

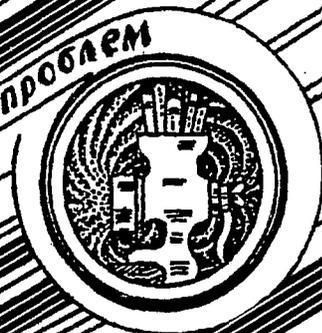
Трикладная Целлинейная Динамика



6
1998



Бифуркации
в динамических
системах различной природы



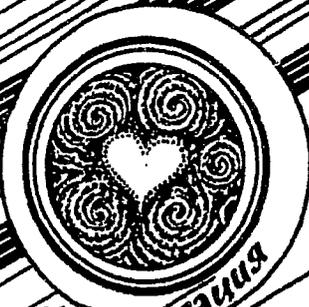
Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



Детерминированный хаос



Авто-волны, самоорганизация

Прикладные задачи
нелинейности
теории
колебаний
и волн



Нелинейная динамика в лицах. История. Personage

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калиникос, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Кащенко Д.С., Могель А., Шварц В.* Динамика уравнения первого порядка с нелинейной запаздывающей обратной связью ступенчатого типа . . . 3
- Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Бабаян А. В.* Влияние саморазогрева диодов Ганна на спектр выходного сигнала генераторов на их основе 20
- Палей Д.Э.* Динамика цифровой системы фазовой синхронизации второго порядка с синусоидальной характеристикой детектора и ограничивающим фильтром 29
- Дмитриев И.Э.* Картирование корреляционной размерности электроэнцефалограммы человека 39
- Фролова Н.Б., Четвериков А.П., Мантуров А.О.* Динамика модели нервной регуляции сердечного ритма 50

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Мельников Л.А., Беккер Э.В.* Численное исследование нелинейной динамики лазера с аддитивной синхронизацией мод 61

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

- Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Скрипаль А.В.* Формирование сталагмитоподобных структур в магнитной жидкости при включении ортогонального магнитного поля 70

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Козленко Е.Л.* Энтропия фильтрованных хаотических сигналов 73

К 90-ЛЕТИЮ САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

- Чувский И.А.* К истории императорского Николаевского университета 81

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Dynamics of first order differential equation with nonlinear step-like delayed feedback. <i>D.S. Kaschenko, A. Moegel, W. Schwarz</i>	3
Influence of self-heating on output signal spectrum of Gunn oscillators. <i>D. A. Usanov, A. V. Skripal, A. V. Babayan</i>	20
Dynamics of second order digital PLL with detector sine-form characteristic and limited filter. <i>Paley D.E.</i>	29
The mapping of human electroencephalogram correlation dimension. <i>I.E. Dmitriev</i> .	39
Dynamics of the model of neural control of the heart rate. <i>N.B. Frolova, A.P. Chetverikov, A.O. Manturov</i>	50

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Ultrashort pulse-train instabilities in additive-pulse mode-locked lasers. <i>L.A. Melnikov, E.V. Bekker</i>	61
--	----

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Formation of stalagmite structures in magnetic fluid during switching on orthogonal magnetic field. <i>D.A. Usanov, Al.V. Skripal, An.V. Skripal</i>	70
--	----

DETERMINISTIC CHAOS

Entropy of filtered chaotic signals. <i>E.L. Kozlenko</i>	73
---	----

TO THE 90-th ANNIVERSARY OF SARATOV STATE UNIVERSITY

To the history of the Emperor University. <i>I.A. Chujevsky</i>	81
---	----



ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ СТУПЕНЧАТОГО ТИПА

Д.С. Кащенко, А. Могель, В. Шварц

В настоящей работе аналитическими и численно-аналитическими методами исследуется нелокальная динамика важных для приложений классов дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейной запаздывающей обратной связью ступенчатого типа. Подход, основанный на асимптотическом анализе, позволил проанализировать аттракторы, состоящие из решений импульсного типа. Получены численные характеристики нерегулярных колебаний и прослежена их зависимость от величины запаздывания.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием служат математическими моделями огромного числа прикладных задач. Обзор соответствующей литературы имеется, например, в работах [1–6] и в приведенных в них библиографиях. Большое число статей посвящено изучению динамических свойств решений таких уравнений. Здесь, прежде всего, следует выделить цикл работ, посвященных численному и экспоненциальному исследованию генераторов с запаздывающей обратной связью [2,3,7–11], где показано, что в таких генераторах могут возникать мощные хаотические колебания в широком диапазоне параметров.

Весь богатый арсенал аналитических методов изучения динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений переносится, конечно, и на системы с запаздыванием. Кроме этого, для систем с запаздыванием характерно наличие многих специфических эффектов и явлений, обусловленных бесконечномерностью фазового пространства. Так, например, в работах [12–15] предложен специальный асимптотический метод изучения нелокального поведения решений важных классов сингулярно возмущенных систем с запаздыванием. Этот метод позволил редуцировать задачу о динамике исходной системы к задаче о динамике аналитически конструируемых конечномерных отображений.

Особое внимание во многих работах было уделено изучению скалярных дифференциально-разностных уравнений первого порядка вида

$$\dot{x} + x = f(x(t-T)), \quad (1.1)$$

где $T > 0$ – время запаздывания. Уравнения такого типа возникают, например, в лазерной оптике [16–19], электротехнике [10,11,20,21], радиофизике [2,3],

медицине [22–23], математической экологии [24] и др. Наиболее распространенными нелинейными функциями являются функции вида

$$f(s) = as(1+s^\mu)^{-1}, \quad (1.2)$$

$$f(s) = Ms \exp(-(s-\gamma)^2), \quad (1.3)$$

$$f(s) = \begin{cases} 1, & a \leq s \leq b, \\ 0, & s < a \text{ и } s > b, \quad 0 \leq a < b \leq 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для нелинейностей первых двух типов были проведены достаточно полные численные и экспериментальные исследования динамики при различных значениях фигурирующих в них параметров, и получены достаточно полные представления об изменении динамических свойств при варьировании тех или иных параметров задачи. Нелинейность последнего из приведенных типов (рис. 1) довольно просто реализуется в задачах электротехники [3,10,11].

Следует сразу оговорить, что одним из центральных вопросов является исследование динамики уравнения (1.1) при достаточно больших значениях запаздывания T . С одной стороны, большие (порядка 10^2 – 10^5) значения T относительно просто реализуются в эксперименте, но, с другой стороны, при этом резко возрастают трудности численного анализа уравнения. Отметим, что после нормирующей замены времени $t \rightarrow Tt$ уравнение (1.1) становится сингулярно возмущенным

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)), \quad (1.5)$$

где $\varepsilon = T^{-1}$. Для изучения асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений этого уравнения с заданными начальными условиями на конечном отрезке изменения времени применимы методы теории сингулярных возмущений [25]. Однако в задачах динамики, то есть при изучении решений для $t \rightarrow \infty$, редко удается получить «близкие» результаты для решений (1.5) и решений вырожденного уравнения

$$x = f(x(t-1)).$$

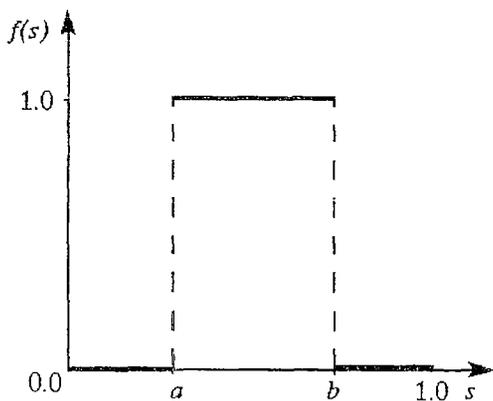


Рис. 1

Некоторые выводы о причинах этого несоответствия и об условиях, когда такое соответствие имеет место, приведены в [4,26].

Настоящая работа посвящена изучению уравнения (1.1) в случае «ступенчатой» нелинейности (1.4). При этом особое внимание будет уделено не только численному, но и аналитическому изучению динамических свойств решений при условии, когда параметр T достаточно велик. Сразу отметим, что в этом случае удалось получить ряд результатов, не имеющих аналогов для уравнения с нелинейностями (1.2) и (1.3).

Третий раздел посвящен асимптотическому анализу уравнения с нелинейностью ступенчатого типа и

изучению устойчивых и долгоживущих структур. В четвертом разделе уделено внимание изучению численных характеристик аттракторов уравнения со ступенчатой нелинейностью.

2. Динамика уравнения (1.1) с релейной запаздывающей обратной связью

Сделаем вначале замечание о динамике уравнения (1.1) с нелинейной функцией $f(s)$ релейного типа (то есть при $a=0$)

$$f(s) = \begin{cases} 1, & s < b, \\ 0, & s \geq b, \end{cases} \quad 0 < b < 1. \quad (2.1)$$

В [27,28] было показано, что данное уравнение имеет единственный экспоненциально орбитально устойчивый медленно осциллирующий цикл $x_0(t)$ такой, что расстояние между соседними корнями уравнения $x_0(t)=b$ больше, чем T , тогда как неустойчивых периодических режимов имеется бесконечно много. При некоторых условиях (типа невырожденности) каждое решение стремится к циклу $x_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Однако в зависимости от степени сложности начального условия, соответствующее решение демонстрирует сложное поведение в течение отрезка времени, которое экспоненциально возрастает с увеличением запаздывания.

3. Динамика уравнения (1.1) со ступенчатой нелинейной обратной связью. Асимптотический анализ

В этом разделе асимптотическими методами исследуются динамические свойства решений уравнения (1.1) в случае, когда нелинейность $f(x)$ имеет ступенчатый вид (1.4). В первых двух пунктах приведены базирующиеся на результатах работ [29–32] утверждения о существовании устойчивого цикла при условии, когда либо параметры a и b достаточно малы, либо параметр b близок к 1. Основное содержание настоящего раздела заключено в третьем пункте, где рассмотрен вопрос о динамике уравнения (1.1) при условии, когда запаздывание T достаточно велико. В четвертом пункте говорится о возможности обобщения этих результатов на более сложные случаи, а в последнем – пятом – пункте этого раздела, имеющем важное прикладное значение, сформулированы выводы о существовании широкого множества «долгоживущих» структурных образований из решений рассматриваемого уравнения. Соответствующие результаты опираются на предложенные в [12–15] специальные методы большого параметра для сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием.

3.1. Асимптотика релаксационного цикла уравнения (1.1) при малых значениях параметров a и b . Пусть в формуле (1.4) параметры a и b являются достаточно малыми:

$$b = \varepsilon b_1, \quad a = \varepsilon a_1,$$

где $b_1 > a_1 \geq 0$ и $0 < \varepsilon \ll 0$.

При этих условиях рассмотрим вопрос о существовании, асимптотике при $\varepsilon \rightarrow 0$ и устойчивости периодических решений уравнения (1.1).

В уравнении (1.1) удобно произвести замену $x = \varepsilon y$, в результате которой приходим к уравнению

$$\dot{y} + y = \varepsilon^{-1} \Phi(y(t-T)),$$
$$\Phi(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } a_1 \leq s \leq b_1, \\ 0, & \text{при } 0 \leq s < a_1 \text{ и } b_1 < s \leq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Обозначим через C_0 множество начальных функций

$$C_0 = \{\varphi(s) \in C_{[-T,0]}, \varphi(0) = b_1, b_1 < \varphi(s) \leq 1 \text{ при } s \in [-T,0)\}.$$

Пусть $y(t)$ – решение (3.1) с начальной функцией из C_0 (это решение не зависит от выбора конкретного элемента из C_0). При $t \in [0, T]$ имеем равенство

$$y(t) = b_1 \exp(-t),$$

а при $t \in (T, 2T]$

$$y(t) = b_1 \exp(-t) + \varepsilon^{-1} \alpha(t),$$

где $\alpha(t) = \int_0^{t-T} \exp(-(t-s-T)) \Phi(b_1 \exp(-s)) ds$.

Легко видеть, что при $t \in (2T, t_0(\varepsilon))$ верна формула

$$y(t) = \varepsilon^{-1} [\alpha(T) \exp(-(t-s-T)) + O(\varepsilon)],$$

а $t_0(\varepsilon)$ определяется как первый при $t > 2T$ корень уравнения $y(t) = b_1$, а значит имеет место равенство

$$t_0(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) [1 + O(|\ln \varepsilon|^{-1})].$$

В силу того, что $y(t_0(\varepsilon) + s) \in C_0$ ($s \in [-T, 0]$), приходим к выводу, что оператор Пуанкаре $P(\varphi(s)) = y(t_0(\varepsilon) + s)$ имеет неподвижную точку $\varphi_0(s) = b_1 \exp(-s)$, которой отвечает периодическое решение $y(t)$.

Используя полученные для $y(t)$ формулы, можно исследовать устойчивость этого решения. Анализируя линеаризованное на $y(t)$ уравнение, удастся показать, что все мультипликаторы, кроме одного (единичного), по модулю меньше 1. Это означает, что $y(t)$ экспоненциально орбитально устойчиво. Отметим, что параметр a_1 влияет только на амплитуду $\alpha(T)$ периодического решения. Итак, установлено, что имеет место

Теорема 1. При всех достаточно малых значениях параметра ε уравнение (1.1) имеет устойчивое периодическое решение $x_0(t) = \varepsilon y(t)$.

По-видимому, других устойчивых (непостоянных) решений при малых ε уравнения (1.1) нет.

3.2. Периодические решения при условии близости параметра b к 1. Здесь предполагаем, что в формуле (1.4)

$$b = 1 - \varepsilon, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.2)$$

Обозначим через $x(t, \varepsilon)$ решение уравнения (1.1) с начальным условием из введенного выше множества C_0 , в котором лишь параметр b_1 следует заменить на b . Изучим поведение $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $t \in [0, T]$ имеем равенство $x(t, \varepsilon) = (1 - \varepsilon) \exp(-t)$. Если выполнено условие

$$\exp(-T) > a, \quad (3.3)$$

то $x(t, \varepsilon)$ является устойчивым периодическим решением уравнений (1.1) и (2.1) ($x(t, \varepsilon) = x_b(t, T)$). Его период $P(T) = -\ln \varepsilon + 2T + \ln(1 - \exp(-T)) + O(\varepsilon)$.

При увеличении параметра a и при нарушении условия (3.3) структура периодического решения усложняется. Соответствующие численные исследования приведены в разделе 4.

3.3. Асимптотика простейших аттракторов уравнения (1.1) при больших значениях запаздывания T . Основное условие, при котором ниже будет исследоваться уравнение (1.1), заключается в том, что параметр T предполагается достаточно большим:

$$T \gg 1. \quad (3.4)$$

Поэтому в уравнении (1.1) удобно сделать нормировку времени $t \rightarrow Tt$, в результате которой приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)), \quad (3.5)$$

где $\varepsilon = T^{-1} \ll 1$. Обратим внимание, что разностное уравнение

$$x(t) = f(x(t-1)), \quad (3.6)$$

в которое вырождается (3.5) при $\varepsilon=0$, имеет при

$$0 < a < b < 1 \quad (3.7)$$

глобально суперустойчивое нулевое состояние равновесия. Поставим задачу изучения динамики уравнения (3.5) при условиях (3.4) и (3.7). Будет показано, что это уравнение обладает богатой динамикой, а его решения имеют сложную структуру. Отметим еще, что каждое решение уравнения (3.5) при достаточно больших t лежит на отрезке $[0,1]$.

Условимся о терминологии. Соседние моменты времени, когда решение уравнения (3.5) принимает значение $x=a$ с положительной и отрицательной производной, назовем соответственно началом и концом всплеска.

В этом разделе изучим аттракторы уравнения (3.5), состоящие из решений с одним всплеском на некоторых отрезках времени длины 1.

Методика исследования такова: в фазовом пространстве $C_{[-1,0]}$ уравнения (3.5) выделяем некоторое множество $C(z)$, зависящее от параметра z . Затем строим асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ всех решений с начальными условиями из $C(z)$. Далее с помощью некоторого оператора Пуанкаре Π удается показать, что $\Pi C(z) \subset C(\bar{z})$, где \bar{z} зависит только от z : $\bar{z} = \Phi(z)$. Таким образом, динамика решений из $C(z)$ определяется итерациями одномерного отображения $z = \Phi(z)$.

Итак, введем в рассмотрение множество $C(z)$:

$$C(z) = \{ \varphi(s, z) \in C_{[-1,0]} \mid (s \in [-1,0], z > 0) :$$

$$1. a \leq \varphi(s, z) \leq b \text{ при } s \in [-1, -1+\varepsilon z];$$

$$2. a > \varphi(s, z) > 0 \text{ при } s \in (-1+\varepsilon z, 0);$$

$$3. \varphi(-1+\varepsilon z, z) = \varphi(0, z) = a \}.$$

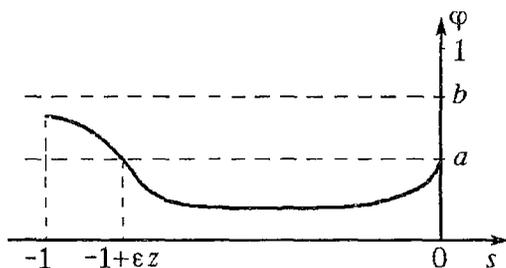
Примерный вид функции $\varphi(s, z)$ приведен на рис. 2.

Через $x(t, z)$ обозначим решение с начальным условием $\varphi(s, z) \in C(z)$. Тем самым, при $t=0$ начинается всплеск функции $x(t, z)$. Отметим еще, что $x(t, z)$ не зависит от выбора конкретной функции из $C(z)$.

Будем последовательно интегрировать уравнение (3.5) для построения решения $x(t, z)$.

При $t \in [0, \varepsilon z]$ получаем, что $x(t, z) = (a-1)\exp(-\varepsilon^{-1}t) + 1$ и $x(\varepsilon z, z) = g(z)$, где $g(z) = (a-1)\exp(-z) + 1$. На отрезке $[\varepsilon z, 1]$ функция $x(t, z)$ монотонно убывает:

$$x(t, z) = g(z)\exp(-(t-\varepsilon z)\varepsilon^{-1}). \quad (3.8)$$



Возможны два случая:

Рис. 2

$$g(z) \leq b \quad (3.9)$$

и

$$g(z) > b. \quad (3.10)$$

Рассмотрим отдельно каждый из них.

1. Пусть сначала выполнено неравенство (3.9). Через εt_1 обозначим первый положительный корень уравнения (момент окончания первого при $t \geq 0$ всплеска)

$$x(t, z) = a. \quad (3.11)$$

Тогда $t_1 = z + \ln g(z) - \ln a$. На отрезке $[1, 1 + \varepsilon t_1]$ функция $x(t, z)$ монотонно растет:

$$x(t, z) = 1 - \exp(-(t-1)\varepsilon^{-1}) + O(\exp(-\varepsilon^{-1})). \quad (3.12)$$

Если $x(1 + \varepsilon t_1, z) < a$, то $x(t, z) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть z_0 – корень уравнения $x(1 + \varepsilon t_1, z) = a$. Тогда

$$z_0 = \ln[(1 - a + a^2)(1 - a)^{-1}].$$

Ниже предполагаем, что

$$z > z_0. \quad (3.13)$$

Тогда $x(1 + \varepsilon t_1, z) > a$, а следовательно, существует первый при $t > 1$ момент $1 + \varepsilon t_0$ начала всплеска функции $x(t, z)$: $x(1 + \varepsilon t_0, z) = a$. Отсюда $t_0 < t_1$ и $t_0 = -\ln(1 - a)$.

Примерный вид функции $x(t, z)$ изображен на рис. 3.

Введем оператор Пуанкаре П:

$$\Pi(\varphi(s, z)) = x(1 + \varepsilon t_0 + s, z) \quad (s \in [-1, 0]). \quad (3.14)$$

Тогда при условиях (3.9) и (3.13) – то есть, при

$$z_0 < z \leq \ln[(1 - a)/(1 - b)] \quad (3.15)$$

выполнено включение

$$\Pi C(z) \subset C(\bar{z}),$$

где с точностью до $O(\exp(-\varepsilon^{-1}))$

$$\bar{z} = t_1 - t_0 = z + \ln[(1 - a)/a] + \ln g(z). \quad (3.16)$$

2. Пусть теперь выполнено условие (3.10), то есть

$$z > \ln[(1 - a)/(1 - b)]. \quad (3.17)$$

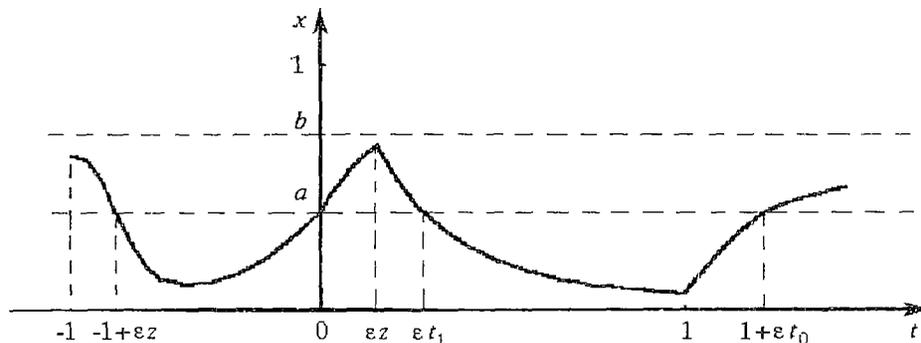


Рис. 3

Тогда $x(\varepsilon t, z) > b$, а значит, существуют два последовательных при $t > 0$ корня εt_1 и εt_2 ($t_1 < t_2$) уравнения $x(\varepsilon t, z) = b$. Из приведенных выше формул получаем равенства

$$t_1 = \ln[(1-a)/(1-b)], \quad t_2 = z + \ln[g(z)/b].$$

Пусть εt_3 – конец всплеска, то есть первый при $t > \varepsilon t_2$ корень уравнения (3.11). Для t_3 верно равенство

$$t_3 = z + \ln[g(z)/a].$$

Далее, при $t \in [\varepsilon t_3, 1]$ верна формула (3.8), а при $t \in [1, 1 + \varepsilon t_1]$ – формула (3.12).

В том случае, когда существует такое $t_0 > 0$, что $x(1 + \varepsilon t_0, z) = a$ и $t_0 < t_2$, оператор П, задаваемый равенством (3.14), выводит функцию $\varphi(s, z)$ из множества $C(z)$ (поскольку для некоторых s имеем $\varphi(s, z) > b$). Поэтому ниже считаем, что $x(1 + \varepsilon t_0, z) < a$ – всплеск при $t \in [1, 1 + \varepsilon t_1]$ не начинается. Это неравенство имеет вид $(1 - \exp(-t_1)) < a$, а значит

$$b < 2a - a^2. \quad (3.18)$$

Тогда $x(1 + \varepsilon t_1, z) = (b-a)(1-a)^{-1} + O(\exp(-\varepsilon^{-1})) < a$. Далее, при $t \in [1 + \varepsilon t_1, 1 + \varepsilon t_2]$ функция $x(t, z)$ убывает и

$$x(1 + \varepsilon t_2, z) = b(b-a)[(1-b)g(z)\exp z]^{-1} + O(\exp(-\varepsilon^{-1})).$$

При $t \in [1 + \varepsilon t_2, 1 + \varepsilon t_3]$ эта функция возрастает. Если $x(1 + \varepsilon t_3, z) < a$, то $x(t, z) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому считаем, что $x(1 + \varepsilon t_3, z) > a$, то есть

$$z < z_1, \quad (3.19)$$

где

$$z_1 = \ln\{1 - a + ab(b-a)[(1-b)(a-b+ab)]^{-1}\}.$$

Отметим, что $z_1 > z_0$. Примерный вид функции $x(t, z)$ изображен на рис. 4.

При условии (3.19) существует первый при $t > 1$ корень $1 + \varepsilon t_0$ уравнения $x(1 + \varepsilon t, z) = a$ (момент начала всплеска) и

$$t_0 = t_2 + \ln[1 - x(1 + \varepsilon t_2, z)] - \ln(1-a).$$

Тем самым, при условиях (3.10), (3.18) и (3.19), то есть при

$$z_0 < z < z_1,$$

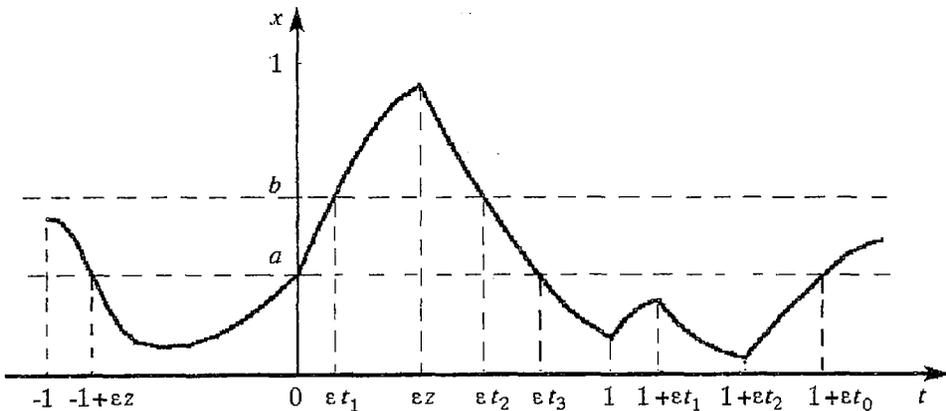


Рис. 4

оператор Π переводит $C(z)$ в $C(\bar{z})$: $\Pi C(z) \in C(\bar{z})$, причем $\bar{z} = t_3 - t_0$. Отсюда с точностью до $O(\exp(-\varepsilon^{-1}))$ получаем зависимость \bar{z} от z

$$\bar{z} = \ln[b(1-a)a^{-1}] - \ln[1-b(b-a)[(1-b)(a-1+\exp z)]^{-1}. \quad (3.20)$$

Объединяя формулы (3.16) и (3.20), получаем отображение

$$\bar{z} = \Phi(z), \quad (3.21)$$

где с точностью до $o(1)$

$$\Phi(z) = \begin{cases} z + \ln[(1-a)a^{-1}] + \ln g(z), & \text{при } z_0 < z \leq \ln[(1-a)/(1-b)], \\ \ln[b(1-a)a^{-1}] - \ln[1-b(b-a)[(1-b)(a-1+\exp z)]^{-1}, & \text{при } \ln[(1-a)/(1-b)] < z < z_1. \end{cases}$$

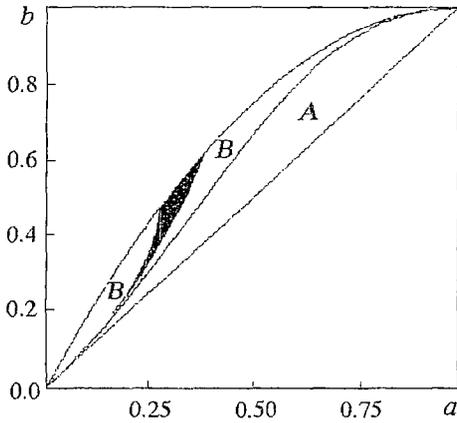


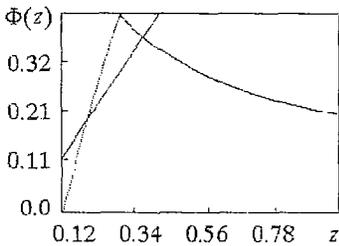
Рис. 5

Отметим, что в плоскости параметров a и b существует область (на рис. 5 она выделена черным цветом), в которой отображение (3.21) имеет аттрактор – устойчивое ненулевое состояние равновесия. Аналитически она описывается системой неравенств

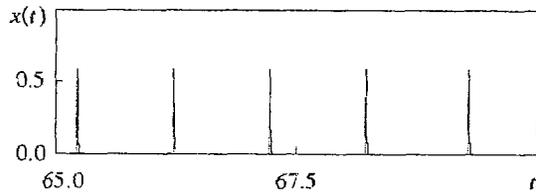
$$\begin{cases} 1-a+ab(b-a)[(1-b)(a-b+ab)]^{-1} < 0, \\ b < 2a - a^2. \end{cases}$$

В этой области уравнение (3.5) имеет аттрактор, динамика которого описывается одномерным отображением (3.21). На рис. 6, а приведен характерный график функции $\Phi(z)$ для $a=0.3$, $b=0.48$, а на рис. 6, б – график решения $x(t)$ при $T=1000$.

В областях A и B (см. рис. 5), границей которых является кривая $b=a(1-a+a^2)^{-1}$, отображение аттрактора не имеет, а отличаются области тем, что в A выполнено неравенство $z_0 > \ln[(1-a)/(1-b)]$, и, следовательно, функция $\Phi(z)$ состоит только из одной части, а в области B выполнено неравенство $z_0 < \ln[(1-a)/(1-b)]$, и $\Phi(z)$ состоит из двух частей.



а



б

Рис. 6

3.4. Решения с двумя всплесками на некотором отрезке длины 1.

Приведенная выше методика позволяет исследовать решения более сложной структуры. Здесь коротко остановимся на решениях с двумя всплесками. Центральным моментом является выделение соответствующего множества начальных условий. Для этого введем в рассмотрение множество начальных функций $C(z) \in C_{[-1,0]}$, зависящее от векторного параметра $z = (z_1, z_2, z_3)$, причем $0 < z_1 \leq z_2 \leq z_3$ и

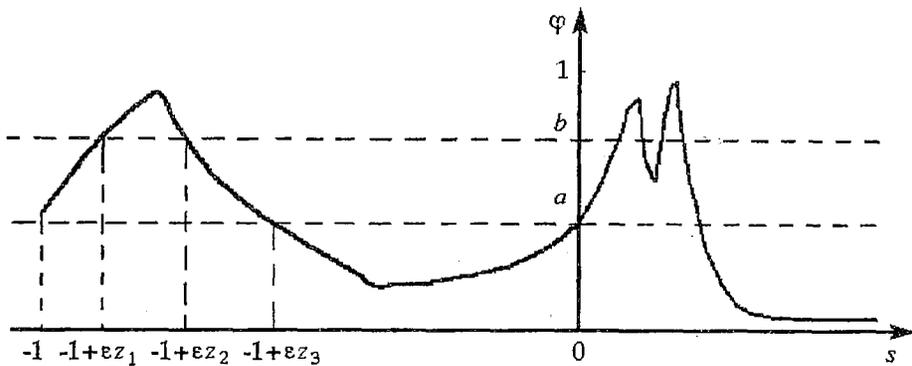


Рис. 7

$$C(z) = \{ \varphi(s, z) \in C_{[-1, 0]}, \text{ для которых} \\
\begin{aligned}
1^0. & a \leq \varphi(s, z) \leq b \text{ при } s \in [-1, -1+\varepsilon z_1]; \\
2^0. & b \leq \varphi(s, z) \leq 1 \text{ при } s \in [-1+\varepsilon z_1, -1+\varepsilon z_2]; \\
3^0. & a \leq \varphi(s, z) \leq b \text{ при } s \in [-1+\varepsilon z_2, -1+\varepsilon z_3]; \\
4^0. & 0 \leq \varphi(s, z) \leq a \text{ при } s \in [-1+\varepsilon z_3, 0]; \\
5^0. & \varphi(0, z) = a.
\end{aligned}$$

Примерный вид функции $\varphi(s, z)$ приведен на рис. 7.

Через $x(t, z)$ обозначим решение уравнения (3.5) с начальными условиями $\varphi(s, z) \in C(z)$. Действуя, как в пункте 3.3, удастся аналитическими методами получить трехмерное отображение в пространстве параметров z_1, z_2, z_3 . Динамика этого отображения описывает итерации соответствующего оператора Пуанкаре, а значит, определяет поведение решений уравнения (3.5) с начальными условиями $\varphi(s, z) \in C(z)$. Формулы этого трехмерного отображения довольно громоздки, поэтому их здесь приводить не будем. Отметим, что область существования аттрактора трехмерного отображения шире, чем соответствующая область для отображения (3.21).

3.5. Долгоживущие структуры. Обобщим конструкцию решений из пункта 3.3. Рассмотрим решения, имеющие произвольное число $k > 0$ всплесков на некоторых отрезках длины 1 и обладающие тем свойством, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ расстояние между всплесками имеет порядок $O(1)$.

Сначала фиксируем произвольно значение $\tau \in (-1, 0)$ и два положительных числа z_1 и z_2 . Рассмотрим множество $C(\tau, z)$ начальных функций $\varphi(s, \tau, z) \in C_{[-1, 0]}$, для которых

1. $\varphi(s, \tau, z) = \varphi(-1+\varepsilon z_1, \tau, z) = \varphi(\tau+\varepsilon z_2, \tau, z) = \varphi(0) = a$,
2. $\varphi(s, \tau, z) < a$ при $s \in (-1+\varepsilon z_1, \tau) \cup (\tau+\varepsilon z_2, 0)$,
3. $\varphi(s, \tau, z) > a$ при $s \in [-1, -1+\varepsilon z_1) \cup (\tau, \tau+\varepsilon z_2)$.

Для $t > 0$ изучим асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $x(t, \tau, z)$ уравнения (3.5) с начальным условием $x(t, \tau, z) = \varphi(s, \tau, z)$ ($s \in [-1, 0]$). Через t_1, t_2, \dots обозначим последовательные положительные корни уравнения $x(t, \tau, z) = a$. При тех же ограничениях на числа z_1 и z_2 , что и на число z из пункта 3.3, удастся показать, что оператор Пуанкаре

$$\Pi(\varphi(s, \tau, z)) = x(t_4 + s, \tau, z)$$

действует из $C(\tau, z)$ в $C(\bar{\tau}, \bar{z})$. Значения $\bar{\tau}$ и \bar{z} с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$ задаются формулами

$$\bar{\tau} = \tau, \quad \bar{z}_1 = \Phi(z_1), \quad \bar{z}_2 = \Phi(z_2), \quad (3.22)$$

где функция $\Phi(z)$ та же, что и в формуле (3.21). Важно отметить, что отображение (3.22) не является грубым. Таким образом, нельзя сделать вывод о существовании у уравнения (3.5) аттрактора, структура решений из которого при всех достаточно больших t определяется этим отображением. Тем не менее, можно утверждать, что в течение асимптотически большого при $(\varepsilon \rightarrow 0)$ промежутка времени соответствующие характеристики решений из $C(\tau, z)$, где значения z_1 и z_2 принадлежат аттрактору отображения (3.21), изменяются согласно формулам (3.22). Ясно, что те же самые рассуждения можно повторить и в более общем случае. Для этого фиксируем произвольно два набора чисел τ_j : $-1 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \tau_{k+1} = 0$ и $z_j > 0$ ($j=0, 1, \dots, k$). Рассмотрим множество $C(\tau, z)$ начальных функций $\varphi(s, \tau, z) \in C_{[-1, 0]}$, для которых

1. $\varphi(\tau_j, \tau, z) = a$ ($j=0, 1, \dots, k+1$), $\varphi(\tau_j + \varepsilon z_j, \tau, z) = a$ ($j=0, 1, \dots, k$),
2. $\varphi(s, \tau, z) < a$ при $s \in (\tau_j + \varepsilon z_j, \tau_{j+1})$ ($j=0, 1, \dots, k$),
3. $\varphi(s, \tau, z) > a$ при $s \in (\tau_j, \tau_j + \varepsilon z_j)$ ($j=0, 1, \dots, k$).

И здесь при каждой итерации соответствующего оператора Пуанкаре с точностью до $O(\varepsilon)$ величины z_j при ограничениях пункта 3.3 меняются независимо друг от друга, а величины τ_j не меняются. Негрубость возникающего здесь отображения не дает возможности установить наличие аттрактора, поскольку погрешности из-за отбрасывания асимптотически малых величин могут накапливаться. Но можно, конечно, сделать вывод о существовании соответствующих «долгоживущих» структур,

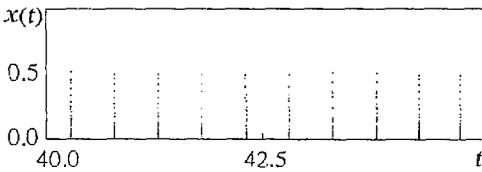


Рис. 8

время «жизни» которых тем дольше, чем меньше ε . Отметим, что такие же структуры возникают и в более сложных ситуациях. Например, при тиражировании на участки отрезка $[-1, 0]$ аттрактора, состоящего из решений с двумя и более всплесками на отрезке длины 1 (рис. 8).

4. Численные характеристики аттракторов уравнения со ступенчатой нелинейностью

Настоящий раздел посвящен численному исследованию уравнения (1.1) с нелинейностью (1.4). Это уравнение, как было показано выше, обладает богатой динамикой. При одних и тех же значениях параметров a и b может существовать, в зависимости от времени запаздывания, как устойчивый цикл, так и хаотический аттрактор (рис. 9).

Изучение последнего представляет особый интерес. В пунктах 4.2–4.4 приведены результаты расчета основных численных характеристик решений уравнения (1.1), а также прослежена их зависимость от времени запаздывания.

Численная характеристика, исследуемая в первом пункте этого раздела, весьма специфична и, как оказалось, информативна именно для рассматриваемой ступенчатой нелинейности. Возможно, она представляет наибольший интерес для анализа колебательных свойств решений уравнения (1.1).

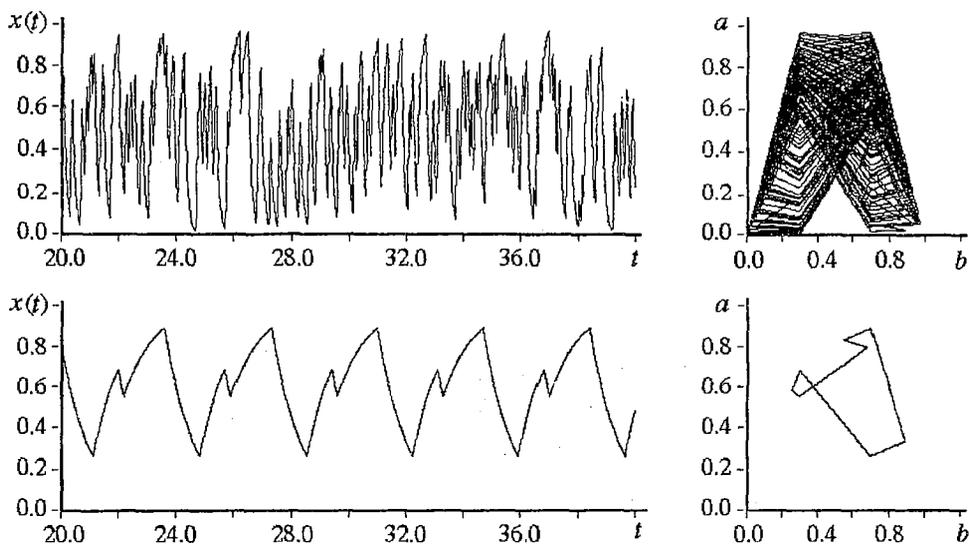


Рис. 9

4.1. Распределение точек пересечения решением прямых $x=a$ и $x=b$.

Фиксируем произвольно неотрицательную начальную функцию $\varphi(s) \in C_{[-1,0]}$, и рассмотрим при $t > 0$ такое решение $x(t)$ уравнения (3.5) с нелинейностью (1.4), что $x(s) = \varphi(s)$ при $s \in [-1, 0]$. В том случае, когда количество положительных корней уравнения

$$x(t) = a \quad (4.1)$$

при $t > 1$ конечно, функция $x(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Этот случай интереса не представляет. Поэтому будем изучать лишь те решения (3.5), у которых количество корней уравнения (4.1) при $t > 1$ неограниченно. В силу автономности уравнения (3.5) удобно считать, что для таких решений $\varphi(0) = x(0) = a$. Выше уже отмечалось, что относительно начальной функции $\varphi(s)$ нужно знать лишь то, на каких участках значения ее лежат в промежутке от a до b . Тем самым, вся необходимая для построения решения $x(t)$ информация о $\varphi(s)$ заключена в корнях уравнений $\varphi(s) = a$ и $\varphi(s) = b$ ($s \in [-1, 0]$). Это обстоятельство является базовым для определения важной численной характеристики решений $S = S(T, a, b)$ ($T = \varepsilon^{-1}$). Для ее определения рассмотрим пронумерованные в общем порядке возрастания корни уравнения (4.1) и уравнения

$$x(t) = b, \quad (4.2)$$

начиная от корня t_0 уравнения (4.1): $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Количество этих корней на каждом из отрезков $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ ($k = k_0, k_0+1, k_0+2, \dots$; $t_{k_0-1} > 0$) длины 1 обозначим через S_k . Отметим, что совокупность таких корней на любом из отрезков Δ_k дает полную информацию о поведении решения $x(t)$ при $t > t_k$. В связи с этим естественно в качестве численной характеристики $x(t)$ принять значение

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \geq n} S_k. \quad (4.3)$$

Кроме этого, введем еще два числа S_{\min} и S_{med} , близкие по смыслу к S :

$$S_{\min} = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{k \geq n} S_k, \quad S_{\text{med}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n/t_n. \quad (4.4)$$

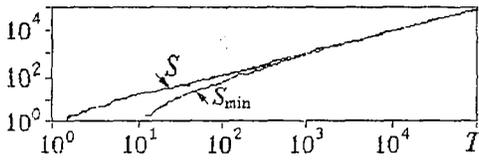


Рис. 10

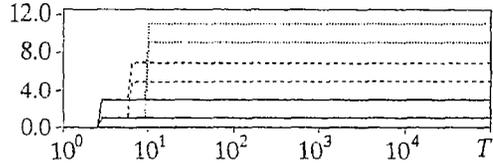


Рис. 11

Отметим, что

$$S_{\min} \leq S_{\text{med}} \leq S.$$

Покажем сначала, что S можно интерпретировать как размерность вложения. Для этого фиксируем отрезок Δ_k , и пусть t_{k-j} ($j=0,1,\dots,p_k$) – все корни уравнений (4.1) и (4.2), лежащие на промежутке Δ_k . Через $\delta_k=(\delta_{k1},\dots,\delta_{kp_k})$ обозначим p_k -мерный вектор, координаты которого определяются формулой $\delta_{kj}=t_{k-j+1}-t_{k-j}$. Тем самым задание p_k -мерного вектора δ_k ($\delta_{kj} \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^p \delta_{kj} < 1$) однозначно определяет решение $x(t)$ при $t > t_k$, а значит, и саму последовательность t_n ($n=k+1, k+2, \dots$). Все числа p_k при достаточно больших номерах k мажорируются числом S . Тем самым, любой набор $\delta_k=(\delta_{k1}, \dots, \delta_{kp_k})$ из S чисел δ_{kj} определяет структуру решения $x(t)$. Можно показать, что для некоторой вектор-функции $\Phi(\delta)$

$$\delta_{k+1} = \Phi(\delta_k). \quad (4.5)$$

Выше было показано, что уравнение (3.5) может иметь аттракторы различной структуры. Характеристику S можно еще интерпретировать как меру структурной сложности решений. Чем больше S , тем более сложный вид имеет соответствующее решение.

Из результатов третьего раздела следует, что при малых ϵ уравнение (3.5) может иметь большое число аттракторов (явление мультистабильности). Важно, однако, отметить, что из результатов численного анализа вытекает, что область притяжения выше у того аттрактора, у которого больше значение S . Графики зависимости величин S_{\min} и S от времени запаздывания T при $a=0.3$, $b=0.48$ приведены на рис. 10 при начальных условиях, равных константе, и на рис. 11 – при специальным образом выбранных (см. пункты 3.3–3.5) начальных условиях:

сплошная линия – начальная функция равна 1 на отрезке длины $10^{-5}T$, а в остальных точках полуинтервала $[-T, 0)$ равна нулю;

штриховая линия – начальная функция равна 1 на двух отрезках длины $10^{-5}T$, а в остальных точках полуинтервала $[-T, 0)$ равна нулю;

пунктирная линия – начальная функция равна 1 на трех отрезках длины $10^{-5}T$, а в остальных точках полуинтервала $[-T, 0)$ равна нулю.

4.2. О сценарии перехода к хаосу. В работе [3] исследовалась аналогичная (1.1) система с нелинейностью

$$F(s) = M \exp(-(s-\gamma)^2),$$

где M – коэффициент усиления, γ – параметр асимметрии. Авторы установили, что при малых T наблюдалось несколько режимов регулярных колебаний с периодом, несколько превышающим $2T$. Характеры изменения этих режимов с увеличением T были сходными и отличались лишь механизмами потери устойчивости регулярных колебаний. Наблюдались три последовательности бифуркаций, приводящие систему к хаотическому режиму: последовательность, включающая как минимум одну-две бифуркации удвоения периода колебаний; последовательность бифуркаций, приводящая к топологическим изменениям в структуре регулярных колебаний и заканчивающаяся переходом к хаосу через

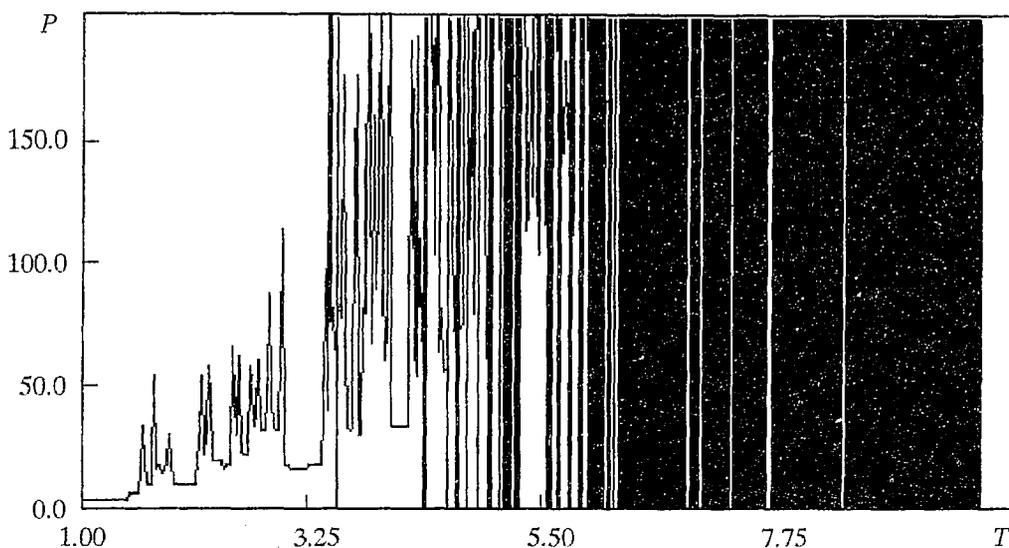


Рис. 12

переменяемость «регулярный режим – хаос»; жесткий переход к хаосу в результате единственной бифуркации.

Рассмотрим здесь вопрос о том, как изменяется структура решения уравнения при увеличении времени запаздывания T (при фиксированных значениях a и b). На рис. 12 приведен график зависимости периода решения P от T при $a=0.3$, $b=0.7$. Данный рисунок дает весьма наглядное представление о том, что сценарий перехода от регулярного поведения к хаосу достаточно сложен. Действительно, в начале при малых T происходит ряд как прямых, так и обратных бифуркаций добавления периода. Далее же, учитывая, что сплошные вертикальные линии соответствуют непериодическим решениям, можно сделать вывод о том, что при увеличении T имеет место явление перемежаемости типа «цикл–хаос». Все эти заключения находят подтверждение при исследовании корреляционной размерности и старшего ляпуновского показателя.

4.3. Корреляционная размерность. Оценка корреляционной размерности системы производилась по корреляционному показателю ν , который вычислялся стандартными методами [33]. На рис. 13 представлен график зависимости ν от времени запаздывания T с шагом 0.2 при выборке $N=20000$, $a=0.3$, $b=0.7$. При небольших значениях T уравнение (1.1) имеет устойчивый цикл, здесь корреляционный показатель ν близок к 1. С увеличением запаздывания в системе возникает хаотический аттрактор, и наблюдается почти линейный рост ν . При достижении величины ν значения, приблизительно равного 6, происходит «насыщение», и рост корреляционного показателя прекращается при дальнейшем увеличении T . Однако методика расчетов такова, что если получается оценка, превышающая 4–5, то к такому результату следует относиться осторожно и не считать его истиной в последней инстанции.

4.4. Старший ляпуновский показатель. Вычисления производились по следующей схеме. Решение возмущалось в одной точке на достаточно малую величину, после чего производилось вычисление исходного и

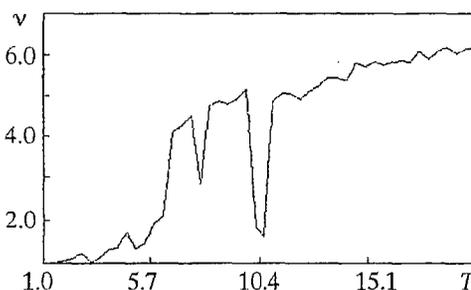


Рис. 13

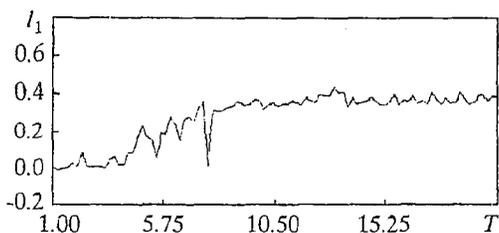


Рис. 14

возмущенного решений на некотором отрезке времени (определяемом стандартными критериями). Данная процедура повторялась несколько раз с целью достижения стабилизации результатов. График зависимости старшего ляпуновского показателя l_1 от T представлен на рис. 14 при $a=0.3$, $b=0.7$. При малых значениях T в системе (1.1) устойчив предельный цикл и, как следствие,

величина l_1 близка к нулю. При увеличении запаздывания до 10 величина l_1 растет приблизительно до 0.4 и при T , больших 10, прекращает рост.

Заключение

В этом разделе сделаем несколько замечаний о сопоставлении поведения решений уравнения (1.1) с нелинейностями (1.2)–(1.4), тем более, что чисто визуально эти нелинейности весьма похожи. Сначала остановимся на некоторых общих моментах, которые имеют место для каждой из рассматриваемых нелинейностей.

Во-первых, при относительно небольших значениях запаздывания T динамика довольно простая. Она допускает исследование аналитическими методами. Следует, конечно, обратить внимание на то, что в случае нелинейности (1.4) всегда асимптотически устойчивым является нулевое состояние равновесия.

Во-вторых, одни и те же асимптотические методы [30–32] дают одинаковые и эффективные результаты (о существовании и асимптотике устойчивого цикла) при условии, когда в случае (1.2)–(1.3) параметры M или γ достаточно велики, а в случае нелинейности (1.4) аналог соответствующей ситуации выделяется условием достаточной малости параметров a и b .

В-третьих, при определенных a и b для нелинейности (1.4) наблюдаются похожие структурные изменения решений. Кроме того получены довольно близкие к [3, 22] результаты по зависимости корреляционной размерности и старшего ляпуновского показателя от величины запаздывания T .

Отметим основные отличительные черты поведения решений в случаях нелинейности (1.2)–(1.3) и (1.4):

- если для (1.2)–(1.3) бифуркационные явления при изменении параметров основаны на бифуркациях удвоения, то в случае (1.4) более характерны бифуркации добавления периода, рассмотренные для непрерывных кусочно–линейных отображений в [34] и для разрывных кусочно–линейных отображений в [35];

- случай (1.4) отличает развитое явление мультистабильности, существование разноплановых аттракторов и долгоживущих структур. Интересно, что при определенных a и b оказалось возможным аналитическое исследование сложной динамики при $T \rightarrow \infty$;

- для нелинейности (1.4) могут быть весьма информативны специальные численные характеристики. Так, важную роль в задаче о динамике уравнения с кусочно–постоянной нелинейностью играет исследуемая в разделе 4 величина S .

Проект поддержан Российским фондом фундаментальных исследований № 97–01–00399.

Библиографический список

1. Хэйл Дж. Теория функционально–дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1984.
2. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.

3. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
4. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1981.
5. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
6. *Горяченко В.Д., Капустин А.Д.* Прикладные задачи устойчивости систем с запаздыванием. Горький, 1988.
7. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью: обзор // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
8. *Кац В.А.* Возникновение и эволюция хаоса в распределенном генераторе с запаздыванием // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 2. С. 161.
9. *Ланда П.С., Перминов С.М., Шаталова Г.Г., Дамгов В.Н.* Стохастические автоколебания в генераторе с дополнительной запаздывающей обратной связью // РЭ. 1986. Т. 31, № 4. С. 730.
10. *Kiliyas T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W.* Electronic chaos generators – design and applications // Int. J. of Electronics. 1995. November. Vol. 79, № 6. P. 737.
11. *Kiliyas T., Moegel A., Schwarz W.* Generation and application of broadband signals using chaotic electronic systems // Bifurcation and Chaos: Theory and Application. Akademie Verlag, 1995.
12. *Кащенко С.А.* Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально–разностных уравнений, моделирующих задачу хищник–жертва // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 4.
13. *Кащенко С.А.* Пространственно неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Матем. моделирование. 1990. Т. 2, № 9. С. 29.
14. *Grigorieva E.V., Kaschenko S.A.* Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // Bifurcations and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6.
15. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Установившиеся автоколебания в лазерах с запаздывающей обратной связью // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, вып. 1 (7).
16. *Gibbs H.M., Hopf F.A., Kaplan D.L., Shoemaker R.L.* Observation of chaos in optical bistability // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 7. P. 474.
17. *Ikeda K.* Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30, № 2. P. 257.
18. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 709.
19. *Ikeda K., Kondo K., Akimoto O.* Successive higher-harmonic bifurcations in systems with delayed feedback // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, № 20. P. 1467.
20. *Moegel A., Schwarz W., Kaschenko S.* Analysis and simulation principles for chaotic systems containing delay elements // NDES'96. Seville, Spain, 1996.
21. *Kaschenko S., Moegel A., Schwarz W.* Analysis of chaotic dynamics of first order equation with piecewise constant delaying feedback // Proc. of 6th Int. Specialist Work-shop Nonlinear Dynamics of Electronics Systems. Budapest, July 16–18, 1998. P. 165.
22. *Mackey M.C., Glass L.* Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197, № 4300. P. 287.
23. *Марчук Г.И., Петров Р.В.* Математическая модель противовирусного иммунного ответа // Препринт № 10. Москва: Отдел вычислит. математики АН СССР, 1981.
24. *Горяченко В.Д.* Исследование динамики численности отдельной популяции с учетом последействия: краткий обзор // Нелинейные колебания и экология. Ярославль: ЯрГУ, 1984. С. 66.
25. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973
26. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально–разностных уравнений с малым множителем при производной // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 8.

27. *Кащенко Д.С.* Синхронизация в системе из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 2,3, С. 100.

28. *Кащенко Д.С.* Динамика автогенератора первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью // Современные проблемы математики и информатики: Сб. науч. тр. Ярославль, 1997. С.105.

29. *Кащенко С.А.* Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 3. С. 307.

30. *Дмитриев А.С., Кащенко С.А.* Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью // Докл. РАН. 1993. Т. 328, № 2. С. 134.

31. *Кащенко С.А.* Асимптотика релаксационных колебаний в дифференциально-разностных системах с финитной нелинейностью. I // Диф.уравнения. 1995. № 8.

32. *Кащенко С.А.* Асимптотика релаксационных колебаний дифференциально-разностных системах с финитной нелинейностью. II // Диф.уравнения. 1995. № 10.

33. *Потапов А.Б.* Программы вычисления корреляционного показателя и оценки обобщенной энтропии по временному ряду. Препринт № 27. Москва: ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1991. 31 с.

34. *Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O.* Cycles of chaotic intervals in a time-delayed chua's circuit//Int. J. of Bif. and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1557.

35. *Kaschenko D.S.* Dynamics of the simplest piecewise linear discontinuous mappings // Proc. of 5th Int. Specialist Workshop Nonlinear Dynamics of Electronics Systems. Moscow, Russia, June 26-27, 1997. P. 458.

Ярославский государственный
университет
Дрезденский технический
университет

Поступила в редакцию 16.12.98

DYNAMICS OF FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH NONLINEAR STEP-LIKE DELAYED FEEDBACK

D.S. Kaschenko, A. Moegel, W. Schwarz

We investigate important for applications classes of first order differential equations with nonlinear step-like delayed feedback. Analytical and numeric-analytical methods have been used to study the nonlocal dynamics of such equations. An approach based on asymptotical analysis made possible to study attractors consisting of solutions of impulse type. Numerical characteristics of nonregular oscillations have been obtained and their dependence on delay time have been described.



Кащенко Дмитрий Сергеевич – родился в 1974 году. Окончил Ярославский госуниверситет (1997), аспирант Ярославского госуниверситета. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ хаотических колебаний и их применение в области передачи информации.



Могель Андреас – доктор Дрезденского технического университета. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ хаотических колебаний и их применение в области передачи информации.



Шварц Вольфганг – профессор Дрезденского технического университета. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ хаотических колебаний и их применение в области передачи информации.



ВЛИЯНИЕ САМОРАЗОГРЕВА ДИОДОВ ГАННА НА СПЕКТР ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ГЕНЕРАТОРОВ НА ИХ ОСНОВЕ

Д. А. Усанов, А. В. Скрипаль, А. В. Бабанн

Впервые на основе совместного с системой уравнений Кирхгофа решения нестационарного уравнения теплового баланса проанализированы закономерности изменения спектра выходного сигнала генератора на диоде Ганна для различных напряжений питания. Режим генерации при напряжениях питания, близких к пороговому, описан как сложный динамический процесс, обладающий выраженной структурой. Установлено, что при саморазогреве кристалла диода Ганна в зависимости от напряжения питания возможно наблюдение либо регуляризации колебаний, либо переход от периодического к квазипериодическому колебательному процессу и его хаотизации.

Введение

Известно, что полупроводниковые приборы СВЧ-диапазона на диодах Ганна, наряду с отрицательной проводимостью в широком диапазоне сверхвысоких частот, могут характеризоваться низкочастотной отрицательной проводимостью [1, 2]. Это приводит к возникновению одновременно с СВЧ-генерацией низкочастотных колебаний в цепи питания диода Ганна [3–5]. При определенных условиях в генераторах на диодах Ганна возможно появление субгармонических колебаний [6] и хаотизации низкочастотных колебаний [7].

Одним из современных методов, позволяющих провести анализ многочастотных режимов работы полупроводниковых генераторов при реальных параметрах активного элемента и СВЧ-схемы, в которую он включен, является метод численного моделирования с использованием эквивалентной схемы, параметры нелинейных элементов которой зависят как от величины постоянного смещения, так и от мгновенных значений токов и напряжений [8]. При проведении такого анализа необходимо учитывать, что по сравнению с приборами вакуумной электроники зависимость параметров твердотельных приборов СВЧ от температуры проявляется гораздо более существенным образом, что обусловлено сильно выраженной зависимостью от температуры свойств полупроводниковых материалов.

Как правило, зависимость основных характеристик полупроводниковых генераторов от температуры учитывается лишь в связи с изменением температуры окружающей среды [9,10], при этом пренебрегают влиянием саморазогрева полупроводниковых приборов, связанным с потреблением мощности от источника питания, что справедливо лишь при моделировании СВЧ-генераторов на

полупроводниковых элементах, потребляющих незначительную мощность от источника питания (менее 10^{-3} Вт), например на туннельных диодах. При моделировании генераторов на диодах Ганна следует учитывать, что потребляемая ими мощность достигает 2–3 Вт и, вследствие конечности теплового сопротивления прибора, происходит существенный саморазогрев полупроводникового кристалла, приводящий к значительному изменению свойств активного полупроводникового элемента.

В настоящей работе проведено численное моделирование работы генератора на диоде Ганна в режиме генерации с учетом эффекта саморазогрева полупроводникового кристалла.

1. Модель, используемая при расчете

Теоретический анализ работы генератора на диоде Ганна основывался на математическом описании процессов в многоконтурной эквивалентной схеме [11], представленной на рис. 1. Элементы схемы моделируют полупроводниковую структуру диода Ганна в виде параллельно соединенных емкости C_3 и активного нелинейного сопротивления, определяемого по ВАХ диода $i(U)$, элементы корпуса диода – L_3, C_4 , СВЧ-резонатор в виде последовательного C_2, L_2 и параллельного L_1, Y_1, C_1 контуров, низкочастотную (НЧ) часть схемы, состоящую из последовательного L_7, C_6 и параллельного C_7, R_5, L_6 контуров, дросселя L_5 в цепи питания, шунтирующей емкости C_5 , индуктивности связи L_4 диода с НЧ-схемой и источника напряжения ϵ . Эквивалентная схема описывалась системой из четырнадцати дифференциальных уравнений, составленных с использованием законов Кирхгофа.

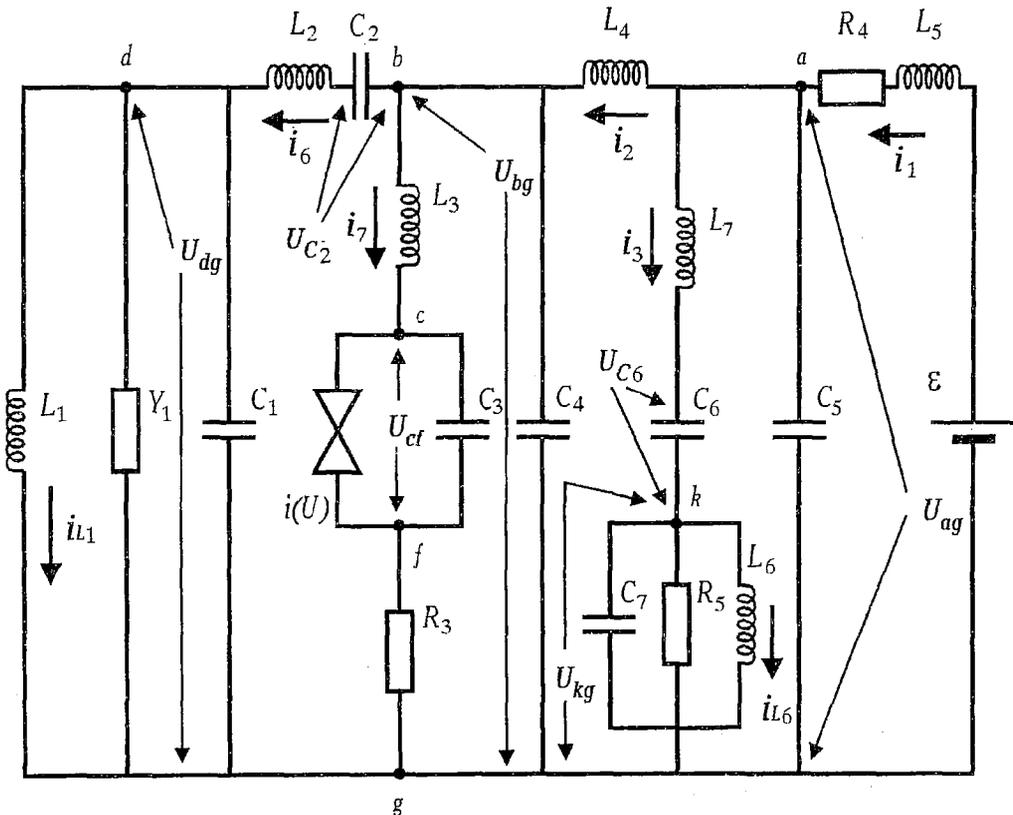


Рис. 1. Эквивалентная схема генератора на диоде Ганна

Процесс саморазогрева диода Ганна анализировался на основе совместного с системой уравнений Кирхгофа решения нестационарного уравнения теплового баланса [12 – 14], представленного в виде :

$$C_m(dT/dt) = i(U_{эф}, T)U - (T-T_0)/R_T,$$

где T и T_0 – температура кристалла диода и окружающей среды, R_T – полное тепловое сопротивление прибора, определяющее величину абсолютного изменения температуры кристалла диода на единицу рассеиваемой мощности, C_m – теплоемкость полупроводникового кристалла.

Нелинейная зависимость мгновенных значений активной составляющей тока i , протекающего через полупроводниковую структуру, от мгновенных значений напряжения U на ней [15] аппроксимировалась выражением вида [11]:

$$i(U) = R_0^{-1}[d/\mu(T)]\{\mu(T)(U+D)/d + V_S(T)[(U+D)/U_n]^4/(1+[(U+D)/U_n]^4),$$

где $R_0=[qn_0\mu(T)S/d]^{-1}$ – сопротивление полупроводниковой структуры в слабых электрических полях, n_0 – концентрация полностью ионизованных доноров, S и d – эффективные площадь поперечного сечения и длина диода соответственно, $D=0$ при $U \leq U_n$, $D=2$ при $U > U_n$. Учитывалось, что саморазогрев кристалла приводит к изменению вольт–амперной характеристики диода [10]. При этом зависимости $\mu(T)$ и $V_S(T)$ аппроксимировались соотношениями:

$$\mu(T) = \mu_0 \cdot 300/T$$

и

$$V_S(T) = V_0/[T(1-5.3 \cdot 10^{-4} \cdot T)].$$

Расчеты, проведенные в [15], свидетельствуют о возможности применения приведенной выше зависимости $i(U)$ в качестве динамической вольт–амперной характеристики диода Ганна на частотах до 10–12 ГГц. Возможность успешного использования динамических ВАХ для описания режимов работы СВЧ–генераторов на диодах Ганна иллюстрируется результатами, приведенными в [6,8,11].

В результате численного моделирования рассчитывался процесс установления колебаний в генераторе на диоде Ганна с учетом эффекта саморазогрева на основе анализа зависимости от времени тока в нагрузке $i_e(t)$. В качестве параметров, определяющих время установления стационарного режима работы генератора на диоде Ганна и его основные характеристики, были выбраны легко измеряемое на практике сопротивление диода Ганна R_0 в слабых электрических полях, тепловое сопротивление прибора R_T и температура окружающей среды. При численном моделировании учитывалось, что причинами, вызывающими изменение сопротивления R_0 , могут быть изменение концентрации носителей заряда n_0 , их подвижности μ или геометрических размеров полупроводниковой структуры.

После установления стационарного режима работы генератора с использованием разложения зависимости $i_e(t)$ в ряд Фурье рассчитывались гармонические и субгармонические составляющие тока в нагрузке, определялись их амплитуды и рассчитывались мощности гармоник и субгармоник с использованием соотношения:

$$P_{ke} = i_{ke}^2 / (2Y_1),$$

где $i_{ke} = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$ – амплитуда гармонических и субгармонических составляющих тока;

$$a_k = (2/T) \int_0^T i_e(t) \cos(k\omega t) dt;$$

$$b_k = 2/T \int_0^T i_e(t) \sin(k\omega t) dt;$$

$k = 1, 2, 3, \dots$; $T = 2\pi/\omega$ – период колебаний на частоте основной субгармоники после установления стационарного режима колебаний, или на частоте основной гармоники при отсутствии в спектре субгармонических составляющих.

3. Результаты расчета

Численное моделирование показало, что в режиме одночастотной генерации (мощность второй гармоники на уровне ниже -50 дБ), достигаемом выбором параметров элементов эквивалентной схемы C_2 и L_4 , определяющих связь диода Ганна с СВЧ–схемой и низкочастотным контуром в цепи питания, соответственно, а также режимом питания диода Ганна по постоянному току, учет саморазогрева диода приводит к существенному изменению частоты и мощности генерации.

На рис. 2 представлены зависимости приведенной выходной мощности генератора P/P_0 на диоде Ганна от величины теплового сопротивления R_T . На этом же рисунке приведена зависимость температуры кристалла диода T от величины R_T в режиме стационарной генерации. Как следует из полученных результатов, увеличение теплового сопротивления прибора уменьшает выходную мощность, что связано с уменьшением отрицательного сопротивления диода Ганна с ростом температуры кристалла. При этом частота генерации увеличивается, что связано с использовавшимся набором параметров пассивных элементов СВЧ–схемы генератора.

С целью выяснения влияния саморазогрева кристалла на спектральный состав выходного сигнала были рассчитаны зависимости относительной мощности второй гармоники A_{2f_0}/A_{f_0} от величины теплового сопротивления прибора (рис. 3), где A_{f_0} – мощность сигнала на основной частоте. Расчеты показали, что увеличение теплового сопротивления прибора до реально имеющих место на практике значений приводит к заметному уменьшению величины высших гармоник в спектре выходного сигнала. Следует отметить, что такая зависимость мощности высших гармоник от степени разогрева полупроводникового кристалла позволяет объяснить наблюдавшийся экспериментально факт повышения «чистоты» спектра выходного сигнала генераторов на диодах Ганна после установления стационарного теплового режима работы.

Исследования взаимосвязи сопротивления диодов Ганна R_0 в слабых электрических полях со спектром выходного сигнала позволили установить, что

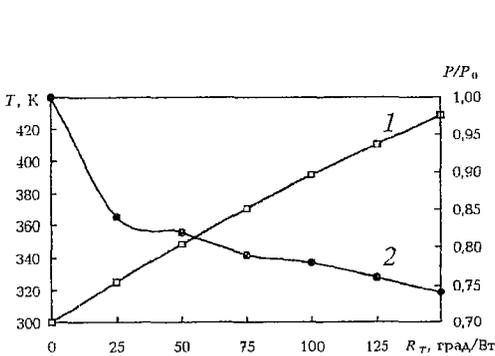


Рис. 2. Зависимости температуры кристалла диода Ганна (кривая 1) и выходной мощности генератора (кривая 2) от величины теплового сопротивления R_T : $\epsilon = 8$ В, $C_2 = 0.3$ пФ, $L_4 = 0.01$ нГн

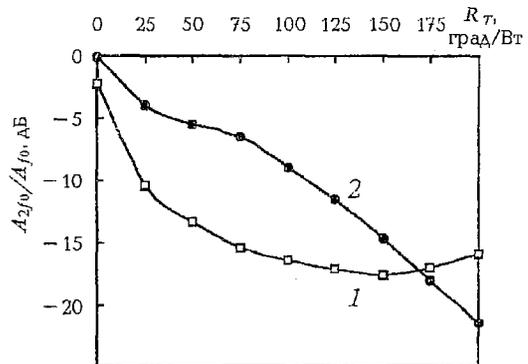


Рис. 3. Зависимости относительной мощности второй гармоники выходного сигнала от величины теплового сопротивления прибора R_T для различных значений R_0 : 1–10 Ом, 2–7.5 Ом; $\epsilon = 6$ В, $C_2 = 0.03$ пФ, $L_4 = 0.1$ нГн

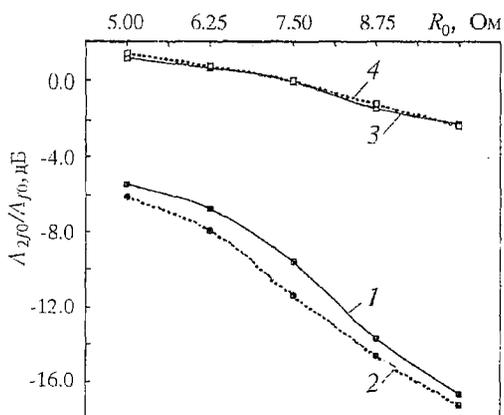


Рис. 4. Зависимости относительной мощности второй гармоники от сопротивления диода R_0 для различных температур окружающей среды T_0 , К: 1–300, 2–310 с учетом саморазогрева ($R_T=100$ град/Вт) кристалла диода Ганна; 3–300, 4 –310 без учета саморазогрева ($R_T=0$)

более чем в 10 раз превышает изменение этой величины при отсутствии саморазогрева кристалла диода.

Наиболее ярко хаотизация выходного сигнала генератора на диоде Ганна проявляется при напряжениях питания, близких к пороговому значению [1]. Это явление многими авторами связывается с механизмом случайного зарождения домена в диоде Ганна [1]. При реализации наиболее характерного для современных диодов Ганна режима работы со стационарным анодным доменом [16] этот механизм отсутствует.

В результате численного моделирования было установлено, что выбором параметров элементов связи C_2 и L_4 при напряжениях питания, близких к пороговому значению, возможна реализация сложных динамических режимов работы генератора на диоде Ганна, при которых спектры выходных сигналов A_f содержат большой набор спектральных составляющих в низкочастотной области, не связанных целочисленными соотношениями между собой и с частотой спектральной компоненты максимальной мощности (рис. 5, а). При этом наблюдается неравномерное заполнение фазовыми траекториями областей локализации этих составляющих на фазовой плоскости (рис. 5, б). Для сложных динамических режимов, возникающих при напряжениях питания, много больших порогового, периодичность колебаний нарушалась аперiodическими всплесками [6], а колебательный процесс, как это следует из зависимости мгновенных значений тока i , протекающего через диод, от времени (рис. 5, в) образуется последовательностью колебаний различной длительности с различными декрементами затухания.

Таким образом, наблюдающийся экспериментально режим генерации при напряжениях питания, близких к пороговому, может быть описан как сложный динамический процесс, обладающий выраженной структурой. Расчеты показывают, что при использовании конструкций генераторов на диодах Ганна, обладающих значительной величиной теплового сопротивления, наблюдается существенный саморазогрев кристалла диода, приводящий либо к регуляризации, либо, напротив, к срыву колебательного процесса при напряжениях питания, близких к пороговому. Иными словами, улучшая или ухудшая теплоотвод, можно либо способствовать хаотизации сигнала генератора на диоде Ганна, либо регуляризовать его.

При напряжениях питания, несколько превышающих пороговое значение,

использование диодов Ганна с малыми значениями R_0 в конструкции с $R_T < 175$ град/Вт приводит к увеличению относительной мощности второй гармоники (рис. 4), а в конструкциях с $R_T > 175$ град/Вт к уменьшению. Использование предложенной модели позволило оценить влияние температуры окружающей среды на спектр выходного сигнала генератора при различных сопротивлениях полупроводниковой структуры и значениях теплового сопротивления прибора. Как следует из результатов расчета, приведенных на рис. 4, увеличение температуры окружающей среды при реальных значениях теплового сопротивления прибора приводит к уменьшению A_{2f_0}/A_{f_0} во всем исследуемом диапазоне изменения сопротивления диода. При этом изменение A_{2f_0}/A_{f_0} при учете саморазогрева составляло примерно 0.2 дБ/град, что

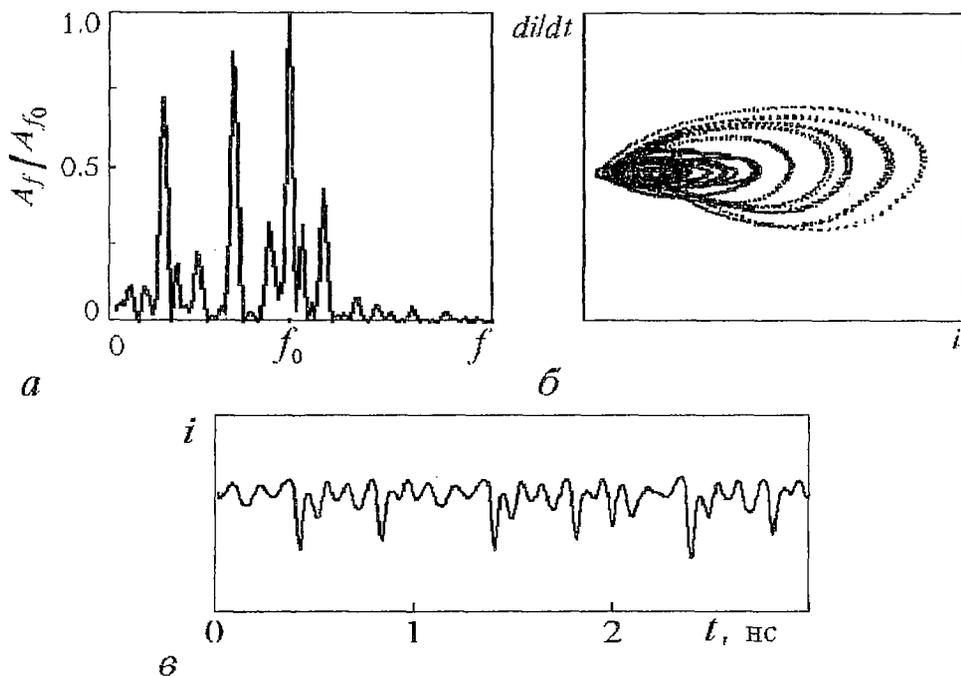


Рис. 5. Спектр выходного сигнала (а), фазовый портрет колебаний (б) и зависимость мгновенных значений тока, протекающего через диод Ганна, от времени (в) при напряжениях питания, близких к пороговому; $\epsilon=3.425$ В, $C_2=0.3$ пФ, $L_4=0.5$ нГн

выбором параметров элементов связи C_2 и L_4 может быть реализован режим, при котором наряду с гармониками в спектре выходного сигнала A_f присутствуют субгармоники основного сигнала $f_0/6$ и кратные ей субгармоники $2f_0/6$, $3f_0/6$ и т.д. На рис. 6, а, б и в представлены рассчитанные без учета саморазогрева диода спектр выходного сигнала, фазовый портрет колебаний тока в диоде Ганна и зависимость мгновенных значений тока от времени при возникновении субгармоники основного сигнала $f_0/6$ и кратных ей. Спектральный состав выходного сигнала при выбранных параметрах эквивалентной схемы оказался достаточно устойчивым по отношению к малым изменениям напряжения питания. В диапазоне изменения напряжения питания от 3.5 до 4.5 В не наблюдалось изменения кратности основной частоты выходного сигнала по отношению к частоте субгармоники. При напряжениях питания, больших 4.5 В субгармоники в спектре выходного сигнала исчезали.

Учет теплового сопротивления прибора вызывает изменение спектра выходного сигнала, характер которого определяется величиной сопротивления диода Ганна R_0 в слабых электрических полях. На рис. 6, г представлен спектр выходного сигнала, рассчитанный при значении теплового сопротивления $R_T=100$ град/Вт и сопротивлении кристалла диода $R_0=10$ Ом. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что саморазогрев диода приводит к уменьшению амплитуд низкочастотных составляющих в спектре выходного сигнала. Приведенные на рис. 6, д и е фазовый портрет колебаний тока в диоде Ганна и зависимость мгновенных значений тока от времени свидетельствуют о том, что наряду с уменьшением амплитуд субгармонических составляющих в спектре выходного сигнала при саморазогреве диода может наблюдаться переход от периодического к квазипериодическому колебательному процессу и его последующая хаотизация.

Как следует из результатов расчета, приведенных на рис. 7, при достаточно высоком сопротивлении диода $R_0=10$ Ом увеличение теплового сопротивления R_T

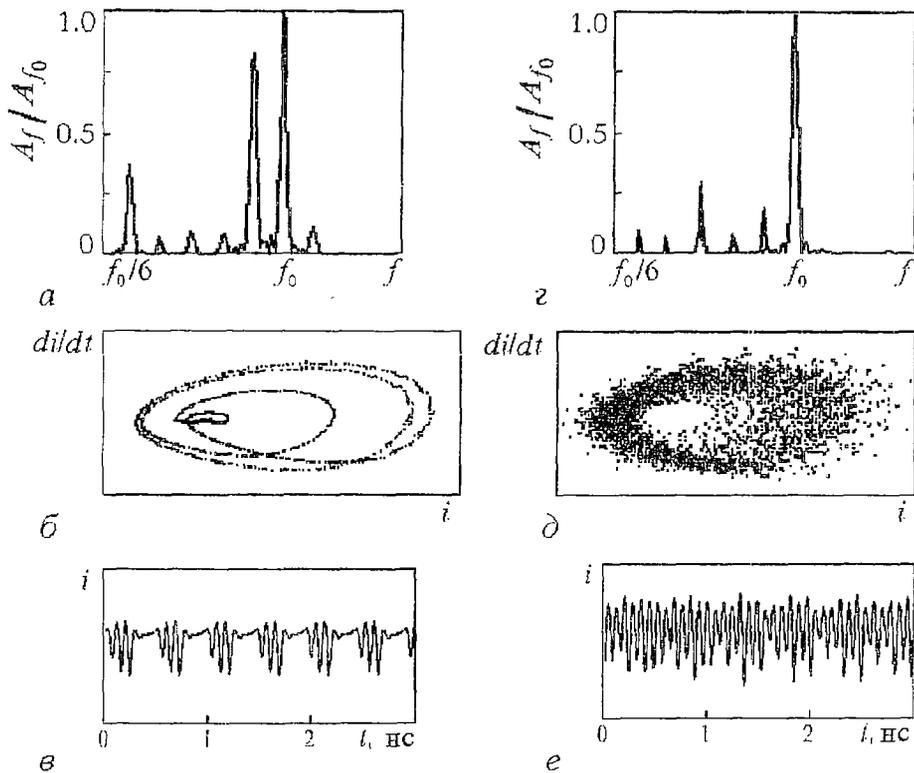


Рис. 6. Спектры выходного сигнала (а, з), фазовые портреты колебаний (б, д) и зависимости мгновенных значений тока, протекающего через диод Ганна, от времени (в, е) при наличии в спектре выходного сигнала субгармоники $f_0/6$ и кратных ей субгармоник без учета (а, б, в) и с учетом (з, д, е) саморазогрева кристалла; $\epsilon=3.725$ В, $C_2=0.3$ пФ, $L_4=0.01$ нГн

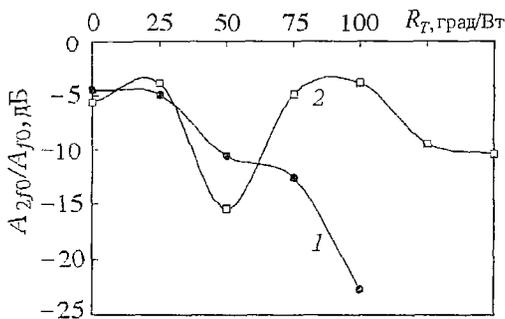


Рис. 7. Зависимости относительной мощности субгармоники с частотой $f_0/6$ от величины теплового сопротивления R_T для различных значений R_0 : 1 – 10 Ом, 2 – 7.5 Ом

приводит к монотонному уменьшению мощности субгармоники $A_{f_0/6}$ с частотой $f_0/6$. При использовании диодов с $R_0=7.5$ Ом увеличение R_T вызывает немонотонное изменение мощности субгармоник в спектре выходного сигнала. Расчеты показывают также, что в зависимости от величины теплового сопротивления прибора мощность субгармонических составляющих выходного сигнала с ростом сопротивления кристалла диода может как возрастать, так и уменьшаться. Однако при значениях $R_T \approx 100$ град/Вт, реально имеющих место на практике, увеличение R_0 приводит к уменьшению мощности субгармоник.

Заключение

Таким образом, теоретически на основе совместного с системой уравнений Кирхгофа решения нестационарного уравнения теплового баланса проанализированы закономерности изменения спектра выходного сигнала генератора на диоде Ганна для различных напряжений питания. Наблюдающийся экспериментально в диодах Ганна режим генерации при напряжениях питания,

близких к пороговому, может быть characterized как сложный динамический процесс, обладающий выраженной структурой.

Установлено, что в зависимости от напряжения питания саморазогрев кристалла диода может вызывать либо переход от периодического к квазипериодическому колебательному процессу и его хаотизацию, либо регуляризацию колебаний. Показано, что в зависимости от теплового сопротивления прибора увеличение электрического сопротивления диода Ганна в слабых электрических полях может приводить как к увеличению, так и к уменьшению амплитуд отдельных субгармонических и гармонических составляющих в спектре выходного сигнала генератора.

Библиографический список

1. Левинштейн М. Е., Пожела Ю. К., Шур М. С. Эффект Ганна. М.: Сов. радио, 1975. 288 с.
2. Царанкин Д. П. Генераторы СВЧ на диодах Ганна. М.: Радио и Связь. 1981. 112 с.
3. Tsai W. C., Rosenbaum F. I. Bias circuit oscillations in Gunn devices // IEEE Trans. Electron Dev. 1969. Vol. ED-16, №2. P. 196.
4. Романюк В. А., Шарифов Т. М. Паразитные колебания в СВЧ-генераторах на активных двухполосниках // Радиотехника. 1977. Т. 32, № 5. С.57.
5. Усанов Д. А., Горбатов С. С., Скрипаль А. В. Особенности низкочастотной генерации СВЧ-диодов Ганна // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1981. Т. 24, № 10. С. 67.
6. Усанов Д. А., Вениг С. Б., Горбатов С. С., Семенов А. А. Влияние нелинейности характеристик импеданса диодов Ганна на работу СВЧ-генераторов на их основе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, №5. С.35.
7. Кальянов Э. В. Стохастизация низкочастотных колебаний генераторов на МЭП-диоде // РЭ. 1984. Т. 29, №1. С. 83.
8. Микроэлектронные устройства СВЧ / Г. И. Веселов, Е. М. Егоров, Ю. Н. АLEXIN и др. М.: Высш. шк., 1988. 200 с.
9. Шур М. С. Современные приборы на основе арсенида галлия / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 632 с.
10. Vulman P. J., Hobson G. S., Taylor B. C. Transferred electron devices. London, New York: Academic Press, 1972. 402 p.
11. Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Авдеев А. А., Бабаян А. В. Эффект автодинного детектирования в генераторе на диоде Ганна с низкочастотным колебательным контуром в цепи питания // РЭ. 1996. Т.46, №12. С.1497.
12. Билько М. И., Томашевский А. К., Шаров П. П., Баймуратов Е. А. Измерение мощности на СВЧ. М.: Сов.радио, 1976. 168 с.
13. Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Бабаян А. В. Взаимосвязь сопротивления диода Ганна в слабых электрических полях с термостабильностью и выходной мощностью генераторов на их основе // Изв. вузов. Электроника. 1997. № 5. С.31.
14. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Бабаян А.В. Взаимосвязь сопротивления диодов Ганна в слабых электрических полях с характеристиками генераторов на их основе // Письма в ЖТФ. 1998. Т.24, № 10. С. 1.
15. Murayama K., Ohmi T. Static negative resistance in highly doped Gunn diodes and application to switching and amplification // Japan J.Appl.Phys. 1973. Vol. 12, № 12. P. 1931.
16. Полупроводниковые приборы в схемах СВЧ / Под ред. М.Хауэса, Д.Моргана; пер. с англ. под ред. В.С.Эткина. М.:Мир, 1979. 444 с.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 20.08.98
после переработки 28.08.98

INFLUENCE OF SELF-HEATING ON OUTPUT SIGNAL SPECTRUM OF GUNN OSCILLATORS

D. A. Usanov, A. V. Skripal, A. V. Babayan

An output signal spectrum changings in Gunn oscillators for various power supply voltage were analyse for the first time on the base of the Kirchhoff's equations share solution with the non-stationary thermal balance equation. The mode of generation at power supply voltage, close to threshold, is circumscribed as the complex dynamic process, possessing random properties. Self-heating of a chip of the Gunn diode depending on power supply voltage results or in a regularization of oscillations, or to origin of asynchronous oscillations and them chaotisation.



Усанов Дмитрий Александрович родился в 1943 году в Менделеевске (Татария). Окончил Саратовский госуниверситет (1965). Кандидат физико-математических наук (1972), доктор физико-математических наук (с 1989), с 1990 – профессор кафедры физики твердого тела, с 1985 по настоящее время – заведующий кафедрой физики твердого тела, с 1989 – проректор по НИР СГУ. Автор большого числа статей и изобретений по твердотельной электронике и радиофизике. Заслуженный деятель науки РФ, академик МАН ВШ, член IEEE.



Скрипаль Александр Владимирович родился в 1954 году в г. Уч-Арал Талды-Курганской области (Казахстан). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1976). С 1988 года кандидат физико-математических наук. С 1989 года доцент кафедры физики твердого тела Саратовского госуниверситета. С 1998 года доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твердого тела. Автор более 100 научных трудов в области твердотельной электроники, физики полупроводников, радиоволнового контроля.



Бабаян Андрей Владимирович родился в 1972 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1994) и аспирантуру по кафедре физики твердого тела Саратовского госуниверситета. Кандидат физико-математических наук (1998). Область научных интересов – физика полупроводников, твердотельная электроника и радиофизика.



Изв.вузов «ПНД», т.6, № 6, 1998

УДК 621.396

ДИНАМИКА ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНУСОИДАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ДЕТЕКТОРА И ОГРАНИЧИВАЮЩИМ ФИЛЬТРОМ

Д.Э. Палей

Рассмотрены общие свойства цифровых систем фазовой синхронизации второго порядка с синусоидальной характеристикой детектора и ограничивающим фильтром в цепи управления. Изучены основные типы периодических движений. Получены условия существования состояния равновесия и кратных захватов, оценены параметры системы, при которых невозможны предельные циклы второго рода. В пространстве параметров получены области устойчивости в целом.

Введение

Эффективность использования систем фазовой синхронизации (СФС), получивших широкое распространение в различных областях радиотехники, во многом определяется качеством их функционирования в предельных режимах при максимально возможных значениях параметров и частотных расстройках. Поведение системы в этих случаях является сугубо нелинейным. В основе его, как правило, лежат нелинейные свойства не только частотного детектора, но и других элементов. К числу таких звеньев в первую очередь следует отнести фильтр низких частот. Как показывает анализ, учет нелинейных свойств фильтра низких частот в ряде случаев может стать определяющим при оптимизации нелинейных режимов СФС, таких как характер переходных процессов и область устойчивости в целом.

Следует сказать, что цифровые СФС с двумя нелинейностями на сегодняшний день практически не изучены. Существует достаточно большое число работ, посвященных исследованию систем с синусоидальной характеристикой детектора. Однако в большинстве из этих работ рассматриваются модели различных порядков с линейным фильтром в цепи управления. Для примера можно назвать работы [1,2], где исследованы динамические характеристики дискретных СФС первого и второго порядков для случая нулевых начальных расстройок. В работе [3] полоса захвата дискретной СФС второго порядка исследуется при помощи частотных методов. В работах [4,5] аналитически изучены простейшие движения, для определения полосы захвата предложена методика, основанная на применении квазигармонического метода.

Системам с нелинейным фильтром посвящено ограниченное число работ. К их числу можно отнести работы автора [6,7], в которых предложены методики и алгоритмы, основанные на качественно-численном подходе, позволяющие

получить достаточно полные сведения о поведении дискретных СФС второго порядка с различными типами характеристик детектора и нелинейного фильтра.

Целью предлагаемой работы является изучение нелинейной динамики цифровой СФС второго порядка с синусоидальной характеристикой фазового детектора и нелинейным фильтром в цепи управления, характеристика которого представляет собой линейную с ограничением функцию. Подобный вид характеристики является типичным для фильтров на основе интеграторов в импульсных системах синхронизации или накапливающих сумматоров с насыщением в цифровых СФС [2,6]. Будем называть фильтр с нелинейностью этого типа ограничивающим.

В задачу исследования входит анализ общих свойств системы, типов возможных периодических движений. Конечным результатом является получение областей устойчивости в целом.

Объектом исследования выступает отображение второго порядка вида

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin \varphi_n + x_n, \\ x_{n+1} = g - \Phi(d(g - x_n) + \beta \sin \varphi_n), \end{cases} \quad (1)$$

где φ_n – разность фаз входного и выходного сигнала на входе фазового детектора в момент времени n ; x_n – нормированная мгновенная частота перестраиваемого генератора; α , β , d – параметры системы; g – нормированная частотная расстройка; $\Phi(y)$ – функция, описывающая нелинейные свойства фильтра и имеющая вид

$$\Phi(y) = \begin{cases} M, & y > M, \\ y, & |y| < M, \\ -M, & y < -M, \end{cases}$$

где M – максимальное значение $\Phi(y)$.

Фильтр состоит из параллельно соединенных нелинейного интегрирующего канала (дискретный коэффициент передачи его линейного аналога равен $W(z)=1/(z-d)$) и линейного пропорционального канала. Соответственно при $d < 1$ отображение (1) описывает цифровую СФС с нелинейным пропорциональным интегрирующим фильтром, при $d=1$ – с нелинейным интегратором [7].

1. Основные свойства системы

Из-за ограниченности функции $\Phi(y)$ фазовым пространством системы будет ограниченный по координате x цилиндр. Максимальное и минимальное значения координаты x соответственно равны $g \pm M$. Развертка фазового цилиндра показана на рис. 1. Выделим в фазовом пространстве следующие кривые: $L_{\varphi, m}$ – линии отображения с сохранением значения координаты φ по модулю 2π ; L_x – линию отображения с сохранением значения координаты x .

$$L_{\varphi, m}: x = \alpha \sin \varphi \pm 2\pi m; \quad m = 0 \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

$$L_x: x = (-\beta \sin \varphi + g(1-d))/(1-d).$$

Соответственно отображения из состояния, находящегося в фазовом пространстве выше (ниже) кривой $L_{\varphi, m}$, происходят с увеличением (уменьшением) координаты φ , причем абсолютное ее приращение больше $2\pi m$. Отображения из состояния, находящегося выше (ниже) кривой L_x , происходят с увеличением (уменьшением) координаты x . Точки O_j пересечения кривых $L_{\varphi, 0}$ и L_x являются

равновесными состояниями системы. На пересечении кривой L_x и кривых $L_{\varphi, m}$ ($m=\pm 1, \pm 2, \dots$) возникают движения, которые в радиотехнике принято называть кратными захватами. В этих режимах отношение частот сигналов на входах фазового детектора равно целому числу. При этом значение наблюдаемой разности фаз $\varphi_n \bmod 2\pi$ остается неизменным с течением времени.

Циклом структуры (u/k) будем называть периодическое движение периода k , при котором абсолютное приращение координаты φ за период равно $2\pi u$. Согласно этому состояние синхронизма – цикл структуры $(0/1)$, а кратные захваты – это циклы структуры $(u/1)$ ($u=\pm 1, \pm 2, \dots$).

Из (1), (2) следует, что цикл структуры $(u/1)$ существует при выполнении условий

$$\begin{cases} |(g - 2\pi u)(1 - d)/[(1 - d)\alpha + \beta]| < 1, \\ M + g > \alpha(g - 2\pi u)(1 - d)/[(1 - d)\alpha + \beta], \\ -M + g < \alpha(g - 2\pi u)(1 - d)/[(1 - d)\alpha + \beta]. \end{cases} \quad (3)$$

При выполнении первого неравенства существует пересечение кривых $L_{\varphi, m}$ и L_x . При выполнении второго и третьего условий координата x точки этого пересечения находится в области фазового пространства, ограниченной $\Phi(y)$. При $u=0$ система (3) определяет условия существования состояния синхронизма.

Отображение (1) инвариантно относительно преобразования $g \rightarrow g + 2\pi m$ (где $m=\pm 1, \pm 2, \dots$). При этом все движения в системе переходят в подобные им движения, но при каждой итерации координата φ получает дополнительное приращение $2\pi m$, а координаты x всех точек изменяются на $2\pi m$, то есть циклы (u/k) переходят в циклы $(u+km)/k$. В силу этого без нарушения общности можно рассматривать g в пределах

$$0 < g < 2\pi.$$

Отображение (1) также инвариантно относительно преобразования

$$(\varphi, \alpha, \beta) \rightarrow (\varphi + \pi, -\alpha, -\beta). \quad (4)$$

При этом преобразовании все движения в системе переходят в подобные им движения. Координата x остается неизменной, а координата φ переходит в координату $\varphi + \pi$, то есть происходит поворот фазового цилиндра на π . Данное утверждение легко проверить непосредственной подстановкой в (1). Рассмотрим плоскость параметров (α, β) . Из (4) следует, что области существования всех движений располагаются симметрично относительно начала координат. Области локальной устойчивости состояний равновесия O_1, O_2 в пространстве параметров (α, β) не пересекаются и также симметричны относительно нуля.

Известно, что при $d < 1$ для произвольных параметров в фазовом пространстве существует притягивающий слой по координате x [2]. Для данной системы он определяется следующим образом:

$$g - |\beta|/(1-d) < x < g + |\beta|/(1-d).$$

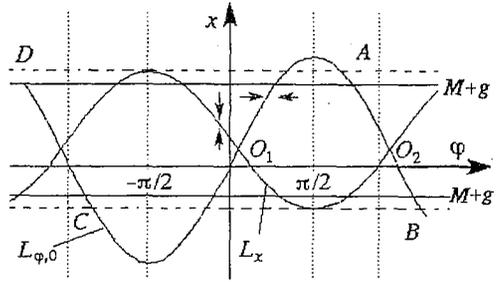


Рис. 1. Развертка фазового пространства системы фазовой синхронизации с синусоидальной характеристикой фазового детектора и ограничивающим фильтром

В силу этого, при анализе установившихся движений в фазовом пространстве можно ограничиться областью внутри притягивающего слоя. На рис. 1 притягивающий слой системы обозначен горизонтальным пунктиром. При выполнении условия

$$M > |\beta|(1-d) \quad (5)$$

притягивающий слой лежит внутри области фазового пространства, ограниченной $\Phi(y)$. Таким образом, при выполнении (5) нелинейность фильтра не влияет на поведение СФС в установившемся режиме.

Для практики особенно интересен случай, когда в системе невозможны движения с постоянным возрастанием или убыванием фазы. Оценим параметры системы, при которых это выполняется. Покажем, что вектор состояния системы не покидает ограниченной области фазового пространства при произвольных начальных условиях и выполнении неравенства

$$\alpha > M + g \quad \text{для } \alpha < 1 \quad (6)$$

и

$$\alpha > M + g, \quad -\arccos(1/\alpha) + (\alpha^2 - 1)^{1/2} + M + g < \pi/2 \quad \text{для } \alpha > 1.$$

Не теряя общности, будем рассматривать положительные расстройки.

При $\alpha > M + g$ кривая $L_{\varphi,0}$ пересекает обе границы $\Phi(y)$. Рассмотрим область G ($ABCD$) в фазовом пространстве, образованную верхней и нижней границей $\Phi(y)$, а также частями кривой $L_{\varphi,0}$, лежащими между точками A, B и C, D (см рис. 1). Эти точки лежат на пересечении $L_{\varphi,0}$ с границами $\Phi(y)$. Из построения следует, что область G представляет собой модифицированный период фазового тора. Найдем далее условия, при которых G отображается в себя. Для этого достаточно рассмотреть отображение первого порядка

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin \varphi_n + M + g, \quad \text{где } \varphi_n \in (AD). \quad (7)$$

Если $\varphi_{n+1} < \pi/2$, то отображение происходит всегда внутри области G . Несложно видеть, что это всегда выполняется при $\alpha < 1$. В случае $\alpha > 1$ значение φ_{n+1} достигает максимума при $\varphi_n = -\arccos(1/\alpha)$. Таким образом, при выполнении (6) вектор состояния системы не покидает с течением времени область G и, следовательно, движения с постоянным возрастанием или убыванием фазы невозможны.

2. Анализ периодических движений для случая нулевых расстроек

Рассмотрим основные типы периодических движений, возникающих в данной системе. Проанализируем, какие из них и каким образом ограничивают область устойчивости в целом или область глобальной устойчивости (ОГУ) системы. Анализ начнем со случая нулевых начальных расстроек ($g=0$).

При малых значениях M в системе наблюдаются два основных типа движений.

Первый тип движений – цикл периода $k=2$ структуры $(0/2)_H$. Его точки лежат на границах нелинейности $\Phi(y)$ (подстрочным индексом H будем обозначать циклы, хотя бы одна точка которых лежит на границе $\Phi(y)$). Структура фазового пространства, при которой могут существовать циклы данного типа, показана на рис. 2. Для существования этого движения необходимо, чтобы отображение из каждой его точки происходило на границу $\Phi(y)$. Это эквивалентно выполнению условий

$$\begin{cases} \beta \sin \varphi_1 > g(1-d) + (1+d)M, \\ \beta \sin \varphi_2 < g(1-d) - (1+d)M, \end{cases} \quad (8)$$

где φ_1, φ_2 – координаты φ точек цикла на верхней и нижней границе $\Phi(y)$, соответственно. Так как итерации происходят с границ $\Phi(y)$, устойчивость данного движения определяется коэффициентами при координате φ в первом уравнении системы (1), линеаризованными в окрестности точек цикла. Они имеют следующий вид:

$$\rho_1 = 1 - \alpha \cos \varphi_1, \quad \rho_2 = 1 - \alpha \cos \varphi_2.$$

Движение будет устойчиво, когда выполняется условие

$$\rho_1 \rho_2 < 1 \quad \text{или} \quad (1 - \alpha \cos \varphi_1)(1 - \alpha \cos \varphi_2) < 1. \quad (9)$$

Таким образом, β определяет в пространстве параметров область существования цикла, а параметр α определяет область устойчивости.

Второй тип движений – циклы первого рода периода $k=1$ структуры $(0/1)_H$, возникающие на пересечении границ $\Phi(y)$ с кривой $L_{\varphi,0}$. Соответствующая структура фазового пространства показана на рис. 3. Для существования этих циклов необходимо, чтобы точки пересечения $L_{\varphi,0}$ и границ $\Phi(y)$ были притягивающими по координате x . Для движений на верхней границе это выполняется, когда кривая $L_{\varphi,0}$ пересекает $\Phi(y)$ под кривой L_x или, как это следует из (2), выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} -\alpha > M + g, \\ -\beta/\alpha > M(1-d)/(M+g). \end{cases} \quad (10)$$

Аналогичное условие можно получить и для циклов на нижней границе $\Phi(y)$. В этом случае необходимо, чтобы кривая $L_{\varphi,0}$ пересекала ее над кривой L_x .

Аналогично циклу $(0/2)_H$, устойчивость определяется коэффициентами при координате φ в первом уравнении системы (1), линеаризованными в окрестности точек цикла, и задается неравенствами

$$\begin{aligned} 1 \pm \alpha[1 - [(M+g)/\alpha]^2]^{1/2} < 1, \\ 1 \pm \alpha[1 - [(-M+g)/\alpha]^2]^{1/2} < 1 \end{aligned} \quad (11)$$

для циклов на верхней и нижней границе, соответственно. На каждой границе $\Phi(y)$ существует по две точки этих циклов. Одна из них устойчива, другая – неустойчива.

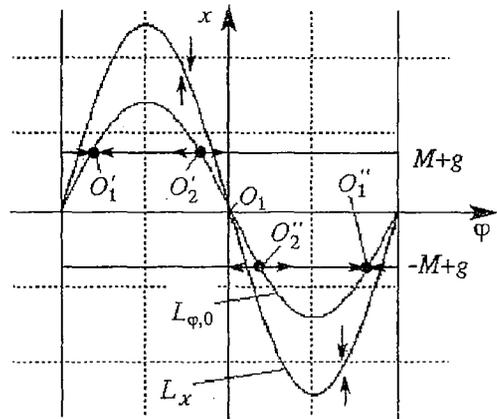
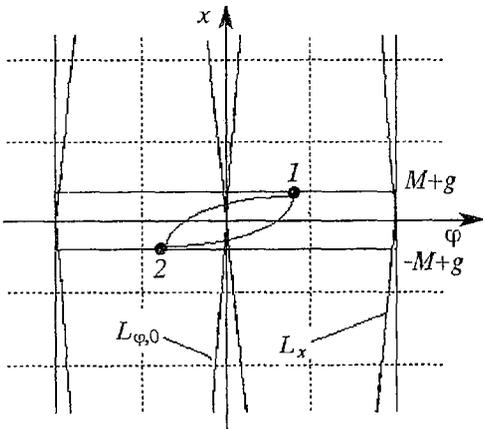


Рис. 2. Фазовый портрет цикла структуры $(0/2)_H$

Рис. 3. Фазовый портрет циклов структуры $(0/1)_H$

Отличительной особенностью рассмотренных циклов является то, что когда система находится в одном из них, разность фаз φ с течением времени остается постоянной. Отсюда следует вывод, что данные движения следует рассматривать как равновесные состояния, возникающие в системе при выполнении условий (10), (11). Обозначим эти состояния как O_1' , O_1'' . В отличие от состояния равновесия O_1 в O_1' , O_1'' поведение системы определяется только первым уравнением (1), где координата x равна $M+g$ для O_1' и $-M+g$ для O_1''

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin \varphi_n + M + g. \quad (12)$$

Таким образом, в точках O_1' , O_1'' , система ведет себя как СФС первого порядка с ненулевой начальной расстройкой. На практике это означает, что нелинейный фильтр все время находится в насыщении и фактически вносит постоянное смещение по частоте. Рассмотрим поведение системы в окрестности этих точек. Сделаем это на примере O_1' . Отрезок на верхней границе $\Phi(y)$ между точками O_2' и точкой пересечения L_x с границей $\Phi(y)$ является притягивающим по координате x . Поэтому при выборе начальных условий на этом отрезке дальнейшее движение вектора состояния будет определяться уравнением (12) и происходить вдоль верхней границы $\Phi(y)$. При выборе начальных условий из области, прилегающей к верхней границе $\Phi(y)$, и выполнении условия

$$d(g-x_0) + \beta \sin \varphi_0 < M$$

за одну итерацию вектор состояния попадает на границу нелинейности фильтра и далее движение происходит опять вдоль границы $\Phi(y)$. Таким образом, и в окрестности состояний O_1' , O_1'' поведение системы практически полностью совпадает с поведением дискретного СФС первого порядка.

На рис. 4 в пространстве параметров (α, β) показаны границы существования вышеперечисленных циклов. Состояния O_1' , O_1'' существуют в области отрицательных α и определяют левую границу ОГУ. С увеличением M , согласно (10), (11), их правая граница сдвигается в сторону меньших α . Аналогичный

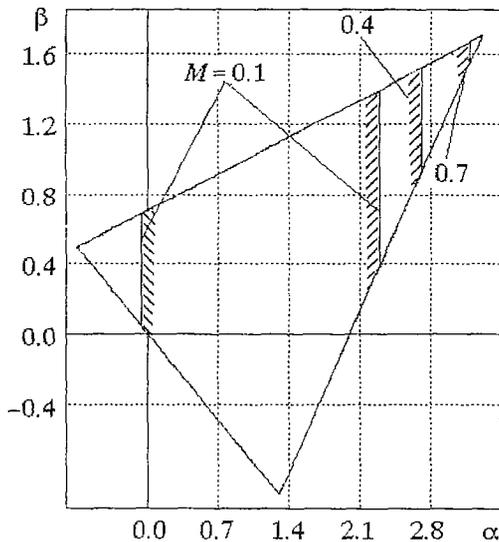


Рис. 4. Границы области глобальной устойчивости системы с ограничивающим пропорциональным интегрирующим фильтром для $g=0$, $d=0.3$

процесс происходит при увеличении d . В дискретных СФС с нелинейным интегратором ($d=1$) состояние синхронизма локально устойчиво только при положительных α и, следовательно, циклы данного типа не влияют на область устойчивости в целом.

Цикл $(0/2)_H$ существует в области больших α , β и определяет правую границу области устойчивости в целом. С увеличением d его граница сдвигается в сторону меньших α , а с увеличением M — в сторону больших α . В остальной области параметров, где выполняются условия локальной устойчивости состояния синхронизма, система глобально устойчива. Из приведенных графиков видно, что в пределах области локальной устойчивости граница возникновения данных циклов не зависит от β . Границы области устойчивости в

целом для данной системы при малых значениях M могут быть получены аналитически из выражений (8) – (11).

При увеличении M области существования рассмотренных циклов выходят за пределы области локальной устойчивости. Для значений M порядка единицы ОГУ системы практически совпадает с областью ее локальной устойчивости. С дальнейшим ростом M в области больших α, β возникает цикл первого рода структуры $(0/4)_H$. Область его существования показана на рис. 5, штриховкой отмечена область устойчивости в целом. Этот цикл является аналогом цикла $(0/4)$, существующего в системе с линейным фильтром. Вдоль своей верхней границы он теряет устойчивость с удвоением периода. Далее, с увеличением α, β происходит серия бифуркаций удвоения периода, сопровождающихся рождением соответствующих циклов. С увеличением периода циклов область их существования значительно уменьшается и в области больших α, β система опять становится глобально устойчива. При дальнейшем увеличении M начинает выполняться условие (5) и поведение системы совпадает с поведением СФС, имеющей линейный фильтр.

Для значений d , близких и равных единице, с увеличением M до значений, сравнимых с π , наряду с циклом $(0/4)$ возникают движения второго рода. Это прежде всего циклы $(1/2)_H, (1/3)_H$. Вначале их точки лежат на границе $\Phi(y)$, а с увеличением M отрываются от нее и переходят в соответствующие движения, характерные для системы с линейным фильтром [2,7].

3. Анализ периодических движений для случая отличных от нуля расстройк

Рассмотрим свойства системы при отличных от нуля расстройках ($g \neq 0$).

Для $d < 1$ при малых значениях M определяющими для ОГУ системы становятся условия существования состояния синхронизма (3). На рис. 6 представлено последовательное изменение области устойчивости в целом системы с ростом начальной расстройки для $M=0.4$ и $d=0.5$. При малых g в области больших α, β существует цикл $(0/2)_H$, характерный для случая нулевых расстройк. В области отрицательных α и малых β ОГУ системы ограничивается условиями существования состояния синхронизма (граница (R)). При увеличении g происходит дальнейшее ограничение ОГУ за счет уменьшения области параметров существования состояния синхронизма.

При достаточно больших расстройках возникает цикл второго рода структуры $(1/2)$ (рис. 6, б). Этот цикл характерен для систем с линейным фильтром [2]. В данном случае в области существования состояния равновесия точки этого цикла находятся внутри области $[M+g, -M+g]$ по координате x . При увеличении или уменьшении β точки этого цикла начинают ограничиваться $\Phi(y)$. После ограничения устойчивость цикла практически полностью определяется первым уравнением (1). Вследствие этого при ограничении область его существования зависит только от α . Этим явлением вызваны резкие перегибы области существования данного цикла на рис. 6, б.

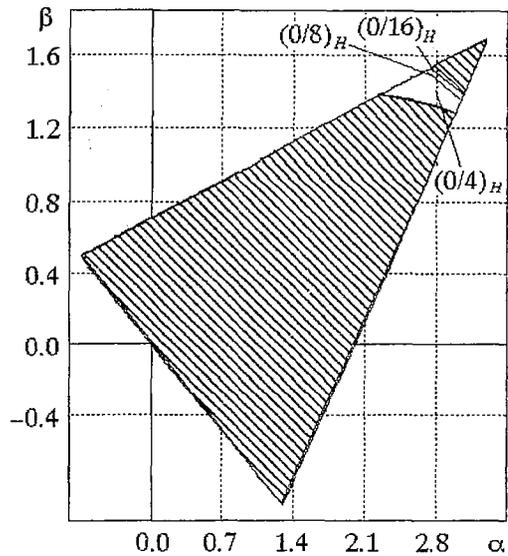


Рис. 5. Области существования различных периодических движений в системе с ограничивающим пропорциональным интегрирующим фильтром для $d=0.3, M=1.5, g=0$

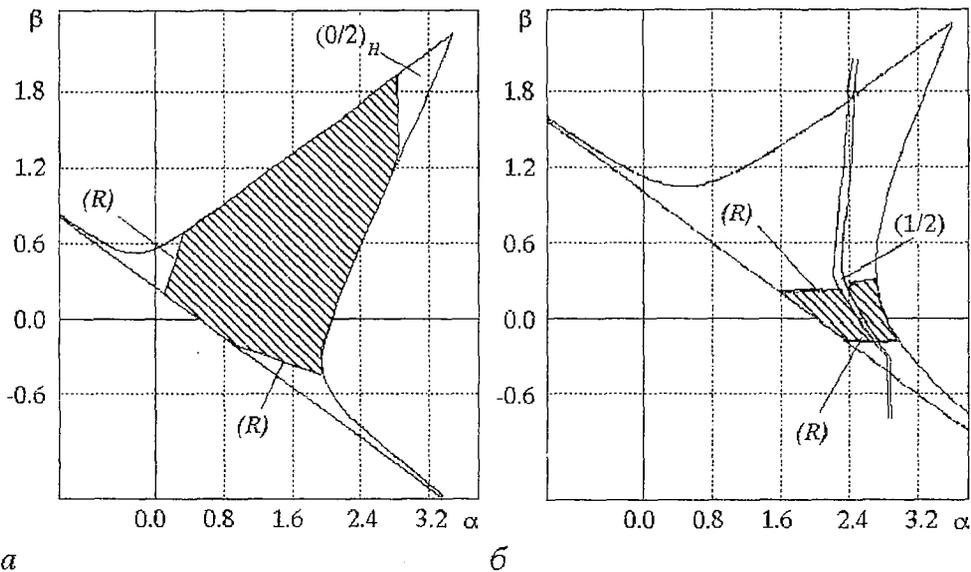


Рис. 6. Области существования различных периодических движений в системе с ограничивающим пропорциональным интегрирующим фильтром для $d=0.5$, $M=0.4$: а - $g=0.5$; б - $g=2.0$

При больших M уже незначительная расстройка приводит к исчезновению цикла $(0/4)$ в области больших α , β . Это, в свою очередь, приводит к тому, что ОГУ практически полностью совпадает с областью локальной устойчивости системы. Далее ОГУ, как это было и для малых M , с ростом g ограничивается условиями (3). Но, в отличие от предыдущего случая, при больших расстройках в области существования состояния равновесия возникает большое количество движений первого и второго рода (рис. 7). Это прежде всего циклы второго рода $(1/2)$, циклы первого рода $(0/3)$ и движения, возникающие при потере ими устойчивости с удвоением периода - циклы $(2/4) \dots (n/2^n)$, возникающие из $(1/2)$, и циклы $(0/6) \dots (0/3 \cdot 2^n)$, возникающие из $(0/3)$. Перечисленные движения характерны для системы с линейным фильтром. В данном случае из-за значительной величины M они не ограничиваются $\Phi(y)$. Отличительной особенностью СФС с нелинейным фильтром является ограничение области существования кратных захватов.

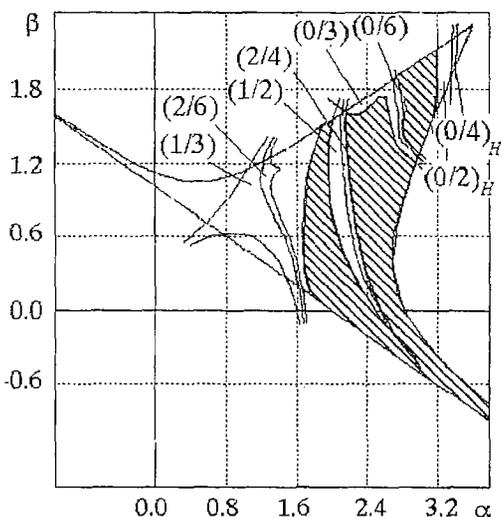


Рис. 7. Области существования различных периодических движений в системе с ограничивающим пропорциональным интегрирующим фильтром для $d=0.5$, $M=1.3$, $g=2.0$

Вследствие этого с увеличением расстройки наблюдается расширение ОГУ в сторону больших α , β . Правая граница ОГУ определяется в этом случае циклами структуры $(0/2)_n$. В отличие от подобных циклов, существующих в системе при малых M , только одна точка этого цикла лежит на границе $\Phi(y)$.

При дальнейшем увеличении g области существования вышеописанных движений смещаются в сторону меньших α . Вместе с тем происходит дальнейшее ограничение ОГУ условиями существования состояния синхронизма.

Для $d=1$ при выполнении условий

$$\begin{cases} M + g > 0, \\ -M + g < 0 \end{cases}$$

состояние синхронизма существует при любых α, β . Анализ показал, что при значениях $M+g < 1 \dots 1.5$ ОГУ практически совпадает с областью локальной устойчивости. При значениях $M+g$, сравнимых со значением π , в системе начнут возникать циклы второго рода, описанные выше для случая нулевых расстроек, которые порождаются соответствующими циклами системы с линейным фильтром.

4. Анализ полосы захвата

Для практического использования важно иметь графики полосы захвата (области устойчивости в целом в пространстве параметров: коэффициент усиления в системе, относительная начальная расстройка). Приведем такие зависимости для цифровой СФС с нелинейным пропорциональным интегрирующим фильтром для различных значений M (рис. 8). Построение выполнено в координатах: β – обобщенный коэффициент усиления (без учета фильтра), γ_3 – полоса захвата. Параметр m – коэффициент усиления линейного пропорционального канала ($\alpha = m\beta$).

Пунктиром отмечена граница существования состояния синхронизма. В результате анализа установлено, что при малых значениях M полоса захвата системы определяется, в основном, условиями существования состояния равновесия (3). С увеличением M при выполнении условий (3) полоса захвата начинает определяться периодическими и квазипериодическими движениями второго рода. При этом координата x большинства точек этих циклов располагается на границах $\Phi(y)$. С дальнейшим ростом M циклы второго рода перемещаются в область фазового пространства, не ограниченную $\Phi(y)$, и полоса захвата перестает зависеть от параметров нелинейности фильтра ($M > 0.9$). В этом случае она определяется движениями, которые характерны для системы с линейным фильтром.

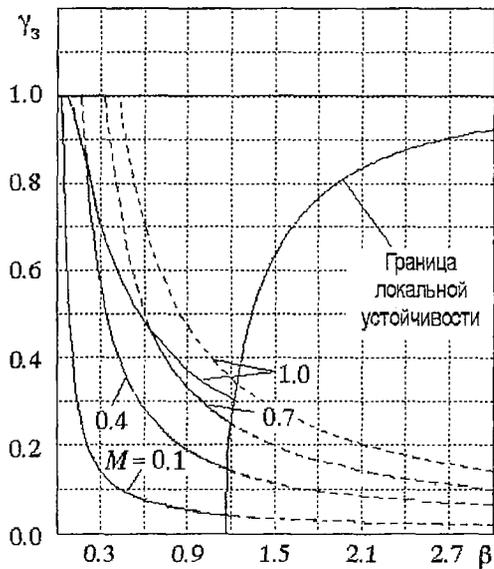


Рис. 8. Полоса захвата цифровой системы фазовой синхронизации с ограничивающим пропорциональным интегрирующим фильтром для $d=0.6, m=1$

Заключение

В статье изучены основные свойства дискретной СФС второго порядка с ограничивающим фильтром. Исследованы основные типы возможных в данной системе периодических и квазипериодических движений, их бифуркации и влияние на область устойчивости в целом. В частности, оценены параметры системы, при которых она глобально устойчива. Проведенный анализ позволил определить границы области глобальной устойчивости в пространстве параметров (α, β) и получить точные графики полосы захвата. Результаты исследований позволяют судить о свойствах и качественном поведении системы в зависимости от ее параметров и, что особенно важно, в зависимости от параметров нелинейного фильтра. Полученные данные могут быть использованы научными работниками и специалистами в области систем синхронизации для исследования и разработки различных типов дискретные СФС, оптимизации режимов их функционирования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 96-02-17338а).

Библиографический список

1. Белых В.Н., Лебедева Л.В. Исследование одного отображения окружности // Прикладная математика и механика. 1982. Т.46, вып.5. С.771.
2. Лебедева Л.В. Качественное поведение траекторий и бифуркации дискретных фазовых систем: Дис. ... канд. физ. мат. наук. Н. Новгород, 1993.
3. Корякин Ю.А., Леонов Г.А. Определение полосы захвата в системах импульсно-фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника. 1977. Т.32, № 6. С. 65.
4. Шахтарин Б.И. Квазигармонический метод и его применение к анализу нелинейных фазовых систем. М.: Энергоатомиздат, 1987.
5. Шахтарин Б.И., Курочка Б.Я. Исследование динамики дискретной фазовой автоматической системы второго порядка // РЭ. 1984. № 7. С. 1385.
6. Палей Д.Э., Казаков Л.Н. Динамика дискретной системы второго порядка с несколькими нелинейностями // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1995. № 3. С.61.
7. Палей Д.Э. Нелинейная динамика дискретной системы фазовой синхронизации с двумя нелинейностями // Тез. докл. ЛП Научной сессии, посвященной Дню радио. М., 1997. С.137.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию
после переработки

16.09.98
13.11.98

DYNAMICS OF SECOND ORDER DIGITAL PLL WITH DETECTOR SINE-FORM CHARACTERISTIC AND LIMITED FILTER

Paley D.E.

Common properties of second order digital PLL with detector sine-form characteristic and limited filter in control circuit are considered. Periodical movements main types are studied. Stability states and multiple frequencies synchronization existing conditions are got. Estimation of system parameters when second type cycles doesn't exist are found. Global stability area was got in parameters space.



Палей Дмитрий Эзрович – родился в 1967 году в Калининграде. В 1991 году окончил физический факультет Ярославского государственного университета. После окончания ЯрГУ – научный сотрудник кафедры радиофизики, с 1997 года – кафедры динамики электронных систем. Область научных интересов: сложная динамика нелинейных отображений, дискретные системы фазовой синхронизации.



КАРТИРОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММЫ ЧЕЛОВЕКА

И.Э. Дмитриев

Работа посвящена картированию корреляционной размерности сигнала электроэнцефалограммы при стабильных функциональных состояниях мозга человека, что позволяет охарактеризовать пространственно-временной паттерн активности нейронов коры головного мозга в терминах размерности системы макроосцилляторов, порождающих колебательный процесс. Исследовано влияние элементарных ментальной и физиологической нагрузок на карту корреляционной размерности электроэнцефалограммы, соответствующую состоянию спокойного бодрствования. Метод был также применен для анализа электроэнцефалограммы испытуемого, по субъективным оценкам считающего себя экстрасенсом, до и во время различных типов сенситивной деятельности.

Введение

В настоящее время известно приблизительное соответствие той или иной анатомической структуры мозга определенной функции. Но, несмотря на это, конкретный смысл утверждения «психические процессы определяются электрохимическими сигналами нейронов мозга» остается неясным. Таким образом, хотя вопрос «где?» более или менее освещен, ответ на вопрос «как?» требует принципиально иного подхода.

Психический процесс осуществляется одновременным активированием миллионов нейронов, причем паттерн этой активности меняется со временем. Очевидно, что оценка конкретного поведения такого числа элементов не представляется возможной. С другой стороны, опыт изучения сложных систем показывает, что часто для понимания функционирования системы «в целом» необязательно знать свойства отдельных элементов. Так, нервные клетки могут проявлять свойства самоорганизации, образуя в совокупности более простые структуры. Следовательно, метод изучения кода психических процессов должен быть макроскопическим, иметь непосредственное отношение к электрической активности нейронов мозга и обладать высоким временным разрешением. Из арсенала нейрофизиологических методов только магнито- и электроэнцефалография удовлетворяют всем трем условиям.

Однако, несмотря на почти 70-летнюю историю электроэнцефалографии, полученные до сих пор результаты по электроэнцефалографическим коррелятам психической деятельности представляют собой не более чем феноменологию. Одной из причин такого положения, по-видимому, является применение

недостаточно адекватных методов математической обработки электроэнцефалограмм (ЭЭГ). С одной стороны, это методы анализа случайных процессов, что в некоторой степени противоречит смыслу задачи, с другой – методы анализа линейных систем, хотя очевидно, что мозг таковой системой не является. Применение вероятностного подхода осуществляется в предположении, что число степеней свободы рассматриваемой системы очень велико. Однако относительно ЭЭГ это предположение сильно недооценивает возможности самоорганизации нейронной популяции.

В последние годы стала популярной гипотеза о динамической природе ЭЭГ. В этом случае предполагается, что процессы работы мозга, отражением которых служит сигнал ЭЭГ, можно описать некоторой гипотетической системой конечного числа автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными правыми частями. Также предполагается, что каждому стабильному состоянию мозга, а значит и каждому характерному паттерну ЭЭГ, соответствует аттрактор этой системы.

В рамках этой рабочей гипотезы был проведен ряд исследований сигнала ЭЭГ человека с использованием алгоритма Грассбергера – Прокачиа [1] для определения корреляционной размерности ν аттрактора системы по порождаемому ею скалярному временному ряду. Так в [2] исследовалась ЭЭГ второй и четвертой стадий сна. Для одного из испытуемых были найдены корреляционные размерности $\nu_2=5.03\pm 0.07$ и $\nu_4=4.05\pm 0.5$. В дальнейших работах были определены корреляционные размерности для таких функциональных состояний мозга, как кома [3], спокойное бодрствование [3–5], эпилепсия [3,6], все стадии сна [7].

Из электрофизиологии известно [8,9], что ритмы спонтанной ЭЭГ в большей степени связаны с некоторыми стабильными функциональными состояниями мозга (так называемыми «состояниями сознания»), чем с локальными физиологическими событиями. Это утверждение находится в полном согласии с гипотезой о существовании для ЭЭГ каждого функционального состояния такого асимптотического объекта, как аттрактор, на фоне которого и разворачиваются ЭЭГ-отражения интересующих нас психических процессов. Они могут проявляться в возмущении или даже разрушении существующего аттрактора, в переходе траектории системы на другую его ветвь, во временной стабилизации какого-нибудь предельного цикла и т.д.

В настоящее время уже разработаны модели психических функций на основе систем обыкновенных дифференциальных уравнений и отображений, в которых реализуются хаотические режимы – это модели восприятия [10] и ассоциативной памяти [11], причем модель восприятия основывается на конкретном электрофизиологическом материале. Модели обладают такими важными свойствами, как возможность распознавания и воспроизведения образов по их частям и резонансный механизм «узнавания». Существуют также попытки связать межиндивидуальные вариации корреляционной размерности ЭЭГ человека с такой психологической характеристикой, как объем кратковременной памяти [12].

Все вышесказанное претендует на роль новой парадигмы в нейробиологии, поэтому так важно собрать фактический материал по характеристикам реальных аттракторов ЭЭГ, соответствующих стабильным функциональным состояниям мозга. Алгоритм вычисления корреляционной размерности дает возможность количественно охарактеризовать и сравнить эти состояния по сложности лежащей в их основе динамики. Показано, например, что чем глубже сон, тем меньше корреляционная размерность соответствующего аттрактора [2,7]. Это свидетельствует об уменьшении «сложности» динамики при переходе в функционально более бедное состояние. То же можно сказать и о патологии. В [13] исследованы случаи локальной травмы и опухоли мозга. Деструктивное органическое поражение уменьшает число взаимодействующих нейронных генераторов в соответствующей области. Так, при опухоли сигнал, снимаемый с пораженного полушария, имел корреляционную размерность на уровне 2.3, а при травме – 2.8.

Однако до сих пор остается не проясненным вопрос о влиянии ментальной и

физиологической нагрузки на исследуемую динамику, другими словами, не проверена устойчивость аттракторов ЭЭГ исследуемых состояний мозга на возмущение этих состояний. Также нет достаточно подробной картографии корреляционной размерности при различных функциональных состояниях мозга, поскольку исследователи, в основном, ограничиваются обработкой небольшого числа отведений ЭЭГ.

Эти замечания следует рассматривать как «точки роста» при проведении дальнейших исследований, и именно на прояснение изложенных вопросов направлена настоящая работа. Представлены данные по 16-канальной регистрации ЭЭГ, что дает возможность исследовать не только временную, но и пространственную составляющую паттерна активности. Исследовано влияние элементарных ментальной и физиологической нагрузки на устойчивость аттрактора ЭЭГ состояния спокойного бодрствования. Кроме того, предлагается расширить набор изучаемых функциональных состояний и применить алгоритм для анализа так называемых измененных состояний сознания, возникающих у человека при различных формах аутотренинга, медитации, приеме психотропных препаратов, экстрасенсорном восприятии и целительстве. Сделан первый шаг в этом направлении – обследовался один испытуемый, считающий себя экстрасенсом.

Материалы и методы исследования

Функциональные состояния мозга. Исследования проводились на 8-ми здоровых испытуемых (2 женщины и 6 мужчин, все правши, обозначены как А–И) в состоянии спокойного бодрствования (релаксация с закрытыми глазами), при ментальной нагрузке (мысленный счет от 1000 вниз с шагом 1) и при такой стандартной для ЭЭГ-обследований физиологической нагрузке, как гипервентиляция (испытуемому предлагалось ритмично дышать с частотой примерно 16–20 вдохов в минуту, поддерживая глубину вдоха и полноту выдоха на максимальном уровне). Дополнительно обследовался испытуемый (Д), по субъективным оценкам считающий себя экстрасенсом. Обследованный сенситив утверждает, что способен вызывать у себя несколько субъективно четко различаемых состояний и поддерживать их по крайней мере 5 минут. Два зафиксированных состояния интерпретировались испытуемым как прием и отдача «энергии». Это понятие поставлено в кавычки, поскольку ни автор, ни испытуемый не знают, что за ним скрывается. Субъективно эта «энергия» ощущается сенситивом как поток тепла.

Процедура измерения. Во время эксперимента испытуемый с закрытыми глазами сидел, расслабившись, на стуле в отдельной затемненной комнате. На его голове с помощью резинового шлема крепились мостиковые электроды, расположенные согласно системе 10–20 [8]. Запись велась монополярно по 16-ти отведениям с референтным электродом на ухе ипсилатерального полушария. Отведенные потенциалы подавались на блок усилителей электроэнцефалографа «Медикор», а затем оцифровывались с частотой 250 Гц с помощью 10-разрядного аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и записывались в память компьютера в виде отрезков длиной в 65536 точек, соответствующих примерно 4.4 мин. Из-за неисправности одного из каналов АЦП сигнал от отведения Т5 игнорировался.

Математические методы обработки. Дальнейшая обработка велась с помощью программного комплекса «BRAINCHAOS», разработанного автором. Полученные отрезки ЭЭГ просматривались на предмет наличия артефактов, затем из них вырезались чистые последовательности длиной примерно в 30 с (8000 точек) и подвергались анализу с помощью алгоритма Грассбергера – Прокаччия [1]. Вводилось предположение, что процессы работы мозга, отражением которых служит сигнал ЭЭГ, можно описать некоторой гипотетической системой конечного числа дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = F(X), \text{ где } X \in R^n,$$

и предполагалось, что каждому стабильному состоянию мозга, а значит, и каждому характерному паттерну ЭЭГ соответствует аттрактор этой системы. По скалярному ЭЭГ-сигналу $z(t)$ от каждого из 16-ти отведений строились векторы

$$Z(t) = (z(t), z(t+\tau), z(t+2\tau), \dots, z(t+(d-1)\tau))^T,$$

где d – размерность вложения; τ – задержка, которая определялась как первый нуль автокорреляционной функции сигнала. В результате этих преобразований генерировалось множество точек $Z(t) = \Lambda(X(t))$, принадлежащих d -мерной реконструкции аттрактора, где $X(t)$ – точки, лежащие на n -мерном аттракторе гипотетической системы, а Λ отображает R^n на R^d . При $d \geq 2n+1$ метод гарантирует, что отображение Λ является взаимно однозначным и обратимым. Аттрактор реконструировался при последовательно увеличивающейся размерности вложения d . Исходя из построенного конечного множества точек $Z(t)$ производился подсчет корреляционного интеграла

$$C(d,r) = (1/N^2) \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^N \Theta(r - \|z_i - z_j\|_d),$$

причем для ускорения вычислений использовалась норма вида

$$\|z_i - z_j\|_d = \max_{k=1+d}^k |z_i - z_j|_k.$$

Корреляционная размерность ν оценивалась по уровню насыщения ступеньки (если она была) на графиках $f'(\log r)$ при размерности вложения $d \in [2; 15]$, где f определена равенством $\log C(r) = f(\log r)$. Графики строились последовательно, и при достижении насыщения ν фиксировалось. Кроме определения корреляционной размерности аттрактора метод позволяет также оценить n . Очевидно, что ν оценивает n снизу, а d_0 – размерность вложения, при которой происходит образование ступеньки, – сверху.

Однако, поскольку на практике вычисление $C(r)$ производится на конечной выборке, существуют ограничения на диапазон определяемых ν . Согласно результатам [14] значения $\nu > 5$ следует рассматривать лишь как оценочные.

Результаты и обсуждение

Рис. 1 иллюстрирует вычисление корреляционной размерности по экспериментально полученному временному ряду. После регистрации сигнала (рис. 1, а) и нахождения первого нуля его автокорреляционной функции (рис. 1, б), который определяет величину задержки τ , реконструируются фазовые портреты системы, причем размерность вложения d пробегает диапазон от 2 до 15. На рис. 1, в показана двумерная ($d=2$) реконструкция. Она представляет собой некоторое облако точек без явных особенностей, что и следовало ожидать для проекции многомерного аттрактора сложной структуры. Далее, исходя из полученных фазовых портретов, строятся семейство корреляционных интегралов в двойном логарифмическом масштабе (рис. 1, г) и производные функции $f(\log r)$ (рис. 1, д, е). На малых масштабах основной вклад в f' вносят шумы дискретизации, в то время как на больших – ограниченность аттрактора. В промежутке между областями проявления этих двух эффектов можно определить корреляционную размерность аттрактора. Графики f' на рис. 1, д, где d пробегает значения от 2 до 10,

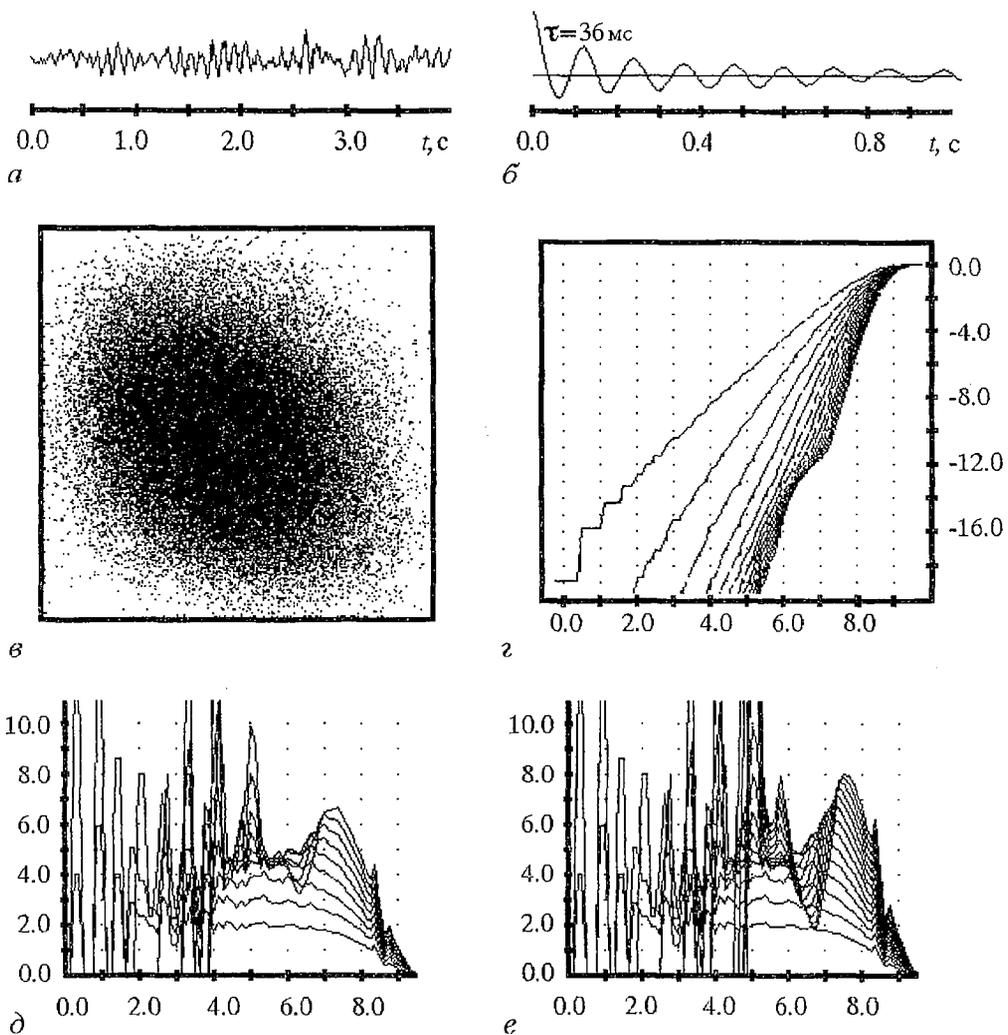


Рис. 1. Вычисление корреляционной размерности: испытуемый Г, гипервентиляция, отведение РЗ. а – сигнал ЭЭГ; б – автокорреляционная функция сигнала и определенная по ее первому нулю задержка τ ; в – реконструкция фазового портрета $(z(t), z(t+\tau))$; г – семейство корреляционных интегралов в двойном логарифмическом масштабе: по оси ординат – $\log_2 C(r)$, по оси абсцисс – $\log_2 r$, $d \in [2; 15]$; д – по оси ординат – производная $\log_2 C(r)$ по $\log_2 r$, по оси абсцисс – $\log_2 r$, $d \in [2; 10]$; е – по оси ординат – производная $\log_2 C(r)$ по $\log_2 r$, по оси абсцисс – $\log_2 r$, $d \in [2; 15]$

демонстрируют четко выраженную ступеньку на уровне 4.5, которая образована кривыми с $d \geq 5$, то есть $\nu = 4.5 \pm 0.5$, $d_0 = 5$. Отсюда следует, что для моделирования рассматриваемого сигнала достаточно 5 независимых переменных. Однако при дальнейшем увеличении d до 15 (рис. 1, е) ступенька начинает «размываться». Такое поведение f' было типичным для большинства случаев. По-видимому, это связано с ограниченностью обрабатываемых реализаций. При постоянном количестве точек разрешение объекта с увеличением размерности вложения уменьшается. В результате наступает момент, когда его начинает не хватать для исследования локальной структуры аттрактора.

В табл. 1 представлены корреляционные размерности по всем проведенным экспериментам. Если определить корреляционную размерность не удалось, то есть ступеньки на графиках f' не было, в таблице ставился знак «?». Такая ситуация не поддается однозначной интерпретации. Во-первых, возможно

Таблица 1

Корреляционная размерность

		Полушарие															
		левое								правое							
Исп	Fp1	F3	F7	C3	T3	P3	T5	O1	Fp2	F4	F8	C4	T4	P4	T6	O2	
Спокойное бодрствование																	
А	4.0	4.2	4.8	4.3	5.0	5.0		7.0	3.8	3.8	4.0	4.5	4.8	4.8	4.8	7.5	
Б	3.8	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0		4.6	4.2	4.0	4.5	4.5	4.6	5.6	5.0	5.0	
В		?	5.5	6.3	6.5	6.9		7.2	4.3	4.1	4.5	4.5	4.5	4.9	4.7	?	
Г	5.8	7.5	5.7	4.8	5.0	4.7		4.8	6.0	6.4	6.0	6.2	5.6	6.0	?	7.0	
Д	7.0			6.0	8.0	6.0		6.5	8.5	7.5	?	7.0	?	8.0	?	8.5	
Д*	8.0			8.0		6.8		6.2	?	8.5		8.8		8.0		?	
Е	4.2	4.2	4.5	4.1	4.3	4.2		5.0	4.8	5.0	4.4	5.5	4.7	5.2	5.6	6.2	
Ж	4.2	6.0	7.5	4.0	4.7	4.2		4.0	6.0	5.5	6.5	5.8	6.0	5.2	?	?	
З	6.5	6.0		5.2		5.0		6.5	4.7	5.1	5.8	5.8	8.0	5.2	6.2	6.0	
И	4.0	4.5	4.5	4.8	4.7	5.2		9.0	4.2	4.5	5.0	4.8	5.2	5.6	5.5	9.5	
Обратный счет																	
А	4.0	4.0	4.8	4.3	5.2	5.0		5.6	4.0	4.0	4.2	4.8	5.0	5.0		7.0	
Б	3.8	4.0	4.0	4.3	4.0	4.0		4.5	4.3	4.5	4.5	4.9	4.5	5.5	4.8	6.0	
В		8.0	5.4	6.2	8.0	6.2		7.0	4.2	4.5	4.5	4.8	5.0	5.0	5.0	?	
Г	5.0	5.0	4.8	4.7	4.1	4.8		4.3	5.6	5.2	5.1	5.0	5.5	4.9	?	5.5	
Е	4.4	4.3	4.8	4.4	4.5	4.5		5.0	5.0	4.8	4.2	5.1	4.8	5.0	5.0	6.0	
Ж	4.5	6.6	?	4.0	5.0	4.8		4.7	6.3	6.0	6.8	5.8	?	5.0	?	7.0	
З	6.0	5.8		5.0		4.5		8.5	4.5	4.8	5.3	5.4	6.7	5.0	5.8	6.5	
Гипервентиляция																	
А	3.8	4.0	6.0	4.3	5.2	4.5		7.8	4.0	4.0	4.5	4.5	5.2	4.8		7.5	
Б	3.8	4.0	4.0	4.5	4.4	4.5		4.5	4.0	4.0	4.3	4.5	4.5	6.0	4.5	5.5	
В	6.5	6.5	5.2	5.8		6.0		6.5	4.5	4.6	4.5	5.0	4.7	5.2	5.0	8.0	
Г	4.2	4.5	4.8	4.8	4.8	4.5		4.7	5.8	5.2	5.2	5.6	5.7	5.1	?	6.3	
Д	6.7	5.8	6.7	6.2	8.5	6.2		6.0	7.0	6.5	7.5	8.0	?	?	?	9.0	
Д*	5.0		9.0	4.8		4.6		5.0	5.0	5.0	5.7	5.1	6.5	5.5	8.5	6.0	
Е	4.2	4.5	5.1	4.0	4.7	4.5		5.2	5.0	5.0	4.4	5.0	4.8	5.0	5.0	6.5	
Ж	4.2	6.0	5.6	4.0	4.4	4.3		4.8	5.0	4.7	5.5	4.9	5.8	4.7	8.2	6.8	
З	5.2	5.5		5.2		4.5		5.8	5.0	5.5	7.2	6.1	?	4.8	7.5	5.3	
Прием «энергии»																	
Д	5.0		4.8	5.0	6.0	5.2		5.2	5.5	5.0	5.2	5.0	7.0	6.0	6.0	6.5	
Отдача «энергии»																	
Д	6.0		5.0	5.5	6.8	5.5		5.5	5.9	5.5	5.2	5.0	7.5	5.3	6.5	6.7	
* через две недели																	

насыщение f' при более высоких размерностях вложения. Во-вторых, электрическая активность мозга может иметь локальные очаги стохастичности. Также возможен вариант, связанный с недостатками используемой аппаратуры, а именно – малой разрядностью АЦП (10 бит), что ограничивает рабочий диапазон $\log r$.

Приведенные в табл. 2 результаты демонстрируют пространственное распределение второй определяемой величины – размерности вложения d_0 . Видно, что при $v \leq 6$ она, как правило, больше целой части корреляционной размерности на 1, то есть n оценивается однозначно – $n=d_0$, а при $v>6$ разрыв обычно увеличивается до 2-х или даже 3-х единиц. На рис. 2 представлен пример вычисления корреляционной размерности по всем отведениям при спокойном бодрствовании (испытуемый Ж). В левом нижнем углу показано расположение электродов по системе 10–20 [8].

Таблица 2

Размерность вложения

Полушарие																
левое									правое							
Исп	Fp1	F3	F7	C3	T3	P3	T5	O1	Fp2	F4	F8	C4	T4	P4	T6	O2
Спокойное бодрствование																
А	5	5	6	5	6	6		9	5	4	5	5	5	5	6	9
Б	5	5	5	5	5	5		5	5	5	5	5	5	7	6	6
В		?	6	8	8	8		9	5	5	5	5	5	6	6	?
Г	7	10	7	6	6	6		6	7	8	8	8	7	7	?	9
Д	9			7	10	7		9	12	9	?	9	?	11	?	12
Д*	11			10		9		8	?	12		11		1	?	?
Е	5	5	5	5	5	5		6	6	6	5	6	5	6	6	7
Ж	5	8	11	5	5	5		5	9	7	8	7	8	7	?	?
З	8	7		6	6	6		8	5	6	7	7	10	6	7	7
И	5	5	5	6	5	6		12	5	5	6	6	6	6	6	12
Обратный счет																
А	5	5	5	5	6	6		7	5	5	5	6	6	6	8	
Б	4	5	5	5	5	5		5	5	5	5	6	6	6	6	7
В		10	6	7	10	8		9	5	5	5	6	6	6	6	?
Г	6	6	6	6	5	6		5	5	6	6	6	6	6	?	7
Е	5	5	5	5	5	5		6	6	6	5	6	5	6	6	7
Ж	5	9	?	5	6	6		5	9	8	9	7	?	6	?	10
З	7	7		6	5	5		11	5	6	6	6	9	6	7	8
Гипервентгляция																
А	4	5	8	5	6	6		11	5	5	5	6	6	6	10	
Б	4	5	5	5	5	5		5	5	5	5	5	5	7	5	6
В	8	8	6	7	7	7		8	5	5	5	6	6	6	6	10
Г	5	5	5	5	5	5		5	6	6	6	6	6	6	?	7
Д	8	7	8	7	10	7		7	9	7	9	11	?	?	?	13
Д*	6		12	6		5		6	6	6	6	6	7	7	12	7
Е	5	5	5	5	5	5		6	6	6	5	6	6	6	6	8
Ж	5	7	6	5	5	5		6	6	6	6	6	7	6	11	9
З	6	6		6	5	5		7	6	6	10	7	?	6	10	6
Прием «энергии»																
Д	6		5	6	8	6		6	7	6	6	6	9	9	8	8
Отдача «энергии»																
Д	7		6	7	8	7		7	7	7	6	6	9	7	8	8
* через две недели																

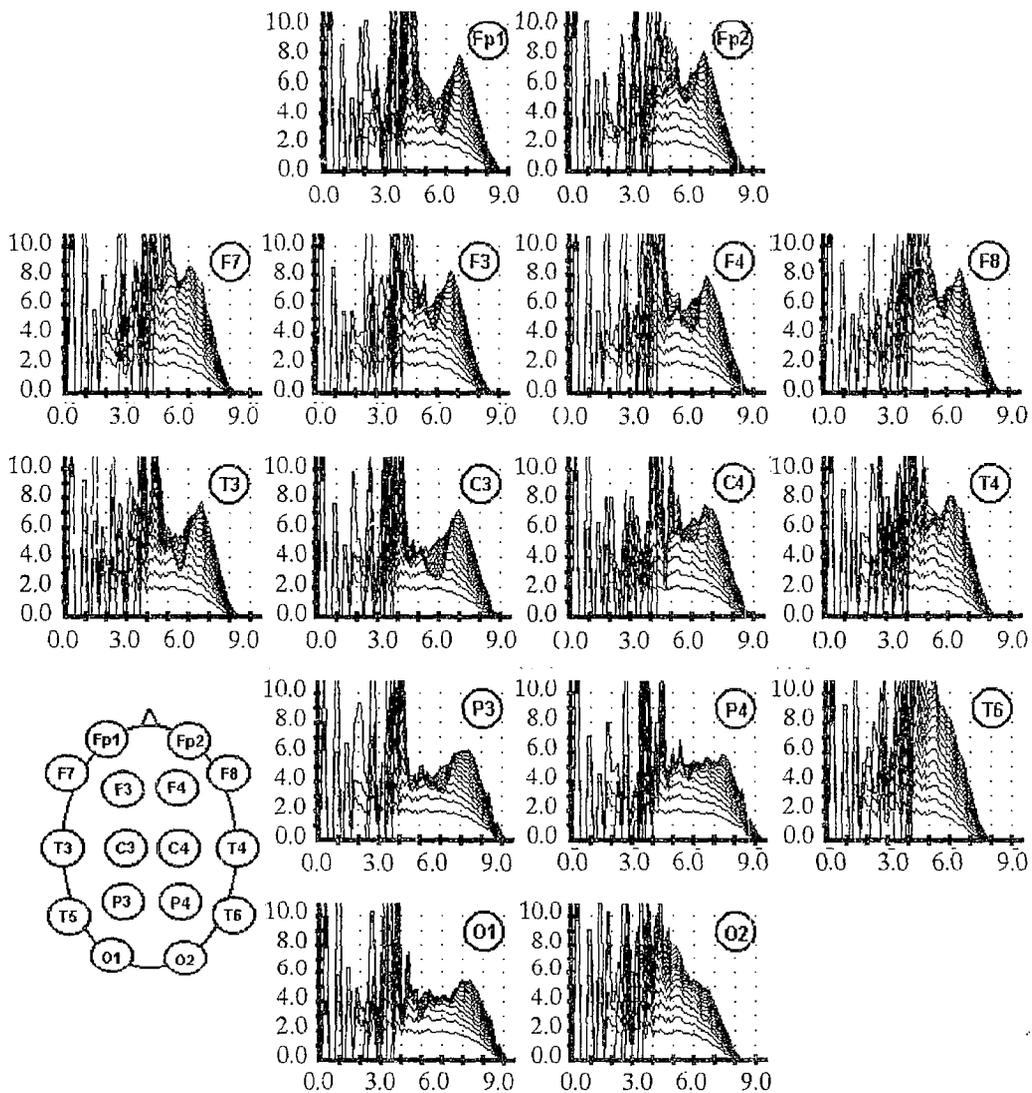


Рис. 2. Вычисление карты корреляционной размерности: испытуемый Ж, спокойное бодрствование. Графики производной $\log_2 C(r)$ по $\log_2 r$ по всем отведениям, по оси абсцисс – $\log_2 r, d \in [2;15]$. Слева внизу – схема установки электродов

Какой-либо универсальной для всех испытуемых пространственной карты корреляционной размерности, соответствующей состоянию спокойного бодрствования, обнаружено не было, что отражает наличие индивидуальной variability мозговых активаций в этом состоянии. Полученные размерности варьируют от 3.8 до 9.5, что согласуется с ранее опубликованными результатами. Так в [3] для спокойного бодрствования дается значение $\nu = 6.1 \pm 0.5$, в [5] на выборке из двух при отведении от заднетеменной области были определены ν , равные 7.8 ± 0.2 и 7.1 ± 0.1 . Лучше всего полученные результаты соответствуют работе [4], где дан диапазон ν от 4.5 до 6.6.

Наблюдаемый разброс еще раз показывает, что нельзя ограничиваться одним или несколькими отведениями ЭЭГ, должна анализироваться именно карта корреляционной размерности. Несмотря на отсутствие единой для всех испытуемых карты, все-таки можно сделать некоторые обобщения. Во-первых, в большинстве случаев наблюдается увеличение размерности аттрактора в направлении от лобных долей к затылочным (что объясняет высокие результаты

[5]). Во-вторых, если взглянуть на межполушарную асимметрию, то окажется, что в 5 случаях из 9 (*Б, Г, Д, Е, И*) правое полушарие проявляет более сложную (многомерную) активность. Только у двух испытуемых (*А, В*), наоборот, более активно левое полушарие. У *Ж* и *З* наблюдается сложный рисунок в зависимости от отведения. Особо следует отметить выделяющиеся на общем фоне более высокие корреляционные размерности испытуемого *Д*.

Как влияют на карту размерностей монотонные ментальная и физиологическая нагрузки? До сих пор этот вопрос не обсуждался. Хотя в [15] и была сделана попытка проанализировать корреляционную размерность ЭЭГ человека при спокойном бодрствовании и умственной деятельности (перемножение двузначных чисел), частота дискретизации сигнала равнялась 1000 Гц, и из-за «эффекта ближайших соседей» корреляционная размерность сильно недооценивалась. Эффект состоит в том, что при подсчете корреляционного интеграла в окрестность каждой точки на малых масштабах попадают исключительно ее соседи по отдельному витку траектории. В результате основной вклад в $C(r)$ вносит одномерная кривая. Таким образом, методические погрешности работы [15] не позволяют воспринимать ее серьезно. Согласно данным табл. 1, при обеих нагрузках имевшаяся межполушарная асимметрия сохраняется у всех испытуемых за исключением *А*, у которого устанавливается примерно синхронная работа полушарий. За исключением мелких вариаций по отдельным отведениям, у большинства испытуемых не изменились и количественные характеристики карты. Исключение составляют испытуемый *Г*, у которого при обеих нагрузках произошло общее уменьшение размерности примерно на 1 при сохранении ее лишь по некоторым отведениям (*С3, Р3, Т4*), и испытуемый *Д*, требующий отдельного рассмотрения. Таким образом, обе предложенные нагрузки не смогли существенно повлиять на карту размерности, что позволяет говорить об устойчивости аттрактора ЭЭГ состояния спокойного бодрствования.

Обсуждение результатов по исследованию ЭЭГ сенситива *Д* необходимо предварить следующим комментарием. Следует учесть, что эти результаты ни в коем случае не могут быть использованы как подтверждение или опровержение интерпретации исследуемых состояний. Можно лишь зафиксировать, что состояние спокойного бодрствования сменяется некоторым другим состоянием, и описать его в терминах получаемых нейрофизиологических данных.

В литературе описана попытка применить развиваемый подход к анализу «измененных состояний сознания» – исследовалась ЭЭГ йога при медитации [15]. Была получена корреляционная размерность $\nu=1.8$, однако все вышеизложенные претензии к этой работе остаются в силе.

Как видно из табл.1, корреляционная размерность ЭЭГ испытуемого *Д* в состоянии спокойного бодрствования по большинству отведений заметно выше по сравнению с другими испытуемыми. Так, например, по отведению *Fr1* для испытуемого *Д* были получены размерности $\nu=7.0$ и $\nu=8.0$ при средней размерности 4.6 ± 0.4 для остальной группы. Это показывает более сложную динамику ЭЭГ спокойного бодрствования сенситива *Д*. Можно предположить, что именно такая динамика и отражает его особые способности. Однако эта гипотеза требует дальнейшей статистической проверки.

При гипервентиляции в первом эксперименте левое полушарие сенситива *Д* никак не изменило свою работу. Во фронтальных долях правого полушария ν упало примерно на 1, а в теменных и затылочных увеличилось на 1. В повторном эксперименте (строка *Д** в табл. 1) изменения при гипервентиляции оказались гораздо существеннее – произошло значительное уменьшение ν по всем отведениям, была определена корреляционная размерность по тем отведениям, где ранее это сделать не удавалось. Таким образом показано, что воздействие, которое слабо влияло на размерность ЭЭГ других испытуемых, привело в одном эксперименте к существенным изменениям карты корреляционной размерности ЭЭГ испытуемого *Д*. Этот результат говорит о повышенной чувствительности данного сенситива к физиологической нагрузке.

Глобальное изменение карты наблюдалось при обоих «энергетических» состояниях (см. последние строки табл. 1, 2). Размерности по всем отведениям резко упали. Также видно, что между собой две полученные карты практически не различаются. Предположительно, в обоих случаях активируется одна и та же функциональная система, независимо от направления «потока энергии». Можно надеяться, что при дальнейших исследованиях испытуемых, подобных сенситиву Д., удастся найти многие скрытые закономерности поведения их мозга, что, возможно, внесет существенный вклад в объяснение парапсихологических феноменов.

Заключение

В настоящей работе предложен метод картирования корреляционной размерности ЭЭГ для исследования стабильных функциональных состояний мозга человека. Показано, что не существует единой межиндивидуальной пространственной карты корреляционной размерности, соответствующей состоянию спокойного бодрствования. Однако для каждого отдельного испытуемого такая карта является устойчивой характеристикой этого состояния относительно элементарных ментальной и физиологической нагрузок. Наблюдается тенденция к увеличению размерности сигнала ЭЭГ в направлении от лобных долей к затылочным. По результатам обследования сенситива выдвинута гипотеза, что полученные высокие корреляционные размерности ЭЭГ для состояния спокойного бодрствования отражают особые способности данного испытуемого. Гипотеза нуждается в дальнейшей статистической проверке. При специальных тестах сенситивом было продемонстрировано существенное изменение карты корреляционной размерности ЭЭГ по сравнению с состоянием спокойного бодрствования, что является экспериментальным подтверждением изменения функционального состояния его мозга.

Библиографический список

1. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D*. 1983. Vol. 9. P. 189.
2. Babloyantz A., Salazar J.M., Nicolis C. Evidence of chaotic dynamics on brain activity during the sleep cycle // *Phys. Lett. A*. 1985. Vol. 111. P. 152.
3. Destexhe A., Sepulchre J.A., Babloyantz A. A comparative study of the experimental quantification of deterministic chaos // *Phys. Lett. A*. 1988. Vol. 132, № 2,3. P. 101.
4. Layne S.P., Mayer-Kress G., Holzfuss J. Problems associated with dimensional analysis of electroencephalogram data / Ed. G. Mayer-Kress // *Dimensions and entropies in chaotic systems*. Springer series in synergetics. 1986. Vol.32. P. 246.
5. Soong A.C.K., Stuart C.I.J.M. Evidence of chaotic dynamics underlying the human alpha-rhythm electroencephalogram // *Biological Cybernetics*. 1989. Vol. 62. P. 55.
6. Babloyantz A., Destexhe A. Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy // *Proc. of National Academy of Sciences of USA*. 1986. Vol. 83. P. 3513.
7. Rösche J., Aldenhoff J. The dimensionality of human's electroencephalogram during sleep // *Biological Cybernetics*. 1991. Vol. 64. P. 307.
8. Зенков Л.Р., Ронкин М.А. Функциональная диагностика нервных болезней. М.: Медицина, 1982.
9. Осовец С.М., Гинзбург Д.А., Гурфинкель В.С., Зенков Л.Р., Латаш Л.П., Малкин В.Б., Мельничук П.В., Пастернак Е.Б. Электрическая активность мозга: механизмы и интерпретация // *УФН*. 1983. Т. 141, № 1. С. 103.
10. Young Y., Freeman W.J. // *Neural Networks*. 1990. Vol. 3, № 2. P. 153.
11. Дмитриев А.С. Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // *РЭ*. 1993. Т. 38, № 1. С.1.
12. Майоров В.В., Мьшккин И.Ю. Вычисление одной корреляционной

характеристики электроэнцефалограммы и ее связь с объемом кратковременной памяти // РЭ. 1993. Т. 38. С. 900.

13. Бельский Ю.Л., Веденяпин А.Б., Дмитриев А.С., Зенков Л.Р., Старков С.О., Васильев П.П. Диагностика патологических состояний мозга на основе анализа электроэнцефалограмм методами нелинейной динамики // РЭ. 1993. Т. 38. С. 1625.

14. Smith L.A. Intrinsic limits on dimension calculations // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 133, №6. P. 283.

15. Nan Xu, Jinghua Xu. The fractal dimension of EEG as a physical measure of conscious human brain activities // Bulletin of Mathematical Biology. 1988. Vol. 50, № 5. P. 559.

Московский физико-технический
институт, Долгопрудный

Поступила в редакцию 1.12.97
после переработки 27.11.98

THE MAPPING OF HUMAN ELECTROENCEPHALOGRAM CORRELATION DIMENSION

I.E. Dmitriev

The paper studies a spatial distribution of correlation dimension extracted from human electroencephalogram recordings during some stages of brain activity. This method allows us to describe a spatiotemporal pattern of brain activity in terms of dimension of the system of coupled neuronal macrooscillators responsible for the electroencephalogram signal. The influence of elementary mental and physiological loads on correlation dimension map which corresponds to alert relaxation state is analyzed. The method is applied to the investigation of one subject's altered states of consciousness.



Дмитриев Илья – родился в Москве (1974). Окончил факультет физико-химической биологии Московского физико-технического института (1997). В настоящее время является аспирантом кафедры физики живых систем МФТИ. Работает в тесном контакте с сотрудниками лаборатории нейрокибернетики НИИ мозга РАМН. Область научных интересов – нейрофизиология, ресурсы мозга, методы нелинейной динамики как инструмент анализа нейрофизиологических данных. Автор 13 публикаций.



Изв. вузов «ПНД», т. 6, № 6, 1998

УДК 51.001.57:616.12-073.97 (082)

ДИНАМИКА МОДЕЛИ НЕРВНОЙ РЕГУЛЯЦИИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА

Н.Б. Фролова, А.П. Четвериков, А.О. Мантуров

Исследуется нелинейная динамика простой математической модели нервной регуляции сердечного ритма. Обосновывается выбор модели из нескольких известных. Методами компьютерного эксперимента определены области значений параметров, соответствующих реальным кардиологическим данным. Рассчитаны бифуркационные диаграммы, спектральные плотности мощности процессов.

Введение

Общеизвестен интерес к моделированию динамики такой жизненно важной системы, как сердечно-сосудистая. Построение моделей сердечно-сосудистой деятельности направлено на поиск возможностей более точной диагностики сердечно-сосудистых заболеваний и получение детальной информации о процессах, происходящих в организме. Механизм функционирования сердечно-сосудистой системы очень сложен и зависит от множества различных факторов, как внешних (например, физических нагрузок), так и внутренних (дыхания, кровяного давления, содержания различных химических элементов в крови и клетках миокарда и даже настроения) [1,2]. Поэтому моделирование необходимо проводить с учетом самых разнообразных факторов, влияющих на исследуемую систему [3,4].

В настоящее время существует достаточно много моделей, описывающих сердечно-сосудистую систему с различных точек зрения. Так, создана модель, учитывающая химические процессы в сердце, которая описывается системой из сотни уравнений [5]. Другие исследователи обращаются к проблеме моделирования функциональной связи сердечного ритма с дыханием и барорефлексами, учитывая фазу дыхательных волн и содержание норадреналина в сердце, что влияет на симпатическую активность продолговатого мозга [5]. В этом случае используется система уравнений для сжимаемости сердечной мышцы. Известны также модели, в рамках которых изучаются разнообразные воздействия на функционирование сердечно-сосудистой системы. Примером подобного подхода может служить модель, учитывающая элементы дыхательного цикла в качестве краткого внешнего возбуждения [6].

Все модели, в деталях учитывающие различные факторы, влияющие на сердечно-сосудистую систему, очень сложны. Вместе с тем, основанное на кардиологических данных предположение, что основных факторов, существенно определяющих ее динамику, немного, приводит к возможности построения достаточно простых моделей системы без учета детального рассмотрения

структуры нервных волокон или содержания химических элементов в крови и клетках миокарда. Одна из таких моделей нервной регуляции сердечного ритма предложена Ю. Куртцем и М. Розенблюмом [7]. Наша работа посвящена исследованию сердечно-сосудистой системы в рамках описанной в [7] модели.

1. Модель нервной регуляции сердечного ритма

Рассмотрим основные элементы модели, основываясь на данных работы [7].

Известно, что основным водителем сердечного ритма является синусный узел [1,2]. Напомним, что водитель ритма – это совокупность специализированных клеток миокарда, которые генерируют нервные импульсы без участия внешних раздражителей. От синусного узла возбуждение через предсердия передается атриовентрикулярному узлу и через сеть нервных волокон достигает желудочков, вызывая их сокращение. При этом кровь выбрасывается в аорту. Непосредственно в самой аорте и легочной артерии, из которой поступает кровь в сердце, расположены рецепторы кровяного давления (барорецепторы). Из них информация о давлении поступает в мозг. На основе полученных данных мозг посылает по нервным волокнам сигнал, регулирующий сердечный ритм таким образом, чтобы поддерживался определенный (нормальный) уровень кровяного давления. Важным в этом процессе нервной регуляции сердечного ритма является то, что в описанной замкнутой системе существует временная задержка от 0.5 до 3 секунд.

Изложенные факты позволили предположить [7], что

- 1) нормальный сердечный ритм задается только синусным узлом;
- 2) важно учитывать только управление входными данными, относящимися лишь к водителю ритма и узлу управления силой сокращения мышцы;
- 3) состояние рецепторов однозначно зависит от сердечного ритма и его временной производной.

В этом случае управляющая функция G будет зависеть только от длительности кардиоинтервала RR и ее приращения в предыдущий момент времени:

$$G = G(R_{i-l}, R_{i-l} - R_{i-l-1}), \quad (1)$$

где l соответствует временной задержке в петле обратной связи.

Величина кардиоинтервала, или частота сердечных сокращений, определяется нервной регуляцией. Таким образом, вид функции G зависит, в основном, от кровяного давления, то есть состояния барорецепторов. Хотя точная форма управляющей функции неизвестна, можно предположить, что она имеет S-образный вид, поскольку состояние барорецепторов таким же образом зависит от частоты импульсов, испущенных водителем ритма. Одной из простейших функций, удовлетворяющих сформулированным предположениям, является следующая нелинейная функция:

$$G(R_{i-l}, R_{i-l} - R_{i-l-1}) = K_1(d - R_{i-l})^{1/3} - K_2(R_{i-l} - R_{i-l-1})^{1/3}. \quad (2)$$

Здесь K_1 и K_2 – коэффициенты обратной связи, являющиеся основными параметрами исследуемой системы. Если K_1 и K_2 положительны, система управления действует так, чтобы подавить возникающие возмущения (более подробно смысл параметров обсужден в разделе 2 при анализе результатов численного эксперимента).

Целью управления является поддержание кровяного давления на определенном уровне, который может достигаться сокращением сердца с определенной частотой. Частота сокращений регулируется благодаря коррекции значения интервала между двумя последовательными импульсами, формируемыми водителем ритма. Математически этот процесс описывается уравнением

$$\Delta T_{i+1} = \Delta T_i + G(R_{i-1}R_{i-1} - R_{i-1-1}) + g_i, \quad (3)$$

где g_i – случайная (шумовая) функция. В рассматриваемой модели введением функции g_i моделируется влияние внутренних органов (легких, мозга, мышц), содержание различных химических элементов в крови и клетках миокарда, эмоциональное и физическое состояние человека, то есть совокупность тех процессов, которые трудно учесть по отдельности. Отметим, что вследствие временной задержки описанная модель является инерционной.

Главный элемент модели – сердце – представляется в виде двухэлементной субмодели «воздействие – отклик», где воздействие – это импульс, испущенный водителем ритма (синусным узлом), отклик – сокращение желудочков сердца (рис. 1).

Из рис. 1 видно, что в начале потенциала действия испускается импульс возбуждения. Скорость его распространения зависит от времени восстановления, которое является временным интервалом между концом предыдущего и началом последующего потенциала действия. Поэтому можно записать

$$B_{i+1} = TT_{i+1} + T_{i+1}. \quad (4)$$

Длительность интервалов между откликами, то есть RR -интервалов, описываются выражением

$$R_{i+1} = B_{i+1} + B_i = \Delta T_{i+1} + T_{i+1} - T_i, \quad (5)$$

где $\Delta T_{i+1} = TT_{i+1} - TT_i$.

Отметим, что интервал T_{i+1} включает время, затрачиваемое на проведение импульса возбуждения через атриовентрикулярный узел и проводящую систему Гиса – Пуркинью [1,2]. Его длительность является убывающей функцией предыдущего времени восстановления $(\Delta T_{i+1} - A_i)$

$$T_{i+1} = T_{i+1}(\Delta T_{i+1} - A_i) \quad (6)$$

Обычно эта функция задается в виде [8]

$$T_{i+1} = T_M + V \exp\{-(\Delta T_{i+1} - A_i)/T_0\} \quad (7)$$

для

$$\Delta T_{i+1} - A_i \geq t_r, \quad (8)$$

где t_r – рефрактерное время, V , T_M , T_0 – положительные параметры. Если $\Delta T_{i+1} - A_i < t_r$, то ткань находится в рефрактерном состоянии и проведение возбуждения блокируется. Уравнение (8) называется условием рефрактерности ткани миокарда.

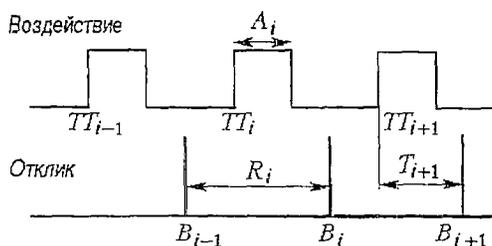


Рис. 1. Схема, поясняющая функционирование модели сердца «воздействие – отклик» [7]. Здесь TT_i – время возбуждения i -го импульса водителем ритма; B_i – время отклика; A_i – продолжительность потенциала действия; T_{i+1} – интервал между стимулом и откликом

Для A_{i+1} можно записать аналогичное выражение:

$$A_{i+1} = A_M + b \exp\{-(\Delta T_{i+1} - A_i)/A_0\} \quad (9)$$

для $\Delta T_{i+1} - A_i \geq t_r$. Здесь b , A_M , A_0 – положительные параметры.

Система уравнений (5), (7), (9) и управляющего уравнения в виде (3) составляет замкнутую систему четырех разностных уравнений с временной задержкой и случайной функцией g_i . Напомним, что описанная модель является упрощенной. В ее рамках рассматриваются только «нормальные» биения

сердца, то есть удары сердца, вызванные возбуждением синусного узла. Если значения рассчитываемых характеристик системы выходят за границы области, определенной вышеупомянутыми ограничениями (например, при попытке возбудить ткань вторым или третьим водителями ритма [1] или в течение рефрактерного периода (8)), то такие режимы следует считать не реализуемыми в сердечно-сосудистой системе.

В [7] длительность потенциала действия предполагается слабо изменяющейся и аппроксимирована константой. В настоящей работе значение потенциала действия A_i вычисляется с помощью зависимости (9), что несколько усложняет исследуемую систему, но с другой стороны, делает ее более точной. Таким образом, в данном исследовании для анализа сердечно-сосудистой системы используется упрощенная модель динамики сердечной деятельности с двумя основными параметрами обратной связи – коэффициентами K_1 и K_2 .

2. Выбор значений параметров, методика анализа и результаты численного исследования модели нервной регуляции сердечного ритма

Для исследования модели нервной регуляции сердечного ритма был выполнен цикл расчетов с помощью разработанного комплекса программ численного моделирования.

В первую очередь были определены области реальных значений параметров K_1 и K_2 . Рис. 2 дает возможность оценить пределы изменения параметров K_1 и K_2 : белым цветом обозначена область разрешенных значений параметров, черным – не разрешенных (то есть значений, при которых решение системы заведомо не соответствует реальным физиологическим значениям). Несоответствие означает либо превышение величины RR -интервалов, допустимых для нормального функционирования сердца, чему соответствуют значения RR -интервалов менее 0.4 с или более 1.7 с [1, 2], либо невыполнение условия рефрактерности (8).

Известно, что сердечный ритм непостоянен даже при неизменном уровне физической активности, в отсутствие психологического воздействия – например, во время глубокого сна. Анализ предложенной математической модели нервной регуляции сердечного ритма показал, что реализуются различные типы колебаний – от периодических до хаотических.

В рамках настоящей работы детально исследуются два режима динамики системы. В первом из них воздействие шума не учитывается ($g_i=0$ в уравнении (3)), во втором – учитывается ($g_i \neq 0$).

Рассмотрим особенности первого режима при изменении основных параметров – коэффициентов K_1 и K_2 .

Сначала положим K_1 и K_2 равными нулю. В этом случае все RR -интервалы одинаковы, чему соответствует прямая на ритмограмме и стационарная точка на

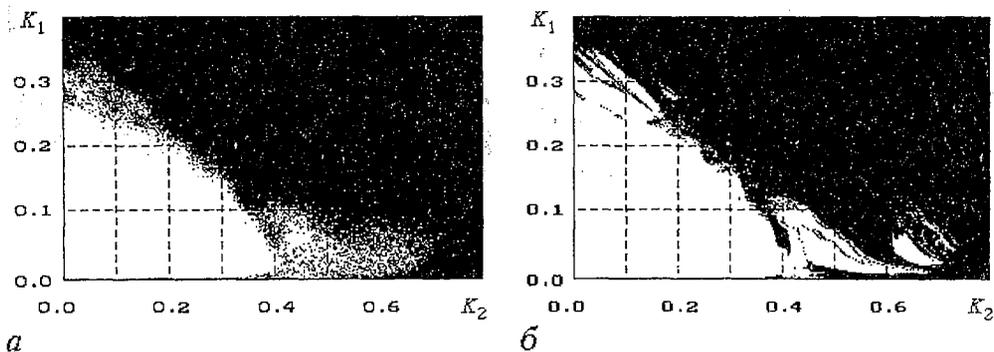


Рис. 2. Плоскость параметров (K_1, K_2) для системы, учитывающей шум с интенсивностью 0.01 (а) и без него (б)

фазовом портрете. Такое поведение не может наблюдаться в здоровом человеческом сердце. Однако известно [1], что отдельно взятые клетки водителя ритма имеют собственную постоянную частоту генерации импульсов. Таким образом, исходя из известных данных о времени распространения возбуждения в сердце и условия постоянства RR -интервалов в отсутствие внешней связи с нервными волокнами (то есть при нулевых значениях коэффициентов K_1 и K_2), определяются положительные коэффициенты в уравнениях (7) и (9).

Учтем теперь на основании экспериментальных данных [1,2], что продолжительность потенциала действия A_i водителя ритма изменяется в пределах от 0.18 с до 0.27 с. Этому соответствуют следующие значения коэффициентов в уравнении (9): $A_0=0.22$; $A_M=0.2$; $b=0.8$. Из результатов [1, 2] можно определить также изменения величины T_i , то есть времени распространения возбуждения. Это время складывается из нескольких компонентов, известных из кардиологических данных. Время прохождения возбуждения от синусного (синатриального) узла до предсердий составляет приблизительно 0.04 с; за 0.12–0.18 с сигнал распространяется от предсердий до желудочков и 0.06–0.09 с затрачивается на возбуждение желудочков. Следовательно, величина T_i должна изменяться в пределах от 0.22 с до 0.31 с. Этим данным удовлетворяют следующие значения коэффициентов в выражении для T_{i+1} (7): $T_M=0.22$; $T_0=0.2$; $V=1.082$.

Временная задержка в петле обратной связи l выбирается равной 3 [7]. Это означает, что отклик на какое-либо изменение в системе придет лишь через три удара сердца. Величина периода рефрактерности t_r равна 0.03с. [1].

Проанализируем теперь результаты численного исследования динамики системы с приведенными выше значениями параметров.

На рис. 3 представлены области реализации различных режимов системы на плоскости параметров (K_1, K_2) . Крестиками обозначена область запрещенных значений параметров (см. рис. 2). Отдельные заштрихованные области соответствуют периодическим колебаниям системы с различными значениями основной частоты f_0 . В незаштрихованных зонах наблюдаются квазипериодические или сложнопериодические колебания.

Рассмотрим подробнее типичные режимы, соответствующие заштрихованным областям. Например, при $K_1=0.02$; $K_2=0.2$ наблюдаются периодические колебания системы с основной частотой $f_0=0.25$ (рис. 4). В

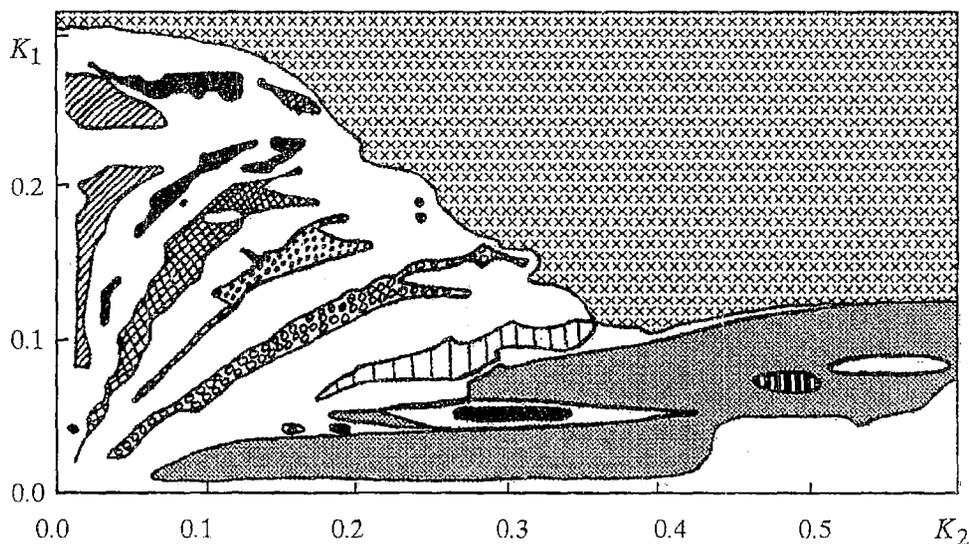


Рис. 3. Карта режимов системы, не учитывающей шумовое воздействие, на плоскости параметров (K_1, K_2) . Крестиками отмечена запрещенная область параметров K_1, K_2 ; серым цветом обозначена область периодических колебаний, с основной частотой $f_0=0.25$. Не закрашены области с квазипериодическим или сложнопериодическим поведением

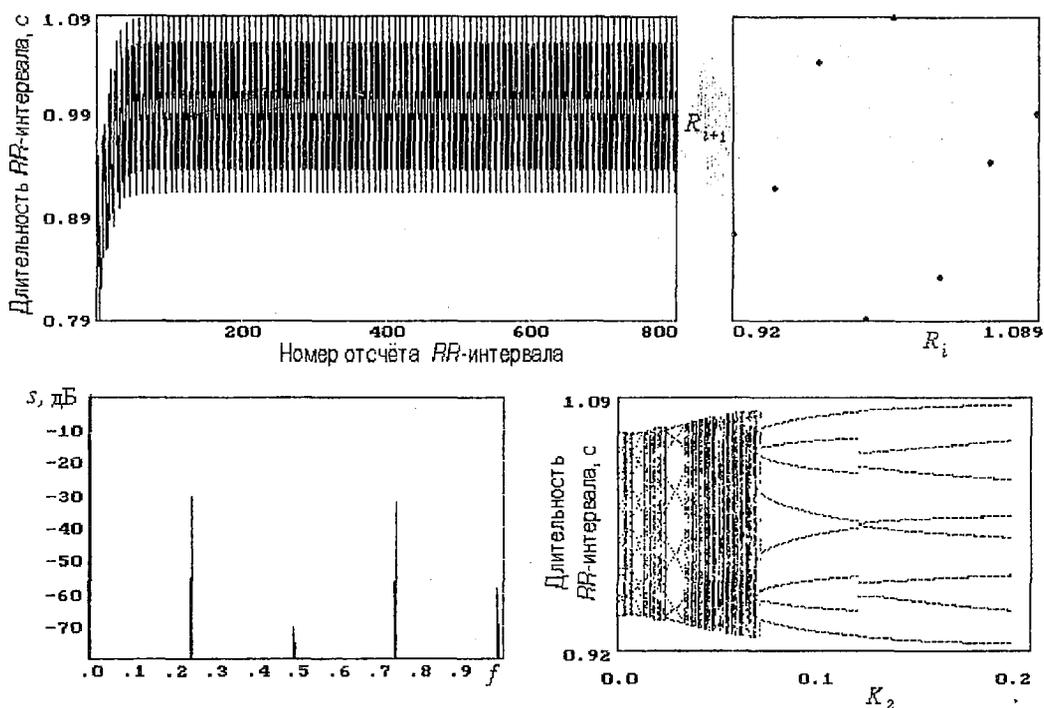


Рис. 4. Периодические колебания с основной частотой $f_0=0.25$ в системе, не учитывающей шумовое воздействие. $BP=0.1690$, $HK_1=HK_2=0.001$, $K_1=0.020$, $K_2=0.200$, $N=1824$. Для графика бифуркационной диаграммы значение параметра K_2 изменяется от 0 до 0.2

частности, на графике спектра частота f_0 вместе с тремя гармониками фиксируется очень четко.

На рис. 4, 5 графики расположены следующим образом: верхний левый график – это ритмограмма, правый – фазовый портрет; нижний левый – спектральная плотность мощности, правый – бифуркационная диаграмма. Ритмограмма представляет собой последовательность RR -интервалов. Этот график дает наглядное представление об изменении сердечного ритма, причем данные численного моделирования можно сравнить с экспериментально полученной ритмограммой человека.

Фазовый портрет в данном случае представляет зависимость R_{i+1} от R_i [9]. Этот график позволяет судить о структуре получаемой реализации.

Спектр мощности позволяет идентифицировать характер процессов в системе. На рисунках по оси y откладывается спектральная плотность мощности в dB , по оси x – частота, соответствующая отношению номера текущей точки (i) к половине максимального количества точек реализации, по которой рассчитывается спектральная плотность [10].

Бифуркационная диаграмма показывает зависимость RR -интервалов от значения параметра K_2 при фиксированном значении параметра K_1 в области их разрешенных значений.

На графиках использованы следующие обозначения: BP – вариационный размах, HK_1 – шаг системы по параметру K_1 , HK_2 – шаг по параметру K_2 , K_1 и K_2 – значения соответствующих параметров системы, N – общее число точек исследуемого массива.

При значениях параметров $K_1=0.1$ и $K_2=0.16$ система также демонстрирует периодическое поведение, но основная частота f_0 равна 0.2 (рис. 5). В этом случае в спектре мощности имеется небольшой пьедестал, что связано, по-видимому, с дефектами процедуры расчета спектра, обусловленными конечной длительностью обрабатываемой временной реализации. Остальные заштрихованные области отличаются от описанных лишь различной основной частотой (см. пояснения к рис.3).

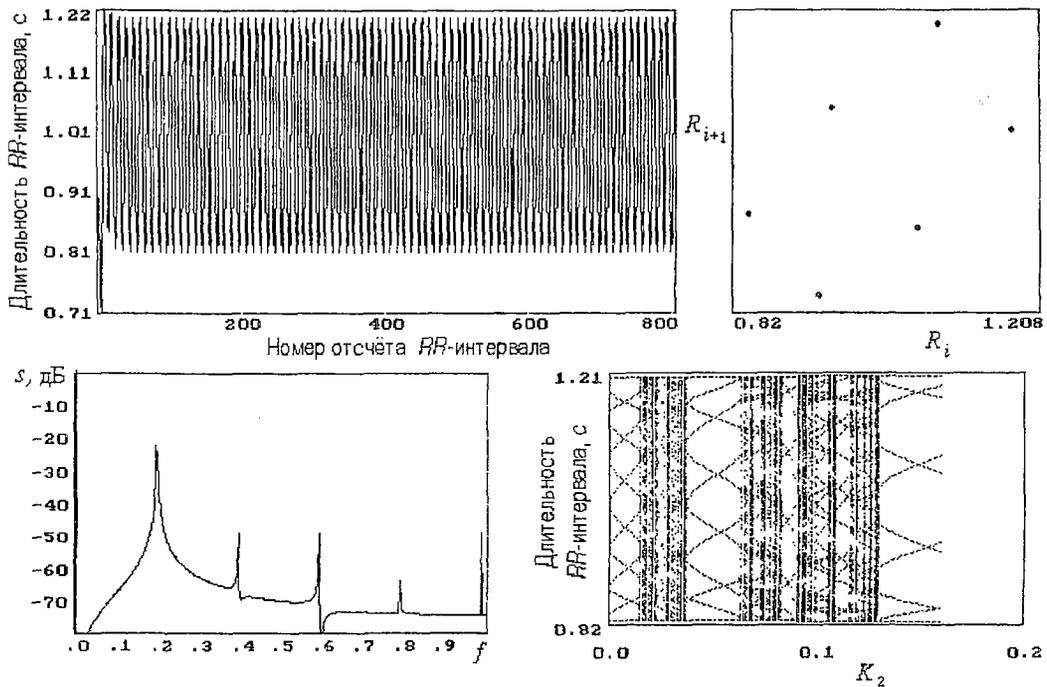


Рис. 5. Периодические колебания с основной частотой $f_0=0.2$ в системе, не учитывающей влияние шума. $BP=0.3905$, $HK_1=HK_2=0.001$, $K_1=0.100$, $K_2=0.160$, $N=1824$. Для графика бифуркационной диаграммы значение параметра K_2 изменяется от 0 до 0.16

Частота f_0 не очень сильно изменяется при варьировании параметра K_1 при фиксированном K_2 . В области $K_1 < 0.1$ и $K_2 > 0.3$ она достигает максимального значения 0.25 и практически не изменяется. Однако значение основной частоты f_0 зависит от времени задержки — она уменьшается с увеличением l (рис. 6). В настоящей работе во всех расчетах использовалось значение $l=3$ [7].

В рассмотренном режиме в системе наблюдаются периодические колебания, которые не соответствуют функционированию здорового человеческого сердца. Они обусловлены дыхательной синусной аритмией. Известно [1], что взаимодействие между дыхательным циклом и импульсами, генерируемыми водителем ритма, приводят к колебаниям сердечного ритма с частотой порядка 0.25 Гц (4 с), чему на ритмограмме соответствует 8–12 периодов за 100 шагов системы. Таким образом, первый режим динамики системы определяет «огibaющую» реальную хаотическую ритмограммы. Но его исследование позволяет уточнить физиологический смысл основных параметров K_1 и K_2 .

Можно сказать, что коэффициент K_1 соответствует активизации парасимпатической нервной системы, а коэффициент K_2 отвечает за возбуждение симпатической нервной системы и постоянный тонус парасимпатической.

Обратимся ко второму режиму динамики, в котором учитывается влияние шума ($g_f \neq 0$) на поведение системы. Шумовое воздействие в этой системе описывает, как отмечалось выше, влияние различных факторов, не

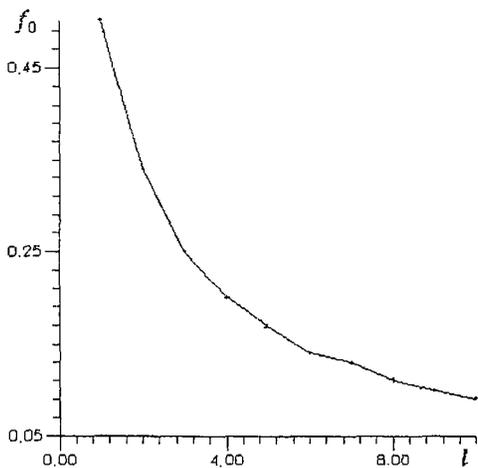


Рис. 6. Зависимость основной частоты периодических колебаний системы f_0 от времени задержки в петле обратной связи l

включенных непосредственно в модель. Будем задавать функцию g_i в виде, соответствующем белому, нормально распределенному шуму с интенсивностью 0.01. Такое значение интенсивности шумового воздействия выбрано исходя из результатов численного моделирования системы с различными значениями интенсивности. Было найдено, что при малых значениях интенсивности, порядка 10^{-3} и менее, влияние шума в большей части области параметров K_1, K_2 настолько слабо, что поведение системы мало отличается от рассмотренного случая $g_i=0$. В частности, обнаружено, что спектр мощности лишь слабо зашумляется, что мало отражается на общем поведении системы. При больших значениях интенсивности шума, порядка 0.06–0.1, динамические изменения в системе фактически подавляются налагаемым шумом, и спектр мощности практически не отличается от спектра подаваемого внешнего шумового сигнала g_i .

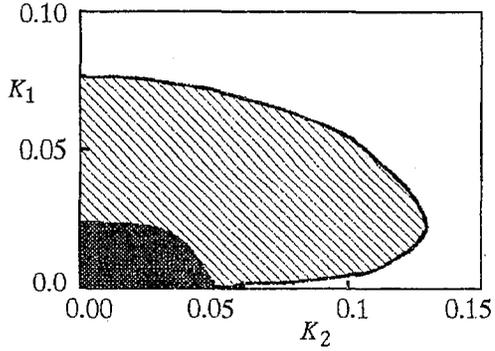


Рис. 7. Диаграмма режимов, реализующихся в системе с шумовым воздействием на плоскости параметров (K_1, K_2) . Закрашенная область соответствует поведению системы со спектром мощности типа « $1/f$ ». Заштрихованная и закрашенная области соответствуют допустимым значениям вариационного размаха

Необходимо отметить, что спектр, соответствующий поведению здорового человеческого сердца, должен иметь вид, аналогичный спектру с закономерностью типа $1/f^\alpha$ [5,7]. Таким образом, основной интерес представляет область параметров K_1 и K_2 , в которой спектр мощности удовлетворяет указанной закономерности.

Анализ данных численного моделирования показывает, что далеко не во всей области разрешенных значений параметров K_1 и K_2 (см. рис. 2) возможна реализация подобных режимов. На рис. 7 таким режимам соответствуют заштрихованные области.

Типичный образец такого поведения системы приведен на рис. 8.

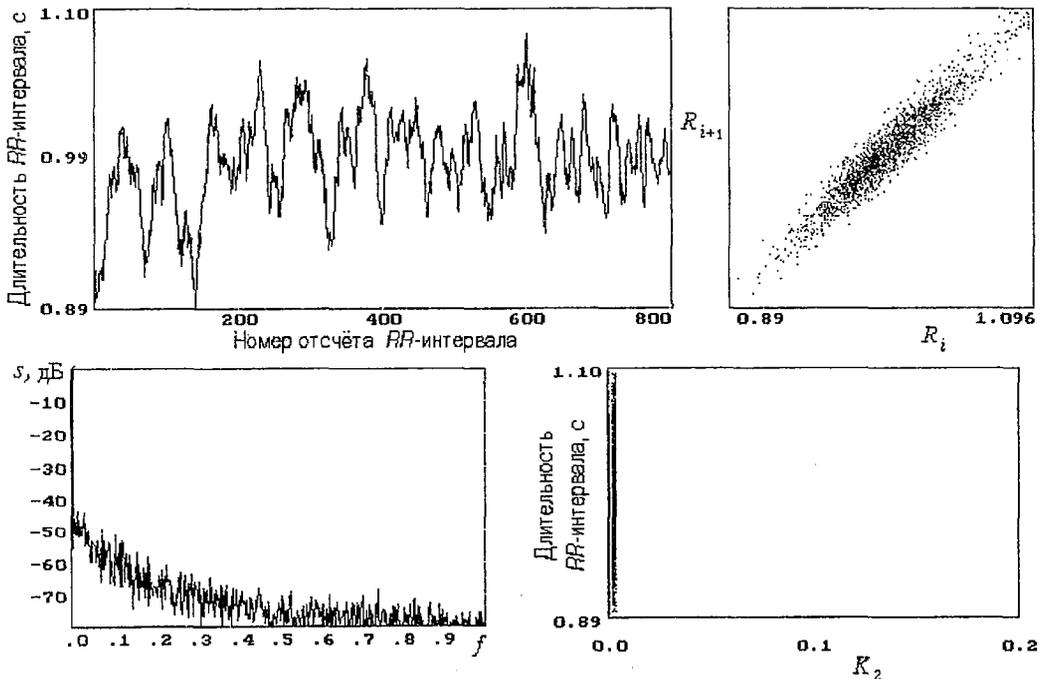


Рис. 8. Хаотические колебания в системе под шумовым воздействием с видом спектра мощности типа « $1/f$ », соответствующим кардиологическим данным о здоровом сердце. $BP=0.2008$, $NK_1=-NK_2=0.001$, $K_1=0.009$, $K_2=0.004$, $N=1824$. Для графика бифуркационной диаграммы значение параметра K_2 изменяется от 0 до 0.004

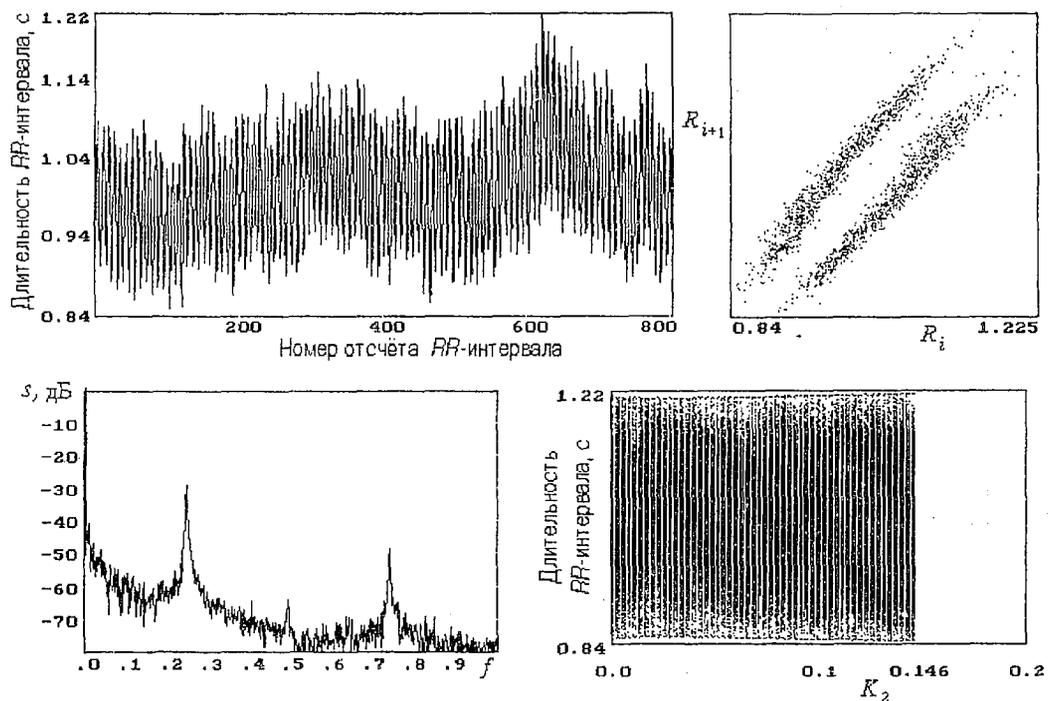


Рис. 9. Поведение системы под шумовым воздействием со спектральной плотностью мощности отличной от « $1/f$ ». Пики соответствуют основной частоте 0.25. $BP=0.3905$, $HK_1=HK_2=0.001$, $K_1=0.100$, $K_2=0.160$, $N=1824$. Для графика бифуркационной диаграммы значение параметра K_2 изменяется от 0 до 0.146

Однако, по мере увеличения параметров K_1 и K_2 , спектр системы все более отличается от закономерности « $1/f$ ». В частности, на фоне шума начинают появляться характерные ярко выраженные частотные компоненты (рис. 9). Их эволюция соответствует поведению частот в режиме, не учитывающем влияние шума.

Отметим, что кроме перечисленных выше ограничений на значения параметров K_1 и K_2 , важную роль играет ограничение на значение такого параметра, как вариационный размах, то есть разница между максимальным и минимальным значениями RR интервалов рассматриваемой ритмограммы. Для здорового сердца значение вариационного размаха должно находиться в пределах 0.15–0.25. Найдено, что область параметров K_1 , K_2 , удовлетворяющих этому условию, значительно больше области параметров со спектром типа « $1/f$ » (рис. 7). Поэтому в рассматриваемой модели данное условие не является принципиальным.

Таким образом, из всего множества разрешенных значений параметров K_1 и K_2 всем описанным выше требованиям удовлетворяет лишь небольшая совокупность значений этих параметров области $0 < K_1 < 0.02$ и $0 < K_2 < 0.05$ (см. рис. 7). В этой области спектр мощности имеет вид типа « $1/f$ » и выполняется условие необходимого вариационного размаха. Можно полагать, что именно эта область параметров соответствует здоровому человеческому сердцу.

Заключение

Численное исследование модели сердечного ритма проводилось для двух подсистем: система уравнений (3),(5),(7),(9) без учета влияния шума в уравнении (3); система этих уравнений, включающая функцию шума g_i .

В результате исследования первого типа режимов уточнены значения

параметров A_M , A_0 , b , V , T_M и T_0 и физиологический смысл основных параметров системы – коэффициентов обратной связи K_1 и K_2 . В ходе численного эксперимента определено, что система в этом режиме генерирует периодические колебания с различными основными частотами, зависящими от значений параметров K_1 и K_2 , и более сложные многочастотные колебания, включая квазипериодические. Полученные ритмограммы не соответствуют реальным ритмограммам человеческого сердца, но определяют однозначную зависимость частоты сердечных сокращений от дыхания человека, имитируя дыхательную синусную аритмию. Это следует из того, что первоначально в модели не заложено влияние дыхания на сердечный ритм, а лишь описано взаимодействие ритма сердечных сокращений с симпатической и парасимпатической нервными системами.

Определена зависимость между значением времени задержки l в петле обратной связи и значением максимальной основной частоты периодических колебаний.

Исследование второго типа режимов динамики системы, в которых учитывалось влияние шума, позволило определить область параметров K_1 , K_2 с характерным поведением, соответствующим функционированию здорового сердца. В этой небольшой области параметров спектр мощности имеет вид типа « $1/f$ » и вариационный размах лежит в пределах нормальных значений от 0.15 до 0.25. Во всей остальной области разрешенных значений параметров K_1 , K_2 на фоне шумового спектра выделяются характерные частоты, соответствующие частотам режимов первого типа.

Таким образом, можно полагать, что результаты численного моделирования согласуются с реальными кардиологическими данными, и можно сделать вывод о том, что использованная модель и полученные результаты физиологически обоснованны.

В дальнейшем интересным представляется детальное исследование системы в области параметров, обеспечивающих поведение системы, соответствующее функционированию здорового и, возможно, больного сердца.

Привлекает внимание возможность подбора значений параметров K_1 и K_2 к определенной ритмограмме, а также вычисления характеристик колебаний в сложных (хаотических) режимах, например, показателей Ляпунова.

Библиографический список

1. Бабский Е.Б., Зубков А.А., Косицкий Г.И., Ходоров Б.И. Физиология человека. М.: Медицина, 1966.
2. Общий курс физиологии человека и животных / Под ред. А.Д. Ноздрачева. Кн.2. Физиология висцеральных систем. М.: Высшая школа, 1991.
3. Glass L., Hunter P. There is a theory of heart // Physica D. 1990. Vol. 43. P. 1.
4. Goldberger A.L., Rigney D.R.. Dynamics of sudden death // An. Rev. Mater. Sci. 1989. Vol. 19 – Palo Alto. P. 522.
5. Клайнс М. Дыхательная регуляция частоты сердечных сокращений. Закономерности, установленные при помощи моделирующего устройства // Электроника и кибернетика в биологии и медицине. М.: Изд-во ин. лит-ры, 1963.
6. Seidal H., Herzog H. Modelling heart rate variability due to respiration and baroreflex. 1995. P. 205
7. Rosenblum M., Kurths J. A Model of neural control of the heart rate // Phys. A. 1995. Vol. 215. P. 439.
8. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
10. Task force of the european society of cardiology and the north american society

of pacing and electrophysiology heart rate variability. Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use // *Circulation*. 1996. Vol. 93, № 5. P. 1043. -

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию
после исправления*

*1.10.98
21.10.98*

DYNAMICS OF THE MODEL OF NEURAL CONTROL OF THE HEART RATE

N.B. Frolova, A.P. Chetverikov, A.O. Manturov

Nonlinear dynamics of a simple mathematical model of the neural control of the heart rate variability is studied. The choice of the model from known ones is substantiated. The range of parameter values appropriated to the cardiological data is found by computer modeling. Bifurcational diagrams, power spectrum densities of processes are calculated.



Фролова Наталья Борисовна – родилась в 1975 году в Саратове, окончила Саратовский государственный университет (1997). С 1997 года аспирант кафедры электроники, колебаний и волн физического факультета СГУ. Научные интересы связаны с исследованием нелинейных моделей биологических систем.



Четвериков Александр Петрович – родился в 1953 году в Новоузенске, окончил Саратовский государственный университет (1975). Работал в НИИ механики и физики СГУ, затем на физическом факультете СГУ. В настоящее время профессор кафедры электроники, колебаний и волн. Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981) и доктора физико-математических наук (1996), обе в СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика распределенных систем, вакуумная сверхвысокочастотная электроника, компьютерный эксперимент. Опубликовал более 70 работ в отечественных и зарубежных изданиях.



Мантуров Алексей Олегович – родился в 1970 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1993). После окончания СГУ работает в НИИМФ СГУ. Научные интересы: моделирование нелинейных систем различной природы, радиокommуникационные технологии. Опубликовал ряд работ по данным направлениям.



ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ЛАЗЕРА С АДДИТИВНОЙ СИНХРОНИЗАЦИЕЙ МОД

Л.А. Мельников, Э.В. Беккер

Численно проанализирована динамика последовательности импульсов в модели лазера с аддитивной синхронизацией мод, выяснена структура разбиения плоскости параметров нелинейного и линейного набегов фаз в дополнительном резонаторе на области различных типов движения, конкретизированы типы бифуркаций периодических режимов на границах областей, найдены области генерации высокоинтенсивных импульсов. Исследована трансформация карты динамических режимов при варьировании коэффициента усиления и коэффициента отражения зеркала связи. Построены топологические карты значений ляпуновских показателей в плоскости указанных управляющих параметров.

Лазеры с аддитивной синхронизацией мод (АдСМ) являются одним из средств генерации высокоинтенсивных импульсов фемтосекундной длительности [1, 2]. В волоконных лазерах и лазерах на центрах окраски, использующих аддитивную синхронизацию мод, достигнуты длительности генерируемых импульсов меньше 100 фс, с энергиями порядка нескольких нДж [3–5]. Компрессия импульсов в лазерных системах с АдСМ основана на интерференционном сложении импульсов из основного и дополнительного резонаторов при наличии нелинейного элемента в одном из резонаторов.

В последних работах, посвященных лазерам с АдСМ, исследовались возможности улучшения характеристик выходного излучения лазера за счет использования различных лазерных материалов и усовершенствования лазерных схем [3–6]. Для устранения солитонных эффектов, понижающих энергию генерируемых импульсов, в волоконных лазерах использовались отрезки эрбиевого волокна, обладающие положительной дисперсией [3,5]. Для увеличения мощности генерируемых в волоконном эрбиевом лазере импульсов использовался усиливающий кристалл KCl:Ti⁺, накачиваемый Nd:YAG лазером [4]. В работе [6] стабилизация энергии и улучшение временной формы ультракоротких импульсов в Nd:YLF лазере достигались с помощью устройства управления обратной связью.

Для нахождения областей параметров, в которых реализуется самостарт генерации высокоинтенсивных ультракоротких импульсов, проводились численные (на основе флуктуационной модели) эксперименты [7,8].

В работе [7] численно проанализирована динамика самостарта генерации ультракоротких импульсов в твердотельных лазерах с АдСМ при непрерывной накачке. Показано, что формирование стабильных цугов ультракоротких импульсов из спонтанного шума возможно в ограниченных областях значений параметров лазера. Показана трансформация этих областей на плоскости

интенсивность накачки – параметр связи в зависимости от параметра фазовой самомодуляции, ширины спектрального фильтра и сечения генерационного перехода.

В работе [1] было записано приближенное уравнение для поля стационарной генерации в лазерной системе, учитывающее насыщаемое усиление, дисперсию, линейные и нелинейные потери и набеги фаз. Найдено выражение коэффициентов приближенного уравнения через параметры конкретных лазерных систем с аддитивной и керровской синхронизациями мод.

Для преодоления основного недостатка лазеров с АдСМ – необходимости интерферометрического согласования длин резонаторов на протяжении всего времени генерации – предложены видоизмененные модели лазера с АдСМ: совмещающие два резонатора в один при использовании интерференции полей разных поляризаций после прохождения невзаимного нелинейного элемента [3,5]; включающие нелинейное антирезонансное кольцо [9]. Кроме того, было показано [8], что при введении резонансной нелинейности в дополнительный резонатор, эффективная синхронизация мод происходит как в отсутствие интерферометрического согласования длин резонаторов, так и в случае «макрорасстройки» их длин, при которой запаздывание поля из дополнительного резонатора относительно импульса генерации сравнимо с его длительностью.

В лазерах с нелинейным антирезонансным кольцом поле из активной среды расщепляется на два пучка, которые распространяются в противоположных направлениях по кольцу и по-разному взаимодействуют с нелинейной средой, испытывая при этом разный фазовый набег. В результате их интерференции на делительной пластинке интенсивность поля, возвращающегося в активную среду, становится зависящей от интенсивности исходного поля. Таким образом, связанное с резонатором лазера антирезонансное кольцо представляет собой аналог нелинейного зеркала с коэффициентом отражения, зависящим от интенсивности падающего поля. Такая система является однорезонаторной и не нуждается в контроле длины резонатора, обладая при этом всеми достоинствами лазеров с АдСМ. Невзаимность нелинейных свойств антирезонаторного кольца может достигаться разбалансировкой связи с основной частью резонатора, введением в кольцо невзаимных потерь или использованием сферических зеркал с разными фокусными расстояниями [9].

В работе [3] представлен волоконный лазер с АдСМ, генерирующий ультракороткие импульсы длительностью 77 фс, мощностью 1кВт в пике мощности, со спектральной шириной 56 нм. В схеме лазера используются участки волокна с сильной положительной и отрицательной дисперсией. При однопараметрическом исследовании динамики этого лазера в зависимости от мощности накачки в системе обнаружен гистерезис.

Исследования нелинейной динамики последовательности импульсов предложенных схем лазеров с АдСМ носят фрагментарный характер. Между тем, фемтосекундные лазеры представляют собой интересный объект для исследования нелинейной динамики. Изучение распада режима синхронизации мод позволяет охарактеризовать хаотическую динамику многомодовых лазеров. Детальное изучение сложных периодических, квазипериодических и хаотических режимов, а также нахождение седловых решений помогает подобрать характер дополнительного воздействия для получения генерации стационарных импульсов в новых областях управляющих параметров.

В предлагаемой работе подробно исследуется нелинейная динамика последовательности импульсов двухрезонаторного кольцевого лазера с нелинейным элементом в дополнительном резонаторе.

Построение модельного отображения для лазера с АдСМ

Для построения численной модели рассмотрим упрощенную схему лазера с АдСМ (рис. 1). Два резонатора, основной и дополнительный, связаны

полупрозрачным зеркалом связи (ЗС). Основной резонатор содержит активный элемент (АЭ) и выходное зеркало (ВЗ), дополнительный резонатор включает в себя нелинейный элемент (НЭ). Для удобства описания можно рассматривать резонаторы бегущей волны, что не изменит получаемых уравнений по сравнению с лазером стоячей волны в случае отсутствия перекрытия падающей и отраженной частей импульса в пределах нелинейного элемента в лазере стоячей волны [1].

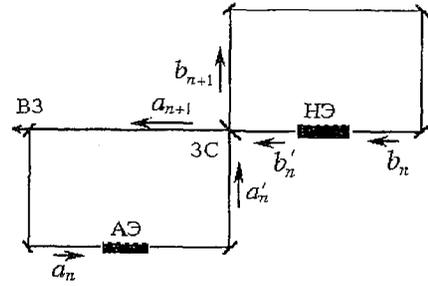


Рис. 1. Упрощенная схема лазера с дополнительным резонатором

Целью наших исследований является изучение динамических явлений, связанных не с изменением формы импульса, а со взаимодействием импульсов в резонаторах и соответствующими перекачками энергии из одного резонатора в другой, поэтому будем представлять импульсы, распространяющиеся в обоих резонаторах, прямоугольными и неизменной длительности.

При учете насыщения усиления в активной среде преобразование поля в основном резонаторе может быть приближенно описано уравнением [1]

$$a'_n = [1 + (g/2)/(1 + |a_n|^2)]a_n,$$

где g – коэффициент усиления активной среды по мощности в отсутствие насыщающего светового потока; a_n – комплексное число, амплитуда и фаза которого равны соответственно амплитуде и фазе нормированного значения поля импульса $a_n^2 = 2a_{0n}^2 \tau / (P_{\text{sat}} T_r)$; $2a_{0n}^2 \tau$ – плотность энергии импульса; P_{sat} – плотность энергии насыщения; τ , T_r – соответственно длительность импульса и время обхода резонатора.

Учитывая фазовую самомодуляцию в нелинейном элементе дополнительного резонатора и интерферометрическое рассогласование длин обоих резонаторов, запишем преобразование поля в дополнительном резонаторе следующим образом [7]:

$$b'_n = b_n \exp(i\beta |b_n|^2 + i\varphi),$$

где φ – фазовая расстройка, обусловленная интерферометрическим рассогласованием длин обоих резонаторов; $\beta = [kn_{2b} L_b S_a / (n_{0b} S_b)] [P_{\text{sat}} T_r / (2\tau)]$ – нормированный коэффициент фазовой самомодуляции; n_{0b} , n_{2b} и L_b – нелинейный и линейный коэффициенты преломления нелинейного элемента в дополнительном резонаторе и его длина; S_a , S_b – сечения лазерного пучка в активной среде и нелинейном элементе; b_n – нормированное аналогично a_n поле в дополнительном резонаторе.

Учитывая линейное сложение импульсов на зеркале связи, динамика амплитуд и фаз импульсов за один проход резонатора может быть описана отображением

$$a'_n = R^{1/2} [1 + (g/2)/(1 + |a_n|^2)] a_n,$$

$$b'_n = \theta^{1/2} \exp(i\beta |b_n|^2 + i\varphi) b_n,$$

$$a_{n+1} = -r^{1/2} a'_n + (1-r)^{1/2} b'_n,$$

$$b_{n+1} = (1-r)^{1/2} a'_n + r^{1/2} b'_n,$$

где R – коэффициент отражения выходного зеркала, θ – потери в дополнительном резонаторе.

Так как a и b – комплексны, то в общем случае исследуемое отображение является четырехмерным. Однако, легко заметить, что общая фаза полей не является динамической переменной и может быть исключена из рассмотрения.

Результаты численного исследования модели лазера с АдСМ

Анализ уравнений модельного отображения показывает, что замена $\varphi' = \varphi + 2\pi$, а также одновременная замена $\varphi'' = -\varphi$ и $\beta = -\beta$ не изменяют динамики поля в лазерной системе. Следовательно, без потери информации о наблюдаемых в модельной системе динамических режимах в качестве границ диапазонов изменения β и φ можно выбрать: $\beta_{\text{beg}} = 0$, $\beta_{\text{end}} = 5$, $\varphi_{\text{beg}} = 0$, $\varphi_{\text{end}} = 6.28$. Все следующие карты динамических режимов, топологические карты значений ляпуновских характеристических показателей и картина бифуркаций периодических решений рассчитывались в этих пределах.

Рассмотрим подробно карту периодических режимов, построенную вверх по параметрам β и φ (рис. 2). Описываемая карта динамических режимов была построена при следующих значениях остальных параметров системы: $g=0.4$, $R=0.95$, $r=0.55$, $\theta=0.9$, далее называемых стандартными. Предельный цикл периода 1 (далее цикл-1) по амплитудам импульсов в основном и дополнительном резонаторах и разности их фаз представляет собой двухчастотную квазипериодику при учете абсолютной фазы импульсов. Следовательно, частота генерируемого импульса изменяется от прохода к проходу. В системе обнаружены и исследованы следующие периодические режимы: предельные циклы периодов 1, 2, 3, 4, 5, 8, 16.

Однопараметрическое исследование цепочки удвоений предельных циклов периодов 1, 2, 4, 8 с помощью мультипликаторов показало, что перед точками бифуркации удвоения периода происходит слияние направлений двух комплексно-сопряженных мультипликаторов на отрицательной части действительной оси; затем они остаются на действительной оси, разбегаясь по значениям; вскоре один из них становится равным -1 , то есть наблюдается бифуркация удвоения периода цикла. Построение фазовых портретов и расчет мультипликаторов цикла-4 показали, что на стыке двух частей области с цепочкой удвоений существует область, в которой комплексно-сопряженные мультипликаторы цикла-4 выходят на единичную окружность и на базе цикла-4 возникает квазипериодика – рождается четырехтактный тор (см. рис. 2).

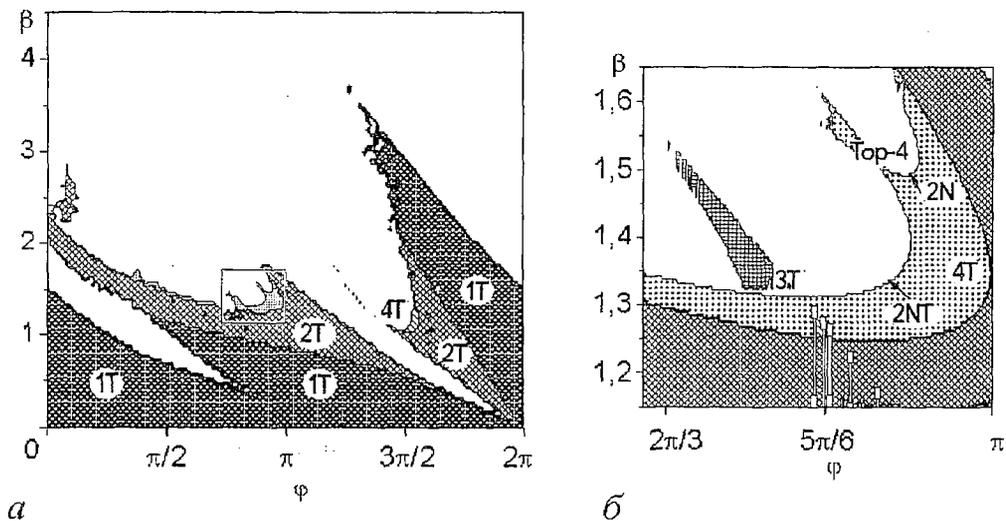


Рис. 2. Разбиение плоскости управляющих параметров на области с различными периодическими режимами (NT – цикл периода N) (а); увеличенный фрагмент (б)

Расчет карт динамических режимов при взятии начальных условий в каждой следующей точке по параметрам на предельном множестве предыдущей вниз и вверх по параметру φ показал наличие в системе гистерезиса.

На рис. 3 представлены карты значений мощности генерируемых импульсов и разности фаз полей в основном и дополнительном резонаторах при стандартных значениях параметров системы.

На рис. 4 приведены результаты расчета бифуркационных линий периодических режимов на плоскости параметров φ и β . Область существования периодических колебаний периода 1 ограничена линиями нейтральности l_0 , кратности l_1 и удвоения l_2^k . При пересечении линии l_0 из описываемого предельного цикла мягко рождается двумерный тор, возникают двухчастотные биения. Вдоль линии l_0 число вращения φ монотонно изменяется. Последовательно проходятся точки бифуркаций коразмерности 2, соответствующие множеству слабых резонансов и двум сильным резонансам (1/5) и (1/4). В бифуркационной точке А помимо пары комплексно-сопряженных мультипликаторов на единичную окружность выходит третий мультипликатор $\rho_3=+1$, и линия l_0 прерывается. Выше точки А регистрируется линия l_1 . На линиях l_2^k происходят бифуркации удвоения периода k -циклов системы. Линии l_0^2 и l_1^2 представляют собой линии нейтральности и кратности периодического режима периода 2. На линиях l_0^2 и l_0^4 возникают соответственно двухтактный и четырехтактный двумерные торы.

На рис. 5, а показаны топологические карты значений ляпуновских показателей. Обнаружены области хаотических колебаний с одним и двумя положительными показателями Ляпунова. Старший показатель Ляпунова достигает в рассматриваемой области параметров значения +1.2, а второй ляпуновский показатель – значения +0.055. В пределах рассматриваемого диапазона параметра β обнаруженные хаотические аттракторы имеют размерность в пределах от 2 до 3.

На рис. 5, б показано разбиение плоскости параметров β и φ на области, различающиеся сигнатурой спектра ляпуновского характеристического показателя. Выделены области параметров, в которых наблюдаются регулярные аттракторы R, а также хаотические аттракторы с одним 1L и двумя 2L положительными показателями Ляпунова.

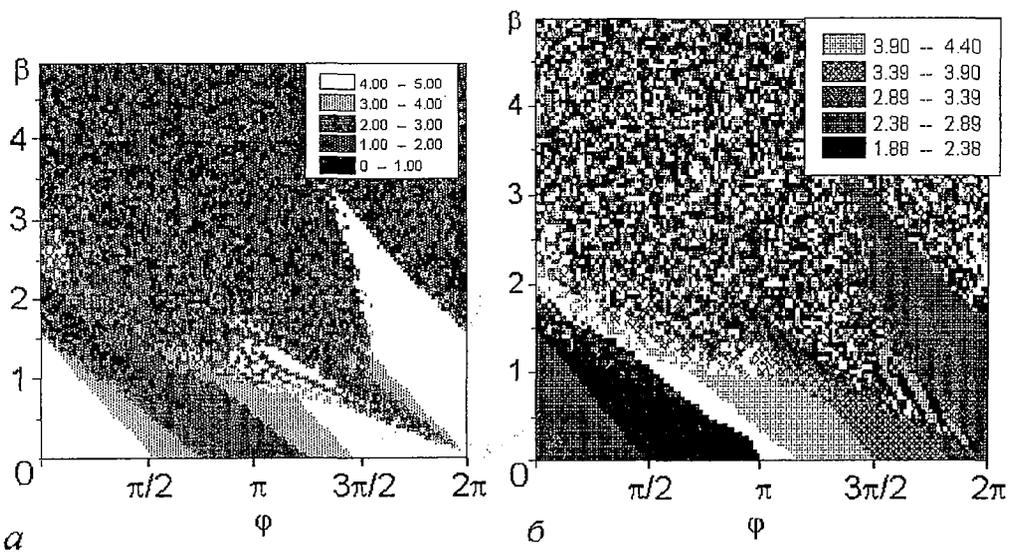


Рис. 3. Топологические карты значений мощности импульсов (а) и разности фаз между импульсом из основного резонатора и его репликой из дополнительного (б)

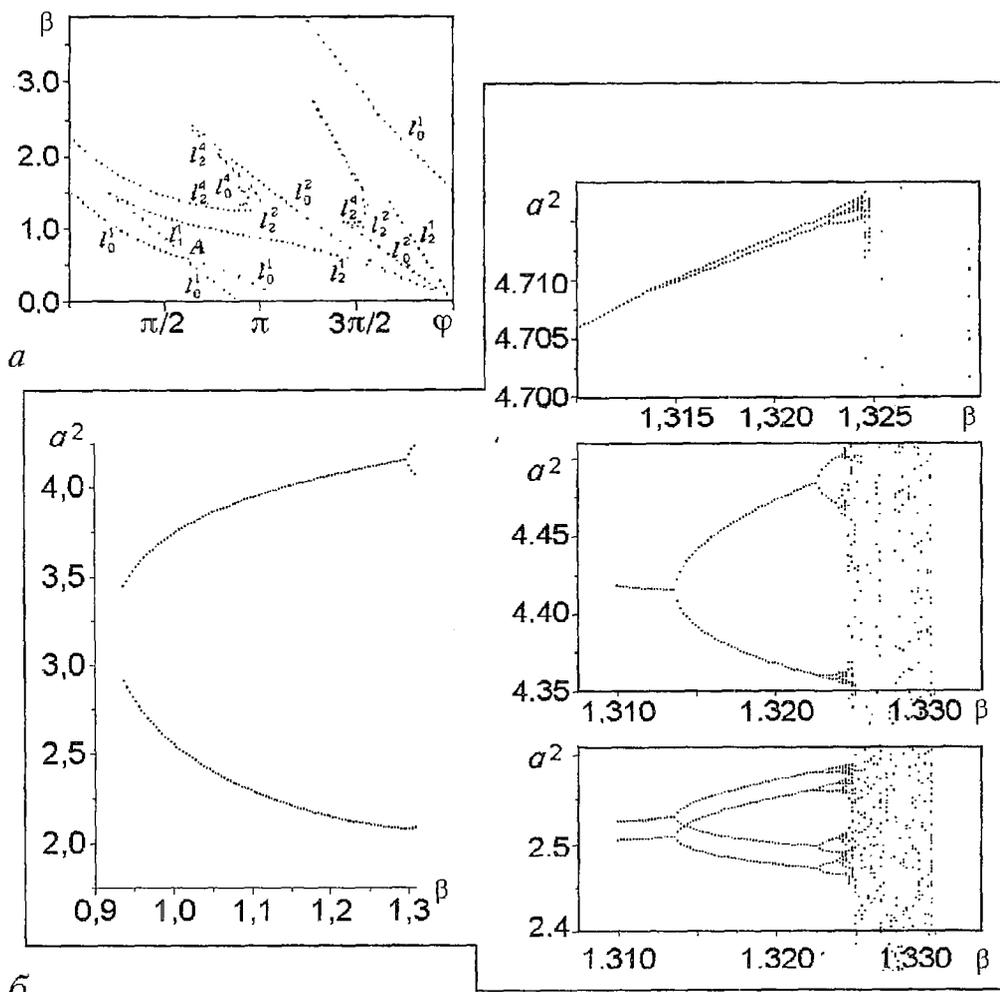


Рис. 4. Карта бифуркаций периодических режимов (а) и участки цепочек удвоения периода (б)

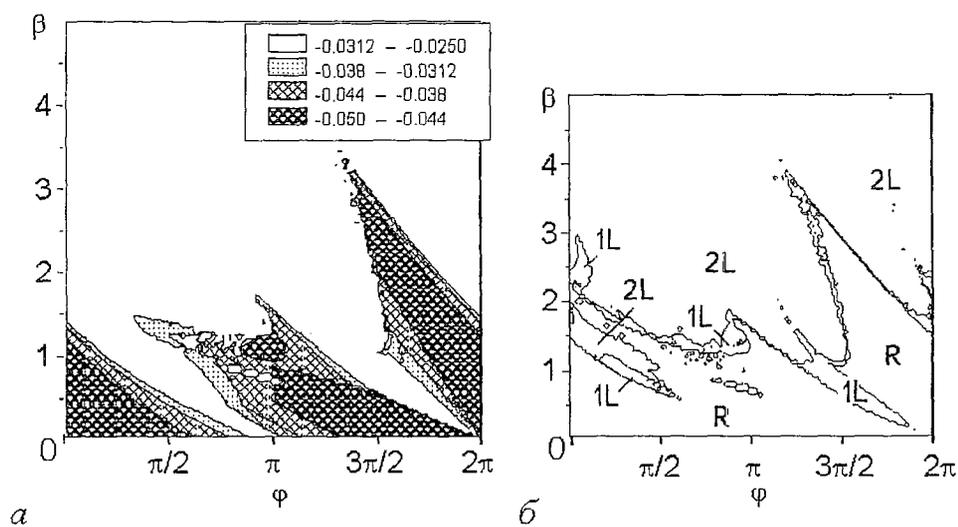


Рис. 5. Топологическая карта значений старшего показателя Ляпунова (а) и сигнатура спектра ляпуновских показателей (б); R (---), 1L(+--), 2L(++-)

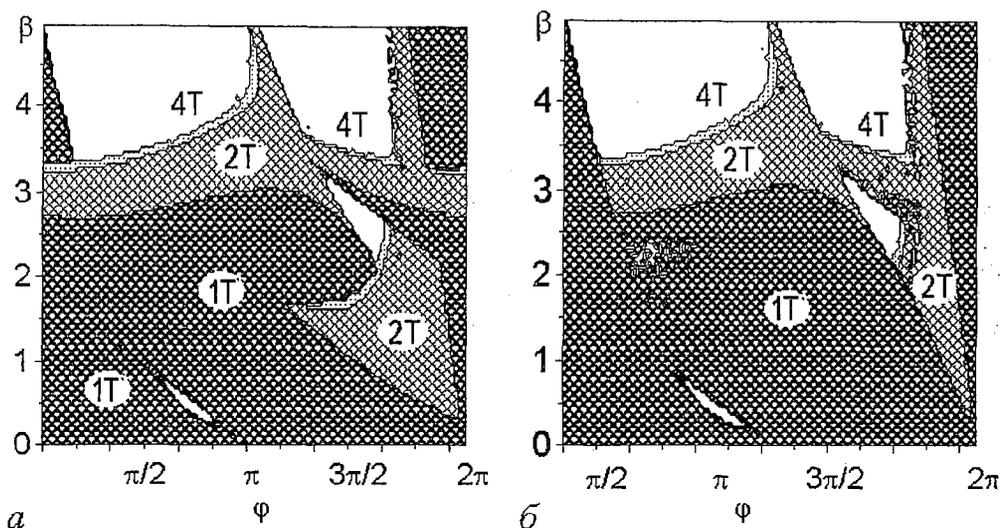


Рис. 6. Демонстрация гистерезиса. Карты динамических режимов рассчитаны для большого значения коэффициента отражения зеркала связи

Трансформация областей периодических режимов, рассчитанных при различных значениях затравочного импульса, слаба. Однако, при значениях поля затравочного импульса, сравнимых со значениями полей импульсов в основном резонаторе, в областях, где наблюдаются цепочки бифуркаций удвоения периода, возникают узкие области существования периодического режима периода 3 (см. рис. 2). При увеличении усиления активной среды мощность генерируемых импульсов возрастает, тогда как области существования периодических режимов сужаются по параметру β .

Исследование трансформации карты динамических режимов при варьировании значения коэффициента отражения зеркала связи r показало, что постепенное уменьшение коэффициента отражения приводит к постепенному разрушению и, наконец, исчезновению областей существования периодических режимов, а постепенное увеличение коэффициента отражения зеркала связи приводит к расширению областей существования периодических режимов и их взаимному перекрытию за счет гистерезиса, что хорошо видно при сравнении карт динамических режимов (рис. 6), рассчитанных соответственно вниз и вверх по параметру ϕ .

Заключение

Исследование нелинейной динамики последовательности импульсов в лазере с дополнительным резонатором показало, что существуют области значений разности оптических длин связанных резонаторов ϕ и значений нелинейного набега фазы в дополнительном резонаторе β , в которых наблюдаются стационарные последовательности импульсов, цепочки удвоений периода (циклы с периодами 2, 4, 8), циклы с периодом 3, а также различные квазипериодические последовательности импульсов. При исследовании характера устойчивости режимов обнаружены переходы к хаосу через каскад удвоений периода повторений импульсов (циклы—2, 4, 8, 16 и т.д.) и через квазипериодические режимы.

Показано, что структура разбиения плоскости параметров (ϕ, β) на области, соответствующие различным режимам, сохраняется при изменении других параметров: коэффициента усиления, коэффициентов отражения зеркала связи и выходного зеркала, коэффициента потерь в резонаторах. Изменение этих

параметров приводит лишь к деформации областей существования режимов: к сжатию, расширению, а также перекрытию областей из-за гистерезиса.

Следует отметить, что с увеличением коэффициента усиления карта динамических режимов сжимается по оси β и переключения между различными режимами происходят при меньших значениях нелинейного набега фаз. Увеличение коэффициента отражения зеркала связи приводит к расширению областей существования периодических режимов и их перекрытию. Уменьшение усиления и коэффициента связи между резонаторами приводит к появлению несвязанных областей, соответствующих отсутствию генерации в лазере.

Так как модель, использованная в работе, предполагает форму импульсов неизменной (прямоугольной), то эффект сжатия импульсов в данной модели не может быть получен. Однако, из эксперимента и качественных оценок известно, что сжатие импульса происходит при значениях разности фаз несколько меньших π [10, 11]. Очевидно, что при этих значениях фазы должен существовать режим генерации стационарной последовательности импульсов. Таким образом, для генерации сверхкоротких импульсов в лазере с аддитивной синхронизацией мод необходимо выбирать его параметры в соответствии с картой динамических режимов.

Для ряда приложений может оказаться полезным использование последовательностей импульсов с периодом 2,4,8,... или с периодом, кратным 3. В этом случае также следует использовать диаграмму динамических режимов, однако, вопрос о форме и длительности импульсов в таких последовательностях остается открытым и должен быть исследован в рамках полной динамической модели, учитывающей динамику формы импульсов [7,11]. Следует также учитывать, что появление режима с периодом 3 требует заметной интенсивности начального импульса, и для его наблюдения в реальной лазерной системе следует начинать со стационарной последовательности, и лишь затем медленно изменять параметры лазера в сторону увеличения нелинейности, изменяя разность длин резонаторов соответственно карте режимов.

Библиографический список

1. Haus H.A., Fujimoto J.G., Ippen E.P. Analytic theory of additive pulse and Kerr lens mode locking // IEEE J. of Quantum Electron. 1992. Vol. 28, № 10. P. 2086.
2. Haus H.A., Fujimoto J.G., Ippen E.P. Structures for additive pulse mode locking // J. Opt. Soc. Am. B. 1991. Vol. 8, № 10. P. 2068.
3. Tamura K., Ippen E.P., Haus H.A., Nelson L.E. 77-fs pulse generation from a stretched-pulse mode-locked all-fiber ring laser // Opt. Lett. 1993. Vol. 18, № 13. P. 1080.
4. Lenz G., Gellermann W., Dougherty D.J., Tamura K., and Ippen E.P. // Optics Letters. 1996. Vol. 21, № 2. P. 137.
5. Tamura K., Doerr C.R., Nelson L.E., Haus H.A., and Ippen E.P. Technique for obtaining high-energy ultrashort pulses from an additive-pulse mode-locked erbium-doped fiber ring laser // Opt. Lett. 1994. Vol. 19, № 1. P. 46.
6. Heinz P., Seilmeier A. Pulsed diode-pumped additive-pulse mode-locked high-peak-power Nd:YLF laser // Opt. Lett. 1996. Vol. 21, № 1. P. 54.
7. Калашиников В.Л., Калоша В.П., Михайлов В.П., Демчук М.И. Самостарт генерации УКИ в твердотельных лазерах с дополнительным резонатором // Квантовая электроника. 1992. Т. 19, № 5. С. 479.
8. Калашиников В.Л., Калоша В.П., Михайлов В.П., Полойко И.Г. Эффективная самосинхронизация мод непрерывных твердотельных лазеров с резонансной нелинейностью в дополнительном резонаторе // Квантовая электроника. 1994. Т. 21, № 4. С. 350.
9. Калашиников В.Л., Калоша В.П., Михайлов В.П., Демчук М.И. Самосинхронизация мод непрерывных твердотельных лазеров с помощью

нелинейного антирезонансного кольца // Квантовая электроника. 1994. Т. 21, № 1. С. 37.

10. Mark J., Liu L.Y., Hall K.L., Haus H.A., Ippen E.P. Femtosecond pulse generation in a laser with nonlinear external resonator // Opt.Lett. 1989. Vol. 14, № 48.

11. Melnikov L.A. Nonlinear dynamics in mode-locked lasers bull // Russian Acad. of Science Suppl. Physics of Vibrations. 1994. Vol. 4, № 21. P. 155.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 9.09. 98
после переработки 8.10.98

ULTRASHORT PULSE-TRAIN INSTABILITIES IN ADDITIVE-PULSE MODE-LOCKED LASERS

L.A. Melnikov, E.V. Bekker

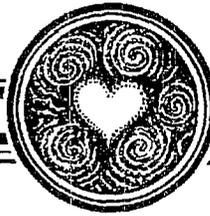
Numerical studies of nonlinear dynamics of pulse trains in an additive-pulse mode-locked laser are presented including diagrams of dynamical regimes, Lyapunov's exponents and bifurcation diagrams. Period doubling sequences, period-3 regimes, hysteresis, and hyperchaos were observed. Regions of high-energy pulse generation and transformations of the period regimes regions with variation of values of coupling mirror reflection are found.



Мельников Леонид Аркадьевич – родился в 1949 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1971). С 1978 года – кандидат, с 1992 года – доктор физико-математических наук. Профессор кафедры оптики с 1992 года. С 1997 года заведующий кафедрой лазерной и компьютерной физики. Область научных интересов: физика лазеров, лазерная спектроскопия, лазерные и волоконно-оптические измерительные системы, оптическая гироскопия, нелинейная динамика лазеров и оптических систем, нелинейное распространение световых пучков и импульсов в волноводных и резонансных средах, лазеры сверхкоротких импульсов, поперечная нелинейная оптика. Автор более чем 100 научных публикаций, член Оптического общества Америки, Международного общества по оптической технике.



Беккер Элла Валерьевна – родилась в 1971 году в Энгельсе, Саратовской области. Окончила Саратовский государственный университет им.Чернышевского (1997), аспирантка СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика лазеров, лазеры сверхкоротких импульсов, нелинейное распространение импульсов в оптических волноводах.



ФОРМИРОВАНИЕ СТАЛАГМИТОПОДОБНЫХ СТРУКТУР В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Д.А. Усанов, Ал.В. Скрипаль, Ан.В. Скрипаль

Приведены результаты экспериментальных исследований зависимости формы поверхности магнитной жидкости от скорости нарастания магнитного поля, приложенного перпендикулярно к ее поверхности. Сделан вывод о взаимосвязи числа сталагмитоподобных структур, количества пучностей собственных колебаний магнитной жидкости и характерных времен нарастания внешнего магнитного поля.

Как известно, в ортогональном магнитном поле поверхность магнитной жидкости может приобретать вид структуры из острых пиков [1,2]. Считается, что картина поверхности определяется величиной напряженности магнитного поля [3,4]. Нами исследовался характер поверхности магнитной жидкости в зависимости от скорости нарастания магнитного поля, приложенного перпендикулярно к ее поверхности.

Экспериментальные исследования проводились на установке, схема которой приведена на рис. 1. Медная кювета цилиндрической формы 1, заполненная магнитной жидкостью 2 на основе керосина с магнетитовыми частицами, стабилизированными олеиновой кислотой ($M_d=4800$ Гс – намагниченность насыщения твердого магнетика, $\phi=0.25$ – объемная доля твердой фазы магнитной

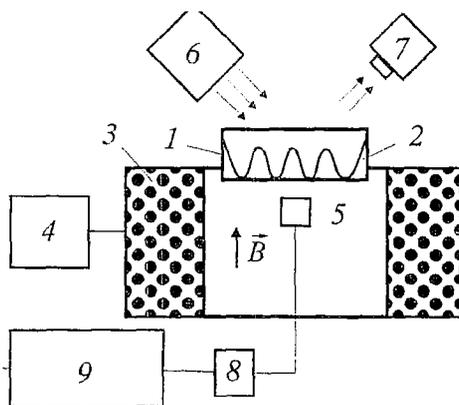


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

жидкости, $\epsilon=3$ – диэлектрическая проницаемость), помещалась в ортогональное магнитное поле, образуемое катушками электромагнита 3, подключенного к источнику постоянного напряжения 4. Скорость нарастания магнитного поля измерялась с использованием датчика Холла 5. Поверхность магнитной жидкости освещалась волоконно-оптическим осветителем 6 и регистрировалась фотоаппаратом 7. Сигналы, характеризующие нарастание э.д.с. магнитного поля в цепи датчика Холла, подавались на аналого-цифровой преобразователь 8 компьютера 9. При приложении к магнитной жидкости магнитного поля выше некоторого критического значения

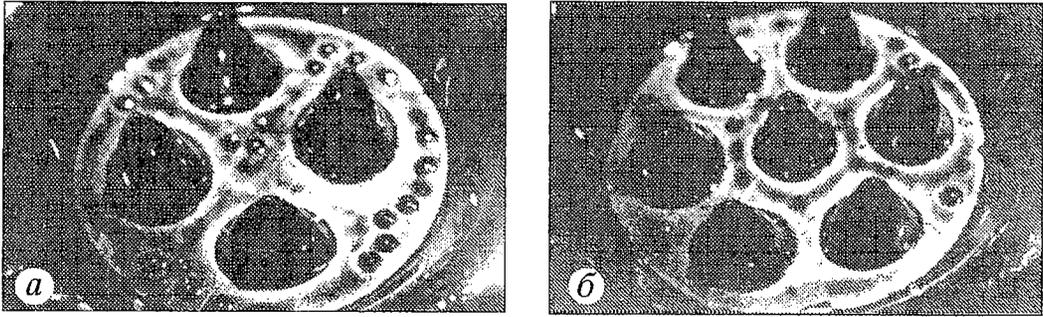


Рис. 2. Изображение структуры поверхности магнитной жидкости для различных значений времен нарастания магнитного поля: *a* – 170 мс, *б* – 100 мс

на поверхности магнитной жидкости формировались сталагмитоподобные структуры, причем с ростом магнитного поля наблюдался процесс полного перехода магнитной жидкости в эти структуры.

В результате проведенных исследований была установлена взаимосвязь числа образующихся структур со скоростью нарастания магнитного поля. На рис. 2 приведены изображения структуры поверхности магнитной жидкости полученные при различных скоростях нарастания магнитного поля. Как видно из этих изображений, наблюдается образование различного количества (на рис. 2, *a* – четырех, а на рис. 2, *б* – семи) сталагмитоподобных структур для различных скоростей нарастания магнитного поля. На рис. 3 приведены сигналы, характеризующие нарастание магнитного поля, регистрируемые датчиком Холла, при которых были получены сталагмитоподобные структуры, приведенные на рис. 2. Как следует из рис. 3, времена нарастания магнитного поля составляли 170 и 100 мс, соответственно для картин поверхностей магнитной жидкости, приведенных на рис. 2, *a*, *б*. При дальнейшем уменьшении времени нарастания магнитного поля наблюдалось увеличение числа образующихся структур. Максимальное наблюдавшееся нами при описанных условиях эксперимента число структур составляло 14.

Для объяснения наблюдаемой картины формирования сталагмитоподобных структур нами было сделано предположение о взаимосвязи количества зародышей таких структур со временем нарастания магнитного поля. В зависимости от времени нарастания внешнего воздействия в жидкости, помещенной в кювету, могут возникать поперечные собственные колебания, характеризующиеся определенной картиной узлов и пучностей на поверхности магнитной жидкости. Для оценки собственных частот колебаний жидкости в полости прямоугольного сечения используем выражение, приведенное в работе [5]:

$$\chi_n = [(n\pi g/l)\text{th}(n\pi h/l)]^{1/2},$$

где h – высота столба магнитной жидкости, l – линейный размер кюветы, $n=1, 2, 3, \dots$, g – ускорение свободного падения. Для используемой в наших экспериментах магнитной жидкости с параметрами $l=3$ см и $h=0.5$ см значения собственных частот с $n=2$ и $n=3$ составили приблизительно 6.4 и 8.5 Гц, период колебаний которых равен 157 и 118 мс, что соответствует значениям приведенных выше времен нарастания магнитного поля. Собственные частоты с $n=2$ и $n=3$ характеризуются наличием соответственно двух и трех пучностей колебаний. На приведенных на рис. 2 фотографиях магнитной жидкости

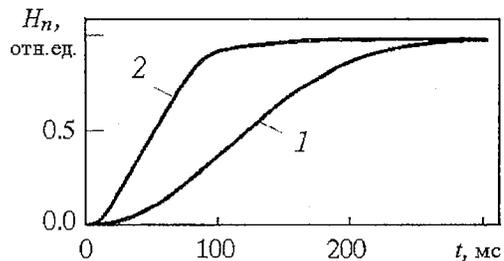


Рис. 3. Зависимость напряженности нормированного магнитного поля H_n при его включении от времени t для различных структур поверхностей, приведенных на рис. 2, *a* (1) и рис. 2, *б* (2)

также наблюдается возникновение характерных для времен нарастания магнитного поля 157 и 118 мс соответственно двух и трех сталагмитоподобных структур вдоль оси координат, проходящей через центр кюветы.

Таким образом, можно считать установленным, что в зависимости от времени нарастания магнитного поля в магнитной жидкости возбуждаются различные типы собственных колебаний, которые формируют на поверхности магнитной жидкости характерную для соответствующего типа картину. То есть, можно предположить, что воздействие на магнитную жидкость внешнего магнитного поля с временами нарастания, близкими к периодам собственных колебаний жидкости, вызывает возбуждение соответствующей собственной частоты и появление характерной для нее картины поверхности.

Библиографический список

1. Berkovsky V.M., Bashtovoi V. // IEEE Trans. Magnetics. 1980. Vol. MAG-16. P. 288.
2. Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. Рига: Зинанте, 1989. 386 с.
3. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 356 с.
4. Bacri J.-C., Salin D. // J.Physique-Letters. 1983. Vol. 44. P. L-415.
5. Мусеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 10.09.98
после переработки 11.11.98

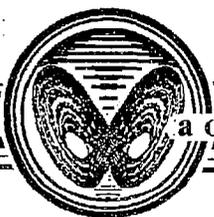
FORMATION OF STALAGMITE STRUCTURES IN MAGNETIC FLUID DURING SWITCHING ON ORTHOGONAL MAGNETIC FIELD

D.A. Usanov, A.I. Skripal, An.V. Skripal

The results of experimental researches of dependence of the surface form of magnetic fluid on the velocity of increase of magnetic field affixed perpendicularly on its surface are reduced. The conclusion about correlation of stalagmite structures number, amount loops of normal mode of magnetic fluid and characteristic times of exterior magnetic field increase is made.



Скрипаль Анатолий Владимирович – родился в 1960 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1982). С 1998 года доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твердого тела Саратовского госуниверситета. Автор 90 научных трудов в области когерентной оптики, вибродиагностики, квантовой электроники, физики ферромагнитных структур.



ЭНТРОПИЯ ФИЛЬТРОВАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ*

Е.Л. Козленко

При прохождении через линейные инерционные системы (фильтры) хаотические сигналы искажаются, что отражается на оценках их характеристик. Одной из таких характеристик, используемой обычно в качестве меры сложности различных процессов, является энтропия. Настоящая работа посвящена проблемам оценки энтропии хаотических реализаций, прошедших через линейные фильтры. Посредством численного моделирования исследованы системы, содержащие генераторы хаотических колебаний и линейные фильтры первого порядка и высокого порядка.

Введение

Развитие методов количественной оценки сложности колебаний динамической природы — одна из центральных проблем в области диагностики динамических систем по экспериментальным данным. Особую актуальность эта задача приобретает в случае, когда динамическая система неизвестна, а для анализа доступна временная реализация одной переменной состояния. В такой ситуации стало традиционным восстановление аттрактора системы методом временных задержек [1] и определение характеристик по восстановленному множеству. Среди различных количественных характеристик наиболее распространены фрактальная размерность, спектр ляпуновских характеристических показателей и энтропия. При определении этих характеристик по восстановленному множеству исследователь может столкнуться с рядом трудностей. В частности, данные могут быть предварительно обработаны, что может привести к изменению восстановленного множества, а значит наложить отпечаток на определяемые характеристики. Например, экспериментально полученные данные часто фильтруют, чтобы избавиться от шума. Если фильтр линейный, он не приводит к появлению новых частотных компонент, а значит, в принципе не может усложнить сигнал. В то же время известен ряд работ, где показывается, что хаотические колебания, прошедшие через линейные фильтры, искажаются, их восстановленные аттракторы усложняются, а фрактальная размерность возрастает (см., например, [2–4]), что может привести к ошибочным суждениям относительно сложности исследуемого процесса.

Наряду с размерностью широко используется такая характеристика, как энтропия. В настоящей работе рассматривается проблема оценки энтропии по скалярной временной реализации в применении к хаотическим сигналам, прошедшим через линейные фильтры. Попутно используются известные результаты по преобразованию размерности при фильтрации вследствие тесной связи этих характеристик.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99–02–16016)

1. Теоретические замечания и экспериментальные факты

Интерес к фильтрации хаотических колебаний пробудился, когда было обнаружено, что даже простейший фильтр низких частот приводит к завышенным оценкам фрактальной размерности [2]. К тому времени размерность уже прижилась как инструмент, с помощью которого можно оценить сложность аттрактора, а значит, и сложность самих колебаний. В такой ситуации необходимо либо допустить, что линейное преобразование может усложнить колебания (что вызывает недоумение), либо усомниться в способности размерности адекватно оценивать сложность по крайней мере в отдельных исключительных случаях.

С другой стороны, в теории информации известна такая характеристика случайных процессов, как энтропия (впоследствии она была распространена на динамические системы). Существует множество статистических (вероятностных) подходов к определению энтропии, но качественно энтропия является мерой средней непредсказуемости (неопределенности) информационной последовательности. Для периодических и квазипериодических сигналов энтропия равна нулю – полная предсказуемость, для шума бесконечности – полная непредсказуемость, для хаотических колебаний – энтропия есть конечное положительное число. Чем больше энтропия, тем сложнее, то есть ближе к шуму, сигнал.

Отсюда ясно, что энтропия может быть использована для оценки сложности колебаний, порождаемых динамической системой.

Из теории информации известна следующая теорема [5]:

Определение. Пусть x – случайная величина. Тогда $f(x)$ – невырожденное преобразование, если существует обратное преобразование $f^{-1}(f(x))=x$ и может быть установлено взаимно однозначное соответствие между x и $f(x)$.

Теорема. Пусть x – случайная величина, $H(x)$ – энтропия x , $f(x)$ – невырожденное преобразование. Тогда $H(x)=H(f(x))$.

Очевидно, линейный фильтр является невырожденным преобразованием (всегда существует обратное преобразование) и, следовательно, энтропия сигнала при фильтрации должна оставаться неизменной. Кроме того интуитивно понятно, что линейная система не добавляет и не уничтожает информацию, содержащуюся в сигнале, а значит не должна усложнить сигнал. В то же время, как уже упоминалось ранее, данные по линейной фильтрации хаотических колебаний свидетельствуют об усложнении аттрактора и об увеличении его фрактальной размерности [7–9], которая часто используется как мера сложности колебаний [6]. Возможно ли разрешить это противоречие?

2. Восстановление аттрактора динамической системы по временной реализации. Методика определения корреляционной размерности и энтропии

При исследовании динамических систем, особенно экспериментальном, зачастую складывается ситуация, когда для анализа доступна единственная переменная состояния. В таких случаях обычно осуществляется восстановление аттрактора динамической системы методом временных задержек [1].

Допустим имеется временная реализация исследуемого процесса, представленная в виде дискретизованной последовательности $\{x(t_k)\}_{k=1}^{N_0}$. Здесь t_k – дискретное время: $t_k=kt_s$, где $k=1, \dots, N_0$, t_s – шаг дискретизации, то есть расстояние во времени между соседними отсчетами, N_0 – число элементов последовательности. Реконструированный аттрактор в n -мерном псевдофазовом пространстве задается последовательностью векторов состояний

$$x_k = \mathbf{x}(t_k) = \{x(t_k), x(t_k + \tau), \dots, x(t_k + \tau(n-1))\}, \quad (1)$$

где τ – время восстановления в шагах дискретизации (целое число), $k=1, \dots, N$, N – число точек аттрактора. Нетрудно видеть, что $N=N_0-\tau(n-1)$.

Теорема, доказанная Такенсом, утверждает, что восстановленный таким образом аттрактор топологически эквивалентен истинному аттрактору динамической системы. Отсюда следует, что характеристики, определяемые по восстановленному множеству, должны совпадать с характеристиками, определяемыми по полному потоку (аттрактору в истинном фазовом пространстве).

Из всех количественных характеристик следует выделить размерность и энтропию как наиболее распространенные. В настоящее время наибольшее развитие получил метод расчета корреляционной размерности и энтропии, предложенный Грассбергером и Прокаччиа [10]. В его основе лежит понятие корреляционного интеграла, который математически строго определяется выражением

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=1}^N (1/N) \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad (2)$$

где N – число точек аттрактора, ε – пространственный масштаб или масштаб наблюдения [11], Θ – функция Хэвисайда ($\Theta(x)=0$, если $x < 0$; $\Theta(x)=1$, если $x \geq 0$), $\|x_i - x_j\|$ – расстояние между точками аттрактора x_i и x_j , определяемое в соответствии с какой-либо нормой. В данной работе будет использоваться так называемая максимальная норма

$$\|x_i - x_j\| = \max_{k=0, \dots, n-1} |x(t_i + \tau k) - x(t_j + \tau k)|. \quad (3)$$

Запись (3) означает, что в качестве расстояния между точками в псевдофазовом пространстве размерности n выбирается максимальное из покоординатных расстояний.

Разумеется, классическая форма корреляционного интеграла (2) непригодна для практического использования. Во-первых, предел $N \rightarrow \infty$ физически недостижим, а во-вторых, расчет всех расстояний между точками аттрактора требует значительного времени, если N достаточно велико. Поэтому обычно используется метод «редуцированного корреляционного интеграла». При этом M точек выбираются опорными и определяются расстояния от каждой из них до всех остальных N точек аттрактора, то есть можно записать

$$C(\varepsilon) \approx (1/M) \sum_{i=1}^M (1/N) \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|). \quad (4)$$

Строго говоря, такой подход применим только для однородных аттракторов, но практика показывает, что для выбранных модельных систем он вполне оправдан.

Корреляционная размерность D_c определяется как угол наклона корреляционной функции $C(\varepsilon)$, представленной в двойных логарифмических координатах ($\log C(\varepsilon)$, $\log \varepsilon$) при достаточно малых ε (теоретически при $\varepsilon \rightarrow 0$). Такой подход справедлив только в случае, когда корреляционный интеграл ведет себя как показательная функция, то есть $C(\varepsilon) = \varepsilon^D$, где D и будет искомой размерностью.

В случае, когда упомянутое соотношение подобия не выполняется, стало принятым определять размерность по локальным наклонам корреляционного интеграла и представлять как функцию масштаба наблюдения [11]

$$D_c(\varepsilon) = [\log(C(\varepsilon)/C(\varepsilon + \delta))]/\log(\varepsilon/(\varepsilon + \delta)). \quad (5)$$

Аргумент функции размерности – пространственный масштаб ε – обычно безразмерная величина, нормированная на максимальный размер аттрактора ε_{\max} , но более удобно перейти к масштабу наблюдения, выраженному в децибелах [11]

$$E = 20 \log_{10}(\varepsilon/\varepsilon_{\max}). \quad (6)$$

На практике достоверные значения размерности лежат в некотором эффективном диапазоне $[E_{\min}, E_{\max}]$, ограниченном со стороны больших E областью краевых эффектов, а со стороны малых E областью существенного недостатка точек для корректного определения размерности.

Для определения корреляционной энтропии K_c необходимо получить серию корреляционных интегралов для различных размерностей пространства вложения. Для заданного разрешения ϵ^* и размерности вложения n энтропия находится из соотношения

$$K_c(\epsilon^*, n) = [1/(nt_s \tau)] \ln(C_n^2(\epsilon^*)/C_{n+1}^2(\epsilon^*)). \quad (7)$$

При выводе значений энтропии лучше вместо размерности вложения использовать величину, называемую окном восстановления $w=tn$, тогда значения энтропии, полученные для различных τ и n , ложатся приблизительно на одну кривую. Для отображений эти величины совпадают, так как $\tau=1$.

Энтропия как число определяется на основе анализа асимптотического поведения функции $K_c(\epsilon^*, n)$ при больших реально достижимых n . Для хаотических сигналов энтропия должна испытывать насыщение, то есть стремиться к некоторому положительному числу. Отсутствие такого поведения свидетельствует скорее всего о недостатке точек аттрактора для корректной оценки корреляционного интеграла. Для неоднородных аттракторов кривые, полученные для разных уровней разрешения, будут отличаться, и тогда результаты необходимо представлять в виде зависимости асимптотического значения энтропии от масштаба наблюдения. Отметим также, что уровень разрешения ϵ^* (или E^* , дБ) необходимо задавать в эффективном диапазоне масштабов наблюдения.

3. Информационная (блочная) энтропия

Энтропия, о которой пойдет речь, более популярна в области структурного анализа информационных последовательностей, нежели, чем в нелинейной динамике. Понятие «информационная» энтропия связано с шенноновскими представлениями об информации и такая энтропия является характеристикой произвольной информационной последовательности. В тоже время этот метод, в отличие от корреляционного, значительно нагляднее отражает физический смысл энтропии как меры непредсказуемости состояния системы во времени. Поэтому одной из задач работы было установление соответствия между двумя методами и придание наглядного смысла корреляционной энтропии.

Поясним смысл понятия «блочная энтропия». Методика определения блочной энтропии (см., например, [12]) достаточно проста. Допустим имеется

последовательность данных $\{x_k\}_{k=1}^N$, где величина x_k принимает дискретные значения в диапазоне $[0, q-1]$, где q – целое число, определяющее количество уровней квантования. Каждый элемент из этого набора данных еще называют символом. Далее производится группировка символов в слова (блоки) длины n (n -words) и для всех различных слов подсчитывается вероятность, с которой они встречаются в данной последовательности. Формирование слов проводится со сдвигом на один символ, поэтому такие слова называют перекрывающимися (overlapping words). При этом два слова считаются одинаковыми, если они посимвольно совпадают. Если $P_i^{(n)}$ – вероятность появления i -го слова длины n , то величина

$$H_n = - \sum_i P_i^{(n)} \ln P_i^{(n)} \quad (8)$$

будет определять среднее количество информации, содержащееся в словах длины n . Следует отметить, что логарифм может быть любой, но в данной работе везде будет рассматриваться натуральный логарифм. Суммирование проводится по так называемым эффективным словам (effective words), то есть словам, реально встретившимся в последовательности. Вероятность $P_i^{(n)}$ на практике аппроксимируется относительной частотой появления f_i

$$P_i^{(n)} \approx f_i = k_i / N_w, \quad (9)$$

где k_i – число появлений i -го слова, N_w – всего слов в последовательности.

Величина

$$h_n = H_{n+1} - H_n \quad (10)$$

называется *дифференциальной блочной энтропией* (differential n -word entropy) и характеризует среднюю неопределенность встречи символа $n+1$, если известны n предыдущих.

Предел

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \quad (11)$$

носит название *энтропия источника*.

Величина h_n ограничена значением $\ln q$ сверху и нулем снизу. Это означает, что энтропия любого источника будет лежать в этом диапазоне, а именно: для периодических последовательностей $h=0$, для белого шума $h=\ln q$, для сложных динамических процессов $0 < h < \ln q$. Логично предположить, что чем больше значение энтропии, тем сложнее (ближе к шумовому) сигнал.

Отсюда видно, что динамическую систему можно рассматривать как источник информации и использовать блочную энтропию как количественную характеристику сложности колебаний.

Можно показать, что в случае определения блочной энтропии по скалярной временной реализации процесс формирования слов длины n аналогичен восстановлению траектории в псевдофазовом пространстве размерности n . Количество уровней квантования q определяет размер ячейки, на которые будет разбито псевдофазовое пространство, что также соответствует масштабу наблюдения (уровню разрешения аттрактора) в алгоритме корреляционной энтропии. Остается вопрос относительно постоянной времени восстановления. Нетрудно видеть, что случай, когда символы набираются в слово подряд, соответствует восстановлению с $\tau=1$. Такое время восстановления характерно в основном для каскадов (отображений). В случае непрерывных во времени сигналов (потоков) необходимо набирать символы в слова не подряд, а через интервалы в соответствии с величиной τ , которая, как правило, определяется шагом дискретизации.

4. Фильтр первого порядка

Исследование преобразования энтропии хаотических сигналов при фильтрации разумно начать с рассмотрения простейших фильтров, например, простейшего фильтра низких частот первого порядка и типичных генераторов хаотических колебаний.

В качестве дискретной во времени системы (каскада) возьмем отображение Хенона [14], дополненное цифровым фильтром низких частот,

$$\begin{aligned} x_n &= 1 - \lambda x_{n-1}^2 + y_{n-1}, \\ y_n &= b x_{n-1}, \\ z_n &= \alpha z_{n-1} + (1-\alpha)x_n, \end{aligned} \quad (12)$$

в качестве потока – систему Ресслера [14] с простейшим потоковым фильтром низких частот

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + z, \\ \dot{y} &= x + e y, \\ \dot{z} &= f - \mu z + x z, \\ \dot{v} &= -\eta v + \eta x. \end{aligned} \quad (13)$$

Механизм усложнения хаотического аттрактора в таких фильтрах подробно

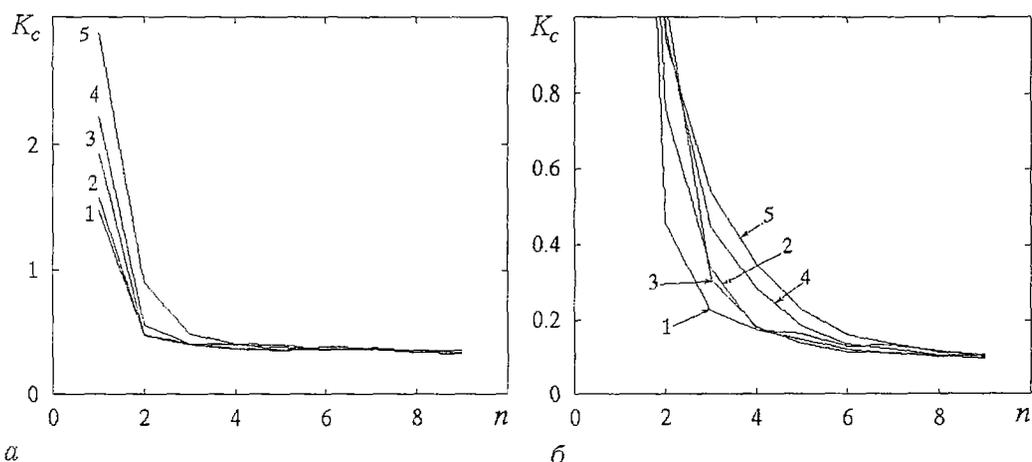


Рис. 1. Графики зависимости $K_c(n)$, построенные *а* – для каскада (отображение Хенона + ФНЧ первого порядка) при различных значениях частоты среза α : 1 – 0, 2 – 0.1, 3 – 0.3, 4 – 0.5, 5 – 0.8; *б* – для потока (система Ресслера + ФНЧ первого порядка) при η , равном: 1 – ∞ , 2 – 1.0, 3 – 0.5, 4 – 0.1, 5 – 0.05. Параметры для первой системы: $N=10^5$, $M=10^4$, $\tau=1$, $t_s=1$, $E^*=-42$ дБ; для второй системы: $N=10^5$, $M=10^4$, $\tau=25$, $t_s=0.04$, $E^*=-42$ дБ

изучен [7–9]. Он связан с тем, что фрактальная структура, заложенная в хаотическом сигнале, «раскрывается» фильтром в новом направлении (измерении) и в итоге образуется новая, более сложная фрактальная структура, в связи с чем и возрастает размерность. При этом чем меньше частота среза фильтра, определяемая коэффициентами α и η , тем сильнее возрастает размерность. В случае фильтров первого порядка размерность увеличивается на единицу (в случае фильтров высокого порядка на величину, равную порядку фильтра) [8]. Любопытно, что аналогичные работы по энтропии просто отсутствуют и было бы неплохо восполнить этот пробел.

Рассмотрим, каким образом изменение частоты среза фильтра низких частот влияет на энтропию хаотического сигнала, используя вначале алгоритм корреляционной энтропии, рассмотренный в разделе 2.

Серия зависимостей $K_c(n)$, построенных при различных частотах среза фильтров, представлена для системы (12) на рис. 1, *а*. и для системы (13) на рис. 1, *б*.

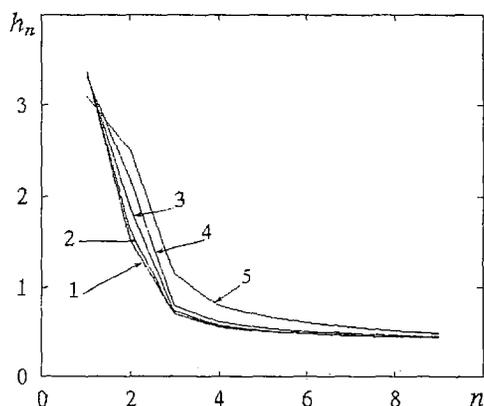


Рис. 2. Графики зависимости информационной энтропии h_n для каскада (отображение Хенона + ФНЧ первого порядка) при различных значениях частоты среза фильтра α : 1 – 0, 2 – 0.1, 3 – 0.3, 4 – 0.5, 5 – 0.8. Параметры: $N=10^6$, $q=32$ (соответствует $E^*=-30$ дБ)

Налицо идентичное поведение кривых в случае дискретных и непрерывных во времени хаотических сигналов. Во-первых, наблюдается увеличение (скачок) энтропии в области малых размерностей вложения, причем величина скачка обратно пропорциональна частоте среза фильтра. Во-вторых, для всех кривых характерно асимптотическое стремление к значению энтропии нефильтрованного сигнала по мере увеличения размерности вложения. Такое поведение связано с «недовложением» аттрактора фильтрованного сигнала, например в случае, когда размерность вложения меньше, чем размерность аттрактора. Такое недовложение в свою очередь связано с тем, что размерность аттрактора фильтрованных хаотических колебаний возросла и аттрактору становится «тесно» в рамках пространства прежней размерности.

В случае больших частот среза (слабая фильтрация) отмечается резкое приближение к значению энтропии нефильтрованного сигнала начиная с $n=3$ для отображения Хенона и $n=4$ для системы Ресслера. В случае сильной фильтрации характерно плавное спадание, которое может быть связано с тем, что характер преобразования фрактальной структуры становится более сложным.

Аналогичные (качественно похожие) результаты получаются и для информационной энтропии. Результаты для системы (12) приведены на рис. 2.

5. Фильтры высокого порядка

К исследованию преобразования энтропии в фильтрах высокого порядка разумно подойти так, как это было сделано в работе [8]. А именно, представим фильтр порядка p в виде цепочки из p фильтров первого порядка и будем следить за изменением характеристик хаотических колебаний последовательно по мере их прохождения через цепочку. В работе [8] на примере логистического отображения качественно было показано, как изменяется аттрактор в такой системе.

На основании анализа внешнего вида аттрактора и сечений Пуанкаре было установлено, что предельное повышение размерности аттрактора ограничено порядком фильтра, а стремление к предельному значению размерности определяется коэффициентами фильтра. Другими словами, фильтр создает потенциальную возможность для «раскрытия» фрактальной структуры, заложенной в хаотическом сигнале, в новых направлениях, число которых определяется порядком фильтра.

Возрастание размерности означает увеличение угла наклона корреляционного интеграла, полученного в случае достаточной размерности вложения n^* . Если размерность вложения будет меньше, чем n^* , то реализуется так называемая ситуация «недовложения» аттрактора, которая приводит к пересечению траекторий и как следствие к неверной оценке размерности. Ясно, что оцениваемая размерность множества при недовложении будет стремиться снизу к значению размерности вложения, а значит, будет приблизительно одинакова для разных множеств.

Таким образом, если при недовложении корреляционный интеграл останется неизменным, а при достаточном вложении увеличит наклон, то расстояния между корреляционными интегралами в области $n < n^*$ неизбежно увеличатся, что и отражается в завышенных оценках энтропии. Насколько будет завышена энтропия, определяется коэффициентами фильтра, так же как и в случае фильтра первого порядка. Начиная с n^* (при обеспечении достаточного вложения) энтропия стремится к «нефильтрованному» значению.

Проиллюстрируем вышеописанные эффекты на примере динамических систем, рассмотренных в разделе 4, с добавленными к ним цепочками фильтров первого порядка. Рассмотрим систему, состоящую из отображения Хенона и цепочки рекурсивных цифровых фильтров первого порядка вида (12). На рис. 3, а представлена серия графиков зависимостей $K_c(n)$, построенных для нефильтрованного сигнала и сигналов на выходе первого, второго и третьего фильтров (для всех фильтров цепочки $\alpha=0.8$, что соответствует достаточно сильной фильтрации). Заметно, что увеличение порядка фильтра приводит к сдвигу области сходимости в сторону больших значений размерности пространства вложения. С добавлением каждого фильтра график сдвигается приблизительно на единицу, что отражает предельное увеличение размерности аттрактора [8], а значит, и необходимой размерности вложения на единицу в случае фильтра первого порядка. Качественно похожее поведение кривых $K_c(n)$ наблюдается и в случае потоковой системы, состоящей из системы Ресслера и цепочки фильтров первого порядка (рис. 3, б). Перепутывание кривых при малых значениях n (наблюдаемое, например, на рис. 2 и рис. 3, а) объясняется большим числом пересечений траекторий аттрактора при «недовложении». С увеличением n аттрактор как бы «распрямляется», число пересечений уменьшается и динамика

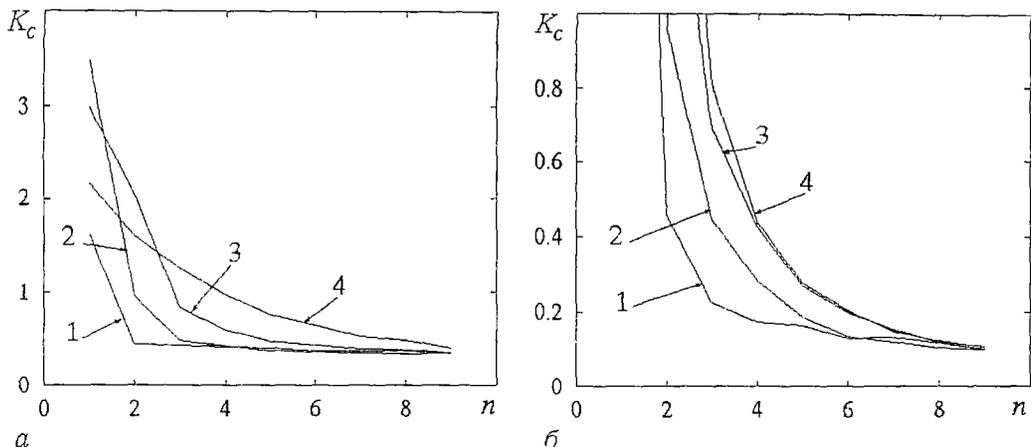


Рис. 3. Графики зависимости $K_c(n)$, построенные: а – для каскада (отображение Хенона + цепочка из p фильтров первого порядка) и б – для потока (система Ресслера + цепочка из p фильтров первого порядка) при p : 1 – 0, 2 – 1, – 2, 3 – 3. Параметры для первой системы: $\alpha=0.8$ для всех фильтров цепочки, $N=10^5$, $M=10^4$, $\tau=1$, $t_s=1$, $E^*=-48$ дБ; для второй системы: $\eta=0.1$ для всех фильтров цепочки, $N=10^5$, $M=10^4$, $\tau=25$, $t_s=0.04$, $E^*=-42$ дБ

траекторий на аттракторе становится все более различимой и в конечном итоге позволяет извлечь достоверную информацию о динамике исследуемой системы, что отражает насыщение энтропии в области больших n .

Выводы

Проведенные исследования позволили выявить следующие закономерности оценок энтропии хаотических реализаций при их фильтрации.

1. Энтропия как асимптотическая величина ($n \rightarrow \infty$) остается неизменной, что соответствует теории и в простейших случаях хорошо демонстрируется на численном эксперименте.

2. Характер сходимости энтропии хаотического сигнала к асимптотическому значению определяется параметрами фильтра следующим образом. Функция $K_c(n)$, определяющая энтропию, сдвигается в область больших n . Величина сдвига $K_c(n)$ в пределе сильной фильтрации равна порядку фильтра (аналогично предельному увеличению размерности в фильтрах высокого порядка [8]).

3. Анализ информационной энтропии позволяет придать результатам «информационное» толкование. Известно, что для хаотического сигнала характерно насыщение энтропии как функции длины слова n на некотором положительном уровне. Это говорит о том, что состояние динамической системы глобально непредсказуемо (сигнал нигде не повторяет себя), но локально, начиная с некоторой длины слова мы можем с определенной точностью предсказать следующее состояние системы. Фильтрация приводит к такому перераспределению информации между словами различной длины, что короткие слова создают впечатление о большей непредсказуемости (случайности) системы, в то время как анализ более длинных слов позволяет извлечь информацию о динамике исходной системы. Другими словами, фильтр определенным образом маскирует динамическую систему, генерирующую хаотический сигнал, и неудивительно, что для того, чтобы добраться до ее «истинного лица» необходимо анализировать информацию, содержащуюся в более длинных словах, составленных из элементов последовательности.

Остается добавить, что в сложных ситуациях, например, в случае высокоразмерного хаоса и фильтров высокого порядка могут быть получены неверные оценки энтропии по причине недостаточной длины реализации для обеспечения необходимого разрешения (E^*) и размерности вложения (n^*).

Выражаю благодарность А.А.Кипчатову за неоценимую помощь и внимание к работе, А.Б. Нейману за ценные идеи и предоставленную литературу по информационной энтропии, а также коллегам за интересные дискуссии.

Библиографический список

1. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics* / Ed. D.A.Rand, L.-S.Young. Berlin: Springer, 1981. P. 366.
2. *Badii R., Politi A.* Strange attractors: Estimating the complexity of chaotic signals // *Proc. of Workshop Instabilities and Chaos in Quantum Optics II* // New York: Plenum, 1988. P. 335.
3. *Badii R., Broggi G., Derighetti B., Ravani M., Ciliberto S.* Dimension Increase in Filtered Chaotic Signals // *Phys.Rev.Lett.* 1988. Vol. 11. P. 979.
4. *Mitschke F., Moller M., Lange W.* Measuring Filtered Chaotic Signals // *Phys.Rev.A.* 1988. Vol. 11. P. 4518.
5. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. М:Сов.Радио, 1975, 424 с.
6. *Кипчатов А.А., Красичков Л.В.* Суперфрактализация хаотического аттрактора при линейной фильтрации // *Письма в ЖТФ.* 1995. Т.4. С. 1.
7. *Кипчатов А.А., Козленко Е.Л.* Неограниченное возрастание размерности хаотических аттракторов при линейной фильтрации // *Письма в ЖТФ.* 1997. Т. 23, № 7. С. 8.
8. *Kipchatov A.A., Kozlenko E.L.* The new fractal structure of chaotic attractors arising under linear filtering // *Proc. 5th Int. Specialist Workshop Nonlinear Dynamics of Electronic Systems.* 1997. P. 394.
9. *Кипчатов А.А.* Количественная оценка сложности колебаний и формирование тестовых хаотических сигналов // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов: Сарат. гос. ун-т, 1996. 204 с.
10. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 346.
11. *Кипчатов А.А.* Оценка корреляционной размерности аттракторов, восстановленных по данным конечной точности и длины // *Письма в ЖТФ.* 1995. Т. 21, вып. 15. С. 90.
12. *Ebeling W., Nicolis G.* Entropy of symbolic sequences: the role of correlations // *Europhys. Lett.* 1992. Vol. 17. P. 7.
13. *Rossler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys. Lett. A.* 1976. Vol. 57. P. 397.
14. *Henon M.* A two dimensional mapping with a strange attractor // *Comm. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.09.98

ENTROPY OF FILTERED CHAOTIC SIGNALS

E.L. Kozlenko

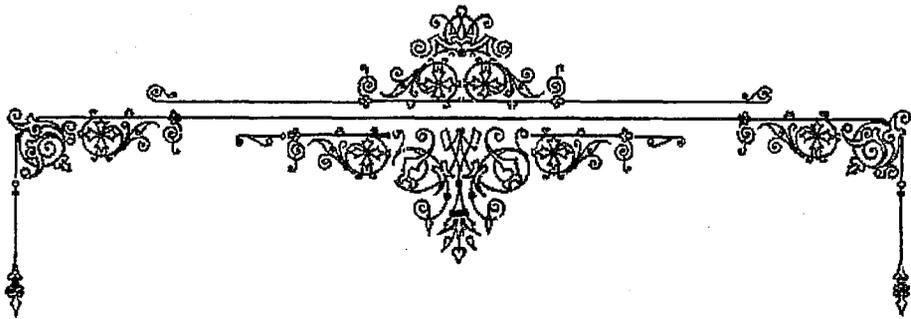
Chaotic oscillations being passed through linear filters are distorted that reflects in the estimates of their characteristics. One of such characteristics is entropy – usually used as a quantitative complexity measure of different processes. The present paper is focused on the problems of entropy estimation of chaotic time series, passed through linear filters. The systems, consisting of generators of chaotic oscillations and linear first-order and high-order filters have been investigated by means of computer simulation.



Козленко Егор Львович – родился в 1973 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – диагностика сложного поведения динамических систем по временным реализациям, фильтрация хаотических сигналов. Автор 3 статей по данной тематике.



90 лет
Саратовскому
университету



Къ исторіи ИМПЕРАТОРСКАГО НИКОЛАЕВСКАГО Университета.

*Рѣчь, произнесенная при открытіи ИМПЕРАТОРСКАГО НИКОЛАЕВСКАГО
Университета 6 декабря 1909 г.*

Ваше Сіятельство, Ваше Превосходительство,
Милостивыя Государыни и Милостивые Государи!

На мою долю выпала честь въ настоящій знаменательный день ознакомить Высокое Собрание съ краткой исторіей новооткрытаго разсадника высшаго просвѣщенія. Я не имѣю въ виду дать подробное и обстоятельное историческое изслѣдованіе; я хотѣлъ бы предложить Вашему вниманію лишь общій очеркъ, указать лишь главные моменты—какъ зародилась, развивалась, крѣпла и наконецъ осуществилась идея Саратовскаго Университета.

Несомнѣнно, что торжественно открытый сегодня Университетъ имѣетъ уже свою исторію: онъ и раньше жилъ и давно уже жилъ въ идеѣ, въ горячихъ мечтахъ лучшихъ людей нѣсколькихъ поколѣній; памятникомъ его прошлаго является цѣлая груда писанныхъ и печатныхъ матеріаловъ и документовъ, свидѣтельствующихъ о болѣе полувѣковой жизни его. Все это—плоды трудовъ большей частью искреннихъ друзей Саратовскаго Университета.

Мы, переживающіе настоящій моментъ, можемъ быть не въ состояніи будемъ вполнѣ по заслугамъ

оцѣнить безкорыстные и благородные труды этихъ дѣятелей, выростившихъ и взлелѣявшихъ намъ идею Университета; но несомнѣнно—безпристрастная исторія родной страны отведеть не одну свою свѣтлую страницу незабвенной памяти друзей его и воспоминаніе о ихъ дѣятельности будетъ служить надолго урокомъ для слѣдующихъ поколѣній.

Когда зародилась идея Саратовскаго Университета? Давно, по крайней мѣрѣ въ 50-хъ годахъ прошлаго столѣтія. Это—несомнѣнно давно; особенно, если принять во вниманіе, что при 320-ти лѣтнемъ возрастѣ г. Саратова на долю его правильной гражданской жизни, когда только и возможна мирная культурная работа, приходится періодъ не болѣе какъ въ 120—130 лѣтъ (съ 1781 г., когда послѣдовало учрежденіе въ Саратовѣ намѣстничества).

Зарожденіе ея, какъ это часто бывало съ многими историческими событіями, теряется въ туманѣ прошлаго и не представляется отчетливо яснымъ. Есть указанія въ мѣстной саратовской прессѣ, что въ концѣ 50-хъ годовъ въ г. Саратовѣ образовался и долгое время существовалъ небольшой кружокъ саратовцевъ, получившихъ университетское образованіе, отличавшихся предпріимчивымъ духомъ и стремленіемъ къ широкой общественной дѣятельности *).

Въ этомъ то кружкѣ, повидимому, зародилась мысль о Саратовскомъ Университетѣ. Что это была не праздная идея мечтателей, идея лишённая всякой реальной почвы; что въ обществѣ, по крайней мѣрѣ въ передовой части его, уже въ то время начала назрѣвать потребность въ высшемъ разсадникѣ просвѣщенія—видно изъ того, что вопросъ объ учрежденіи Саратовскаго Университета былъ какъ-то

*) Сарат. Справ. Лист., 1872 г., № 143.

сразу выдвинуть въ 1860-г. на сцену саратовскимъ дворянствомъ, принять и получилъ движеніе въ высшихъ правительственныхъ инстанціяхъ. Вотъ подробности этого знаменательнаго событія: *) „1860 г. декабря 15 дня, Общее Собраніе благороднаго дворянства саратовской губерніи, на основаніи 112 ст. т. IX Св. Зак. изд. 1857, разсуждая о пользахъ и нуждахъ своихъ, положило: просить правительство учредить въ г. Саратовѣ Университетъ съ двумя факультетами: юридическимъ и камеральнымъ, на основаніяхъ, изложенныхъ въ проэктѣ, при семъ прилагаемомъ, при чемъ дворянство изъявляетъ согласіе на взносъ по $\frac{1}{2}$ коп. серебромъ съ десятины казенной мѣры земли, состоящей въ дѣйстви-тельномъ крѣпостномъ владѣніи помѣщиковъ саратовской губерніи (подписали: губернский и уѣздные предводители и все наличное дворянство).

Необходимость Саратовскаго Университета въ проэктѣ мотивировалась слѣдующимъ образомъ:

„Лучшимъ залогомъ успѣховъ въ преобразованіяхъ и улучшеніяхъ, предпринятыхъ въ нашемъ отечествѣ, есть безъ сомнѣнія просвѣщеніе. На этомъ основаніи учрежденіе въ г. Саратовѣ Университета представляется сильнымъ двигателемъ будущаго процвѣтанія Юго-Восточнаго края“. На первое время проэктомъ полагалось — „учредить два факультета: юридическій и камеральный, какъ имѣющіе прямое отношеніе къ практическимъ современнымъ вопросамъ и могущіе съ одной стороны доставить полезныхъ дѣятелей на гражданскомъ и административномъ поприщахъ и съ другой стороны — образовать свѣдущихъ агрономовъ, технологовъ и

*) Дѣло сарат. губ. Правл. 1862 г. «Объ учрежденіи въ г. Саратовѣ Университета». См. также — «Систем. Сборн. постановленій сарат. губерніи. Зем. Собр. 1866—1882 г.», подъ ред. М. Кропотова, стр. 673.

вообще людей, способных употребить свою дѣятельность въ промышленной и коммерческой сферѣ." Впослѣдствіи по мѣрѣ усиленія средствъ, предполагалось открыть и другіе факультеты. По проекту имѣлось въ виду привлечь къ расходамъ на содержаніе Университета и др. сословія саратовской губерніи, — купечество, горожанъ, мѣщанъ и пр., а также и смежныя губерніи: самарскую, пензенскую, астраханскую.

Если мы вспомнимъ, что это ходатайство было возбуждено наканунѣ Великихъ Реформъ, въ самый разгаръ кипучей и всеобъемлющей работы по обновленію крѣпостной Россіи и было какъ бы отвѣтомъ на намѣреніе свыше даровать свободу миллионамъ рабовъ—то мы не можемъ не отдать должнаго и не признать, что со стороны дворянства это былъ высокій, благородный починъ и истинно-патріотическое дѣло.

Къ сожалѣнію, проектъ этотъ не встрѣтилъ должнаго сочувствія и поддержки со стороны другихъ сословіи общества. Такъ какъ въ дворянскомъ проектѣ предполагалось, между прочимъ, обложеніе въ пользу Университета и другихъ земель саратовской губерніи (городскихъ), то Министръ Внутреннихъ Дѣлъ, прежде чѣмъ дать ходъ проекту, предложилъ эту послѣднюю статью его на обсужденіе городскихъ обществъ саратовской губерніи. Согласіе дали лишь Хвалынское и Кузнецкое общества, остальные отказали. Послѣ того проектъ былъ переданъ на усмотрѣніе губернскихъ управъ: саратовской, астраханской, пензенской и самарской. На этомъ дѣло и остановилось... но не кончилось.

Идея Саратовскаго Университета уже жила и крѣпла; да и почва для нея была слишкомъ благоприятна: наступила эпоха Великихъ Реформъ. Рефор-

мы осуществлялись и входили въ жизнь, внося съ собою новую, невѣдомую дотолѣ, живую струю. Въ саратовской губерніи въ числѣ другихъ было введено земство, и 25 мая 1866 г. состоялась 1-я сессія саратовскаго губернскаго земскаго собранія; оживилась общественная жизнь и дѣятельность, *ожилъ и спросъ объ Университетѣ*; онъ снова былъ вывинутъ и поставленъ на очередь—на этотъ разъ губернскимъ земствомъ. На очередномъ земскомъ собраніи 9 декабря 1868 года, т. е. чрезъ 2 года послѣ открытія земства въ саратовской губерніи, былъ заслушанъ обстоятельно мотивированный докладъ гласнаго Александра Ивановича Шахматова объ учрежденіи въ Саратовѣ Университета.

Указавъ, что въ Саратовѣ, при его огромномъ населеніи (въ то время 82 тыс.), богатствѣ и при обширности территоріи саратовской губерніи, равной по пространству португальскому королевству, ощущается крайній недостатокъ въ образовательныхъ средствахъ (въ то время—единственная, да и то, замѣчаетъ авторъ, классическая гимназія, вдобавокъ переполненная), и считая, что „лучшимъ залогомъ успѣха въ совершившихся правительственныхъ преобразованіяхъ и въ предстоящей судебной реформѣ должно быть просвѣщеніе“, докладчикъ энергично ратуетъ за учрежденіе въ Саратовѣ Университета съ факультетами камеральнымъ и юридическимъ. Земское собраніе отнеслось къ проекту весьма сочувственно и избрало для обстоятельной разработки вопроса комиссію, подъ предѣдательствомъ губернскаго предводителя дворянства Николая Денисовича Давыдова, изъ гласныхъ: Θεодора Ивановича Абакумова, Павла Николаевича Корбутовскаго, Павла Ивановича Кокуева, Николая Николаевича Минха,

Александра Ивановича Шахматова и Александра Яковлевича Шабловскаго*).

Каковъ былъ ходъ работъ этой комиссіи и что ей удалось сдѣлать въ дальнѣйшемъ развитіи идеи Университета, я, къ сожалѣнію, на основаніи доступныхъ мнѣ источниковъ, ничего не могъ узнать.

Земскій проэктъ, какъ и дворянскій, не осуществился. Этому во многомъ способствовали развившіяся затѣмъ въ концѣ 70-хъ и въ началѣ 80-хъ годовъ политическія событія внѣ и внутри Россіи, въ общемъ—неблагопріятныя для осуществленія идеи Саратовскаго Университета. Вопросъ о немъ надолго сошелъ со сцены.

Однако идея Саратовскаго Университета уже сдѣлалась общественнымъ достояніемъ. Саратовское общество всколыхнулось и заволновалось, и возгорѣлась жаркая полемика на страницахъ мѣстной прессы.

Со стороны передовой части общества казалось вполне естественнымъ не только мечтать, но и говорить и даже настойчиво домогаться высшаго разсадника просвѣщенія. Реформы Царя-Освободителя, обновившія всю внутреннюю жизнь Россіи, захватили Саратовъ какъ бы врасплохъ: онѣ застали его городомъ богатымъ, матеріально обеспеченнымъ, но мало развитымъ въ умственномъ отношеніи**). Правда, притокъ интеллигентныхъ силъ извнѣ, начавшійся еще въ концѣ 50-хъ годовъ, успѣлъ уже рѣзко измѣнить весь тонъ и направленіе общественной жизни и развилъ потребность въ приобрѣтеніи, кромѣ матеріальныхъ, также и интеллектуальныхъ

*) Систем. сборн. постанов. Саратов. губ. Зем. Собор. 1866—1882, подъ ред. М. Кропотоза.

***) Хованскій Н. Ф. «О прошломъ г. Саратова». Онъ-же. «Очерки по исторіи г. Саратова».

благъ, благодаря чему въ короткое сравнительно время значительно увеличилось число среднихъ и низшихъ учебныхъ заведеній, образовалась мѣстная пресса, появились въ свѣтъ ученія и художественныя общества; но—интеллигентныхъ силъ было все-таки мало, а потребность въ нихъ велика. „Неужели“, взываетъ одинъ изъ наиболѣе раннихъ защитниковъ Университета Жолкевичъ, „съ введеніемъ въ жизнь новыхъ благодѣтельныхъ реформъ, которыми державная рука Царя-Освободителя вызвала свой народъ къ жизни и могуществу, оставить тѣло безъ души, т. е., безъ обширнаго развитія тѣхъ училищъ (университетовъ), гдѣ юноша почерпаетъ свѣдѣнія для поддержанія и развитія силъ развивающагося колосса“... „Откуда же возьмутся люди не только для осуществленія новыхъ реформъ“... но и для развитія ихъ, „по указанію державной воли“*).

Особенно оживленный обмѣнъ мыслей вызвалъ 1872 г., когда одинъ изъ популярныхъ публицистовъ Л. П. Брюмеръ помѣстилъ въ мѣстной прессѣ рядъ горячихъ статей, въ которыхъ ратовалъ за необходимость основанія въ г. Саратовѣ Университета и указывалъ средства для его содержанія. Брюмера дружно поддержали и другіе защитники Университета: В. Дурасовъ, С. Гусевъ и др. **)

Но... горячая проповѣдь защитниковъ Университета вызвала не менѣе горячую отповѣдь со стороны противниковъ и недруговъ его. Кто они были—эти недруги?... Къ счастью, ихъ было немного и въ этотъ знаменательный день мирнаго торжества Саратовскаго Университета мнѣ не хотѣлось бы говорить о нихъ: *nomina sunt odiosa*. Не

*) Саратов. Справ. Лист. 1869 г. № 131.

***) Саратов. Справ. Лист. 1872, № 131 тамъ же, 1872, № 143 и 144.

будемъ повторять и того, что они говорили противъ Университета — ихъ слова и дѣятельность пусть оцѣнить безпристрастная исторія *). Да и ничего новаго въ сущности они и не говорили, и не могли сказать, кромѣ: университетъ — „лишняя затѣя“, университетъ не нуженъ, университетъ вреденъ и т. п. Да и борьба съ ихъ стороны была и бесплодная и неравная, потому что защитники Университета были вооружены логическими доводами и базировались на требованія новой и живой жизни, а противники могли пустить въ ходъ лишь насмѣлки и черпали вдохновеніе въ отжившихъ традиціяхъ. Поэтому исходъ борьбы можно было заранѣе предвидѣть: идея Университета лишь стала еще болѣе популярной и, если не была осуществлена, за то въ обществѣ и общественныхъ организаціяхъ она получила прочную опору и смѣло можно было сказать, что при благоприятныхъ условіяхъ открытіе Университета лишь вопросъ времени.

И потому, не смотря ни на что, защитники Университета не прерывали своей культурной работы и при всякомъ удобномъ случаѣ напоминали саратовскому обществу, чтобы оно не забывало своей мечты — имѣть у себя высшій разсадникъ просвѣщенія. Взгляды и домогательства общества нашли полное сочувствіе и въ представителяхъ мѣстной администраціи: за необходимость учрежденія Саратовскаго Университета неоднократно высказывались — бывшіе саратовскіе губернаторы, нынѣ почетные граждане г. Саратова: Михаилъ Николаевичъ Галкинъ-Враскій, Андрей Ивановичъ Косичъ и Петръ Аркадіевичъ Столыпинъ.

*) Леопольдовъ А. Саратов. Справ. Лист. 1869, № 136; 1872, № 132. Онъ-же. Отвѣтъ г. Жолкевичу (брош.).—Онъ-же. Последнее слово объ учрежденіи въ Саратовѣ Университета, 1872 (брош.).—Орловъ П. В. Саратов. Справ. Лист. 1872, № 135.—Свербеевъ В. тамъ же, № 139.

Въ 1891 году г. Саратовъ собирался праздновать свой 300-лѣтній юбилей со дня своего основанія. И вотъ, среди приготовленій и предпраздничной суеты, громко и настойчиво раздался голосъ „Саратовскаго Дневника“, напоминавшій еще разъ, что „Саратовъ имѣеть всё даннаго для того, чтобы сдѣлаться умственнымъ центромъ Юго-Восточной Россіи, для чего ему не достаетъ только одного—высшаго учебнаго заведенія. Для этого время уже наступило“...*) Это желаніе саратовскаго общества—имѣть свой высшій разсадникъ просвѣщенія, желаніе настойчиво повторяемое цѣлые десятки лѣтъ, не могло, само собою разумѣется, не отразиться на взглядахъ представителей города и городская дума, наконецъ, рѣшительно выступила въ этомъ вопросѣ впередъ и взяла дѣло осуществленія этой идеи въ свои руки. Начались ходатайства предъ правительствомъ, повторяемые при всякомъ удобномъ случаѣ; особенно же часто и настойчиво—за послѣдніе 15 лѣтъ; при этомъ городская дума не останавливалась предъ готовностью къ крупнымъ матеріальнымъ жертвамъ ради дѣла, которое всеми признавалось „важнымъ по своему значенію“. Желанія города были болѣе скромны. Понимая затруднительность въ осуществленіи идеи Университета, онъ хлопоталъ вообще о какомъ нибудь высшемъ учебномъ заведеніи.

Такъ, въ 1896 году, въ бытность городскимъ головой Ник. Петров. Фролова, Саратовская Дума возбудила ходатайство предъ Министромъ Путей Сообщенія, чтобы предполагаемый къ открытію 2-й институтъ инженеровъ путей сообщенія былъ учрежденъ въ г. Саратовѣ.

*) Саратов. Дневн. 1891, №№ 78 и 97.

Въ 1897 году Саратовская Дума возбудила ходатайство объ открытіи въ Саратовѣ Агрономическаго Института и просила губернское земство и общество купцовъ и мѣщанъ поддержать это ходатайство.

Въ 1899 г. Саратовская Дума подняла вопросъ объ учрежденіи въ г. Саратовѣ Политехническаго Института.

Въ 1902 г. Саратовская Дума, въ бытность городскимъ головой А. І. Немировскаго, признала желательнымъ открытіе въ Саратовѣ Ветеринарнаго Института.

Въ 1904 г. Саратовская Дума, „въ память радостнаго событія рожденія Наслѣдника Цесаревича“, рѣшаетъ ходатайствовать объ учрежденіи высшаго учебнаго заведенія, съ присвоеніемъ ему имени Наслѣдника Цесаревича Алексѣя Николаевича.

Въ 1905—6 годахъ Городское Управление хлопочетъ о переводѣ Ново-Александрійскаго Сельско-Хозяйственнаго Института въ г. Саратовъ.

Въ 1906 г. Саратовская Дума особенно усердно и настойчиво начала хлопотать объ учрежденіи въ Саратовѣ Университета, т. е., объ осуществленіи давнишней и завѣтнѣйшей мечты саратовцевъ.

Въ исторіи развитія высшаго образованія въ Россіи 1906 годъ заслуживаетъ быть особенно отмѣченнымъ: въ это время мысль объ учрежденіи новаго Университета получила въ Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія особенно энергичную поддержку; еще въ 1903 году Ученый Комитетъ высказался за настоятельную необходимость въ учрежденіи новаго Университета—„и не одного, быть можетъ, а вѣсколькихъ“.*)

*) Труды Комиссіи по вопросу о Новомъ Университетѣ 1907 г. (Прилож. къ предств. Мян. Нар. Просв.).

Само министерство сознавало, „что переполненіе существующихъ университетовъ учащимися на столько значительно, что правильная постановка учебныхъ занятій становится почти невозможной... отсюда ясно, насколько необходимо открытіе новаго университета и какъ опасно было бы медлить съ разрѣшеніемъ этого назрѣвшаго вопроса, не давая законнаго выхода вполнѣ опредѣленно и настойчиво сказавшемуся стремленію русскаго юношества къ высшему образованію“^{*)}.

Въ это время случилось одно обстоятельство, значительно ускорившее рѣшеніе злободневнаго вопроса: я имѣю въ виду временное бездѣйствіе Варшавскаго Университета.

Совѣтъ Варшавскаго Университета въ засѣданіяхъ 19 и 20 сентября 1906 г. постановилъ—использовать силы и средства Университета на время его бездѣйствія для нуждъ высшаго просвѣщенія въ Россіи; вслѣдствіе чего отдѣльные члены Совѣта были откомандированы въ различные города Имперіи съ цѣлью выясненія пригодности послѣднихъ для основанія въ нихъ Университета; между прочимъ, въ г. Саратовъ былъ откомандированъ профессоръ Петръ Васильевичъ Никольскій; кромѣ того, изъ профессоровъ, жившихъ въ то время въ Петербургѣ, была образована коммиссія подъ предсѣдательствомъ проф. В. П. Амалицкаго по тому же вопросу.

Едва это обстоятельство стало извѣстно въ широкихъ кругахъ земскихъ и городскихъ дѣятелей, какъ отовсюду стали поступать въ министерство многочисленные запросы и ходатайства; „различныя области, губерніи и города проявили самое настойчивое желаніе добиться Университета; обнаружилось

^{*)} Объяснительная записка къ законопроекту объ основаніи Университета въ г. Саратовѣ стр. 1.

величайшее сочувствіе къ этому дѣлу въ самыхъ разнообразныхъ кругахъ населенія, различныхъ общественныхъ организаціяхъ и со стороны отдѣльныхъ лицъ". Губернскіе города ходатайствуютъ, уѣздные обѣщаютъ поддержку губернскимъ, разныя сословія, въ томъ числѣ и духовное (Смоленскъ), и крестьянское (Нижній Новгородъ), рѣшаются помогать этому дѣлу матеріальными пособіями изъ своихъ скудныхъ средствъ.

Въ апрѣлѣ Царицынская Городская Дума официально запрашиваетъ министерство о возможности перенесенія въ г. Царицынъ Варшавскаго Университета; о томъ же возбуждаетъ ходатайство г. Самара, а за ней цѣлый рядъ городовъ и между ними—само собой разумѣется—Саратовъ. Десять городовъ одновременно добивались чести имѣть у себя Университетъ: Царицынъ, Самара, Минскъ, Витебскъ, Смоленскъ, Воронежъ, Ярославль, Нижній Новгородъ, Астрахань и Саратовъ, причемъ всѣ они предлагали министерству болѣе или менѣе крупныя матеріальныя пособія*).

По ходу разворачивающихся событій, Саратовъ, конечно, чувствовалъ и понималъ, что въ вопросѣ о Саратовскомъ Университетѣ наступилъ послѣдній фазисъ и что въ виду рѣзко и неожиданно обнаружившейся конкуренціи со стороны другихъ городовъ борьба за Университетъ будетъ серьезная, а потому онъ выступилъ во всеоружіи. Прежде всего Саратову необходимо было доказать свое преимущественное право предъ другими городами, право—имѣть Университетъ. Выбранная городской думой особая депутація, въ составѣ городского головы В. А. Коробкова и гласныхъ Г. Г. Дыбова и д-ра М. Ф. Волкова, представила лично г. Предсѣдателю Совѣта Министровъ и Министру Народнаго Просвѣщенія

*) Труды Комиссіи по вопросу о новомъ Университетѣ.

обстоятельные и подробно мотивированные докладные записки, въ которыхъ ярко были выставлены всѣ преимущества и удобства, представляемые Саратовомъ для Университета: Саратовъ—крупнѣйшій изъ всѣхъ городовъ средняго и нижняго Поволжья (207 тыс. населенія, по послѣднимъ официальнымъ даннымъ), естественный центръ громаднаго юго-восточнаго района Россіи (губерніи: Саратовская, Самарская, Симбирская, Пензенская, Тамбовская, Астраханская, Воронежская, Земли Войска Донскаго, Уральская область, Оренбургская, Уфимская и Ставропольская губ.), удаленнаго отъ центровъ высшаго образованія; Саратовъ—самая крупная волжская пристань и крупный узловой торгово-промышленный центръ, съ многочисленными учебными заведениями, тратящій на нужды просвѣщенія до 18%, обще-городскаго бюджета (около 400 тысячъ руб. въ годъ); связанный желѣзной дорогой съ западомъ и востокомъ, а Волгой—съ сѣверомъ и югомъ, Саратовъ даетъ возможность удобнаго сообщенія со всѣми губернскими и частью—уѣздными городами района. Таковы внѣшнія преимущества г. Саратова.

Къ этому еще можно бы было прибавить и еще одно преимущество—чисто нравственнаго характера, —что онъ ждетъ Университета и живетъ этой мечтой болѣе 50 лѣтъ.

Кромѣ того, чтобы имѣть Университетъ, городъ рѣшился на крупныя матеріальныя жертвы. Саратовская Городская Дума въ засѣданіяхъ 19 декабря 1906 г., 25 июля 1907 г. и 29 сентября 1908 г. постановила, между прочимъ, ассигновать на постройку Университета 1 милл. руб., отвести ему въ собственность 26 дес. земли, въ томъ числѣ московскую площадь, предоставить въ теченіе двухъ первыхъ лѣтъ бесплатно временное помѣщеніе и разрѣшить пользоваться

городскими лечебными заведениями въ качествѣ клиникъ. Въмѣстѣ съ городомъ и Саратовское Губернское Земское Собраніе признало возможнымъ принять на себя нѣкоторыя матеріальныя жертвы и постановило (9 декабря 1906 г. и 10 августа 1907 г.): передать въ полное распоряженіе Университета весь кварталъ, на которомъ расположена Александровская больница со всѣми принадлежащими къ ней зданіями и съ той ассигновкой въ 85 тыс. руб., которую губернское земство отпускаетъ на содержаніе ея; для расширенія и приспособленія больницы къ цѣлямъ клиническаго преподаванія, между прочимъ, назначено единовременное пособіе въ 100 тыс. руб.; затѣмъ собраніе постановило предоставить также и психіатрическую лечебницу въ пользованіе Университета для научно-лечебныхъ цѣлей. Вслѣдъ за этимъ, Саратовское Уѣздное Земское Собраніе (чрезвычайное) назначило (12 января 1907 г.) на постройку и оборудованіе Университета 50 тыс. руб. Наконецъ, экстренное собраніе Саратовскаго Общества взаимнаго отъ огня страхованія постановило (4 февраля 1907 г.) ассигновать на Университетъ 50 тыс. руб.

Итого, на сооруженіе Саратовскаго Университета ассигновано пособій изъ мѣстныхъ источниковъ— 1.200.000 руб.

Кромѣ матеріальной поддержки, Саратовская Городская Дума встрѣтила дружную нравственную поддержку и горячее сочувствіе со стороны смежныхъ губерній, уѣздовъ, городовъ, а также—со стороны различныхъ общественныхъ учрежденій и организаций, высокопоставленныхъ лицъ и проч. Многіе изъ послѣднихъ поддержали ходатайство г. Саратова оффиціально предъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія; напр., наказный атаманъ

уральскаго казачьяго войска, сенаторъ Михаилъ Николаевичъ Галкинъ-Врасскій, Саратовскій губернаторъ графъ Сергѣй Сергѣевичъ Татищевъ, Самарскій губернаторъ. О сочувствіи же и нравственной поддержкѣ со стороны мѣстнаго саратовскаго общества и говорить не приходится: оно все время не переставало жить одною жизнью съ „отцами города“, вмѣстѣ съ ними волновалось, надѣялось, огорчалось.

Для разработки вопроса объ учрежденіи въ Россіи новаго Университета, по распоряженію Министра Народнаго Просвѣщенія П. М. фонъ-Кауфмана, 22 ноября 1906 года образована была особая коммиссія, главнымъ образомъ изъ профессоровъ Варшавскаго Университета, подъ предсѣдательствомъ профессора В. П. Амалицкаго въ составѣ профессоровъ Н. Н. Любавича, И. П. Филевича, А. И. Щербакова и Г. В. Демченко. Въ теченіе ноября 1906 г. и января 1907 г. коммиссія имѣла 42 засѣданія; въ 18 изъ нихъ принимали участіе представители земствъ и городовъ, заинтересованныхъ имѣть у себя Университетъ, въ томъ числѣ отъ г. Саратова—городской голова В. А. Коробковъ, гласные думы Г. Г. Дыбовъ и М. Ѳ. Волковъ. На основаніи весьма обширнаго собраннаго матеріала, коммиссія подробно и обстоятельно проанализировала сравнительныя условія по учрежденію Университета въ слѣдующихъ 6 городахъ: Минскѣ, Витебскѣ, Смоленскѣ, Воронежѣ, Нижнемъ Новгородѣ и Саратовѣ; изучивъ вопросъ въ возможной полнотѣ, она пришла къ слѣдующимъ заключеніямъ, *крайне неблагоприятнымъ для г. Саратова*: признавъ, что въ первую очередь мѣсто для новаго Университета должно быть выбрано въ какомъ-либо городѣ, лежащемъ въ восточной части европейской Россіи, за линіей Москва—Харьковъ, она высказалась за то, „что съ принципіальной точки зрѣнія на пер-

вое мѣсто должны быть поставлены города Смоленскъ, Воронежъ, Нижній Новгородъ^{*)}).

И такъ, Саратовъ остался на заднемъ планѣ; ясно, что для него наступилъ жгучій, критическій моментъ въ вопросѣ: быть или не быть въ Саратовѣ Университету—или теперь, или... неизвестно когда... И Саратовъ, въ лицѣ своихъ представителей, не отступилъ, а рѣшилъ продолжать благородную борьбу за право имѣть у себя высшій разсадникъ просвѣщенія и обнаружилъ громадную энергію. На защиту своихъ правъ, онъ снова выдвинулъ лучшія свои боевыя силы, въ лицѣ такъ называемой городской Университетской Коммисіи, вооружилъ ихъ неотразимыми доводами, почерпнутыми изъ жизни, выработанными въ теченіе долгихъ лѣтъ ожиданія и надежды и, снабдивъ ихъ обширными полномочіями, отправилъ въ Петербургъ, чтобы отстаивать право Саратова на имѣющійся открытійся Университетъ. Депутация, прибывъ въ Петербургъ, прежде всего посѣтила министерскую комиссію, работавшую подъ предсѣдательствомъ профессора В. П. Амалицкаго, и приняла участіе въ обсужденіи вопроса объ Университетѣ въ г. Саратовѣ, изложивъ лично всѣ условія, которыя городъ предлагалъ въ этомъ дѣлѣ Министерству Народнаго Просвѣщенія. Уже здѣсь депутацию ожидалъ пріятный сюрпризъ. Раньше передъ тѣмъ командированный, какъ мы видѣли выше, въ г. Саратовъ проф. П. В. Никольскій представилъ настолько важныя данныя въ пользу г. Саратова, что кандидатура послѣдняго, какъ будущаго университетскаго города, сразу поднялась и стала одной изъ серьезнѣйшихъ. Затѣмъ депутация отправилась и была принята Министромъ Народнаго Просвѣщенія П. М. фонъ-Кауфманомъ. „Мы,

^{*)} Труды Коммисіи и т. д., стран. 53.

—говорится въ отчетѣ депутаціи по этому поводу, —нашли въ немъ горячаго сторонника за новый Университетъ и въ первое же свиданіе онъ объявилъ намъ, что по его убѣжденіямъ Саратовъ заслуживаетъ высшаго учебнаго заведенія*.

Затѣмъ, комиссія посѣтила Предсѣдателя Совѣта Министровъ Статсъ-Секретаря П. А. Столыпина. „Съ первыхъ же словъ нашего личнаго ходатайства, —говорится въ отчетѣ депутаціи,—онъ съ полнымъ и живымъ сочувствіемъ высказался, что Университетъ въ Саратовѣ былъ его давнишнимъ желаніемъ и что, если будетъ основанъ новый Университетъ; то только Саратовъ можетъ претендовать на него; при этомъ особенно подчеркнул, что говорить такъ не потому, что былъ Саратовскимъ губернаторомъ, а слѣдовательно—говорить изъ любезности, а потому, что *Саратовъ по своему положенію и значенію дѣйствительно заслуживаетъ того, чтобы стать университетскимъ городомъ*; городской думѣ онъ поручилъ передать, что въ университетскомъ вопросѣ онъ будетъ ея „союзникомъ“ и „присяжнымъ адвокатомъ“.

Итакъ, на этотъ разъ посѣщеніе саратовской комиссіей Петербурга дало надежду Саратову. Эта надежда вскорѣ замѣнилась твердой увѣренностью въ близкомъ осуществленіи завѣтной мечты; 13 апрѣля 1907 года въ Совѣтѣ Министровъ, подъ предсѣдательствомъ Статсъ-Секретаря П. А. Столыпина, было заслушано представленіе Министра Народнаго Просвѣщенія по вопросу объ учрежденіи новаго Университета въ г. Саратовѣ и большинствомъ голосовъ было одобрено.

Однако и послѣ этого были моменты, когда и въ нѣкоторой части общества, и въ печати, и въ правительственныхъ сферахъ настроеніе было не

вполнѣ благопріятно для Саратовскаго Университета... Снова тревога и боязнь за судьбу своего дѣтища охватила саратовское общество и снова депутація отъ городской думы въ составѣ В. А. Коробкова, М. Ѳ. Волкова и Б. А. Арапова отправилась въ Петербургъ.

25 іюня (1907 г.) депутація была принята председателемъ Совѣта Министровъ П. А. Столыпинымъ, отъ котораго депутаты и на этотъ разъ получили завѣренія о неизмѣнно-благожелательномъ отношеніи его къ Саратовскому Университету; отъ него же депутаты имѣли высокое счастье услышать, что *„Государь Императоръ не противъ новаго Университета и не смотритъ на него, какъ на революціонный очагъ, какъ объ этомъ многіе говорятъ. Самъ Государь Императоръ желаетъ, чтобы число Университетовъ въ Россіи было больше“*^{*)}.

Депутаты вышли отъ председателя Совѣта Министровъ успокоенные и ободренные; а 27 іюня послѣдовало Высочайшее утвержденіе журнала Совѣта Министровъ объ учрежденіи новаго Университета въ г. Саратовѣ.

Непосредственно въ слѣдъ за этимъ Министръ Народнаго Просвѣщенія П. М. фонъ - Кауфманъ командировалъ въ г. Саратовъ комиссію подъ председательствомъ проф. Владиміра Прохоровича Амалицкаго, въ составѣ профессоровъ Варшавскаго Университета: Алексѣя Ивановича Щербакова (нынѣ попечитель Одесскаго учебнаго округа), Петра Васильевича Никольскаго, Александра Андреевича Жавдра, Эмилиана Андреевича Незнамова, Ивана Порфирьевича Филевича и проф. Университета Св. Владиміра Григорія Васильевича Демченко — для все-

^{*)} Извѣстія Саратов. Город. Думы. 1907 г. № 3 (іюнь—августъ), стр. 217 и 218.

сторонняго выясненія на мѣстѣ условій открытія Университета. Въ самомъ Саратовѣ былъ сформированъ и началъ работать, подъ предсѣдательствомъ Управляющаго Саратовской губерніей вице-губернатора П. М. Боярскаго, наблюдательный комитетъ въ составѣ Попечителя Казанскаго Учебнаго Округа, мѣстныхъ представителей Министерства Финансовъ, Государственнаго контроля, общественныхъ учреждений, заинтересованныхъ въ учрежденіи Университета, и членовъ вышеназванной комиссіи.

На основаніи полученныхъ на мѣстѣ матеріаловъ, комиссіей были подробно разработаны и представлены въ Министерство Народнаго Просвѣщенія проектъ и строительная программа для Саратовскаго Университета въ полномъ составѣ всѣхъ факультетовъ: медицинскаго, физико-математическаго (съ естественнымъ отдѣленіемъ), юридическаго и историко-филологическаго; при этомъ планъ и проектъ медицинскаго факультета во всѣхъ деталяхъ былъ составленъ проф. А. И. Щербаковымъ, въ сотрудничествѣ съ А. А. Жандромъ и Э. А. Незнамовымъ; проф. Г. В. Демченко разработалъ и обосновалъ полученныя данныя съ юридической стороны.

Въ началѣ 1908 года П. М. фонъ-Кауфманъ вышелъ въ отставку.

Новый Министръ Народнаго Просвѣщенія Александръ Николаевичъ Шварцъ, хотя и осторожно отнесся къ выработанному комиссіей проекту, тѣмъ не менѣе въ категорической формѣ заявилъ себя убѣжденнымъ сторонникомъ Саратовскаго Университета. Принимая однако во вниманіе недостатокъ въ Россіи научныхъ силъ и невозможность въ короткое время подобрать надлежащій контингентъ преподавателей для оборудованія одновременно всѣхъ четырехъ факультетовъ, Министерство Народнаго

Просвѣщенія остановилось на мысли открыть Саратовскій Университетъ первоначально лишь въ составѣ одного медицинскаго факультета, предполагая не позже, какъ черезъ 5 лѣтъ, открыть физико-математическій и др. факультеты.

31 ноября 1908 г. за № 28516 г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія былъ внесенъ на уваженіе Государственной Думы законопроектъ: „Объ основаніи Университета въ г. Саратовѣ и отпускѣ средствъ на этотъ предметъ“, въ которомъ предполагалось между прочимъ:

1. Учредить въ г. Саратовѣ Университетъ и открыть дѣйствіе такового въ 1909 г. въ составѣ одного медицинскаго факультета.

2. Въпредь до изданія новаго устава и штатовъ Императорскихъ Россійскихъ Университетовъ, распространить на Саратовскій Университетъ дѣйствіе устава 1884 г.

На сооруженіе и оборудованіе университетскихъ зданій ассигновать изъ суммъ государственнаго казначейства, начиная съ 1909 г. въ теченіе 5 лѣтъ, 3,206,709 р.

1909 г. восьмого мая законопроектъ былъ принятъ Государственной Думой, а въ концѣ мая—Государственнымъ Совѣтомъ.

Наконецъ, въ знаменательный, отнынѣ—историческій и для г. Саратова незабвенный день 10 іюня 1909 года, на яхтѣ „Штандартъ“ на рейдѣ Штандартъ, Государь Императоръ Высочайше соизволилъ утвердить одобренный обѣими законодательными палатами законопроектъ и собственной Его Императорскаго Величества рукой начерталъ на немъ: „Быть по сему“.

Долго жданная мечта осуществилась; идея ожила; Императорскій Саратовскій Университетъ сталъ

фактомъ. Тотчасъ же началась работа по осуществленію Высочайшей воли.

Черезъ нѣсколько недѣль въ Саратовѣ уже собралась небольшая университетская семья первыхъ профессоровъ. Прошло два съ половиной мѣсяца напряженной работы по приспособленію и оборудованію отведенныхъ городомъ помѣщеній подъ учебно-вспомогательныя учрежденія и наконецъ 22 сентября 1909 года въ Императорскомъ Саратовскомъ Университетѣ былъ отслуженъ обычный молебенъ предъ началомъ ученія и первые студенты и вольнослушатели, въ числѣ 106 человѣкъ, вступили въ аудиторію, чтобы представиться своимъ профессорамъ, и были привѣтствуемы деканомъ отъ имени юной *Almae Matris*. А 23 сентября началось чтеніе лекцій по всѣмъ предметамъ I курса медицинскаго факультета (анатомія, общая физиологія съ основами гистологіи, физика, химія, зоологія, ботаника), кромѣ минералогіи, кафедра которой еще вакантна.

Буднично начавшій свою трудную жизнь Саратовскій Университетъ сегодня официально и торжественно открытъ, осчастливленъ Высочайшею милостью именоваться Николаевскимъ и приобщенъ къ славной семьѣ Россійскихъ Университетовъ; на юго-востокѣ Россіи появился новый разсадникъ высшаго образованія.

Правда, открытый Университетъ состоитъ пока изъ одного медицинскаго факультета, правда—онъ помѣщается пока въ чужомъ, гостепріимно пріютившемъ его зданіи фельдшерской школы; но важно то, что для него въ сегодняшній день положено прочное, незыблیمое основаніе; важно то, что посѣянное 50 лѣтъ тому назадъ зерно уже проросло и дало первый ростокъ—медицинскій факультетъ; и если дальнѣйшее раз-

витіе и формированіе этого ростка въ сложный и законченный организмъ будетъ и дальше идти своимъ естественнымъ ходомъ — постепенно, но неуклонно впередъ, — то Саратовскій Университетъ въ полномъ составѣ всѣхъ факультетовъ, при дружной работѣ друзей его, есть лишь вопросъ времени и во всякомъ случаѣ не очень отдаленнаго.

Ужъ и теперь составъ учебно-вспомогательныхъ учреждений: лабораторій, кабинетовъ и пр. формируется на такихъ основаніяхъ, чтобы въ ближайшіе уже годы они могли удовлетворять потребностямъ также и физико-математическаго факультета.

Сегодня, вмѣстѣ съ торжественнымъ открытіемъ Университета, освящено и *мѣсто для его собственныхъ зданій*, а съ началомъ весны начнется постройка цѣлаго ряда институтовъ (экспериментально-медицинскаго, анатомическаго, физическаго, химическаго) и клиникъ (факультетскихъ клиникъ: хирургической и терапевтической).

Пройдетъ немного лѣтъ — и стѣны теперешнихъ тѣсныхъ помѣщеній Университета далеко раздвинутся и въ широко открытыя двери его дружной толпой устремятся всѣ, ищущіе свѣта и знаній, и Императорскій Николаевскій Университетъ займетъ подобающее ему мѣсто среди старѣйшихъ своихъ собратьевъ, Россійскихъ Университетовъ. Такъ должно быть: этого требуютъ Высокій Авторитетъ Августѣйшаго Имени, отнынѣ стоящаго во главѣ Университета, интересы Русскаго Народа и достоинство нашей Великой Родины.





Чуевский Иван Афанасьевич (26.01.1857 – 06.06.1926) – физиолог, профессор (с 1909) и первый декан медицинского факультета Саратовского университета.

И.А. Чуевский родился в станице Кавказской Кубанской области в семье причетника той же станицы Николаевской церкви. Первоначальное образование получает в Ставропольском духовном училище – в бурсе и затем в Кавказской духовной семинарии. В 1879 году, вопреки желанию отца, он поступает в Новороссийский университет на естественное отделение физико–математического факультета. Однако в следующем году И.А. Чуевский решает перейти на медицинский факультет университета Святого Владимира в Киеве, который и оканчивает с отличием в 1884 году. Спустя полгода после этого он назначается на должность сверхштатного ординатора при акушерско–гинекологической клинике того же университета. В 1892 году, пройдя солидную физиологическую школу у профессора Харьковского университета В.Я. Данилевского, ученый защищает диссертацию на степень доктора медицины «О раздражении двигательных нервов колебаниями гальванического тока». В дальнейшем И.А. Чуевский работает в Харьковском университете

на кафедре физиологии сначала в качестве помощника прозектора, а после – прозектора и приват–доцента. Последним местом службы до назначения его в Саратов был Казанский университет. И.А. Чуевским написано немало ценных научных трудов, некоторые из которых (например, работы по кровообращению отдельных органов), по мнению специалистов, и по сей день считаются классическими. А написанный им «Краткий курс физиологии человека» выдержал 8 изданий – факт, надо признать, далеко не частный в научной практике. В 1926 году, когда ученого не станет среди живых, профессор С.Р. Миротворцев скажет о нем следующее: «Семнадцать лет назад, сюда приходили и другие ученые, может быть, не менее известные в науке, которые тоже участвовали в общей строительной работе, но редко кто из них проявлял такой организаторский дар, такую поглощенность интересами дела и такую глубокую привязанность к высшей школе в чужом крае, где–то по соседству с полудикими степями, почти на меже Европы и Азии, как Иван Афанасьевич Чуевский». Не многие из первых профессоров Саратовского университета заслужили в свой адрес подобных теплых и сердечных слов. В них заключены воедино признание, любовь и уважение к труду ученого, педагога, человека.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *Н.Н. Лёвина, М.В. Попова, Л.А. Сидорова*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты –
р/с №40503810000000000378 ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

Подписка на I-ое полугодие 1999 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498
и по заявочным письмам непосредственно в редакции
Стоимость подписки на I полугодие 60 рублей

Сдано в набор 15.02.99. Подписано к печати 10.04.99. Формат 70x108/16
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 9,275 (6,525). Уч.-изд. л. 9,1. Тираж 200 экз. Заказ 105

Издательство ГосУНЦ «Колледж»
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 514298
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

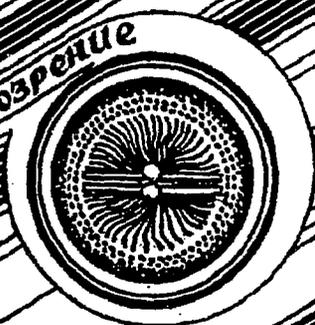
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1999



КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



в журнале

студентов и преподавателей



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики

М. ВРУБЕЛЬ

Подобно мольеровскому Журдену, с восхищенным удивлением узнавшему, что всю жизнь он разговаривал прозой, мы только совсем недавно стали осознавать (и то пока умозрительно-математически, через посредство компьютера), что живем во фрактальном мире.

Врубелю не нужны были математические очки - сокровенная сложность взаимодействия объекта и пространства, трансформация пространства в таком взаимодействии являлись ему зримо в разломе кристалла, в сверкании граней драгоценных камней, в сколе ледяной глыбы, в переливах красок облаков закатного неба - все откладывалось в его феноменальной зрительной памяти, из которой он во время работы мгновенно и безошибочно выхватывал отдельные элементы и уверенно компоновал из них невиданные ранее декоративные формы.

Собственно говоря, искания и находки Врубеля вполне укладываются в рамки достаточно прагматичной программы - воссоздание такой пространственной среды, в которой образы его фантазии - Демоны и серафимы, Царевна-Лебедь и Принцесса-Греза, наяды и пророки - могли существовать органично и естественно, а не выглядеть бу-тафорскими куклами. И то, что современниками воспринималось как обязательный врубелевский декоративный фон - сверкающее или мерцающее узорочье фантастических, прихотливо разбросанных пластических пятен и форм, взрезающих и взрывающих обыденную двумерность холста или бумаги, - мы можем внушительно определить, например, как точно выверенную* метаструктуру иерархически очень сложно организованных пространственных разномасштабных паттернов переменной размерности.

Конечно, эти термины ничего не объяснят и тайна Врубеля, как и вообще магия искусства навряд ли окажется разгаданной; и все же странным образом (может формально, а может и не совсем) при взгляде на микрофрагменты врубелевских картин (некоторые образцы их приведены на 1-й странице обложки) вдруг неволью вспоминаются какие-то образы хорошо знакомых фрактальных объектов нелинейной динамики...

* К. Коровин писал о работе Врубеля: "Остро, будто прицеливаясь или что-то отмечая, срезывая в разных местах на картоне, клал обрывистые штрихи, тонкие и прямые, и с тем же отрывом их соединял... он весь был как из железа, руки как-то прицеливались, делали удар и оставались на мгновение приставшими к картону..."

М.А.Врубель Пан. 1899 г.



Почти физическое ощущение канторовой структуры, создающей иллюзию какой-то плотной бестелесности или телесности разлитой, растекающейся по пространству картины. Поток вдруг вздыбившийся и застывший водоворотами бороды и усов, завихрениями узловатых пальцев; это Пан - бог всей живой и неживой Природы, свирель которого выпевает мелодию жизни. Не есть ли это идеальный символ нелинейной динамики в ее высшем предназначении - глобальной гармонизации природы и человека?