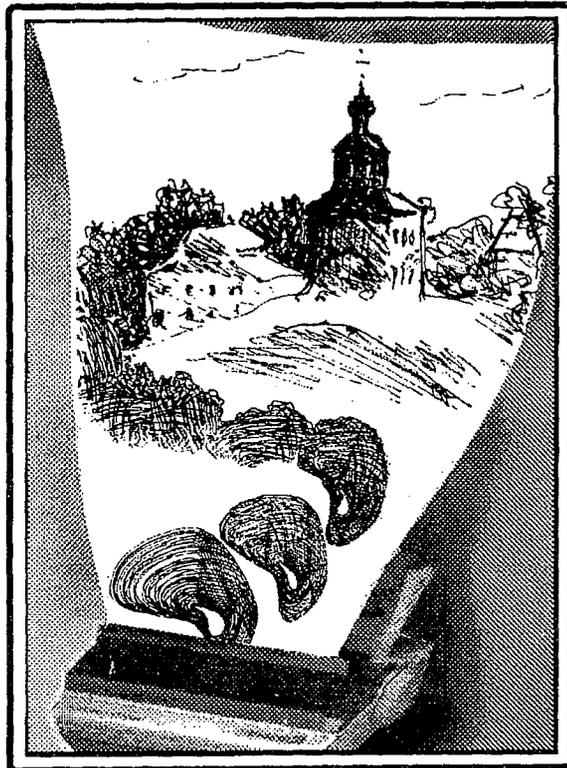


ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Трикладная Динамическая Математика



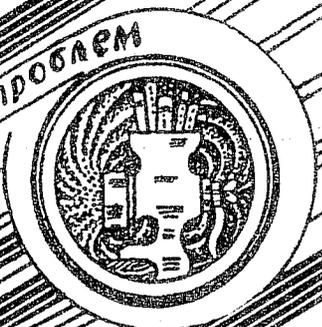
3
1996

Журнал в журнале: материалы конференции "Суздаль-95"

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



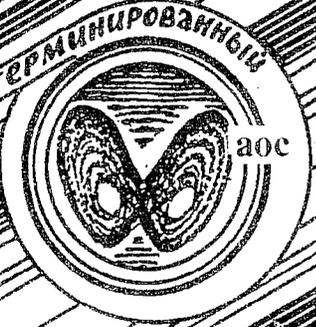
Бифуркации
в динамических
системах различной природы



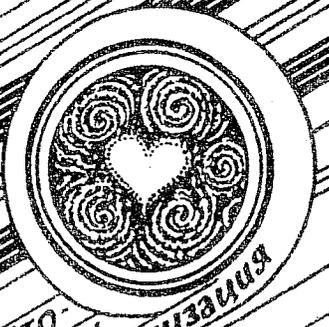
Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



Детерминированные
аос



Авто-волны,
самоорганизация



Прикладные
нелинейные
теории
колебаний
и волн



Нелинейная
динамика
в лицах.
История. Personal

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анщенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пушкино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тунин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юсупов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СО Д Е Р Ж А Н И Е

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Бакалейников Л.А.* Об одном методе построения динамических систем с го-
моклинической траекторией седлового состояния равновесия 3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Кащенко С.А.* Сравнительный асимптотический анализ динамики автогене-
раторов с различными нелинейными запаздывающими связями.
Часть.1. 10
- Музычук О.В.* Некоторые точные результаты для вероятностных харак-
теристик стохастического уравнения Ферхюльста 18
- Музычук О.В.* Нестационарные вероятностные характеристики стохастиче-
ского уравнения Ферхюльста 25
- Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Использование модифицированных урав-
нений Вайдлица для моделирования социальных процессов 31
- Беднов А.А., Ульянов С.С., Тучин В.В., Бриль Г.Е., Захарова Е.И.* Иссле-
дование динамики лимфотока методами спекл-интерферометрии 42

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

- Нетребко А.В., Нетребко Н.В., Романовский Ю.М., Хургин Ю.И., Эбелинг В.*
Стохастическая кластерная динамика фермент-субстратного
комплекса 53
- Чернавский Д.С., Пирогов Г.Г., Чернавская О.Д., Щербаков А.В., Сулаков Б.А.*
Динамика экономической структуры общества (математическая
модель) 67
- Волков Д.В., Столяров М.Н., Волков Е.И.* Эффективный численный способ
изучения динамики цепочек сильно релаксационных осцилляторов . . . 77
- Кайгородова Н.З., Сухарева Л.Н., Эйдукайтис А.С., Яценко М.В.* Влияние
индивидуально-типологических особенностей на суточную динамику
хаотичности ЭКГ 89
- Ванаг В.К., Вирченко А.Ю., Ванаг К.В.* Моделирование эффекта перемещи-
вания в автокаталитической реакции при помощи вероятностного
клеточного автомата 97
- Якушевич Л.В.* Моделирование нелинейной динамики ДНК 107

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

- Хвольсон О.Д.* Знание и вера в физике 113

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

- Межрегиональный научный семинар «Нелинейные системы и их модели» . . . 129

CONTENTS

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- On the method of the construction of the dynamic system with the homoclinic trajectory of saddle equilibrium point. *L.A. Bakaleinikov* 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Asymptotic analysis of the autogenerators dynamics with different nonlinear delay coupling. Part 1. *S.A. Kaschenko* 10
- Some exact results for probability characteristics of Ferhulst stochastic equation
O.V. Muzychuk 18
- Non-stationary probability characteristics of Ferhulst stochastic equation
O.V. Muzychuk 25
- The application of modified Weidlich equations to the simulation of social processes. *A.A. Koronovskiy, D.I. Trubetskov* 31
- Investigation of lymph flow dynamics using speckle-interferometry. *A.A. Bednov, S.S. Ulyanov, V.V. Tuchin, G.E. Brill, E.I. Zakcharova* 42

JOURNAL IN JOURNAL

- Stochastic cluster dynamics of enzyme-substrate complex. *A.V. Netrebko, N.V. Netrebko, Yu.M. Romanovsky, [Yu.I. Khurgin], W. Ebeling* 53
- The dynamics of the economic society structure. *D.S. Chernavskii, G.G. Pirogov, O.D. Chernavskaya, A.V. Scherbakov, B.A. Suslakov* 67
- Effective numerical method for the study of the inhibitory coupled very stiff oscillators dynamics. *D.V. Volkov, M.N. Stolayrov, E.I. Volkov* 77
- The influence of the individual and typological peculiarities on the daily dynamics of the ECG chaos. *N.Z. Kaygorodova, L.N. Sukhareva, A.S. Eidukaytis, M.V. Yazenko* 89
- Modelling mixing phenomenon in autocatalytic reaction by probability cellular automaton. *V. K. Vanag, A. Yu. Virchenko, K. V. Vanag* 97
- Modeling of the nonlinear dynamics of DNA. *L.V. Yakushevich* 107

ACTUAL PROBLEM FROM THE PAST

- Knowledge and faith in physics. *O.D. Hvolson* 113

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS

- Interregional scientific seminar «Nonlinear systems and their models» 129



ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ СЕДЛОВОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Л.А. Бакалейников

В работе решается задача построения по данной динамической системе с седловым состоянием равновесия такой системы, которая обладает гомоклинической траекторией и совпадает с исходной в некоторой окрестности состояния равновесия. Приведен конкретный конструктивный путь построения модифицированной системы.

Изучение хаотических явлений в нелинейных динамических системах в последние годы привлекает большое внимание. Как известно [1], одной из возможных причин возникновения хаоса является наличие у системы орбит, гомоклинических к инвариантным многообразиям гиперболического типа. Проблемы, связанные с существованием и нахождением гомоклинических траекторий данных динамических систем, являются весьма сложными даже в простейших случаях, когда инвариантное многообразие представляет собой точку покоя [2,3]. В ряде случаев интерес представляет и обратная задача - построение динамической системы, заведомо обладающей гомоклинической траекторией. В настоящей работе приводится конструкция, позволяющая по данной динамической системе построить систему, которая совпадает с исходной в некоторой окрестности состояния равновесия и имеет к нему гомоклиническую траекторию.

Итак, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in R^n \quad (1)$$

где $F: V \rightarrow R^n$ - гладкое (класса C^r , $r \geq 1$) отображение открытой окрестности V начала координат в R^n . Будем предполагать, что $x=0$ является гиперболической точкой покоя системы. Целью дальнейших построений является определение гладких (класса C^r , $r \geq 1$) вектор-функций $G(x)$ таких, что $F(x)=G(x)$ в некоторой окрестности точки $x=0$, а динамическая система $\dot{x}=G(x)$ обладает гомоклинической траекторией.

Выберем одну из устойчивых и одну из неустойчивых траекторий, стремящихся к точке покоя при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow -\infty$, соответственно. Построим сферу $S_\varepsilon = \{x \in R^n \mid \|x\| = \varepsilon\}$ радиуса ε с центром в начале координат так, чтобы она лежала в области V , и обозначим точки пересечения выбранных траекторий с этой сферой через x_s, x_u . Введем единичные векторы $\Omega = x/\|x\|$, $\Omega_s = x_s/\|x_s\|$, $\Omega_u = x_u/\|x_u\|$ и определим конусы

$$K_{\Omega_s}^\gamma = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid \|\Omega - \Omega_s\| < \gamma \},$$

$$K_{\Omega_u}^\gamma = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid \|\Omega - \Omega_u\| < \gamma \}.$$

Рассмотрим $(n-1)$ -мерные множества $U^l(\mathbf{x}_s)$, $U^l(\mathbf{x}_u)$, являющиеся пересечениями сферы S_ε с конусами $K_{\Omega_s}^\gamma$, $K_{\Omega_u}^\gamma$.

Вследствие непрерывности правых частей при достаточно малых ε найдется такое значение γ , что

$$(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) < 0, \quad \mathbf{x} \in U^l(\mathbf{x}_s),$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) > 0, \quad \mathbf{x} \in U^l(\mathbf{x}_u),$$

то есть множества $U^l(\mathbf{x}_s)$, $U^l(\mathbf{x}_u)$ являются сечениями векторного поля, причем поток на $U^l(\mathbf{x}_s)$ направлен внутрь области, ограниченной S_ε , а на $U^l(\mathbf{x}_u)$ - наружу.

С целью построения гомоклинической траектории изменим правые части системы (1) в области $\|\mathbf{x}\| > \varepsilon$. Выберем некоторое значение κ так, чтобы сфера $S_{\varepsilon+4\kappa}$ лежала в области V , и рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x}) = & \mathbf{F}(\mathbf{x})\eta^{\gamma/4}(\|\Omega - \Omega_s\| - \gamma/2)\eta^{\gamma/4}(\|\Omega - \Omega_u\| - \gamma/2) + \\ & + (1 - \eta^{\gamma/4}(\|\Omega - \Omega_s\| - \gamma/2))[-\Omega\eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta) + \mathbf{F}(\varepsilon\Omega)(1 - \eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta))] + \\ & + (1 - \eta^{\gamma/4}(\|\Omega - \Omega_u\| - \gamma/2))[\Omega\eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta) + \mathbf{F}(\varepsilon\Omega)(1 - \eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta))] \end{aligned} \quad (3)$$

при $0 < \delta < \kappa$. Здесь $r = \|\mathbf{x}\|$, $\eta_q(\vartheta)$ - бесконечно гладкая неубывающая функция, принимающая значение 0 при $\vartheta < -q$ и значение 1 при $\vartheta > q$. Второе и третье слагаемые в формуле для $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ описывают переход от $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ к значениям $(-\Omega)$ и Ω внутри конусов $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$ и $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$, соответственно, при росте r от $\varepsilon + \delta/2$ до $\varepsilon + 3\delta/2$ (области I и II на рисунке). Поэтому на сфере S_ε вектор-функция $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ совпадает с заданной правой частью $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, а на пересечении сферы $S_{\varepsilon+2\delta}$ с конусами $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$ и $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$ - с единичными векторами $(-\Omega)$ и Ω .

Покажем, что значение δ можно выбрать таким образом, чтобы траектории, проходящие через \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_s , пересекали сферу $S_{\varepsilon+2\delta}$ внутри конусов $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$, $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$. Для этого рассмотрим систему с правой частью

$$\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{x}), & \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon, \\ \mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x}), & \varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + 4\kappa. \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ непрерывна в шаре $W_{\varepsilon+4\kappa} = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + 4\kappa \}$, то существует константа M_1 такая, что

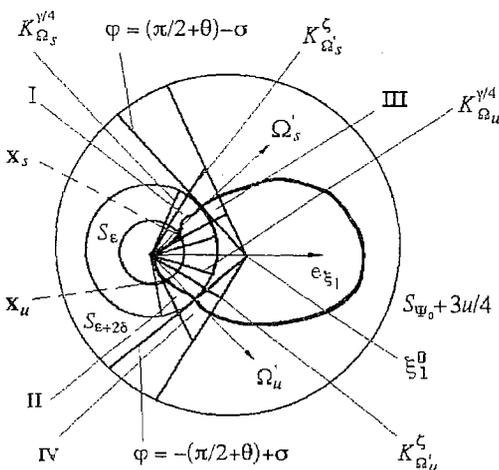
$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leq M_1, \quad \mathbf{x} \in W_{\varepsilon+4\kappa}.$$

Тогда для $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ в шаровом слое $\varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + 4\kappa$ согласно (3) имеем

$$\|\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})\| \leq M_1 + (1 + M_1) + (1 + M_1) = L_1,$$

и, следовательно, вектор-функция $\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x})$ ограничена в шаре $W_{\varepsilon+4\kappa}$

$$\|\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x})\| \leq L_1, \quad \mathbf{x} \in W_{\varepsilon+4\kappa}. \quad (5)$$



Структура окрестности точки покоя сконструированной системы с гомоклинической траекторией

Согласно оценке (5) можно утверждать, что траектория системы с правой частью $G_1^\delta(x)$, выпущенная из произвольной точки шара $W_{\varepsilon+2\kappa}$, за время $t < 2\kappa/L_1$ не уходит на расстояние большее, чем $L_1 t$. Пусть l - минимальное расстояние от x_u до точек границы конуса $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$. Тогда при $t < t^* = \min\{2\kappa/L_1, l/L_1\}$ траектория, выпущенная из x_u , остается внутри $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$. Оценим \dot{r} для таких времен. Для системы с правой частью (4) найдем

$$\dot{r} = \sum_{i=1}^n x_i \dot{x}_i / r = \sum_{i=1}^n \Omega_i \dot{x}_i = (\Omega, G_1^\delta(x)).$$

Для x из конуса $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$ в соответствии с (3) имеем

$$\dot{r} = \eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta) + (\Omega, F(\varepsilon\Omega)) (1 - \eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta)). \quad (6)$$

Согласно оценке (2) скалярное произведение $(\Omega, F(\varepsilon\Omega))$ положительно для $\Omega \in K_{\Omega_u}^\gamma$, поэтому существует константа $m_1 > 0$ такая, что

$$m_1 < (\Omega, F(\varepsilon\Omega)), \quad \Omega \in K_{\Omega_u}^{\gamma/4}.$$

Пусть $l_1 = \min\{1, m_1\}$. Тогда, согласно (6),

$$\dot{r} > l_1$$

и для траектории, начинающейся на сфере S_ε и не выходящей из конуса $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$, выполняется неравенство

$$r(t) > \varepsilon + l_1 t.$$

Выберем δ_u из интервала $[0, \kappa]$ так, чтобы выполнялось неравенство $2\delta_u < l_1 t^*$. Тогда за время $t < t^*$ траектория, выпущенная из x_u , достигнет сферы $S_{\varepsilon+2\delta_u}$, оставаясь внутри конуса $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$.

Обращая время и проводя аналогичные рассуждения в окрестности точки x_s , найдем $\delta_s \in [0, \kappa]$ такое, что траектория, выпущенная из x_s , пересекает сферу $S_{\varepsilon+2\delta_s}$, оставаясь внутри $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$.

Полагая в (3) $\delta = \min\{\delta_u, \delta_s\}$, можно утверждать, что точки x'_u и x'_s , по которым траектории, проходящие через точки x_u и x_s , пересекают сферу $S_{\varepsilon+2\delta}$, лежат внутри конусов $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$ и $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$, соответственно. Это, в свою очередь, означает, что векторное поле в точках x'_u и x'_s совпадает с векторами $\Omega'_u = x'_u / \|x'_u\|$ и $-\Omega'_s = -x'_s / \|x'_s\|$.

Сконструируем теперь правые части системы вне шара $W_{\varepsilon+2\delta}$ так, чтобы существовала траектория, соединяющая точки x'_u , x'_s . С этой целью выберем новую координатную систему следующим образом. Поскольку при достаточно малых ε и δ точки x'_u и x'_s не совпадают и не лежат на концах одного диаметра, то векторы x'_u и x'_s линейно независимы. Это позволяет выбрать орты $e_{\xi 1}$, $e_{\xi 2}$ новой координатной системы в линейной оболочке $\mathcal{L}(x'_u, x'_s)$ векторов x'_u , x'_s . Положим

$$e_{\xi 1} = \Omega_0 = (\Omega'_u + \Omega'_s) / \|\Omega'_u + \Omega'_s\|, \quad (e_{\xi 1}, e_{\xi 2}) = 0, \quad (e_{\xi 2}, \Omega'_s) > 0.$$

В качестве ортов $e_{\xi 3}, \dots, e_{\xi n}$ используем произвольный ортонормированный базис ортогонального дополнения к $\mathcal{L}(x'_u, x'_s)$. Пусть переход между старым и новым ортонормальными базисами задается матрицей A

$$x = A \xi, \quad \xi = A^{-1} x.$$

Построение гомоклинической траектории, соединяющей точки x'_u , x'_s будем осуществлять с помощью системы $\dot{\xi} = \mathbf{H}(\xi)$, вектор-функция \mathbf{H} в правой части которой задается равенствами

$$\begin{aligned}
H_1(\xi) &= -\omega(\xi_2 - \xi_2^0) - \beta(\xi_1 - \xi_1^0)((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2} - \alpha/((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2}, \\
H_2(\xi) &= \omega(\xi_1 - \xi_1^0) - \beta(\xi_2 - \xi_2^0)((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2} - \alpha/((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2}, \\
H_i(\xi) &= 0, \quad 3 \leq i \leq n.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\xi_1^0 = (\varepsilon + 2\delta)/\cos\theta, \quad \cos 2\theta = (\Omega'_u, \Omega'_s), \quad \xi_2^0 = 0. \tag{8}$$

Эта система описывает движения, параллельные плоскости ξ_1, ξ_2 . В этой плоскости в полярных координатах

$$\rho = ((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg((\xi_2 - \xi_2^0)/(\xi_1 - \xi_1^0))$$

с центром в (ξ_1^0, ξ_2^0) она имеет вид

$$\dot{\rho} = -\beta(\rho - \alpha), \quad \dot{\varphi} = \omega. \tag{9}$$

Гладкое сращивание векторных полей $\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})$ проведем следующим образом. Выберем число ζ так, чтобы конус $K_{\Omega_s^\zeta}$ лежал внутри $K_{\Omega_u}^{\zeta/4}$, а конус $K_{\Omega_u}^\zeta$ - внутри $K_{\Omega_s}^{\zeta/4}$. Для $\mathbf{x} \in S_{\varepsilon+2\delta} \cap K_{\Omega_s^\zeta}$ векторное поле совпадает с $-\Omega$, а для $\mathbf{x} \in S_{\varepsilon+2\delta} \cap K_{\Omega_u}^\zeta$ - с Ω . Поскольку конусы $K_{\Omega_s^\zeta}, K_{\Omega_u}^\zeta$ не пересекаются, то существует ν такое, что $K_{\Omega_0}^\nu \cap K_{\Omega_s^\zeta} = \emptyset, K_{\Omega_0}^\nu \cap K_{\Omega_u}^\zeta = \emptyset$. Обозначим разность $\xi_1^0 - \varepsilon - 2\delta$ через ν и определим правые части системы вне шара $W_{\varepsilon+2\delta}$ формулой

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x}) &= \eta_{\lambda/4}(\psi_0 - \psi(\mathbf{x}) + \lambda/2)\{\eta_{\nu/4}(\|\Omega - \Omega_0\| - \nu/2)[\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})(\eta_{\sigma/4}(\varphi(\mathbf{x}) - \\
&- (\pi/2 + \theta) + \sigma/2) + \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)) + (1 - \eta_{\sigma/4}(\varphi(\mathbf{x}) - \\
&- (\pi/2 + \theta) + \sigma/2))(1 - \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2))\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})] + \\
&+ (1 - \eta_{\nu/4}(\|\Omega - \Omega_0\| - \nu/2))[\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})\eta_{\mu/4}(\varepsilon + \delta + \mu/2 - r) + \\
&+ \mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})(1 - \eta_{\mu/4}(\varepsilon + 2\delta + \mu/2 - r))]\} + \mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})(1 - \eta_{\lambda/4}(\psi_0 - \psi(\mathbf{x}) + \lambda/2)).
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\psi_0 = 2(\varepsilon + 2\delta) + \nu$; $\psi(\mathbf{x}) = \|\xi(\mathbf{x}) - \xi^0\|$, $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, 0, \dots, 0)^T$; $\mu = \xi^0 \cos\theta / \cos(\theta - \tau) - \varepsilon - 2\delta$, $\tau = 2\arccos(\nu/2)$; λ - произвольное положительное число. Согласно этому выражению вектор-функция $\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})$ совпадает с $\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})$ вне шара с радиусом $\psi_0 + 3\lambda/4$ и центром в точке $A^{-1}\xi^0$; первый член в фигурных скобках описывает переход от $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ к $\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})$ в областях III и IV (см. рисунок) вне конуса $K_{\Omega_0}^{3\nu/4}$, а второй - переход от $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ к $\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})$ внутри $K_{\Omega_0}^{3\nu/4}$.

Покажем теперь, что для значений параметра ω из некоторого интервала величину σ можно выбрать так, чтобы траектория, выпущенная из \mathbf{x}'_u , пересекла гиперплоскость $\varphi = -(\pi/2 + \theta) + \sigma$, оставаясь внутри $K_{\Omega_u}^\zeta$. Для этого прежде всего оценим максимальное расстояние, на которое может уйти траектория из точки \mathbf{x}'_u за время t . Зафиксируем некоторое $\chi > 0$ и рассмотрим систему с правой частью (10) на множестве $K_{\Omega_u}^\zeta \cap D^\chi$, где

$$D^\chi = \{\mathbf{x} \in R^n \mid -(\pi/2 + \theta) < \varphi(\mathbf{x}) < -(\pi/2 + \theta) + \chi\}.$$

При $\sigma < \chi$ вектор-функция $\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})$ на этом множестве имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x}) &= \Omega \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)) + \\ &+ (1 - \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)) \mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (11)$$

В силу непрерывности $\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})$ в замыкании множества $K_{\Omega'u}\zeta \cap D^\chi$, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})\| &\leq 1 + M_2^u = L_2^u, \\ M_2^u &= \max_{\mathbf{x} \in K_{\Omega'u}\zeta \cap D^\chi} \|\mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть l_ζ - минимальное расстояние от \mathbf{x}'_u до точек границы конуса $K_{\Omega'u}\zeta$. Тогда траектория, выпущенная из \mathbf{x}'_u , не выйдет из конуса $K_{\Omega'u}\zeta$ в течение времени $t < l_\zeta/L_2^u$. Заметим, что для точек из $K_{\Omega'u}\zeta \cap D^\chi$, принадлежащих плоскости векторов $\mathbf{x}'_s, \mathbf{x}'_u$, правая часть (11) лежит в $\mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s)$. Вследствие этого движение указанных точек под действием дифференциального потока $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})$ будет плоским и его можно описать во введенных ранее полярных координатах ρ, φ . При этом

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= (\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x}), \mathbf{e}_\varphi)/\rho = (\Omega, \mathbf{e}_\varphi) \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)/\rho + \\ &+ \omega(1 - \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)), \end{aligned}$$

где \mathbf{e}_φ - орт полярной системы координат. Как легко видеть (см. рисунок), вектор \mathbf{e}_φ совпадает с Ω в точке \mathbf{x}'_u и, следовательно, при достаточно малых ζ и χ можно считать, что

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_u^{\sigma, \chi}} (\Omega, \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{x})) > 1/2,$$

где $\mathcal{M}_u^{\sigma, \chi} = \mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s) \cap K_{\Omega'u}\zeta \cap D^\chi$. Пусть

$$\rho_u = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_u^{\sigma, \chi}} \rho(\mathbf{x}).$$

Тогда для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_u^{\sigma, \chi}$ справедлива оценка

$$\dot{\varphi} > \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)/(2\rho_u) + \omega(1 - \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)),$$

При $0 < \omega < 1/(2\rho_u)$ имеем

$$\dot{\varphi} > \omega,$$

откуда

$$-(\pi/2 + \theta) + \omega t < \varphi(\mathbf{x}(t)).$$

Если величина σ такова, что $\sigma < \omega l_\zeta/L_2^u$, то траектория, выпущенная из \mathbf{x}'_u , достигнет гиперплоскости $\varphi = -(\pi/2 + \theta) + \sigma$ за время $t < l_\zeta/L_2^u$, не выходя за пределы $K_{\Omega'u}\zeta$. Аналогичные рассуждения можно провести и для окрестности точки \mathbf{x}'_s . Выбирая ω из интервала $(0, \min\{1/2\rho_u, 1/2\rho_s\})$ и $\sigma < \min\{\omega l_\zeta/L_2^u, \omega l_\zeta/L_2^s\}$, можно добиться того, чтобы траектории, проходящие через \mathbf{x}'_u и \mathbf{x}'_s , пересекали гиперплоскости $\varphi = -(\pi/2 + \theta) + \sigma$, $\varphi = (\pi/2 + \theta) - \sigma$ в точках, принадлежащих конусам $K_{\Omega'u}\zeta$ и $K_{\Omega's}\zeta$. Будем полагать, что выбранное значение σ достаточно мало, так что выполняется неравенство $\sigma < \theta$.

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x}), & \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + 2\delta, \\ \mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x}), & \|\mathbf{x}\| > \varepsilon + 2\delta. \end{cases} \quad (13)$$

Для точек из множества $P_\sigma = \{\mathbf{x} \in R^n \mid -(\pi/2+\theta)+\sigma \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq (\pi/2+\theta)-\sigma\}$ правые части (10) совпадают с $\mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})$, поэтому для $\mathbf{x} \in P_\sigma \cap \mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s)$ система (13) сводится к системе (9), решение которой имеет вид

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \rho = \alpha + (\rho_0 - \alpha)\exp(-\beta t) = \alpha + (\rho_0 - \alpha)\exp(-\beta(\varphi - \varphi_0)/\omega).$$

Определим величины ρ_{\min}, ρ_{\max} :

$$\rho_{\min} = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in K_{\Omega'_s} \cap \mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s) \\ \varphi(\mathbf{x}) = (\pi/2+\theta) - \sigma}} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho_{\max} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in K_{\Omega'_s} \cap \mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s) \\ \varphi(\mathbf{x}) = (\pi/2+\theta) - \sigma}} \rho(\mathbf{x}).$$

Пусть траектории системы (13), выпущенные из точек \mathbf{x}'_u и \mathbf{x}'_s , пересекают гиперплоскости $\varphi(\mathbf{x}) = -(\pi/2+\theta)+\sigma$ и $\varphi(\mathbf{x}) = (\pi/2+\theta)-\sigma$ в точках \mathbf{x}''_u и \mathbf{x}''_s , соответственно. Обозначим $\rho_s = \rho(\mathbf{x}''_s)$, $\rho_u = \rho(\mathbf{x}''_u)$, $\Delta = \min\{|\rho_s - \rho_{\min}|, |\rho_s - \rho_{\max}|\}$. Значение ρ^* для образа точки \mathbf{x}''_u на гиперплоскости $\varphi(\mathbf{x}) = (\pi/2+\theta)-\sigma$ при отображении, определяемом (13), будет

$$\rho^*(\alpha, \beta) = \alpha + (\rho_u - \alpha)\exp(-\beta(\pi+2\theta-2\sigma)/\omega).$$

Покажем, что можно найти значения параметров α, β , для которых будет справедливо равенство

$$\rho^*(\alpha, \beta) = \rho_s. \quad (14)$$

Выберем значение β так, чтобы

$$2(\rho_{\max} - \rho_{\min}) \exp(-\beta\pi/\omega) < \Delta/4.$$

Тогда при $\alpha = \alpha_1 = \rho_s - \Delta/2$ имеем

$$\rho^*(\alpha_1, \beta) = \rho_s - \Delta/2 + (\rho_u - \rho_s + \Delta/2) \exp(-\beta(\pi+2\theta-2\sigma)/\omega) < \rho_s - \Delta/4.$$

В то же время подстановка $\alpha = \alpha_2 = \rho_s + \Delta/2$ в $\rho^*(\alpha, \beta)$ дает

$$\rho^*(\alpha_2, \beta) = \rho_s + \Delta/2 + (\rho_u - \rho_s - \Delta/2) \exp(-\beta(\pi+2\theta-2\sigma)/\omega) > \rho_s + \Delta/4.$$

Вследствие непрерывной зависимости ρ^* от параметра α найдется такое значение $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, для которого будет справедливо равенство (14), что и означает существование гомоклинической траектории для системы (13). Поскольку вектор-функция $\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x})$ совпадает с $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ в шаре $\|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$, то построенная система (13) решает поставленную задачу.

Предложенный метод построения динамических систем с гомоклинической траекторией справедлив и для более общего случая, когда положение равновесия исходной системы имеет хотя бы одну устойчивую и хотя бы одну неустойчивую траектории.

В заключение автор благодарит А.С. Зильберглейта и Е.В. Галактионова за полезные обсуждения и интерес к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда
Фундаментальных Исследований по проекту 93-02-2611.

Библиографический список

1. *Wiggins S.* Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods (Applied mathematical science. Vol.73), Springer - Verlag: New York Inc. 1988, 494p.

2. *Бакалейников Л.А., Галактионов Е.В.* Существование гомоклинической траектории в модели связанной спиновой системы электронов и ядер в полупроводниках при условиях оптической ориентации // ЖТФ. 1994. Т. 64, вып.10. С. 8.

3. *Bakaleinikov L.A., Silbergleit A.S.* On the applicability of the approximate Poincare' mapping to the analysis of dynamics induced by ODE systems. I. Proximity of mappings // Physica D. 1995. Vol.83. P.326.

Физико-технический институт
им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт Петербург

Поступила в редакцию 27.12.94
после переработки 30.10.95

ON THE METHOD OF THE CONSTRUCTION OF THE DYNAMIC SYSTEM WITH THE HOMOCLINIC TRAJECTORY OF SADDLE EQUILIBRIUM POINT

L.A. Bakaleinikov

The task of the creation of the system that has the homoclinic trajectory and co-insides with the initial one in some vicinity of equilibrium point from the system with saddle point is solved in the paper. The way of the construction of the right parts of the modified system is given.



Бакалейников Леонид Александрович родился в Ленинграде (1951), окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе РАН (1985). В настоящее время работает старшим научным сотрудником ФТИ. Область научных интересов: линейная теория переноса, асимптотические методы, динамические системы, численное моделирование.



СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С РАЗЛИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ. Часть I

С.А. Кащенко

С помощью специального асимптотического метода большого параметра исследуются аттракторы различных типов автогенераторов, отличающихся нелинейным элементом с запаздыванием. Сформулированы условия существования и построены асимптотики устойчивых медленно осциллирующих релаксационных циклов и более сложных аттракторов при условии низкой добротности фильтра.

Введение

Одной из простейших базовых моделей автогенераторов с запаздывающими обратными связями является уравнение [1]

$$\ddot{x} + ax + bx = \lambda F(x(t-T)). \quad (1)$$

Модель другого типа автогенераторов основана на уравнении [2]

$$\ddot{x} + ax + bx = \lambda dF(x(t-T))/dt. \quad (2)$$

Уравнения (1),(2) использовались в работах [1-6]. Было выявлено много общих свойств и много отличий. В настоящей работе на базе асимптотических методов, развитых в работах [7-9], предпринята попытка дать сравнительный анализ динамических свойств как уравнений (1), (2), так и более сложных, но базирующихся на (1), (2), уравнений. Основное предположение, открывающее путь к использованию асимптотических методов, заключается в том, что параметр λ предполагается достаточно большим: $\lambda \gg 1$. Отметим, что это предположение осмыслено и с чисто физической точки зрения. В этой связи обратим внимание на работу [3], где с помощью вычислений на ЭВМ раскрыт термин «достаточно большое значение λ ».

Относительно линейной части, то есть коэффициентов a и b , введем предположение

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Нелинейная функция $F(x)$ предполагается гладкой, но главное

предположение и в случае уравнения (1), и в случае уравнения (2) состоит в том, что эта нелинейность имеет простое поведение на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = f_1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = f_2.$$

Как оказывается, важным показателем, существенно влияющим на динамику, является показатель скорости стремления $F(x)$ к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$. В настоящей работе считаем, что для некоторого $p > 0$

$$F(x) = \begin{cases} f_1, & x < -p, \\ f(x), & |x| \leq p, \\ f_2, & x > p, \end{cases} \quad (3)$$

а в третьей части рассмотрены случаи, когда стремление $F(x)$ к $f_{1,2}$ носит степенной или экспоненциальный характер.

Наиболее простые результаты рассмотрения динамики уравнений (1),(2) приведены в первой части. Здесь построены медленно колеблющиеся релаксационные периодические решения и приведены результаты анализа динамики при внешних периодических воздействиях. Во второй части ограничения на коэффициенты a и b таковы, что свойства нелинейных уравнений принципиально усложняются. Там построены наборы аттракторов в фазовых пространствах рассматриваемых уравнений и с помощью явно построенных отображений определена структура этих аттракторов.

Общий вывод состоит в том, что влияние нелинейности на динамику уравнений носит интегральный характер: важны лишь параметры, вычисляемые с помощью некоторых интегралов от нелинейностей.

Здесь же отметим, что отличительные свойства решений уравнений (1),(2) носят, как правило, не количественный, а качественный характер: не только структура аттрактора, но даже порядки амплитуд решений при $\lambda \rightarrow \infty$ оказываются существенно различными.

Отметим, что для уравнения (1) принципиально различаются случаи, когда $f_1=f_2=0$ и когда $f_{1,2} \neq 0$. Здесь остановимся только на случае $f_1=f_2=0$. Исследованию динамики при условии $f_{1,2} \neq 0$ будет посвящена отдельная публикация.

1. Основные утверждения

Рассмотрим линейное уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0.$$

Кроме положительности коэффициентов a и b основным предположением этого раздела является выполнение неравенства

$$a^2 \geq 4b, \quad (4)$$

которое означает, что корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения вещественны. Это неравенство является условием низкодобротного фильтра. Исследованию динамики в случае высокодобротного фильтра будет посвящена отдельная публикация. Пусть, для определенности,

$$\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0.$$

Относительно функции $F(x)$ для уравнения (2) предполагаем, что имеет место формула (3), а для уравнения (1) в формуле (3) имеем

$$f_1 = f_2 = 0. \quad (5)$$

Таким образом, правая часть и уравнениях (1) и (2) при $|x(t-T)| > p$ принимает нулевое значение.

Исследуем вопрос о поведении решений уравнений (1) и (2) при условии $\lambda \gg 1$.

Чтобы сформулировать основные утверждения этой части, введем несколько обозначений. Положим

$$\gamma_{\pm} = \int_0^T \exp(\lambda_1 s) F(\pm p \exp(\lambda_1 s)) ds.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4), (5), и пусть $\gamma_{+} > 0$ ($\gamma_{-} < 0$). Тогда при достаточно больших λ уравнение (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение $x_0(t, \lambda)$ с периодом $T(\lambda)$, причем $T(\lambda) = |\lambda_1|^{-1}(1+o(1))\ln(\lambda)$, амплитуда имеет порядок $O(\lambda)$ (при $\lambda \rightarrow \infty$) и функция $x_0(t, \lambda)$ положительна (отрицательна) на асимптотически большом интервале (порядка $\ln \lambda$) из отрезка длины периода. Если же при условиях (4), (5) выполнены два неравенства $\gamma_{+} < 0$ и $\gamma_{-} > 0$, то при достаточно больших λ уравнение (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение $x_0(t, \lambda)$ с периодом $T(\lambda) = 2|\lambda_1|^{-1}(1+o(1))\ln(\lambda)$ и с амплитудой порядка $O(\lambda)$, причем функция $x_0(t, \lambda)$ положительна на интервале порядка $\ln \lambda$ и отрицательна на интервале порядка $\ln \lambda$ из отрезка длины периода.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (4) и $\gamma_{\pm} \neq 0$. Тогда при достаточно больших λ уравнение (2) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение $x_0(t, \lambda)$ с периодом $T(\lambda) = 2|\lambda_1|^{-1}(1+o(1))\ln \lambda$ и амплитудой порядка $O(\lambda)$.

Детальная асимптотика $x_0(t, \lambda)$ в условиях теорем 1 и 2 будет построена в следующем разделе.

Из приведенных теорем следуют важные выводы. Во-первых, в качественном плане динамика уравнений (1) и (2) при больших λ и при условии (4) однотипна, и во-вторых, построенные аттракторы рассматриваемых уравнений имеют простейшую структуру. Отметим, что эти уравнения могут иметь и другие аттракторы, состоящие из решений конечной при $\lambda \rightarrow \infty$ амплитуды. Например, при условии $F(0) = F'(0) = 0$ устойчивым при всех $\lambda > 0$ является нулевое состояние равновесия. Отсюда, в частности, вытекает, что устойчивые режимы, переходящие в $x_0(t, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, могут возникать жестко при увеличении параметра λ . Еще один общий вывод для уравнений (1) и (2) такой: при условии (4) и при больших λ значение времени запаздывания существенной роли не играет. Правда, следует иметь в виду [3], что значения λ , при которых начинают «работать» теоремы 1 и 2, резко увеличиваются с ростом параметра T .

2. Доказательство теорем 1 и 2

В качестве фазового пространства уравнений (1) и (2) удобно выбрать прямое произведение пространства непрерывных на отрезке $[-T, 0]$ функций $C_{[-T, 0]}$ на числовую ось R^1 . Через $S_{\pm}(\delta)$ обозначим подмножество пространства $C_{[-T, 0]}$, определяемое формулой

$$S_{\pm}(\delta) = \{\phi(s) \in C_{[-T, 0]}^1: \phi(0) = \pm p, |\phi(s)| \geq p, |\phi(s) \pm p \exp(\lambda_1 s) + \dot{\phi}(s) \pm p \lambda_1 \exp(\lambda_1 s)| \leq \delta\}.$$

Обозначим через $x(t+s, \phi)$ решение уравнения (1) или (2) с начальными условиями, заданными при $t=0$

$$x(s, \phi) = \phi(s) \quad (s \in [-T, 0]), \quad \dot{x}(0, \phi) = \dot{\phi}(0),$$

где $\phi(s) \in S_{\pm}(\delta)$. Параметр δ будем считать достаточно малым (но независимым от λ).

Рассмотрим вопрос об асимптотике $x(t, \phi)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Пусть сначала $t \in [0, T]$. Из (1) тогда получаем, что

$$x(t, \phi) = \pm p \exp(\lambda_1 t) + O(\delta).$$

При $t \in [T, 2T]$ выражение для $x(t, \phi)$ имеет вид

$$x(t, \phi) = \pm p \exp(\lambda_1 t) + \lambda \int_T^t K(t-s) g(O(\delta) \pm p \exp(\lambda_1(s-T))) ds + O(\delta), \quad (6)$$

где

$$K(t) = \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} [\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)], & \text{при } \lambda_1 > \lambda_2, \\ t \exp(\lambda_1 t), & \text{при } \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} F(s) & \text{в случае уравнения (1),} \\ dF(s)/ds & \text{в случае уравнения (2).} \end{cases}$$

Из (6), в частности, вытекает равенство

$$\dot{x}(2T, \phi) = \lambda \alpha_{\pm} [1 + O(\lambda^{-1}) + O(\delta)],$$

где

$$\dot{x}(2T, \phi) = \lambda \beta_{\pm} [1 + O(\lambda^{-1}) + O(\delta)],$$

$$\alpha_{\pm} = \int_0^T K(T-s) g(\pm p \exp(\lambda_1 s)) ds,$$

$$\beta_{\pm} = \int_0^T K(T-s) g(\pm p \exp(\lambda_1 s)) ds.$$

Ситуацию при $t > 2T$ рассмотрим отдельно для каждого из уравнений (1) и (2). В случае уравнения (1) для каждого фиксированного значения $m > 0$ на промежутке $[2T, 2T+m]$ изменения t имеют место формулы

$$x(t, \phi) = \lambda [c_1 \exp(\lambda_1(t-2T)) + c_2 \exp(\lambda_2(t-2T))] \quad (\text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2), \quad (7)$$

$$x(t, \phi) = \lambda [d_1(t-2T) \exp(\lambda_1(t-2T)) + d_2 \exp(\lambda_2(t-2T))] \quad (\text{при } \lambda_1 = \lambda_2), \quad (8)$$

в которых

$$c_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \gamma_{\pm} + O(\delta) + O(\lambda^{-1}), \quad d_1 = \gamma_{\pm} + O(\delta) + O(\lambda^{-1}).$$

Поскольку $\gamma_{\pm} \neq 0$ (в условиях теорем 1 и 2), то из (7) и (8) приходим к выводу о том, что в течение асимптотически большого (порядка $\ln \lambda$) отрезка времени решение $x(t, \phi)$ принимает асимптотически большие значения. Возможно, что при некоторых t из отрезка $[2T, 2T+m]$ функция $x(t, \phi)$ принимает значения порядка 1. Это происходит, когда выражение, стоящее в квадратных скобках уравнения (7) или (8), обращается в нуль в некоторой точке. Тем не менее, нелинейность не внесет вклада в главный член асимптотического представления $x(t, \phi)$, поскольку значения порядка единицы принимаются на асимптотически малом отрезке времени при $\lambda \rightarrow \infty$.

В случае уравнения (2) формулы несколько сложнее. Введем еще несколько обозначений. Положим

$$\beta_{\pm}(t-T) = \int_0^{t-T} K(t-T-s) [dF(\pm p \exp(\lambda_1 s)) / ds] ds,$$

а через $\tau=\tau(\lambda)$ обозначим первый положительный корень уравнения $|\pm p \exp(\lambda_1 T) + \lambda \beta_{\pm}(\tau)|=p$. Отметим, что при $t \in [T, 2T]$ равномерно верна формула

$$x(t, \lambda) = \pm p \exp(\lambda_1 t) + \lambda[\beta_{\pm}(t) + o(1)].$$

При $t=2T+\tau(\lambda)$ выражение для $x(2T+\tau(\lambda), \lambda)$ меняется «мало», то есть

$$x(2T + \tau(\lambda), \lambda) = \lambda \alpha_{\pm}[1+o(1)],$$

а для $\dot{x}(2T+\tau(\lambda), \lambda)$ имеем

$$\dot{x}(2T+\tau(\lambda), \lambda) = \lambda[\beta_{\pm} + f_{\tau} - F(\pm p \exp(\lambda_1 t)) + o(1)],$$

где

$$f_{\tau} = F(\pm p \exp(\lambda_1 t + \lambda \beta_{\pm}(t))) = \begin{cases} f_1, & \text{если } \beta_{\pm} > 0, \\ f_2, & \text{если } \beta_{\pm} < 0. \end{cases}$$

Далее, для каждого фиксированного $m > 0$ при $t \in [2T+\tau(\lambda), 2T+m]$ асимптотические формулы для $x(t, \lambda)$ легко получить, интегрируя «шагами». При этом за исключением нескольких промежутков (количество таких при $t > 3T$ не превышает двух) суммарной длины $O(\lambda^{-1})$ функция $x(t, \lambda)$ является решением линейного однородного уравнения второго порядка. Ясно, что найдется такое $m_0 > 2T$, что при $t > m_0$ решение $x(t, \lambda)$ знакопостоянно в течение асимптотически большого (порядка $O(\lambda)$) отрезка времени.

Следующие построения относятся одновременно к уравнению (1) и уравнению (2).

Обозначим через $t(\phi)$ первое (при $t > 3T$) такое выражение, которое определяется условиями $|x(t, \phi)| = p$ или $t(\phi) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Из (7) или (8) тогда получим

$$t(\phi) = |\lambda_1|^{-1} \ln \lambda [1 + O((\ln \lambda)^{-1})],$$

что равномерно относительно $\phi(s) \in S_{\pm}(\delta)$. Введем в рассмотрение оператор последования Π

$$\Pi(\phi(s)) = x(s + t(\phi), \phi).$$

Из приведенных выше построений вытекает, что в зависимости от выбора множеств $S_+(\delta)$ или $S_-(\delta)$ и от знаков γ_+ и γ_- выполнены включения $x(s+t(\phi), \phi) \in S_+(\delta)$ или $x(s+t(\phi), \phi) \in S_-(\delta)$. Тем самым, в условиях приведенных теорем либо $\Pi S_+(\delta) \subset S_+(\delta)$, либо $\Pi S_-(\delta) \subset S_-(\delta)$, $\Pi^2 S_+(\delta) \subset S_+(\delta)$ и $\Pi^2 S_-(\delta) \subset S_-(\delta)$. В силу свойств оператора Π приходим к утверждению о существовании у него неподвижной точки $\phi_0(s)$. Тогда решение $x_0(t, \lambda) = x(t, \phi_0(s))$ будет периодическим с периодом либо $T(\lambda) = t(\phi_0) + t(\Pi(\phi_0)) = 2|\lambda_1|^{-1}(1+o(1)) \ln \lambda$. Устойчивость $x_0(t, \lambda)$ обосновывается путем анализа асимптотики всех мультипликаторов линеаризованного на $x_0(t, \lambda)$ уравнения. Удастся показать, что все мультипликаторы, кроме одного, единичного, стремятся по модулю к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Соответствующие построения просты, но громоздки, поэтому на них не останавливаемся.

3. Медленно осциллирующие режимы в задачах с внешним периодическим воздействием

Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнений

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \lambda F(x(t-T)) + \phi(t), \quad (9)$$

$$\dot{x} + ax + bx = \lambda dF(x(t-T))/dt + \phi(t) \quad (10)$$

при больших λ и при условии (4), которое необходимо для «медленных» осцилляций решений, то есть таких, у которых расстояние между некоторыми соседними экстремумами существенно больше времени запаздывания. Здесь $\phi(t)$ - ω -периодическая функция, а $F(x)$ та же, что и в предыдущих разделах. Поскольку в качественном плане различия между динамикой (9) и (10) невелики, то остановимся только на анализе уравнения (9). Пусть $v(t)$ - периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \phi(t),$$

то есть $v(t) = \int_{-\infty}^t K(t-s)\phi(s)ds$.

Множества типа $S_{\pm}(\delta)$ начальных условий для уравнений (9) вводятся из тех же соображений, что и выше, однако, в силу неавтономности рассматриваемых уравнений, становится важным, в какой конкретный момент времени задаются начальные функции. В связи с этим фиксируем произвольно значение $\tau \in [0, \omega)$ и рассмотрим множества

$$S_{\pm}(\tau, \delta) = \{\phi(s) \in C_{[\tau-T, \tau]}^1, \phi(\tau) = \pm p, |\phi(s+\tau)| \geq p,$$

$$|\phi(s) - v(s) - zp \exp(\lambda_1(s-\tau))| + |\dot{\phi}(s) - \dot{v}(s) - zp\lambda_1 \exp(\lambda_1(s-\tau))| \leq \delta\},$$

где значение $z=z(\tau)$ определяется, соответственно, из равенств

$$v(t) + zp = \pm p.$$

Кроме этого необходимо наложить условие

$$|v(s) + zp \exp(\lambda_1(s-\tau))| \geq p, \text{ при } s \in [-T+\tau, \tau].$$

Тогда при $t \in [\tau, T+\tau]$ имеем равенство

$$x(t, \phi) = v(t) + zp \exp(\lambda_1(t-\tau)) + O(\delta),$$

а при $t \in [\tau+T, \tau+2T]$ для $x(t, \phi)$ верна формула

$$x(t, \phi) = \lambda[\Delta(t, \tau) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})],$$

в которой

$$\Delta(t, \tau) = \int_{\tau+\tau}^t K(t-s)F(v(s-T) + zp \exp(\lambda_1(s-T-\tau)))ds.$$

Для значений t из промежутка $[\tau+2T, \tau+2T+m]$ для каждого фиксированного m имеем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$x(t, \phi) = \lambda[C_1 \exp(\lambda_1(t-2T-\tau)) + C_2 \exp(\lambda_2(t-2T-\tau)) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})],$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2$

$$x(t, \phi) = \lambda \exp(\lambda_1(t-2T-\tau))[C_1(t-2T-\tau) + C_2 + O(\delta) + O(\lambda^{-1})],$$

где

$$C_1 = C_1(\tau) = \int_0^T \exp(\lambda_1(T-s))F(v(s+\tau) + zp \exp(\lambda_1 s)) ds.$$

Для первого корня $t(\phi, \tau)$ уравнения $|x(t, \phi)|=p$ при $t > 2T+\tau+m$ по-прежнему равномерно верно по $\phi(s) \in S_{\pm}(\tau, \delta)$ и τ равенство $t(\phi, \tau) = |\lambda_1|^{-1} \ln(\lambda)[1+o(1)]$, а при $t \in [t(\phi, \tau) - T, t(\phi, \tau)]$ асимптотическая формула для $x(t, \phi)$ имеет вид

$$x(t, \phi) = v(t) + \bar{z}p \exp(\lambda_1(t - t(\phi, \tau))) + o(1), \quad (11)$$

где $\bar{z} = \pm 1 - v(t(\phi, \tau))p^{-1}$. Положим в (11) $t = t(\phi, \tau) + s$. Фиксируем произвольно значение $\theta \in [0, \omega)$ и рассмотрим последовательность $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), где

$$\lambda_n = \exp|\lambda_1| (n\omega + \theta).$$

Тем самым при $\lambda = \lambda_n$ имеем равенство $t(\phi, \tau) = n\omega + \xi$, а величина $\xi = \xi(\tau, \theta)$ с точностью до $o(1)$ (при $n \rightarrow \infty$) определяется из уравнения

$$v(\theta + \xi) + c_1(\tau) \exp(\lambda_1 \xi) = \pm p.$$

В итоге для каждого $\tau \in [0, \omega)$ и $\lambda = \lambda_n$ ($n \rightarrow \infty$) приходим к соотношению

$$\Pi(\phi(s)) = x(s + t(\phi, \tau), \phi) \in S_{\pm}(\bar{\tau}, \delta),$$

а значение $\bar{\tau}$ с точностью до $o(1)$ (при $n \rightarrow \infty$) задается одномерным отображением

$$\bar{\tau} = (\theta + \xi(\tau, \theta)) \bmod \omega. \quad (12)$$

Из самой конструкции множеств $S_{\pm}(\tau, \delta)$ ясно, что динамика отображения (12) определяет динамику аттракторов в исходных уравнениях (9) при $\lambda_n \rightarrow \infty$. Таким образом имеет место

Теорема 3. Пусть отображение (12) имеет грубую k -периодическую траекторию $\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_1, \dots$. Тогда при достаточно больших n и при $\lambda = \lambda_n$ рассматриваемое уравнение (9) имеет периодическое решение $x_k(t, \phi_k)$ той же, что и траектория τ_1, τ_2, \dots устойчивости, причем на некотором отрезке длины T верно включение $x_k(t, \phi_k) \in S_{\pm}(\tau_1, \delta)$.

Приведенные выше формулы раскрывают асимптотику $x_k(t, \phi_k)$ при $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Заметим, что динамические свойства отображения (12) при различных θ могут отличаться. Это говорит о том, что при $\lambda \rightarrow \infty$ может происходить неограниченный процесс «рождения» и «гибели» установившихся режимов уравнения (9) или (10).

Приведенные в этом разделе результаты рассмотрения неравенства (4) легко обобщаются на более сложные уравнения. Например, вместо нелинейной функции $F(x(t - \tau))$ в (1) или (2) может стоять сумма

$$\sum_{j=1}^k F_j(x(t - T_j)) \text{ или } \sum_{j=1}^k F_j(x(t - T_j)).$$

Здесь для каждой из $F_j(x)$ предполагается выполненным равенство типа (3), причем в случае уравнения (1) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} F_j(x) = 0$.

Библиографический список

1. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиотехнике. М.: Наука, 1989.

2. Рождественский В.В., Стручков И.Н. Переходный хаос в автогенераторах стохастических колебаний с жестким возбуждением и четной нелинейностью // ЖТФ. 1992. Т. 62, № 10.

3. Дмитриев А.С., Каценко С.А. Динамика генератора с запаздывающей обратной связью и низкодобротным фильтром второго порядка // Радиотехника и электроника. 1989. № 12. С. 24.

4. *Дмитриев А.С., Кащенко С.А.* Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью // Докл. РАН. 1993. Т. 328, № 2. С. 174.

5. *Стручков И.Н.* Переходный хаос в аperiodическом осцилляторе с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 1.

6. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос // М.: Наука, 1989.

7. *Кащенко С.А.* Пространственно неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Матем. моделирование. 1990. Т. 2, № 9. С. 29.

8. *Кащенко С.А.* Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 3. С. 307.

9. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Асимптотическое исследование явлений мультистабильности в моделях лазера с оптоэлектронной обратной связью // ДАН СССР. 1991. Т. 316, № 2. С. 327.

*Ярославский государственный
университет*

Поступила в редакцию 21.06.95

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE AUTOGENERATORS DYNAMICS WITH DIFFERENT NON-LINEAR DELAY COUPLING

S.A. Kaschenko

The attractors of different types of autogenerators differing by the nonlinear element with delay are studied with the help of the special asymptotic method of a large parameter. It is formulated the conditions of existence and it is constructed the asymptotic behaviours of stable slowly oscillating relaxation cycles and of more complicated attractors under the condition of low quality of filter.



Кащенко Сергей Александрович - родился в 1953 году. Окончил Ярославский государственный университет. В 1990 году защитил докторскую диссертацию (МГУ). С 1991 года - профессор, зав. кафедрой математического моделирования ЯГУ. Область научных интересов - асимптотические методы исследования сложной динамики систем с запаздыванием, систем параболического и гиперболического типов.



НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ФЕРХЮЛЬСТА

О.В. Музычук

Найдены стационарные вероятностные характеристики решения уравнения Ферхюльста с флуктуирующими параметрами. Рассмотрен ряд моделей таких флуктуаций, допускающих точные аналитические решения или представления таковых с помощью цепных дробей. Получены вероятностные характеристики как основной динамической переменной N , имеющей смысл численности популяции, так и обратной ей $S=1/N$, которую можно трактовать как нормированную площадь, приходящуюся на одну особь. Отмечено, что для этой величины удается осуществить более подробное стохастическое описание.

1. Рассмотрим хорошо известное в экологических и других приложениях [1-3] уравнение Ферхюльста с флуктуирующими параметрами

$$N' = a(1+\xi(t))N - b(1+\eta(t))N^2, \quad (1.1)$$

где выражения, стоящие при N и N^2 , имеют смысл трофического коэффициента и коэффициента внутривидовой конкуренции, которые полагаем флуктуирующими. Ниже рассмотрим несколько моделей случайных процессов ξ и η , допускающих в той или иной форме точное стохастическое описание решения уравнения (1.1).

Запишем (1.1) в виде

$$TN' = (1+\xi(t))N - \gamma(1+\eta(t))N^2, \quad (1.2)$$

где $T=1/a$ - время установления стационарной численности $N^*=1/\gamma$, $\gamma=bT$. Введем также переменную $S=1/N$, для которой, как легко видеть, исходное стохастическое уравнение станет линейным

$$TS' + (1+\xi(t))S = \gamma(1+\eta(t)). \quad (1.3)$$

В качестве первой модели рассмотрим гауссовы дельта-коррелированные флуктуации параметров системы

$$\langle \alpha(t) \rangle = 0, \quad \langle \alpha(t)\alpha(t-\tau) \rangle = 2D_\alpha \delta(\tau), \quad \alpha = \xi, \eta,$$

где $\delta(\tau)$ - дельта-функция (здесь и ниже $\langle \dots \rangle$ - статистическое усреднение). Такая модель позволяет использовать аппарат марковских (диффузионных) процессов и ряд аналитических результатов для нее хорошо известен [2-4].

Для среднего значения произвольной дифференцируемой функции $\psi(N)$ стандартными методами [5,6] можно записать кинетическое уравнение

$$Td\langle\psi\rangle/dt = \langle(N - \gamma N^2)d\psi/dN\rangle + D_1\langle(Nd/dN)^2\psi\rangle + \gamma^2 D_2\langle(N^2 d/dN)^2\psi\rangle, \quad (1.4)$$

здесь $D_1 = aD_\xi$, $D_2 = aD_\eta$ - нормированные спектральные мощности соответствующих флуктуаций. Аналогичное уравнение для переменной S имеет вид

$$Td\langle\psi\rangle/dt = \langle(\gamma - S)d\psi/dS\rangle + D_1\langle(Sd/dS)^2\psi\rangle + \gamma^2 D_2\langle d^2\psi/dS^2\rangle \quad (1.5)$$

От (1.4), (1.5) можно перейти к уравнениям Фоккера - Планка для плотностей вероятности, но иногда удобнее непосредственное использование уравнений (1.4), (1.5).

Положив в (1.5) $\psi(S) = S^m$, легко найти рекуррентные соотношения между стационарными значениями S -моментов

$$(1 - mD_1)\langle S^m \rangle = \gamma\langle S^{m-1} \rangle + \gamma^2 D_2(m-1)\langle S^{m-2} \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

а положив здесь $m = -n$, - перейти к соответствующим N -моментам

$$(1 + nD_1)\langle N^n \rangle = \gamma\langle N^{n+1} \rangle - \gamma^2 D_2(n+1)\langle N^{n+2} \rangle. \quad (1.7)$$

Заметим, что первые существуют только при условии $D_1 < 1/m$ (неустойчивость высших моментов линейных систем с белыми флуктуациями параметров хорошо известна [5]). В частности, для среднего значения и дисперсии из (1.6) следуют выражения

$$\langle S \rangle = \gamma / (1 - D_1), \quad \sigma_S^2 = \langle S \rangle^2 [D_1 + D_2(1 - D_1)^2] / (1 - 2D_1). \quad (1.8)$$

Видно, что флуктуации трофического коэффициента ξ приводят к росту средней площади и ее дисперсии, причем последняя увеличивается с ростом D_1 быстрее.

Из (1.7) следует, что стационарные моменты численности существуют только в отсутствие флуктуаций η (см. ниже). Если же $D_2 = 0$, то из (1.7) находим

$$\langle N \rangle = \gamma^{-1}, \quad \langle N^{n+1} \rangle = \gamma^{-1}(1 + nD_1)\langle N^n \rangle, \quad \sigma_N^2 = D_1\langle N \rangle^2. \quad (1.9)$$

Заметим, что стационарное значение средней численности не зависит от вида флуктуаций ξ и совпадает с «невозмущенной» величиной N^* .

Для случая дельта-коррелированных флуктуаций параметров нетрудно найти и стационарные плотности вероятности. Для стохастического уравнения общего вида

$$Tx' = f(x) + g_1(x)\xi(t) + g_2(x)\eta(t) \quad (1.10)$$

стационарное распределение (если оно существует) таково:

$$W_x(x) = C/(G(x))^{1/2} \exp\left(\int f(x)/G(x) dx\right), \quad G(x) = D_1 g_1^2 + D_2 g_2^2. \quad (1.11)$$

В частности, в отсутствие флуктуаций η для распределения численности из (1.11) имеем

$$W_N(N) = CN^{(\varepsilon-1)} \exp(-\gamma\varepsilon N), \quad C = (\varepsilon\gamma)^{\varepsilon} \Gamma^{-1}(\varepsilon), \quad \varepsilon = D_1^{-1}, \quad (1.12)$$

здесь Γ - гамма-функция. Соответствующее S -распределение находится из (1.12) заменой переменной. При наличии флуктуаций η , как следует из (1.11), N -распределение имеет медленно спадающие «крылья» и стационарные моменты численности не существуют. В частности, если $\xi = 0$, распределение имеет вид

$$W_N(N) = [(2\pi D_2)^{1/2} \gamma N^2]^{-1} \exp[-(N^{-1} + \gamma^2)/(2\gamma^2 D_2)]. \quad (1.13)$$

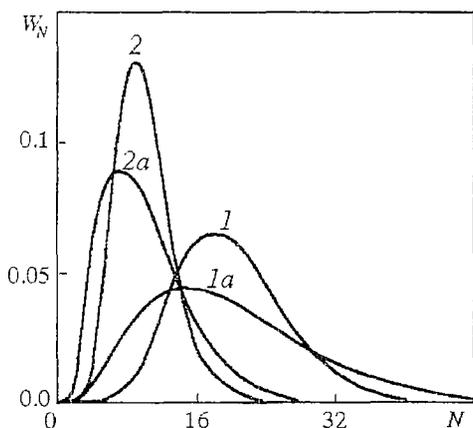


Рис. 1

Отметим, что S -распределение свободно от указанного «недостатка»; в частности, при $\xi=0$ оно будет гауссовым со средним значением и дисперсией, следующими из (1.8)

$$\langle S \rangle = \gamma, \quad \sigma_S^2 = D_2 \langle S \rangle^2. \quad (1.14)$$

На рис. 1 приведены вероятностные распределения (1.12) для различных величин γ и D_i ; кривые 1, 2 - для значений $D_1=0.1$, $\gamma=0.05$ и $\gamma=0.1$, соответственно; кривые 1a, 2a - для $D_1=0.25$ при тех же значениях γ .

В силу линейности стохастического уравнения (1.3) для белых флуктуаций параметров нетрудно найти и стационарный вид ковариационной функции

$$B_S(\tau) = \langle S(t)S(t-\tau) \rangle - \langle S(t) \rangle^2, \quad t \gg T, \quad (1.15)$$

$$B_S(\tau) = \sigma_S^2 \exp(-\tau/T_1), \quad T_1 = T(1-D_1)^{-1},$$

где дисперсия определяется выражением (1.8). Таким образом, S -флуктуации имеют лоренцев спектр с шириной $1/T_1$, зависящей от интенсивности шума ξ . Наличие флуктуаций η не влияет на вид спектра, от них зависит лишь величина дисперсии.

2. Рассмотрим теперь иные модели флуктуаций параметров, допускающие точные решения для вероятностных характеристик системы. Заметим, что в реальной ситуации время корреляции флуктуаций, связанных, например, с сезонными изменениями среды обитания, может быть порядка времени жизни особи и аппроксимация их дельта-коррелированными флуктуациями вряд ли оправдана.

Для случая квазистатических ($\tau_{\text{кор}} \gg T$) флуктуаций параметров вероятностные распределения легко находятся из уравнений (1.2), (1.3) при $d/dt=0$. Так, в отсутствие флуктуаций η получим

$$W_N(N) = \gamma W_\xi(\gamma N - 1), \quad (2.1)$$

где $W_\xi(x)$ - вероятностное распределение флуктуаций ξ . В частности, если последнее является гауссовым, то

$$W_N(N) = 1/[(2\pi)^{1/2}\sigma_N] \exp[-(N - \langle N \rangle)^2/(2\sigma_N^2)]. \quad (2.1a)$$

Отметим, что среднее значение и дисперсия не зависят от вероятностного распределения ξ и определяются выражениями

$$\langle N \rangle = \gamma^{-1}, \quad \sigma_N^2 = d_1 \langle N \rangle^2. \quad (2.2)$$

Здесь и ниже $d_1 = \langle \xi^2 \rangle$, $d_2 = \langle \eta^2 \rangle$. Соответствующие S -характеристики таковы:

$$\langle S \rangle = \gamma(1-d_1)^{-1}, \quad \sigma_S^2 = d_1 \langle S \rangle^2. \quad (2.2a)$$

При наличии одних лишь флуктуаций η аналогично находим

$$W_N(N) = (\gamma N^2)^{-1} W_\eta[(\gamma N)^{-1} - 1]. \quad (2.3)$$

Соответствующие (2.3) моменты могут быть получены лишь интегрированием, однако аналогичные S -характеристики элементарно находятся из (1.3)

$$\langle S \rangle = 0, \langle S^2 \rangle = \gamma d_2, W_S(S) = \gamma^{-1} W_\pi(S/\gamma). \quad (2.4)$$

3. Рассмотрим теперь случай экспоненциально-коррелированных флуктуаций трофического коэффициента

$$B_\xi(\tau) = \langle \xi^2 \rangle \exp(-\Pi|\tau|), \quad \Pi = \tau_{\text{кор}}^{-1}. \quad (3.1)$$

Такую функцию корреляции имеет, в частности, телеграфный процесс с пуассоновской статистикой перескоков и марковский гауссов шум. Для динамических систем со случайными воздействиями указанных типов также возможно получение некоторых точных вероятностных характеристик [6-8]. Для уравнения (1.10) с одним флуктуирующим параметром стационарное вероятностное распределение имеет вид

$$W_x(x) = C |g(x)|/F(x) \exp(\Pi \int f(x)/F(x) dx), \quad (3.2)$$

где

$$F(x) = dg^2(x) - f^2(x), \quad g = g_1, \quad d = \langle \xi^2 \rangle.$$

В общем случае плотность вероятности (3.2) конечна и существует в области $F(x) > 0$. Для телеграфных флуктуаций ξ результат (3.2) точен, а при гауссовом шуме он соответствует хорошо известному в теории стохастических уравнений приближению Бурре.

На основании (3.2) для S -распределения находим

$$W_S(S) = CS |(\sigma+1)S - \gamma|^{\beta_1-1} |(\sigma-1)S + \gamma|^{\beta_2-1}, \quad (3.3)$$

где

$$\sigma = d^{1/2}, \quad \beta_{1,2} = (2\tau(1 \pm \sigma))^{-1}, \quad \tau = \tau_{\text{кор}}/T.$$

Распределение (3.3) существует в области

$$\begin{aligned} \gamma(1+\sigma)^{-1} < S < \gamma(1-\sigma)^{-1}, \quad \sigma < 1, \\ \gamma(1+\sigma)^{-1} < S < \infty, \quad \sigma > 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Соответствующее (3.3) вероятностное распределение численности находится заменой переменной

$$W_N(N) = N^{-2} W_S(1/N). \quad (3.5)$$

Заметим, что выполнив предельный переход

$$d \rightarrow \infty, \quad \tau \rightarrow 0, \quad d\tau = D = \text{const},$$

придем от (3.3), (3.5) к соответствующим результатам первого раздела для белого шума.

Зависимость плотности вероятности (3.3) от дисперсии и относительного времени корреляции флуктуаций приведена на рис.2. Кривые 1, 2, 3 построены для $d=0.5$, $\tau=0.1, 0.25, 2$, соответственно; кривая 3а - для $d=0.25$, $\tau=2$. Отметим, что особенности, появляющиеся на границах области существования при достаточно медленных флуктуациях, обусловлены дискретностью вероятностного распределения телеграфного процесса ξ . Численное интегрирование подобных распределений для расчета моментов не слишком удобно.

Искомые S -моменты можно получить и непосредственно (для телеграфного процесса ξ справедливо следующее размыкание совместных корреляций: $\langle \xi^2 \psi[\xi] \rangle =$

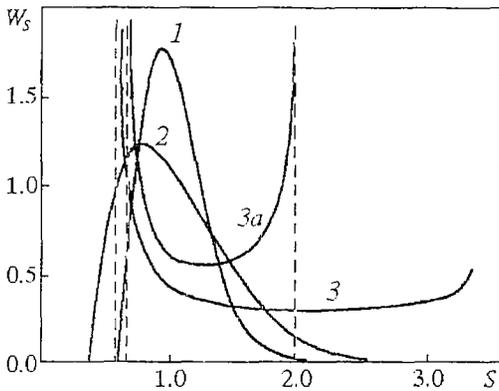


Рис. 2

$= \langle \xi^2 \rangle \langle \psi \rangle$, где $\psi[\xi]$ - произвольный функционал от ξ). Система уравнений, описывающая релаксацию моментов, имеет вид

$$T \langle S^n \rangle' + \langle S^n \rangle + \langle \xi S^n \rangle = \gamma \langle S^{n-1} \rangle, \quad (3.6)$$

$$T \langle \xi S^n \rangle' + (n + \tau - 1) \langle \xi S^n \rangle = \gamma n \langle \xi S^{n-1} \rangle - n d \langle S^n \rangle.$$

Для стационарных значений из (3.6) находим

$$\langle S \rangle = \gamma [1 - D(1 + \tau)]^{-1}, \quad (3.7)$$

$$\langle S^2 \rangle = \gamma [(1 + 4\tau) \langle S \rangle - 2\gamma\tau] (1 + 2\tau - 2D)^{-1},$$

где величина $D = d\tau$ имеет тот же смысл, что и в первом разделе. Легко видеть, что из формул (3.7) соответствующими предельными переходами получаются как белозумовые, так и квазистатистические результаты, приведенные выше.

Для гауссова процесса ξ с функцией корреляции (3.1) можно получить точные результаты для стационарных S -моментов, используя процедуру матричных цепных дробей [8,9]. Строится цепочка уравнений «трехчленного взаимодействия» для двумерных векторов

$$\mathbf{X}_1 = (\langle S \rangle; \langle S^2 \rangle), \quad \mathbf{X}_n = (\langle \xi^{[n-1]} \rangle; \langle \xi^{[n-1]} S \rangle), \quad n = 1, 2, \dots$$

(здесь $\langle \xi^{[m]} \rangle$ - совместный кумулянт соответствующих случайных процессов), решение которой представимо матричной цепной дробью.

Как показывает численный анализ (см. также [9]), процедура оказывается сходящейся для отыскания $\langle S \rangle$ при $D < 1$, а для $\langle S^2 \rangle$ - при $D < 1/2$; то есть область сходимости совпадает с областью существования соответствующих моментов и не зависит от времени корреляции флуктуаций (от τ зависит скорость сходимости).

На рис. 3 приведена зависимость нормированного на γ среднего значения $\langle S \rangle$ и стандартного отклонения σ_S/γ от времени корреляции флуктуаций при фиксированном значении D . Кривые 1-4 соответствуют телеграфным флуктуациям ξ : 1,2 - $\langle S \rangle$ при $D=0.25$ и 0.45 , соответственно; 3,4 - σ_S/γ при тех же значениях D . Кривые 3a,4a - σ_S/γ для гауссова шума ξ при тех же значениях величины D , кружки - $\langle S \rangle$ для гауссова шума. Отметим, что заметное различие результатов для телеграфных и гауссовых процессов наблюдается лишь вблизи границы среднеквадратичной устойчивости системы (кривые 4,4a).

На рис. 4 показана зависимость этих же характеристик от τ при фиксированной мощности флуктуаций d . Отметим прежде всего, что теперь они увеличиваются с ростом τ , что свидетельствует о более сильном отрицательном влиянии на популяцию «цветного» шума ξ (с ростом времени корреляции теперь увеличивается спектральная плотность медленных флуктуаций, оказывающих наибольшее дестабилизирующее действие). Здесь кривые 1,2 - зависимость $\langle S \rangle$ от τ для значений $d=0.25, 0.5$, соответственно; 3,4 - σ_S/γ для тех же значений d . Кривые 1-4 соответствуют телеграфным флуктуациям параметра, 1a-4a - гауссовым. Различие результатов для телеграфных и гауссовых флуктуаций при больших τ теперь является весьма существенным, причем последние оказывают большее дестабилизирующее влияние на популяцию.

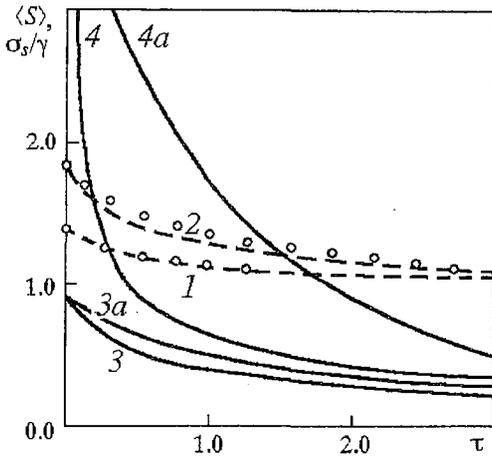


Рис. 3

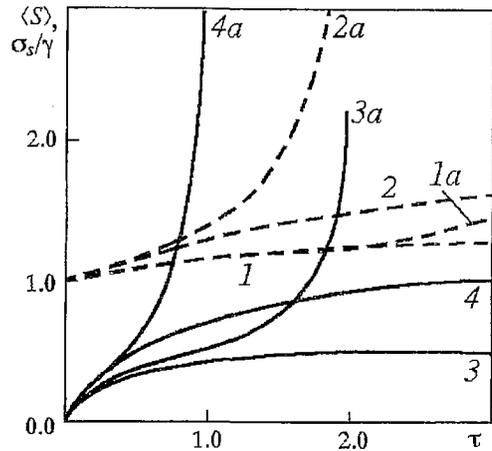


Рис. 4

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант 95-0-8.3-36).

Библиографический список

1. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
2. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
3. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированный шумом переход: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.
4. Диментберг М.Ф. Точные решения уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова для некоторых многомерных динамических систем // ПММ. 1983. Т.47, вып.4. С.555.
5. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
6. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
7. Малахов А.Н., Муzychuk О.В. Вероятностные характеристики динамических систем, подверженных воздействию не дельта-коррелированных случайных сил // Изв.вузов. Радиофизика. 1980. Т.23, № 8. С.968.
8. Мишанина М.Г., Муzychuk О.В. К анализу нелинейных динамических систем, возбуждаемых интенсивным небелым шумом // ПММ. 1992. Т.56, вып.6. С. 1039.
9. Мишанина М.Г., Муzychuk О.В. Влияние интенсивных амплитудных флуктуаций накачки на шумовые характеристики одноконтурного параметрического делителя частоты // Изв.вузов. Радиофизика. 1993. Т.36, № 1. С. 65.

Нижегородский
архитектурно-строительный
институт

Поступила в редакцию 3.07.95

SOME EXACT RESULTS FOR PROBABILITY CHARACTERISTICS OF FERHULST STOCHASTIC EQUATION

O.V. Muzychuk

Main stochastic characteristics of one-dimensional Ferhulst equation with parameters fluctuations are investigated. Some models of fluctuations which reduce to

exact results for stationary probability characteristics are studied: Gaussian delta-correlated noise, quasi-static fluctuations, Markoff Gaussian and «telegraph» processes. The probability descriptions are treated both for populations number N and for the inverted quantity $1/N$ which may be interpreted as normalized unit square. The influence of the intensity, correlation scale and probability distribution of system parameters fluctuations for population stochastic characteristics are investigated.



Музычук Олег Владимирович - родился в городе Ярцево Смоленской области (1947). Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1970). После окончания работал на кафедре статистической радиофизики ГГУ, там же защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1978) в области исследования динамических систем с флуктуирующими параметрами. С 1978 года работает на кафедре физики Нижегородского архитектурно-строительного института. Автор примерно 40 статей в центральных журналах. Круг интересов - стохастические системы с интенсивными не дельта-коррелированными случайными силами.



НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ФЕРХЮЛЬСТА

О.В. Музыкачук

Рассмотрено хорошо известное в ряде приложений [1-4] уравнение Ферхюльста со случайно изменяющимися параметрами. Стохастические характеристики его решения можно найти на основании уравнения Фоккера - Планка для вероятностного распределения. Однако, во-первых, для этого флуктуации параметров должны быть дельта-коррелированными, а во-вторых, аналитически находится только стационарная плотность вероятности. Показано, что для обратных моментов решения уравнения Ферхюльста можно осуществить и более подробное описание, рассмотрев процесс их релаксации, не накладывая в общем случае ограничений на времена корреляции случайных воздействий.

1. Рассмотрим стохастическое уравнение

$$N' = a(1+\xi(t))N - b(1+\eta(t))N^2 \quad (1.1)$$

коэффициенты которого (следуем «экологической» терминологии) имеют следующий смысл: N - численность изолированной популяции; b - коэффициент внутривидовой конкуренции; ξ , η - флуктуации соответствующих параметров, связанные со случайными изменениями среды обитания.

Введем переменную $S=1/N$, представляющую собой нормированную «площадь», приходящуюся на одну особь. На основании (1.1) получим линейное уравнение для S

$$TS' + (1+\xi)S = \gamma(1+\eta), \quad (1.2)$$

где $T=a^{-1}$ - время релаксации в отсутствие флуктуаций, $\gamma=ba^{-1}$. Случайная флуктуация, являющаяся решением (1.2), имеет вид

$$S(\theta) = S_0 \exp(z(\theta) - \theta) + \gamma \int_0^\theta (1+\eta(\theta_1)) \exp[z(\theta - \theta_1) - \theta + \theta_1] d\theta_1, \quad (1.3)$$

где $\theta=tT^{-1}$ - безразмерное время; $S_0=S(0)$; $z(\theta) = \int_0^\theta \xi(\theta_1) d\theta_1$.

Простейшие статистические характеристики процесса $S(\theta)$ можно найти непосредственным усреднением выражения (1.3) по заданным вероятностным распределениям флуктуирующих параметров. Если процесс ξ гауссов (точнее,

гауссовым считаем процесс z , который будет таковым при достаточно быстрых флуктуациях ξ с любым вероятностным распределением), то усредняя (1.3), находим

$$\langle S(\theta) \rangle = S_0 \exp(F(\theta) - \theta) + \gamma \int_0^\theta (1 + B_{\xi\eta}(\theta_1)) \exp(F(\theta - \theta_1) - \theta + \theta_1) d\theta_1, \quad (1.4)$$

где

$$F(\theta) = \int_0^\theta (\theta - \theta_1) B_\xi(\theta_1) d\theta_1.$$

B_ξ , $B_{\xi\eta}$ корреляционная функция флуктуаций ξ и совместная корреляционная функция, соответственно. На основании (1.4) легко установить асимптотику поведения среднего значения при $t \gg \tau_\xi$ (здесь и ниже τ_ξ - время корреляции флуктуаций). В отсутствие корреляции между флуктуациями параметров имеем

$$\langle S(\theta) \rangle \simeq S_0 \exp[(D_1 - 1)\theta] + \gamma [1 - \exp[(D_1 - 1)\theta]] / (1 - D_1), \quad D_1 = \int_0^\infty B_\xi(\theta_1) d\theta_1. \quad (1.5)$$

Для случая экспоненциально-коррелированных флуктуаций

$$B_\xi(\tau) = \langle \xi^2 \rangle \exp(-\Pi |\tau|), \quad \Pi = \tau_\xi^{-1}, \quad (1.6)$$

выражение (1.4) примет вид

$$\langle S(\theta) \rangle = \gamma \int_0^\theta \exp[(D_1 - 1)\theta_1 - \tau D_1(1 - \exp(-\theta_1/\tau))] d\theta_1. \quad (1.7)$$

Здесь введены безразмерные параметры $\tau = \tau_\xi T^{-1}$, $D_1 = \langle \xi^2 \rangle \tau$, характеризующие относительное время корреляции и «высоту» спектра мощности случайного воздействия; начальные условия считались, для краткости, нулевыми.

Для получения более общих нестационарных вероятностных характеристик решения ниже рассмотрим две модели флуктуирующих параметров: дельта-коррелированные либо экспоненциально-коррелированные случайные воздействия. Последние могут быть марковским гауссовым либо «телеграфным» процессом с пуассоновской статистикой перескоков.

2. Полагаем случайные воздействия мелкомасштабными и аппроксимируем соответствующие корреляции дельта-функциями

$$B_\xi(\theta) = 2D_1 \delta(\theta), \quad B_\eta(\theta) = 2D_2 \delta(\theta)$$

(здесь и ниже используем безразмерное время). Стандартным путем [5,6] нетрудно получить следующее уравнение для релаксации S -моментов или обратных моментов численности N :

$$n^{-1} \langle S^n \rangle' + (1 - nD_1) \langle S^n \rangle = \gamma (\langle S^{n-1} \rangle + \gamma(n-1)D_2 \langle S^{n-2} \rangle), \quad (2.1)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Приведем также следующее отсюда уравнение для дисперсии

$$\sigma^2 = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2, \quad (2.2)$$

$$(\sigma^2)' + 2(1 - 2D_1)\sigma^2 = 2D_1 \langle S \rangle^2 + 2\gamma^2 D_2.$$

Для динамических начальных условий $\langle S(0) \rangle = S_0$, $\sigma(0) = 0$ на основании (2.1), (2.2) получим следующие выражения для основных статистических характеристик удельной площади:

$$\langle S(\theta) \rangle = \langle S \rangle_{st} + (S_0 - \langle S \rangle_{st}) \exp[(D_1 - 1)\theta], \quad (2.3)$$

$$\sigma^2(\theta) = 2 \int_0^\theta (\gamma^2 D_2 + D_1 \langle S(\theta_1) \rangle^2) \exp[2(2D_1 - 1)(\theta - \theta_1)] d\theta_1.$$

Соответствующие стационарные значения таковы:

$$\begin{aligned} \sigma_{st}^2 &= (D_1 \langle S \rangle_{st}^2 + \gamma^2 D_2)(1 - 2D_1)^{-1}, \\ \langle S \rangle_{st} &= \gamma(1 - D_1)^{-1}, \quad D_1 < 1/2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что характерное время релаксации $T_R = T(1 - D_1)^{-1}$ не зависит от флуктуаций η .

Зависимость этих величин от спектральной интенсивности флуктуаций (для простоты считаем $S_0 = 0, D_2 = 0$) показана на рис. 1. Сплошные линии - нормированное среднее значение, пунктир - стандартное отклонение для значений $D_1 = 0.1, 0.2, 0.4$, соответственно.

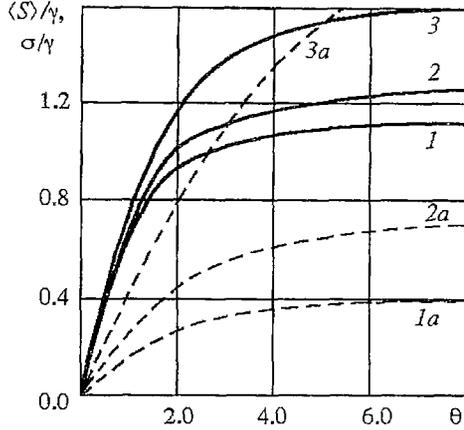


Рис. 1

3. Рассмотрим теперь флуктуации трофического коэффициента с функцией корреляции (1.6). Если считать их «телеграфным» случайным процессом, то результаты данного параграфа являются точными; для случая гауссовых флуктуаций они являются известным в теории стохастических систем приближением Бурре [6,7]. Разумеется, в предельном переходе к дельта-коррелированным флуктуациям параметра все результаты тождественны.

Обозначив для краткости

$$\langle S^n \rangle = x_n, \quad \langle \xi S^n \rangle = y_n, \quad \langle \xi^2 \rangle = d,$$

стандартным путем придем к следующей замкнутой системе:

$$n^{-1} x'_n + x_n + y_n = \gamma x_{n-1}, \quad (3.1)$$

$$y'_n + (n + \tau^{-1}) y_n + n d x_n = n \gamma y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Выберем для простоты нулевые начальные условия $x_n(0) = 0$ (это соответствует неограниченно большой начальной численности популяции $N(0)$, стабилизация наступает из-за внутривидовой конкуренции). Тогда решение системы (3.1) для первых двух моментов можно записать в виде

$$\langle S(\theta) \rangle = \langle S \rangle_{st} + c_1 \exp(\lambda_1 \theta) + c_2 \exp(\lambda_2 \theta), \quad (3.2)$$

$$\langle S^2 \rangle = (\beta_1 - \beta_2)^{-1} \int_0^\theta \{ \exp[\beta_1(\theta - \theta_1)] - \exp[\beta_2(\theta - \theta_1)] \} f(\theta_1) d\theta_1,$$

где $\lambda_1, \lambda_2; \beta_1, \beta_2$ - корни соответствующих характеристических уравнений.

$$\begin{aligned} -\lambda_{1,2} &= 1 + \nu \mp (\nu^2 + d)^{1/2}, \quad \nu = (2\tau)^{-1}, \\ -\beta_{1,2} &= 2 + \nu \mp (\nu^2 + 4d)^{1/2}, \quad c_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (\gamma + \lambda_2 \langle S \rangle_{st}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$c_2 = c_1 + \langle S \rangle_{st}, \quad m_{1,2} = c_{1,2}(4 + 2\nu + 3\lambda_{1,2}),$$

$$f(\theta) = 2\gamma(m_1 \exp(\lambda_1 \theta) + m_2 \exp(\lambda_2 \theta)) + 2(2 + \nu) \langle S \rangle_{st} - 2\gamma.$$

Входящие сюда стационарные значения моментов таковы:

$$\langle S \rangle_{st} = \gamma / (1 - D_1(1 + \tau)^{-1}), \quad \langle S^2 \rangle_{st} = \gamma[(1 + 4\tau)\langle S \rangle_{st} - 2\gamma\tau] / [1 - 2(D_1 - \tau)]. \quad (3.4)$$

Легко видеть, что при переходе к «белым» флуктуациям

$$\tau \rightarrow 0, \quad D_1 = \text{const},$$

результаты (3.2)-(3.4) переходят в полученные в разделе 1, а в противоположном предельном случае

$$\tau \rightarrow \infty, \quad d = \text{const}$$

соответствующие стационарные значения примут вид

$$\langle S \rangle_{st} = \gamma(1 - d)^{-1}, \quad \langle S^2 \rangle_{st} = \langle S \rangle_{st}^2(1 + d). \quad (3.4a)$$

Для характеристики времени установления моментов можно принять значения

$$T_{R1} = T/\lambda_1, \quad T_{R2} = T/\beta_1, \quad (3.5)$$

соответственно. Заметим, что при фиксированной интенсивности флуктуаций ($d = \text{const}$) с ростом времени корреляции τ время релаксации моментов растет, а при фиксированной высоте спектра ($D = \text{const}$) - убывает (хотя достаточно слабо).

Полученные выше результаты иллюстрируются приведенными графиками. На рис.2 показана зависимость установления средней площади от относительного времени корреляции флуктуаций при $d=0.45$. Кривые 1-3 соответствуют $\tau=2.5, 0.75, 0.25$; кривые 1a-3a - точное решение (1.7). Видно, что в начале установления результаты для гауссовых и телеграфных флуктуаций параметра практически не отличаются. Заметная разница наблюдается лишь при весьма медленных случайных воздействиях (вблизи границы устойчивости системы в среднем).

На рис.3 приведены кривые для нормированного среднего и стандартного отклонения (пунктир), построенные на основании формул (3.2) при различных значениях интенсивности и времени корреляции параметрического воздействия. Кривые 1,2 - для $d=0.5, \tau=1$ и $\tau=4$, соответственно. Кривая 3 - для $d=1, \tau=1$. Зависимости 1a-3a соответствуют тем же значениям параметров. Отметим, что

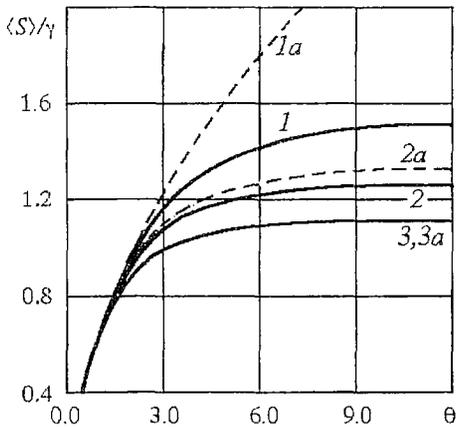


Рис. 2

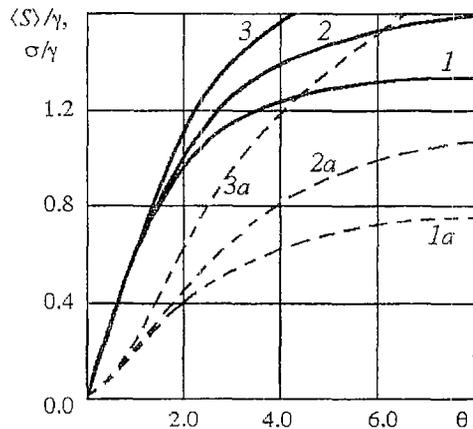


Рис. 3

Зависимости 1а-3а соответствуют тем же значениям параметров. Отметим, что интенсивности флуктуаций взяты, для наглядности, весьма большими. Видно, что с ростом d и τ средняя площадь и ее дисперсия растут, что свидетельствует об усилении дестабилизирующего воздействия флуктуаций параметра ξ на рассматриваемую систему.

4. Отметим в заключение возможность исследования установления моментов численности N непосредственно из исходного уравнения (1.1). В силу нелинейности последнего это можно делать лишь приближенными методами, хотя стационарные N -моменты (в случае дельта-коррелированных флуктуаций $\xi(t)$) находятся из уравнения Фоккера - Планка. Положив в (2.1) $n = -m$, придем к уравнению релаксации N -моментов

$$m^{-1} \langle N^m \rangle' = (1 + mD_1) \langle N^m \rangle - \gamma \langle N^{m+1} \rangle - \gamma(m+1)D_2 \langle N^{m+2} \rangle. \quad (4.1)$$

Стационарные N -моменты существуют лишь в отсутствии флуктуаций $\eta(t)$, при этом

$$\langle N \rangle_{st} = \gamma^{-1}, \quad \langle N^{m+1} \rangle_{st} = (1 + mD_1) \langle N \rangle_{st} \langle N^m \rangle_{st}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Если воспользоваться этой рекуррентной формулой и для нестационарных значений, то уравнение (4.1) при $D_2 = 0$ станет замкнутым

$$m^{-1} \langle N^m \rangle' = (1 + mD_1)(1 - \gamma \langle N \rangle) \langle N^m \rangle. \quad (4.3)$$

В частности, для релаксации средней численности отсюда находим

$$\langle N(\theta) \rangle = \{\gamma + (N_0^{-1} - \gamma) \exp[-(1 + D_1)\theta]\}^{-1}. \quad (4.4)$$

Заметим, что соответствующее время релаксации $T_R = T(1 + D_1)^{-1}$ здесь уменьшается с ростом интенсивности параметрического воздействия.

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант 95-0-8.3-36).

Библиографический список

1. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
2. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
3. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированный шумом переход: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.
4. Диментберг М.Ф. Точные решения уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова для некоторых многомерных динамических систем // ПММ. 1983. Т.47, вып.4. С.555.
5. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
6. Клячкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
7. Малахов А.Н., Музычук О.В. Вероятностные характеристики динамических систем, подверженных воздействию не дельта-коррелированных случайных сил // Изв.вузов. Радиофизика. 1980. Т.23, № 8. С.968.

Нижегородский
архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 3.07.95

NON - STATIONARY PROBABILITY CHARACTERISTICS OF FERHULST STOCHASTIC EQUATION

O.U. Muzychuk

Well-known in a series of applications Ferhulst equations with random parameters variations are considered. Non-stationary probability characteristics of the solution (in basis - the inverted moments of the population number N) are investigated. Closed linear equations for this moments have been obtained not only for delta-correlated parameters fluctuations. Exact solutions for relaxation of quantity $\langle S \rangle = \langle 1/N \rangle$ in the case of Markoff Gaussian parameters fluctuation are obtained as the solutions for mean-square characteristics for «telegraph» random influence. Dependence of these characteristics on parameters fluctuations intensity and correlation scale are investigated. The possibility of approximate finding of connected quantities for populations number moments is discussed.



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВАЙДЛИХА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.А. Короновский, Д.И. Трубецков

В работе приведены результаты исследования системы модифицированных уравнений Вайдлиха, с помощью которой возможно качественное описание широкого круга процессов, происходящих в человеческом обществе. Приведено несколько примеров, показывающих применение данной системы уравнений для моделирования конкретных социальных явлений. Показана возможность рождения хаотических колебаний в системе через каскад бифуркаций удвоения периода.

1. Основные уравнения и их качественное исследование

Математическое моделирование процессов, происходящих в человеческом обществе, весьма проблематично из-за исключительной сложности изучаемого объекта. Тем не менее, к настоящему времени известно большое число математических моделей, описывающих самые различные социальные ситуации. На наш взгляд, все эти модели можно условно разделить на две группы:

1) Количественные математические модели. К ним могут быть отнесены модели, в основе которых лежит аппарат теории вероятностей (см., например, [1,2]), а также количественные модели, опирающиеся на соотношения, полученные из каких-либо соображений, иногда весьма общих и неконкретных (см., например, [3]).

2) Простые качественные модели, не претендующие на глобальность, а отражающие лишь основные, наиболее важные и характерные обстоятельства исследуемых социальных процессов. К этой группе моделей может быть отнесена, например, красивая и достаточно простая модель «производитель - продукт - управленцы», предложенная Ю.И. Неймарком [4].

Математические модели первой группы, как правило, сложны и громоздки, их построение требует больших материальных и трудовых затрат. Кроме того, для получения хорошего количественного соответствия построенной модели реальным процессам приходится опираться на анализ статистических данных, что с неизбежностью ведет к существенному ограничению применимости этих моделей как временными, так и географическими рамками. Математические модели второй группы лишены этих недостатков и, несмотря на кажущуюся простоту, имеют большое познавательное значение. Понятно, что при использовании этих моделей уже приходится говорить не о количественном соответствии результатов реально протекающим процессам, а лишь о качественном анализе ситуации. Однако при этом возможно детальное понимание поведения модели, а следовательно, в

определенной степени и качественное понимание динамики реальных процессов, что подчас не менее важно, чем получение частных количественных данных.

Ко второй группе относятся, в частности, математические модели Вайдлиха, при создании которых использовался макроскопический подход, основанный на «полуколичественных рассуждениях» [5]. К числу несомненных достоинств данной группы моделей следует отнести их наглядность, «прозрачность» для понимания, а также тот факт, что они могут быть применены для качественного описания весьма широкого круга социальных процессов. Тем не менее, совершенно очевидно, что предложенные модели сильно идеализированы: при описании явлений, происходящих в обществе, учитываются лишь два наиболее существенных, по мнению авторов, фактора, и в ряде случаев этого оказывается недостаточно. В настоящей работе предложенные математические модели будут видоизменены и расширены, будет рассмотрена их динамика и приведены несколько конкретных примеров применения системы модифицированных уравнений Вайдлиха для качественного описания социальных процессов.

Введем, вслед за Вайдлихом, макропеременные, которые будут характеризовать состояние некоторой социальной системы. Для начала будем рассматривать эти макропеременные абстрактно, полностью пренебрегая их конкретным содержанием. На данном этапе для нас важно лишь то, что этим переменным может быть приписано некое реальное смысловое содержание, что они могут быть определены количественно любым способом и принимают непрерывные положительные значения. Предположим также, что эти макропеременные могут взаимодействовать друг с другом, а так как они «оторваны от реальной жизни», то и их взаимодействие может быть описано численно, без выяснения и учета механизмов взаимовлияния.

Вполне естественно предположить, что макропеременные могут влиять друг на друга по-разному: к примеру, переменная x может как увеличивать значение переменной y , так и наоборот, уменьшать его. Разумеется, степень влияния переменной x на переменную y будет зависеть от численных значений этих переменных. Более того, сам характер воздействия переменной x на переменную y (поддержание или подавление) может изменяться и зависеть от величины x . Макропеременная x может - в зависимости от собственной амплитуды - переключаться с подавления переменной y на поддержание, и наоборот.

Вслед за Вайдлихом будем называть переменную x кооперативной по отношению к переменной y , если x стремится увеличить значение y при больших собственных значениях и уменьшить при малых. Иными словами, кооперативная переменная стремится сравнять значение другой переменной, на которую она действует, со своим собственным значением. Но возможен и другой вариант: переменная x будет подавлять переменную y в том случае, если значение x велико, и усиливать, если x имеет малую величину. Следовательно, переменная x стремится противопоставить величину переменной y своей собственной величине. В этом случае будем называть переменную x антагонистической по отношению к y .

Подобный характер взаимодействия - кооперативный или антагонистический - довольно часто встречается в социальных системах и, следовательно, данный подход (конечно, памятуя о том, что он существенно идеализирован) можно применять для описания весьма широкого круга явлений.

Будем рассматривать три переменные x , y и z , которые оказывают друг на друга кооперативное или антагонистическое воздействие. Причем вполне естественно, что переменная x может, к примеру, оказывать кооперативное воздействие на переменную y и в то же время антагонистическое - на z . Система эволюционных уравнений, рассматриваемых ниже, имеет вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= x[a(y,z)s - x], \\ dy/dt &= y[b(x,z)s - y], \\ dz/dt &= z[c(x,y)s - z], \end{aligned} \tag{1}$$

где τ - безразмерное время; s - регулируемый параметр, характеризующий степень влияния макропеременных друг на друга; $a(y,z)$, $b(x,z)$, $c(x,y)$ - функции влияния, обуславливающие кооперативный или антагонистический характер взаимодействия макропеременных. Эти функции выбраны в виде

$$\begin{aligned} a(y,z) &= \pm A_{yx} \operatorname{th}[k(y - y_{sx})] \pm A_{zx} \operatorname{th}[k(z - z_{sx})], \\ b(x,z) &= \pm A_{xy} \operatorname{th}[k(x - x_{sy})] \pm A_{zy} \operatorname{th}[k(z - z_{sy})], \\ c(x,y) &= \pm A_{xz} \operatorname{th}[k(x - x_{sz})] \pm A_{yz} \operatorname{th}[k(y - y_{sz})], \end{aligned} \quad (2)$$

где x_{sy} , x_{sz} , y_{sx} , y_{sz} , z_{sx} , z_{sy} - точки переключения функций влияния, при пересечении которых происходит изменение характера взаимодействия макропеременных (с подавления на усиление или наоборот). Знак «+» перед соответствующей константой, характеризующей интенсивность воздействия данной переменной на другую (A_{yx} , к примеру, характеризует интенсивность воздействия макропеременной y на переменную x), выбирается в том случае, если эта переменная оказывает кооперативное воздействие, и «-» - если антагонистическое. Нетрудно видеть, что даже при $x_{sy}=x_{sz}=x_s$, $y_{sx}=y_{sz}=y_s$, $z_{sx}=z_{sy}=z_s$ (а именно этот случай для простоты мы будем рассматривать в дальнейшем) существует 2⁶ различных вариантов взаимодействия между тремя макропеременными. Исследование всех возможных ситуаций - занятие весьма трудоемкое и ненужное. Можно существенно упростить задачу, предположив, что все макропеременные имеют одинаковую «интенсивность воздействия», то есть положив все константы A_{ij} ($i,j=x,y,z$) в функции влияния равными друг другу. В этом случае необходимо исследовать всего лишь 16 различных вариантов, которые приведены в таблице. Символ «+» в записи « $X \stackrel{+}{\geq} Y$ » говорит о том, что x является кооперативной переменной по отношению к y , в то время как «-» свидетельствует об антагонистическом воздействии y на x . Исследование проводилось при помощи численного моделирования методом Рунге - Кутты четвертого порядка с шагом интегрирования $h=0.005$ при следующих выбранных параметрах: $s=5$, $k=1$, $x_s=4.5$, $y_s=4.25$, $z_s=4.1$, $A_{xy}=A_{xz}=A_{yx}=A_{yz}=A_{zx}=A_{zy}=1$. Устойчивые точки определяются из решений соответствующих трансцендентных уравнений $x[a(y,z)s-x]=0$, $y[b(x,z)s-y]=0$, $z[c(x,y)s-z]=0$, но как показывают результаты численного моделирования, получающиеся значения x^* , y^* , z^* не сильно отличаются от $2s$ и x_s , y_s , z_s , соответственно, а при выборе больших k (точнее, при $k \rightarrow +\infty$) или в случае кусочно-разрывных функций, предложенных Вайдлихом [5], совпадают с ними. Поскольку эти небольшие отличия не играют роли в понимании динамики системы и не существенны для анализа социальных процессов, так как речь идет, опять таки, прежде всего о качественном соответствии, в дальнейшем не будем акцентировать внимание на этих отличиях, хотя помнить о них и иметь их в виду все-таки стоит. Именно для этих целей мы ставим в таблице над соответствующими значениями символ «*».

Устойчивые состояния равновесия разделены сепаратрисными поверхностями, и в зависимости от того, в бассейне притяжения какого аттрактора лежит изображающая точка, соответствующая начальным условиям, система с течением времени приходит к тому или иному устойчивому состоянию равновесия.

Теперь можно приписать макропеременным некоторое конкретное содержание: выделив три основные величины, наиболее полно характеризующие состояние социальной системы (мы ведем речь о моделировании социальных процессов, но, разумеется, можно применять подобный подход и к качественному описанию других процессов, например, биологических), и, установив характер взаимовлияния между этими величинами (то есть установив, какими являются взаимосвязи - кооперативными или антагонистическими), используя данные таблицы, можно попытаться качественно описать динамику системы, объяснить на

Таблица

Характер взаимовлияния	Вид функций влияния	Поведение системы	Примечания
1	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = + \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,0)$, $(2s^*, 2s^*, 2s^*)$ устойчивые узлы	
2	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = + \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,0)$ - устойчивый узел	
3	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,0)$ - устойчивый узел	
4	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = + \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,0)$ - устойчивый узел	
5	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,0)$ - устойчивый узел	
6	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,0)$ - устойчивый узел	
7	$a(y,z) = - \operatorname{th}(y - y_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,0)$ - устойчивый узел	
8	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,2s^*)$ - устойчивый узел	
9	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = - \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0, y_s^*, z_s^*)$ - устойчивый фокус	
10	$a(y,z) = + \operatorname{th}(y - y_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = + \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0,0,0)$, $(2s^*, 2s^*, 0)$ - устойчивые узлы	
11	$a(y,z) = - \operatorname{th}(y - y_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = + \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0, 2s^*, 0)$, $(2s^*, 0, 0)$ - устойчивые узлы	
12	$a(y,z) = - \operatorname{th}(y - y_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = - \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0, y_s^*, z_s^*)$, $(x_s^*, 0, z_s^*)$ - устойчивые фокусы	рис.1,2
13	$a(y,z) = - \operatorname{th}(y - y_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = + \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0, 2s^*, 0)$, $(2s^*, 0, 2s^*)$ устойчивые узлы	рис.4
14	$a(y,z) = - \operatorname{th}(y - y_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = - \operatorname{th}(x - x_s) + \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = + \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	(x_s^*, y_s^*, z_s^*) - устойчивый фокус	рис.5,6
15	$a(y,z) = - \operatorname{th}(y - y_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = + \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	$(0, 2s^*, 0)$ - устойчивый узел	рис.3
16	$a(y,z) = - \operatorname{th}(y - y_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $b(x,z) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(z - z_s)$ $c(x,y) = - \operatorname{th}(x - x_s) - \operatorname{th}(y - y_s)$	$(2s^*, 0, 0)$, $(0, 2s^*, 0)$, $(0, 0, 2s^*)$ - устойчивые узлы	

основании этого процессы, протекающие в реальной социальной системе, и с большей или меньшей степенью точности спрогнозировать дальнейшее развитие ситуации, а также указать возможности воздействия на происходящие события.

Не будем подробно рассматривать все возможные случаи, а ограничимся рассмотрением лишь тех, которые представляются, на наш взгляд, наиболее интересными. Отметим, что каждый пункт таблицы может соответствовать нескольким различным социальным явлениям и процессам.

Кроме того, еще раз дополнительно подчеркнем, что речь идет только о качественном, «получисленном» анализе, и нет претензий на какие-либо глобальные обобщения.

2. Интерпретация моделей

2.1. Развитие системы образования в условиях конкуренции. Рассмотрим случай 12 таблицы (рис. 1) и применим его к конкретной ситуации. Пусть в некоторой области существуют два учебных заведения одинакового профиля и уровня подготовки. Число лиц, обучающихся в каждом из этих учебных заведений (число студентов) мы будем характеризовать переменными x и y , соответственно, а число лиц, желающих поступить в одно из этих учебных заведений (число абитуриентов) - макропеременной z . Установим характер взаимодействия между введенными макропеременными. Естественно предположить, что z (число абитуриентов) оказывает кооперативное воздействие на макропеременные x и y (то есть, на число студентов соответствующих учебных заведений): чем больше число абитуриентов, тем, в конечном счете, больше студентов в учебных заведениях, и, наоборот, отсутствие абитуриентов неизбежно ведет к уменьшению числа студентов в учебных заведениях. В свою очередь, макропеременные x и y являются антагонистическими по отношению к z : чем больше студентов в учебных заведениях, тем в большей степени удовлетворена потребность абитуриентов в получении образования, тем большее число лиц перешло из лагеря абитуриентов в лагерь студентов, что, естественно, приводит к уменьшению числа абитуриентов. С другой стороны, в случае малого числа студентов (малые x и y), потребность в получении образования у населения остается неудовлетворенной, что приводит к росту числа абитуриентов (к увеличению макропеременной z).

С учетом конкуренции, естественно предположить взаимоантагонистический характер взаимодействия между переменными x и y : действительно, чем большее число студентов обучается в одном из учебных заведений (скажем, x - велико), чем лучше идут дела у этого учебного заведения, тем большей популярностью оно пользуется, тем большее число абитуриентов желает учиться именно в этом учебном заведении, что не может не привести к оттоку абитуриентов из конкурирующего учебного заведения и, как следствие, к уменьшению в нем числа студентов. И наоборот, чем меньше студентов в учебном заведении, тем меньше престижность этого учебного заведения, что приводит к увеличению числа абитуриентов, желающих поступить в другое учебное заведение.

Как же развиваются события? Из таблицы видно, что в зависимости от начальных условий, система после переходного процесса приходит к одному из двух устойчивых состояний равновесия $(x_s^*, 0, z_s^*)$ или $(0, y_s^*, z_s^*)$. Во время переходного процесса (который в

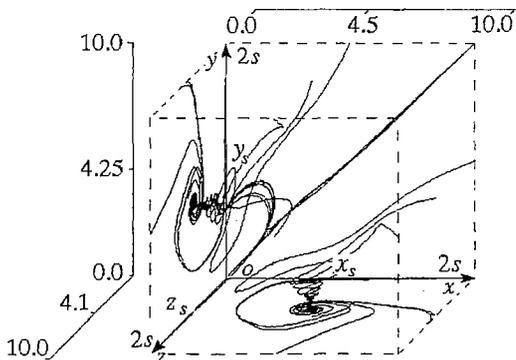


Рис. 1. Конкуренция двух учебных заведений. x , y - численность студентов в учебных заведениях, z - численность абитуриентов. Показана динамика системы в зависимости от начальных условий: $s=5$, $x_s=4.5$, $y_s=4.25$, $z_s=4.1$

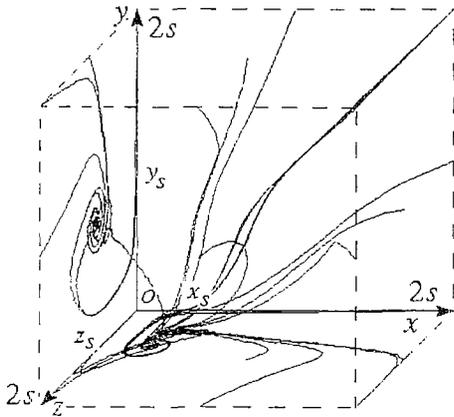


Рис. 2. Конкуренция двух учебных заведений. В отличие от рис. 1, уменьшено значение точки переключения x_s ($x_s=1.25$): большинство фазовых траекторий стягивается к устойчивому фокусу $(x_s^*, 0, z_s^*)$

реальном времени может быть весьма длительным и занимать, скажем, десятилетия) учебное заведение, дела в котором изначально обстояли хуже (иными словами, изображающая точка в начальный момент времени лежала в бассейне притяжения аттрактора, соответствующего другому учебному заведению), постоянно теряет студентов; отчасти из-за того, что студенты переходят в другое, более престижное заведение, отчасти из-за нежелания абитуриентов поступать в учебное заведение, имеющее плохую репутацию. Из года в год число студентов, обучающихся в этом учебном заведении, уменьшается, само учебное заведение «хиреет» и в конце концов в этом учебном заведении остается лишь небольшое число студентов, которые не

обладают достаточными знаниями и уверенностью в своих силах, и которые выбрали данное учебное заведение только лишь потому, что в него легче поступить из-за отсутствия конкуренции. В другом учебном заведении дела идут лучше, оно пользуется популярностью, почти весь поток абитуриентов желает учиться именно в этом учебном заведении, и число студентов этого учебного заведения колеблется, в зависимости от числа абитуриентов, около некоего среднего значения, определяемого точкой переключения.

Подведем некоторые итоги: в условиях конкуренции из двух учебных заведений «выживает» то, которое первоначально имело лучшую репутацию. Более того, попытка открыть в области, где уже есть учебное заведение, новое учебное заведение подобного же профиля и качества образования, заранее обречена на неудачу. Но как же быть руководству того учебного заведения, которому уготована печальная участь быть закрытым? Ответ можно дать, исходя из анализа построенной модели: поверхность, разделяющая бассейны притяжения аттракторов, проходит через точку переключения (x_s, y_s, z_s) . Необходимо расширить границы бассейна притяжения аттрактора, соответствующего Вашему учебному заведению (рис. 2). Для этого необходимо уменьшить значение той координаты точки переключения, которая «отвечает» за Ваше учебное заведение (на рисунке это x_s). Уменьшая значение x_s , Вы существенно расширяете бассейн притяжения устойчивого фокуса $(x_s^*, 0, z_s^*)$. В этом случае, если изображающая точка в начальный момент времени оказывается теперь в бассейне притяжения устойчивого фокуса, соответствующего Вашему учебному заведению, то Вам удастся в конечном итоге «перетянуть» студентов и абитуриентов в свое учебное заведение. Иными словами, старайтесь всячески уменьшить количество студентов в Вашем учебном заведении до такого значения, при достижении которого функция влияния начинает оказывать подавляющее воздействие на Вашего конкурента. Не гонитесь за количеством студентов, а обращайтесь повышенное внимание на качество обучения, на репутацию Вашего учебного заведения и вполне возможно, что изменив параметры системы, Вы сумеете переломить ход событий, изменив ситуацию в свою пользу.

2.2. Формирование общественного мнения. Как видим, полученные результаты в достаточной степени правдоподобны и, по крайней мере, не противоречат здравому смыслу. Попробуем теперь применить этот же подход к анализу другой социальной ситуации и попытаемся смоделировать процесс формирования общественного мнения.

Пусть существуют две партии, имеющие различные позиции (а может быть,

и прямо противоположные) по какому-либо животрепещущему вопросу. Заметим, однако, что не стоит ограничивать себя пониманием слова «партия» как жесткой общественно-политической структуры со строгим членством, уставом, внутренней иерархией, программными документами и т.д. В данном случае, вполне возможно (и, может быть, даже необходимо) понимать слово «партия» как позицию, как мнение, точку зрения части населения по тому или иному вопросу. Однако в дальнейшем для краткости мы будем употреблять все-таки слово «партия». Пусть, далее, x и z - влияние или «вес» каждой партии (или опять-таки, «вес» части населения, поддерживающей ту или иную позицию), а y - «вес» группы людей, не поддерживающих ни то, ни другое направление. Под словом «вес» можно понимать, прежде всего, численность партии, хотя это и не совсем верно, ибо влияние партии (группы людей) зависит не только от ее численности, но и от активности ее членов; поэтому под словом «вес» правильнее будет понимать совокупность всех этих факторов. Представляется вполне очевидным, что отношения между партиями и политически пассивной частью населения взаимантагонистические: чем больше людей поддерживают ту или иную позицию, тем меньше оказывается численность (и, следовательно, «вес») «болота», не имеющего определенного мнения, и наоборот. Партии же могут оказывать друг на друга как кооперативное, так и антагонистическое влияние. Так, если в партии, описываемой переменной x , число членов растет по мере того, как члены другой партии разочаровываются в своих взглядах и переходят на сторону противника, и, наоборот, уменьшается по мере роста влияния и популярности партии, характеризуемой переменной z , то ясно, что z является антагонистической переменной по отношению к x . Но вполне возможна и иная ситуация: руководство партии, которой соответствует переменная z , «благодушествует» и не предпринимает никаких активных действий, пока партия противников имеет малый «вес» и не пользуется популярностью, но развивает бурную политическую деятельность, как только у противников дела идут на лад и число членов их партии увеличивается. В этом случае x является кооперативной переменной по отношению к z . Представляется весьма вероятным, что именно второй тип взаимодействия характерен для России, где традиционными являются действия по принципу «пока гром не грянет...».

Рассмотрим вышеописанную ситуацию, которой, как нетрудно видеть, соответствует случай 15 таблицы (рис. 3). Как видим, возможны два варианта развития событий в зависимости от начальных условий. Если изначально большая часть населения пассивна, то обе партии теряют своих и без того немногочисленных сторонников, и система очень быстро приходит в состояние равновесия (устойчивый узел $(0,2s^*,0)$), что соответствует случаю, когда почти все население проявляет полное безразличие к политике и не поддерживает ни ту, ни другую партию. Но если вес политической активной части населения велик, ситуация развивается по другому сценарию. В течение переходного процесса (который, опять-таки, может быть весьма продолжительным) все большее и большее число людей втягивается в политическую деятельность. В системе происходят квазициклические колебания, число сторонников и «вес» обеих партий постоянно изменяются (часть населения не имеет четко определенной позиции и, «шарахаясь» из стороны в сторону, поддерживает то одну, то другую партию) и в конечном итоге все население оказывается вовлеченным в политическую деятельность (в той или иной степени, разумеется) и отдает свои симпатии какой-либо из партий. В фазовом пространстве это соответствует устойчивому фокусу $(x_s^*,0,z_s^*)$.

Но возможно и иное развитие ситуации, если обе партии «российского» типа, то есть характер взаимодействия между ними взаимокооперативный (п. 13 табл., рис. 4). Если большинство населения не проявляет политической активности, то ситуация развивается в точности так же, как и в предыдущем случае $((0,2s^*,0)$ - устойчивый узел). Хуже, если общество политизировано, население взбудоражено: в этом случае обе партии начинают активно вербовать сторонников, и система очень быстро приходит в состояние максимальной поляризованности: все общество оказывается «расколотым» на две части, причем вес обеих партий

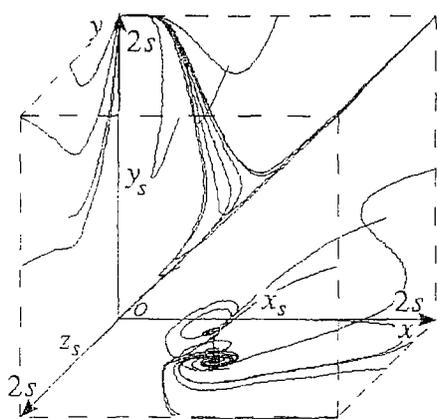


Рис. 3. Взаимодействие двух партий, одна из которых оказывает кооперативное влияние на другую партию, а другая - антагонистическое. Показано поведение системы в зависимости от начальных условий

оказывается гораздо выше, чем в предыдущем случае. Более того, в этом случае в системе отсутствуют какие бы то ни было колебательные движения. Все это говорит о серьезности намерений сторон: каждый индивидум твердо уверен в собственной правоте и не меняет своей позиции, готов до конца поддерживать интересы своей партии. Политизированность общества оказывается теперь гораздо выше, чем в предыдущем (п. 15 табл., рис. 3) случае. Излишне говорить, что подобное положение вещей чревато весьма серьезными и печальными последствиями.

2.3. Эволюционирующий рынок. В заключение рассмотрим ситуацию, которая представляется наиболее интересной как с точки зрения описания социальных явлений, так и богатства наблюдаемых режимов. Речь идет о случае, соответствующем пункту 14 таблицы. Рассмотрим динамику системы более подробно: при малых значениях параметра s (при указанных выбранных значениях остальных параметров это соответствует $s < 6$) в фазовом пространстве существует устойчивый фокус (x_s^*, \bar{y}, z_s^*) , где $\bar{y} = y(s)$ (рис. 5). С

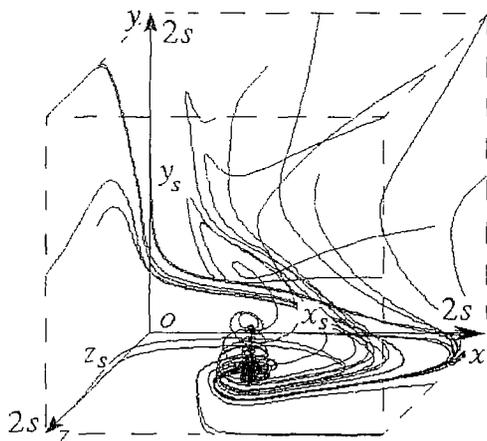


Рис 5. Эволюционирующий рынок: x характеризует спрос, y - предложение, z - цену на акции в данный момент времени. Независимо от начальных условий, в системе устанавливается равновесие между спросом, предложением и ценой ($s=5, x_s=4.5, y_s=4.25, z_s=4.1$)

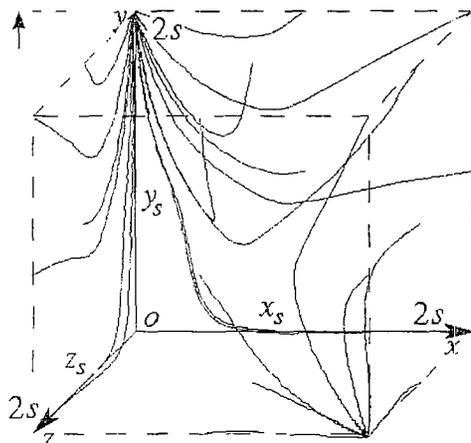


Рис 4. Взаимодействие двух партий, оказывающих друг на друга кооперативное влияние: x и z - влияние партий, y - «вес» пассивной части населения

увеличением параметра s значение \bar{y} также увеличивается и при $s=6.2$, как свидетельствуют результаты численного моделирования, неподвижная точка теряет устойчивость, происходит бифуркация Андронова - Хопфа, сопровождающаяся рождением предельного цикла (рис. 6, а). Дальнейшее увеличение параметра s приводит к увеличению амплитуды периодических колебаний. При достаточно больших фиксированных значениях параметра s ($s=25$) увеличение параметра z_s приводит к переходу от периодических колебаний к хаотическим по сценарию Фейгенбаума через каскад бифуркаций периода (рис. 6,7).

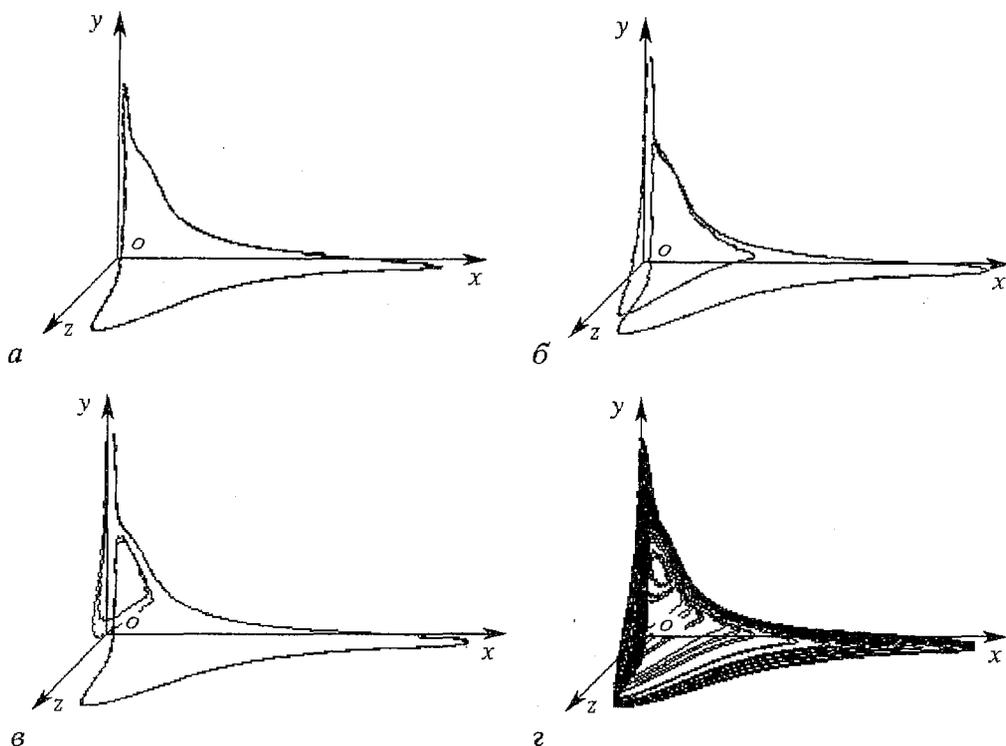


Рис. 6. Эволюционирующий рынок: *a* - ($s=25, x_s=4.5, y_s=4.25, z_s=5.5$). В системе существуют периодические колебания периода T ; *б* - ($s=25, x_s=4.5, y_s=4.25, z_s=6.2$). Первое удвоение периода. Цикл периода T теряет устойчивость, на его базе рождается цикл периода T^2 ; *в* - ($s=25, x_s=4.5, y_s=4.25, z_s=7.4$). В фазовом пространстве поведению системы соответствует цикл периода T^4 ; *г* - ($s=25, x_s=4.5, y_s=4.25, z_s=8.8$). Хаотическая динамика. В фазовом пространстве существует странный аттрактор

Рассмотрим ситуацию, к которой может быть применена данная модель, а именно, процессы, происходящие на рынке ценных бумаг. Пусть стоимость некоторого вида ценных бумаг (скажем, неких акций) характеризуется переменной z ; спрос на акции (количество акций, которое желает приобрести население в данный момент времени) - переменной x , а предложение акций - переменной y . Установим характер взаимосвязей между макропеременными. Естественно предположить, что с увеличением цены акций спрос на них уменьшается, а предложение, наоборот, увеличивается, что свидетельствует об антагонистическом воздействии переменной z на переменную x и кооперативном воздействии z на y . В то же время, при большом спросе на акции (x велико) цена на них растет, а при большом предложении (y велико) - падает, то есть x кооперативно действует на переменную z , тогда как y является антагонистической переменной по отношению к z . Разумно считать, что взаимодействие переменных x и y носит взаимоантагонистический характер, что обуславливается, прежде всего, психологическими причинами: действительно, кто же решится продать свои акции, если их очень охотно раскупают? С другой стороны, зачем покупать акции, если от них активно избавляются акционеры?

Как видим, вышеописанная ситуация вполне соответствует пункту

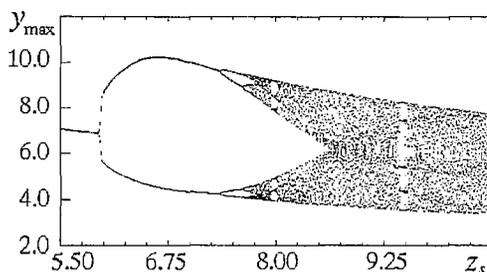


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода при адиабатически медленном изменении бифуркационного параметра z_s

14 таблицы (см. рис. 5). В данной интерпретации параметр s можно рассматривать как меру активности населения на рынке ценных бумаг: малые значения s соответствуют «нормальной жизни» фондового рынка, когда ситуация находится в руках профессионалов; средние значения s ($s \sim 10$) - повышенной активности; большие - ажиотажу, когда только уж совсем ленивый не втянут в процесс купли-продажи акций. Безусловно, параметр s является частично и мерой «экономической грамотности» и информированности населения.

При малых s в системе происходят затухающие колебания и по завершении переходного процесса устанавливается некоторое соотношение между спросом, предложением и ценой (см. рис. 5). При увеличении значения параметра s в системе возникают периодические колебания (см. рис. 6, а), амплитуда которых зависит от величины s и которые соответствуют следующим процессам: пусть в некоторый момент времени x велико, а y и z малы, то есть существует большой спрос на акции, цена и предложение которых на рынке невелики. Так как спрос велик, а предложение мало, то цена на акции начинает расти (z увеличивается), что приводит к уменьшению спроса. При достижении некоторой максимальной цены спрос падает почти до нуля, а предложение возрастает, что не может не привести к уменьшению цены на акции. При максимальном предложении и малом спросе цена акции оказывается малой, что ведет к уменьшению предложения и стимулирует увеличение спроса, после чего все повторяется сначала. Заметим, что ситуация в зависимости от параметров может повторяться не буквально, а лишь в общих чертах (в случае хаотической динамики (рис. 6, г)), что не только не противоречит здравому смыслу, но и кажется вполне соответствующим действительности.

На этом завершим рассмотрение социальных процессов, хотя, конечно же, возможности интерпретации модифицированных уравнений Вайдлиха далеко не ограничиваются приведенными примерами. Разумеется, систему уравнений можно еще более усложнить: увеличить число переменных, «развязать» параметры (то есть, положить $x_{sz} \neq x_{sy}$, $A_{xy} \neq A_{xz}$, и так далее). Конечно система станет более сложной, но зато потеряет свою наглядность и исследовать ее будет гораздо сложнее. Представляется, что приведенная система уравнений - разумный компромисс между требованиями адекватности и наглядности, предъявляемыми к модели.

В заключение выражаем признательность Кипчатову А.А. за ряд ценных критических замечаний, а также Красичкову Л.В. за помощь и поддержку.

Библиографический список

1. Бартоломью Д. Стохастические модели социальных процессов. М.: Финансы и статистика. 1985.
2. Опыт моделирования социальных процессов (вопросы методологии и методики построения моделей). Киев: Наукова думка, 1983.
3. Форрестер Д. Мировая динамика. М.: Наука, 1978.
4. Неймарк Ю.И. Математическая модель производителя - продукт - управленцы // Динамика систем. Динамика, стохастичность, бифуркации. Межвузовский сборник научных трудов. Горький, 1990. С.84.
5. Weidlich W. Stability and cyclicity in social systems // Behavioral Science, V. 33, P. 241, 1988.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 21.02.95
после переработки 11.05.95

THE APPLICATION OF MODIFIED WEIDLICH EQUATIONS TO THE SIMULATION OF SOCIAL PROCESSES

A.A. Koronovskiy, D.I. Trubetskov

The paper presents the results of analysis of the modified Weidlich equations, make it possible to describe qualitatively different processes, taking place in human society. It is illustrated with several examples, showing the application of this set of equations to the simulation of particular social phenomena. The possibility of appearance of chaotic oscillations in the system via cascade bifurcations of period doubling is demonstrated.



Короновский Алексей Александрович - родился в 1972 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышла монография в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым «Нелинейная динамика в действии» (1996). Автор 2 статей в центральной печати.



Трубецков Дмитрий Иванович родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук. Область научных интересов - радиофизика в той ее части, которая связана с взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями и с теорией сверхвысокочастотных электронных приборов; теория колебаний и волн; применение методов нелинейной динамики в различных областях науки; история науки.

Автор и соавтор одиннадцати монографий и учебных пособий по сверхвысокочастотной электронике, теории колебаний и волн и истории электронных ламп сверхвысоких частот, в том числе монографии «Аналитические методы расчета в электронике СВЧ» (М.: Сов. радио, 1970; совместно с В.Н. Шевчиком), коллективной монографии «Электроника ламп с обратной волной» (Изд. Сарат. ун-та, 1975), учебного пособия «Введение в теорию колебаний и волн» (первое издание, М.: Наука, 1984; второе - М.: Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем), книги «Формирование радиоэлектроники» (М.: Наука, 1988, раздел «История электронных ламп сверхвысоких частот»). В 1989 году книга «Введение в теорию колебаний и волн» в Нидерландах переведена на английский язык и вышла под названием «Oscillations and waves in linear and nonlinear systems» (The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989). Опубликовал четыре книги лекций по электронике СВЧ и истории электронных ламп и много научных статей по указанным выше направлениям. Зам. главного редактора журнала «Прикладная нелинейная динамика». Член редколлегии журнала «Известия вузов. Радиофизика».



ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЛИМФОТОКА МЕТОДАМИ СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

А.А. Беднов, С.С. Ульянов, В.В. Тучин, Г.Е. Брилли, Е.И. Захарова

При многих заболеваниях происходят изменения параметров микроциркуляции крови и лимфы. Эти параметры имеют важное диагностическое значение. В отличие от кровотока, движение лимфы является более сложным и разнообразным. Лимфоток в микрососудах является нестационарным, случайно изменяющимся во времени. В настоящее время существующие методы определения данных потоков развиты недостаточно и носят, в основном, качественный характер.

В данной статье движение крови и лимфы рассмотрено с точки зрения нелинейной динамики. Предложен спекл-интерферометрический метод исследования динамических характеристик потоков биологических жидкостей. Данный метод был апробирован при исследовании кровотока и лимфотока в микрососудах. С использованием метода дифракции сфокусированных гауссовых пучков, определялись следующие параметры: V , характеризующий среднее по времени значение скорости биопотока, и Σ_V , показывающий степень отклонения огибающей спектра от гауссовой кривой. Параметр Σ_V содержит информацию о наборе скоростей, присутствующих в биопотоке, и помимо этого указывает на пространственно-временные изменения скорости в исследуемой области.

Исследование динамики лимфотока проводилось также под действием лимфотропного фактора. Было показано, что лимфатические микрососуды могут функционировать в различных режимах, при которых структура лимфотока и его временная динамика качественно меняются.

Введение

В настоящее время существует ряд оптических методов диагностики потоков биологических жидкостей [1-7]. Однако данные методы адаптированы, в основном, для определения скоростных и объемных характеристик кровотока в микрососудах. Методы количественного анализа лимфотока, особенно в лимфатических сосудах малого калибра, пока не разработаны. Лимфатические микрососуды по сравнению с кровеносными имеют больший диаметр. Движение лимфы медленнее, а по характеру сложнее и разнообразнее, чем движение крови. В большинстве лимфатических сосудов наблюдается возвратно-поступательное и/или маятникообразное движение [8,9]. В отличие от кровотока, вызываемого преимущественно работой сердца, лимфоток не связан с деятельностью единого насоса и зависит как от интенсивности процесса лимфообразования на уровне начальных лимфатических капилляров, так и от сил, ответственных за дальнейшее продвижение лимфы по собирательным сосудам до впадения грудного протока в венозную систему. К последним относятся наружные компрессионные силы

(подвижность кишечника, дыхательные движения грудной клетки и так далее) и сократительная активность самих сосудов. При этом тонус сосудов, фазные сокращения их стенок и клапанов, изменяя величину внутрисосудистого давления, имеют наиболее важное значение в процессе движения лимфы и обуславливают динамику лимфотока в каждом конкретном сосуде [10,11,12]. Сокращения гладкомышечных клеток стенок сосудов и клапанов, подобно тому, что наблюдается в сердце, регулируются водителем ритма. Каждый межклапанный участок сосуда (лимфангион) или несколько таких участков имеют свой водитель ритма. Поэтому функционирование каждого лимфангиона имеет общие черты с механизмами работы сердца [13]. В ряде работ функционирование сердца рассмотрено с позиций нелинейной динамики [14,15]. В лимфатической системе, также как и в системе кровообращения, могут возникать хаотические колебания. Оценка параметров движения лимфы и их изменения при различных патологических состояниях на сегодняшний день носит, в основном, описательный характер. Скорость лимфотока в макрососудах оценивается по количеству лимфы, вытекающей из канюлированного сосуда в единицу времени [16,17]. Однако, согласно данным R.E.Drake, G.A.Laine [18], скорость лимфотока в канюлированном сосуде не соответствует скорости в неканюлированном. Определение скорости лимфотока в микрососудах осуществляется при биомикроскопии по характеру перемещения лимфоцитов в просвете сосуда и носит, главным образом, качественный характер [9,19].

В данной статье предложен метод количественной оценки характеристик лимфотока. Проведен анализ изменений динамики лимфотока под влиянием лимфотропного фактора.

Дифракция сфокусированных гауссовых пучков в микрососудах: теоретическое рассмотрение

Перед тем, как приступить к анализу скоростных параметров потоков биологических жидкостей в микрососудах, следует отметить, что кровеносные и лимфатические микрососуды имеют сходные оптические характеристики. В связи с этим представляет интерес процесс дифракции сфокусированных гауссовых пучков на кровеносных сосудах диаметром 12-150 мкм с равномерным потоком. Как было показано [20], такие сосуды ведут себя подобно слабо рассеивающему движущемуся фазовому экрану. Сосуды большего диаметра могут рассматриваться как экран со значительными фазовыми флуктуациями. Таким образом, необходимо проанализировать каждый из этих случаев дифракции сфокусированных гауссовых пучков. При рассеянии сфокусированного лазерного пучка на движущемся фазовом экране имеет место изменяющаяся во времени фазовая модуляция дифрагирующего пучка в плоскости дифракции. В результате появляются временные флуктуации интенсивности рассеянной волны в дальней зоне дифракции. Мы рассматриваем скалярную теорию дифракции сфокусированных гауссовых пучков. Уравнение для флуктуации амплитуды динамического спекл-поля в дальней области при нормальном падении пучка на фазовый экран может быть записано, как [20]

$$U_s(X) = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} U_V(X-\alpha)G(\alpha)d\alpha, \quad (1)$$

$$G(\alpha) = \exp(-2\pi i\alpha X^0/Z_0)\exp(-\alpha^2/W_0^2), \quad (2)$$

где X - координата центра перетяжки сканирующего пучка, сфокусированного на исследуемый экран; X^0 - координата точки наблюдения флуктуации поля в движущейся системе координат, связанной с пучком; Z_0 - расстояние между плоскостью рассеяния и плоскостью наблюдения; $U_V(X)$ - поле в плоскости рассеяния при освещении экрана плоской волной. Используя приближение Кирхгофа, можно записать

$$U_V(X) = \exp[-2\pi i H(X)], \quad (3)$$

где $H(X)$ - функция, описывающая флуктуации оптического пути, которые были вызваны влиянием экрана. Следует отметить, что все величины, имеющие размерность длины в уравнениях (1)-(3), были нормированы на длину волны падающего излучения. Все амплитуды поля в этих уравнениях нормированы на амплитуду поля в центре перетяжки сфокусированного гауссового пучка (в данном случае амплитуда равна единице). Таким образом, все величины в уравнениях (1)-(3) являются безразмерными. Const - некоторая константа, которой можно в дальнейшем пренебречь.

Для простоты мы проанализируем случай рассеяния сфокусированных гауссовых пучков на фазовом экране с одномерным рельефом. Рассмотрим процесс дифракции сфокусированных гауссовых пучков в кровеносных и лимфатических микрососудах, которые ведут себя подобно слабо рассеивающему движущемуся экрану. Используя уравнение (1), мы получим формулу для функций корреляции временных флуктуаций интенсивности и комплексной амплитуды рассеянного поля. При этом в качестве изменяющейся во времени координаты будем использовать безразмерную переменную $X=vt/\lambda$, где v - скорость сканирования сфокусированного гауссового пучка относительно исследуемого слабо рассеивающего экрана (или скорость биопотока в нашем случае). Мы полагаем, что флуктуации фазового экрана являются статистически однородными, имеют нулевое среднее значение и подчиняются гауссовой статистике первого и второго рода. Введем функцию корреляции ядра свертки [21]

$$B_g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)G^*(\alpha+\xi)d\alpha. \quad (4)$$

Используя стандартные преобразования [22], уравнение (4) можно записать как

$$B_g(\xi) = (\pi/2)^{1/2}W_0 \exp[-\xi^2/(2W_0^2)] \exp[-2\pi i X^0 \xi/Z]. \quad (5)$$

Несложно показать, что корреляционная функция флуктуационной компоненты амплитуды поля для слабо рассеивающего фазового экрана может быть записана в виде

$$\Psi_V(X) = 4\pi^2\sigma^2 \exp(-X^2/L_c^2), \quad (6)$$

где L_c - длина корреляции рельефа экрана, σ^2 - дисперсия рельефа. Для глубокого фазового экрана корреляционная функция может быть записана следующим образом:

$$\Psi_V(\xi) = \exp[-2\pi^2\sigma^2\xi^2/d^2K(X)/dX^2|_{X=0}], \quad (7)$$

где $K(X)$ - коэффициент корреляции рельефа фазового экрана. Выражение для функции корреляции полного поля в плоскости рассеяния имеет вид

$$\Gamma_V(X) = \Psi_V(X) + \langle U_V \rangle^2 = 4\pi^2\sigma^2 \exp(-X^2/L_c^2) \exp(-4\pi^2\sigma^2), \quad (8)$$

где

$$\langle U_V \rangle^2 = \exp(-2\pi^2\sigma^2). \quad (9)$$

Как показано в работе [20], функция корреляции комплексной амплитуды рассеянного поля в дальней области дифракции

$$\Gamma_U(\xi) = \Gamma_V \otimes B_g, \quad (10)$$

где B_g - величина из уравнения (5), \otimes - символ операции свертки. В последнем преобразовании используются результаты из [21]. Для дальней зоны дифракции для полей, подчиняющихся гауссовой статистике первого рода, соотношение между корреляционной функцией флуктуаций интенсивности $\Psi_I(\xi)$ и амплитуды $\Gamma_U(\xi)$ динамического спекл-поля определяется следующим образом [23] :

$$\Psi_I(\xi) = |\Gamma_U(\xi)|^2 - |\Gamma_U(\infty)|^2. \quad (11)$$

Несложно показать, что данная корреляционная функция может быть приведена к виду [20]:

$$\Psi_I(\xi) = \Psi_U^2(\xi) \equiv [8\pi^4\sigma^2 W_0^2 L_c / (2W_0^2 + L_c^2)^{1/2}] \exp[-\xi^2 / (2W_0^2 + L_c^2)]. \quad (12)$$

Для глубокого фазового экрана аналогичная корреляционная функция будет выглядеть следующим образом [20]:

$$\Psi_I(\xi) = \Psi_U^2(\xi) \equiv [\pi^2 W_0^4 / (2AW_0^2 + 1)] \exp[-2A\xi^2 / (2AW_0^2 + 1)], \quad (13)$$

где

$$A = 2\pi^2 [d^2 K(X) / dX^2]_{X=0} \sigma^2. \quad (14)$$

Из выражений (12) и (13) видно, что корреляционные функции флуктуаций интенсивности имеют гауссову форму. Кроме того, при дифракции жестко сфокусированных лазерных пучков в узких и широких сосудах нормализованная длина корреляции X_c может быть записана как $X_c = (2W_0^2 + L_c^2)^{-1/2}$ и $X_c = [2AW_0^2 + 1 / (2A)]^{1/2}$ соответственно. Время корреляции t_c определяется как $t_c = \lambda X_c / v$. Таким образом, как в случае дифракции сфокусированных гауссовых пучков в узких капиллярах, так и при рассеянии в широких сосудах время корреляции флуктуаций интенсивности динамических биоспеклов обратно пропорционально скорости биотока. Это явление может быть использовано для регистрации изменений скорости лимфы в микрососудах.

Анализ погрешности данного метода показал, что суммарная ошибка измерения не превышает 4%.

Материалы и методы

Для измерения количественных показателей скорости лимфотока и его структуры использовалась методика, основанная на дифракции сфокусированных гауссовых пучков [8,20]. Оптическая схема установки приведена на рис. 1. С целью

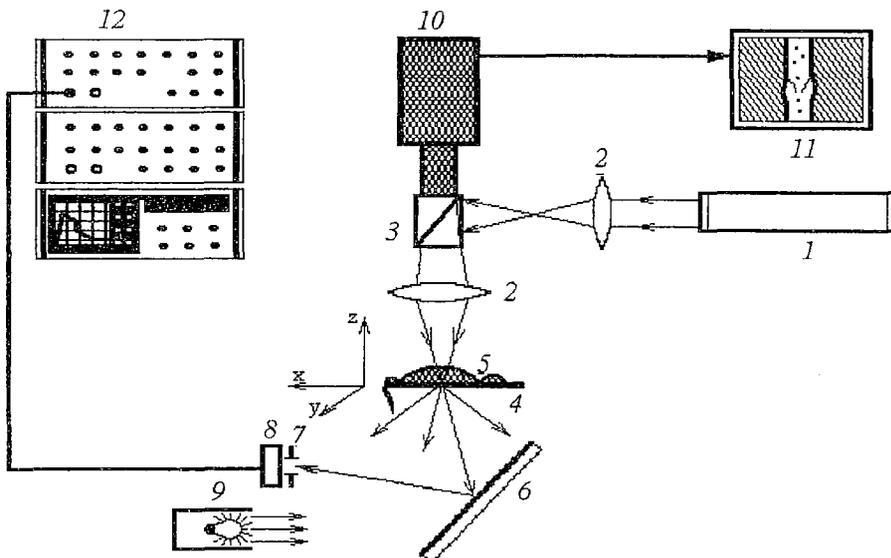


Рис. 1. Схема спекл-микроскопа для исследования кровотока и лимфотока в микрососудах: 1 - лазер; 2 - микрообъектив; 3 - светоделительный кубик; 4 - термостатируемый столик; 5 - крыса; 6 - зеркало; 7 - диафрагма; 8 - фотоприемник; 9 - лампа; 10 - телевизионная камера; 11 - монитор; 12 - анализатор спектра (0-2 кГц)

адаптации спекл-интерференционного метода измерений к задачам диагностики лимфотока в телевизионный микроскоп «Схема-2» введен дополнительный оптический канал, в котором пучок He-Ne лазера ($\lambda=632,8$ нм) жестко фокусируется на исследуемый микрососуд в пятно малого диаметра ($D=4,6\lambda$). Мощность излучения используемого лазера составляет 1 мВт. Флуктуации интенсивности рассеянного поля регистрируются с помощью фотоприемника, размеры которого намного меньше размера спекла. Выходной сигнал описанного устройства исследуется с помощью цифрового анализатора спектра. Усредненный спектр, получаемый на экране анализатора, строится при смене 128 реализаций исследуемого сигнала. Рассмотренная установка подобна описанной в работе [8]. Для количественного описания распределения скоростей и структуры потока лимфы в микрососудах введем следующие показатели: параметр $V=\Delta F/D$ (ΔF - ширина полосы, D - диаметр исследуемого микрососуда), прямо пропорциональный величине скорости лимфотока, и параметр

$$\Sigma_V = \left[\int_0^{\Delta F} |S(f) - G(f)|^4 df \right] / \left\{ \left[\int_0^{\Delta F} |S(f) - G(f)|^2 df \right]^2 / \Delta F \right\}, \quad (15)$$

указывающий на степень отклонения огибающей спектра от гауссовой формы. В последнем соотношении $S(f)$ - спектр мощности флуктуаций интенсивности исследуемой спекл-картины, $G(f)$ - спектр, огибающая которого описывается функцией Гаусса. Спектры $S(f)$ и $G(f)$ имеют одинаковую ширину полосы частот и мощность. Изменение Σ_V дает информацию о пространственно-временных изменениях скорости в регистрируемой области сосуда. Таким образом, изменение параметра V характеризует изменение средней скорости лимфотока, а величина Σ_V определяет разброс скоростей в потоке лимфы. Помимо этого во всех сосудах проводилась оценка формы получаемого спектра. Величины данных показателей, формы спектра и одновременное измерение с помощью микрометра диаметра, амплитуды и частоты сокращений позволили дать комплексную оценку изменений микролимфодинамики. В качестве лимфотропного агента был использован стафилококковый экзотоксин (СТ) [24].

Экспериментальные исследования лимфотока

Типичный спектр, полученный при рассеянии жестко сфокусированных гауссовых пучков на кровеносном микрососуде с диаметром 12 мкм, представлен на рис. 2. Этот спектр носит убывающий характер, а форма его огибающей близка к гауссовой.

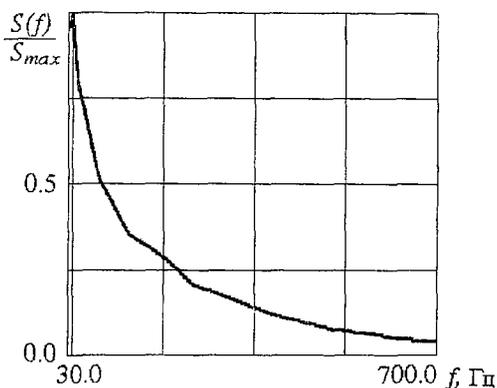


Рис 2. Спектр флуктуаций рассеянной интенсивности, полученный при дифракции сфокусированного лазерного пучка на кровеносном сосуда диаметром 12 мкм

Спектры флуктуаций интенсивности поля, рассеянного на лимфатических микрососудах (ЛМ), значительно отличаются от спектров рассеяния на кровеносных сосудах (рис. 3). Огибающая спектра флуктуаций интенсивности деформируется при рассеянии лазерного пучка в потоке лимфы в микрососуде или спектр содержит высокочастотный пик. Подобные изменения свидетельствуют о том, что движение лимфы носит нестационарный характер. Рассматриваемый эффект может быть обусловлен изменением величины скорости, при котором относительно быстрое движение лимфы сменяется резким замедлением или остановкой лимфотока,

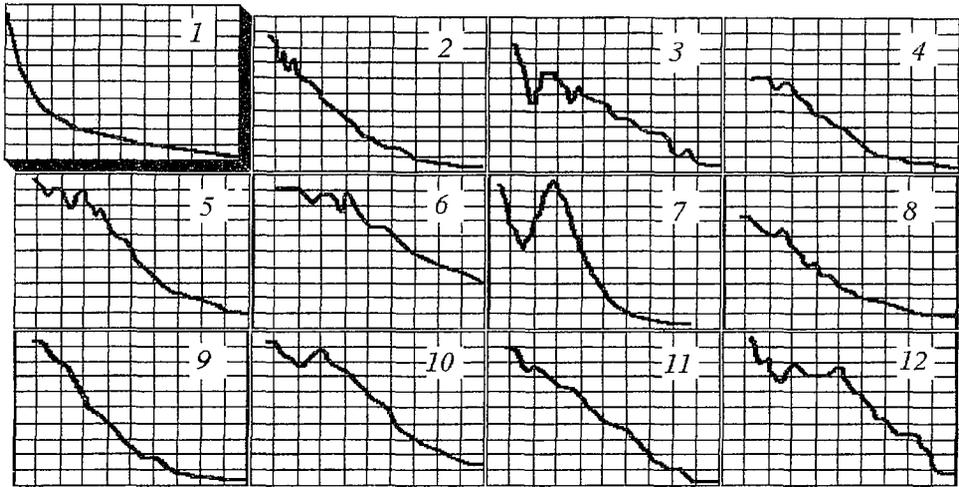


Рис. 3. Спектры флуктуаций рассеянной интенсивности, полученные при дифракции сфокусированных лазерных пучков: 1 - на кровеносном сосуде; 2- 12 - на лимфатических сосудах различных крыс; частотный интервал 30-1500 Гц

после чего снова восстанавливается ток лимфы. Подобные явления в микрососудах, как было отмечено выше, визуально регистрируются с помощью TV-микроскопа. При этом интересно отметить, что слои лимфы в центре по сечению сосуда и у стенок имеют разную скорость. На рис. 4, б показан спектр, регистрируемый в центре сосуда, на рис. 4, а, в - на расстоянии 30 мкм от стенки сосуда. У стенок движение лимфы полностью отсутствовало. При этом форма

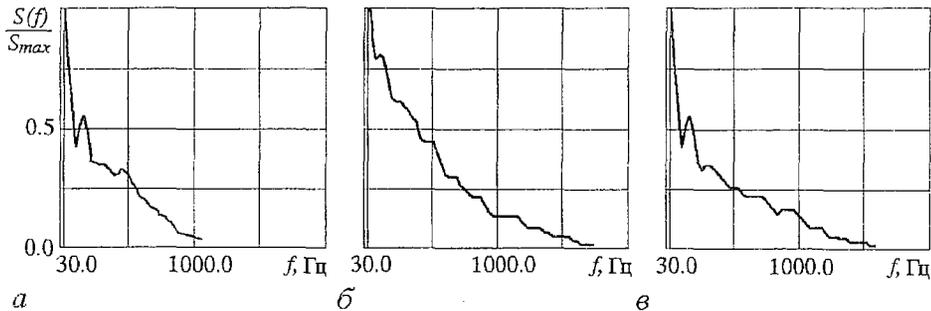


Рис. 4. Спектры флуктуаций рассеянной интенсивности, полученные при дифракции сфокусированного лазерного пучка в различных по сечению участках лимфатического сосуда диаметром 110 мкм: а, в - спектры, полученные при дифракции вблизи стенок сосуда; б - спектр, полученный при дифракции пучка в центральной области сосуда

спектральных функций и, следовательно, характер движения лимфы мало изменяются во времени. Это наглядно видно при сравнении спектров одного и того же участка сосуда в течение 40 мин наблюдения (рис. 5, а- в).

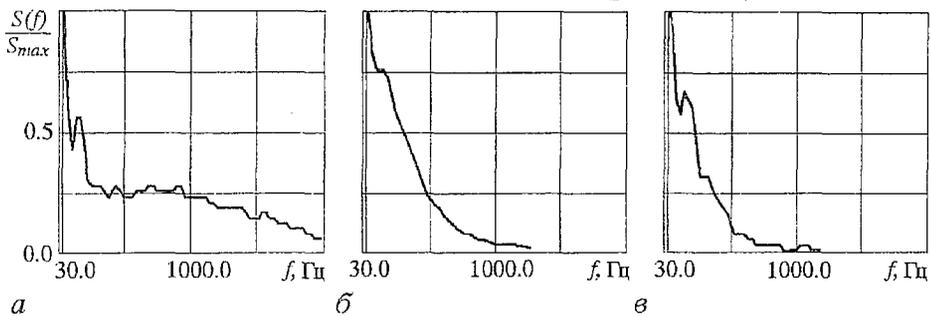


Рис. 5. То же, что на рис. 4. 40-я минута наблюдения. Интактный сосуд диаметром 110 мкм

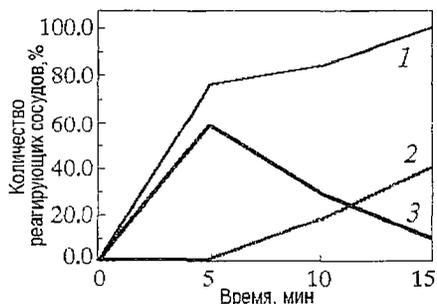


Рис. 6. Временные изменения параметров микролимфоциркуляции под действием стафилококкового токсина (количество реагирующих микрососудов выражено в %)

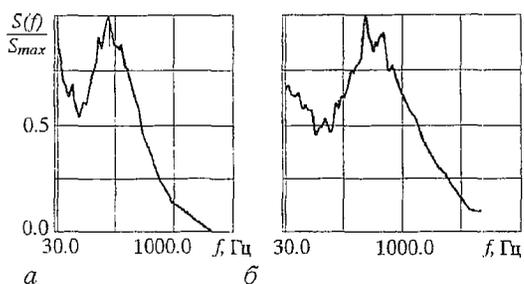


Рис. 7. Спектры флуктуаций рассеянной интенсивности, полученные при дифракции лазерного пучка, сфокусированного в центральной области лимфатического микрососуда: а - спектр интактного сосуда до действия стафилококкового токсина ($d=62$ мкм); б - спектр на том же участке сосуда после 5 минут действия стафилококкового токсина

Особый интерес представляет собой изучение влияния лимфотропного агента (СТ) на динамику лимфотока в микрососудах. Установлено, что 5-минутная аппликация СТ на брыжейку в большинстве сосудов (76%) вызывает уменьшение просвета на 23 ± 6 мкм. Одновременно в 59% ЛМ развивается фазная сократительная активность (рис. 6).

Наряду с этим на 5-й минуте действия СТ во всех исследованных сосудах наблюдается изменение формы спектра (рис. 7, а, б), что свидетельствует об изменении характера лимфотока, в частности, скоростных характеристик потока. К этому времени в 59% ЛМ наблюдается уменьшение средней скорости лимфотока на $41 \pm 8\%$, в 41% скорость увеличивается на $63 \pm 22\%$. Величина ΣV в 59% сосудов увеличивается на $33 \pm 7\%$, а в 41% - уменьшается на $35 \pm 9\%$ (рис. 8).

В течение дальнейшего наблюдения (с 5-й по 20-ю минуты) происходит прогрессирование вазоконстрикции и уменьшение числа фазно сокращающихся сосудов (см. рис. 6). При этом изменения параметров скорости лимфотока аналогичны наблюдаемым на 5-й минуте действия токсина (см. рис. 8).

Конечным результатом действия СТ является развитие в 100% исследованных ЛМ лимфостаза. При этом интересно отметить, что условия, предшествующие остановке лимфотока в сосудах, были различными. Так, непосредственно перед лимфостазом можно было бы ожидать уменьшения показателей, характеризующих скоростные параметры потока лимфы. Однако, остановка лимфотока в сосудах может происходить как на фоне уменьшения, так и на фоне увеличения средней скорости лимфотока, а также при разных значениях набора скоростей в потоке.

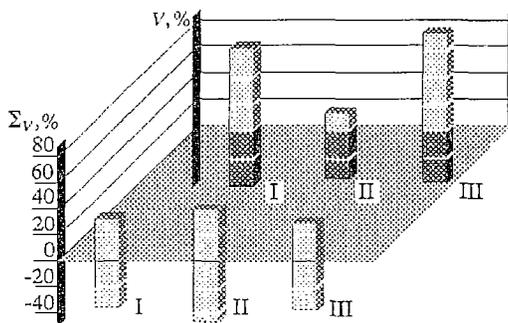


Рис. 8. Изменения средней по ансамблю скорости V и набора скоростей ΣV под влиянием стафилококкового токсина по сравнению с интактными сосудами. Величины V и ΣV выражены в %. I - на 5-й минуте действия токсина; II - на 10-й минуте действия токсина; III - на 20-й минуте действия токсина

Выводы

Разработан оптический метод количественной оценки динамических характеристик лимфотока. Показано, что потоки лимфы в микрососудах, как

правило, имеют нестационарный характер. При воздействии лимфотропного фактора (стафилококкового токсина) динамика лимфотока в большинстве случаев изменяется. При этом нестационарные потоки лимфы могут стать ламинарными и наоборот. Токсин может вызывать появление фазных сокращений в микрососудах, не обладающих спонтанной сократительной активностью. Разработанный метод и полученные результаты экспериментальных исследований позволяют ставить задачу о детальном изучении нелинейной динамики в лимфатической системе живых организмов (или лимфотока в микрососудах лимфатической системы живых организмов)

Библиографический список

1. *Shepherd A.P., Oberg R.A.* Laser-Doppler Flowmetry, Boston, Pordrecht, London, Kluwer Academic Publisher, 1990.
2. *Nilsson G., Jakobson A., Wardell K.* Tissue perfusion and imaging by coherent light scattering // Proc.SPIE. 1991. Vol. 1524. P.90.
3. *Nossal R., Kiefer J., Weiss G.H., Bonner R., Taitelbaum H., Havlin S.* Photon migration in layered media // Applied Optics. 1988. Vol. 27, № 16. P. 3382.
4. *Yamamoto T., Asakura T.* Noninvasive Evaluation of the Retinal Blood Circulation Using Laser Speckle Phenomena // Journal of Clinical Laser Medicine and Surgery. 1990. Vol. 8, № 5. P. 35.
5. *Aizu Y., Ambar H., Yamamoto T., Asakura T.* Measurements of flow velocity in a microscopic region using dynamic laser speckles based on the photon correlation // Optics Communications. 1989. Vol. 72, № 5. P. 269.
6. *Aizu Y., Asakura T.* Bio-speckle phenomena and their application to the evaluation of blood flow// Optics and Laser Technology. 1991. Vol.23, № 4. P. 205.
7. *Fujii H., Asakura T.* Blood flow observed by time-varying laser speckle // Optics Letters. 1985. Vol. 10, № 3. P. 104.
8. *Bednov A.A., Brill G.E., Tuchin V.V., Ulyanov S.S., Zakharova E.I.* Blood and lymph flow measurements in microvessels using focused laser beam diffraction phenomenon // Proc. SPIE, Laser Applications in Life Sciences. 1994. Vol. 2370. P.379.
9. *Хугаева В.К.* Оптикодергическая регуляция микролимфоциркуляции в норме и при ишемии: Автореф. дис... д.м.н., М.: Медицина, 1993.
10. *Орлов Р.С., Борисова Р.П., Бубнова Н.А. и др.* Лимфатические сосуды: тонус, моторика, регуляция// Физиол. журн. им. И.М. Сеченова. 1991. Т.77, № 9. С.140.
11. *Johnston M.G.* The intrinsic lymph pump// Lymphology. 1989. Vol.22. P.116.
12. *McHale N.G.* Role of the lymph pump and its control // NIPS. 1995. Vol.10, № 6. P. 112.
13. *Гашев А.А.* Механизм формирования обратного заброса жидкости в лимфангионах// Физиол. журн. им. И.М. Сеченова. 1991. Т.77, № 7. С. 63.
14. *Ульянов С.С., Тучин В.В.* Получение фазовых портретов кардиовибраций человека с помощью спекл-интерферометрии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994, № 3-4. С.44.
15. *Анищенко В.С., Сапарин П.И., Куртс И., Витт Ф., Фосс А.* Анализ динамики сердечного ритма человека на основе критерия перенормированной энтропии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. № 3-4. С.55.
16. *Ткаченко Б.И.* Физиология кровообращения: физиология сосудистой системы. Л.: Наука, 1984.
17. *Elias R.M., Johnston M.G., Hayashi A., Nelson W.* Decreased lymphatic pumping after intravenous endotoxin administration in sheep // Am. J. Physiol. 1987. Vol. 253, № 6. P. H1349.
18. *Drake R.E., Laine G.A.* Pulmonary microvascular permeability to fluid and macromolecules// J. Appl. Physiol. 1988. V.64. P.487.
19. *Топарова С.Г.* Взаимосвязь реакций лимфатических сосудов брыжейки с изменениями в них лимфотока под влиянием адреналина // Физиол. журн. им. И.М. Сеченова. 1988. Т.74, № 4. С. 558.

20. Ulyanov S.S. Dynamics of statistically inhomogeneous speckle-fields used for blood microcirculation analysis // Proc.SPIE. 1993. Vol. 2082. P.224.

21. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское Радио, 1977.

22. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.:Наука, 1971.

23. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.

24. Бриль Г.Е., Сергеев И.П., Глазкова Е.И., Мороховец Н.В. Действие стафилококкового токсина на систему микроциркуляции/ / Патол. физиол. и эксперим. терапия. 1992, № 1. С.21.

Саратовский государственный
университет,
Институт проблем точной механики и
управления РАН,
ЦНИЛ Саратовского государственного
медицинского университета

Поступила в редакцию 5.03.96
после переработки 17.05. 96

INVESTIGATION OF LYMPH FLOW DYNAMICS USING SPECKLE-INTERFEROMETRY

A.A. Bednov, S.S. Ulyanov, V.V. Tuchin, G.E. Brill, E.I. Zakcharova

For some human diseases both the blood and lymph microcirculation parameters are changed. They contain a useful diagnostic information. Unlike a blood flow, a lymph motion is more various and complicated in the microcirculatory system. Lymph flow in microvessels is non-stationary and randomly changed in time. By now the existed methods of determination of motion parameters of these flows have not completely developed. They are, in most, of qualitative character.

In this paper the blood and lymph motion has been considered from the viewpoint of non-linear dynamics. Speckle-interferometric method of investigation of dynamic characteristics of biofluids has been proposed. The method has been applied for investigation of blood and lymph flows in microvessels. Using the method of focused Gaussian beam diffraction there were defined the values of V , characterizing the mean temporal value both of blood and lymph flow velocity and Σ_V , a value indicating the deviation degree of spectral envelope from a Gaussian curve. The parameter Σ_V demonstrates the velocity range presenting in the flow and, besides that, gives an information about spatial-temporal velocity changes in registered region.

The research of lymph flow dynamics has been carried out under the influence of lymphotropic factor. It has been shown that lymph microvessels can act in different states at which the structure of lymph flow and its temporal dynamics are changed qualitatively.



Беднов Андрей Александрович - окончил физический факультет СГУ (1992). В настоящее время является аспирантом кафедры оптики СГУ, а также младшим научным сотрудником лаборатории лазерных и оптоэлектронных измерительных систем Института проблем точной механики и управления РАН. Занимается исследованием статистических характеристик динамических, частично развитых спекл-полей, формирующихся при рассеянии сфокусированного лазерного излучения на шероховатых поверхностях и в потоках биологических жидкостей. Автор 9 статей, касающихся этой области.



Ульянов Сергей Сергеевич - окончил СГУ (1986) по специальности «Радиофизика и электроника». Кандидатскую диссертацию защитил по специальности «лазерная физика» (1991). Является старшим научным сотрудником лаборатории лазерных и оптических измерительных систем Института проблем точной механики и управления РАН и профессором кафедры статистики Саратовской государственной экономической академии. Область исследовательских интересов включает дифракцию сфокусированных когерентных полей в случайных средах, динамику статистически-неоднородных спектров и проблемы биомедицинской оптики. Автор более 30 научных статей. Член BiOS.



Валерий Викторович Тучин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой оптики СГУ, зав. лабораторией лазерной диагностики технических и живых систем Института проблем точной механики и управления РАН. Круг его научных и педагогических интересов лежит в области нелинейной динамики лазерных систем, физики лазерных и оптических измерений, биомедицинской оптики и лазерной биомедицины. Автор или редактор 16 книг и глав в книгах, 23 изобретений и более 200 научных статей. Читает курсы «Оптика», «Динамика газоразрядных лазеров», «Лазеры и волоконная оптика в биомедицине», «Оптика биотканей», «Введение в специальность - биофизика». Лектор кратких курсов по биомедицинской оптике для международных аудиторий научных работников, инженеров и медицинских работников. Действительный член Международной

Академии Информатизации, член-корреспондент Российской Академии Естественных Наук по специальности биофизика и медицинская физика, член совета Российского отделения SPIE, член SPIE/BiOS, а также IEEE/LEOS, стипендиат Государственной научной стипендии России (1994-1996).



Брилль Григорий Ефимович - доктор медицинских наук, профессор кафедры патофизиологии СГМУ, директор ЦНИЛ СГМУ. Специалист в области общей патологии и физической биомедицины. Автор более 250 научных работ. Член BiOS.



Захарова Екатерина Ивановна - окончила Саратовский медицинский институт (1988), защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата медицинских наук (1996). В настоящее время работает научным сотрудником ЦНИЛ СГМУ. Занимается проблемами физиологии и патофизиологии микрососудов. Является автором 16 статей, касающихся этой области.

ЖУРНАЛ

Материалы Международной конференции



КРИТЕРИИ САМООРГАНИЗАЦИИ
В ФИЗИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ
И БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Суздаль 12 - 18 июня 1995 г.

В
ЖУРНАЛЕ



СТОХАСТИЧЕСКАЯ КЛАСТЕРНАЯ ДИНАМИКА ФЕРМЕНТ-СУБСТРАТНОГО КОМПЛЕКСА

*А.В. Нетребко, Н.В. Нетребко, Ю.М. Романовский,
Ю.И. Хургин, В. Эбелинг*

Со времени известной работы Л.Понтрягина, А.Андропова, А.Витта (1933 г.) в радиофизике рассмотрено множество проблем, связанных с изучением перехода мультистабильной системы из одного состояния равновесия в другое под действием шумов. В последние годы в нелинейной динамике сложных колебательных систем появились новые задачи, связанные с такими переходами, когда потенциальные рельефы, в которых происходят движения, являются двумерными, а их параметры флуктуирующими или изменяющимися периодически. Так как сложный потенциальный барьер является разновидностью бильярда Синая, то движения в таком рельефе стохастизируются даже без внешних воздействий. Наше исследование будет посвящено изучению стохастизации в описанных неавтономных системах. Для наглядности настоящая задача ставится нами на примерах из кластерной динамики макромолекул. Изучение подобных процессов позволит приблизиться к пониманию принципов действия молекулярных машин.

Настоящая работа содержит непосредственное развитие и продолжение результатов, представленных в статьях [1, 2]. Как уже отмечалось, фермент-субстратный комплекс является сложнейшей нелинейной колебательной системой. Такая метастабильная система создается при комплементарном связывании молекул субстрата и фермента. В ней протекают сложные динамические переходные процессы, которые приводят к изменениям в молекуле субстрата и возвращению молекулы фермента в исходное состояние.

Для наглядности мы сразу рассмотрим схему фермент-субстратного комплекса, составленного из молекулы α -химотрипсина (α -ХТ) и пептидной цепочки (рис.1). В работах [1, 2] мы, в основном, интересовались, как ведет себя «кластер» - неизменяемая часть субстрата - в потенциальной яме активного центра (например, блок А на рис.1). При этом было показано, что движения такого кластера в двумерной (да и в трехмерной) потенциальной яме могут стохастизоваться, порождая сложный спектр колебаний в степенях свободы, характеризующих движения различных кластеров (относительно жестко связанных групп атомов), составляющих макромолекулу. Заметим, что наиболее комплементарно соответствует активному центру в α -ХТ неизменяемый остаток аминокислоты фенилаланина [3]. Процесс «посадки» субстрата в активный центр часто связан с действием электростатического поля, формируемого связанными зарядами в кармане активного центра, и является специальной задачей моделирования [4, 5].

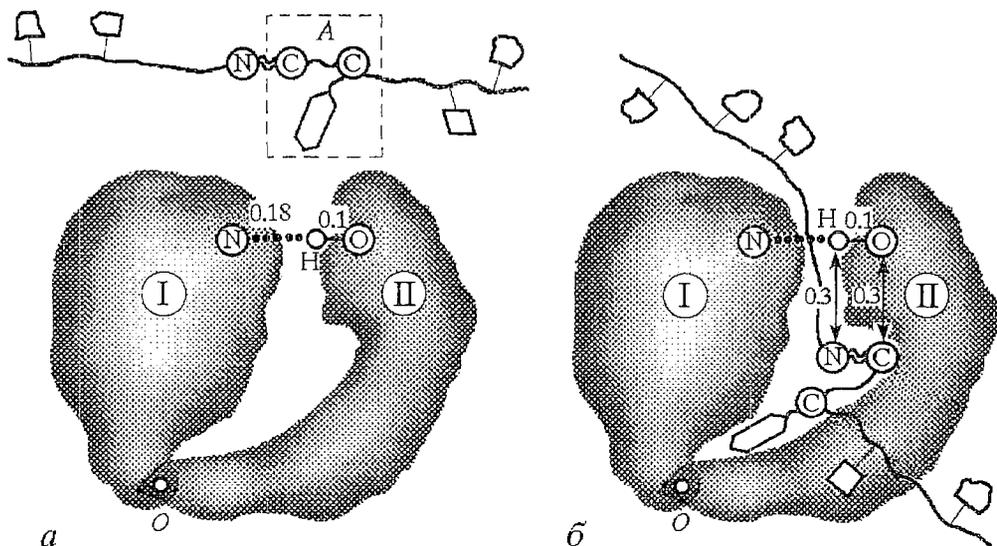


Рис. 1. *a* - схематически показана молекула фермента α -химотрипсина, состоящая из двух субглобул I и II, и отдельно - пептидная цепочка, состоящая из аминокислот, связанных последовательно пептидными связями. Между субглобулами находится активный центр, существенным элементом которого является комплекс с водородной связью N...HO. Атомы N и O расположены на I и II субглобулах, соответственно (расстояния даны в нм). A - неизменяемая часть субстрата; *b* - неизменяемая часть субстрата A комплементарно расположена в активном центре молекулы. При этом водородная связь и пептидная связь (показана волнистой линией) зафиксированы в определенном положении. Точка O - шарнир, соединяющий I и II субглобулы

В активном центре α -ХТ субстрат не сразу садится в более глубокую яму, где и подвергается обработке энзимом, а сначала попадает в менее глубокую яму. Следовательно, возникает проблема перехода «пробной частицы» - кластера или неизменяемой части субстрата - из одной ямы в другую с преодолением потенциального барьера. По всей видимости, с такими последовательными переходами связана диффузия легандов в белках в более общих случаях (см., например, [6,7]). Такие переходы должны происходить в условиях флюктуирующего профиля потенциального рельефа, определяющегося движениями субглобул белка-фермента и составляющих их кластеров.

Другая задача о переходе частицы из одной потенциальной ямы в другую возникает для протона в системе с водородными связями OH...N, схематически показанной на рис.1 (подробности смотри в работах [8, 9, 10]). Один минимум расположен вблизи атома O, другой - вблизи атома N. У протона имеется также возможность приблизиться к минимуму вблизи N и C кластера A (см.рис.1). Этот процесс является важнейшим звеном в цепи превращений, приводящих к разрыву пептидной связи. Подобная схема переноса протона является определяющей стадией реакции и при расщеплении ацетилхолина в активном центре ацетилхолинэстеразы [5] и в других гидролитических ферментах. Перенос протона из одной, в общем случае «трехмерной», ямы в другую может осуществляться как по классическому механизму, так и с помощью туннелирования (квантово-механические эффекты) [10]. При этом параметры потенциального рельефа и, в частности, энергетического барьера между ямами будут флюктуировать вместе с колебаниями кластеров, к которым привязаны атомы O и N, и неизменяемой части субстрата в активном центре. Так как потенциальный барьер для перехода протона в предположении «линейной» водородной связи очень велик (более 40 ккал/моль), то непосредственный перенос протона маловероятен [8]. Поэтому важно рассмотреть альтернативный путь, связанный с появлением в потенциальном рельефе третьего минимума, возникающего из-за влияния субстрата [11, 12]. Заметим, что в биофизике мембран также возникают задачи о переходе протонов в цепочке разделенных барьерами энергетических ям. Такой процесс носит солитонный характер [13].

Двумерная математическая модель

Таким образом, в кластерной динамике белка задача о переходе «частицы» из зоны притяжения одного минимума к зоне притяжения другого при флуктуациях параметров потенциальных рельефов является типичной. Поэтому ниже мы изучим характерные особенности таких переходов в классическом рассмотрении. В качестве модели выберем систему, описываемую следующими уравнениями (здесь и далее все переменные безразмерные):

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= -\partial U/\partial x - h_1 dx/dt + \xi_1(t), \\ d^2y/dt^2 &= -\partial U/\partial y - h_2 dx/dt + \xi_2(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Выбор формы двухъямного потенциала

$$U = U_1[\arctg(r_1 - b_1) - (\arctg(r_1 + b_1))] + U_2[\arctg(r_2 - b_2) - (\arctg(r_2 + b_2))] + cr^2, \quad (2)$$

$$r_1 = [y^2 + (x - g_1)^2]^{1/2}, r_2 = [y^2 + (x + g_2)^2]^{1/2}, r = [y^2 + x^2]^{1/2}$$

(где $U_1, U_2, c, b_1, b_2, g_1, g_2$ - произвольные константы; x, y - декартовы координаты) сделан из следующих соображений:

а) варьируя коэффициенты b_1, b_2, g_1, g_2 , мы легко можем изменить расположение потенциальных ям, а также величину потенциального барьера, их разделяющего;

б) коэффициенты U_1, U_2 характеризуют относительную глубину потенциальных ям;

в) благодаря наличию члена cr^2 в выражении (2) устанавливается некий потенциальный барьер вокруг начала координат, препятствующий уходу частицы из активной зоны;

г) выбор функций, входящих в (2), обусловлен желанием уменьшить взаимное влияние потенциальных ям друг на друга, а также обеспечить достаточную крутизну стенок вблизи точек минимума.

В окрестностях минимумов такой потенциал с точностью до величин третьего порядка малости совпадает с потенциалом Морзе. Характер поведения данного потенциала на бесконечности аналогичен потенциалам Леннарда - Джонса и Морзе.

На данное потенциальное поле может быть наложен потенциал Леннарда - Джонса (хорошо моделирующий межатомное взаимодействие) в виде:

$$\begin{aligned} U_{LD} &= d[(r_0/r_z)^{12} - (r_0/r_z)^6], \\ r_z &= [(y - y_C)^2 + (x - x_C)^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где x_C, y_C - координаты центра потенциала Леннарда - Джонса; r_0 - характерный радиус (расстояние от центра потенциала до линии, на которой значение потенциала равно нулю); d характеризует относительную глубину потенциального желоба (разность значений потенциальной энергии на бесконечности и в точке минимума).

Варьируя координаты центра потенциала, его характерный радиус и глубину, мы можем вносить возмущения в форму потенциальной поверхности (2). В частности, можно создавать форму потенциальной поверхности, в которой потенциальный барьер, разделяющий точки минимума поверхности (2), будет сравним по величине с барьером, отделяющим их от области минимума потенциала (3). На рис.2 представлены топограммы и трехмерные картины невозмущенной потенциальной поверхности (2) (рис.2,а) и возмущенной с помощью потенциала Леннарда - Джонса поверхности (рис.2,б).

В численных расчетах, результаты которых приведены ниже, значения

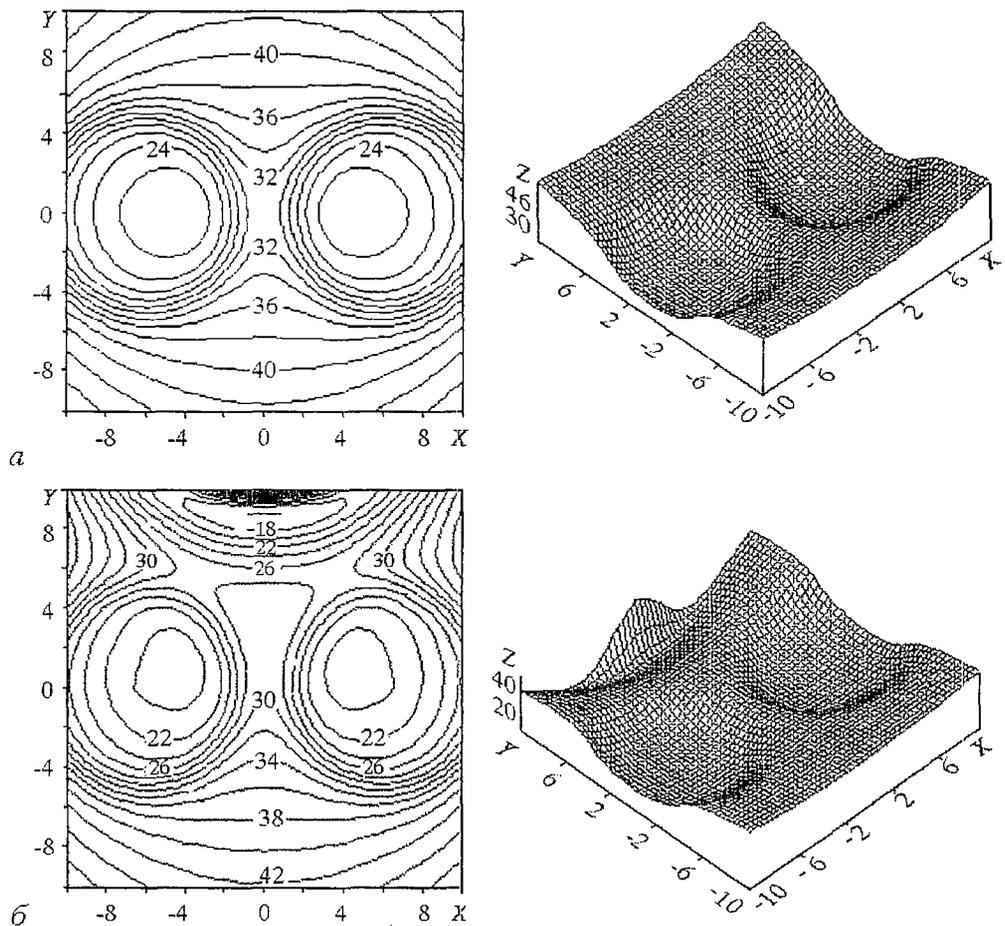


Рис. 2. Линии уровня и трехмерные картины потенциальных поверхностей: а - задаваемых соотношениями (2); б - соотношениями (2),(3)

коэффициентов, входящих в уравнения (2), (3), принимали, если это не оговорено особо, следующие значения:

$$U_1 = U_2 = 20/\pi; \quad b_1 = b_2 = 5; \quad c = 0.05; \quad d = 100;$$

$$y_c = 20; \quad x_c = 0; \quad g_1 = g_2 = 6,5.$$

Таким образом, потенциальное поле, задаваемое выражениями (2), (3), предполагалось симметричным относительно оси Y декартовой системы координат. При этом точки минимума потенциальной поверхности (2) лежат на оси X , а нижняя точка потенциального барьера находится в начале координат.

Результаты расчетов

1. Изучался процесс стохастизации колебаний материальной частицы в консервативной системе в зависимости от начальных условий. Форма потенциальной поверхности бралась в виде (2). Было рассмотрено несколько вариантов начальных условий. Начальное положение частицы на потенциальной поверхности задавалось координатами x_0, y_0 . При этом $x_0 = -5$ во всех вариантах, y_0 варьировалось в пределах от 0 до -5. В момент $t = 0$ частице сообщалась начальная скорость $\mathbf{V} = \mathbf{V}(v_x, v_y)$ (v_x, v_y - компоненты вектора скорости частицы в

направлении осей X и Y , соответственно). Во всех случаях $|V| = 5$. Такое значение начальной скорости достаточно для преодоления потенциального барьера, разделяющего ямы, из точки минимума потенциальной поверхности.

Система дифференциальных уравнений (1) интегрировалась численно по методу Рунге - Кутты четвертого порядка точности с автоматическим выбором оптимального шага интегрирования.

Были получены следующие результаты. В зависимости от первоначального положения частицы и направления вектора скорости в момент времени $t = 0$ частица может как перейти через потенциальный барьер и оказаться в окрестности другого минимума (другой потенциальной ямы), так и не перейти через него. В случае, когда происходит хотя бы один переход через потенциальный барьер, колебания частицы стохастизируются (перестают быть квазигармоническими). На наличие или отсутствие стохастизации может указывать размазывание спектра колебаний (исчезновение характерных изолированных пиков для определенных частот, всегда присутствующих на спектральных кривых в случае гармонических колебаний), однако определяющим признаком наличия или отсутствия стохастизации является характер поведения показателя Ляпунова во времени (стремление к нулю для гармонических колебаний и стремление к константе для стохастических). Возможность перехода или неперехода через потенциальный барьер зависит как от начального положения частицы на потенциальной поверхности, так и от направления вектора первоначальной скорости.

Варианты начальных условий и результаты численного исследования (наличие или отсутствие стохастизации) приведены в табл. 1.

Следует отметить, что для случая 11 стохастизации нет, хотя переход из одной ямы в другую происходит. Это связано с симметрией потенциальной поверхности.

Для некоторых случаев из табл. 1 на рис. 3 приведены частотные спектры функций $x(t)$, $y(t)$ и показано поведение показателя Ляпунова.

Таблица 1

вариант	x_0	v_x	y_0	v_y	заключение
1	-5	0	-5	-5	колебания стохастизируются
2	-5	0	-4	-5	стохастизации нет
3	-5	0	-3	-5	стохастизации нет
4	-5	0	-2	-5	стохастизации нет
5	-5	0	-1	-5	стохастизации нет
6	-5	0	0	-5	стохастизации нет
7	-5	-5	-4	0	стохастизации нет
8	-5	-5	-3	0	стохастизации нет
9	-5	-5	-2	0	колебания стохастизируются
10	-5	-5	-1	0	колебания стохастизируются
11	-5	-5	0	0	стохастизации нет
12	-5	-3	-4	-4	колебания стохастизируются
13	-5	-4	-4	-3	колебания стохастизируются

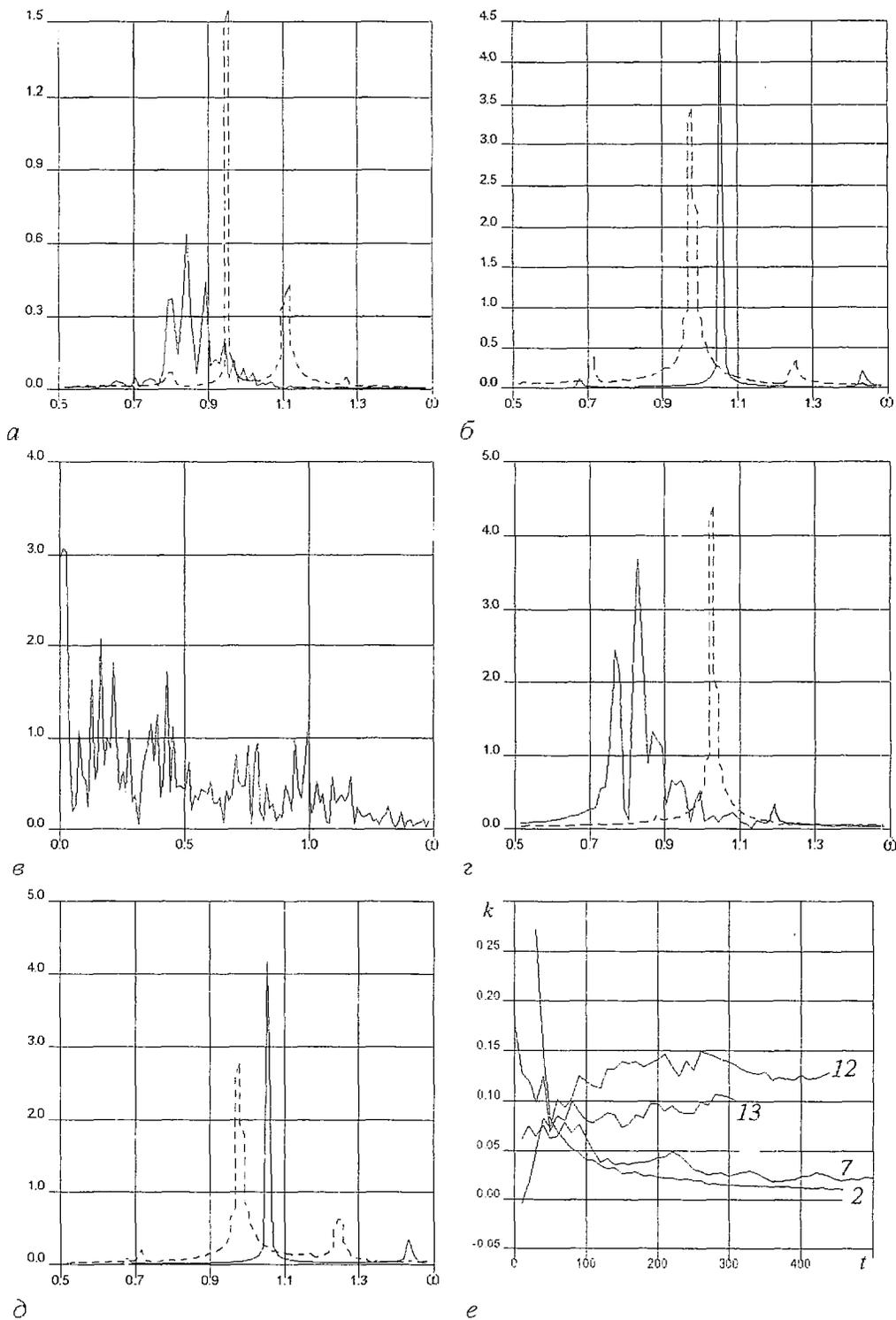


Рис. 3. Частотные спектры колебаний для некоторых вариантов расчетов из табл. 1: а - спектры $x(t)$ для случаев 2 (сплошная кривая) и 4 (пунктирная кривая); б - спектры $x(t)$ для случаев 7 (сплошная кривая) и 8 (пунктирная кривая); в - спектр $x(t)$ для случая 12; г - спектры $y(t)$ для случаев 2 (сплошная кривая) и 4 (пунктирная кривая); д - спектры $y(t)$ для случаев 7 (сплошная кривая) и 8 (пунктирная кривая); е - поведение показателей Ляпунова для случаев 2, 7, 12, 13 из табл. 1

Спектры, представленные на рис. 3, а-д для случая квазигармонических колебаний, приведены не для всего диапазона частот, а только для частот, близких к собственным. Из представленных результатов, в частности, следует, что частота «собственных» колебаний частицы в потенциальном поле (2) колеблется в пределах от 0.7 до 1.1 в зависимости от начального положения частицы. Разброс собственных частот объясняется существенной нелинейностью функций, входящих в выражения (2).

На рис. 4, а- в представлены фазовые траектории движения частицы на фоне топограммы потенциальной поверхности для вариантов 3, 8, 9, соответственно.

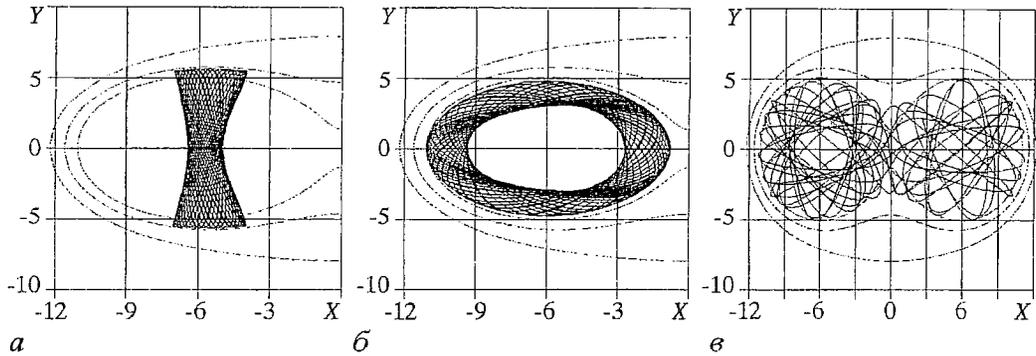


Рис. 4. Фазовые траектории частицы на фоне топограммы потенциальной поверхности, подробно представленной на рис.2,а,б для вариантов 3 (а), 8 (б) и 9 (в) табл. 1

2. Изучался процесс перехода частицы из одной потенциальной ямы потенциального поля (2) в другую для случая, когда на частицу воздействуют, например, тепловые флуктуации. Начальное положение частицы задавалось в начале координат ($x_0 = y_0 = 0$). Считалось, что в некоторые моменты времени (20 раз за период свободных колебаний, определенный по частотному спектру задачи 1) скорость частицы в направлении осей X и Y могла изменяться на некоторую величину $v_x \xi$, $v_y \xi$. Здесь ξ - равномерно распределенная на отрезке $[-0.5; 0.5]$ случайная величина, v_x , v_y - амплитуды добавочной скорости (в численных расчетах принималось $v_x = v_y = 1$; соответствующей такому единичному толчку кинетической энергии недостаточно первоначально покоящейся частице для преодоления энергетического барьера, разделяющего потенциальные ямы, из точки минимума любой из ям). Из-за шумового воздействия (такой шум может считаться «белым») система является неконсервативной, и мы обязаны ввести трение. Коэффициенты h_1 , h_2 в уравнении (1) подбирались путем проведения численного эксперимента из условия сохранения среднего значения полной энергии системы за время счета. В численных расчетах $h_1 = h_2 = 0.05$.

На потенциальное поле (2) накладывался потенциал Леннарда - Джонса (3). Определялось среднее по 25 реализациям случайного процесса время первых десяти переходов из ямы в яму в зависимости от глубины d и характерного радиуса потенциала r_0 (3). Всего было рассмотрено 5 вариантов (табл. 2).

На рис. 5, а- в представлены фазовые траектории движения частицы на фоне топограммы потенциальной поверхности для случаев 1, 2, 3, табл. 2.

Таблица 2

вариант	1	2	3	4	5
d	0	100	50	100	50
r_0	*	10	10	13	13

* потенциал Леннарда - Джонса отсутствует.

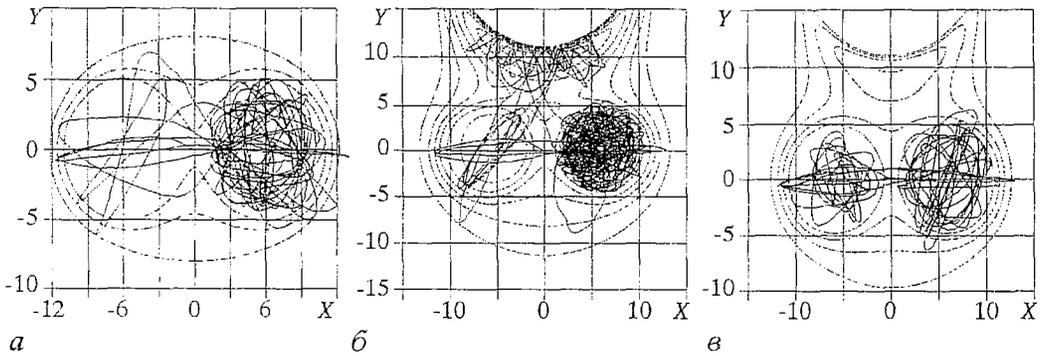


Рис. 5. Фазовые траектории движения частицы на фоне топограммы потенциальной поверхности при учете термического шума и трения для различных случаев табл. 2: *a* - в отсутствие потенциала Леннарда - Джонса; *б, в* - в присутствии потенциала Леннарда - Джонса. $r_0=10$, $d=100$ (*б*); $r_0=10$, $d=50$ (*в*)

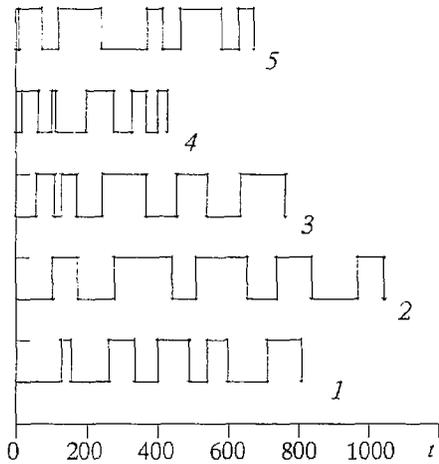


Рис. 6. Время «жизни» частицы в потенциальных ямах для различных вариантов расположения потенциалов Леннарда - Джонса (табл. 2). Число переходов в каждом варианте равно 10

сильнее, чем больше его характерный радиус (при фиксированных координатах его центра) и относительная глубина. Это, в свою очередь, оказывает существенное влияние на время десяти переходов и может как увеличивать, так и уменьшать его по сравнению со случаем отсутствия этого потенциала. Следует отметить, что решающим фактором является глубина потенциала. Так, именно глубокий потенциал Леннарда - Джонса способен существенно уменьшить потенциальный барьер, отделяющий его от минимумов потенциальной поверхности (2) и, таким образом, дать частице возможность осуществить переход по обходному пути. Однако, если потенциальный желоб находится на значительном удалении, то частица, попав туда, может достаточно долго набирать энергию для выхода. В результате этого может существенно увеличиваться общее время процесса. В свою очередь, мелкий потенциал не способен уменьшить барьер и частице энергетически выгоднее прямой путь по кратчайшему расстоянию между минимумами потенциальной поверхности (2). На рис. 5, *в* представлен вариант, когда при мелком потенциале Леннарда - Джонса все десять переходов были осуществлены по прямому пути; общее время не отличается от времени переходов в случае *1*.

Таким образом, глубокий и широкий (в смысле большого значения r_0)

Результаты расчетов представлены на рис.6. Здесь по оси *X* отложено время. Переход из одной ямы в другую характеризуется опусканием или подниманием соответствующего участка ломаной. Переход из одной ямы в другую может происходить различными способами: непосредственно через потенциальный барьер, разделяющий ямы поверхности (2), либо по желобу потенциала (3) (обходной путь). Во втором случае частица может задержаться в этом желобе на длительное время, а может и вернуться обратно в ту яму, из которой вышла. Возврат не считался переходом. Следует отметить, что суммарные длины верхних и нижних горизонтальных участков ломаных (то есть время «жизни» в каждой из ям) равны.

Потенциал Леннарда - Джонса искажает потенциальное поле (2) тем

потенциал Леннарда - Джонса уменьшает (вариант 4), глубокий и узкий - увеличивает (вариант 2) время первых десяти переходов по сравнению со случаем отсутствия потенциала (3) (вариант 1). Мелкие широкий и узкий потенциалы (случаи 3 и 4) незначительно изменяют это время.

3. В случае, когда центр потенциала Леннарда - Джонса совершает гармонические колебания вдоль оси Y по закону

$$y_c = 20 + 3\sin(kt), \quad (4)$$

а частица первоначально находится в центре одной из ям, определялось время первого выхода из этой ямы (удаление от центра ямы на расстояние, равное половине расстояния между минимумами потенциальной поверхности (2)) в зависимости от частоты колебаний k .

Результаты расчетов представлены на рис. 7, а. Здесь по оси X отложено значение параметра $2\pi k$, по оси Y - расчетное время. В практических расчетах рассматривались времена, меньшие 1000 (если за это время выхода из ямы не происходило, счет обрывался). Выделено по крайней мере два интервала частот, при которых время выхода минимально. При этом наиболее быстро частица выходит из потенциальной ямы, если частоты колебаний центра потенциала Леннарда - Джонса близки к частотам свободных колебаний частицы в потенциальной яме (см. задачу 1). Второй интервал соответствует удвоенной собственной частоте свободных колебаний.

Наличие двух интервалов резонансных частот соответствует двум механизмам возбуждения колебаний пробной массы под действием периодического возбуждения (4): аддитивному на частоте, близкой к собственной, и параметрическому на частоте, близкой к удвоенной частоте собственных колебаний.

Если ввести в систему шум аналогично тому, как мы это делали в задаче 2, то картина качественно не изменится (см. рис. 7, б-г). Мы опять легко выделяем диапазоны частот, на которых времена выхода минимальны. Следует отметить, что интенсивность шума (под интенсивностью мы понимаем амплитуду добавочной скорости), вводимого в рассмотрение в этой задаче, была ниже, чем в задаче 2. Если вводить в систему только трение, то оказывается, что, во-первых, существует некоторое «пороговое» значение коэффициента трения (порядка 0.01), при котором выход из ямы за расчетное время не происходит ни на одной частоте из рассмотренного диапазона, во-вторых, если коэффициент трения не достигает порогового значения, то области резонансных частот сужаются (область удвоенных резонансных частот может вообще исчезнуть), а соответствующие времена увеличиваются пропорционально увеличению значения коэффициента трения. Если интенсивность шума сравнима по величине с интенсивностью в задаче 2, то картина смазывается. Время первого выхода определяется шумовым воздействием, а не возмущениями, вносимыми в систему движением потенциала Леннарда - Джонса.

При наличии случайного шумового воздействия под временем выхода из потенциальной ямы мы понимали среднее время, определенное по 25 реализациям случайного процесса. При этом разброс значений времен в различных реализациях составлял не более 10% для частот, близких к резонансным, и увеличивался при удалении от них.

Заключение

Нами рассматривалась ограниченная задача: показано, что энергия начального толчка, сообщенная пробной массе, в «двухъямном» двумерном потенциальном рельефе при переходах из одной ямы в другую распределяется по широкому спектру частот, а сами колебания массы стохастизируются. Если даже в систему не внесен начальный толчок, но параметры рельефа модулируются

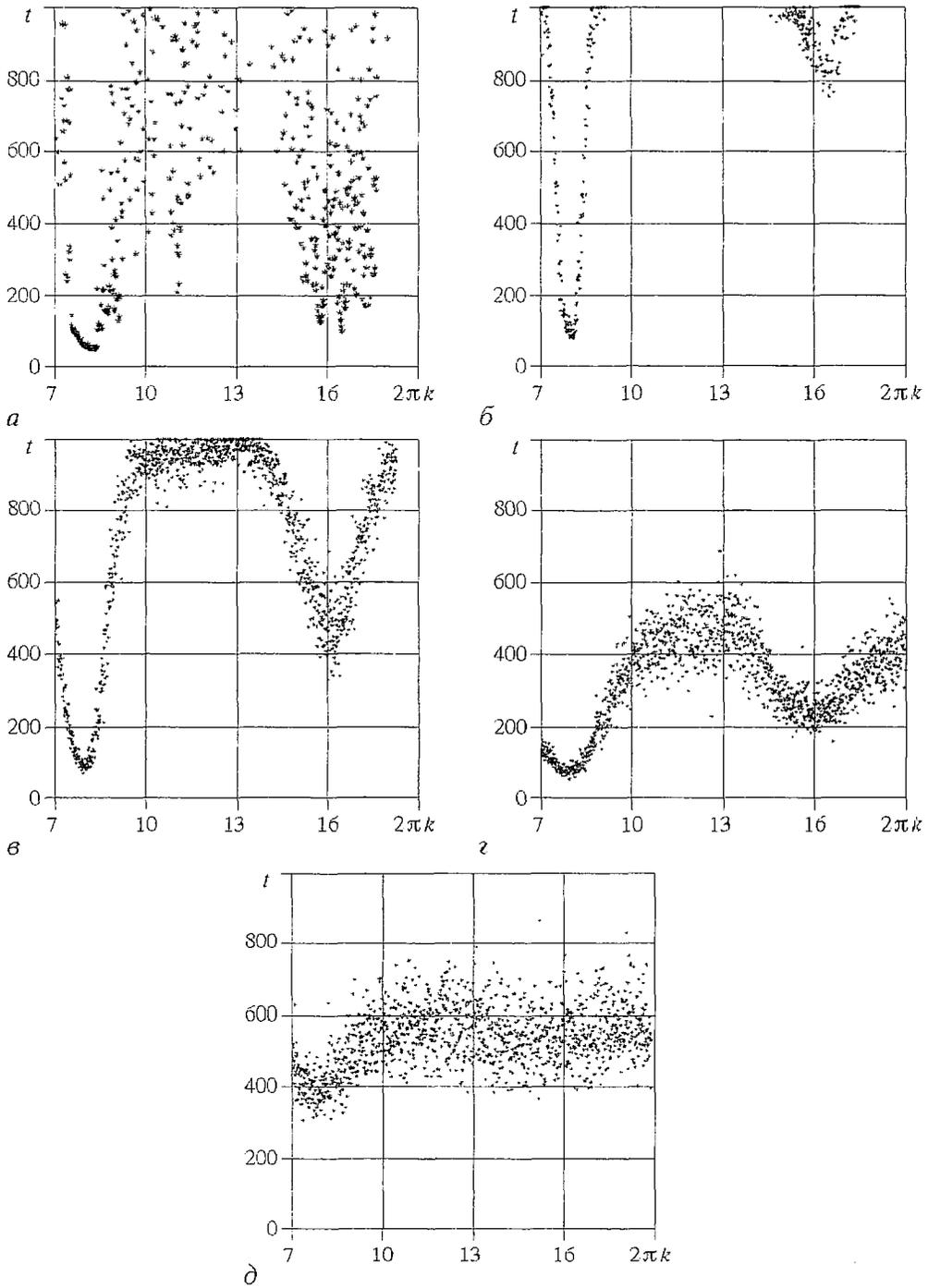


Рис. 7. Время первого выхода из потенциальной ямы в зависимости от частоты колебаний центра потенциала Леннарда - Джонса при различных значениях амплитуды добавочной скорости и различных коэффициентах трения: *a* - $v_X=0; v_Y=0; k_{тр}=0$; *б* - $v_X=0.1; v_Y=0.1; k_{тр}=0.01$; *в* - $v_X=0.2; v_Y=0.2; k_{тр}=0.01$; *г* - $v_X=0.5; v_Y=0.5; k_{тр}=0.025$; *д* - $v_X=1; v_Y=1; k_{тр}=0.025$

периодически или же по законам «цветного шума» (см., например, [14]), то также происходит стохастизация. Этот эффект имеет резонансный характер. Именно по таким механизмам происходит рождение шума во внутренних степенях свободы макромолекулы, находящейся под воздействием внешнего окружения. Отметим, что роль динамического хаоса в функционировании молекул белков-ферментов обсуждается и в других работах [15, 16]. Хотелось бы указать и на важную роль высокоэнергетических «хвостов» в функциях распределения. Отметим также, что при специальных условиях отдельные степени свободы могут аккумулировать довольно высокие энергии за счет нелинейных эффектов [17].

Для того, чтобы приблизиться к реальной ситуации при моделировании событий в молекуле фермента и, в частности, в активном центре α -химотрипсина, нами делаются следующие шаги:

а) вместо модельного потенциала (2), (3) рассматриваются два случая: перенос субстрата из одного предварительного минимума в другой; при этом вводится конечный размер кластера-субстрата, что дает возможность определить вероятность прохода пробной массы через щель-горловину флюктуирующего рельефа. Размеры движущихся пробных масс могут быть введены в модель так, как это, например, сделано в работе [17];

б) рассматривается также задача о классическом и квантовом переходе протона из одной двумерной ямы в другую также с учетом параметрических флюктуаций рельефа;

в) вместо равномерно распределенного шума более правильно, по-видимому, использовать модель гауссова шума.

В связи с этим отметим, что модели воздействия шума на колебания протона в минимуме потенциальной ямы в «нелинейной» водородной связи А-Н...В между атомами строились и ранее [18, 19]. В них авторы оценивали уширение спектральных линий колебаний протона в предположении, что атомы «А» и «В» испытывают флюктуационные тепловые движения по линии, связывающей А-Н...В. В недавней работе [20] делается попытка оценить возможность появления динамического хаоса в подобной системе.

В целом мы полностью согласны с авторами работы [21], которые говорят, что «практически нерешенной является проблема механизма быстрого перехода протона в комплексах с сильной водородной связью, в частности, участие в динамике этого процесса других степеней свободы. С этой проблемой связан вопрос о форме и ширине полос в колебательных спектрах, о непрерывном поглощении, о влиянии на спектр расщепления и др».

Наш опыт моделирования говорит о том, что важно рассматривать движения протона именно в двумерном пространственном рельефе, где динамический хаос появляется согласно механизму бильярда Синая. При этом возникает ряд проблем, так как бильярд Синая для характерных частот $h\nu \ll E$, где E - высота барьера, разделяющего минимумы потенциальной поверхности (2), проявляет и квантовые свойства [22]. Это дает возможность оценить влияния различных механизмов шумообразования на динамику протона.

Авторы выражают благодарность А.Ю.Чикишеву и Л.Шиманскому за помощь и полезные обсуждения. Программа для определения показателей Ляпунова была любезно предоставлена сотрудниками Саратовского государственного университета А.Нейманом и М.Сафоновой.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект 95-0205877 а.

Библиографический список

1. Нетребко А.В., Нетребко Н.В., Романовский Ю.М., Хургин Ю.И., Шидловская Е.Г. Сложные модуляционные режимы и стохастизация колебаний в

кластерных динамических моделях макромолекул // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.1, № 3. С.26.

2. *Ebeling W., Romanovsky Yu., Khurgin Yu., Netrebko A., Netrebko N., Shidlovskaya E.* Complex regimes in the simple models of molecular dynamics of enzymes // Ed. V. N. Zadkov. Proc. SPIE 2370. Laser Application in Life Sciences. P. 434 (1994).

3. *Романовский Ю.М., Тихомирова Р.Л., Хургин Ю.И.* Электромеханическая модель фермент-субстратного комплекса // Биофизика. 1979. Т.24. С.442.

4. *Татузов Р.Л., Тихомирова Н.К.* Математическое моделирование колебательной ферментативной реакции в непроточной системе // Математические проблемы экологии. Горький: Изд-во ГГУ, 1980.

5. *Gilson M.K., Straatsma T.P.* et al. Open Back Door in a Molecular Dynamics Simulation of Acetylcholinesterase // Science, 263, 1994, 1276-1278.

6. *Шайтан К.В., Рубин А.Б., Чернавский Д.С.* Кинетика конформационных переходов в белках // Биофизика. 1985. Т.30. С.31.

7. *Шайтан К.В.* Динамика электронно-конформационных переходов и новые подходы к физическим механизмам функционирования макромолекул // Биофизика. 1994. Т.39. С.949.

8. *Романовский Ю.М., Хургин Ю.И., Чикишев А.Ю.* Анализ процесса переноса протона в динамической модели активного центра белка-фермента химотрипсина // Ж. Физ. Хим. 1985. Т.59, № 8. С.2021.

9. *Ebeling W., Romanovsky Yu.M.* Energy Transfer and Chaotic Oscillations in Enzyme Catalysis // Z. Phys. Chem. Leipzig. 1985. Vol.266, № 5. P. 816.

10. *Romanovsky Yu.M., Chikishev A.Yu., Khurgin Yu.I.* Subglobular Motion and Proton Transfer Model in the A-Chymotrypsin Molecule // J. Mol. Catal. 1988. Vol.47. P.235.

11. *Хургин Ю.И., Буриштейн К.Я.* Механизм переноса протона в реакциях ацетилирования α -химотрипсина // ДАН СССР. 1974. Т.217, № 4. С. 965.

12. *Чикишев А.Ю., Соколова В.А., Хургин Ю.И., Пирогов В.Г., Романовский Ю.М., Федоров М.В.* Лазерная спектроскопия белка-фермента α -химотрипсина и химических моделей его активного центра // Исследование структуры, физических свойств и энергетики биологически активных молекул / Ред. С.А. Ахманов, А.С. Пискаркас. Вильнюс: Мокслас, 1986. С. 11.

13. *Маневич Л.И., Савин А.В., Смирнов В.В., Волков С.Н.* Солитоны в невырожденных бистабильных системах // УФН. 1994. Т.164, № 9. С.937.

14. *Schimansky-Geier L., Zulicke Ch.* Harmonic noise: Effect on bistable system // Z. Phys. B. Condensed Matter. 1980. Vol.79. P. 451.

15. *Havsteen B.* A New Principle of Enzyme Catalysis: Coupled Vibrations Facilitate Conformational Changes // J. Theor. Biol. 1989. Vol.140. P.101.

16. *Havsteen B.* Stochastic Attractor Participate in the Catalysis α -Chymotrypsin. New Faset of the Enzyme Catalysis // J. Theor. Biol. 1991. Vol. 151. P.551.

17. *Ebeling W., Podlipchuk V.Yu., Valuev A.A.* Molecular dynamics simulation of the activation of soft molecules solved in condensed media // Physica A. 1995. Vol.217. P.22.

18. *Соколов Н.Д.* Динамика водородной связи // Водородная связь / Ред. Н.Д. Соколов. М.: Наука, 1981. С. 638.

19. *Сакун В.П.* Теория формы полосы продольного колебания А-Н в ИК-спектрах комплексов АН...В в жидкой фазе // Водородная связь / Ред. Н.Д. Соколов. М.: Наука, 1981. С. 89.

20. *Агафонов В.Е., Живлюк Ю.Н., Черников Ф.Р.* Детерминированный хаос в динамике водородной связи // Биофизика. 1995. Т.40. С.497.

21. *Голубев И.С., Денисов Г.С., Шрайбер В.М.* Поверхности потенциальной энергии и переход протона в системах с водородными связями // Ред. Н.Д. Соколов. М.: Наука, 1981. С.212.

22. *Елютин П.В.* Проблема квантового хаоса // УФН. 1988. Т.155. С.398.

Московский государственный университет
Институт органической химии, Москва
Гумбольдский университет, Берлин

Поступила в редакцию 8.11.95
после переработки 28.12.95

STOCHASTIC CLUSTER DYNAMICS OF ENZYME - SUBSTRATE COMPLEX

*A.V. Netrebko, N.V. Netrebko, Yu.M. Romanovsky,
Yu.I. Khurgin, W. Ebeling*

Since the known paper of L.Pontryagin, A. Andronov and A. Vitt (1933) a lot of problems were considered in nonlinear dynamics, associated with the study of the transition of a multistable system from one stable state to another under the influence of noise. In the recent years new problems emerged in the studies of complex vibrational systems. These problems deal with the transitions of test particles in the $2D$ potential relieves with the fluctuating or periodically changing parameters. As a complex relief is a variant of Sinai billiards, the motions of test particles therein become stochastic even without any external action. The examples of the cluster dynamics of macromolecules are considered. The dependencies are established of the time of transition of a test particles from the area of one minimum to the zone of attraction of another one on the frequency of the periodic changes of the parameters of the potential relief. The study of these processes will allow us to get closer to the comprehension of principles of molecular machines.



Нетребко Алексей Васильевич, 1955 года рождения, окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в 1977 году, кандидат физико-математических наук. В настоящее время ведущий сотрудник Института механики Московского государственного университета. Область научных интересов: динамическая теория пластичности, математическое моделирование в механике деформируемого твердого тела, численные методы. Имеет около 30 научных работ.



Нетребко Нина Владимировна, 1957 года рождения, окончила механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в 1979 году, кандидат физико-математических наук. В настоящее время научный сотрудник физического факультета Московского государственного университета. Область научных интересов: математическое моделирование в биофизике.



Романовский Юрий Михайлович, 1929 года рождения, окончил физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в 1952 году, доктор физико-математических наук. В настоящее время профессор физического факультета Московского государственного университета, руководитель лаборатории лазерной и математической биофизики. Автор 6 монографий, посвященных проблемам динамики нелинейных систем и математической биофизике.



Хургин Юрий Исаакович (1923-1995) окончил физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (1948). С 1954 года работал в Институте органической химии им. М.Д. Зелинского. Кандидат химических наук. Область научных интересов - изучение структуры биополимеров, физических механизмов ферментативного катализа и роли гидратации в этих процессах. Активно участвовал в разработке метода миллиметровой абсорбционной спектроскопии - нового эффективного метода исследования водных систем.



Вернер Эбелинг - окончил Ростоцкий университет (1958), профессор, заведующий кафедрой статистической физики Гумбольдского университета в Берлине. Известный физик-теоретик, один из ведущих специалистов по теории процессов самоорганизации и эволюции открытых неравновесных систем разной природы. Его ученики успешно работают во многих университетах и научных институтах. Имеет более 20 книг: от фундаментальных монографий по теории физики плазмы до научно-популярных книг по синергетике. Его книги неоднократно издавались на английском и на русском языках.



ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОБЩЕСТВА (математическая модель)

*Д.С. Чернавский, Г.Г. Пирогов, О.Д. Чернавская,
А.В. Щербаков, Б.А. Сулаков*

Предложена математическая модель экономической структуры общества, то есть распределения элементов общества (семей) по ликвидным накоплениям. Обсуждены различия в поведении общества при бимодальном и унимодальном распределении. Модель позволяет реконструировать экономическую структуру общества, используя косвенную информацию о параметрах, не прибегая к методу опроса. Проведена реконструкция экономической структуры общества в Союзе до 1987 года и прослежена динамика в России в последующие годы. Показано, что до 1987 года экономическая структура общества была бимодальной, но стабильной; в последние годы поляризация усилилась и экономическая структура общества стала нестабильной.

Введение

В последнее время синергетика находит применение во многих областях науки и, в частности, в экономике и социологии. В сборнике [1] и в монографии [2] приведены примеры математических моделей маркетинга, динамики «моды» (предпочтения одних товаров другим) и др. В работах [3,4] синергетический подход был применен к моделированию экономической структуры общества (ЭСО), поскольку эта проблема актуальна в нашей стране. Ранее эта проблема обсуждалась преимущественно на вербальном уровне, без применения синергетики [5,6]. В предлагаемой работе на основе модели проводится анализ динамики ЭСО за последние годы.

1. Основы модели экономической структуры общества

Рассмотрим ЭСО в узком смысле слова. Под ней понимается распределение $\rho(x)$ семей по имущественному достатку x , точнее, по ликвидным накоплениям, с учетом их экономического поведения. На рис. 1 приведены примеры распределений; по оси ординат отложено число семей, имеющих накопления от x до $x+\Delta x$, по оси абсцисс - количество денег в условных единицах. Важной характеристикой ЭСО, ее особенностью, является число максимумов (на рисунке - «горбов»), то есть модальность.

В унимодальном распределении важно положение максимума x_m и дисперсия;

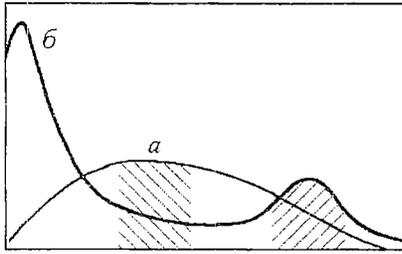


Рис. 1. Примеры ЭСО: *a* - унимодальное общество; *b* - бимодальное. Заштрихованы области спектра, которые определяют цену

обществе существенно выше, чем в бимодальном. В-третьих, введение свободных рыночных отношений в унимодальном и бимодальном обществах приводит к противоположным результатам.

Поясним это на примере производства и потребления промышленных товаров долговременного пользования. Рыночная цена их зависит от спроса и от прибыли, получаемой производителями и/или торгующими организациями¹. Цена, соответствующая максимуму прибыли, зависит от СО [7]. В унимодальном обществе цена p устанавливается на уровне, доступном для людей, накопления которых соответствуют максимуму распределения, то есть $p=kx_m$, где k - коэффициент потребительской ценности, то есть та доля накоплений, которую люди готовы потратить на приобретение данного товара². Такая ситуация, с учетом разброса цен, удовлетворяет все общество.

В бимодальном обществе цена устанавливается в районе правого максимума (горба) и оказывается недоступной для левого крыла распределения³. В результате платежеспособный спрос падает и рынок сбыта сокращается; в нем остается только правый горб. Объем производства должен соответствовать объему платежеспособного спроса, то есть производство устанавливается на уровне, обеспечивающем лишь правую часть общества. Если ранее по каким-либо причинам производство обеспечивало всех, то при введении рыночных отношений в бимодальном обществе производство будет сворачиваться. Та же ситуация имеет место, когда в распределении вместо горба имеется широкое плато и/или длинный пологий хвост типа распределения Поретто; последнее эквивалентно бимодальному распределению.

Существует два метода определения ЭСО: метод опроса с последующей статобработкой и математическое моделирование (включая сбор данных о параметрах модели).

Первый метод дает искаженные результаты, особенно в области больших накоплений, и в наших условиях не эффективен. Второй метод опробован и применяется при исследовании распределений в биофизике, экологии и синергетике. Поясним кратко суть метода. Он включает в себя следующие этапы:

- формулировка поведения элемента системы, в нашем случае -

¹ Стремление к извлечению максимальной прибыли характерно для рыночной экономики, но оно ограничивается при наличии конкурентов. В монополизированном обществе максимальная прибыль является основным принципом, определяющим цену. То же относится и к обществу, где криминальные структуры играют роль «экономической полиции», следящей за получением максимальной прибыли. Оба фактора имеют место в современной России.

² Это положение легко проверить, найдя максимум прибыли по цене. Смысл его прост: при увеличении цены прибыль падает из-за уменьшения спроса, при уменьшении цены потери не компенсируются увеличением спроса.

³ Это утверждение справедливо в случае достаточно высокой поляризации общества, то есть при $D \gg 1$. При этом прибыль от продажи товара по цене, доступной для левого горба распределения (см. рис.1), меньше прибыли от продажи того же товара по цене, устраивающей правый горб. Это условие можно записать в форме $x_{m2}/x_{m1} \gg \rho_1/\rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 - количества семей, принадлежащих к бедному и богатому слою.

в бимодальном - положение максимумов x_{m1} , x_{m2} , относительное расстояние между ними $D=(x_{m2}-x_{m1})/x_{m1}$ и две дисперсии.

ЭСО важно знать по следующим причинам. Во-первых, продуктивность общества зависит от ЭСО, равно как и само распределение зависит от продуктивности. Во-вторых, поведение элементов общества, то есть мотивация трудовой деятельности, активность и так далее, зависит от ЭСО. Обычно мотивация к труду в унимодальном

экономического поведения семьи, то есть возможные источники доходов и каналы расходов;

- построение динамической модели поведения семьи, в нашем случае это уравнение баланса доходов и расходов с учетом случайных факторов;

- формулировка, исследование и решение уравнения поведения ансамбля элементов (семей), то есть ЭСО.

Важны следующие свойства экономического поведения.

Имеется два типа источников дохода:

- постоянный, не связанный с рискованными операциями - зарплата.

- доход, связанный с вложением имеющихся накоплений, и, соответственно, с риском потерять вложенное.

Оба типа доходов подвергаются налогообложению.

Имеется два типа расходов:

- расходы на повседневные нужды; они зависят от имеющихся накоплений x , но обладают свойством насыщения, то есть даже в богатых семьях эти затраты ограничены.

- расходы на элитарные товары, такие как автомашина, собственный дом, участок земли и так далее. Эти расходы также ограничены и имеют пороговый характер, то есть эти расходы может позволить себе семья, имеющая накопления не менее некоторой величины x_1 .

2. Модель

Динамическая модель, соответствующая перечисленным правилам поведения, имеет следующий вид [1,2]:

$$dx/dt = P + g\xi(t) + Ax[1+a\xi(t)] - CQ_1(x, x_0) - T(x) - Q_2(x, x_1, x_2). \quad (1)$$

Уравнение (1) - балансовая модель; скорость приращения финансовых накоплений семьи представлена как разность между ее доходами и расходами в каждый момент времени. Здесь P - зарплата; A - коэффициент активности, выраженный через доходность денежных средств, вложенных в рискованную экономическую деятельность. $T(x) = k(P + Ax)$ - функция налогообложения; в простейшем случае (не прогрессивный налог) она линейна, k - постоянный коэффициент.

Удобно в качестве опорных единиц выбрать характерное время - месяц, максимальные ежемесячные затраты на повседневные нужды - C и накопления, необходимые для удовлетворения повседневных нужд наполовину - x_0 .

Функции Q_1 и Q_2 представляют собой функции потребления [6]. Они обладают следующими свойствами. Обе функции монотонно возрастают с ростом x и стремятся к постоянным значениям при $x \rightarrow \infty$ (свойство насыщения). Кроме того, функция Q_2 является пороговой, то есть она равна нулю при $x < x_1$. Аналитический вид их несущественен, важны лишь упомянутые свойства и значения параметров. Поэтому мы выберем их в простейшей форме

$$Q_1 = x/(x + x_0); \quad (2a)$$

$$Q_2 = B(x - x_1) \theta(x - x_1) / [(x_2 - x_1) + (x - x_1)]. \quad (2б)$$

Здесь B - максимальные расходы на элитарные товары (аналог параметра C в (1)); x_1 - пороговые накопления и $(x_2 - x_1)$ - накопления, при которых элитарные нужды удовлетворяются наполовину; $\theta(x - x_1)$ - пороговая функция, такая, что $\theta = 0$ при $x < x_1$ и $\theta = 1$ при $x > x_1$.

Зарплата P неодинакова для разных семей - имеются группы низкооплачиваемых, высокооплачиваемых и так далее. То же относится и к

величине A , отражающей экономическую активность: имеются люди, не склонные рисковать, они вкладывают деньги в надежные банки и удовлетворяются соответствующими процентами; имеются люди, стремящиеся получить существенно больший процент, даже если это сопряжено с риском.

В реальной жизни важную роль играют случайные колебания доходов и расходов. В кинетических уравнениях они описываются так называемыми «шумами». В уравнении (1) учтен как аддитивный «шум» $g\xi(t)$ (то есть флуктуации, характерные для всех групп общества), так и флуктуации, связанные с риском, $a\xi(t)$ (мультипликативный шум); $\xi(t)$ - случайная величина, принимающая значения ± 1 ; g и a - амплитуды шумов.

Модель (1) является уравнением типа Ланжевена, то есть она содержит динамическую часть и случайные функции (шумы). Уравнение Ланжевена для переменной x эквивалентно уравнению Фоккера - Планка для функции распределения семей по накоплениям $\rho(x)$ [7]

$$\partial\rho/\partial t = \partial[\partial U(x)/\partial x \rho(x)]/\partial x + 1/2\partial[G^2 \partial\rho(x)/\partial x]/\partial x, \quad (3)$$

где функции $U(x)$ и $G(x)$ определяются правой частью уравнения (1)

$$U(x) = -\int_0^x \{P + Ax - Cx/(x_0+x) - B(x-x_1)\theta(x-x_1)/[(x_2-x_1) + (x-x_1)] - k(P+Ax)\}dx, \quad (4)$$

$$G(x) = Aax + g. \quad (5)$$

Функцию $U(x)$ часто называют потенциалом, хотя к таким понятиям, как энергия, она отношения не имеет. Решения уравнения Фоккера - Планка должны удовлетворять двум дополнительным условиям

$$\int_0^\infty \rho(x)dx = N, \quad \int_0^\infty x\rho(x)dx = M, \quad (6)$$

где N - число семей, а M - количество денег в обществе.

Для учета распределенных параметров необходимо разбить общество на группы (по признакам зарплаты и активности), провести расчет для каждой группы и результат просуммировать с учетом веса v_{ij} каждой группы

$$\rho(x) = \sum_{ij} v_{ij} \rho_{ij}(x). \quad (7)$$

Весовые коэффициенты v_{ij} определяются на основе известных данных о распределении семей по зарплате и деловой активности и, по существу, играют роль параметров.

3. Некоторые результаты

1. Модель, то есть уравнения (1),(3), позволяет исследовать стационарную ЭСО, используя имеющуюся информацию о параметрах (таких, как доля высоко- и низкооплачиваемых работников, активных и неактивных членов общества, цены товаров повседневного спроса (x_0) и элитарных товаров (x_1 и x_2)).

Стационарное решение уравнения Фоккера - Планка имеет вид

$$\rho(x) = \rho_0 \exp\{-2U(x)/G^2\}, \quad (8)$$

где ρ_0 определяется из условия нормировки (6)⁴. Из (8) следует, что максимумы

⁴ Строго говоря, уравнение (8) справедливо, если функция G не зависит от x . Однако оно является достаточно точным (хотя и приближенным), когда функция G зависит от x достаточно плавно по сравнению с потенциалом $U(x)$. Относительная погрешность при этом будет порядка $2\partial G/\partial x (\partial^2 U/\partial x^2)^{-1}$. Выражение (8) сохраняет силу и при наличии нескольких (двух) потенциальных ниш, что часто используется в физике, когда речь идет о сообщающихся сосудах с разной температурой.

распределения $\rho(x)$, их число и величины определяются формой потенциальной функции $U(x)$. Можно сказать, что $U(x)$ является «функцией социальных ниш». Понятие «социальная ниша» используется в экономике и социологии на вербальном (качественном) уровне. Оно обозначает совокупность условий, при которых данная группа людей чувствует себя комфортно, то есть имеет стабильные источники дохода и стабильные каналы расходов, которые компенсируют друг друга. В данной модели это понятие имеет тот же смысл, но определено более четко и поддается количественным оценкам.

Кроме того, возникает новое понятие - социальный барьер, которое также используется в экономике и социологии (хотя и реже) и тоже на вербальном уровне. В модели это максимум потенциальной функции между «нишами». Иными словами, функция социальных ниш определяет свойства ЭСО в стационарном его состоянии.

Функция $G(x)$ влияет на ширину максимумов $\rho(x)$, их перекрытие и стационарную заселенность социальных ниш. Условно (по аналогии с физическими процессами) эту функцию можно назвать «температурой» общества.

2. Модель позволяет исследовать стабильность (устойчивость) ЭСО. Общество стабильно, если каждая из групп находится в своей социальной нише. Нестабильность возникает, если какая-либо из ниш исчезает (и/или появляется новая ниша). Для качественного анализа этого явления можно использовать простой графический прием. На рис. 2 представлены графики доходов (за вычетом налогов) и расходов при определенных параметрах. Точки пересечения этих кривых соответствуют экстремумам функции социальных ниш, то есть экстремумам потенциала $U(x)$: кружки соответствуют минимумам, крестики - максимумам. При изменении параметров точки пересечения могут исчезнуть (крестик сольется с кружками) или появиться. Значения параметров, при которых это происходит, являются бифуркационными. Таким образом, диаграмма на рис. 2 позволяет предсказать, как изменится функция социальных ниш при изменении параметров и сколь близки параметры к критическим значениям.

3. В случае, когда ЭСО нестабильна и нестационарна, модель (2) позволяет описать динамику изменения общества. Иными словами, можно сказать, в каком направлении и сколь быстро будет меняться ЭСО. Из модели следует, что имеется два типа процессов: быстрые (характерное время - месяцы) и медленные (характерное время - годы). Быстрые процессы протекают при исчезновении социальной ниши; при этом группа, заселявшая нишу, растекается, не преодолевая потенциальных барьеров. Как правило, именно это происходит при кризисных ситуациях. Медленные процессы имеют место в случае заселения новой ниши, отделенной от основной части общества высоким барьером.

4. Некоторые примеры экономической структуры общества

Для иллюстрации работы модели приведем некоторые результаты расчетов ЭСО. Эти расчеты не претендуют на высокую точность, но передают качественные особенности структуры общества в разных ситуациях.

4.1. Стационарная ЭСО в дореформенный период (1987 - 1989 годы).

При выборе параметров использовалась информация о ценах (элитарных

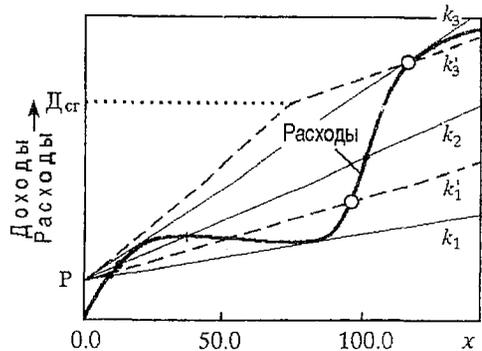


Рис. 2. Диаграмма доходов и расходов. Кривая линия - функция расходов, прямые линии - функции доходов за вычетом налогов при разных коэффициентах налогообложения k ($k_1 > k_2 > k_3$). Пунктирные линии - функции доходов при прогрессивном налогообложении

товаров, промышленных товаров широкого потребления, товаров и услуг первой необходимости), об объемах производства и реализации этих товаров и уровне прожиточного минимума. При выборе конкретных значений параметров использовался метод экспертных оценок. В качестве единицы времени был выбран месяц; в качестве опорных параметров были выбраны значения $x_0=400$ руб. и $C=400$ руб. в месяц; в дальнейшем эти значения использовались как единицы измерения. В качестве оценок параметров B , x_1 и x_2 были выбраны значения $B=4C$, $x_1=50x_0$, $x_2=110x_0$.

Для учета распределенных параметров общество было разбито на 4 группы, представленные в табл. 1. Там же приведены весовые коэффициенты v_{ij} . В таблице

Таблица 1

Таблица весовых коэффициентов

A/P	0.5	2
3% в год	Низкооплачиваемые неактивные рабочие, служащие, крестьяне $v_{11}=0.7$	Высокооплачиваемые неактивные рабочие, служащие, работники науки и культуры, офицеры $v_{12}=0.1$
30% в год	Низкооплачиваемые активные работники торговли и снабжения $v_{21}=0.2$	Высокооплачиваемые активные высшие чиновники $v_{22}=0.01$

приведен также социальный состав каждой группы. Значения $P=0.5$ и $P=2$ соответствуют группам низко- и высокооплачиваемых. Значение $A=3 \cdot 10^{-3}$ (или 3% в год, то есть процентная ставка в Госсбербанке) соответствует низкой активности. Значение $A=3 \cdot 10^{-2}$ (то есть 30% в год) характерно для высокой активности. Большой процент дохода в цивилизованных странах считается ростовщическим и преследуется законом.

Следует сделать замечание по поводу группы ρ_{21} (низкооплачиваемые и активные). В нее входили в основном работники торговли и снабжения. Дело в том, что эти сферы деятельности требуют наличия резерва, то есть не регламентированного запаса средств. Такие запасы были запрещены социалистическими законами. Тем не менее страна жила и, следовательно, необходимые запасы у работников торговли были. Торговля во всех странах сопряжена с риском, однако в нашей стране этот риск имел, кроме того, криминальный характер. Поэтому коэффициент v_{21} в СССР в период застоя был

несколько меньше, а амплитуда шума a несколько больше, чем в развитых странах.

Разбиение на четыре группы является довольно грубым. В частности, при этом не учитывается разброс доходов в каждой группе, который влияет на ширину кривой распределения. Формально этот эффект может быть компенсирован изменением (увеличением) амплитуды шумов, которые в рамках модели прямо связаны с полуширинами горбов. С учетом этих соображений (а также экспертных оценок) были выбраны значения параметров $g=2$, $a=0.15$.

Стационарная структура представлена на рис. 3. Она бимодальна и горбы раздвинуты достаточно сильно ($D=x_{m2}/x_{m1}=70$). Группы отличались по

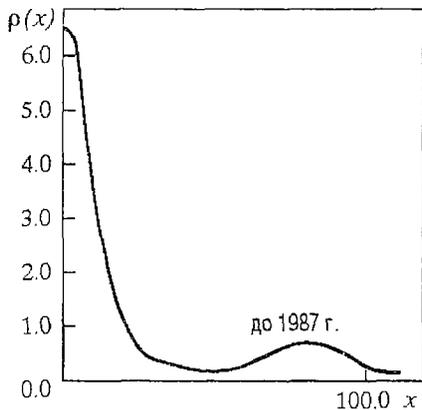


Рис. 3. Структура общества во времена застоя. Плотность распределения $\rho(x)$ при $x=0$ соответствует числу семей, имеющих нулевые накопления, но не нулевые (хотя и малые) доходы

социальному составу и функциям: в группу «богатых» преимущественно входили работники торговли, науки, культуры, а также офицеры. Средний класс практически отсутствовал. Далее мы будем называть группу «богатых» «активным слоем», поскольку не такие уж они были богатые по международным критериям.

Таким образом, во времена застоя ЭСО была бимодальна, но стабильна. Выше уже упоминалось о том, что введение рыночных отношений (либерализация цен) в обществе с такой структурой должно было привести к росту цен в меру отношения x_{m2}/x_{m1} (то есть как минимум в 70 раз) и сворачиванию производства.

4.2. ЭСО в развитых странах.

В развитых странах параметры, определяющие ЭСО, отличаются от соответствующих параметров в СССР. Во-первых, распределение по зарплате таково, что у большинства работающих доход превышает уровень повседневных затрат. Доля активных людей (v_{21}) также несколько выше. Во-вторых, шире диапазон цен на элитарные

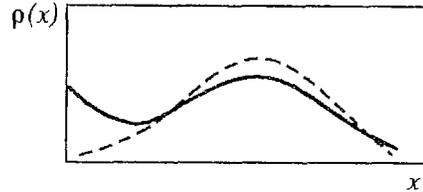


Рис. 4. Структура общества в развитых странах

товары: минимальная цена x_1 (в единицах x_0) ниже, чем в СССР, но «средняя» цена (x_2) выше. В результате в группе активных людей (ρ_{21}) графики доходов и расходов располагаются близко друг к другу; это значит, что барьеры между нишами малы, то есть фактически существует одна широкая ниша. Та же ниша имеется и в группе работающих людей, которая аналогична группе высокооплачиваемых в СССР. Стационарная структура общества в развитых странах приведена на рис. 4; она практически унимодальна, то есть имеется «средний класс», в котором представлены все социальные группы населения. Там же приведена ЭСО Японии (пунктир), полученная пересчетом данных из работы [8]. Видно, что распределение, полученное в модели, качественно согласуется с наблюдаемым. Тем не менее, отметим, что картина ЭСО в развитых странах является сугубо качественной, поскольку в разных развитых странах как параметры, так и распределения различны. Мы привели эту картину для демонстрации того, что единая модель при разных параметрах может описывать как бимодальное, так и унимодальное распределение.

4.3. Динамика ЭСО в России за последние годы.

Во время перестройки и особенно в последние годы параметры, определяющие ЭСО, существенно изменились.

Во-первых, либерализация цен привела к инфляции. Почти сразу (за несколько месяцев) цены выросли в 70-100 раз. Инфляция продолжается (хотя и с меньшими темпами) и по сей день. Платежеспособный рынок сократился и продолжает сокращаться, что приводит к эффекту «неплатежей». Соответственно сокращается и производство товаров, потребляемых на внутреннем рынке. В свете изложенного выше эти явления не неожиданны.

Во-вторых, изменились условия налогообложения, коэффициент k существенно возрос.

В результате кривая социальных ниш в группе активных людей изменилась: на месте прежней ниши появился горб, то есть потенциальный барьер, следовательно, ЭСО стала нестабильной: часть ранее «богатых» людей сместилась влево (то есть обнищала), часть движется вправо (то есть богатеет). Расслоилась и группа активных людей. Сейчас можно выделить следующие шесть групп, которые представлены в табл. 2 [9], там же указаны их социальные функции:

- 1 - низкооплачиваемые рабочие и служащие;
- 1а - разоряющиеся представители групп 2,4 и 5 («подложка»);
- 2 - среднеоплачиваемые работники, обслуживающие группу 5;
- 3 - высокооплачиваемые работники, обслуживающие группу 6;
- 4 - мелкие бизнесмены;
- 5 - предприниматели, работающие на внутренний рынок;
- 6 - предприниматели, работающие на внешний рынок и крупные банкиры («убегающий хвост»).

Не каждая группа имеет социальную нишу. Так, шестая группа, связанная с внешним рынком (экспорт сырья, импорт готовой продукции), немногочисленна, но имеет очень большие накопления и высокие доходы (сверхприбыли), которые не могут быть потрачены на личные нужды. Накопления этой группы непрерывно возрастают. В распределении эта группа занимает крайний правый фланг и движется вправо (в связи с чем получила название «убегающий хвост» [10]). Инвестировать свои накопления в отечественную индустрию эта группа не рискует, поскольку это невыгодно по упомянутым выше причинам. Более надежно размещать их за рубежом. Средства, утекающие таким образом из России за рубеж можно оценить, учитывая доходы этой группы и ее численность; оценки приводят к величине: 20 миллиардов долларов в год [9]. Сходные оценки получены немецкими и японскими экономистами, использовавшими другие методы.

На бифуркационной диаграмме (см. рис. 2) этой группе соответствует линия доходов, идущая выше линии расходов и не пересекающая ее.

Группы предпринимателей, работающих на внутренний рынок (группа 5) и связанная с ней группа 2, тоже теряют социальную нишу. Причины этого: высокие налоги, сокращение внутреннего платежеспособного рынка индустриальной продукции и массовый экспорт сырья за границу. В связи с последним возникли и уже осознаны противоречия между группами 5 и 6. На бифуркационной диаграмме группам 2 и 5 соответствует линия доходов, идущая ниже линии расходов и не пересекающая ее.

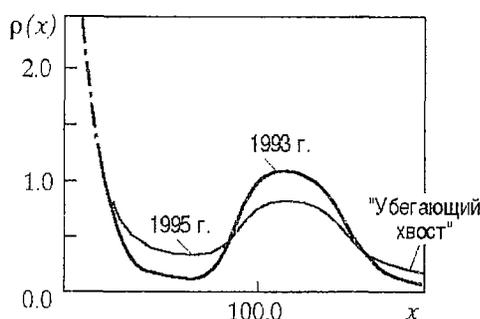


Рис. 5. Структура общества в России в 1993 и 1995 годах показаны изменения в правой части распределения

Динамика ЭСО за последние годы представлена в табл. 2 и на рис. 5. Сравнение правых частей распределений 1993 и 1995 годов показывает [11], что в последнее время правый горб размывается за счет вытеснения из него

Таблица 2

Экономическая структура общества в 1993 и в 1995 годах ⁵

Номер группы	1993 г				1995 г			
	Число семей в %	Накопления группы			Число семей в %	Накопления группы		
		x_{mi}	x_{av}	В % от полн.		x_{mi}	x_{av}	В % от полн.
1	70	1	10	10	70	1	10	10
1a	0	-	-	-	10	20	20	3
2	20	100	100	27	12	50	50	8
3	4	100	100	5	4	100	100	6
4	3	200	200	8	2	100	100	3
5	3	200	200	8	2	100	100	3
6	0.2	400	80000	42	0.2	400	80000	70

⁵ В качестве относительной единицы приняты, как и ранее, накопления x в ценах 1993 и 1995 годов, соответственно. Величины x_{av} соответствуют максимумам распределения в группах; величины x_{mi} - средние накопления в группе, они отличаются от x_{av} , только в группе 1, где распределение несимметрично. В группе 6 в интервале от $x_{min}=400$ до $x_{max}=80000$ имеет место пологое распределение типа Поретто: $\rho(x) \propto 1/x$; величины x_{min} и x_{max} приведены в таблице на месте x_{mi} и x_{av} .

второй и пятой групп. Вместо этого образуется «подложка», состоящая из людей, которые еще имеют накопления, но уже не имеют доходов. Эти люди тоже не имеют социальной ниши.

Заключение

Таким образом, о современном состоянии общества в России можно сказать следующее:

1. Общество осталось бимодальным и по сравнению с временами застоя его поляризация усилилась. Точнее, в распределении элементов общества по накоплениям (см. рис. 1) правый горб стал более размытым и образовалось широкое плато и длинный хвост, что, как упоминалось, эквивалентно бимодальности.

2. Общество нестационарно и, следовательно, нестабильно. Важные в функциональном отношении группы лишены социальных ниш.

Из модели следует, что для стабилизации этих групп необходимо прогрессивное налогообложение (уменьшение налога на малые и средние прибыли и увеличение налога на сверхприбыли). В этом случае линии доходов идут выше прежнего уровня, но при критическом значении дохода D_{cr} терпят излом, что показано на рис. 2 пунктиром. В результате как группа 5, так и группа 6 приобретают социальные ниши (на рис. 2 они представлены светлыми кружками). Эта мера, разумеется, недостаточна. Однако обсуждение всего комплекса мер, необходимых для преодоления кризиса, выходит за рамки модели. Более детально эти вопросы изложены в наших отчетах Министерству труда (1994) и Министерству экономики (1996) Подчеркнем, предлагаемая модель претендует лишь на роль инструмента, позволяющего прогнозировать динамику ЭСО.

Библиографический список

1. The Economy as an Evolving Complex System. / Eds. Ph.W. Anderson, K.J. Arrow, D.Pines. Univ.Santa Fe. 1988.
2. Weidlich W. Physics and Social Science - the Approach to Synergetics// Phys.Rep. 1991.
3. Чернавский Д.С., Рахимов А.Х. Об экономической структуре общества (спектр накоплений). Препринт ФИАН. 1991. № 15.
4. Чернавский Д.С., Попков А.С., Рахимов А.Х. Математическая модель экономической структуры общества // Экономика и математические методы. 1993. Т.30, № 2. С. 98.
5. Кравчик Р. Распад и возрождение польской экономики. М.: Знание, 1991.
6. Лившиц А.Я. Введение в рыночную экономику. М.: МПТПО «Квадрат», 1991.
7. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
8. Родо Токэй Еран. Токио. 1988. С. 185.
9. Чернавский Д.С., Сулаков Б.А., Чернавская О.Д., Пирогов Г.Г., Старков Н.И. О социально-экономической структуре общества // Законодательство и экономика. 1995, № 7/8. С. 8.
10. Чернавский Д.С., Иващенко И.Ю. Убегающий хвост и его роль в современной экономике // Солидарность. 1993. № 5(54). С.7.
11. Чернавский Д.С., Щербаков А.В., Сулаков Б.А. Десять лет перестройки (преобразование и развитие капитала в России) // Бизнес-класс. 1996. №1(10). С. 35.

Физический институт
им. П.Н. Лебедева, РАН
Институт рабочего движения и
сравнительной политологии РАН
Институт молодежи

Поступила в редакцию 13.12.95
после переработки 17.09.96

THE DYNAMICS OF THE ECONOMIC SOCIETY STRUCTURE

*D.S. Chernavskii, G.G. Pirogov, O.D. Chernavskaya,
A.V. Scherbakov, B.A. Suslakov*

The economic structure of society is considered as a distribution of the society elements (families) by their money accumulation. The properties of unimodal and bimodal economic structure of society are discussed. The mathematical model of economic structure of society is proposed. It enables to reconstruct the economic structure of society using the information on the parameters of the model (without interrogatory) and to analyse the dynamics of economic structure of society and its stability. The reconstruction of economic structure of society in SU before 1987 year is presented. It is shown that economic structure of society was bimodal. The dynamics of economic structure of society in Russia during last years is discussed. It is shown that economic structure of society is still bimodal but became unstable; the polarization of economic structure of society increases.



Чернавский Дмитрий Сергеевич - родился в Москве (1926). Окончил Московский инженерно-физический институт (1949). После окончания МИФИ работает в ФИ РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ФИАН, 1955) и доктора физико-математических наук (1965) в области теории элементарных частиц. Соавтор монографий: «Математическое моделирование в биофизике» и «Математическая биофизика». Опубликовал много научных статей по теории взаимодействия частиц высокой энергии и по моделированию биологических процессов. Член редакционной коллегии журнала «Биофизика».



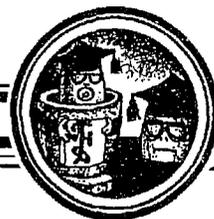
Пирогов Григорий Григорьевич - родился в Москве (1928), окончил Институт внешней торговли (1951), после окончания ИВТ работал в Институте мировой экономики и международных отношений АН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата экономических наук (ИМЭМО, 1959). Соавтор двух монографий и более 100 научных работ. В настоящее время старший научный сотрудник Института рабочего движения и сравнительной политологии РАН.

Чернавская Ольга Дмитриевна - родилась в Москве (1957), окончила Физический факультет МГУ (1980). После окончания МГУ работает в ФИ РАН. Опубликовала статьи по фазовым переходам в кварк-глюонной плазме и по моделированию экономической структуры общества.

Щербakov Андрей Владимирович - родился в 1965 году, окончил Московский авиационный институт (1989). После окончания МАИ работал на кафедре автоматизации МАИ. В настоящее время президент акционерного общества «Курс».



Суслаков Борис Алексеевич - родился в Калужской области (1943), окончил Московский энергетический институт (МИЭМ, 1969). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата технических наук в МИЭМ (1977). В настоящее время заведующий кафедрой социальной информатики Института молодежи, член-корреспондент Международной академии информатизации. Специалист по моделированию социальных процессов и явлений. Автор более 100 научных работ.



ЭФФЕКТИВНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ ЦЕПОЧЕК СИЛЬНО РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Д.В. Волков, М.Н. Столяров, Е.И. Волков

Предложен способ численного изучения систем сильно релаксационных осцилляторов, связанных по медленной переменной, основанный на эффективной одномерности предельного цикла изолированного осциллятора. В предложенном способе применяется линеаризация зависимости $Y(Y)$, где Y - медленная переменная, для медленной области предельного цикла. Динамика быстрой переменной сводится к мгновенным скачкам с одной медленной части цикла на другую. Представленный метод расчета систем связанных осцилляторов позволяет при почти 30-кратном уменьшении времени счета получить все решения, возникающие в исходной системе дифференциальных уравнений, на которые не оказывает влияния динамика быстрой переменной. На примере трех связанных осцилляторов показано хорошее согласие с традиционным методом численного решения системы дифференциальных уравнений и найдены возможные типы вращающихся волн. Приводится обсуждение границ применимости способа, его достоинства и недостатки.

Введение

Нелинейные системы, демонстрирующие периодическую динамику, занимают важное место среди объектов, рассматриваемых в теории колебаний, в биологии, химии и радиофизике. В большинстве моделей химических и/или биохимических процессов автоколебания носят релаксационный характер [1,2]. В модели клеточного цикла, послужившей толчком к изучению релаксационных осцилляторов в данной работе, анализ схемы реакций перекисного окисления липидов в мембране клетки также привел к построению модели сильно релаксационного осциллятора. Подробное описание этой модели и достаточно большое количество других примеров моделей биологических объектов можно найти в [3]. Примеры химических осцилляторов, в том числе модели широко известной реакции Белоусова - Жаботинского, описаны в [4].

Можно выделить класс моделей, описывающих системы, состоящие из взаимодействующих осцилляторов. Одной из первых в этом направлении можно считать работу [5], в которой была предложена модель сердца как совокупности релаксационных осцилляторов. Множество искусственных устройств и многие системы в живых организмах имеют механизмы синхронизации своей внутренней активности с периодическими процессами, происходящими во внешней среде (например синхронизация циркадианного ритма человека с суточным циклом), и

друг с другом. Поэтому традиционной задачей является исследование условий, необходимых для синхронизации разночастотных осцилляторов друг с другом и под действием внешних периодических сил. Многие примеры синхронизации осцилляторов уже хорошо изучены и стали составляющей частью курсов *классической теории нелинейных колебаний* (см. например [6,7]).

Помимо отмеченного направления, в последнее время все больший интерес вызывает вопрос об изучении пространственно-временных структур в системах, состоящих из одинаковых или почти одинаковых осцилляторов [8].

Действительно, каким образом в системах, состоящих из почти одинаковых элементов, например, в колониях клеток, возникают достаточно сложные динамические явления? Прежде всего, целесообразно изучить решения, возникающие в системах со сравнительно небольшим количеством осцилляторов, поскольку закономерности, полученные для таких систем, могут оказаться полезными при изучении более сложных структур. В данной работе исследуются системы, состоящие из трех осцилляторов без существенного ограничения на величину связи.

Аналитические методы полезны при изучении синхронизации в гармоническом приближении и в приближении малой связи, в то время как реальные биологические и химические системы существенно релаксационны, и часто к ним не может быть применено приближение малой связи.

Прямой численный расчет системы дифференциальных уравнений можно эффективно реализовать для сравнительно небольших систем, но именно этот путь обеспечил построение более или менее подробной картины решений, возникающих в системах, состоящих из двух и трех осцилляторов [9,10], поскольку прямое интегрирование позволяет сделать полный параметрический анализ системы в разумной области изменения параметров. Для систем с большим количеством степеней свободы данный подход не является рациональным по причине огромных вычислительных ресурсов, необходимых для решения подобных задач.

В случае, когда необходимо получить приближенное решение (скажем, для дальнейшего изучения с помощью аналогового устройства или с помощью прямого интегрирования), целесообразно применить какой-либо быстрый и в то же время достаточно надежный метод решения, отражающий характерные черты поведения отдельного элемента системы. Примером такого подхода могут служить клеточные автоматы, описывающие, в частности, распространение волн в возбудимых средах [11,12]. Правила, построенные для отдельного элемента с учетом характерных черт точечной динамики реальной распределенной системы, позволяют получить основные решения и пространственные структуры, не производя громоздкой и долгой процедуры интегрирования большой системы уравнений в частных производных.

В данной работе рассматриваются системы сильно релаксационных осцилляторов, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{cases} \varepsilon dx_i/dt = y_i - f(x_i), \\ dy_i/dt = \eta - g(x_i, y_i) + C \sum_j (y_j - y_i), \end{cases} \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

где N - количество осцилляторов; $f(x)$ - функция специального вида (N -образная изоклина), которая встречается во многих моделях; $g(x_i, y_i)$ - функция, определяющая вид медленной изоклины. С помощью параметра η выбирается положение изоклины $g(x_i, y_i)=0$, обеспечивающее режим автоколебаний. Член с коэффициентом C определяет локальную связь диффузионного типа между осцилляторами, поэтому суммирование производится только по соседним осцилляторам, сам параметр C определяет силу связи. Параметр ε определяет релаксационность колебаний. Важно, что $\varepsilon \ll 1$, так как только в этом случае для изолированного осциллятора изображающая точка при отклонении от устойчивой

траектории вернется на аттрактор со временем, много меньшим периода колебаний. Таким образом, траектория отдельного осциллятора не изменится под действием введенной выше связи. Для того, чтобы подчеркнуть это свойство системы, мы используем термин «сильно релаксационный осциллятор».

Сильная релаксационность системы, N-образный вид функции $f(x)$ и наличие связи только по медленной переменной позволяет разработать специальный метод численного изучения системы уравнений (1). Метод основан на построении модели медленных движений для отдельного осциллятора и правил, позволяющих по текущему значению медленной переменной определить ее новое значение с учетом состояния окружающих осцилляторов, то есть построить оператор эволюции. Метод учитывает движение изображающей точки только на медленных участках траектории изолированного осциллятора. Точки, разделяющие предельный цикл на медленные и быстрые участки, являются аналогом секущей плоскости отображений Пуанкаре, поэтому можно определить описанный ниже алгоритм как одномерное отображение. Первая попытка построить такое отображение была сделана в работе [13] для модели клеточного цикла. Построенное в работе [13] отображение имеет ряд недостатков: неудачный выбор граничных точек медленных участков предельного цикла и неточные правила перехода с одной медленной ветви N-образной изоклины на другую (см. раздел 2). Перечисленные выше недостатки не позволяют, как мы убедились, получить многие периодические решения для системы, состоящей из трех связанных осцилляторов и построить правильную фазовую диаграмму для этого случая. В частности, в работе не показано существование вращающихся волн с двумя и пятью подпериодами [10] и несимметричной волны. Подпериодом в этом случае называется полный оборот изображающей точки по парциальному предельному циклу i -ого осциллятора в проекции (X_i, Y_i) , что совпадает с интервалами между всплесками быстрой переменной.

В качестве конкретного объекта исследования нами была рассмотрена модель клеточного цикла, поскольку поведение этой модели было ранее исследовано с помощью традиционного численного интегрирования [9,10], что позволяет оценить надежность предлагаемого метода.

Модель изолированного осциллятора и ее свойства описаны в разделе 1. Раздел 2 посвящен описанию метода и формулировке правил отображения. В разделе 3 представлены результаты исследования системы, состоящей из трех связанных осцилляторов. В заключительном разделе можно найти основные выводы и обсуждение полученных результатов.

1. Модель клеточного цикла

После ряда упрощений уравнения для цепочки связанных осцилляторов, управляющих клеточным циклом, могут быть записаны в следующем виде [3,9,10]:

$$\begin{cases} \varepsilon dX_i/dt = k + 1/2 X_i Y_i - X_i^2 - 3/2 \gamma X_i/(X_i + \delta), \\ dY_i/dt = \eta - k - 3/2 X_i Y_i - D Y_i - 1/2 \gamma X_i/(X_i + \delta) + C \sum_{j=i-1}^{j=i+1} (Y_j - Y_i), \end{cases} \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Параметр $\varepsilon \ll 1$ характеризует релаксационность системы; ниже принято значение $\varepsilon = 0.001$. Динамические переменные X и Y являются безразмерными концентрациями радикалов («быстрая» переменная) и липидов («медленная» переменная), соответственно. Параметры $k=0.05$, $\gamma=0.5$, $\delta=0.15$ и $D=0.2$ определяют значения входящих и исходящих потоков радикалов и липидов. С помощью параметра η выбирается положение «медленной» изоклины, обеспечивающее режим автоколебаний. C - параметр, определяющий силу связи.

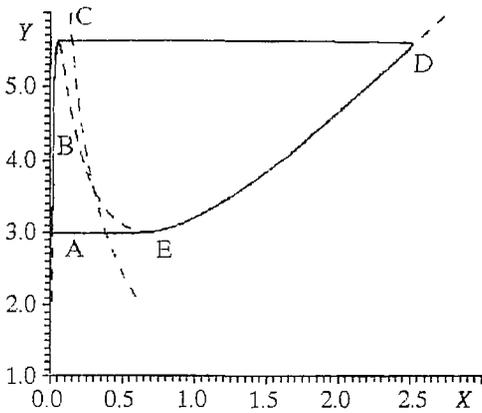


Рис. 1. Фазовый портрет для изолированного осциллятора. Пунктиром изображены главные изоклины, $\eta=2.56$

Поведение изолированного осциллятора, описываемого уравнениями (2), хорошо изучено. В случае, когда параметр η лежит в таких пределах, что медленная изоклина пересекает N-образную изоклину на ниспадающем участке, в системе (2) существует устойчивый предельный цикл, изображенный на рис. 1. На участках, обозначенных буквами AC и DE, изображающая точка движется медленно, в то время как на участках CD и EA происходят быстрые скачки на медленные ветви (в приближении разрывных колебаний эти скачки происходят мгновенно). В момент, когда происходит скачок, переменная Y почти не изменяется, а переменная X быстро

переходит от своих малых значений к большим и наоборот. На рис. 2 представлены развертки «быстрой» и «медленной» переменных.

В силу того, что рассматриваемая система сильно релаксационна, изображающая точка при отклонениях от предельного цикла быстро возвращается обратно по почти горизонтальной траектории на медленный участок предельного цикла. Поэтому связь диффузионного типа по медленной переменной влияет только на разность фаз между осцилляторами и почти не влияет на траекторию движения отдельного осциллятора, то есть в системе (2) проекция траектории на плоскость (X_i, Y_i) такая же, как и предельный цикл для изолированного осциллятора. Следовательно, можно моделировать поведение системы (2), основываясь на одномерной модели медленных движений отдельного осциллятора.

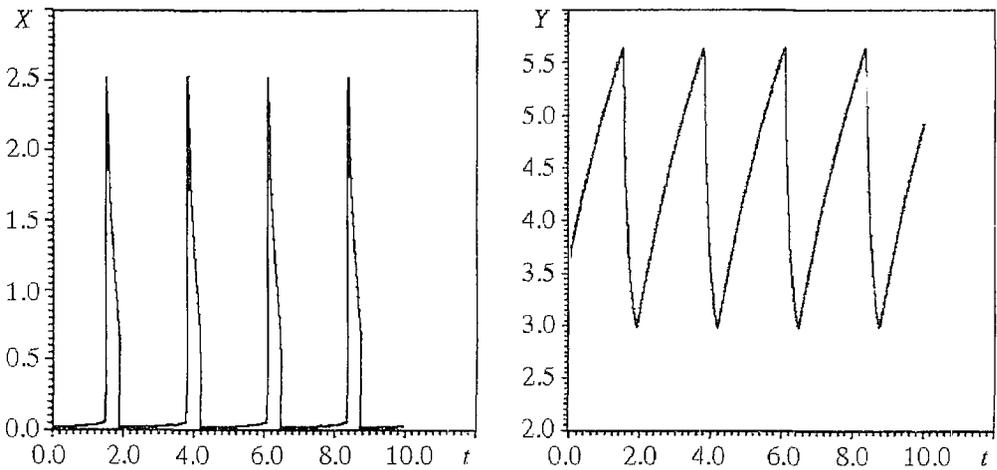


Рис. 2. Развертки динамических переменных, $\eta=2.56$

2. Метод

2.1. Линеаризация. Первым шагом в построении отображения является формальное определение точек A, C, D и E, разделяющих движения на медленные и быстрые (см. рис. 1). В данной работе приняты следующие определения:

$$\begin{aligned}
A &: \min(X), \\
C &: \min [(X - X_{\max})^2 + (Y - Y_{\max})^2]^{1/2}, \\
D &: \max(X), \\
E &: \min [(X - X_{\min})^2 + (Y - Y_{\min})^2]^{1/2},
\end{aligned}$$

где $X_{\min}, Y_{\min}, X_{\max}, Y_{\max}$ - координаты минимума и максимума N-образной изоклины на фазовой плоскости. Другими словами, A и D - точки пересечения траектории с N-образной изоклиной, C и E - точки наименьшего расстояния траектории до максимума и минимума N-образной изоклины.

Следующий шаг - построение модели медленных движений. Для этого аппроксимируем величину $\dot{Y}(Y)$ прямой линией для ветвей AC и DE, то есть найдем такие коэффициенты a и b , чтобы поведение системы на медленном участке, описанное выражением

$$dY/dt = a_{ij}Y + b_{ij} \quad (ij) = (AB), (BC), (DE), \quad (3)$$

наилучшем образом соответствовало поведению реальной системы. На рис. 3 сплошной линией показана величина \dot{Y} как функция Y , полученная с помощью решения дифференциальных уравнений, пунктирной линией показана аппроксимация прямыми линиями. Вспомогательная точка B выбрана таким образом, чтобы время движения изображающей точки от A до C через точку B, полученное с помощью отображения, было равно времени движения от A до C (T_{AC}), полученному с помощью дифференциальных уравнений. Таким образом, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
T_{(ij)}^{ду} &= \int_{Y_i}^{Y_j} 1/(a_{ij}Y + b_{ij}) dY, \quad (ij) = (AB), (BC), \\
\dot{Y}^{ду}(Y_A) &= a_{AB}Y_A + b_{AB}, \\
\dot{Y}^{ду}(Y_C) &= a_{BC}Y_C + b_{BC}, \\
a_{AB}Y_B + b_{AB} &= a_{BC}Y_B + b_{BC},
\end{aligned} \quad (4)$$

где индексом «ду» обозначены величины, полученные с помощью дифференциальных уравнений. Система (4) позволяет найти пять неизвестных величин: $Y_B, a_{AB}, b_{AB}, a_{BC}$ и b_{BC} . Величины a_{DE} и b_{DE} можно найти из следующей системы уравнений:

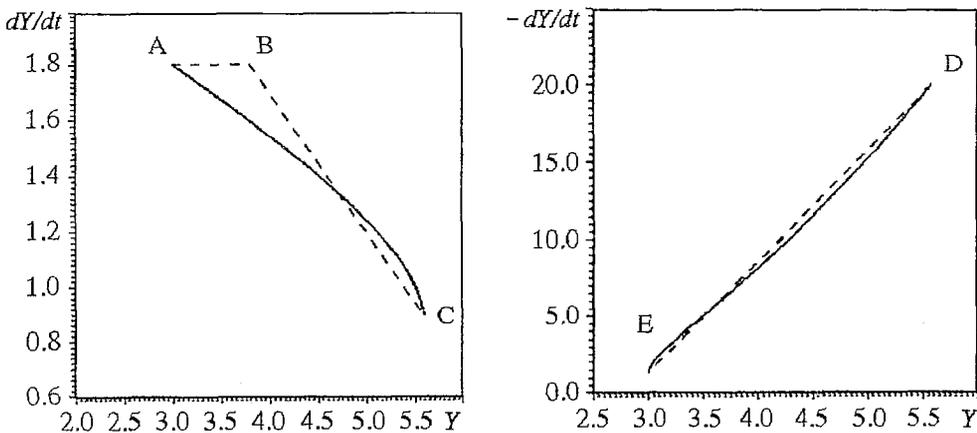


Рис. 3. Зависимость $\dot{Y}(Y)$. Пунктиром изображена зависимость для линеаризованной системы, $\eta = 2.56$

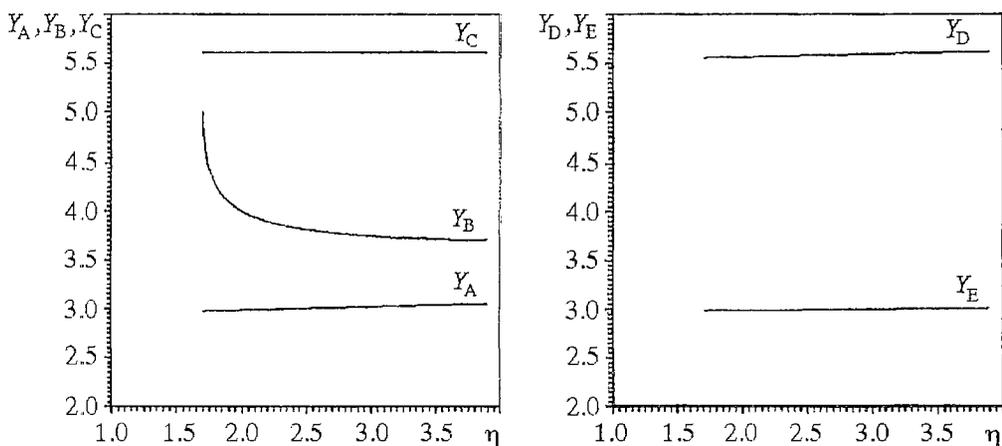


Рис. 4. Зависимость Y_A, Y_B, Y_C, Y_D, Y_E от параметра η

$$\dot{Y}^{IV}(Y_E) = a_{DE}Y_E + b_{DE}, \quad (5)$$

$$\dot{Y}^{IV}(Y_D) = a_{DE}Y_D + b_{DE}.$$

Заметим, что такой выбор величин a_{DE} и b_{DE} не обеспечивает точного соответствия времен движения изображающей точки по ветви DE, полученного с помощью системы (5) и в случае дифференциальных уравнений (как это сделано в системе (4)). Времена будут различаться на столько, на сколько будут различаться интегралы

$$T_{DE} = \int_{Y_D}^{Y_E} 1/\dot{Y}^{IV}(Y) dY \quad \text{и} \quad \int_{Y_D}^{Y_E} 1/(a_{DE}Y + b_{DE}) dY.$$

Эта разница составляет несколько процентов от полного периода, что не много для такого приближенного метода (в противном случае пришлось бы строить вспомогательную точку и для ветви DE).

Полученные величины $Y_A, Y_B, Y_C, Y_D, Y_E, a_{AB}, b_{AB}, a_{BC}, b_{BC}, a_{DE}$ и b_{DE} являются функциями параметров системы (2). Эти зависимости как функции η представлены на рис. 4 и 5, значение остальных параметров фиксировано.

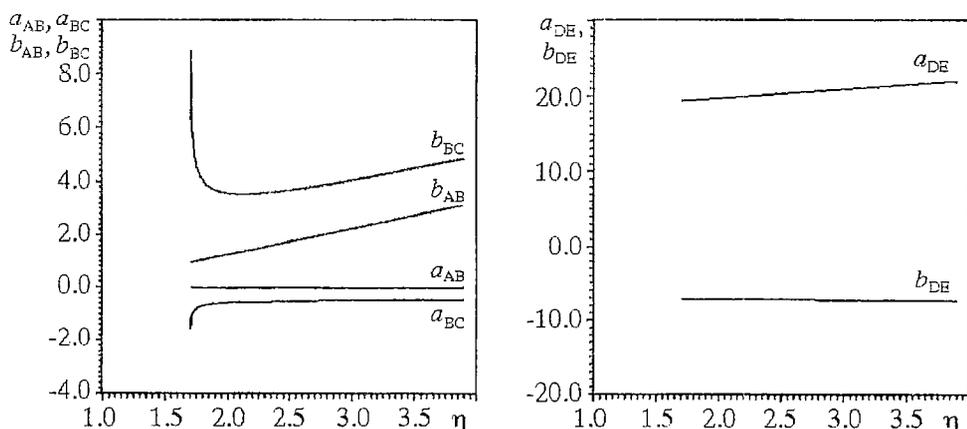


Рис. 5. Зависимость $a_{...}$ и $b_{...}$ от параметра η

2.2. Дискретизация предельного цикла. Движение на медленных участках АВ, ВС и DE описывается в принятом нами приближении дифференциальным уравнением (3) с постоянными коэффициентами на соответствующих ветвях. Найдем теперь правила, по которым можно вычислить приращение ΔY в зависимости от текущего состояния Y . Для этого зададимся некоторым значением приращения по времени h (о выборе конкретного значения h см. ниже), тогда из уравнений

$$\Delta Y = Y(t+h) - Y,$$

$$h = \int_{Y(t)}^{Y(t+h)} 1/(a_{ij}y + b_{ij}) dy, \quad (ij) = AB, BC, DE$$

следует выражение для ΔY

$$\Delta Y = \alpha_{ij}Y + \beta_{ij}, \quad (6)$$

где $\alpha_{ij} = \exp(a_{ij}h) - 1$, $\beta_{ij} = b_{ij}\alpha_{ij}/a_{ij}$ или, поскольку предполагается выбрать $h \ll 1$, $\alpha_{ij} = a_{ij}h$, $\beta_{ij} = b_{ij}h$.

В данной работе использован следующий подход при выборе шага интегрирования: для любого значения параметра η величина шага по времени выбирается порядка величины $\max(T_{CD}, T_{EA})$, времена прыжков в дальнейшем не учитываются, поскольку времена T_{CD} и T_{EA} при релаксационности $\epsilon = 0.001$ составляют несколько процентов от периода. Основные вычисления проводились с шагом $h = 0.01 \sim \max(T_{CD}, T_{EA})$.

2.3. Итоговые правила. Уравнение (6) задает оператор эволюции для одного осциллятора. Сформулируем теперь окончательные правила для отображений с учетом связи. Пусть каждому j -ому осциллятору в линии на i -ом шаге соответствуют два числа, определяющих его текущее состояние: Y_j^i - аналог фазовой переменной Y_i в уравнениях (2), и br_j^i - число, обозначающее ветвь изохлины, на которой находится данный осциллятор. Пусть для ветви АВ число $br=1$, для ветви ВС $br=2$ и для ветви DE $br=3$. Каждому числу br поставим в соответствие числа α_{br} и β_{br} , задающие коэффициенты α и β на каждой ветви. Определим функцию

$$D(Y, br, j) = \alpha_{br}Y + \beta_{br} + Ch \sum_{v=j-1}^{v=j+1} (Y_v^i - Y),$$

определяющую приращение ΔY для j -ого осциллятора в положении Y на ветви br за время h . Тогда новое состояние системы на $i+1$ -ом шаге можно найти, проделав для каждого осциллятора следующую процедуру:

1. Вычислить новое значение для Y_j^i :

$$Y_j^{i+1} := Y_j^i + D(Y_j^i, br_j^i, j).$$

2. Если $Y_j^{i+1} > Y_B$ и $br_j^i = 1$, то

$$br_j^{i+1} := 2,$$

$$Y_j^{i+1} := Y_B + D(Y_B, 2, j)/D(Y_B, 1, j) (Y_j^{i+1} - Y_B);$$

если $Y_j^{i+1} > Y_C$ и $br_j^i = 2$, то

$$br_j^{i+1} := 3,$$

$$Y_j^{i+1} := Y_D + D(Y_D, 3, j)/D(Y_C, 2, j) (Y_j^{i+1} - Y_C);$$

если $Y_j^{i+1} < Y_E$ и $br_j^i = 3$, то

$$br_j^{i+1} := 1,$$

$$Y_j^{i+1} := Y_A + D(Y_A, 1, j)/D(Y_D, 3, j) (Y_j^{i+1} - Y_E);$$

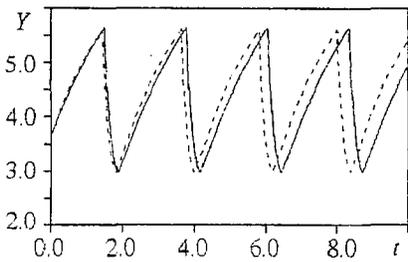


Рис. 6. Развертки для медленной переменной, полученные с помощью дифференциальных уравнений (сплошная линия) и отображений (пунктирная линия). $\eta=2.56$

методов интегрирования первого порядка с разрывными правыми частями.

На рис. 6 изображены развертки для медленной переменной, полученные с помощью численного решения системы (2) и с помощью сформулированных выше правил отображения. Из рисунка видно, что хотя периоды и различаются на некоторую величину, все же отображения правильно описывают динамику отдельного осциллятора.

2.4. Методика анализа решений. При изучении системы, состоящей из нескольких связанных осцилляторов, возникает проблема анализа полученных разверток медленных переменных. Периодические решения изучались по следующей схеме:

- определение общего периода решения T ;
- определение разности фаз между одинаковыми по форме развертками;
- определение количества подпериодов в общем решении для каждой переменной Y_1, Y_2 и Y_3 .

3. Результаты

В данной работе рассматривается система, состоящая из трех одинаковых осцилляторов в циклической конфигурации. В рассматриваемой системе обнаружены следующие решения:

1. *Синфазное решение.* Существует и устойчиво на всей плоскости (η, C) ; формы разверток совпадают для всех осцилляторов, разность фаз равна нулю.
2. *Решение, обозначенное как 2/1.* Все три развертки $Y_1(t), Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ имеют один подпериод. Развертки для двух осцилляторов совпадают и разность фаз равна нулю. Развертка третьего осциллятора имеет отличную от двух других разверток форму, поэтому решение 2/1 является примером пространственно неоднородного решения (рис. 7).

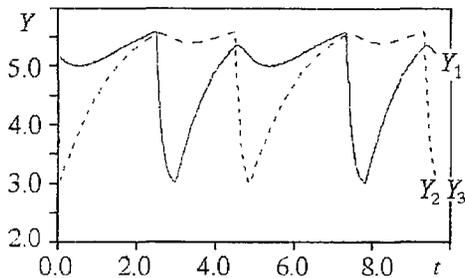


Рис. 7. Развертки для медленной переменной решения 2/1, $\eta=2.0, C=0.3$

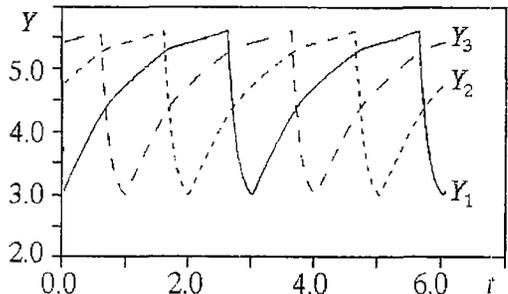


Рис. 8. Развертки для медленной переменной решения $T/3, \eta=2.0, C=0.2$

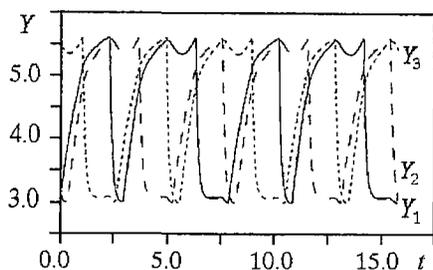


Рис. 9. Развертки для медленной переменной решения O_{222} , $\eta=2.75$, $C=0.3$

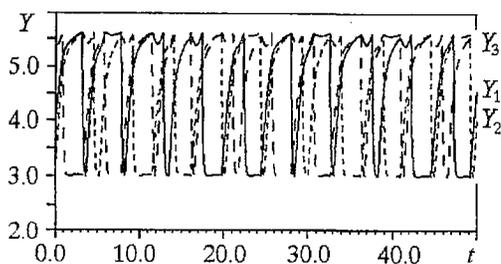


Рис. 10. Развертки для медленной переменной решения O_{555} , $\eta=2.490$, $C=0.293$

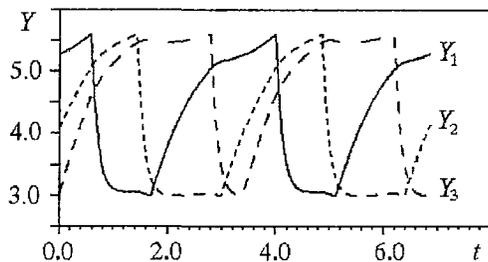


Рис. 11. Развертки для медленной переменной несимметричной волны, $\eta=2.84$, $C=0.3$

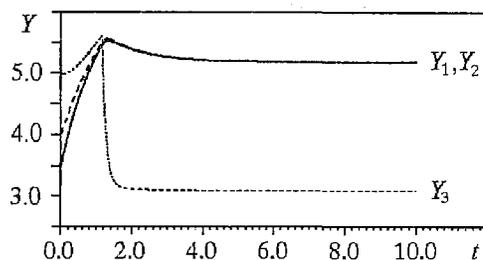


Рис. 12. Процесс выхода системы на «фазовую смерть», $\eta=2.5$, $C=0.5$

3. *Вращающиеся волны.* Группа решений с одинаковыми формами разверток динамических переменных и разностью фаз $T/3$.

- Простая волна $T/3$. Развертки для динамических переменных имеют один подпериод (рис. 8).
- Волна O_{222} . Решение, в котором развертки имеют два подпериода в общем периоде (рис. 9).
- Волна O_{555} . Решение, в котором развертки имеют пять подпериодов в общем периоде (рис. 10).

4. *Несимметричная волна.* Формы разверток для трех осцилляторов разные, но, тем не менее, имеют общий период и один подпериод для каждой развертки (рис. 11).

5. *Фазовая смерть.* При достаточно большом значении параметра C в системе присутствует фазовая смерть, то есть устойчивое стационарное состояние. На рис. 12 показан выход системы на это решение.

На рис. 13 показаны границы устойчивости аттракторов в плоскости параметров (η, C) . Из рисунка видно, что имеются области сосуществования нескольких периодических решений. Кроме того, обнаружены пересечения

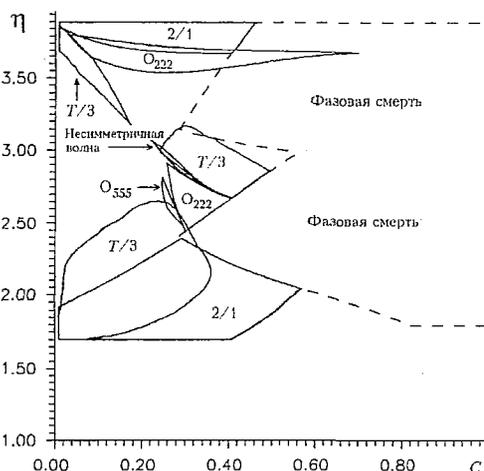


Рис. 13. Фазовая диаграмма для трех осцилляторов. Синфазное решение существует на всей плоскости. Исследования проводились для $\eta=1.699 \div 3.897$ (в области существования автоколебаний для отдельного осциллятора)

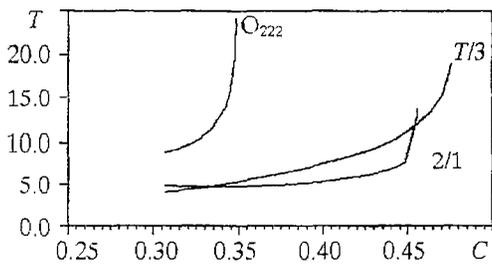


Рис. 14. Зависимость периодов решений 2/1 (нижняя область, $\eta=2.00\div 2.16$), T/3 (средняя область, $\eta=3.00\div 2.82$) и O_{222} (средняя область, $\eta=2.59\div 2.55$) от параметра C рядом с границей фазовой смерти

O_{222} (средняя область) со стационарным решением вычисления показали резкий рост периода этих решений при приближении к границе, что говорит о наличии бифуркации бесконечного периода (рис. 14).

Обсуждение

Приведенные результаты свидетельствуют об эффективности и надежности построенного метода. Решения 1,2,3а и 5 были получены экспериментально в работах [14,15] и теоретически в работе [10]. Решения 3б и 3с получены только теоретически в работе [10]. Решение 4 также обнаружено нами традиционным способом, и результаты исследования готовятся к публикации.

Следует отметить, что построение описанного в данной работе отображения можно проводить только для $\epsilon \ll 1$. Критерием малости ϵ может служить соотношение времени движения изображающей точки по медленным участкам траектории и времени скачков с одной медленной ветви на другую для изолированного осциллятора. Важно, что время скачков составляет только небольшую долю от общего периода. В отображениях это время никак не учитывается, и переход изображающей точки происходит мгновенно из одной граничной точки в другую ($C \rightarrow D$, $E \rightarrow A$) по горизонтальной линии (см. рис. 1). В силу отмеченной выше особенности, даже для малых ϵ отображения эффективно более «релаксационны», чем исходная система. В сущности, представленные отображения являются вариацией метода разрывных колебаний [16], где вместо решения укороченной системы (что не всегда можно сделать) производится ее линеаризация для различных частей медленных участков траектории.

Представленный здесь метод не позволяет получить решения, для которых существенной является динамика быстрой переменной. Например, отображения не позволяют получить решения типа «динамической ловушки» [17], в которой один из осцилляторов теряет способность совершать полноамплитудные релаксационные колебания.

Несмотря на перечисленные выше недостатки, представленный метод позволяет при существенном уменьшении времени счета (примерно в 30 раз) получить все решения, возникающие в исходной системе дифференциальных уравнений, на которые не оказывает влияния динамика быстрой переменной, и дает правильную границу их устойчивости. Метод применим практически для любой системы релаксационных осцилляторов, связанных по медленной переменной с N-образной изоклиной, не обязательно одинаковых. Поскольку в основу отображений положен явный метод интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, отображения позволяют ввести шум и исследовать стохастический вариант исходной системы дифференциальных уравнений.

Библиографический список

1. *Crowley M.F. and Epstein I.R.* Experimental and theoretical studies of coupled oscillators: phase death, multistability, and in-phase and out-phase entrainment // *J. Phys. Chem.* 1989. Vol. 93. P. 2496.

2. Lavenda B., Nicolis G. and Herschkwitz-Kaufman M. // J. Theor. Biol. 1971. Vol. 32. P. 283.
3. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
4. Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические осцилляторы. М.: Мир, 1986.
5. Van der Pol B., Van der Mark J. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // Philos. Mag. 1928. Vol. 6. P. 763.
6. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975
7. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
8. Epstein I.R. Coupled oscillators in chemistry and biology // Comm. Mol. Cell. Biophys. 1990. Vol. 6. P. 299.
9. Volkov E.I., Stolyarov M.N. Bihyhythmicity in a system of two coupled identical oscillators // Phys. Lett. 1991. Vol. A159. P. 61.
10. Volkov E.I., Stolyarov M.N. Temporal variability in the system of coupled mitotic timers // Biological Cybernetics. 1994. Vol. 71. P. 451.
11. Винер Н., Розенблюм А. Кибернетический сборник. Вып. 3. М.: ИЛ, 1961. С.3.
12. Зыков В.С., Михайлов А.С. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. С. 341.
13. Markus M., Stolyarov M., Volkov E.I. An efficient shortcut to compute large populations of coupled oscillators // Mathematical Population Dynamics. Proc. of the 3rd International Conference. France: Leon, 1994.
14. Ruwisch D., Dode M., P. Schütz, Markus M. Parallel analog computation of coupled cell cycles with electrical oscillators // Phys. Lett. 1994. Vol. A186. P. 137.
15. Yoshimoto M., Yoshikawa K., Mori Y. Coupling among three chemical oscillators: Synchronization, phase death, and frustration // Phys. Rev. 1993. Vol. E47, № 2.
16. Grasman J. The mathematical modeling of entrained biological oscillators // Bulletin of Mathematical Biology. 1984. Vol. 46, № 3. P. 407.
17. Волков Е.И. Динамическая ловушка в симметричной цепочке из трех сцепленных осцилляторов // Крат. Сообщ. по физике. ФИАН 1995. № 7/8. С. 28.

Физический институт
им. П.Н. Лебедева РАН

Поступила в редакцию 24.01.96
после переработки 22.07.96

EFFECTIVE NUMERICAL METHOD FOR THE STUDY OF THE INHIBITORY COUPLED VERY STIFF OSCILLATORS DYNAMICS

D.V. Volkov, M.N. Stolyarov, E.I. Volkov

A method of the numerical investigation of the inhibitory coupled relaxation oscillators systems based on the efficient one-dimensionality of limit cycle of isolated oscillator is proposed. $\dot{Y}(Y)$ dependence linearisation (where Y is a slow variable) was used in the above-mentioned method for a slow area of a limit cycle. A fast variable dynamics is reduced up to instantaneous jumps from one slow cycle area to another. Represented calculation method, which provides 30-times reduction of computing time, let us to investigate all solutions appearing in the initial system of differential equations which are not influenced by the fast variable dynamics. A good accordance with the traditional method of numerical solution of differential equations for three coupled oscillators was shown and the possible types of rotating waves were found. The method advantages and disadvantages were discussed.



Волков Денис Владимирович - родился в Дедовске Московской области (1972). Окончил физический факультет МГУ (1995). После окончания МГУ поступил в аспирантуру Физического института им. П.Н.Лебедева РАН. Занимается изучением пространственно-временных структур в цепочках взаимодействующих осцилляторов, математическим моделированием автоколебательных систем.



Столяров Максим Николаевич - родился в Москве (1962). Закончил Физический факультет МГУ (1986). С 1988 года сотрудник отдела теоретической физики ФИ РАН. Область научных интересов - математические модели биологических систем, теория нелинейных колебаний и автоволн, численное моделирование в статистической физике. Соавтор ряда работ по математическому моделированию растущей колонии клеток, изучению динамики автоволн в неоднородных средах и пространственно-временных структур в кластерах взаимодействующих осцилляторов.



Волков Евгений Израилевич - родился в Москве (1947). Закончил физический факультет МГУ (1971). Защитил кандидатскую диссертацию (1976). С 1976 года сотрудник сектора теоретической биофизики отдела теоретической физики ФИ РАН. С 1988 года заместитель директора отделения теоретической физики ФИ РАН. Область научных интересов - модели биологических мембран, математические модели автоколебательных процессов в биологии. Является автором многих научных статей по направлениям, указанным выше.



ВЛИЯНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНО-ТИПОЛОГИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ НА СУТОЧНУЮ ДИНАМИКУ ХАОТИЧНОСТИ ЭКГ

Н.З. Кайгородова, Л.Н. Сухарева, А.С. Эйдукайтис, М.В. Яценко

Ритмическая деятельность сердца характеризуется наличием детерминированного хаоса, который может отражать адаптивность организма, отличающуюся индивидуальностью. Интересным в этом плане может быть исследование хаотичности в динамике сердечной деятельности у разных психотипов, организм которых неодинаково реагирует на экстремальные факторы внешней среды, в том числе и по биоритмологическим критериям, например, на макроуровне в суточной динамике физиологических показателей. В связи со сказанным целью данной работы явилось исследование суточной динамики уровня хаотичности ЭКГ в зависимости от уровня экстравертности, нейротизма и личностной тревожности. Работа была проведена на 10 испытуемых, у которых 6 раз в сутки через 4 часа записывалась ЭКГ во 2-м стандартном отведении в автоматическом режиме. Замеры производились с 5 повторностями. Анализ хаотичности осуществлялся методом построения аттрактора и оценки его размерности. Сравнение геометрии аттракторов ЭКГ у разных психотипов выявило индивидуальные различия в подвыжности структуры аттрактора при повторных замерах: наибольшая стабильность фазового портрета ЭКГ была обнаружена у испытуемых с низким уровнем нейротизма. Полученные результаты также свидетельствовали, что среднесуточные значения фрактальной размерности были достоверно выше в группах нестабильных, тревожных, экстравертов (особенно в группах эмоционально нестабильных). Анализ суточной динамики исследуемого параметра выявил хорошо выраженный суточный ритм уровня хаотичности в группах высокотревожных, нестабильных во всех замерах. При этом в группах низкотревожных и интровертов данный показатель во время суток сохранялся на постоянном уровне во всех повторностях, а в группах экстравертов и стабильных хорошо выраженный суточный ритм был выявлен только в одном замере. Максимально хаотичная ЭКГ регистрировалась в утренние часы, а наиболее стабильная - в дневные и вечерние. При этом существенных различий в положении максимума и минимума показателя фрактальной размерности аттрактора в исследуемых группах обнаружено не было. Таким образом, пластичность поведения коррелирует с особенностями биоритмостатуса как на макро-, так и на микроуровне.

Введение

Объективное исследование индивидуальных особенностей психофизиологического статуса организма человека, классификация и типизация этих особенностей является чрезвычайно важной в теоретическом и прикладном аспектах задач. От ее решения зависят ответы на такие вопросы, как адаптивность и устойчивость психофизиологической сферы индивидуума и конкретные механизмы ее организации, эффективность деятельности в различных условиях, профессиональная ориентация и профотбор, предрасположенность к

аварийным ситуациям и некоторым видам патологии, а также индивидуализация профилактических, реабилитационных и терапевтических мероприятий. В настоящее время исследований, посвященных этому направлению, так много, что они выделились в самостоятельную дисциплину, называемую дифференциальной психофизиологией. Одной из задач данного научного направления является поиск и определение наиболее информативных признаков, характеризующих особенности индивидуальности человека и его реагирования на факторы окружающей среды.

Установлено, что индивидуально-типологические особенности коррелируют с биоритмологическими характеристиками функционирования систем организма как на макроуровне - суточные, недельные, месячные ритмы и др. [1]¹, так и на микроуровне - ритм ЭКГ, ЭЭГ и др. [2]². При этом известно, что нарушения биоритмологической структуры системы предшествуют изменению других её характеристик, например, при адаптации либо при заболевании [3]³. Отсюда логично предположить, что адаптивные различия психотипов, которые отмечались неоднократно [2]⁴, определяются особенностями биоритмологического статуса данных групп индивидуумов. При этом исследование биоритмологических характеристик на макроуровне, хотя и является перспективным, имеет, прежде всего, теоретический интерес. Прогностическая ценность такого исследования, в силу его сложности, ограничена. Изучая ритмостатус организма на микроуровне, обычно ограничивались рассмотрением стационарного⁵ компонента в динамической характеристике физиологических функций и в лучшем случае лишь констатировали наличие нестационарного компонента, рассматривая его как случайное явление, либо как отражение переходного процесса. В настоящее время установлено, что появление нестационарного компонента вызвано либо случайным процессом, то есть шумом, либо детерминированным процессом, порожденным какими-то правилами. Нестационарные детерминированные явления получили название хаоса, и их обнаружение требует применения специфических методов. Один из таких методов предполагает построение доминирующей в фазовом пространстве траектории - аттрактора и оценку его фрактальной размерности. Настоящая работа имела своей целью исследование биоритмологических критериев индивидуальной адаптации на макро- и микроуровнях.

Материалы и методы

Были проведены две серии экспериментов:

1) запись ЭКГ на 10 испытуемых 6 раз в сутки с шестью повторностями в условиях умеренного климата;

2) запись ЭКГ при острой адаптации к аридной зоне (г.Нукус) на 8 испытуемых 6 раз в сутки с десятью повторностями.

ЭКГ регистрировалась на одноканальном кардиографе и автоматически с использованием «ЭКГ-триггера» в положении лежа после 10 мин. релаксации во 2-м стандартном отведении. Для оценки уровня хаотичности использовался расчет фрактальной размерности D по формуле

$$D = \lim \log n(e) / \log(1/e) \quad \text{при } e \rightarrow 0,$$

где $n(e)$ - минимальное число N -мерных кубов со стороной e , необходимое для того, чтобы покрыть множество [4-6]. Кроме того рассчитывались показатели

¹ А также Слоним А.Д., 1976; Qautherie M., 1973 и др.

² А также Русалов В.М. с соавт., 1988; Gilliland K. et al., 1981; Heffernan-Colman Collen J. et al., 1992 и др.

³ А также Моисеева Н.И., 1978 и 1989; Слоним А.Д., 1976 и др.

⁴ А также Шорин Ю.П., 1991 и др.

⁵ Здесь авторы не совсем удачно применяют термины «стационарный» и «нестационарный» компонент, понимая под этим периодические и непериодические процессы. - Прим. рецензента.

вариационного анализа ЭКГ по А.Р.Баевскому [7]. Рассчитанные показатели подвергались статистической обработке и сравнивались в зависимости от уровня экстравертности, нейротизма и личностной тревожности. Психотипы определялись по опросникам Айзенка и Спилбергера - Ханина. Различия считались достоверными при $p < 0.05$.

Результаты и их обсуждение

Известно, что ритмическая деятельность сердца характеризуется наличием детерминированного хаоса [8,9]⁶. На первом этапе настоящей работы было показано, что сердечная деятельность описывается странным аттрактором, фрактальная размерность и геометрия которого зависят от ряда факторов и неодинаковы у разных лиц. Предстояло выяснить, в каких именно характеристиках детерминированной нестационарности проявляются индивидуальные различия. Анализировались: среднесуточный уровень D , характер суточной динамики уровня хаотичности кардиоинтервалов, стабильность фрактальной размерности от замера к замеру у разных психотипов в условиях умеренного климата и при действии жары. Полученные данные свидетельствуют, что достоверные различия в среднесуточном уровне хаотичности сердечного ритма (СР) обнаружены, прежде всего, в группах эмоционально стабильных и нестабильных испытуемых. При этом в первой группе фрактальная размерность аттракторов достоверно ниже, чем во второй: 1.19 ± 0.05 у стабильных и 1.35 ± 0.04 у нестабильных испытуемых. Получена хорошая воспроизводимость данных при повторных замерах (табл. 1).

В группах, различающихся по уровню личностной тревожности и экстравертности, достоверных различий по анализируемой характеристике обнаружено не было ни в одном из замеров.

Таблица 1

Уровень хаотичности сердечного ритма в зависимости от психотипов

	I замер	II замер	III замер	t_{st}
стаб.	1.17 ± 0.08	1.22 ± 0.04	1.18 ± 0.04	2.18
нестаб.	1.31 ± 0.04	1.36 ± 0.04	1.37 ± 0.04	
t_{ϕ}	3	2.8	5	
тревож.	1.312 ± 0.04	1.37 ± 0.05	1.38 ± 0.04	2.00
нетрев.	1.275 ± 0.06	1.322 ± 0.04	1.28 ± 0.07	
t_{ϕ}	0.5	0.83	1.25	
экстр.	1.32 ± 0.05	1.35 ± 0.05	1.38 ± 0.04	2.18
интров.	1.25 ± 0.07	1.32 ± 0.05	1.26 ± 0.07	
t_{ϕ}	0.9	0.4	1.5	

Таким образом, индивидуальные различия во фрактальной размерности аттрактора последовательности кардиоинтервалов проявились в среднесуточном уровне величины D , в выраженности и константности [10] суточного ритма уровня хаотичности.

Как можно видеть из табл. 2-7⁷, максимально хаотичный сердечный ритм

⁶ А также *Molinari J., Dumermuth G.*, 1992.

⁷ В табл. 2-7 цифры, отмеченные *, означают положение max и min, а ** - достоверную разницу между max и min.

Таблица 2

**Суточная динамика уровня хаотичности кардиоинтервалов
в группе экстравертов в разные замеры**

№	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	4.00
I замер	*1.41±0.06	1.30±0.05	1.28±0.06	1.29±0.07	*1.26±0.06	1.38±0.05
II замер	1.36±0.05	*1.43±0.04	1.30±0.05	**1.27±0.05	1.37±0.05	1.37±0.05
III замер	1.41±0.02	1.38±0.04	1.33±0.06	*1.325±0.03	1.39±0.04	*1.44±0.05
$t_{st}=2.20$						

Таблица 3

**Суточная динамика уровня хаотичности сердечного ритма
в группе интровертов в разные замеры**

№	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	4.00
I замер	1.22±0.09	*1.32±0.08	1.28±0.06	1.25±0.065	1.23±0.08	*1.22±0.065
II замер	*1.37±0.06	1.36±0.07	*1.26±0.05	1.30±0.05	1.28±0.05	1.33±0.03
III замер	1.21±0.09	*1.34±0.08	1.29±0.08	1.21±0.06	*1.19±0.08	1.33±0.07
$t_{st}=2.20$						

Таблица 4

**Суточная динамика уровня хаотичности кардиоинтервалов
в группе эмоционально стабильных испытуемых в разные замеры**

№	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	4.00
I замер	1.01±0.03	*1.21±0.16	1.11±0.01	1.08±0.09	*0.99±0.05	1.03±0.06
II замер	*1.28±0.03	1.23±0.10	*1.13±0.05	1.15±0.01	1.28±0.03	1.24±0.02
III замер	1.01±0.02	**1.37±0.10	1.11±0.01	1.08±0.01	**1.00±0.01	1.16±0.05
$t_{st}=2.78$						

Таблица 5

**Суточная динамика уровня хаотичности кардиоинтервалов
в группе эмоционально нестабильных испытуемых в разные замеры**

№	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	4.00
I замер	**1.39±0.05	**1.24±0.05	1.31±0.04	1.30±0.05	1.28±0.05	1.36±0.03
II замер	1.37±0.04	**1.43±0.04	1.31±0.04	**1.30±0.04	1.36±0.04	1.36±0.04
III замер	1.39±0.03	1.37±0.04	1.33±0.05	**1.32±0.03	1.37±0.04	**1.42±0.045
$t_{st} = 2.06$						

Таблица 6

**Суточная динамика уровня хаотичности сердечного ритма
в группе низкотревожных испытуемых в разные замеры**

№	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	4.00
I замер	1.29±0.09	*1.32±0.07	1.27±0.07	1.29±0.08	*1.21±0.07	1.26±0.06
II замер	1.31±0.03	*1.35±0.06	1.32±0.06	1.295±0.04	*1.36±0.04	*1.29±0.05
III замер	1.28±0.07	*1.34±0.05	1.30±0.08	1.25±0.06	*1.23±0.10	1.33±0.06
$t_{st} = 2.00$						

Таблица 7

**Суточная динамика уровня хаотичности кардиоинтервалов
в группе высокотревожных испытуемых в разные замеры**

№	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	4.00
I замер	1.37±0.05	1.30±0.04	1.29±0.05	**1.25±0.04	1.28±0.06	*1.38±0.04
II замер	1.41±0.07	**1.44±0.04	**1.26±0.04	1.365±0.07	1.34±0.06	1.41±0.04
III замер	1.40±0.02	1.41±0.05	1.37±0.04	**1.32±0.02	*1.42±0.04	**1.42±0.06
$t_{st} = 2.18$						

регистрировался в ночное и утреннее время, а наиболее стабильный - в дневные и вечерние часы. При этом принципиальных различий в положении максимального и минимального значений фрактальной размерности аттрактора на временной шкале в исследуемых группах не обнаружено. В то же время необходимо отметить, что в случае выраженности СР, его форма не стабильна в одной и той же группе и у одних и тех же испытуемых при повторных замерах, что свидетельствует о высокой подвижности уровня хаотичности СР и согласуется с природой самого явления.

Одним из широко используемых методов анализа кардиоинтервалов является метод, разработанный А.Р.Баевским [7] и позволяющий оценивать активность и соотношение автономного и центрального контуров регуляции кардиоинтервалов.

Таблица 8

**Влияние гипертермии на уровень хаотичности
кардиоинтервалов у разных психотипов**

Психотип	Умеренный климат	Гипертермия (Нукус)	t
Экстраверт	1.35±0.05	1.21±0.06	3.0
Интроверт	1.27±0.06	1.24±0.05	0.4
Стабильный	1.24±0.04	1.3±0.05	1.0
Нестабильный	1.35±0.04	1.16±0.05	3.2
Низкотревожный	1.295±0.065	1.33±0.02	0.5
Высотревожный	1.36±0.045	1.13±0.02	4.6
Среднее	1.33±0.05	1.23±0.04	1.7

Значения коэффициентов корреляции между некоторыми вариационно-статистическими показателями сердечного ритма и показателем фрактальной размерности множества

	<i>D</i>	ИН	ВПР	ИВР	ПАПР
<i>D</i>	1.0	0.098	-0.42	-0.11	0.10
ИН		1.0	0.83	0.98	0.65
ВПР			1.0	0.82	0.50
ИВР				1.0	0.62
ПАПР					1.0

ИН - индекс напряжения,
 ВПР - вегетативный показатель ритма,
 ИВР - индекс вегетативного равновесия,
 ПАПР - показатель активности процессов регуляции.

Расчет коэффициента корреляции между вариационно-статистическими показателями, отражающими активность различных уровней контуров регуляции СР, и величиной *D* обнаружил существование значимой связи лишь для вегетативного показателя ритма при $R_{кр} = 0.32$ (табл. 9). Исходя из сказанного, можно сделать предположение, что хаотичность обусловлена активностью автономного контура регуляции, обусловленного ритмической деятельностью синусного узла сердца. Усиление центральных влияний, по-видимому, приводит к снижению хаотичности и усилению стационарности.

Как известно, хаотичность физиологических функций может быть связана с адаптивными возможностями организмов [11], поэтому было решено рассмотреть воздействие факторов внешней среды на структуру аттрактора и его фрактальную размерность. Полученные данные свидетельствуют, что при адаптации к жаре среднесуточный уровень хаотичности ниже, чем в умеренном климате: 1.23 ± 0.04 и 1.33 ± 0.05 , соответственно. При этом, как видно из табл. 8, у разных психотипов реактивность уровня хаотичности отличается при действии жаркого климата. Так, если в группах экстравертов, нестабильных и высокотревожных выявлено достоверное снижение данного показателя, то в группах интровертов, стабильных и низкотревожных отмечено сохранение хаотичности на исходном уровне. В связи с этим в условиях жары фрактальная размерность аттрактора кардиоинтервалов в отличие от таковой в условиях умеренного климата оказалась выше у эмоционально стабильных (1.3 ± 0.05) и у низкотревожных (1.33 ± 0.02) по сравнению с нестабильными (1.16 ± 0.05) и высокотревожными (1.13 ± 0.02). Таким образом, индивидуальные различия проявились и в реактивности уровня хаотичности кардиоинтервалов при действии экстремальных факторов.

Согласно закону перемежающейся активности функциональных структур, сформулированному Г.Н.Крыжановским (см. [9]), в состоянии относительного покоя ритмы отдельных функциональных частей не синхронизированы друг с другом. На основе попеременной работы клеточных структур обеспечивается непрерывное функционирование целого органа и оптимальный ритм работы функциональных единиц. При стрессовых воздействиях при патологии может наблюдаться взаимная синхронизация ритмов отдельных функциональных структур, вследствие чего создается напряжение в работе органа. Этим можно, по-видимому, объяснить обнаруженное снижение уровня хаотичности при адаптации к жару.

Таким образом, индивидуальные различия в уровне хаотичности ЭКГ в большей степени определялись эмоциональной стабильностью-нестабильностью испытуемых. При этом как по среднему уровню, так и по суточной динамике и подвижности уровня хаотичности от замера к замеру выделилась группа эмоционально нестабильных испытуемых. Из литературы известно, что

пластичность биоритмостатуса на макроуровне СР прямо коррелирует с пластичностью поведения [12]. Можно предположить, что данная закономерность прослеживается и на микроуровне.

ВЫВОДЫ

1. Обнаружены индивидуальные различия в уровне хаотичности ЭКГ. При этом в большей степени имела значение эмоциональная стабильность-нестабильность индивидуумов.

2. Индивидуальные различия проявились в среднем значении фрактальной размерности ЭКГ, в выраженности и стабильности суточного ритма уровня хаотичности, в особенностях геометрии аттрактора ЭКГ и ее изменчивости при повторных замерах.

3. Выявлено изменение уровня хаотичности ЭКГ при воздействии гипертермии. При этом наблюдалось снижение среднего показателя фрактальной размерности аттрактора в экстремальных условиях.

4. Реактивность уровня хаотичности при адаптации различалась у разных психотипов. При этом наиболее подвижным показателем фрактальной размерности был в группе эмоционально нестабильных лиц.

Библиографический список

1. Моисеева Н.И., Сысоев В.М. Временная среда и биологические ритмы. Л.:Наука, 1981. 127 с.
2. Кулагин Б.В. Основы профессиональной психодиагностики. Л.:Медицина, 1984. 215 с.
3. Деряпа Н.Р., Мошкин М.П., Посный В.С. Проблемы медицинской биоритмологии. М.:Медицина, 1985. 206 с.
4. Ахромеев Т.С. Парадоксы мира нестационарных структур//Компьютеры и нелинейные явления. М.:Наука, 1988. С. 44.
5. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.:Мир, 1991. 248 с.
6. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М.:Мир, 1990. 342 с.
7. Баевский Р.М., Кириллов О.И., Клецкин С.З. Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе. М.:Наука, 1984. 220 с.
8. Dvorak I., Siska J., Wackermann J. et al. Evidence for interpretation of the EEG as a deterministic chaotic process with a low dimension // *Activ. nerv. super. Praha*:1985. Vol.28, № 3. P. 228.
9. Soong A.C.K., Stuart C.J.M. Evidence of chaotic dynamics underlying the human alpha-rhythm electroencephalogram//*Biol. Cybern.* 1989. Vol. 62, № 1. P. 55.
10. Степанова С.И. Биоритмологические аспекты проблемы адаптации. М.:Наука, 1986. 241 с.
11. Babloyantz A., Destexhe A. Strange attractors in the human cortex // *Disorder in human oscillatory systems* / Ed. L.Rensing. 1986. С. 48.
12. Казин Э.М. Циркадный ритм адренокортикальной активности при адаптации организма к факторам окружающей среды. Автореф. дисс...док.биол.наук. Л.:1982. 37 с.

Алтайский государственный
университет

Поступила в редакцию 6.02.96
после переработки 4.11.96

THE INFLUENCE OF THE INDIVIDUAL AND TYPOLOGICAL PECULIARITIES ON THE DAILY DYNAMICS OF THE ECG CHAOS

N.Z. Kaygorodova, L.N. Sukhareva, A.S. Eidukaytis, M.V. Yazenko

The heart rhythmical activity is characterised by the deterministic chaos which can reflect the organism adaptation differing by individuality. In this respect it is very inter-

esting to investigate the chaos in the heart activity dynamics of different psychotypes, the organism of which does not react identically on the extreme factors of the environment including biorhythmological criteria, for example, at the macrolevel in the daily dynamics of the physiological indexes. So the aim of this work is the investigation of the daily dynamics level of the ECG chaos in its dependence on extroversion level, neuroticism and personal anxiety. Ten healthy volunteers were investigated. The ECG data were registered 6 times during the day with an interval of 4 hours, they were taken with the second standard ECG leads in an automatic regime. The measures were taken with 5 repetitions. The chaos analysis was done by the method of the attractor construction and the value of its dimension. The comparison of the ECG attractors geometry taken in the different psychotypes demonstrated the individual differences in the mobility of the attractors structures during the repeated measures: the largest stability of the phase ECG portrait was discovered among the volunteers having the low level of neuroticism. The obtained results also proved that the mean daily fractal dimension meanings were truly higher in the unstable, anxious and extrovert groups (especial in the emotionally unstabled groups). The daily dynamics analysis of the investigated parameter demonstrated the clearly marked daily rhythm of the chaotic level in the high-anxious groups which are unstable in all dimensions. This index was stable in all repetitions during the day in the groups of low-anxious and introverts but in the groups of extroverts and stables the well-expressed daily rhythm was exposed only in one measurement. The maximum chaotic ECG was registered only in the morning hours and more stabled ECG in the day time and in the evening hours. The sufficient differences in the position of maximum of the fractal dimension attractor index in the investigated groups were not discovered. That is why the plasticity of the behaviour correlates with the peculiarities of the biorhythmstatus both at the macro- and microlevels.



Кайгородова Надежда Захаровна родилась в городе Барнауле (1956), окончила биологический факультет Алтайского государственного университета (1979). После окончания поступила в аспирантуру Ленинградского государственного университета. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук по теме «ЭЭГ показатели умственной работоспособности в условиях дефицита времени» (1984). Соавтор монографии.



Эйдукайтис Андрей Станиславович - родился в Рубцовске (1973). С отличием окончил биологический факультет Алтайского государственного университета (1996). В настоящее время аспирант АГУ.



Яценко Михаил Владимирович - родился в Барнауле (1973). Окончил биологический факультет Алтайского государственного университета (1996). В настоящее время аспирант АГУ.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В АВТОКАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ВЕРОЯТНОСТНОГО КЛЕТОЧНОГО АВТОМАТА

В. К. Ванаг, А. Ю. Вирченко, К. В. Ванаг

Для моделирования эффекта перемешивания в автокаталитической реакции размножения активатора в присутствии ингибитора предложена модель вероятностного клеточного автомата, учитывающая интенсивность турбулентного перемешивания, молекулярную диффузию и химические реакции. Модель позволила описать экспериментальные зависимости индукционного периода автокаталитической реакции от интенсивности перемешивания (эффект перемешивания). Подтверждена гипотеза, согласно которой величина эффекта перемешивания возрастает с уменьшением скорости подхода системы к критической точке. Показано, что эффект перемешивания связан с образованием микрогетерогенностей-зародышей, с нелинейностью химических реакций и с влиянием степени турбулентности на амплитуду флуктуаций концентраций реагентов.

Введение

В настоящее время большое внимание привлекают работы, связанные с влиянием условий перемешивания на протекание сложных нелинейных химических реакций [1-3], в частности, колебательных реакций [3-6]. Известно, что нелинейные химические реакции, сопряженные с диффузионно контролируемые реакциями, могут усиливать флуктуации концентраций реагентов [7, 8] (в дальнейшем мы будем опускать слова «концентраций реагентов», а писать просто «флуктуации») и влиять на динамику средних. В ещё большей степени влияние флуктуаций на ход химических реакций проявляется в таких нелинейных системах, которые обладают критическими или бифуркационными точками, например, в колебательных химических реакциях [9]. Амплитуда флуктуаций в таких системах может быть столь высока, что даже интенсивное перемешивание не приводит к полному сглаживанию пространственных флуктуаций. Соответственно, и эффект перемешивания проявляется в колебательных реакциях наиболее выражено [3-6, 10, 11].

Если аномальные неравновесные флуктуации возникают вблизи критического значения концентрации какого-либо интермедиата реакции*, то

* Интермедиатом реакции, в отличие от исходных реагентов и конечных продуктов реакции, называется промежуточная частица. Концентрации интермедиатов реакции, как правило, на несколько порядков меньше концентраций исходных реагентов.

турбулентное перемешивание системы, влияя на амплитуду флуктуаций, может заметно сказаться на динамике системы в целом и даже привести к смене режима реакции. Однако неоднократные попытки описать эффект перемешивания аналитическими методами с использованием уравнений Ланжевена и Фоккера - Планка с учетом диффузионных ($D_0 \nabla^2 c$) и гидродинамических ($\nabla u c$) членов в условиях турбулентного перемешивания не привели к положительным результатам [7, 12-14].

В последнее время появились работы, в которых моделирование турбулентности [15, 16], колебательных химических реакций [17, 18] и автоволновых процессов [19] проводится с использованием клеточных автоматов (КА). Модели КА легко и быстро считаются на компьютерах, кроме того, они позволяют непосредственно перейти на локальный уровень описания сложной системы. Необходимость такого перехода обусловлена влиянием на поведение нелинейной динамической системы неравновесных флуктуаций, как раз и возникающих на локальном, мезоскопическом уровне.

В настоящей работе мы исследуем с помощью КА влияние турбулентного перемешивания на кинетический неравновесный фазовый переход, являющийся составной частью большинства известных на сегодняшний день жидкофазных колебательных химических реакций. Этот переход может быть представлен совокупностью нескольких реакций [7]: реакции (1) автокаталитического размножения некоторой частицы, называемой активатором А; реакции (2) аннигиляции активатора с некоторой другой частицей, называемой ингибитором In; реакции (3) диспропорционирования молекул активатора, ограничивающей их экспоненциальный рост; а также реакций рождения активатора (4) и ингибитора (5) (длинные горизонтальные стрелки в выражениях (1) - (5) обозначают реакцию и ее направление).

Реакция	Константа	Скорость реакции	
$A \longrightarrow (1 + \alpha)A$	$k_1, \alpha > 0$	$v_1 = k_1 \alpha [A]$	(1)
$A + In \longrightarrow 0$	k_2	$v_2 = k_2 [A][In]$	(2)
$A + A \longrightarrow 0$	k_3	$v_3 = 2k_3 [A]^2$	(3)
$\longrightarrow A$	C_1	$v_4 = C_1$	(4)
$\longrightarrow In$	C_2	$v_5 = C_2$	(5)

Набор реакций (1) - (5) приводит к пороговому переходу системы активатор - ингибитор из состояния (I), в котором $[A] \ll [In]$, в состояние (II), в котором $[A] \gg [In]$ (при условии $C_1 > C_2$). Аналогичным переходом обладают такие известные колебательные реакции, как реакция Белоусова - Жаботинского (БЖ) и реакция Бриггса - Раушера (БР) [20], для которых эффект перемешивания был обнаружен экспериментально [4-11, 21]. Сочетание линейной реакции (1) и нелинейной реакции (2) порождает появление критической точки (критической концентрации) $[In]_{cr} = k_1 \alpha / k_2$, в которой $v_1 = v_2$. При $[In] > [In]_{cr}$ реакция (1) подавлена, и система (1) - (5) находится в состоянии (I). При $[In] < [In]_{cr}$ начинается автокаталитический рост концентрации активатора с показателем экспоненты $k_1 \alpha$, и система переходит в состояние (II). Для БЖ и БР реакций величина $k_1 \alpha$ лежит в диапазоне $0.1 \div 10 \text{ с}^{-1}$, k_2 в диапазоне $10^6 \div 10^8 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, k_3 - в диапазоне $10^2 \div 10^4 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. Модель (1) - (5) имеет довольно общий вид и может быть применена не только к химическим реакциям, но и к биологическим и физическим процессам.

1. Модель клеточного автомата

Клеточные автоматы являются дискретными динамическими системами, состоящими из регулярной сети одинаковых ячеек. Каждая ячейка характеризуется некоторым дискретным набором величин, изменяющимся по заданным правилам на каждом дискретном временном шаге [22]. Эти правила не меняются со временем. Чтобы отразить случайный характер протекания реакций на мезоскопическом уровне, мы используем вероятностные КА, в которых правила перехода каждой ячейки в новое состояние задаются не детерминистически, а с помощью соответствующих вероятностей.

Наша модель КА задается на двумерной решетке, состоящей из $N_0 = N \times N$ ячеек, где N - натуральное число. Каждая i -я ячейка характеризуется тремя целыми числами $\{x_i, y_i, S_i\}$, где x_i, y_i - целочисленные координаты, $1 \leq x, y \leq N$, S_i - состояние ячейки. Несмотря на то, что система (1) - (5) описывается двумя переменными, $[A]$ и $[In]$, для упрощения вычислений мы характеризуем состояния ячеек одной переменной S , которую мы связываем соотношением между концентрациями $[A]$ и $[In]$: чем больше S , тем больше $[A]$ и тем меньше $[In]$. Для удобства моделирования турбулентных пульсаций на различных пространственных масштабах мы положили N равным целой степени числа 2, $N = 2^8$. В модели КА на мезоскопическом уровне мы промоделировали независимо три процесса: турбулентное перемешивание, молекулярную диффузию и химические реакции (1) - (5).

Моделирование турбулентности. Турбулентное движение можно рассматривать как результат наложения турбулентных пульсаций (хаотических перемещений масс жидкости) различных масштабов [23]. При малых числах Рейнольдса (Re) в системе существуют только крупномасштабные пульсации, соизмеримые с размером всей системы. По мере возрастания числа Рейнольдса появляются все более и более мелкие пульсации.

Чтобы учесть турбулентные пульсации различных масштабов, мы определили на базовой решетке размера $N \times N$ подмножества $\lambda_n \times \lambda_n$, представляющие собой квадратные решетки со стороной $\lambda_n = 2^n$, где $n = 1, 2, \dots, n_{\max} - 1$, ($n_{\max} = 8$), при этом целочисленные координаты (a_k, b_k) угла решетки-подмножества должны удовлетворять условиям $1 \leq a_k, b_k \leq N - \lambda_n$. Турбулентное движение масштаба λ_n моделировалось путем случайного выбора N_n раз решеток размера $\lambda_n \times \lambda_n$ и случайной перестановки составляющих их четырех квадрантов. Числа N_n были подобраны так, чтобы скорость перемещения элемента жидкости для каждого масштаба движения удовлетворяла закону Колмогорова - Обухова [23]. В нашем случае элемент жидкости представлен ячейкой, а скорость его перемещения определяется средним расстоянием, которое проходит ячейка за единичный отрезок времени. Исходя из этого, мы получили, что $N_n \cong 2^{8(7-n)/3}$.

Увеличение интенсивности перемешивания моделировалось последовательным добавлением новых масштабов λ_n турбулентного движения от $n = 7$ до $n = 1$. Таким образом, интенсивность перемешивания, характеризуемая числом $M = n_{\max} - n$, определялась в нашей модели числом «включенных» движений различных масштабов. Например, интенсивность перемешивания, характеризуемая числом $M = 3$, соответствовала случаю, когда на каждом временном шаге последовательно выполнялись операции турбулентного перемешивания на случайно выбираемых решетках размера $2^7, 2^6$ и 2^5 .

В результате вышеописанного моделирования турбулентности, не влияющего на состояния ячеек S , меняется их взаимное расположение, но при этом некоторое время сохраняется корреляция в расположении ячеек друг относительно друга. Это означает, что система обладает памятью, которая тем больше, чем меньше моделируемая интенсивность перемешивания. При слабом перемешивании вероятность расхождения соседних ячеек на значительное

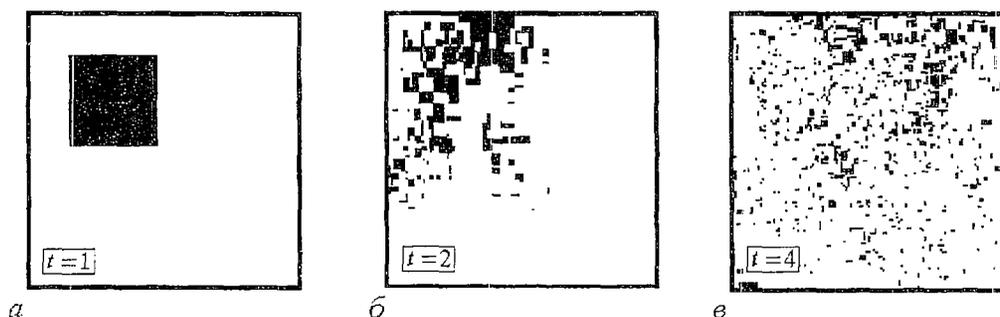


Рис. 1. Картинки базовой решетки при перемешивании черного квадрата размером 80×80 элементарных ячеек в отсутствие диффузии ($ND = 0$) для интенсивности перемешивания, характеризуемой числом $M = 5$, в моменты времени $t = 1, t = 2, t = 4$

расстояние весьма мала и корреляция в пространственном расположении ячеек высока. Нулевая корреляция соответствует бесконечно большой интенсивности перемешивания.

Так как моделирование турбулентности с помощью КА производится впервые, то мы сочли оправданным показать картинки турбулентного перемешивания окрашенного квадрата размером 80×80 элементарных ячеек для 5-го уровня перемешивания. На рис. 1 видно, что после четырех временных шагов черный квадрат разбивается на множество мелких фрагментов, заполняющих все пространство.

Моделирование диффузии. Очевидно, что моделирование молекулярной диффузии в КА должно представлять собой обмен содержимым между соседними ячейками. Соседними в нашем случае называются 4 клетки, имеющие общие грани с одной центральной клеткой. Пусть в некоторый момент времени t две соседние клетки находятся в состояниях S_1 и S_2 . Чтобы промоделировать диффузию, нам необходимо найти вероятность $W(S_1, S_2 | S'_1, S'_2)$ того, что в момент времени $t+1$ состояния этих клеток будут S'_1 и S'_2 , соответственно, при условии, что $S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2$. Если в пределе $t \rightarrow \infty$ любое начальное распределение числа клеток по состояниям S в результате моделируемой диффузии будет стремиться к равновесному распределению, то мы будем считать, что вероятность $W(S_1, S_2 | S'_1, S'_2)$ выбрана правильно. Так как при реализации процесса диффузии на компьютере состояние клетки не может принимать сколь угодно большое значение, то равновесное распределение должно быть не пуассоновским, а биномиальным.

В качестве модели диффузии мы взяли модель массообмена между каплями нанометрового размера [24], согласно которой число частиц в двух каплях после их соударения изменяется не более чем на 1 (одношаговый процесс). Следуя этой модели, мы определили вероятность $W_-(S_1, S_2)$ того, что после контакта двух клеток состояние S_1 уменьшится на 1, а состояние S_2 увеличится на 1:

$$W_-(S_1, S_2) = W(S_1, S_2 | S_1 - 1, S_2 + 1) = (S_1 / (S_1 + S_2)) (1 - S_2 / S_{\max}). \quad (6a)$$

А вероятность $W_+(S_1, S_2)$ обратного процесса определили аналогичным соотношением

$$W_+(S_1, S_2) = W(S_1, S_2 | S_1 + 1, S_2 - 1) = [S_2 / (S_1 + S_2)] (1 - S_1 / S_{\max}). \quad (6b)$$

Использование этого закона массообмена приводит в пределе $t \rightarrow \infty$ к равновесному биномиальному распределению числа клеток по состояниям.

Интенсивность диффузии определялась числом $ND \times N_0$ случайно выбираемых пар соседних клеток за единичный отрезок времени, ND варьировали от 1 до 2, что статистически обеспечивало взаимодействие каждой ячейки со всеми смежными с ней ячейками.

Моделирование химических реакций. Для моделирования химических реакций в ячейках мы задавали вероятности увеличения $W_+(S)$ и уменьшения $W_-(S)$ состояния ячейки S на 1, $0 \leq W_+(S) \leq 1$, $0 \leq W_-(S) \leq 1$. Пробовались различные виды функций $W_+(S)$ и $W_-(S)$, при этом основным критерием отбора этих функций было условие, чтобы они моделировали кинетику $[A]$ и $[In]$ в реакциях (1) - (3), и наличие некоторого критического состояния S_{cr} . При $S < S_{cr}$ в ячейке должна преобладать реакция аннигиляции (2), то есть $W_+(S) < W_-(S)$, а при $S_{cr} < S$ должна доминировать реакция автокатализа (1), то есть $W_-(S) < W_+(S)$. Если состояние i -ой ячейки равнялось максимально допустимому значению S_{max} , то полагали, что $W_+(S) = 0$. В некоторой степени это моделировало реакцию (3) ограничения роста активатора.

Реакции (4) - (5) моделировались некоторыми постоянными вероятностями W_+ и W_- , не зависящими от состояния ячейки S ,

$$W_+ = N_1/N_0 < 1, \quad W_- = N_2/N_0 < 1. \quad (7)$$

Числа N_1 и N_2 определяют количество случайно выбираемых ячеек, в которых состояние S увеличивается или уменьшается на 1 в результате работы источников активатора и ингибитора, соответственно, $N_1/N_2 = C_1/C_2$.

Платой за простоту данной модели КА является отсутствие конкретных масштабов времени и расстояния. Ни временной шаг, ни размер элементарной ячейки не заданы какими-либо определенными соотношениями. Можно лишь приблизительно оценить эти масштабы, используя константы скоростей реакций (1) - (5) и некоторые приближенные соотношения. Положим, что при переходе системы в состояние (II), когда $[A] \gg [In]$, состояние элементарной ячейки S отождествляется с числом частиц активатора в этой ячейке. Если объем ячейки определить как V_c , то можно записать, что $[A]_{max} V_c N_A = S_{max}$, где N_A - число Авогадро. Из реакций (1) и (3) следует, что $[A]_{max} \cong k_1 \alpha / (2k_3)$. Отсюда можно найти размер ячейки l_c как

$$l_c = (V_c)^{1/3} \cong [2k_3 S_{max} / (k_1 \alpha N_A)]^{1/3}. \quad (8)$$

Принимая, например, что $S_{max} = 20$, $k_3 = 10^3$ л·моль⁻¹·с⁻¹, $k_1 \alpha = 1$ с⁻¹, из (8) находим, что $l_c \cong 0.1$ мкм.

Для оценки временного шага τ можно воспользоваться соотношением между вероятностью $W_+(S)$ и константой экспоненциального роста активатора $W_+(S) \cong \cong k_1 \alpha S \tau$. Полагая, что при $S = S_{max}$ вероятность $W_+(S)$ равна 1, находим, что

$$\tau \cong 1 / (k_1 \alpha S_{max}). \quad (9)$$

При $S_{max} = 10$, $k_1 \alpha = 1$ с⁻¹ из (9) находим, что $\tau \cong 0.1$ с. Другие соотношения и допущения приведут к иным величинам l_c и τ .

Реализация всех вероятностных процессов осуществлялась следующим образом. Для каждой ячейки и для каждой пары соседних ячеек (в случае моделирования диффузии) вычислялись соответствующие вероятности $W_{\pm}(S)$, W_{\pm} и $W(S_1, S_2)$. Далее, для каждого числа W и для каждой из 2^{16} ячеек с помощью генератора случайных чисел выбрасывались случайные числа $\theta \in [0, 1]$. Если выполнялось неравенство $\theta < W$, то соответствующий данной вероятности W процесс реализовался, если нет, то все оставалось без изменений.

За один временной шаг мы моделировали последовательно молекулярную диффузию, химические реакции, включая генерацию молекул активатора и ингибитора, и турбулентное перемешивание. Затем данная последовательность повторялась на следующем временном шаге. В ходе компьютерного эксперимента мы следили за функцией распределения $p(S)$ ячеек по состояниям S , за средним

мы следили за функцией распределения $p(S)$ ячеек по состояниям S , за средним состоянием ячеек $\langle S \rangle$, за дисперсией σ^2 и за скоростью V изменения среднего значения $\langle S \rangle$.

$$p(S) = N(S)/N_0, \quad (10)$$

$$\langle S \rangle = \sum_{S=S_{\min}}^{S_{\max}} S p(S), \quad (11)$$

$$\sigma^2 = \sum_{S=S_{\min}}^{S_{\max}} (S - \langle S \rangle)^2 p(S), \quad (12)$$

$$V = \sum_{S=S_{\min}}^{S_{\max}} [W_+(S) - W_-(S)] p(S) + W_+ - W_-, \quad (13)$$

где $N(S)$ - количество ячеек с данным состоянием S или гистограмма.

2. Результаты и обсуждение

Если в качестве функций $W_+(S)$ и $W_-(S)$ использовать функции

$$W_+(S) = 1/[1 + \exp(2 + S_{cr} - S)], \quad (14a)$$

$$W_-(S) = 1/[1 + \exp(2 + 2(S - S_{cr}))], \quad (14b)$$

то типичные кинетические кривые, получающиеся в данном случае для различных интенсивностей перемешивания, можно видеть на рис. 2. После индукционного периода T_{ind} наступает стадия быстрого экспоненциального подъема, сменяющаяся линейным ростом $\langle S \rangle$, вслед за чем система достигает своего предельного значения S_{max} . Такая зависимость $\langle S \rangle$ от времени в точности соответствует кинетике, наблюдаемой в лабораторном эксперименте в БЖ и в БР реакциях.

На рис. 3 представлены зависимости индукционного периода T_{ind} от интенсивности перемешивания M при различных числах ND , характеризующих коэффициент молекулярной диффузии. Как видно из рис. 3, в некоторых случаях

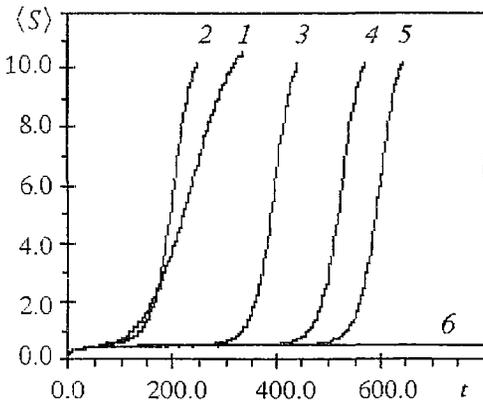


Рис. 2. Кинетические кривые роста $\langle S \rangle$ для различных интенсивностей перемешивания M . Условия: $ND = 2$, $W_+ = 1/5$, $W_- = 1/7$, функции $W_{\pm}(S)$ определены соотношениями (14), $S_{cr} = 2$, $\langle S \rangle_0 = S_{\min} = 0$, $S_{\max} = 11$, $M = 1$ (кривая 1), $M = 2$ (кривая 2), $M = 4$ (кривая 3), $M = 5$ (кривая 4), $M = 6$ (кривая 5). Для кривой 6 $ND = 1.2$, $W_+ = 13/70$, $W_- = 11/70$, $M = 3$. Время t измеряется числом временных шагов, равных одному машинному циклу

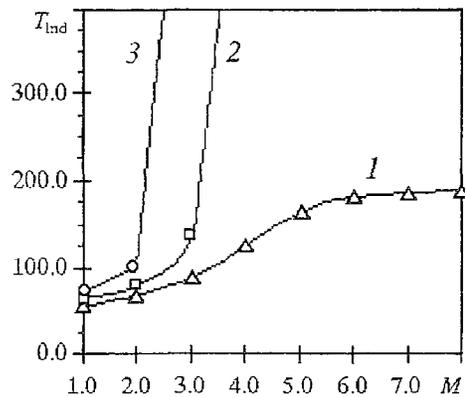


Рис. 3. Зависимости индукционного периода T_{ind} от интенсивности перемешивания M . Условия: $W_+ = 13/70$, $W_- = 11/70$; функции $W_{\pm}(S)$ определены соотношениями (14), $S_{cr} = 2$, $\langle S \rangle_0 = S_{\min} = 0$, $S_{\max} = 20$, $ND = 1$ (кривая 1), $ND = 1.1$ (кривая 2); $ND = 1.2$ (кривая 3)

зависимость T_{ind} от M выходит на некоторый стационарный уровень (кривая 1), а в других случаях, при более высоких значениях ND , устремляется в бесконечность (кривые 2 и 3). Это означает, что с ростом коэффициента диффузии или с ростом интенсивности перемешивания переход (I) \rightarrow (II) не происходит вовсе, и система (1) - (5) остается в состоянии (I), когда $[In] \gg [A]$ и когда $[In] > [In]_{cr} = k_1\alpha/k_2$. Для нашей модели это означает, что $\langle S \rangle < S_{cr}$. Кривая б на рис. 2 иллюстрирует именно этот случай.

Варьируя другие параметры системы, такие как разность вероятностей ($W_+ - W_-$) или их сумма ($W_+ + W_-$), можно также добиться изменения величины эффекта перемешивания. С уменьшением разности ($W_+ - W_-$) при ($W_+ + W_-$) = const, а также с ростом ($W_+ + W_-$) при ($W_+ - W_-$) = const эффект перемешивания, определяемый как отношение максимального значения T_{ind} к минимальному, увеличивается. Это подтверждает нашу гипотезу [21] о том, что эффект перемешивания тем больше, чем медленнее система проходит через критическую точку S_{cr} и чем выше амплитуда внутренних флуктуаций системы. Действительно, чем меньше разность ($W_+ - W_-$), тем больше индукционный период T_{ind} и тем медленнее при прочих равных условиях система приближается к $\langle S \rangle = S_{cr}$. Чем больше сумма ($W_+ + W_-$) при ($W_+ - W_-$) = const, тем выше дисперсия σ^2 , эквивалентная амплитуде шума. Относительно дисперсии σ^2 и распределения $p(S)$ следует заметить, что чем выше интенсивность перемешивания, тем ближе $p(S)$ к биномиальному распределению, тем меньше σ^2 . При низком же уровне перемешивания распределение $p(S)$ имеет в переходные моменты (когда $\langle S \rangle \approx S_{cr}$) двугорбую форму.

Величина эффекта перемешивания зависит также от начального распределения ячеек по состояниям и, естественно, от вида функций $W_+(S)$ и $W_-(S)$. Чтобы получить некоторые представления о том, какой должен быть вид функций $W_+(S)$ и $W_-(S)$ для существования эффекта перемешивания, мы определили зависимость $\langle S \rangle_{t+1}$ от $\langle S \rangle_t$ через эти функции, где $\langle S \rangle_t$ - это значение $\langle S \rangle$ в момент времени t . Для одношагового процесса число ячеек с состоянием S может изменяться в результате реакций, протекающих с вероятностью $W(S)$ в ячейках с состояниями $S, S-1$ и $S+1$. Элементарные расчеты показывают, что

$$\langle S \rangle_{t+1} / \langle S \rangle_t = 1 + V / \langle S \rangle_t, \quad (15)$$

где V определяется формулой (13). Из вида формулы (15) следует, что только в двух случаях перемешивание *a priori* не в состоянии повлиять на зависимость $\langle S \rangle_{t+1}$ от $\langle S \rangle_t$. Во-первых, это случай, когда $W(S) = \text{const}$, при котором $V = \text{const}$, а во-вторых, это случай, когда $W(S) = \text{const} \cdot S$, при котором $V = \text{const} \cdot \langle S \rangle + \text{const}$. В обоих этих случаях распределение $p(S)$ не входит в зависимость $\langle S \rangle_{t+1}$ от $\langle S \rangle_t$. Перемешивание же в сочетании с диффузией может влиять лишь на $p(S)$. В остальных случаях распределение $p(S)$ входит в зависимость $\langle S \rangle_{t+1}$ от $\langle S \rangle_t$, и перемешивание может, в принципе, влиять на скорость V и, следовательно, на динамику всего процесса. Из этого следует, что эффект перемешивания возможен только для нелинейных функций $W(S)$. Компьютерные эксперименты показали, что если положить $W_-(S) = 0$, то для функций $W_+(S)$ вида $W_+(S) = \text{const} \cdot (S/S_{max})^k$ эффект перемешивания при прочих равных условиях растет с ростом показателя k , то есть с ростом нелинейности. В таких экспериментах вид зависимостей $\langle S \rangle$ от времени t практически идентичен виду кинетических кривых, представленных на рис. 2.

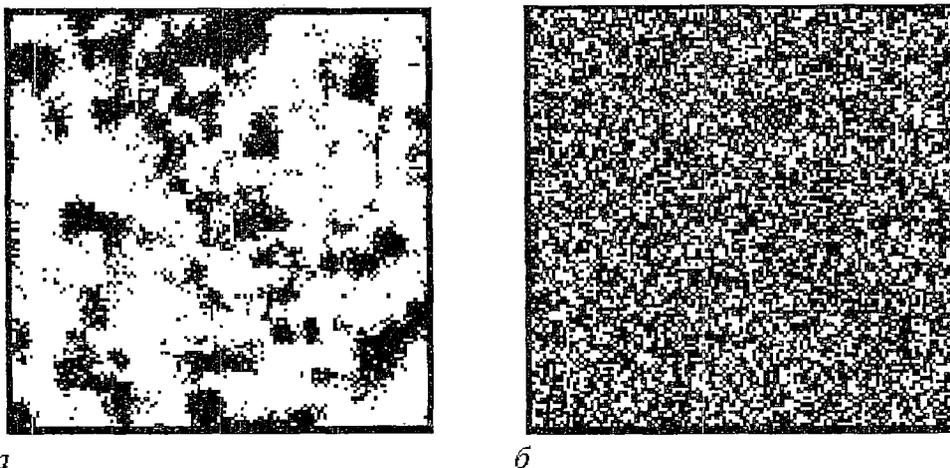


Рис. 4. Картинки базовой решетки размера 256×256 во время (I) \rightarrow (II) перехода для двух интенсивностей перемешивания при $\langle S \rangle = 3$. $M = 3$ (а), $M = 7$ (б). В темный цвет окрашены клетки с $S > 2$. Условия: $S_{cr} = 2$, $ND = 2$, $W_+ = 1/5$, $W_- = 1/7$, $\langle S \rangle_0 = S_{min} = 0$, $S_{max} = 100$

В заключение мы хотели бы привести картинку нашей решетки в момент прохождения системой некоторого значения $\langle S \rangle$, близкого к S_{cr} , для двух разных интенсивностей перемешивания. Из рис. 4,а видно, что при малых интенсивностях перемешивания во время (I) \rightarrow (II) перехода образуются кластеры клеток с высокими значениями S (изображены темным цветом). Эти кластеры могут быть названы зародышами фазы (II). По мере роста интенсивности перемешивания размер этих кластеров уменьшается и картинка становится мелкозернистой (рис. 4,б), отражая равновесное биномиальное распределение ячеек по состояниям. Рис. 4,а может послужить объяснением неудачных попыток промоделировать эффект перемешивания, используя уравнения для средних значений. Действительно, при $\langle S \rangle = 3$ на решетке, изображенной на рис. 4, а, можно найти крайне мало клеток, находящихся в состоянии $S = 3$. И напротив, очень много клеток с $S = 0$ и $S = 1$, в которых преобладает реакция аннигиляции активатора с ингибитором, и много клеток с $S > 4$, в которых преобладает реакция автокатализа. При таких обстоятельствах описывать кинетику процесса на основе законов для средних не имеет смысла.

Выводы

Модель КА позволила описать основные экспериментальные факты: S -образную зависимость индукционного периода от интенсивности перемешивания и зависимость величины эффекта перемешивания от скорости приближения системы к критической точке. Результаты, полученные на данной модели, подтверждают представление о протекании неравновесного фазового перехода, описываемого реакциями (1) - (5), по механизму зародыщеобразования. Как показывает проведенное нами численное моделирование, турбулентное перемешивание влияет на распределение числа молекул по микрообъемам, на амплитуду флуктуаций (на дисперсию), а также на размер образующихся зародышей. Предложенная нами модель КА с турбулентным перемешиванием ячеек может быть полезна при моделировании наиболее сложных задач типа «реакция - диффузия - конвекция».

Исследование, описанное в данной публикации, стало возможным отчасти благодаря гранту МСЗОО Международного научного фонда и отчасти благодаря гранту 93-03-4090 Российского фонда фундаментальных исследований.

Библиографический список

1. *Hlavacova J., Sevcik P.* Coherence between the stirring effects in bimolecular reactions and the Belousov - Zhabotinsky reaction in the closed batch reactor // *J. Phys. Chem.* 1994. Vol. 98. P. 6304.
2. *Deering W. D., West B. J.* A model of turbulent mixing in the $A + B \rightarrow 0$ reaction // *J. Statistical Physics.* 1991. Vol. 65. P. 1247.
3. *Epstein I. R.* The consequences of imperfect mixing in autocatalytic chemical and biological systems // *Nature.* 1995. Vol. 374. P. 321.
4. *Noszticzius Z., Bodnar Z., Garamszegi L., Wittmann M.* Hydrodynamic turbulence and diffusion-controlled reactions. Simulation of the effect of stirring on the oscillating Belousov - Zhabotinsky reaction with the Radicalator model // *J. Phys. Chem.* 1991. Vol. 95. P. 6575.
5. *Ruoff P.* Excitations induced by fluctuations: An explanation of stirring effects and chaos in closed anaerobic classical Belousov - Zhabotinsky systems // *J. Phys. Chem.* 1993. Vol. 97. P. 6411.
6. *Menzinger M., Jankowski P.* Concentration fluctuations and stirring effects in the Belousov - Zhabotinsky reaction // *J. Phys. Chem.* 1990. Vol. 94. P. 4123.
7. *Ванаг В. К., Айтм А. О.* Влияние перемешивания на фотоиндуцированный кинетический фазовый переход в реакции Бриггса - Раушера в условиях непроточного реактора // *ЖФХ.* 1993. Т. 67, № 11. С. 2246.
8. *Epstein I. R.* // *Nature.* 1990. Vol. 346. P. 16.
9. *De Kepper P., Boissonade J.* // *Fluctuations and Sensitivity in Nonequilibrium Systems* / Eds W. Horsthemke, D. K. Kondepudi. Berlin: Springer. 1984.
10. *Vanag V. K., Alfimov M. V.* Effects of stirring on photoinduced phase transition in a batch-mode Briggs - Rauscher reaction // *J. Phys. Chem.* 1993. Vol. 97. P. 1884.
11. *Lopez-Tomas L., Sagues F.* New features of stirring sensitivities of the Belousov - Zhabotinsky reaction // *J. Phys. Chem.* 1991. Vol. 95. P. 701.
12. *Sagues F., Sancho J. M.* A Langevin approach to the macroscopic stochasticity of chemical systems // *J. Chem. Phys.* 1988. Vol. 89. P. 3793.
13. *Puhl A., Altares V., Nicolis G.* Imperfect turbulent mixing in chemical reactors: Coupling between chemical and hydrodynamical modes // *Phys. Rev.* 1988. Vol. 37. P. 3039.
14. *Horsthemke W., Hannon L.* Nonequilibrium chemical instabilities in continuous flow stirred tank reactor: The effect of stirring // *J. Chem. Phys.* 1984. Vol. 81. P. 4363.
15. *Taguchi Y.-H., Takayasu H.* A new mesoscopic scale model for simulating fluid turbulence: the lattice vortex tube model // *Physica D.* 1993. Vol. 69. P. 366.
16. *Crutchfield J. P., Hanson J. E.* // *Physica D.* 1993. Vol. 69. P. 279.
17. *Oono Y., Kohmoto M.* // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. P. 2927.
18. *Малинецкий Г. Г., Шакаева М. С.* Клеточные автоматы в математическом моделировании колебательных химических реакций на поверхности // *ЖФХ.* 1995. Т. 69, №8. С. 1523.
19. *Gerhardt M., Schuster K., Tyson J. J.* // *Science.* 1990. Vol. 247. P. 1563.
20. *Колебания и бегущие волны в химических системах* / Под ред. Р. Филда и М. Бургер. М.: Мир, 1988.
21. *Vanag V. K., Melikhov D. P.* Asymmetrical concentration fluctuations in the autocatalytic bromate-bromide-catalyst reaction and in the oscillatory Belousov - Zhabotinsky reaction in closed reactor: stirring effects // *J. Phys. Chem.* 1995. Vol. 99.
22. *Theory and Applications of Cellular Automata* / Ed. S. Wolfram. Singapore: World Scientific. 1987.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. Изд. 4-е, стер. М.: Наука, 1988.
24. *Tachiya M.* // *Kinetics of Nonhomogeneous Processes. Chapter II* / Ed. G. R. Freeman. Wiley. 1987. P.588.

Институт химической физики
им. Н.Н.Семенова, РАН

Поступила в редакцию 14.12.95
после переработки 15.08.96

MODELLING MIXING PHENOMENON IN AUTOCATALYTIC REACTION BY PROBABILITY CELLULAR AUTOMAT

V. K. Vanag, A. Yu. Virchenko, K. V. Vanag

A probability cellular automaton is suggested for modeling the stirring effect in an autocatalytic multiplication of activator at the presence of inhibitor. The probability cellular automaton model simulates turbulent stirring, molecular diffusion, and chemical reactions. The probability cellular automaton model allows us to describe the experimental dependence of the induction period of autocatalytic reaction on stirring intensity (stirring effect). The hypothesis about the increasing the magnitude of the stirring effect with the slowing down the rate of the system approach to the critical point is confirmed. It is shown that the stirring effect is connected with the emergence of the microheterogeneities (nuclei), with the nonlinearity of chemical reactions, and with the effect of turbulent stirring rate on the magnitude of fluctuations in reagent concentrations.



Ванаг Владимир Карлович родился в 1954 году. После окончания физического факультета МГУ (1977) работает в ИХФ РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1985) по теме «Влияние магнитных полей на ферментативные реакции». Ведущий научный сотрудник ИХФ РАН, автор 40 научных статей. Последние 5 лет занимается влиянием флуктуаций на нелинейные химические реакции.



Вирченко Антон Юрьевич родился в 1977 году, студент 2-го курса факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, призер международных олимпиад по программированию, соросовский стипендиат.



Ванаг Константин Владимирович родился в 1977 году, студент 2-го курса физического факультета МГУ, соросовский стипендиат.



МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ДНК

Л.В. Якушевич

Молекула ДНК рассматривается как существенно нелинейная динамическая система. Приводятся основные элементы математического моделирования ее нелинейных свойств и два примера построения моделей.

Молекула ДНК, имеющая форму двойной спирали, - одна из самых интересных и загадочных молекул биологии. Данные о структурной организации молекулы, первоначально полученные авторами работы [1], неоднократно дополнялись и уточнялись в последующие годы [2]. Было показано, что наряду со структурой [1], названной *B*-формой ДНК, существуют и другие структурные формы молекулы: *A*-форма, *Z*-форма и т.д. Многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что ни одна из этих форм не является жестко фиксированной. Напротив, отдельные атомы и атомные группы, представляющие основные элементы структуры - основания, сахара, фосфатные группы - находятся в постоянном движении и общая картина внутренней подвижности молекулы ДНК довольно сложна [3, 4]. Кроме небольших колебаний атомов и атомных групп вблизи положений равновесия, возможны внутренние движения большой амплитуды, связанные с раскрытием пар оснований, локальным расплетанием двойной спирали, локальными переходами между разными формами ДНК и т.д. Зачастую эти движения играют важную роль, как необходимые элементы для осуществления биологической функции ДНК.

В настоящей работе рассматриваются основные элементы математического моделирования внутренних движений большой амплитуды: 1) отбор основных, доминантных движений, характеризующих внутреннюю подвижность ДНК; 2) поиск механического аналога с таким же набором движений и взаимодействий; 3) составление нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эти движения, и их решение; 4) интерпретация полученных решений в терминах внутренней динамики ДНК.

В качестве примеров, иллюстрирующих вышесказанное, приведены алгоритмы построения двух простейших математических моделей, имитирующих движения большой амплитуды в ДНК. Оба алгоритма основаны на результатах, полученных в работах [5] по созданию механического аналога нелинейного синус-уравнения Гордона и [6] по моделированию вращательных движений оснований в ДНК.

Алгоритм построения первой модели

1. Отбор внутренних движений. Так как общая картина внутренней подвижности очень сложна, ее полное математическое описание хотя и возможно, все же представляется чрезвычайно громоздким. Поэтому построение математической модели внутренней динамики ДНК обычно начинают с упрощения общей картины движений. С этой целью проводят отбор основных, наиболее важных в функциональном отношении движений. Разнообразие подходов к такому отбору, а также разнообразие используемых при этом аппроксимаций приводят к довольно большому числу нелинейных моделей (см. обзоры [7, 8]). В данном примере для упрощения общей картины движений мы ограничимся рассмотрением только одного типа внутренней подвижности, а именно, вращательных движений оснований.

2. Поиск механического аналога. На этом этапе необходимо установить аналогию между упрощенной картиной внутренней подвижности ДНК и какой-либо известной и хорошо разработанной математической или физической моделью. В случае ДНК такая аналогия была найдена авторами [6]. В качестве аналога была использована механическая модель, разработанная А.Скоттом [5] в 1969 году для визуальной демонстрации распространения нелинейных волн. Модель представляла собой длинную горизонтальную нить, на которой подвешены на равном расстоянии a друг от друга крутильные маятники одинаковой массы m и одинаковой длины l .

Аналогия между ДНК и моделью Скотта основывалась на сходстве между вращательными движениями оснований ДНК и вращательными колебаниями маятников, между упругостью сахаро-фосфатной цепочки одной из двух полинуклеотидных цепей ДНК и упругостью горизонтальной нити, на которой подвешены маятники, между действием поля, наводимого второй полинуклеотидной цепью ДНК, и действием гравитационного поля в механической модели.

3. Математическое описание. Движение произвольного n -го маятника в механической модели определяется уравнением

$$ml^2\ddot{\varphi}_n = Kl^2(\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}) - mgl\sin\varphi_n, \quad (1)$$

где $\varphi_n(t)$ - угловое отклонение n -го маятника, K - жесткость горизонтальной нити, g - гравитационная постоянная; $n=1,2,\dots,N$. Сделав обычное предположение о том, что искомые решения уравнения (1) представляют собой плавно меняющиеся функции, перепишем уравнение (1) в континуальном приближении

$$I\varphi_{zz} = Kl^2a^2\varphi_{zz} - mgl\sin\varphi, \quad (2)$$

где $I=ml$. Воспользовавшись теперь стандартной процедурой, приведем уравнение (2) к каноническому виду

$$\varphi_{zz} - \varphi_{TT} = \sin\varphi, \quad (3)$$

где $Z=[mg/(Kla^2)]^{1/2}z$; $T=(g/l)^{1/2}t$. Уравнение (3) называют в математической литературе синус-уравнением Гордона, а механическую модель, предложенную А.Скоттом, - механическим аналогом синус-уравнения Гордона.

Среди решений уравнения (3) наиболее интересными для приложений являются решения, имеющие форму кинка и антикинка [9]

$$\varphi_{\text{кинк, антикинк}}(Z,T) = 4\arctg\{\exp\pm[(1-v^2)^{-1/2}(Z-vT-Z_0)]\}, \quad (4)$$

где v - скорость перемещения кинка, Z_0 - произвольная константа.

4. Интерпретация решений. Легко установить аналогию между упрощенной картиной внутренней подвижности ДНК, описанной в пункте 1, и механической моделью Скотта, описанной в пункте 2. Для этого достаточно сравнить основные структурные элементы, их взаимодействия и движения в обеих системах. В ДНК роль маятников играют основания, роль горизонтальной нити - одна из сахаро-фосфатных цепей, а роль внешнего гравитационного поля - поле, наводимое второй полинуклеотидной цепью, взаимодействующей с первой через водородные связи. В таком случае можно утверждать, что крутильные движения маятников в механической модели и вращательные движения оснований в ДНК должны описываться одним и тем же уравнением (3), а соответствующие решения в виде кинков и антикинков (4) могут быть интерпретированы как локальные конформационные возмущения, движущиеся вдоль ДНК [6].

Алгоритм построения второй модели

1. Отбор внутренних движений. Предположим, что вторая модель отличается от первой только более точным описанием вращательных движений оснований ДНК. Такое уточнение легко выполнить, если учесть вращательные движения оснований как в первой, так и во второй цепях ДНК.

2. Поиск механического аналога. Формально механический аналог второй модели можно получить, заменив гравитационное поле в модели Скотта второй цепочкой маятников и добавив поперечные пружинки, имитирующие слабое взаимодействие между маятниками разных цепочек.

3. Математическое описание. Движение произвольного n -го маятника 1-й цепочки будет определяться уравнением

$$I\ddot{\varphi}_{n,1} = Kl^2(\varphi_{n+1,1} - 2\varphi_{n,1} + \varphi_{n-1,1}) - kl^2[2\sin\varphi_{n,1} - \sin(\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2})], \quad (5)$$

а движение n -го маятника 2-й цепочки - уравнением

$$I\ddot{\varphi}_{n,2} = Kl^2(\varphi_{n+1,2} - 2\varphi_{n,2} + \varphi_{n-1,2}) - kl^2[2\sin\varphi_{n,2} - \sin(\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2})]. \quad (6)$$

Перепишывая уравнения (5), (6) в континуальном приближении, получим искомую математическую модель в виде

$$I\ddot{\varphi}_{1,z} = Kl^2a^2\varphi_{1,z} - kl^2[2\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (7)$$

$$I\ddot{\varphi}_{2,z} = Kl^2a^2\varphi_{2,z} - kl^2[2\sin\varphi_2 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (8)$$

Хотя нелинейные уравнения типа (7), (8) были получены во многих работах [8,10-15], полное исследование их решений пока провести не удалось. Однако было показано, что среди частных решений, найденных авторами [16-19], а также Neurga Kintego*, существуют солитонные решения в виде пар: кинк-кинк, кинк-антикинк, антикинк-кинк и антикинк-антикинк [16].

4. Интерпретация решений. Сравним механическую модель, описанную в предыдущем пункте, и упрощенную динамическую модель ДНК, описанную в пункте 1. Легко убедиться, что эти две модели действительно аналогичны. Причем в ДНК роль маятников по-прежнему будут играть основания, роль двух горизонтальных нитей - сахаро-фосфатные цепочки, а роль поперечных

* Частное сообщение.

пружинок - водородные связи между основаниями внутри пар. Следовательно, можно утверждать, что уравнения (7), (8) описывают не только динамику вращательных движений в механической системе, но и вращательную динамику оснований ДНК. Однако в отличие от первого примера, это описание является более точным.

В заключение следует отметить, что с появлением достаточно мощных компьютеров появилась возможность моделировать нелинейное поведение механических систем на экране компьютеров. Это позволяет облегчить выполнение пунктов 2 и 3 алгоритмов моделирования. Такая возможность была успешно использована недавно в работе [20].

Библиографический список

1. *Watson J.D., Crick F.N.C.* Molecular structure of nucleic acids. A structure for deoxyribose nucleic acid // *Nature*. 1953. Vol. 171. P. 737.
2. *Зенгер В.* Принципы структурной организации нуклеиновых кислот. М.: Мир, 1987.
3. *McCammon J.A., Harvey S.C.* Dynamics of Proteins and Nucleic Acids. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
4. *Якушевич Л.В.* Динамика ДНК // Молекулярная биология. 1989. 23. 652.
5. *Scott A.C.* Nonlinear Klein - Gordon equation // *Am. J. Phys.* 1969. Vol. 37. P. 52.
6. *Englander S.W., Kallenbach N.R., Heeger A.J., Krumhansl J.A., Litwin S.* Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1980. Vol. 77. P. 7222.
7. *Yakushevich L.V.* Nonlinear dynamics of biopolymers: theoretical models, experimental data // *Quart. Rev. Biophys.* 1993. Vol. 26. P. 201.
8. *Yakushevich L.V.* Nonlinear dynamics: hierarchy of the models // *Physica D*. 1994. Vol. 79. P. 77.
9. *Scott A.C., Chu F.Y., McLaughlin D.W.* The soliton: a new concept in applied science // *Proc. IEEE*. 1973. Vol. 61. P. 1443.
10. *Yomosa S.* Solitary excitations in deoxyribonucleic acid (DNA) double helices // *Phys. Rev. A*. 1984. Vol. 30. P. 474.
11. *Takeo S., Homma S.* Topological solitons and modulated structure of bases in DNA double helices // *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 70. P. 308.
12. *Homma S., Takeo S.* A coupled base-rotator model for structure and dynamics of DNA // *Prog. Theor. Phys.* 1984. Vol. 72. P. 679.
13. *Fedyanin V.K., Gochev I., Lisy V.* Nonlinear dynamics of bases in a continual model of DNA double helices // *Studia biophys.* 1986. Vol. 116. P. 59.
14. *Fedyanin V.K., Lisy V.* Soliton conformational excitations in DNA // *Studia biophys.* 1986. Vol. 116. P. 65.
15. *Zhang Ch.-T.* Soliton excitations in deoxyribonucleic acid (DNA) double helices // *Phys. Rev. A*. 1987. Vol. 35. P. 886.
16. *Yakushevich L.V.* Investigation of a system of nonlinear equations simulating DNA torsional dynamics // *Studia biophys.* 1991. Vol. 140. P. 163.
17. *Hai W.* Kink couples in deoxyribonucleic acid (DNA) double helices // *Phys. Lett. A*. 1994. Vol. 186. P. 309.
18. *Якушевич Л.В.* Известия РАН (в печати).
19. *Якушевич Л.В.* Иерархия динамических моделей ДНК // *Журнал физической химии*. 1995. Vol. 69. P. 180.
20. *Salerno M.* Discrete model for DNA-promotor dynamics // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 5292.

Институт биофизики клетки РАН
Пушкино, Московская область

Поступила в редакцию 9.10.95
после переработки 30.05.96

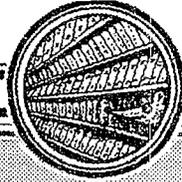
MODELING OF THE NONLINEAR DYNAMICS OF DNA

L.V. Yakushevich

The DNA molecule is considered as a nonlinear dynamic system. We discuss here one of the methods of theoretical studying the molecule, which is based on the mathematical modeling of the DNA nonlinear properties. The main points of the method and two examples illustrating its application are presented.



Якушевич Людмила Владимировна родилась в Черновцах (1947). Окончила Физический факультет Московского государственного университета (1971). После окончания МГУ работает в Институте биофизики клетки РАН. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1978) в области теоретической и математической физики. Автор монографии «Методы теоретической физики в исследованиях свойств биополимеров». Опубликовала много научных статей по нелинейной динамике биополимеров.



О. Д. ХВОЛЬСОНЪ.

заслуж. профессор
ПЕТРОГРАДСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

Вступительная лекція,
прочитанная въ началѣ
осенняго семестра 1915 г.

**ЗНАНИЕ И ВѢРА
ВЪ ФИЗИКЪ.**

Орест Данилович Хвольсон (1852-1934) по праву может считаться крестным отцом современной отечественной физики, поскольку на его пятитомном «Курсе физики», который издавался и переиздавался в течении почти сорока лет начиная с 1897 г., выросла и выучилась практически вся блестящая плеяда русских и советских физиков первой половины нашего века. Мы помещаем здесь ротاپринтное воспроизведение одной из многочисленных лекций, прочитанных Хвольсоном в Петербургском (Петроградском, Ленинградском) университете, в котором он преподавал почти 60 лет. Судя по тем выводам, которые следуют из лекции, можно только порадоваться, что к тому времени «Материализм и эмпириокритицизм» был уже написан, а внимание Владимира Ильича оказалось отвлеченным начавшейся мировой войной; иначе развитие отечественной физики могло бы пойти совершенно другим путем...

Господа,

прежде чѣмъ приступить къ чтенію лекцій по тому отдѣлу физики, который указанъ въ расписаніи вашихъ занятій, я ежегодно посвящаю одинъ или два часа какому-нибудь общему вопросу. Такъ я намѣренъ поступить и въ этомъ году.

Тема моей сегодняшней бесѣды будетъ слѣдующая: Знание и вѣра въ физикѣ. Я хочу выяснитъ, какую роль играетъ въ этой наукѣ знаніе и какую роль играетъ вѣра. Нашу бесѣду я раздѣлю на три части. Первую я посвящу разбору нѣкоторыхъ общихъ вопросовъ; вторая будетъ трактовать собственно о знаніи и вѣрѣ въ физикѣ, а третья, которую я считаю наиболѣе важной, коснется нѣкоторыхъ выводовъ изъ того, къ чему мы придемъ въ части второй.

Вопросы о томъ, что такое вѣра и знаніе, каково ихъ отношеніе другъ къ другу, гдѣ ихъ границы—это вопросы очень старые, которымъ посвящены многочисленныя работы выдающихся философовъ. Я, конечно, не стану перечислять этихъ философовъ; и не мѣсто было бы здѣсь разбирать ихъ ученія. Я укажу, въ видѣ примѣровъ, только на то, что еще въ 4-мъ столѣтіи Блаженный Августинъ писалъ объ этихъ вопросахъ; много позже, въ 13-омъ столѣтіи, надъ этими же вопросами работалъ Тома Аквинскій и Дунсъ Скотусъ; а въ болѣе близкое къ намъ время Юмъ, Кантъ, Джонъ Стюартъ Милль, Гамильтонъ и Джемсъ. Изъ русскихъ авторовъ я могу указать слѣдующихъ: П. Бакунинъ написалъ въ 1886 году статью „Вѣра и знаніе“; М. Соколовъ въ 1883 г. „Вѣра, психологическій этюдъ“. Но больше всѣхъ работалъ надъ этимъ вопросомъ нашъ профессоръ философіи, А. И. Введенскій, который напечаталъ въ 1893 г. статью „О видахъ вѣры“ и который вопросъ о знаніи и вѣрѣ подробно рассматриваетъ въ своей знаменитой „Логикѣ“.

Нѣтъ, конечно, никакой надобности входить въ анализъ различныхъ философскихъ ученій, весьма разнообразныхъ и сугубо другъ другу противорѣчащихъ. У насъ тема узкая и сравнительно простая: Знаніе и вѣра въ физикѣ. Весьма вѣроятно, что выводы,

къ которымъ мы придемъ, *mutatis mutandis*, относятся и ко многимъ другимъ наукамъ.

Съ перваго взгляда и при отсутствіи вдумчиваго отношенія къ вопросу, можетъ показаться, что знаніе и вѣра двѣ совершенно различныя области познанія, строго разграниченныя и ничего общаго между собой не имѣющія. Но стоитъ лишь немного подумать, чтобы понять, что знаніе и вѣра тѣсно переплетаются и что нѣтъ возможности, сколько-нибудь точно, опредѣлить ихъ границы.

Конечно, не трудно привести грубые примѣры чистаго знанія и чистой вѣры. Вы всѣ знаете, что сегодня суббота; вы всѣ знаете чему равняется $(a + b)^2$; вы знаете, какъ читается законъ Ома: вы знаете, что въ стеклѣ синій лучъ преломляется сильнѣе, чѣмъ красный, что магнитная стрѣлка отклоняется электрическимъ токомъ. Въ этихъ примѣрахъ чистаго знанія, вѣра не играетъ никакой роли. Наоборотъ, вѣра въ Бога, въ религиозныя догматы—вотъ случаи чистой вѣры. Но стоитъ только перейти отъ этихъ крайностей къ анализу нашихъ собственныхъ повседневныхъ переживаній, чтобы понять, какъ тѣсно между собою переплетаются знаніе и вѣра. Я не привожу доказательствъ, потому что въ нижеслѣдующемъ вы ихъ найдете въ достаточномъ числѣ.

Поверхностное разсужденіе легко можетъ привести къ наивной мысли, что наука и есть та область, въ которой знаніе столь же нераздѣльно царствуетъ, какъ вѣра въ религіи. Я постараюсь показать, что это невѣрно, что даже не такъ-то легко точно указать, гдѣ собственно въ нашей наукѣ область чистаго знанія не переплеталась бы съ вѣрой.

Не трудно дать понятіямъ о знаніи и вѣрѣ характеризующія ихъ опредѣленія. Ясно, прежде всего, что знаніе и вѣра суть частныя случаи того, что мы называемъ убѣжденіемъ или увѣренностью, которыя являются какъ бы ихъ общимъ знаменателемъ. Чѣмъ же они отличаются другъ отъ друга? Это довольно просто. Вѣра имѣетъ характеръ чисто субъективный; она покоится на основаніяхъ, достаточныхъ только въ субъективномъ отношеніи. т. е. достаточныхъ для того лица, которое вѣритъ. И нѣтъ возможности сдѣлать вѣру обязательной для другого лица. Поэтому, безразсудной и безцѣльной является всякая попытка насильно заставить кого либо вѣрить во что либо. Знаніе также связано съ субъективной увѣренностью; но въ то же время оно

понятно, обладает и объективной обязательностью, и поэтому может быть передаваемо от одного лица къ другому.

Можно было бы сказать, что знаніе относится къ достовѣрному, а вѣра къ недостовѣрному. Впрочемъ, я думаю, что это упрощенное опредѣленіе врядъ-ли выдержало бы строгій критическій анализъ.

Приступая къ нашей темѣ, я прежде всего позволю себѣ поставить такой вопросъ: не рано-ли съ вами бесѣдовать о знаніи и вѣрѣ въ физикѣ, въ виду того, что вы, простите, вѣдь очевидно еще мало знакомы съ этой наукой? Не лучше-ли отложить эту бесѣду до того времени, когда вы будете болѣе знакомы съ физикой, когда вы будете кончать университетъ? Нѣтъ, такое откладываніе не нужно, ибо я буду основываться только на томъ, что вамъ всѣмъ безусловно извѣстно. Такое откладываніе было бы вредно, ибо бесѣда черезъ четыре года, можетъ быть, оказалась бы запоздалой, и цѣль, которую я имѣю въ виду, предлагая вамъ эту бесѣду, не была бы достигнута. А цѣль эта заключается въ слѣдующемъ: я хочу оградить васъ отъ ошибочныхъ, скоропѣлыхъ выводовъ, отъ невѣрнаго толкованія матеріала науки; я хочу предупредить неправильное съ вашей стороны возвеличеніе знанія и пагубное умаленіе вѣры. Было бы смѣшно предположить, чтобы я, всю жизнь посвятившій наукѣ, сталъ умалять роль знанія. Вопли вѣ ясно и несомнѣнно, что знаніе — это свѣточъ нашей жизни, это для насъ источникъ высшихъ наслажденій; знаніе поднимаетъ насъ высоко надъ будничной жизнью, и только въ немъ мы можемъ надѣяться найти удовлетворяющіе насъ отвѣты на запросы нашего пытливаго ума, желающаго познать окружающій насъ міръ для того, чтобы хоть сколько нибудь приблизиться къ послѣдней завѣтной цѣли, къ высшей изъ всѣхъ существующихъ проблемъ, къ разгадкѣ тайны нашего собственнаго бытія. И все-таки я скажу: не слѣдуетъ преувеличивать значенія знанія и необходимо выяснитъ роль тѣсно съ нимъ связанной вѣры.

Поставимъ, прежде всего, вопросъ: откуда вообще мы беремъ знаніе, изъ какихъ источниковъ мы его черпаемъ? Такихъ источниковъ два.

Во первыхъ, существуетъ знаніе, основанное на нашемъ личномъ опытѣ, на нашихъ наблюденіяхъ. Но вы всѣ знаете, что опытъ и наблюденія могутъ быть ошибочны. Вѣдь это элементарная, всѣмъ извѣстная, прописная истина, что мы познаемъ

внѣшній міръ черезъ посредство нашихъ органовъ чувствъ; что внѣшній міръ дѣйствуетъ на наши органы чувствъ, вызывая въ нихъ опредѣленные раздраженія, которыя нами воспринимаются какъ нѣкоторыя ощущенія и затѣмъ проектируются въ пространство и времени. Иначе говоря, эти ощущенія приурочиваются къ опредѣленнымъ мѣстамъ пространства и къ опредѣленнымъ моментамъ времени, въ видѣ опредѣленныхъ образовъ, явленій или событий. Но только наивный реализмъ, уничтожаемый первымъ дуновеніемъ критическаго вѣтерка, принимаетъ эти образы и эти явленія за несомнѣнную реальную дѣйствительность, безошибочную и не требующую критическаго анализа. Нашъ опытъ и наши наблюденія, къ сожалѣнію, часто бываютъ ошибочны. Стоитъ только вспомнить, какъ разнорѣчивы бываютъ на судѣ показанія достовѣрныхъ и добросовѣстныхъ свидѣтелей. Мы ошибаемся въ нашихъ наблюденіяхъ и мы невѣрно интерпретируемъ то, что было нами воспринято. Къ этому надо прибавить тѣ постоянныя, такъ сказать узаконенныя ошибки, которыя всѣмъ вамъ извѣстны подъ названіемъ обмановъ органовъ чувствъ. Кто-же изъ васъ не знаетъ объ обманахъ оптическихъ и обманахъ акустическихъ, которые всегда правильно и неизмѣнно повторяются. Итакъ, мы видимъ, что первый источникъ знанія, т. е. личный опытъ и наблюденія, цѣликомъ основанъ на довѣріи къ самому себѣ. Ясно, что уже здѣсь довольно отчетливо входитъ элементъ вѣры.

Второй источникъ знанія—это устное или письменное сообщеніе другого лица. Но ясно, что такое знаніе уже цѣликомъ основано на довѣріи, на вѣрѣ въ субъективную добросовѣстность источника, и въ объективную правильность сообщаемого. Поэтому такое знаніе уже нераздѣльно связано съ значительной дозой вѣры.

Въ средней школѣ трудно отличить знаніе отъ вѣры; преподается элементарное и достовѣрное, и въ то же время довѣріе къ учителю безгранично и, можно сказать, безсознательно. Въ высшей школѣ дѣло обстоитъ нѣсколько иначе. Довѣріе студента къ профессору уже не безгранично; къ нему примѣшивается критическій анализъ и, иногда, нѣкоторый, весьма полезный и желательный скептицизмъ. Тутъ элементъ вѣры выступаетъ уже въ болѣе сознательной формѣ.

Вспомнимъ, кстати, какъ шатко все то, что мы въ обыденной жизни называемъ знаніемъ, какъ быстро мѣняется содержаніе этого знанія безъ того, чтобы объективно что-нибудь измѣ-

нилось. Знание должно было бы отождествляться съ истиной; но тутъ является великій вопросъ: что такое истина? Вы всѣ знаете, кто однажды поставилъ этотъ вопросъ и къ Кому онъ былъ обращенъ; но вы тщетно стали бы искать отвѣта на тѣхъ страницахъ Евангельскаго преданія.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній я перехожу, наконецъ, къ физикѣ. Я ставлю вопросъ: Гдѣ мы въ физикѣ имѣемъ знаніе и какую роль играетъ въ ней вѣра?

Въ физикѣ имѣется огромное необъятное содержаніе; въ немъ слѣдуетъ отличать двѣ стороны, въ зависимости отъ той точки зрѣнія, съ которой мы это содержаніе разсматриваемъ. Я прошу вашего вниманія, хотя дѣло довольно простое.

Первая сторона, не представляющая въ сущности никакого для насъ интереса, заключается въ слѣдующемъ. Мы имѣемъ передъ собой постепенно, исторически, сложившійся фактъ, что въ физикѣ, въ данный моментъ, имѣется такое-то содержаніе. Можно наполнить многія сотни томовъ этимъ содержаніемъ, если бы излагать всѣ явленія, когда либо наблюденныя, всѣ законы, которыя были найдены, всѣ теоріи, которыя были построены, всѣ гипотезы, которыя были предложены. Знакомство съ этимъ содержаніемъ, т. е. съ самимъ фактомъ, что такое содержаніе существуетъ, что физика то-то и то-то утверждаетъ, это—почти чистое знаніе. Я повторяю, рѣчь идетъ не о самихъ явленіяхъ, законахъ и т. д., а только о томъ, что объ этихъ законахъ и явленіяхъ говоритъ физика. Но если мы здѣсь захотимъ выдѣлить дѣйствительно чистое знаніе, то намъ даже эту область придется еще нѣсколько сократить. Откуда вы узнаете, что въ современной физикѣ имѣется такое-то содержаніе? Вы это узнаете отъ учителя или изъ учебника. Такимъ образомъ знаніе сводится къ тому, что учитель или учебникъ утверждаютъ. Но учитель и учебникъ могутъ ошибаться и, несомнѣнно, иногда ошибаются, превратно излагая то или другое мѣсто содержанія науки. Строго говоря, вы вѣдь можете только сказать: мы знаемъ, что учитель или учебникъ изложилъ то-то. Вотъ это и есть то знаніе, которое отъ васъ требуютъ на экзаменѣ. Здѣсь уже входитъ довѣріе къ учителю или къ учебнику; вы предполагаете, что онъ правильно излагаетъ современное содержаніе науки. Но вѣдь несомнѣнно, что разные преподаватели и разные учебники неодинаково излагаютъ содержаніе науки, что разногласія бывають не

только въ общихъ взглядахъ, но и въ самомъ содержаніи того, что излагается.

Къ этой первой сторонѣ, къ этому званію съ примѣсью довѣрія, мы возвращаться не будемъ.

Нѣчто совсѣмъ другое представляетъ вторая сторона — содержаніе физики какъ предполагаемая истина. Вы, конечно, понимаете весьма глубокую и важную разницу между этими двумя точками зрѣнія. Я приведу примѣръ. Есть въ физикѣ глава: о сжимаемости газовъ. Первая сторона будетъ такова: вы знаете, что въ содержаніе физики входитъ разборъ явленія сжимаемости газовъ и что при этомъ упоминаются такіе то факты, законы, объясненія и т. д. Это есть знаніе съ маленькой примѣсью довѣрія къ учителю или къ учебнику. Вы предполагаете, что этотъ вопросъ былъ правильно изложенъ. Вторая сторона соотвѣтствуетъ предположенію, что газы дѣйствительно обладаютъ указанными свойствами, что вы имѣете здѣсь дѣло съ объективной истиной, совершенно независимой, ни отъ преподавателя, ни отъ учебника.

Можетъ казаться, что въ этой второй сторонѣ мы имѣемъ дѣло только съ вѣрой и что здѣсь вовсе нѣтъ мѣста знанію. Но это, конечно, не такъ. Разберемъ нѣсколько подробнѣе содержаніе физики, чтобы точнѣе установить роль знанія и роль вѣры.

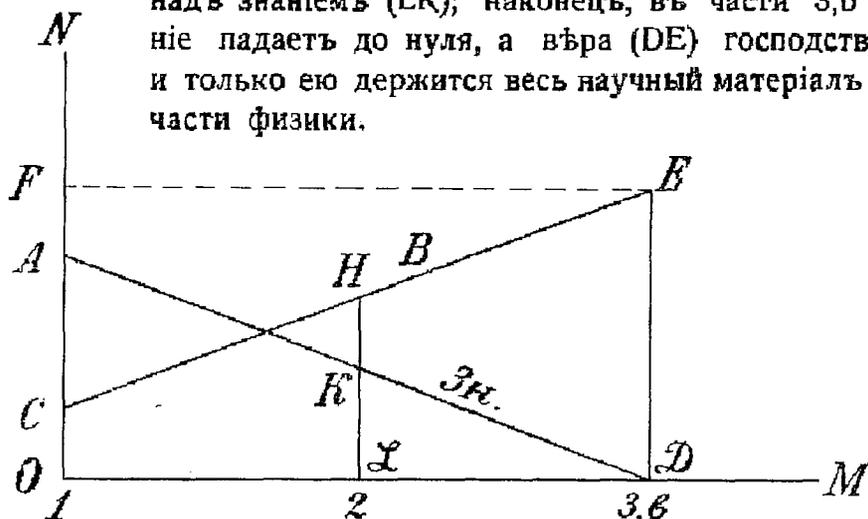
Содержаніе физики можетъ быть раздѣлено на три части. Къ первой части относятся явленія качественного характера; ко второй—законы количественные; къ третьей—объясненія явленій. Въ третьей части слѣдуетъ отличать: а) объясненія, основанныя на доказательствѣ, что данное явленіе или законъ есть логически выводимое слѣдствіе уже извѣстнаго; б) объясненія на основаніи какой либо гипотезы. Въ этомъ ряду, часть 3,а, какъ мы увидимъ, сейчасъ не представляетъ для насъ никакого интереса, такъ какъ она не имѣетъ самостоятельнаго значенія.

Итакъ, мы имѣемъ слѣдующія части:

1. Явленія качественного характера.
2. Законы количественные.
3. Объясненія.
 - а. Логическія слѣдствія уже извѣстнаго.
 - б. Гипотезы.

На чертежѣ схематически или, если угодно, символически показано, какія роли играютъ знаніе и вѣра въ трехъ главныхъ частяхъ физики, номера которыхъ (1, 2 и 3,б) отмѣчены на оси абсциссъ ОМ. Положимъ, что ординаты прямой FE соотвѣт-

ствують полному знанію или полной вѣрѣ, безъ примѣси другого элемента. Прямыя AD и CE схематически изображаютъ, какія роли играютъ знаніе (AD) и вѣра (CE) въ указанныхъ трехъ частяхъ физики. Въ части 1-ой знаніе (OA) не вполнѣ господствуетъ; къ нему примѣшивается нѣкоторое количество вѣры (OC). Во второй части вѣра (LN) уже значительно преобладаетъ надъ знаніемъ (LK); наконецъ, въ части 3,в знаніе падаетъ до нуля, а вѣра (DE) господствуетъ и только ею держится весь научный матеріалъ этой части физики.



Все это я теперь и постараюсь выяснитъ. Начнемъ съ первой части, въ которой мы имѣемъ дѣло съ фактами качественнаго характера: рассматриваются разнаго рода явленія, условия ихъ возникновенія, и вообще описываются свойства вещества. Но здѣсь, прежде всего, слѣдуетъ вотъ на что обратить вниманіе. Если явленіе наблюдалось другимъ лицомъ, то мы, очевидно, уже не можемъ обойтись безъ того, чтобы отнестись съ довѣріемъ къ этому, почти всегда совершенно намъ чужому, незнакому наблюдателю. Если мы сами наблюдали явленіе, то опять-таки мы не обойдемся безъ довѣрія къ самому себѣ, къ нашему умѣнію правильно наблюдать, правильно интерпретировать то, что мы видимъ. Итакъ, ясно, что даже въ части первой вѣра играетъ нѣкоторую роль. Необходимо принять во вниманіе, что весьма часто происходитъ слѣдующее: одинъ наблюдатель находитъ какое-нибудь явленіе; другой этого явленія не находитъ, не видитъ, онъ оспариваетъ правильность наблюдений перваго, и на этой почвѣ возникаютъ, иногда весьма продолжительные, споры. Гдѣ же причина такихъ разногласій? Оказывается что такихъ причинъ можетъ быть, главнымъ образомъ, три.

Причина первая. Всякое явление есть результатъ многихъ дѣйствующихъ причинъ, отъ которыхъ зависитъ теченіе, обликъ и характеръ явленія. Назовемъ эти причины факторами. Наблюдатель связываетъ то, что онъ наблюдаетъ съ какимъ-либо опредѣленнымъ факторомъ, между тѣмъ, какъ въ послѣдствіи нерѣдко оказывается, что данное явленіе связано съ совершенно другой причиной, другимъ факторомъ. Здѣсь дѣло вовсе не касается о б ъ я с н е н і я явленія, которому посвящена часть третья; здѣсь идетъ рѣчь о самомъ явленіи, т. е. о тѣхъ условіяхъ при которыхъ явленіе возникаетъ и которыя нераздѣльно связаны съ его описаніемъ. Я приведу для ясности нѣсколько примѣровъ. Положимъ, кто-нибудь наблюдаетъ, что если сжимать такое-то тѣло, получается то или другое явленіе. Онъ полагаетъ, что это явленіе есть слѣдствіе именно сжатія, т. е. приближенія молекулъ тѣла другъ къ другу. Другой наблюдатель подтверждаетъ это явленіе; третій также. Но въ послѣдствіи оказывается, что другіе наблюдатели не подтверждаютъ существованія этого явленія. Въ концѣ концовъ выясняется, что рассматриваемое явленіе вовсе не есть слѣдствіе сжатія, какъ такового, а слѣдствіе того измѣненія температуры, которымъ сопровождается всякое сжатіе. Возьмемъ другой примѣръ. Нѣкій ученый открываетъ какія либо особые свойства азота; второй, третій ученые подтверждаютъ это открытіе, но четвертый и пятый не находятъ указаннаго свойства азота. Въ концѣ концовъ оказывается, что первые наблюдатели брали азотъ изъ воздуха, а послѣдніе пользовались азотомъ, химически приготовленнымъ. Наконецъ, обнаружилось, что то явленіе, которое было приписано азоту, принадлежитъ аргону, который, какъ вы знаете, примѣшанъ къ атмосферному воздуху. Еще одинъ примѣръ. Допустимъ, какой-нибудь наблюдатель находитъ, что такой-то газъ необычайно сильно отступаетъ отъ закона Мариотта, что онъ очень сильно сжимается. Одни подтверждаютъ, другіе не подтверждаютъ этого явленія. Въ концѣ концовъ оказывается, что этотъ газъ обладаетъ удивительнымъ свойствомъ въ необыкновенно большомъ количествѣ приставать къ стѣнкамъ сосуда, вслѣдствіе чего кажущаяся сжимаемость, понятно, гораздо больше дѣйствительной. Я привелъ эти три примѣра; не трудно было бы привести сотни и тысячи примѣровъ такой неправильной интерпретаціи того, что наблюдается.

Вторая причина возможнаго разногласія результатовъ наблюденій различныхъ изслѣдователей заключается въ томъ, что

могутъ существовать факторы, намъ вовсе незнакомые, еще не открытые. Припомните, что не такъ давно открыты радиоактивность, лучи Рентгена и т. д. Несомнѣнно, что еще много есть тайнъ въ природѣ; много еще есть такихъ факторовъ, наличие которыхъ нами и не подозрѣвается. Условія возникновенія явленія могутъ быть, поэтому, совсѣмъ не тѣ, которыя въ данномъ случаѣ предполагались.

Въ третьихъ, разногласія могутъ происходить отъ той роли, которую при наблюденіи явленія могутъ играть разнаго рода обманы нашихъ чувствъ. Но, само собою разумѣется, существуетъ огромное число физическихъ явленій, которыя можно назвать безусловно достовѣрными. Отклоненіе магнитной стрѣлки подѣ влияніемъ тока—это уже относится къ чистому знанію. Можно привести еще не мало примѣровъ, но все же вы не можете не согласиться со мною, что даже въ первой изъ трехъ частей физики, въ описаніи явленій и условій ихъ возникновеній, уже является, какъ графически и символически изображено на чертежѣ, элементъ вѣры.

Вторая часть физики—это область количественныхъ законовъ. Здѣсь, какъ изображено на рисункѣ, вѣра уже значительно преобладаетъ надъ знаніемъ. И дѣйствительно, спросите себя: откуда мы знаемъ о существованіи физическихъ законовъ, т. е. объ опредѣленной зависимости между двумя физическими величинами x и y ? Возьмемъ примѣръ: зависимость количества теплоты Q , выдѣляющейся въ проводникѣ при прохожденіи черезъ него электрическаго тока силы i . Эта зависимость выражается извѣстной вамъ формулой $Q = C i^2$, въ которой C есть множитель пропорціональности. Откуда мы знаемъ объ этомъ законѣ? Какъ его провѣрить? Провѣрить законъ можно только путемъ измѣренія. Мы должны измѣрить рядъ силъ тока i_1, i_2, i_3, i_4 и т. д., и мы должны измѣрить соотвѣтствующія количества теплоты Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 и т. д., выдѣляющейся въ проволоцѣ. Но вы знаете, что всякое измѣреніе неизбѣжно сопряжено съ ошибками и обладаетъ лишь нѣкоторой опредѣленной степенью точности. Неизбѣжныя ошибки наблюденій происходятъ отъ свойствъ измѣрительныхъ приборовъ, отъ недостатковъ нашихъ органовъ чувствъ и отъ недостаточнаго навыка и умѣнія производить наблюденія. Законъ на опытахъ подтверждается всегда лишь приблизительно, въ предѣлахъ ошибокъ наблюденій. Мы, напр., увеличиваемъ силу тока, стараясь это сдѣлать въ отношеніи 1:2:3:4,

и получаемъ количества теплоты приблизительно въ отношеніи чисель 1, 4, 9, 16 и т. д. Гдѣ же тутъ законъ? Что намъ даетъ право изъ этихъ только приближительныхъ чисель выводить законъ? Чѣмъ мы руководимся? А вотъ чѣмъ:

Во-первыхъ, мы вѣримъ въ существованіе закона.

Во-вторыхъ, мы вѣримъ, что законъ долженъ быть простъ.

Мы убѣждены, что законъ вида r^2 гораздо болѣе вѣроятенъ, чѣмъ законъ, напр., вида $r^{2.004}$. Между тѣмъ опытъ не даетъ намъ возможности рѣшить, который изъ этихъ двухъ законовъ болѣе справедливъ. Достоверности достичь путемъ измѣренія совершенно невозможно. Всегда остается сомнѣніе въ томъ, дѣйствительно-ли законъ существуетъ въ той формѣ, которую мы ему приписываемъ.

Законъ всемірнаго тяготѣнія, какъ извѣстно, выражается формулою

$$f = \frac{mm'}{r^2}.$$

Но несмотря на всѣ подтвержденія этого закона тою частью астрономіи, которая называется небесною механикой, мы все-таки не можемъ достичь безусловной увѣренности въ томъ, что приведенная формула не должна быть замѣнена другою, вида

$$f = \frac{mm'}{r^2 + \alpha}$$

гдѣ α весьма малая, дробная величина. Возможны и другія формы, напр.,

$$f = mm' \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{a}{r^p} + \frac{b}{r^q} \text{ и т. д.} \right\},$$

гдѣ p и q числа, большія двухъ, и a и b весьма малыя числовыя величины. Допустима также мысль, что сила f зависитъ не только отъ массъ m и m' притягивающихся тѣлъ и отъ ихъ взаимнаго разстоянія r , но также отъ ихъ относительныхъ скорости v и ускоренія w . Такъ, напр., была предложена формула, вида

$$f = \frac{mm'}{r^2} \left\{ 1 - av^2 + brw \right\},$$

гдѣ a и b два постоянныхъ числа, и даже была построена видоизмѣненная небесная механика, въ основѣ которой была положена эта послѣдняя формула.

Слѣдуетъ, далѣе, имѣть въ виду, что почти каждый физи-

ческий законъ вѣренъ лишь въ опредѣленныхъ предѣлахъ. Обратимся, напр., къ закону Мариотта. Было время, когда предполагали, что газы вполнѣ точно слѣдуютъ этому закону и никто въ этомъ не сомнѣвался; онъ удовлетворялъ нашему апіорному убѣжденію, что законъ долженъ быть простымъ. Однако онъ оказался невѣрнымъ. Бываютъ случаи, когда законъ можетъ быть выведенъ теоретически, и какъ разъ онъ относится къ закону нагрѣванія проводниковъ электрическимъ токомъ, о которомъ мы говорили. Но въ этомъ случаѣ законъ, въ сущности, сливается съ исходнымъ положеніемъ и его достовѣрность одинакова съ достовѣрностью основъ, изъ которыхъ онъ выводится.

Итакъ, вы видите, что въ законы мы должны и можемъ почти только вѣрить, и что, слѣдовательно, во второй изъ выше указанныхъ частей физики вѣра играетъ уже огромную роль. Конечно, здѣсь несомнѣнно имѣется также наличность и знанія; существуютъ достовѣрные законы. Но отыскать и указать ихъ гораздо труднѣе, чѣмъ вы это, вѣроятно, предполагаете. Вы, напримеръ, укажете мнѣ на законъ сохраненія массъ и на законъ сохраненія энергіи, какъ на законы достовѣрно установленные. Однако, за послѣднее время наука дошла до того, что она даже рядомъ съ этими законами ставитъ вопросительные знаки. Конечно, если законъ незыблемо установленъ, если съ точностью извѣстны предѣлы, въ которыхъ онъ вѣренъ, то мы имѣемъ дѣло съ чистымъ знаніемъ. Но такое знаніе во второй части физики не легко найти и вы видите, что въ этой части, трактующей о законахъ физики, вѣра несомнѣнно сильно преобладаетъ надъ знаніемъ.

Перейдемъ теперь къ третьей части физики, которая занимается объясненіемъ явленій. Здѣсь объясненіе (см. 3, а стр. 6) можетъ сводиться къ доказательству, что данное явленіе представляется логическимъ слѣдствіемъ того, что уже ранѣе было извѣстно и въ наукѣ утвердилось. Объясненіе сводится, въ данномъ случаѣ, къ тому, что мы новое явленіе логически связываемъ съ тѣмъ научнымъ матеріаломъ, который уже раньше былъ найденъ. Достовѣрность вывода будетъ полная, если онъ сдѣланъ правильно, т. е. безъ ошибокъ, но достовѣрность объясненія при этомъ очевидно будетъ такая же, какъ и достовѣрность исходнаго матеріала. Отсюда ясно, что часть 3, а не имѣетъ для насъ самостоятельнаго значенія.

Главная сущность физики, какъ науки, заключается въ части

З, в, въ построенияхъ, основанныхъ на опредѣленныхъ гипотезахъ. Къ необходимости введенія гипотезъ мы приходимъ слѣдующимъ путемъ. Мы объясняемъ какой-нибудь фактъ *a*, выводя его какъ необходимое слѣдствіе факта *b*; фактъ *b* —мы логически связываемъ съ фактомъ *c* и т. д. Мы имѣемъ такимъ образомъ цѣль фактовъ. Гдѣ-же эта цѣль кончается? Несомнѣнно какой-нибудь гипотезой, т. е. предположеніемъ о существованіи въ природѣ какого-либо агента или свойства вещества, которые являются основной причиной для цѣлой группы явленій,

Въ этой области мы уже имѣемъ исключительно только чистую вѣру. Ни о какомъ знаніи здѣсь не можетъ быть и рѣчи. Это видно уже изъ того, что весьма часто опредѣленную гипотезу одни ученые принимаютъ, т. е. въ нее вѣрятъ, а другіе ученые ее отвергаютъ, въ нее не вѣрятъ. Еще лучше это иллюстрируется тѣмъ фактомъ, что для объясненія одной и той-же группы явленій весьма часто существуетъ множество различныхъ гипотезъ, между которыми предоставляется выборъ, нерѣдко зависящій отъ личныхъ свойствъ, отъ наклонностей и апріорныхъ убѣжденій того, кто этотъ выборъ дѣлаетъ. Здѣсь чистая вѣра, и о знаніи не можетъ быть и рѣчи, такъ какъ при его наличности гипотеза перестала-бы быть гипотезою, т. е. такимъ предположеніемъ, которое по существу представляетъ изъ себя нѣчто недостовѣрное. Когда отъ гипотезы приходится отказаться, тогда рушится все то научное зданіе, которое на ней построено. На моемъ вѣку было много примѣровъ быстро развивавшихся отдѣльныхъ частей нашей науки, основанныхъ на какой-либо гипотезѣ, а затѣмъ отъ такого зданія ничего не оставалось.

Курьезнѣе всего, что въ этой области бывають случаи, когда не только нѣтъ знанія, но когда и вѣра отсутствуетъ. Это тотъ случай, когда составляются гипотезы на время, въ надеждѣ, что онѣ хотя бы въ нѣкоторыхъ своихъ чертахъ соотвѣтствуютъ дѣйствительности. Такія гипотезы могутъ принести наукѣ большую пользу. Онѣ получили особое названіе: ихъ называютъ рабочими гипотезами.

Исчезновеніе гипотезы возможно въ двухъ случаяхъ. Во-первыхъ, когда открывається явленіе, которое безусловно противорѣчитъ гипотезѣ, съ ней не совмѣстимо; тогда, понятно, отъ гипотезы приходится отказаться. Затѣмъ бывають случаи, когда гипотеза постепенно приближается къ достовѣрности, и тогда уже мы имѣемъ дѣйствительное знаніе. Такое приближеніе гипотезы

къ достовѣрности можетъ происходить двумя путями. Во-первыхъ, когда мы имѣемъ огромное, безграничное число подтвержденій всего того, что на данной гипотезѣ построено. Сюда относится напр., гипотеза о вращеніи земли вокругъ своей оси и вокругъ солнца. Затѣмъ бывають случаи, когда непосредственное наблюденіе убѣждаетъ насъ въ правильности гипотезы, когда то, что предполагалось дѣлается для насъ непосредственно воспринимаемымъ. Сюда относится, напр., молекулярная гипотеза, которая нынѣ перестала быть гипотезой. Я буду имѣть случай показать вамъ черезъ нѣкоторое время одно явленіе, въ которомъ почти ощущается присутствіе молекулъ (броуновское движеніе). Въ указанныхъ двухъ случаяхъ гипотеза перестаетъ быть гипотезой и вѣра переходитъ въ знаніе. Но число такихъ случаевъ весьма ограничено.

Въ видѣ примѣра того, какъ съ теченіемъ времени мѣняется отношеніе ученыхъ къ какой-либо гипотезѣ, я укажу на всѣмъ вамъ извѣстную гипотезу объ эфирѣ. Не такъ давно было время, когда эту гипотезу считали одной изъ наиболѣе близкихъ къ достовѣрности. Величайшій физикъ второй половины прошлаго столѣтія, Вильямъ Томсонъ (Лордъ Кельвинъ), писалъ, что мы объ эфирѣ больше знаемъ, чѣмъ о матеріи. Съ тѣхъ поръ прошло какихъ-нибудь 20 лѣтъ и взглядъ на эфиръ совершенно измѣнился. Надо сказать, что въ настоящее время эфиромъ въ наукѣ вовсе не пользуются и потому теперь большое число выдающихся ученыхъ совершенно отрицають существованіе эфира.

Итакъ, ясно, что ко всякимъ гипотезамъ мы должны относиться съ величайшимъ скептицизмомъ. Гипотезы—это область чистой вѣры и ни о какомъ знаніи въ этой области не можетъ быть и рѣчи.

Теперь я скажу самое главное: именно въ части 3, в заключаются истинная сущность физики, какъ науки. Части первая и вторая, т. е. явленія качественного характера и количественные законы, содержатъ лишь тотъ разрозненный, сырой матеріалъ, тѣ кирпичи, изъ которыхъ строится зданіе науки. Истинная наука не заключается въ перечнѣ явленій и законовъ, а въ построеніи теоріи явленій, т. е. въ соединеніи большого количества фактовъ и законовъ въ одно стройное цѣлое, достойное названія научнаго зданія; фундаментомъ его служить опредѣленная гипотеза. Существуютъ гипотезы основныя, на которыхъ построена громадная часть нашихъ научныхъ зданій. Существуетъ кромѣ того

весьма большое число болѣе мелкихъ гипотезъ, придуманныхъ для объясненія небольшого числа явленій. Вотъ въ этой-то части, которая составляетъ истинную сущность физики, какъ науки, и которая превращаетъ физику изъ конгломерата разрозненныхъ фактовъ и законовъ въ стройное научное зданіе, въ этой основной области, какъ вы видите, знанію нѣтъ мѣста и играетъ роль исключительно только одна вѣра.

Я думаю, вы убѣдились, какую громадную роль играетъ въ нашей наукѣ вѣра и какую сравнительно малую роль играетъ дѣйствительное знаніе.

Я перехожу къ послѣдней части, къ выводамъ изъ всего предыдущаго. Прежде всего я ставлю вопросъ: къ чему приводитъ неправильная оцѣнка той роли, которую знаніе играетъ въ наукѣ? Я думаю что она приводитъ къ великимъ и опаснымъ заблужденіямъ. Тотъ, кто полагаетъ, что въ наукѣ вѣра никакой роли не играетъ, и что наука преисполнена знаніемъ, что мы очень многое, а можетъ быть и все, или почти все, знаемъ, тотъ переоцѣниваетъ познавательную способность человѣка, безгранично расширяетъ область якобы познаваемаго и, самъ того не замѣчая, впадаетъ въ грубѣйшія ошибки. Онъ начинаетъ страдать какъ-бы маніей умственнаго величія, полагая, что для него уже не существуетъ мировыхъ загадокъ, что у него готово для нихъ полное рѣшеніе. На такой-то почвѣ выросъ тотъ печальный плодъ научнаго недомыслія, который называется матеріализмомъ и который въ настоящее время уже кончаетъ свое безплодное существованіе. На этой-же почвѣ выросло не менѣе печальное современное заблужденіе, такъ называемый монизмъ.

Около середины прошлаго столѣтія, на почвѣ быстрыхъ и дѣйствительно большихъ успѣховъ естественныхъ наукъ, въ томъ числѣ физики и химіи, расцвѣлъ матеріализмъ, полагающій, что всѣ безъ исключенія наблюдаемыя явленія возникаютъ только благодаря разнообразнымъ свойствамъ матеріи. Сюда же были отнесены и всѣ явленія жизни, психики, сознанія и т. д. Тогда-то появилась прелестная мысль, что мысли суть такія-же выдѣленія мозга, какъ, напр., желчь есть выдѣленіе печени. Путемъ дальнѣйшаго вырожденія возникъ современный монизмъ, который, какъ вы знаете, не допускаетъ никакой двойственности, а тѣмъ болѣе множественности первоисточниковъ всего совершающагося въ мірѣ. Это жалкое заблужденіе зиждется на горделивомъ пред-

положеніи, что разумъ человѣка можетъ все охватить, ибо для него нѣтъ ничего недоступнаго. А это не вѣрно! Разумъ человѣка имѣетъ свои предѣлы, за которыми лежитъ то, что остается навсегда для него скрытымъ, и только наивное непониманіе той роли, которую играютъ въ жизни человѣка маленькое наше знаніе и огромная, всюду проникающая вѣра, можетъ привести къ мысли, что человѣкъ когда-либо пойметъ то, что лежитъ за этими предѣлами.

Не трудно указать на рядъ вопросовъ, лежащихъ внѣ этихъ предѣловъ. Я ограничусь указаніемъ четырехъ.

1. Проблема пространства и времени; вопросъ о ихъ конечности или безконечности, одинаково непостижимыхъ, одинаково приводящихъ къ неразрѣшимымъ противорѣчіямъ.

2. Проблема жизни; вопросъ о разницѣ между живымъ и мертвымъ.

3. Проблема сознанія, наличность котораго каждымъ изъ насъ ясно ощущается.

4. Проблема свободы воли.

Можно было-бы указать и другія. Много тайнъ человѣчествомъ разгадано; спрашивается, не будутъ-ли эти проблемы разрѣшены со временемъ? Это вопросъ вѣры. Но несомнѣнно существуютъ предѣлы, за которые разумъ человѣка проникнуть не можетъ. Конечно, нельзя запретить работать надъ разгадкой этихъ проблемъ, ибо слишкомъ велика жажда человѣка проникнуть за тѣ завѣсы, за которыми скрываются отъ насъ величайшія тайны. Но непростительно думать, что мы уже перешагнули черезъ пропасть, отдѣляющую отъ насъ недоступное нашему познанию, какъ это считаетъ своимъ догматомъ современный монизмъ, утверждающій, что на всѣ вопросы найдены отвѣты, что никакихъ міровыхъ загадокъ уже болѣе не существуетъ. Наивной и опасной ошибкой слѣдуетъ, поэтому, признать отрицаніе трансцендентнаго, т. е. лежащаго внѣ предѣловъ познаемаго, а слѣдовательно и отрицаніе всего сверхестественнаго. Конечно, представляется величайшею нелѣпностью всякая попытка перенести сверхестественное въ область естественнаго, т. е. воспринимаемаго нашими органами чувствъ. Сюда относится спиритизмъ, окультизмъ и т. под. заблужденія. Но, какъ самодовлѣющая сущность, трансцендентное, не познаваемое опытомъ, есть предметъ вѣры. Безусловно отрицать трансцендентное и относиться къ нему съ насмѣшливымъ высокомеріемъ можетъ лишь тотъ, кто не понимаетъ роли знанія и вѣры въ наукѣ. Я старался

вамъ показать какъ не велико наше знаніе и какъ громадна роль вѣры, избравъ ту науку, которою я самъ занимаюсь въ теченіе болѣе 40 лѣтъ.

Если вы поняли роль вѣры въ наукѣ, которую наивные люди отождествляютъ съ знаніемъ, то вы, я въ этомъ увѣренъ, преисполнитесь терпимостью ко всему, что составляетъ предметъ вѣры, и, подвергая спокойному анализу ваши личныя переживанія, поставите вѣру на подобающее ей мѣсто.

Да, личныя переживанія—вотъ, по моему убѣжденію, тотъ глубокій, неисчерпаемый источникъ, изъ котораго для cadaго изъ насъ вырастаетъ вѣра во всѣхъ ея формахъ и разнообразіяхъ, начиная отъ всегда шаткой вѣры въ самаго себя и до вѣры въ Бога, безразлично какъ-бы каждый не понималъ по своему этотъ объектъ чистѣйшей вѣры.

Оканчивая, я возвращусь къ началу и еще разъ укажу на ту цѣль, которую я имѣлъ въ виду при сегодняшней нашей бесѣдѣ.

Я хотѣлъ повліять на васъ, чтобы вы не придавали наукѣ того значенія, котораго она не имѣетъ. Значеніе науки такъ велико, что оно не можетъ быть выражено никакими словами. Это тотъ свѣточъ, безъ котораго мы окружены безнадежной тьмой. Но не слѣдуетъ переносить это значеніе за тѣ предѣлы, черезъ которые не проникаютъ и никогда не проникнутъ лучи этого свѣточа; не слѣдуетъ науку класть на Прокрустово ложе, полагая, что она все можетъ, что она даетъ или дастъ отвѣты на всѣ вопросы.

Беру на себя смѣлость сказать: остерегайтесь, чтобы этотъ свѣточъ не сыгралъ для васъ роли того огня, въ которомъ гибнетъ ночная бабочка. Запомните твердо ту роль, которую въ наукѣ играетъ вѣра, и сохраните навсегда въ себѣ этотъ чудный даръ—способность вѣрить, безъ котораго жизнь невозможна.



Изв.вузов «ПНД», т.4, № 3, 1996

Межрегиональный научный семинар НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ МОДЕЛИ

На базе МГУ с участием МГТУ «Станкин», Тверского государственного технического университета, ИМПБ РАН с ноября 1996 года начинает работу межрегиональный научный семинар «Нелинейные системы и их модели».

Для современных естественно-научных, технических и гуманитарных знаний характерны парадигма нелинейности, многовариантности изучаемых явлений и тенденция сближения фундаментальных и прикладных исследований. Отражением этих закономерностей в области образования является наметившееся за последние годы явное предпочтение университетского образования всем другим его видам.

Целью организуемого семинара является рассмотрение в этом аспекте актуальной информации о достижениях быстро развивающихся областей науки, призванное способствовать как развитию нелинейных подходов в науке, так и быстрому и широкому распространению новых знаний.

На заседаниях семинара в докладах и дискуссиях предполагается проводить обсуждение проблем современной «нелинейной науки» и связанных с ними проблем образования. Будут обсуждаться общие принципы регуляции сложных систем; проблемы самоорганизации в открытых системах, возникновения режимов с обострением в системах с переменными свойствами, переноса в биологических системах разного уровня; методы молекулярной динамики; гамильтонов подход в задачах нелинейной динамики; проблема устойчивости для технических и экономических систем и другие.

Предполагается широкий круг участников семинара - научных сотрудников академических институтов и профессоров, преподавателей, аспирантов классических и технических университетов и других вузов различных регионов России, интересы которых в области науки и образования связаны с нелинейными методами.

Семинар будет сочетать научную и образовательную составляющие. Планируются доклады по перспективным разделам современной науки, доклады и сообщения по последним достижениям в различных областях знания о нелинейных системах, сообщения и дискуссии, посвященные проблемам компьютеризации и информатизации высшего естественно-научного, технического и гуманитарного образования.

Правление семинара

Аксенов Сергей Иванович (МГУ),
Балабаев Николай Кириллович (ИМПБ РАН),
Васильева Людмила Юрьевна (Тверской госуниверситет),
Гурия Георгий Теодорович (Центр изучения крови),
Данилов Юлий Александрович (Институт атомной энергии),
Каротеев Николай Иванович (МГУ),
Климонтович Юрий Львович (МГУ),
Копчик Владимир Александрович (МГУ),
Кореньков Владимир Васильевич (Объединенный институт ядерных исследований, Дубна),
Курдюмов Сергей Павлович (Институт прикладной математики РАН),
Лажно Виктор Дмитриевич (ИМПБ РАН, Пушкино),
Малинецкий Георгий Геннадьевич (ИПМ РАН),
Молчанов Альберт Макарьевич (ИМПБ РАН),
Ризниченко Галина Юрьевна (МГУ) - зам. председателя,
Романовский Юрий Михайлович (МГУ),
Рубин Андрей Борисович (МГУ) - председатель,
Салиева Ольга Алексеевна (МГТУ «Станкин»),
Семенов Анатолий Васильевич (Тверской технический университет),
Твердислов Всеволод Александрович (МГУ),
Тимашев Сергей Федорович (НИФХИ им. Л.Я.Карпова),
Уварова Людмила Александровна (МГТУ «Станкин») - ученый секретарь,
Федянин Владимир Константинович (ОИЯИ, Дубна),
Чернавский Дмитрий Сергеевич (ФИ РАН),
Шайтан Константин Вольдемарович (МГУ),
Шаповалов Александр Васильевич (Томский госуниверситет),
Шакин Всеволод Владимирович,
Якушевич Людмила Владимировна (Институт биофизики клетки РАН, Пушкино)

Работа семинара планируется по следующим направлениям:

- эволюция и самоорганизация сложных систем;
- нелинейные математические модели физики, химии, биологии, экологии и информатики;
- современные математические подходы к решению нелинейных задач, численные методы и алгоритмы;
- техническая синергетика;
- нелинейные математические модели экономических и социальных процессов;
- структурно-семiotические и семантические аспекты искусства и теории информации.

Организация работы семинара

Заседания семинара планируется проводить в соответствии со следующим расписанием:

11.00 - 12.30	основной доклад
12.30 - 13.30	дискуссия
13.00 - 14.00	перерыв
14.00 - 16.00	доклады и сообщения
16.00 - 17.00	дискуссия

Планируется проведение 4-5 заседаний в год. Заявки на доклад необходимо делать не позднее, чем за два месяца до соответствующего заседания. Информация об очередном заседании семинара и изменениях в программе будут высылаться за месяц до заседания. В перспективе планируется публикация докладов, сделанных на семинаре. Также предполагается возможность дистанционного участия.

Просим направлять все Ваши пожелания и замечания по научным, организационным и другим вопросам, касающимся проведения семинара, в том числе тему доклада с краткой аннотацией (1 стр.) по адресу:

*119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ, биологический факультет,
кафедра биофизики, Ризниченко Галине Юрьевне
тел: (095)939-19-63, факс: (095)939-11-15
E-mail: rznich@mars.biophys.msu.ru.*

Первое заседание научного семинара **26 ноября 1996 года** на кафедре биофизики Биологического факультета МГУ, «Новая аудитория», цокольный этаж. Проезд: М. Университет, тр.34, авт. 130, 103, 119, 67, 47, 113 до ост. «Улица Менделеева», биологический факультет, здание кафедры биофизики.

Программа 1-го семинара

11.00 - 12.30	<i>Сергей Павлович Курдюмов.</i> Антропный принцип в синергетике
12.30 - 13.30	Дискуссия
13.00 - 14.00	Перерыв
14.00 - 15.00	<i>Георгий Геннадьевич Малинецкий.</i> Новые проблемы нелинейной динамики
15.00 - 16.00	<i>Андрей Борисович Рубин.</i> Современные проблемы университетского образования (Россия и США)
16.00 - 17.00	Обсуждение программы работы семинара

Всех желающих принимать участие в заседаниях семинара просим выслать регистрационную форму участника семинара.

Председатель семинара, чл.-корр. РАН	<i>Андрей Борисович Рубин</i>
Зам. председателя семинара, д.ф.-м.н., проф.	<i>Галина Юрьевна Ризниченко</i>
Ученый секретарь семинара, д.ф.-м.н., проф.	<i>Людмила Александровна Уварова</i>

Образец регистрационной формы участника семинара

1. Фамилия, Имя, Отчество
2. Адрес, телефон, факс, электронная почта
3. Место работы
4. Должность
5. Научная степень
6. Название доклада
7. Научное направление
8. Адрес для переписки

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты - р/с № 000609446 в АКБ «Экономбанк»
г. Саратова, БИК 046311722, корсчет банка 700161122

Подписка на I-ое полугодие 1997 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498
см. по алфавиту

Сдано в набор 12.11.96. Подписано к печати 15.12.96. Формат 70x108/16
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 11,55 (8,25). Уч.-изд. л. 13,8. Тираж 200 экз. Заказ 38

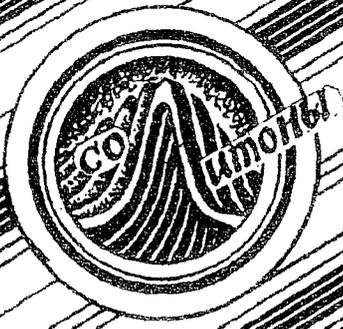
Издательство ГосУНЦ «Колледж»
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446
E-mail:and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

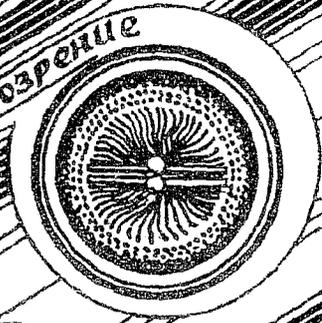
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1996



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



Методы преподавателей

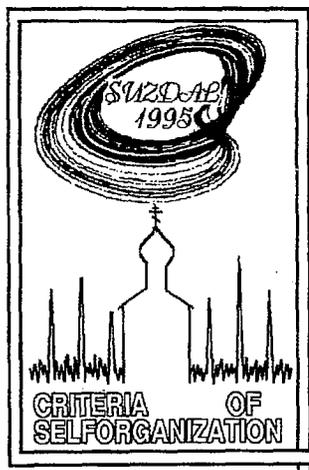


Современной нелинейной динамики



3.06.95

А. Д. Трубецкова



В оформлении номера использованы рисунки участника конференции в Суздале к.м.н. А.Д.Трубецкова