

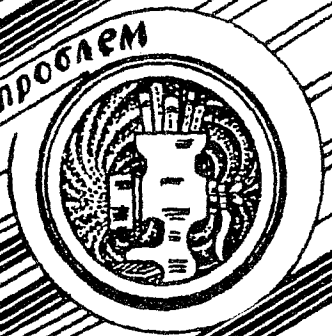
Трикладная Длинейная Динамика



5
1997



**БИФУРКАЦИИ
в динамических
системах различной природы**



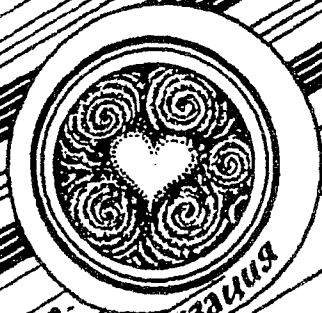
**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



Конференции, семинары, симпозиумы



**Детерминированные
АОС**



**Авто-
волны,
самоорганизация**



**Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн**



**Нелинейная
динамика
в
лицах.
История. Personalio**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пуцзино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

- Астафьева Н.М.* Нелинейное сдвиговое течение во вращающихся сферических слоях и моделирование глобальных атмосферных движений 3

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Баланов А.Г., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сосновцева О.В.* Бифуркация синхронизации хаоса в осцилляторе Ресслера с гармоническим воздействием 31
- Пономаренко В.П.* Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением 44

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Некоркин В.И., Казанцев В.Б., Веларде М.Г.* Динамическое копирование в многослойных бистабильных решетках 56
- Скляр Ю.А., Двинских В.А., Бричков Ю.И., Воробьев В.А., Котума А.И.* Солнечная активность и осцилляции солнечного потока 69
- Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.* Моделирование движения толпы при помощи клеточных автоматов 75
- Ремпен И.С., Короновский А.А.* Нелинейная модель взаимодействия продавцов и потребителей 80

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости 89

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

- Дмитриев Б.С., Левин Ю.И.* Об открытии электрона 107

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

- Научная конференция «Молодежь и наука на пороге XXI века», март 1998, Саратов, Россия 117

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

- Регулярная & хаотическая динамика 118

CONTENTS

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Nonlinear shear flow in rotating spherical layers and global atmosphere motion modelling. *N.M. Astafyeva* 3

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Bifurcation of chaotic synchronization in rossler system with harmonic excitation. *A.G. Balanov, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, O.N. Sosnovtzeva* . . . 31

Numerical modelling of the evolution of dynamical regimes in autooscillatory system with frequency control. *V.P. Ponomarenko* 44

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Dynamic copying in multi-layered bistable lattices. *V.I. Nekorkin, V.B. Kazantsev, M.G. Velarde* 56

Solar activity and solar flux oscillations. *Yu.A. Sklyarov, V.A. Dvinskikh, Yu.I. Brichkov, V.A. Vorobyov, A.I. Kotuma* 69

Cellular automata for simulations of crowd dynamics. *G. G. Malinetskii, M. Ye. Stepantsov* 75

Nonlinear model of customers and sellers interaction. *I.S. Rempen, A.A.Koronovski* 80

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

Paradigm of self-organized criticality. Hierarchy of models and limits of predictability. *G.G. Malinetskii, A.V. Podlazov* 89

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

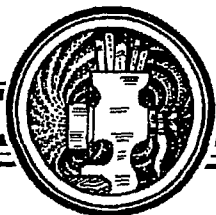
About discovery of electron. *B.S. Dmitriev, Yu.I. Levin* 107

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS

Scientific Conference «Youth and science on the XXI century threshold», March, 1998, Saratov, Russia 117

FROM BOOKS AND JOURNALS

Regual & chaotic dynamics 118



НЕЛИНЕЙНОЕ СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Н.М. Астафьева

Влияние завихренности и восстанавливающее действие силы Кориолиса рассмотрены на примерах простых моделей, используемых в динамической метеорологии и океанографии, а также на примерах течений, возникающих между вращающимися бесконечными дисками, цилиндрами и в слое между вращающимися сферами. Приведены результаты численного изучения структуры нелинейных течений в сферическом слое и их устойчивости. Рассматриваются возможности моделирования глобальных атмосферных движений.

При численном и лабораторном моделировании динамических и термодинамических процессов в атмосферах, океанах и недрах планет необходимо учитывать, что все они происходят при определяющем влиянии вращения планеты и кривизны поверхности. Вращение является фактором, необходимым для формирования в атмосфере и океане циркуляции глобального масштаба и большинства крупно- и мелкомасштабных течений. Так на Земле сила Кориолиса, вызванная вращением планеты, становится заметной для движений с линейным масштабом 100 км и более.

Движение жидкости во вращающемся сферическом слое описывается полной системой уравнений гидродинамики, численное решение которой представляет собой сложную проблему даже без учета процессов переноса тепла, поэтому обычно применяются предположения, позволяющие упростить уравнения. Некоторые наиболее часто используемые приближения, их основные достоинства, недостатки и области применения, элементы теории завихренности представлены в разделе 1.

В динамической метеорологии и океанографии для описания крупномасштабных течений используются уравнения движения тонкого слоя жидкости на вращающейся сфере (приближение мелкой воды с учетом изменения толщины слоя за счет смещений дна и свободной поверхности). Завихренность элемента жидкости в этом приближении меняется только вследствие изменения толщины слоя или широты (поскольку сила Кориолиса во вращающейся сферической системе зависит от широты).

Для описания течений, охватывающих малый диапазон широт, выбирают более локальные системы координат, например, используется приближение β -плоскости, предполагающее малое линейное изменение параметра Кориолиса с широтой. В этом приближении пренебрегают искривлением слоя, течение

происходит в плоском слое с линейно меняющейся в направлении север-юг угловой скоростью.

Моделирование глобальных атмосферных движений и глобальных океанических течений требует рассмотрения задачи о движении вращающейся жидкости в полной области – от полюса до полюса, то есть задачи о сферическом течении Куэтта. Постановка и результаты решения задачи о течениях, возникающих во вращающихся сферических слоях, и их устойчивости представлены в разделе 2.

Неоднородность течения уже при малых значениях числа Рейнольдса Re , существенная его зависимость от Re , а также замкнутость области движения отличают сферическое течение Куэтта от ставших уже классическими цилиндрического и плоского течений Куэтта – сдвиговых течений между бесконечными коаксиальными вращающимися цилиндрами и дисками. Эти же отличия приводят к большому разнообразию движений и механизмов возникновения неустойчивости течений во вращающихся сферических слоях.

Изучение сферического течения Куэтта представляет интерес для развития общей теории гидродинамической устойчивости и может помочь выявлению основных закономерностей глобальных движений в атмосферах и океанах планет.

1. Завихренность и восстанавливающее действие силы Кориолиса

Известно, что наличие вращения приводит к качественно новым эффектам [1–6]. Так, например, градиент температуры на сфере в невозмущенном состоянии при равномерном распределении источников тепла сферически симметричен. Вращение жидкости вводит дополнительную симметрию – относительно оси вращения, в результате эффективность конвективного переноса оказывается зависящей от полярного угла. Важное влияние вращения состоит в изменении направления горизонтальной скорости частицы, что вынуждает ее двигаться вправо в северном полушарии и влево в южном.

В присутствии вращения в жидкости включается механизм, при помощи которого уже вторичное движение может заметно изменить основное путем перераспределения углового момента. Вторичное движение воздействует на основное путем растяжения вихревых линий и сохранения углового момента. Это происходит при взаимодействии с глобальной циркуляцией атмосферы и великими океаническими и крупномасштабными атмосферными струйными течениями, при взаимодействии с крупномасштабными процессами, вызванными явлением Эль-Ниньо, при возникновении, развитии и разрушении тропических тайфунов, циклонов средних широт, полярных ныряющих циклонов, при диссипации урагана над сушей и многих многих процессах разных временных и пространственных масштабов, происходящих в океане, атмосфере и недрах Земли.

Все эти движения происходят при разной интенсивности взаимодействиях пограничных слоев, вторичных течений, завихренности и углового момента, возникающих в жидкости, заключенной в объеме с вращающимися границами.

Общая задача такого типа – задача о движении несжимаемой вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами – описывается полной системой нелинейных уравнений гидродинамики (уравнений Навье – Стокса и сохранения массы), с соответствующими граничными и начальными условиями [7–9].

Характер движения жидкости в слое между концентрическими коаксиальными сферами, возникающего вследствие вращения одной или обеих граничных сфер относительно их общей оси, определяется тремя параметрами подобия. Это число Рейнольдса

$$Re = \omega_1 r_1^2 / \nu,$$

толщина слоя жидкости

$$\delta = (r_2 - r_1) / r_1,$$

отношение угловых скоростей вращения граничных сфер

$$\omega^* = \omega_2 / \omega_1$$

или аналог числа Россби

$$\omega^{**} = (\omega_2 - \omega_1) / \omega_1.$$

Здесь r_i , ω_i – радиусы и угловые скорости вращения внутренней ($i=1$) и внешней ($i=2$) граничных сфер; ν – постоянный коэффициент кинематической вязкости.

Если движение отнесено к осям координат, вращающимся вместе с жидкостью с постоянной угловой скоростью Ω , то необходимо учесть действие на жидкость центробежной силы инерции и силы Кориолиса.

Формула $\mathbf{U}_{\text{инерт}} = \Omega \times \mathbf{r} + \mathbf{U}_{\text{рот}}$ связывает скорости частицы в инерциальной и вращающейся системе координат. Центробежная сила на единицу массы $1/2(\Omega \times \mathbf{r})(\Omega \times \mathbf{r})$ является консервативной, ее эффект можно считать эквивалентным давлению и включить ее (вместе с имеющимися массовыми силами) в модифицированное давление. Сила Кориолиса $2\Omega \times \mathbf{r}$, в отличие от центробежной, создает эффекты нового типа, в частности, эффекты «упругости» жидкости.

Тривиальное решение $\mathbf{U}_{\text{рот}} = 0$ уравнений, записанных во вращающийся системе координат, отвечает состоянию твердотельного вращения. В инерциальной системе координат $\mathbf{U}_{\text{инерт}} = \Omega \times \mathbf{r}$. К этому состоянию твердотельного вращения естественным образом стремится вязкая жидкость, заключенная в равномерно вращающемся объеме при $\omega^{**} = 0$.

Часто вместо двух из введенных выше безразмерных параметров подобия (число Рейнольдса и соотношение между угловыми скоростями вращения граничных сфер) используются число Экмана

$$E = \nu / \Omega_{\text{ск}} L^2,$$

число Россби

$$\epsilon = U / \Omega_{\text{ск}} L.$$

Здесь L и U – характерная длина и характерная относительная скорость движения частицы; $\Omega_{\text{ск}}$ – угловая скорость, величина скалярная.

Число Экмана по сути – обратное число Рейнольдса. Как и определенное выше число Рейнольдса, число Экмана E является мерой соотношения между типичной силой вязкости и силой Кориолиса, оно мало, когда преимущественным является вращение. Число Экмана в уравнениях движения является множителем при членах с высшими производными и критерием существования вязких пограничных и свободных сдвиговых слоев в жидкости.

В тонких вязких пограничных слоях, располагающихся вдоль граничных поверхностей области течения, тангенциальная компонента скорости приспособляется к ее значению на стенке. Кроме пограничных существуют свободные вязкие сдвиговые слои, стремящиеся сгладить возникающие по каким-либо причинам разрывы профиля скорости в жидкости. Свободные и пограничные сдвиговые слои имеют сложную структуру и толщину порядка $LE\gamma$ (дробный показатель γ может принимать разные значения, например, $1/2$, $1/3$ или $1/4$). Отметим, что концентрация вязкости в тонких слоях приводит к появлению невязкого или маловязкого ядра течения.

Число Россби – аналог введенного выше параметра ω^{**} , определяющего соотношение между относительным движением и глобальным вращением. Являясь отношением конвективного ускорения к ускорению Кориолиса $(\mathbf{UV})\mathbf{U} / (2\Omega \times \mathbf{U})$, число Россби ϵ позволяет оценить относительное значение нелинейных членов. Оно может быть порядка единицы, когда нелинейность существенна, и бесконечно малым в линейной теории.

При малых числах Россби формируются инерционные пограничные слои.

Возможно существование вязкого и инерционного пограничных слоев одновременно. Так при $0 < \epsilon \ll 1$ должен существовать относительно широкий инерционный слой с более тонким вязким слоем (или подслоем) внутри.

Сила Кориолиса

$$F = 2\Omega \times U$$

перпендикулярна оси вращения и вектору скорости частицы, меняет направление движения жидкости, не совершая работы, и линейно зависит от скорости. Сила Кориолиса стремится изменить направление компоненты вектора скорости в плоскости, нормальной вектору Ω , в так называемой поперечной плоскости, в противоположном вращению подвижной системы координат направлению.

На рис. 1 показана нормальная к оси вращения плоскость (x, y), так называемая поперечная плоскость, и направление вращения Ω системы координат. Показаны также компонента U_{xy} скорости частицы жидкости U и направление силы Кориолиса. В представленном примере система координат вращается против часовой стрелки, а сила Кориолиса стремится повернуть направление движения жидкости в направлении по часовой стрелке.

Поскольку зависимость силы Кориолиса от скорости частицы линейная, сила Кориолиса стремится изменить направление компоненты скорости в поперечной плоскости в одинаковой мере при любых значениях и любых направлениях этой компоненты. Сила Кориолиса стремится вернуть частицу в ее первоначальное положение в поперечной плоскости и если сила Кориолиса является определяющей, то частица будет двигаться по траектории, проекцией которой на поперечную плоскость будет окружность со временем обхода $\Omega_{\text{ск}}^{-1}$.

Для движущихся частиц жидкости характерно их сильное взаимодействие посредством градиентов давления. И, поскольку изменения давления (и скорости) в несжимаемой жидкости распространяются с бесконечной скоростью звука, интересно рассмотреть качественную картину воздействия силы Кориолиса не на одну частицу, а на совокупность жидких частиц.

Пусть в некоторой области существует движение с положительной дивергенцией $di/dx + dv/dy > 0$ в поперечной плоскости, то есть площадь, охватываемая проекцией замкнутой жидкой линии на поперечную плоскость, увеличивается. Сила Кориолиса вызывает касательное движение жидкой линии, дающее отрицательный вклад в циркуляцию вокруг жидкой линии (поскольку необходимо поддерживать постоянно циркуляции в абсолютной системе координат). Это новое касательное движение приводит в свою очередь к появлению силы Кориолиса, действующей по нормали к жидкой линии и направленной внутрь рассматриваемой области. В данном случае сила Кориолиса препятствует растеканию, для случая с отрицательной дивергенцией – наоборот.

Таким образом, сила Кориолиса создает сопротивление движениям, приводящим к изменениям площади, охватываемой проекцией замкнутой жидкой

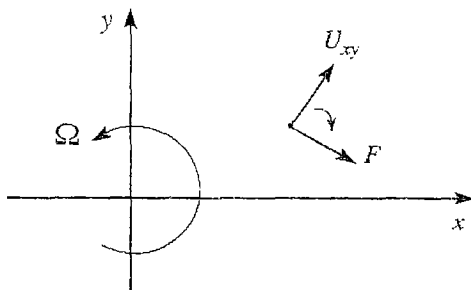


Рис. 1. Действие силы Кориолиса на скорость частицы в поперечной плоскости

линии. Вращающаяся жидкость приобретает свойство упругости, обуславливающее восстанавливающий механизм. Чем больше сила Кориолиса, тем сильнее она препятствует движениям, приводящим к ненулевому расхождению в поперечной плоскости.

Величина восстанавливающего воздействия силы Кориолиса зависит от соотношения между силой Кориолиса и другими силами, действующими на жидкость. Число Россби $\epsilon = U/\Omega_{\text{ск}}L$ удобно для оценки относительного

влияния сил Кориолиса и инерции. При $\epsilon \gg 1$ влияние силы Кориолиса незначительно, при $\epsilon \ll 1$ восстанавливающий эффект максимален и сила Кориолиса будет стремиться препятствовать любому расхождению в поперечной плоскости. Промежуточный случай при числе Россби порядка единицы наиболее интересен из-за возникающих смешанных эффектов.

В динамической метеорологии и океанографии для описания течений в атмосфере и океане используются предположения, позволяющие получить упрощенные системы уравнений.

Некоторые черты крупномасштабных горизонтальных движений достаточно хорошо описываются в приближении мелкой воды на вращающейся сфере в случае, когда непосредственным влиянием вязкости можно пренебречь. На примере этой модели можно получить достаточно простые и наглядные соотношения для завихренности.

При выводе системы уравнений в этом приближении используются упрощающие предположения:

- атмосфера рассматривается как слой несжимаемой жидкости однородной плотности с малой по сравнению с горизонтальным масштабом движений толщиной;

- верхняя граница слоя – свободная поверхность сферической формы; это предположение исключает из рассмотрения движения, находящиеся под определяющим влиянием силы тяжести, например, крупномасштабные приливные движения;

- в качестве переменной используется средняя скорость по области, горизонтальные размеры которой сравнимы с толщиной жидкости; в этом предположении исключаются вертикальные движения и изменения горизонтальной скорости с высотой и остаются в рассмотрении поля течений, заметно изменяющиеся на горизонтальных масштабах не менее 100 км;

- допускается медленное малое изменение толщины слоя H за счет изменения формы дна и свободной поверхности – изменение H на горизонтальных расстояниях порядка H должно быть мало.

С учетом этих предположений уравнения движения слоя жидкости на вращающейся сфере (уравнения движения в описанной модели атмосферы) имеют вид

$$-fu_{\varphi} = -(1/\rho)\partial_r p, \quad (1.1)$$

$$D_t u_{\theta} - (1/R)u_{\varphi}^2 \operatorname{ctg}\theta - fu_{\varphi} = -(1/\rho)(1/R)\partial_{\theta} p, \quad (1.2)$$

$$D_t u_{\varphi} + (1/R)u_{\theta}u_{\varphi} \operatorname{ctg}\theta + fu_{\theta} = -(1/\rho)(1/R)\partial_{\varphi} p. \quad (1.3)$$

Здесь $\{u_r, u_{\theta}, u_{\varphi}\}$ – проекции вектора скорости в сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$, p – модифицированное давление, t – время, ρ – постоянная плотность жидкости; R и $\{\Omega_{\text{ск}} \cos\theta, -\Omega_{\text{ск}} \sin\theta, 0\}$ – радиус и угловая скорость Земли, $f = 2\Omega_{\text{ск}} \cos\theta$ – параметр Кориолиса; $D_t = \partial_t + u_{\theta} \partial_{\theta} / R + u_{\varphi} \partial_{\varphi} / (R \sin\theta)$. Здесь и далее принято обозначение производной $\partial_x F = \partial F / \partial x$.

Из первого уравнения (1.1) системы следует, что вертикальный градиент модифицированного давления всюду уравновешивается вертикальной компонентой силы Кориолиса. Два других уравнения (1.2) и (1.3) демонстрируют важное влияние вращения, состоящее в изменении горизонтальной скорости частицы. Это изменение направлено по нормали к мгновенной скорости и разное в разных полушариях – частица стремится вправо от мгновенного направления движения в северном полушарии, где $\cos\theta > 0$, и влево в южном полушарии, где $\cos\theta < 0$.

Часто в качестве первичной переменной используют не скорость жидкости, а завихренность ω . Это объясняется тем, что завихренность является принципиальной физической характеристикой многих течений. Уравнение для

завихренности в общем виде дает соотношение между конвективной скоростью изменения завихренности и тремя процессами, вызывающими это изменение. Перечислим эти процессы и соответствующие им члены в уравнении:

- растяжение и поворот вихревых линий (за счет инерционных членов);
- возникновение завихренности за счет изменения плотности жидкости (член с градиентом давления);
- диффузионный перенос завихренности от соседних элементов (за счет члена вязкой диссипации). Диффузия завихренности связана с передачей момента вращения от одной частицы другой при наличии градиента момента (стенка, распределенные источники завихренности).

Таким образом, завихренность переносится посредством конвекции и диффузии, то есть с конечной скоростью (в отличие от изменений давления и скорости, которые переносятся в несжимаемой жидкости с бесконечной скоростью). Пространственный и временной масштабы изменений завихренности меньше, чем скорости и давления, и во многих задачах поле завихренности легче вычисляется*, что является немаловажной причиной для использования ω в качестве первичной переменной.

В рассматриваемой модели интерес представляет радиальная компонента завихренности относительно вращающейся системы координат

$$\omega = [\partial_{\theta}(u_{\varphi} \sin\theta) - \partial_{\varphi} u_{\theta}] / (R \sin\theta),$$

уравнение для которой получается из (1.2), (1.3)

$$D_t \omega = u_{\theta} \partial_{\theta} f / R + H^{-1} D_t [H(f + \omega)]$$

и которое может быть записано в очень простом и наглядном виде

$$D_t [(f + \omega) / H] = 0. \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что:

- вертикальная компонента абсолютной завихренности ($f + \omega$) меняется только при движении жидкости в тех областях, где меняется толщина жидкости H ;
- вертикальная компонента относительной завихренности (ω) в слое постоянной толщины меняется только при движениях с изменением широты (так как с широтой меняется параметр Кориолиса f).

Полученные уравнения применимы к течениям с характерным масштабом длины L большим, чем толщина слоя H .

В случае, когда можно пренебречь инерционными членами (геострофическое приближение), уравнения (1.2) и (1.3) принимают вид

$$\partial_{\theta} p = \rho f u_{\varphi} / R, \quad (1.5)$$

$$\partial_{\varphi} p = -\rho f u_{\theta} / (R \sin\theta) \quad (1.6)$$

и описывают геострофический ветер. Уравнение для завихренности (1.4) приводится к виду

$$D_t [f / H] = 0. \quad (1.7)$$

Из последнего уравнения следует, что геострофические течения малого масштаба (на котором не сказывается изменение параметра Кориолиса) должны происходить без изменения толщины слоя H . Крупномасштабные геострофические течения наоборот могут осуществляться только в случае, когда вдоль траектории

* К тому же, несжимаемая жидкость без завихренности (если $\omega=0$ всюду) вообще перестает быть жидкостью, например, она мгновенно останавливается при остановке границ.

каждого элемента жидкости дно слоя опускается по направлению к полюсам.

Отметим, что для многих движений в атмосфере Земли можно пренебречь силами инерции по сравнению с силой Кориолиса, то есть параметр U/fL мал. Так для течений масштаба $L=1000$ км со скоростью $U=10$ м/с (скорость в атмосфере при обычных условиях) и при $\theta=45^\circ$, где $f=1.03 \cdot 10^{-4}$ с, имеем $U/fL=0.01$.

Примером геострофического течения в атмосфере может быть масса вращающегося воздуха, приблизительно симметричная по отношению к своей центральной области, в которой сосредоточена неравная нулю завихренность одного знака. Если знаки относительной завихренности ω и параметра Кориолиса совпадают (против часовой стрелки в северном и по — в южном полушарии), то сила Кориолиса направлена от центра области; давление в центре низкое и такое течение можно назвать циклоном. Течения, в которых относительная завихренность и сила Кориолиса разных знаков, имеют в центре повышенное давление (антициклоны). На рис. 2 схематически показаны циклонические движения в северном и южном полушариях.

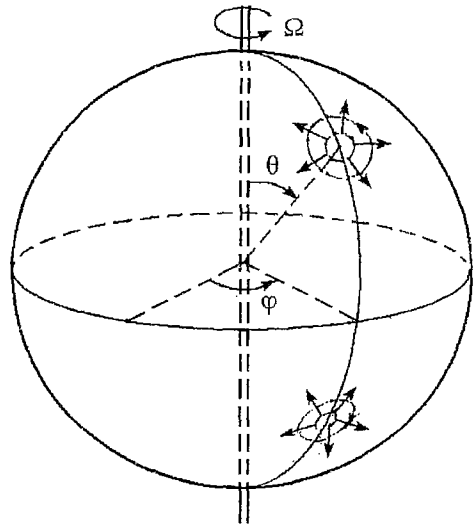


Рис. 2. Геострофические системы циклонов в северном и южном полушариях

Конечно же, геострофическое приближение является относительно грубым. Так сильные ветры, которыми сопровождаются циклонические движения, и многие другие детали не описываются уравнениями в геострофическом приближении.

При необходимости моделирования атмосферных течений с меньшими характерными размерами, протяженность которых составляет доли радиуса Земли, выбирают более локальные системы координат.

Пусть поле течения охватывает лишь малый диапазон широт относительно $\theta=\theta_0$. Тогда удобно ввести координаты

$$x = \varphi R \sin \theta_0, \quad y = (\theta_0 - \theta) R.$$

Легко видеть, что система координат $\{x, y, z\}$, где z направлена вверх, а x и y увеличиваются в восточном и северном направлениях, соответственно, подобна введенной выше сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$.

Для течений с характерными размерами много меньшими радиуса Земли, $L \ll R$, система уравнений движения сводится к форме, соответствующей двумерному течению в плоском слое с возможностью небольших медленных изменений толщины слоя H . Параметр Кориолиса при этом постоянен $f_0 = 2\Omega_{\text{эк}} \cos \theta_0$.

Для некоторых полей течений условие малости характерного размера $L \ll R$ сохраняется, но их относительная завихренность такова, что отношения ω/L и f/R сравнимы. В этом случае нельзя считать параметр Кориолиса постоянным. Воспользуемся аппроксимацией

$$f = f_0 + \beta y,$$

где $\beta = 2\Omega_{\text{эк}} \sin \theta_0 / R$. Эта аппроксимация допускает изменения параметра Кориолиса с координатой y (то есть в направлении север-юг). Изменения небольшие, например, $\beta = 1.62 \cdot 10^{-13}$ см $^{-1}$ с $^{-1}$ при $\theta=45^\circ$, то есть является малым параметром.

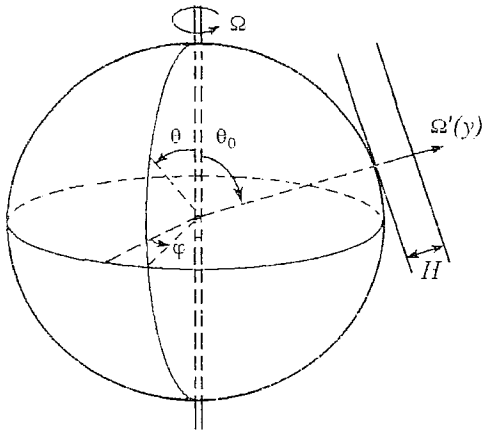


Рис. 3. Иллюстрация к приближению β -плоскости

частности, волны Россби.

Представленные приближения позволяют достаточно просто описать некоторые атмосферные и океанические движения за счет пренебрежения такими факторами, как вертикальные движения, кривизна поверхности, зависимость силы Кориолиса от широты и т.п. Моделирование атмосферных движений и океанических течений, находящихся под определяющим влиянием этих факторов, требует рассмотрения более сложной задачи о движении вращающейся в сферическом слое жидкости в полной области – от полюса до полюса.

2. Сферическое течение Куэтта: перераспределение углового момента и влияние силы Кориолиса

Сферическим течением Куэтта по аналогии с классическими плоским и цилиндрическим течениями Куэтта принято называть нелинейное сдвиговое течение несжимаемой вязкой жидкости между концентрическими сферами, возникающее вследствие вращения одной или обеих граничных сфер вокруг общей оси.

Аналогия, однако, неполная. Чтобы стало ясным не только количественное, но и качественное различие между этими задачами, опишем коротко плоское и цилиндрическое течения Куэтта – течения вязкой несжимаемой жидкости между бесконечными вращающимися дисками и цилиндрами.

Если не вводить сложных определений, то основным течением называется единственное стационарное течение, сформировавшееся при малых значениях числа Рейнольдса и абсолютно устойчивое (не меняющее своей топологии) при любых начальных и граничных условиях. Плоское и цилиндрическое течения Куэтта имеют аналитическое одномерное решение для основного течения.

При малых значениях числа Рейнольдса плоское течение Куэтта описывается автомодельным решением Кармана. С ростом числа Рейнольдса Re на дисках формируются пограничные слои. Поле течения состоит из пограничных слоев на вращающихся со скоростями ω_1 и ω_2 границах (здесь за счет вязкости угловой момент передается от границ слоя к жидкости) и внутренней области, которая вращается как твердое тело с промежуточной между ω_1 и ω_2 скоростью (невязкое ядро течения). Баланс силы Кориолиса и градиента давления приводит к тому, что в пограничный слой на более быстро вращающемся диске жидкость поступает, а на более медленном диске наблюдается ее отток (рис. 4).

Аналитическое решение для невязкого ядра течения одномерно (зависит только от расстояния от оси вращения), имеет одну компоненту скорости и с

ростом числа Рейнольдса Re меняется лишь амплитуда решения. Таких особенностей, которые могут изменить характер течения (например, наличие боковых границ или быстрое противоположное вращение дисков), мы здесь касаться не будем.

Основное течение для цилиндрического течения Куэтта также описывается аналитическим решением. Это – единственное стационарное решение уравнений Навье – Стокса, зависящее только от расстояния от оси вращения r и принимающее заданные значения на стенках вращающихся цилиндров

$$u_r = 0, \quad u_\theta = Ar + B/r, \quad u_z = 0.$$

Здесь $\{u_r, u_\theta, u_z\}$ – проекции вектора

скорости в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$; A и B – константы, определяемые граничными условиями, $A = (r_2^2\omega_2 - r_1^2\omega_1)/(r_2^2 - r_1^2)$, $B = -r_1^2r_2^2(\omega_2 - \omega_1)/(r_2^2 - r_1^2)$.

Аналитическое решение для основного течения между вращающимися цилиндрами одномерно (зависит только от расстояния от оси вращения), имеет одну компоненту скорости и с ростом числа Рейнольдса Re вплоть до критического значения меняется лишь амплитуда решения.

С ростом числа Рейнольдса под влиянием центробежного механизма основное течение теряет устойчивость с соблюдением принципа смены устойчивости и образованием регулярного установившегося осесимметричного вторичного движения в виде стопки наложенных друг на друга торов примерно квадратного сечения – вихрей Тейлора. В результате потери устойчивости этого стационарного вторичного течения возникают периодические во времени волнистые вихри Тейлора.

Поскольку на цилиндрическое течение Куэтта не действуют силы, зависящие от координаты z , одинаковые вихри Тейлора занимают всю область течения: от $-\infty$ до $+\infty$. Отметим также, что механизм потери устойчивости, форма вторичного течения и критическое значение числа Рейнольдса не зависят от толщины слоя жидкости.

Как и в случае с вращающимися бесконечными дисками, мы не обсуждаем вопросы конечности границ и связанных с ними краевых эффектов.

Задача о движении несжимаемой вязкой жидкости во вращающемся сферическом слое, сферическое течение Куэтта (область течения показана на рис. 5, постановку задачи см. в Приложении и [7,9]), не имеет аналитического решения для основного течения. Получены лишь различные приближенные решения, справедливые при некоторых предельных значениях определяющих параметров задачи Re , δ , ω^* . Например, при малых и больших Re , в очень тонких слоях или в случае почти твердотельного быстрого вращения.

Так при малых Re решение может быть получено в виде ряда по целым положительным степеням числа Рейнольдса $U = \sum U_k Re^k$. Все четные члены этого разложения описывают дифференциальное вращение, а нечетные – меридиональную циркуляцию. Выпишем нулевой член U_φ^0 разложения [1], описывающий течение Стокса (когда вязкие члены пренебрежимо малы по сравнению с инерционными), и первый [10], описывающий функцию тока Ψ_{φ^1} меридионального течения

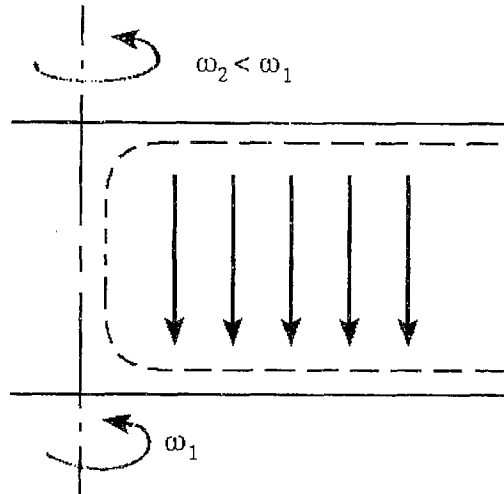
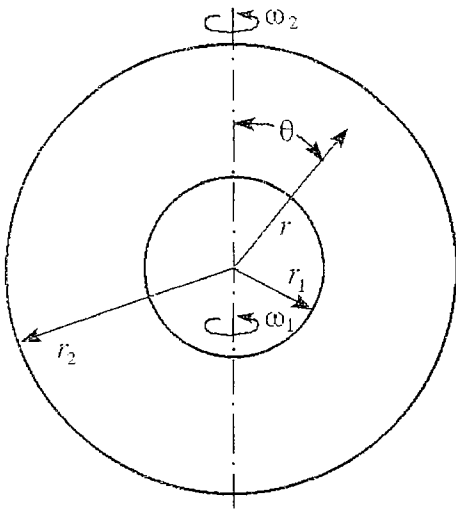


Рис. 4. Область течения между вращающимися дисками



$$U_{\phi}^0 = \frac{[(a^3\omega^* - 1)r^3 - a^3(\omega^* - 1)]\sin\theta}{(a^3 - 1)r^2}, \quad (2.1)$$

$$\Psi_{r\theta}^1 = \Psi(r)P_2^1(\theta)\sin\theta, \quad (2.2)$$

где $\Psi(r) = (Ar^3 + Br^2 + Cr + D)(r-1)^2(r-a)^2/r^2$, коэффициенты A, B, C, D являются функциями a и ω^* .

Таким образом, уже при малых значениях числа Рейнольдса Re течение между вращающимися сферами неоднородно и имеет все три компоненты скорости. Оно осесимметрично, симметрично относительно плоскости экватора и состоит из вращения вокруг оси и меридиональной циркуляции.

Рис. 5. Вид области течения между вращающимися сферами

Вращение вокруг оси происходит с угловой скоростью, равной $U_{\phi}^0/r\sin\theta$, не

зависящей от угла θ . То есть поверхности равной угловой скорости жидкости представляют собой концентрические сферы, а их проекции на меридиональную плоскость (линии равной угловой скорости) являются концентрическими окружностями. Вид меридиональной циркуляции определяется соотношением между угловыми скоростями вращения граничных сфер.

Основные типы меридиональной циркуляции показаны на рис. 6. Циркуляции I и III типов формируются, когда течение в основном определяется вращением внутренней или внешней сфер, соответственно. Циркуляция типа II формируется при смешанном влиянии вращения граничных сфер. На рисунке показаны проекции линий тока на меридиональную плоскость, далее будем называть их линиями тока меридиональной циркуляции.

Замена сферического слоя цилиндрическим (в приэкваториальных областях) или плоским (вблизи полюсов), применяемая для упрощения в прикладных задачах, далеко не всегда оправдана. При переносе результатов, полученных для плоского и цилиндрического течений Куэтта, на течение во вращающемся сферическом слое можно прийти к выводам, неверным не только количественно, но и качественно.

Сферическая геометрия во вращающихся системах приводит к зависимости силы Кориолиса от широты и появлению качественно новых эффектов в течениях жидкости. Например, некоторые явления, стационарные в плоском слое, в сферическом случае приобретают волновую природу. Так, волны Россби, характерные для атмосфер планет и океанов, появляются только в объектах, где

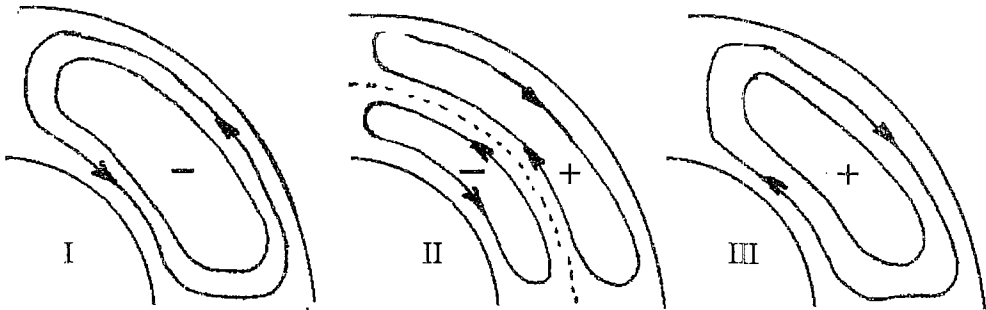


Рис. 6. Основные типы меридиональной циркуляции при малых Re

сила Кориолиса зависит от широты (или, например, от угла наклона между осью вращения и направлением силы гравитации в скрещенных полях).

Кроме того, что основное течение не имеет аналитического решения, неоднородно (зависит от двух координат r и θ) и имеет все три компоненты скорости, оно существенно зависит от числа Рейнольдса. От Re зависит не только амплитуда, но и форма движения – и дифференциального вращения и меридиональной циркуляции.

С ростом числа Рейнольдса интенсивность течения растет, оно трансформируется и теряет устойчивость. Степень трансформации течения перед потерей устойчивости, сам механизм потери устойчивости и вид формирующегося вторичного течения (еще одно отличие от плоского и цилиндрического случаев) существенно зависят от толщины слоя жидкости. Известно [8, 11], что в слоях разной толщины с ростом Re течение проходит одну, две или все три стадии развития: с малоинтенсивной меридиональной циркуляцией, с меридиональной циркуляцией типа «кошачий глаз» (с сепаратрисой внутри слоя – см. стр. 16) и с сильно развитой меридиональной циркуляцией.

Полученные при численном решении начально–краевой задачи результаты [8] позволяют различить слои «толстые», «тонкие» и слои «средней или промежуточной» толщины ($\delta^{00} < \delta < \delta^0$), в зависимости от механизма, управляющего потерей устойчивости основного течения. «Критические» значения толщины слоя δ^{00} и δ^0 зависят от соотношения между угловыми скоростями вращения граничных сфер. В случае вращения одной внутренней сферы $\delta^{00}=0.21$ и $\delta^0=0.43$.

В тонких сферических слоях малоинтенсивная меридиональная циркуляция оказывает слабое влияние на азимутальное течение. Линии равной угловой скорости искажаются очень слабо и почти не отличаются от концентрических окружностей. С ростом Re (или уменьшением числа Экмана $E=1/\Omega_{\text{ск}}L^2$) в слое создаются условия, необходимые для включения центробежного механизма и наступления центробежной неустойчивости, аналогичные условиям в цилиндрическом течении Куэтта.

Линейный анализ устойчивости сферического течения Куэтта (см. Приложение и [11–13]) показал, что основное течение в тонких слоях неустойчиво по отношению к монотонным осесимметричным, но экваториально антисимметричным возмущениям. Наиболее опасное, наиболее быстро растущее возмущение представляет собой систему кольцевых вихрей с чередующимся направлением циркуляции, занимающих всю область течения от полюса до полюса. Число вихрей (номер полюидальной моды критического возмущения) зависит от толщины слоя жидкости; оно тем больше, чем тоньше слой.

На рис. 7 представлены графики изменения собственного значения λ с ростом числа Рейнольдса, полученные при изучении линейной устойчивости основного течения в слое $\delta=0.19$. Наименьшее критическое значение числа Рейнольдса Re_L достигается при значении азимутального волнового числа $m=0$; на том же графике для примера представлена кривая, полученная при $m=1$.

Для сравнения на рис. 7 приведены критические значения числа Рейнольдса Re_S и Re_N . Критическое значение Re_S получено при исследовании линейной устойчивости течения

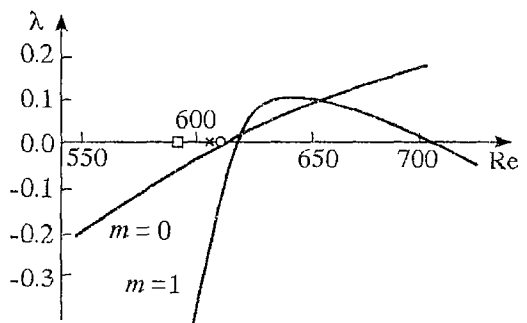


Рис. 7. Зависимость собственного значения от числа Рейнольдса, полученная в тонком слое $\delta=0.19$, \square – $Re_c=594$ – эксперимент (глобальная устойчивость); \ast – $Re_S=609$ – линейная устойчивость (течение Стокса); \circ – $Re_N=615$ – нелинейная задача; $Re_L=616$ – линейная устойчивость (основное течение)

Стокса $U_\phi^0(2.1)$, представляющего собой только вращение по концентрическим окружностям. Критическое значение Re_N получено при решении полной нелинейной задачи (нижняя граница существования вторичного режима).

Критическое значение Re_S оказалось меньше предела линейной устойчивости основного течения Re_L . То есть, перераспределение углового момента меридиональной циркуляцией, которая не учитывается течением Стокса, стабилизирует течение.

На рис. 8 представлены функция тока и схематическая картина линий тока меридионального течения критического возмущения, полученные для основного течения (слева) и для течения Стокса (справа). Наиболее быстро растущим оказалось возмущение, имеющее тороидальную компоненту с четными l и полоидальную – с нечетными, то есть антисимметричное относительно плоскости экватора: максимум функции тока достигается на экваторе и интенсивность циркуляции вихрей быстро падает от экватора к полюсам. Критическим для течения Стокса оказалось возмущение, симметричное по отношению к экватору, интенсивность его вихрей падает по направлению к полюсам очень плавно.

Таким образом даже в тонких слоях, где меридиональная циркуляция малоинтенсивна, необходимо учитывать ее влияние на распределение углового момента в жидкости. Оно оказывается не только количественным – меняется предел устойчивости, но и качественным – меняется сама форма критического возмущения.

Линейный анализ устойчивости имеет дело с бесконечно малыми экспоненциально растущими возмущениями. Он позволяет найти число Рейнольдса Re_L такое, что при $Re > Re_L$ основное течение неустойчиво, и определить форму наиболее быстро растущего, наиболее опасного возмущения. Однако, экспоненциально возмущения растут только на начальном этапе, очень скоро они перестают быть малыми и их поведение не подчиняется линейным уравнениям.

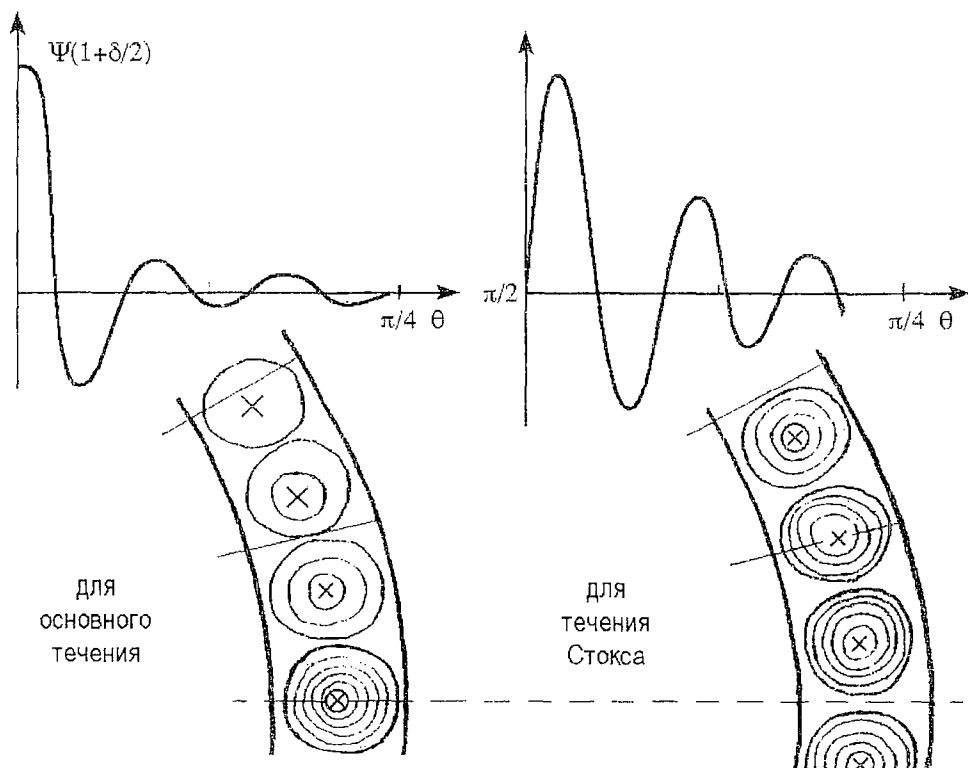


Рис. 8. Функция тока и схематическая картина линий тока критического возмущения, $\delta = 0.19$

Проблема отбора вторичного течения не решается методами линейной теории, форма и амплитуда вторичного течения могут быть определены только нелинейными методами. Численное решение нелинейной задачи показало, что основное течение в тонких сферических слоях теряет устойчивость с соблюдением принципа смены устойчивости и формированием стационарного осесимметричного вторичного течения в виде кольцевых вихрей, типа вихрей Тейлора в цилиндрическом течении Куэтта.

В сферическом слое сила Кориолиса зависит от широты, поэтому здесь условия, необходимые для наступления центробежной неустойчивости, выполняются только вблизи экватора, а не во всей области течения, как во вращающемся цилиндрическом слое. Формирующееся после потери устойчивости основного течения вторичное течение имеет кольцевые вихри, типа тейлоровских, только в приэкваториальной области. Остальная область течения занята «основной» меридиональной циркуляцией, которую кольцевые вихри отжимают на более высокие широты.

На рис. 9 показаны линии тока меридионального течения вторичного режима в близкой критической области Re . Таким образом, вторичный режим оказался симметричным относительно плоскости экватора (как и основное течение), несмотря на отсутствие такой симметрии у критического возмущения.

Детальный анализ перехода между основным и вторичным течениями показал, что этот переход осуществляется через нестационарный экваториально несимметричный режим. На рис. 10 представлены пространственные спектры радиальной (наиболее характерной) компоненты скорости в среднем сечении слоя в разные моменты времени t этого переходного режима. Пространственные спектры показаны отдельно для экваториально симметричной (сплошная линия) и экваториально несимметричной (штриховая линия) ее составляющих.

Основному течению соответствует пространственный спектр U_1 (показан отдельно слева вверху), имеющий только экваториально симметричную составляющую с двумя энергетически почти равноценными максимумами, ответственными за крупномасштабные меридиональные движения (максимум при $l=2$) и мелкомасштабные движения внутри меридиональной циркуляции (при $l=24 \div 26$).

Крупномасштабная часть течения в процессе всего нестационарного нелинейного переходного режима продолжает описываться только экваториально симметричной частью пространственного спектра. Перестройка вторичного максимума связана с появлением антисимметричной относительно экватора составляющей. С ее появлением второй максимум разрушается и перестраивается в двугорбый ($l=18, l=38$, спектр U_1 показан справа вверху), характерный для вторичного двухкольцевого режима с отжатой на более высокие широты основной меридиональной циркуляцией. Экваториально несимметричная часть спектра участвует только в процессе перестройки, нестационарного перехода, а затем быстро уменьшается до нуля.

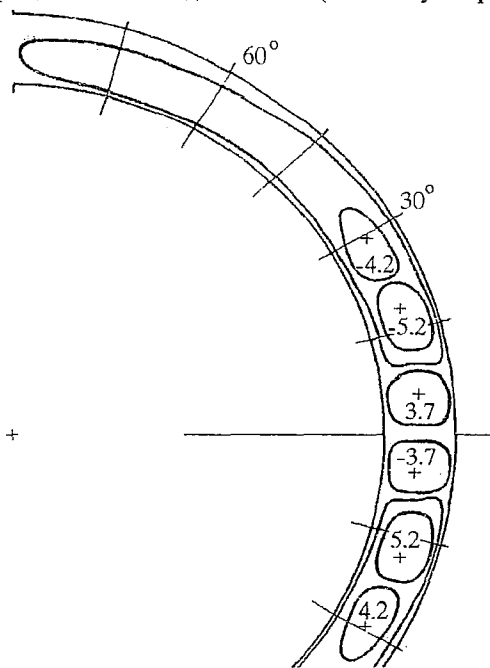


Рис. 9. Меридиональная циркуляция вторичного течения, $\delta = 0.19$

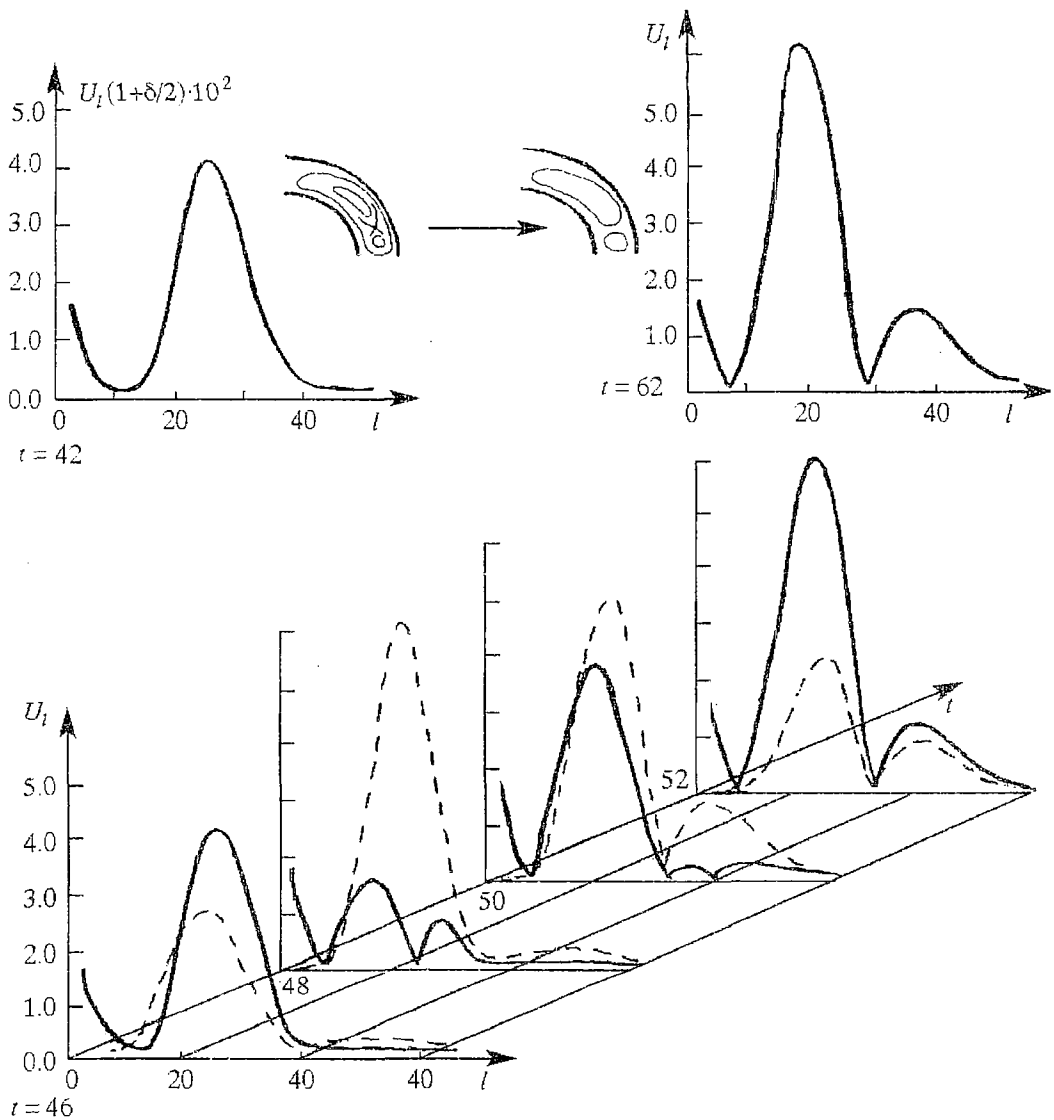


Рис. 10. Эволюция пространственного спектра радиальной компоненты скорости в процессе нелинейного нестационарного перехода ко вторичному режиму, $\delta = 0.19$

На рис. 11 показаны линии тока меридионального течения в разные моменты времени процесса перестройки. Представлена только наиболее интересная приэкваториальная область течения. После установления основного течения с меридиональной циркуляцией типа «кошачий глаз» (при $t=42$) происходит кратковременная потеря симметрии течения относительно плоскости экватора. Образуется вторичное течение с парой кольцевых вихрей в приэкваториальной области и основной меридиональной циркуляцией на более высоких широтах, которое постепенно восстанавливает экваториальную симметрию.

Полученные численно на основе решения нелинейной и линейной задач результаты согласуются с результатами лабораторных экспериментов [14–18].

С ростом числа Рейнольдса при закритических значениях Re формируются режимы с большим числом кольцевых вихрей в области экватора. Количество режимов с кольцевыми вихрями (численно получены все те и только те режимы, что наблюдались в эксперименте) тем больше, чем меньше толщина слоя жидкости δ . Так, если в слое толщины $\delta=0.11$ существуют четыре режима (от двух

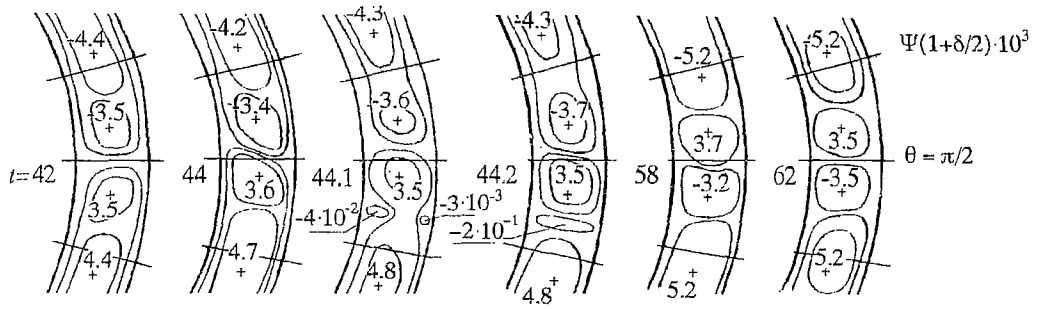


Рис. 11. Картины линий тока в разные моменты времени в процессе перехода ко вторичному режиму, $\delta = 0.19$

до восьми кольцевых вихрей [19]), то в слое $\delta=0.3$ – всего один режим с двумя кольцевыми вихрями.

Представленные на рис. 12 диаграммы переходов между режимами с разным числом кольцевых вихрей (i – количество вихрей в полусфере, полное их число равно $2i$) свидетельствуют о неединственности решения задачи в закритической области значений Re и наличии гистерезиса. Неединственность решения связана с зависимостью от начальных условий и от условий выхода на заданный режим – от условий на всем пути перехода.

В толстых сферических слоях с ростом Re становящаяся все более интенсивной меридиональная циркуляция начинает активно влиять на азимутальное течение.

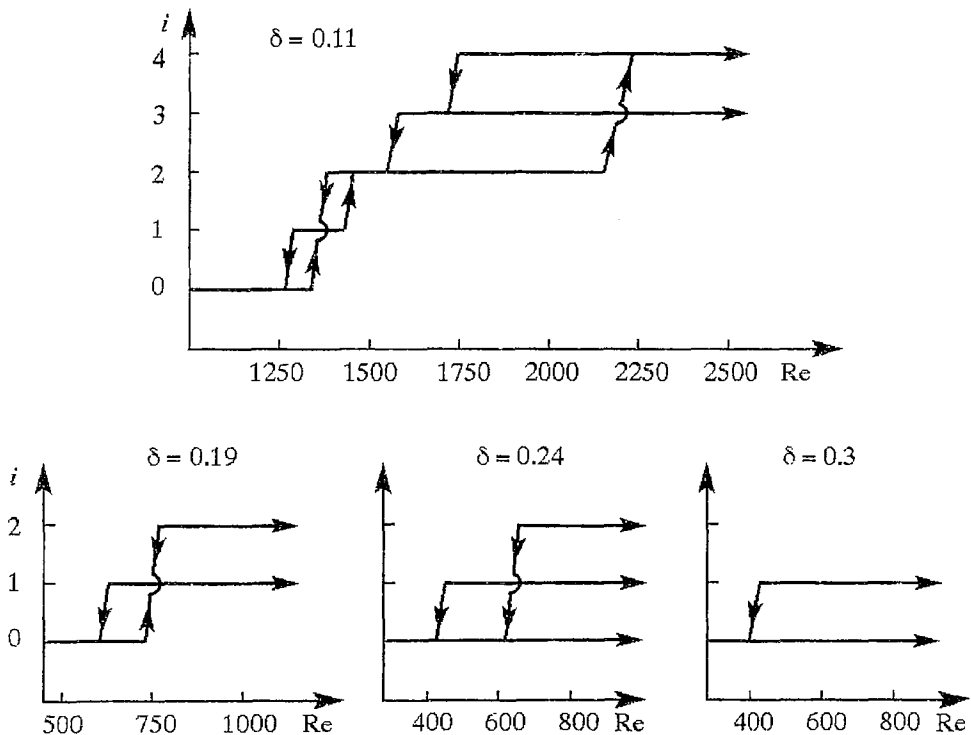


Рис. 12. Диаграммы переходов между режимами с разным числом кольцевых вихрей в слоях разной толщины

На рис. 13 представлен пример такого влияния меридиональной циркуляции на дифференциальное вращение в слое толщины $\delta=1$. При значениях числа Рейнольдса $Re=50, 200$ и 500 показаны линии тока меридиональной циркуляции (а) и линии равной угловой скорости (б) в случае вращения одной внутренней сферы, $\omega^*=0$.

Меридиональное движение, вообще говоря, является движением второго порядка малости по сравнению с азимутальным и не должно оказывать на него заметного влияния. Так оно и есть при $Re=50$ – меридиональное течение малоинтенсивно, а азимутальное почти не отличается от решения Стокса.

В тонких слоях меридиональная циркуляция остается слабой, практически не

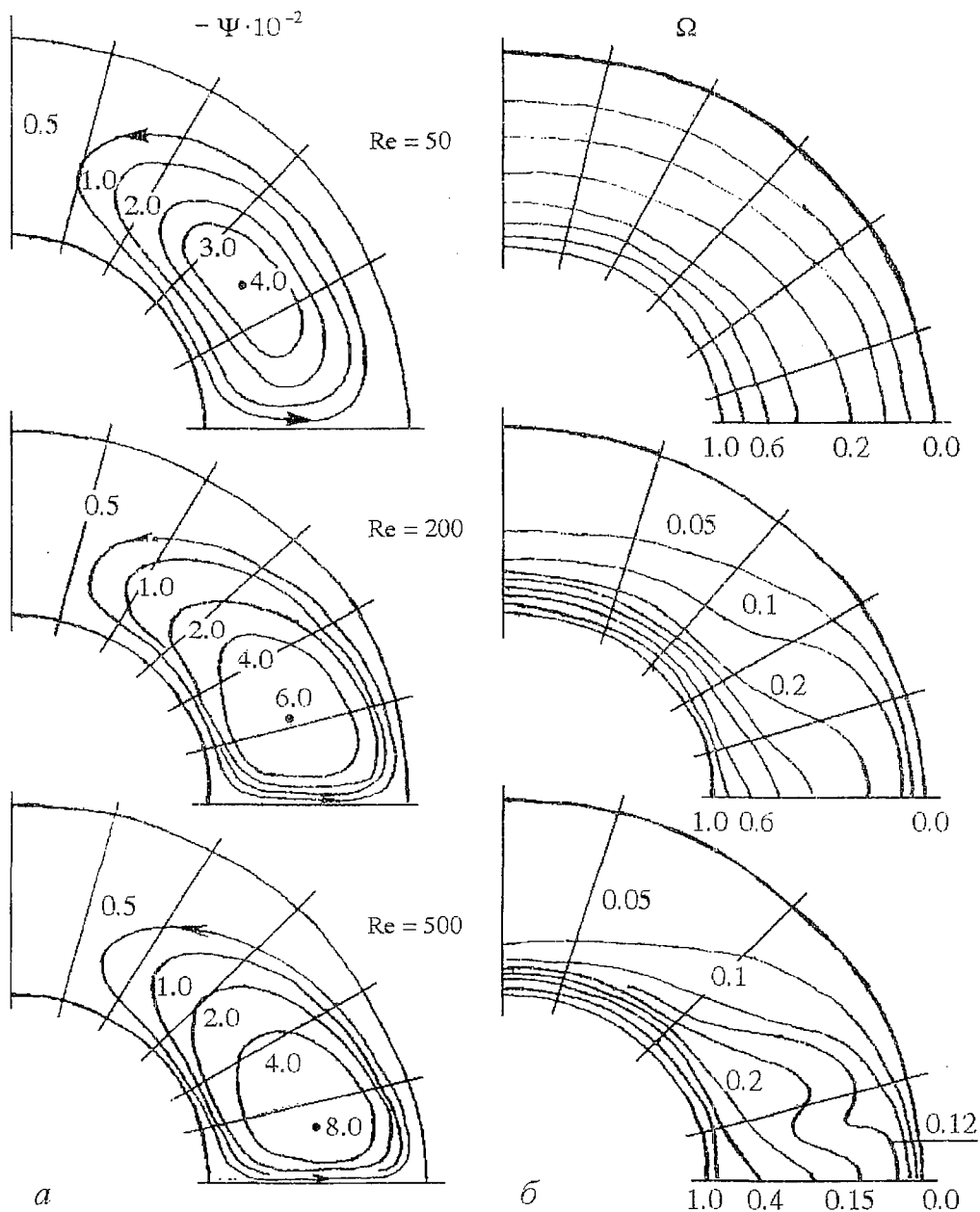


Рис. 13. Изменение картин линий тока (а) и равной угловой скорости (б) с ростом Re в толстом слое $\delta=1$ в случае вращения одной внутренней сферы

влияет на распределение завихренности в жидкости, и с ростом Re создаются условия, благоприятные для развития центробежной неустойчивости. В толстых слоях, однако, течение сильнее зависит от числа Рейнольдса, и с ростом Re картина меняется.

При $Re=200$ меридиональная циркуляция становится более интенсивной, центр ее смещается в сторону плоскости экватора. Изолинии угловой скорости, которые при малых Re представляют собой почти concentрические окружности, с ростом Re начинают искажаться. Наиболее заметно это в центральной области меридионального вихря, где компоненты скорости меридионального течения максимальны. В областях полюсов, прилегающих к внешней неподвижной сфере, интенсивность меридиональной циркуляции уменьшается и здесь образуются застойные зоны.

При $Re=500$ центр ставшей еще более интенсивной меридиональной циркуляции опускается к плоскости экватора. На внутренней и внешней граничных сферах в приэкваториальной зоне формируются экмановские пограничные слои. Вблизи плоскости экватора становится все более интенсивным и узким, приблизительно $7 - 8$ градусов, сдвиговый слой (на рис. 14 более подробно показана экваториальная область). В нем сосредоточен практически весь перенос жидкости от внутренней сферы к внешней, перенос той же массы жидкости обратно от внешней сферы к внутренней осуществляется в области, почти в десять раз большей.

Сравнение картин линий равной угловой скорости жидкости при $Re=50, 200$ и 500 показывает, что угловая скорость уменьшается в средней части приэкваториальной области за счет сгущения линий в сформировавшихся на сферах пограничных слоях. Самые заметные изменения азимутальной скорости можно видеть в центре меридионального вихря — здесь происходит резкое уменьшение угловой скорости в небольшой области, возникают резкие градиенты и формируются перегибы в азимутальной компоненте скорости.

Таким образом, меридиональная циркуляция перераспределяет угловой момент в жидкости, и условия, необходимые для центробежной неустойчивости, не реализуются. Причиной потери устойчивости основного течения в толстом слое могут стать:

- неустойчивость, связанная с перегибами в профиле азимутальной скорости;

- неустойчивость свободного сдвигового слоя на экваторе.

Механизмы возникновения неустойчивости в этих двух случаях принципиально различны: неустойчивость вязкого сдвигового слоя или маловязкого ядра течения с перегибом скорости.

В экваториальном сдвиговом слое (очерчен штриховой линией на рис. 14) частица жидкости движется от внутренней сферы к внешней с радиальной компонентой скорости U (она максимальна в середине слоя и обращается в ноль на границах) и одновременно вращается вокруг оси с линейной азимутальной скоростью W ; третья, нормальная к плоскости экватора, компонента скорости V здесь очень мала (она резко растет в пограничных слоях на граничных

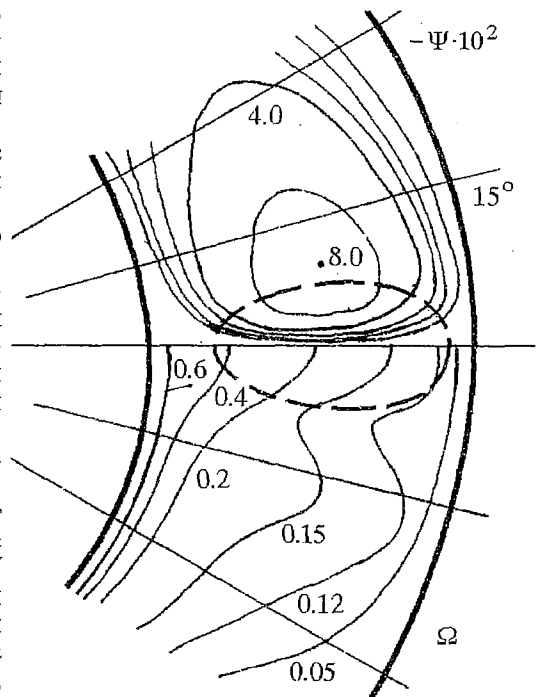


Рис. 14. Фрагмент картин линий тока меридионального течения (в верхней части) и изолиний азимутальной скорости (в нижней части), приведенных на рис. 13 при $Re = 500$

сферах). Таким образом в области экватора осуществляется плоское движение частиц жидкости по спиральным траекториям; при приближении к внешней сфере частицы отклоняются вверх в северном полушарии и вниз в южном.

На одной из конференций эта область течения была названа «радиально-экваториальной струей» [20], по-видимому, по аналогии с радиальным течением в экваториальной плоскости, которое возникает при вращении сферы в безграничной жидкости. Автор доклада [20] именно в неустойчивости «радиально-экваториальной струи» видит причину потери устойчивости основного течения в толстых слоях.

В [14] высказано предположение, что ответственным за неустойчивость в толстых слоях является механизм невязкой релеевской неустойчивости. Это предположение представляется нам верным, однако, требует строгого обоснования.

Связана ли неустойчивость в толстых слоях с перегибами в профиле азимутальной скорости или с «радиально-экваториальной струей», невязкий или вязкий механизм ответствен за неустойчивость основного течения в толстом сферическом слое, покажут дальнейшие исследования.

Решение линейной задачи об устойчивости показало, что течение в толстых слоях устойчиво по отношению к осесимметричным возмущениям. Критическим для основного течения в толстых слоях является немонотонное неосесимметричное антисимметричное по отношению к плоскости экватора возмущение.

Форма критического возмущения зависит от толщины слоя жидкости; азимутальное (полоидальное) волновое число m , определяющее периодичность возмущения в направлении вращения, уменьшается с ростом толщины слоя жидкости. На рис. 15 представлены нейтральные кривые в плоскости (Re, m) , полученные в слоях разной толщины. Критические возмущения имеют вид бегущих азимутальных волн с $m=6, 4$ и 3 , соответственно, со сложной полоидальной структурой; $Re_c=1150, 493$ и 417 , соответственно.

Сравнение с экспериментом [14, 17] дает хорошее согласие критических значений числа Рейнольдса, полученных из эксперимента и по линейной теории. Как показали эксперименты, вторичное течение в толстых слоях трехмерно и нестационарно.

Следует отметить, что номер азимутальной моды вторичного течения, полученного в эксперименте при $\delta=0.54$ меньше номера азимутальной моды наиболее опасного возмущения, который дает линейная теория в слое $\delta=0.5$. Наиболее быстро растущим оказалось возмущение с азимутальным волновым числом $m=6$, тогда как в эксперименте после потери устойчивости основного течения устанавливалось вторичное течение с $m=5$. Вряд ли это можно объяснить различием в толщине слоя ($\delta=0.54$ в лабораторном эксперименте и $\delta=0.5$ в численном), поскольку в лабораторном эксперименте тот же номер азимутальной моды $m=5$ получен и для вторичного течения в слое еще меньшей толщины, при $\delta=0.398$.

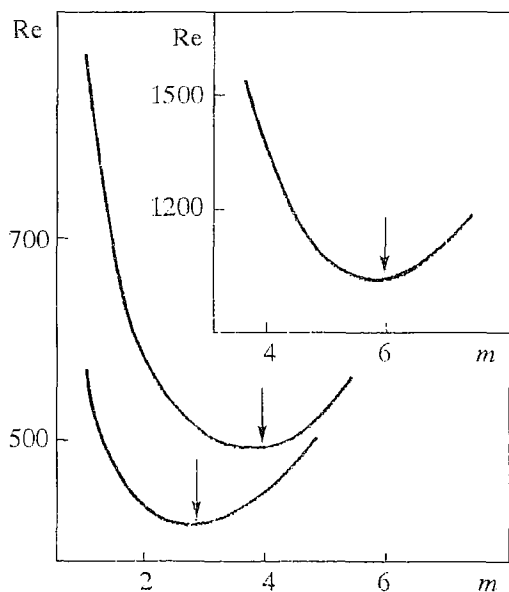


Рис. 15. Нейтральные кривые устойчивости основного течения в толстых слоях $\delta = 0.5; 1.0; 2.0$ (сверху вниз)

Почти твердотельное быстрое вращение. В качестве примера приведем один из очень интересных случаев движения во вращающемся сферическом слое – почти твердотельное быстрое вращение, который может послужить объяснению экваториального ускорения, наблюдаемого в атмосферах планет-гигантов.

В предельном случае при очень больших числах Рейнольдса и очень близких угловых скоростях вращения граничных сфер Праудмен и Стюартсон [21, 22] получили аналитическое решение методом сращиваемых внутренних и внешних асимптотических разложений. Оказалось, что параллельный оси вращения тонкий свободный сдвиговый слой сложной структуры (соосный цилиндр с радиусом, равным радиусу внутренней сферы) отделяет внутреннее невязкое ядро течения с экмановскими пограничными слоями на сферах от внешней области твердотельного вращения.

На рис. 16 показана структура течения, формирующегося в сферическом слое в задаче Стюартсона – Праудмена. В невязком ядре жидкость вращается с угловой скоростью промежуточной между скоростями вращения граничных сфер; меридиональное течение представляет собой движение по цилиндрическим поверхностям от медленно вращающейся к более быстро вращающейся сфере, см. рис. 16, а. Оценочные по числу Рейнольдса толщины пограничных слоев изображены на рис. 16, б [22].

Возвратное течение осуществляется в экмановских пограничных слоях и в свободном сдвиговом слое, сложная структура которого схематически показана на

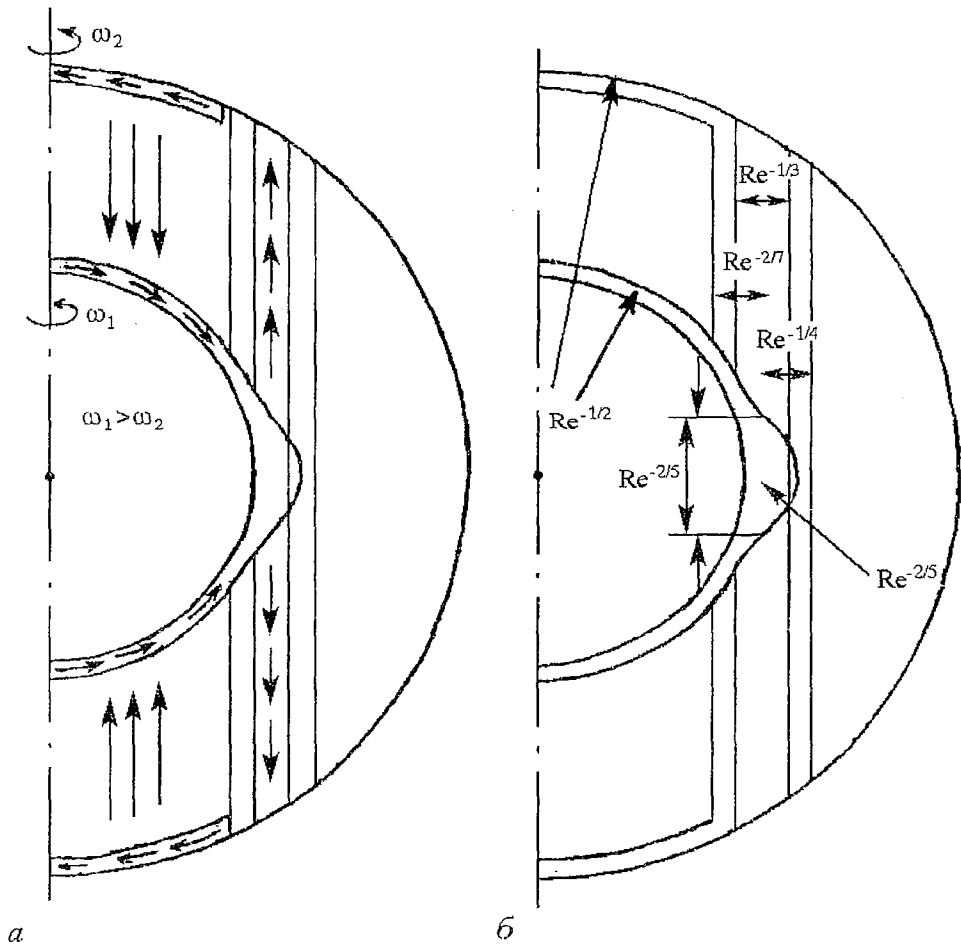


Рис. 16. Схематический вид линий тока меридионального течения (а) и структура пограничных слоев [22] (б), формирующихся в задаче Стюартсона – Праудмена в предельном случае при быстром почти твердотельном вращении

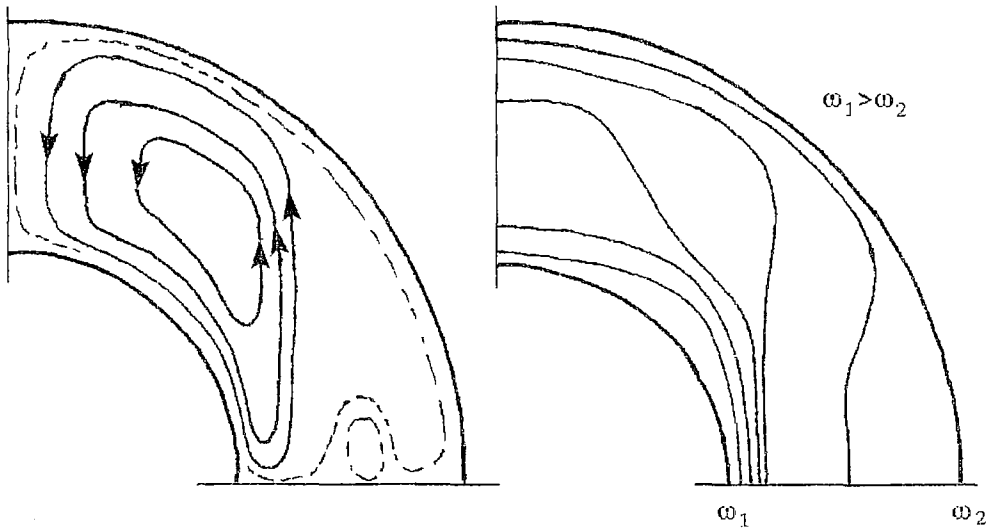


Рис. 17. Тенденция к формированию свободного сдвигового слоя при средних значениях параметров

правом рисунке. В разных областях «многослойного» свободного сдвигового слоя осуществляется возвратный поток жидкости, сглаживается разрыв азимутальной скорости, сглаживаются разрывы во второй производной азимутальной скорости и в перпендикулярной оси вращения компоненте меридиональной скорости.

Численное решение задачи в общем случае, проведенное нами на основе нелинейных нестационарных уравнений Навье – Стокса, позволило проследить формирование почти цилиндрического свободного сдвигового слоя и экмановских пограничных слоев на сферах с ростом числа Рейнольдса. Тенденция к формированию свободного сдвигового слоя выявляется уже при средних значениях числа Рейнольдса. Пример такого течения (линии тока меридионального течения и линии равных угловых скоростей) показан на рис. 17.

Формирование свободного сдвигового слоя наблюдалось при разных граничных условиях на внешней сфере: при численном решении кроме кинематического условия прилипания задавалось динамическое условие с непрерывно распределенными вязкими напряжениями. Если в первом случае свободный цилиндрический сдвиговый слой опирается на пограничные экмановские слои на внутренней и внешней граничных сферах, то во втором случае он выходит на внешнюю границу сферического слоя и приводит к резкому изменению угловой скорости на поверхности.

Проведенные оценки позволяют предположить, что выходом сдвигового слоя на поверхность может быть объяснено экваториальное ускорение, наблюдаемое в атмосферах планет-гигантов.

На рис. 18 схематически показана структура крупномасштабных движений в атмосфере Юпитера, полученная на основании результатов [23–28] и сведений об атмосфере этой планеты [29,30]. Существенная зависимость

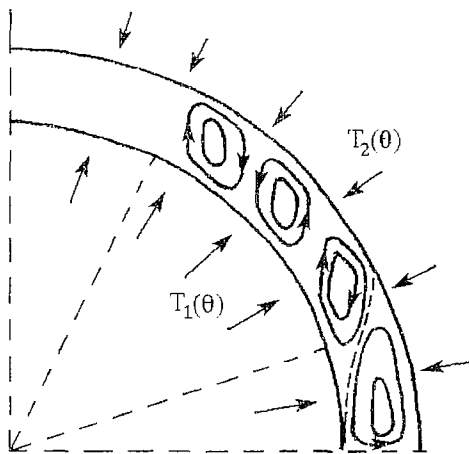


Рис. 18. Схематический вид структуры глобальных течений

термодинамических характеристик во вращающемся сферическом слое от широты приводит к тому, что структура движений на разных широтах различна.

На средних широтах крупномасштабная конвекция осесимметрична. Сформировавшиеся конвективные ячейки образуют восходящие теплые и нисходящие холодные потоки, соответствующие зонам и поясам в атмосфере Юпитера. Сила Кориолиса разворачивает эти потоки (см. раздел 1) и создает антициклонную завихренность в зонах и циклоническую в поясах.

Вблизи экватора формируется динамическая зона с очень слабой меридиональной циркуляцией, слабой конвекцией, максимальным солнечным подогревом и экваториальной струей. Динамическая зона ограничена свободным сдвиговым слоем типа слоя, возникающего в задаче Стюартсона – Праудмена (см. рис. 16 и 17), вдоль слоя угловой момент выносится в верхние слои атмосферы и относительная линейная скорость там может быть равна $(\omega_1 - \omega_2)r_2$.

Вблизи полюсов солнечный подогрев слабее, чем на экваторе, роль вращения возрастает, формируются трехмерные конвективные ячейки.

Заключение

Таким образом, при численном и лабораторном моделировании динамических и термодинамических процессов в атмосферах, океанах и недрах планет необходимо учитывать определяющее влияние вращения планеты и кривизны поверхности. Вращение является совершенно необходимым фактором для циркуляции большого масштаба в атмосфере и океане и большинства мелкомасштабных течений. Кривизна поверхности, форма области течения оказываются определяющими для основного и для вторичных течений, которые из-за нелинейных взаимодействий могут оказывать заметное влияние на развитие результирующих термодинамических процессов.

Влияние завихренности и восстанавливающее действие силы Кориолиса рассмотрены на примерах достаточно простых моделей, используемых в динамической метеорологии и океанографии: приближение мелкой воды для жидкости, вращающейся на сфере, приближение β -плоскости, а также на течениях, возникающих между вращающимися бесконечными дисками и цилиндрами. Зависимость силы Кориолиса от широты оказывается принципиально важной для движений разных масштабов.

Во многих случаях это влечет за собой необходимость изучения движений, формирующихся во вращающихся сферических слоях и их устойчивости. Проведено численное решение нелинейной задачи об осесимметричном сферическом течении Куэтта и линейной задачи об его устойчивости по отношению к малым трехмерным возмущениям. Приведем сводку основных результатов:

– основное течение состоит из азимутального вращения вокруг оси и меридиональной циркуляции и с ростом числа Рейнольдса в зависимости от толщины слоя жидкости теряет устойчивость в одной из трех стадий развития меридиональной циркуляции: малоинтенсивная меридиональная циркуляция, меридиональное течение типа «кошачий глаз» и сильно развитая меридиональная циркуляция;

– течение в тонких слоях теряет устойчивость на стадии малоинтенсивной меридиональной циркуляции в результате центробежной неустойчивости с соблюдением принципа смены устойчивости; критическим является осесимметричное несимметричное относительно плоскости экватора возмущение. Численное решение нелинейной задачи показало, что формирование вторичного течения происходит в результате нелинейного нестационарного переходного режима, в ходе которого основное течение на некоторое время теряет одну из своих симметрий – симметрию относительно плоскости экватора (затем в процессе перехода она восстанавливается). Меридиональная циркуляция

вторичного течения состоит из пары кольцевых вихрей типа тейлоровских, отжимающих «основную» меридиональную циркуляцию на более высокие широты. В закритической области Re обнаружены неединственность течения и явление гистерезиса:

– меридиональная циркуляция в толстых слоях оказывает заметное влияние на основное дифференциальное вращение, перераспределяет угловой момент в жидкости, и в результате условия, необходимые для центробежной неустойчивости, не реализуются. Формирующиеся перегибы в профиле азимутальной скорости по-видимому служат причиной потери устойчивости основного течения. Линейный анализ устойчивости показал, что критическим для основного течения в толстых слоях является немонотонное неосесимметричное возмущение, антисимметричное относительно плоскости экватора. Форма критического возмущения зависит от толщины слоя жидкости; тороидальное (азимутальное) волновое число m , определяющее периодичность возмущения в направлении вращения, уменьшается с ростом толщины слоя жидкости;

– рассмотрено течение во вращающемся сферическом слое в случае почти твердотельного быстрого вращения с разными граничными условиями на внешней сфере (кроме кинематического условия прилипания задавалось динамическое условие с непрерывно распределенными вязкими напряжениями), которое может послужить объяснению экваториального ускорения, наблюдаемого в атмосферах планет-гигантов, например, в атмосфере Юпитера.

При изучении многопараметрических процессов, какими являются термодинамические процессы в системе океан-атмосфера, разумно искать понимание отдельных явлений и управляющих физических механизмов посредством их моделирования. Численное моделирование предоставляет очень важную в таких случаях возможность выделить определенные процессы и рассмотреть их независимо в контролируемых условиях на основе ясной математической постановки и с минимальным числом основополагающих допущений и искомым переменных. По нашему мнению, задача о движениях во вращающихся сферических слоях при различных динамических и тепловых воздействиях может служить для этих целей – быть основой для изучения физических механизмов, управляющих термодинамическими процессами в атмосфере Земли и других планет. Эффекты, связанные с неустойчивостью, с неединственностью решений и с гистерезисом особенно важны в природных процессах.

Приложение

Постановка и метод решения задачи о сферическом течении Куэтта (нелинейной задачи) [7, 9]. Движение несжимаемой вязкой жидкости во вращающемся сферическом слое описывается начально-краевой задачей

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla P + Re^{-1} \Delta \mathbf{U}, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$U = V = 0, \quad W = \sin \theta \quad \text{при } r = 1,$$

$$U = V = 0, \quad W = \omega a \sin \theta \quad \text{при } r = 1 + \delta = a,$$

$$U = U^*, \quad V = V^*, \quad W = W^* \quad \text{при } t = 0;$$

в предположении осевой симметрии необходимо учесть, что $\partial_\varphi = 0$ и добавить граничное условие на оси

$$\partial_\theta U = V = W = 0 \text{ при } \theta = 0, \pi.$$

Здесь $\{U, V, W\}$ – проекции вектора скорости \mathbf{U} в сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$, P – давление, t – время, r_i, ω_i – радиусы и угловые скорости вращения внутренней ($i=1$) и внешней ($i=2$) граничных сфер; Re, δ, ω^* – введенные в первой части число Рейнольдса, толщина слоя жидкости и отношение угловых скоростей вращения граничных сфер – параметры подобия, определяющие характер течения; за характерные масштабы длины, времени, скорости и давления приняты $r_1, \omega_1^{-1}, r_1 \omega_1, \rho r_1^2 \omega_1^2$, соответственно; ν и ρ – постоянный коэффициент кинематической вязкости и плотность жидкости.

Едва ли не единственной возможностью упростить поиск решения, заложенной в самой задаче, является сферическая геометрия области течения. Это позволяет искать решение системы (1) в виде рядов по сферическим гармоникам $Y^m(\theta, \varphi) = P^m(x) \exp(im\varphi)$, $x = \cos\theta$ с коэффициентами (амплитудами), зависящими только от r и t . При поиске осесимметричного основного течения можно ограничиться представлением решения в виде рядов по присоединенным функциям Лежандра $P^m(x)$, $m=0, 1$

$$\begin{aligned} U(r, \theta, t) &= \sum_{l=0}^L U_l(r, t) P_l^0(x), \\ V(r, \theta, t) &= \sum_{l=1}^L V_l(r, t) P_l^1(x), \\ W(r, \theta, t) &= \sum_{l=1}^L W_l(r, t) P_l^1(x) + \omega^0 r P_1^1(x), \\ P(r, \theta, t) &= \sum_{l=0}^L P_l(r, t) P_l^0(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $U^0(r, \theta) = \{0, 0, \omega^0 r P_1^1(x)\}$ – стационарное решение задачи при $Re \rightarrow 0$ (нулевой член в разложении решения по степеням Re , см. (2.1)). Оно выделено, чтобы искомые функции были приблизительно одного порядка, а граничные условия однородными. L – число удерживаемых членов в рядах определяется параметрами задачи.

Подстановка рядов (2) в систему (1) позволяет разделить переменные и расщепить линейные части уравнений системы относительно полюидального волнового числа l .

Более сложным является вопрос преобразования нелинейных членов уравнений. Для полного разделения переменных необходимо преобразовать нелинейные члены таким образом, чтобы они также могли быть представлены в виде рядов по функциям Лежандра, то есть найти коэффициенты их разложения по соответствующим каждому уравнению присоединенным функциям P^0 или P^1 . Для этого мы использовали промежуточное переразложение нелинейных членов по полиномам Чебышева.

Полученная система линейных дифференциальных уравнений для амплитуд $\{U_l, V_l, W_l, P_l\}$, являющихся функциями r и t , решается численно методом матричной прогонки. Стационарное решение, если оно существует, находится методом установления при $t \rightarrow \infty$. Поскольку используется явно-неявная схема (инерционные члены уравнений вычисляются по значениям скорости с предыдущего временного слоя), выбор шага по времени требует некоторой аккуратности.

Заметим, что в этой задаче, как, впрочем, и всегда при использовании спектральных методов, следует с большой осторожностью относиться к обрезанию рядов (2), описывающих решение. При недостаточно точном описании решения можно получить не только количественно, но и качественно неверные результаты.

Трудность выбора L определяется, в частности, тем, что в критической ситуации появляются движения заметно отличающиеся своими масштабами от основной циркуляции. Поэтому быстрое спадание амплитуды пространственного спектра с ростом l может ничего не определять – основное течение является решением уравнений, но неустойчивым, и следующий максимум пространственного спектра появится на гораздо более высоких гармониках. Необходимое количество членов в рядах зависит от значений всех трех определяющих параметров задачи.

Постановка и метод решения линейной задачи об устойчивости основного течения [11, 13]. Отсутствие аналитического решения для основного течения и зависимость его от числа Рейнольдса, зависимость основного течения от двух координат и наличие всех трех компонент скорости даже при малых значениях числа Рейнольдса заметно усложняют изучение устойчивости движений во вращающихся сферических слоях. Линейный анализ их устойчивости относительно нормальных возмущений сводится к решению спектральной задачи на собственные значения для системы уравнений в частных производных и представляет собой сложную проблему – успешных попыток ее решения при конечных значениях определяющих параметров пока нет.

Для решения задачи об устойчивости основного течения по отношению к малым возмущениям нами используется подход, заключающийся в анализе асимптотики возмущения при $t \rightarrow \infty$ [11, 13]. Спектральная задача при этом не решается. Эта методика уже использовалась ранее при изучении устойчивости колебательной конвекции. Опыт показал эффективность применения такого подхода к задаче об устойчивости движений в сферическом слое.

Численно полученное в результате решения начально–краевой задачи (1) при заданных значениях параметров (Re, δ, ω^*) основное течение $\mathbf{U}(r, \theta)$, $P(r, \theta)$ исследуется на устойчивость относительно малых возмущений $\mathbf{u}(r, \theta, \varphi, t)$, $p(r, \theta, \varphi, t)$. Из-за неоднородности основного течения поведение малых возмущений также описывается начально–краевой задачей для системы уравнений в частных производных с нулевыми граничными и заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla p + Re^{-1} \Delta \mathbf{u}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ при } r = 1, r = 1 + \delta, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^*, \text{ при } t = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Вывод об устойчивости основного течения делается на основании анализа асимптотического поведения возмущения при $t \rightarrow \infty$. Для каждого нового значения числа Рейнольдса задачу приходится решать заново, так как от Re зависит не только амплитуда, но и форма основного течения. Такой подход позволяет определить критическое значение числа Рейнольдса Re_c и вид наиболее опасного, наиболее быстро растущего возмущения.

Всякий соленоидальный вектор может быть представлен суммой полоидального и тороидального полей $\mathbf{u} = \operatorname{rot}^2 \mathbf{S} + \operatorname{rot} \mathbf{T}$. Запишем их потенциалы $\mathbf{S} = \{S, 0, 0\}$ и $\mathbf{T} = \{T, 0, 0\}$ в виде рядов по сферическим гармоникам $Y_l^m = P_l^m(x) \exp(im\varphi)$, $x = \cos \theta$ и получившиеся ряды для компонент скорости возмущения

$$\begin{aligned} u &= \sum_{l,m} [l(l+1)/r^2] S_l^m P_l^m \exp(im\varphi), \\ v &= \sum_{l,m} [1/(r \sin \theta) T_l^m \partial_\varphi P_l^m + (1/r) \partial_\theta S_l^m \partial_\varphi P_l^m] \exp(im\varphi), \\ w &= \sum_{l,m} [(-1/r) T_l^m \partial_\theta P_l^m + 1/(r \sin \theta) \partial_\theta S_l^m \partial_\varphi P_l^m] \exp(im\varphi), \end{aligned}$$

подставим в систему линейных уравнений. Комплексные амплитуды T_l^m , S_l^m потенциалов \mathbf{S} и \mathbf{T} – функции только r и t .

Коэффициентами в уравнениях, описывающих линейную задачу, являются компоненты скорости основного течения \mathbf{U} и их производные по r и θ . Они не зависят от азимутальной координаты ϕ , и в результате подстановки рядов переменные по ϕ разделяются. Для каждого значения азимутального волнового числа m получается отдельная система уравнений.

Однако, из-за неоднородности основного течения \mathbf{U} части уравнений $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{u}+(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{U}$ остаются неоднородными по θ , и уравнения невозможно преобразовать так, чтобы переменные разделились полностью. Переменные по волновому полоидальному числу l разделяются только в линейных частях уравнений, что сильно усложняет решение задачи. Для примера выпишем уравнение для T_l^m

$$\partial_t T_l^m - \text{Re}^{-1} \Delta_l T_l^m = N_l^m \int_{-1}^1 f^m(r, x, t) P_n^m(x) dx,$$

здесь $N_l^m = 2(l+m)! / [(2l+1)(l-m)!]$ – норма, f^m – комбинация нелинейных по θ членов уравнений, включающая и их производные по θ .

Способ нахождения коэффициентов разложения неоднородных частей по соответствующим полиномам, примененный нами при решении нелинейной задачи, – промежуточное переразложение по функциям Чебышева – здесь не может быть использован, поскольку простой связи функций Чебышева с присоединенными функциями Лежандра (как при $m=0, 1$) для более высоких порядков ($m > 1$) уже не существует. Для нахождения нелинейных по θ частей уравнений мы использовали квадратуры интерполяционно ортогонального типа.

Поиск критического возмущения. Для исследования устойчивости течения в слое толщины δ относительно возмущения с азимутальным волновым числом m , характеризующим периодичность возмущения в направлении вращения, при переходе к очередному значению числа Рейнольдса бралось соответствующее основное течение, численно полученное при выбранном Re .

Скорость роста возмущения вычислялась отдельно для полоидальной (v_l) и тороидальной (μ_l) компонент скорости, для антисимметричной (μ_{2l}, v_{2l+1}) и симметричной (μ_{2l+1}, v_{2l}) по отношению к плоскости экватора их составляющих.

Зависимость малых возмущений от времени вблизи порога устойчивости заключена в экспоненциальном множителе $\exp \lambda t$, где λ – декремент, определяющий развитие возмущения во времени. Если декремент принимает вещественное значение – возмущение монотонно затухает при $\lambda < 0$ и растет при $\lambda > 0$. Если $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ – возмущение осциллирует с частотой λ'' ; знаком λ' определяется, затухает оно или растет. Для устойчивости течения необходимо, чтобы вещественные части декрементов всех нормальных возмущений были отрицательными. Появление в спектре возмущения с положительным λ' означает неустойчивость течения по отношению к этому возмущению.

В случае замкнутой полости спектр нормальных возмущений дискретен; есть счетная последовательность характеристических декрементов – собственных значений и соответствующих им собственных функций. Пусть амплитуды возмущения, временную асимптотику которых мы нашли, представлены в виде рядов по собственным функциям спектральной задачи, например, $T_l^m(r, t) = \sum T_n(r) \exp \lambda_n t$. Перенумеровав собственные функции так, что $\lambda_n' > \lambda_{n+1}'$, получим условие неустойчивости течения: $\lambda_1' > 0$. Зная асимптотическое поведение T_l^m при $t \rightarrow \infty$, эту величину легко определить. Например, если $\lambda_1^i = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_l^m \approx T_1 \exp \lambda_1 t \text{ и тогда } \lambda = \lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/T_l^m) \partial_t T_l^m.$$

В случае $\lambda_1^i \neq 0$ определение λ_1' несколько более громоздко.

Применяемая методика позволяет при каждом заданном значении азимутального волнового числа m определить скорость роста наиболее быстро растущего возмущения, его осцилляции и форму – то есть форму и поведение во времени наиболее опасной при выбранном m меридиональной структуры возмущения. Информации о других меридиональных структурах с тем же m получить нельзя, так как с ростом t они поглощаются наиболее быстро растущей. Однако, мы считаем такой, не дающий полной информации, подход оправданным, так как в присутствии вращения широтная и радиальная зависимости в уравнениях не разделяются и решение полной проблемы собственных значений требует гораздо более сложной вычислительной процедуры.

Найдя нейтральное (с нулевой скоростью роста) возмущение с заданным азимутальным волновым числом m , получим критическое значение числа Рейнольдса $Re_L(\delta, \omega^*, m)$, соответствующее возникновению неустойчивости относительно возмущения с длиной волны в азимутальном направлении, равной $2\pi/m$. Предел устойчивости основного течения определится минимальным по всем m значением

$$Re_L(\delta, \omega^*) = Re_L(\delta, \omega^*, m_c) = \min_m Re_L(\delta, \omega^*, m)$$

Значение m_c , обеспечившее минимум, есть критическое значение азимутального волнового числа; частота нейтральных колебаний определится значением мнимой части декремента критического возмущения.

Библиографический список

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть II. М.: Физматгиз, 1963.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
3. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
4. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
5. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984.
6. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.
7. Астафьева Н.М., Введенская Н.Д., Яворская И.М. Нелинейные осесимметричные течения жидкости в сферических слоях. Препринт ИКИ АН СССР. № 385. М., 1977. 55 с.
8. Астафьева Н.М. Численное моделирование несимметричного относительно плоскости экватора сферического течения Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 56.
9. Астафьева Н.М. Устойчивость и неединственность осесимметричных течений во вращающихся сферических слоях (нелинейная теория) // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 66.
10. Langlois W.E. Slow viscous flow. N.-Y.: Macmillan, 1964.
11. Астафьева Н.М. Численное решение задачи о малых возмущениях сферического течения Куэтта. Препринт ИКИ АН СССР, Пр-1027. 1985. 53 с.
12. Marcus P.S., Tuckerman L.S. Simulation of flow between concentric rotating spheres. Part 2. Transitions // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 185. P. 1–30.
13. Астафьева Н.М. Численный анализ устойчивости течений во вращающихся сферических слоях (линейная теория, трехмерные возмущения) // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 66.
14. Яворская И.М., Беляев Ю.Н., Монахов А.А. Экспериментальное изучение сферического течения Куэтта // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 5. С. 1059.
15. Munson B.R., Menguturk M. Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part 3. Linear stability and experiment // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 69, № 4. P. 705.

16. Яворская И.М., Беляев Ю.Н., Монахов А.А. Исследование устойчивости и вторичные течения во вращающихся сферических слоях при произвольных числах Россби // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 804.
17. Беляев Ю.Н., Монахов А.А., Яворская И.М. Устойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 9.
18. Монахов А.А. Граница устойчивости основного течения в сферических слоях // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 4. С. 66.
19. Яворская И.М., Астафьева Н.М., Введенская Н.Д. Об устойчивости и неединственности течений жидкости во вращающихся сферических слоях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 1. С. 52.
20. Dumas G. The spherical Couette flow and its large-gap stability by spectral simulations // Proc. CFD94, Canadian Soc., Toronto, June 1994. P. 67.
21. Proudman I. The almost rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres // J. Fluid Mech. 1956. Vol. 1, № 5. P. 505.
22. Stewartson K. On almost rigid rotation. Part 2 // J. Fluid Mech.. 1966. Vol. 26, № 1. P. 131.
23. Астафьева Н.М., Келлер Б.С., Яворская И.М. Влияние стратификации плотности на движение сжимаемой жидкости в сферическом слое. Препринт ИКИ АН СССР. 1972. Д-147. 35 с.
24. Астафьева Н.М., Яворская И.М., Келлер Б.С. О движениях вязкого стратифицированного газа в сферическом слое // Тр. IV Всес. сем. по численным методам в механике вязкой жидкости, Рига, 1972. Новосибирск, 1973. С. 30–37.
25. Келлер Б.С., Яворская И.М. Моделирование гидродинамических процессов в атмосферах больших планет // Гидроаэромеханика и космические исследования. М.: Наука, 1976. С. 256.
26. Астафьева Н.М. Численное моделирование в сферических объемах с вращением // Численные методы моделирования технологических процессов. Рига, 1989. С. 3–11.
27. Яворская И.М., Беляев Ю.Н. Моделирование конвективных процессов в атмосферах планет-гигантов // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3. С. 148.
28. Astafyeva N.M., Moiseev S.S. About numerical modelling of global motion in planetary atmosphere // XXII General Assembly of European Geophysical Society, Vienna, 1997.
30. Мороз В.И. Физика планет. М.: Наука, 1967. 496 с.
31. Стоун П. Морфология атмосферы Юпитера // Юпитер. Т. 2. М.: Мир, 1976. с. 460–500.

Институт космических исследований РАН, Москва

*Поступила в редакцию 8.10.97
после переработки 22.11.97*

NONLINEAR SHEAR FLOW IN ROTATING SPHERICAL LAYERS AND GLOBAL ATMOSPHERE MOTION MODELLING

N.M. Astafyeva

The influence of vorticity and the restoring effectiveness of Coriolise force are considered. There are the some examples for illustration: the simple theoretical models which are used ordinary for dynamic meteorology and oceanology simulation and the certain peculiarity of the classical flows between rotating discs, cylinders and spheres. There are also the results of the numerical investigation of the flow in rotating spherical layers and their instability. The possibilities of the numerical simulation of global atmosphere dynamics are discussed.



Астафьева Наталья Михайловна – родилась в Москве (1944) окончила механико–математический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (1967). После окончания МГУ работает в Институте космических исследований. Старший научный сотрудник, кандидат физико–математических наук (1972, ИКИ). Область научных интересов: гидродинамическая устойчивость, пространственно–временной хаос и структурообразование, применение нелинейной динамики в геофизике, численное моделирование.



*Саратовский государственный университет
в марте 1998 года проводит*

научную конференцию

МОЛОДЕЖЬ И НАУКА НА ПОРОГЕ XXI ВЕКА

К участию в работе конференции приглашаются все желающие в возрасте от 16 до 30 лет. По докладам представляются тезисы в развернутом виде в 3 экз., указывается полный адрес и данные о научном руководителе. Более подробную информацию о конференции см. стр. 117.





БИФУРКАЦИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА В ОСЦИЛЛЯТОРЕ РЕССЛЕРА С ГАРМОНИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А.Г. Баланов, Т.Е. Вадивасова, Д.Э. Постнов, О.В. Сосновцева

Рассматривается эффект синхронизации хаотических колебаний на примере неавтономной системы Ресслера с позиций его общности для регулярных и хаотических режимов. Сравнительный анализ различных способов диагностики границы хаотической синхронизации, таких, как захват базовых частот спектра, стабилизация разности мгновенных фаз колебаний и выравнивание средних времен возврата в секущую плоскость Пуанкаре, показывает эквивалентность указанных подходов в приближении спирального хаоса. Совокупность имеющихся данных численного моделирования позволяет предложить и обосновать гипотезу о характере бифуркации хаотического режима как аналоге седло-узловой бифуркации предельных циклов. Анализ спектра ляпуновских характеристических показателей обнаруживает наличие двух типов хаоса за пределами области синхронизации, различающихся количеством нулевых показателей.

Введение

Синхронизация автоколебаний – одно из фундаментальных проявлений нелинейной динамики. Эффект синхронизации периодических автоколебаний был открыт еще Гюйгенсом [1]. В настоящее время проблема синхронизации регулярных (периодических и квазипериодических) колебаний достаточно хорошо исследована [2–15]. В спектре регулярных колебаний легко выделить основные частоты, однозначно связанные с характерными временами (периодом, квазипериодом) и фазами колебаний. При захвате частот происходит стабилизация фазового сдвига между взаимодействующими модами. Характерные времена также становятся равными или кратными. В случае регулярных колебаний взаимодействующих осцилляторов фазовому захвату соответствует седло-узловая бифуркация циклов на двумерном торе, в результате которой аттрактор на границе синхронизации претерпевает очевидную качественную перестройку – вместо эргодического движения на двумерном торе возникает устойчивый предельный цикл.

С накоплением знаний о хаотической динамике нелинейных систем возникла потребность обобщить классические представления о синхронизации автоколебаний на этот случай. При наблюдении фазовых проекций хаотических аттракторов взаимодействующих систем с частотной расстройкой можно заметить, что с ростом степеней взаимодействия в хаосе происходит определенная перестройка. Это наводит на мысль об аналогии механизмов синхронизации хаотических и регулярных автоколебаний. Правомерно возникает вопрос, что же

считать хаотической синхронизацией? Ответ на него не столь прост, как в случае регулярных колебаний, поскольку для хаотических колебаний период или несоизмеримые периоды отсутствуют, спектр является сплошным, а каждая спектральная компонента характеризуется своей фазой.

На сегодняшний день известно несколько концепций хаотической синхронизации. Одной из первых была концепция, согласно которой хаотическая синхронизация понимается как явление возникновения периодического режима под влиянием внешнего воздействия на хаотические автоколебания или в результате взаимодействия хаотических осцилляторов [16–18]. Однако переход от хаотических колебаний к регулярным наблюдается лишь при достаточной интенсивности взаимодействия осцилляторов (то есть имеет порог) и связан с механизмом синхронизации через подавление автоколебаний, то есть не исчерпывает всех возможных эффектов синхронизации хаоса.

Согласно наиболее часто встречающейся в литературе [19–23] концепции, синхронизация хаоса имеет место при взаимодействии идентичных хаотических осцилляторов и состоит в том, что с ростом связи временные реализации соответствующих динамических переменных парциальных систем полностью повторяют друг друга без какого-либо сдвига во времени. То есть, осцилляторы колеблются «синфазно». Синфазные колебания наблюдаются и при взаимодействии периодических осцилляторов, однако возможны и другие синхронные колебания. Очевидно, то же можно сказать и о синхронизации хаоса.

В работах [24–26] было предложено обобщение классических представлений о синхронизации как о захвате или подавлении частот на случай взаимодействия осцилляторов в режиме спирального хаотического аттрактора. В спектре спирального хаоса присутствует четко различимый пик на частоте, близкой к частоте предельного цикла, породившего хаотический аттрактор в результате последовательности субгармонических бифуркаций. Было обнаружено, что на плоскости параметров, управляющих степенью взаимодействия и частотой расстройки хаотических осцилляторов, можно выделить область синхронизации хаоса, подобную клюву Арнольда. Хаотические колебания в этой области (синхронный хаос) топологически отличаются от хаоса за ее пределами (несинхронного хаоса). Рассматривались случаи взаимной и вынужденной синхронизации хаоса, в том числе синхронизации хаоса гармонической внешней силой. Были сделаны некоторые предположения, касающиеся бифуркационного механизма хаотической синхронизации [25].

В работах [27–29] в рамках классического подхода к явлению синхронизации развивается представление о фазовом захвате хаотических осцилляторов. Предложены методы введения мгновенной фазы хаотических колебаний и показано, что с увеличением связи между взаимодействующими хаотическими осцилляторами, имеющими расстройку по частотам, средняя разность мгновенных фаз колебаний устанавливается постоянной, что говорит о наличии фазового захвата. Обнаружено также, что характеристические ляпуновские показатели хаотического аттрактора определенным образом реагируют на пересечение границы области синхронизации. В работе [30] с помощью модельного отображения анализируется бифуркационный механизм фазовой синхронизации.

Синхронизация хаоса играет важную роль в ансамблях хаотических осцилляторов. Она является причиной ограничения роста размерности аттракторов [31–32]. Возможность различных фазовых сдвигов синхронных осцилляторов приводит к явлению хаотической мультистабильности, кризисам хаотических аттракторов, фрактализации бассейнов притяжения и т.д. [33–34].

В последнее время эффекты, подобные синхронизации, были обнаружены в системах с более сложной хаотической динамикой, включающей нерегулярные переходы траектории из окрестности одного седлофокуса в окрестность другого [35]. В спектре таких колебаний нельзя выделить частоту, соответствующую нерегулярным перескокам между различными частями аттрактора. В данном случае представления о синхронизации связываются с поведением характерных

времен парциальных систем. Таким характерным временем служит среднее время нахождения траектории в окрестности одного из седлофокусов. С ростом связи между парциальными системами происходит выравнивание их характерных времен. Аналогичное явление синхронизации характерных времен наблюдается и в стохастических системах с многоямным потенциалом, в которых переходы между потенциальными ямами вызваны действием случайных сил. В последнем случае наблюдаемое явление получило название «стохастической синхронизации» [36–38].

Таким образом, понятие синхронизации может быть обобщено на очень широкий круг явлений, наблюдаемых не только в динамических, но и в стохастических системах. Далеко не всегда может быть в полной мере применен математический аппарат теории бифуркаций, как это сделано, например, для случая периодических колебаний. Как физики–экспериментаторы, мы зачастую можем лишь представить совокупность диагностических признаков, которые прямо или по аналогии с более простыми и изученными случаями свидетельствуют о характере предполагаемой бифуркации. Подтвердить или опровергнуть построенную на такой базе гипотезу – дело математиков.

В рамках настоящей работы мы концентрируемся на случае вынужденной синхронизации хаотического аттрактора внешним гармоническим воздействием малой амплитуды (то есть исключаем эффекты подавления собственных колебаний). Цель заключается в том, чтобы по возможности полно охарактеризовать механизм перехода от несинхронного хаоса к синхронному как особого рода бифуркацию. Сопоставление характеристик хаотического движения с аналогичными для регулярных режимов позволяет предложить гипотезу о возможном бифуркационном механизме.

1. Исследуемая модель

Как одна из простейших моделей, демонстрирующих явление хаотической синхронизации, нами был выбран осциллятор Ресслера с гармоническим внешним воздействием:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y - z + C \sin t, \\ \dot{y} &= \omega x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu),\end{aligned}\tag{1}$$

где α и μ – параметры, определяющие динамику автономного осциллятора, ω – параметр, управляющий частотой автоколебаний, C – амплитуда внешнего воздействия. Хаотическая динамика автономного осциллятора Ресслера хорошо изучена. В системе возможны два типа хаотических аттракторов. С ростом параметра μ последовательность субгармонических бифуркаций периодических движений приводит к образованию так называемого спирального аттрактора (аттрактора Ресслера), который при дальнейшем увеличении μ преобразуется в аттрактор винтового типа [39]. Осциллятор Ресслера неоднократно выбирался в качестве базовой модели для исследования взаимной хаотической синхронизации [26–28].

В спектре хаотических колебаний, соответствующих спиральному аттрактору, присутствует хорошо различимый пик на базовой частоте ω_0 , управляемой параметром ω . При $\omega=1$ базовая частота также близка к единице. Таким образом, при некоторых значениях ω возможен захват базовой частоты хаотических колебаний частотой воздействия в соотношении 1:1. Это соответствует основной области хаотической синхронизации.

2. Хаотическая синхронизация в неавтономном осцилляторе Ресслера

2.1. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма режимов. При рассмотрении различных аспектов явления хаотической синхронизации будем опираться на результаты численного эксперимента, обобщенно представленные в виде двупараметрической бифуркационной диаграммы. Для ее построения была выбрана плоскость параметров (ω, μ) . Остальные параметры фиксировались равными $\alpha=0.2$, $C=0.02$. Был детально исследован небольшой участок плоскости управляющих параметров в окрестности границы основной области синхронизации. Полученная бифуркационная диаграмма приведена на рис.1. На ней отмечены следующие области: 1 – область существования устойчивого синхронного цикла с периодом $4T_c$, ($ST_c=2\pi$); 2 – область существования устойчивого синхронного цикла с периодом $8T_c$; 3 – область синхронного хаоса; 4 – область «четырёхоборотного» тора, соответствующего квазипериодическим колебаниям, одно из которых имеет период воздействия T_c , а другое – период автоколебаний $4T_0$ ($T_0=2\pi/\omega_0$, где ω_0 – базовая частота автоколебаний); 5 – область «восьмиоборотного» тора $8T_0$; 6 – область несинхронного хаоса с сигнатурой спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) «+, 0, -, -»; 7 – область несинхронного хаоса с сигнатурой спектра ЛХП «+, 0, 0, -».

Бифуркационные линии, являющиеся границами областей различной динамики, обозначены следующим образом: l_1 – линия касательной бифуркации периодического движения, l_2 – линия субгармонической бифуркации (удвоения периода) периодического движения, l_3 – линия удвоения одного из периодов квазипериодического движения (линия «удвоения тора»), $l_{кр1}$ – граница хаоса в области синхронных режимов, $l_{кр2}$ – граница возникновения хаоса вне основной области синхронизации, l_4 – граница синхронизации хаоса, l_5 – граница между

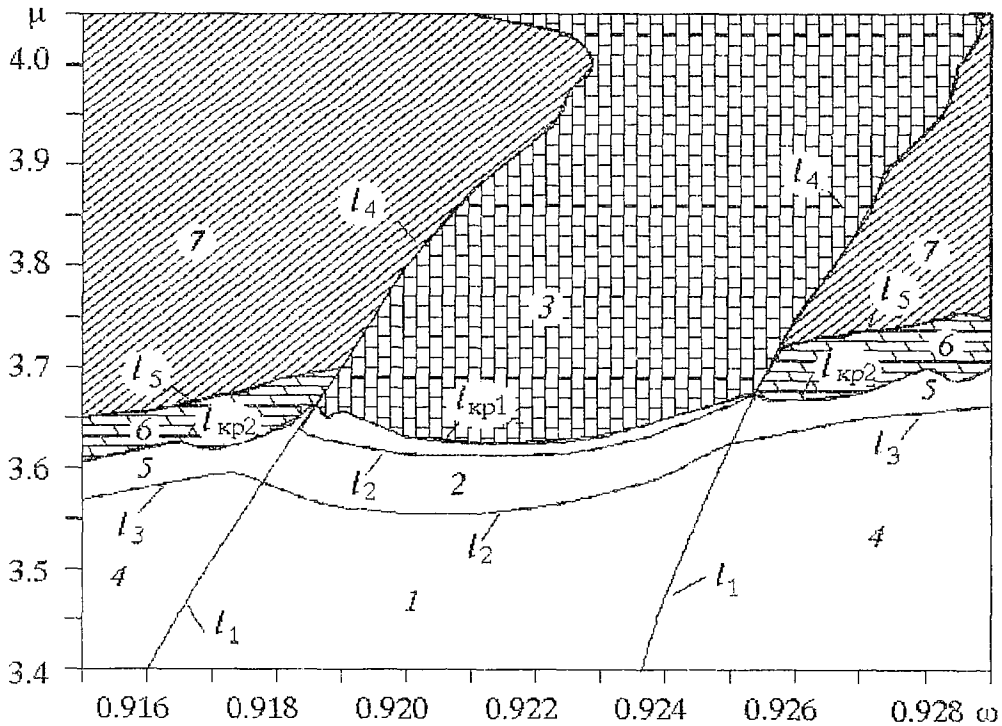


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма режимов на плоскости параметров ω, μ при $\alpha=0.2$, $C=0.02$

двумя типами хаоса вне основной области синхронизации. Бифуркационный характер линии l_5 пока не ясен. Возникновению хаоса на линии $l_{кр2}$ предшествует разрушение квазипериодических колебаний в результате кризиса тора [40].

Диаграмма наглядно показывает, что граница хаотической синхронизации является продолжением границы синхронизации регулярных режимов.

2.2. Диагностика границы области хаотической синхронизации.

Использование различных средств диагностики породило несколько характеристик перехода от несинхронного хаоса к синхронному. В работах [24–25], где широко использовалось сопоставление результатов численного и радиофизического эксперимента, хаотическая синхронизация диагностировалась по захвату базовой частоты спектра хаотического аттрактора. В [27–28] диагностика перехода основана на динамике мгновенной взаимной фазы колебаний. Наконец, в [35–38] был предложен широко используемый в данной работе метод, основанный на подсчете характерного времени системы как среднего времени возврата в секущую плоскость Пуанкаре.

Рассмотрим, как взаимосвязаны эти подходы.

Колебания автономного хаотического осциллятора можно представить в виде

$$x(t) = A(t)\cos\Phi(t), \quad (2)$$

где $A(t)$ и $\Phi(t)$ – мгновенные амплитуда и фаза колебаний. Для мгновенной фазы имеем

$$\Phi(t) = \langle\Phi(t)\rangle + \delta\phi(t), \quad (3)$$

где $\delta\phi$ – флуктуация фазы относительно среднего значения $\langle\Phi\rangle$. Если предположить, что среднее значение мгновенной частоты

$$\langle\omega(t)\rangle = \langle d\Phi(t)/dt \rangle = \omega_{cp} \quad (4)$$

постоянно, то можно представить

$$\langle\Phi(t)\rangle = \Phi_0 + \omega_{cp}t, \quad (5)$$

где Φ_0 – начальная фаза колебаний. Базовая частота хаотических колебаний ω_b , наблюдаемая в измеряемом или численно моделируемом спектре спирального хаоса, должна быть близка к ω_{cp} . Действительно, считая флуктуации $\delta\phi$ малыми, можно получить, что ковариационная функция процесса $x(t)$ в первом приближении содержит слагаемое вида $1/2(A_{cp})^2\cos(\omega_{cp}\tau)$, которому соответствует наличие в спектре мощности колебаний δ -выброса на частоте $\omega_b = \omega_{cp}$. Если флуктуации фазы перестают быть малыми (как в случае винтового хаоса), то пик в спектре исчезает.

Захват средней частоты колебаний ω_{cp} (или же базовой частоты) внешней силой $f(t) = \sin(\omega_c t + \Phi_c)$ сопровождается захватом фазы. Среднее значение разности мгновенных фаз колебаний и воздействия

$$\langle\Phi\rangle = \langle\omega_{cp}t + \Phi_0 + \delta\phi(t) - (\omega_c t + \Phi_c)\rangle = (\omega_{cp} - \omega_c)t + \Phi_0 - \Phi_c \quad (6)$$

при условии, что $\omega_{cp} = \omega_c$, будет равно начальной разности фаз $\Phi_0 - \Phi_c = \text{const}$.

За характерное время хаотических колебаний разумно принять среднее время возврата $\langle T \rangle$ фазовой траектории к секущей поверхности, задаваемой условием $\Phi_1(t) = \text{const}$ (где Φ_1 – фаза колебаний, определенная в интервале $[0, 2\pi]$). В этом случае характерное время однозначно определяется средней частотой колебаний

$$\langle T \rangle = 2\pi/\omega_{cp}. \quad (7)$$

Отношение среднего времени возврата к периоду вынуждающей силы можно рассматривать как усредненное число вращения $\langle \theta \rangle$. Основная область хаотической синхронизации соответствует $\langle \theta \rangle = 1:1$.

Очевидно, что все указанные критерии хаотической синхронизации полностью эквивалентны, по крайней мере в области слабого хаоса. С точки зрения осуществления численных экспериментов наиболее удобным критерием хаотической синхронизации представляется синхронизация характерного времени. Численный расчет среднего времени возврата к секущей плоскости значительно проще и точнее расчета частот спектра и мгновенной фазы. Вычисляя отношение характерных времен, легко построить зависимость числа вращения от любого параметра системы, т.н. «чертову лестницу», и определить границы не только основной области синхронизации, но и областей синхронизации более высокого порядка. Для рассматриваемой модели число вращения определяется как

$$\langle \theta \rangle = \langle T \rangle / 2\pi. \quad (8)$$

На рис. 2 представлены графики зависимости числа вращения от ω в окрестности основной области синхронизации для случаев регулярной динамики (а) слабого хаоса (б), развитого хаоса (в). В качестве секущей выбиралась плоскость $x=0$, что соответствует постоянной фазе $\Phi_1(t)=0$ колебаний переменной x . Надо отметить, что хаотическая динамика в системе (1) при близком к резонансному воздействии возникает при меньших значениях параметра μ , по сравнению с автономным осциллятором Ресслера, а граница хаоса в пространстве параметров определяется не только параметрами α , μ , но также амплитудой воздействия C и параметром ω . На графиках «чертовой лестницы», представленных на рис. 2, а, б, можно различить ступеньку, соответствующую числу вращения $\langle \theta \rangle = 1:1$. В случае (в) зависимость $\langle \theta \rangle$ от ω становится немонотонной и ступенька, соответствующая основной области синхронизации, едва заметна, при этом в спектре колебаний уже отсутствует четкий пик на базовой частоте, и говорить о захвате частоты становится трудно.

2.3. Описание колебаний в терминах мгновенных амплитуды и фазы.

Чтобы однозначно ввести мгновенные значения амплитуды и фазы сигнала $x(t)$, можно воспользоваться представлением

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t)\cos\Phi(t), \\ H\{x(t)\} &= A(t)\sin\Phi(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где $A(t)$, $\Phi(t)$ – мгновенная амплитуда и мгновенная фаза, соответственно, $H\{\dots\}$ –

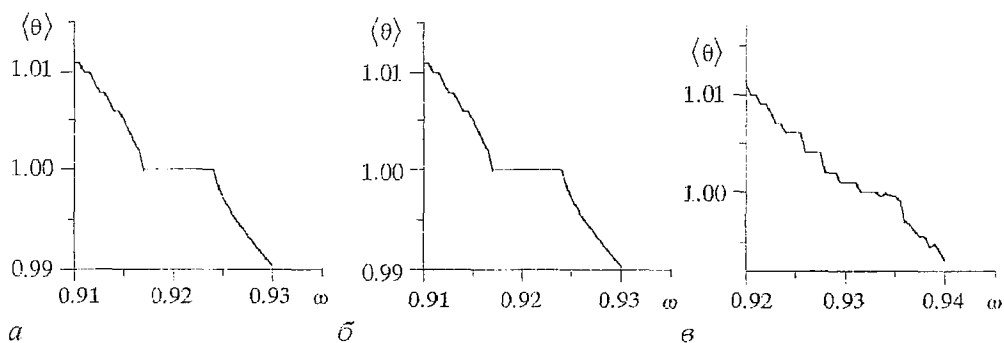


Рис. 2. Зависимости числа вращения от параметра ω при а – $\mu=3.5$ (случай регулярной динамики); б – $\mu=4.0$ (слабый хаос); в – $\mu=6.5$ (развитый хаос). Другие параметры: $\alpha=0.2$, $C=0.02$

преобразование Гильберта [41]. В исследовании хаотической синхронизации такой подход использован в [27]. Заметим, что численное моделирование процессов $A(t)$ и $\Phi(t)$ оказывается при таком подходе довольно сложным.

В тех случаях, когда динамические переменные $x(t)$ и $y(t)$ являются осцилляторными переменными, связанными линейно (как в случае осциллятора Ресслера) можно поступить проще, воспользовавшись представлением

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t)\cos\Phi(t), \\ y(t) &= A(t)\sin\Phi(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда $A(t)$ и $\Phi(t)$ – есть полярные координаты изображающей точки на плоскости XU . Недостаток такого подхода состоит в том, что мгновенные амплитуда и фаза определяются для процесса $x(t)$ неоднозначно, так как зависят от выбора второй переменной – $y(t)$. Однако для системы (1) представление (10) обосновано и позволяет адекватно фиксировать эффекты фазового захвата, так же как и представление (9) [27]. Применяя замену (10) к системе (1), легко получить систему Ресслера в новых переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \alpha A + (C\sin\Phi - \alpha A\cos\Phi - z)\cos\Phi, \\ \dot{\Phi} &= \omega - (1/A)(C\sin\Phi - \alpha A\cos\Phi - z)\sin\Phi, \\ \dot{z} &= \alpha + z(A\cos\Phi - \mu). \end{aligned} \quad (11)$$

Поведение разности фаз колебаний и воздействия $\Delta\Phi(t)=\Phi(t)-t$ в области синхронизации и вне ее представлено на рис. 3 для случаев слабого и сильного хаоса. Для слабого хаоса (рис. 3, а) в области синхронизации (кривая 1) разность фаз незначительно колеблется вокруг постоянного среднего уровня. Вне области синхронизации (кривая 2) происходит неограниченный рост разности фаз во времени. Граница захвата фазы хаотических колебаний в точности совпадает с границей синхронизации среднего времени возврата траектории к секущей плоскости $X=0$.

С увеличением параметра μ и соответствующим развитием хаоса винтового типа фазовые сбой становятся все более значительными. При достаточно больших значениях μ говорить о захвате фазы становится невозможно (рис. 3, б)

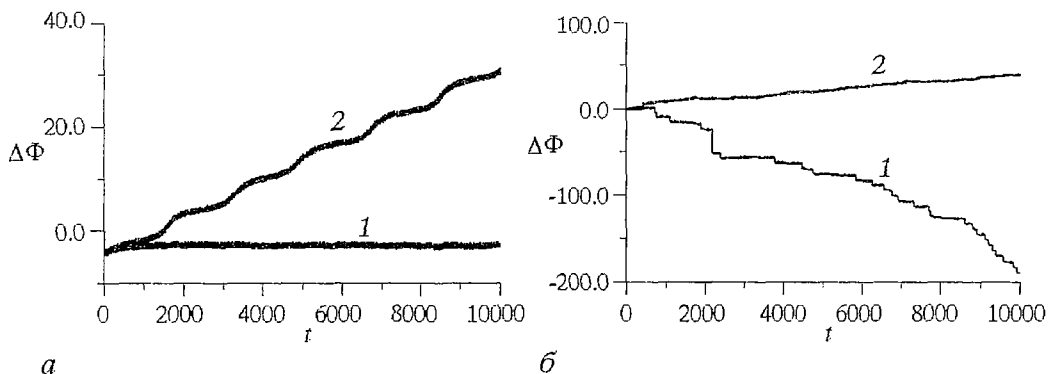


Рис. 3. Зависимости от времени мгновенной разности фаз хаотических колебаний и воздействия a – при $\mu=4.0$ в области синхронизации (кривая 1, $\omega=0.927$) и вне области синхронизации (кривая 2, $\omega=0.930$); b – при $\mu=6.5$, кривая 1 соответствует $\omega=0.933$, кривая 2 – $\omega=0.937$. Другие параметры: $\alpha=0.2$, $C=0.02$

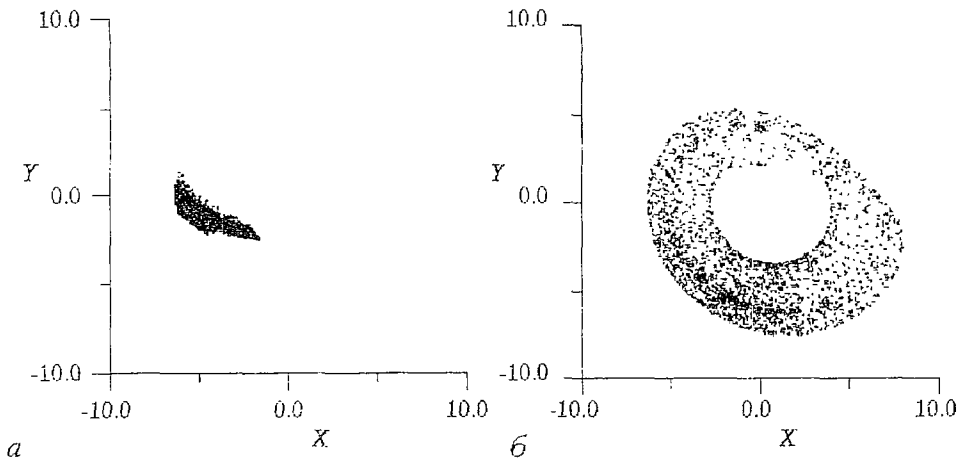


Рис. 4. XY -проекции стробоскопического сечения аттракторов в области синхронного (а) и несинхронного (б) хаоса при $\mu=4.0$, $C=0.02$, $\alpha=0.2$

На рис. 4 приведены XY -проекции стробоскопического сечения аттракторов системы (1), соответствующих фазовым зависимостям, представленным на рис. 3, а. Эффект хаотической синхронизации хорошо прослеживается по внешнему виду сечения аттрактора. В случае синхронного хаоса (рис. 4,а) точки сечения группируются в некоторой области, соответствующей незначительным изменениям фазы $\Phi(t)$. При выходе из области синхронизации (рис.4,б) изображающая точка в сечении начинает совершать вращения со средней скоростью $\langle\theta\rangle=\langle T\rangle/2\pi$.

2.4. Бифуркационный механизм синхронизации хаоса. Как мы видим, синхронизация хаоса, диагностируемая по захвату характерных времен, мгновенных фаз и базовых частот спектра имеет место как в связанных хаотических осцилляторах [26–28], так и в осцилляторах с внешним гармоническим воздействием [24–25]. Граница синхронизации достаточно четко диагностируется, вид хаотического аттрактора претерпевает на ней существенную перестройку. Очевидно, здесь имеет место некая бифуркация хаотического множества. Каков ее характер?

В [25] на основании численных исследований было обнаружено, что граница области синхронизации на плоскости параметров расположена в области, где скапливаются линии касательных бифуркаций всевозможных седловых предельных циклов, существующих в бассейне притяжения хаотического аттрактора автономной системы. Действительно, хаос в области синхронизации должен иметь структуру, подобную структуре автономного хаоса, а она во многом определяется седловыми циклами и их многообразиями. Поскольку вне области синхронизации этих циклов не существует, то они должны рождаться на границе области синхронизации в результате касательных бифуркаций. Как показывают численные эксперименты, при движении по параметру ω эти циклы появляются не одновременно. Важная информация о структуре и качественных перестройках режима исследуемой системы может быть получена с использованием ЛХП. В [28] для случая взаимной синхронизации хаотических осцилляторов было обнаружено, что вне области синхронизации в спектре ЛХП имеются два близких к нулевому значению. В результате синхронизации один из них становится отрицательным. Мы, в свою очередь, провели детальное исследование поведения спектра ЛХП вблизи границы хаотической синхронизации в системе (1), для различных хаотических режимов, управляемых параметрами μ и C . На рис. 5 приведены

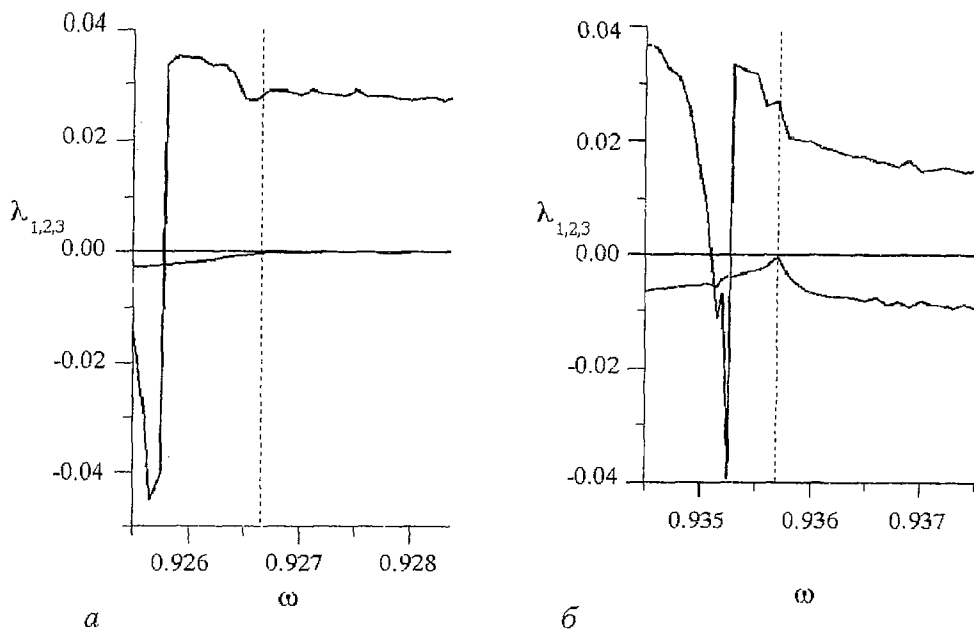


Рис. 5. Зависимости двух старших ляпуновских показателей λ_1 и λ_2 от параметра ω при $\alpha=0.2$, $\mu=3.8$ и $C=0.02$ (а); $C=0.08$ (б). Штриховой линией отмечена граница синхронизации хаоса

зависимости двух старших ляпуновских показателей от параметра ω . Один показатель в спектре ЛХП связан с периодическим воздействием всегда строго равен нулю. Прямая, соответствующая нулевому уровню, также нанесена на графиках. Старший показатель – положителен и не реагирует на переход границы синхронизации (в области синхронных режимов он может становиться отрицательным в окнах устойчивости периодических движений). Второй показатель (всюду отрицательный в области синхронизации) демонстрирует два варианта поведения:

1) на границе он обращается в ноль и остается равным нулю в пределах точности вычислений (10^{-5} – 10^{-6}) на некотором интервале значений управляющего параметра ω (см.рис. 5, а);

2) на границе он обращается в ноль, но затем вновь становится отрицательным (см.рис. 5, б).

Следует отметить, что в любом случае в момент пересечения границы хаотической синхронизации второй ляпуновский показатель обращается в ноль, подобно тому, как ведет себя один из ляпуновских показателей синхронного периодического движения в момент касательной бифуркации на границе области синхронизации.

Вся совокупность обсужденных выше экспериментальных результатов (эволюция вида сечения Пуанкаре и фазовых проекций, вид зависимости для числа вращения $\langle \theta \rangle$ – «чертова лестница», динамика взаимной фазы, поведение ляпуновских показателей) позволяет провести аналогию изучаемой перестройки, соответствующей синхронизации хаоса, с касательной бифуркацией на торе, приводящей к возникновению резонансной структуры предельных циклов.

Если увеличивать параметр μ , оставаясь в области синхронизации, то можно наблюдать каскад субгармонических бифуркаций синхронных предельных циклов на торе, причем не только устойчивых, но также и седловых. В результате этого в области синхронизации должен формироваться не только хаотический аттрактор, но вместе с ним и непритягивающее хаотическое множество траекторий. На границе области хаотической синхронизации притягивающее и непритягивающее хаотическое множества претерпевают некий аналог касательной бифуркации. При

этом характеристики притягивающего хаотического множества ведут себя подобно случаю регулярных режимов. С этой точки зрения становится понятным возникновение второго нулевого ляпуновского показателя – еще одного направления нейтральной устойчивости. В недавней работе [30] для модельного отображения было показано, что бифуркационный механизм хаотической синхронизации состоит в слиянии хаотического аттрактора и хаотического репеллера. В более общем случае потоковой системы непритягивающее хаотическое множество, участвующее в бифуркации, будет иметь хотя бы одно устойчивое направление (то есть не будет репеллером) и потому численно реконструировать его, используя инверсию времени, невозможно.

Несинхронный хаос с сигнатурой спектра ЛХП «+,0,0,-» мы назовем «тор-хаосом», так как он представляет собой аналог эргодического движения на торе, но с дополнительным направлением неустойчивости. Как и эргодическое квазипериодическое движение, тор-хаос не может быть грубым, но может характеризоваться ненулевой мерой в пространстве параметров.

Численные эксперименты показали, что такой хаотический режим типичен при слабой амплитуде воздействия. Его негрубость незаметна на графике, приведенном на рис. 5, а, по-видимому, из-за чрезвычайной узости областей синхронизации высших порядков.

Менее понятен случай, когда вне области синхронизации сигнатура спектра ЛХП остается «+,0,-,-», что имеет место в непосредственной близости от границы возникновения хаоса или при достаточно сильном внешнем воздействии. Можно предположить, в этом случае на плоскости параметров образуется зона, в которой мера несинхронных режимов равна нулю (зона перекрытия областей хаотической синхронизации). Однако, подтвердить или опровергнуть такое предположение на данный момент не удастся, так как два типа хаоса вне основной области синхронизации, различающиеся сигнатурой спектра ЛХП, по другим критериям не имеют сколь-нибудь существенных различий.

Выводы

На основании представленных здесь результатов, а также результатов других авторов, известных из публикаций, мы можем сделать следующие выводы. Можно говорить о синхронизации хаоса (по крайней мере спирального типа) в классическом смысле, понимая под синхронизацией следующие взаимосвязанные эффекты: захват базовых частот спектра, захват мгновенных фаз и захват характерных времен взаимодействующих систем. В пространстве параметров существует область синхронных колебаний, в том числе хаотических. Граница области синхронизации соответствует бифуркации аттрактора. В области регулярных режимов – это хорошо известная касательная бифуркация предельных циклов, приводящая к исчезновению резонансной структуры циклов и возникновению эргодического движения на торе при выходе из области синхронизации. На границе синхронизации хаоса имеет место некий аналог касательной бифуркации, состоящий в слиянии хаотического аттрактора с непритягивающим хаотическим множеством. В пользу нашего предположения говорит поведение ляпуновских показателей хаотического аттрактора. Строго на границе области синхронизации один из отрицательных показателей синхронного аттрактора становится равен нулю.

Вне области синхронизации возможны два типичных хаотических режима, отличающихся спектром характеристических ляпуновских показателей: хаос с одним нулевым показателем, наблюдающийся вблизи границы разрушения квазипериодических колебаний и хаос с двумя нулевыми показателями, занимающий значительную область в пространстве параметров. Сущность различия этих двух типов хаоса а также механизм перехода к хаосу вне области синхронизации нуждаются в дальнейшем исследовании.

Работа частично финансировалась грантом Госкомвуза России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66).

Библиографический список

1. *Hugenii C.* Horologium Oscilatorium. Parisiis, France, 1673.
2. *Van der Pol B.* Theory of the amplitude of free and forced triod vibration // Radio Rev. 1920. Vol. 1. P. 701.
3. Гапонов В.И. Два связанных генератора с мягким возбуждением // ЖТФ. 1936. Т. 6, вып.5. С. 801.
4. Теодорчик К.Ф. К теории синхронизации релаксационных автоколебаний // ДАН СССР. 1943. Т. 40, вып. 2. С. 63.
5. Хохлов Р.В. К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы // ДАН СССР. 1954. Т. 97, вып.6. С. 411.
6. Андронов А.А., Витт А.А. К теории захватывания Ван-дер-Поля // Собрание тр. А.А.Андропова. М.:Изд-во АН СССР, 1956.
7. Минакова И.И., Теодорчик К.Ф. К теории синхронизации автоколебаний произвольной формы // ДАН СССР. 1956. Т. 106, вып.4. С. 658.
8. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.:Мир, 1968.
9. Блехман И. Синхронизация динамических систем. М.:Наука, 1971.
10. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.:Наука, 1981.
11. Ланда П.С., Ларионцев Е.Г. Режимы биений и синхронизации встречных волн во вращающемся кольцевом газовом лазере // РЭ. 1970. Т. 15, № 6. С. 1214.
12. Романовский Ю.М. О взаимной синхронизации многих автоколебательных систем, связанных через общую среду // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15, № 5. С. 718.
13. Демьянченко А.Г. Синхронизация генераторов гармонических колебаний. М.:Энергия, 1976.
14. Скупой В.Ф., Копылов В.П. О синхронизации ЧМ-автогенератора // РЭ. 1979. Т. 24, № 7. С. 1374.
15. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.:Наука, 1980.
16. Кузнецов Ю.А, Ланда П.С., Ольхововой А.Ф. Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т. 281, вып.2. С. 1164.
17. Ланда П.С., Рендель Ю.С., Шер В.А. Синхронизация колебаний в системе Лоренца // Изв.вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 9. С. 1172.
18. *Dykman G., Landa P., Neimark Y.* Synchronising of chaotic oscillations by external force // Chaos, Solitons & Fractals. 1992. Vol. 1, № 4. P. 339.
19. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 29, № 9. С. 1050.
20. Волковский А.Р., Рульков Н.Ф. Экспериментальное исследование бифуркаций на пороге стохастической синхронизации // Письма в ЖТФ. 1989. Т.15, вып. 7. С. 5.
21. *Pecora L., Carroll T.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
22. *Chua L., M. Itoh., L. Kocarev, Eckert K.* Chaos synchronization in Chua's circuit // Chua's Circuits: A Paradigma for Chaos / Ed. R.N. Madan. Singapore: World Scientific, 1993. P. 309.
23. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 365.
24. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569.

25. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
26. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E.* Synchronization of chaos: Proc. First International Conference on Applied Synergetic and Synergetic Engineering, June 21–23, 1994, Erlangen, Germany. P.200.
27. *Rosenblum M., Picovsky A., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
28. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Effect of phase synchronization in driven chaotic oscillators // *IEEE Trans. CAS-I*. 1997.
29. *Shalfeev V.D., Osipov G.V.* Chaotic phase synchronization of coupled PLLS: Proc. 5-th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, June 26–27, 1997, Moscow, Russia. P.139–144.
30. *Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J.* Attractor–repeller collision and cyclelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys.Rev.Lett.* 1997. Vol. 79. (in print).
31. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // *ДАН СССР*. 1986. Т. 286, вып. 5. С. 1120.
32. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55, № 3. P. 2353.
33. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П.* Мультистабильные режимы в системах Фейгенбаума с диссипативной связью // *Письма в ЖТФ*. 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
34. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Astakhov V.V., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.O.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
35. *Анищенко В.С., Сильченко А.Н., Хованов И.А.* Взаимная синхронизация процессов переключений в связанных системах Лоренца // *Письма в ЖТФ*. 1997. Т. 23, № 8. С. 14.
36. *Neiman A.B.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 3484.
37. *Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by periodic force // *Phys.Rev.Lett.* 1995. Vol. 75. P. 4157.
38. *Хованов И.А., Анищенко В.С.* // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 2. С. 854.
39. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
40. *Heagy J.F. and Hammel S.M.* The birth of strange nonchaotic attractors // *Physica D*. 1994. Vol. 70. P. 140.
41. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 25.09.97

BIFURCATION OF CHAOTIC SYNCHRONIZATION IN ROSSLER SYSTEM WITH HARMONIC EXITATION

A.G. Balanov, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, O.N. Sosnovtzeva

Synchronization of chaotic oscillations in nonautonomous Rossler system from the point of view its universality for regular and chaotic regimes is investigated. Comparative analysis of different methods of the boundary of chaotic synchronization diagnostics, namely, the locking of basic frequencies, the stabilisation of difference of instant phases

of oscillations, and the levelling of mean time of returning to a secant surface, shows the equivalence of the mentioned approaches for spiral chaos. A set of results from numerical simulation allows us to suggest and substantiate hypothesis that there is a bifurcation of chaotic regime as an analogue of a tangent bifurcation for a limit cycle. Analysing the spectrum of Lyapunov exponents two types of chaos outside synchronization region which differ by number of zero Lyapunov exponents are found.



Баланов Александр Геннадьевич – родился в 1973 году. Окончил физический факультет СГУ (1995). Работает инженером на кафедре радиофизики. Область научных интересов – нелинейная динамика и стохастические процессы. Автор 5 научных работ.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), аспирантуру на кафедре радиофизики СГУ и защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (1986). В настоящее время является доцентом кафедры радиофизики Саратовского университета. Имеет 29 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



Постнов Дмитрий Энгелевич в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года – инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 27 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



Сосновцева Ольга Владимировна – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Работала инженером в НИИ механики и физики при Саратовском университете (1989–1992). Защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1996) по структурам и свойствам аттракторов неавтономных и связанных динамических систем. Имеет 12 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В АВТОГЕНЕРАТОРНОЙ СИСТЕМЕ С ЧАСТОТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко

Изложены результаты исследования регулярных и хаотических колебаний и бифуркационных переходов между колебательными режимами в автогенераторе с автоматическим управлением частотой в случае положительной обратной связи в петле управления. Выяснены направления изменения параметров, способствующие хаотизации регулярных колебательных режимов и дестохастизации при хаотических колебаниях генератора.

1. Многие задачи теории колебаний, динамики систем и автоматического управления приводят к исследованию нелинейных моделей с неединственным состоянием равновесия. Такие модели описывают поведение большого числа объектов из различных областей физики и техники (кольцевых автоколебательных систем, оптических приборов, джозефсоновских контактов, нейронных сетей, взаимодействующих популяций, систем с частотным и фазовым управлением, электронных генераторов Чуа и др.). Особенностью моделей является существование и взаимодействие в фазовом пространстве аттракторов, связанных с различными состояниями равновесия. Эта особенность определяет богатую картину движений и бифуркационных переходов, привлекательную для решения многих прикладных задач. В связи с этим явления сложной динамики и процессы развития и преобразования движений при изменении управляющих параметров, свойственные моделям объектов с неединственным состоянием равновесия, являются предметом интенсивного изучения.

В широком классе объектов с неединственным состоянием равновесия важное место занимают автогенераторные системы с петлей автоматического управления частотой, которые активно применяются в современных технологиях при решении задач формирования и обработки сигналов. Такие системы построены по принципу отрицательной обратной связи и содержат все элементы, входящие в состав систем автоматического управления – объект управления, измеритель рассогласований, корректирующее звено и управляющее устройство. Функциональная схема автогенераторной системы с частотным управлением приведена на рис. 1, а [1]. Объектом управления является перестраиваемый по частоте генератор (ПГ), а регулируемой величиной является текущая частота его колебаний $\omega(t)$. В частотном дискриминаторе (ЧД), выполняющем функции измерителя рассогласований, реализуется сравнение частоты $\omega(t)$ с центральной частотой ЧД ω_0 , играющей роль эталона. При отклонении частоты $\omega(t)$ от частоты

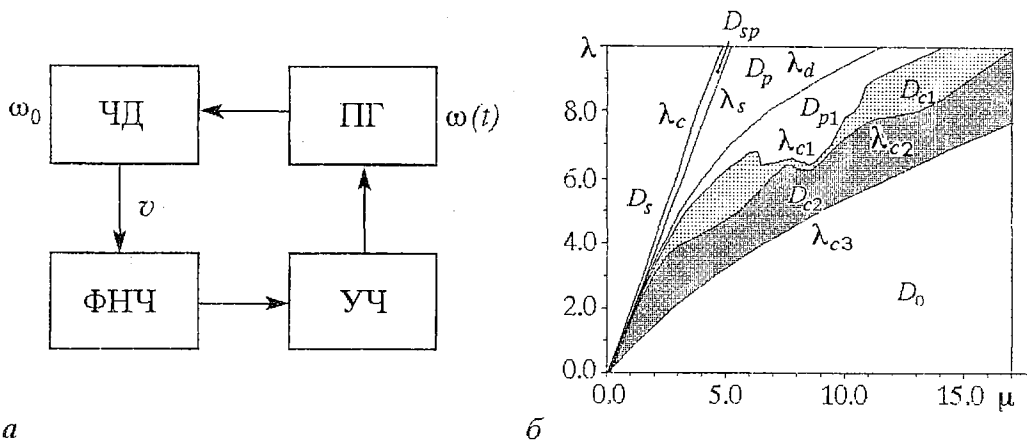


Рис. 1. Функциональная схема системы с частотным управлением (а) [1]; области режимов генератора при $\sigma=0.0$ (б)

ω_0 на выходе ЧД формируется управляющий сигнал v , зависящий от величины и знака рассогласования частот $\varepsilon(t)=\omega(t)-\omega_0$. Зависимость $v=D(\varepsilon)$, удовлетворяющую условиям $D(0)=0$, $\varepsilon D(\varepsilon) \geq 0$, принято называть дискриминационной характеристикой. Роль корректирующего звена, придающего петле управления необходимые динамические свойства, играет фильтр низких частот (ФНЧ). Управляющий сигнал v , воздействуя через ФНЧ на управитель частотой (УЧ), приводит к изменению частоты колебаний ПГ в сторону уменьшения рассогласования ε .

Петля частотной автоподстройки не только позволяет решать задачи стабилизации частоты генератора и слежения за изменяющейся частотой входного сигнала [2,3], но и создает широкие возможности для возбуждения разнообразных режимов колебаний управляемого генератора и проявления эффектов динамического хаоса [4–6], которые могут быть использованы для расширения функциональных возможностей систем с частотным управлением. В последнее время проявляется все больший интерес к таким режимам и эффектам, а также к их использованию для формирования сложных периодических и шумоподобных колебаний с управляемыми характеристиками. В связи с этим представляется важным исследование роли параметров петли управления частотой в процессах возникновения, развития и преобразования режимов генератора.

Интересные возможности в плане формирования сложных колебаний генератора с помощью петли управления частотой появляются при применении положительной обратной связи вместо отрицательной. Реализовать такую петлю управления можно, например, путем инвертирования характеристики ЧД. Как известно [2], петля автоподстройки с таким ЧД оказываеене подстраивающее, а расстраивающее действие на частоту генератора. Однако при этом в системе создаются условия для более активного взаимодействия колебательных движений, возникающих в результате развития неустойчивости режимов стационарной генерации, что делает систему богаче в отношении сложной динамики.

В предлагаемой работе проводится исследование динамических режимов генератора с частотным управлением в случае положительной обратной связи в петле управления, содержащей ФНЧ третьего порядка с коэффициентом передачи $K(p)=(1+a_1p+a_2p^2)/(1+b_1p+b_2p^2+b_3p^3)$. На примере этой системы исследуются характерные динамические режимы и бифуркационные переходы, свойственные нелинейным объектам с тремя состояниями равновесия.

2. Математическая модель исследуемой системы представляется следующими уравнениями [5]:

$$dx/d\tau = y, \quad dy/d\tau = z, \quad (1)$$

$$dz/d\tau = \{\sigma - \Phi(x) - [\lambda + b\Phi'(x)]y - [1 - \rho + \rho\Phi'(x)]z - \rho\Phi''(x)y^2\}/\mu.$$

Здесь τ – безразмерное время; x, y, z – безразмерные переменные (x – отклонение частоты управляемого генератора от опорной частоты дискриминатора); λ, b, μ и ρ – безразмерные параметры инерционности петли управления ($\lambda = (b_1 - a_1)/b_2^{1/2}$, $b = a_1/b_2^{1/2}$, $\mu = b_3/(b_2 b_2^{1/2})$, $\rho = a_2/b_2$); σ – начальная расстройка частот; $\Phi(x) = x - D(x)$. Знак «минус» перед $D(x)$ соответствует положительной обратной связи в петле управления. Характеристику частотного дискриминатора будем аппроксимировать функцией $D(x) = 2ax/(1+a^2x^2)$ [4–6], где a – параметр, определяющий растров и крутизну характеристики $D(x)$. Отметим, что система уравнений (1) симметрична относительно замены $(x, y, z, \sigma) \rightarrow (-x, -y, -z, -\sigma)$. Этот факт позволяет ограничиться рассмотрением значений параметра $\sigma \geq 0$.

Будем рассматривать систему (1) при значениях

$$0 \leq \sigma < a^{-1}\{2a/[a(a+4)]^{1/2} - a\} - 1 \{[a(a+4)]^{1/2} - a - 1\}^{1/2},$$

когда система имеет три состояния равновесия $A_1(x_1, 0, 0)$, $A_2(x_2, 0, 0)$ и $A_3(x_3, 0, 0)$, координаты которых $x_1(\sigma, a)$, $x_2(\sigma, a)$ и $x_3(\sigma, a)$ находятся из уравнения $\sigma - \Phi(x) = 0$ и удовлетворяют неравенствам $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$. Состояния равновесия A_1 и A_3 являются устойчивыми соответственно при $\lambda > \lambda_1$ и $\lambda > \lambda_3$, где [5]

$$\lambda_{1,3} = [\mu(1 - \rho D'(x_{1,3})) - b][1 - D'(x_{1,3})], \quad (2)$$

и неустойчивыми соответственно при $\lambda < \lambda_1$ и $\lambda < \lambda_3$; состояние равновесия A_2 всегда неустойчиво (типа седло или седло–фокус). Каждому из устойчивых состояний равновесия A_1 и A_3 соответствует режим стационарной генерации на частоте, отличающейся от опорной частоты дискриминатора на величину $x_1(\sigma, a)$ или $x_3(\sigma, a)$. Будем обозначать I_{s1} и I_{s3} моногармонические режимы генератора, отвечающие состояниям равновесия A_1 и A_3 . Потеря устойчивости этих состояний равновесия приводит к мягкому или жесткому возникновению автоколебательных движений системы (1), которым соответствуют режимы периодической частотной автомодуляции управляемого генератора. При изменении параметров петли управления эти режимы могут приобретать хаотический характер. В данной работе основное внимание сосредоточено на особенностях влияния параметров инерционности в процессах преобразования режимов генератора при его различных исходных состояниях.

3. Рассмотрим динамику системы (1) при начальной расстройке $\sigma = 0$, когда система симметрична по отношению к замене переменных $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. В этом случае координаты состояний равновесия $x_1 = -(2a-1)^{1/2}/a$, $x_2 = 0$, $x_3 = (2a-1)^{1/2}/a$, а граница λ_s области устойчивости A_1 и A_3 ($\lambda_s = \lambda_1 = \lambda_3$) согласно (2) определяется выражением

$$\lambda_s = (2a-1)(\mu-b)/(a(1+\rho)-\rho).$$

На рис. 1, б представлены области характерных динамических режимов системы на плоскости параметров (μ, λ) , установленные в результате численного исследования системы (1) при значениях $a=20$, $b=0.1$, $\rho=0.0$. Область D_s , для которой аттракторами системы в фазовом пространстве служат состояния равновесия A_1 и A_3 , является областью моногармонических режимов I_{s1} и I_{s3} генератора. При любых начальных условиях устанавливается один из этих

режимов. Кривая λ_c – граница областей D_s и D_{sp} соответствует седло–узловой бифуркации двух асимметричных (симметричных друг другу) предельных циклов, охватывающих устойчивые состояния равновесия A_1 и A_3 . При пересечении кривой λ_c с возрастанием μ (или с уменьшением λ) в окрестности A_1 (в окрестности A_3) возникает пара предельных циклов: устойчивый L_1 (L_3) и седловой Γ_1 (Γ_3). В области параметров D_{sp} аттракторами системы (1) служат состояния равновесия A_1 и A_3 и предельные циклы L_1 и L_3 , стационарными режимами генератора являются моногармонические режимы I_{s1} и I_{s3} и режимы периодической автомодуляции частоты I_{p1} и I_{p3} , определяемые циклами L_1 и L_3 , соответственно. При переходе с увеличением μ (или с уменьшением λ) через кривую λ_s – границу областей D_{sp} и D_p состояния равновесия A_1 и A_3 становятся неустойчивыми, в области D_p реализуется один из режимов генератора I_{p1} или I_{p3} в зависимости от начальных условий. На рис. 2, а в качестве примера приведены фазовый портрет предельного цикла L_3 и временная реализация $x(\tau)$, соответствующие режиму I_{p3} .

Линия λ_d – граница областей D_p и D_{p1} отвечает бифуркации удвоения периода предельных циклов L_1 и L_3 . В области D_{p1} для генератора характерны режимы широкополосной автомодуляции частоты, определяемые многооборотными предельными циклами системы, рождающимися на базе циклов L_1 и L_3 , а также режимы, определяемые сложными предельными циклами системы (1), которые охватывают все три состояния равновесия A_1 , A_2 и A_3 . При пересечении с

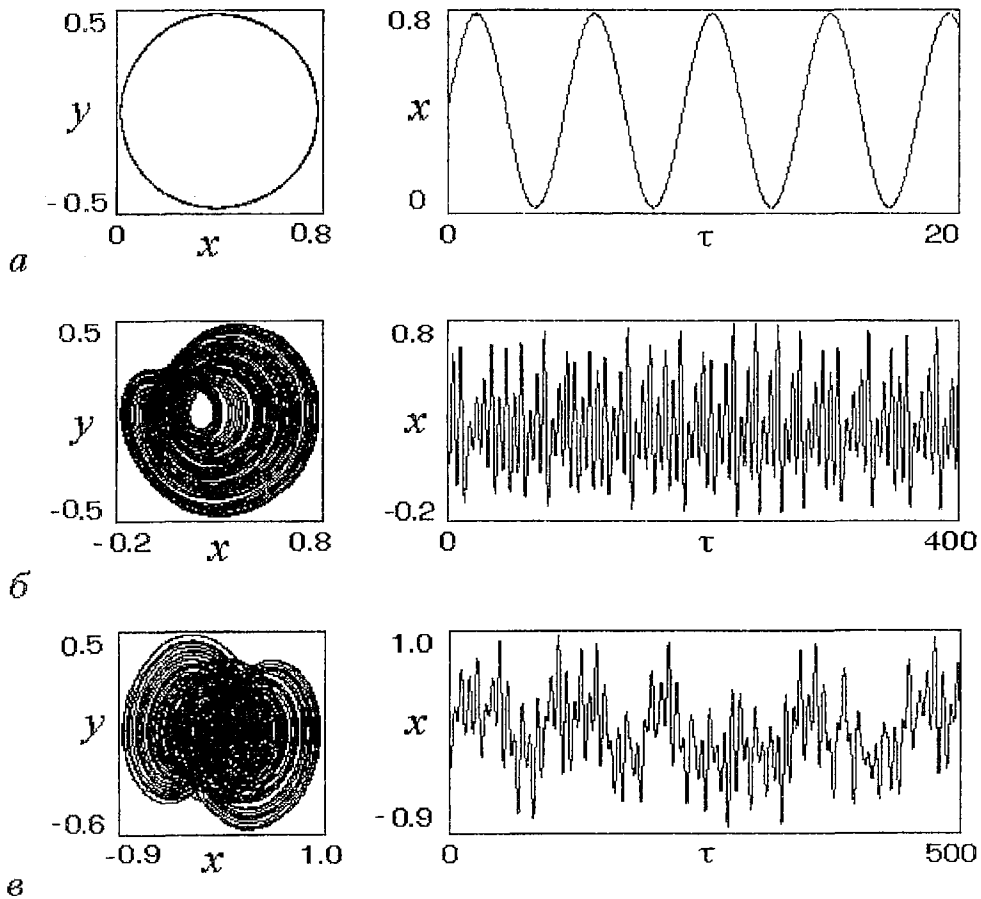


Рис. 2. Временные реализации $x(\tau)$ при $\lambda=5$ и различных значениях μ : а – 2.8; б – 4.5; в – 7.5

уменьшением λ линии λ_{c1} в фазовом пространстве системы (1) возникают асимметричные хаотические аттракторы P_1 и P_3 в результате последовательности бифуркаций удвоения периода циклов L_1 и L_3 . Аттракторы P_1 и P_3 существуют в области D_{c1} . С приближением при изменении λ и μ к границе λ_{c2} областей D_{c1} и D_{c2} увеличиваются размеры аттракторов P_1 и P_3 в фазовом пространстве, и при переходе в область D_{c2} происходит объединение этих аттракторов с формированием симметричного двухспирального хаотического аттрактора P_s . Режим генератора, соответствующий аттрактору P_s , характеризуется нарастанием колебаний возле одного из состояний равновесия A_1 или A_3 и перебросом к другому состоянию равновесия, нарастанием колебаний возле него, а затем перебросом к прежнему состоянию равновесия и т.д. Таким образом, в областях D_{c1} и D_{c2} реализуются режимы стохастических колебаний управляемого генератора, определяемые хаотическими аттракторами P_1 , P_3 и P_s . На рис. 2 показаны фазовые портреты и зависимости $x(\tau)$, соответствующие режимам хаотических аттракторов P_3 (диаг. б) и P_s (диаг. в).

При выходе из области D_{c2} через линию λ_{c3} в область D_0 происходит жесткий переход к режиму «большого» предельного цикла L_0 , динамический диапазон которого значительно превосходит раствор дискриминационной характеристики $D(x)$.

Установленное расположение на плоскости (μ, λ) областей, соответствующих различным типам движений системы (1), определяет сценарии развития режимов генератора при изменении параметров μ и λ . Изучение этих сценариев дает основание сделать заключение о сложной слоистой структуре областей D_{c1} и D_{c2} , содержащей чередующиеся области хаотических и регулярных колебаний генератора. При этом установлен эффект преобразования хаотического двухспирального аттрактора P_s в симметричный односпиральный хаотический аттрактор P_c , охватывающий все три состояния равновесия A_1 , A_2 и A_3 , с последующим разделением этого аттрактора на два асимметричных хаотических аттрактора P_c^- и P_c^+ .

В качестве примера на рис. 3 приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма $\{\lambda, x\}$, построенная при $\mu=1$. Эта диаграмма показывает характер эволюции предельного цикла L_1 при уменьшении λ от 1.85 до 0.55. На диаграмме имеет смысл выделить следующие три области: $\Lambda_1 = \{1.6851 < \lambda < 1.85\}$, $\Lambda_2 = \{0.716 < \lambda < 1.6851\}$ и $\Lambda_3 = \{0.5695 < \lambda < 0.716\}$. Область Λ_1 характеризуется тем, что колебательные движения, развивающиеся на базе циклов L_1 и L_3 , не взаимодействуют. При уменьшении λ в этой области циклы L_1 и L_3 преобразуются в асимметричные хаотические аттракторы P_1 и P_3 , область существования которых

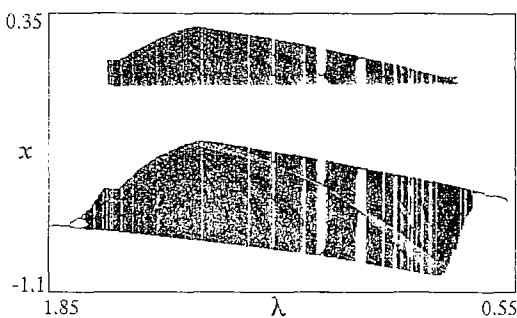


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая эволюцию предельного цикла L_1 при уменьшении λ

прерывается узкими «окнами» асимметричных многооборотных предельных циклов.

При значениях $\lambda \in \Lambda_2$ динамика системы (1) отличается взаимодействием колебательных движений, развивающихся возле состояний равновесия A_1 и A_3 . В этой области наблюдается чередование зон хаотических колебаний, соответствующих аттрактору P_s (см. рис. 2, в), и разнообразных периодических колебаний, определяемых устойчивыми симметричными и асимметричными предельными

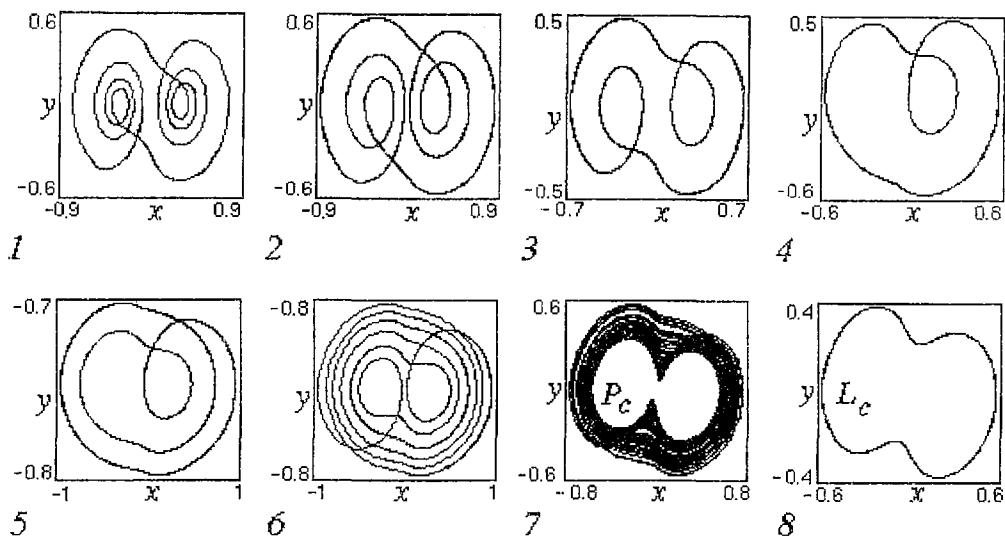


Рис. 4. Фазовые портреты аттракторов системы (1) при $\sigma=0.0$, $\mu=1$ и различных значениях λ : 1 - 1.232; 2 - 1.139; 3 - 0.97; 4 - 0.883; 5 - 0.808; 6 - 0.788; 7 - 0.6975; 8 - 0.63

циклами системы (1), охватывающими все три состояния равновесия A_1 , A_2 и A_3 как с одинаковым, так и с различным числом витков n_1 вокруг A_1 и n_2 вокруг A_3 . В качестве примера на рис. 4 даны фазовые портреты симметричных циклов с $n_1=n_2=4, 2, 6$ (диаг. 1, 3, 6) и асимметричных циклов с $n_1=n_2=3$ (диаг. 2), $n_1=1$, $n_2=2$ (диаг. 4), $n_1=2$, $n_2=3$ (диаг. 5). Наиболее широкие зоны таких режимов обнаружены в интервале значений $0.768 < \lambda < 1.236$. Характерно, что в этом интервале система (1) демонстрирует бифуркационные переходы типа потери и восстановления симметрии, удвоения периода, а также седло-узловые бифуркации предельных циклов. Режимы генератора, развивающиеся в области Λ_2 , отличаются от режимов, реализуемых при значениях $\lambda \in \Lambda_1$, большей амплитудой автомодуляции.

В области Λ_3 изменение колебательных режимов генератора с уменьшением λ связано с преобразованием хаотического двухспирального аттрактора P_s в хаотический аттрактор P_c (диаг. 7). Аттрактор P_c существует в интервале $0.673 < \lambda < 0.716$. Далее наблюдалась такая последовательность явлений: разделение аттрактора P_c на два хаотических аттрактора P_c^- и P_c^+ ; вырождение аттракторов P_c^- и P_c^+ в асимметричные однооборотные устойчивые предельные циклы L_c^- и L_c^+ , охватывающие состояния равновесия A_1 , A_2 и A_3 ; преобразование циклов L_c^- и L_c^+ в симметричный устойчивый предельный цикл L_c (диаг. 8) в результате бифуркации восстановления симметрии; жесткий переход в результате седло-узловой бифуркации при $\lambda=0.5695$ от цикла L_c к «большому» предельному циклу L_0 .

Приведенные результаты показывают, что при начальной расстройке $\sigma=0$ можно получить большое количество различных периодических и хаотических колебаний на выходе управляемого генератора, изменяя величины параметров инерционности λ и μ . Примечательно, что эффекты сложной динамики в системе (1) могут проявляться уже при сравнительно небольших величинах параметра μ , характеризующего степень влияния фильтра третьего порядка в петле управления.

4. Исследуем влияние расстройки σ на характер процессов преобразования предельных циклов L_1 и L_3 при изменении λ , для чего обратимся к бифуркационным диаграммам $\{\lambda, x\}$, которые были построены при $\mu=1$ для различных значений σ . Анализ этих диаграмм показывает, что увеличисис σ от 0

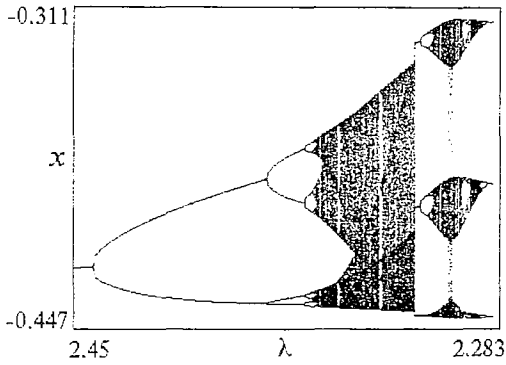


Рис. 5. Эволюция предельного цикла L_1 при уменьшении λ

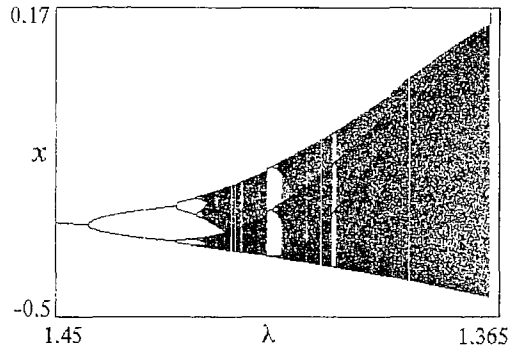


Рис. 6. Эволюция предельного цикла L_3 при уменьшении λ

(то есть увеличение степени асимметрии системы (1)) приводит к разделению области Λ_1 (см. рис. 3) на две области $\Lambda_1^{(1)}$ и $\Lambda_1^{(3)}$, соответствующие невзаимодействующим колебательным движениям, развивающимся на базе циклов L_1 и L_3 . При этом область $\Lambda_1^{(1)}$ смещается в сторону больших значений λ , а ее величина растет; область $\Lambda_1^{(3)}$ смещается в сторону меньших значений λ , а ее величина убывает. Область Λ_2 , соответствующая сложным колебательным движениям системы (1), которые охватывают все три состояния равновесия A_1 , A_2 и A_3 , с ростом σ уменьшается и смещается в сторону меньших значений λ .

Благодаря разделению областей $\Lambda_1^{(1)}$, $\Lambda_1^{(3)}$ и Λ_2 для поведения управляемого генератора с уменьшением λ при $\sigma > 0$ характерны жесткие переходы от колебательных режимов, развивающихся на базе предельных циклов L_1 и L_3 , к моногармоническому режиму I_{s3} , а затем от режима I_{s3} к сложным колебательным режимам, определяемым регулярными и хаотическими аттракторами системы (1), которые охватывают все три состояния равновесия A_1 , A_2 и A_3 . Обнаруженные особенности динамики системы (1) иллюстрируются рис.5–7, на которых представлены бифуркационные диаграммы $\{\lambda, x\}$, построенные при $\mu=1$, $\sigma=0.3$ и изменении λ от 2.45 до 0.7075. Эти диаграммы отражают развитие колебательных движений системы на базе предельных циклов L_1 при $\lambda \in \Lambda_1^{(1)}$ (см. рис. 5) и L_3 при $\lambda \in \Lambda_1^{(3)}$ (см. рис. 6) и эволюцию хаотического аттрактора P_s при $\lambda \in \Lambda_2$ (см. рис.7), где $\Lambda_1^{(1)}=(2.2858; 2.9)$, $\Lambda_1^{(3)}=(1.3667; 1.492)$, $\Lambda_2=(0.7075; 1.29)$. В интервале $1.2513 < \lambda < 2.9$ колебательные движения системы (1) сосуществуют с устойчивым состоянием равновесия A_3 .

Если за исходное состояние генератора взять режим предельного цикла L_1 (предельного цикла L_3), тогда в интервале $\Lambda_1^{(1)}$ (в интервале $\Lambda_1^{(3)}$) вначале этот режим преобразуется в режим хаотического аттрактора P_1 (хаотического аттрактора P_3), затем наблюдается чередование хаотических и периодических автомодуляционных режимов в соответствии с $\{\lambda, x\}$ -диаграммой на рис. 5 (на рис. 6), которое завершается жестким переходом от режима трехоборотного предельного цикла (от режима хаотического

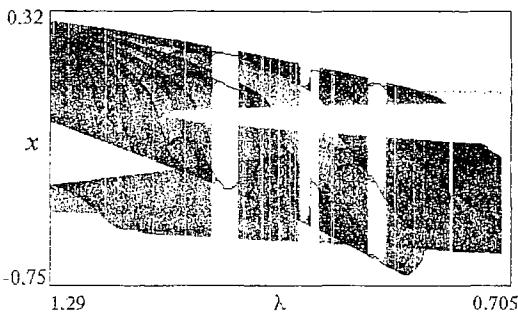


Рис. 7. Эволюция хаотического аттрактора P_s при уменьшении λ

аттрактора P_3) к режиму моногенерации I_{s3} . Режим I_{s3} поддерживается в системе до значения $\lambda=1.2513$, при $\lambda<1.2513$ он теряет устойчивость и генератор жестким образом переходит к режиму хаотического аттрактора P_s с нерегулярными перебросами между состояниями равновесия A_1 и A_3 . Следующий этап развития режимов генератора при уменьшении λ в интервале Λ_2 представляет собой чередование режимов хаотических и регулярных аттракторов, для которых характерны переходы между неустойчивыми состояниями равновесия A_1 и A_3 (см. рис.7). При $\lambda=0.7075$ генератор скачком переходит на режим колебаний, соответствующий «большому» предельному циклу L_0 .

Анализ $\{\lambda, x\}$ -диаграмм, построенных при $\mu=1$ для ряда значений σ , показывает, что области значений λ , соответствующие хаотическому аттрактору P_s и предельным циклам системы (1), имеющим витки как вокруг A_1 , так и вокруг A_3 , при увеличении σ уменьшаются, а затем при $\sigma>0.5$ исчезают. К такому же результату приводит увеличение параметра μ , о чем свидетельствует серия бифуркационных диаграмм $\{\lambda, x\}$, построенных для ряда значений μ . Характер этих диаграмм позволяет также установить, что при увеличении μ для сценария преобразования режимов генератора с уменьшением λ становится характерным жесткий переход от режимов, возникающих на базе предельного цикла L_1 , к режимам, развивающимся на базе предельного цикла L_3 .

Обнаруженные закономерности поведения системы иллюстрируются бифуркационными диаграммами $\{\lambda, x\}$ (рис.8). Они отражают эволюцию циклов L_1 и L_3 при уменьшении λ . Видно, что хаотические колебания генератора, формирующиеся на базе цикла L_1 , жестко переходят в случае $\mu=3$ в детерминированные колебания на двухоборотном предельном цикле L_3^2 (см. рис. 8, а), а в случае $\mu=9.8$ в хаотические колебания на аттракторе P_3 (см. рис. 8, б). Колебания генератора, определяемые хаотическим двухспиральным аттрактором P_s , наблюдаются при $\mu=3$ в интервале $2.19<\lambda<3.212$, а при $\mu=9.8$ такие колебания не реализуются.

5. Приведенные результаты дают представление о процессах хаотизации колебаний генератора, реализуемых при уменьшении λ или при увеличении μ . Представляет интерес исследование влияния на динамику генератора двух других параметров инерционности петли управления ρ и b . Влияние этих параметров проявляется по-разному при различных значениях λ и μ .

Как показало численное исследование системы (1), при небольших

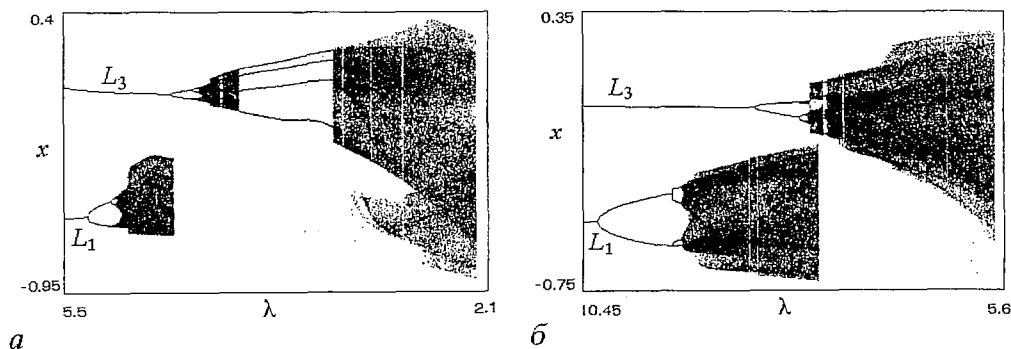


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма, характеризующая эволюцию предельных циклов L_1 и L_3 с уменьшением λ при $\sigma=0.1$, $\rho=0.0$ и различных значениях μ : а - 3.0; б - 9.8

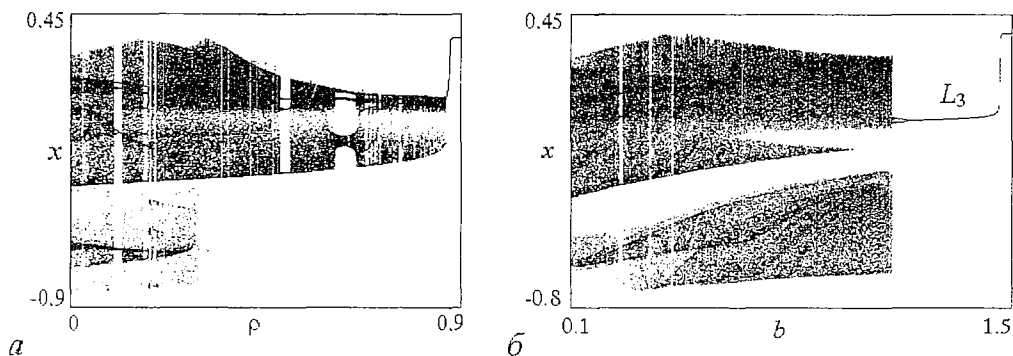


Рис. 9. Эволюция хаотического аттрактора P_s : a – при увеличении ρ и значениях параметров $b=0.1$, $a=20$, $\sigma=0.05$, $\lambda=\mu=3$; b – при увеличении b и значениях параметров $\rho=0.0$, $a=20$, $\sigma=0.1$, $\lambda=\mu=3$

величинах λ и μ результатом увеличения параметров ρ и b является дестохастизация колебаний генератора и переход его в режим моногенерации. В качестве примеров такого поведения генератора приведены бифуркационные диаграммы: $\{\rho, x\}$ и $\{b, x\}$ (рис. 9). Стартовым состоянием генератора является режим хаотического двухспирального аттрактора P_s . Диаграммы характеризуют преобразование этого режима в моногармонический режим I_{33} при увеличении параметров ρ и b .

Из диаграммы $\{\rho, x\}$ (см. рис. 9, a) видно, что аттрактор P_s существует в интервале $0 \leq \rho < 0.297$. Отметим, что при значениях ρ из этого интервала генератор может выходить также и на режимы периодических автомодуляционных колебаний, которые определяются многооборотными предельными циклами системы (1). При переходе через значение $\rho=0.297$ аттрактор P_s преобразуется в односпиральный хаотический аттрактор P_3 . Обращает внимание широкий интервал значений ρ , в котором поддерживаются хаотические колебания генератора. С превышением параметром ρ значения $\rho=0.8865$ режим хаотических колебаний жестко трансформируется в моногармонический режим I_{33} .

Из диаграммы $\{b, x\}$ (см. рис. 9, b) следует, что с увеличением параметра b хаотические колебания генератора, соответствующие аттрактору P_s , сохраняются до значения $b=1.106$, при превышении которого эти колебания преобразуются в хаотические колебания, описываемые аттрактором P_3 . Затем наблюдается дестохастизация колебаний через обратные бифуркации удвоения периода и устанавливается режим колебаний на предельном цикле L_3 , который при $b > 1.456$ жестко переходит в моногармонический режим I_{33} . Анализ $\{\rho, x\}$ -диаграмм, построенных для серии значений параметра b , и $\{b, x\}$ -диаграмм, построенных для ряда значений ρ , показывает, что с увеличением b (с увеличением ρ) переход генератора к моногармоническому режиму происходит при меньших значениях ρ (при меньших значениях b).

По мере увеличения параметров μ и λ для динамики системы (1) при возрастании ρ характерны явления потери устойчивости предельных циклов L_1 и L_3 с рождением в фазовом пространстве притягивающих торов T_1 и T_3 , которым соответствуют режимы двухчастотных автомодуляционных колебаний генератора. На рис. 10, a приведена бифуркационная диаграмма $\{\rho, x\}$, характеризующая происходящие одновременно процессы, связанные с эволюцией предельных циклов L_1 и L_3 при увеличении ρ от 0.18 до 0.99. Двухчастотные автомодуляционные

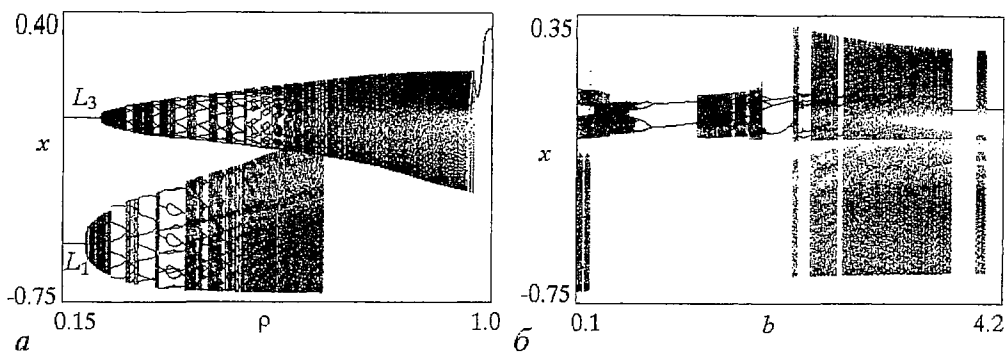


Рис. 10. Динамика режимов генератора: *a* – при увеличении ρ и значениях параметров $a=20$, $b=0.1$, $\sigma=0.05$, $\lambda=\mu=15$; *б* – при увеличении b и значениях параметров $\rho=0.0$, $a=20$, $\sigma=0.1$, $\lambda=7.78$, $\mu=9.8$

колебания реализуются в интервале $0.1915 < \rho < 0.3665$ на базе цикла L_1 и в интервале $0.2205 < \rho < 0.3725$ на базе цикла L_3 , о чем свидетельствует вид соответствующих сечений Пуанкаре. В интервалах $0.3565 < \rho < 0.6667$ и $0.3725 < \rho < 0.974$ с увеличением ρ происходит чередование режимов периодической и хаотической частотной автомодуляции. Развитие колебаний на базе цикла L_1 завершается жестким переходом генератора при $\rho=0.6667$ к режиму хаотических колебаний, который сформировался в результате эволюции цикла L_3 . При $\rho > 0.974$ хаотические колебания прекращаются и генератор скачком переходит к режиму «большого» предельного цикла L_0 .

Изменения сценария развития колебаний в зависимости от параметра b , происходящие по мере увеличения параметров μ и λ , обусловлены возможностью возникновения режима хаотического двухспирального аттрактора P_s . Это явление иллюстрирует бифуркационная диаграмма $\{b, x\}$ (см. рис. 10, б). Диаграмма отражает развитие режимов колебаний генератора, соответствующих хаотическим аттракторам P_1 и P_3 при увеличении параметра b от 0.1 до 4.2, и интересна тем, что обнаруживает возможность перехода генератора от режимов, соответствующих аттракторам P_1 и P_3 , к режиму предельного цикла L_3 через режим аттрактора P_s . Из диаграммы видно, что в интервале $0.1 < b < 0.235$ в фазовом пространстве системы (1) существуют оба аттрактора P_1 и P_3 . При $b > 0.235$ аттрактор P_1 разрушается и траектории системы (1) идут в ту область фазового пространства, где существует аттрактор P_3 . При дальнейшем увеличении b наблюдается чередование хаотических и регулярных колебаний возле неустойчивого состояния равновесия A_3 . При $b > 2.185$ генератор жестко переходит к режиму хаотического аттрактора P_s , который существует в интервале $2.185 < b < 4.028$, прерываемом зонами регулярных колебаний. Когда значение b превышает 4.028, хаотические колебания на аттракторе P_s жестко трансформируются в регулярные, соответствующие предельному циклу L_3 , которые поддерживаются в генераторе до значения $b=5.824$. При $b > 5.824$ генератор скачком переходит к моногармоническому режиму I_{33} .

6. Изученные колебательные движения системы (1) являются примером возникновения и развития динамических режимов в нелинейных динамических системах с бистабильным поведением. Проведенное исследование показывает, что в рамках динамической модели с полутора степенями свободы автогенераторная система с автоматическим управлением частотой при положительной обратной связи в петле управления демонстрирует колебательные режимы, характерные для

случая отрицательной обратной связи, и ряд новых режимов, бифуркационных переходов и сценариев преобразования автомодуляционных режимов управляемого генератора, возбуждаемых в результате потери устойчивости моногармонических режимов.

Полученные результаты обнаруживают, что увеличение параметра инерционности μ , характеризующего степень влияния фильтра третьего порядка в петле управления, приводит к появлению режимов периодической автомодуляции частоты генератора, а затем к хаотизации этих режимов. При этом возможна дестохастизация колебаний при хаотических колебаниях генератора. Увеличение других параметров инерционности λ , ρ и b , расширяя область устойчивости режимов стационарной генерации, в итоге способствует процессу дестохастизации, приводя к прекращению хаотического характера автомодуляции, а затем и самой автомодуляции. Процессы преобразования колебательных режимов характеризуются бифуркациями удвоения периода и рождения инвариантного тора, жесткими переходами между многооборотными предельными циклами через хаотические движения, а также переходами от колебаний возле одного состояния равновесия к колебаниям относительно другого состояния равновесия. Изменением начальной расстройки и параметров инерционности можно гибко управлять свойствами и областями существования режимов генератора. Установленные свойства движений расширяют представления о сложной динамике автогенераторных систем с частотным управлением и могут быть полезными при решении прикладных задач, связанных с формированием шумоподобных колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 94-01-00957, 96-02-16559).

Библиографический список

1. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.
2. Левин В.А. Стабилизация дискретного множества частот. М.: Энергия, 1970.
3. Тузов Г.И. Выделение и обработка информации в доплеровских системах. М.: Сов. радио, 1967.
4. Пономаренко В.П. Об устойчивости системы частотной автоподстройки с фильтром второго порядка // Радиотехника и электроника. 1982. Т.27, № 1. С.113.
5. Заулин И.А., Пономаренко В.П. Динамические режимы и бифуркационные явления в нелинейных статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38, № 5. С.889.
6. Пономаренко В.П., Заулин И.А. Сложная динамика систем с неединственным состоянием равновесия // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, № 1. С.30.

*НИИ прикладной математики и
кибернетики ННГУ*

*Поступила в редакцию 20.06.97
после переработки 8.09.97*

NUMERICAL MODELLING OF THE EVOLUTION OF DYNAMICAL REGIMES IN AUTOOSCILLATORY SYSTEM WITH FREQUENCY CONTROL

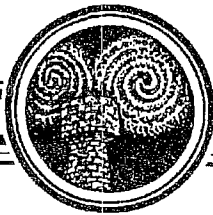
V.P. Ponomarenko

The results of investigation of the regular and chaotic oscillations and their bifurcations in frequency controlled autogenerator in the case of positive feedback in

control loop are presented. Numerical simulation of the equations which describe the dynamics of the system reveals the ways of parameter changes promoting stochastization of regular oscillations and destochastization of chaotic ones.



Пономаренко Валерий Павлович родился в 1941 году в Мурманске, окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.



ДИНАМИЧЕСКОЕ КОПИРОВАНИЕ В МНОГОСЛОЙНЫХ БИСТАБИЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ

В.И. Некоркин, В.Б. Казанцев, М.Г. Веларде

В работе изучается динамика взаимодействующих квадратных решеток, состоящих из автоколебательных элементов с жестким режимом возбуждения. На фазовой плоскости каждого элемента существует устойчивое состояние равновесия и предельный цикл. Элементы объединяются в решетку с помощью «диффузионной» связи. Обнаружено, что при объединении таких решеток в многослойную систему последняя способна осуществлять функцию динамического копирования (воспроизведения) форм заданного регулярного образа (стимула). Это означает, что образ, в виде стационарной амплитудной структуры, существующий в одном из слоев, достаточно точно копируется в остальных слоях, амплитуды которых изначально были распределены беспорядочно. Дается объяснение этого феномена с точки зрения нелинейной динамики. Исследуется устойчивость процесса копирования по отношению к малым внешним шумам в системе.

Введение

Одной из фундаментальных черт самоорганизации биологических систем и природы вообще, от микроуровня до уровня целостных организмов и их сообществ, является способность копирования (воспроизведения) [1–5] законченных структур, образов, функций и образцов поведения в процессе эволюции. Такая универсальность и многоуровневость дает возможность предположить, что явление воспроизведения обуславливается лишь наиболее универсальными и относительно простыми свойствами порождающих его систем. Это позволяет надеяться построить относительно простые модели этого явления в виде динамических систем, способных осуществлять копирование каких-либо черт образца в процессе собственной эволюции.

Впервые такая динамическая модель была предложена в работах [6,7]. Была рассмотрена система, состоящая из двух взаимодействующих слоев, каждый из которых представляет собой двумерную решетку идентичных бистабильных элементов (отдельный элемент имеет два устойчивых состояния равновесия), соединенных между собой с помощью «диффузионной» связи. Установлено, что при выполнении некоторых условий на параметры системы и при достаточно «сильной» связи h между слоями, регулярная диссипативная структура (стимул), существующая в одном из слоев при $h=0$, при $h \neq 0$ достаточно точно воспроизводилась (копировалась) во втором слое, который до взаимодействия находился в хаотическом состоянии. Дальнейшее развитие идеи динамического копирования получили в работе [8]. В этой работе рассматривался процесс

копирования и передачи информации нейронными решетками, которые моделировались системой из двух взаимодействующих слоев – двумерных решеток автоколебательных элементов с жестким режимом возбуждения (на фазовой плоскости каждого элемента существуют устойчивые состояние равновесия и предельный цикл). Связь между элементами внутри каждого слоя предполагалась «диффузионной».

В настоящей работе мы сосредоточим основное внимание на изучении явления динамического копирования образов (структур) в многослойной решетке, рассматривая его как одну из форм самоорганизации систем, далеких от равновесия.

1. Многослойная решеточная динамическая система

Как и в [8,10,11], здесь в качестве модели локального элемента решетки рассматривается автоколебательный элемент с жестким режимом возбуждения (далее будем называть такой элемент бистабильным осциллятором), устойчивыми стационарными состояниями которого являются состояния покоя и осцилляторной активности – периодических колебаний конечной амплитуды. Соединяя элементы в слой с помощью «диффузионной связи», а каждый элемент одного слоя с соответствующими элементами двух других соседних слоев, получим многослойную решетку (рис. 1). Коллективная динамика такой системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений [10,11]:

$$\dot{A}_{j,k}^{(l)} = -A_{j,k}^{(l)} F(|A_{j,k}^{(l)}|^2) + d(\Delta A)_{j,k}^{(l)} + h(A_{j,k}^{(l+1)} + A_{j,k}^{(l-1)} - 2A_{j,k}^{(l)}), \quad (1)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, M,$$

где $A_{j,k,l}$ – комплексная амплитуда колебаний j,k -го элемента в l -ом слое решетки, $F(|A|^2) = 2a|A|^4 - a|A|^2 + 1$, $a > 8$ – нелинейная функция, обеспечивающая существование у отдельного элемента ($d=0, h=0$) устойчивого состояния равновесия (состояние покоя) и устойчивого предельного цикла (возбужденное состояние), $\Delta A_{j,k}^{(l)} = A_{j+1,k}^{(l)} + A_{j-1,k}^{(l)} + A_{j,k+1}^{(l)} + A_{j,k-1}^{(l)} - 4A_{j,k}^{(l)}$, d и h – соответственно коэффициенты связи между элементами внутри слоя и между слоями. Для определенности будем полагать также, что как по «направлениям» j, k , так и по «направлению» l система удовлетворяет граничным условиям Неймана.

Для проблемы динамического копирования основной и информативной характеристикой системы, как показано в [8], является амплитуда колебаний осцилляторов $r_{j,k}^{(l)}$ ($A_{j,k}^{(l)} = r_{j,k}^{(l)} \exp(i\varphi_{j,k}^{(l)})$). Поэтому будем рассматривать многослойную решеточную динамическую систему, все элементы которой синхронизованы по фазе $\varphi_{j,k}^{(l)} = \varphi = \text{const}$. Устойчивость таких режимов фазовой синхронизации в решетках диффузионно-связанных бистабильных осцилляторов была показана в работах [8,10]. При этом динамика амплитуд синфазных колебаний задается системой вида:

$$\dot{r}_{j,k}^{(l)} = f(r_{j,k}^{(l)}) + d(\Delta r)_{j,k}^{(l)} + h(r_{j,k}^{(l+1)} + r_{j,k}^{(l-1)} - 2r_{j,k}^{(l)}), \quad (2)$$

где $f(r) = -2ar^5 + ar^3 - r$.

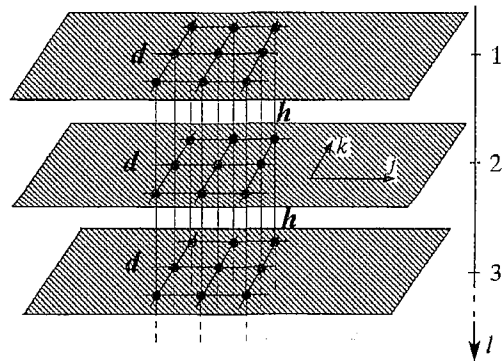


Рис. 1. Схема организации многослойной решетки

1.1. Пространственные структуры в не взаимодействующих слоях.

Каждый слой в системе (1) при $h=0$ представляет собой двумерную решетку – дискретный аналог известного уравнения «реакция–диффузия». В [11] показано, что в пространстве параметров такой решетки существует область D_{ch} , для точек которой в этой решетке (каждом слое системы (1)) при $h=0$ может реализоваться (в зависимости от начальных условий) 2^{N^2} устойчивых синфазных движений. Каждое такое движение можно трактовать как некоторое коллективное колебание, порожденное совместным колебанием всех элементов слоя. При этом, как показано в [11], амплитуды колебаний элементов ограничены и локализованы в пределах так называемых поглощающих областей. Грубо говоря, элементы решетки колеблются в некоторой окрестности либо состояния покоя, либо возбужденного состояния, существующих в каждом элементе слоя при отсутствии связей между элементами, то есть при $d=0$. Область параметров D_{ch} задается следующим образом

$$D_{ch} = \{ d < d^* = \min [-f_{\min}/(4(r_0-r_{\min})), f_{\max}/(4(r_0+r_{\max}))], a > 8 \}, \quad (3)$$

где r_{\min} , r_{\max} – координаты минимума и максимума функции $f(r)$, r_0 – наибольший положительный корень уравнения $f(r)=0$ (другими словами, r_0 – амплитуда устойчивых колебаний элементов при $d=0$), $f_{\min}=f(r_{\min})$, $f_{\max}=f(r_{\max})$.

В пространстве $\{Z^2, R\}$ каждое из 2^{N^2} устойчивых синфазных движений задает некоторое распределение амплитуд, которое можно интерпретировать как некоторую стационарную структуру в этом пространстве. В [11] показано, что множество этих стационарных структур может быть описано с помощью произвольных $N \times N$ матриц, состоящих из двух символов (например, «0» и «1»). Это означает, что при $h=0$ каждый из слоев системы (1) демонстрирует высокую мультистабильность и определяет в пространстве $\{Z^2, R\}$ чрезвычайно широкий «спектр» стационарных структур – от регулярных до пространственно–беспорядочных (пространственно–хаотических), отвечающих матрицам с неупорядоченным набором символов «0» и «1». В последнем случае принято говорить о существовании в системе пространственного беспорядка [12].

1.2. Взаимная синхронизация пространственных структур во взаимодействующих слоях. Рассмотрим динамику системы (1) при $h \neq 0$, то есть при «включении» взаимодействия между слоями. Полностью аналогично случаю двух взаимодействующих слоев [6–8], можно показать, что при достаточно «сильной» связи между слоями, то есть при $h > h^*$, $h^* = (7a - 20)/20$ все синфазные движения взаимно синхронизируются от слоя к слою, то есть $r_{j,k}^{(l)} = r_{j,k}^{(l+1)}$, $\forall l=1, 2, \dots, M-1$. Следовательно, при таких значениях межслойных связей пространственные структуры в $\{Z^2, R\}$, соответствующие амплитудным распределениям $r_{j,k}^{(l)}$, будут одинаковыми от слоя к слою и можно говорить о синхронизации таких пространственных структур.

В связи с этим возникает вопрос о том, как установившаяся синхронная пространственная структура связана с исходными начальными структурами, существующими в слоях до их взаимодействия. Оказывается, и это будет показано ниже, что при определенных условиях профиль синхронизованной структуры может достаточно точно повторить форму некоторого изначально наложенного на первый слой образа – стимула.

2. Динамическое копирование

Для большей наглядности изображения процесса динамического копирования в качестве стимула (начальных условий для переменных $r_{j,k}^{(1)}$ в первом слое) будем использовать пространственные структуры, соответствующие черно–белым фотографиям, изображающим лица людей (фотографии взяты из

монографии [4]). Поясним процесс формирования такого стимула. Пусть слои в модели (1) не взаимодействуют ($h=0$). Рассмотрим первый из них. Выберем начальное распределение фаз $\varphi_{j,k}^{(1)}(0)$ таким, чтобы в системе установился синфазный режим (например, фазы распределены случайным образом вблизи синфазного состояния $\varphi_{j,k}^{(1)}(0)=0$), а начальные условия для амплитуд $r_{j,k}^{(1)}(0)$ пусть будут произвольными (их влияние мы обсудим позднее). Как показано в [11], в этом случае для любого начального распределения амплитуд в результате эволюции в слое реализуется некоторое синфазное движение. Поскольку в $\{Z^2, R\}$ амплитуды установившихся колебаний $r_{j,k}^{(1)}$ содержатся в достаточно «тонких» поглощающих областях [11], которые локализованы в окрестности значений $r=0$ и $r=r_0$, то распределение $r_{j,k}^{(1)}$ в $\{Z^2, R\}$ носит, фактически, бистабильный характер. Поэтому любому двухуровневому изображению (например, черно-белой фотографии) можно поставить в соответствие пространственную структуру, порожденную амплитудами $r_{j,k}^{(1)}$ синфазных колебаний. Для этого достаточно лишь подходящим образом выбрать начальные условия $r_{j,k}^{(1)}$.

2.1. Копирование образа в системе из двух слоев. Рассмотрим сначала систему, состоящую лишь из двух взаимодействующих слоев ($M=2$ в системе (1)). Здесь и ниже будем рассматривать стационарные пространственные структуры, порожденные амплитудными распределениями. Пусть при отсутствии взаимодействия первый слой содержит заданную пространственную структуру – стимул, отвечающую некоторому двухуровневому изображению, например, фотографии лица человека (рис. 2, а). Второй же слой системы образует стационарную структуру, имеющую хаотический – беспорядочный профиль (рис. 2, б). Это неупорядоченное состояние второго слоя можно трактовать как своего рода «неорганизованный материал» или «чистый лист», не содержащий в себе пространственно-организованных, упорядоченных структур. Белый цвет на рис. 2 отвечает осцилляторам, совершающим колебания, близкие к состоянию покоя, а элементы, осциллирующие около возбужденного состояния, показаны черным цветом. При включении достаточно сильного межслойного взаимодействия, $h>h^*$, после относительно короткого переходного процесса, происходит полная взаимная синхронизация пространственных структур между слоями (рис. 2, в, г). Легко видеть, что профиль синхронизированной структуры является достаточно точной копией оригинала – фотографии лица человека, содержащейся изначально в первом слое. Таким образом, элементы второго слоя, находившиеся в неупорядоченном состоянии, организуются в регулярную пространственную структуры по «шаблону», предлагаемому стимулом. Отметим, что этот «шаблон» не навязывается однозначно второй решетке, поскольку воздействие является взаимным. Это обуславливает наличие у копий некоторых искажений (см. рис. 2), а также возможно каких-либо новых черт по отношению к оригиналу. Следовательно, наша копирующая система не работает как компьютер или печатающий пресс, а всегда допускает возможность изменений, сохраняя, однако, все основные черты исходного стимула. Рассмотрим теперь, как процесс воспроизведения может быть описан с точки зрения динамической системы (2).

Динамическая основа копирования. Рассмотрим амплитудные уравнения – систему (2). Отметим сначала два общих условия, накладываемые на параметры этой системы. Во-первых, коэффициент диффузии внутри каждого слоя d должен быть достаточно мал ($d<d^*$, см. формулу (3)). Это обеспечивает возможность формирования в каждом слое неоднородных стационарных пространственных структур как данного регулярного, так и беспорядочного профиля. Во-вторых, для синхронизации пространственных структур между слоями необходимо достаточно сильное межслойное взаимодействие ($h>h^*$).

1. Первое условие позволяет рассматривать систему (2) как регулярно возмущенную систему. Полагая $d=0$ в нулевом порядке теории возмущений

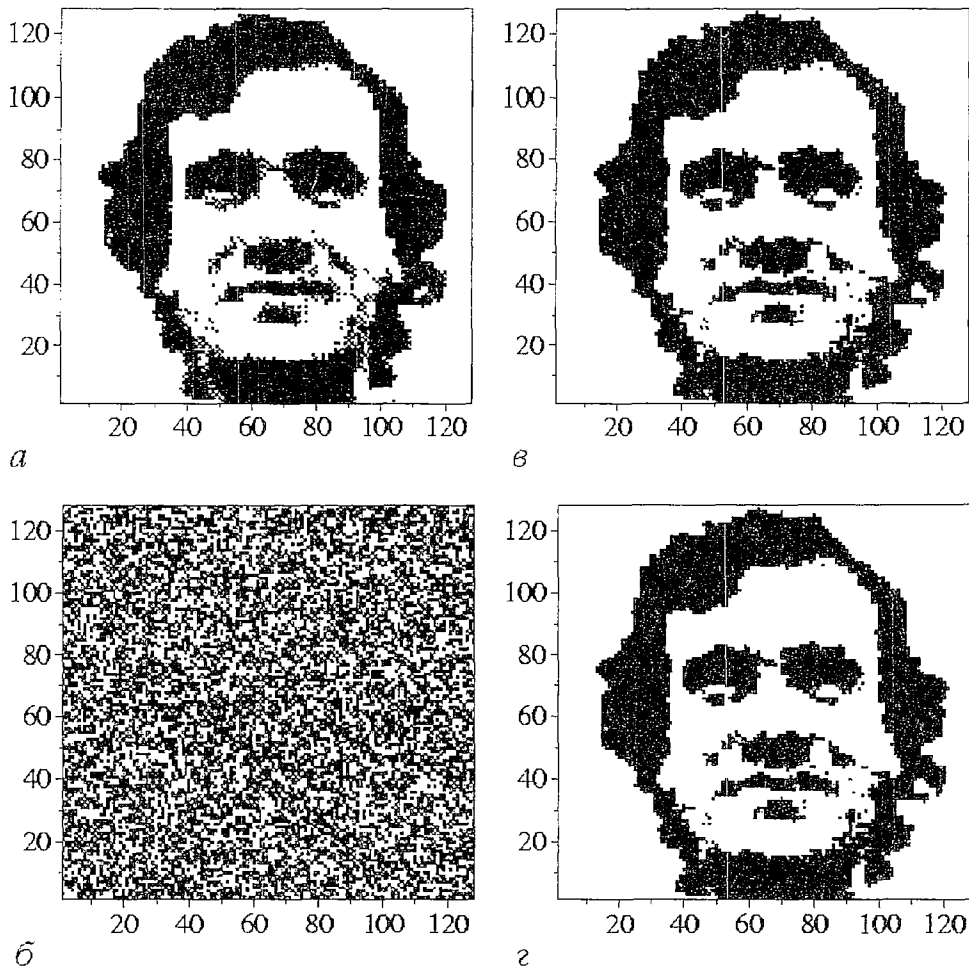


Рис. 2. Копирование образа в двух взаимодействующих решеточных слоях при параметрах: $a=10.75$, $d=0.05$, $h=0.8$. Начальные условия: *а* – пространственная структура регулярной формы – стимул, *б* – хаотическая пространственная структура. Установившиеся стационарные распределения: *в, г* – две тождественные копии исходного стимула

получаем, что взаимодействие между слоями разбивается на взаимодействие пар элементов $(r_{j,k}^{(1)}, r_{j,k}^{(2)})$, взятых независимо из каждой решетки. Динамика каждой пары определяется двумерной системой

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) + h(v-u), \\ \dot{v} = f(v) + h(u-v), \end{cases} \quad (4)$$

где u и v – амплитуды осцилляторов первого и второго слоев. Исследуем динамику этой системы при $h > h^*$. В этом случае на фазовой плоскости имеются лишь три состояния равновесия – два устойчивых узла: O^{00} $(0,0)$ и O^{++} (r_0, r_0) и седло $O^s(u_s, v_s)$ (рис. 3). Два устойчивых узла отвечают соответственно состоянию покоя и возбужденному состоянию обоих осцилляторов из отдельно взятой пары. Выходящие сепаратрисы седла лежат на прямой $u=v$, образующей многообразия синхронных движений для системы (4), а входящие сепаратрисы w_1 и w_2 – разделяют области притяжения устойчивых узлов O^{00} и O^{++} . Следовательно, какое из этих устойчивых состояний реализуется в процессе эволюции системы (4),

определяется положением начальной точки на фазовой плоскости по отношению к сепаратрисам w_1 и w_2 .

2. Учет теперь влияние малого параметра d . Начальными условиями для изучаемого процесса копирования являются две различные равновесные пространственные структуры, реализуемые в каждом слое системы (2) при $h=0$. Как отмечалось выше, амплитуды каждого из осцилляторов, образующих эти структуры, локализованы в пределах некоторых поглощающих областей вблизи нулевого и возбужденного состояний каждого осциллятора. На фазовой плоскости системы (4) эти области образуют прямоугольники вблизи точек $O^{00}, O^{++}, O^{0+}, O^{+0}$, как показано на рис. 3. Состояние каждой пары элементов перед началом взаимодействия определяет точку в пределах какой-либо из этих областей. Так, например, для пары, в которой осциллятор из первого слоя был возбужден, а осциллятор из второго слоя в состоянии покоя, начальные условия для системы (4) будут находиться в поглощающей области около точки O^{+0} (см. рис. 3).

3. Следующий принципиально важный момент касается распределения элементов по поглощающим областям O^{+0} и O^{0+} в зависимости от типа пространственной структуры при $h=0$. А именно, как будет различаться это распределение для структур регулярного и хаотического профиля? Легко видеть, что степень удаления амплитуды каждого осциллятора от соответствующего невозмущенного состояния $r=0$ или $r=r_0$ будет определяться в основном тем, какое состояние в структуре занимают его ближайшие соседи (мы рассматриваем случай локального взаимодействия элементов в слое). Вследствие диффузионного характера связи $-(r_{j,k}^{(l)} - d(\Delta r)_{j,k}^{(l)})$, а значит, чем больше соседей находится в противоположном состоянии, тем дальше амплитуда данного элемента отстоит от соответствующего невозмущенного значения.

Структуру регулярного стимула (см. рис. 2, а) составляют достаточно большие группы осцилляторов с амплитудами, лежащими около одного и того же невозмущенного состояния. Эти группы можно рассматривать как амплитудные кластеры двух типов (области белого и черного цвета на рис. 2, а). Таким образом, элементы, находящиеся внутри кластеров (которые и определяют основные черты стимула), имеют амплитуды, локализованные в поглощающей области достаточно близко к соответствующему невозмущенному состоянию. В предельном случае увеличения размеров кластера мы приходим к однородному распределению амплитуды, где все элементы либо одинаково возбуждены ($r_{j,k}^{(l)}=r_0$), либо имеют нулевую амплитуду ($r=0$).

У хаотического распределения (см. рис. 2, б) практически каждый осциллятор имеет соседей, занимающих противоположное состояние. Поэтому элементы беспорядочной структуры имеют амплитуды, расположенные относительно далеко (по сравнению с элементами регулярной структуры) от невозмущенных значений $r=0$ и $r=r_0$.

4. Из приведенных рассуждений следует, что при взаимодействии регулярного стимула с беспорядочной структурой на фазовой плоскости системы (4) начальные условия для подавляющего числа пар элементов будут располагаться в углах прямоугольников поглощающих областей O^{+0} и O^{0+} (см. рис. 3, точки 1-4). А именно, если стимул содержится в

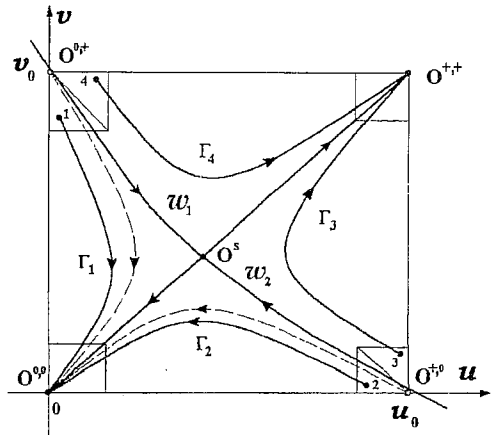


Рис. 3. Фазовый портрет вспомогательной системы (4)

первом слое, это будут углы, содержащие точки 1 и 3. Теперь, при условии расположения сепаратрис w_1 и w_2 , как показано на рис. 3, то есть достаточно четкого разделения ими углов поглощающих областей, процесс воспроизведения стимула в каждой отдельно взятой паре осцилляторов представляется траекториями Γ_1 и Γ_3 системы (4). Так, например, «по траектории Γ_3 » осциллятор второй решетки (с амплитудой v), изначально не возбужденный (точка 3), переходит в возбужденное состояние, которое задается элементом из стимула (с амплитудой u).

Копирование и искажения. Рис. 4 иллюстрирует процесс динамического копирования стимула, представленный на рис. 2, в плоскости переменных ($u = r_{j,k}^{(1)}$, $v = r_{j,k}^{(2)}$). Каждая точка определяет амплитуды (u, v) двух осцилляторов, взятых в узлах (j, k) первого и второго слоя. Как уже отмечалось выше, в начальный момент (рис. 4, а) эти точки распределены в пределах прямоугольных поглощающих областей, которые разделяются сепаратрисами w_1 и w_2 , полученными непосредственным интегрированием системы (4). В процессе взаимодействия (рис. 4, б) точки, лежащие выше сепаратрисы w_2 переходят к состоянию O^{++} , что соответствует возбуждению осцилляторов второго слоя, взаимодействующих с возбужденными осцилляторами первого слоя. В парах же, состояние которых отображается точками ниже w_2 , осцилляторы первой решетки изменяют свое состояние, вызывая таким образом искажения копий по отношению к оригиналу. Аналогично, возникают искажения в парах элементов по отношению к сепаратрисе w_1 . Результатом взаимодействия является синхронизованное состояние слоев (рис. 4, в), где все точки лежат на многообразии синхронизации $r_{j,k}^{(1)} = r_{j,k}^{(2)}$, $\forall l = 1, 2, \dots, M-1$.

Как было отмечено, копии, полученные при динамическом копировании, всегда имеют определенные искажения по отношению к исходному образцу. Введем количественную характеристику «качества» копирования как процентное отношение

$$\Delta[\%] = N_1/N_2 \times 100\%,$$

где N_1 – число элементов копии, правильно воспроизводящих структуру исходного

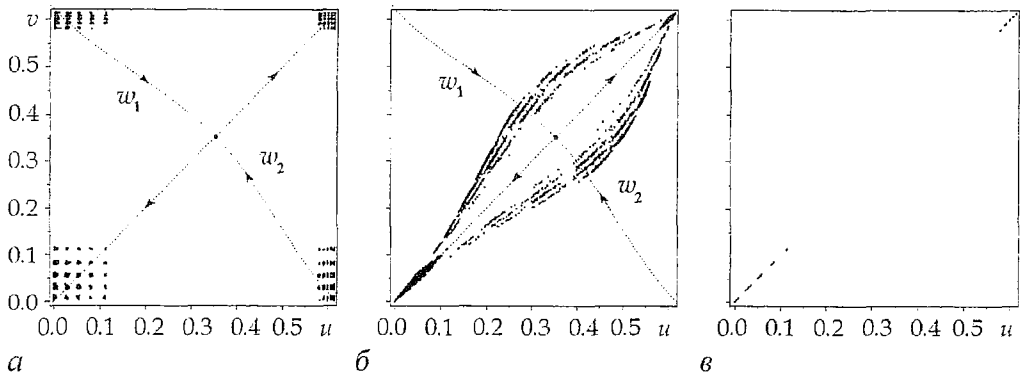


Рис. 4. Процесс воспроизведения стимула (рис. 2), представленный в плоскости переменных системы (4). а – распределение амплитуд по поглощающим областям при $t=0$; б – мгновенный снимок через $t \approx 2$ после начала взаимодействия; в – синхронизованное состояние. Каждая точка отражает состояние одной из 128×128 пар элементов, составленных из соответствующих осцилляторов первой (амплитуда u) и второй (амплитуда v) решеток. w_1, w_2 – сепаратрисы седла системы (4), полученные прямым численным интегрированием при данных параметрах

изображения в данной точке, N^2 – общее число элементов в слое. На рис. 5 представлена зависимость «качества» копирования от параметра нелинейности a . Это колоколообразная функция с ярко выраженным максимумом при значении $a \approx 10.75$. Копии здесь получаются наиболее качественными (см. рис. 2) и значение Δ для них достигает $\approx 97\%$.

Таким образом, в основе явления динамического копирования лежит механизм конкуренции состояний элементов, взятых в точке (j, k) взаимодействующих слоев. Элементы слоя, содержащего неупорядоченную структуру, в большинстве своем имеют менее «выгодные» условия в этой конкуренции и вынуждены изменить свое состояние на соответствующее регулярному стимулу.

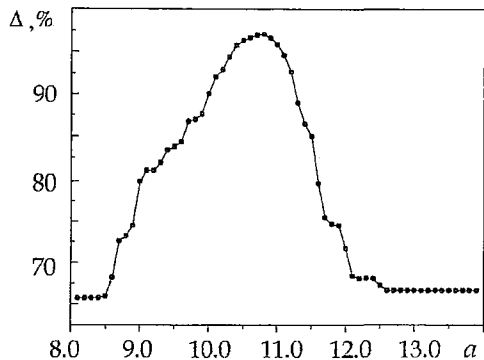


Рис. 5. «Качество» копирования Δ как функция параметра нелинейности a при воспроизведении пространственного стимула в форме лица человека (рис. 2, а). Параметры: $d=0.05$, $h_{j,k}=h=0.8$

2.2. Копирование образов в многослойной системе. Рассмотрим теперь систему, состоящую из нескольких слоев. Предположим, что первый из них содержит до начала взаимодействия некоторый пространственный образ – стимул, а все остальные слои находятся в «чистом», «неорганизованном» состоянии, то есть содержат стационарные пространственные структуры хаотического профиля, различные от слоя к слою. Возможно ли посредством межслойного взаимодействия, при $h > h^*$, получить в каждом из «неорганизованных» слоев копии оригинального изображения? На рис. 6 представлен процесс динамического воспроизведения заданного образа в трехслойной решетке. Здесь колонки (а, б) иллюстрируют мгновенные снимки в слоях соответственно в начальный и некоторые промежуточные моменты времени, а колонка (в) отвечает установившимся, синхронизованным распределениям амплитуды. Очевидно, что система произвела три достаточно хороших копии оригинала.

Ясно, что в силу малости диффузии d внутри каждого слоя, по аналогии с подходом, описанным для двух взаимодействующих решеток, и в случае многослойной системы справедлив механизм конкуренции осцилляторов, взятых в соответствующей точке (j, k) каждого слоя. Однако теперь, строго говоря, для подробного его описания потребуется динамическая система – аналог системы (4), порядок которой равен M – числу слоев решетки. Исследование такой системы представляется достаточно сложным и является отдельной задачей. Мы же на примере взаимодействия в трехслойной решетке (см. рис. 6) заметим следующее. Процесс проявления стимула в изначально неупорядоченных слоях происходит неодновременно, а в некотором смысле последовательно. Сначала образ начинает проявляться в слое, ближайшем к стимулу, а уже затем в следующем (см. рис. 6, б). Следовательно, процесс воспроизведения можно приближенно разбить на последовательность независимых этапов «передачи» образа от слоя к слою. Каждый такой этап представляется как взаимодействие образа с беспорядком в двухслойной решетке, механизм которого был в деталях изложен в пункте 3.1. Такое описание можно аргументировать и тем, что и по координате l (номер слоя) диффузионная связь является локальной, и процесс копирования можно рассматривать как относительно медленную, последовательную «диффузию образа» вглубь решетки. Ясно, что незначительные искажения копий по отношению к оригиналу в этих многократных этапах передачи от слоя к слою будут увеличиваться, однако, синхронизованное состояние (см. рис. 6) сохраняет все существенные черты (форму) исходного стимула.

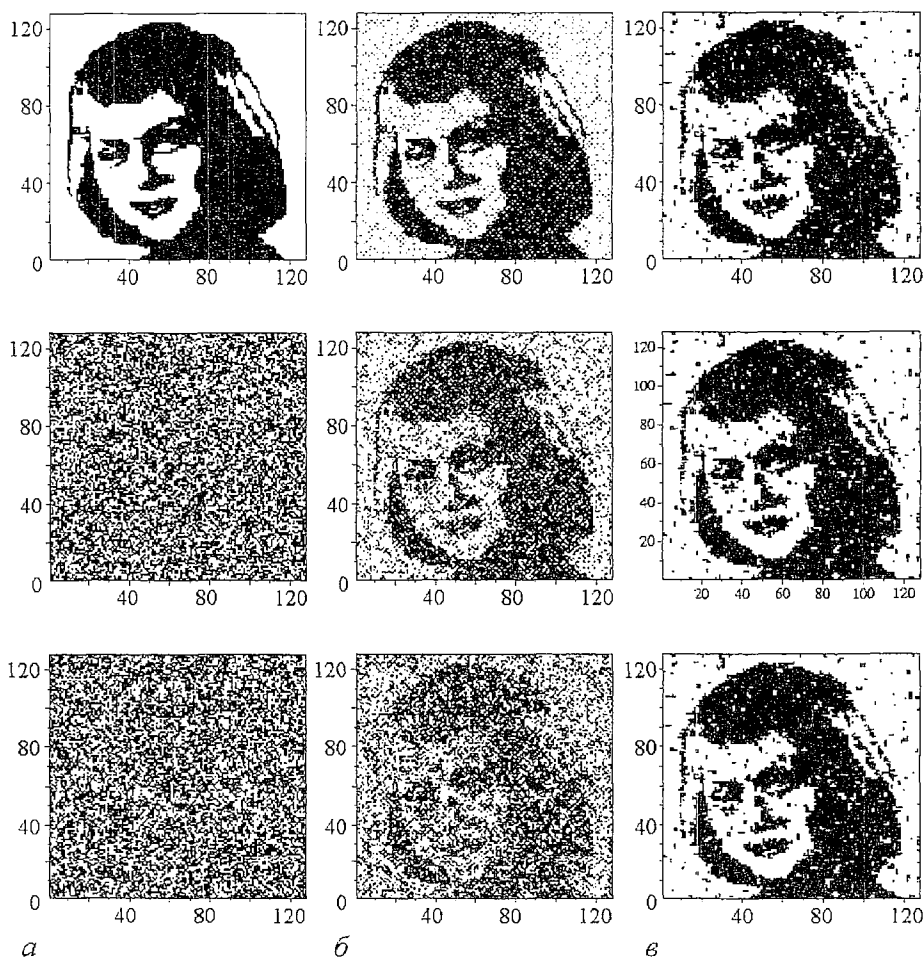
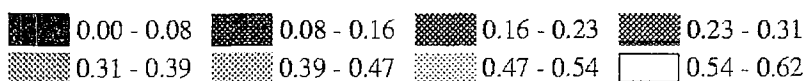


Рис. 6. Динамическое копирование в трехслойной решетке: *a* – начальные распределения, *б* – амплитудные распределения через $t \approx 2$ после начала взаимодействия, *в* – синхронизированные копии регулярного стимула

3. Устойчивость процесса динамического копирования по отношению к шумам

Неотъемлемой частью любого реального процесса как в природе, так и в технике является наличие случайных флуктуаций, шумов. В некоторых случаях наличие даже малых случайных возмущений может существенно влиять на динамику системы в целом [13]. Поэтому исследование свойств устойчивости данного состояния системы или динамического процесса в ней относительно внешних флуктуаций является важной задачей как с прикладной точки зрения, так и с точки зрения понимания явления в целом.

Рассмотрим влияние малых случайных воздействий на процесс динамического копирования форм в многослойной решетке бистабильных элементов. Будем полагать, что на каждый элемент независимо воздействует случайный шумовой сигнал. Поскольку пространственные структуры в каждом слое системы (1) представляют собой стационарные амплитудные распределения осцилляторов, синхронизованных по фазе, введем внешний шум лишь в уравнения для амплитуд. Тогда система (2) для амплитуд синхронных колебаний будет иметь вид

$$\dot{r}_{j,k}^{(l)} = f(r_{j,k}^{(l)}) + d(\Delta r)_{j,k}^{(l)} + h(r_{j,k}^{(l+1)} + r_{j,k}^{(l-1)} - 2r_{j,k}^{(l)}) + \xi_{j,k}^{(l)}(t), \quad (5)$$

где $\xi_{j,k}^{(l)}(t)$ – белый гауссов шум с нулевым средним и дисперсией σ^2 ,

$$\langle \xi_{j,k}^{(l)}(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_{j,k}^{(l)}(t)^2 \rangle = \sigma^2,$$

$$\langle \xi_{j,k}^{(l)}(0) \xi_{j',k'}^{(l')}(t) \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'} \delta_{ll'} \delta(0).$$

Исследование влияния шумов различной интенсивности на процесс динамического копирования проводилось в двухслойной решетке для начальных амплитудных распределений и параметров, соответствующих рис. 2. При численном интегрировании системы (5) оказалось, что и при наличии внешнего шумового сигнала исходный образ достаточно хорошо копируется во втором слое решетки, изначально беспорядочном. Визуально копии практически полностью соответствуют оригинальному изображению (см. рис. 2, в, з). На рис. 7 приведена зависимость «качества» копирования Δ от стандарта отклонения σ . Видно, что введение малых внешних шумов в систему не приводит к потере копирующих свойств, причем «качество» Δ копий при увеличении интенсивности шума до $\sigma=0.5^*$ ухудшается лишь на $\approx 1\%$ по сравнению с детерминированным случаем.

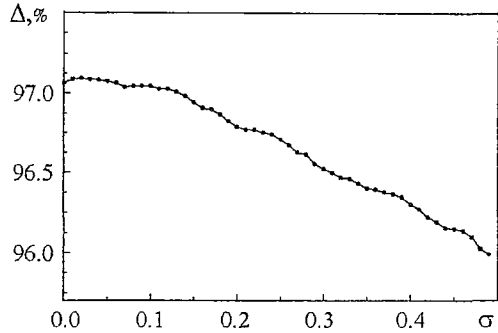


Рис. 7. Зависимость «качества» копирования Δ от стандарта отклонения σ при наличии внешнего белого гауссова шума с нулевым средним. Параметры решетки и начальные распределения амплитуд соответствуют рис. 2

Таким образом, свойство воспроизведения изображения неупорядоченными решеточными слоями сохраняется и при воздействии на систему шумовых возмущений. Это позволяет говорить о динамическом копировании в решетках бистабильных элементов как о достаточно устойчивой форме самоорганизации, которая реально может быть смоделирована на практике.

Заключение

В работе изучалось явление динамического копирования форм в многослойной решетке диффузионно-связанных бистабильных осцилляторов. Каждый слой такой решетки позволяет формировать и поддерживать информацию в виде двумерных стационарных пространственных структур – образов. Кроме того, существуют устойчивые структуры хаотического профиля, не содержащие информации о какой-либо регулярной форме. Это «исходный материал» для производства заданной формы. Мы показали, что посредством взаимодействия между слоями система в процессе собственной эволюции способна воспроизводить в нескольких копиях основные детали формы оригинального изображения, осуществляя, таким образом, одну из важнейших функций природных систем – многократное повторение необходимой формы согласно заданному шаблону. Не полное соответствие (поточечное) между копией и оригиналом, всегда имеющее место в процессе копирования, позволяет

* Дальнейшее увеличение σ приводит к достаточно быстрому разрушению стационарных амплитудных распределений, формирующих изображения в слоях.

рассматривать эти незначительные искажения как необходимую степень свободы динамической системы для возможного производства новых качеств, новой формы, новой информации, которые могут возникнуть, например, в процессе многократного копирования или при влиянии различного рода флуктуаций. Таким образом, явление динамического копирования, рассмотренное в работе, можно с уверенностью отнести к определенной форме самоорганизации решеточных систем.

При качественном изучении многомерной динамической системы, определяющей коллективное поведение решетки, удалось показать, что в основе явления динамического копирования, лежит известный механизм конкуренции колебаний. Эта конкуренция осуществляется между регулярной формой и неупорядоченным состоянием, и при этом оказывается, что регулярное состояние является более предпочтительным.

Модель, рассматриваемая в работе, является относительно простой и в то же время достаточно универсальной, обладая двумя фундаментальными свойствами – бистабильностью локальных элементов и диффузионной связью между ними. Эти свойства, по-существу, и определяют механизм изучаемого явления. Отметим также, что каждый слой системы представляет собой дискретный аналог известного уравнения «реакция–диффузия», возникающего в задачах из самых различных областей науки. Эта универсальность модели позволяет авторам надеяться, что результаты исследования явления динамического копирования форм, изложенные в этой работе, окажутся полезными исследователям различных направлений в задачах, где бистабильность и диффузия играют основную роль.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 97–02–16550), программой «Соросовские аспиранты» и DGI–CYT (Испания) – грант PB93–81.

Библиографический список

1. Crick F. Life Itself. Its origin and nature. N.Y.: Simon and Shuster, 1981.
2. Nicolis G., Prigogin I. Self-organization in non-equilibrium systems. N.Y.: Wiley, 1977.
3. Haken H. Synergetics. 3rd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
4. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991
5. Evolution from molecules to men / Ed. by D.S. Bendall. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.
6. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B. and Velarde M.G. Mutual synchronization of two lattices of bistable elements // Phys. Lett. A. 1997 (в печати).
7. Velarde M.G., Nekorkin V.I., Kazantsev V.B. and Ross J. The emergence of form by replication // Procs. Nat. Acad. Science USA. 1997. P. 5024.
8. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Rabinovich M.I. and Velarde M.G. Controlled disordered patterns and information transfer between coupled neural lattices with oscillatory states // Phys. Rev. E. 1997 (в печати).
9. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B. and Velarde M.G. Patterns and waves in interacting lattice bistable systems // Proceedings 5th Int. Specialist Workshop Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, June 26–27, Moscow, 1997. P. 324.
10. Nekorkin V.I., Makarov V.A. Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74, № 24. P. 4819.
11. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Kazantsev V.B. and Velarde M.G. Spatial disorder and pattern formation in lattices of coupled bistable elements // Physica D. 1997. Vol. 100. P. 330.
12. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л., Цимринг Л.Ш. Конечномерный пространственный беспорядок // УФН. 1992. Т. 162, № 8.
13. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах, М.: Наука, 1990. 312 с.

14. *Manella R.* Computer experiments in nonlinear stochastic physics.
15. *Жаботинский А.М.* Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
16. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М. И., Селверстон А.И., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суцук М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166. № 3.
17. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V. and Shalfeev V.D.* Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Scientific, 1995.
18. *Erneux T., Nicolis G.* Propagating waves in discrete bistable reaction–diffusion systems // *Physica D.* 1993. Vol.67. P.237.
19. *Mackay R.S., Sepulchre J.–A.* Multistability in networks of weakly coupled bistable units // *Physica D.* 1995. Vol. 82. P.243.
20. *Defontaines A.–D., Pomeau Y., Rostand B.* Chain of coupled bistable oscillators: a model // *Physica D.* 1990. Vol. 46. P.201.
21. *Макаров В.А., Некоркин В.И.* Пространственно–временная динамика цепочки автоколебательных элементов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С. 3.

*Нижегородский государственный
университет,
Испания, Университет Комплутенсе*

Поступила в редакцию 30.07.97

DYNAMIC COPYING IN MULTI-LAYERED BISTABLE LATTICES

V.I. Nekorkin, V.B. Kazantsev, M.G. Velarde

The dynamics of a number of interacting square lattices (layers) composed of oscillators with a hard mode of excitation is studied. Such an oscillator has the rest state and the excited state which correspond to the stable steady point and stable limit cycle in its phase plane, respectively. The oscillators are connected in the lattice by means of diffusive coupling. Studying the interaction between the layers we find that for certain conditions the multi-layered system processes the phenomenon of dynamic copying (replication) of a given regular image (stimulus). It looks like when this image coded as the amplitude pattern in one of the layers is replicated through interlayer interaction by the amplitudes of the rest layers which have been initially in a spatially disordered state. We provide a qualitative description of this process from the viewpoint of nonlinear dynamics. We also study its stability with respect to possible external weak noise signals.



Некоркин Владимир Исаакович – родился на Украине в 1948 году, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1981) в ННГУ и доктора физико–математических наук (1992) в Саратовском государственном университете. С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно–временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и

Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.



Казанцев Виктор Борисович – родился в Дзержинске Нижегородской области в 1973 году. Окончил радиофизический факультет ННГУ (1996). В настоящее время является аспирантом кафедры теории колебаний указанного факультета. Область научных интересов – теория колебаний и волн, нелинейная динамика дискретных сред. Является соавтором нескольких научных статей по указанным направлениям.

Веларде Мануэль Г. – родился в Альмерии, Испания, в 1941 году. Окончил Мадридский университет Комплугенсе, получил степень кандидата наук в этом университете (1968) и в Брюссельском Университете (1970), степень доктора наук в Университете Марселя, Франция (1994). В настоящее время является профессором Мадридского университета Комплугенсе и одним из основателей Междисциплинарного института – отделения этого университета. Он также имеет позиции в нескольких других университетах во Франции, Великобритании, Норвегии, Китае и США. Его настоящие научные интересы включают физику жидкостей (неустойчивости, структуры, волны), нелинейные явления в различных областях науки.



СОЛНЕЧНАЯ АКТИВНОСТЬ И ОСЦИЛЛЯЦИИ СОЛНЕЧНОГО ПОТОКА

Ю.А. Складов, В.А. Двинских, Ю.И. Бричков, В.А. Воробьев, А.И. Котума

Приведено описание условий наблюдений солнечного потока со спутника «Метеор-3» № 7 аппаратурой ИСП-2, сложившихся в феврале 1995 года, когда регистрация велась за целый виток длительностью 108 минут ежедневно в течение двух недель. Получены спектры мощностей рядов наблюдений. В периоды усиления солнечной активности обнаружено появление ранее не регистрировавшихся осцилляций интегрального потока Солнца в диапазоне периодов 6 – 15 минут с амплитудами до 0.05% от его величины.

В феврале 1995 года сложились исключительно благоприятные условия для наблюдений Солнца аппаратурой «Измеритель солнечной постоянной» (ИСП-2), созданной в Саратовском госуниверситете, со спутника «Метеор-3» № 7. Уже отмечалось [1,2], что орбита этого ИСЗ околополярная с наклоном к плоскости экватора Земли 82° . Следовательно, южный полюс орбиты имеет склонение -8° . В феврале Солнце, двигаясь к точке весеннего равноденствия, имело величины склонения -13° (середина месяца) ... -8° (конец месяца). Вследствие прецессии орбиты именно в эти дни ее южный полюс, двигаясь навстречу Солнцу, прошел мимо него. Таким образом, при наблюдении со спутника Солнце описывало вокруг южного полюса орбиты круги величиной всего в несколько градусов, вначале уменьшающиеся, а затем, после прохождения полюса, расходящиеся. Возникла ситуация, когда аппаратура ИСП-2 отслеживала Солнце в течение целого витка, наружный блок круглые сутки освещался Солнцем. В силу этого его температурный режим был максимально благоприятным. Разрешающая способность аппаратуры была лучше чем 0.01%.

Учитывая, что продолжительность измерительного цикла обоих измерительных каналов ИСП-2 равна 2 минутам, в период с 12 по 25 февраля были получены ряды по 53–54 отдельных отсчета радиации за виток. Этот наблюдательный материал был использован для поиска возможных осцилляций солнечного потока. Отметим, что из всех реализованных до сих пор спутниковых проектов, только в проекте SMM ACRIM [3, 4] обеспечивалась возможность получения до 28 отсчетов солнечной радиации за виток. В остальных проектах количество отдельных измерений за виток было меньше. В нашем случае ежедневно регистрировались данные за один виток (108 минут) с перерывами около 22 часов. Анализу подвергался каждый такой ряд.

Оценка спектральной плотности мощности [5] эффективно производится с помощью как прямого преобразования Фурье, так и параметрических методов.

Решается и задача по оценке параметров составляющих спектра [6,7], причем частоты этих составляющих неизвестны, а можно лишь указать диапазон, в котором они располагаются. В [8] изложена методика вычисления параметров составляющих квазипериодических колебаний, основанная на аппроксимации отсчетов реализации тригонометрическим полиномом первого порядка (АТП) с изменяющейся частотой его гармонических функций, позволяющая одновременно определить постоянную и переменные составляющие. Предполагая, что последовательность отсчетов данных $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$ содержит L гармонических составляющих, можно аппроксимировать ее полиномом вида

$$y_j(n) = Y_{0j} + Y_{1j}\sin(h_j n) + Y_{2j}\cos(h_j n),$$

где $h_j=2\pi/N_j$ – шаг для каждой из выбранных составляющих спектрального анализа при N_j , $j=1, \dots, m$ числе отсчетов за ее период, причем $m \gg L$. Пределы N_1, N_m выбираются из физических соображений, а $N_1 > 2$ отсчетов. По методу наименьших квадратов вычисляются значения коэффициентов Y_{0j}, Y_{1j}, Y_{2j} , $j=1, \dots, m$.

Нахождение гармонических составляющих спектра квазипериодического колебания в заданном частотном диапазоне сводится к отысканию максимумов

$$M_i = (Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, L.$$

Проведен численный эксперимент. В качестве контрольного выбрано квазипериодическое колебание, содержащее 4 гармонические составляющие одинаковой амплитуды с отношениями частот 0.6 : 0.8 : 1.0 : 1.2 при общем числе отсчетов в 5 раз превышающем отсчеты за период низкочастотной составляющей. При изменении отношения сигнал/шум от 3 до 30 дБ погрешность в оценке периода и амплитуды не превышает 15%.

Программа поиска вероятных осцилляций солнечного потока по изложенной методике предусматривала обнаружение гармонических составляющих в диапазоне периодов 4 – 20 мин. путем перебора периодов с шагом 0.02 мин.

Каждый индивидуальный отсчет солнечного потока аппаратурой ИСП–2 определяется в соответствии с рабочей формулой пиргелиометра [9]:

$$E = k(w_t - w_o),$$

где E – плотность потока солнечной радиации, k – переводный множитель, w_t и w_o – мощности электрического тока в приемном элементе при закрытой («тень») и открытой («солнце») трубе пиргелиометра, соответственно. Системой вывода и приёма информации обеспечивалась независимая регистрация как самого аналога оптической мощности ($w_t - w_o$), так и каждой из измерительных мощностей w_t и w_o . В процессе обработки наблюдений спектры мощности для w_t и w_o получались отдельно, чтобы выявить изменения солнечного происхождения. При открытой трубе измерительного канала в w_o будут появляться изменения, вызванные изменениями мощности солнечного излучения. А при закрытой трубе в w_t таких изменений не будет.

Анализ измерений показал, что, например, начиная с 16 февраля, в кривых хода w_o и спектров мощности w_o отмечались особенности, достигшие максимума 19 февраля. На рис. 1, а приведены записи регистрации «солнечной» и «теневого» электрических мощностей рабочего измерительного канала 19 февраля. На кривой «солнечной» мощности w_o видны многочисленные пики и спады, соответствующие быстрым падениям и увеличениям солнечного потока. В то же время кривая «теневого» мощности w_t этих явлений практически не показывает, что и свидетельствует в пользу их солнечного происхождения. По величине пиков легко оценить энергетику этих событий. Аналогом оптической мощности, измеряемой пиргелиометром, является величина ($w_t - w_o$). В данном случае она в среднем за виток составляет 6083 кодовых единиц мощности. Пики и спады составляют 1–3 единиц, т.е. 0.015–0.05% от измеряемой величины интегрального солнечного

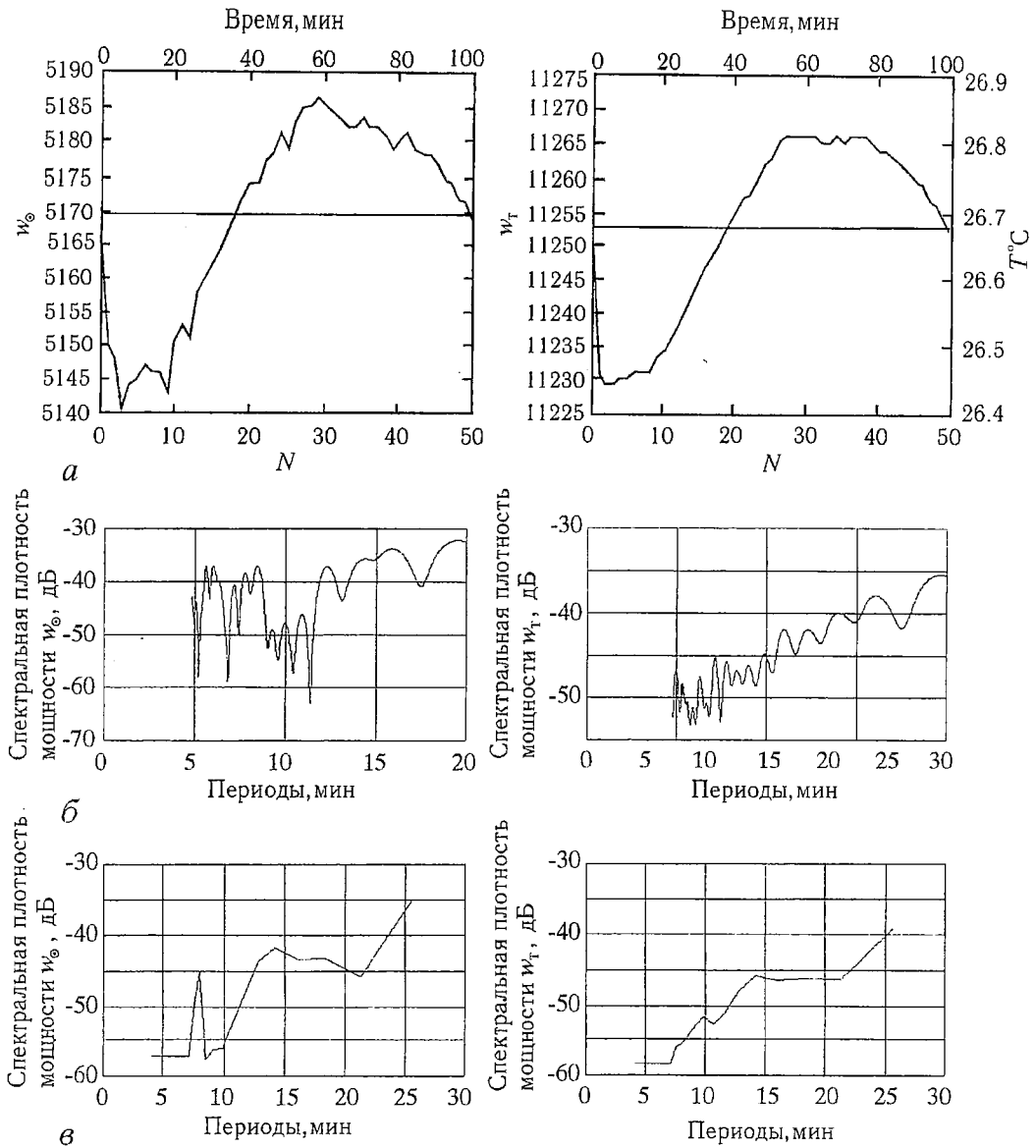


Рис. 1. Данные за виток 19 февраля 1995 года: а – графики хода w_{\odot} и w_T , N – число отдельных отсчетов солнечного потока; б – спектры мощности w_{\odot} и w_T (метод АТП); в – спектры мощности w_{\odot} и w_T (метод БПФ)

потока. На рис. 1, б приведены спектры мощностей «солнечной» и «теневой» электрических мощностей, полученные методом АТП, а на рис. 1, в – то же, методом быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Видно, что спектры мощностей w_T и w_{\odot} резко различаются. На спектрах мощности w_{\odot} видны осцилляции с расщеплёнными периодами около 6 и 8 минут (АТП), вполне определённо около 8 минут на графике БПФ. В последующие дни произошло быстрое затухание процесса. 21 и в особенности 22 февраля кривые спектральной плотности мощностей нормализовались и стали подобными для w_T и w_{\odot} . Для сравнения на рис. 2 приведены аналогичные данные о спектрах мощностей за виток 22 февраля 1995 г. Практически одинаковая картина (близкое сходство спектров мощностей w_T и w_{\odot}) наблюдалось 15 февраля. Между этими датами различие в спектрах возрастало до 19 февраля с последующим затуханием.

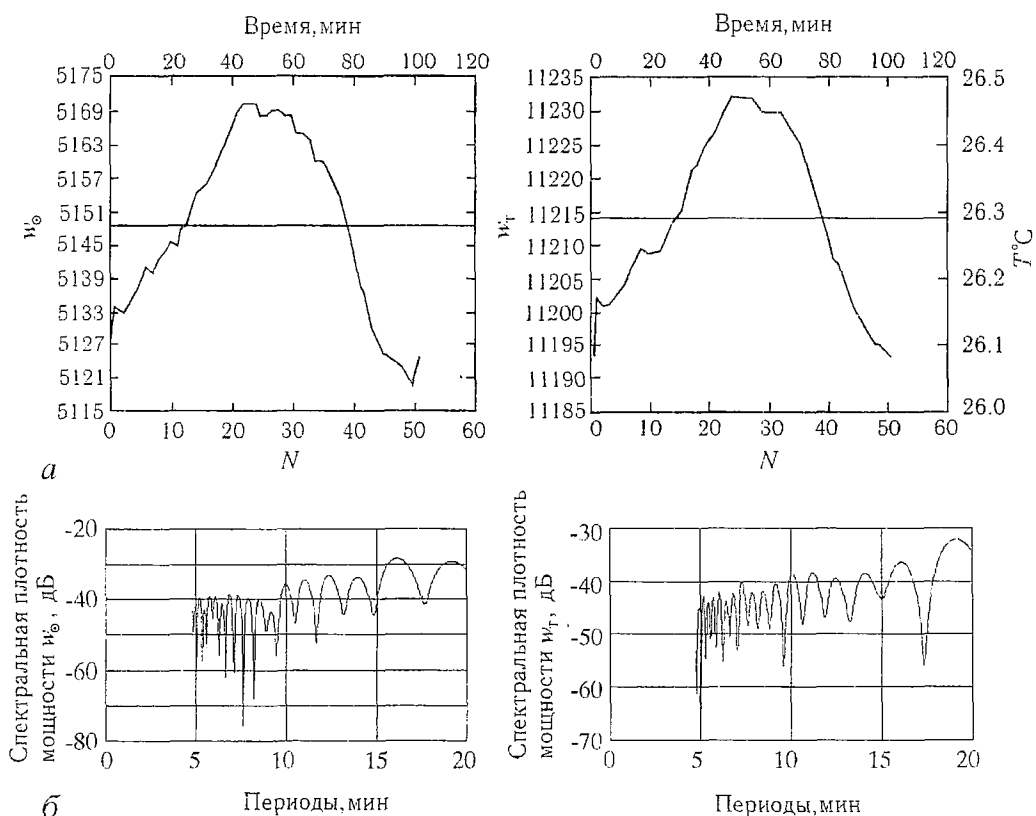


Рис. 2. Данные за виток 22 февраля 1995 года: *a* – графики хода w_0 и w_T , N – число отдельных отсчетов солнечного потока; *b* – спектры мощности w_0 и w_T (метод АПГ)

Для выявления причин был проведен поиск событий на Солнце по материалам [10, 11]. Оказалось, что в период регистрации осцилляций, начиная с 16 февраля 1995 года, на Солнце наблюдался целый ряд событий. Отмечено значительное увеличение потока рентгеновских лучей, количество вспышек достигало 11 (20 февраля) с одной вспышкой средней мощности, зарегистрированы многочисленные вспышки в линии H_{α} , быстрое увеличение значения числа Вольфа и мощности потока на длине волны 10.7 см. 19 и 20 февраля отмечалось прохождение через центральный меридиан Солнца группы пятен с общей площадью до 300 миллионов долей поверхности. На рис. 3 приводим размещённый в сети Интернет Национальным Геофизическим Центром Данных (США) график хода известного индекса солнечной активности – потока на длине волны 10.7 см. Видно, что в отмеченный период наблюдалось кратковременное значительное изменение его величины с пиком 19 февраля 1995 года.

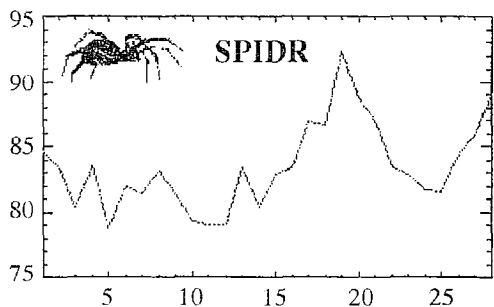


Рис. 3. Поток солнечного излучения 10.7 см, приведённый к 1 астрономической единице, февраль 1995 года. По оси абсциссы даты, по оси ординат плотность потока в единицах $10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$

Предварительный анализ наблюдательного материала показал, что аналогичные явления регистрации осцилляций интегрального по спектру солнечного потока по данным измерений ИСП-2 наблюдались 15–17 июля 1994 года, 2–3 и 14–15 августа 1994 года и в другие дни при повышении явлений солнечной активности.

Изучение массива данных, полученных аппаратурой ИСП-2, продолжается. Можно сделать предварительный вывод о возбуждении ранее не регистрировавшихся осцилляций интегрального солнечного потока с амплитудами до $5 \cdot 10^{-4}$ от его мощности и периодами 6–15 минут во времена событий с резким повышением солнечной активности. О продолжительности зарегистрированных осцилляций судить трудно из-за скважности наблюдений – один виток в сутки. Можно отметить также, что процессы развития и затухания кратковременных изменений солнечного потока проходят практически синхронно с развитием явлений солнечной активности.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект №97-0565579) и ГНТП «Астрономия» (проект № 1.5.3.5).

Библиографический список

1. Скляр Ю.А. Измеритель солнечной постоянной 2-го поколения (ИСП-2) на спутнике «Метеор-3» № 7 // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, №5. С. 116.
2. Скляр Ю.А., Бричков Ю.И., Воробьев В.А., Котума А.И., Пахомов Л.А., Фейгин В.М. Измеритель солнечной постоянной второго поколения на спутнике «Метеор-3» № 7 // Исследование Земли из космоса. 1995. №4. С. 17.
3. Скляр Ю.А. Солнечная постоянная (состояние исследований) // Исследование Земли из космоса. 1994. №4. С. 96.
4. Mecherikunnel A.T., Kyle H.L., Lee III R.B. Solar constant data from Earth radiation budget measurements // NASA Conference Publication 3086. Greenbelt. Maryland. 1990. P. 309.
5. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
6. Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука. 1965.
7. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир. 1982.
8. Двинских В.А. Вычисление параметров составляющих квазипериодических колебаний // ЖТФ. 1992. Т. 62, вып. 12. С. 168.
9. Кмито А.А., Скляр Ю.А. Пиргелиометрия. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
10. Solar Geophysical Data. March 1995. № 607. P. 1.
11. Solar Geophysical Data. April 1995. № 608. P. 1.

Саратовский государственный
университет
Научно-исследовательский институт
механики и физики СГУ

Поступила в редакцию 17.09.97

SOLAR ACTIVITY AND SOLAR FLUX OSCILLATIONS

Yu.A. Sklyarov, V.A. Dvinskikh, Yu.I. Brichkov, V.A. Vorobyov, A.I. Kotuma

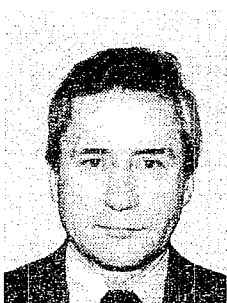
The conditions of full orbit solar flux observation by Solar Constant Monitor (SCM-2) from «Meteor-3» № 7 satellite in February 1995 are described. The power spectra of such daily measurement series of 108 min. duration during two weeks are obtained. The total solar flux oscillations (not registered earlier) with periods range 6–15 min. and amplitudes of 10^{-4} order of its value were detected when solar activity became more intense.



Склярлов Юрий Андреевич – родился в январе 1931 года в Ставропольском крае. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1953). Кандидат физико–математических наук (1965). Доктор технических наук по специальности геофизика, физика атмосферы (1984). Профессор, зав. кафедрой метеорологии и климатологии СГУ. Действительный член Международной АН Высшей школы по направлению «Физика космического пространства». Основные научные интересы в области астрономии, актинометрии, солнечно–земных связей. Является Главным конструктором и руководителем программы «Измеритель солнечной постоянной». Созданная под его руководством аппаратура работала на двух ИСЗ. Ю.А. Склярловым лично и в соавторстве опубликовано 5 монографий и книг, в том числе издана на английском языке монография А.А. Кmito, Yu.A. Sklyarov «Pyrheliometry». New Delhi: Oхonian Press. PVT LTD, 1987. Автор и соавтор более 150 научных работ, из которых 15 опубликовано за рубежом, имеет 12 патентов и авторских свидетельств на изобретения.



Двинских Василий Александрович – родился в 1927 году. Окончил Московский энергетический институт (1951). Профессор кафедры электро– и радиотехники. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в Харьковском государственном университете (1960) по автоколебательным системам. Опубликовал две монографии и более двухсот статей по исследованию автоколебательных систем.



Бричков Юрий Иванович – родился в 1946 году в Ярославской области, окончил Саратовский госуниверситет (1968). После окончания СГУ работал в НИИ ГРП г. Рязани, с 1970 года работает в НИИ механики и физики СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1979) в Главной геофизической обсерватории по специальности геофизика, физика атмосферы. Заведующий лабораторией астрономических и геофизических исследований. Область научных интересов – пиргелиметрия, исследования составляющих радиационного баланса Земли с летательных аппаратов. Автор и соавтор более 50 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Воробьев Владимир Анатольевич – родился в Саратове в 1958 году, окончил Саратовский госуниверситет (1980). После окончания СГУ работает в НИИ механики и физики СГУ, в настоящее время – в должности научного сотрудника. Область научных интересов – автоматизация актинометрических измерений, исследования составляющих радиационного баланса Земли с летательных аппаратов. Автор и соавтор ряда статей в отечественных и зарубежных изданиях.



Котума Александр Иванович – родился в Куйбышевe в 1973 году. Окончил Саратовский госуниверситет (1995). В настоящее время аспирант кафедры метеорологии и климатологии СГУ. Область научных интересов – изучение компонентов радиационного баланса Земли по данным спутниковых измерений.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЛПЫ ПРИ ПОМОЩИ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Г. Г. Малинецкий, М. Е. Степанцов

Полное математическое описание поведения отдельно взятого человека на данном этапе развития науки не представляется возможным, поскольку его действия определяются очень большим количеством факторов, как рациональных, так и иррациональных. Однако известно, что поведение достаточно большой группы людей в стандартной ситуации легко поддается предсказанию и хорошо описывается вероятностным образом.

Предлагаемый авторами клеточный автомат позволяет моделировать поведение толпы людей, стремящихся двигаться в определенном направлении (например, в переходе метро, в дверях магазина, при панике в случае пожара и т.п.) при наличии препятствий (стен, ограждений, турникетов). Предлагается модификация этого автомата: учитывающая различные скорости участников движения.

Одной из наиболее серьезных проблем наших дней является обеспечение безопасности людей в нештатных ситуациях. Во многих таких ситуациях главной угрозой здоровью и жизни людей часто оказывается возникающая при этом паника.

При проектировании сооружений, рассчитанных на нахождение в них большого количества людей, полезно было бы смоделировать беспорядочное движение большой неорганизованной группы людей (которую в дальнейшем будем называть для краткости толпой) в условиях паники и устранить особенности конструкций, которые могут привести к заторам и давке.

Кроме того, жители крупных городов ежедневно сталкиваются с проблемой движения в толпе при пользовании общественным транспортом (например, в подземных переходах, в турникетах и на эскалаторах метро). Планирование строительства городских пешеходных коммуникаций целесообразно было бы вести, не только учитывая общий поток пассажиров, но и детально рассматривая движение людей на конкретных участках пути.

При математическом моделировании процессов, в которых активно действуют люди, возникает проблема, заключающаяся в том, что на данном этапе развития науки полное математическое описание поведения отдельно взятого человека не представляется возможным, поскольку его действия определяются очень большим количеством факторов как рациональных, так и иррациональных.

Однако поведение большой группы людей в стандартной ситуации легко поддается предсказанию и хорошо описывается вероятностным образом. Здесь работает закон больших чисел: даже если один человек по каким-то причинам решит действовать нетривиально, его действия никак не повлияют на группу в целом.

Для математического моделирования динамики толпы оказалось возможным применить класс крайне упрощенных дискретных моделей – клеточные автоматы [1], которые ранее успешно использовались во многих других областях исследований, в частности, для решения задач газодинамики [2–4].

Необходимый нам клеточный автомат должен, по-видимому, иметь два состояния клетки, соответствующие наличию и отсутствию в этой точке человека, и учитывать две составляющие движения толпы – хаотичную и направленную.

В книге Тоффоли и Марголуса [1] предлагается клеточный автомат, моделирующий диффузионные процессы, в котором правила заданы особым образом (рассматривается так называемая окрестность Марголуса).

1. В качестве поля клеточного автомата выбирается плоскость, разбитая на одинаковые квадраты – клетки; каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «1» – в ней есть частица и «0» – в ней пусто.

2. Массив клеток разбит на блоки 2×2 двумя способами, которые будем называть четным и нечетным разбиениями (рис. 1, а).

3. На очередном шаге каждый из блоков четного разбиения поворачивается на $\pi/2$ по или против часовой стрелки с равной вероятностью (направление поворота выбирается при помощи генератора случайных чисел). Затем то же самое продельвается с блоками нечетного разбиения (рис. 1, б).

Модифицируем эти правила, добавив к диффузионной составляющей движения направленную. Для этого на каждом временном шаге будем производить перемещение частиц внутри блоков в некотором заданном направлении, если соответствующие соседние клетки свободны (то есть, там нет частиц), как показано на рис. 1, в.

Кроме этого, объявим некоторые области поля клеточного автомата запрещенными, то есть не будем выполнять в них этих перемещений частиц. Такие области будут соответствовать непроходимым стенам или другим препятствиям.

Найдем распределение плотности толпы вдоль оси x (направления движения). Рассмотрим движение частицы (человека) вдоль этой оси как суперпозицию случайного блуждания и направленного движения.

Такое движение описывается, как показано в [5], уравнением Фоккера – Планка

$$\partial \rho / \partial t + \partial / \partial x [A(x)\rho] - \partial^2 / \partial x^2 [B(x)\rho] = 0,$$

где координата одной из частиц выступает в качестве случайной величины, ρ – ее функция плотности вероятности, ее моменты

$$A(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{(x-x')} / \Delta t, \quad B(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{(x-x')^2} / \Delta t \neq 0.$$

Из правил автомата найдем, с какой вероятностью частица переместится за один временной шаг в направлении оси x . Рассмотрев все возможные комбинации поворотов блоков и количества частиц в блоке, получим, что изменение координаты частицы за один шаг может принимать значения от -2 до 4 с вероятностями

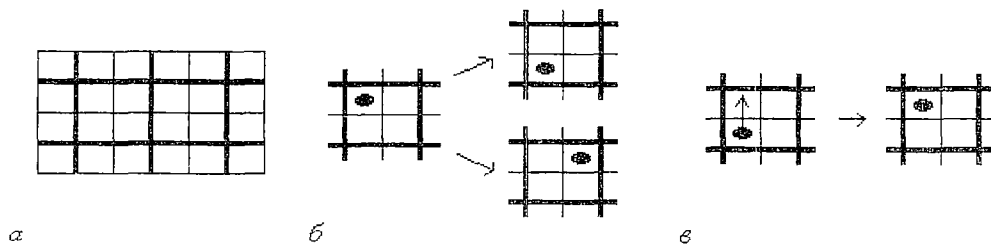


Рис. 1

$$\begin{aligned}
P(\Delta x=4) &= 1/8(1 - \rho)^2, \\
P(\Delta x=3) &= 1/4(1 - \rho), \\
P(\Delta x=2) &= 1/4 - 1/8 \rho^2, \\
P(\Delta x=1) &= 1/4, \\
P(\Delta x=0) &= 1/8 + 1/4 \rho - 1/8 \rho^2, \\
P(\Delta x=-1) &= 1/4 \rho, \\
P(\Delta x=-2) &= 1/8 \rho^2.
\end{aligned}$$

Примем приближенно $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [f(x)/\Delta t] = f(x)|_{\Delta t=1}$, откуда для $A(x)$ и $B(x)$ получим:

$$A(x) = 7/2 - 2\rho(x), \quad B(x) = 11/2 - 6\rho(x) + 2\rho^2(x)$$

и подставим эти выражения в уравнение Фоккера – Планка. Получаем:

$$\rho_t = (11/2 - 12\rho + 6\rho^2)\rho_{xx} - 12(1 - \rho)(\rho_x)^2 - (7/4 - 4\rho)\rho_x.$$

Найдем распределения плотности частиц $u(x)$ вдоль оси x как среднее по ансамблю от функции распределения одной частицы:

$$u_t = (11/2 - 12u + 6u^2)u_{xx} - 12(1 - u)(u_x)^2 - (7/4 - 4u)u_x.$$

Проведя аналогичные рассуждения для оси y , мы получим для распределения плотности частиц вдоль этой оси $v(y)$ параболическое уравнение

$$v_t = 3/2 v_{yy},$$

поскольку движение в этом направлении задано в модели как чистая диффузия.

Если бы мы рассматривали задачу при помощи традиционных подходов, теперь необходимо было бы решать эти уравнения, являющиеся существенно нелинейными. Вместо этого на компьютере был реализован непосредственно сам разработанный клеточный автомат, и, с его помощью, был исследован ряд модельных задач.

На рис. 2 изображено движение толпы в сужающемся проходе. При этом измеряется временная зависимость плотности числа людей до сужения и после (в областях, выделенных прямоугольниками и отмеченных цифрами 1 и 2). На рис. 3 показана та же ситуация в случае иной конфигурации сужения. В этом случае

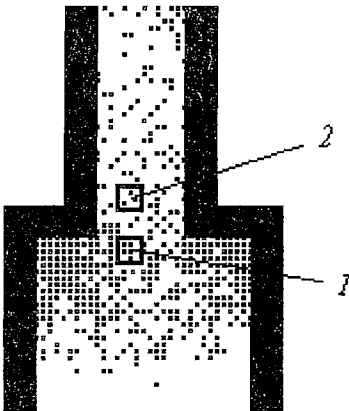


Рис. 2

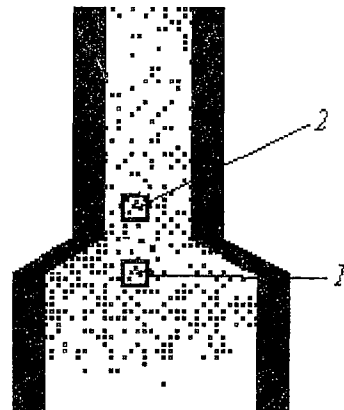


Рис. 3

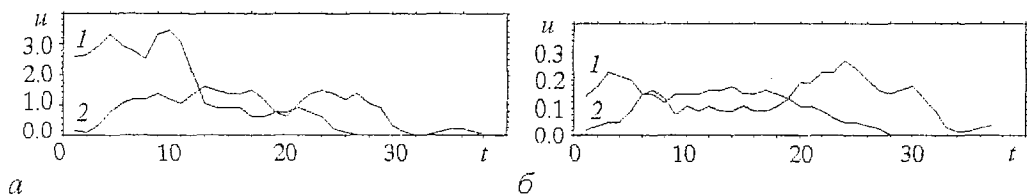


Рис. 4

«пробки» нет. На рис. 4 показаны временные зависимости плотности числа людей в областях 1 и 2 в этих двух случаях. В первом из них (см. рис. 4, а) плотность толпы перед сужением (в широкой части прохода) в течение некоторого отрезка времени устойчиво превышает плотность после сужения, что соответствует наличию «пробки». Во втором случае (см. рис. 4, б) этого явления нет.

Построенная модель, однако, не отражает того важного факта, что люди в толпе движутся с различными скоростями. Присвоение каждой частице индивидуальной скорости свело бы на нет такие достоинства модели, как простоту и однородность правил. Поэтому авторы применили подход, уже использованный ими в [3]. В модель были введены два сорта частиц: быстрые и медленные, что можно интерпретировать, например, как наличие в толпе людей с тяжелыми сумками или хозяйственными тележками, которым трудно двигаться быстро.

На четных шагах по времени оба сорта частиц двигались совершенно одинаково по ранее изложенным правилам. На нечетных же шагах двигались лишь быстрые частицы, а медленные оставались неподвижными и рассматривались наравне с непроходимыми стенами, мешая движению быстрых.

Известно, что в пешеходных переходах существует эффект «отрицательной вязкости», а именно: при прохождении сужения перехода скорость потока людей у стенок выше, чем в середине прохода. Не обнаружив этого эффекта у односторонней модели, мы предположили, что он обусловлен различием средних скоростей отдельных людей. При проведении модельных расчетов с помощью

модифицированного автомата это предположение подтвердилось: измерения потока частиц через сечение перехода устойчиво давали два максимума вблизи стенок и минимум в середине прохода. На рис. 5 показан характерный профиль усредненного значения потока частиц f в сечении перехода.

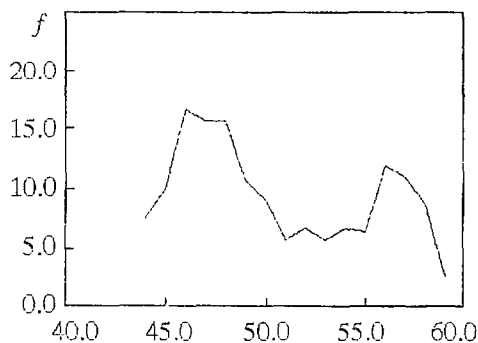


Рис. 5

Представляется, что описанная модель может оказаться полезной при проектировании сооружений, рассчитанных на значительные потоки людей, а также при оценке безопасности зданий и помещений.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 96-01-01161 и 96-02-18689) и ГНТП «Безопасность».

Библиографический список

1. Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991.
2. Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y. Lattice-gas Automata for Navier-Stokes equation // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1505.
3. Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е. Клеточные автоматы для расчета

некоторых газодинамических процессов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 5. С. 137.

4. *Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.* Применение моделей класса решеточных газов для решения задач газодинамики // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4,5. С. 59.

5. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. М.: Изд-во МГУ, 1991.

Институт прикладной математики РАН

Поступила в редакцию 11.07.97

CELLULAR AUTOMATA FOR SIMULATIONS OF CROWD DYNAMICS

G. G. Malinetskii, M. Ye. Stepansov

A full mathematical description of the behaviour of a person is not available at present time, because of a great number of factors, both rational and irrational, that have influence on it. On the other hand, the behaviour of a group in a simple situation can be easily predicted and described statistically.

A cellular automaton presented in the paper allows simulations of a crowd of people with an intention to move in a certain direction (i. e. in an underground passage, in a building in case of panic etc.) with some obstacles (walls, for example) on their way. We also propose a variation of the cellular automaton considering the difference of velocities of the difference of velocities of people in the crowd.



Малинецкий Георгий Геннадьевич родился в 1956 году в Уфе, окончил физический факультет МГУ (1979), защитил кандидатскую диссертацию на тему «Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных средах» (1982) и докторскую диссертацию на тему «Диффузионный хаос и новые типы упорядоченности в нелинейных средах» (1990) в Институте прикладной математики. В настоящее время работает там же заведующим сектором нелинейной динамики. Автор большого количества статей в области исследования хаоса и нелинейных явлений, а также учебника «Структуры, хаос, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику».



Степанцов Михаил Евгеньевич родился в 1972 году в Куйбышеве. Окончил физический факультет МГУ (1995). В настоящее время является аспирантом кафедры математики физического факультета МГУ. Автор 2 статей, посвященных применению клеточных автоматов для моделирования нелинейных явлений.



НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОДАВЦОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

И.С. Ремпен, А.А. Короновский

Рассматривается взаимодействие продавцов, предлагающих одинаковые товары по различным ценам и покупателей, устанавливающих для себя предельно возможную цену. Получены основные уравнения, описывающие динамику данной социально-экономической системы. Описан способ нахождения функции потенциального спроса по известной функции предложения.

Введение

С развитием синергетических и статистических методов анализа многокомпонентных систем значительно облегчается работа по исследованию социальных и экономических процессов. Важную роль в подобных исследованиях играет построение и изучение моделей, описывающих прежде всего качественную динамику рассматриваемых процессов. Так, на основе методов и уравнений статистической физики и нелинейной динамики В.Вайдлихом [1–3] была создана стратегия построения качественных и полуколичественных моделей биологических, социальных и экономических систем. Тем не менее, построение моделей, на основе анализа которых возможно было бы делать не только качественные, но и количественные прогнозы для сложных социально-экономических систем, остается на сегодняшний день весьма актуальной проблемой.

Пожалуй, одними из самых актуальных на сегодняшний день являются задачи исследования таких экономических процессов, как соотношение спроса и сбыта. Проблема взаимодействия продавцов и потребителей, соотношения спроса и предложения и установления цен рассматривалась различными авторами (например, [4]). Но в существующих на сегодняшний день работах не учитываются многие условия, как, например, возможность установления различных цен на товары одного качества, на что обращалось внимание в работах [5,6]. В данной работе мы предлагаем модель, которая, во-первых, учитывает факт разброса цен на одинаковые товары, и, во-вторых, претендует на возможность проведения количественных оценок состояния рынка и его динамики, пусть даже приближительных. Как следует из проведенных исследований, поведение системы даже при значительных допущениях оказывается весьма сложным.

1. Общий вид модели

В данной модели мы будем рассматривать взаимодействие продавцов, предлагающих один и тот же вид товара, и покупателей, желающих приобрести этот товар. Пусть на данный товар разные продавцы устанавливают различные цены x , в зависимости от своих затрат и предположений о получении прибыли. Введем функцию $p(x,t)$, которая определяет распределение товаров на рынке по ценам и для которой выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t) dx = 1.$$

Пусть общее количество товаров в начальный момент времени – N_0 , а в момент времени t – $N(t)$. Тогда

$$K(x,t) dx = N(t)p(x,t) dx \quad (1)$$

– количество товаров, предлагаемых покупателям по цене, попадающей в интервал $[x, x+dx)$. Пусть также общее число покупателей, желающих приобрести данный товар, в начальный момент рассмотрения будет M_0 . Мы считаем, что покупатели, уже приобретшие товар, выбывают из рассмотрения, поэтому в момент t их будет $M(t) < M_0$. Каждый покупатель устанавливает для себя предельную цену, выше которой он уже не станет приобретать товар. Для учета этого вводится функция $g(x,t)$, описывающая распределение покупателей по соответствующим предельным ценам. В таком случае

$$L(x,t) dx = M(t)g(x,t) dx \quad (2)$$

– число покупателей, предельная цена x_{\max} у которых попадает в интервал $[x, x+dx)$, то есть это те покупатели, которые будут приобретать товар только по цене не выше x . Функция $g(x,t)$ также удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t) dx = 1.$$

Введем еще предположение о дефиците товаров

$$M_0 > N_0. \quad (3)$$

Из этого следует, что покупатель не будет обходить всех продавцов на рынке, а приобретет товар у первого же, если только цена не окажется выше предельной. Считаем также, что первоначальный запас товаров не пополняется (предположим, рассматривается один базарный день). Итак, в момент времени $t+dt$ товаров, продаваемых по цене от x до $x+dx$, останется:

$$N(t+dt)p(x,t+dt)dx, \quad (4)$$

потому что за интервал времени $[t, t+dt)$ будет куплено

$$\alpha N(t)p(x,t)M(t) \int_x^{\infty} g(y,t) dy dx dt \quad (5)$$

товаров. Предполагается, что число купленных товаров по цене x за интервал времени от t до $t+dt$ пропорционально числу товаров, доступных на рынке в данный момент времени, длительности рассматриваемого временного интервала и числу покупателей, способных заплатить за этот товар требуемую цену x . Здесь α – коэффициент, присущий рассматриваемой системе и отвечающий за физическую возможность покупателя обойти определенное количество продавцов в единицу времени.

Получаем уравнение

$$N(t+dt)p(x,t+dt)dx = N(t)p(x,t)dx - \alpha N(t)p(x,t)M(t) \int_x^{\infty} g(y,t)dydxdt. \quad (6)$$

Отсюда, устремляя dt к нулю,

$$\partial(N(t)p(x,t))/\partial t = -\alpha N(t)p(x,t)M(t) \int_x^{\infty} g(y,t)dy. \quad (7)$$

Или иначе

$$\partial(K(x,t))/\partial t = -\alpha K(x,t) \int_x^{\infty} L(y,t)dy. \quad (8)$$

Аналогично, покупателей в момент $t+dt$ станет

$$M(t+dt)g(x,t+dt)dx = M(t)g(x,t)dx - \alpha M(t)g(x,t)N(t) \int_{-\infty}^x p(y,t)dydxdt, \quad (9)$$

откуда получаем уравнение

$$\partial(L(x,t))/\partial t = -\alpha L(x,t) \int_{-\infty}^x K(y,t)dy. \quad (10)$$

Полагая, что цены не могут быть отрицательными, можно заменить нижний предел интегрирования на 0, что мы и будем делать в дальнейшем.

Определить общее число товаров и покупателей можно, воспользовавшись условиями нормировки для функций $p(x,t)$ и $g(x,t)$:

$$N(t) = \int_0^{\infty} K(x,t)dx, \quad (11)$$

$$M(t) = \int_0^{\infty} L(x,t)dx. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться также в выполнении «закона сохранения»

$$\partial(N(x,t))/\partial t - \partial(M(x,t))/\partial t = 0.$$

2. Аналитическое решение в предельном случае $M_0 \gg N_0$

Если предположить, что $M_0 \gg N_0$ (значительный дефицит товаров), то на небольших интервалах времени можно считать функцию $L(x,t)$ неизменной.

$$L(x,t) = L(x,0) = L(x), \quad (13)$$

что дает нам возможность получить аналитическую зависимость от x и t для функции предложения $K(x,t)$.

Из уравнения (8) получаем

$$\partial/\partial t [\ln K(x,t)] = -\alpha \int_x^{\infty} L(y,t)dy,$$

$$\ln K(x,t) - \ln K(x,0) = -\alpha \int_0^t \int_x^{\infty} L(y,t)dydt, \quad (14)$$

$$K(x,t) = K(x,0) \exp[-\alpha \int_0^t \int_x^{\infty} L(y,t)dydt].$$

Теперь, предполагая, что функция L не зависит от времени, получаем

$$K(x,t) = K(x,0) \exp[-\alpha t \int_x^{\infty} L(y)dy]. \quad (15)$$

3. Эволюция рынка

Рассмотрим динамику рынка при различных начальных формах функций спроса и предложения (1) и (2). Для численного моделирования нам достаточно рассмотреть отрезок цен $[0; X]$. Правомерно считать, что разброс цен имеет определенный предел $X < \infty$. Без ограничения общности можно принять $X=1$.

Виды распределения выбираются следующие.

1. p и g – функции Дирака.

$$p(x,0) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \infty, & x = a, \\ 0, & x > a, \end{cases} \quad g(x,0) = \begin{cases} 0, & x < b, \\ \infty, & x = b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad (16)$$

Это будет означать, что все товары имеют одинаковую цену (жесткий государственный контроль).

2. Прямоугольное распределение.

$$p(x,0) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ A, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad g(x,0) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ B, & c \leq x \leq d, \\ 0, & x > d. \end{cases} \quad (17)$$

A и B определяются из условия нормировки

$$A = 1/(b-a), \quad B = 1/(d-c).$$

Разброс по ценам существует, но по каждой цене предлагается одно и то же количество товаров. Такое предположение скорее всего не соответствует реальной ситуации, но удобно для наглядного пояснения данной модели.

3. $p(x,0), g(x,0) \sim xe^{-kx}$.

Пусть $p(x,0) = Axe^{-kx}$. Из условия нормировки получаем $A = k^2$.

$$p(x,0) = k^2xe^{-kx}, \quad g(x,0) = s^2xe^{-sx}. \quad (18)$$

Такая форма распределений выбирается не случайно. Вполне естественным является предположение, что функция распределения товаров имеет максимум при некотором значении цены, а самые дешевые и самые дорогие товары представлены на рынке в минимальном количестве. Численные значения параметров выбирались нами из соображений удобства рассмотрения свойств данной модели, так как выбранные формы начальных распределений не совпадают с какими-либо реальными функциями, а имеют значение «контрольных задач».

На рис. 1–3, a представлен вид функций $K(x), L(x)$ в начальный момент времени, а на рис. 1–3, b – те же функции через промежуток времени T , полученные численно с помощью уравнений (8) и (10), а также функция $K(x)$, рассчитанная по формуле (15). На всех рисунках, если нет специальных пояснений, индекс «1» соответствует функциям, подсчитанным по точным формулам (8) и (10), а индекс «2» – по асимптотической формуле (15). Во всех случаях положим $N_0=1$, а $M_0/N_0=3$. На интересующих нас временах рассмотрения такое соотношение M_0/N_0 оказывается вполне удовлетворительным.

Случай 1. Как видно из рис.1, в случае распределения (16) форма функций $L(x), K(x)$ не изменяется со временем. Поскольку в нашей модели мы не учитываем такой факт, что в течение дня продавцы сами будут изменять цену на свой товар, то такое поведение функций вполне естественно: изменяется число товаров, представленных на рынке и число покупателей, но не их распределения по ценам.

Случай 2. Вид функций для такого распределения представлен на рис. 2. Видно, что с течением времени лучше всего раскупаются самые дешевые товары, поскольку их охотно приобретают как бедные, так и богатые покупатели. Самые

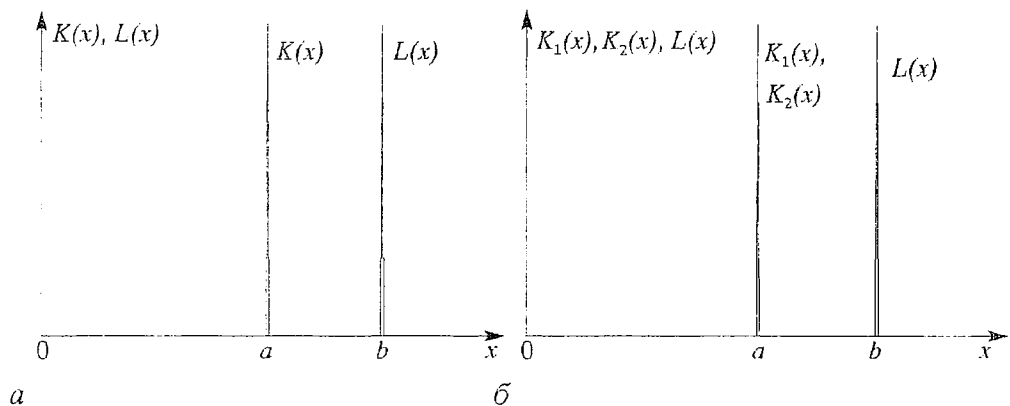


Рис. 1. *a* – начальные распределения продавцов $K(x)$ и покупателей $L(x)$ в виде δ -функций (16). Все товары имеют одинаковую цену, приемлемую для всех покупателей. $a=0.5, b=0.75, \alpha=0.05$; *б* – эволюция распределения (16) за время $T=20$. Значения общего числа покупателей и товаров следующие: $N_1(T)=0.37437, N_2(T)=0.36938, M_1(T)=2.37437, M_2(T)=2.36938$

дорогие товары рискуют остаться нераспроданными. Функция $K_2(x)$, подсчитанная по асимптотической формуле (15), лежит немного ниже, чем точная функция $K_1(x)$. Это объясняется тем, что, согласно предположению (14), число покупателей не изменяется со временем, и, следовательно, в этом случае, число проданных товаров оказывается завышенным по сравнению с реальным. Однако, на интересующих нас временах рассмотрения различие между асимптотической и точной функциями невелико.

Случай 3. До сих пор мы предполагали, что функции распределения покупателей и товаров «перекрываются». Рассмотрим теперь случай, когда цены на предлагаемые товары лежат гораздо выше возможностей большинства покупателей. Для учета этого формулы (18) переписываются в виде

$$p(x) = k^2(x-a)e^{-k(x-a)}, \quad g(x) = s^2(x-b)e^{-s(x-b)}. \quad (18a)$$

Этот случай иллюстрируется на рис. 3. Как и следовало ожидать, раскупается лишь небольшое количество товаров, которые приобретают самые богатые слои населения.

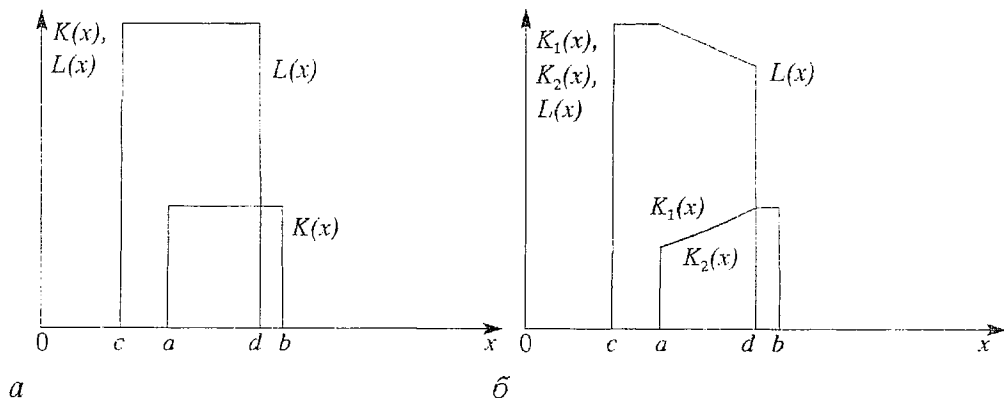


Рис.2. *a* – прямоугольная форма начального распределения (17). Цены на часть товаров лежат выше возможностей самых богатых покупателей. $a=0.3, b=0.55, c=0.2, d=0.5, \alpha=0.05$; *б* – вид функций $K(x), L(x)$ спустя время $T=20$. Число покупателей и количество товаров по доступным ценам уменьшается. $N_1(T)=0.76280, N_2(T)=0.75692, M_1(T)=2.76280, M_2(T)=2.75692$

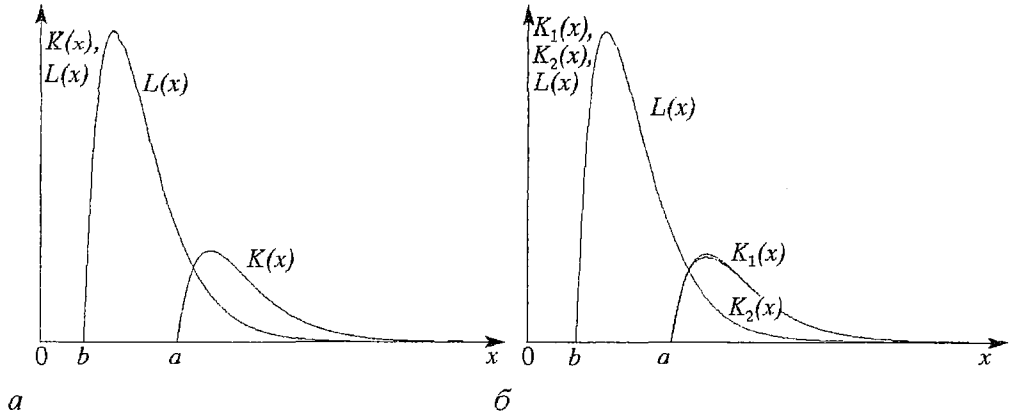


Рис. 3. а – экспоненциальная форма начального распределения (18а). $k=7.0, s=8.0, a=0.3, b=0.1, \alpha=0.05$; б, – эволюция распределения (18а) спустя время $T=20$. Раскуплено очень небольшое количество товаров. $N_1(T)=0.97305, N_2(T)=0.97279, M_1(T)=2.97305, M_2(T)=2.97279$

4. Определение потенциального спроса

Как правило, гораздо проще получить реальную функцию предложения, чем определить распределение «намерений» покупателей, подобное тому, которое мы вводим в нашей модели. Будем считать теперь, что нам известна функция распределения товаров на рынке $K(x,t)$ в два различных момента времени $t=0$ и $t=T$. С помощью данной модели можно определить функцию $g(x)$ в тех случаях, когда правомерно предположение (13). Из (2), (14) и (12) получаем:

$$L(x) = (1/\alpha T)(\partial/\partial x)\{\ln[K(x,T)/K(x,0)]\},$$

$$M = \int_0^{\infty} L(x)dx,$$

$$g(x) = \ln_x' [K(x,T)/K(x,0)] / \int_0^{\infty} \ln_x' [K(x,T)/K(x,0)] dx. \quad (19)$$

На рис. 4 представлен вид функции $g(x)$, полученной по формулам (8), (10) для момента времени T_1 и рассчитанной по формуле (19). Функция $K(x,T_1)$ была предварительно получена численно из (8), (10) для тех же самых значений параметров для наперед заданных функций $K(x,0)$ и $L(x,0)$. Рис. 4, а соответствует

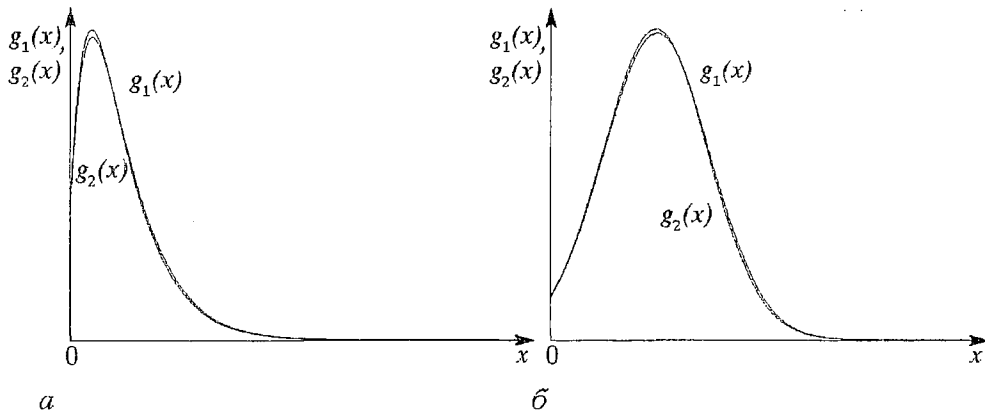


Рис. 4. Точное ($g_1(x)$) и асимптотически определенное ($g_2(x)$) распределение покупателей для случая: а – начального распределения (18), $k=7.0, s=8.0, \alpha=0.05, T=10$; б – начального распределения (20), $\sigma_p=1.8, \sigma_g=2.2, a=2.5, b=3.5, \alpha=0.05, T=10$

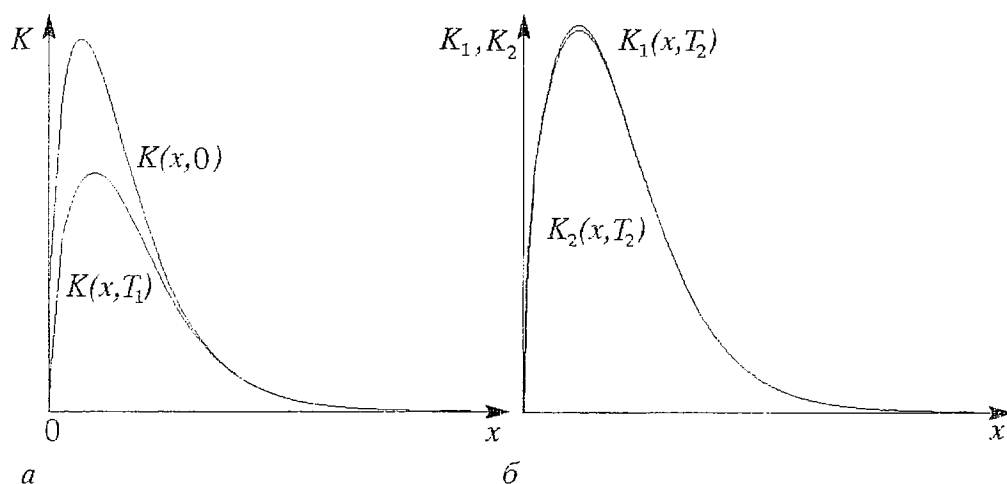


Рис. 5. Функция предложения (распределения товаров на рынке): а – полученная для двух различных моментов времени $T=0$ и $T_1=4$ для случая распределения (18). $N(0)=1.0$, $N(T_1)=0.71540$; б – определенная асимптотически ($K_2(x)$) и точно ($K_1(x)$) в момент времени $T_2=6$, $N_1(T_2)=0.63749$, $N_2(T_2)=0.63217$

форме начального распределения (18), а на рисунке 4, б представлена Гауссова форма распределения:

$$p(x) = [1/(2\pi\sigma_p^2)^{1/2}] \exp[(x-a)^2/2\sigma_p^2], \quad g(x) = [1/(2\pi\sigma_g^2)^{1/2}] \exp[(x-b)^2/2\sigma_g^2]. \quad (20)$$

В этом случае для выполнения условий нормировки нам приходится считать, что цены могут быть отрицательными. Для вида распределения (16) и (17) с помощью данной модели нельзя определить функцию спроса, так как уравнение (19) требует, чтобы функции $K(x,0)$ и $K(x,T)$ были непрерывны и не равны нулю ни в какой точке x .

Можно также, при заданных формах распределения $K(x,0)$ и $K(x,T_1)$, определить вид функции $K(x)$ в любой момент времени T_2 . Подставляя (19) в (15), получаем:

$$K(x, T_2) = K(x, 0) [K(x, T_1) / K(x, 0)]^{T_2/T_1}. \quad (21)$$

На рис. 5, а изображена функция $K(x)$ в моменты времени 0 и T_1 (входные данные), а на рис. 5, б – в момент времени T_2 , подсчитанная по формуле (21) и по формулам (8), (10). Видно, что для относительно небольших значений T_1 и T_2 результаты хорошо совпадают.

6. Прибыль

Представляется также интересным рассмотреть график прибыли, которая будет определяться, как разница между первоначальным числом товаров и оставшимся еще непроданным на данный момент времени, умноженная на цену, по которой эти товары были проданы*:

$$V(x, t) = (N(0) p(x, 0) - N(t) p(x, t)) x. \quad (22)$$

* Здесь мы рассматриваем чистую прибыль, без учета затрат продавцов на приобретение товара, транспортировку его на рынок и т.д.

Рис. 6. Прибыль, получаемая продавцами в зависимости от существующей функции возможностей покупателей. Высокой покупательной способности (18) соответствует функция $V_1(x, T)$, а низкой покупательной способности (18а) – функция $V_2(x, T)$. $k=7.0$, $s=8.0$, $a=0.3$, $b=0.1$, $\alpha=0.05$, $T=10$

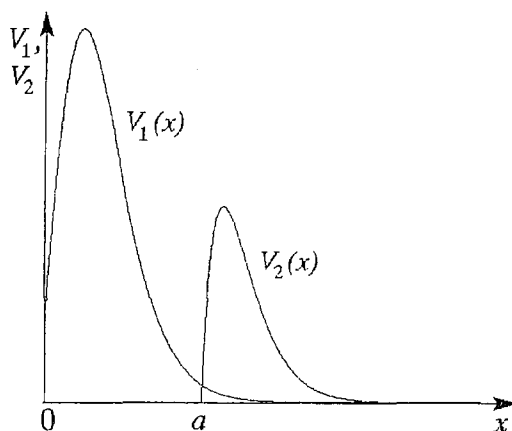


График прибыли представлен на рис. 6 для формы распределения (18), соответственно для случаев низкой и высокой покупательной способности населения. Можно видеть, что максимальную прибыль получают не те продавцы, которые продают товар по максимальной цене.

Выводы

Рассмотренная модель интересна тем, что может иметь прямое практическое применение. Зная динамику функции предложения, мы имеем возможность определить функцию спроса на данный товар. Согласно полученным результатам можно изменять функцию предложения с целью извлечения максимальной прибыли. Прежде, чем начинать массовую продажу, удобно было бы провести вышеописанное исследование для небольшой пробной партии товара.

Интересно, отметить также такой факт, что казалось бы весьма простой процесс распродажи товаров, при условии, что число товаров не возобновляется, описывается сложной системой нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений, решение которых удастся отыскать только для асимптотического случая.

Библиографический список

1. Weidlich W., Haag G. Concepts and models of a quantitative sociology. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1983.
2. Weidlich W. Stability and cyclity in social systems // Behavioral Science. Vol.33, 1988.
3. Weidlich W. The use of the statistical models in sociology // Collect. Phenom. 1972.
4. Волгин Л.Н. Модель оптимизации договорной цены // Экономика и математические методы. 1995. Т.34, вып.4.
5. Стинглер Дж.Дж. Экономическая теория информации // Экономика и математические методы. 1994. Т.30, № 1.
6. Короновский А.А. О механизмах установления рыночной цены // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 4,5. С.92.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 17.04.97
после переработки 8.07.97

NONLINEAR MODEL OF CUSTOMERS AND SELLERS INTERACTION

I.S. Rempen, A.A. Koronovski

In this work the interaction of customers and sellers is examined. Goods of the same kind may be sold by different prices and every customer sets the limit price he is

able to pay. The dynamics of the system with different initial forms of supply and demand functions is examined. The method of deriving the demand and the profit functions by the given supply function is described.



Реммен Ирина Сергеевна – родилась в 1974 году. Закончила Саратовский Государственный университет имени Н.Г.Чернышевского в 1996 году. Аспирантка СГУ. Область научных интересов – колебания и волны в активных нелинейных средах; моделирование экономических и биологических процессов. Имеет семь научных публикаций.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышла монография в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым «Нелинейная динамика в действии» (1996). Автор нескольких статей в центральной печати.



ПАРАДИГМА САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ. ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ И ПРЕДЕЛЫ ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ

Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов

Проведено всестороннее исследование явления самоорганизованной критичности (SOC). SOC-системы изучены с точки зрения теории ветвящихся процессов. Продемонстрирована возможность перехода системы от критичного к некритичному поведению. Введена новая статистическая характеристика – масштаб, при помощи которой дано строгое определение критичности. Построена иерархия SOC-моделей от простейших ветвящихся процессов до сложной распределенной критичной системы. Особое внимание уделено вопросам принципиальной возможности прогноза в критичных системах.

Введение

В последние годы огромный интерес вызывает явление, известное как самоорганизованная критичность (SOC) [1]. Это явление характерно для многих физических, биологических, экономических, социальных и прочих систем. В качестве наиболее ярких примеров проявления SOC можно привести техногенные и природные катастрофы. Типичными представителями первых являются аварии на ядерных объектах и химических предприятиях, авиакатастрофы и гибель судов. А вторых – землетрясения, сходы лавин и селей. В этом же ряду стоят экономические кризисы и бумы, процессы биологической эволюции, этногенеза и т.п.

Для подобных явлений характерна одна и та же особенность: наибольший ущерб (или же эффект) приходится на очень редкие, но, вместе с тем, очень крупные события. В отличие от некритических систем, характеризующихся гауссовыми или схожими с ними законами распределения изучаемых величин, в критических системах имеют место степенные законы, справедливые на протяжении многих порядков (в качестве классического примера можно привести закон Рихтера – Гутенберга, определяющий количество землетрясений в зависимости от их энергии $N(E) \propto E^{-\alpha}$, где $0.8 \leq \alpha \leq 1.1$ для разных участков земной поверхности [2]). Соответственно, кардинально меняется содержание таких понятий, как характерное время или характерная длина. В связи с чем встает вопрос о фундаментальных механизмах, лежащих в основе подобного поведения, а также о введении новых количественных характеристик для SOC-систем.

Базовой моделью теории самоорганизованной критичности является куча песка. Пусть мы имеем поднос, в центр которого по одной добавляются песчинки. Если на каком-либо участке кучи наклон становится слишком велик, то песчинка соскальзывает вниз, увлекая за собой другие песчинки и срывая, тем самым, лавину, которая либо затухает, попав в область с небольшим наклоном, либо

достигает края подноса, где песчинки сваливаются с него и покидают систему.

Если средний наклон кучи не очень велик, то очередная песчинка, скорее всего, не вызовет значительных изменений (докритичное состояние). Если наклон очень большой, то куча является метастабильной, и добавление одной единственной песчинки может привести к макроскопическому оползну, в который будет вовлечена большая масса песка (сверхкритичное состояние). Но если наклон имеет некоторое промежуточное значение, то нельзя указать характерный размер лавины, вызываемой добавлением одной песчинки, и закон распределения количества лавин от их размера имеет степенной вид (критичное поведение). Независимо от начального состояния куча песка эволюционирует к критичному состоянию – «аттрактору», в котором она характеризуется вполне определенным значением среднего наклона. Эта задача может быть сформулирована на языке клеточных автоматов с соответствующим компьютерным моделированием [1]. Ряд важных результатов для других моделей, демонстрирующих самоорганизованную критичность, представлен в работах [3–5].

Раздел 1 данной работы посвящен терминологии теории и вопросу применимости чисто степенных законов. Во 2-м разделе изучается природа явления самоорганизованной критичности с точки зрения теории ветвящихся процессов. В частности, рассматривается ветвящийся процесс, демонстрирующий переход от критичного поведения к некритичному при вариации управляющего параметра, что представляется очень важным. В 3-м разделе вводится удобная для описания критичных распределений статистическая характеристика, названная масштабом. Раздел 4 посвящен изучению новой нераспределенной модели, демонстрирующей самоорганизованную критичность и характеризующейся исключительной ясностью и простотой как при компьютерном моделировании, так и при аналитическом изучении, и способной служить «полигоном» для выдвижения и проверки гипотез. Одной из принципиальных особенностей модели является наличие всего двух управляющих параметров, что позволяет легко провести ее полное исследование. Распределенный аналог этой модели строится в 5-м разделе. В 6-м разделе обсуждаются вопросы предсказуемости самоорганизованной критичности. Заключительный раздел посвящен обсуждению результатов.

1. О терминологии

Само понятие «критичность» восходит к теории фазовых переходов второго рода. Температурные зависимости многих величин вблизи критической температуры T_c имеют степенной вид $\propto (T - T_c)^\alpha$; кроме того, при $T = T_c$ чисто степенной вид приобретает также корреляционная функция $G(r) \propto r^{-\alpha}$ и характерная длина становится бесконечной [6]. Наличие степенных законов в задачах самоорганизованной критичности, по-видимому, послужило поводом для чисто механического переноса термина.

Подобные аналогии являются весьма поверхностными и наталкиваются на то простое возражение, что теория самоорганизованной критичности, как правило, имеет дело с распределениями *аддитивных* физических величин. Для них

моменты $\mu_r = \int_0^\infty N(x) x^r dx$, по крайней мере, до второго включительно, должны оставаться конечными. Таким образом, закон распределения количества событий от их размера $N(x) \propto x^{-\alpha}$ не может оставаться справедливым для достаточно больших x , во всяком случае, при $\alpha < 3$. Более того, как станет ясно из дальнейшего, принципиальным является то, как быстро он начинает нарушаться.

В свете этого понятие «самоорганизованная критичность» представляется целесообразным рассматривать как самостоятельный термин, не предполагающий наличие закона распределения строго заданного вида, хотя интуитивно ясна некоторая связь между критичностью и законами близкими к степенным. Точное определение понятия «критичность» будет предложено в 3-м разделе.

2. Критичность как ветвящийся процесс

При всем разнообразии систем, демонстрирующих самоорганизованную критичность, они имеют одно общее свойство: возможность лавинообразного роста количества (массы, объема и т.п.) ресурса, вовлеченного в динамику в рамках элементарного события. В связи с этим представляется целесообразным обратиться к теории ветвящихся процессов.

2.1. Независимые частицы. Закон «минус три вторых». Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется система невзаимодействующих частиц, каждая из которых может на очередном шаге распасться с вероятностью p или же с вероятностью p_i превратиться в i частиц, где $0 \leq i \leq n$ (здесь и далее мы будем различать распад и превращение в ноль частиц). Поставим вопрос: если в начальный момент была одна частица, сколько всего частиц распадется за время существования ее потомства? Точнее, какова вероятность того, что распадется ровно столько-то частиц? Этот вопрос равносильен вопросу, сколько частиц образуется, так как эти числа различаются на единицу. (Задача может быть наглядно проинтерпретирована, как вычисление числа погибших от эпидемии, при которой большой в течение дня может умереть с вероятностью p , выздороветь – с вероятностью p_0 или заразить еще i человек с вероятностью p_{i+1} .)

Пусть вероятность того, что распадется ровно j частиц, равна v_j . Составим из величин v_j производящую функцию

$$\varphi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j v_j. \quad (1)$$

Поскольку частицы независимы, производящая функция системы из k частиц есть просто $\varphi^k(s)$ [7]. Определив, кроме того, функцию $F(u) = \sum_{i=0}^n u^i p_i$, можно легко записать уравнение для $\varphi(s)$, соответствующее одному шагу по времени,

$$\varphi(s) = ps + F(\varphi(s)). \quad (2)$$

Для корректности задачи необходимо, чтобы потомство частицы исчезало с единичной вероятностью. Математическое ожидание числа частиц, рождающихся на очередном шаге из одной частицы, есть $F'(1)$, то есть задача является корректной, если $F'(1) \leq 1$ [7]. Интерес представляет только случай, когда $F(u)$ – полином степени не менее двух, то есть $F''(u) \neq 0$.

Дифференцируя (2) по s , имеем

$$\varphi'(s) (1 - F'(\varphi)) = p, \quad (3)$$

следовательно, $\varphi' = p/[1 - F'(\varphi)]$. Поскольку функции $\varphi(s)$ и $F'(u)$ являются строго возрастающими, то существует такое $s_0 > 1$, что

$$F'(\varphi(s_0)) = 1. \quad (4)$$

Обозначим $\varphi_0 = \varphi(s_0)$. Очевидно, что φ_0 конечно, иначе при $s \rightarrow s_0$ правая часть (2) будет расти быстрее левой. Из конечности φ_0 автоматически следует и конечность s_0 . С другой стороны, из (4) ясно, что $\varphi'(s_0) = \infty$. По сути дела, s_0 представляет собой ближайшую к началу координат особенность функции $\varphi(s) = 1 + p \int_1^s dz/[1 - F'(\varphi(z))]$, определяющую радиус сходимости ряда Лорана (1).

Представим $\varphi(s)$ в окрестности точки s_0 в виде

$$\varphi(s) = \varphi_0 - w(s_0 - s)^\gamma + \dots \quad (5)$$

Тогда при $s \rightarrow s_0$ уравнение (3) запишется в виде

$$w\gamma(s_0-s)^{\gamma-1}[1-F'(\varphi_0) -F''(\varphi_0) (\varphi-\varphi_0) -\dots]=p,$$

что с учетом (4) и (5) дает

$$\gamma w^2(s_0-s)^{2\gamma-1}F''(s_0)=p.$$

Чтобы левая часть имела конечный ненулевой предел, необходимо выполнение соотношения $\gamma=1/2$. Следовательно, $w^2=2p/F''(s_0)$. Далее, пользуясь разложением функции $(s_0-s)^{1/2}$ в ряд Лорана

$$(s_0-s)^{1/2} = s_0^{1/2} - s_0^{1/2}/(2\pi^{1/2})\sum_{j=0}^{\infty}(s/s_0)^j \Gamma(j-1/2)/\Gamma(j+1), \quad (6)$$

окончательно получаем асимптотическое соотношение при $j \rightarrow \infty$

$$v_j \cong \{ps_0/[2\pi F''(s_0)]\}^{1/2}j^{-3/2}\exp(-j\ln s_0). \quad (6a)$$

Тот факт, что асимптотическое поведение коэффициентов ряда Лорана определяется характером ближайшей к началу координат особенности, позволяет использовать при разложении в нуле формулу, верную в окрестности точки s_0 .

Таким образом, доказан закон «минус три вторых», гласящий, что распределение числа распавшихся частиц в ветвящихся процессах с независимыми частицами имеет в асимптотике при $j \rightarrow \infty$ вид

$$v_j \propto j^{-3/2}\exp(-\beta j) \quad (7)$$

вне зависимости от конкретных значений параметров процесса, что особенно полезно в тех случаях, когда их не удастся вычислить. Приведенное доказательство представляет собой развитие идей, изложенных в работах [3,8].

Здесь следует сразу оговориться, что подобные процессы не могут рассматриваться как *самоорганизованная* критичность, поскольку значения всех параметров жестко заданы и никакая самоорганизация не имеет места. Тем не менее, как будет показано в разделе 4, к ним может сводиться рассмотрение «полноценных» SOC-моделей.

2.2. Зависимые частицы. Переход критичность – некритичность.

Несмотря на универсальность закона «минус три вторых» наблюдаемые во многих SOC-системах законы распределения не удовлетворяют формуле (7) и обычно характеризуются значениями показателя $\alpha < 3/2$. Таким образом, возможностей, предоставляемых аппаратом ветвящихся процессов с независимыми частицами, недостаточно для анализа этих моделей. Провести сколько-нибудь серьезное аналитическое исследование влияния взаимодействия частиц на статистические свойства ветвящегося процесса и вывести какие-либо закономерности не удастся. Поэтому ограничимся рассмотрением простейшего ветвящегося процесса со взаимодействием, дающего, тем не менее, глубокое представление о природе распределений, возникающих в теории самоорганизованной критичности.

Итак, пусть на очередном шаге ветвящегося процесса, если частиц было две или больше, одна из них с вероятностью \tilde{p} распадается, а с вероятностью $\tilde{q}=1-\tilde{p}$ превращается в две частицы; если же имелась всего одна частица, то с ней происходит то же самое, но с вероятностями p и $q=1-p$, соответственно. Ограничиваясь случаем $q \geq \tilde{q}$, введем величину

$$\xi = \tilde{q}/q, \quad \xi \in [0;1]$$

как меру независимости частиц в ветвящемся процессе. Вопрос остается тем же, что и в начале этого раздела: какова вероятность того, что за время существования потомства одной частицы произойдет определенное число распадов? Компьютерный анализ этой задачи показывает, что закон распределения может быть удовлетворительно приближен формулами вида

$$N(x) \propto x^{-\alpha} \exp(-\beta x), \quad (8)$$

причем параметр α изменяется от 0 до $3/2$ при изменении ξ от 0 до 1, как показано на рис. 1, а, б.

Таким образом, имеет место плавный переход между критичным и некритичным законами распределения по мере изменения величины ξ . В свете этого само понятие «критичность» должно рассматриваться не как качественное, а как присущее системе в большей или меньшей степени с соответствующей количественной характеристикой, которая будет предложена в 3-м разделе.

Сформулированная выше задача может быть легко сведена к ветвящемуся процессу с независимыми частицами. Для этого переформулируем ее условие следующим образом: имеется материнская частица, которая с вероятностью p распадается, а с вероятностью q сохраняется, порождая при этом одну дочернюю частицу, которая в свою очередь распадается или делится на две (опять же дочерние) частицы с вероятностями \tilde{p} и \tilde{q} , соответственно; материнская и дочерние частицы полностью независимы друг от друга; когда все потомство дочерних частиц исчезает, то очередь вновь доходит до материнской частицы и т.д. Обозначим через $\phi(s)$ производящую функцию материнской частицы, а через $\psi(s)$ — дочерней (неважно какой именно, так как они полностью равноценны). Поскольку материнская и дочерние частицы независимы, то, как нетрудно понять из сказанного выше, $\phi = ps + q\psi\phi$, то есть

$$\phi(s) = ps/[1 - q\psi(s)]. \quad (9)$$

Для функции ψ , в свою очередь, запишем уравнение по образцу (2): $\psi = \tilde{p}s + \tilde{q}\psi^2$, откуда имеем

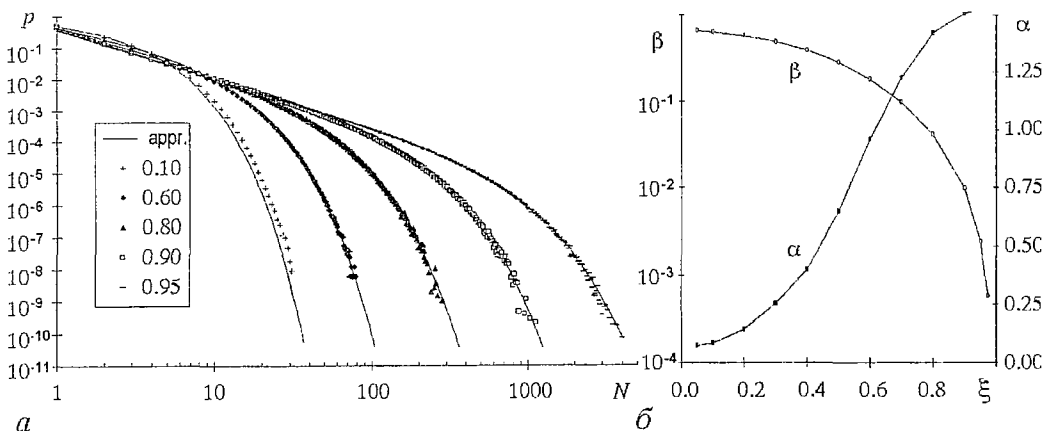


Рис. 1. Распределения числа распадов при различных значениях ξ и их аппроксимации зависимостями вида (8). При приближении ξ к 1 распределение становится похожим на характерное для критичности степенное, но при малых ξ оно имеет отнюдь не степенной вид. Результаты приведены для $q=0.5$ (а). Поведение параметров α и β при изменении ξ от 0 до 1; налицо переход от не критичного поведения к критичному. Результаты приведены для $q=0.5$ (б)

$$\psi(s) = [1 \pm (1-4\tilde{p}\tilde{q}s)^{1/2}]/(2\tilde{q}) = [1 - (1-4\tilde{p}\tilde{q}s)^{1/2}]/(2\tilde{q}). \quad (10)$$

Перед корнем был выбран знак «минус», чтобы выполнялось условие нормировки $\psi(1)=1$.

Далее, вводя обозначения $s_0=1/(\tilde{4}\tilde{p}\tilde{q})$ и $s_1=(q-\tilde{q})/(\tilde{p}q^2)$ и подставляя (10) в (9), получим

$$\varphi(s) = ps\{1+[1-(1-s/s_0)^{1/2}]/[2(1-\xi)]\}/(1-s/s_1). \quad (11)$$

Как и при выводе закона «минус три вторых», через v_j будем обозначать коэффициенты разложения $\varphi(s)$ в ряд Лорана. Введем, кроме того, обозначение

$$h(s)=1+[1-(1-s/s_0)^{1/2}]/[2(1-\xi)]=\sum_{i=0}^{\infty} s^i h_i.$$

Тогда (11) запишется в виде

$$\varphi(s) = [ps/(1-s/s_1)]h(s) = ps \sum_{i=0}^{\infty} s^i h_i \sum_{i=0}^{\infty} (s/s_1)^i,$$

отсюда имеем

$$v_{j+1} = p \sum_{i=0}^j s_1^{-j-i} h_i = ps_1^{-j} \sum_{i=0}^j s_1^i h_i = ps_1^{-j} [h(s_1) - \sum_{i=j+1}^{\infty} s_1^i h_i]. \quad (12)$$

Пользуясь формулой (6), легко получить $h_i \cong -i^{-3/2} s_0^{-i} / [4(1-\xi)\pi^{1/2}]$. С учетом чего второе слагаемое в скобках в (12) можно приблизить интегралом

$$-\sum_{i=j}^{\infty} s_1^i h_i \cong 1/[4(1-\xi)\pi^{1/2}] \sum_{i=j}^{\infty} i^{-3/2} (s_1/s_0)^i \cong I(j, s_0/s_1) / [4(1-\xi)\pi^{1/2}],$$

где $I(j, \mu) = \int_j^{\infty} x^{-3/2} \mu^{-x} dx$. Для $I(j, \mu)$, учитывая соотношение $s_1/s_0 = 4\xi(1-\xi) \leq 1$, при $\xi=1/2$ имеем $I(j, 1) = j^{-1/2}$, а при $\xi \neq 1/2$ $I(j, s_0/s_1) \cong (s_0/s_1)^{-j-3/2} / [4(1-\xi)\ln(s_0/s_1)]$. Поскольку

$$h(s_1) = \begin{cases} (1-2\xi)/(1-\xi), & \text{если } \xi < 1/2, \\ 0, & \text{если } \xi \geq 1/2, \end{cases}$$

окончательно находим

$$v_j \cong \begin{cases} [p(1-2\xi)/(1-\xi)] \exp(-j \ln s_1), & \text{если } \xi < 1/2, \\ [p/\pi^{1/2}] j^{-1/2} \exp(-j \ln s_0), & \text{если } \xi = 1/2, \\ pj^{-3/2} \exp(-j \ln s_0) / \{4(\xi-1) \ln[4\xi(1-\xi)]\pi^{1/2}\}, & \text{если } \xi > 1/2. \end{cases} \quad (13)$$

Полученная формула дает значение главного члена асимптотики коэффициентов v_j при $\xi \in [0; 1]$. Как мы видим, он существенным образом зависит от ξ . Строго говоря, формула (8) совпадает с (13) только при трех значениях $\xi=0; 1/2; 1$, а при всех остальных ξ представляет собой не более чем аппроксимацию. Тем не менее подобное приближение является вполне разумным, поскольку сами зависимости в отличие от главных членов их асимптотик меняются плавно при изменении параметра, а не скачком.

В 1-м разделе было указано на формальную неприменимость чисто степенных формул для законов распределения в критичных системах. Теперь мы столкнулись с более общим ограничением. Квазистепенные законы вида $N(x) \propto x^{-\alpha} u(\beta x)$, где $u(t)$ достаточно быстро убывает при больших t и приблизительно постоянна при малых, могут быть использованы лишь в том случае, если мы имеем априорную информацию (например, из теории) о функции $u(t)$. В противном случае перед нами неизбежно встает весьма сложная задача выделения области

средней асимптотики, где, с одной стороны, степенная зависимость $N(x) \propto x^{-\alpha}$ уже начала выполняться, а с другой – влияние поправки $y(\beta x)$ еще несущественно. Эта задача еще более осложняется тем, что область изменения аргумента в экспериментально получаемых зависимостях ограничена справа из-за конечности статистической выборки, размер которой может существенно повлиять на получаемое значение α .

Применительно к рассмотренной задаче формулы вида (8) пригодны, если мы хотим иметь всего лишь компактную приближенную запись закона распределения. Однако входящие в них величины α и β представляют собой не более чем параметры аппроксимации, поскольку, как уже было сказано, зависят от объема имеющихся статистических данных. То есть они не применимы, если мы хотим иметь характеристику изучаемой системы, которой можно придать конкретный физический смысл. Построению подобной характеристики посвящен следующий раздел.

3. Среднее и масштаб. Что такое самоорганизованная критичность?

Предположим, что в результате некоторого эксперимента мы установили, что случайная величина η значение x принимала $N(x)$ раз. Простейшей ее статистической характеристикой служит математическое ожидание $M\eta = \mu_1 / \mu_0$, где $\mu_i = \int N(x)x^i dx$. Однако применительно к SOC-моделям величина математического ожидания не дает *никакого* представления о масштабе происходящих в системе событий. Для модели, которая будет описана в разделе 4, $M=1$ вне зависимости от значений управляющих параметров и того, насколько критичным является ее поведение.

Помимо того, что среднее малоинформативно, во многих естественных системах, демонстрирующих критичное поведение, оно *в принципе не может быть определено* по данным, полученным в результате наблюдений или эксперимента. Это обусловлено тем, что, как правило, существует минимальное регистрируемое событие, определяемое чувствительностью приборов или методик. А поскольку в SOC-системах, имеющих «широкие» законы распределения, значение нормировочного интеграла набирается, главным образом, при малых x , момент μ_0 , а с ним и среднее, зачастую не могут быть определены по экспериментальным данным. (По этой причине сейсмологи, например, приводя среднее значение энергии зарегистрированных землетрясений, обычно указывают минимальное значение магнитуды.)

Перечисленных выше недостатков лишена величина $Sc\eta$, названная масштабом и определяемая как

$$Sc\eta = \mu_2 / \mu_1. \quad (14)$$

Значения интегралов для μ_1 и μ_2 набираются при больших x , и ограничение области регистрации слева несущественно для их вычисления по экспериментальным данным. В частности, если мы пытаемся приблизить закон распределения формулами вида (8), то проблем с вычислением μ_1 и μ_2 не возникает (в отличие от μ_0), и для масштаба легко находим $Sc = (2-\alpha)/\beta$ (то есть масштаб, в частности, описывает скорость нарушения чисто степенного закона).

Значение масштаба предлагается рассматривать как основную характеристику динамики SOC-системы. Более того, здесь появляется возможность дать четкое определение того, что такое критичная система и ввести численную характеристику ее критичности

$$C = Sc\eta / M\eta. \quad (15)$$

Для некритичных систем $M\eta \propto Sc\eta$ (то есть $C \ll 1$), в то время как для критичных систем выполняется $M\eta \ll Sc\eta$ (то есть $C \gg 1$). Таким образом, критичная система – это система, явления в которой имеют два характерных размера, сильно различающихся по порядку величины: среднее и масштаб. Значение последнего определяют, событий какого масштаба (отсюда и название) следует ожидать от данной системы. В этом смысле на масштаб можно смотреть как на среднее, взятое с весом λ . В некритичных системах масштаб будет, естественно, совпадать по порядку величины со средним.

Остановимся чуть подробнее на свойствах масштаба. Пусть мы имеем N одинаково распределенных независимых случайных величин η_i , тогда

$$Sc \sum_{i=1}^N \eta_i = Sc\eta + (N-1)M\eta \approx Sc\eta. \quad (16)$$

Данное соотношение непосредственно следует из очевидных формул

$$D \sum_{i=1}^N \eta_i = ND\eta, \quad M \sum_{i=1}^N \eta_i = NM\eta, \quad Sc\eta - M\eta = D\eta/M\eta$$

и позволяет использовать масштаб для описания даже тех сильно критичных систем, в которых не удается четко отделить друг от друга отдельные события. В силу (16) их взаимное разделение может быть проведено достаточно произвольным образом, без существенного влияния на точность определения масштаба.

Для процесса с производящей функцией (1) легко можно вывести формулы для среднего

$$Mj = \sum_{j=0}^{\infty} j v_j = \phi'(1) \quad (17)$$

и масштаба

$$Scj = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 v_j / \sum_{j=0}^{\infty} j v_j = 1 + \phi''(1)/\phi'(1). \quad (18)$$

Отсюда с учетом (2) для задачи, сформулированной в начале раздела 2, получаем

$$M = p/[1-F'(1)], \quad (19)$$

$$Sc = 1 + [F''(1)/p]M^2, \quad (20)$$

то есть масштаб квадратичен по среднему.

Теоретически, в качестве характеристики SOC-систем можно использовать и другие отношения вида μ_{r+1}/μ_r , где $r > 1$, которые могут быть вычислены по экспериментальным данным и имеют ту же размерность, что и изучаемая величина. Однако, во-первых, точность их вычисления по экспериментальным данным будет тем ниже, чем больше r . Во-вторых, они будут отличаться от масштаба лишь числовым множителем, несущественным при качественном рассмотрении. И, наконец, в-третьих, для них не будет справедлив закон сложения (16), имеющий место для масштаба.

На формулу (16) можно взглянуть еще и следующим образом. Согласно теореме Берри – Эссена, отклонение распределения суммы N случайных величин от нормального закона определяется значением $R = \mu_3/(\sigma^3 N^{1/2})$, где σ – корень из дисперсии [9]. Если $C \gg 1$, то $\mu_3/\mu_2 \ll \mu_2/\mu_1$, а $\sigma^2 \approx \mu_2$, отсюда $R \propto (C/N)^{1/2}$. Таким образом степень критичности C получает простую интерпретацию: C – это число событий, которые надо взять, что бы их сумма начала приобретать нормальный закон распределения.

4. Локальная модель

Рассмотрим систему, состоящую из N одинаковых ячеек, состояние которых может меняться в дискретные моменты времени. Если на очередном шаге ячейка либо пуста, либо содержит одну частицу, то она считается устойчивой и ее состояние не меняется. Если же число частиц в какой-либо ячейке становится больше 1, то из нее изымаются 2 частицы. Каждая из них с вероятностью p объявляется распавшейся и покидает систему, а с вероятностью $q=1-p$ добавляется в случайно выбранную ячейку. Так продолжается до тех пор, пока во всех ячейках останется не более одной частицы.

Начальное возмущение создается добавлением в произвольно выбранную ячейку одной частицы (которая при этом тоже с вероятностью p может распаться). Предмет исследования представляет собой распределение количества частиц, выбывших при ее добавлении в систему. Однако мы больше не будем изучать сам закон распределения, а ограничимся лишь величинами M и Sc , исходя из посылки, что значения масштаба и среднего вполне характеризуют SOC-систему.

Очевидно, что в стационарном режиме систему покидает в среднем одна частица на одну добавленную, то есть среднее $M=1$. Это позволяет, с одной стороны, следить только за масштабом, а с другой – дает возможность простой проверки по значению величины $\Delta M=|M-1|$ точности выхода системы на стационар и достоверности набранной при компьютерном моделировании статистики.

Кроме того, предложенная модель лишена общего недостатка большинства SOC-моделей, предполагающих, что добавляемый в систему ресурс покидает ее через границу. В этом случае размер системы определяет, с одной стороны, количество ячеек в системе и степень малости их размеров по сравнению с системой в целом, а с другой – механизм и скорость выбытия частиц из системы. Зацепленность этих двух разноплановых характеристик чрезвычайно затрудняет исследование моделей. В нашем же случае соответствующие параметры – число ячеек N и вероятность распада p – независимы.

Распределенность описанной модели, очевидно, чисто условна. Ее текущее состояние может быть описано всего двумя числами. Наиболее просто это можно сделать при помощи общего числа частиц в системе – i и числа пассивных частиц – k , причем значения i и k удобнее отсчитывать не от нуля, как станет ясно из дальнейшего, а от $N/2$. Под пассивными частицами здесь понимаются те частицы, которые лежат в своих ячейках, в отличие от активных, то есть тех, которым предстоит упасть в какую-либо ячейку или распаться. В этих терминах модель может быть легко сведена к ветвящемуся процессу с двумя типами взаимодействующих частиц. За один шаг с вероятностью p происходит распад одной возбужденной частицы, соответственно общее число частиц уменьшается на единицу $i \rightarrow i-1$; с вероятностью $q(1/2-k/N)$ происходит превращение одной пассивной частицы в активную, то есть $k \rightarrow k+1$, и, наконец, с вероятностью $q(1/2+k/N)$ одна активная частица становится пассивной, то есть $k \rightarrow k-1$. Начальное возмущение создается присвоением $i \leftarrow k+1$, и процесс завершается, как только i становится равным k .

Кардинальное отличие этого ветвящегося процесса от описанных в разделе 2 состоит в том, что здесь мы уже имеем настоящую самоорганизацию. Количество частиц k не является заданным извне, а самостоятельно эволюционирует к критическому значению по мере добавления частиц в систему и в дальнейшем остается вблизи этого значения.

В общем случае получить какие-либо точные аналитические результаты для данной модели не удастся, однако при $N \rightarrow \infty$ задача может быть сведена к уже решенной. Для бесконечно большой системы очевидно, что $k/N = \text{const} = f^{-1/2}$, где f – среднее заполнение ячейки. В этом случае о существовании пассивных частиц

можно забыть и рассматривать только ветвящийся процесс с независимыми частицами (активными). Для него уравнение (2) запишется в виде

$$\varphi = ps + q[(1-f) + f\varphi^2].$$

Из (17) получаем $M = p/(1-2qf)$ и, поскольку $M=1$, имеем

$$f = 1/2. \quad (21)$$

Что в совокупности с (18) окончательно дает

$$Sc = 1/p. \quad (22)$$

С уменьшением N значение масштаба будет уменьшаться, а среднего заполнения – расти (именно поэтому уместно отсчитывать i и k от $N/2$), то есть при уменьшении размеров системы она будет становиться все менее критичной. Влияние размеров системы легко проследить при помощи следующего рассуждения. На один перескок частицы (в терминах ветвящегося процесса: на одно превращение пассивной частицы в активную) приходится в среднем $1/p$ распадов, поэтому при $N=\infty$

$$Sc(\text{jumps}) = Sc(\text{decays})/p = 1/p^2.$$

Чтобы размеры системы не оказывали влияния на ее динамику необходимо, чтобы при перескоках из ячейки в ячейку частицы «не повторялись», то есть должно выполняться условие

$$Sc(\text{jumps}) \ll N.$$

Иными словами, систему можно вполне охарактеризовать величиной ее эффективного размера

$$Q = p^2 N. \quad (23)$$

Если $Q \gg 1$, то можно считать систему бесконечно большой, и справедливы формулы (21) и (22).

Компьютерное исследование модели проводилось при значениях N от 10 до 100000 (с логарифмическим шагом $10^{1/2}$) и при значениях p от $1.0 \cdot 10^{-4}$ до 0.18 (с логарифмическим шагом $10^{1/4}$) – всего 126 точек. Значение Q при этом изменялось от $1.0 \cdot 10^{-7}$ до $3.2 \cdot 10^3$. Следует отметить, что количество вбрасываемых частиц, необходимое для получения достоверных результатов, при этом соответственно возросло от 10^4 до 10^9 . На рис. 2 представлен масштаб как функция вероятности распада при различных значениях числа ячеек в системе.

На рис. 3, а показана зависимость масштаба от величины Q при различных p . Подобное представление результатов ничуть не нагляднее, чем приведенное на рис. 2. Но если вместо Sc по оси ординат отложить величину $Sc \cdot p^a$, как это сделано на рис. 3, б, то все точки лягутся на одну кривую

$$Sc \cdot p^a \propto \begin{cases} Q^{1/2}, & \text{если } Q \ll 1, \\ 1, & \text{если } Q \gg 1. \end{cases} \quad (24)$$

Наилучшее совмещение достигается при $a=0.92$. Рис. 3, а, б позволяют легко проследить переход системы от критического к некритичному поведению, имеющий место при уменьшении величины Q .

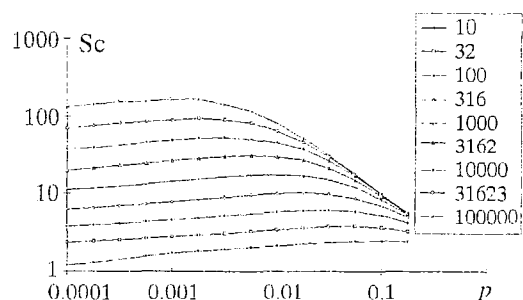


Рис. 2. Масштаб как функция вероятности распада при различных значениях числа ячеек

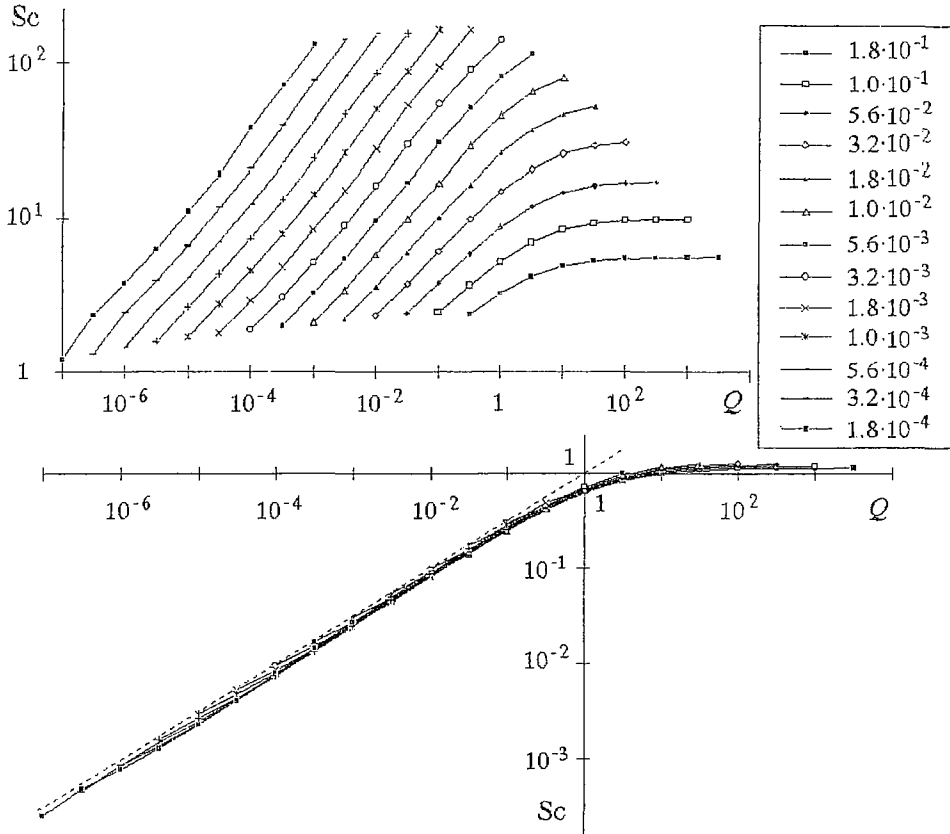


Рис. 3. Масштаб как функция эффективного размера системы при различных значениях вероятности распада (а). Произведение $Sc \cdot p^a$ как функция эффективного размера системы; при $a=0.92$ все точки легли на одну кривую; наклон левого участка графика равен $1/2$ (б)

Для области $Q \gg 1$ аппроксимация (24) дает $Sc \propto p^{-a}$ вместо (22), что можно считать удовлетворительным, поскольку выбор масштабирующего множителя в виде чисто степенной функции p^a произволен. Если положить приблизительно $a \approx 1$, то (24) запишется в виде

$$Sc/Sc^\infty \propto \begin{cases} Q^{1/2}, & \text{если } Q \ll 1, \\ 1, & \text{если } Q \gg 1. \end{cases}$$

где $Sc^\infty = 1/p$ значение масштаба при $Q = \infty$. Как легко видеть, величина Q однозначно определяет степень реализации потенциальной критичности системы.

Заслуживает внимания тот факт, что в области $Q \ll 1$ при постоянном p имеет место формула $Sc \propto N^{1/2}$. Такая зависимость легко может быть объяснена следующим образом с использованием описания модели в терминах ветвящегося процесса.

Соотношение $Q = p^2 N \ll 1$ обозначает, что вероятность распада p и размер системы N достаточно малы, чтобы за время жизни активной частицы успело установиться равновесное распределение θ_k значений числа k за счет превращений активных частиц в пассивные и обратно. От того факта, что на оси значений k имеется «ловушка» и при достижении равенства $i=k$ ветвящийся процесс обрывается, можно отвлечься. Это вполне корректно, поскольку в тех случаях, когда обрыв происходит быстро, частиц распадается очень мало, и соответствующая лавина практически не влияет на значение масштаба.

Запишем для θ_k условие детального равновесия

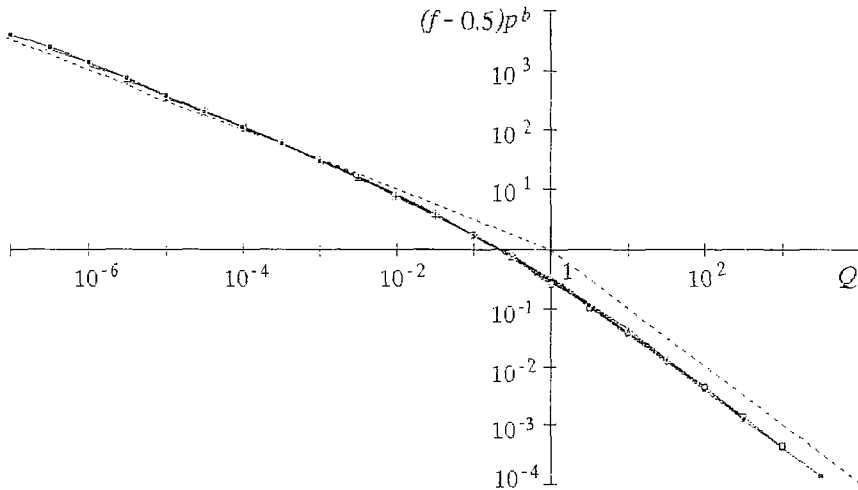


Рис. 4. Произведение $(f-0.5)p^b$ как функция Q . При $b=-0.97$ все точки легли на одну кривую. Наклон составляет $-1/2$ для левого участка графика и -1 для правого участка

$$\theta_k(1/2 - k/N) = \theta_{k+1}(1/2 + (k+1)/N).$$

Откуда находим

$$N(\theta_k - \theta_{k+1})/2 = (k+1)\theta_{k+1} + k\theta_k.$$

Суммируя обе части полученного равенства по k от нуля до бесконечности, получаем

$$N\theta_0/4 = \sum_{k=0}^{\infty} k\theta_k = |\bar{k}|. \quad (25)$$

С другой стороны, очевидно, $\theta_0|\bar{k}| \ll 1$, что в совокупности с (25) дает

$$|\bar{k}| \propto N^{1/2}. \quad (26)$$

Таким образом, диапазон изменения числа пассивных частиц, а с ним и число распадов, происходящих в ходе развития больших лавин, $\propto N^{1/2}$. Соответственно и масштаб как мера больших лавин $Sc \propto N^{1/2}$.

На рис. 4 изображена зависимость $(f-0.5)p^b$ от Q при $b=-0.97$. Если положить $b \approx -1$, то график можно аппроксимировать зависимостью

$$(f-0.5)/p \propto \begin{cases} Q^{-1/2}, & \text{если } Q \ll 1, \\ Q^{-1}, & \text{если } Q \gg 1. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\bar{k} = N(f-0.5) \propto \begin{cases} N^{1/2}, & \text{если } Q \ll 1, \\ 1/p, & \text{если } Q \gg 1, \end{cases}$$

что хорошо согласуется с формулами (22) и (26).

5. Иерархия критичных моделей

Мы изучили явление критичности на уровне ветвящихся процессов с независимыми и со взаимодействующими частицами, а затем на уровне

нераспределенной модели самоорганизованной критичности. Теперь перейдем к описанию распределенной модели. Это тем более оправдано, что подавляющее большинство рассматриваемых в литературе моделей являются распределенными [1–5,10].

Пусть ячейки единичного размера расположены в виде d -мерного куба с ребром L (всего $N=L^d$ ячеек). Условия на границе будем полагать периодическими (топология тора). Если число частиц в какой-либо ячейке превышает 1, то она становится неустойчивой и из нее изымаются 2 частицы. Каждая из них с вероятностью p объявляется распавшейся и покидает систему, а с вероятностью $q=1-p$ добавляется в ячейку, отстоящую от исходной на случайное расстояние с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Конкретный вид распределения вероятностей для расстояний не принципиален, поскольку после некоторого числа последовательных прыжков оно становится нормальным. Начальное возмущение создается добавлением в произвольно выбранную ячейку одной частицы.

Таким образом, модель имеет четыре параметра: p , L , d и σ . При $\sigma \gg 1$ она переходит в локальную модель, описанную в разделе 4. В самом деле, можно считать, что частицы перераспределяются по всей системе и ее топология становится несущественной.

Модели легко может быть придана следующая сейсмическая интерпретация. Каждая ячейка представляет собой элементарный участок земной коры с напряжением равным числу частиц в этой ячейке. Если напряжение какого-либо участка превышает порог равный единице, то происходит его перераспределение между соседями, в процессе которого часть энергии выделяется в виде толчков, соответствующих распаду частиц.

Следует заметить, что компьютерное исследование данной модели сложнее исследования локальной модели настолько же, насколько решение уравнений в частных производных сложнее решения обыкновенных. Обратим внимание лишь на то, что для выхода распределенной SOC-системы на стационар зачастую требуется много большее число вброшенных частиц, чем на последующее получение самих результатов. Вывести ее на стационар можно искусственно, следя за отклонением $\Delta M = |M-1|$ и «вручную» меняя число частиц в системе, пока не станет достоверно выполняться $\Delta M \ll 1$. Задача по быстрому выводу на стационар модели, для которой величина среднего M заранее неизвестна, представляется нам практически невыполнимой.

Компьютерное исследование проводилось для случая $L^d p^2 \gg 1$, то есть размеры системы можно считать бесконечными. Число частиц, вбрасываемых после выхода на стационар, составляло $\approx 10^6 \div 10^7$. Результаты для $p=0.025$, приведенные на рис. 5, позволяют проследить увеличение степени критичности по мере роста σ . Графики не дают оснований утверждать, что явление самоорганизованной критичности качественно меняется, когда размерность пространства достигает порогового значения [11]. Исторически явление перехода от некритичного поведения к критичному было обнаружено при изучении именно этой модели [8].

Рассмотренная модель не так далека от привычных SOC-моделей с открытыми условиями на границе, как может показаться с первого взгляда. В таких моделях частице, чтобы покинуть систему, нужно пройти фиксированное расстояние от точки вбрасывания до края, а в нашей – фиксировано лишь среднее значение этого расстояния равно σ/p . Кроме того, с известной степенью огрубления частными случаями данной модели можно считать модели, в которых ресурс перераспределяется только между непосредственными соседями распавшейся ячейки, так как принципиальное значение имеет только дисперсия расстояния σ^2 .

К сожалению, данная модель, равно как и полученные численные результаты, слишком сложна, и установить какие-нибудь аналитические или эмпирические зависимости пока что не удастся. Тем не менее, мы включили ее

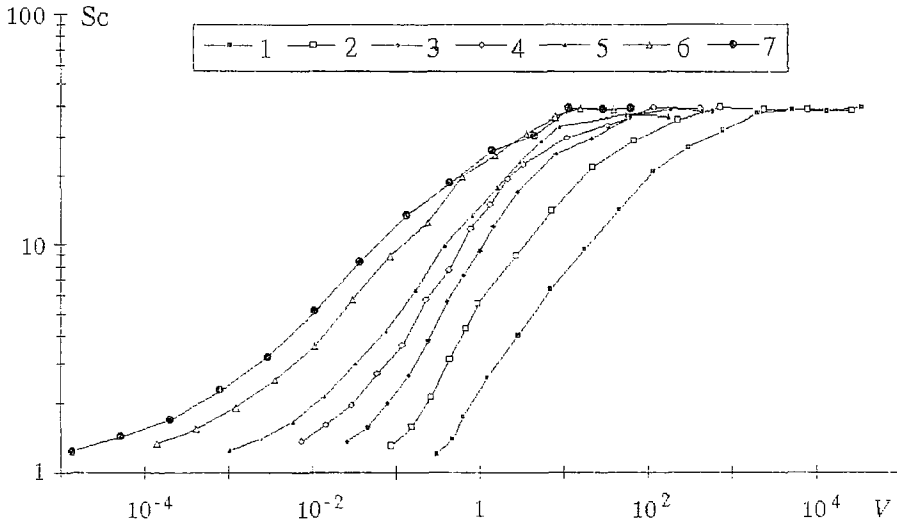


Рис. 5. Масштаб Sc как функция доступного объема $V=\sigma^d$ при различных размерностях пространства d . Данные приведены для $p=0.025$. При больших значениях V графики выходят на предельное значение равное $1/p$ (см. (22))

описание в настоящую работу для завершения иерархии SOC-моделей, позволяющей исследовать явление самоорганизованной критичности на различных уровнях общности и с различной степенью подробности.

Дальнейшие исследования, вероятно, будут связаны именно с этой моделью, поскольку она потенциально способна демонстрировать свойства, не наблюдавшиеся в более простых системах, рассмотренных ранее.

6. Предсказуемость самоорганизованной критичности

Корректное использование таких понятий, как распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия, масштаб и т.п. предполагает статистическую независимость изучаемых случайных величин. Поэтому, как и в большинстве исследований, посвященных самоорганизованной критичности, в представленной работе до настоящего момента события, происходящие в системе, рассматривались как независимые. Это, конечно же, справедливо лишь приближенно.

Статистическая зависимость последовательных событий напрямую связана с вопросом построения предиктора, то есть алгоритма, позволяющего предсказывать дальнейшее поведение системы на основе наблюдения за ним в течение некоторого времени. Один из возможных путей в этом направлении подробно изучен в работе [10].

Однако, поскольку построение предикторов является самостоятельной сложной задачей, а их конкретные особенности, по-видимому, должны существенным образом варьироваться для различных SOC-систем, представляется целесообразным остановиться не на построении предиктора для какой-либо конкретной модели, а на принципиальных возможностях предсказания в критичных системах. Это удобнее всего сделать на примере локальной модели из раздела 4.

6.1. Горизонт прогноза. Пусть на i -м шаге в систему, содержащую k_i частиц, добавляется одна частица, после чего количество частиц в системе становится k_{i+1} . При этом распадается и покидает систему

$$\eta_i = k_i - k_{i+1} + 1 \quad (27)$$

частиц. Усреднением формулы (27) по i получим очевидное соотношение $\langle \eta \rangle = 1$. Если бы последовательные события были независимы, выполнялось бы равенство $\langle \eta_i \eta_j \rangle = \langle \eta_i \rangle \langle \eta_j \rangle = 1$ при $i \neq j$. Поэтому в качестве меры их зависимости естественно выбрать величину

$$\delta_i = 1 - \langle \eta_i \eta_{i+1} \rangle. \quad (28)$$

Сколь-нибудь надежное практическое определение δ_i требует неприемлемо большого объема компьютерных вычислений. Поэтому мы ограничимся лишь той информацией, которая может быть получена без непосредственного нахождения δ_i .

Просуммировав (27) по i , имеем

$$\sum_{i=-n}^n \eta_i = (2n+1) + k_{-n} - k_n. \quad (29)$$

Умножая (29) на η_0 и усредняя по i , получим

$$\langle \eta^2 \rangle + 2 \sum_{i=1}^n \langle \eta_0 \eta_i \rangle = (2n+1) + \langle k_{-n} \eta_0 \rangle - \langle k_n \eta_0 \rangle,$$

подставив сюда (28) и устремляя n к бесконечности, окончательно находим

$$D\eta = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i. \quad (30)$$

С другой стороны, возведя (29) в квадрат и проделав ту же самую процедуру, получим

$$Dk = \sum_{i=1}^{\infty} i \delta_i. \quad (31)$$

Величина Dk , фигурирующая в последней формуле, не была рассмотрена при изучении локальной модели. Но поскольку для нее в отличие от масштаба или среднего заполнения нет никаких характерных значений управляющих параметров, ее зависимость от них должна быть чисто степенной. Как показывает моделирование, имеет место равенство

$$Dk = (0.19 \pm 0.01) N^{1.11 \pm 0.01} p^{0.25 \pm 0.01},$$

незначительно нарушающееся лишь при малых N (рис. 6).

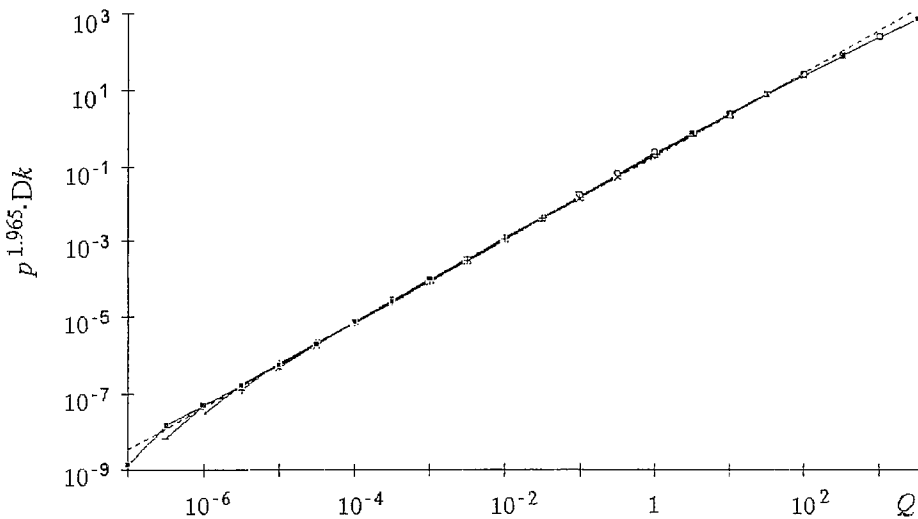


Рис. 6. Произведение $p^{1.965} \cdot Dk$ как функция Q . Наклон графика составляет 1.108 ± 0.003

Для завершения выкладок поделим (31) на (30) и получим характерное время системы

$$\tau = \sum_{t=1}^{\infty} t \delta_t / \sum_{t=1}^{\infty} \delta_t = 2Dk/D\eta. \quad (32)$$

На временах $t \ll \tau$ система «помнит» свое прошлое, и в этом диапазоне времен возможен прогноз. А на временах $t \gg \tau$ события становятся статистически независимыми и, следовательно, непрогнозируемыми. Вообще говоря, формула (32) применима не только к модели из раздела 4, но и к любой другой, ресурс в которой сохраняется в процессе его перераспределения (источники и стоки будем считать частью системы), то есть является осмысленной величиной. Для модели кучи песка, рассмотренной в работе [1], это не так (см. [12]), что является ее существенным недостатком.

По аналогии с (24) для характерного времени системы τ можно построить эмпирическую аппроксимацию

$$\tau^{0.95} \propto \begin{cases} Q, & \text{если } Q \ll 1, \\ Q^{1/2}, & \text{если } Q \gg 1, \end{cases}$$

однако значительно интересней рассмотреть отношение

$$T = \tau/S\epsilon. \quad (33)$$

Крупные, порядка масштаба, события происходят с вероятностью $\propto 1/S\epsilon$, поскольку $M=1$. Если сделать вполне естественное предположение, что «забывание» в системе обусловлено главным образом сильно «перетряхивающими» ее крупными событиями, то становится понятно, что величина T может зависеть только от Q . Действительно, как видно из рис. 7,

$$T \propto \begin{cases} 1, & \text{если } Q \ll 1, \\ Q, & \text{если } Q \gg 1. \end{cases} \quad (34)$$

В случае $Q \ll 1$ система мала и для «перетряхивания» хватает одного крупного события, поскольку оно захватывает ее всю, а при $Q \gg 1$ их необходимо столько, на сколько хватает размеров системы, то есть Q (см. объяснения к формуле (23)).

Из формул (33) и (34) можно сделать качественный вывод, который, по-видимому, должен быть верен для большинства SOC-систем: чем более критична

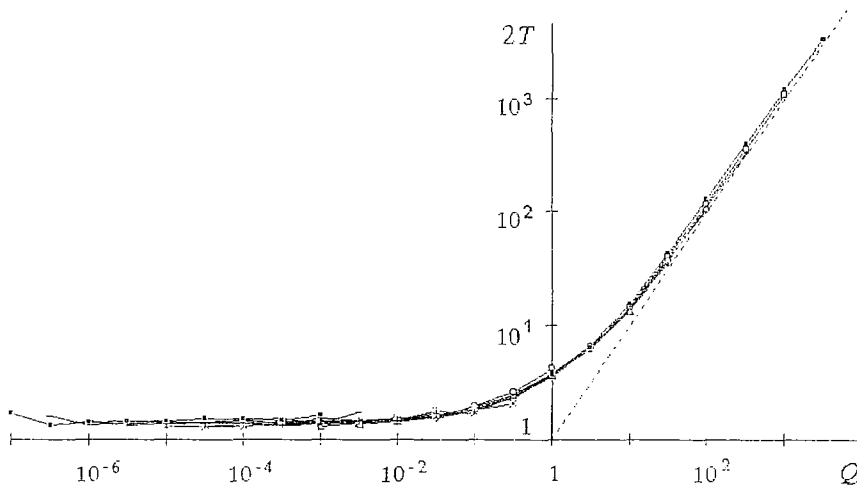


Рис. 7. Отношение $T=\tau/S\epsilon$ как функция Q . Наклон правого участка графика равен 1. Множитель 2 по оси ординат введен исключительно из эстетических соображений

система, тем дольше она «помнит» свою историю. Другими словами, горизонт прогноза увеличивается с ростом критичности системы.

6.2. Об одном подходе к предсказанию. Если в п. 6.1 под прогнозом мы неявно понимали предсказание поведения системы на некоторый срок в будущее, то под собственно предсказанием будем понимать только получение информации о том, что произойдет непосредственно в следующий момент, то есть сейчас.

Изучение предсказуемости следует начинать с вопроса о том, какой объем такой информации следует считать предсказанием. Для рассмотренных в разделе 2 ветвящихся процессов «сделать предсказание» означает просто выписать распределения вероятности (6а) и (13). Больше никакой информации о том, что произойдет на очередном шаге, очевидно, получить нельзя.

Соответственно, возможной целью, к которой следует стремиться и в более сложных системах, является возможность сказать, каково распределение вероятностей в данный момент времени. В случае модели из раздела 4 текущее состояние однозначно определяется k – количеством частиц в системе. И хотя оно нам не известно, можно считать, что мы знаем его с точностью до аддитивной константы. В силу (27) мы можем определить его изменение, наблюдая за лавинами. А раз так, то для каждого значения k по данным наблюдений можно получить экспериментальное распределение вероятностей лавин, происходящих при этом k . И чем дольше время наблюдения за системой, тем точнее будут эти распределения.

Таким образом, для локальной модели и ей подобных возможно *сколь угодно точное* (в указанном выше смысле) предсказание на основе достаточно длительного наблюдения.

Следует признать, что описанный подход имеет ряд недостатков. Он перестанет работать, если мы не сможем регистрировать наиболее мелкие события (например, из-за ограниченной чувствительности приборов). В случае распределенных систем ситуация также не очень благоприятна, поскольку, с одной стороны, текущее состояние характеризуется не одной величиной, а целым их набором (вообще говоря, бесконечным), а с другой – необходимо уметь ответить не только на вопрос, *что* сейчас произойдет, но и *где*. Тем не менее этот подход может оказаться перспективным, поскольку позволяет понять, что именно мы можем предсказать.

Выводы и обсуждение

В настоящей работе продемонстрирована глубокая связь самоорганизованной критичности и ветвящихся процессов. Доказано, что любой ветвящийся процесс с независимыми частицами описывается статистикой вида $N(x) \propto x^{-3/2} \exp(-\beta x)$ – законом «минус три вторых». На примере простейшего ветвящегося процесса с зависимыми частицами продемонстрирован переход системы от критичного поведения к некритичному при вариации управляющего параметра.

Указано на неприменимость для SOC–систем чисто степенных законов распределения, а также на весьма ограниченную применимость квазистепенных законов и математического ожидания как статистической характеристики. Вместо них введена новая статистическая характеристика, названная масштабом и представляющая собой меру больших событий. На основе понятия масштаба даны новое определение критичности и ее численная мера.

Построена иерархия SOC–моделей, позволяющая проследить весь спектр свойств самоорганизованной критичности на разных уровнях сложности, дающих, соответственно, разный уровень понимания явления самоорганизованной критичности вообще и конкретных ее деталей в частности.

Изучены также некоторые вопросы, касающиеся принципиальных возможностей прогноза в критичных системах и предсказания их поведения. В

частности, указана связь между критичностью системы и временами, на которые принципиально возможен прогноз ее поведения.

В основе самоорганизованной критичности лежат достаточно тривиальные процессы, что делает ее не каким-то экзотическим цветком синергетики, а вполне заурядным и повседневным явлением. Подобный взгляд носит не только чисто научный, но и мировоззренческий характер и заставляет по-иному взглянуть на безопасность проектирования сложных технических систем, предсказание стихийных бедствий, причины и динамику вооруженных конфликтов, экономические кризисы, биологическую эволюцию, этногенез и многие другие явления.

Библиографический список

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. P. 364.
2. Sornette F., Sornette D. // Europhys. Lett. 1989. Vol. 9, № 2. P. 197.
3. Bak P., Flyvbjerg H. // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 2192.
4. Pietronero L., Tartaglia P., Zhang Y.-C. // Physica A. 1991. Vol. 173. P. 22.
5. Dhar D., Ramaswamy R. // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63 P. 1659.
6. Ма Ш. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. С. 26, 62.
7. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966. С. 17, 22.
8. Подлазов А.В. Препринт ИПМ РАН 86, 1995.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1967. С. 620.
10. Pepke S.L., Carlson J.M. // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 236.
11. Janosi I.M., Cziroc A. // Fractals. 1994. Vol. 2, № 1. P. 153.
12. Малинецкий Г.Г., Митин Н.А. // Журнал физической химии. 1995. Т. 69, № 8. P. 1513.

Институт прикладной
математики РАН

Поступила в редакцию 30.07.97

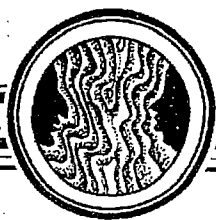
PARADIGM OF SELF-ORGANIZED CRITICALITY. HIERARCHY OF MODELS AND LIMITS OF PREDICTABILITY

G.G. Malinetskii, A.V. Podlazov

We considered the phenomenon of self-organized criticality (SOC). The SOC-systems are studied from the point of view of the branching processes theory. Transition from the critical behavior to non-critical one is demonstrated. The strict definition of criticality is given on the base of the «scale» value – a new statistical characteristic proposed. The hierarchy of SOC-models from the simplest branching processes to complex distributed system is built. The particular attention in the paper is paid to the problem of predictability in critical systems.



Подлазов Андрей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). Работает в Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, аспирант Московского физико-технического института. Область интересов – нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности.



ЮБИЛЕЙ ЭЛЕКТРОНА

Б.С. Дмитриев, Ю.И. Левин

Vestigia semper adora¹

Вряд ли совершалось какое-либо другое открытие, которое привело бы к пониманию столь многих и разнообразных явлений, как открытие электрона.

В. Вайскопф

Переоценить роль электрона в развитии нашей цивилизации невозможно. Несмотря на то, что представления, которые мы вкладываем в понятие «электрон», прошли большой извилистый путь и этот путь далек от завершения,

¹ Читайте следы прошлого (лат.).

мы с полным основанием можем считать годом «рождения» электрона 1897 год и его «открытие» неразрывно связывать с именем Дж. Дж. Томсона.

Джозеф Джон Томсон родился 18 декабря 1856 года в семье продавца книг в пригороде Манчестера. В своем жизнеописании, которое Томсон написал на склоне своей долгой и интересной жизни под названием «Воспоминания и размышления», он с юмором отмечает: «... это был один из самых интересных периодов мировой истории. Монархии падали одна за другой, их сменял республики, а иной раз диктатуры. Открытия и изобретения производили все большие изменения в жизни общества. Когда я был маленьким мальчиком, в нашем городе не было ни велосипедов, ни автомобилей, ни аэропланов, ни электрического освещения, ни телефонов, ни радио, ни рентгеновских снимков, ни кино, ни микробов – по крайней мере доктора их не находили...»

Его отец очень хотел, чтобы он стал инженером. Четырнадцатилетним мальчиком Томсон был послан в колледж Оуэна, который позднее был преобразован в Манчестерский университет. Вскоре после смерти отца по финансовым причинам сын не смог продолжить свое техническое образование. В 1876 году он получает стипендию и продолжает свое образование в Тринити-колледже. С этого момента вся дальнейшая академическая жизнь Томсона связана с Кембриджским университетом, который он окончил в 1880 году.

Дж. Дж. Томсон, или как его называли друзья Джи-Джи (Joseph John), получил хорошее математическое образование, много занимался теорией, но все-таки математика была для него только орудием, вдохновение же черпалось из четкого видения физических идей.

Первые работы Томсона были связаны с развитием максвелловской электродинамики. При решении задачи о движении заряженного шара он получил вывод об увеличении массы заряда за счет энергии электрического поля. Диссертация Томсона посвящена объяснению ряда физических и химических явлений, исходя из общих принципов механики и электродинамики. Его работа «О некоторых приложениях принципов динамики к физическим явлениям» (1885) была названа Г. Герцем «замечательным трактатом о физических применениях динамики».

До середины XIX века в университетах Англии не было исследовательских лабораторий. Профессора проводили эксперименты в собственных домах. Первый план об организации такой физической лаборатории в Кембридже рассматривался в 1869 году, официально она была открыта в 1874 году. Ее возглавил Джеймс Клерк Максвелл. Его преемником стал лорд Рэлей (Максвелл умер молодым в возрасте 48 лет), вышедший в отставку в 1884 году. И вот произошло удивительное событие: молодой 28-летний математик Томсон, который только начал экспериментальные исследования в Кавендише, был назначен директором лаборатории – третьим кавендишским профессором. Это был смелый выбор, но, как стало очевидным, и чрезвычайно удачный – на этом посту он пробыл до 1918 года, когда его сменил его же ученик лорд Резерфорд.

Томсон со всей энергией взялся за новую работу, его лаборатория сделалась крупным исследовательским центром, собравшим блестящие имена со всего мира. Один из учеников Томсона М. Борн в своих «Размышлениях и воспоминаниях физика» с теплотой отмечает: «Я на своем примере почувствовал все обаяние его личности».

Его профессорские лекции впечатляли кристальной ясностью даваемых объяснений, хотя по мнению М. Борна «он не был блестящим лектором в прямом понимании этого слова». Демонстрации на лекциях Дж. Дж. Томсона были «великолепны и впечатляющи», отличались простотой и красотой. Насколько поучительно и приятно об этом узнать современным «труженикам», читающим курс общей физики и «штурмующих» методические конференции этими проблемами.

Конец девятнадцатого века поразителен своими открытиями в области физики. Многие из них будут поняты и оценены только позже. Областью основных интересов была теория электричества и магнетизма. Томсон находился под сильным влиянием трудов Максвелла, особенно его «Трактата об

электричестве и магнетизме» (1873). Тем не менее, основная деятельность Томсона развевалась в направлении, в котором центральным объектом интереса были не поля, а заряды. Это – открытие и исследования электронов, которые и принесли Томсону славу. Даже после исследования электролиза в тридцатые годы XIX века Фарадеем, реальность зарядов казалась довольно зыбкой. Представлением об атомах, как правило, пользовались химики – в успехах физиков девятнадцатого столетия господствовало понятие непрерывности. И сам Фарадей и после него Максвелл больше размышляли о том, что происходит в пространстве между наэлектризованными телами, чем о природе зарядов на этих телах. Когда Максвелл записал свои знаменитые уравнения, еще ничего не было известно о наименьшем заряде и его носителях. Он, например, писал: «Чрезвычайно невероятно, однако, что когда мы придем к пониманию истинной природы электролиза, мы сохраним в какой-либо форме теорию электрических зарядов». Хотя в своем знаменитом «Трактате» он и допускал, что в электролите молекулы заряжены определенным количеством электричества, однако тут же добавлял, что «эта соблазнительная гипотеза приводит к очень большим затруднениям».

Взгляды стали меняться к концу столетия – голландский физик Лоренц выдвинул теорию электричества, где заряд играл более важную роль, он уже использовал слово «электрон», предложенное в 1891 году Джонстоном Стони², который поддерживал идею, что законы электролиза означают существование естественной единицы заряда, правда, он считал, что «эти заряды не могут быть отделены от атома; они не проявляют себя, если атомы находятся в химическом соединении». Лоренц приписал заряду определенную массу, а за десять лет до этого, как уже отмечалось, Дж. Дж. Томсон показал, что заряд автоматически вызывает появление некоторой дополнительной массы и она тем больше, чем меньше тело, несущее заряд. Отметим также, что еще в 1881 году Герман Гельмгольц отчетливо сформулировал мысль о «молекулярном строении электричества». Однако экспериментальных доказательств еще не существовало.

Решающие факты экспериментов Томсона были получены при изучении катодных лучей, которые долгое время были загадкой – почти сорок лет физики разных стран изучали до Томсона электрический разряд в разреженных газах. Исследования электропроводимости газов началось фактически с работы Фарадея 1838 года. Им был исследован разряд, возникающий в сосуде между латунными стержнями, на которые подавалось напряжение от электростатической машины (вспомним «фарадеево темное пространство»). Низкий уровень вакуумной техники тех времен не позволил получить заметного прогресса в изучении физики газового разряда. Дело заметно продвинулось лишь после появления ртутного вакуумного насоса, сделавшего возможным получение хорошего вакуума. Наиболее фундаментальное изучение катодных лучей было проведено англичанином Круксом. Уильям Крукс – свободный исследователь, физик и химик, проводил свои исследования в частной лаборатории в Лондоне, он открыл элемент таллий (1861), создал радиометр (1875), носящий его имя, изучал проблемы спиритизма. За свои научные заслуги в 1897 году был пожалован титулом баронета. Используя вакуумные трубки самых различных форм, добившись большого разрежения газа и введя в трубки радиометр, Крукс наблюдал его вращение, если он оказывался на пути катодного пучка, после чего сделал вывод, что катодные лучи обладают механическим действием. Всем известны «хрестоматийные» картинки с тенью от металлического мальтийского креста на флюоресцирующем стекле при прохождении катодных лучей (рис. 1), что доказывало прямолинейность их распространения внутри трубки. Изучая действие магнита на тонкий пучок катодных лучей, Крукс заключил, что магнитное поле искривляет катодные лучи. Но что представляют собой катодные лучи? Ведь они уже долгое время были загадкой. Были известны и некоторые другие опыты по исследованию природы катодных лучей. В докладе Крукса на заседании Королевского института в 1879 году «О лучистой материи, или четвертом агрегатном состоянии» (кстати, термин

² Это слово имело тогда смысл, отличный от современного – Стони назвал электроном отрицательный заряд одновалентного иона.

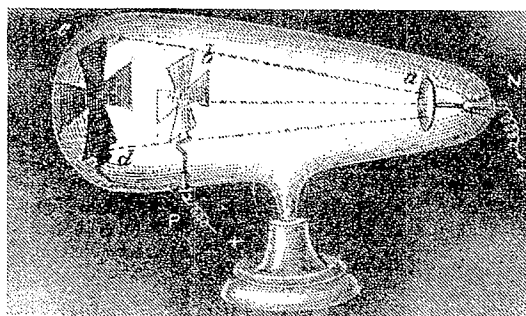


Рис. 1

«лучистая энергия» ввел еще в 1816 году Фарадей) он произнес явно пророческие слова: «При изучении этого четвертого состояния создается представление, что мы имеем, наконец, в своем распоряжении «окончательные» частицы, которые мы можем с полным основанием считать лежащими в основе физики Вселенной».

Корпускулярная гипотеза Крукса была подтверждена в 1895 году молодым физиком Жаном Перреном, работавшим в лаборатории в Париже. Перрен

расположил на пути катодных лучей внутри разрядной трубки цилиндра Фарадея, соединенный с чувствительным электроскопом. При работе трубки цилиндр всегда оказывался заряженным отрицательно. Достаточно было отклонить магнитом катодные лучи так, чтобы они не проникали в цилиндр, и электроскоп оказывался незаряженным. Все это доказывало, что катодные лучи – это отрицательные электрические заряды.

Вопрос об истинной природе катодных лучей, тем не менее, оставался предметом острой дискуссии – высказанным соображениям противостояла волновая гипотеза, поддерживаемая немецкой школой, в первую очередь Герцем и Ленардом. Доводы соперничающих школ имели примерно равные силы. Генрих Герц обнаружил в 1891 году, что катодные лучи могут проходить сквозь тонкие металлические пленки, например, золотую фольгу, не делая в них отверстий. Этот факт был широко использован его учеником Филиппом Ленардом, который сумел вывести пучок катодных лучей в атмосферу через фольгу, не повредив ее, так что вакуум в трубке сохранялся. Он обнаружил, что они проходят в воздухе расстояние, равное примерно 1 см. опыты Герца и Ленарда дали наиболее твердую опору волновой гипотезе катодных лучей, к тому же авторитет блестящего экспериментатора Герца после открытия электромагнитных волн был очень высок.

Немецкие физики во главе с Герцем считали, что катодные лучи – это новый вид электромагнитных волн, отклоняющихся в магнитном поле, в отличие от обычного света. К тому же, уже было известно, что электромагнитные волны могут проходить через тонкую фольгу из золота. Отрицательный результат Герц получил также при попытке наблюдения отклонения катодных лучей в электрическом поле плоского конденсатора. Это обстоятельство представляло серьезную трудность для тех, кто поддерживал концепцию заряженных частиц.

Не заметив отклонения катодных лучей в электрическом поле, Герц, учитывая величину их отклонения в магнитном поле, сделал вывод о том, что если катодные лучи и состоят из заряженных частиц, то эти последние движутся с невероятно высокой скоростью, порядка 10^8 м/с. Считая столь большую скорость нереальной для материальных тел, Герц усмотрел в своем результате лишний аргумент против корпускулярной гипотезы в пользу волновой.

В этой обстановке груды противоречивой информации о природе катодных лучей и начал свои эксперименты Дж. Дж. Томсон. Ему потребовалось всего около трех лет для обоснования поразительного вывода о существовании электрона. Первый эксперимент был поставлен в 1894 году. Томсон сомневался в правильности волновой модели и пытался доказать, что катодные лучи, хотя и обладают способностью вызывать фосфоресцентное свечение, сами по себе не являются формой ультрафиолетового излучения. Поэтому он поставил своей целью определить скорость катодных лучей, измеряя время между моментами вспышки свечения в двух различных точках вдоль оси трубки с помощью вращательного зеркала. Скорость лучей оказалась приблизительно в 1500 раз меньше скорости света. Это говорило в пользу корпускулярной гипотезы. Позже, правда, выяснилось, что значение скорости в этом опыте занижено, эту ошибку обнаружил через два года сам автор, но важно, что эксперимент проложил дорогу для новых опытов. Мы остановимся на некоторых из них.

Наиболее важным как с принципиальной, так и с психологической точек зрения, является доказательство того, что электрическое поле все-таки отклоняет катодные лучи. Поместив две параллельные пластинки в темное пространство разрядной трубки, поочередно заземляя пластинки, Томсон наблюдал отклонение лучей. Этот эксперимент ввиду его важности был продемонстрирован в Королевском институте и фактически явился первым опытом электронной осциллографии. Почему же опыты Герца оказались неудачными? Причина коренилась в том, что Герц работал в условиях недостаточно высокого вакуума. Это приводило к тому, что возникала экранировка внешнего электрического поля пространственным зарядом ионов.

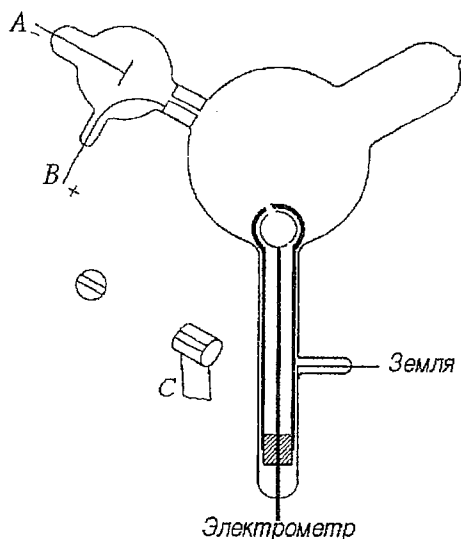


Рис. 2

Дж. Дж. Томсон видоизменил схему опытов Перрена и поместил цилиндр Фарадея не перед катодом, а сбоку (рис. 2). Когда магнитным полем искривляли катодные лучи так, чтобы они попадали в отверстие цилиндра, последний заряжался отрицательно и одновременно смещалось флуоресцирующее пятно на стекле; заряд оказывался неотделим от лучей. Кроме того, Томсон измерил величину магнитного отклонения и показал, что она не зависит от природы остаточного газа в трубке и от металла, из которого сделан катод, если между электродами поддерживать постоянное напряжение. Эти результаты можно было бы объяснить, если считать частицы катодных лучей одними и теми же во всех случаях, и такая универсальность катодных лучей сильно поражала Томсона.

Как уже отмечалось, в последнем десятилетии XIX века многие физики экспериментировали с катодными лучами. Среди них был и Вильгельм Конрад Рентген, директор Института физики и ректор университета в Вюрцбурге. Любопытно, что, приступая к экспериментальному изучению катодных лучей, Рентген придерживался взглядов Ленарда, который как и все немецкие физики этого времени защищал волновую природу лучей. Чрезвычайно внимательный экспериментатор Рентген (он уже был известен своими исследованиями в области сжимаемости жидкости, удельной теплоемкости газов, магнитного действия диэлектриков и т.д.) буквально с первых опытов (1895) заметил, что фотопластинки, помещенные вблизи разрядной трубки, часто оказывались засвеченными. Он также наблюдал, что картон, покрытый флуоресцирующим минералом, начинал светиться в темной комнате, если поблизости работает разрядная трубка (сама трубка в это время была накрыта, и поэтому комната была совершенно темной). Серия блестящих целенаправленных экспериментов позволила в течение всего шести недель выявить почти все основные свойства открытых рентгеновских лучей³. О действии катодных лучей здесь не могло быть и речи. Как отметил сам Рентген в 11-ом пункте опубликованной в 1896 году статье «О новом виде лучей, предварительное сообщение», «наиболее важное различие в поведении катодных и X-лучей состоит в том, что последние не отклонялись даже в весьма сильном магнитном поле, как показали многочисленные опыты».

Анализируя пути развития науки, не перестаешь удивляться зачастую странному характеру хода событий, которые типичны для многих великих открытий. Действительно, более чем за год до открытия Рентгена Дж. Дж. Томсон

³ 10 декабря 1901 года в большом зале Музыкальной академии в Стокгольме комитет по присуждению Нобелевских премий присудил Рентгену первую Нобелевскую премию по физике.

в одной из статей писал: «Я имел возможность наблюдать фосфоресценцию обычного немецкого стекла, помещенного на расстоянии нескольких футов от разрядной трубки, хотя прежде, чем попасть на фосфоресцирующее тело, свет должен бы пройти через три стеклянные стенки воздушной трубки и достаточно толстый слой воздуха». Томсон не обратил внимания на этот как будто побочный эффект. Можно только добавить, что и Ленард примерно в это же время наблюдал подобные явления, но объяснил их свойствами катодных лучей и, как было написано в некрологе в связи с его кончиной в 1947 году, «... был глубоко удручен тем, что не он открыл рентгеновские лучи, которые были у него почти под руками... Он никогда не называл имени Рентгена, упоминая об этих лучах».

В течение нескольких месяцев после публикации работы Рентгена был поставлен целый ряд экспериментов по изучению свойств новых лучей. Дж. Дж. Томсон вместе со своим молодым учеником Эрнестом Резерфордом провели разнообразные исследования ионизирующей способности этих лучей. Были испытаны разные газы при разных давлениях. Они измерили скорости рекомбинации положительных и отрицательных ионов в различных газах в зависимости от давления, коэффициенты диффузии ионов, подвижность ионов в электрических полях. Результаты опытов показывали, что элементарный заряд ионов, образованных в газовом разряде, оказался примерно тем же, какой можно было ожидать для фарадеевых ионов в процессе электролиза. Стратегия исследований принимала конкретное направление: была поставлена задача определения массы и заряда переносчиков электричества в облученных газах. Уже убедившись в том, что катодные лучи – это частицы, Томсон различными методами измерил у них отношение электрического заряда к массе.

В последний день апреля 1897 года Джозеф Джон Томсон доложил о своих исследованиях в помещении Королевского института, где в прежние годы работал Фарадей. Он изложил данные о результатах измерения удельного заряда катодных лучей при четырех разных наполнениях трубки – воздухом, водородом, углекислым газом и йодистым метилом. В этих экспериментах использовалось магнитное отклонение луча, а необходимое для расчета e/m значение скорости луча он определил оригинальным калориметрическим методом. Пучок попадал на маленький коллектор, передавал ему свой заряд и нагревал. Полный заряд, переданный коллектору за определенное время, измерялся чувствительным электрометром, а тепловая энергия, сообщаемая коллектору за это же время, определялась по его массе, удельной теплоемкости и приросту температуры, определяемой с помощью легкой термопары, соединенной с коллектором. Этот метод измерения предполагал выполнение некоторых условий, необходимых для справедливости применения расчетных формул, и был связан с большими экспериментальными трудностями по измерению малых разностей температур (всего несколько градусов) и накопленного заряда. Томсон представил свои окончательные результаты измерений e/m вне зависимости от рода газа и материала катода в виде численного значения $1.17 \cdot 10^{11}$ Кл/кг (сейчас в таблицах приводится значение $1.7588047 \cdot 10^{11}$ Кл/кг). Эти результаты были опубликованы в журнале «Nature» (март) и «Electrician» (май) в 1897 году.

В августе 1897 года Томсон сообщил результаты еще одного оригинального метода измерения этой величины, широко известного, в том числе, и по учебной литературе – это одновременное воздействие на катодные лучи взаимно перпендикулярными магнитными и электрическими полями (рис. 3). Скорость частиц определялась, как известно из простых расчетов, отношением напряженностей этих полей. Для удельного заряда частицы⁴ получилась величина того же порядка, как прежде, она примерно в 1000 раз (по оценке Томсона) превосходила соответствующее значение для иона водорода, определенное из данных по электролизу. Томсон пишет в своей статье (1897): «Эта разница может быть связана с малой массой частиц катодных лучей или с большой величиной

⁴ Томсон использовал слово «корпускула» в качестве названия этих элементарных частиц и продолжал пользоваться им еще в течение нескольких лет, не употребляя слово «электрон».

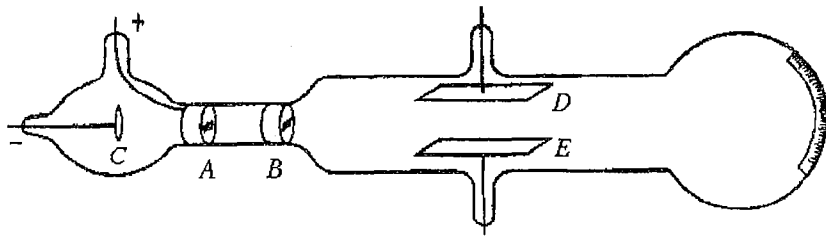


Рис. 3

заряда, либо тем и другим одновременно». Хотя Томсон уже в своей первой работе 1897 года не колеблясь утверждал, что именно масса корпускулы катодных лучей меньше массы иона водорода, все же необходимы были прямые измерения массы или заряда.

Одно счастливое обстоятельство позволило Томсону доказать справедливость своих утверждений путем непосредственного измерения заряда e — речь идет о применении для этой цели открытия Чарльза Вильсона (1897) конденсации пересыщенного пара около заряженных ионов (центров конденсации). Ион притягивает к себе молекулы пара, начинается образование капельки, которая становится видимой («камера Вильсона»). Томсон сконструировал камеру, в которой образовывались ионы благодаря рентгеновскому излучению (рис. 4). По скорости падения сконденсировавшейся заряженной капли по формуле Стокса определялись их радиусы и массы, заряд ионов находился из независимых измерений с помощью электрометра, необходимо было также находить число капель и термодинамические параметры насыщенного пара. Опыт был очень трудоемок и требовал большого технического искусства. Как среднее из большого количества измерений Томсон получил из первых результатов значение $e \approx 2.2 \cdot 10^{-19}$ Кл, что неплохо совпадало с уже известным тогда значением заряда иона водорода. В дальнейшем эта методика совершенствовалась и было доказано, что заряд электрона не зависит от способа ионизации и рода газа и всегда оказывается равным заряду одновалентного иона при электролизе. Наиболее важные результаты своей работы Томсон резюмировал в большой статье «Cathode rays», опубликованной в октябрьском номере журнала «Philosophical magazine» за 1897 год (v. 44, pp. 293–316). Примерно в то же время подобными исследованиями независимо занимался Джон Таунсенд — студент, работавший в лаборатории Томсона.

Вообще, 1897 год принес множество однотипных результатов, полученных разными методами и в разных условиях опыта. Среди них необходимо отметить исследования немецкого геофизика Эмиля Вихерта, результаты которых им были представлены в январе 1897 года на собрании в Кенигсбергском обществе науки и экономики⁵. Он был сторонником корпускулярной гипотезы катодных лучей (исключение из той общей картины о природе лучей немецкой школы, о которой говорилось выше) и пытался определить отношение e/m , комбинируя магнитное отклонение лучей с прямым измерением их скорости при помощи вибратора Герца

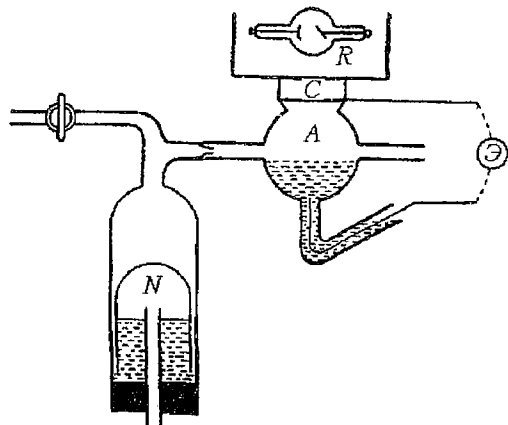


Рис. 4

⁵ В литературе, посвященной обсуждаемым нами явлениям, методу Э. Вихерта уделено чрезвычайно мало внимания.

определенной частоты. Вихерт произвел измерение удельного заряда катодных частиц только с одной газоразрядной трубкой и только одним методом и получил значение, примерно в 2000 раз превышающее величину заряда электролитического иона водорода. Большим достоинством работы было то, что в ней решительно говорилось о катодных лучах как об «электрических атомах» и подчеркивалась их универсальность.

В своем знаменитом докладе в Королевском институте, где, как уже было сказано, Томсон выступил с идеей субатомной частицы, одним из «китов», на которых строились выводы Томсона, была и статья молодого голландского физика Питера Зеемана. Он повторил предсмертный эксперимент Фарадея по влиянию магнитного поля на спектральные линии паров натрия в пламени газовой горелки. Фарадей никакого эффекта не обнаружил. Зееман, работавший с более сильным магнитным полем и лучшей аппаратурой, обнаружил уширение спектральных линий на 0.15 \AA , что составляло около $1/40$ расстояния между двумя соседними линиями. Этому незначительному эффекту было суждено сыграть роль «золотого ключика», с помощью которого была раскрыта запутанная картина сложных спектров атомных структур. Зееман обратился с письмом за консультацией к известному теоретику Г. Лоренцу, теория которого объясняла электромагнитные явления в терминах движения «маленьких электрически заряженных частиц» определенной массы (электронов). Лоренц подтвердил справедливость высказанных соображений Зеемана и обратил его внимание на то, что величина уширения линий может быть использована для определения отношения заряда к массе частиц, колебания которых, согласно этой теории, вызывают свет. Данные опыта Зеемана при расчете e/m дали значение, совпадающее с результатом Томсона для катодных лучей. Томсон особо подчеркивал согласованность этих результатов.

Таким образом, реальность существования электрона и приблизительные значения его заряда и его удельного заряда были установлены в 1897 году. Сомнений в реальном существовании электрона фактически не оставалось. В то же время в этом году известный лорд Кельвин пишет в одной из статей об электричестве как о некоей «непрерывной жидкости». Макс Планк писал в 1925 году: «Я не верил тогда (в 1900 году) до конца в гипотезу об электроне». Классическая электродинамика получила как будто свое физическое завершение. На самом деле открытие электрона явилось началом новой эпохи в физике – электрон не укладывался в рамки классической физики. Понятие электрона развивалось и сильно изменялось в процессе исследований. По выражению Джорджа Томсона – младшего «различные экспериментальные и психологические обстоятельства помогали или мешали многочисленным исследованиям в поисках истины», это были этапы «длительной и запутанной истории».

Мы очень кратко остановились на работах Дж. Дж. Томсона, связанных с открытием электрона. За ними следует большой цикл работ неутомимого оптимиста Джи–Джи и уже его многочисленных к тому времени учеников, в которых была выдвинута атомная модель, обнаружены электроны в фототоке и термоэлектронной эмиссии, объяснено происхождение сплошного спектра рентгеновских лучей, получены первые экспериментальные данные о существовании изотопов, в классической теории выведена формула Томсона для эффективного сечения в случае рассеяния света свободными электронами. На примере истории открытия электрона очень ясно просматривается один из движущих факторов в научных исследованиях – это атмосфера творчества в исследовательской лаборатории. Многие научные открытия были сделаны, по существу, одиночками, к тому же на скудном экспериментальном оборудовании. Кавендишская лаборатория под руководством Дж. Дж. Томсона и Резерфорда явилась прототипом лабораторий нового современного типа и была примером блестящего содружества. Благодаря деятельности Томсона здесь фактически была создана интернациональная школа физиков–экспериментаторов: Ф. Астон, Ч. Вильсон, Э. Резерфорд, О. Ричардсон, Дж. П. Томсон, П. Ланжевен, Дж. Таунсенд,

Дж. Тейлор и многие другие. В лучшие свои дни Джи–Джи был «признанным вожакom группы свободных исследователей», первым человеком, по крайней мере в Англии, создавшим научную школу нового образца.

Пирамида физической науки надежно покоится на широком фундаменте из огромной совокупности обнаруженных фактов и понятий, которые могут изменяться во времени. И современному физикy понятны слова Томсона: «Великое открытие – это не конечная станция, а скорее дорога, ведущая в области, до сих пор неизвестные. Мы взбираемся на вершину пика, и нам открывается другая вершина, еще более высокая... Вклад, сделанный в понимание физики одним поколением, не становится меньшим или менее глубоким или менее революционным по мере того, как одно поколение сменяет другое. Сумма нашего знания не похожа на то, что математики называют сходящимися рядами... Физика соответствует скорее ... рядам расходящимся, где добавляемые члены не становятся все меньше и меньше и где нельзя считать, что выводы, к которым мы пришли при изучении нескольких известных членов, совпадут с теми, которые мы сделаем, когда наши знания будут больше». Столетний юбилей «загадочного» электрона, обладающего как корпускулярными, так и волновыми свойствами, – подтверждение этому.

В 1906 году Томсону присуждается Нобелевская премия «За теоретические и экспериментальные исследования прохождения электричества через газы». В этом же году его сыну Джорджу Паджету исполнилось 14 лет.

Дружба между отцом и сыном началась очень рано. Есть версия, что первая модель атома, предложенная Томсоном, была названа «кексом с изюмом» по желанию пятилетнего сына, который уже допускался в научную лабораторию при условии не задавать многочисленных вопросов. Потом Джи–Джи стал его брать с собой на площадку гольфа, где сын наблюдал игру отца с не менее «искусным» игроком атлетического сложения Резерфордом. Этот партнер отца опровергнет его атомную модель, а стоящий на поле рядом мальчик ровно через 30 лет после открытия отцом электрона докажет его волновую природу (1927), а еще через 10 лет будет удостоен за эти исследования Нобелевской премии. Томсон–старший необычайно гордился успехами сына, старался понять и принять эти новые результаты. Наибольшее удовлетворение в жизни ему несомненно принес день вручения Нобелевской премии сыну – это действительно один из редких случаев, когда отец и сын независимо друг от друга получили столь высокое признание.

Джи–Джи был интересным человеком – «спектр» его увлечений (помимо физики – она была вне конкуренции) заметно превышал «зеэмановское расширение». Он проявлял большой интерес к людям, но управлять людьми ему не доставляло удовольствия. В течение жизни он встречался с большим числом лиц, знал великих ученых–современников, дружил с художниками, проявлял большой интерес к спорту, знал многое о кембриджском спорте за полстолетия. Страстно любил садоводство, но в саду мало что делал сам. Да и в проведении экспериментов своими собственными руками он делал довольно мало. Он продумывал стратегию эксперимента, конструировал в уме аппаратуру, а практическое ее воплощение предоставлял своим искусным ассистентам и механикам, тем не менее умел обнаружить дефекты аппаратуры «со сверхъестественной точностью», да и показания с приборов снимал только сам. Играл в футбол и крокет, любил живопись, но был далек от музыки. Очень любил бывать в обществе, но не танцевал, а женщин, за редким исключением, считал довольно скучными. Был мастером устного рассказа. Джи–Джи любил традиционные лабораторные чаепития, когда ученики и коллеги собирались в его кабинете и обсуждали все, что угодно, кроме... физики.

Томсон обладал огромной способностью сосредотачиваться – во время работы уходил в свои мысли и с ним бесполезно было пытаться заговорить. Он ценил людей за самобытность и энтузиазм, но имел плохую привычку не отвечать на письма, и как бы восполняя это, писал превосходным почерком – это было искусством его рук.

Джи–Джи был чрезвычайно скромнен. Для многих друзей и коллег сделал немало добра. Принимал большое участие в судьбе жены и дочерей великого Генриха Герца⁶, которые должны были покинуть Германию.

Во время первой мировой войны Томсон играл большую роль, будучи советником правительства по техническим вопросам. В 1918 году он вышел в отставку в Кавендише и стал главой Тринити–колледжа, того самого колледжа, где за два с половиной века до этого учился великий Ньютон и на протяжении многих лет читал в Кембриджском университете лекции по математике и оптике.

Перечень почестей и отличий Томсона весьма внушителен: лауреат Нобелевской премии, член Лондонского королевского общества, позднее его президент (1916), медали Франклина (1923) и Фарадея (1938), член многих академий наук, в частности АН СССР (1925).

В Тринити–колледже прошли пожилые годы Томсона, наполненные миром и продолжением исследовательской деятельности, он любил свой колледж и это были счастливые годы его длинной жизни. Сэр Дж. Дж. Томсон умер в возрасте 83 лет и был похоронен 4 сентября 1940 года в Вестминстерском аббатстве.

Литература

1. Милликен Р. Электроны, протоны, фотоны, нейтроны и космические лучи. М.–Л., 1939.
2. Андерсон Д. Открытие электрона. М.: Атомиздат, 1968.
3. Thomson G.P. The Septuagenarian Electron // Phys.Today. 1967. Vol. 20, № 5. P.55. Русск. пер. И.В. Андреева. УФН. 1968. Т. 94, вып. 2.
4. Томсон Д. Дух науки. М.: Знание, 1970.
5. Льюис М. История физики. М.: Мир, 1970.
6. Борн М. Размышления и воспоминания физика. М.: Наука, 1977.
7. Дорфман Я.Г. Всемирная история физики. М.: Наука, 1979.
8. Вьяльцев А.Н. Открытие элементарных частиц. М.: Наука, 1981.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 19.11.97



Дмитриев Борис Савельевич – родился в 1937 году в Саратове. Окончил физический факультет СГУ в 1959 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в СГУ (1967) в области радиофизики и электроники СВЧ. В настоящее время – профессор кафедры общей физики СГУ. Область научных интересов – экспериментальные исследования разнообразных физических моделей взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ полями. Опубликовал более 100 работ, среди них одна монография, 15 изобретений.



Левин Юрий Иванович – родился в 1942 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1965). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в области радиофизики (1974). Декан Колледжа прикладных наук (на правах факультета) СГУ, директор Государственного учебно–научного центра «Колледж», доцент кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Имеет более 80 научных публикаций.

⁶ Последние годы жизни Герца были омрачены тяжелой болезнью, он умер 1 января 1894 года в расцвете таланта, когда ему было всего 36 лет.



Изв. вузов «ПНД», т. 5, № 5, 1997

Научная конференция

МОЛОДЕЖЬ И НАУКА НА ПОРОГЕ XXI ВЕКА

МиН-XXI

Саратов, Россия март 1998

К участию в работе конференции приглашаются школьники, учащиеся гимназий, колледжей, студенты, аспиранты и научные работники в возрасте до 30 лет. Принимаются к рассмотрению оригинальные научные и научно-технические работы в области естественных и гуманитарных наук. Задача конференции состоит в выявлении наиболее талантливых молодых людей по каждой категории участников с целью оказания им в будущем всесторонней поддержки, включая премирование и назначение научных стипендий. Для отбора представленных докладов в качестве экспертов будут привлечены ведущие специалисты университета и других вузов Саратова.

Организаторы

Саратовский государственный университет
Министерство по делам молодежи, спорту и туризму Саратовской области
Региональный общественный фонд поддержки одаренных студентов
и творческой молодежи им. Н.И. Вавилова
Кафедра радиофизики и нелинейной динамики СГУ

Оргкомитет

В.С. Анищенко, профессор СГУ, председатель; Г.А. Белов, председатель Совета учредителей фонда им. Н.И. Вавилова; П.В. Журавлев, зам. председателя комитета по делам молодежи Министерства по делам молодежи, спорту и туризму Саратовской области; А.А. Кредер, профессор СГУ; С.П. Муштакова, проректор СГУ, профессор; В.В. Прозоров, декан филологического факультета СГУ, профессор; Д.В. Прохоров, профессор СГУ; Д.И. Трубецков, чл.-корр. РАН, ректор СГУ

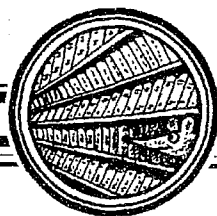
Желающие принять участие в работе конференции должны представить развернутые тезисы доклада (до 2-х стр. машинописного текста через 1.5 интервала) в 3-х экз. Необходимо указать свой полный адрес и данные о научном руководителе.

- Представление тезисов докладов до 30.12.97
- Публикация расписания и программы конференции до 15.02.98
- Публикация трудов конференции 05.98

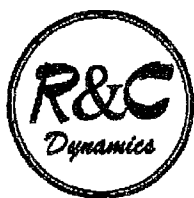
Материалы направлять по адресу:

410026 Саратов, ул. Астраханская, СГУ
Кафедра радиофизики и нелинейной динамики
Оргкомитет конференции «МиН — XXI»

Секретарь конференции Стрелкова Галина Ивановна, СГУ, III кор., ком. 35
Тел. (8452)514549; e-mail: galya@chaos.ssu.runnet.ru



Изв.вузов «ПНД», т.5, № 5, 1997



РЕГУЛЯРНАЯ & ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Международный научный журнал

Интегрируемость, хаос, нелинейность, катастрофы, самоорганизация в динамических системах уже становятся привычными понятиями даже в студенческой аудитории. Это обусловлено стремительным развитием в последние десятилетия нелинейной теории динамических систем, что свидетельствует о превращении ее в достаточно общую теорию развития, имеющую широкие мировоззренческие последствия.

Результаты многих оригинальных исследований по данному направлению разбросаны по различным отечественным журналам, тематика которых разнородна. В то же время за рубежом имеется ряд англоязычных журналов – «Chaos», «Nonlinearity» и др., где систематизируются и широко освещаются результаты исследований в этой прогрессивной области знаний. Однако эти издания малодоступны в России. Поэтому главной задачей нашего журнала является консолидация научных сил и представление русскоязычному читателю результатов исследований российских ученых и ученых ближнего и дальнего зарубежья.

Журнал публикует статьи по анализу регулярного и стохастического поведения динамических систем, имеющих место в классической механике, физике и в других областях науки.

Тематику журнала составляют следующие направления научных исследований:

- интегрируемость и неинтегрируемость динамических систем;
- детерминированный хаос;
- симметрии, алгебры Ли и гамильтонов формализм;
- фрактальная динамика;
- теория самоорганизации и синергетика.

Журнал является математическим и предполагает строгое доказательство сформулированных результатов. Он предназначен для ученых, аспирантов и студентов, а также для всех, кто интересуется этой перспективной областью естествознания, приобретающей широкую популярность.

Учредители журнала

Российская академия естественных наук
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Удмуртский государственный университет

Главный редактор журнала В.В. Козлов, чл.–корр. РАН, профессор МГУ

Ответственный редактор А.В.Борисов

Редактор в Европе Ф. Мациевский

Торунский Центр Астрономии, Университет им. Николая Коперника
87–100 Gagarina 11, fax: (48–56) 654–46–92
e–mail: maciejka@astri.uni.torun.pl

Состав редколлегии

Марк Адлер, США
Хассан Ареф, США
Владимир В.Белецкий, Россия
Сергей В.Болотин, Россия
Дж. Бенеттин, Италия
Тассос Бунтис, Греция
Анатолий Т.Фоменко, Россия
Любомир Гаврилов, Франция
Валерий И.Гуляев, Россия
Филипп Холмс, США
Анджей Мациевский, Польша
Джерольд Е.Марсден, США

Владимир Ф.Лазуткин, Россия
Анатолий И.Нейшгадт, Россия
Леонид П.Шильников, Россия
Карлос Симо, Испания
Марек Шидловский, Польша
Майкл Тейбор, США
Дмитрий В.Трещев, Россия
Александр П.Веселов, Россия
Стивен Виггинс, США
Харуо Йошида, Япония
Виталий А.Журавлев, Россия

К сведению авторов и читателей

В 1998 году, начиная с первого номера, журнал выходит и на английском языке. Вся информацию о правилах оформления рукописей статей для публикации в журнале, а так же информацию о подписке можно получить у **ответственного редактора** Алексея Владимировича Борисова:

119899, Россия, Москва, Московский государственный
университет им. М.В.Ломоносова, главное здание, ком. 922
телефон: 939–10–57, факс: 939–00–75
e–mail: urss@domar.pvt.msu.su, borisov@uni.udm.ru

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал–макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно–научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты – р/с № 000609446 в АКБ «Экономбанк»
г. Саратова, БИК 046311722, корсчет банка 700161122

Подписка на I–ое полугодие 1998 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498
и по заявочным письмам непосредственно в редакции

Сдано в набор 16.10.97. Подписано к печати 17.12.97. Формат 70x108/16
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 10,5 (7,5). Уч.–изд. л. 9,3. Тираж 200 экз. Заказ 60

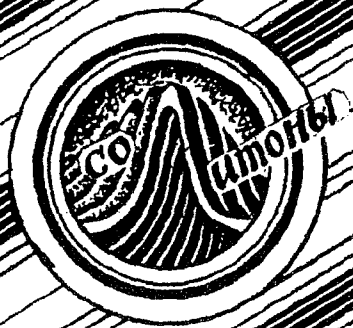
Издательство ГосУНЦ «Колледж»
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845–2)514298, факс (845–2) 514298
E–mail:and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

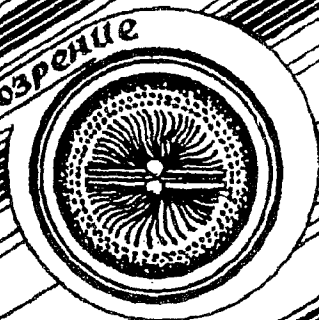
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1997



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

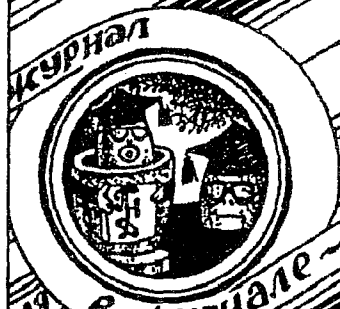
Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

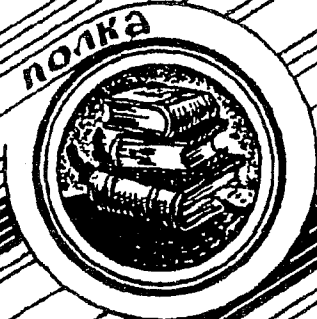
V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики



**СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ПАРАДИГМА ПОЗВОЛЯЕТ
ВЫСВЕТИТЬ ГЛУБИННЫЕ И ПОТАЕННЫЕ ПЛАСТЫ
ДАЖЕ В, КАЗАЛОСЬ БЫ, СОВЕРШЕННО ПРОСТЫХ
СИСТЕМАХ ЖИВОЙ И НЕЖИВОЙ ПРИРОДЫ**