах во времени на величину, кратную периоду воздействия,  $mT$  ( $m=0,1,\dots, N-1$ ). Далее мы будем называть их видами колебаний и обозначать индексами  $N_m$ , используя  $m$  в качестве основного классификационного признака. Циклом с  $m=0$  соответствуют синфазные колебания подсистем, когда  $X_n=Y_n$ , циклом с  $m \neq 0$  – несинфазные. Для четных  $N$  все циклы с индексом  $m=N/2$  (противофазные) при конечной связи симметричны относительно замены  $X$  на  $Y$  и демонстрируют бифуркацию рождения тора. Все пары циклов с индексами  $m$  и  $N-m$  асимметричны, но симметричны друг другу (то есть при замене  $X$  на  $Y$  они переходят друг в друга) и с изменением параметров демонстрируют удвоения периода. В [9] показано, что квазипериодические движения также попадают под предложенную классификацию, так как их можно рассматривать как режим биений между определенной парой асимметричных (относительно замены  $X_n \leftrightarrow Y_n$ ), но симметричных друг другу циклов. Каждый из видов колебаний существует в некоторой области параметров  $\lambda, k$ . Увеличение связи приводит к неустойчивости несинфазных видов, так что синфазные движения при некотором  $k$  остаются единственно возможными; однако при сильной связи ( $k > 0.5$ ) в системе появляется новый вид несинфазных движений [10], который в данной работе не рассматривается.

При значениях  $\lambda$  и  $\Lambda$  больше критических на базе каждого цикла в результате последовательности бифуркаций удвоения периода формируется хаотический аттрактор. В хаотических режимах, несмотря на отсутствие повторяемости в движениях, можно сохранить принцип классификации, используемый для периодических режимов, если понимать под  $m$  временной сдвиг между, например, максимальными значениями  $X_n$  и  $Y_n$ , а под  $N$  – число лент (связность) аттрактора. В дальнейшем хаотические режимы будем отмечать верхним положением индекса  $N^m$ . Случай  $m=0$  соответствует синфазному хаосу

где  $x_n, y_n$  – динамические переменные;  $n = 0,1,2,\dots$  – дискретное время;  $\lambda$  – параметр нелинейности;  $k$  – параметр связи. Аналогом параметра связи  $k$  в эксперименте служит проводимость резистора связи  $K=1/R_{св}$ , а параметра нелинейности  $\lambda$  – амплитуда внешнего воздействия  $\Lambda$ . Математическая модель (1) относится к классу необратимых отображений, и для нее справедливы предположения и ограничения, введенные в работах [4,5].

В результате выделены типичные для исследуемой системы пути эволюции бассейнов притяжения (их появление, исчезновение, дробление и объединение в соответствии с установленной ранее схемой бифуркационных переходов [3]),

(когда  $X_n=Y_n$ ) или хаотической синхронизации [8,11–15],  $m \neq 0$  – несинфазному хаосу. Хаотические аттракторы сохраняют свойства симметрии циклов с аналогичными индексами  $N$  и  $m$ . Симметрия аттракторов отражается и в структуре их бассейнов притяжения.

На рис. 2 представлена качественная схема, иллюстрирующая эволюцию движений в исследуемых ансамблях с изменением параметра  $\lambda$  при фиксированной слабой связи ( $k=0.006$ ), в выделенных фрагментах приведены фазовые портреты соответствующих видов колебаний для модельной системы. Опираясь на эту схему, рассмотрим эволюцию бассейнов притяжения при изменении параметров.

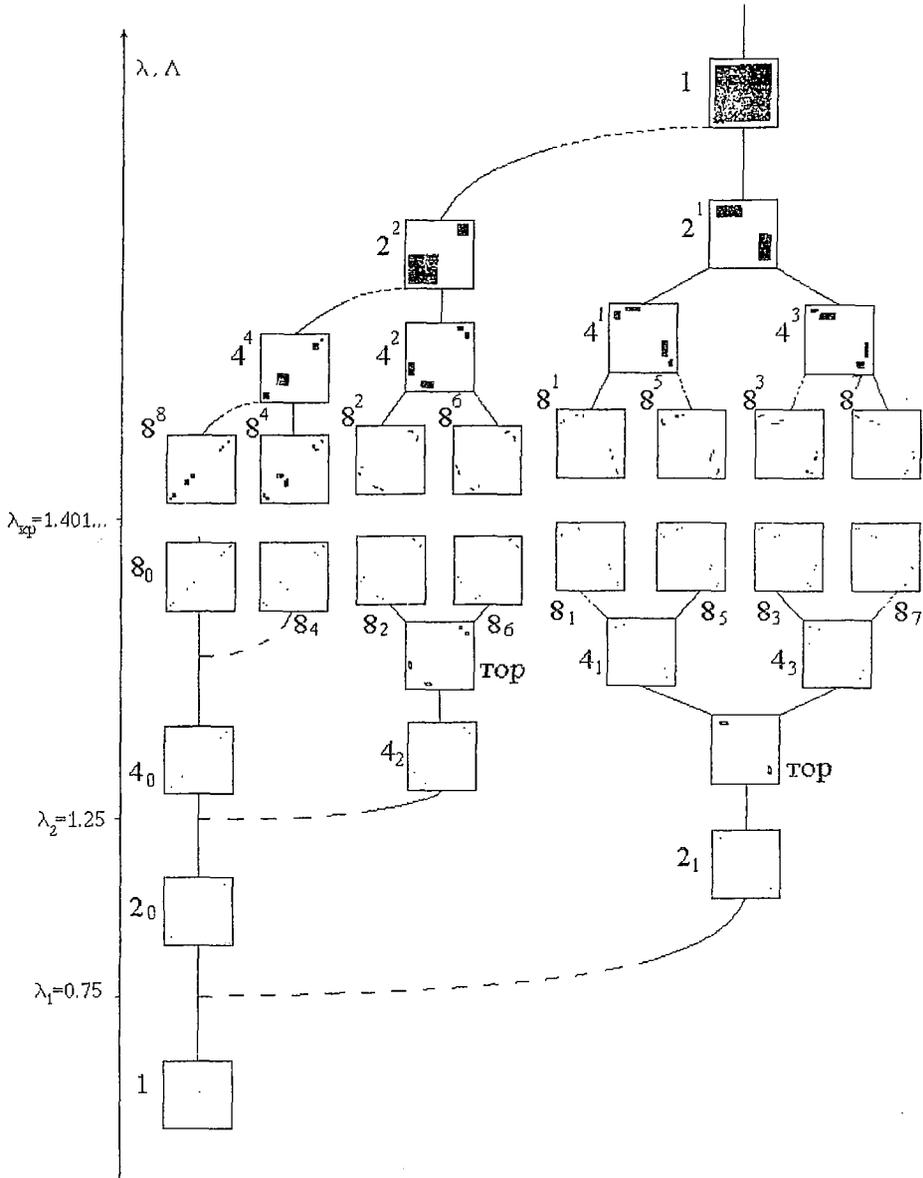


Рис. 2. Качественная схема эволюции колебательных режимов системы (1) при изменении параметра  $\lambda$  для случая малой связи ( $k=0.006$ ). В выделенных квадратах представлены аттракторы соответствующих ветвей схемы. Штриховые линии условны и демонстрируют принадлежность верхних ветвей схеме тому или иному основанию. Значения  $\lambda$  соответствуют первым двум бифуркациям удвоения периода и переходу к хаосу в изолированных подсистемах

## 2. Структура бассейнов притяжения аттракторов и ее эволюция

Рассмотрим особенности формирования бассейнов на примере модели (1), двигаясь по схеме рис. 2 снизу вверх, от значений  $\lambda$ , при которых в фазовом пространстве существует единственный цикл периода 1. Так, в примере, представленном на рис. 3, а, устойчивым решением является точка  $A$  (цикл периода 1), а бассейном его притяжения – вся область значений  $X_0, Y_0$ , ограниченная прямыми линиями  $|X_0|=|X_B|$ ,  $|Y_0|=|Y_B|$ , где  $X_B, Y_B$  соответствуют неустойчивому решению (точке  $B$ ). При  $k=0.0$  бассейн представляет собой квадрат со стороной  $[1+(1+4\lambda)^{1/2}]$ ; с увеличением коэффициента связи он постепенно деформируется, приобретая при  $k=0.5$  форму круга (рис. 3, б). Так как граница содержит и саму неустойчивую точку, радиус круга  $[1+(1+4\lambda)^{1/2}]/2^{1/2}$  можно определить, найдя неустойчивое решение.

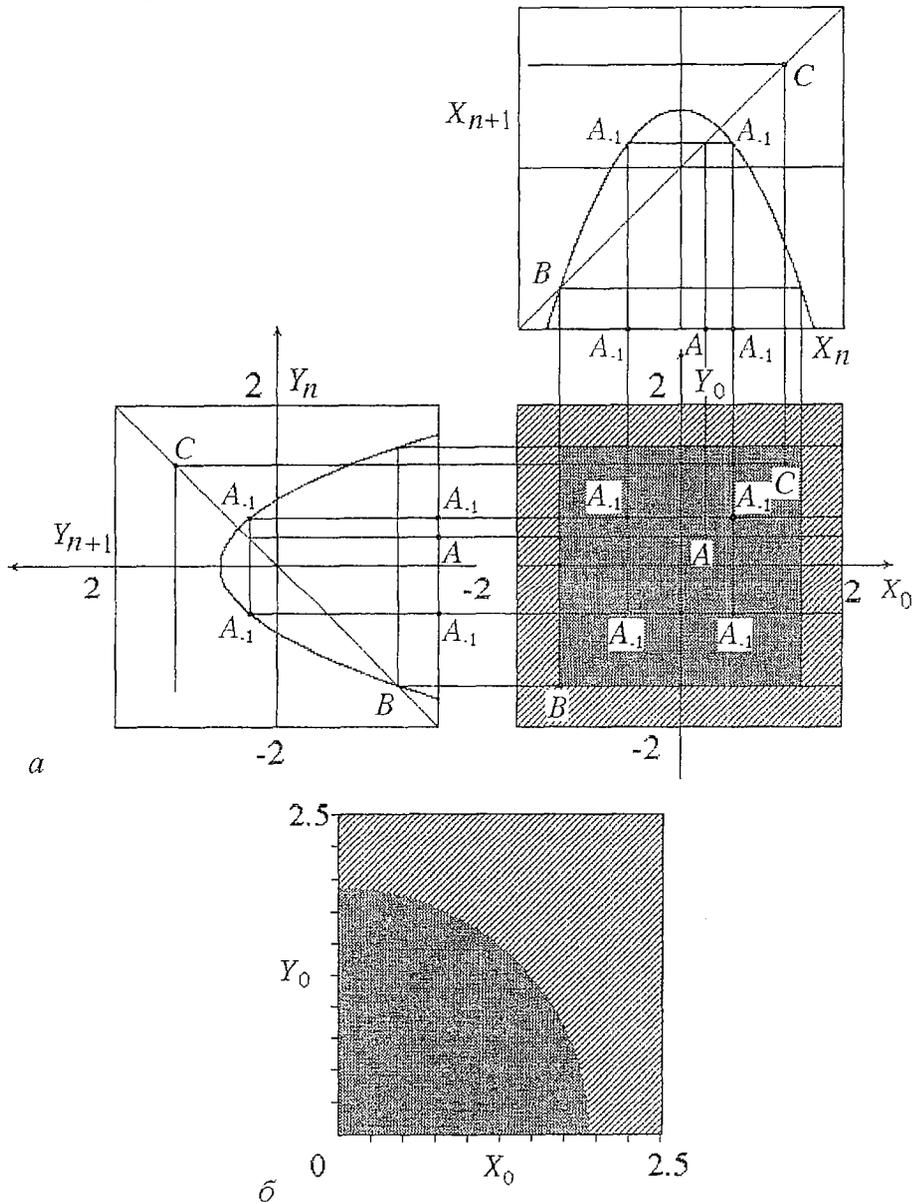


Рис. 3. Бассейн притяжения цикла периода 1 при  $\lambda=0.5, k=0.0$  (а) и  $k=0.5$  (б)

Если начальная точка  $(X_0, Y_0)$  находится вне бассейна, с течением времени решение «убегает» на бесконечность; на рис. 3 эта область отмечена штриховкой. Система (1) инвариантна относительно замены  $X_n \rightarrow -X_n, Y_n \rightarrow -Y_n$ , поэтому каждая точка  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$ , включая точки аттракторов, будет иметь по 4 прообраза первого ранга, симметрично расположенные относительно осей  $X=Y=0$  (рис. 3, а). Отмеченной симметрией обладают и бассейны притяжения аттракторов, поэтому далее будем приводить на рисунках лишь правый верхний квадрант плоскости  $(X_0, Y_0)$ .

С появлением в фазовом пространстве второго аттрактора область конечных решений дробится на бассейны сосуществующих аттракторов. Принцип дробления поясняет рис. 4, а, построенный, как и рис. 3, а, для случая  $k=0.0$ , но при значениях параметра  $\lambda > \lambda_1$ , где  $\lambda_1=0.75$  значение первой бифуркации удвоения периода. Здесь цикл периода 1 (точка А) уже потерял устойчивость и в фазовом пространстве сосуществуют два аттрактора – циклы периода 2:  $2_0$  и  $2_1$  (см. рис. 4, а и схему на рис. 2). Множество неустойчивых точек, включающее в себя и точку А с прообразами всех рангов, формирует границы бассейнов притяжения сосуществующих циклов. В отсутствие связи оно расположено на параллельных осям прямых, которые дробят бассейн цикла, их, согласно схеме рис. 2, «порождающего». Отметим, что вблизи границы области дробящегося бассейна имеет место фрактальная структура – с приближением к границе происходит неограниченное уменьшение одного из характерных размеров составляющих бассейн областей (рис. 4, б). Увеличение  $\lambda$  сопровождается ростом числа сосуществующих регулярных аттракторов в фазовом пространстве; на схеме рис. 2 увеличивается число ветвей. При этом бассейны циклов, соответствующих на рис. 2 основанию любого разветвления (например, линия  $2_0$  является основанием разветвления на  $4_0$  и  $4_2$ ), дробятся так, что вблизи их бывших границ образуется фрактальная структура (рис. 5, б). Дробление продолжается вплоть до критического значения параметра  $\lambda = \lambda_{кр}$ , соответствующего переходу к хаосу (бифуркационные переходы описаны в [3] и в данной работе не обсуждаются).

Подобные описанным изменения структуры бассейнов притяжения при  $k \rightarrow 0$  имеют место и при движении по схеме рис. 2 сверху вниз от единственного односвязного хаотического аттрактора к бесконечному множеству многосвязных вблизи точки перехода порядок – хаос ( $\lambda = \lambda_{кр}$ ).

Введение связи по-разному сказывается на конфигурации бассейнов притяжения аттракторов, отличающихся формой и видом симметрии. Кроме уже отмеченного искривления границ бассейнов, изменение  $k$  приводит к перераспределению площадей бассейнов сосуществующих аттракторов. Площадь бассейнов притяжения циклов, мультипликаторы которых с ростом связи стремятся к  $(+1)$ , сокращается; за их счет увеличивается площадь «выживающих» циклов. Поглощая часть площади бассейна исчезающего вида, границы которого становятся вогнутыми (рис. 4, в), области бассейна «выживающих» циклов становятся округлыми. С дальнейшим увеличением  $k$  вблизи границы устойчивости несинфазных симметричных циклов имеет место «расщепление» элементов их бассейнов (рис. 4, з).

Все симметричные циклы (кроме синфазных), например  $2_1$ , с ростом параметра  $\lambda$  демонстрируют бифуркацию рождения тора. Бассейн притяжения квазипериодических колебаний (рис. 5, а) полностью поглощает бассейн притяжения цикла, на базе которого они сформировались. Зеркально симметричные пары циклов, рождающиеся в результате синхронизации движений на торе, например  $4_1$  и  $4_3$ , дробят бассейн притяжения тора таким образом, что площадь бассейнов циклов одинакова, бассейны зеркально симметричны, так что две границы их элементов вогнутые, а две – выпуклые (рис. 5, б).

Описанный путь эволюции бассейнов универсален и в его реализации участвуют регулярные аттракторы всех ветвей схемы (см. рис. 2). Бассейны притяжения хаотических аттракторов эволюционируют аналогично, если при

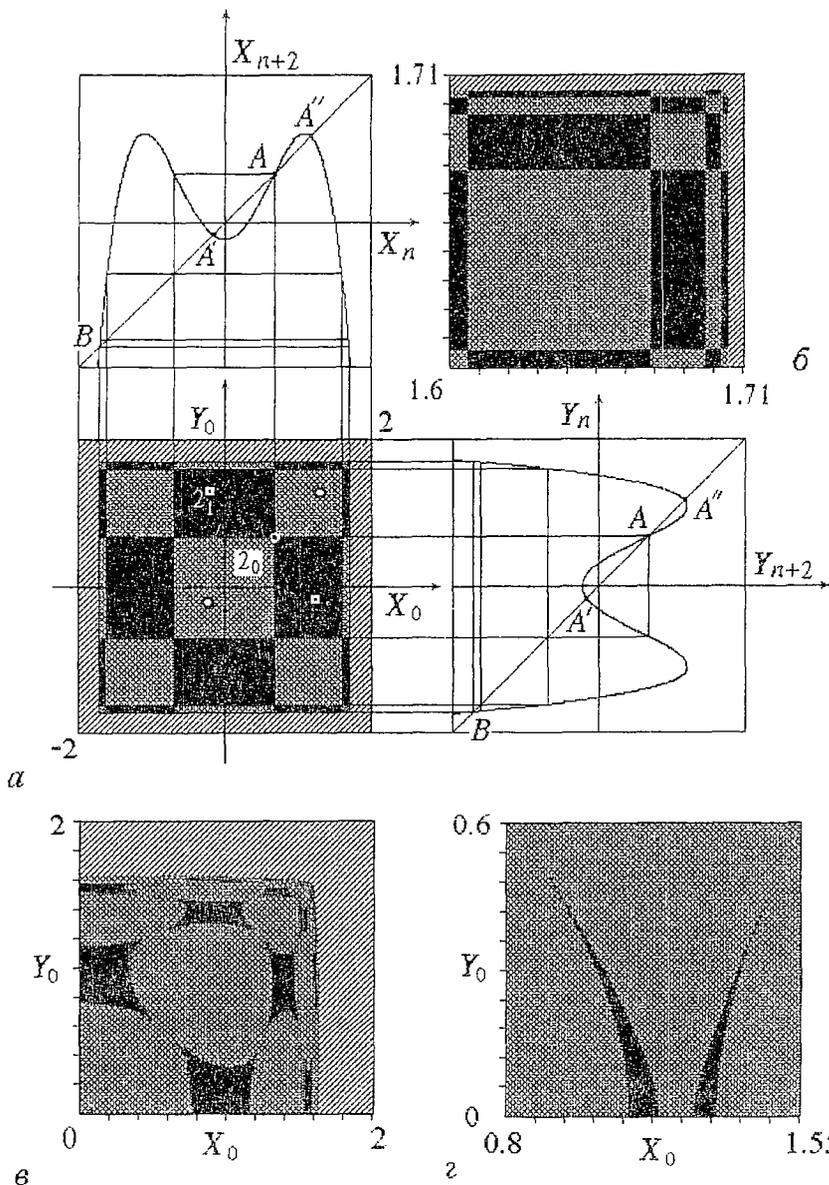


Рис. 4. Графики вторых итераций  $x_{n+2}=f(x_n)$ ,  $y_{n+2}=f(y_n)$  системы (1) и бассейны притяжения циклов  $2_0$  (черные окружности) и  $2_1$  (белые квадраты с черными точками внутри) при  $\lambda=1.2$  и  $k=0.0$ .  $A$  – неустойчивая точка (цикл периода 1 показан белой окружностью),  $A'$ ,  $A''$  устойчивые точки (цикл периода 2) (а). Увеличенное разрешение фрагмента обнаруживает более мелкие области у границы (б). Изменение формы бассейнов с ростом связи  $k$ :  $\lambda=1.2$  и  $k=0.01$  (в),  $\lambda=1.2$  и  $k=0.0485$  (г)

изменении параметров реализуются подобные нижней части схемы рис.2 перестройки, но при условии, что критическая линия (К.Мира [4,5]) не отсекает сегменты бассейнов притяжения. Поясним сказанное.

Исследуемая система (1) относится к классу необратимых отображений. Причем плоскость  $(X,Y)$  состоит из двух полуплоскостей  $Z_4$  и  $Z_0$ , точки которых соответственно имеют 4 прообраза или не имеют прообразов (точнее, не имеют действительных прообразов). Например, точка  $A$  на рис.3 имеет четыре прообраза, координаты которых получаются в результате построения обратных диаграмм Ламерея, то есть после первой итерации система (1) из этих точек попадает в  $A$ . В

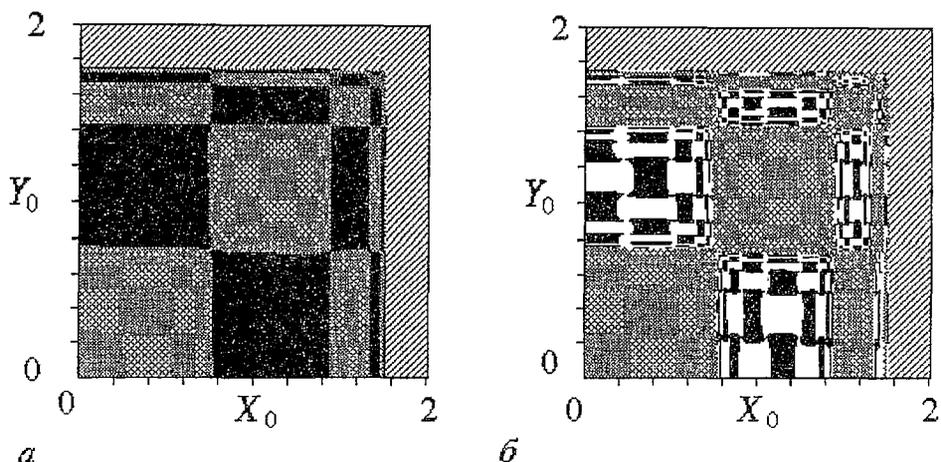


Рис. 5. Бассейны притяжения: *a* – циклов  $4_0$ ,  $4_2$  и тора при  $\lambda=1.3$  и  $k=0.01$ ; *б* – циклов  $4_0$ ,  $4_2$ ,  $4_1$ ,  $4_3$  при  $\lambda=1.3$  и  $k=0.006$

тоже время точка  $B$  не имеет прообразов, так как обратные диаграммы Ламерея не попадают на графики отображений, и, таким образом, на плоскости  $(X_0, Y_0)$  нет таких точек, из которых система (1) после первой итерации попадает в точку  $B$ . Границей между множествами таких точек является линия, названная в [4,5] критической. Критическую линию можно найти численно первой итерацией множества точек  $(X_0, Y_0)$ , при которых Якобиан  $J$  матрицы отображения обращается в нуль [4,5]. Для системы (1)  $J=4x_n y_n (1-2k)$ , то есть при  $k \neq 0,5$  таким множеством являются оси  $X=0$  и  $Y=0$ , а критическая линия  $l_{кр}$  (на рис.6 и рис. 7 она отмечена пунктиром) представляет собой два луча, выходящих из точки с координатами  $(\lambda, \lambda)$ .

Рассмотрим эволюцию бассейнов притяжения хаотических аттракторов в зависимости от их взаимного расположения с критической линией. При  $k \neq 0$  границы элементов бассейнов имеют выпуклую или вогнутую форму, последние, следуя введенной К.Мира географической терминологии, будем называть «заливами». При слабой связи критическая линия пересекает бассейны, не отсекая сегменты «заливов». Рис. 6, *a* и его увеличенный фрагмент – рис. 6, *б* иллюстрируют эту ситуацию для случая, когда в исследуемой системе сосуществуют четыре четырехсвязных хаотических аттрактора. С изменением параметров из-за различного влияния связи два аттрактора  $4^2$  и  $4^4$  объединяются в один –  $2^2$ , соответствующим образом сливаются и их бассейны притяжения (рис. 6, *в*). Аттракторы  $4^1$  и  $4^3$  почти не меняются, но внутри почти всех элементов их бассейнов притяжения (кроме тех, где находятся точки решения) образуются «озера» [4,5] (см. рис. 6, *в* и его увеличенный фрагмент на рис.6,*г*). Появление этих «озер» объясняется тем, что изменение параметров привело к смещению критической линии, в результате которого каждый ее луч отсек сегмент «залива» одного из элементов бассейнов притяжения аттракторов  $4^1$  и  $4^3$  (ср. рис.6,*б* и *г*). В результате такого изменения внутри части односвязной области притяжения аттрактора  $4^1$ , принадлежащей  $Z_4$ , появляется множество точек отсеченного участка бассейна аттрактора  $4^3$  (см. рис. 6, *г*). Наличие неограниченного числа прообразов различных рангов приводит к глобальным изменениям – появлению бесконечно большого числа «озер». Дальнейшее изменение параметров приводит к тому, что внутри «озер» формируются «острова», когда «озеро» пересекает критическую линию (рис. 6, *д* и увеличенный фрагмент – рис. 6, *е*). Затем внутри появившихся «островков» вновь формируются «озера» (в дальнейшем будем их называть вложенными) и так далее.

При дальнейшем изменении параметров  $\lambda$  и  $k$  происходят изменения, которые не удается объяснить с помощью описанного подхода. Аттрактор  $2^2$

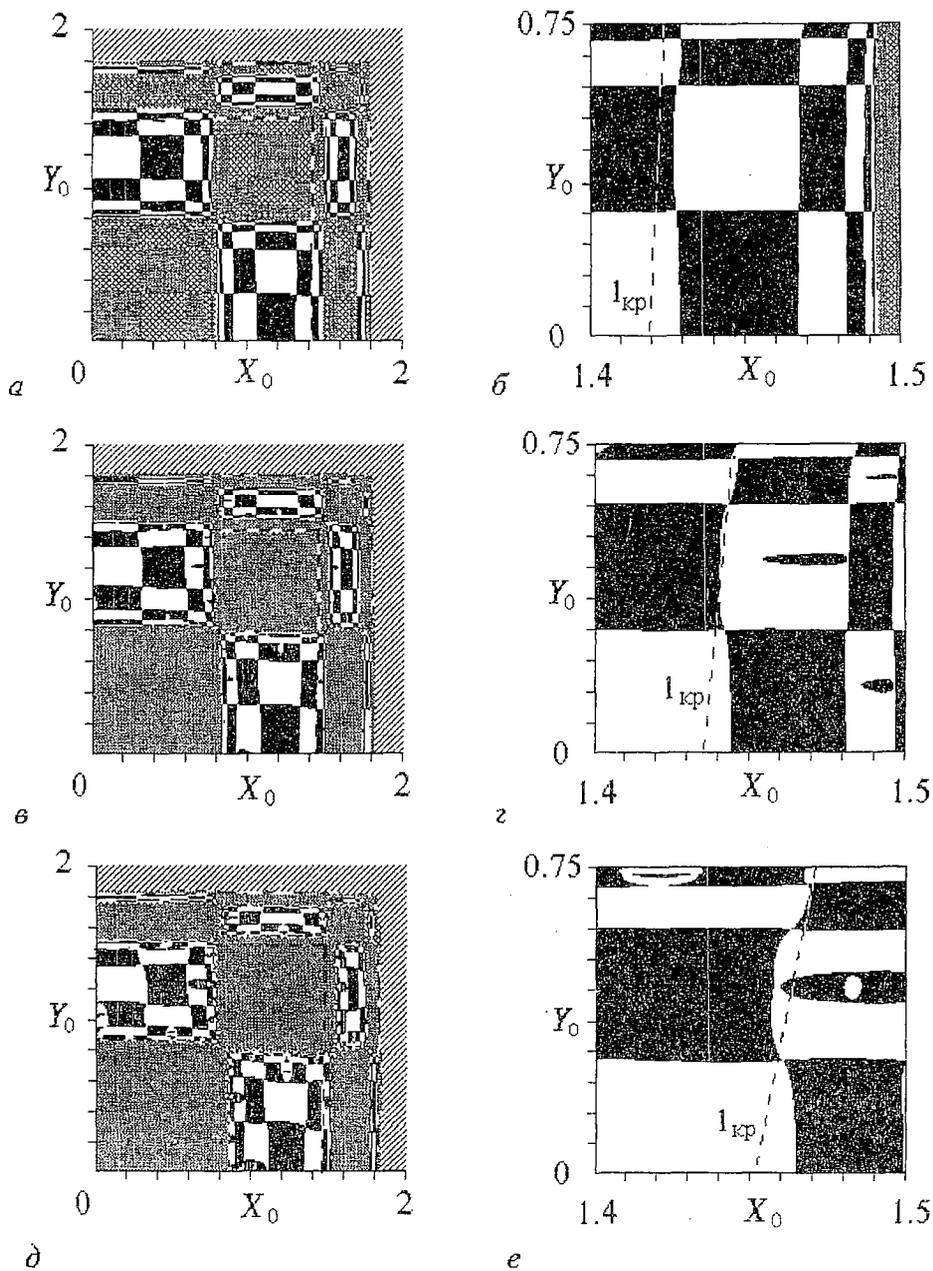


Рис. 6. Формирование «озер» в бассейнах притяжения хаотических аттракторов:  $a - \lambda=1.428, k=0.006$ ;  $b -$  увеличенный фрагмент  $a$ ;  $в - \lambda=1.454, k=0.0128$ ;  $г -$  увеличенный фрагмент  $в$ ;  $д - \lambda=1.49, k=0.025$ ,  $е -$  увеличенный фрагмент  $д$

претерпевает кризис в результате слияния с неустойчивым циклом  $N=1$  и становится непритягивающим. Это сопровождается качественно новым изменением области на плоскости  $(X_0, Y_0)$ , которую занимал его бассейн: происходит фрактальное дробление на бассейны притяжения аттракторов  $4^1$  и  $4^3$  (рис. 7,  $a$  и увеличенные фрагменты на рис. 7,  $в$  и  $г$ ). Последнее приводит к тому, что критическая линия проходит через фрактальное множество, и в результате невозможно определить характер ее пересечения с элементами бассейнов. Однако, степень вложения «озер» (рис. 7,  $б$ ) после таких изменений остается конечной, а

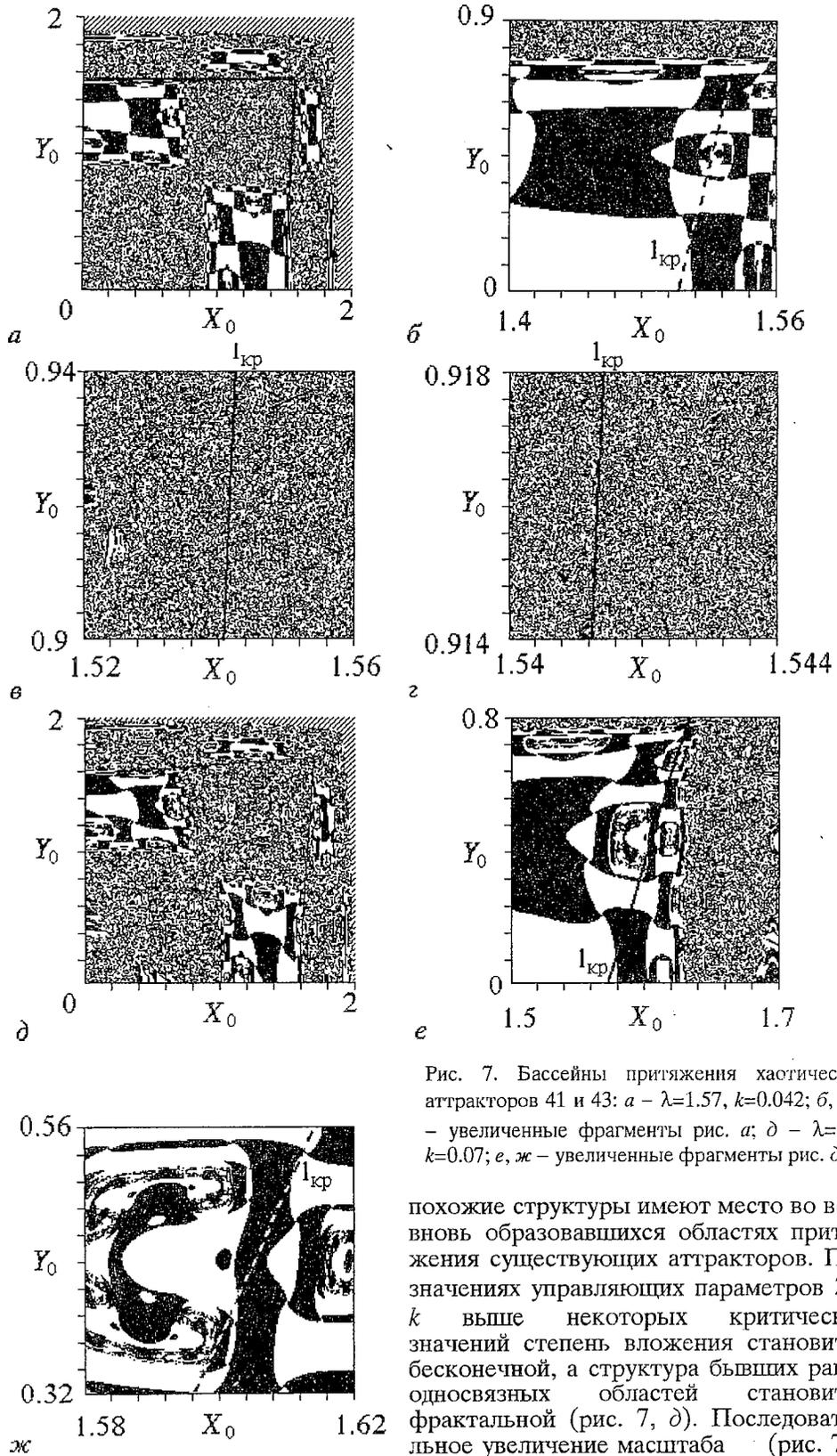


Рис. 7. Бассейны притяжения хаотических аттракторов 41 и 43: а -  $\lambda=1.57, k=0.042$ ; б, в, г - увеличенные фрагменты рис. а; д -  $\lambda=1.7, k=0.07$ ; е, ж - увеличенные фрагменты рис. д

похожие структуры имеют место во всех вновь образовавшихся областях притяжения существующих аттракторов. При значениях управляющих параметров  $\lambda$  и  $k$  выше некоторых критических значений степень вложения становится бесконечной, а структура бывших ранее односвязных областей становится фрактальной (рис. 7, д). Последовательное увеличение масштаба (рис. 7, е и ж) выявляет новые более мелкие

области. Описанный сценарий фрактализации бассейнов притяжения носит универсальный характер и проявляется для хаотических аттракторов более высокой связности, но в более узком интервале значений параметров.

### 3. Сравнение с экспериментом

На рис. 8 приведены двумерные проекции бассейнов притяжения циклов  $N = 2$  и  $4$  экспериментальной системы. В отличие от модели (1), исследованная часть плоскости  $(X_0, Y_0)$  ограничена пределами, выход за которые грозит разрушением диода из-за тепловой неустойчивости. В отсутствие связи ( $k = 0.0$ ) элементы бассейнов имеют прямоугольную форму (рис. 8, *a*), так что картина напоминает шахматную доску с разновеликими клетками. Увеличение связи, как и в модели, сопровождается расширением бассейна синфазного вида за счет несинфазного (рис. 8, *б*). Появление в фазовом пространстве дополнительных циклов при изменении параметров приводит к дроблению всех элементов существовавших ранее бассейнов в соответствии с описанными для системы (1) закономерностями (рис. 8, *в*). Вблизи сепаратрисы, разделяющей бассейны притяжения циклов различных  $(4_0, 4_2)$  и  $(4_1, 4_3)$  ветвей наблюдается последовательное уменьшение элементов, однако установить их самоподобие в эксперименте не представлялось возможным из-за нестабильностей и технических ограничений на масштаб разрешения. Поэтому граница между «блоками» на рисунке отмечена жирной линией, а пограничные области просто заштрихованы.

На рис. 9 приведены результаты экспериментальных исследований

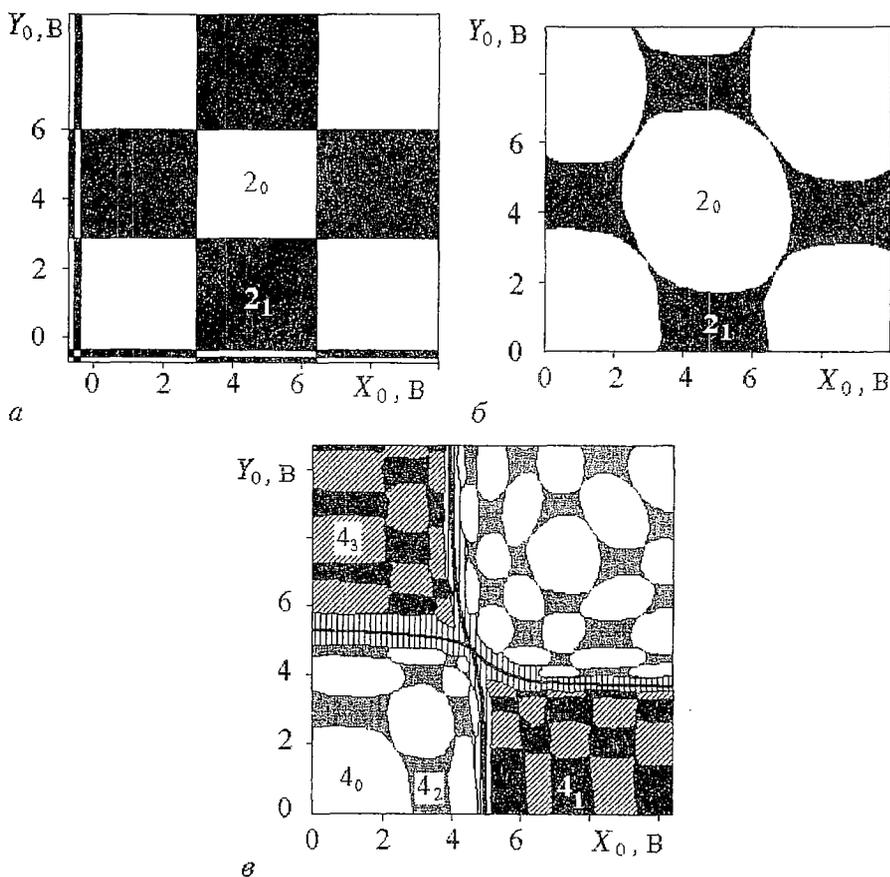


Рис. 8. Бассейны притяжения циклов экспериментальной системы на плоскости  $(X_0, Y_0)$ : *a* – циклов  $2_0$  и  $2_1$  при  $k=0.0$ ; *б* – при  $k \neq 0.0$ ; *в* – циклов  $4_0, 4_2, 4_1$  и  $4_3$

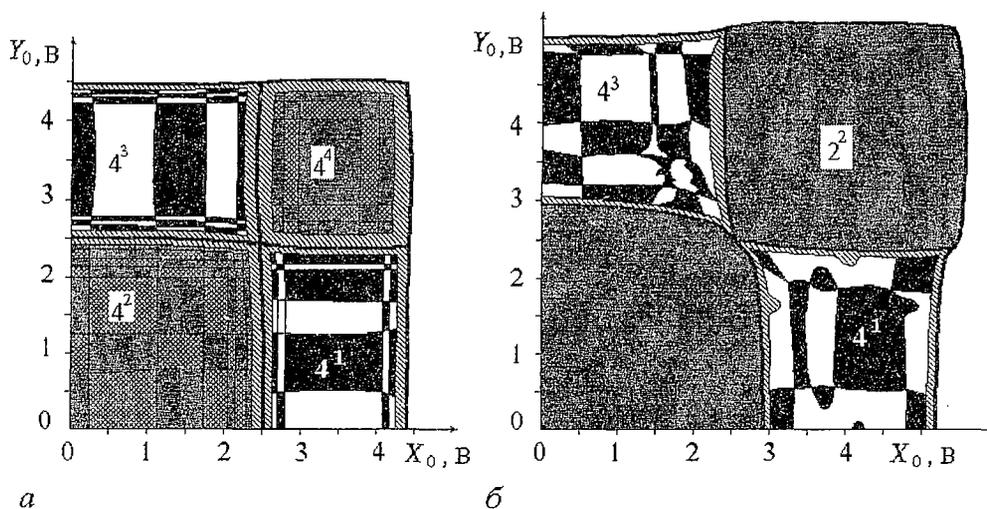


Рис. 9. Бассейны притяжения хаотических аттракторов экспериментальной системы: *a* –  $V=1$  В,  $k=0.002$  мСм; *б* –  $V=1.79$  В,  $k=0.025$  мСм

бассейнов притяжения четырехсвязных хаотических аттракторов. При слабой связи структура этих бассейнов (рис. 9, *a*) качественно соответствует рис.7, *a*, жирной линией обозначена сепаратриса, разделяющая бассейны притяжения пар аттракторов и в окрестности которой имеет место накопление областей (на рис. 9 отмечено штриховкой). При совместном изменении параметра внешнего воздействия и связи в структуре бассейнов притяжения экспериментальной системы наблюдаются изменения, описанные выше для системы (1). Аттракторы  $4^2$  и  $4^4$  сливаются, образуя аттрактор  $2^2$ . А внутри ранее односвязных областей бассейнов притяжения аттракторов  $4^1$  и  $4^3$  с изменением параметров образуются «озера», которые иллюстрирует рис.7, *в*. Дальнейшее изменение параметров приводит к тому, что в результате кризиса аттрактор  $2^2$  становится непритягивающим. При этом его бассейн притяжения дробится сложным образом на бассейны притяжения аттракторов  $4^1$  и  $4^3$ . Можно предположить, что в данном случае, как и для системы (1) (см. рис. 7, *д*), формируется фрактальная или фракталоподобная структура, но построить ее в эксперименте не представляется возможным. Опосредованно о наличии фрактальной структуры свидетельствует вид переходного процесса, и влияние на него естественных флуктуаций экспериментальной системы – установление того или иного режима – становится непредсказуемым.

### Заключение

Описано изменение конфигурации бассейнов притяжения аттракторов при вариации управляющих параметров (нелинейности и связи) в широких пределах, выделены типичные перестройки в их структуре. Экспериментально и численно обнаружено, что исчезновение одного из сосуществующих хаотических аттракторов может в некоторых случаях приводить к фрактальному дроблению его бассейна на бассейны оставшихся странных аттракторов. Обнаружены ситуации, когда изменение параметров приводит к появлению в структуре бассейнов притяжения множества «озер». Внутри этих «озер» образуются новые, а при некоторых критических значениях управляющих параметров структура бассейна становится фрактальной. Описанный сценарий носит универсальный характер и проявляет себя и в структуре бассейнов притяжения хаотических аттракторов большей связности. Отметим в то же время, что несмотря на все наблюдаемые метаморфозы бассейнов притяжения границы каждой отдельной крупной или мелкой односвязной области остаются гладкими.

В целом наблюдается качественное соответствие результатов физического

эксперимента и численного исследования, что свидетельствует об общности описанных закономерностей для объектов с удвоением периода из выделенного класса и о грубости представленной картины. Наблюдаемая в эксперименте асимметрия в структуре бассейнов притяжения относительно прямой  $X_0=Y_0$  связана с неидентичностью реальных подсистем, что доказано специальными экспериментами.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96-02-16753.*

## Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., York J.A. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients and unstable-unstable pair bifurcations // Phys.Rev.Lett. 1983. Vol.50, № 13. P. 935.
2. Grebogi C., Ott E., York J.A. Metamorphose of basin boundaries in nonlinear dynamical systems // Phys.Rev.Lett. 1996. Vol.56, № 10. P. 1011.
3. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т.60, вып.10. С.19.
4. Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H., Cathala J.C // Int.J. of Bif.&Chaos. 1995. Vol.4, № 2. P. 343.
5. Мира К. О бассейнах, порождаемых двумерными необратимыми отображениями. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 2. С.40.
6. Linsay P.S. Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator // Phys.Rev.Lett. 1981. Vol.47, № 19. P.1349.
7. Buskirk R., Jeffries C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // Phys.Rev.A. 1985. Vol.31, № 5. P.3332.
8. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 8. С. 991.
9. Астахов В.В., Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Особенности возникновения квазипериодических движений в системе диссипативно связанных нелинейных осцилляторов под внешним периодическим воздействием // Письма в ЖТФ. 1988. Т.14, вып.1. С.37.
10. Прохоров М.Д. Виды колебаний диссипативно связанных систем с удвоением периода при сильной связи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 4,5. С. 99.
11. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems // Prog.Theor. Phys. 1983. Vol.69. P.32.
12. Picovsky A.S. On interaction of strange attractors // Z. Phys. 1984. Vol.B55. P.149.
13. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 9. С.1050.
14. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постлов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркация развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С.1120.
15. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Квазиоднородные стохастические движения и их разрушение в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв.вузов. Радиофизика. 1988. Т.31, № 5. С.627.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 25.10.96  
после переработки 25.06.97

## EVOLUTION OF BASINS OF ATTRACTION FOR COUPLED PERIOD DOUBLING SYSTEMS

*S.A. Astakhov, B.P. Bezruchko, Ye.P. Seleznev, D.A. Smirnov*

Peculiarities of basin structure for dissipatively coupled period doubling systems are investigated both experimentally (*RL*-diode circuits) and numerically (system of quadratic maps). Characteristic types of basin evolution are recognized; in particular, two possible variants of basin fractalization are found.



*Астахов Сергей Александрович* – родился в Саратове (1976). Студент 4-го курса СГУ. Соросовский студент (1995, 1996). Круг научных интересов: экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах. Автор двух публикаций.



*Смирнов Дмитрий Алексеевич* – родился в Ершове Саратовской области (1977). Студент 3-го курса Колледжа прикладных наук СГУ, специализация – физика нелинейных динамических систем. Соросовский студент (1996, 1997). Область научных интересов: построение и исследование дискретных моделей нелинейных неавтономных динамических систем, анализ временных рядов. Автор трех публикаций.



## СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РЕЛЕЙНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*Д.С. Кащенко*

Численными и аналитическими методами исследована динамика системы из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью. В пространстве параметров выделены области «быстрой» и «долгой» синхронизации, исследован вопрос о синхронизации на неустойчивом цикле, при малых коэффициентах связи аналитическими методами показано, что динамика исходной системы определяется динамикой специального одномерного отображения.

### Введение

Исследованию явлений синхронизации взаимодействующих динамических систем в настоящее время уделяется особое внимание. Из сферы чисто теоретических интересов эти явления перешли в область практического применения. Проведенные в последние годы исследования сформировали новые представления о роли синхронизации (в том числе синхронизации сложных – хаотических – режимов) в природе; наметились перспективы их использования для создания новых информационных технологий. Существует значительное число аналитических и экспериментальных исследований хаотической синхронизации в динамических системах различной природы [1–11]. Несмотря на то, что в ряде работ получены достаточно общие результаты, характеризующие закономерности возникновения хаотической синхронизации, дальнейшее изучение этого явления представляет как теоретический, так и практический интерес.

В данной работе исследуется явление синхронизации в системе двух связанных простых автогенераторов первого порядка с нелинейной запаздывающей обратной связью релейного типа. Такие системы широко используются в ряде конкретных приложений, например, в электротехнике [12,13].

Статья состоит из трех разделов. В первом из них исследуется динамика базовой математической модели автогенератора указанного класса. Показано, что уравнение имеет единственный устойчивый цикл и счетное множество неустойчивых. Приведены результаты численного анализа, из которых следует, что все решения (с начальными условиями, удовлетворяющими условию типа невырожденности) при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к устойчивому циклу. Важное значение имеет оценка времени сходимости решений к циклу в зависимости от величины запаздывания и от степени сложности начальных условий.

Второй раздел является основным. Сначала в нем сформулирован критерий синхронизации для «системы первого приближения», которой служит дискретная система уравнений. Для исходной задачи о синхронизации в системе двух связанных генераторов этот критерий имеет важное значение. При его выполнении происходит «быстрая» синхронизация колебаний, а при его нарушении – «долгая». Для последнего случая построен график зависимости времени синхронизации от параметра запаздывания.

При уменьшении коэффициентов связи между генераторами структура решений может усложняться. В связи с этим в третьем разделе рассмотрена задача о динамике двух слабо связанных уравнений. Построено конечномерное отображение, динамика которого описывает поведение решений исходной системы.

## 1. Динамика уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + x = f(x(t-T)), \quad (1.1)$$

где  $T > 0$  – время запаздывания;  $f(s)$  – функция релейного типа

$$f(s) = \begin{cases} 1, & s < \gamma \\ 0, & s \geq \gamma \end{cases}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (1.2)$$

Отметим сразу, что данное уравнение не имеет состояний равновесия.

**1.1. Простейший цикл.** Назовем цикл  $x_0(t, T)$  уравнения (1.1) медленно осциллирующим, если расстояние между соседними корнями уравнения  $x_0(t, T) = \gamma$  больше, чем  $T$ .

Пусть  $x_0(0, T) = \gamma$  и  $\dot{x}_0(0, T) < 0$ . Тогда из условия медленной осцилляции  $x_0(t, T)$  следует неравенство  $x_0(t, T) > \gamma$  при  $t \in [-T, 0]$  и при  $t \in (0, T)$  имеем  $x_0(t, T) = \gamma \exp(-t)$ . На некотором отрезке, примыкающем справа к точке  $t = T$ , справедливо соотношение

$$x_0(t, T) = x_0(T, T) \exp(-(t-T)) + 1 - \exp(-(t-T)). \quad (1.3)$$

Пусть  $t_1$  и  $t_2$  соответственно первый и второй положительные корни уравнения  $x_0(t, T) = \gamma$ . Тогда из (1.3) получаем, что

$$t_1 = T + \ln[(1 - \gamma \exp(-T))/(1 - \gamma)]. \quad (1.4)$$

Формула (1.3) остается в силе при  $t \in (T, t_1 + T]$ . На отрезке  $[t_1 + T, t_2]$  имеем равенство

$$x_0(t, T) = x_0(t_1 + T, T) \exp[-(t - (t_1 + T))],$$

а для  $t_2$  верна формула

$$t_2 = t_1 + T + \ln[x_0(t_1 + T, T)/\gamma]. \quad (1.5)$$

В итоге получаем следующий результат:

**Теорема 1.** Уравнение (1.1) имеет экспоненциально орбитально устойчивое  $t_2$ -периодическое решение  $x_0(t, T)$ . Его период определяется формулами (1.4), (1.5).

На рис. 1, а изображен график решения  $x_0(t, T)$  при  $T=1$  и  $\gamma=0.3$ . Приведем асимптотические формулы для периодического решения. Сначала рассмотрим случай

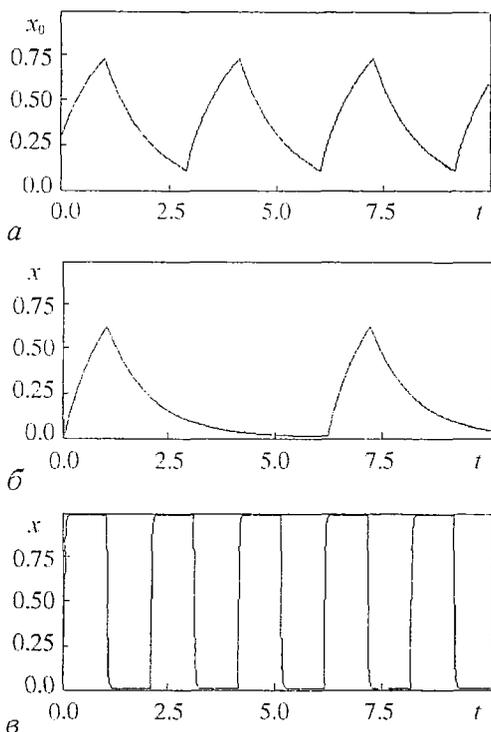


Рис. 1

1 поочередно на временных интервалах длины  $1+o(1)$ , и имеет период  $2+o(1)$ . Примерный вид решения при  $\varepsilon=0.02$  и  $\gamma=0.3$  приведен на рис. 1, в.

**1.2. Быстро осциллирующие периодические решения.** Выше было установлено существование устойчивого периодического решения  $x_0(t, T)$ , медленно осциллирующего около прямой  $x=\gamma$ . В этом разделе будет показано, что имеется счетное число быстро осциллирующих около этой же прямой неустойчивых периодических решений.

Рассмотрим множество начальных функций

$$C(\tau_1, \tau_2) = \{ \varphi(s, \tau) \in C_{[-T, 0]}, 0 < \tau_1, \tau_2 < 1, \tau_1 + \tau_2 < 1,$$

$$\varphi(-T + T\tau_1) = \varphi(-T + T(\tau_1 + \tau_2)) = \varphi(0) = \gamma,$$

$$\varphi(s) > \gamma \text{ при } s \in [-T, -T + T\tau_1) \cup (-T + T(\tau_1 + \tau_2), 0),$$

$$\varphi(s) < \gamma \text{ при } s \in (-T + T\tau_1, -T + T(\tau_1 + \tau_2)) \}.$$

Отметим, что решение  $x(t, \tau)$  уравнения (1.1) с начальными условиями  $x(s, \tau) \in C(\tau_1, \tau_2)$  зависит только от  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  и не зависит от выбора конкретного элемента множества  $C(\tau_1, \tau_2)$ . Примерный вид функции  $\varphi(s, \tau)$  изображен на рис. 2.

Для  $x(t, \tau)$  имеем

$$x(t, \tau) = \gamma \exp(-t), \text{ при } t \in [0, T\tau_1],$$

$$x(t, \tau) = (x(T\tau_1, \tau) - 1) \exp[-(t - T\tau_1)] + 1, \text{ при } t \in (T\tau_1, T(\tau_1 + \tau_2)],$$

$$x(t, \tau) = x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) \exp[-(t - T(\tau_1 + \tau_2))], \text{ при } t \in (T(\tau_1 + \tau_2), T].$$

$$0 < \gamma < 1. \quad (1.6)$$

Тогда формулы (1.4) и (1.5) принимают вид

$$t_1 = T + o(1), \quad t_2 = O(\ln|\gamma|).$$

Примерный вид решения  $x(t)$  при  $T=1$  и  $\gamma=0.01$  приведен на рис. 1, б. Отметим, что для значений  $\gamma$  близких к 1 приходим опять таки к случаю (1.6), если в уравнении (1.1) произвести замену  $x \rightarrow (1-x)$ .

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики периодического решения при  $T \rightarrow \infty$ . Сделаем в уравнении (1.1) замену

$$t \rightarrow Tt. \quad (1.7)$$

Полагая  $\varepsilon = T^{-1}$ , приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)). \quad (1.8)$$

Используя формулы (1.3)–(1.5), получаем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  простейший цикл уравнения (1.8) близок к ступенчатой функции, принимающей два значения 0 и

1 поочередно на временных интервалах длины  $1+o(1)$ , и имеет период  $2+o(1)$ .

При условии  $x(T(\tau_1+\tau_2), \tau) < \gamma$  решение  $x(t, \tau)$  через некоторое время совпадает с медленно осциллирующим периодическим решением  $x_0(t+\text{const}, T)$ . Пусть

$$x(T(\tau_1+\tau_2), \tau) > \gamma. \quad (1.9)$$

Обозначим, как и раньше, через  $t_1, t_2$  – первый и второй положительные корни уравнения  $x(t, \tau) = \gamma$ . Тогда получаем равенства

$$t_1 = T\tau_1 + \ln(1 - \gamma \exp(-T\tau_1)) - \ln(1 - \gamma),$$

$$t_2 = T(\tau_1 + \tau_2) + \ln x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) \ln \gamma.$$

Если  $t_2 \geq T$ , то  $x(t, \tau)$  через некоторое время совпадает с решением  $x_0(t + \text{const}, T)$ . Пусть

$$t_2 < T. \quad (1.10)$$

Рассмотрим оператор Пуанкаре

$$\Pi(\varphi(s, \tau)) = x(t_2 + s, \tau).$$

При условиях (1.9), (1.10) этот оператор преобразует множество  $C(\tau_1, \tau_2)$  в  $C(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ , где

$$\bar{\tau}_1 = T - t_2, \quad \bar{\tau}_2 = t_1. \quad (1.11)$$

Аналогичным способом строятся  $2m$ -мерные ( $m=2, 3, \dots$ ) отображения, описывающие поведение решений с  $2m$  пересечениями прямой  $x = \gamma$  на некоторых отрезках времени длины  $T$ . Динамика таких отображений определяет поведение решений уравнения (1.1) при  $t \rightarrow \infty$  с начальными условиями из выбранных специальных множеств.

Покажем, что каждое из таких отображений имеет неподвижную точку. Отметим, что неподвижной точке отвечает периодическое решение уравнения (1.1).

Зафиксируем произвольное  $z > 0$  и рассмотрим функцию  $x_0(t, z)$ . Через  $P(z)$  обозначим период этой функции. Для каждого целого  $m=0, 1, \dots$  функция  $x_0(t, z)$  является периодическим решением уравнения

$$\dot{x} + x = f(x(t - z - mP(z))).$$

Рассмотрим уравнение относительно  $z$

$$T = z + mP(z).$$

Поскольку функция  $P(z)$  монотонно возрастает и  $P(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow +0$ , то это уравнение для каждого  $m$  имеет единственное решение  $z_m$ . Отсюда следует, что каждая из функций  $x_0(t, z_m)$  ( $m=0, 1, \dots$ ) является периодическим решением уравнения (1.1). На интервале  $(-T, 0)$  количество корней уравнения  $x_0(t, z_m) = \gamma$  равно  $2m$ .

Неподвижная точка отображения (1.11), которой отвечает решение  $x_0(t, z_1)$ , легко находится из приведенных выше формул для  $x_0(t, z)$ . Отметим, что периодические решения  $x_0(t, z_m)$  при  $m \geq 1$  неустойчивы. Численный анализ

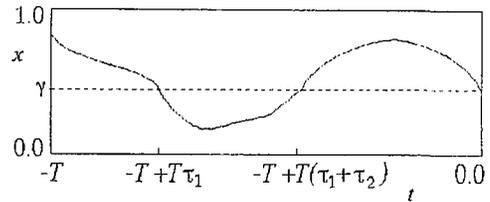


Рис. 2

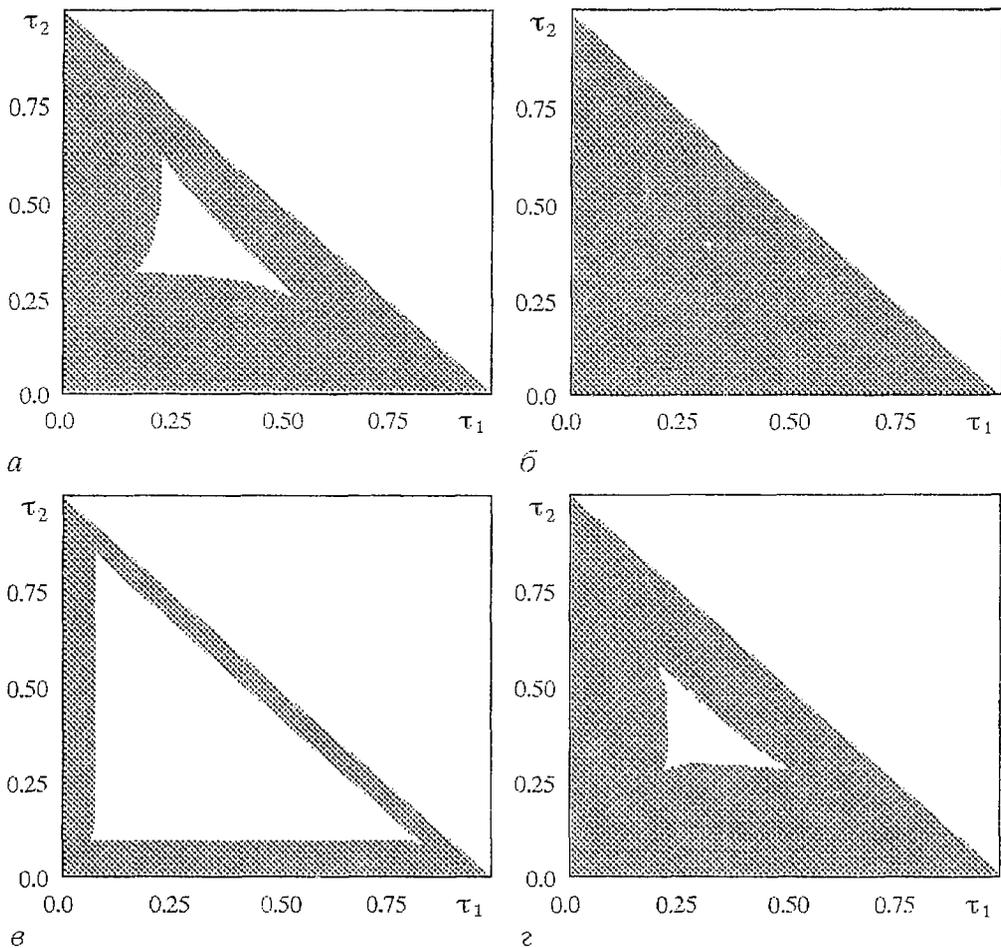


Рис. 3

показывает, что все решения (1.1) (кроме  $x_0(t, z_0)$ ) через некоторое время совпадают с  $x_0(t + \text{const}, T)$ .

Чтобы проиллюстрировать это на «фазовой плоскости»  $\tau_1, \tau_2$  отображения (1.11), зафиксируем произвольно точку  $(\tau_1, \tau_2)$  ( $0 < \tau_1, \tau_2 < 1, \tau_1 + \tau_2 < 1$ ) и произведём, согласно (1.11), при  $\varepsilon = 0.1$  сначала 20, а затем 100 итераций (рис. 3, а, б). Далее, при  $\varepsilon = 0.02$  произведем соответственно 100 и 100000 итераций (рис. 3, в, г). Темным цветом на этой плоскости отмечены те точки, для которых перестают быть верными неравенства (1.9) и (1.10), то есть соответствующее решение теряет начальную структуру и совпадает с  $x_0(t + \text{const}, T)$ . Отметим, что при незначительном увеличении  $T$  количество итераций, необходимых для того, чтобы все точки закрасились в темный цвет, резко возрастает (этот момент подробнее обсуждается в пункте 1.3).

**1.3. Оценка времени сходимости к простейшему циклу.** Уравнение (1.1), по-видимому, не имеет устойчивых решений, кроме простейшего цикла  $x_0(t, T)$ . Результаты численных экспериментов показывают, что все решения, начиная с некоторого момента времени  $L$ , совпадают с простейшим циклом. В связи с этим возникают два вопроса.

- 1) Как зависит величина  $L$  от параметра  $T$ ?
- 2) Как зависит величина  $L$  от начальных условий?

На рис. 4, а представлены зависимости времени  $L$  от  $T=\varepsilon^{-1}$  для решений с начальными функциями из множества  $C(\tau_1, \tau_2)$ . Стандартные численные методы показывают, что зависимость является экспоненциальной.

Чтобы проследить зависимость величины  $L$  от начальных условий, рассмотрим решения с начальными функциями из множества  $C(\tau_1, \tau_2)$  (см. рис 2). Фиксируем произвольно значение  $\tau_1$  и будем менять  $\tau_2$  от 0 до  $1-\tau_1$ . На рис.4,б представлены графики зависимости  $L$  от  $\tau_2$  при  $\tau_1=0.14$  и  $\tau_1=0.17$ .

Таким образом, единственным устойчивым режимом уравнения (1.1) является простейший цикл, но время попадания решений в его «малую» окрестность существенно зависит от малости параметра  $\varepsilon$  и от степени «сложности» начальных условий.

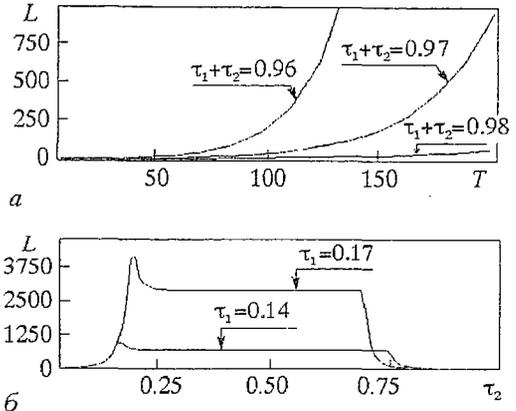


Рис. 4

## 2. Динамика системы двух связанных уравнений

В этом разделе мы обратимся к исследованию динамики двух одинаковых уравнений вида (1.1) с различными типами связи между ними. Наибольший интерес представляют два типа связи: диффузионная связь и связь через нелинейность  $f(x)$ . Рассмотрим отдельно каждую из них.

**2.1. Динамика системы уравнений с диффузионной связью.** Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} + x = f(x(t-T)) + d_1(y-x), \quad (2.1)$$

$$\dot{y} + y = f(y(t-T)) + d_2(x-y),$$

где коэффициенты диффузионной связи  $d_1, d_2$  неотрицательны, функция  $f(s)$  имеет вид (1.2), а время запаздывания предполагается большим

$$T \gg 1. \quad (2.2)$$

Условие (2.2) представляет собой основное ограничение, при котором здесь исследуется вопрос о синхронизации решений системы (2.1).

Выполним замену времени (1.7) и обозначим  $\varepsilon=T^{-1}$ , тогда система уравнений (2.1) принимает вид

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)) + d_1(y-x), \quad (2.3)$$

$$\varepsilon \dot{y} + y = f(y(t-1)) + d_2(x-y).$$

При  $\varepsilon=0$  имеем систему двух связанных отображений

$$x(t) = f(x(t-1)) + d_1(y(t)-x(t)), \quad (2.4)$$

$$y(t) = f(y(t-1)) + d_2(x(t) - y(t)).$$

Рассмотрим сначала вопрос о синхронизации для системы (2.4). Поскольку функция  $f$  принимает только два значения 0 и 1, то, решая при некотором  $t$  систему (2.4) относительно  $x$  и  $y$ , получаем 4 различных случая

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{bmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ 2. \quad & \begin{bmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} 1+d_2 \\ d_2 \end{bmatrix}, \\ 3. \quad & \begin{bmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ 1+d_1 \end{bmatrix}, \\ 4. \quad & \begin{bmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1+d_1 & -d_1 \\ -d_2 & 1+d_2 \end{bmatrix} = 1 + d_1 + d_2.$$

Из приведенных формул следует, что синхронизация имеет место, если

$$\min \{\gamma, 1-\gamma\} < \Delta^{-1} \max \{d_1, d_2\}, \quad (2.5)$$

что можно рассматривать как условие, накладываемое на коэффициенты связи  $d_1$  и  $d_2$ .

Возвращаясь к системе дифференциальных уравнений, отметим, что в общем случае динамика системы при  $\epsilon=0$  и при  $\epsilon>0$  существенно различна, но, как показывают численные эксперименты, при выполнении неравенства (2.5) (условия синхронизации при  $\epsilon=0$ ) в системе (2.3) происходит «быстрая» синхронизация за относительно короткое время, которое не увеличивается при уменьшении  $\epsilon$ . В расчетах это время не превышает 10.

Если условие (2.5) не выполнено, то синхронизация, тем не менее, также имеет место, но время, через которое она происходит, существенно больше; при  $\epsilon \rightarrow 0$  оно неограниченно растет. На рис. 5, а представлены графики зависимости времени синхронизации от  $\epsilon^{-1}$  при различных значениях параметров  $d_1, d_2$  и  $\gamma=0.3$ . Отметим, что эта зависимость оказывается линейной (если условие (2.5) выполнено, то график параллелен оси абсцисс).

Важно отметить, что синхронизация в системе (2.3) происходит существенно быстрее, чем установление простейшего цикла (см., например, рис. 4, а и рис. 5, а).

**2.2. Динамика системы уравнений, связанных через нелинейную функцию.** В случае нелинейной связи математической моделью служит система уравнений

$$\dot{x} + x = f[x(t-T) + d_1(y(t-T) - x(t-T))], \quad (2.6)$$

$$\dot{y} + y = f[y(t-T) + d_2(x(t-T) - y(t-T))],$$

где коэффициенты связи  $d_1, d_2$  удовлетворяют ограничению  $0 \leq d_1, d_2 \leq 1$ , а функция  $f(s)$  имеет вид (1.2).

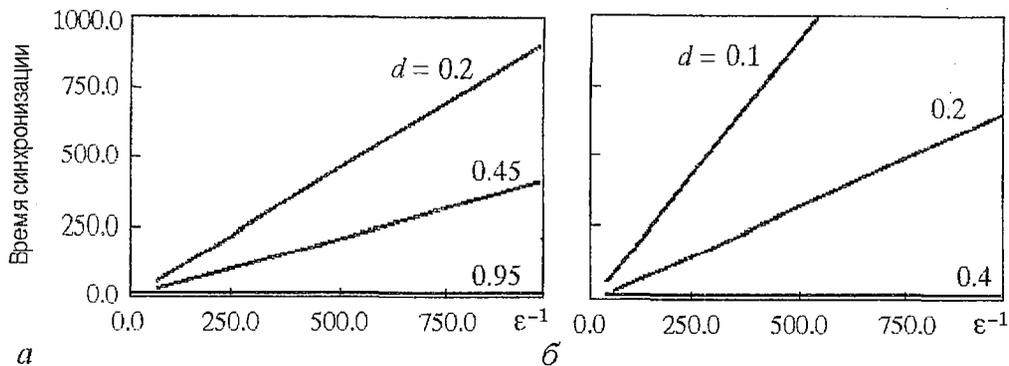


Рис. 5

Исследуется вопрос о синхронизации решений системы (2.6) при условии (2.2). После стандартной замены времени, приходим к системе

$$\varepsilon \dot{x} + x = f[x(t-1) + d_1(y(t-1) - x(t-1))], \quad (2.7)$$

$$\varepsilon \dot{y} + y = f[y(t-1) + d_2(x(t-1) - y(t-1))].$$

Условие синхронизации вырожденной (при  $\varepsilon=0$ ) системы (2.7) состоит в выполнении неравенства

$$\min \{\gamma, 1-\gamma\} < \max \{d_1, d_2\}. \quad (2.8)$$

При  $0 < \varepsilon \ll 1$  здесь, как и в предыдущем случае, при выполнении условия (2.8) происходит «быстрая» синхронизация (за время, которое не увеличивается при уменьшении  $\varepsilon$ ). Если условие (2.8) не выполнено, то синхронизация происходит за существенно большее время, которое неограниченно растет при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . На рис. 5, б представлены графики зависимости времени синхронизации от  $T = \varepsilon^{-1}$  при различных значениях параметров  $d_1, d_2$  и  $\gamma = 0.3$ . Отметим, что эта зависимость тоже оказывается линейной (если условие (2.8) выполнено, то график параллелен оси абсцисс).

**2.3. Оценка параметра синхронизации неустойчивого цикла.** Проблема синхронизации неустойчивых циклов возникает при изучении методов обработки и передачи информации (см., например, [1]).

Выше было показано, что уравнение (1.1) имеет счетное число неустойчивых циклов  $x_m(t) = x_0(t, z_m)$  ( $m=1, 2, \dots$ ). Зафиксируем произвольно  $m \geq 1$ . Система уравнений (2.1) имеет неустойчивое периодическое решение  $x(t) = y(t) = x_m(t)$ . Рассмотрим отдельно второе уравнение системы при  $x(t) = x_m(t)$

$$\dot{y} + y = f(y(t-T)) + d(x_m(t) - y). \quad (2.9)$$

Это уравнение имеет периодическое решение

$$y_m(t) = x_m(t). \quad (2.10)$$

Очевидно, что при малых  $d$  оно неустойчиво. Аналитическими методами довольно просто можно установить существование такого значения  $d_0$ , что при  $d > d_0$  периодическое решение (2.10) асимптотически устойчиво. Однако, с помощью этих методов получается лишь грубая оценка  $d_0$ . Поэтому возникает необходимость численного нахождения величины  $d_0$  в зависимости от параметров

$m$  и  $T$ . Кроме того, возникает проблема описания области притяжения периодического решения (2.10) при  $d > d_0$ . Такие задачи называют задачами о синхронизации на неустойчивом цикле.

Сформулируем основные результаты проведенных численных исследований.

При фиксированных  $T, \gamma, m$  значение  $d_0$  оказывается тем больше, чем сложнее начальные условия (то есть чем большее число пересечений прямой  $y = \gamma$  имеется на интервале  $(-T, 0)$ ).

Обозначим через  $d_{\max}$  пороговое значение величины  $d_0$ , такое что при  $d \geq d_{\max}$  решение (2.10) оказывается глобально устойчивым при любых начальных условиях. Установлено, что  $d_{\max} = d_0$  в том случае, если  $y(t)$  не имеет пересечений с прямой  $y = \gamma$  на интервале  $(-T, 0)$  (то есть начальное условие соответствует простейшему циклу). В табл. 1 приведены результаты расчета  $d_{\max}$  для уравнения (2.9) в зависимости от  $T$  и  $m$  при  $\gamma = 0.3$ . В табл. 2 представлены аналогичные данные для уравнения

$$\dot{y} + y = f[y(t-T) + d(x_m(t-T) - y(t-T))].$$

Таблица 1

$T \backslash m$	1	2
10	0.5301	0.8171
20	0.4335	0.4902

Таблица 2

$T \backslash m$	1	2
10	0.3290	0.4143
20	0.3011	0.3166

Общий вывод заключается в том, что  $d_{\max}$  уменьшается при увеличении времени запаздывания  $T$  и увеличивается при увеличении  $m$ .

Заметим, что если решение (2.10) неустойчиво, то  $y(t)$  стремится к более сложному, «близкому к периодическому» решению, вид которого при  $m=2$  представлен на рис. 6.

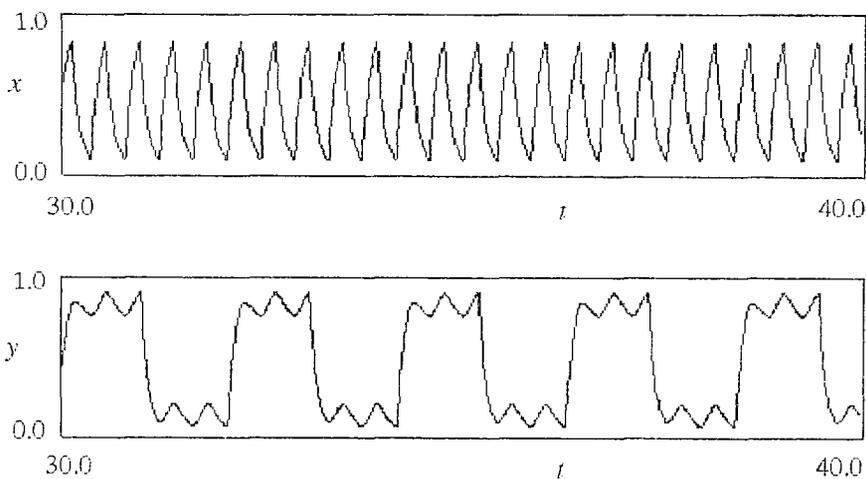


Рис. 6

### 3. Динамика системы уравнений при малых значениях коэффициентов связи

Численные результаты показывают, что при уменьшении коэффициентов связи  $d_1, d_2$  структура решений систем (2.1) и (2.6) усложняется. Поэтому представляет интерес исследовать в деталях вопрос о динамике двух слабо связанных генераторов вида (1.1). В настоящем разделе приведены аналитические результаты, касающиеся динамики таких систем при дополнительном условии (1.6), когда параметр  $\gamma$  мал.

Эти результаты объясняют ряд сложных эффектов, обнаруженных при численном анализе систем со слабой связью.

Сразу отметим, что полученные результаты переносятся и на случай, когда  $\gamma$  близко к 1, поскольку он сводится к предыдущему заменой  $\bar{x} = 1-x, \bar{y} = 1-y$ .

**3.1. Динамика системы (2.1).** В системе (2.1) сделаем замену  $x \rightarrow \gamma x, y \rightarrow \gamma y$ , в результате чего получим

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \lambda \Phi(x(t-T)) + d_1(y-x), \\ \dot{y} + y = \lambda \Phi(y(t-T)) + d_2(x-y), \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\lambda = \gamma^{-1}$ ,

$$\Phi(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s < 1, \\ 0, & \text{при } s \geq 1. \end{cases}$$

Отметим, что система (3.1) имеет однородный цикл

$$y(t) = x(t) = \lambda x_0(t, T). \quad (3.2)$$

Для исследования динамики системы (3.1) сначала положим  $z = y(0) - x(0)$  и рассмотрим множество  $C(z)$  (зависящее от  $z$  как от параметра) таких пар начальных функций  $\varphi(s), \psi(s) \in C_{[-T, 0]}$ , для которых  $\varphi(s), \psi(s) \geq 1$  при  $s \in [-T, 0]$  и

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1-z, \\ \psi(0) = 1, \end{cases} \quad \text{при } z < 0, \quad \begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \psi(0) = 1+z, \end{cases} \quad \text{при } z \geq 0.$$

Пусть  $x(t), y(t)$  – решения системы (3.1) с начальными функциями  $\varphi(s)$  и  $\psi(s)$ , соответственно, причем  $(\varphi(s), \psi(s)) \in C(z)$ . Отметим, что  $x$  и  $y$  не зависят от выбора конкретного элемента из  $C(z)$ .

Последовательно рассматривая систему (2.1) на отрезках  $[0, T], [T, 2T], [2T, 3T], \dots$ , можно получить явный вид функций  $x(t)$  и  $y(t)$ . Начиная с некоторого момента времени  $t=t^*$ , эти функции принимают асимптотически большие (порядка  $\lambda$ ) значения. Тем самым, на асимптотически большом промежутке времени, притыкающем к точке  $t_m = t^* + T$ , эти функции являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x = d_1(y-x), \\ \dot{y} + y = d_2(x-y). \end{cases} \quad (3.3)$$

Пусть  $t_{0x}, t_{0y}$  – первые при  $t > t_m$  корни уравнений  $x(t)=1$  и  $y(t)=1$ . Из сказанного выше следует, что  $t_{0x} = O(\ln \lambda), t_{0y} = O(\ln \lambda)$ . Положим  $t_0 = \min\{t_{0x}, t_{0y}\}$ . Тогда оператор последования Пуанкаре  $\Pi(\varphi(s), \psi(s)) = (x(t_0+s), y(t_0+s))$  преобразует множество

начальных условий  $C(z)$  в  $C(\bar{z})$ , где  $\bar{z}$  зависит только от  $z$ . Обозначим через  $g(z)$  зависимость величины  $\bar{z}$  от  $z$ . Траектория отображения  $\bar{z}=g(z)$  задает итерации множества начальных условий  $C(z)$ , и вопрос о динамике решений системы (3.1) сводится к исследованию одномерного отображения  $g(z)$ . Далее для него будут получены аналитические выражения.

Поскольку  $t_{0n}-t_{0y}=o(1)$ , то  $\bar{z}=g(z)=o(1)$ . Отсюда получаем следующий результат.

**Теорема 2.** При любых фиксированных (то есть независимых от  $\lambda$ ) значениях  $d_1, d_2$  и при достаточно больших  $\lambda$ , функции  $x(t)$  и  $y(t)$  стремятся к циклу (3.2) при  $t \rightarrow \infty$ .

Наиболее интересные результаты относятся к случаю, когда коэффициенты  $d_1, d_2$  малы. В зависимости от степени их малости можно выделить два случая, когда динамика рассматриваемой системы принципиально различна. В первом случае коэффициенты  $d_j$  имеют порядок  $O(\ln \lambda^{-1})$ , а во втором  $d_j=O(\lambda^{-1})$ . Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Пусть сначала  $d_j = O(\ln \lambda^{-1}), j=1,2$ , то есть

$$d_1 = \tilde{d}_1 / \ln \lambda, \quad d_2 = \tilde{d}_2 / \ln \lambda. \quad (3.4)$$

Введем вспомогательную функцию  $q(\delta, z)$

$$q(\delta, z) = (1+\delta)(X-Y)\sigma[(1+\delta)X - (X-Y)(1+\delta\sigma)]^{-1},$$

где  $\sigma = \exp[-(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2)]$ ,

$$X = 1 - \exp(-T),$$

$$Y = \begin{cases} 0, & 1+|z| \geq \exp(T), \\ 1 - (1+|z|)\exp(-T), & 0 \leq 1+|z| < \exp(T). \end{cases} \quad (3.5)$$

Основное утверждение состоит в том, что функция  $g(z)$ , фигурирующая в отображении  $\bar{z}=g(z)$  (динамика которого определяет поведение решений  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ ), с точностью  $o(1)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеет вид

$$g(z) = \begin{cases} -q(\delta, z) & \text{при } z \geq 0, \\ q(\delta^{-1}, z) & \text{при } z < 0, \end{cases} \quad \text{где } \delta = d_2/d_1. \quad (3.6)$$

Для обоснования формул (3.5), (3.6) рассмотрим случай  $z > 0$  (рассуждения для случая  $z < 0$  аналогичны). Пусть числа  $X$  и  $Y$  составляют главную часть асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$  величин  $x(t_m)$  и  $y(t_m)$ , то есть

$$x(t_m) = \lambda[X + o(1)], \quad y(t_m) = \lambda[Y + o(1)].$$

Найдем выражения для  $X$  и  $Y$ . Заметим, что при  $t \in [0, T]$  функции  $x(t)$  и  $y(t)$  удовлетворяют системе (3.3), а значит при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем

$$x(t) = \exp(-t) + o(1), \quad y(t) = (1+z)\exp(-t) + o(1).$$

Важным фактом, лежащим в основе дальнейших построений, является то, что при

любом  $z > 0$  существует  $r > 0$  такое, что на отрезке  $[T, T+r]$  функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \lambda + d_1(y - x), \\ \dot{y} + y = d_2(x - y), \end{cases}$$

Отсюда приходим к выводу, что при достаточно больших  $\lambda$  для каждого  $r_1$  такого, что  $0 < r_1 \leq r$ , выполнены условия

$$\begin{aligned} x(r_1+T) &= O(\lambda), \\ y(r_1+T) &= O(\lambda(\ln\lambda)^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, можно положить  $t_m = 2T + o(1)$ .

При  $t \in [T, 2T]$  имеем  $x(t) = \lambda[1 - \exp(-t+T) + o(1)]$ , откуда получаем равенство

$$X = 1 - \exp(-T).$$

Для величины  $Y$  определяющим является поведение  $y(t)$  на отрезке  $[0, T]$ . Пусть выполнено условие  $(1+z) \geq \exp(T)$ , тогда при  $t \in [T, 2T]$   $y(t) = O(\lambda(\ln\lambda)^{-1})$  и, следовательно,  $Y = 0$ . Если же  $0 \leq 1+z < \exp(T)$ , то  $y(t) = 1$  при  $t = \ln(1+z) + o(1)$ , поэтому

$$y(t) = \begin{cases} O(\lambda(\ln\lambda)^{-1}) & \text{при } t \in [T, \ln(1+z)+T], \\ \lambda(1 - \exp[-(t-T-\ln(1+z))]) + o(1) & \text{при } t \in [\ln(1+z)+T, 2T] \end{cases}$$

и

$$Y = 1 - (z+1)\exp(-T).$$

Поскольку  $X \geq Y$ , то  $t_{x0} > t_{y0}$ . Следовательно для  $t_0$  верна формула

$$t_0 = t_m + \ln\lambda + \ln\{X - (X-Y)(1+\delta \exp[-(\tilde{d}_1+\tilde{d}_2)])/(1+\delta)\} + o(1).$$

Тогда

$$x(t_0) = 1 + (1+\delta)(X-Y)\exp[-(\tilde{d}_1+\tilde{d}_2)]/\{(1+\delta)X - (X-Y)(1+\delta \exp[-(\tilde{d}_1+\tilde{d}_2)])\} + o(1).$$

Отсюда вытекает, что с точностью до  $o(1)$  (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) функция  $g(z)$  имеет вид (3.6).

Анализируя отображение  $g(z)$ , получаем результат

**Теорема 3.** Пусть

$$\exp[-(\tilde{d}_1+\tilde{d}_2)]/[\exp(T) - 1] < 1 \quad (> 1).$$

Тогда нулевое состояние равновесия отображения  $g(z)$  асимптотически устойчиво (неустойчиво). Этому состоянию равновесия отвечает устойчивый (неустойчивый) однородный цикл системы (2.1).

**Теорема 4.** Пусть

$$|g(\exp(T))| = (\delta^{-1}+1)\exp[-(\tilde{d}_1+\tilde{d}_2)]/[1 - \exp[-(\tilde{d}_1+\tilde{d}_2)]] \geq \exp(T)$$

и

$$|g(-\exp(T))| = (1+\delta)\exp[-(\tilde{d}_1+\tilde{d}_2)]/[1 - \exp[-(\tilde{d}_1+\tilde{d}_2)]] \geq \exp(T).$$

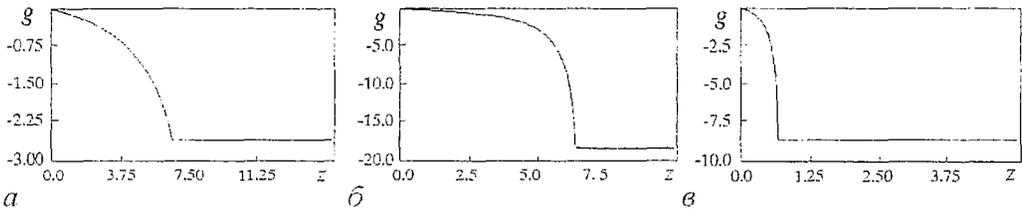


Рис. 7

Тогда отображение  $\gamma(z)$  имеет суперустойчивый цикл периода 2:  $(g(\exp(T)), g(-\exp(T)))$ , и нет циклов других периодов. Этому циклу отображения  $g(z)$  отвечает устойчивый неоднородный цикл системы (2.1).

На рис. 7 приведены графики отображения  $g(z)$  при некоторых значениях параметров  $T, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ .

В предыдущих построениях использовался тот факт, что оба коэффициента связи  $d_1, d_2$  отличны от нуля. Поэтому случай, когда один из коэффициентов равен нулю, нуждается в отдельном рассмотрении. Пусть

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \tilde{d}_2 / \ln \lambda.$$

Тогда при  $z \geq 0$  отображение (3.6) имеет вид

$$g(z) = -(X-Y)\exp(-\tilde{d}_2) / [X - (X-Y)\exp(-\tilde{d}_2)], \quad (3.7)$$

где  $X$  и  $Y$  определяются по формулам (3.5). Если же  $z < 0$ , то

$$g(z) = -|z|\exp(-\tilde{d}_2) / (1+|z|). \quad (3.8)$$

Исходя из формул (3.7) и (3.8), можно заключить, что нулевое состояние равновесия отображения  $g(z)$ , которому отвечает однородный цикл (3.2), является глобально устойчивым при любых  $d$ .

В случае, когда коэффициенты связи равны ( $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = d$ ), нулевое состояние равновесия отображения  $g(z)$  асимптотически устойчиво при  $d > -1/2 \ln(\exp(T)-1)$  и неустойчиво при  $d < -1/2 \ln(\exp(T)-1)$ . При  $d \leq 1/2 \ln(2\exp(-T)+1)$  отображение  $g(z)$  имеет суперустойчивый цикл периода 2.

Как оказывается, существенная перестройка фазового портрета исходной системы может произойти, когда коэффициенты связи  $d_1, d_2$  становятся порядка  $O(\lambda^{-1})$ . Исследуем этот случай.

Будем считать, что

$$d_1 = \tilde{d}_1 / \lambda, \quad d_2 = \tilde{d}_2 / \lambda. \quad (3.9)$$

Тогда при  $t \in [t_m, t_0]$  имеем

$$x(t) = \lambda[X + o(1)]\exp[-(t-t_m)],$$

$$y(t) = \lambda[Y + o(1)]\exp[-(t-t_m)],$$

где  $t_0$  – первый корень уравнения  $y(t)=1$ , если  $X \geq Y$ , или уравнения  $x(t)=1$ , если  $X < Y$ . Отсюда с точностью до  $o(1)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем формулу для отображения  $g$

$$g(z) = \begin{cases} (-XY^{-1} + 1)\text{sign}z, & X \geq Y, \\ (YX^{-1} - 1)\text{sign}z, & X < Y. \end{cases} \quad (3.10)$$

Найдем выражения для  $X$  и  $Y$  в случае  $z \geq 0$  (для  $z < 0$  рассуждения аналогичны). При  $t \in [0, t_1 + T]$  решения  $x(t)$  и  $y(t)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \lambda \Phi(x(t-T)) + d_1(y-x), \\ \dot{y} + y = \tilde{d}_2(x-y), \end{cases} \quad (3.11)$$

где  $t_1$  – первый корень уравнения  $y(t)=1$ , для которого  $\dot{y}(t_1) < 0$ . Заметим, что поведение  $x(t)$  на отрезке  $[0, t_1 + T]$  аналогично случаю, когда выполнены условия (3.4). Используя (3.11), приходим к выводу, что

$$y(t) = \begin{cases} (1+z)\exp(-t) + o(1), & 0 \leq t \leq T, \\ (y(T) - \tilde{d}_2)\exp[-(t-T)] + \tilde{d}_2[1 - (t-T)\exp[-(t-T)]] + o(1), & T < t \leq M, \\ \exp[-(t-2T)][\tilde{d}_2(1 - \exp(-T))(t-2T) + y(2T)] + o(1), & M < t \leq t_1 + T, \end{cases} \quad (3.12)$$

где  $M = \min\{2T, t_1 + T\}$ .

Обозначим через  $t_1, t_2, \dots$  нумерованные в порядке возрастания корни уравнения

$$y(t) = 1,$$

принадлежащие отрезку  $[t_i, t_i + T]$ . Поскольку на этом отрезке функция  $y(t)$  имеет не более одного максимума и не более одного минимума, то таких корней не может быть больше трех.

Пусть найдено  $n$  корней. Удобно положить  $t_{n+1} = t_1 + T$ . Если при некотором  $i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) на отрезке  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  выполнено условие  $0 < y(t) \leq 1$ , то при  $t \in [t_i + T, t_{i+1} + T]$  функция  $y(t)$  является решением уравнения

$$\dot{y} + y = \lambda[1 + o(1)].$$

Тем самым

$$y(t) = \lambda + [y(t_i + T) - \lambda]\exp[-(t - t_i - T)] + o(\lambda). \quad (3.13)$$

Если же при некотором  $i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) на отрезке  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  выполняется неравенство  $y(t) \geq 1$ , то при  $t \in [t_i + T, t_{i+1} + T]$  получаем равенство

$$y(t) = y(t_i + T)\exp[-(t - t_i - T)] + o(\lambda). \quad (3.14)$$

Таким образом, на отрезке  $t \in [t_1 + 2T, t_0]$  функции  $x(t)$  и  $y(t)$  удовлетворяют уравнению (3.3). Поэтому полагаем  $t_n = t_1 + 2T$ . Используя (3.13) и (3.14), получаем для величин  $X$  и  $Y$  в формуле (3.10) итоговые соотношения

$$y(t_1 + 2T) = \lambda[Y + o(1)],$$

$$X = [1 - \exp(-T)]\exp(-t_1).$$

**3.2. Динамика системы (2.6).** Произведем в (2.6) замены  $u = (1 - d_1)x + yd_1$ ,  $v = d_2x + (1 - d_2)y$  и  $x = \gamma u$ ,  $y = \gamma v$ , тогда

$$\dot{x} + x = \lambda[(1 - d_1)\Phi(x(t-T)) + d_1\Phi(y(t-T))], \quad (3.15)$$

$$\dot{y} + y = \lambda[d_2\Phi(x(t-T)) + (1 - d_2)\Phi(y(t-T))].$$

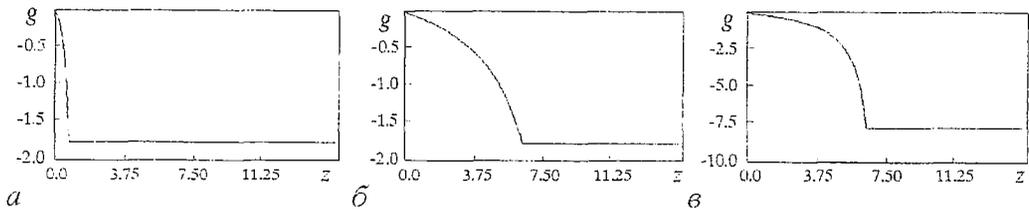


Рис. 8

Построим отображение  $g(z)$ , задающее итерации множества начальных условий  $S(z)$ . Во всех случаях с точностью до  $o(1)$  функция  $g(z)$  имеет вид

$$g(z) = \begin{cases} (-XY^{-1} + 1)\text{sign}z, & X \geq Y, \\ (YX^{-1} - 1)\text{sign}z, & X < Y. \end{cases} \quad (3.16)$$

Найдем теперь выражения для  $X$  и  $Y$ .

Пусть  $0 < d_1, d_2 \leq 1$  – произвольные фиксированные числа. Значения  $X$  и  $Y$  зависят от поведения на отрезке  $[0, T]$  функций  $x(t)$  и  $y(t)$ . Для решений  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $t \in [0, T]$  получаем равенства

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-t), & x(t) &= (1+|z|)\exp(-t), \\ y(t) &= (1+z)\exp(-t), & y(t) &= \exp(-t), \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{при } z \geq 0; \\ \text{при } z < 0. \end{array}$$

На отрезке  $[T, 2T]$  соответствующие формулы при  $z \leq 0$  имеют вид

$$\begin{cases} X = (1-d_1)(1-\exp(-T)), \\ Y = d_2(1-\exp(-T)), \end{cases} \quad 1+|z| \geq \exp(T),$$

$$\begin{cases} X = 1 + [(1-d_1)(1-(1+|z|)^{-1}) - 1]\exp(-T)(1+|z|), \\ Y = 1 + [d_2(1-(1+|z|)^{-1}) - 1]\exp(-T)(1+|z|), \end{cases} \quad 1 \leq 1+|z| < \exp(T),$$

а при  $z < 0$

$$\begin{cases} X = (1-d_2)(1-\exp(-T)), \\ Y = d_1(1-\exp(-T)), \end{cases} \quad 1+|z| \geq \exp(T),$$

$$\begin{cases} X = 1 + [(1-d_2)(1-(1+|z|)^{-1}) - 1]\exp(-T)(1+|z|), \\ Y = 1 + [d_1(1-(1+|z|)^{-1}) - 1]\exp(-T)(1+|z|), \end{cases} \quad 1 \leq 1+|z| < \exp(T).$$

На рис. 8 приведены графики отображения  $g(z)$  при различных значениях параметров  $T, d_1, d_2$ .

**Теорема 5.** Пусть

$$\exp(-T)[1 - \exp(-T)]^{-1}|1-d_1-d_2| < 1 \quad (> 1),$$

тогда нулевое состояние равновесия отображения  $g(z)$ , которому соответствует однородный цикл (3.2) системы (2.6), является устойчивым (неустойчивым).

Пусть выполнены условия (3.4). Тогда при  $1 \leq 1+|z| < \exp(T)$  получаем

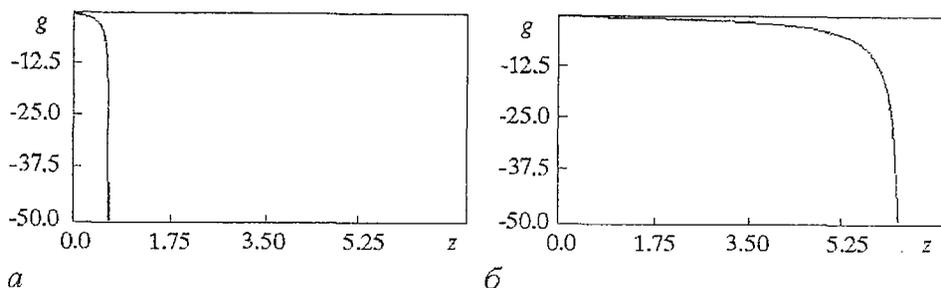


Рис. 9

$$X = 1 - \exp(-T),$$

$$Y = 1 - (1+|z|)\exp(-T).$$

Если, однако,  $1+|z| > \exp(T)$ , то первая итерация множества начальных условий  $C(z)$  есть множество  $\tilde{C}(z)$ , отличающееся от  $C(z)$  тем, что

$$\begin{cases} \varphi(0) = -z \ln \lambda, \\ \psi(0) = 1, \end{cases} \quad \text{при } z < 0,$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \psi(0) = z \ln \lambda, \end{cases} \quad \text{при } z \geq 0.$$

Основное утверждение состоит в том, что оператор последования Пуанкаре  $\Pi(\varphi(s), \psi(s)) = (x(t_0+s), y(t_0+s))$ , преобразует множество начальных условий  $\tilde{C}(z)$  в  $\tilde{C}(z)$ , где с точностью до  $o(1)$  (при  $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$\tilde{z} = \tilde{g}(z) = \begin{cases} -\tilde{d}_2^{-1} & \text{при } 1+z \geq \exp(T), \\ -\tilde{d}_1^{-1} & \text{при } -1+z \leq -\exp(T). \end{cases}$$

На рис. 9 приведены графики отображения  $g(z)$  при различных значениях параметров  $T, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ .

**Теорема 6.** Пусть

$$\exp(-T)[1 - \exp(-T)]^{-1} < 1 \quad (> 1),$$

тогда нулевое состояние равновесия отображения  $g(z)$ , которому соответствует однородный цикл (3.2) системы (2.6), является устойчивым (неустойчивым).

При достаточно больших  $\lambda$  система (3.15) имеет устойчивый неоднородный цикл, удовлетворяющий начальным условиям  $x(s) = \exp(-s)$ ,  $y(s) = \tilde{d}_2^{-1} \exp(-s)$ .

При выполнении условий (3.9) все рассуждения аналогичны приведенным выше с заменой системы (3.11) на

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \lambda \Phi(x(t-T)), \\ \dot{y} + y = \tilde{d}_2 \Phi(x(t-T)), \end{cases}$$

а формулы (3.12) заменяются на

$$y(t) = \begin{cases} (1+z)\exp(-t)+o(1), & 0 \leq t \leq T, \\ (y(T) - \tilde{d}_2)\exp[-(t-T)]+o(1), & T < t \leq M, \\ \exp[-(t-2T)]y(2T) + o(1), & M < t \leq t_1+T, \end{cases}$$

где  $M = \min\{2T, t_1+T\}$ .

### Заключение

В статье рассмотрена динамика одного из простейших генераторов с запаздыванием. Показано, что его единственным устойчивым режимом является цикл, тогда как неустойчивых периодических режимов имеется бесконечно много. При некоторых условиях (типа невырожденности) каждое решение стремится к циклу при  $t \rightarrow \infty$ . Однако, в зависимости от степени сложности начального условия, соответствующее решение демонстрирует сложное поведение в течение отрезка времени, которое экспоненциально возрастает с увеличением запаздывания.

Исследована динамика двух простейших генераторов с двумя типами связи. Получен критерий «быстрой» и «долгой» – в течение промежутка времени, линейно зависящего от запаздывания – синхронизации. Приведена оценка параметра синхронизации на неустойчивом цикле. Аналитическими методами рассмотрена динамика в случае слабой связи между генераторами. Построены одномерные отображения, динамика которых определяет поведение реперений исходной системы. Показано, что наряду с однородным устойчивым циклом может существовать неоднородный устойчивый цикл.

### Библиографический список

1. Дмитриев А.С. Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38, № 1. С.1.
2. Parlitz U., Chua L.O., Kocarev L., Halle K., Shang A. Transmission of Digital Signals by Chaotic Synchronization // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol.2, № 4. P. 973.
3. Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С. Передача информации с помощью детерминированного хаоса // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 7. С.1310.
4. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion on coupled-oscillator systems IV // Progr. Theor. Phys. 1986. Vol. 6, № 5. P. 1087.
5. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 12. С. 561.
6. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.
7. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1050.

8. Кузнецов Ю.И., Мигулин В.В., Минакова И.И., Сильнов Б.А. Синхронизация хаотических колебаний // ДАН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 1388.
9. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
10. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука 1989.
11. Кащенко С.А. Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 3. С. 307.
12. Kiliyas T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W. Electronic chaos generators – design and applications // International Journal of Electronics. Nov. 1995. Vol. 79, №. 6. P. 737.
13. Moegel A., Schwarz W., Kaschenko S. Analysis and simulation principles for chaotic systems containing delay elements. NDES '96. Seville, Spain, 1996.

Ярославский государственный  
университет

Поступила в редакцию 14.12.96  
после переработки 9.04.97

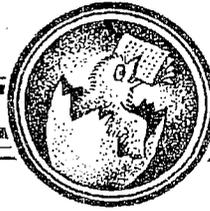
## SYNCHRONIZATION IN A SYSTEM OF TWO CONNECTED OSCILLATORS OF THE FIRST ORDER WITH RELAY DELAYED FEEDBACK

*D. Kaschenko*

Using the numerical and analytical methods dynamics of two connected oscillators of the first order with relay delayed feedback is investigated. In the space of parameters the areas of «fast» and «long» synchronization are established. Question on synchronization on a unstable cycle is investigated. In case of small coefficients of diffusion by analytical methods it is shown, that dynamics of initial system is determined by dynamics of the special onedimensional map.



*Кащенко Дмитрий Сергеевич* – родился в Ярославле (1974), студент 5-го курса математического факультета Ярославского государственного университета.



## СВОЙСТВА СКЕЙЛИНГА ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОД ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*Н. Ю. Иваньков*

Методом ренормализационной группы исследовано влияние внешнего периодического возмущения на систему, описываемую логистическим отображением. Показано, что для рациональных частот воздействия пространство параметров модельного отображения обладает свойствами самоподобия вблизи критической точки, причем факторы масштабного преобразования определяются собственными числами линеаризованного уравнения ренормализационной группы.

### Введение

Как известно, широко распространены диссипативные динамические системы, демонстрирующие переход от порядка к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [1–3]. Поведение таких систем хорошо моделируется одномерными отображениями вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

где  $x$  – динамическая переменная;  $n$  – дискретное время;  $f(x)$  – гладкая функция, отображающая некоторый отрезок оси  $x$  в себя и имеющая на этом отрезке единственный квадратичный максимум. Примером может служить логистическое отображение

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad (2)$$

свойства которого изучены весьма подробно. С увеличением параметра  $\lambda$  в системе (2) наблюдается переход к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода. Последовательность бифуркационных значений параметра сходится к  $\lambda_c = 1.40116\dots$  [4–6].

В настоящей работе рассматривается воздействие малого периодического возмущения на систему, описываемую рекуррентным уравнением (2). Так как  $\lambda$  – единственный существенный параметр модели, то именно его периодическое изменение и изучается.

Итак, анализируется следующая модель [7–9]:

$$x_{n+1} = [\lambda + \varepsilon \cos(2\pi\omega n + \varphi)] - x_n^2, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – амплитуда;  $\varphi$  – начальная фаза внешней периодической силы;  $\omega$  – число

вращения, характеризующее соотношение периодов собственного движения и внешнего воздействия.

Цель работы состоит в выявлении и иллюстрации свойств скейлинга пространства параметров отображения (3). Можно ожидать, что закономерности динамики системы с внешним периодическим воздействием окажутся универсальными в той же степени, как и закономерности Фейгенбаума, характерные для отображения (2).

Данная работа существенно опирается на результаты работ [8,9], в которых был развит метод ренормализационной группы (РГ), пригодный для исследований рассматриваемой системы в области малых амплитуд воздействия.

## 1. Ренормгрупповой анализ

Чтобы понять природу закономерностей скейлинга, применим к исследуемому отображению метод РГ, как это было проделано в работе [9] и подобно тому, как этот метод был использован для анализа логистического отображения [4–6, 10].

Рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = f_0(x_n) + \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n], \quad (4)$$

в котором  $f_0(x)$  – гладкая функция с единственным квадратичным экстремумом. Так как амплитуды косинус- и синус-компонент внешнего периодического воздействия задаются функциями динамической переменной  $x$ , то отображение (4) является более общим, чем (3). Выполним отображение (4) дважды, выразив таким образом  $x_{n+2}$  через  $x_n$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= f_0(x_{n+1}) + \varepsilon [Q_0(x_{n+1}) \cos 2\pi\omega_0(n+1) + P_0(x_{n+1}) \sin 2\pi\omega_0(n+1)] = \\ &= f_0(f_0(x_n) + \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n]) + \\ &+ \varepsilon [Q_0(f_0(x_n) + \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n]) \cos 2\pi\omega_0(n+1) + \\ &+ P_0(f_0(x_n) + \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n]) \sin 2\pi\omega_0(n+1)] \approx \\ &\approx f_0(f_0(x_n)) + f_0'(f_0(x_n)) \varepsilon [Q_0(x_n) \cos 2\pi\omega_0 n + P_0(x_n) \sin 2\pi\omega_0 n] + \\ &+ \varepsilon Q_0(f_0(x_n)) \cos 2\pi\omega_0 n \cos 2\pi\omega_0 - \varepsilon Q_0(f_0(x_n)) \sin 2\pi\omega_0 n \sin 2\pi\omega_0 + \\ &+ \varepsilon P_0(f_0(x_n)) \sin 2\pi\omega_0 n \cos 2\pi\omega_0 + \varepsilon P_0(f_0(x_n)) \cos 2\pi\omega_0 n \sin 2\pi\omega_0 = \\ &= f_0(f_0(x_n)) + \varepsilon [f_0'(f_0(x_n)) Q_0(x_n) + Q_0(f_0(x_n)) \cos 2\pi\omega_0 + P_0(f_0(x_n)) \sin 2\pi\omega_0] \cos 2\pi\omega_0 n + \\ &+ [f_0'(f_0(x_n)) P_0(x_n) - Q_0(f_0(x_n)) \sin 2\pi\omega_0 + P_0(f_0(x_n)) \cos 2\pi\omega_0] \sin 2\pi\omega_0 n. \end{aligned}$$

Вместо динамической переменной  $x$  введем переменную  $y$ , определив ее следующим образом:

$$y_n = \alpha x_{2n}, \quad (5)$$

где  $\alpha = -2.5029\dots$  – константа Фейгенбаума [4–6]. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \alpha f_0(f_0(y_n/\alpha)) + \alpha \varepsilon [f_0'(f_0(y_n/\alpha)) Q_0(y_n/\alpha) + Q_0(f_0(y_n/\alpha)) \cos 2\pi\omega_0 + \\ &+ P_0(f_0(y_n/\alpha)) \sin 2\pi\omega_0] \cos 2\pi(2\omega_0)n + [f_0'(f_0(y_n/\alpha)) P_0(y_n/\alpha) - Q_0(f_0(y_n/\alpha)) \sin 2\pi\omega_0 + \\ &+ P_0(f_0(y_n/\alpha)) \cos 2\pi\omega_0] \sin 2\pi(2\omega_0)n \}, \end{aligned}$$

что можно переписать в следующем виде:

$$y_{n+1} = f_1(y_n) + \varepsilon[Q_1(y_n) \cos 2\pi\omega_1 n + P_1(y_n) \sin 2\pi\omega_1 n]. \quad (6)$$

Полученное новое отображение (6) имеет такой же вид, как и отображение (4), но с новыми функциями  $f_1$ ,  $Q_1$ ,  $P_1$  и новым параметром частоты воздействия  $\omega_1$

$$f_1(y) = D^\wedge f_0(y) = \alpha f_0(f_0(y/\alpha)),$$

$$Q_1(y) = \alpha[f_0'(f_0(y/\alpha)) Q_0(y/\alpha) + Q_0(f_0(y/\alpha)) \cos 2\pi\omega_0 + P_0(f_0(y/\alpha)) \sin 2\pi\omega_0], \quad (7)$$

$$P_1(y) = \alpha[f_0'(f_0(y/\alpha)) P_0(y/\alpha) - Q_0(f_0(y/\alpha)) \sin 2\pi\omega_0 + P_0(f_0(y/\alpha)) \cos 2\pi\omega_0],$$

$$\omega_1 = 2\omega(\text{mod } 1).$$

Повторяя описанную процедуру многократно, приходим к рекуррентным уравнениям РГ, связывающим  $\{f_{n+1}, Q_{n+1}, P_{n+1}, \omega_{n+1}\}$  с  $\{f_n, Q_n, P_n, \omega_n\}$ . Если отображение  $f_0(y)$  соответствует точке накопления бифуркаций удвоения периода, то, согласно [4–6], имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D^{\wedge m} f_0(y) = g(y),$$

где  $g(y)$  – функция Фейгнбаума, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$g(y) = \alpha g(g(y/\alpha)).$$

Далее, вместо  $Q$  и  $P$  введем комплекснозначную функцию  $Z(y) = Q(y) + iP(y)$ . Тогда окончательно получаем

$$Z_{n+1}(y) = L^\wedge(\omega_n)[Z_n(y)], \quad (8)$$

$$\omega_{n+1} = 2\omega_n(\text{mod } 1), \quad (9)$$

где линейный оператор  $L^\wedge(\omega)$  определен соотношением

$$L^\wedge(\omega)[Z(y)] = [\alpha(g'(g(y/\alpha)) Z(y/\alpha) + Z(g(y/\alpha)) \exp(-2\pi\omega i))]. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда  $\omega$  является рациональным числом, представимым с помощью периодической двоичной дроби периода  $m$ . В этом случае исходное значение  $\omega$  воспроизводится после  $m$ -кратного применения РГ преобразования:  $\omega_m = 2^m \omega_0(\text{mod } 1) = \omega_0$ . Целесообразно получить РГ уравнение, которое связывало бы перенормированные функции  $Z_n(y)$  и  $Z_{n+m}(y)$ , определяющие эволюцию системы соответственно за  $2^n$  и  $2^{n+m}$  временных шагов.

Это уравнение имеет вид

$$Z_{n+m}(y) = W^\wedge[Z_n(y)], \quad (11)$$

где

$$W^\wedge = L^{\wedge m}. \quad (12)$$

Далее будет показано, что собственные числа оператора  $W^\wedge$ , превышающие по модулю единицу, ответственны за существование в пространстве параметров самоподобных структур вблизи точки  $\lambda = \lambda_c$ ,  $\varepsilon = 0$ .

Чтобы найти численно наибольшее по модулю собственное число оператора, использовался алгоритм, в котором функция  $Z_n(y)$  представлялась в виде разложения в ряд Тейлора до двадцатого члена включительно. По произвольной «затравочной» функции  $Z_0(y)$  осуществлялось преобразование (10) и вычислялись коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции  $Z_m(y)$ . Затем процедура

повторялась, и по функции  $Z_m(y)$  определялись коэффициенты разложения функции  $Z_{2m}(y)$  и т. д. Собственное число  $\beta$  линейного оператора  $W^\wedge$  вычислялось как отношение

$$\beta = Z_{(N+1)m}(0)/Z_{Nm}(0), \quad (13)$$

когда оно стабилизировалось при увеличении  $m$ .

Были получены следующие результаты:

- а) для  $\omega_0=1/3$  ( период двоичного представления  $m=2$ )  $\beta=58.96056\dots$ ;
- б) для  $\omega_0=1/5$  ( период двоичного представления  $m=4$ )  $\beta=2306.0605\dots$ ;
- в) для  $\omega_0=1/7$  ( период двоичного представления  $m=4$ )  $\beta=296.27854e^{i0.54925}$ .

На основании описанной процедуры помимо собственных чисел вычислялись также и соответствующие собственные функции оператора  $W^\wedge$ .

## 2. Свойства скейлинга

Обсудим взаимосвязь между собственными числами линейного оператора  $W^\wedge$  и свойствами скейлинга пространства параметров отображения (4).

Пусть  $v_1, v_2, \dots$  – собственные числа оператора  $W^\wedge$ , а  $\{h_k(y)\exp(i\varphi_k(y))\}_{k=1,2,\dots}$  – его собственные функции. Предположим, что начальное возмущение  $Z_0$  имеет вид линейной комбинации собственных функций оператора  $W^\wedge$

$$Z_0(y) = \sum_k c_k h_k(y) \exp(i\varphi_k(y)). \quad (14)$$

Поскольку при действии  $W^\wedge$  каждый член суммы умножается на соответствующее собственное число, имеем

$$Z_{Nm}(y) = W^{\wedge N}[Z_0(y)] = \sum_k v_k^N c_k h_k(y) \exp(i\varphi_k(y)). \quad (15)$$

При  $N \rightarrow \infty$  преобладающим станет член ряда, отвечающий наибольшему по модулю собственному числу  $v_1 = \beta$ . Таким образом, можно положить

$$Z_{Nm}(y) \approx c_1 \beta^N h_1(y) \exp(i\varphi_1(y)). \quad (16)$$

Возвращаясь к функциям  $Q(y)$  и  $P(y)$ , перепишем (16) в виде

$$Q_{Nm}(y) \approx c_1 |\beta|^N h_1(y) \cos(\varphi_1(y) + N \arg \beta), \quad (17)$$

$$P_{Nm}(y) \approx c_1 |\beta|^N h_1(y) \sin(\varphi_1(y) + N \arg \beta). \quad (18)$$

Применив к отображению (4)  $Nm$  раз процедуру, описанную в разделе 1 (что соответствует действию оператора  $W^{\wedge N}$  на  $Q_0(y) + iP_0(y)$ ) и пронормировав переменные, получим отображение следующего вида:

$$y_{n+1} = g(y_n) + \varepsilon [Q_{Nm}(y_n) \cos 2\pi \omega_{Nm} n + P_{Nm}(y_n) \sin 2\pi \omega_{Nm} n] \quad (19)$$

или, учитывая (17) и (18),

$$y_{n+1} = g(y_n) + c_1 \varepsilon |\beta|^N h_1(y_n) \cos(2\pi \omega_0 n - \varphi_1(y_n) - N \arg \beta). \quad (20)$$

Выполнив еще  $m$  шагов ренормпреобразования и вновь пронормировав переменные, получим

$$y_{n+1} = g(y_n) + c_1 \varepsilon' |\beta|^N h_1(y_n) \cos(2\pi \omega_0 n - \varphi_1'(y_n) - N \arg \beta), \quad (21)$$

где

$$\varepsilon' = \varepsilon \beta, \quad (22)$$

$$\varphi' = \varphi + \arg\beta. \quad (23)$$

Два последних рекуррентных уравнения совпадают с точностью до замены  $\epsilon'$  на  $\epsilon$  и  $\varphi'$  на  $\varphi$ . Следовательно, конфигурация областей в пространстве параметров  $(\lambda, \epsilon_1, \epsilon_2)$ , где  $\epsilon_1 = \epsilon \cos\varphi$ ,  $\epsilon_2 = -\epsilon \sin\varphi$ , переходит в себя при повороте вокруг оси  $\lambda$  на угол  $\arg\beta$  и при изменении масштаба относительно точки  $(\lambda_c, 0, 0)$  в  $\beta$  раз по оси  $\epsilon$  и, как можно показать, в  $\delta^m$  раз по оси  $\lambda$ .

В заключение данного раздела рассмотрим вопрос о том, как изменяется при РГ преобразовании ляпуновский характеристический показатель, определяемый соотношением

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N \ln |\partial x_N / \partial x_0|). \quad (24)$$

Для этого вернемся к исходному рекуррентному уравнению (4) и произведем  $m$  шагов ренормпреобразования. Пронормировав переменные, получим

$$y_{n+1} = g(y_n) + \epsilon [Q_m(y_n) \cos 2\pi \omega_m n + P_m(y_n) \sin 2\pi \omega_m n], \quad (25)$$

$$\omega_m = 2^m \omega_0 \pmod{1} = \omega_0.$$

Найдем связь между показателем Ляпунова  $\gamma'$ , вычисленным для отображения (25), и показателем  $\gamma$ , рассчитанным для (4). Заметим, что если  $\gamma$  вычислялся при  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$ , то  $\gamma'$  следует вычислять при

$$\epsilon = \epsilon_0 / \beta, \quad (26)$$

$$\lambda = \lambda_c + (\lambda_0 - \lambda_c) / \beta.$$

Предположим, что имеется цикл периода  $N$ . В соответствии с использовавшимся правилом пересчета масштабов, после  $m$  шагов преобразования РГ имеем

$$y_N = \alpha^m x_{2^m N}.$$

По определению показателя Ляпунова

$$\begin{aligned} \gamma' &= (1/N) \ln |\partial y_N / \partial y_0| = (1/N) \ln \left| \frac{\alpha^m}{\alpha^m} \cdot \frac{\partial x_{2^m N}}{\partial x_0} \right| = \\ &= (1/N) \ln |\partial x_{2^m N} / \partial x_{2^m-1N} \cdot \partial x_{2^m-1N} / \partial x_{2^m-2N} \cdot \dots \cdot \partial x_N / \partial x_0|. \end{aligned}$$

Так как рассматривается цикл периода  $N$ , то

$$\partial x_{2^m N} / \partial x_{2^m-1N} = \partial x_{2^m-1N} / \partial x_{2^m-2N} = \dots = \partial x_N / \partial x_0$$

и, следовательно,

$$\gamma' = (1/N) \ln |\partial x_N / \partial x_0|^{2^m} = 2^m (1/N) \ln |\partial x_N / \partial x_0| = 2^m \gamma.$$

Итак, формула для пересчета показателя Ляпунова имеет вид

$$\gamma' = 2^m \gamma. \quad (27)$$

Можно показать, что это соотношение остается справедливым, если два рассматриваемые режима, получаемые друг из друга посредством РГ преобразования (26), не являются периодическими.

### 3. Методика проверки свойств скейлинга

На рис. а–г показаны карты динамических режимов модели (3) на плоскости параметров  $(\lambda, \epsilon)$  для  $\omega = 1/3$  (а, б) и  $1/5$  (в, г). На этих картах различными цветами

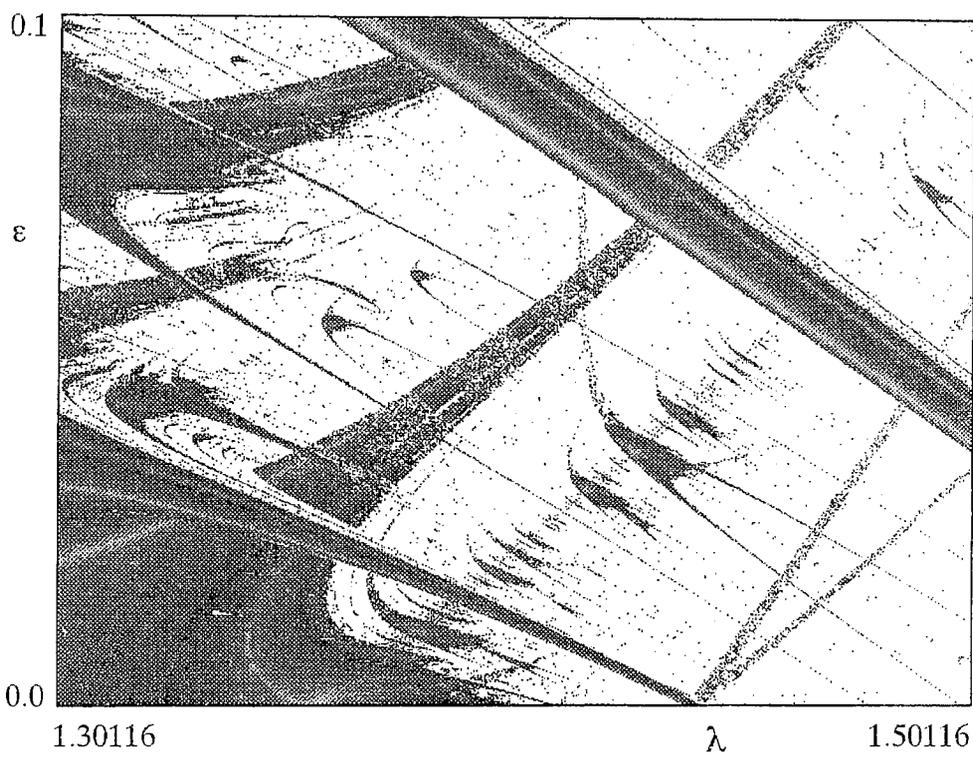


Рис. а

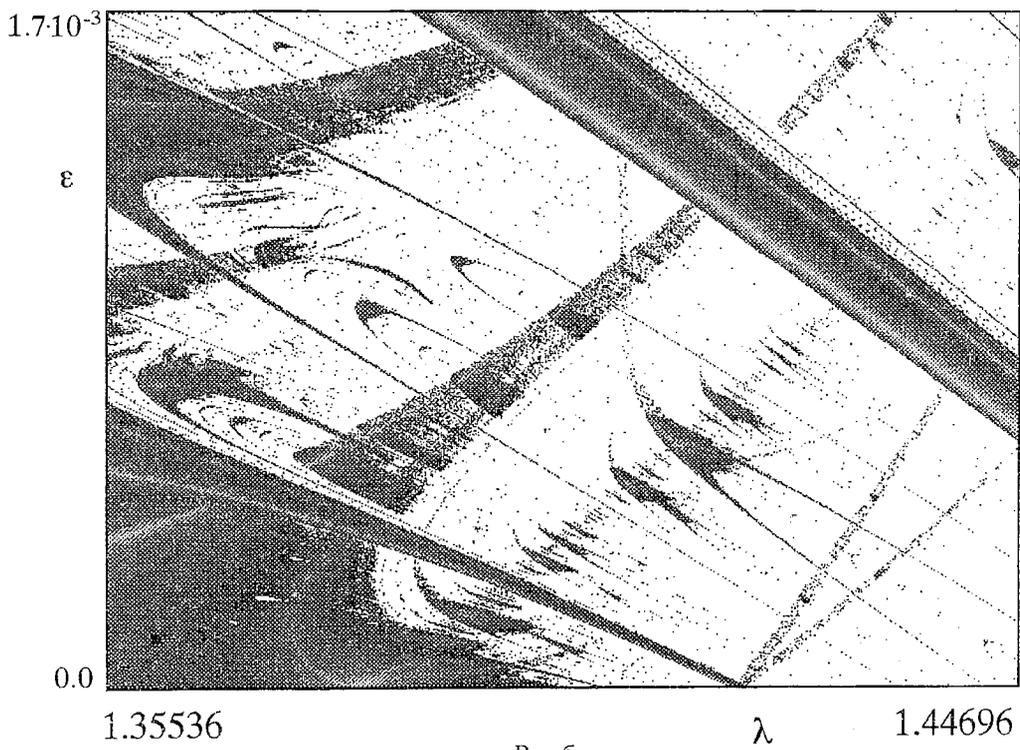


Рис. б

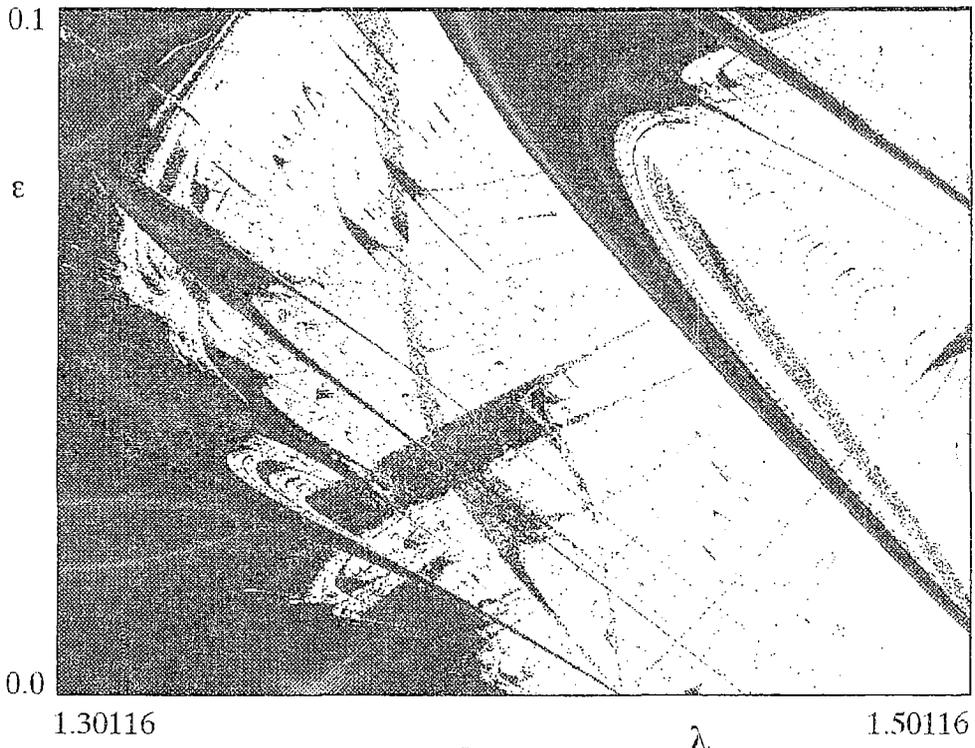


Рис. 6

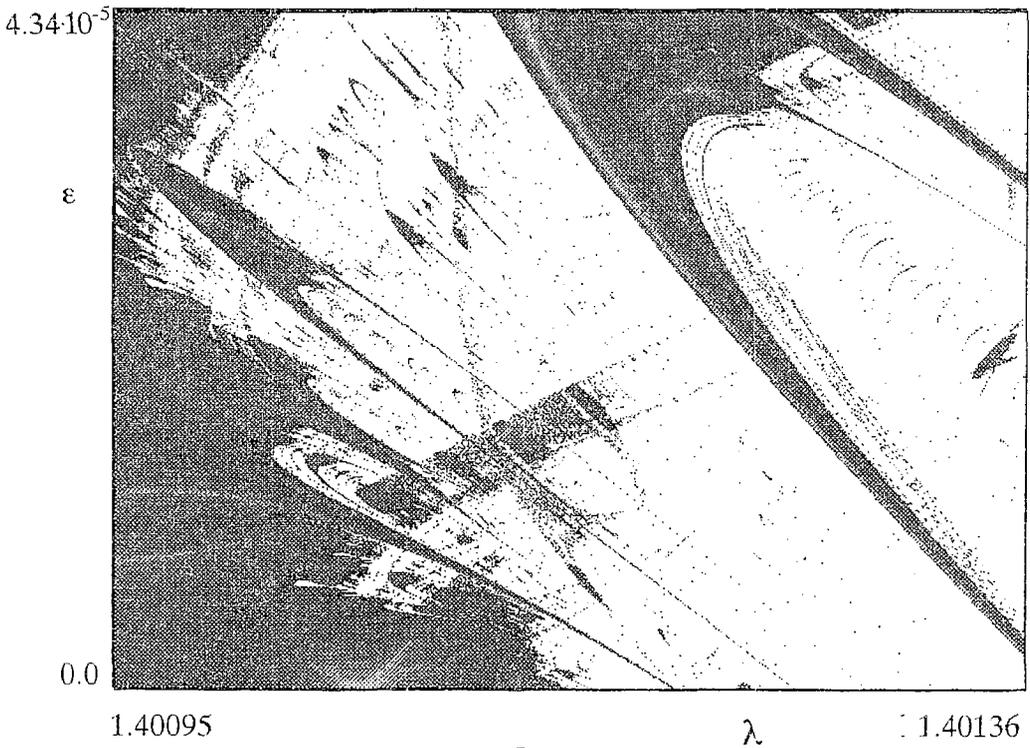
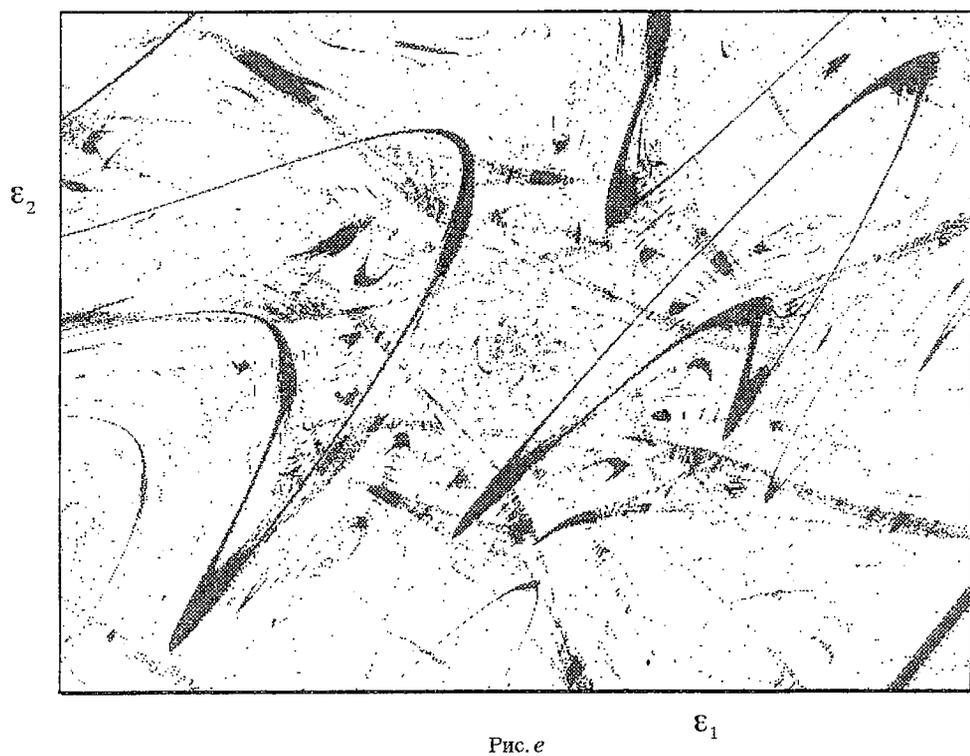
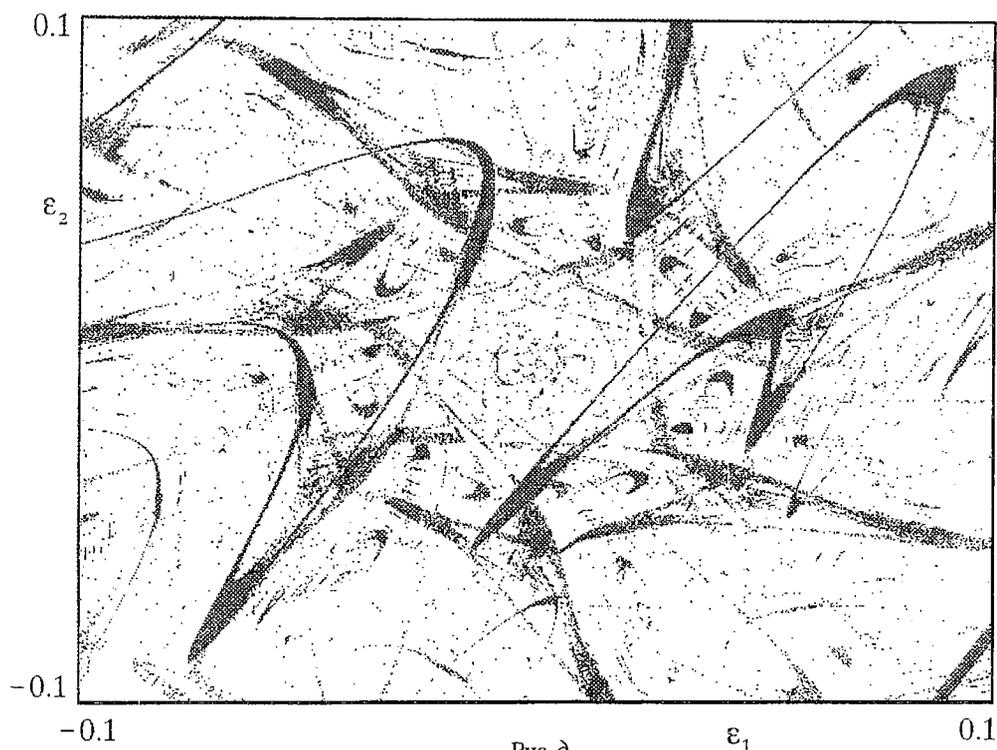


Рис. 7



закодирована величина показателя Ляпунова. Белый цвет соответствует положительным  $\gamma$  – области хаоса. Черный цвет отвечает  $\gamma=0$  – порог бифуркаций. Плавный переход от черного цвета к светлосерому соответствует изменению  $\gamma$  от нуля до минус бесконечности. Поскольку частота воздействия рациональна, отрицательным значениям  $\gamma$ , очевидно, соответствуют устойчивые циклы различных периодов.

Для иллюстрации свойств скейлинга карта динамических режимов отображения (3) воспроизводится на рис. б и рис. г с изменением масштаба относительно точки  $(\lambda_c, 0)$  в  $\beta$  раз по оси  $\epsilon$  и в  $\delta^n$  раз по оси  $\lambda$ . Напомним, что при  $\omega=1/3$  и  $1/5$  собственное число  $\beta$  оказалось действительным. При этом, правила кодирования ляпуновского показателя цветом применялись в соответствии с (27). Сравнивая карты режимов на рис. а, б и на рис. в, г можно наглядно видеть ожидавшийся скейлинг.

Для  $\omega=1/7$  параметр  $\beta$  оказался комплексным. Чтобы проиллюстрировать скейлинг в этом случае, на рис. д показано сечение пространства параметров плоскостью  $\lambda=\lambda_c$ . На рис. е произведено изменение масштабов в  $|\beta|$  раз по осям координат и поворот вокруг оси  $\lambda$  на угол  $\arg\beta$ . Видно, что карта режимов в уменьшенном масштабе с замечательной точностью воспроизводит исходную.

### Заключение

К исследованию свойств логистического отображения под внешним периодическим воздействием применен ренормгрупповой анализ. Показано, что для рациональных частот воздействия, представимых периодическими двоичными дробями, пространство параметров модели обладает свойством самоподобия вблизи критической точки – точки накопления удвоений периода при нулевой амплитуде внешней силы. Для нескольких значений частоты воздействия построены сечения пространства параметров и продемонстрировано наличие структур, обладающих свойствами самоподобия (скейлинга) вблизи критической точки.

Полученные результаты остаются в силе, если заменить логистическое отображение другим, переводящим некоторый отрезок оси  $x$  в себя и имеющим на нем единственный квадратичный экстремум. Такая универсальность обусловлена тем, что определенный в работе оператор  $W^{\wedge}$  и спектр его собственных чисел определяются только свойствами преобразования РГ и частотой внешнего воздействия  $\omega$  и не зависит от конкретного вида отображения (1). Вопрос о том, сохраняется ли эта универсальность в случае нелинейных диссипативных систем более общего вида, требует специального изучения.

Автор выражает благодарность С.П.Кузнецову за научное руководство и А.П.Кузнецову за обсуждение и помощь.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97–02–16414).*

### Библиографический список

1. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. С. 56.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. С. 92.
3. Abraham N.B., Gollub J.P., Swinney H.L. Testing nonlinear dynamics, review of a recent NATO Adv. Research, June 1983.
4. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P.25.

5. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformation //J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21, № 6. P.669.

6. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем //УФН. 1983. Т.141, № 2. С.343.

7. *Arneodo A.* Scaling for a periodic forcing of a period-doubling system //Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P.1240.

8. *Кузнецов С.П.* О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок-хаос через бифуркации удвоения периода // Письма в ЖЭТФ. Т. 39, вып.3. С.113.

9. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Renormalization group for the response function and spectrum of the period-doubling system // Physics Letters A. Vol. 140, № 4. P. 166.

10. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 1,2. С. 15.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 5.03.97  
после переработки 18.03.97

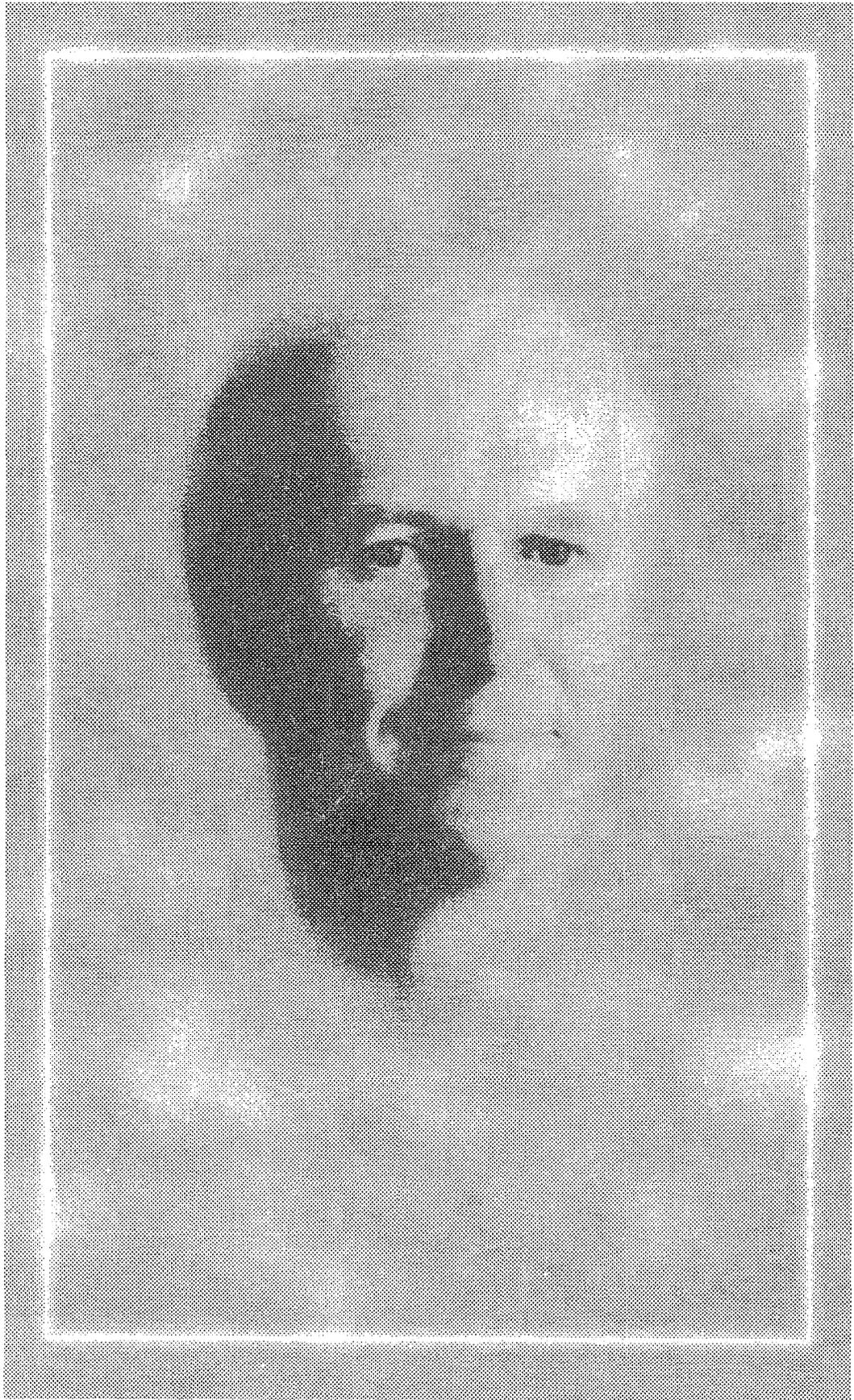
## THE SCALING PROPERTIES OF THE PARAMETER SPACE OF THE PERIODICALLY FORCED LOGISTIC MAP

*N.Yu. Ivankov*

The period doubling system driven by an external periodical force is investigated by (RG) renormalization group method. When the frequency of the force is rational, the parameter space is found to have self-similarity properties near the critical point with scaling factors being defined by eigenvalues of linearized RG equation.



*Иваньков Николай Юрьевич* – родился в Саратове (1977). В настоящее время студент третьего курса Колледжа прикладных наук Саратовского университета. Область научных интересов – физика нелинейных динамических систем.





Изв. вузов «ПНД», т.5, № 2,3, 1997

### РУСЛАН ЛЕОНТЬЕВИЧ СТРАТОНОВИЧ

13 января 1997 года на 67-ом году жизни скоропостижно скончался выдающийся русский ученый Заслуженный профессор Московского университета Руслан Леонтьевич Стратонович. Со студенческих лет до последних дней жизни он самоотверженно работал в науке. Руслан Леонтьевич никогда не занимал никаких административных должностей, впервые выехал за границу в 1989 году и всю жизнь проработал на одной и той же кафедре физического факультета МГУ.

Р.Л.Стратонович родился 31 мая 1930 года в Москве. Сдав экстерном экзамены за девятый класс, через год, в 1947 окончил школу с Золотой медалью и поступил на физический факультет МГУ, который окончил в 1953 году. В этом же году он поступил в аспирантуру. В 1956 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Теория коррелированных случайных точек и ее применение к расчету шумов, возбуждаемых электронными потоками». Эта работа Руслана Леонтьевича послужила основой для опубликованной в 1961 году у нас в стране и в 1963, 1967 годах в США его теперь уже знаменитой первой монографии «Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике» (Topics in the Theory of Random Noise, Vols. I, II). В этой книге им была предложена, как он ее тогда называл, симметризационная форма стохастических дифференциальных и интегральных выражений для марковских процессов и основанное на ней стохастическое исчисление, которое теперь носит его имя и известно в науке наряду со стохастическим исчислением Ито. Сам Руслан Леонтьевич до конца дней называл его симметризационным.

В 1965 году Руслан Леонтьевич защитил докторскую диссертацию на тему «Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления», которая была издана в виде книги с тем же названием издательством МГУ (1966) и в расширенном варианте переиздана на английском языке издательством Elsevier (1968). Созданная Р.Л.Стратоновичем новая теория условных марковских процессов встретила весьма неоднозначный прием в научных кругах того времени в нашей стране. Однако, у основоположника динамического программирования Р.Беллмана не было сомнений в ценности полученных Стратоновичем результатов. В предисловии к американскому изданию «Conditional Markov Processes and Their Applications to the Theory of Optimal Control» (Elsevier, 1968) он писал: «Книга Р.Л.Стратоновича представляет собой крупное научное достижение на фоне многочисленных попыток в создании единых математических теорий, могущих оплодотворить как саму математику, так и прикладные науки». Теория условных марковских процессов послужила фундаментом таких исключительно продуктивных направлений, как марковская теория оптимальной нелинейной фильтрации и статистическая теория оптимального управления.

Р.Л.Стратонович ввел в науку такое глобальное понятие как ценность

информации, позволяющее связать теорию информации с теорией оптимальных статистических решений и теорией оптимального управления. Разработал теорию ценности хартлиевского, больцмановского и шенноновского количеств информации, а также аппарат потенциальных функций, использующий параметры типа «температуры». Показал общность формального математического аппарата теории информации и статистической термодинамики.

В последней монографии Р.Л.Стратоновича «Нелинейная неравновесная термодинамика» (Наука, 1985) обобщены результаты его более чем 20-летней работы в области этого относительно молодого раздела статистической физики: доказаны новые нелинейные флуктуационно-диссипационные теоремы различных родов для марковского и немарковского, а также квантового и неквантового случаев. Эти теоремы, обобщающие хорошо известные линейные теоремы Найквиста и Каллена – Вельтона на случай квадратичной и кубической нелинейности, имеют большое число приложений в различных областях физики и химии, что было показано на многочисленных примерах, приведенных в вышеупомянутой книге. Расширенный и переработанный вариант этой книги был издан в издательстве «Шпрингер» в виде двухтомника в серии «Springer Series in Synergetics», Vols. 57, 63 в 1992 и 1994 годах.

В последние годы Руслан Леонтьевич увлекался вопросами квантовой теории измерений и опубликовал на эту тему несколько интересных статей. В то же время он выполнил ряд очень сложных и глубоких исследований по кинетической теории систем с химическими реакциями. В общей сложности им опубликовано 7 монографий и 180 научных статей, больше половины из которых написаны без соавторов.

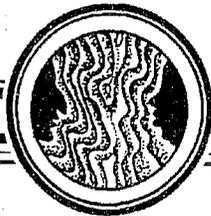
Вклад Р.Л.Стратоновича в науку был отмечен Ломоносовской премией МГУ (1984), Государственной премией СССР (1988) и Государственной премией РФ (1996).

Руслан Леонтьевич отличался необычайной широтой интересов не только в области науки. Например, он неплохо играл на гитаре и даже изобрел собственную систему игры. Руслан Леонтьевич очень любил и хорошо знал русскую поэзию, классическую и современную, сам писал стихи, прекрасно разбирался в живописи, читал художественную литературу на четырех иностранных языках. Он был большим любителем спорта – катался на лыжах, беговых и горных, на фигурных коньках, на велосипеде, играл в теннис.

Руслан Леонтьевич был человеком исключительно высокой культуры, человеком, к которому понятие интеллигент применимо в своем самом высоком смысле. Будучи ученым с мировым именем, он безо всяких усилий был равноправным другом для своих учеников, подавая пример искренности и простоты в личных отношениях. И этому естественному для него с рождения стилю отношений он был верен до конца своей жизни.

Светлый образ Руслана Леонтьевича Стратоновича всегда будет храниться в памяти всех, кто имел счастье общаться с ним. Имя его навсегда сохранится в науке.

*Редакция выражает глубокую благодарность Валентине Стратонович за предоставленную возможность публикации материалов данной рубрики в нашем журнале.*



## НЕМАРКОВСКАЯ ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЛИНЕЙНЫМ ТРЕНИЕМ

*Р.Л. Стратонович*

Предлагаемая работа является последней полностью подготовленной к печати статьей выдающегося ученого современности Руслана Леонтьевича Стратоновича, скоропостижно скончавшегося 13 января 1997 года.

В статье рассматриваются некоторые аспекты теории квантовых стохастических процессов, основанной на применении немарковских флуктуационно-диссипационных теорем, в частности, квантовой формулы Найквиста

$$S_{\alpha\beta}(\omega) = \hbar \omega \coth[\hbar\omega/(2kT)] \operatorname{Re} Z_{\alpha\beta}(i\omega),$$

при помощи которой найдены корреляционные функции операторных ланжевеновских сил в системах с линейным трением. Особое внимание уделено большей сингулярности этих сил, чем это имеет место в квантовой марковской теории. Чтобы избежать бесконечностей, динамические уравнения представлены в интегральной форме. Для представления ланжевеновских сил введены и используются интегральные стохастические процессы  $\sigma_k(t)$  с конечными средними квадратами.

Рассмотрены также такие негауссовы характеристики, как тройные и четверные многовременные кумулянты для нелинейного случая и для случая флуктуирующих коэффициентов трения.

Рассматривается задача интерпретации необычных стохастических интегралов, содержащих процессы  $\sigma_k(t)$ . Показано, что сходимость допредельной суммы к соответствующему интегралу имеет место в смысле нормы  $\|A\|_p = [\operatorname{Tr}(AA^\dagger)]^{1/2}$ .

### 1. Введение

Широко известна и многими используется марковская теория квантовых стохастических процессов (теория I), основанная на управляющем уравнении Коссаковского – Линдблада [1, 2], квантовой теореме регрессии [3] и квантовом стохастическом исчислении Хадсона – Паргасарати [4]. Также разработана и используется другая теория квантовых стохастических процессов (теория II), основанная на применении флуктуационно-диссипационных теорем (см., например, [5, 6]). Эти теории очень сильно отличаются друг от друга. Согласно первой теории в случае линейного трения ланжевеновские силы являются дельта-коррелированными процессами, в то время как согласно второй теории эти силы являются в большей степени сингулярными. В этом отношении теория I ближе к классической марковской теории, чем теория II.

Как правило, различные теории дают различные результаты (см., например, [7]), и весьма редки случаи, когда это не так. Примером последнего может служить

узкополосная система, когда ширина полосы  $\Delta\omega$  много меньше резонансной частоты  $\omega_0$  системы.

Любопытно отметить, что для систем с линейным трением обе теории являются квантовым обобщением классических марковских процессов в том смысле, что квантовые процессы, рассматриваемые в обеих этих теориях, стремятся к одному и тому же неквантовому марковскому процессу при  $\hbar \rightarrow 0$ .

В данной работе рассматриваются некоторые аспекты теории II. Важным вопросом, возникающим в рамках данной теории, является вопрос о том, как обращаться с процессами, имеющими большую степень сингулярности, чем в неквантовой марковской теории. Как известно, в последней ланжевенские процессы являются дельта-коррелированными, то есть обобщенными процессами. Рассмотрим для примера классическую одномерную систему, для которой стохастическое уравнение имеет вид

$$\dot{p} = -\gamma p + (2kTm\gamma)^{1/2}\xi(t). \quad (1.1)$$

Здесь  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t+\tau)\xi(t) \rangle = \delta(\tau)$ , если внешняя система имеет температуру  $T$ . Так как  $\langle \xi^2(t) \rangle = \infty$ , имеем  $|\xi(t)| = \pm\infty$  почти для всех  $t$ . Поэтому, строго говоря, уравнение (1.1) является уравнением типа  $\pm\infty = \pm\infty$ . Чтобы придать этому уравнению

определенность, можно ввести интегральный процесс  $\omega(t) = \int_0^t \xi(t') dt'$ . Этот процесс несингулярный и называется винеровским процессом. С его помощью уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$dp = -\gamma p dt + (2kTm\gamma)^{1/2} d\omega(t). \quad (1.2)$$

Такая форма записи предполагает интегрирование обеих частей этого уравнения. В немарковском квантовом случае не только временные производные от импульсов, но и сами импульсы имеют бесконечные средние квадраты. В разделе 4 показано, что в квантовом случае для представления ланжевенских сил в виде обычных (несингулярных) процессов необходимо двойное интегрирование. В этом случае лучше пользоваться интегральной формой динамического уравнения, не содержащей бесконечностей. В уравнениях (5.3) и (5.5) бесконечности отсутствуют, если выполняется условие (5.4). В неквантовом случае в таком условии нет необходимости.

Следует отметить, что это своеобразие теории II проявляется при всех температурах окружающей среды, включая  $T=0$ . Единственной причиной возникновения бесконечностей в теории II являются силы  $\eta_\alpha(t)$ , возникающие при нулевой температуре. Поэтому удобно выделить их, чтобы сосредоточиться на бесконечностях. Оставшаяся часть ланжевенских сил  $\zeta_\alpha(t)$  не представляет проблем (раздел 3). В разделе 4 рассматриваются процессы  $\sigma_\alpha(t)$ , связанные с  $\eta_\alpha(t)$  и имеющие конечные средние квадраты. С их помощью записываются стохастические интегральные уравнения, в которых отсутствуют бесконечности. Эти стохастические уравнения позволяют найти стационарные и нестационарные многовременные моменты и кумулянты координат и импульсов для нелинейного случая. Однако существует более простой способ нахождения стационарных моментов и кумулянтов, а именно, напрямую с помощью линейных и нелинейных флуктуационно-диссипационных теорем (раздел 7).

В Приложении 2 рассматривается задача интерпретации необычных стохастических интегралов, содержащих процессы  $\sigma_\kappa(t)$ . Показано, что сходимость допредельной суммы к соответствующему интегралу имеет место в смысле нормы  $\|A\|_p = [\text{Tr}(AA^\dagger)]^{1/2}$ .

## 2. Квантовые ланжевенновские силы, определяемые квантовой формулой Найквиста

Рассмотрим  $n$ -мерную систему  $S$  с координатами  $q_1, \dots, q_n$  и импульсами  $p_1, \dots, p_n$ . В случае линейного трения динамические уравнения имеют вид

$$\dot{q}_\alpha = (i/\hbar)[H, q_\alpha], \quad (2.1)$$

$$\dot{p}_\alpha = (i/\hbar)[H, p_\alpha] - \lambda_{\alpha\delta} \dot{q}_\delta, \quad (2.2)$$

где числовая матрица  $\lambda_{\alpha\delta}$  должна быть симметричной в силу соотношений Онзагера. А также она должна быть полуположительно определенной, потому что энергетические потери, вызванные диссипацией, не могут быть отрицательными. В формуле (2.1)  $\alpha=1, \dots, n$ , а также предполагается суммирование по дважды встречающимся индексам.

Наличие трения означает, что система  $S$  взаимодействует с намного более сложной внешней системой  $E$ . Воздействие внешней системы на  $S$  проявляется не только через силы трения  $-\lambda_{\alpha\delta} \dot{q}_\delta$ , но и через случайные силы  $\xi_\alpha(t)$  (ланжевенновские силы), которые следует добавить в правые части (2.2). Мы полагаем, что  $H = T + U$ ,  $T = 1/2 c_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$  ( $\|c_{\alpha\beta}\| = \|m_{\alpha\beta}\|^{-1}$ ),  $U = U_1(q)$ , при этом  $U_1(x)$  является числовой (не операторной) функцией числовых аргументов. Тогда динамические уравнения с ланжевенновскими силами будут иметь вид

$$\dot{q}_\alpha = c_{\alpha\beta} p_\beta, \quad (2.3)$$

$$\dot{p}_\alpha = -U_{1\alpha}(q) - \gamma_{\alpha\beta} p_\beta + \xi_\alpha(t) \quad (2.4)$$

с  $\gamma_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\delta} c_{\delta\beta}$ ,  $U_{1\alpha}(x) = \partial U_1(x) / \partial x_\alpha$ .

Ланжевенновские силы, входящие в (2.4), имеют нулевое среднее значение  $\langle \xi_\alpha(t) \rangle = 0$ . Они являются гауссовскими в силу линейности диссипации. Для получения статистических свойств ланжевенновских сил остается найти их корреляционные функции. Для этого могут быть применены флуктуационно-диссипационные теоремы, предполагающие в свою очередь использование адмитансов или импедансов. Для нахождения импедансов мы опускаем случайные силы в (2.4) и добавляем неоператорные внешние силы  $f_\alpha(t)$ , что даст

$$\dot{q}_\alpha = c_{\alpha\beta} p_\beta, \quad (2.5)$$

$$\dot{p}_\alpha = -U_{1\alpha}(q) - \gamma_{\alpha\beta} p_\beta + f_\alpha(t). \quad (2.6)$$

Если потенциальная энергия имеет минимум при  $q=0$ , то мы имеем

$$U_1(q) \equiv U_1(0) + 1/2 a_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta + 1/6 b_{\alpha\beta\gamma} q_\alpha q_\beta q_\gamma + \dots \quad (2.7)$$

с  $a_{\alpha\beta} = \partial^2 U_1 / \partial q_\alpha \partial q_\beta |_{q=0}$  и т. д. Поэтому из (2.5), (2.6) мы получаем уравнения

$$\dot{q}_\alpha = c_{\alpha\beta} p_\beta,$$

$$\dot{p}_\alpha = -a_{\alpha\beta} q_\beta - 1/2 b_{\alpha\beta\gamma} q_\beta q_\gamma - \dots - \gamma_{\alpha\beta} p_\beta + f_\alpha(t).$$

Отсюда

$$m_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + \lambda_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + a_{\alpha\beta} q_\beta + 1/2 b_{\alpha\beta\gamma} q_\beta q_\gamma + \dots = f_\alpha(t). \quad (2.8)$$

Определение импедансов  $Z_{\alpha\beta}(s)$ ,  $Z_{\alpha\beta\gamma}(t_2-t_1, t_3-t_1)$ , ... (см, например, [6, п. 5.6.1]) дается формулой

$$Z_{\alpha\beta} (d/dt) \dot{q}_\beta(t) + 1/2 \int Z_{\alpha\beta\gamma}(t_1-t_2, t_1-t_3) \dot{q}_\beta(t_2) \dot{q}_\gamma(t_3) dt_2 dt_3 + \dots = f_\alpha(t). \quad (2.9)$$

Сравнивая (2.8) с (2.9), в частности, получаем

$$Z_{\alpha\beta}(s) = m_{\alpha\beta} s + \lambda_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} s^{-1}. \quad (2.10)$$

С помощью квантовой формулы Найквиста

$$S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = \hbar \omega \text{cth}[\hbar \omega / (2kT)] \text{Re} Z_{\alpha\beta}(i\omega) \quad (2.11)$$

(см., например, [6, ф. (5.6.42)]) можно получить матрицу спектральных плотностей

$$S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} 1/2 \langle [\xi_\alpha(t+\tau), \xi_\beta(t)]_{+\lambda_0} \rangle d\tau \quad (2.12)$$

операторных случайных сил. Здесь нижний индекс 0 обозначает равновесное среднее. Подставляя (2.10) в (2.11), получаем

$$S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = \hbar \omega \lambda_{\alpha\beta} \text{cth}[\hbar \omega / (2kT)]. \quad (2.13)$$

Спектр

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = \int e^{-i\omega\tau} \langle [\xi_\alpha(t+\tau), \xi_\beta(t)]_{0} \rangle d\tau \quad (2.14)$$

усредненного коммутатора  $\langle [\xi_\alpha(t+\tau), \xi_\beta(t)]_{0} \rangle$  может быть найден из (2.10) с помощью формулы (см., например, [6, стр. 197, 198])

$$\langle [D(\tau), B] \rangle_0 = 2 \text{th}[i\hbar / (2kT) (\partial/\partial\tau)]^{1/2} \langle [D(\tau), B]_{+\lambda_0} \rangle,$$

которая является следствием формулы Кубо – Мартина – Швингера. В результате получаем

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = -2 \text{th}[\hbar \omega / (2kT)] S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega)$$

и, следовательно,

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = -2 \hbar \omega \lambda_{\alpha\beta}.$$

Это означает, что

$$\langle [\xi_\alpha(t+\tau), \xi_\beta(t)]_{0} \rangle = 2i \hbar \lambda_{\alpha\beta} \delta'(\tau) \quad (2.15)$$

с  $\delta'(\tau) = d\delta(\tau)/d\tau$ .

### 3. Разделение ланжевеновских сил на две части. Стохастические силы при нулевой температуре

Мы полагаем

$$\xi_\alpha(t) = b_{\alpha\kappa} [\eta_\kappa(t) + \zeta_\kappa(t)], \quad (3.1)$$

где

$$b_{\alpha\kappa} b_{\beta\kappa} = \hbar \lambda_{\alpha\beta} \quad (3.2)$$

и  $\eta_{\kappa}(t)$  являются гауссовыми операторными стохастическими процессами с нулевыми средними значениями и со следующими свойствами

$$S_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\omega) = |\omega| \delta_{\kappa\nu}, \quad (3.3)$$

$$\langle [\eta_{\kappa}(t_1), \eta_{\nu}(t_2)] \rangle_0 = 2i \delta_{\kappa\nu} \delta'(t_{12}) \quad (3.4)$$

( $t_{12}=t_1-t_2$ ). Операторы  $B_1, \dots, B_r$  называются гауссовыми, если они обладают следующими свойствами: (i) все  $[B_j, B_k]$  кратны единичному оператору; (ii) логарифм характеристической функции  $\langle e^{i \sum_j B_j u_j} \rangle$  равен сумме линейных и квадратичных форм по  $\{u_j\}$ . Благодаря гауссовым свойствам  $\xi_{\alpha}(t)$  и  $\eta_{\kappa}(t)$  знаки усреднения  $\langle \dots \rangle_0$  могут быть опущены в (2.14), (2.15) и (3.4). Нетрудно видеть, что  $\tilde{\xi}_{\alpha}(t) \stackrel{\text{def}}{=} b_{\alpha\kappa} \eta_{\kappa}(t)$  являются силами при нулевой температуре, так как для них справедлив предельный вариант (2.13)  $S_{\alpha\beta}^{(\tilde{\xi})}(\omega) = \lim_{T \rightarrow 0} S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = \hbar |\omega| \lambda_{\alpha\beta}$ .

Мы полагаем, что  $\{\eta_{\kappa}(t)\}$  и  $\{\zeta_{\nu}(t)\}$  статистически независимы

$$\langle \eta_{\kappa}(t_1) \zeta_{\nu}(t_2) \rangle = 0, \quad \langle \zeta_{\nu}(t_2) \eta_{\kappa}(t_1) \rangle = 0. \quad (3.5)$$

Далее,

$$S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = b_{\alpha\kappa} b_{\beta\nu} [S_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\omega) + S_{\kappa\nu}^{(\zeta)}(\omega)]$$

и, в силу (2.11), (3.1) – (3.3), имеем

$$S_{\kappa\nu}^{(\zeta)}(\omega) = \omega \delta_{\kappa\nu} \{ \text{sh}[\hbar \omega / (2kT)] \}^{-1} e^{-\hbar |\omega| / (2kT)}. \quad (3.6)$$

Аналогично получаем

$$[\zeta_{\kappa}(t_1), \zeta_{\nu}(t_2)] = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.6), (3.7) мы видим, что  $\zeta_{\kappa}(t)$  подобны гауссовым классическим многокомпонентным процессам, дифференцируемым сколько угодно раз. Процессы же  $\eta_{\kappa}(t)$ , наоборот, очень сингулярны, а именно, более сингулярны, чем дельта-коррелированные процессы (но менее сингулярны, чем временные производные дельта-коррелированных процессов). Их нужно понимать только как обобщенные процессы.

Если бы интеграл в формулах (3.9) или (3.10) сходился, то расчет обратного преобразования Фурье

$$K_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} 1/2 \langle [\eta_{\kappa}(t+\tau), \eta_{\nu}(t)]_+ \rangle = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\omega) d\omega, \quad (3.8)$$

в силу (3.3), дал бы

$$K_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\tau) = \delta_{\kappa\nu} / (2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |\omega| d\omega = (1/\pi) \delta_{\kappa\nu} \varphi(\tau) \quad (3.9)$$

с

$$\varphi(\tau) = \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau) \omega d\omega. \quad (3.10)$$

Мы попробуем конкретизировать интеграл (3.10) с помощью предельного перехода  $\varphi(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_{\varepsilon}(\tau)$ , где

$$\varphi_{\varepsilon}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\omega} \cos(\omega\tau) \omega d\omega = (\varepsilon^2 - \tau^2) / (\varepsilon^2 + \tau^2)^2. \quad (3.11)$$

Затем мы получаем

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} -1/\tau^2 & \text{при } \tau \neq 0, \\ \infty & \text{при } \tau = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Конечно, последняя формула не может служить определением функции  $\varphi(\tau)$  также как уравнение

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \neq 0, \\ \infty & \text{при } \tau = 0 \end{cases}$$

не может быть определением дельта-функции. Правильное определение  $\varphi(\tau)$  как обобщенной функции («распределение» Шварца) дается формулой

$$\int_a^b f(\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(b)/b - f(a)/a - P \int_a^b df(\tau)/d\tau d\tau/\tau \quad (3.13)$$

( $a < 0, b > 0$ ), где  $P$  обозначает главное (в смысле Коши) значение интеграла;  $f(\tau)$  принадлежит к семейству функций со следующими свойствами: (1) они имеют первые производные и (2) интеграл в правой части (3.13) существует в смысле главного значения. Из уравнения (3.13) следует, что

$$\varphi(\tau) = d(P/\tau)/d\tau. \quad (3.14)$$

Формула (3.11) представляет собой  $\epsilon$ -приближение этой функции.

Для проверки формулы (3.13) применим ее для расчета преобразования Фурье

$$S_{\kappa\nu}(\eta)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_{\kappa\nu}(\eta)(\tau) d\tau, \quad (3.15)$$

обратного (3.8). Используя выражение в правой части (3.9) и формулу (3.13), мы видим, что правая часть (3.15) равна выражению

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (1/\pi) \delta_{\kappa\nu} \int_{-b}^b e^{-i\omega\tau} \varphi(\tau) d\tau = \lim_{b \rightarrow \infty} (1/\pi) \delta_{\kappa\nu} \{ e^{-i\omega b}/b + e^{i\omega b}/b + i\omega P \int_{-b}^b e^{-i\omega\tau} d\tau/\tau \}.$$

В пределе  $b \rightarrow \infty$  это дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_{\kappa\lambda}(\eta)(\tau) d\tau = \omega \operatorname{sign} \omega \delta_{\kappa\lambda},$$

что согласуется с (3.3). Здесь использована хорошо известная формула  $(2\pi i)^{-1} \times P \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \tau^{-1} d\tau = 1/2 \operatorname{sign} \omega$ .

#### 4. Интегральные операторные процессы

Для нас желательно работать с процессами менее сингулярными, чем процессы при нулевой температуре  $\eta_{\kappa}(t)$ , а именно, с процессами, имеющими конечный средний квадрат. Для этой цели мы сначала введем неопределенные интегралы от  $\eta_{\kappa}(t)$

$$v_{\kappa}^{id}(t) = \int \eta_{\kappa}(t) dt + \text{const}, \quad \sigma_{\kappa}^{id}(t) dt = \int v_{\kappa}^{id}(t) dt + \text{const}$$

или

$$v_{\kappa}^{id}(t) = \int_0^t \eta_{\kappa}(t') dt' + v_{\kappa}^0, \quad \sigma_{\kappa}^{id}(t) dt = \int_0^t v_{\kappa}^{id}(t') dt' + \sigma_{\kappa}^0. \quad (4.1)$$

При этом  $v_{\kappa}^0, \sigma_{\kappa}^0$  – некоторые гауссовы операторы (с нулевыми средними значениями), не зависящие от  $t$ . Затем мы конкретизируем интегралы, то есть перейдем к определенным интегралам, положив

$$\tilde{v}_{\kappa}(t, t_*) = \int_{t_*}^t \eta(t') dt', \quad (4.2)$$

$$v_{\kappa}(t) = \int_{-1}^0 \tilde{v}_{\kappa}(t, t_*) dt_* = \int_0^t \eta_{\kappa}(t') dt' + \int_{-1}^0 (1+t') \eta(t') dt', \quad t \geq t_0. \quad (4.3)$$

Кроме того

$$\sigma_{\kappa}(t) = \int_0^t v_{\kappa}(t') dt'. \quad (4.4)$$

Формула (4.2) может быть записана в виде

$$\tilde{v}_{\kappa}(t, t_*) = \int_{t_*}^t dt' e^{s(t'-t)} \eta_{\kappa}(t') = (1/s) \{1 - e^{-s(t-t_*)}\} \eta_{\kappa}(t), \quad (4.5)$$

где  $s = \partial/\partial t$ . В силу (4.5) получаем

$$1/2 \langle [\tilde{v}_{\kappa}(t_1, t_*), \tilde{v}_{\nu}(t_2, t_*)]_{+} \rangle_0 = (-1/s_1^2) \{1 - e^{-s_1(t_1-t_*)}\} \{1 - e^{-s_1(t_2-t_*)}\} K_{\kappa\nu}(\eta)(t_1 - t_2) \quad (4.6)$$

( $s_1 = \partial/\partial t_1$ ). Подстановка формулы (3.9) в правую часть (4.6) дает

$$1/2 \langle [\tilde{v}_{\kappa}(t_1, t_*), \tilde{v}_{\nu}(t_2, t_*)]_{+} \rangle_0 = \delta_{\kappa\nu} / (2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_1 t_2} \{1 - e^{-i\omega(t_1-t_*)}\} \{1 - e^{-i\omega(t_2-t_*)}\} d\omega / |\omega|. \quad (4.7)$$

Для  $t_1 = t_2$  этот интеграл расходится логарифмически при  $\omega = \pm\infty$ , то есть значительно слабее, чем (3.9) и слабее, чем интегральное представление дельта функции. Это свидетельствует о том, что  $\tilde{v}_{\kappa}(t_1, t_*)$  и  $v_{\kappa}(t)$  менее сингулярны, чем  $\eta_{\kappa}(t)$  и даже чем дельта-коррелированные процессы. Мы можем получить следующую формулу

$$\sigma_{\kappa}(t) = (1/s^2) \{1 - e^{-st} - t[e^{-st} - e^{-s(t+1)}]\} \eta_{\kappa}(t) \quad (4.8)$$

точно также, как мы получили (4.5). Если мы запишем формулу типа (4.7) для  $1/2 \langle [\sigma_{\kappa}(t_1), \sigma_{\nu}(t_2)]_{+} \rangle_0$ , то мы увидим, что интеграл сходится. Это доказывает, что процесс  $\sigma_{\kappa}(t)$  является конечным, то есть несингулярным.

Расчеты показывают (см. Приложение 1), что процессы  $v_{\kappa}(t), \sigma_{\kappa}(t)$  имеют следующие двухвременные симметризованные моменты и коммутаторы

$$1/2 \langle [v_{\kappa}(t_1), v_{\nu}(t_2)]_{+} \rangle_0 = \pi^{-1} \delta_{\kappa\nu} [-\ln|t_{12}| + (t_1+1)\ln(t_1+1) + (t_2+1)\ln(t_2+1) - t_1 \ln t_1 - t_2 \ln t_2 - 1/2], \quad (4.9)$$

$$1/2 \langle [\sigma_{\kappa}(t_1), \sigma_{\nu}(t_2)]_{+} \rangle_0 = (2\pi)^{-1} \delta_{\kappa\nu} [t_{12}^2 \ln|t_{12}| + t_2(t_1+1)^2 \ln(t_1+1) + t_1(t_2+1)^2 \ln(t_2+1) - (t_2+1)t_1^2 \ln t_1 - (t_1+1)t_2^2 \ln t_2], \quad (4.10)$$

$$[v_{\kappa}(t_1), v_{\nu}(t_2)] = -i \delta_{\kappa\nu} \text{sign} t_{12}, \quad (4.11)$$

$$[\sigma_{\kappa}(t_1), \sigma_{\nu}(t_2)] = 1/2 i \delta_{\kappa\nu} (t_{12}|t_{12}| - t_1^2 + t_2^2). \quad (4.12)$$

Из (4.10) мы видим, что процессы  $\sigma_k(t)$  имеют конечный средний квадрат при каждом  $t$  в отличие от  $\eta_k(t)$  и  $\nu_k(t)$ . Это означает, что  $\sigma_k(t)$  являются обычными (не обобщенными) операторными стохастическими процессами. С этого момента мы будем считать (4.10) и (4.12) постулатами.

## 5. Интегральная форма динамических уравнений

Дифференцируя обе части уравнения (2.3) и используя (2.4), получаем

$$m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta = -U_{1\alpha}(q) - \lambda_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + b_{\alpha\kappa}[\ddot{\sigma}_\kappa(t) + \zeta_\kappa(t)]. \quad (5.1)$$

Здесь, согласно уравнениям (3.1), (4.3) и (4.4), вместо  $\xi_\alpha(t)$  записано  $\ddot{\sigma}_\alpha(t) + \zeta_\alpha(t)$ . Так как операторные процессы  $\sigma_k(t)$  не являются дифференцируемыми в обычном смысле, то более удобно записать (5.1) в другой форме, используя дифференциалы,

$$m_{\alpha\beta}d^2q_\alpha = -U_{1\alpha}(q)dt^2 - \lambda_{\alpha\beta}dq_\beta dt + b_{\alpha\kappa}[d^2\sigma_\kappa(t) + \zeta_\kappa(t)dt^2]. \quad (5.2)$$

Эта дифференциальная форма уравнения является более сложной, чем форма (1.2) некантовой теории. Конечно, форма (5.2) предполагает здесь интегрирование по  $t$ . Интегральная форма (5.2) имеет вид

$$m_{\alpha\beta}q_\beta(t) = \int_{t_0}^t (t-t')[-U_{1\alpha}(q(t')) + b_{\alpha\kappa}\zeta_\kappa(t')]dt' - \lambda_{\alpha\beta}\int_{t_0}^t q_\beta(t')dt' + \\ + b_{\alpha\kappa}[\sigma_\kappa(t) - \sigma_\kappa(t_0)] + [m_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}(t-t_0)]q_\beta(t_0) + [m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta(t_0) - b_{\alpha\kappa}\dot{\sigma}_\kappa(t_0)](t-t_0) \quad (5.3)$$

( $t_0 \geq 0$ ). Дифференцированием легко проверить, что формула (5.3) эквивалентна (5.1) или (5.2). Предпочтительнее использовать интегральное уравнение (5.3), потому что все входящие в него операторы (за исключением  $\dot{\sigma}_\kappa(t_0)$  и, может быть,  $\dot{q}_\beta(t_0)$ ) конечны, то есть имеют конечные средние квадраты. Правда, как это можно видеть из (4.4), (4.9),

$$\langle [\dot{\sigma}_\kappa(t_0)]^2 \rangle = \langle \nu_\kappa^2(t_0) \rangle = \infty,$$

но мы требуем, чтобы разность  $m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta(t_0) - b_{\alpha\kappa}\dot{\sigma}_\kappa(t_0)$  была конечной

$$\langle [m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta(t_0) - b_{\alpha\kappa}\dot{\sigma}_\kappa(t_0)]^2 \rangle < \infty. \quad (5.4)$$

Это накладывает ограничения на выбор  $q_\alpha(t_0)$ . В этом случае  $\langle \dot{q}_\beta(t_0)\dot{q}_\gamma(t_0) \rangle$  и  $\langle \dot{q}_\beta(t_0)\dot{\sigma}_\kappa(t_0) \rangle$  должны быть бесконечными, как и  $\langle [\dot{\sigma}_\kappa(t_0)]^2 \rangle$ . В силу (5.4) интегральное уравнение (5.3) с математической точки зрения вполне корректно.

Могут быть выведены другие интегральные уравнения, эквивалентные (5.3).

Например мы можем решить уравнение  $m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta + \lambda_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + a_{\alpha\beta}q_\beta = \dots$ , временно полагая его правую часть известной. Для его решения удобно применить метод преобразования Лапласа. Таким образом мы получаем следующее интегральное уравнение

$$q_{\alpha}(t) = \int_{t_0}^t G_{\alpha,\beta}(t-t')[-\tilde{U}_{1\beta}(q(t')) + b_{\beta\kappa}\zeta_{\kappa}(t')]dt' - \int_{t_0}^t \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\gamma\kappa}d\sigma_{\kappa}(t') + \\ + \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t_0)m_{\beta\gamma}q_{\gamma}(t_0) + G_{\alpha,\beta}(t-t_0)[\lambda_{\beta\gamma}q_{\gamma}(t_0) + m_{\beta\gamma}\dot{q}_{\gamma}(t_0) - b_{\beta\kappa}\dot{\sigma}_{\kappa}(t_0)] \quad (5.5)$$

( $t_0 \geq 0$ ). Здесь  $G_{\alpha,\beta}(t)$  матрица функций, имеющих преобразование Лапласа  $\|\hat{m}s^2 + \hat{\lambda}s + \hat{a}\|^{-1}$ ,  $\dot{G}_{\alpha,\beta}(t) = dG_{\alpha,\beta}(t)/dt$ . Интеграл, содержащий  $d\sigma(t')/dt'$  был взят по частям. В (5.5) было использовано обозначение  $\tilde{U}(q) = U(q) - 1/2 a_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta}$ . Уравнение (5.5) имеет то же самое преимущество перед (5.1), что и перед (5.3).

## 6. Один метод решения интегральных уравнений

Стохастические уравнения (5.5) могут быть решены итерациями согласно схеме

$$q_{\alpha}^{(n)} = \int_{t_0}^t G_{\alpha,\beta}(t-t')[-\tilde{U}_{1\beta}(q^{(n-1)}(t')) + b_{\beta\kappa}\zeta_{\kappa}(t')]dt' - \int_{t_0}^t \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\gamma\kappa}d\sigma_{\kappa}(t') + \\ + \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t_0)m_{\beta\gamma}q_{\gamma}^0 + G_{\alpha,\beta}(t-t_0)[\lambda_{\beta\gamma}q_{\gamma}^0 + m_{\beta\gamma}\dot{q}_{\gamma}^0 - b_{\beta\kappa}\dot{\sigma}_{\kappa}^0] \quad (6.1)$$

( $q_{\alpha}^0 = q_{\alpha}(t_0)$  и так далее). Здесь  $q_{\alpha}^{(n)}$  —  $n$ -ое приближение. В случае справедливости уравнения (2.7) разумно взять  $q_{\alpha}^0 = \langle q_{\alpha} \rangle_0 = 0$  в качестве нулевого приближения. Тогда мы получаем приближение первого порядка

$$q_{\alpha}^{(1)} = \int_{t_0}^t G_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\beta\kappa}\zeta_{\kappa}(t')dt' - \int_{t_0}^t \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\gamma\kappa}d\sigma_{\kappa}(t') + [G_{\alpha,\beta}(t-t_0)\lambda_{\beta\gamma} + \\ + \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t_0)m_{\beta\gamma}]q_{\gamma}^0 + G_{\alpha,\beta}(t-t_0)[m_{\beta\gamma}\dot{q}_{\gamma}^0 - b_{\beta\kappa}\dot{\sigma}_{\kappa}^0], \quad (6.2)$$

если  $T = T_0$ . В Приложении 2 показано, что стохастический интеграл  $\int_{t_0}^t \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\gamma\kappa}d\sigma_{\kappa}(t')$ , входящий в (5.5), (6.1), (6.2), можно понимать как предел в смысле нормы  $\|A\|_p = [\text{Tr}AA^{\dagger} + \rho]^{1/2}$ . Для случая

$$U_1(q) \equiv U_1(0) + 1/2 a_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta} + 1/6 b_{\alpha\beta\gamma} q_{\alpha} q_{\beta} q_{\gamma}$$

приближение второго порядка может быть записано в форме

$$q_{\alpha}^{(2)} = \int_{t_0}^t G_{\alpha,\beta}(t-t_2)\xi_{\alpha}(t_2)dt_2 + 1/2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t G_{\alpha,\beta\gamma}(t-t_2, t-t_3)\xi_{\beta}(t_2)\xi_{\gamma}(t_3)dt_2 dt_3, \quad (6.3)$$

где положено  $t_0 = -\infty$  и введено обозначение

$$G_{\alpha,\beta\gamma}(t-t_2, t-t_3) = - \int_{-\infty}^t G_{\alpha,\mu}(t-t')b_{\mu\nu\sigma}G_{\mu,\beta}(t'-t_2)G_{\nu,\gamma}(t'-t_3). \quad (6.4)$$

Формула (6.2) может быть использована для нахождения нестационарного симметризованного момента

$$1/2 \langle [q_{\alpha}^{(1)}(t_1), q_{\beta}^{(1)}(t_2)]_+ \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \dot{G}_{\alpha,\gamma}(t_1-t'_1)\dot{G}_{\beta,\delta}(t_2-t'_2)b_{\gamma\kappa}b_{\delta\lambda} \times \\ \times 1/2 \langle [\dot{\sigma}_{\kappa}(t'_1), \dot{\sigma}_{\lambda}(t'_2)]_+ \rangle dt'_1 dt'_2 + S, \quad (6.5)$$

где  $S$  — сумма всех членов, которые могут быть выражены через

$$\langle [\dot{\sigma}_\kappa(t_1'), \dot{\sigma}_\lambda(t_0)]_+ \rangle, \langle [m_{\beta\gamma} \dot{q}_\gamma^0 - b_{\beta\lambda} \dot{\sigma}_\lambda^0]_+ \rangle, \langle [\dot{\sigma}_\kappa(t_1'), q_\gamma^0]_+ \rangle \quad (6.6)$$

и

$$\langle [m_{\beta\gamma} \dot{q}_\gamma^0 - b_{\beta\kappa} \dot{\sigma}_\kappa^0, q_\mu^0]_+ \rangle, \langle [m_{\beta\gamma} \dot{q}_\gamma^0 - b_{\beta\kappa} \dot{\sigma}_\kappa^0, m_{\delta\mu} \dot{q}_\mu^0 - b_{\delta\lambda} \dot{\sigma}_\lambda^0]_+ \rangle, \langle [q_\delta^0, q_\mu^0]_+ \rangle. \quad (6.7)$$

Полученный выше результат (6.5) отличается от соответствующего некантового варианта, который можно получить с помощью марковской теории, а также от того, который может быть получен на основе квантовой марковской теории, присутствием в нем зависимости  $1/2 \langle [q_\alpha^{(1)}(t_1), q_\beta^{(1)}(t_2)]_+ \rangle$  от антикоммутирующих (6.6) и (6.7)

Из (4.9) легко можно видеть, что двойной интеграл в правой части (6.5) и интегралы в (6.6) конечны. Таким образом, величины  $1/2 \langle [q_\alpha^{(1)}(t_1), q_\beta^{(1)}(t_2)]_+ \rangle$  конечны, если антикоммутирующие (6.7) конечны.

## 7. Стационарные моменты и корреляторы. Негауссовы свойства $q_\alpha(t)$

Формулы (6.2), (6.3) могут быть применены для расчета тройных и четверных моментов и корреляторов (кумулянтов) от  $q_\alpha(t)$ . Однако нет необходимости использовать эти формулы для нахождения стационарных моментов и корреляторов, так как для этой цели можно непосредственно пользоваться флуктуационно-диссипационными теоремами. Согласно обычной флуктуационно-диссипационной теореме (см., например, [6, ф. (5.3.9)]) имеем

$$1/2 \langle [q_\alpha^{(1)}(\omega_1), q_\beta^{(1)}(\omega_2)]_+ \rangle = 1/2 i \hbar \text{ctch}[\hbar \omega_2 / (2kT)] \text{Im} F_{\alpha\beta}(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \quad (7.1)$$

с  $\hat{F}(\omega) = \|\hat{m}\omega^2 + \hat{\lambda}\omega + \hat{a}\|^{-1}$ ,  $q_\alpha^{(1)}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-i\omega t} q_\alpha^{(1)}(t) dt$ .

Тройные и четверные корреляторы (кумулянты)  $\langle q_{\alpha 1}(\omega_1), q_{\alpha 2}(\omega_2), q_{\alpha 3}(\omega_3) \rangle$ ,  $\langle q_1, q_2, q_3, q_4 \rangle$  описывают негауссовы свойства  $q_\alpha(t)$  или  $q_\alpha(\omega)$ . Здесь и в дальнейшем используем обозначения  $q_1 = q_{\alpha 1}(\omega_1)$ ,  $q_2 = q_{\alpha 2}(\omega_2)$  и т. д. В силу [6, ф. (5.3.65)] имеем

$$\begin{aligned} \langle q_\alpha(\omega_1), q_\beta(\omega_2), q_\gamma(\omega_3) \rangle = & -2\hbar^2 [\Gamma_2^- \Gamma_3^- \text{Re} G'_{\alpha, \beta\gamma}(\omega_2, \omega_3) + \Gamma_1^+ \Gamma_3^- \text{Re} G'_{\beta, \alpha\gamma}(\omega_1, \omega_3) + \\ & + \Gamma_1^+ \Gamma_2^+ \text{Re} G'_{\gamma, \alpha\beta}(\omega_1, \omega_2)] \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3), \end{aligned} \quad (7.2)$$

где

$$\Gamma_j^\pm = -1/2 \text{ctch}[\hbar \omega_j / (2kT)] \pm 1/2,$$

$$G'_{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3}(\omega_2, \omega_3) = -F_{\alpha\lambda}(-\omega_2 - \omega_3) b_{\lambda\mu} F_{\mu\beta}(-\omega_2) F_{\gamma}(-\omega_3) \quad (7.3)$$

((7.3) является спектром от (6.4)).

Кроме того, в случае, когда

$$U_1(q) \equiv U_1(0) + 1/2 a_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta + 1/24 c_{\alpha\beta\gamma\delta} q_\alpha q_\beta q_\gamma q_\delta$$

и когда коэффициенты трения  $\lambda_{\alpha\beta}$  не флуктуируют, мы имеем, согласно [6, ф. (5.4.20)],

$$\begin{aligned} \langle q_\alpha(\omega_1), q_\beta(\omega_2), q_\gamma(\omega_3), q_\delta(\omega_4) \rangle = & 2\hbar^3 [\Gamma_2^- \Gamma_3^- \Gamma_4^- \text{Im} G'_{\alpha, \beta\gamma\delta}(\omega_2, \omega_3, \omega_4) + \\ & + \Gamma_1^+ \Gamma_3^- \Gamma_4^- \text{Im} G'_{\beta, \alpha\gamma\delta}(\omega_2, \omega_3, \omega_4) + \Gamma_1^+ \Gamma_2^+ \Gamma_4^- \text{Im} G'_{\gamma, \alpha\beta\delta}(\omega_1, \omega_2, \omega_4) + \\ & + \Gamma_1^+ \Gamma_2^+ \Gamma_3^+ \text{Im} G'_{\delta, \alpha\beta\gamma}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)] \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь

$$G'_{\alpha,\beta,\gamma\delta}(\omega_2, \omega_3, \omega_4) = -F_{\alpha\lambda}(-\omega_2-\omega_3-\omega_4)c_{\lambda\mu\nu\sigma}F_{\mu\beta}(-\omega_2)F_{\nu\gamma}(-\omega_3)F_{\sigma\delta}(-\omega_4).$$

В случае, когда коэффициенты  $\lambda_{\alpha\beta}$  являются случайными процессами, к правой части (7.4) следует добавить несколько последующих членов. Обозначая правую часть (7.4) точками, мы получаем, согласно [6, ф. (5.4.85)],

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2, q_3, q_4 \rangle = & \dots - \hbar^2 [\Gamma_3^- \Gamma_4^- G_{12,34}^{(2)} + \Gamma_4^- (\Gamma_3^- G_{13,24}^{-(2)} + \Gamma_3^+ G_{31,24}^{+(2)}) + \\ & + e^{-\beta\hbar\omega_1} \Gamma_2^+ \Gamma_3^+ G_{41,23}^{(2)} + \Gamma_1^+ \Gamma_4^- G_{23,14}^{(2)} + \\ & + \Gamma_1^+ (\Gamma_3^- G_{24,31}^{-(2)} + \Gamma_3^+ G_{42,31}^{+(2)}) + \Gamma_1^+ \Gamma_2^+ G_{34,12}^{(2)}]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь  $G_{12,34}^{(2)} = G_{12,34}^{-(2)} + G_{21,34}^{+(2)}$  и, в силу [6, ф. (5.4.77), (5.7.49)],

$$\begin{aligned} G_{12,34}^{-(2)} &= F_{\alpha 1\kappa}(\omega_1)F_{\alpha 2\mu}(\omega_2)[J_{\kappa\mu,\nu\sigma}^-(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) + K_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)] \times \\ & \quad \times F_{\nu\alpha 3}(-\omega_3)F_{\sigma\alpha 4}(-\omega_4), \\ G_{21,34}^{+(2)} &= F_{\alpha 1\kappa}(\omega_1)F_{\alpha 2\mu}(\omega_2)[J_{\kappa\mu,\nu\sigma}^+(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) + K_{\mu\kappa,\sigma\nu}(\omega_2, \omega_1, \omega_4, \omega_3)] \times \\ & \quad \times F_{\nu\alpha 3}(-\omega_3)F_{\sigma\alpha 4}(-\omega_4). \end{aligned}$$

Согласно теории, приведенной в Приложении 3, функции  $J_{\kappa\mu,\nu\sigma}^\pm(\omega_1, \dots, \omega_4)$  равны нулю. Кроме того, используя (П3.5) и переходя к спектральному распределению, имеем

$$K_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1, \dots, \omega_4) = -(8\pi)^{-1}(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)S_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1 + \omega_3)\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4), \quad (7.6)$$

где

$$S_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\tau) d\tau,$$

$$R_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\tau) = \langle \lambda_{\kappa\mu}(t+\tau), \lambda_{\nu\sigma}(t) \rangle.$$

Средние значения различных коммутаторов и антикоммутаторов (и их комбинации) от  $q_1, q_2, q_3, q_4$  могут быть получены с помощью формул (7.2), (7.4), (7.5).

Автор благодарен В.П.Белавкину за интересные обсуждения и факультету математики Ноттингемского университета за гостеприимство.

Работа была выполнена при финансовой поддержке E.P.S.R.C.(проект GR/K08024).

## Приложение 1

### Некоторые полезные интегралы

Нетрудно проверить, что

$$J_1(t_1, t_2, t_{10}, t_{20}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_{10}}^{t_1} ds_1 \int_{t_{20}}^{t_2} ds_2 f(s_1 - s_2) = -F(t_1 - t_2) + F(t_1 - t_{20}) + F(t_{10} - t_2) - F(t_{10} - t_{20}), \quad (\text{П1.1})$$

где  $F(t)$  определяется формулой  $d^2F(\tau)/d\tau^2 = f(\tau)$ . Применяя эту формулу к  $\varepsilon$ -приближению  $f(\tau) = \varphi_\varepsilon(\tau) = (\varepsilon^2 - \tau^2)/(\tau^2 + \varepsilon^2)^2 = -1/2[(\tau + i\varepsilon)^2 + (\tau - i\varepsilon)^{-2}]$  функции  $\varphi(\tau)$ , получаем

$$dF(\tau)/d\tau = 1/2 [(\tau + i\varepsilon)^{-1} + (\tau - i\varepsilon)^{-1}], \quad F(\tau) = 1/2 \ln(\tau^2 + \varepsilon^2).$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_{10}}^{t_1} ds_1 \int_{t_{20}}^{t_2} ds_2 \varphi_\varepsilon(s_1 - s_2) = -\ln|t_{12}| + \ln(t_1 - t_{20}) + \ln(t_2 - t_{10}) - \ln|t_{10} - t_{20}| \quad (\text{П1.2})$$

и, в силу (4.2), (3.9),

$$\begin{aligned} 1/2 \langle [\tilde{v}_\kappa(t_1, t_{10}), \tilde{v}_\nu(t_2, t_{20})]_+ \rangle &= \pi^{-1} \delta_{\kappa\nu} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{t_{10}}^{t_1} ds_1 \int_{t_{20}}^{t_2} ds_2 \varphi_\varepsilon(s_1 - s_2) = \\ &= \pi^{-1} \delta_{\kappa\nu} [-\ln|t_{12}| + \ln(t_1 - t_{20}) - \ln(t_2 - t_{10}) - \ln|t_{10} - t_{20}|] \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

при  $t_1, t_2 \geq 0; t_{10}, t_{20} \leq 0$ .

Для последующего интегрирования выражения (П1.3), соответствующего (4.3) и (4.4), используем функции  $G'(\tau)$  и  $G(\tau)$ , определяемые формулами  $dG'(\tau)/d\tau = F(\tau)$ ,  $dG(\tau)/d\tau = G'(\tau)$ . Получаем

$$\begin{aligned} J_2(t_1, t_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^0 dt_{10} \int_{-1}^0 dt_{20} J_1(t_1, t_2, t_{10}, t_{20}) = \\ &= -F(t_1 - t_2) + G'(t_1 + 1) - G'(t_1) - G'(-t_2 - 1) + G'(-t_2) - G(1) - G(-1) + 2G(0), \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$

$$\begin{aligned} J_3(t_1, t_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t_1} ds_1 \int_0^{t_2} ds_2 J_2(s_1, s_2) = G(t_1 - t_2) - G(t_1) - G(-t_2) + G(0) + \\ &+ t_2[G(t_1 + 1) - G(1) - G(t_1) + G(0)] + t_1[G(-t_2 - 1) - G(-1) - G(-t_2) + G(0)] - \\ &- t_1 t_2 [G(1) + G(-1) - 2G(0)]. \end{aligned} \quad (\text{П1.5})$$

Здесь формула (П1.1) с  $F$ , взятым вместо  $f$ , была использована для нахождения интегралов от  $F(t_1 - t_2)$  и  $F(t_{10} - t_{20})$ .

Для получения симметризованного момента для  $v_\kappa(t)$  и  $v_\nu(t)$  мы применяем формулы (П1.4), (П1.5), соответственно, к функции  $G(\tau) = 1/2 \tau^2 \ln|\tau|$ , так как  $d^2G(\tau)/d\tau^2 = \ln|\tau| + 3/2$ . Таким образом, получаем формулы (4.9), (4.10). Для нахождения двухвременных коммутаторов для  $v_\kappa(t)$  и  $v_\nu(t)$  мы используем формулы (П1.4) и (П1.5) для случая  $G(\tau) = 1/4 \tau |\tau|$ , так что  $d^4G(\tau)/d\tau^4 = \delta'(\tau)$ . Таким образом мы получаем формулы (4.11), (4.12).

## Приложение 2

### Интерпретация квантового стохастического интеграла с помощью предельной процедуры

В уравнения (5.5), (6.1), (6.2) входят стохастические интегралы типа  $S = \int_{t_0}^{\tau} f(t) d\sigma_\kappa(t)$ ,  $t_0 > 0$  с действительной функцией  $f(t)$ . В этом Приложении мы рассмотрим однокомпонентный случай  $\sigma(t) = \sigma_1(t)$ . Уточним, в каком смысле следует понимать эти интегралы.

Удобно рассматривать равномерное разбиение отрезка  $[t_0, \tau]$  точками

$$t_j = t_0 + j\varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{П2.1})$$

с  $\varepsilon = (\tau - t_0)/N$ . Будем понимать интеграл  $S$  как предел ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) суммы

$$\Sigma = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) [\sigma(t_{j+1}) - \sigma(t_j)], \quad (\text{П2.2})$$

где  $f_j = f(t_j)$  (или  $f_j = [f(t_j) + f(t_{j+1})]/2$ , что в этом случае дает тот же самый предел).

Для доказательства того, что сумма (П2.2) сходится к некоторому пределу в среднем или в смысле нормы  $\|A\|_p = [\text{Tr}AA^\dagger]^{1/2} = \langle AA^\dagger \rangle^{1/2}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , удобно рассмотреть последовательность разбиений, определяемых точками

$$t_j^{(n)} = t_0 + j\varepsilon_n, \quad j = 0, 1, \dots, 2^n, \quad \varepsilon_n = (\tau - t_0)/2^n, \quad (\text{П2.3})$$

то есть  $N = N_n = 2^n$ .

Сравним сумму

$$\Sigma_n = \sum_{j=0}^{N_n-1} f(t_j^{(n)}) \Delta_j = \sum_{k=0}^{N_n-1-1} [f(t_{2k}^{(n)}) \Delta_{2k} + f(t_{2k+1}^{(n)}) \Delta_{2k+1}] \quad (\text{П2.4})$$

с суммой

$$\Sigma_{n-1} = \sum_{k=0}^{N_{n-1}-1} f(t_{2k}^{(n)}) (\Delta_{2k} + \Delta_{2k+1}). \quad (\text{П2.5})$$

В формулах (П2.4) и (П2.5)  $\Delta_i$  имеет один и тот же смысл:  $\Delta_i = \sigma(t_{i+1}^{(n)}) - \sigma(t_i^{(n)})$ . Вычитая из формулы (П2.4) формулу (П2.5), получаем

$$\Delta \Sigma_n = \Sigma_n - \Sigma_{n-1} = \sum_{k=0}^{N_n-1-1} (f_{2k+1} - f_{2k}) \Delta_{2k+1} \quad (\text{П2.6})$$

с  $f_j = f(t_j^{(n)})$ . Используем (П2.6) для оценки среднего квадрата

$$D_n = \langle \Delta \Sigma_n, \Delta \Sigma_n^\dagger \rangle = \langle \Delta \Sigma_n^2 \rangle$$

от разности  $\Delta \Sigma_n$  при больших  $n$ . После подстановки (П2.6) получаем

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{N_n-1-1} \sum_{l=0}^{N_n-1-1} (f_{2k+1} - f_{2k})(f_{2l+1} - f_{2l}) \frac{1}{2} \langle [\Delta_{2k+1}, \Delta_{2l+1}]_+ \rangle \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{N_n-1-1} \sum_{l=0}^{N_n-1-1} |(f_{2k+1} - f_{2k})(f_{2l+1} - f_{2l})| \frac{1}{2} \langle [\Delta_{2k+1}, \Delta_{2l+1}]_+ \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П2.7})$$

Обозначая  $\Delta f_{\max} = \max_k |f_{2k+1} - f_{2k}|$ , получим

$$D_n \leq (\Delta f_{\max})^2 \sum_{k=0}^{N_n-1-1} \sum_{l=0}^{N_n-1-1} \frac{1}{2} \langle [\Delta_{2k+1}, \Delta_{2l+1}]_+ \rangle \leq (\Delta f_{\max})^2 \sum_{i=0}^{N_n-1} \sum_{j=0}^{N_n-1} \frac{1}{2} \langle [\Delta_i, \Delta_j]_+ \rangle. \quad (\text{П2.8})$$

Но  $\frac{1}{2} \langle [\Delta_i, \Delta_j]_+ \rangle = \frac{1}{2} \langle [\Delta_i, \Delta_j]_+ \rangle$  в силу положительности  $\frac{1}{2} \langle [\Delta_i, \Delta_j]_+ \rangle$ . Действительно, эту величину можно получить интегрированием положительной функции (4.9) по квадрату, определяемому соотношениями  $t_i^{(n)} \leq t_1 \leq t_{i+1}^{(n)}$ ,  $t_j^{(n)} \leq t_2 \leq t_{j+1}^{(n)}$ . Учитывая, что  $\sum_{i=0}^{N_n-1} \Delta_i = \sigma(\tau) - \sigma(0)$ , из (П2.8) получаем

$$D_n \leq (\Delta f_{\max})^2 \sum_{i=0}^{N_n-1} \sum_{j=0}^{N_n-1} \frac{1}{2} \langle [\Delta_i, \Delta_j]_+ \rangle \equiv A (\Delta f_{\max})^2, \quad (\text{П2.9})$$

при этом средний квадрат  $A = \langle [\sigma(\tau) - \sigma(0)]^2 \rangle$  является конечным в силу (4.10). Мы полагаем, что функция  $f(t)$  обладает свойством

$$\max_t |f(t+\varepsilon) - f(t)| \leq C\varepsilon^\alpha,$$

где  $\alpha > 0$ . Далее,

$$D_n \leq AC^2 (\tau - t_0)^{2\alpha} e^{-2\alpha n}. \quad (\text{П2.10})$$

Теперь рассмотрим разность

$$\Sigma_{n+m} - \Sigma_{n-1} = \sum_{p=n}^{n+m} (\Sigma_p - \Sigma_{p-1}). \quad (\text{П2.11})$$

Очевидно, мы имеем

$$\langle (\Sigma_{n+m} - \Sigma_{n-1})^2 \rangle = \sum_{p=n}^{n+m} \sum_{q=n}^{n+m} \Delta \Sigma_p \Delta \Sigma_q = 1/2 \sum_{p=n}^{n+m} \sum_{q=n}^{n+m} [\Delta \Sigma_p \Delta \Sigma_q]_+. \quad (\text{П2.12})$$

Неравенство

$$1/2 |[\Delta \Sigma_p \Delta \Sigma_q]_+| \leq D_p^{1/2} D_q^{1/2}, \quad (\text{П2.13})$$

справедливое для самосопряженных  $\{\Delta \Sigma_p\}$ , легко получить на том основании, что уравнение  $\langle (\Delta \Sigma_p - x \Delta \Sigma_q)^2 \rangle = 0$  не может иметь действительных корней  $x_1, x_2 \neq x_1$ , так как  $\langle (\Delta \Sigma_p - x \Delta \Sigma_q)^2 \rangle \geq 0$  при любом действительном значении  $x$ . Применяя (П2.13) к (П2.12), получаем

$$\langle (\Sigma_{n+m} - \Sigma_{n-1})^2 \rangle \leq \{\sum_{p=n}^{n+m} D_p^{1/2}\}^2 \leq \{\sum_{p=n}^{\infty} D_p^{1/2}\}^2.$$

Отсюда с помощью (П2.10) получаем окончательно

$$\langle (\Sigma_{n+m} - \Sigma_{n-1})^2 \rangle \leq AC^2 (\tau - t_0)^{2\alpha} [1 - e^{-\alpha}]^{-2} e^{-2\alpha n}. \quad (\text{П2.14}).$$

То, что правая часть (П2.14) не зависит от  $m$  ( $m \geq n$ ) и стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , говорит о том, что  $\Sigma_n$  имеет предел в среднем (то есть с нормой  $\|A\|_p = \langle AA^+ \rangle^{1/2}$ ). Согласно определению, этот предел представляет собой стохастический интеграл  $\int_{t_0}^{\tau} f(t) d\sigma(t)$ . Для случая интегралов в правых частях (6.1) и (6.2) константа  $\alpha$ , входящая в (П2.10) и (П2.14), равна 1.

### Приложение 3

#### Вклад флуктуаций коэффициентов трения в четверные корреляторы

В случае импеданса (2.10) уравнение [6, ф. (5.6.101a)] дает следующий результат:

$$\langle \xi_{\alpha}(t_1) \xi_{\beta}(t_2) \rangle = 2i \hbar p_2 \Gamma_2^- \delta(t_1 - t_2) \lambda_{\alpha\beta} = i \hbar (\Gamma_1^+ - \Gamma_2^-) \delta'_{12} \lambda_{\alpha\beta}, \quad (\text{П3.1})$$

где  $\delta'_{12} = \delta'(t_1 - t_2)$ ,  $\delta'(\tau) = d\delta(\tau)/d\tau$ ,  $\Gamma_j^{\pm} = 1/2 \text{cth}[i \hbar p_j / (2kT)] \pm 1/2$ ,  $p_j = \partial/\partial t_j$ . Пусть  $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}^0 + \delta\lambda_{\alpha\beta}$ , где  $\lambda_{\alpha\beta}^0 = \langle \lambda_{\alpha\beta} \rangle$  и  $\delta\lambda_{\alpha\beta}$  являются случайными. Вначале мы положим, что  $\delta\lambda_{\alpha\beta}$  не зависят от времени.

Рассмотрим четверной момент  $\langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \rangle$ , где  $\xi_1 = \xi_{\alpha 1}(t_1)$ ,  $\xi_2 = \xi_{\alpha 2}(t_2)$  и т. д. Мы проведем здесь усреднение в два этапа. Сначала мы возьмем среднее  $\langle \dots \rangle_{\lambda}$ , то есть среднее относительно  $\xi_j$  при фиксированном  $\hat{\lambda}$ . Затем найдем среднее относительно  $\lambda$ . Полное среднее можно записать в виде

$$\langle \langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \rangle_{\lambda} \rangle = \langle \langle \xi_1 \xi_2 \rangle_{\lambda} \langle \xi_3 \xi_4 \rangle_{\lambda} \rangle + \langle \xi_1 \xi_3 \rangle_{\lambda} \langle \xi_2 \xi_4 \rangle_{\lambda} + \langle \xi_1 \xi_4 \rangle_{\lambda} \langle \xi_2 \xi_3 \rangle_{\lambda},$$

если предположить, что  $\xi_j$  являются гауссовыми при фиксированных  $\lambda_{\alpha\beta}$ . Подставляя (П3.1) в правую часть этого равенства, получим

$$\begin{aligned}
\langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \rangle = & -\hbar^2 [(\Gamma_1^+ \Gamma_3^+ + \Gamma_2^- \Gamma_4^- - \Gamma_1^+ \Gamma_4^- - \Gamma_2^- \Gamma_3^-) \delta'_{12} \delta'_{34} \langle \lambda_{\alpha 1 \alpha 2} \lambda_{\alpha 3 \alpha 4} \rangle + \\
& + (\Gamma_1^+ \Gamma_2^+ + \Gamma_3^- \Gamma_4^- - \Gamma_1^+ \Gamma_4^- - \Gamma_2^+ \Gamma_3^-) \delta'_{13} \delta'_{24} \langle \lambda_{\alpha 1 \alpha 3} \lambda_{\alpha 2 \alpha 4} \rangle + \\
& + (\Gamma_1^+ \Gamma_2^+ + \Gamma_3^- \Gamma_4^- - \Gamma_1^+ \Gamma_3^- - \Gamma_2^+ \Gamma_4^-) \delta'_{14} \delta'_{23} \langle \lambda_{\alpha 1 \alpha 4} \lambda_{\alpha 2 \alpha 3} \rangle]. \quad (\text{ПЗ.2})
\end{aligned}$$

Теперь мы учтем, что  $\delta \lambda_{\alpha\beta}$  не постоянны, и довольно медленно меняются во времени. Затем мы можем просто заменить  $\langle \lambda_{\alpha\beta} \lambda_{\gamma\delta} \rangle$  на  $\lambda_{\alpha\beta}^0 \lambda_{\gamma\delta}^0 + R_{\alpha\beta, \gamma\delta}(t-t')$ , где  $R_{\alpha\beta, \gamma\delta}(t-t') = \langle \delta \lambda_{\alpha\beta}(t) \delta \lambda_{\gamma\delta}(t') \rangle$ . Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
\langle \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \rangle = & -\hbar^2 [(\Gamma_1^+ \Gamma_3^+ + \Gamma_2^- \Gamma_4^- - \Gamma_1^+ \Gamma_4^- - \Gamma_2^- \Gamma_3^-) \delta'_{12} \delta'_{34} R_{\alpha 1 \alpha 2, \alpha 3 \alpha 4} (1/2(t_1 + t_2 - t_3 - t_4)) + \\
& + (\Gamma_1^+ \Gamma_2^+ + \Gamma_3^- \Gamma_4^- - \Gamma_1^+ \Gamma_4^- - \Gamma_2^+ \Gamma_3^-) \delta'_{13} \delta'_{24} R_{\alpha 1 \alpha 3, \alpha 2 \alpha 4} (1/2(t_1 + t_3 - t_2 - t_4)) + \\
& + (\Gamma_1^+ \Gamma_2^+ + \Gamma_3^- \Gamma_4^- - \Gamma_1^+ \Gamma_3^- - \Gamma_2^+ \Gamma_4^-) \delta'_{14} \delta'_{23} R_{\alpha 1 \alpha 4, \alpha 2 \alpha 3} (1/2(t_1 + t_4 - t_2 - t_3))]. \quad (\text{ПЗ.3})
\end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с [6, ф. (5.7.51)], где  $Q_{12,34}^{(2)} = Q_{12,34}^{-(2)} + Q_{21,34}^{+(2)}$ ,  $Q_{12,34}^{-(2)} = J_{1234}^- + K_{1234}$ ,  $Q_{21,34}^{+(2)} = J_{2134}^+ + K_{1243}$ , нетрудно получить

$$J_{1234}^\pm = 0, \quad (\text{ПЗ.4})$$

$$K_{1234} = \delta'_{13} \delta'_{24} R_{\alpha 1 \alpha 3, \alpha 2 \alpha 4} (1/2(t_1 + t_3 - t_2 - t_4)). \quad (\text{ПЗ.5})$$

В спектральном виде этот результат дается формулой (7.6).

### Библиографический список

1. Kossakowski A. // Rep. Math. Phys. 1972. Vol. 3. P. 247.
2. Lindblad G. // Commun. Math. Phys. 1976. Vol. 48. P. 119.
3. Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, 1994. P.P. 404, 405.
4. Hudson R.L., Parthasarathy K.R. // Math. Phys. 1984. Vol.93. P. 301.
5. Callen H.B., Welton T.A. // Phys. Rev. 1951. Vol.83. P. 34.
6. Stratonovich R.L. Nonlinear Nonequilibrium thermodynamics I. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, 1992.
7. Стратонович Р.Л., Чичигина О.А. // ЖЭТФ. 1994. Т.105, вып.1. С. 106.

Перевод с английского В.Стратонович

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию 4.07.97

## NON-MARKOV THEORY OF QUANTUM FLUCTUATIONS IN THE NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH LINEAR FRICTION

Rouslan L. Stratonovich

Properties of the operator Langevin forces in systems with linear friction are found with the help of fluctuation–dissipation theorems. The special attention is paid to greater singularity of these forces than in the quantum Markov theory. To avoid infinities, dynamic equations are represented in the integral form. Integral stochastic processes  $\sigma_\kappa(t)$  with finite mean square related to the Langevin forces are introduced and applied.

Such non–Gaussian characteristics as threefold and fourfold many–time cumulants are considered in the non–linear case and in the case of fluctuating friction coefficients.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты – р/с № 000609446 в АКБ «Экономбанк»  
г. Саратова, БИК 046311722, корсчет банка 700161122

**Подписка на I-ое полугодие 1998 года**  
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498

Сдано в набор 16.04.97. Подписано к печати 17.07.97. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 12,75 (9,125). Уч.-изд. л. 10,8. Тираж 200 экз. Заказ 49

Издательство ГосУНЦ «Колледж»  
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.  
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446  
E-mail: and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

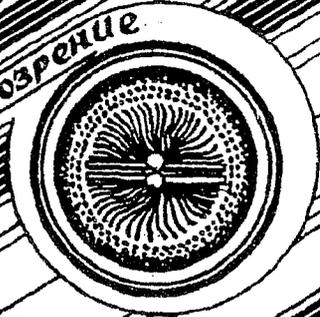
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1997



КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

Редакция приносит извинение за взаимное несоответствие библиографических справок и фотографий С.А. Астахова и Д.А. Смирнова

Saratov University  
Scientific Centre, Moscow  
Saint Petersburg Electrotechnical

Institute of Experimental and  
Technique  
Institute of Radioengineering

Saratov University  
Institute of Applied Physics,

Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



Методы преподавателей



Методические заметки



Книжная полка студента



Маленькая Энциклопедия

Современной нелинейной динамики



Есть художники, соединяющие собой времена и столетия, незримой нитью прошивающие вековые кольца истории. Обри Бердслей<sup>1</sup> промелькнул на закате викторианской Англии, явив скандально дерзкие эпатирующие образы, стоявшие вне пределов тогдашней морали, образы невиданной прежде красоты, в которых буйство фантазии соразмерилось почти математической выверенностью линий, а за впечатляюще - прихотливым ритмом сочетания черно-белых пятен угадывалась мелодия, вносящая высшую гармонию в этот причудливый хаос.

... И вот теперь, листая журналы и книги по нелинейной динамике,<sup>2</sup> вдруг испытываешь чувство déjà vu! Этого странного образом пред тобой вновь проявляется тот же Бердслей, тот же изысканный декоративизм его работ, в которых красота, противобестественного дошла до предельного совершенства и исключительной завершенности. Убран подпорки сюжета, компьютер не уменьшил занимательной привлекательности своих рисунков, а просто довел до логического завершения, принципы, заявленные Бердслеем почти сто лет назад.

<sup>1</sup> Обри Бердслей (1872-1898), английский художник, умер от туберкулеза 25 лет от роду, в зените славы, признанный Европой и Америкой, создав совершенно особенный стиль в графике, который реформировал ее и определил ее дальнейшее развитие на много лет вперед.

<sup>2</sup> Особенно впечатляют изображения множеств Жюльи и Мандельброта в комплексной плоскости, да и вообще, все фрактальные картинки.

Фрагменты рисунков Бердслея представлены на фоне фрагмента комплексной области множества Мандельброта, взятого из книги: Х.-О.Пайтген, П.Х.Рихтер. Красота фракталов. М., Изд. Мир, 1993. На 1-й стр. обложки - иллюстрация к пьесе О.Уайльда "Саломея". Любопытно, что фигура Саломеи вписана в бифуркационную диаграмму, а голова увенчана многолистной бифуркационной диаграммой.