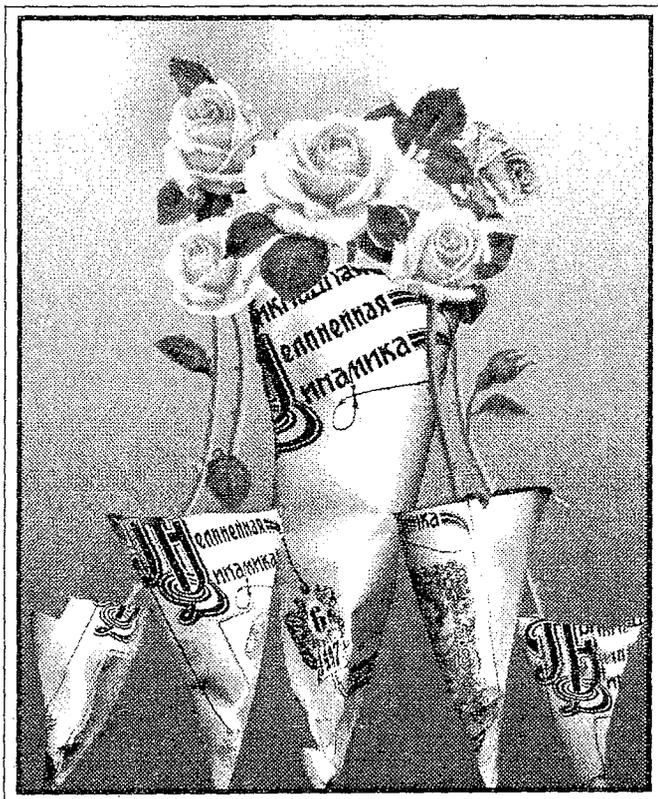


# Трикладная Деловая Динамика



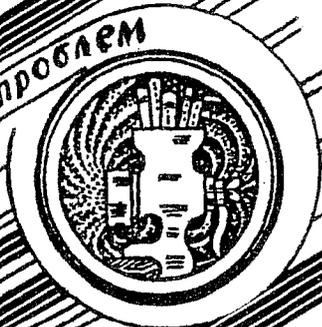
6  
1997

Журналу ПНД - 5 лет!

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



**Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы**



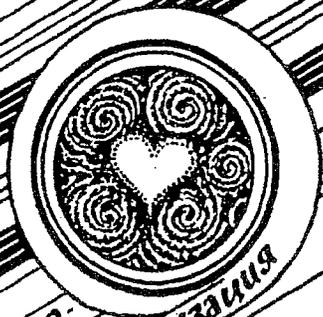
**Обзоры актуальных проблем  
нелинейной  
динамики**



**Конференции, семинары, симпозиумы,  
детерминированный хаос**



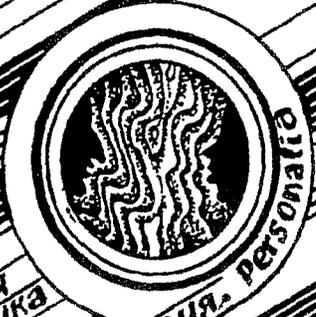
**аос**



**Авто-  
волны,  
самоорганизация**



**Прикладные задачи  
нелинейной  
теории  
колебаний  
и волн**



**Нелинейная  
динамика  
в  
лицах.  
История. Personato**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуллев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*В.И. Кринский*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пуцино

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет

*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

*В.К. Юлпатов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

**СОДЕРЖАНИЕ**

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

- Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Селезнев Е.П., Фойдель У.*  
О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора . . . . . 3

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

- Никитин А.П., Постнов Д.Э.* Индуцированный шумом перенос броуновских частиц в системе с «пульсирующим» периодическим потенциалом . . . 21
- Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Самофокусировка ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках: численный эксперимент . . . . . 29
- Морозов Д.А., Степанов В.А., Чиркин М.В.* Образование фронта ионизации в газоразрядной плазме . . . . . 41
- Матросов В.В.* Некоторые особенности динамического поведения каскадного соединения двух фазовых систем . . . . . 52

**НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ**

- Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Неавтономные колебания электронного потока с виртуальным катодом в плоском диодном промежутке . . . . 61
- Кузнецов А.П., Широков А.П.* Дискретная модель релятивистской лампы обратной волны . . . . . 76

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

- Трубецков Д.И.* Колмогоров, Петровский, Пискунов, Фишер и нелинейное уравнение диффузии . . . . . 85

**ДЕБЮТЫ**

- Красков А.В., Ракитин С.А.* Влияние параметров метода ложных соседей на оценку минимальной размерности вложения . . . . . 95

**ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ**

- Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. Содержания за 1993–1997 гг. . . . . 104

**КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ**

- V International school «Chaotic oscillations and pattern formation». 5–10 October, 1998, Saratov, Russia . . . . . 120

- АНОНС. . . . . 39, 103

CONTENTS

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S., Seleznev Ye.P., Feudel U.* On dynamics of nonlinear systems under external quasi-periodic force near the terminal point of the torus-doubling bifurcation curve . . . . . 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Nikitin A.P., Postnov D.E.* Noise-induced transport of brownian particles in system with spatially periodic flashing potential . . . . . 21
- Dudko G.M., Filimonov Yu.A.* Self-focusing of backward volume magnetostatic wave beams in magnetic films: numerical experiment . . . . . 29
- Morozov D.A., Stepanov V.A., Chirkin M.V.* Formation of the ionization front inside the gas discharge plasma . . . . . 41
- Matrosov V.V.* Some particularities of dynamical behaviour of two cascade coupled phase locked loops . . . . . 52

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Anfinogentov V.G., Hramov A.E.* Nonautonomous oscillations of electron beam with virtual cathode in the planar diode region . . . . . 61
- Kuznetsov A.P., Shirokov A.P.* Discrete model of a backward-wave tube . . . . . 76

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

- Trubetskov D.I.* Kolmogorov, Petrovskii, Piskunov, Fisher and nonlinear diffusion equation . . . . . 85

DEBUTS

- Kraskov A.V., Rakitin S.A.* False nearest neighbors: influence of method parameters on minimum embedding dimension estimation . . . . . 95

FROM BOOKS AND JOURNALS

- Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics. Contents 1993-1997 . . . . . 104

CONFERENCES. MEETING. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS

- V International school «Chaotic oscillations and pattern formation». 5-10 October, 1998, Saratov, Russia . . . . . 120

- ANNOUNCEMENTS . . . . . 39,103



## О ДИНАМИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПОД ВНЕШНИМ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ОКОНЧАНИЯ ЛИНИИ БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ТОРА

*Б.П. Безручко, С.П. Кузнецов, А.С. Пиковский, Е.П. Селезнев, У. Фойдель*

Исследуется модель в виде логистического отображения под внешним квазипериодическим воздействием на частоте, заданной золотым сечением. Установлено, что концом линии бифуркации удвоения тора на плоскости управляющий параметр – амплитуда воздействия служит критической точкой, в которой соседствуют области тора, удвоенного тора, странного нехаотического аттрактора и хаоса. Аттрактором в критической точке является фрактальный объект – «критический тор». Развит ренормгрупповой анализ, на основе которого выявлены свойства скейлинга для критического тора и для карты динамических режимов на плоскости параметров около критической точки. Представлены результаты экспериментов с нелинейным колебательным контуром под внешним квазипериодическим воздействием и продемонстрировано качественное соответствие с теорией.

### Введение

Изучение перехода от регулярного поведения к хаосу через квазипериодические режимы – одна из центральных тем в нелинейной динамике. Начиная с основополагающих работ Ландау [1] и Рюэлля и Такенса [2], многие авторы обратились к теоретическому и экспериментальному исследованию различных аспектов таких переходов. Как оказалось, некоторые тонкие детали квазипериодической динамики трудно выявить и изучать в автономных системах, но их можно успешно анализировать, рассматривая системы с внешним квазипериодическим воздействием. Действительно, в автономных системах характерные частоты определяются внутренней динамикой, и управлять ими независимо от других параметров трудно, если вообще возможно. Напротив, в неавтономных системах частоты, представленные в спектре внешнего воздействия, можно рассматривать просто как управляющие параметры и задавать произвольно. В эксперименте их легко регулировать, обеспечивая любое желаемое соотношение частот.

Как выяснилось в последнее время, на пути от регулярной динамики к хаосу в системах с квазипериодическим внешним воздействием очень часто встречается своего рода промежуточный тип поведения, который отвечает странному нехаотическому аттрактору (SNA). Это обстоятельство делает всю картину перехода весьма нетривиальной.

Странные нехаотические аттракторы впервые были описаны в работе

Гребоджи с соавторами в 1984 году [3]. С тех пор они исследовались как численно [4–19], так и в эксперименте [20,21].

Для странных нехаотических аттракторов характерно совмещение определенных свойств регулярных режимов и хаоса. Также как регулярные аттракторы, они имеют только отрицательные ляпуновские показатели (помимо нулевых, ассоциирующихся с фазами квазипериодической внешней силы), однако их геометрическая структура фрактало-подобная, как у хаотических аттракторов. Спектрально-корреляционные свойства, характерные для режима странного нехаотического аттрактора, также оказываются промежуточными между порядком и хаосом – генерируемый спектр может быть сингулярно-непрерывным [14,22]. Математическое исследование странных нехаотических аттракторов находится все еще в начальной стадии [25,26].

В этой статье мы обратимся к модели в виде логистического отображения под внешним квазипериодическим воздействием [10,17,27–30]. Известно, что эта модель демонстрирует богатое динамическое поведение, в частности квазипериодические режимы, странный нехаотический аттрактор, хаос.

В нашем исследовании безразмерная частота внешней силы будет предполагаться фиксированной и заданной «золотым сечением» – иррациональным числом  $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$ .

На плоскости параметров, где по одной оси координат отложен управляющий параметр логистического отображения, а по другой – амплитуда внешнего воздействия, присутствует линия бифуркации удвоения тора. Если двигаться вдоль этой линии в сторону увеличения амплитуды воздействия, то она оканчивается в некоторой критической точке. На эту точку в дальнейшем будем ссылаться как на точку TDT (torus doubling terminal).

Можно утверждать, что критическое поведение, реализующееся в точке TDT, имеет фундаментальное значение для понимания динамики системы в целом. Действительно, в этой точке сходятся области всех характерных для системы качественно различных режимов – квазипериодического поведения, странного нехаотического аттрактора, хаоса. Поэтому в настоящей статье мы сосредоточимся на изучении динамики в точке TDT и в ее окрестности.

Для описания динамики в точке TDT мы развиваем подход, основанный на методе ренормгруппы (РГ). С его помощью удастся вскрыть свойства скейлинга аттрактора, который реализуется в критической точке, а также найти закономерности подобия, присущие карте динамических режимов на плоскости параметров вблизи этой точки.

Подобно другим ситуациям, в которых работает метод РГ, критическое поведение в точке TDT будет, по-видимому, характерно не только для модели в виде логистического отображения, но и для широкого класса нелинейных диссипативных систем при наличии внешнего квазипериодического воздействия. Чтобы проверить это предположение, был предпринят эксперимент с нелинейным колебательным контуром. Внешнее воздействие на контур задавалось в виде комбинации двух синусоидальных сигналов с соотношением частот, равным золотому сечению. При этом регулировка уровня одного или другого сигнала соответствовала изменению управляющего параметра или амплитуды воздействия в модельном отображении. Особенности наблюдаемой в эксперименте динамики хорошо согласуются с результатами теоретического анализа, установленными для логистического отображения.

## **1. Логистическое отображение и основные режимы его динамики под внешним квазипериодическим воздействием**

Рассмотрим логистическое отображение, в которое добавлен член, изменяющийся квазипериодически в зависимости от дискретного времени  $n$ ,

$$x_{i+1} = \lambda - x_i^2 + \epsilon \cos(2\pi\omega i + \phi), \quad \omega = (5^{1/2} - 1)/2, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – управляющий параметр, а  $\varepsilon$  – параметр, характеризующий амплитуду внешнего воздействия. Это уравнение можно также записать в виде двумерного отображения с однонаправленной связью (по принятой в математических работах терминологии – в виде «косой системы»), а именно:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \lambda - x_t^2 + \varepsilon \cos(2\pi y_t) \equiv f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} &= y_t + \omega \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В этой формулировке параметр  $\phi$  соответствует начальному значению  $y$ :  $2\pi y_0 = \phi$ . Рис. 1 иллюстрирует основные режимы, наблюдаемые в данной модели.

Предположим сначала, что значение управляющего параметра  $\lambda$  таково, что в отсутствие воздействия ( $\varepsilon=0$ ) отображение имеет устойчивую неподвижную точку. При слабом квазипериодическом воздействии эта неподвижная точка превращается в устойчивую гладкую замкнутую инвариантную кривую. Допуская

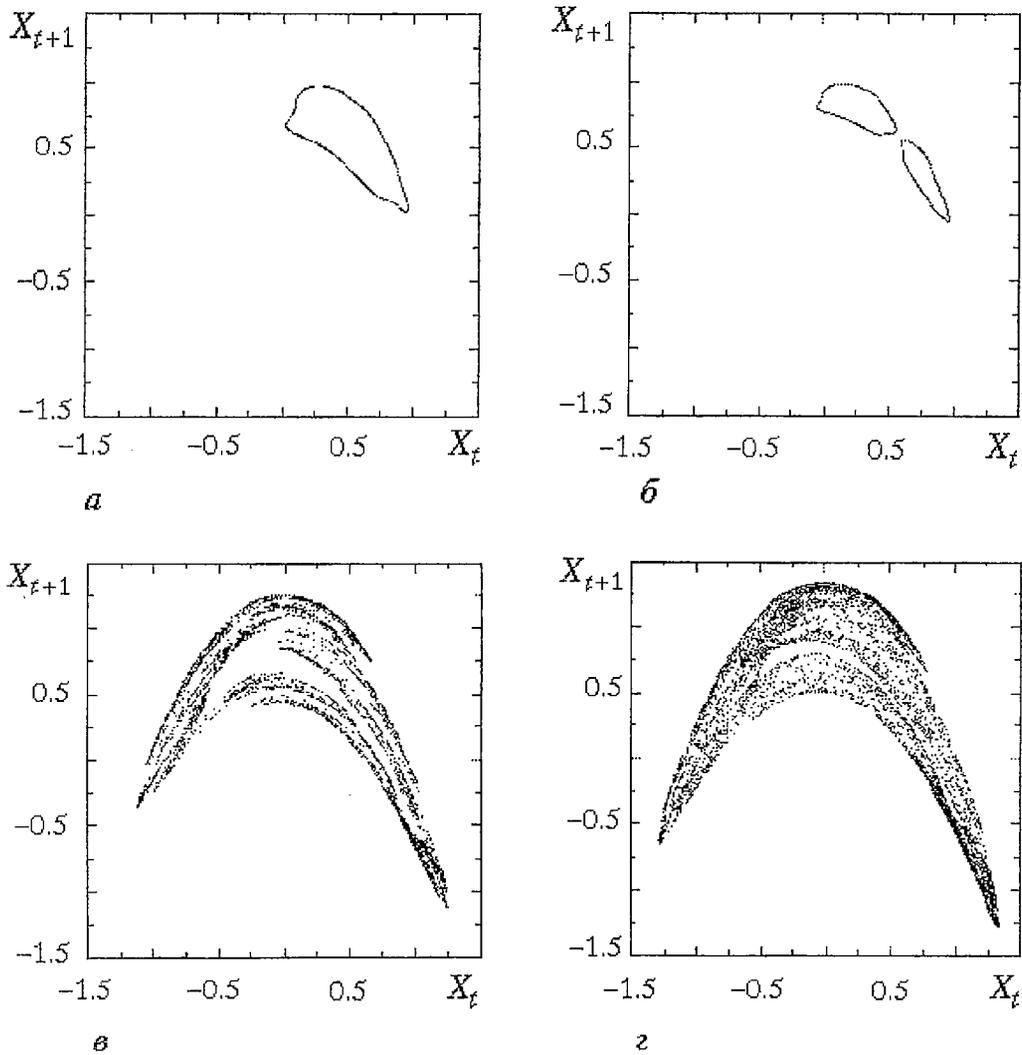


Рис. 1. Итерационные диаграммы аттракторов, отвечающих различным типам динамических режимов в логистическом отображении с внешним квазипериодическим воздействием: а – тор T1 при  $\varepsilon=0.3$ ,  $\lambda=0.9$ ; б – тор T2 при  $\varepsilon=0.15$ ,  $\lambda=0.9$ ; в – странный нехаотический аттрактор при  $\varepsilon=0.45$ ,  $\lambda=0.8$ ; г – хаос при  $\varepsilon=0.45$ ,  $\lambda=0.9$

ставшее почти общепринятым огрубление терминологии, мы будем говорить об этом аттракторе как о торе  $T1$  (см. рис. 1, а).

Если теперь слабому квазипериодическому воздействию подвергается устойчивый цикл периода 2, то аттрактор состоит из двух замкнутых гладких кривых, и мы говорим о нем как об удвоенном торе  $T2$  (см. рис. 1, б).

При увеличении амплитуды воздействия может случиться, что гладкий тор превратится в странный нехаотический аттрактор [3,11]. При этом ляпуновский показатель, ассоциирующийся с динамической переменной  $x$ , остается отрицательным, но геометрическая структура аттрактора становится сложной, фрактало-подобной (см. рис. 1, в). Могут возникать также и хаотические режимы, которые распознаются по присутствию положительного ляпуновского показателя (см. рис. 1, г). Наконец, при достаточно больших  $\lambda$  и  $\epsilon$  траектория, порождаемая отображением (1), может уйти на бесконечность.

На рис. 2 показана полученная с помощью компьютера карта динамических режимов на плоскости параметров  $(\lambda, \epsilon)$ . Области различных режимов обозначены тонами серого цвета. Для точек на плоскости параметров, отвечающих каждому пикселу, вычислялся ляпуновский показатель и анализировалась фазовая чувствительность динамики [11], после чего тип режима идентифицировался как

- $T$  – тор: отрицательный ляпуновский показатель в отсутствие фазовой чувствительности;
- $SNA$  – странный нехаотический аттрактор: отрицательный ляпуновский показатель, но высокая фазовая чувствительность;
- $C$  – хаос: положительный ляпуновский показатель.

На диаграмме можно видеть различные переходы от одного режима к другому:  $T1 \leftrightarrow T2$ ,  $T1 \leftrightarrow SNA$  и т.д. Некоторые из этих переходов неплохо исследованы [10,16,31], другие еще нуждаются в изучении. Для нас, однако, главным предметом интереса будет «тройная точка», где сходятся области торов  $T1$  и  $T2$ , странного нехаотического аттрактора и хаоса.

## 2. Бифуркационная линия удвоения тора и ее конечная точка

При нулевой амплитуде воздействия  $\epsilon=0$  уравнение (1) сводится к обычному логистическому отображению, которое демонстрирует при увеличении параметра  $\lambda$  последовательность бифуркаций удвоения периода. При включении воздействия бифуркации удвоения периода циклов превращаются в бифуркации удвоения торов. Чем меньше амплитуда воздействия  $\epsilon$ , тем большее число бифуркаций удвоения тора можно наблюдать при увеличении параметра  $\lambda$ , однако при любом фиксированном  $\epsilon$  это число конечно [27,28]. Удвоения торов наблюдались в численных расчетах [31] и в эксперименте [32]. Математическое рассмотрение содержится в работе [33].

На рис. 2 легко можно найти бифуркационную линию первого удвоения тора, которая начинается в точке  $(3/4, 0)$ . Стартуем из этой точки и будем увеличивать амплитуду воздействия, двигаясь вдоль бифуркационной линии. Пока амплитуда невелика, аттрактор, который образовался из неподвижной точки логистического отображения, целиком размещается в области  $x > 0$  (рис. 3). По мере увеличения амплитуды занятая аттрактором область растет, так что минимум  $x$ , достигаемый на аттракторе, приближается к нулю. Наконец, аттрактор касается линии  $x=0$ . Этот момент соответствует, как мы аргументируем ниже, окончанию линии удвоения тора на плоскости параметров, то есть критической точке TDT.

До тех пор пока аттрактор расположен в области  $x > 0$ , отображение можно рассматривать как обратимое. При этом применима математическая теория, развитая в работе [33]. После касания тором линии  $x=0$  в игру вступает необратимость логистического отображения, и это обстоятельство, как можно думать, должно изменить характер бифуркации.

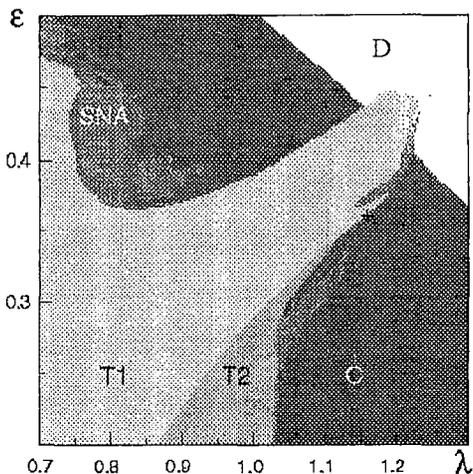


Рис. 2. Карта динамических режимов для логистического отображения с внешним квазипериодическим воздействием на плоскости управляющий параметр – амплитуда внешней силы. Области различных режимов обозначены тонами серого цвета. От белого к черному: расходимость D, тор T1, удвоенный тор T2, странный нехоатический аттрактор SNA, хаос C. Критическая точка TDT ( $\lambda \approx 1.16, \epsilon \approx 0.36$ ) отмечена крестиком

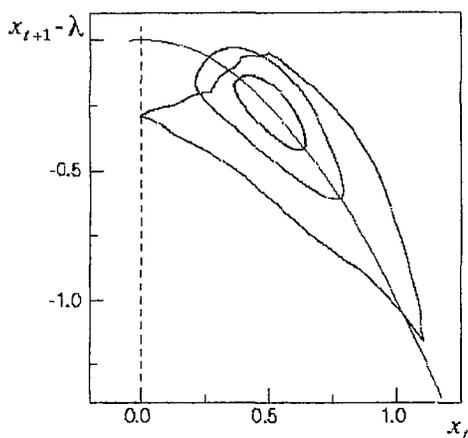


Рис. 3. Вид аттракторов на пороге бифуркации удвоения тора при различной амплитуде внешней силы: гладкие торы для  $\epsilon=0.1, \lambda=0.778791$  и  $\epsilon=0.2, \lambda=0.824501$ , и критический тор для  $\epsilon_c, \lambda_c$ . Для удобства визуального сравнения, начало отсчета по оси ординат сдвигается так, чтобы график логистического отображения оставался одним и тем же для всех значений параметров. Возникновение критического тора в точности соответствует моменту касания аттрактором линии  $x_t=0$

Более конструктивная аргументация основана на использовании последовательных рациональных аппроксимаций для иррациональной частоты квазипериодического воздействия  $\omega$ . В нашем случае, когда эта частота определяется золотым сечением, рациональные аппроксиманты (подходящие дроби) даются отношениями чисел Фибоначчи

$$\omega_k = F_{k-1}/F_k, \quad k=1,2,\dots, \quad (3)$$

$$F_0=0, \quad F_1=F_2=1, \quad F_{k+1}=F_k+F_{k-1}.$$

Задавая частоту воздействия рациональным числом  $\omega_k$ , мы получаем вместо тора T1 некоторый цикл периода  $F_k$ . Если увеличивать  $\lambda$ , то мы ожидаем увидеть бифуркацию удвоения периода этого цикла при некотором значении параметра, и это значение надо рассматривать как аппроксимацию для точки бифуркации удвоения тора. На самом деле, для рациональных частот  $\omega_k$  точка бифуркации будет зависеть от начальной фазы  $\phi$ . О бифуркации удвоения тора мы вправе говорить только в том случае, если эта зависимость исчезает в асимптотике  $k \rightarrow \infty$  (то есть если предел оказывается не зависящим от начальной фазы, ср. [34]). Такая ситуация заведомо реализуется при малых амплитудах воздействия  $\epsilon$ .

Сформулируем теперь в терминах рациональных аппроксимаций условие того, что имеет место бифуркация удвоения и касание аттрактором линии  $x=0$ . Зафиксируем  $\omega_k = F_{k-1}/F_k$  и потребуем, чтобы величины  $\lambda$  и  $\epsilon$  были подобраны так, чтобы удовлетворялись следующие условия.

1. Для некоторой начальной фазы  $\phi_c^k$  существует цикл периода  $F_k$ , стартующий из точки  $x=0$  (отсюда следует, что этот цикл сверхустойчивый, то есть имеет нулевой мультипликатор), и что производная  $dx/d\phi|_{0, \phi_c^k}$  равна нулю (это соответствует условию касания – малая вариация фазы в первом порядке не выводит точку цикла из  $x=0$ ).

2. Наибольший по абсолютной величине мультипликатор, который достигается при некоторой другой величине начальной фазы  $\phi_m^k$ , равен  $-1$ , то есть для этой фазы цикл периода  $F_k$  находится на пороге бифуркации удвоения (это условие того, что аппроксимируемый тор должен претерпевать удвоение).

Второе условие может выполняться только для аппроксимаций с нечетными знаменателями, рассмотрением которых мы далее и ограничимся.

Таблица

Значения параметров, при которых наступает касание аттрактором линии  $x=0$

$\omega_k$	$\lambda$	$\epsilon$	$\phi_c^k$
2/3	0.89313590	0.39045526	2.38814031
3/5	1.07633288	0.30511453	2.27092915
8/13	1.14077398	0.35637173	2.47438570
13/21	1.13453832	0.35326266	2.51704366
34/55	1.15587157	0.36021207	2.48341089
55/89	1.15364997	0.35864970	2.47129447
144/233	1.15790681	0.36022344	2.48295110
233/377	1.15720706	0.35995120	2.48531755
610/987	1.15807555	0.36024655	2.48328049
987/1597	1.15792494	0.36019031	2.48259605
2584/4181	1.15809462	0.36024806	2.48321966
4181/6765	1.15806354	0.36023723	2.48335560
10946/17711	1.15809658	0.36024835	2.48323605

В таблице для нескольких последовательных  $k$  приводятся полученные численно значения параметров, при которых выполнены сформулированные условия. Видно, что найденные точки показывают тенденцию к сходимости. Оценивая предел, получаем точку TDT для отображения (1)

$$\lambda_c=1.1580968 \quad \epsilon_c=0.3602485, \quad \phi_c=2.48323, \quad (4)$$

где  $\phi_c = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_c^k$ .

Задав рациональную частоту воздействия  $\omega_k$  и соответствующие значения параметров  $\lambda$  и  $\epsilon$  из таблицы, мы будем иметь одновременно сверхустойчивый цикл для начальной фазы  $\phi_c^k$  и цикл на пороге бифуркации удвоения периода для фазы  $\phi_m^k$ . Ясно, что посредством сколь угодно малого сдвига по параметрам  $\lambda$  и  $\epsilon$  из этой точки можно достичь такой ситуации, что цикл при одном значении фазы останется устойчивым, а при другом – потеряет устойчивость. Это значит, что система демонстрирует бифуркации в зависимости от фазы, как от параметра. Согласно результатам работы [11], это критерий того, что при переходе к пределу  $k \rightarrow \infty$ , когда воздействие станет квазипериодическим, в системе реализуется странный нехаотический аттрактор.

Из проведенного рассуждения следует, что режим, отвечающий странному нехаотическому аттрактору, можно отыскать в сколь угодно малой окрестности точки TDT. Расчеты показывают, что, кроме того, вблизи этой точки присутствуют также и хаотические режимы.

### 3. Ренормгрупповой анализ динамики в критической точке TDT

Для описания динамики в критической точке TDT и в ее окрестности обратимся к РГ анализу.

Поскольку частота квазипериодического воздействия определяется золотым сечением, целесообразно строить процедуру РГ преобразования, рассматривая операторы эволюции модельной системы за интервалы времени, даваемые последовательными числами Фибоначчи (ср. [13,35,36]). Основная идея состоит в том, чтобы представить отображение (2) за  $F_{k+2}$  шагов итераций через отображения, отвечающие  $F_{k+1}$  и  $F_k$  шагам

$$ff^{k+2}(x,y) = ff^k(ff^{k+1}(x,y), y + F_{k+1}\omega). \quad (5)$$

Благодаря известному соотношению для золотого сечения

$$y + F_k\omega = y - (-\omega)^k \pmod{1}, \quad (6)$$

мы немедленно замечаем, что масштабную константу для перенормировки переменной  $y$  следует выбрать равной  $(-\omega)$ . Масштабный фактор для переменной  $x$  обозначим через  $a$ , и он будет определен ниже. Подставляя в (5) перенормированную функцию

$$g_k(x,y) = a^k ff^k(a^{-k}x, (-\omega)^k y) \quad (7)$$

окончательно получаем преобразование РГ в виде

$$g_{k+2}(x,y) = a^2 g_k(a^{-1}g_{k+1}(x/a, -\omega y), \omega^2 y + \omega). \quad (8)$$

Чтобы выяснить природу решения уравнения (8), отвечающего критической точке TDT, был изучен характер поведения последовательности функциональных пар, порождаемых многократными итерациями РГ преобразования. Для этого функции  $g(x,y)$  аппроксимировались полиномами достаточно высокого порядка (содержащими четные и нечетные степени  $y$  и только четные степени  $x$ ), а РГ преобразование (8) было реализовано в виде компьютерной программы, которая позволяла найти набор коэффициентов разложения для функции  $g_{k+2}$ , исходя из известных коэффициентов для функций  $g_k$  и  $g_{k+1}$ .

В качестве начальных условий задавалась пара функций  $g_1$  и  $g_2$ , которые получаются из отображения (2) в критической точке TDT  $(\lambda_c, \varepsilon_c)$  при перенормировке масштабов по  $x$  и  $y$  на факторы  $a$  и  $(-\omega)$  для функции  $g_1$  и  $a^2$  и  $\omega^2$  для  $g_2$ .

Расчеты показывают, что при подходящем выборе константы перенормировки  $a$  последовательность функций, порождаемых многократным РГ преобразованием, выходит на цикл периода 3.

Далее, это решение периода 3 уточнялось и, в конечном итоге, было найдено с достаточно высокой точностью путем численного решения конечномерной системы алгебраических уравнений, в которую превращается уравнение РГ при использовании полиномиальной аппроксимации (см. приложение). Полученная в процессе решения величина константы перенормировки для переменной  $x$  оказалась равной  $a=1.5825935$ .

Вследствие того, что период цикла, порождаемого уравнением РГ, равен 3, закономерности подобия (скейлинга) в критической точке TDT будут наблюдаться при пересчете масштабов в такое число раз, которое соответствует трехкратному РГ преобразованию. А именно, факторы скейлинга таковы:

- для времени:  $\tau = \omega^{-3} = 4.23606\dots$ ,
- для переменной  $y$ :  $\beta = (-\omega)^{-3} = -4.23606\dots$ ,
- для переменной  $x$ :  $\alpha = a^3 = 3.96376\dots$

Рассмотрим теперь эволюцию под действием РГ преобразования малых возмущений найденного решения периода 3. Это позволит выявить свойства скейлинга, присущие окрестности точки TDT на плоскости параметров.

Линеаризация РГ преобразования (8) вблизи цикла периода 3 приводит к некоторой задаче на собственные векторы и собственные значения. Ясно, что при многократных итерациях РГ преобразования выживают только такие моды

возмущения, для которых собственные значения по абсолютной величине превышают единицу. Только они могут быть ответственными за изменение динамического поведения на больших временах при смещении по параметрам из критической точки.

Для численного решения задачи на собственные значения сначала была найдена конечномерная матрица производных от новых коэффициентов разложения функций  $g$  по старым коэффициентам, соответствующая трем шагам РГ преобразования. Далее, были вычислены собственные значения этой матрицы, из которых два наибольших оказались равными

$$\delta_1 = 10.5029\dots, \quad \delta_2 = 5.1881\dots \quad (9)$$

Эти факторы определяют свойства скейлинга плоскости параметров вблизи точки TDT, что будет продемонстрировано в следующем разделе.

Из других присутствующих в спектре собственных значений имеется два превышающих единицу по абсолютной величине, а именно,  $-3.963\dots = -\alpha$  и  $-4.236\dots = \beta$ . Они, однако, являются несущественными. Первое из них соответствует возмущению, выводящему решение из класса коммутативных функциональных пар. Эта мода возмущения заведомо имеет нулевую амплитуду, поскольку исходная пара функций, к которой мы применяли РГ преобразование, принадлежит к коммутативному классу. Другому собственному числу отвечает решение линеаризованного уравнения РГ, порождаемое инфинитезимальным сдвигом по  $y$ . Следовательно, оно устраняется заменой переменных, а именно, смещением начала координат.

#### 4. Скейлинг и фрактальная природа аттрактора в точке TDT

Пока мы двигаемся вдоль линии удвоения тора на плоскости параметров от малых амплитуд воздействия к точке TDT, аттрактор на всем пути представляется гладкой замкнутой инвариантной кривой (см. рис. 3). В критической точке она теряет гладкость и становится фрактальной кривой. Об аттракторе в этом случае мы говорим как о *критическом торе*. На рис. 4 этот критический тор изображен в координатах  $(x, y)$ .

Из РГ анализа следует, что критический тор должен демонстрировать свойство самоподобия в малых масштабах вблизи точки  $x=0, y=y_c = \phi_c/2\pi$  и воспроизводить свою форму при одновременном увеличении масштаба в  $\alpha$  раз по оси  $x$  и в  $\beta$  раз по оси  $y$ . На рис. 4, б, в представлены результаты проверки этого утверждения.

Из установленного закона подобия следует, что в точке  $x=0, y=y_c$  кривая, представляющая критический тор, имеет сингулярность типа

$$x \sim |y - y_c|^\gamma, \quad \gamma = \log \alpha / \log \beta = 0.9539\dots$$

Степень  $\gamma$  оказалась близкой к единице, поэтому визуально эта сингулярность выглядит как излом. Заметим, что вследствие эргодичности квазипериодического движения, наличие сингулярности в одной точке означает присутствие бесконечного плотного множества сингулярностей на критическом торе. Таким образом, заключение о фрактальной природе критического тора в конечном счете выводится из РГ анализа.

На рис. 5 представлены результаты исследования спектральных свойств критического тора. На рис. 5, а показан фурье-спектр временной последовательности  $x_n$ , генерируемой логистическим отображением под квазипериодическим воздействием в точке TDT. На рис. 5, б приводится спектр функции  $x(y)$ , описывающей форму критического тора. Это еще одна иллюстрация фрактальной природы аттрактора: амплитуды спектральных составляющих, как это хорошо видно в логарифмическом масштабе, убывают по степенному закону.

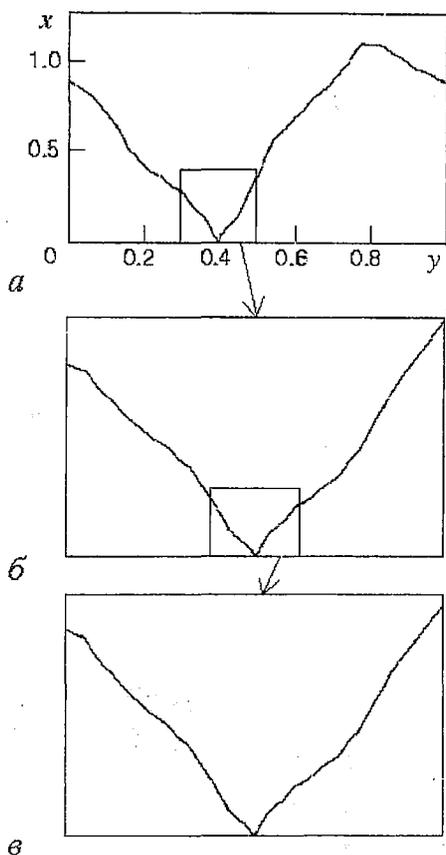


Рис. 4. Иллюстрация свойства скейлинга критического тора. На диаграмме *а* аттрактор представлен в координатах  $(x, y)$ . Часть картин-ки, попавшая внутрь небольшого прямоуголь-ника вблизи точки  $(0, y_c)$  показана в увеличен-ном виде на диаграмме *б*, а ее часть, в свою очередь, на диаграмме *в*. Факторы увеличения  $\alpha$  по горизонтальной и  $\beta$  по вертикальной осям

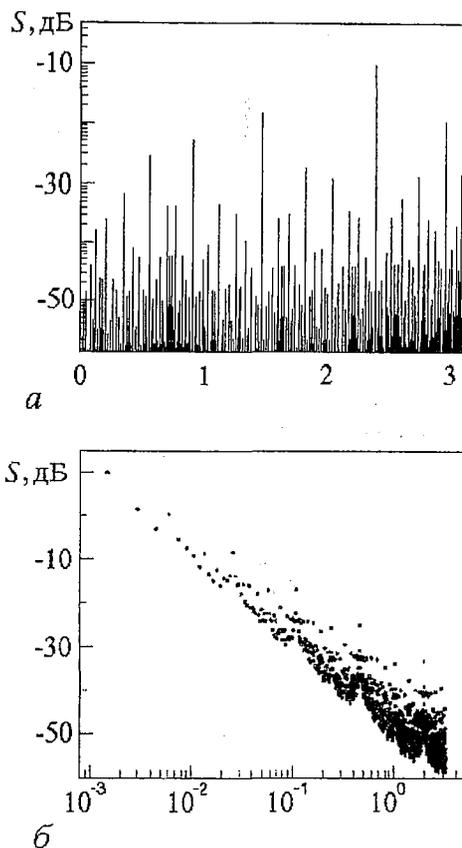


Рис. 5. Результаты спектрального анализа критического тора: *а* – Фурье–спектр последо-вательности, генерируемой логистическим отображением с внешним квазипериодическим воздействием, в критической точке TDT; *б* – спектр функции  $x(y)$ , определяющей форму критического тора

## 5. Свойства скейлинга карты динамических режимов на плоскости параметров вблизи точки TDT

Чтобы обнаружить свойства скейлинга, которыми в соответствии с результатами РГ анализа должна обладать окрестность точки TDT, на плоскости параметров надо определить удобную систему координат. За начало координат естественно взять саму точку TDT, а направления осей следует выбрать так, чтобы сдвиг по параметрам вдоль каждой оси приводил к появлению ровно одной определенной собственной моды в решении линеаризованного уравнения РГ. В такой системе координат конфигурация областей на плоскости параметров вблизи точки TDT должна воспроизводить себя при пересчете масштабов по двум координатным осям, соответственно, в  $\delta_1$  и  $\delta_2$  раз (см.(9)).

Фактически, одна координатная ось, отвечающая старшему собственному значению  $\delta_1$ , может быть выбрана почти произвольно, однако для второй оси направление должно быть тщательно подобрано так, чтобы полностью исключить вклад старшего собственного вектора. Численно были найдены следующие соотношения между скейлинговыми координатами  $C_1, C_2$  и параметрами задачи  $(\lambda, \varepsilon)$ :

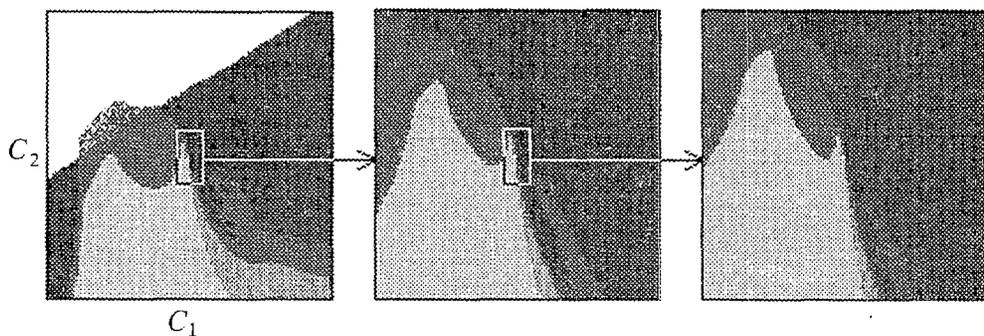


Рис. 6. Карта динамических режимов логистического отображения с внешним квазипериодическим воздействием в окрестности точки TDT, представленная в скейлинговых координатах  $C_1, C_2$ . Переход от диаграммы  $a$  к  $b$  и от  $b$  к  $v$  соответствует увеличению на фактор  $\delta_1$  по горизонтальной и  $\delta_2$  вертикальной осям

$$\varepsilon = \varepsilon_c - C_1 + 0.3347C_2, \quad \lambda = \lambda_c + C_2. \quad (10)$$

На рис. 6 эти координаты использованы для представления устройства плоскости параметров вблизи критической точки – показаны области тора, странного нехаотического аттрактора и хаоса. На рис. 7 скейлинг на плоскости тех же

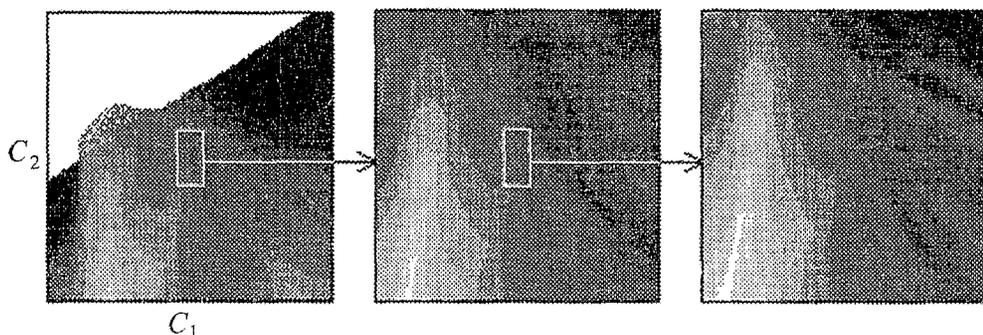


Рис. 7. Значения ляпуновского показателя на плоскости параметров  $C_1, C_2$  (представлены тонами серого цвета). Критическая точка TDT находится в центре каждой диаграммы. Переход от диаграммы  $a$  к  $b$  и от  $b$  к  $v$  соответствует увеличению на факторы  $\delta_1$  по горизонтали и  $\delta_2$  по вертикали, а также изменению правила кодирования, соответствующему пересчету масштаба для ляпуновского показателя на фактор  $\tau$

параметров иллюстрируется для ляпуновского показателя, различные уровни которого показаны тонами серого цвета. При этом правило кодировки на каждом последующем уровне увеличения изменяется так, чтобы это отвечало пересчету масштаба ляпуновских показателей на фактор  $\tau$ .

На обоих рисунках хорошо видно, что при увеличении по двум осям координат в  $\delta_1$  и  $\delta_2$  раз конфигурация плоскости параметров действительно демонстрирует ожидаемое свойство подобия. Это, в частности, означает, что все режимы, которые представлены на рис. 6 – тор, удвоенный тор, странный нехаотический аттрактор, хаос, будут реализоваться также и в сколь угодно малой окрестности точки TDT.

## 6. Эксперимент: критическая точка TDT в нелинейном колебательном контуре при двухчастотном внешнем воздействии

До сих пор в этой статье мы рассматривали модельную систему – логистическое отображение под внешним квазипериодическим воздействием.

Найденная и исследованная для этой модели точка TDT соответствует новому типу критического поведения при переходе от квазипериодической динамики к хаосу. Тот факт, что динамика модельного отображения согласуется с результатами РГ анализа, показывает, что оно является представителем соответствующего класса универсальности. Можно предположить, что этот класс будет включать системы более высокой размерности, например, подвергнутое внешнему квазипериодическому воздействию отображение Эно (Hénon map).

Очевидный интерес представляет возможность наблюдать критическое поведение, ассоциирующееся с точкой TDT, в эксперименте. По-видимому, для этой цели пригодна любая нелинейная диссипативная система, демонстрирующая при изменении параметра каскад удвоений периода, если на нее подействовать квазипериодической внешней силой.

Рассмотрим систему, ставшую одной из самых известных иллюстраций феноменов нелинейной динамики – колебательный контур, в котором вместо емкости включен полупроводниковый диод с р–п переходом [37–40]. Возбуждение контура осуществляется внешним источником переменного напряжения на некоторой частоте  $\Omega_1$ . При увеличении амплитуды этого внешнего воздействия  $A_1$  в системе можно наблюдать переход к хаосу через каскад удвоений периода. Феноменологической моделью такой системы может служить, как известно, логистическое отображение.

Добавим теперь еще один воздействующий сигнал с амплитудой  $A_2$  и частотой  $\Omega_2$ , причем  $\Omega_2/\Omega_1 = (5^{1/2} - 1)/2$ . Теперь феноменологической моделью будет логистическое отображение с квазипериодическим воздействием, то есть уравнение (1). Величина  $A_1$  будет играть роль управляющего параметра  $\lambda$ , а  $A_2$  – амплитуды воздействия  $\epsilon$ .

На рис. 8 показана блок-схема экспериментальной установки, а на рис. 9 – полученная в эксперименте карта динамических режимов на плоскости параметров  $(A_1, A_2)$ . Экспериментальная установка включает в себя цепь  $RL$  с диодом, два генератора гармонических колебаний, сумматор и усилитель с низким выходным сопротивлением. Соотношение частот контролировалось с точностью до 4-го знака после запятой.

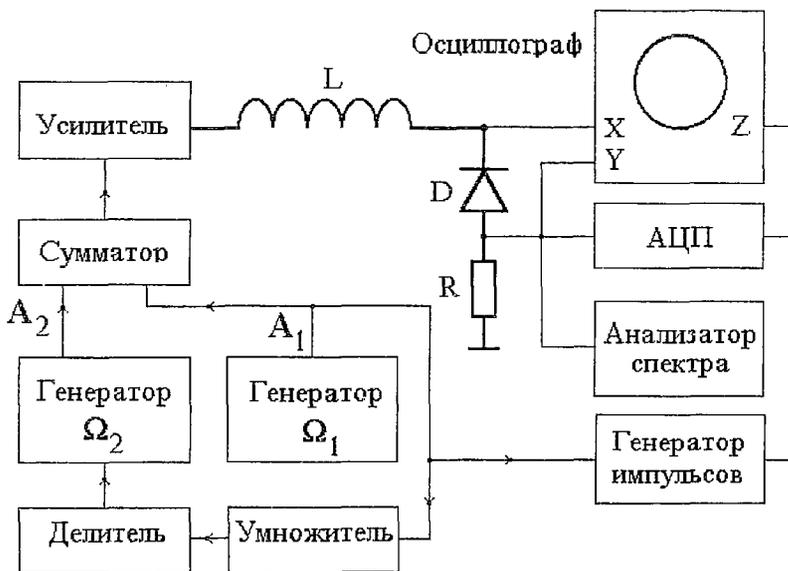


Рис. 8. Блок-схема экспериментальной установки. Управляющие параметры:  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды двух воздействующих на нелинейный контур гармонических сигналов с соотношением частот  $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$

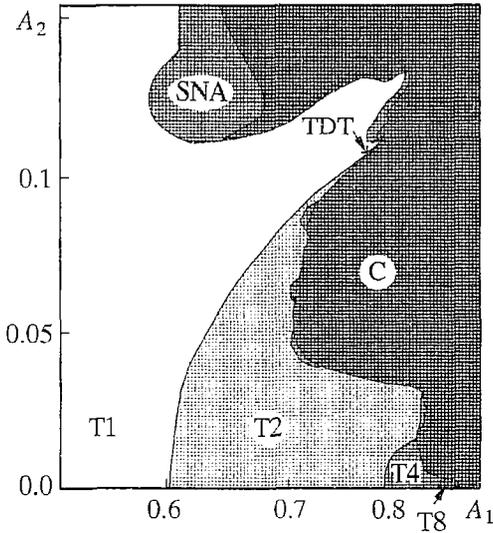


Рис. 9. Карта динамических режимов на плоскости параметров экспериментальной системы. По горизонтали и вертикали отложены амплитуды двух гармонических составляющих внешнего квазипериодического воздействия. T1, T2, T4 – области существования гладких торов, возникших на базе циклов с периодом  $T$ ,  $2T$  и  $4T$ , где  $T=2\pi/\Omega_1$ . Точка TDT отмечена крестиком

С помощью аналого-цифрового преобразователя генерируемый системой сигнал, пропорциональный току в контуре, вводился в компьютер, так что полученные реализации можно было обрабатывать и, в частности, строить итерационные диаграммы, аналогичные рис.1 и 3. Примеры таких диаграмм, отвечающих тору, удвоенному тору, SNA и хаосу, показаны на рис. 10.

Для определения типа динамического режима, реализующегося в системе при различных значениях параметров, привлекался следующий набор тестов.

- Наблюдался спектр генерируемого системой сигнала на экране анализатора спектра, что позволяло достаточно надежно идентифицировать хаотические режимы (сплошной спектр).
- Наблюдался фазовый портрет колебаний на экране осциллографа, что давало возможность визуально отслеживать бифуркации удвоения торов.
- Наблюдался портрет аттрактора в сечении Пуанкаре, когда обеспечивалось кратковременное высвечивание

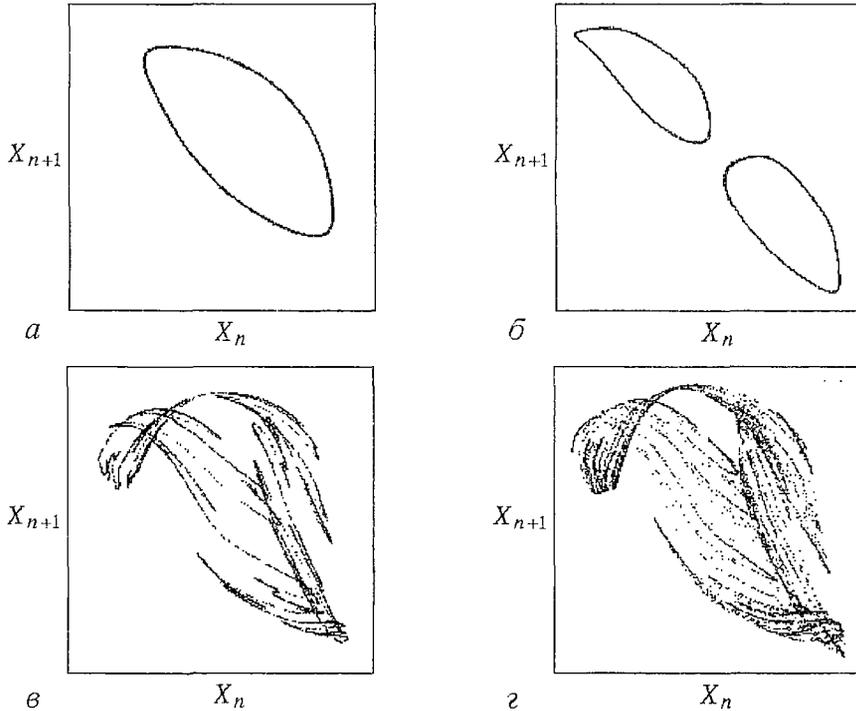


Рис. 10. Полученные в эксперименте примеры итерационных диаграмм для аттракторов, отвечающих: а – тору, б – удвоенному тору, в – SNA, г – хаосу. По осям координат отложены значения динамической переменной (тока в контуре) на двух последовательных временных шагах, где величина шага отвечает одному периоду «основного» воздействия,  $T=2\pi/\Omega_1$

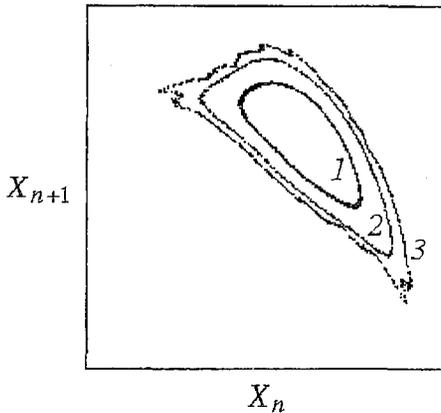


Рис. 11. Эволюция портрета аттрактора на итерационной диаграмме при движении по параметрам вдоль линии бифуркации удвоения тора: 1 –  $A_1=0.647$ ,  $A_2=0.06$ ; 2 –  $A_1=0.705$ ,  $A_2=0.09$ ; 3 – точка TDT,  $A_1=0.755$ ,  $A_2=0.108$ . Оси координат такие же, как на рис. 10

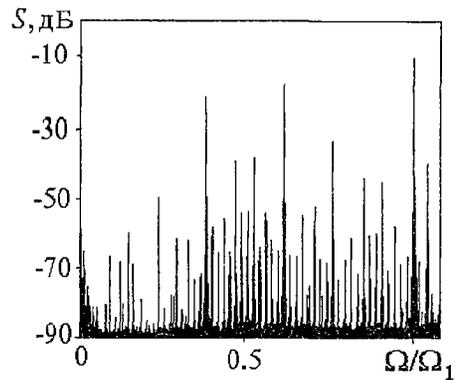


Рис. 12. Полученный в эксперименте спектр колебаний в точке TDT в нелинейном контуре при двухчастотном квазипериодическом воздействии с соотношением частот  $\Omega_2/\Omega_1=(5^{1/2}-1)/2$

точек на экране осциллографа один раз за период основного сигнала  $2\pi/\Omega_1$ . При этом тору T1 отвечала гладкая замкнутая кривая, тору T2 – две замкнутых кривых и т.д. Потеря гладкости наблюдаемой кривой или ее размытие свидетельствовало о переходе к режиму SNA или к хаосу.

• Чтобы различать режимы, отвечающие гладкому тору и странному нехаотическому аттрактору, использовался также критерий, предложенный в работе [11]. Методом умножения и деления частоты  $\Omega_1$  обеспечивалось рациональное отношение частот воздействия  $13/21$  (одна из подходящих дробей, аппроксимирующих золотое сечение) и тестировалось наличие или отсутствие бифуркаций в зависимости от разности фаз между двумя воздействующими сигналами; при этом их амплитуды поддерживались постоянными. Наличие бифуркаций считалось признаком присутствия SNA.

Карта динамических режимов, полученная в эксперименте, находится в замечательном качественном соответствии с рис. 2. В частности, на ней можно видеть бифуркационную линию, разграничивающую области тора T1 и удвоенного тора T2. Увеличивая уровень второго сигнала  $A_2$  и подстраивая амплитуду первого  $A_1$  так, чтобы оставаться на этой бифуркационной линии, в ходе эксперимента оказалось достаточно несложным отыскать точку TDT. На рис. 11 показано, как эволюционирует портрет аттрактора на итерационной диаграмме при изменении параметров, отвечающем движению вдоль линии удвоения тора (ср. рис. 3.) Можно видеть, что в точке TDT аттрактор принимает вид фрактало-подобной кривой с характерным изломом в крайней левой точке. На рис. 12 приведен спектр колебаний в точке TDT, вид которого качественно согласуется с рис. 5, а.

Таким образом, в эксперименте получено достаточно убедительное соответствие с результатами теоретического анализа, касающимися существования точки TDT, устройства пространства параметров вблизи этой точки и ассоциирующихся с ней особенностей динамики. В последующих публикациях мы предполагаем представить результаты более подробного экспериментального исследования.

## Заключение

Исследуя динамику логистического отображения с квазипериодическим внешним воздействием, мы обнаружили новый интересный тип критического

поведения, связанный с точкой окончания линии бифуркации удвоения тора на плоскости параметров. В этой точке, обозначенной как TDT, соседствуют все основные динамические режимы системы – тор, удвоенный тор, странный нехаотический аттрактор, хаос. Аттрактор в точке TDT представляется в сечении замкнутой фрактальной кривой, скейлинговые свойства которой описываются с помощью метода ренормгруппы. Этот метод позволяет также выявить свойства подобия (скейлинга), присущие плоскости параметров в окрестности точки TDT.

Представленные в работе результаты экспериментов с нелинейным колебательным контуром под двухчастотным внешним воздействием качественно подтверждают основные выводы, полученные при теоретическом анализе. Поэтому можно полагать, что экспериментальная система и логистическое отображение с квазипериодическим воздействием относятся к одному и тому же классу универсальности. По-видимому, динамика многих других систем различной физической природы при наличии внешнего квазипериодического воздействия будет характеризоваться теми же закономерностями.

Замечательная особенность развитого анализа критической точки TDT состоит в том, что он соединяет проблематику перехода к хаосу через квазипериодические режимы и странные нехаотические аттракторы с концепциями ренормгруппы, универсальности и скейлинга.

## Приложение

### Решение уравнения РГ, найденное численно в виде полиномиальной аппроксимации

$$\begin{aligned}
 g_1(x,y) = & 1 - 0.8696325y + 1.7034283y^2 + 0.5184751y^3 - 0.4789622y^4 + 0.0421284y^5 + \\
 & + 0.0034728y^6 - 0.000263y^7 + 0.0140463y^8 - 0.0080038y^9 - 0.0027316y^{10} + \\
 & + 0.0021518y^{11} + 0.0006855y^{12} - 0.0006844y^{13} + 0.0000309y^{14} + 0.0001074y^{15} - \\
 & - 0.0000417y^{16} + 0.0000036y^{17} + 0.0000049y^{18} - 0.0000036y^{19} + 0.0000002y^{20} + \\
 & + 0.0000009y^{21} - 0.0000004y^{22} + 0.0000001y^{24} + x^2(-1.0048951 - 0.2989658y + \\
 & + 0.4635285y^2 - 0.1800907y^3 + 0.0725056y^4 - 0.0034337y^5 - 0.0295812y^6 + \\
 & + 0.0222803y^7 + 0.0030672y^8 - 0.0060644y^9 - 0.0010422y^{10} + 0.0022309y^{11} - \\
 & - 0.0005789y^{12} - 0.0001935y^{13} + 0.0001948y^{14} - 0.0000733y^{15} - 0.0000007y^{16} + \\
 & + 0.000019y^{17} - 0.0000064y^{18} - 0.0000034y^{19} + 0.000003y^{20} - 0.0000003y^{21} - \\
 & - 0.0000006y^{22} + 0.0000003y^{23}) + x^4(-0.0719259 + 0.1020951y - 0.0977675y^2 + \\
 & + 0.0127913y^3 + 0.0179438y^4 - 0.0215106y^5 + 0.0018414y^6 + 0.0062829y^7 - \\
 & - 0.0001449y^8 - 0.0026948y^9 + 0.001565y^{10} - 0.000213y^{11} - 0.0002682y^{12} + \\
 & + 0.0002255y^{13} - 0.0000623y^{14} - 0.0000278y^{15} + 0.0000236y^{16} + 0.0000016y^{17} - \\
 & - 0.0000079y^{18} + 0.000003y^{19} + 0.0000007y^{20} - 0.0000011y^{21} + 0.0000004y^{22} - \\
 & - 0.0000001y^{24}) + x^6(0.0298854 - 0.0071445y - 0.0013898y^2 + 0.0082485y^3 - \\
 & - 0.0037254y^4 - 0.0030119y^5 + 0.0011017y^6 + 0.0013475y^7 - 0.0017233y^8 + \\
 & + 0.0008162y^9 + 0.0000272y^{10} - 0.0002698y^{11} + 0.0001551y^{12} - 0.0000044y^{13} - \\
 & - 0.000034y^{14} + 0.0000084y^{15} + 0.0000092y^{16} - 0.0000077y^{17} + 0.0000012y^{18} + \\
 & + 0.0000016y^{19} - 0.0000013y^{20} + 0.0000002y^{21} + 0.0000001y^{22} - 0.0000001y^{23}) + \\
 & + x^8(-0.0009862 - 0.0009571y + 0.0016498y^2 + 0.0007036y^3 - 0.0007539y^4 - \\
 & - 0.0000808y^5 + 0.0008704y^6 - 0.0008208y^7 + 0.0002472y^8 + 0.0001168y^9 - \\
 & - 0.0001601y^{10} + 0.000051y^{11} + 0.000019y^{12} - 0.0000164y^{13} - 0.0000033y^{14} + \\
 & + 0.0000095y^{15} - 0.0000047y^{16} - 0.0000004y^{17} + 0.0000018y^{18} - 0.0000009y^{19} + \\
 & + 0.0000002y^{21}) + x^{10}(-0.000238 - 0.0000766y + 0.0001892y^2 - 0.0001571y^3 - \\
 & - 0.0001555y^4 + 0.0003732y^5 - 0.0002338y^6 + 0.0000302y^7 + 0.0000757y^8 - \\
 & - 0.0000553y^9 + 0.0000038y^{10} + 0.0000124y^{11} - 0.0000033y^{12} - 0.000006y^{13} + \\
 & + 0.0000061y^{14} - 0.0000016y^{15} - 0.0000011y^{16} + 0.0000013y^{17} - 0.0000004y^{18} - \\
 & - 0.0000001y^{19} + 0.0000001y^{20}) + x^{12}(-0.0000117 + 0.0000399y - 0.0000178y^2 - \\
 & - 0.0000733y^3 + 0.0000866y^4 - 0.0000471y^5 - 0.000009y^6 + 0.0000264y^7 - \\
 & - 0.0000104y^8 - 0.0000035y^9 + 0.0000044y^{10} + 0.0000013y^{11} - 0.0000043y^{12} + \\
 & + 0.0000026y^{13} - 0.0000001y^{14} - 0.0000009y^{15} + 0.0000006y^{16} - 0.0000001y^{18}) + \\
 & + x^{14}(0.0000064 + 0.0000037y - 0.0000119y^2 + 0.0000157y^3 - 0.0000052y^4 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0.0000053y^5 + 0.0000052y^6 - 0.0000006y^7 - 0.0000021y^8 + 0.0000006y^9 + \\
& + 0.0000015y^{10} - 0.0000019y^{11} + 0.0000007y^{12} + 0.0000002y^{13} - 0.0000005y^{14} + \\
& + 0.0000002y^{15}) + x^{16}(-0.0000016y + 0.0000017y^2 - 0.000001y^4 + 0.0000006y^5 + \\
& + 0.0000004y^6 - 0.0000005y^7 - 0.0000001y^8 + 0.0000007y^9 - 0.0000006y^{10} + \\
& + 0.0000001y^{11} + 0.0000001y^{12} + 0.0000001y^{13}) + x^{18}(-0.0000001 - 0.0000001y^3 + \\
& + 0.0000001y^5 - 0.0000001y^7 + 0.0000002y^8 - 0.0000001y^9);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(x,y) = & 1.2709296 - 1.4085003y + 1.332861y^2 + 0.6245053y^3 + 0.0515328y^4 - \\
& - 0.3434156y^5 - 0.1303952y^6 + 0.0549889y^7 + 0.0308226y^8 + 0.002276y^9 - \\
& - 0.0042775y^{10} - 0.0013037y^{11} + 0.0006066y^{12} - 0.0001329y^{13} - 0.0003479y^{14} + \\
& + 0.000003y^{15} + 0.0001395y^{16} + 0.0000533y^{17} - 0.0000219y^{18} - 0.000023y^{19} - \\
& - 0.0000031y^{20} + 0.000004y^{21} + 0.0000021y^{22} - 0.0000002y^{24} - 0.0000001y^{25} + \\
& + x^2(-0.9039355 - 0.3575287y - 0.1942313y^2 + 0.4121383y^3 + 0.2648099y^4 - \\
& - 0.0615008y^5 - 0.0612954y^6 - 0.0198487y^7 + 0.0059354y^8 + 0.0055224y^9 - \\
& - 0.0005322y^{10} + 0.0005321y^{11} + 0.0011416y^{12} + 0.0000732y^{13} - 0.000532y^{14} - \\
& - 0.000292y^{15} + 0.0000562y^{16} + 0.0001162y^{17} + 0.0000341y^{18} - 0.0000153y^{19} - \\
& - 0.0000144y^{20} - 0.0000028y^{21} + 0.0000013y^{22} + 0.000001y^{23} + 0.0000004y^{24} + \\
& + 0.0000001y^{25} - 0.0000001y^{27}) + x^4(0.1149239 - 0.1189743y - 0.1624286y^2 + \\
& + 0.0083472y^3 + 0.0353694y^4 + 0.0305969y^5 + 0.0020815y^6 - 0.0071632y^7 - \\
& - 0.001165y^8 - 0.0012989y^9 - 0.0016567y^{10} - 0.0002407y^{11} + 0.0008565y^{12} + \\
& + 0.000661y^{13} - 0.0000055y^{14} - 0.0002429y^{15} - 0.0001185y^{16} + 0.0000149y^{17} + \\
& + 0.0000392y^{18} + 0.0000149y^{19} - 0.000001y^{20} - 0.0000034y^{21} - 0.000002y^{22} - \\
& - 0.0000007y^{23} + 0.0000003y^{24} + 0.0000002y^{26}) + x^6(0.028873 + 0.0051215y - \\
& - 0.0030854y^2 - 0.0167439y^3 - 0.0065918y^4 + 0.0035108y^5 + 0.0017591y^6 + \\
& + 0.0017551y^7 + 0.0014699y^8 + 0.0003381y^9 - 0.0007513y^{10} - 0.000822y^{11} - \\
& - 0.0001399y^{12} + 0.0002682y^{13} + 0.0002075y^{14} + 0.0000204y^{15} - 0.0000557y^{16} - \\
& - 0.0000353y^{17} - 0.0000051y^{18} + 0.0000055y^{19} + 0.000005y^{20} + 0.0000023y^{21} + \\
& + 0.0000002y^{22} - 0.0000007y^{23} - 0.0000007y^{24} - 0.0000001y^{25} + 0.0000001y^{26} + \\
& + 0.0000001y^{27}) + x^8(-0.0015564 + 0.0030058y + 0.003232y^2 - 0.0004119y^3 - \\
& - 0.0006909y^4 - 0.0012182y^5 - 0.0008879y^6 - 0.0002836y^7 + 0.0003772y^8 + \\
& + 0.0006198y^9 + 0.0002252y^{10} - 0.00016y^{11} - 0.0002121y^{12} - 0.000066y^{13} + \\
& + 0.000042y^{14} + 0.0000472y^{15} + 0.0000158y^{16} - 0.0000038y^{17} - 0.0000075y^{18} - \\
& - 0.0000045y^{19} - 0.000001y^{20} + 0.000001y^{21} + 0.0000012y^{22} + 0.0000005y^{23} - \\
& - 0.0000001y^{24} - 0.0000002y^{25} - 0.0000001y^{26}) + x^{10}(-0.0004531 - 0.0000822y + \\
& + 0.0000042y^2 + 0.0004043y^3 + 0.000347y^4 + 0.000152y^5 - 0.000095y^6 - \\
& - 0.0002909y^7 - 0.0001729y^8 + 0.0000391y^9 + 0.0001323y^{10} + 0.0000751y^{11} - \\
& - 0.0000116y^{12} - 0.0000383y^{13} - 0.0000217y^{14} - 0.0000012y^{15} + 0.0000069y^{16} + \\
& + 0.0000057y^{17} + 0.000002y^{18} - 0.0000006y^{19} - 0.0000014y^{20} - 0.0000008y^{21} + \\
& + 0.0000003y^{23} + 0.0000002y^{24}) + x^{12}(0.0000300 - 0.0000499y - 0.000073y^2 - \\
& - 0.0000473y^3 + 0.0000012y^4 + 0.0000825y^5 + 0.0000749y^6 + 0.0000095y^7 - \\
& - 0.0000493y^8 - 0.0000475y^9 - 0.0000068y^{10} + 0.0000186y^{11} + 0.0000174y^{12} + \\
& + 0.0000049y^{13} - 0.0000036y^{14} - 0.0000049y^{15} - 0.0000025y^{16} + 0.0000012y^{18} + \\
& + 0.0000009y^{19} + 0.0000002y^{20} - 0.0000002y^{21} - 0.0000002y^{22}) + \\
& + x^{14}(0.0000055 + 0.0000063y + 0.0000051y^2 - 0.0000126y^3 - 0.0000181y^4 - \\
& - 0.0000093y^5 + 0.0000095y^6 + 0.0000179y^7 + 0.0000078y^8 - 0.0000046y^9 - \\
& - 0.0000087y^{10} - 0.0000046y^{11} + 0.0000007y^{12} + 0.0000028y^{13} + 0.0000021y^{14} + \\
& + 0.0000004y^{15} - 0.0000006y^{16} - 0.0000008y^{17} - 0.0000003y^{18} + 0.0000001y^{19} + \\
& + 0.0000002y^{20} + 0.0000001y^{21}) + x^{16}(-0.0000008 + 0.0000007y + 0.000002y^2 + \\
& + 0.0000024y^3 - 0.0000003y^4 - 0.0000038y^5 - 0.0000032y^6 + 0.0000026y^8 + \\
& + 0.0000023y^9 + 0.0000004y^{10} - 0.000001y^{11} - 0.0000011y^{12} - 0.0000005y^{13} + \\
& + 0.0000002y^{14} + 0.0000004y^{15} + 0.0000002y^{16} - 0.0000001y^{18} - 0.0000001y^{19}) + \\
& + x^{18}(-0.0000002y - 0.0000001y^2 + 0.0000004y^3 + 0.0000006y^4 + 0.0000003y^5 - \\
& - 0.0000004y^6 - 0.0000007y^7 - 0.0000003y^8 + 0.0000001y^9 + 0.0000004y^{10} + \\
& + 0.0000003y^{11} - 0.0000001y^{12} - 0.0000001y^{14}) + x^{20}(0.0000001y^5 + 0.0000001y^6 - \\
& - 0.0000001y^9).
\end{aligned}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 97-02-16414 и 96-02-16755).*

## Библиографический список

1. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339. (См. также: Ландау Л.Д. Собрание трудов. М.: Наука, 1969. С. 447.)
2. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 116.
3. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica. 1984. Vol. D13. P. 261.
4. Bondeson A., Ott E., and Antonsen T.M. Quasiperiodically forced pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 2103.
5. Romeiras F.J., Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M., Grebogi C. Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors // Physica. 1987. Vol. D26. P. 277.
6. Romeiras F.J., Ott E. Strange nonchaotic attractors of the damped pendulum with quasiperiodic forcing // Phys. Rev. 1987. Vol. A35. P. 4404.
7. Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems // Phys. Rev. 1989. Vol. A39. P. 2593.
8. Ding M., Grebogi C., Ott E. Dimensions of strange nonchaotic attractors // Phys. Lett. 1989. Vol. A137. P. 167.
9. Kapitaniak T., Ponce E., Wojewoda J. Route to chaos via strange non-chaotic attractors // J. Phys. A. 1990. Vol. 23. P. L383.
10. Heagy J.F., Hammel S.M. The birth of strange nonchaotic attractor // Physica. 1994. Vol. D70. P. 140.
11. Pikovsky A., Feudel U. Characterizing strange nonchaotic attractors // CHAOS. 1995. Vol. 5. P. 253.
12. Feudel U., Kurths J., Pikovsky A. Strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced circle map // Physica. 1995. Vol. D88. P. 176.
13. Kuznetsov S., Pikovsky A., Feudel U. Birth of a strange nonchaotic attractor: Renormalization group analysis // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. R1629.
14. Pikovsky A., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // J. Phys. A: Math., Gen. 1994. Vol. 27. P. 5209.
15. Ding M., Scott-Kelso J. Phase-resetting map and the dynamics of quasiperiodically forced biological oscillators // Int. J. Bif. Chaos. 1994. Vol. 4. P. 553.
16. Lai Y.-C. Transition from strange nonchaotic to strange chaotic attractors // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 57.
17. Nishikawa T., Kaneko K. Fractalization of torus revisited as a strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 6114.
18. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.Н. Механизмы рождения странного нехаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 34.
19. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O. Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. E. 1996. Vol. E53. P. 4451.
20. Ditto W.L. Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. Letters. 1990. Vol. 65. P. 533.
21. Zhou T., Moss F., Bulsara A. Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential // Phys. Rev. E. 1992. Vol. A45. P. 5394.
22. Feudel U., Pikovsky A., Politi A. Renormalization of Correlations and Spectra of a Strange Nonchaotic Attractor // J. Phys. A. 1996. Vol. 29. P. 5297.
23. Ketoja J.A., Satiya I.I., частное сообщение.
24. Feudel U., Pikovsky A.S., Zaks M.A. Correlation properties of quasiperiodically forced two-level system // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 1762.
25. Keller G. A note on strange nonchaotic attractors // Fundamenta Mathematicae. 1996. Vol. 151. P. 139.
26. Stark J., частное сообщение.

27. *Kaneko K.* Doubling of torus // *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 1806.
28. *Кузнецов С.П.* О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок – хаос через бифуркации удвоения периода // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39. С.113.
29. *Arneodo A.* Scaling for a periodic forcing of a period–doubling system // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 53. P. 1240.
30. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Renormalization group for the response function and spectrum of the period–doubling system // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 140. P. 166.
31. *Kaneko K.* Collaps of tori and genesis of chaos in dissipative systems. Singapore: World Scientific, 1986.
32. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Разрушение квазипериодического движения за счет удвоений и стохастичность в системе связанных генераторов // *Изв.вузов. Радиофизика.* 1984. Vol. 27, № 5. С. 565.
33. *Broer H., Huitema G.B., Takens F., Braaksma B.L.J.* Unfoldings and bifurcations of quasi–periodic tori // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1990. Vol. 83. P. 1.
34. *Chastell P.R., Glendinning P.A., Stark J.* Locating bifurcations in quasiperiodically forced systems // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 200. P. 17.
35. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker. S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis // *Physica.* 1982. Vol. D5. P. 370.
36. *Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D.* 1983. Vol. 8. P. 303.
37. *Linsay P.S.* Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 47. P. 1349.
38. *Testa J., Perez J., Jeffries C.* Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator // *Phys.Rev.Lett.* 1982. Vol. 48. P. 714.
39. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // *РЭ.* 1987. Т. 32, № 12. С. 2558.
40. *Безручко Б.П.* Особенности возбуждения субгармонических и хаотических колебаний в контуре с диодом // *РЭ.* 1991. Т. 36, № 1. С.39.

*Институт радиотехники  
и электроники РАН, Саратовский филиал  
Институт теоретической физики и  
и астрофизики, Потсдамский университет  
Германия*

*Поступила в редакцию 24.11.97*

## ON DYNAMICS OF NONLINEAR SYSTEMS UNDER EXTERNAL QUASI–PERIODIC FORCE NEAR THE TERMINAL POINT OF THE TORUS–DOUBLING BIFURCATION CURVE

*B.P. Bezruchko, S.P. Kuznetsov, A.S. Pikovsky, Ye.P. Seleznev, U. Feudel*

A logistic map under quasi–periodic force is investigated for the case of frequency given by the golden mean. It is found that the end point of torus–doubling bifurcation curve on the plane of control parameter and force amplitude is a critical point where regions of torus, doubled torus, strange nonchaotic attractor and chaos meet together. Attractor at this point is a fractal object – «critical torus». Using the renormalization group approach we reveal scaling properties both for the critical attractor and for the parameter plane topography near the critical point. We present also experimental results for electronic oscillator under quasi–periodic excitation and demonstrate qualitative correspondence with the theory.



*Безручко Борис Петрович* – родился в 1946 году, окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Профессор кафедры электроники и волновых процессов СГУ; ведущий научный сотрудник (по совместительству) Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН; доктор физико–математических наук. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментальной наблюдаемой. Имеет около 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



*Кузнецов Сергей Петрович* родился в 1951 году. Доктор физико–математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается также исследованиями в области квантового хаоса. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Соавтор двух монографий и одной популярной книги. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники и радиофизики СГУ и в Высшем колледже прикладных наук СГУ.

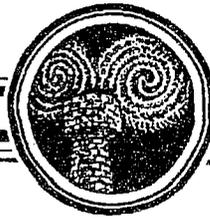
*Пиковский Аркадий Самуилович* – родился в 1956 году в Горьком. Окончил Горьковский госуниверситет им. Лобачевского (1977). Защитил кандидатскую диссертацию (1982). Работал в Нижнем Новгороде в Институте прикладной физики РАН, а затем в Германии в университете Вупперталя. В настоящее время профессор университета Потсдама (Германия), сотрудник рабочей группы «Нелинейная динамика». Область научных интересов – нелинейная динамика, хаос, турбулентность.



*Селезнев Евгений Петрович* – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1990). Старший научный сотрудник Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН, доцент Высшего колледжа прикладных наук. Автор и соавтор 50 научных работ. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах,



*Ульрика Фойдель* – родилась в 1957 году, окончила Берлинский университет им. Гумбольдта (Германия, 1981). Защитила кандидатскую диссертацию (1985) и докторскую (1996). Работала в исследовательских институтах Академии наук ГДР и в университете Потсдама. Научные интересы – численный анализ динамических систем, мультистабильность, квазипериодическая динамика.



## ИНДУЦИРОВАННЫЙ ШУМОМ ПЕРЕНОС БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В СИСТЕМЕ С «ПУЛЬСИРУЮЩИМ» ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

*А. П. Никитин, Д. Э. Постнов*

Рассматриваются проблемы нелинейного броуновского движения в системах с «пульсирующим» асимметричным периодическим в пространстве потенциалом. Сравниваются приближенные аналитические результаты и результаты электронного моделирования. Объяснены зависимости средней скорости движения частиц для периодического и случайного (бинарный шум) законов модуляции потенциала.

### Введение

Одной из популярных моделей, описывающих молекулярные моторы, является система с «пульсирующим» периодическим потенциалом ([1] и ссылки в ней). Пусть некоторая достаточно крупная молекула совершает тепловое (броуновское) движение около полимера. Благодаря периодичности структуры полимера его электростатическое поле также обладает периодической структурой. Кроме того, из-за несимметричного распределения электрических зарядов в пределах одного периода полимера его поле является еще и асимметричным. Броуновская частица-молекула участвует в обратимой химической реакции [2, 3], в результате которой она приобретает и теряет случайным образом свою электронейтральность, то есть становится и перестает быть заряженной частицей. Когда частица заряжена, она взаимодействует с полем полимера, которое можно аппроксимировать периодическим в пространстве асимметричным потенциалом  $V(x)$  (рис. 1). Если частица стала электронейтральной, то она не взаимодействует с полем полимера и для нее можно считать потенциал нулевым. То есть эффективный потенциал для частицы есть

$$U(x,t) = g(t) V(x) = \begin{cases} V(x) \\ \downarrow \uparrow \\ 0. \end{cases}$$

Функция времени  $g(t)$  последовательно принимает значения 0 и 1, причем случайным образом.

Появление потока частиц в рассматриваемой системе можно объяснить следующими рассуждениями

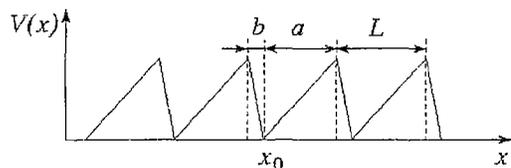


Рис. 1. Пространственно-периодический асимметричный потенциал

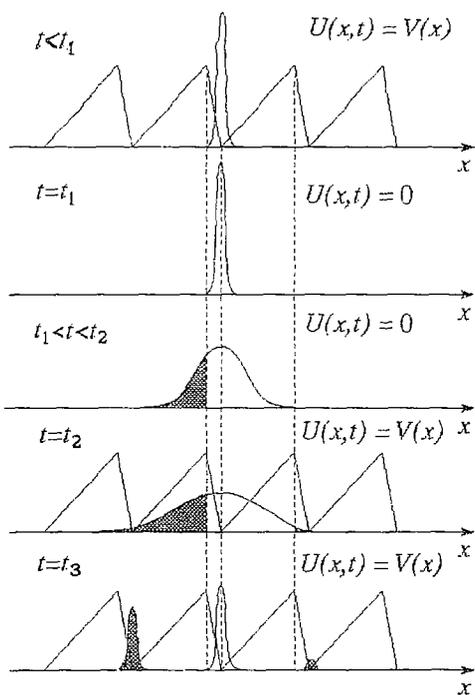


Рис. 2. Эволюция плотности частиц. Плотность  $p(x,t)$  изображена для пяти моментов времени, соответствующих разным фазам механизма генерации потока

оказались. Из-за разницы в величине бассейнов притяжений, соответствующих крутым и пологим склонам потенциала, будет иметь место смещение центра масс частиц, причем, в сторону крутого склона. Понятно, если потенциал будет переключаться очень часто, то за короткие времена «выключенного» потенциала тепловые флуктуации не раскидают частицы на достаточное расстояние и они не окажутся в бассейнах притяжения соседних состояний равновесия, вследствие чего поток будет почти нулевым. Также, если потенциал будет переключаться очень редко, то редко будет нарушаться равновесность системы, и поэтому поток будет очень малым. Из этих рассуждений следует «резонансная»<sup>2</sup> зависимость потока частиц  $J$  от частоты переключений  $f$  функции  $g(t)$ .

Сама природа молекулярного движения подсказала ученым и инженерам, занятым в нанотехнологии, способ управления движением молекул [5,3]. Очевидно, если  $g(t)$  будет не случайным процессом, а периодической функцией времени, то сам механизм направленного движения сохранится. Этому посвящена экспериментальная работа [5], где периодический потенциал создавался лазерным излучением, в поле которого двигались броуновские частицы. Таким образом возникла задача об исследовании зависимости потока частиц от закона модуляции периодического потенциала. Представленная авторами работа посвящена данной проблеме.

В настоящее время L.P. Faucheux, L.S. Bourdieu, P.D. Kaplan, A.J. Libchaber и др. применяют искусственно созданные системы с «пульсирующим» периодическим потенциалом в нанотехнологии для направленного перемещения и сортировки групп молекул [5,6]. Перспектива такого инженерного применения является стимулом для многих ученых. Кроме того, исследование систем с

(рис. 2). Пусть первоначально включен периодический потенциал и имеется множество не взаимодействующих друг с другом частиц, положение которых характеризуется плотностью  $p(x,t)$ . Все частицы сначала локализованы в пределах одного периода потенциала около состояния равновесия<sup>1</sup>, то есть потенциальные барьеры очень высоки. Пусть теперь в момент времени  $t_1$  потенциал переключился и стал нулевым. Тепловые флуктуации с течением времени раскидают частицы на расстояния, соизмеримые по величине с периодом потенциала  $L$ . Распределение частиц вдоль пространственной координаты будет близким к гауссову (см. [4])

$$p(x,t) = \frac{n}{[4\pi D(t-t_1)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_1)}\right].$$

Здесь  $n$  – среднее число частиц на периоде,  $D$  – коэффициент диффузии,  $x_0$  – координата минимума потенциала.

Если снова включится периодический потенциал (в момент времени  $t_2$ ), то частицы локализуются около состояний равновесия, причем, возле тех, в бассейнах притяжения которых они

<sup>1</sup> Состояние равновесия – минимум потенциала.

<sup>2</sup> В данном случае под резонансным характером зависимости подразумевается наличие у нее максимума.

«пульсирующим» периодическим потенциалом затрагивает интересы современной медицины.

Для исследования общих свойств систем с «пульсирующим» периодическим потенциалом вовсе не обязательно ставить эксперименты непосредственно на броуновских частицах. В [7,8] показано, как на основе мультстабильного осциллятора типа фазовой автоподстройки частоты (ФАП) можно построить модель с периодическим потенциалом.

На рис. 3 изображены экспериментальные результаты, которые получены на ФАП, когда  $g(t)$  представляет собой процесс переключения между 0 и 1. Кривой  $J_{II}$  соответствует периодический, а кривой  $J_{III}$  — случайный процесс переключения  $g(t)$ , то есть бинарный шум<sup>3</sup>. Сравним обе кривые. На высоких частотах  $f$  переключения  $g(t)$  кривая  $J_{II}$

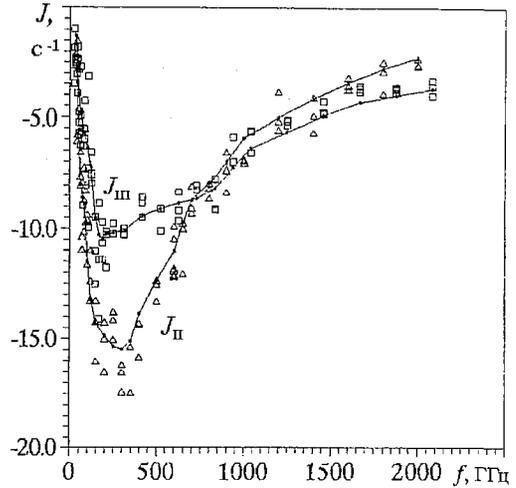


Рис. 3. Зависимость потока от частоты переключения  $g(t)$  между 0 и 1 (результат аналогового моделирования). Расстояния, соответствующие пологому и крутому склонам потенциала, составляют 75% и 25% от его периода  $L$

лежит выше кривой  $J_{III}$ . Объясним этот экспериментальный факт на языке броуновского движения. Здесь  $f$  обозначает частоту периодического переключения  $g(t)$  для кривой  $J_{II}$  и среднюю частоту случайных переключений  $g(t)$  для кривой  $J_{III}$ . Случайный процесс  $g(t)$  обладает широким спектром времен пребывания в состояниях 0 и 1, кратных  $T_0$  — минимальному времени между двумя переключениями  $g(t)$  (рис. 4), в то время как периодическому процессу  $g(t)$  будет соответствовать только одно характерное время  $T_0$ . Следовательно, как показано выше, за короткие времена  $T_0$  «выключенного» потенциала тепловые флуктуации не раскидают частицы на достаточное расстояние, и они не окажутся в бассейнах притяжения соседних состояний равновесия. Для периодического переключения  $g(t)$  поток будет близким к нулевому. Для случайного процесса из-за присутствия в его спектре времен пребывания в состояниях 0 и 1 компонентов с достаточно длительным временем  $nT_0$  механизм генерации потока будет продолжать работать. В этом случае поток будет больше по абсолютной величине, чем при периодическом процессе переключений  $g(t)$ . Подкроем это рассуждение математическими выкладками.

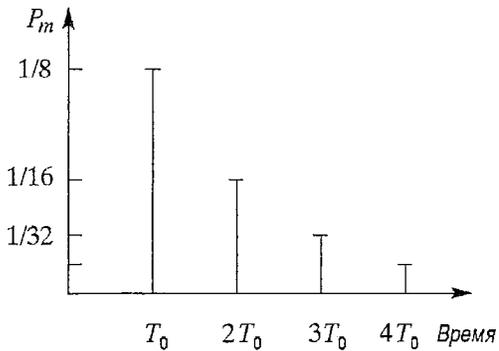


Рис. 4. Спектр времен пребывания

### 1. Поток частиц при периодической модуляции потенциала

Будем предполагать, что плотность частиц  $\mathcal{P}(x,t)$  является периодической функцией координаты  $x$

<sup>3</sup> См. определение бинарного шума ниже.

$$\mathcal{P}(x,t) = \mathcal{P}(x+L,t)$$

и нормирована на единицу на периоде потенциала  $L$  ( $n = 1$ ). Периодической модуляции потенциала  $U(x,t)$  соответствует периодическое переключение функции  $g(t)$  между нулем и единицей

$$U(x,t) = g(t) V(x) = \begin{cases} V(x) \\ \downarrow \uparrow \\ 0. \end{cases}$$

Пусть в течение времени  $T_0$  функция  $g(t) = 1$ , а в течение следующего интервала времени  $T_0$  функция  $g(t) = 0$ . Следовательно, период процесса переключения составляет  $2T_0$ , и ему соответствует частота повторения переключений

$$f = 1/(2T_0).$$

Считаем высоту потенциальных барьеров настолько большой, что за интервал времени  $T_0$  при  $U(x,t) = V(x)$  все частицы собираются в минимумах потенциала, и их распределение можно аппроксимировать  $\delta$ -функциями Дирака

$$\mathcal{P}(x,t_1) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 - iL).$$

С момента  $t_1$  выключения периодического потенциала ( $U(x,t) = 0$ ) плотность частиц эволюционирует и к моменту времени  $t_1 + T_0$  принимает вид

$$\mathcal{P}(x,t_1 + T_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i(x,t_1 + T_0),$$

где

$$p_i(x,t_1 + T_0) = \frac{n}{(4\pi DT_0)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0 - iL)^2}{4\pi DT_0} \right].$$

Найдем число частиц, покинувших пределы  $i$ -й потенциальной ямы (см. рис.1 и 2) в сторону возрастающих значений координаты  $x$ ,

$$G_1 = \int_{x_0+a}^{+\infty} p_i(x,t_1 + T_0) dx.$$

Аналогичным способом найдем число частиц, покинувших пределы одной потенциальной ямы в сторону убывающих значений координаты  $x$ ,

$$G_2 = \int_{-\infty}^{x_0-b} p_i(x,t_1 + T_0) dx.$$

За следующий интервал времени  $T_0$  (при включенном потенциале) все частицы соберутся в минимумах  $V(x)$ . То есть произойдет смещение центра масс частиц. Далее весь процесс повторится снова. Определим поток частиц в единицу времени в условиях периодической модуляции потенциала как

$$J_n = 1/(2T_0) (G_1 - G_2).$$

Расчеты по этой формуле показывают, что зависимость  $J_n$  от частоты имеет

---

<sup>4</sup> Далее будут рассматриваются только те частицы, которые в момент выключения потенциала находились в пределах одного его  $i$ -ого периода. Полная плотность частиц  $\mathcal{P}(x,t)$  будет складываться из множества плотностей  $p_i(x,t)$  аналогичных  $p(x,t)$  (см. рис.2), смещенных относительно друг друга вдоль  $x$  на величины кратные периоду потенциала.

«резонансный» характер, то есть существует некоторое оптимальное значение частоты  $f$ , при котором абсолютная величина потока  $|J_n|$  максимальна. Аналогичный результат получен в [5]

## 2. Поток частиц при модуляции потенциала бинарным шумом

**2.1. Бинарный шум. Определение.** Бинарный шум<sup>5</sup> – это дискретный случайный процесс  $g(t)$ , имеющий два возможных состояния 1 и 0, причем смена состояний возможна только в фиксированные моменты времени  $t_k = \Delta \pm kT_0$ , где  $T_0 = \text{const}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  – целое неотрицательное число,  $\Delta$  – случайная величина, не зависящая от  $g(t)$  и равномерно распределенная на отрезке  $[0, T_0]$  [9].

То есть под бинарным шумом мы будем понимать случайную последовательность нулей и единиц. В этой последовательности смена нулей на единицы и обратно происходит случайно в моменты  $t_k$  (рис. 5). При равной вероятности появления символов можно показать, что после единицы с вероятностью  $P_{1,1} = 1/2$  появится единица, и с вероятностью  $P_{1,0} = 1/2$  появится ноль. Аналогично  $P_{0,1} = P_{0,0} = 1/2$ . В большой последовательности длительностью  $NT_0$  содержится примерно одинаковое число нулей и единиц. В ней последовательность символов «1,0,1» встречается с вероятностью

$$P_{1,0} P_{0,1} = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4.$$

Последовательность символов «1,0,0,1» встречается с вероятностью

$$P_{1,0} P_{0,0} P_{0,1} = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/2^3.$$

Далее, рассматривая серии из нулей и единиц, увидим, что серия из  $m$  нулей (единиц) будет встречаться с вероятностью

$$P_m = 1/2^{m+1}.$$

Следовательно, в большой последовательности длительностью  $NT_0$  содержится в среднем

$$(N/m)P_m = N/(m2^{m+1})$$

серий из  $m$  нулей (единиц). Общее число всех таких серий нулей (единиц) равно

$$K = \sum_{m=1}^N (N/m)P_m = \sum_{m=1}^N N/(m2^{m+1}).$$

Определим среднюю частоту переключений бинарного шума как

$$\begin{aligned} f_{cp} &= K/(NT_0) = 1/(NT_0) \sum_{m=1}^N (N/m)P_m = 1/(NT_0) \sum_{m=1}^N N/(m2^{m+1}) = \\ &= (1/T_0) \sum_{m=1}^N 1/(m2^{m+1}). \end{aligned}$$

Ряд очень быстро сходится. Можно считать, что выполняется соотношение

$$f_{cp} \approx 1/(3T_0).$$

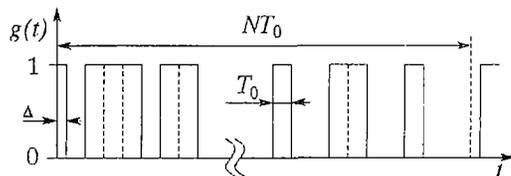


Рис. 5. Реализация бинарного шума

<sup>5</sup> Другое название – квазислучайный телеграфный сигнал.

**2.2. Модуляция потенциала бинарным шумом.** В отличие от случая периодической модуляции потенциала поток при бинарном шуме будет складываться из потоков  $J_m$ , соответствующих сериям из  $m$  нулей,

$$J_m = 1/(mT_0)(G_{1,m} - G_{2,m}),$$

где  $G_{1,m}$  – число частиц, покинувших пределы одной потенциальной ямы в сторону возрастающих значений координаты  $x$  за время  $mT_0$ ,

$$G_{1,m} = \int_{x_0+a}^{+\infty} p_i(x, mT_0) dx,$$

$G_{2,m}$  – число частиц, покинувших пределы одной потенциальной ямы в сторону убывающих значений координаты  $x$  за время  $mT_0$ ,

$$G_{2,m} = \int_{-\infty}^{x_0-b} p_i(x, mT_0) dx.$$

За интервал времени  $mT_0$  с момента  $t_1$  выключения периодического потенциала ( $U(x,t) = 0$ ) закон распределения плотности выделенных нами частиц (см. раздел 1) приобретает вид

$$p_i(x, mT_0) = \frac{n}{(4\pi DmT_0)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0 - iL)^2}{4DmT_0} \right].$$

Суммарный поток  $J_{\text{ш}}$  складывается из потоков  $J_m$  с учетом их вероятностей (вероятностей встретить в случайной последовательности бинарного шума серии из  $m$  нулей)

$$J_{\text{ш}} = \sum_{m=1}^{\infty} J_m P_m = (1/T_0) \sum_{m=1}^{\infty} (G_{1,m} - G_{2,m}) / (m2^{m+1}).$$

Зависимость потоков  $J_m P_m$  от средней частоты  $f_{\text{ср}}$  переключения бинарного шума представлена на рис. 6, а потоки  $J_{\text{ш}}$ ,  $J_{\text{II}}$  – на рис. 7.

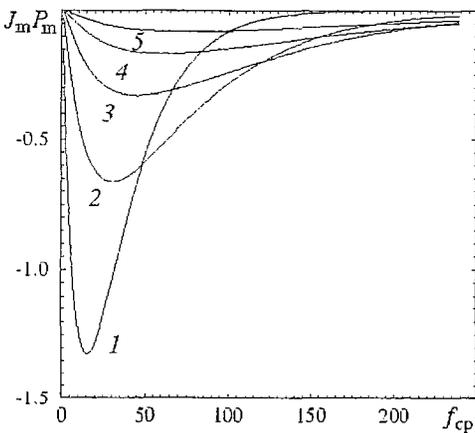


Рис. 6. Зависимость потоков  $J_m P_m$  от средней частоты переключения бинарного шума (аналитический результат представлен в безразмерных координатах); показаны первые пять потоков: 1 –  $J_1 P_1$ ; 2 –  $J_2 P_2$ ; 3 –  $J_3 P_3$ ; 4 –  $J_4 P_4$ ; 5 –  $J_5 P_5$

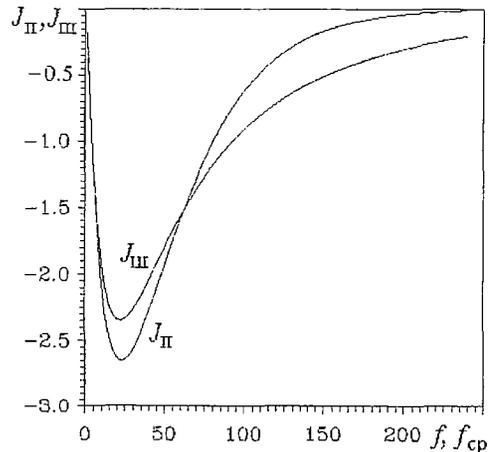


Рис. 7. Зависимость потоков от частоты переключения  $g(t)$  между 0 и 1 (аналитический результат представлен в безразмерных координатах). Расстояния, соответствующие пологому и крутому склонам потенциала, составляют 75% и 25% от его периода  $L$ ; коэффициент диффузии  $D=1$ ; длина периода потенциала  $L = 1$

## Выводы

В данной работе рассмотрено поведение броуновских частиц в периодическом асимметричном потенциале в приближении высоких потенциальных барьеров. Экспериментальные исследования проводились путем моделирования броуновского движения системой фазовой автоподстройки частоты. Кроме того, получены приближенные аналитические выражения для потока частиц. Наблюдается хорошее качественное совпадение экспериментальных и теоретических результатов (см. рис. 3 и 7). Зависимость потока от частоты как для периодической модуляции потенциала, так и для модуляции бинарным шумом имеет «резонансный» характер. То есть существует некоторое оптимальное значение частоты, при котором абсолютная величина потока максимальна. Причем положения максимумов по оси частот совпадают, а максимум у кривой, соответствующей периодической модуляции потенциала,  $J_{II}$  больше, чем у кривой, соответствующей модуляции бинарным шумом,  $J_{III}$ . Кроме того, на высоких частотах кривая  $J_{II}$  лежит выше кривой  $J_{III}$ . В настоящей работе этому факту найдено объяснение. С ростом частоты поток при модуляции потенциала бинарным шумом спадает медленнее, чем при модуляции периодическим сигналом. Это связано с широким спектром времен пребывания функции  $g(t)$  в состояниях 1 и 0. Если периодический сигнал обладает только одним характерным временем  $T_0$ , которое может быть оптимальным с точки зрения генерации максимального потока, то у бинарного шума таких времен  $mT_0$  счетное множество. То есть в спектре времен пребывания (см. рис. 4) бинарного шума есть много компонентов с достаточно длительными временами для того, чтобы активно участвовать в механизме генерации потока при малых значениях  $T_0$ . Следовательно, данный механизм для бинарного шума будет работать и на высоких частотах (см. рис. 6), в то время как для периодического сигнала рассмотренный механизм становится уже неэффективным.

Авторы выражают благодарность А.Н. Малахову за интерес к работе и ценные замечания.

*Работа частично была поддержана Госкомвузом России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66) и Российско-германским грантом DFG и RFFI 436 RUS 113/334/0(R).*

## Библиографический список

1. Никитин А.П. Индуцированный шумом перенос броуновских частиц в стохастических системах с асимметричным периодическим в пространстве потенциалом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5, № 1. С. 30.
2. Astumian R. D., Bier M. Fluctuation Driven Ratchets: Molecular Motors // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72. P. 1766.
3. Prost J., Chauwin J.-F., Peliti L., Ajdari A. Asymmetric Pumping of Particles // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72. P. 2652.
4. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках / Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
5. Faucheux L. P., Bourdieu L. S., Kaplan P. D. and Libchaber A. J. Optical Thermal Ratchet // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74. P. 1504.
6. Rousselet J., Salome L., Ajdari A. and Prost J. // Nature. 1994. Vol. 370. P. 113.
7. Постнов Д. Э., Никитин А. П., Анищенко В. С. Управление потоком вероятности в системе фазовой автоподстройки частоты // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 9. С. 24.
8. Postnov D. E., Nikitin A. P., Balanov A. G., Anishchenko V. S. Symmetric and asymmetric hopping dynamics in noisy electronic circuits // Book of abstracts. The Inter-

national Conference on Nonlinear Dynamics and Chaos (ICND-96), Saratov, Russia, July 8 – 14, 1996, p. 195.

9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов.радио, 1977.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 29.10.97

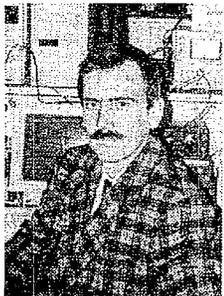
## NOISE-INDUCED TRANSPORT OF BROWNIAN PARTICLES IN SYSTEM WITH SPATIALLY PERIODIC FLASHING POTENTIAL

*A.P.Nikitin, D.E.Postnov*

In the present paper the problems of nonlinear Brownian motion in a periodic non-symmetric flashing potential (ratchet) are considered. The analytical result and the result of analogue simulation are compared. Plots of average velocity versus frequency are explained for periodic and stochastic (the binary noise) laws of potential flashing.



*Никитин Александр Петрович* – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры радиофизики СГУ. Область научных интересов – броуновское движение в нелинейных системах. Автор 4 работ в центральной печати.



*Постнов Дмитрий Энгелевич* в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года – инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 25 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



## САМОФОКУСИРОВКА ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКОВ ОБРАТНЫХ ОБЪЕМНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ: ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

*Г.М. Дудко, Ю.А. Филимонов*

В рамках подхода, основанного на численном решении двумерного нестационарного нелинейного уравнения Шредингера с диссипативным членом, исследованы эффекты самофокусировки и самоканализации обратных объемных магнитостатических волн при их распространении в ферромагнитных пленках.

### Введение

Нелинейные магнитостатические волны (МСВ) в ферромагнитных пленках активно изучаются как с практической, так и научной точек зрения [1]. В частности, в последнее десятилетие заметно возрос интерес к исследованию эффектов самовоздействия МСВ [2]. В работах [1–12] были обнаружены и достаточно подробно исследованы эффекты образования солитонов огибающей и автомодуляции МСВ. В то же время явления самофокусировки и самоканализации МСВ изучены гораздо меньше. Кроме работы Звездина и Попкова [2], где была показана возможность самофокусировки обратных объемных магнитостатических волн (ОМСВ) с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , параллельным касательному к пленке магнитному полю  $\mathbf{H}_0$  ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ ), известна только одна экспериментальная работа [13] по наблюдению самоканализации данных волн в пленке ЖИГ. Численного моделирования эффектов самовоздействия таких волн до сих пор, по-видимому, не проводилось. Цель данной работы – провести численное исследование эффектов самовоздействия ОМСВ при их распространении в пленке ЖИГ с помощью нестационарного двумерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с членом, ответственным за линейное затухание волны; сопоставить характер полученных решений с решениями НУШ для консервативных систем.

### Постановка численного эксперимента

В численном эксперименте моделировалось распространение в пленке ЖИГ магнитостатической волны, возбуждаемой излучателем конечной ширины  $a$ . Пленка имеет толщину  $d$ , ширину  $L_y$ , длину  $L_x$ , намагниченность насыщения  $4\pi M_0$ , ширину линии ферромагнитного резонанса  $\Delta H$  и размещена в плоскости  $(x, y)$  так,

как показано на рис. 1. Внешнее поле направленно вдоль оси  $x$ . Возбуждающая волна антенна расположена вдоль оси  $y$  при  $x=0$ . При такой геометрии и в безобменном приближении в пленке могут распространяться дипольные ООМСВ с законом дисперсии [14]:

$$k_x^2 + k_y^2 - 2k(k_x^2 + k_y^2 \mu)^{1/2} [-\mu]^{1/2} \operatorname{ctgd}(k_x^2 + k_y^2 \mu)(-\mu)^{1/2} + \mu(k_x^2 + k_y^2 \mu) - k_y^2 \nu^2 = 0, \quad (1)$$

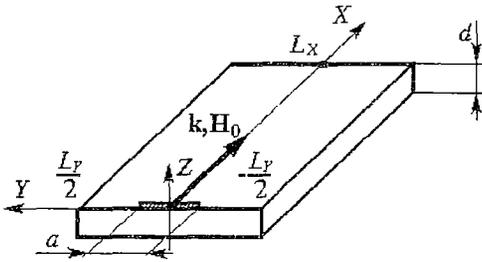


Рис. 1. Геометрия задачи

где  $k_x$  и  $k_y$  – составляющие волнового вектора в плоскости пленки,  $\mu = (\omega_0^2 - \omega^2)/(\omega_H^2 - \omega^2)$ ,  $\nu = \omega_m \omega / (\omega_H^2 - \omega^2)$ ,  $\omega_0^2 = \omega_H^2 + \omega_m \omega_m$ ,  $\omega$  – частота МСВ,  $\omega_m = = g 4\pi M_0$ ,  $\omega_H = g H_0$ ,  $g$  – гиромагнитное отношение для электрона.

Исследование эффектов самовоздействия ООМСВ проводилось с помощью нестационарного двумерного НУШ с феноменологическим членом, ответственным за линейное затухание волны в процессе распространения

$$i(\partial\varphi/\partial t + V_g \partial\varphi/\partial x) + 1/2\beta_x \partial^2\varphi/\partial x^2 + 1/2\beta_y \partial^2\varphi/\partial y^2 - \gamma|\varphi|^2\varphi + i\alpha\varphi = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi$  – связанная с переменной намагниченностью  $\mathbf{m}$  и намагниченностью пленки  $M_0$  соотношением  $|\varphi|^2 = |\mathbf{m}|^2 / 2M_0^2$  безразмерная комплексная амплитуда волны, которую можно представить в виде  $\varphi = F(x, y, t) \exp(i\Psi(x, y, t))$ , где  $F$  – действительная амплитуда ООМСВ,  $\Psi$  – фаза комплексной амплитуды, которая является добавкой к фазе волны;  $\beta_{i,i} = \partial^2\omega/\partial^2k_{x,y}$  – характеризуют дисперсионное и дифракционное расплывание волны,  $\gamma = \partial\omega/\partial|\varphi|^2$  – коэффициент нелинейности,  $V_g = \partial\omega/\partial k_x$  – групповая скорость волны в направлении  $x$ ,  $\alpha = \partial\omega/\partial\omega_H g \Delta H$  – диссипативный коэффициент. Уравнение (2) рассматривалось со следующими условиями: начальными

$$\varphi(x, y, 0) = \begin{cases} \varphi^0 \eta(y), & x = 0, \quad |y| \leq a/2, \\ 0, & 0 < x \leq L_x, \quad |y| \geq a/2 \end{cases} \quad (3)$$

и граничными

$$\begin{aligned} \varphi(0, y, t) &= \begin{cases} \varphi^0 \eta(y), & |y| \leq a/2, \quad t \geq 0, \\ 0, & |y| \geq a/2, \quad t \geq 0, \end{cases} \\ \varphi(L_x, y, t) &= 0, \quad |y| \leq L_y/2, \quad t \geq 0, \\ \varphi(x, -L_y/2, t) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad t \geq 0, \\ \varphi(x, L_y/2, t) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\eta(y)$  – функция начального распределения амплитуды волны в поперечном сечении пучка. Приведенные ниже численные результаты получены для функции вида

$$\eta(y) = \cos(\pi y/a), \quad |y| \leq a/2.$$

Для того чтобы выполнить условия (4) на границах пленки и, соответственно, избежать трудностей, связанных с отражением на границах, размеры пленки  $L_x$  и  $L_y$  задавались в пределах от 2 см до 4 см, а время анализа  $t_{\max}$  бралось вдвое меньшим времени пробега волны по образцу  $T = L_{x,y}/V_g$ .

Для решения исходной задачи использовалась неявная схема переменных

Таблица 1

$f$ , ГГц	$k$ , см <sup>-1</sup>	$V_g$ , см/с	$\beta_l$ , см <sup>2</sup> /с	$\beta_r$ , см <sup>2</sup> /с	$\gamma$ , с <sup>-1</sup>	$\alpha$ , с <sup>-1</sup>
5.82	63	-3.5·10 <sup>6</sup>	1.72·10 <sup>3</sup>	2.13·10 <sup>5</sup>	-7.3·10 <sup>9</sup>	3.50·10 <sup>6</sup>
5.7	300	-2.89·10 <sup>6</sup>	1.37·10 <sup>3</sup>	4.99·10 <sup>4</sup>	-7.0·10 <sup>9</sup>	3.53·10 <sup>6</sup>

направлений (схема Писмена – Рэкфорда) [15]. Считалось, что пленка имеет типичные для пленок ЖИГ параметры:  $d=7.2$  мкм,  $4\pi M_0=1750$  Гс,  $H_0=1391$  Э,  $\Delta H=0.2$  Э. Значения частоты возбуждения ООМСВ  $f=\omega/2\pi$  брались равными  $f_1=5.82$  и  $f_2=5.7$  ГГц. Значения коэффициентов НУШ  $V_g$ ,  $\beta_l$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  и волновых чисел ООМСВ  $k$ , рассчитанные с помощью (1) при указанных параметрах пленки для значений частоты возбуждения волны  $f_1$  и  $f_2$ , приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что для ООМСВ выполняются условия [2], необходимые для развития процессов самофокусировки

$$\beta_l \gamma < 0 \quad (5)$$

и самофокусировки

$$\beta_r \gamma < 0. \quad (6)$$

Будем рассматривать случай возбуждения ООМСВ антенной шириной  $a=1$  см, для которой практически во всей полосе частот возбуждения условие квазиоптического приближения  $ka \gg 1$  оказывается выполненным, что позволяет рассматривать пучок ООМСВ как пучок с узким угловым спектром и использовать НУШ для моделирования эффектов самовоздействия.

Отметим, что представление о характере процессов самофокусировки и самоканализации для случая антенн другой ширины можно будет получить, воспользовавшись зависимостью пороговых мощностей от ширины антенны [2]

$$\varphi_{th}^0 \sim (1/a)(\beta_l/\gamma)^{1/2}. \quad (7)$$

### Обсуждение результатов численного эксперимента

На рис. 2 и 3 представлены результаты численного эксперимента для ООМСВ на частоте  $f_1$ . На рис. 2 изображены линии равного уровня квадрата модуля комплексной амплитуды волны  $|\varphi|^2$  при различных значениях амплитуды волны  $\varphi^0$  на входе в бездиссипативном случае ( $\Delta H=0$ , левая колонка) и при наличии диссипации (правая колонка). Для наглядности и для облегчения установления соответствия данных, представленных на рис. 2, с распределением интенсивности волнового пучка в пленке, на рис. 3 приведены профили интенсивности, полученные при тех же параметрах.

Рассмотрим сначала результаты расчетов, выполненных без учета потерь волны, представленные на рис. 2 и 3 в левых колонках. При  $\varphi^0 < \varphi_{th}^0$  основную роль в эволюции пучка играет дифракционное распыливание волны: ширина пучка заметно увеличивается в процессе распространения. С ростом амплитуды волны на входе распыливание пучка уменьшается за счет компенсации дифракционного рассинхронизма фаз в пучке порядка  $\beta_l/a^2$  нелинейной расстройкой от синхронизма порядка  $\gamma|\varphi|^2$  [18,19]. При  $\varphi^0 = \varphi_{th}^0 = 0.02$  нелинейная и дифракционная добавки к фазе волны полностью компенсируют друг друга – наблюдается волноводное распространение пучка ООМСВ. Дальнейшее увеличение амплитуды волны на входе  $\varphi^0 > \varphi_{th}^0$  приводит к самофокусировке волнового пучка. Отметим, что при

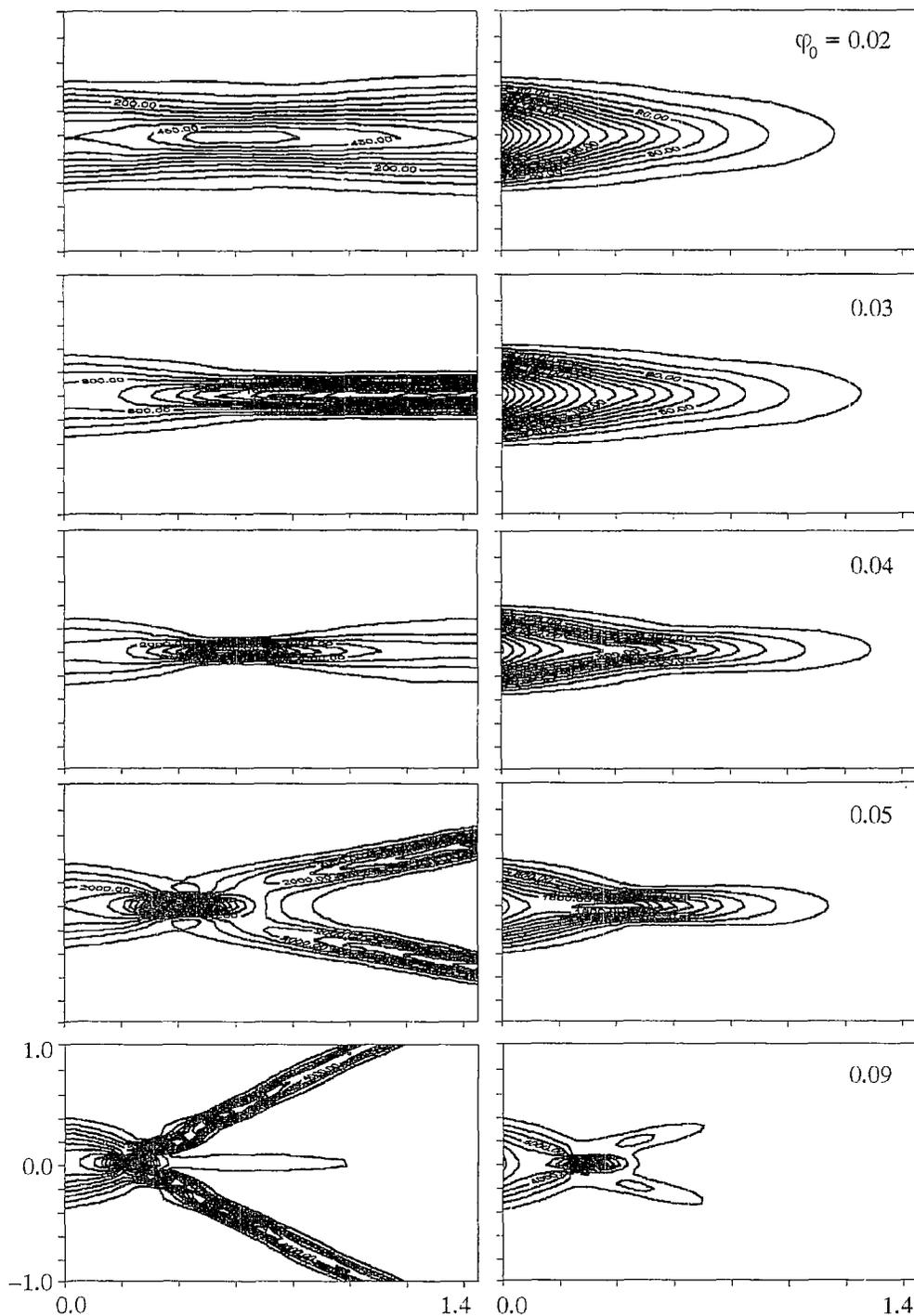


Рис. 2. Линии равного уровня величины  $|\phi|^2$  для различных значений амплитуды  $\phi_0$  входного сигнала в среде без диссипации (левая колонка) и в среде с диссипацией (правая колонка) на частоте  $f_1=5.82$  ГГц

$\phi_0 > \phi_{th}^0$  режим волноводного распространения сохраняется, но поведение пучка имеет осциллирующий характер.

В интервале амплитуд волны  $\phi_0 \approx 0.05-0.09$  можно наблюдать результат развития неустойчивости волнового пучка относительно малых поперечных

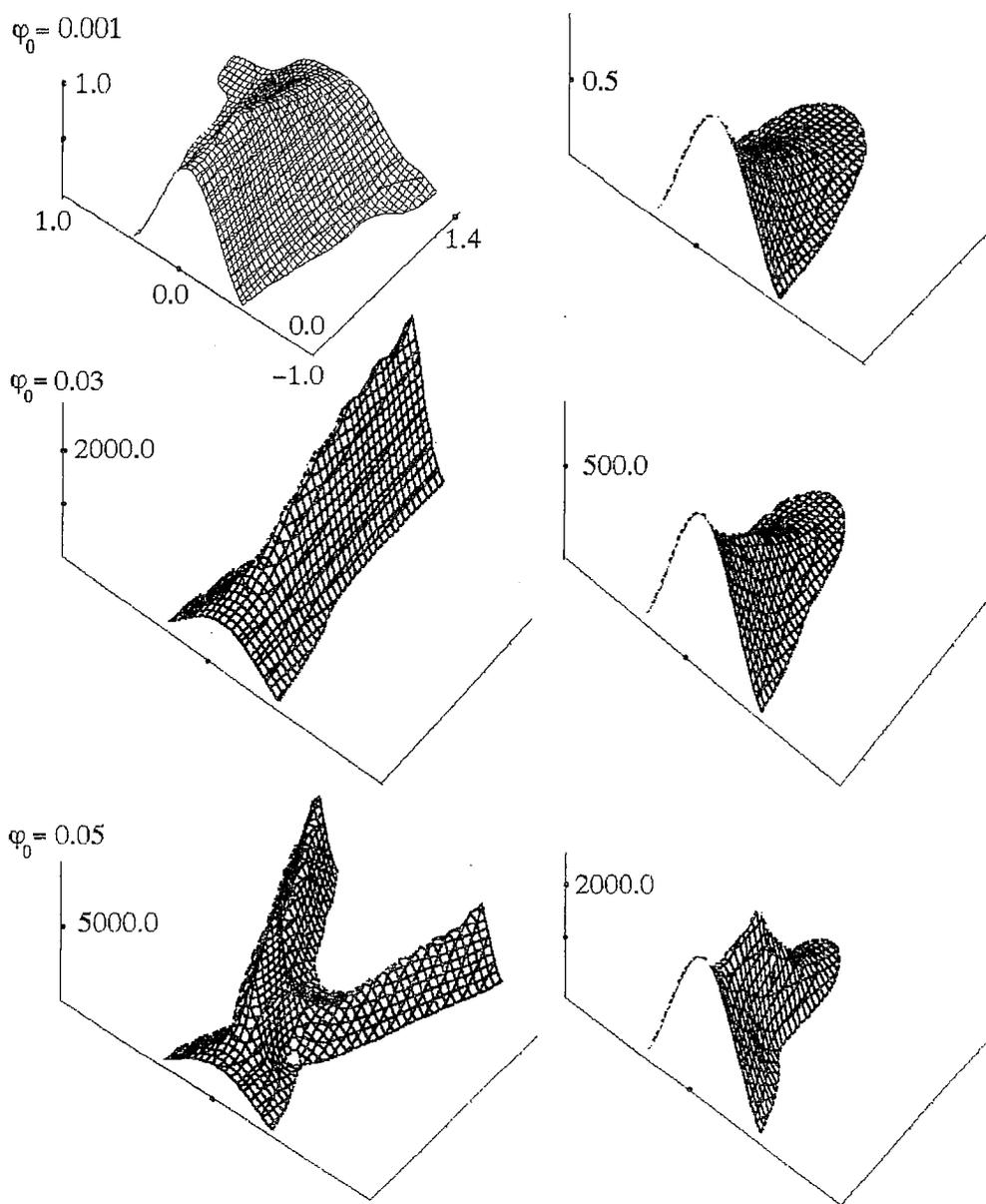


Рис. 3. Распределение интенсивности волнового пучка в бездиссипативной пленке (левая колонка) и в пленке с диссипацией (правая колонка) для различных значений амплитуды  $\varphi^0$  входного сигнала на частоте  $f_1=5.82$  ГГц

возмущений («распадной» неустойчивости [19]): энергия основного пучка перекачивается в два симметрично расположенных относительно него других пучка, распространяющихся в волноводном режиме под некоторым углом  $\theta$  к оси  $x$ . Все описанные режимы распространения стационарны во времени. Это означает, что, несмотря на выполнение при данных параметрах волны условия (5), развития неустойчивости относительно продольных возмущений (самофокусировки) не происходит.

Проанализируем результаты расчетов с помощью дисперсионного уравнения [18]

$$\Omega(Q_y) = \pm 1/2 [\beta_r Q_y^2 (4\gamma |\varphi^0|^2 + \beta_r Q_y^2)]^{1/2}, \quad (8)$$

связывающего, при отсутствии самомодуляции волны ( $Q_x=0$ ), частоту  $\Omega$  волны модуляции с поперечным волновым числом малых пространственных возмущений  $Q_y$ . Легко видеть, что в рассматриваемом случае ( $\beta_1 > 0, \gamma < 0$ ) при

$$4\gamma|\varphi|^2 + \beta_1 Q_y^2 < 0 \quad (9)$$

подкоренное выражение в (9) становится отрицательным и возмущения нарастают с инкрементом  $\Gamma = \text{Im}\Omega(Q_y)$ .

В численном эксперименте допустимый интервал значений  $Q_y$  определяется шириной пленки и волновым числом  $k$

$$2\pi/L_y < Q_y \ll k. \quad (10)$$

При фиксированном значении амплитуды на входе из выражения (9) получим, что диапазон волновых чисел  $Q_y$ , соответствующих неустойчивым поперечным возмущениям, ограничен сверху значением  $Q_y \leq Q_y^0 = [-4\gamma|\varphi|^2/\beta_1]^{1/2}$ . Максимальным инкрементом  $\Gamma_{\max} = \gamma|\varphi|^2$  обладают возмущения с волновыми числами  $Q_y^* = Q_y^0/2^{1/2}$ , а характерная длина развития неустойчивости таких возмущений равна  $L^* = V_g/\Gamma_{\max}$ . Значения параметров  $Q_y^0, Q_y^*, \lambda^* = 2\pi/Q_y^*, \Gamma_{\max}$  и  $L^*$  при значениях параметров волны, отвечающих рис. 2, показаны в табл. 2. Отметим, что при расчетах мы ограничились уровнем входных сигналов  $\varphi^0 \leq 0.1$ . При этом оказываются выполненными два существенных требования применимости НУШ. Во-первых, амплитуда волны оказывается достаточно мала  $\varphi \ll 1$  [1]. Во-вторых, в указанном диапазоне  $\varphi^0$  и при выбранных параметрах волны между длиной волны ООМСВ  $\lambda$  и характерной длиной развития неустойчивости выполняется соотношение  $L^* \leq \lambda/3$ .

Сопоставляя данные табл. 2 и результаты численного эксперимента можно заметить, что самофокусировка пучка начинает проявляться при таких значениях входных амплитуд  $\varphi^0_{th}$ , когда неустойчивыми оказываются возмущения с  $Q_y^0 = 2\pi/a$ . Пучок ООМСВ заметно фокусируется, если апертура антенны  $a$  и длина волны наиболее быстро нарастающего возмущения  $\lambda^* = 2\pi/Q_y^*$  связаны соотношением  $a/\lambda^* \approx 1$ . С помощью (9) легко убедиться, что указанное условие будет выполняться при значениях входных амплитуд  $\varphi^* = 2^{1/2}\varphi^0_{th}$ . При  $\varphi^* < \varphi^0 \leq 2\varphi^*$  выполняется

Таблица 2

$\varphi^0$	$Q_y^0, \text{см}^{-1}$	$Q_y^*, \text{см}^{-1}$	$\lambda^*, \text{см}$	$\Gamma_{\max}, \text{МКС}^{-1}$	$L^*, \text{см}$	$R_f^{\text{числ}}, \text{см}$	$R_f^{(11)}, \text{см}$
0.01	3.7	2.6	2.42	0.73	4.79	—	2.05
0.02	7.4	5.2	1.19	2.92	1.20	—	1.03
0.03	11.1	7.9	0.79	6.57	0.53	0.7	0.68
0.04	14.8	10.6	0.59	11.7	0.30	0.5	0.51
0.05	18.5	13.2	0.48	18.3	0.19	0.4	0.41
0.06	22.2	15.9	0.40	26.3	0.13	—	0.34
0.07	25.9	18.5	0.34	35.8	0.10	—	0.29
0.08	29.6	21.2	0.30	46.7	0.075	—	0.25
0.09	33.3	23.8	0.26	59.1	0.059	0.25	0.23
0.10	37.0	26.4	0.24	73.0	0.048	—	0.21

Примечание.  $R_f^{\text{числ}}$  и  $R_f^{(11)}$  — расстояния от входной антенны до нелинейного фокуса, полученные в численном эксперименте и с помощью выражения (11), соответственно.

соотношение  $a/\lambda^* < 2$ , и волновой пучок распространяется как единое целое, не разбиваясь на каналы, в режиме «осциллирующего» волновода. При  $2\varphi^* < \varphi^0 \leq 3\varphi^*$  выполняется соотношение  $2 < a/\lambda^* \leq 3$  и волновой пучок разбивается на два сфокусированных канала.

Следует отметить, что все наблюдаемые в численном эксперименте для бездиссипативного случая режимы соответствуют описанным в [18,19] решениям квазиоптического уравнения нелинейной оптики.

Обсудим положение нелинейного фокуса  $R_f$ , которое определим как расстояние от антенны, на котором ширина пучка  $W_f$  минимальна. Из рис. 2 и табл. 2 видно, что расстояние от входной антенны до местонахождения нелинейного фокуса и ширина пучка в точке фокуса тем меньше, чем больше амплитуда волны на входе. Оказалось, что для нашего случая значения  $R_f$  можно достаточно точно оценить с помощью соотношения

$$R_f \approx R_{nl}/3, \quad (11)$$

где  $R_{nl}$  характеризует «силу» нелинейной рефракции [19]. Выражения для  $R_{nl}$  применительно к используемым нами коэффициентам НУШ можно записать в виде

$$R_{nl} = aV_g [1/(2\beta_r \gamma|\varphi^0|^2)]^{1/2}.$$

Выше в (11) введен множитель  $1/3$  для лучшего согласования с результатами численного эксперимента, что обусловлено, по-видимому, отличием выбранного нами профиля пучка от параболического профиля, используемого в [19]. Это несоответствие может привести к возникновению абберационной картины самовоздействия двумерного пучка, проявляющейся в «размытии» фокуса. Кроме того, выражение для  $R_{nl}$  было получено в [19] без учета влияния дисперсионного расплывания, которое в численном эксперименте присутствует.

В условиях «распадной» неустойчивости каналы начинают формироваться на расстояниях  $x > R_f$ , хотя характерная длина развития  $L^*$  таких процессов оказывается меньше или порядка  $R_f$  (см. табл. 2). То обстоятельство, что процесс самофокусировки пучка как целого на длине  $R_f$  выдерживает конкуренцию с распадами пучка на отдельные каналы можно объяснить достаточной «гладкостью» профиля пучка, которая обеспечивает отсутствие в его пространственном спектре компонент порядка  $Q^*$ .

Рассмотрим теперь распространение пучка ООМСВ в пленке с потерями, показанное в правых колонках на рис. 2 и 3. Очевидно, что в присутствии потерь неустойчивыми могут оказаться возмущения с инкрементом  $\Gamma > \alpha$ . Из рис. 2 и табл. 2 следует, что при  $\varphi^0 \geq \varphi_{nl}^0 = 0.03$  и при выбранном значении параметра потерь  $\alpha$  (см. табл. 1) становится заметным проявление нелинейной самофокусировки. В интервале  $0.03 \leq \varphi^0 \leq 0.04$  это проявление еще очень слабое. Как видно из табл. 3, значение  $R_f$  при этом сравнимо с диссипативной длиной  $l_d = V_g/\alpha \approx 1$  см. Явление нелинейной самофокусировки хорошо наблюдается при  $\varphi^0 = 0.05$ . В этом случае величина  $R_f$  в два раза меньше  $l_d$ . При  $R_f < l_d/3$  процесс развития самофокусировки на длине пленки  $l$  порядка  $2R_f$  мало отличается от бездиссипативного случая. А именно, расстояние до нелинейного фокуса и поперечный размер пучка в точке фокуса имеют примерно одни и те же значения в консервативной среде и в среде с диссипацией. Кроме того, хорошо виден распад основного пучка на отдельные каналы, успевшие сформироваться на длине  $l$ .

Уменьшение амплитуды волны за счет линейного затухания приводит к тому, что нелинейная поправка к фазе, сдерживающая расплывание пучка, становится по мере удаления от антенны все меньше и, начиная с некоторого  $x = x^*$ , поведение пучка ничем не отличается от его поведения в линейной среде. На рис. 4 показаны линии равного уровня фазы комплексной амплитуды волны  $\Psi(x, y)$  в линейном

Таблица 3

$\varphi^0$	$Q^0, \text{см}^{-1}$	$Q^*, \text{см}^{-1}$	$\lambda^*, \text{см}$	$\Gamma_{\text{max}}, \text{МКС}^{-1}$	$L^*, \text{см}$	$R_{\text{числ}}, \text{см}$	$R_f^{(11)}, \text{см}$
0.01	7.5	5.4	1.17	0.70	4.13	—	4.4
0.02	15.0	10.7	0.59	2.80	1.03	2	2.2
0.03	22.5	16.1	0.39	6.3	0.46	1.3	1.46
0.04	30.0	21.4	0.29	11.2	0.26	1.0	1.09
0.05	37.5	26.8	0.23	17.5	0.17	0.9	0.87
0.06	44.9	32.1	0.20	25.2	0.11	0.7	0.73
0.07	52.4	37.5	0.17	34.3	0.084	0.6	0.63
0.08	60.0	42.8	0.15	44.8	0.065	0.55	0.55
0.09	67.4	48.2	0.13	56.7	0.051	0.5	0.49
0.10	74.9	53.2	0.12	70.0	0.041	0.45	0.44

случае (рис. 4, а), когда порог самофокусировки не достигнут, и в нелинейном (рис. 4, б), когда этот порог превышен. Видно, что в нелинейном случае при  $x > x^*$  фаза комплексной амплитуды волны ведет себя аналогично линейному случаю.

Результаты расчетов при значениях параметров волны на частоте  $f_2$  (см. табл. 1) показаны на рис. 5. В табл. 3 приведены значения параметров  $Q_y^0, Q_y^*, \lambda^*, \Gamma_{\text{max}}$  и  $L^*$ , отвечающих этому случаю. Сопоставление результатов, полученных для частот  $f_1$  и  $f_2$  в бездиссипативном случае (см. левые колонки на рис. 2 и 5), показывает, что в соответствии с (8) порог  $\varphi_{th}^0$  самофокусировки ООМСВ на частоте  $f_2$  уменьшается по сравнению с соответствующим порогом на частоте  $f_1$  в два раза:

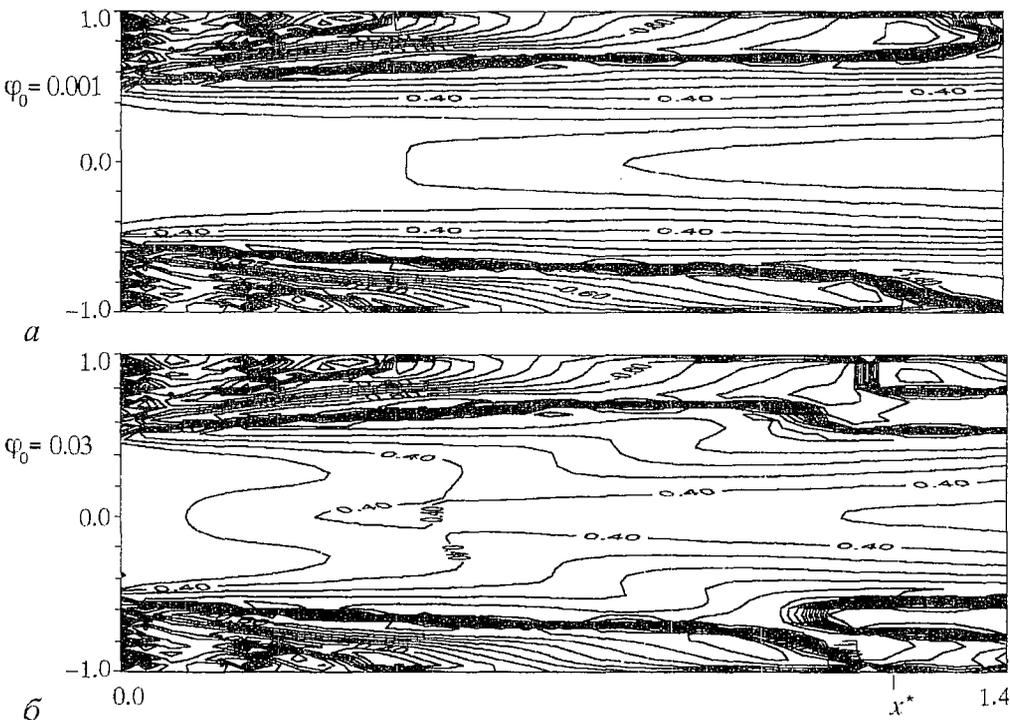


Рис. 4. Вид линий равного уровня фазы  $\Psi(x, y)$  комплексной амплитуды волны при  $\varphi^0 < \varphi_{th}^0$  (а) и при  $\varphi^0 > \varphi_{th}^0$  (б) на частоте  $f_1 = 5.82$  ГГц

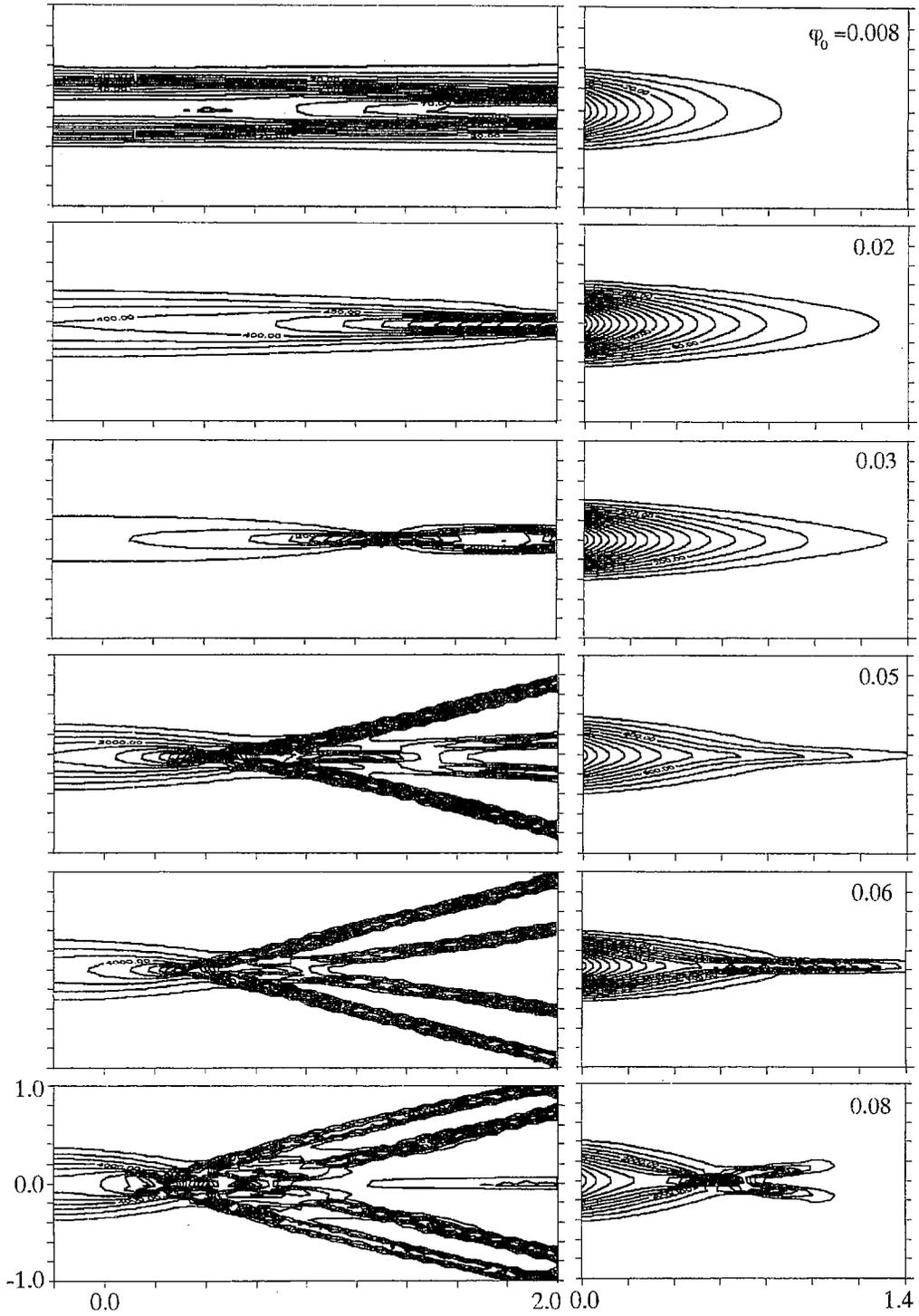


Рис. 5. Линии равного уровня величины  $|\varphi|^2$  для различных значений амплитуды  $\varphi^0$  входного сигнала в среде без диссипации (левая колонка) и в среде с диссипацией (правая колонка) на частоте  $f_2=5.7$  ГГц

$$\varphi_{th}^0(f_1)/\varphi_{th}^0(f_2) \approx [\beta_1(f_1)\gamma(f_2)/[\beta_1(f_2)\gamma(f_1)]]^{1/2} \approx 2.$$

Из сравнения значений параметров  $Q_y^0$  и  $Q_y^*$ , отвечающих одинаковым уровням входного сигнала в табл. 2 и 3, видно, что на частоте  $f_2$  ООМСВ неустойчива к более «коротковолновым» поперечным возмущениям по сравнению с частотой  $f_1$ . В результате на частоте  $f_2$  уже при  $\varphi^0=0.05$  «длина волны» наиболее быстро растущего возмущения оказывается  $\lambda^* < a/4$ , и пучок разбивается на четыре канала. При  $\varphi^0=0.08$  имеем  $\lambda^* < a/5$ , и число каналов увеличивается до пяти, причем образующаяся в результате система волновых пучков имеет сложный характер.

Диссипация (см. правые колонки на рис. 2 и 5) гораздо сильнее влияет на развитие поперечной неустойчивости ООМСВ на частоте  $f_2$ . Обусловлено это тем, что величина  $R_f$ , определяющая расстояние до нелинейного фокуса в бездиссипативном случае, при одинаковых уровнях входного сигнала у пучка ООМСВ на частоте  $f_2$  всегда почти в два раза больше, чем на частоте  $f_1$  (см. табл. 2 и 3). Кроме того, по мере укорочения длины ООМСВ происходит уменьшение диссипативной длины  $l_d \approx 0.8$  см, вызванное уменьшением групповой скорости. В результате необходимое для самофокусировки условие  $R_f < l_d$  удается достичь лишь при  $\varphi^0 \approx 0.05-0.06$ . А при  $\varphi^0=0.08$  наблюдается разбиение пучка только на два канала.

### Заключение

Таким образом в рамках подхода, основанного на численном решении нестационарного двумерного НУШ с диссипативным членом, изучены явления самовоздействия ограниченных волновых пучков дипольных ООМСВ в пленках ЖИГ. Показано, что при значениях коэффициентов НУШ и уровнях мощности типичных для дипольных ООМСВ в пленках ЖИГ наблюдаются явления самофокусировки и самоканализации волновых пучков. В бездиссипативном приближении характер процессов самофокусировки и самоканализации и особенности их развития в целом согласуются с известными результатами нелинейной оптики. Показано, что при коэффициентах линейного затухания в НУШ, отвечающих типичным пленкам ЖИГ, процессы самофокусировки и самоканализации ООМСВ могут наблюдаться в том случае, если величина  $R_f$  оказывается меньше диссипативной длины.

*Работа поддержана грантами РФФИ № 96-02-16168, № 97-02-18614 и Министерства науки и высшей технической политики РФ № 3.911/2-96*

### Библиографический список

1. Nonlinear microwave signal processing: towards a new range devices / Eds R.Marcelli and S.A.Nikitov // NATO ASI series. High technology. Kluwer Academic Publishers, 1996. Vol.20.
2. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, вып.2. С. 606.
3. Калинин Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. Наблюдение спин-волновых солитонов в ферромагнитных пленках // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, № 7. С. 343.
4. Калинин Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. Спин-волновые солитоны в ферромагнитных пленках: наблюдение модуляционной неустойчивости спиновых волн при непрерывном возбуждении // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, № 15. С. 936.
5. Дудко Г.М., Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. Удвоение периода и хаос при четырехмагнетонном распаде магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. С. 736.
6. Chen M., Tsankov M.A., Nash J.M., Patton C.E. Backward volume wave solitons in a yttrium iron garnet film // Phys.Rev.B. 1994. Vol.49. P. 12773.

7. *Калиникоз Б.А., Ковшиков Н.Г.* Наблюдение столкновения солитонов огибающей спиновых волн в ферромагнитных пленках // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 60, вып.4. С. 290.

8. *Nikitov S.A., Su Jun, Marcelli R., De Gasperis P.* Modulation instability of surface magnetostatic waves in ferromagnetic films // JMMM. 1995. Vol. 145. L.6.

9. *Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Развитие модуляционной неустойчивости магнитостатических волн (МСВ) в ферритовых пленках // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып.2. С. 55–60.

10. *Slavin A.N., Dudko G.M.* Numerical modelling of spin wave soliton propagation in ferromagnetic film // JMMM. 1990. Vol. 86. P. 15.

11. *Славин А.Н., Дудко Г.М.* Переход от модуляционной неустойчивости к хаосу в пленках железоиттриевого граната // ЖТФ. 1989. Т. 31, вып.6. С. 114.

12. *Boardman A.D., Nikitov S.A., Xie K., Mehta H.* Bright magnetostatic spin-wave envelope solitons in ferromagnetic films // JMMM. 1995. Vol. 145. P. 357.

13. *Boyle J.W., Nikitov S.A., Boardman A.D., Booth J.G.* Self-channeling and nonlinear beam shaping of magnetostatic waves in ferromagnetic films // Phys.Rev.B. 1996. Vol. 53, № 18. P. 12173.

14. *Damon R.W., Eshbach J.R.* Magnetostatic modes of ferromagnetic slab // J. Phys. Chem. Sol. 1961. Vol. 19, № 3/4. P. 308.

15. *Самарский А.А.* Теория разностных схем // М.: Наука, 1983. С. 446.

16. *Валяевский А.Б., Ваиковский А.В., Гречушкин К.В., Стальмахов А.В.* Угловой спектр и спектр направлений групповых скоростей магнитостатических волн // РЭ. 1987. Т. 39, № 9. С. 1830.

17. *Рыскин Н.М.* Связанные нелинейные уравнения Шредингера для описания распространения многочастотных волновых пакетов в нелинейной среде с дисперсией // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, вып.5 (11). С. 1542.

18. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн // М.: Наука, 1984. С.432.

19. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990.

*Саратовский филиал  
Института радиотехники и  
электроники РАН*

*Поступила в редакцию 11.12.97*

## **SELF-FOCUSING OF BACKWARD VOLUME MAGNETOSTATIC WAVE BEAMS IN MAGNETIC FILMS: NUMERICAL EXPERIMENT**

*G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov*

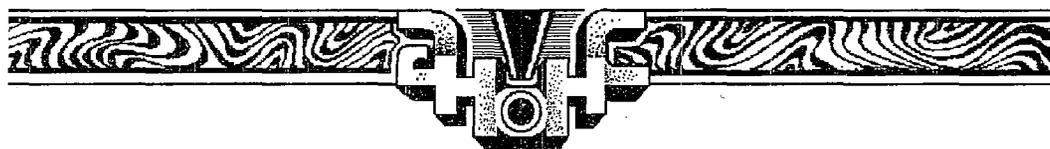
Self-focusing and self-channeling of backward volume magnetostatic waves propagating in magnetic films were studied in the framework based on the numerical solution of the two-dimensional nonlinear Schrodinger equation with dissipative term.



*Дудко Галина Михайловна* – родилась в 1961 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1983). Работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – волновые явления в магнитных пленках.



*Филимонов Юрий Александрович* – родился в 1955 году. Окончил Московский физико-технический институт (1979). Работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – волновые явления в магнитных пленках.



**Вышло в свет учебное пособие для вузов**

**Трубецков Д.И.** Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. 392 с. 6 с. илл. ISBN 5-900651-48-1.

Современная наука о колебаниях и волнах представлена в книге своими эффектами и явлениями, встречающимися в медицине, химии, экологии, гидродинамике, электронике, экономике, социальных и других науках. Цель книги – показать, что такие понятия как колебания и волны, неустойчивость и нелинейность, хаос и структуры позволяют понять единство современной картины мира. Приведено множество примеров из литературных прозаических и поэтических произведений, интересных историй о событиях и людях. Математический аппарат книги прост и предполагает знание школьного курса математики. Широко используется анализ размерности.

Художник и автор (совместно с Козьмой Пругковым) «Плодов раздумий» к.ф.-м.н. Д.В. Соколов.

Более подробная информация о содержании пособия в журнале Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 1997. Т. 5, № 4. С. 120.

*Индивидуальные заказы на наложенный платеж (40 руб.) направлять по адресу*

*410601 Саратов, главпочтамт, а/я 3150 Лёвиной Н.Н.*

E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru





Изв. вузов «ПНД», т.5, № 6, 1997

УДК 537.525

## ОБРАЗОВАНИЕ ФРОНТА ИОНИЗАЦИИ В ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЕ

*Д.А. Морозов, В.А. Степанов, М.В. Чиркин*

Экспериментально исследованы закономерности самовозбуждения колебаний в окружающей металлическим экраном газоразрядной плазме низкого давления. Идентифицированы механизмы нелокальных бифуркаций предельного цикла, соответствующего нестационарной форме электрического разряда. Реконструированы мгновенные распределения потенциала электрического поля вдоль плазменного канала. Обнаружен движущийся от катода к аноду уединенный фронт ионизации, зарождающийся в результате возникновения пространственно неоднородных колебаний поля большой амплитуды.

### Введение

Важное направление развития физики газового разряда связано с высокоскоростными волнами ионизации (ВВИ), в которых область сильного электрического поля (фронт ионизации) движется вдоль разрядного промежутка. Из фронта ионизации к окружающему промежутку проводящему экрану течет ток смещения, а за фронтом значительно увеличивается степень ионизации газа. Результаты экспериментальных исследований ВВИ и современные представления о механизмах их распространения обобщены в обзорах [1,2]. Высокая скорость волн ( $10^8 - 10^{10}$  см/с), эффективное возбуждение частиц газа и отсутствие контракции (шнурования разряда) делают это явление перспективным для практического применения.

В одномерном приближении распространение ВВИ описывает уравнение нелинейной диффузии потенциала  $\varphi(x,t)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{e\mu_e}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = 0, \quad (1)$$

дополненное уравнением баланса для количества электронов в единице длины плазменного столба  $N_e(x,t)$

$$\frac{1}{N_e} \frac{\partial N_e}{\partial t} = \Omega \left( N_e, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Ось  $Ox$  направлена вдоль разрядного канала от высоковольтного электрода к заземленному,  $c$  — емкость единицы длины линии «плазменный столб —

металлический экран»,  $\mu_e$  – подвижность электронов. Функция  $\Omega(N_e, \partial\phi/\partial x)$  – разность частот генерации и гибели заряженных частиц, зависящая от особенностей этих процессов в конкретных условиях возбуждения плазмы.

Уравнения (1), (2) справедливы, если скорость волн существенно меньше скорости света, а их длина на порядок и более превышает пространственные масштабы процессов амбиполярной диффузии и релаксации энергетического спектра электронов. В рамках указанных ограничений система уравнений (1), (2) описывает распространение любых возмущений в окружающей металлическим экраном газоразрядной плазме. Кинетические страты, также представляющие собой последовательность движущихся областей сильного электрического поля и высокой скорости ионизации [3], в круг рассматриваемых явлений не входят, поскольку для их существования имеют принципиальное значение нелокальные функции распределения электронов по энергиям и продольная диффузия ионов.

К настоящему времени подробно изучены волны ионизации, возникающие при импульсном пробое газа, когда скорость роста напряжения на высоковольтном электроде превышает  $10^{12}$  В/с. Однако, в положительном столбе гелиевого разряда экспериментально обнаружены волны тока и электрического поля, распространяющиеся со скоростью порядка  $10^8$  см/с [4], близкой к скоростям распространения ВВИ. Для их возбуждения достаточно промодулировать гармоническим сигналом потенциал анода относительно заземленного катода. В низкочастотном диапазоне пространственный декремент затухания обнаруженных волн отрицателен, что вызвано ионизационной неустойчивостью плазмы ( $\partial\Omega/\partial N_e > 0$ ). В работе [5] выделен механизм неустойчивости слабоионизированной низкотемпературной плазмы, связанный с особенностями кинетики прямой ионизации и гибели заряженных частиц в условиях, когда произведение давления гелия на радиус разрядного канала оказывается меньше 0.2 мм рт. ст.·см. Малое время релаксации концентрации электронов в узком разрядном канале при низком давлении газа ( $\tau_e \sim 10^{-8}$  с) создает в этом случае возможность для развития неустойчивости в длинной линии «плазменный столб – металлический экран».

Известно, что движущийся фронт ионизации может образоваться в результате перераспределения потенциала внутри разрядного промежутка [2]. В случае роста возмущений в плазменном столбе этот эффект создает предпосылки реализации нестационарного режима поддержания разряда, при котором на определенной стадии эволюции волнового процесса зарождается фронт ионизации. Такая форма разряда представляет практический интерес, поскольку не требует применения высоковольтной наносекундной техники для возбуждения ВВИ.

Задача настоящей работы заключается в поиске самосогласованного нестационарного режима поддержания электрического разряда, в плазменном столбе которого образуется движущийся фронт ионизации.

## 1. Организация эксперимента

Эксперименты проведены с наполненными гелием стеклянными трубками с длинами 125 мм и 62.5 мм и внутренним диаметром разрядного канала 1 мм. Аноды трубок имеют форму диска диаметром 20 мм, холодные алюминиевые катоды выполнены в виде полых цилиндров диаметром 25 мм и длиной 60 мм. Внутрь катода на глубину 25 мм введен разрядный канал. Давление гелия варьировалось в пределах, соответствующих условиям реализации исследованного в [5] механизма неустойчивости плазмы.

Для обнаружения фронта ионизации требуется фиксировать мгновенные распределения потенциала вдоль разрядного канала. Эти измерения выполнены с помощью регистрации зарядов, индуцированных на поверхности окружающего плазму экрана. Экран изготовлен в виде набора секций 1 (рис. 1, а), заземленных через резисторы с малым сопротивлением (50 Ом) или конденсаторы емкостью  $C_{ин} = 1.5$  нФ. Регистрация колебаний зарядов секций осуществлялась с помощью

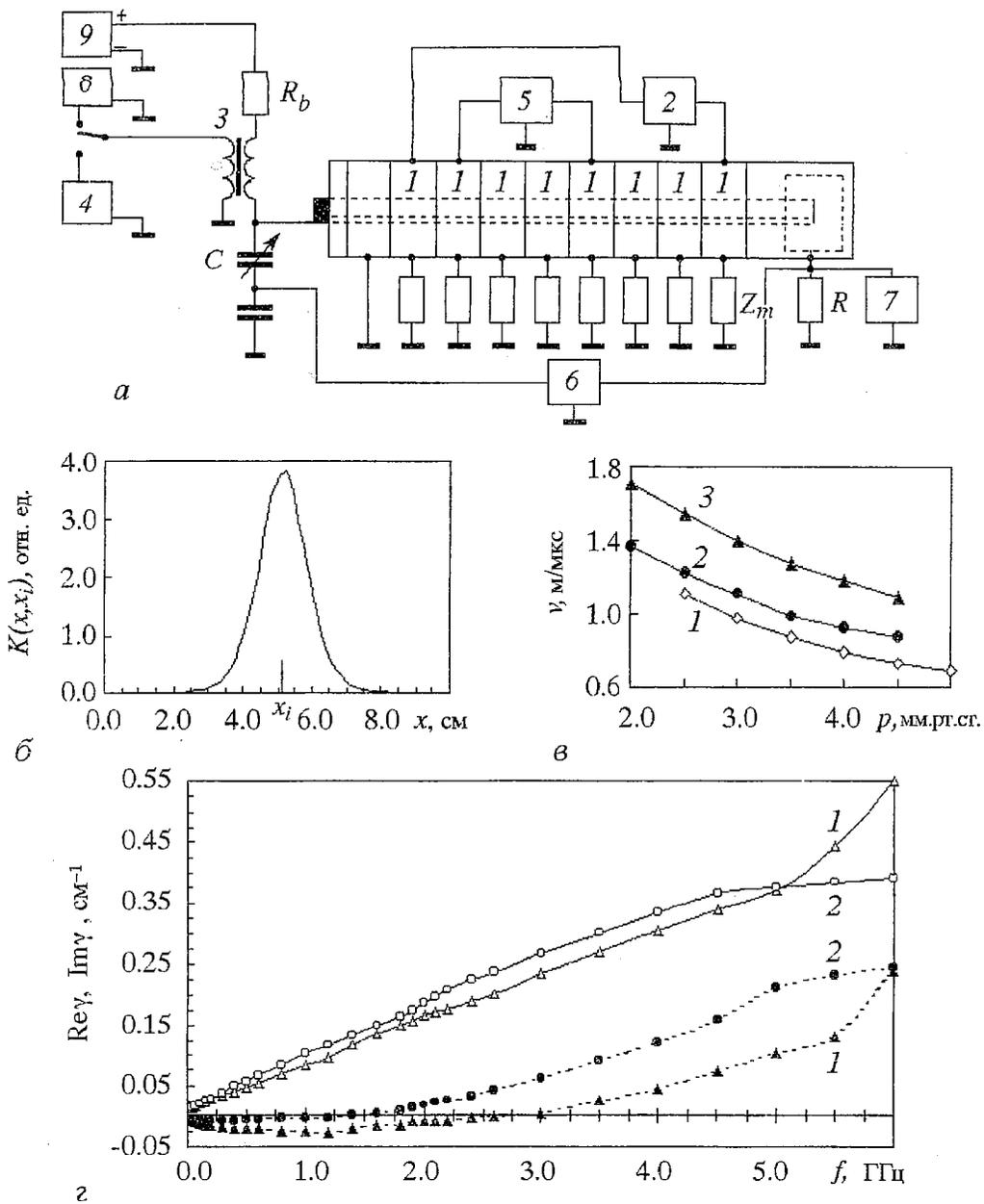


Рис. 1. Измерение распределений потенциала вдоль плазменного столба: *a* – схема экспериментальной установки (*1* – секции экрана, *2* и *6* – двухлучевые осциллографы С1-74, *3* – широкополосный трансформатор, *4* – генератор гармонических колебаний, *5* – измеритель разности фаз ФК2-12, *7* – анализатор спектра СК4-59, *8* – генератор импульсов, *9* – источник постоянного напряжения); *б* – аппаратная функция системы регистрации; *в* – зависимость групповой скорости волн от условий возбуждения разряда (постоянная составляющая тока разряда, мА: *1* – 4.5; *2* – 6.0; *3* – 10.0); *г* – кривые дисперсии (давление гелия, мм рт.ст.: *1* – 3.0; *2* – 4.5). Пунктир – действительная часть постоянной распространения, сплошные линии – мнимая часть

двухлучевого осциллографа 2. В случае использования резисторов ( $Z_m=R$ ) сигнал пропорционален току смещения, текущему на измерительную секцию, а при заземлении секции через конденсаторы емкостью  $C_m$  ( $Z_m=1/(i\omega C_m)$ ) – заряду  $q_i$ .

Поскольку в условиях эксперимента потенциал измерительной секции не равен нулю, регистрация заряда секции приводила к перераспределению

индуцированного заряда по остальной части экрана. Для того, чтобы вызванная этим эффектом методическая погрешность не искажала результаты измерений, номиналы элементов измерительной цепи подобраны так, чтобы выполнялось соотношение  $C'u_i \ll q_i$ , где  $q_i = C_m u_i$  – заряд, индуцированный на  $i$ -й секции экрана,  $u_i$  – потенциал  $i$ -й секции,  $C'$  – сумма всех частичных емкостей выделенной секции относительно остального экрана и электродов разрядной трубки.

Связь зарядов, индуцированных на секциях экрана, с распределением зарядов в плазменном столбе, найденная с помощью теоремы Шокли – Рамо [6], показывает, что в случае значительного превышения диаметра экрана над диаметром разрядного канала (в условиях эксперимента их соотношение равно 25:1) заряды секций не зависят от формы поперечного распределения заряда внутри плазмы. Применение в такой ситуации теоремы Грина в соответствии с развитым в работе [7] подходом позволяет связать заряд  $i$ -й секции с продольным распределением потенциала:

$$-q_i = 8\pi\epsilon\epsilon_0 r_0 / l \int_0^l \varphi(x,t) K(x,x_i) dx, \quad (3)$$

где  $x_i$  – координата центра секции,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость стекла,  $l$  – расстояние от анодного среза разрядного канала до точки ввода трубки в полость катода,  $r_0$  – радиус разрядного канала.

Интегральное уравнение (3) не учитывает влияния электродов на величину индуцированного заряда. Тем не менее, оно оказывается в достаточной степени точным, если измерительная секция удалена от электродов на расстояние не менее 15 мм. Ядро уравнения  $K(x,x_i)$ , рассчитанное аналитически в случае, когда длина измерительной секции составляет 9 мм, приведено в виде графика на рис. 1,б. Пространственное разрешение системы регистрации позволяет восстановить распределение потенциала вдоль плазменного столба, если характерный масштаб изменения напряженности продольного электрического поля в нем не менее 20 мм.

Разработанная методика использована для измерения характеристик пространственно неоднородных колебаний, возникающих при малом возмущении потенциала анода, реакция плазмы на которое является линейной. В случае гармонической модуляции распределение потенциала вдоль разрядного канала имеет вид

$$\varphi(x,t) = U_{a,0} - E_0 x + \text{Re}\{[U_{\text{пад}} \exp(-\gamma x) + U_{\text{отр}} \exp(\gamma x)] \exp(i\omega t)\}, \quad (4)$$

где  $U_{a,0}$ ,  $E_0$  – постоянные составляющие напряжения на аноде и напряженности продольного электрического поля;  $U_{\text{пад}}$ ,  $U_{\text{отр}}$  – комплексные амплитуды падающей и отраженной от катода волн;  $\omega/2\pi$  – частота модуляции;  $\gamma$  – комплексная постоянная распространения волн, частотную зависимость которой позволяет установить линеаризация уравнений (1), (2),

$$\gamma = [i\omega cz(i\omega)]^{1/2}, \quad (5)$$

где  $z(i\omega)$  – импеданс единицы длины плазменного столба [5].

Для измерения величины  $\gamma$  в состав разрядной цепи включена вторичная обмотка широкополосного трансформатора 3, первичная обмотка которого соединена с генератором гармонических колебаний 4 (см. рис. 1, а). Амплитуды и фазы колебаний зарядов секций регистрировались измерителем разности фаз 5. Одновременно с помощью осциллографа 6 и анализатора спектра 7 контролировались напряжение на аноде и ток катода.

Экспериментально установленный ход дисперсии возбужденных волн иллюстрируют рис. 1, в, г. Групповая скорость, найденная по наклону линейного участка частотной зависимости мнимой части постоянной распространения в диапазоне 0.2 – 4 МГц, убывает с увеличением давления газа и при уменьшении

тока разряда. Для более высоких частот, приближающихся к величине  $1/(2\pi\tau_e)$ , частотная зависимость импеданса плазмы изменяет характер дисперсии.

Отрицательная величина действительной части постоянной распространения свидетельствует о возможности пространственного роста амплитуды волны. Частота, ограничивающая сверху диапазон усиления, быстро увеличивается по мере снижения давления газа и тока разряда. Обнаруженная особенность дисперсионной характеристики волн в плазме при ее малом возмущении указывает на возможность возбуждения пространственно неоднородных автоколебаний в условиях, когда давление гелия в разрядном канале меньше 3.5 мм рт. ст., а балластное сопротивление составляет сотни кОм.

Нелинейная динамика системы изучена по ее реакции на импульсное воздействие: на первичную обмотку трансформатора 3 от генератора 8 подавались импульсы напряжения длительностью 50 нс и с частотой следования, плавно регулируемой в диапазоне 50 – 300 кГц. Амплитуда импульсов на вторичной обмотке составляла 300 В (примерно 10% от постоянного напряжения на выходе источника питания). В качестве изменяемых параметров выбраны постоянное напряжение  $U_0$  на выходе высоковольтного источника питания 9 и емкость конденсатора  $C$ , подключенного параллельно трубке.

## 2. Идентификация бифуркационных механизмов

Наиболее простые последовательности бифуркаций автономного разряда наблюдались в случае плазменного столба длиной 62.5 мм. Соответствующая диаграмма состояний приведена на рис. 2, а, структуру которой определяют три границы.

Линия  $L_1$  соответствует потере устойчивости стационарного состояния. При ее достижении выполняются амплитудное и фазовое условия развития неустойчивости в распределенной системе [8]

$$\exp[-2\chi(\omega)l_c] \left| \frac{R_b i\omega c - \gamma(1+i\omega CR_b)}{R_b i\omega c + \gamma(1+i\omega CR_b)} \right| \left| \frac{Z_c(i\omega)i\omega c - \gamma}{Z_c(i\omega)i\omega c + \gamma} \right| = 1, \quad (6)$$

$$\arg \left[ \frac{R_b i\omega c - \gamma(1+i\omega CR_b)}{R_b i\omega c + \gamma(1+i\omega CR_b)} \right] + \arg \left[ \frac{Z_c(i\omega)i\omega c - \gamma}{Z_c(i\omega)i\omega c + \gamma} \right] - 2k(\omega)l_c = 2\pi n, \quad (7)$$

где  $n$  – целое число (в рассматриваемом случае короткой трубки  $n=1$ );  $R_b$  – балластное сопротивление;  $\chi = \text{Re}\gamma$ ;  $k = \text{Im}\gamma$ ;  $l_c$  – длина плазменного столба;  $Z_c(i\omega)$  – комплексное сопротивление прикатодных областей разряда, представляющих собой нагрузку линии «положительный столб разряда – проводящий экран». Для исследуемого диапазона условий частотные характеристики этих областей разряда подробно изучены в работе [9].

Пересечение линии  $L_1$  слева от точки А при уменьшении напряжения на выходе источника соответствует жесткому переходу к периодическим автоколебаниям, а справа – к самопроизвольному гашению разряда. Область II на бифуркационной диаграмме характеризуется сосуществованием двух аттракторов: состояния равновесия, соответствующего пересечению статической ВАХ разряда с нагрузочной прямой, и предельного цикла. Проекция предельного цикла на плоскость переменных «напряжение на аноде  $U$  – ток катода  $I$ » приведена на рис. 2, б. Здесь же показаны статическая ВАХ разряда (штриховая линия) и нагрузочная прямая (пунктир).

Две другие границы на рис. 2, а связаны с бифуркациями предельного цикла. Пересечение линии  $L_3$  сопровождается переходом от автоколебаний к стационарному состоянию. Для идентификации типа бифуркации предпринято изучение реакции системы, находившейся в стационарном состоянии, на

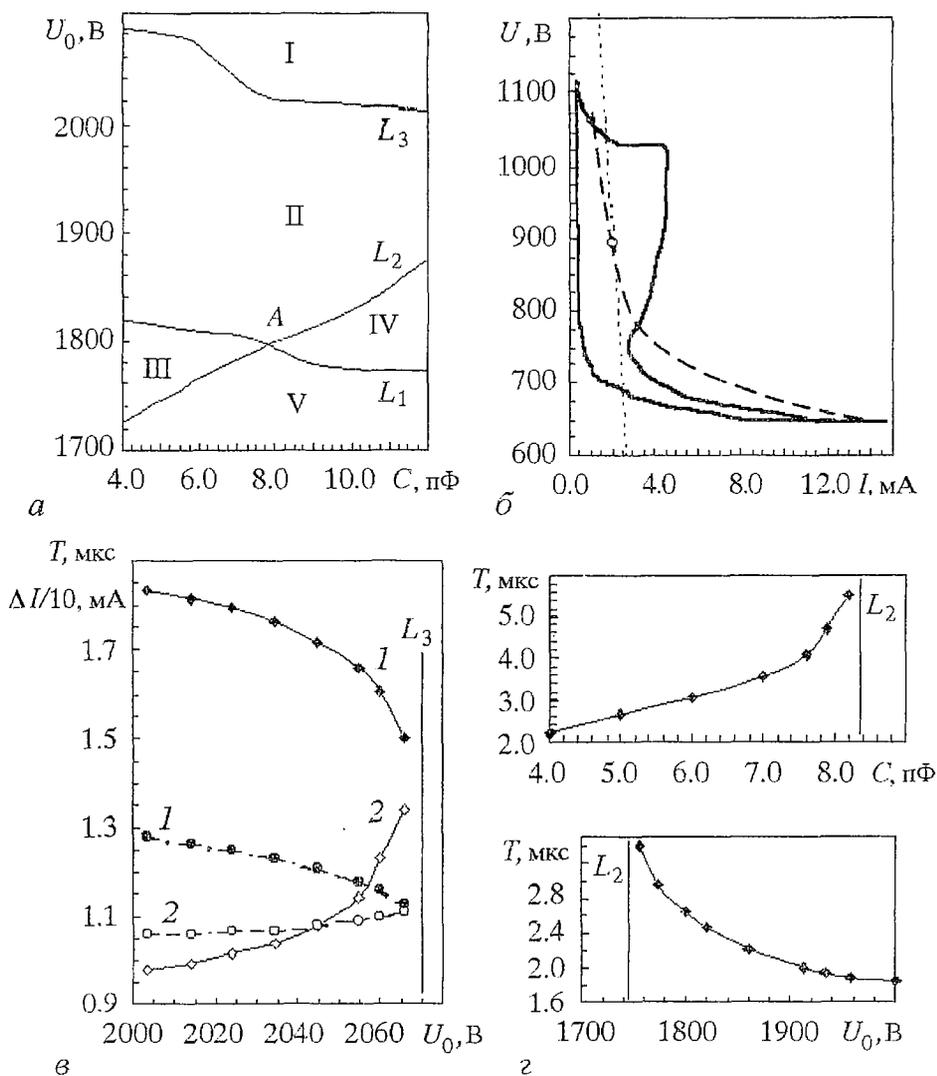


Рис. 2. Идентификация бифуркационных механизмов: *а* – бифуркационная диаграмма на плоскости управляющих параметров; *б* – проекция устойчивого предельного цикла; *в* – изменение параметров периодических орбит в окрестности линии  $L_3$  (*1* – устойчивый цикл, *2* – неустойчивый цикл, сплошные линии – амплитуда импульсов тока катода, пунктир – период колебаний); *г* – изменение параметров предельного цикла около линии  $L_2$

возмущение импульсами напряжения с большой скважностью. Колебания тока катода в промежутках между импульсами внешнего воздействия в зависимости от его параметров представляют собой последовательность импульсов с убывающей, нарастающей или неизменной амплитудой. Неавтономный режим с постоянной амплитудой импульсов тока может быть реализован во всей области II; около линии  $L_3$  его характеристики близки к характеристикам автоколебаний в автономном разряде (рис. 2, в). Полученный результат приводит к выводу о существовании неустойчивой периодической орбиты, отделяющей стационарное состояние от устойчивого предельного цикла. Выход на границу  $L_3$  сопровождается слиянием устойчивой и неустойчивой орбит в неглубокую кривую – полуустойчивый цикл.

Приближение к линии  $L_2$  (см. рис. 2, а) приводит к быстрому увеличению периода автоколебаний (рис. 2, г), а ее пересечение сопровождается срывом разряда, если перед этим система находилась в автоколебательном режиме. Характер изменения периода колебаний вблизи границы приводит к выводу о

возникновении в данной бифуркационной ситуации другой негрубой траектории – замкнутой петли сепаратрисы седла [10], которое находится в верхней точке пересечения ВАХ разряда с нагрузочной прямой.

Идентификация бифуркационных механизмов приводит к следующей трактовке диаграммы на рис. 2, а. В областях I, IV система устойчива лишь в нижней точке пересечения ВАХ разряда с нагрузочной прямой, причем во втором случае устойчивое состояние равновесия окружено неустойчивым предельным циклом. Область II характеризуется бистабильностью, а в области III предельный цикл является единственным аттрактором. Существующий в областях II, III предельный цикл появляется и исчезает в результате нелокальных бифуркаций в фазовом пространстве; локальный характер имеет лишь рождение–гибель неустойчивой периодической орбиты в окрестности состояния равновесия при пересечении границы  $L_1$ . В области V устойчивые формы разряда не реализуются.

### 3. Образование фронта ионизации в автономном нестационарном разряде

Увеличение длины плазменного столба до 125 мм усложняет картину: оказываются возможны два режима автоколебаний (рис. 3), области существования которых в пространстве параметров перекрываются, а механизмы рождения и гибели аналогичны описанным выше. Результаты реконструкции продольного распределения электрического поля в плазме путем решения обратной задачи (3) представлены на рис. 4 в форме мгновенных распределений потенциала на протяжении периода колебаний. Они соответствуют режиму, приведенному на рис. 3, а, и имеют следующую интерпретацию.

На интервале времени 0 – 1.0 мкс через плазму течет слабый ток, а конденсатор  $C$  заряжается от источника напряжения через балластное сопротивление; на что указывает близость скорости роста напряжения на аноде к величине  $U_0/R_b C$ . В разрядном канале формируется квазилинейное распределение потенциала с напряженностью продольного поля около 120 В/см, достаточной для роста концентрации заряженных частиц. Увеличение концентрации электронов вызывает быстрый подъем напряжения на катодном слое разряда, что находит отражение в увеличении потенциала в удаленных от анода частях разрядного канала и двукратном уменьшении напряженности поля в плазме (см. распределение потенциала при  $t=1.2$  мкс). Следует отметить малость соответствующего интервала времени (0.2 мкс) по сравнению с временами релаксации большинства процессов в катодной области гелиевого разряда [9]. Возмущение потенциала со

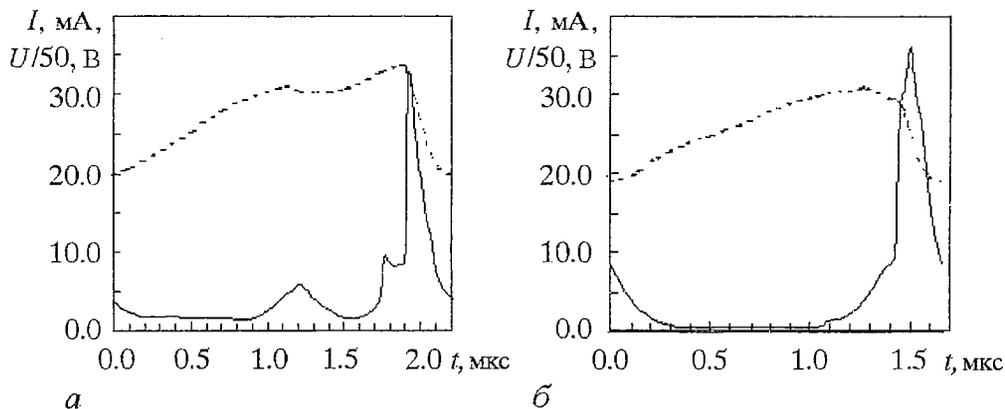


Рис. 3. Два режима периодических автоколебаний в окруженной проводящим экраном газоразрядной плазме (сплошные кривые – ток катода, пунктир – потенциал анода) с различными моментами времени образования фронта ионизации  $t'$ , мкс: а – 1.7; б – 1.35. Условия поддержания разряда:  $U_0=2763$  В,  $R_b=320$  кОм,  $C=4$  пФ, давление гелия 3 мм рт.ст., длина разрядного канала 125 мм

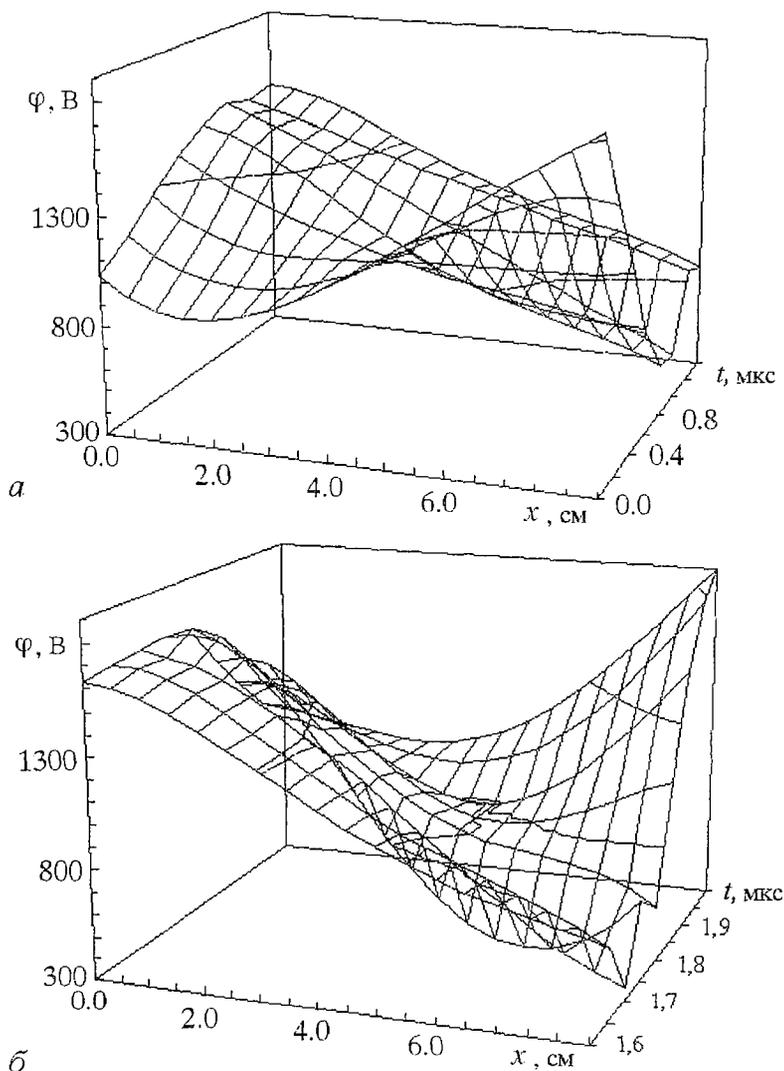


Рис. 4. Реконструированные мгновенные распределения потенциала вдоль плазменного канала для режима колебаний, приведенного на рис. 3, *a*

стороны катода вызывает колебания в распределенной системе «плазменный столб – металлический экран». Пространственное распределение колебаний имеет форму, напоминающую стоячую волну с двумя пучностями, одна из которых расположена около анода, а вторая – около точки с координатой  $x=2/3l_c$ . В течение интервала времени 1.7 – 1.8 мкс вдоль разрядного канала со скоростью близкой к  $5 \cdot 10^7$  см/с перемещается область сильного электрического поля, длина которой составляет около 4 см (рис. 5). Зарегистрированная величина напряженности поля (до 350 В/см) в этой области в несколько раз больше напряженности продольного поля (80 – 90 В/см) в соответствующем таким же внешним условиям разряде постоянного тока.

Качественно аналогичные результаты получены и для режима автоколебаний, приведенного на рис. 3, *б*. Однако, пространственно неоднородные колебания потенциала, возбужденные скачком напряжения на катодном слое разряда, имеют пучность только около анода. Область сильного поля, движущаяся от катода к аноду в этом случае также возникает. На рис. 6 отражен наблюдаемый результат ее распространения в виде движущегося к аноду импульса тока смещения  $I$  на секции экрана.

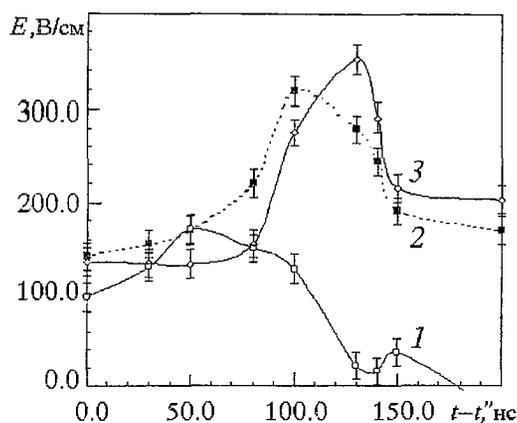


Рис. 5. Колебания напряженности продольного электрического поля в различных сечениях положительного столба при распространении фронта ионизации. Расстояния до анода  $x$ , см: 1 - 5.0; 2 - 3.5; 3 - 2.0. Момент времени, соответствующий образованию фронта ионизации,  $t' = 1.70$  мкс

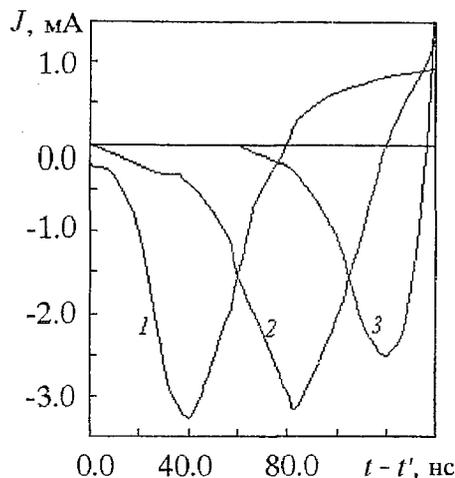


Рис. 6. Токи смещения на секции экрана при распространении фронта ионизации. Режим автоколебаний соответствует рис. 3, б. Расстояния от центров секций до анода, см: 1 - 7.85; 2 - 6.05; 3 - 4.25. Момент времени, соответствующий образованию фронта ионизации,  $t' = 1.35$  мкс

Полученные результаты позволяют заключить, что в плазменном канале возникает движущийся фронт ионизации. Обратная полярность импульса тока смещения свидетельствует о снижении потенциала электрического поля в плазме за фронтом ионизации, что согласуется с направлением его движения. Сделанный вывод подтверждает также большая величина тока, текущего на катод в течение интервала времени, непосредственно следующего за прохождением фронта. Происходящий при этом быстрый разряд конденсатора  $C$  приводит к уменьшению напряжения на аноде, прекращению ионизации и спаду тока. Затем снова начинается заряд конденсатора и процессы повторяются в той же последовательности.

### Заключение

Таким образом, качественные предпосылки формирования в плазменном канале движущегося фронта ионизации на одной из стадий автоколебательного процесса вполне ясны. В течение большей части периода колебаний скорость генерации заряженных частиц меньше скорости их гибели. Для компенсации потерь электронов и ионов за промежуток времени порядка 0.1 мкс требуется электрическое поле, напряженность которого в несколько раз больше величины, соответствующей равенству скоростей ионизации и ухода зарядов на стенку трубки. При ограниченном потенциале анода кратковременное возрастание поля возможно лишь в форме движущегося фронта ионизации. Наличие в фазовом пространстве системы неустойчивой периодической орбиты указывает на существование критических характеристик волнового процесса, превышение которых необходимо для образования фронта.

В противоположность искусственно возбужденным ВВИ, перемещение уединенной волны ионизации происходит от заземленного электрода трубки к высоковольтному, что связано с характером пространственно неоднородных колебаний поля. Фронт ионизации формируется в области с наибольшей напряженностью электрического поля, максимальной в узловых точках колебаний потенциала. Для случая, приведенного на рис. 3, б, узел расположен около среза разрядного канала со стороны катода, от которого и стартует волна.

Автоколебательные режимы, близкие по наблюдаемым признакам к исследованным, обнаружены в условиях перехода от таунсендовского к нормальному тлеющему разряду в воздухе, азоте и неоне [11,12]. В такой ситуации стационарное состояние ионизированного газа также неустойчиво, а роль проводящего экрана играет поверхность катода. Возможно, образование фронта ионизации является общим свойством самосогласованных нестационарных форм поддержания электрического разряда, адекватное описание которых требует привлечения методов нелинейной динамики.

## Библиографический список

1. Асиновский Э.И., Василяк Л.М., Марковец В.В. Волновой пробой газовых промежутков. II. Волновой пробой в распределенных системах // Теплофизика высоких температур. 1983. Т. 23, № 3. С. 577.
2. Василяк Л.М., Костюченко С.В., Кудрявцев Н.Н., Филюгин И.В. Высококоростные волны ионизации при электрическом пробое // УФН. 1994. Т. 164, № 3. С. 263.
3. Голубовский Ю.Б., Нисимов С.У. Кинетические ионизационные волны в разряде в неоне // ЖТФ. 1996. Т. 66, № 7. С. 20.
4. Chirkin M.V., Morozov D.A., Stepanov V.A. Discharge current waves inside the positive column surrounded by an external conductor // XIII European Sectional Conference on the Atomic and Molecular Physics of Ionized Gases. Poprad, Slovakia, August 27 – 30, 1996. Contr. Papers, Part B. P. 415.
5. Alexandrov L.S., Chirkin M.V., Stepanov V.A. Spatial charge in the positive column and low temperature plasma instability // XXII International Conference on Phenomena in Ionized Gases. Hoboken, NJ, USA, July 31 – August 4, 1995. Contr. Papers, Part 3. P. 55.
6. Герштейн Г.М. Новые применения квазистатической теоремы о наведенных зарядах и токах // Вопросы электроники СВЧ. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. С. 3.
7. Грищенко В.Л., Матвеева И.А. Преобразование поверхностных распределений заряда и потенциала методом электростатической индукции // Вопросы электроники СВЧ. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. С. 16.
8. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
9. Крютченко О.Н., Маннанов А.Ф., Степанов В.А., Чиркин М.В. Частотные характеристики прикатодной области тлеющего разряда в гелии // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 11. С. 42.
10. Анищенко В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Часть 1. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. 180 с.
11. Spyrou N., Peyroux R., Held B. New results on point-to-plane DC plasma reactor in low-pressure dried air // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. Vol. 27. P. 2329.
12. Каганович И.Д., Федотов М.А., Цендин Л.Д. Ионизационная неустойчивость таунсендовского разряда // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 3. С. 34.

Рязанский государственный  
педагогический университет

Поступила в редакцию 23.07.97  
после переработки 23.12.97

## FORMATION OF THE IONIZATION FRONT INSIDE THE GAS DISCHARGE PLASMA

D.A. Morozov, V.A. Stepanov, M.V. Chirkin

Self-excitation of the electric field oscillation has been investigated in the low pressure gas discharge plasma surrounded by a metallic screen. There have been

examined non-local bifurcations of the limit cycle, which corresponds to the self-pulsed gas discharge mode. There have been reconstructed instantaneous distributions of the electric field potential along the plasma channel. It was observed a solitary ionization front with a strong electric field that propagated to the anode from the cathode. The ionization front appeared as a result of the non-uniform self-oscillation with large amplitude.



*Морозов Дмитрий Александрович* – родился в 1966 году, окончил Рязанский радиотехнический институт (1988). Работает на кафедре общей физики Рязанского государственного педагогического университета. Область научных интересов – нелинейная динамика газового разряда.



*Степанов Владимир Анатольевич* – родился в 1938 году, окончил Ленинградский государственный университет (1960). Доктор физико-математических наук (1977), Соросовский профессор, Заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации. Заведующий кафедрой общей физики в Рязанском государственном педагогическом университете. Область научных интересов – оптика, физика газовых лазеров и низкотемпературной плазмы; конструирование и технология изделий квантовой и электронной техники; методики преподавания физики в школе и вузе с применением ЭВМ. Автор около 300 научных публикаций; разработчик ряда газовых лазеров и приборов, внедренных в различных отраслях народного хозяйства и производства; один из основателей научной и производственной основ создания и производства отечественных газовых лазеров; создатель в Рязани научной школы по квантовой и физической электронике.



*Чиркин Михаил Викторович* – родился в 1959 году, окончил Рязанский радиотехнический институт (1981). Кандидат физико-математических наук (1986), доцент. Работает на кафедре общей физики Рязанского государственного педагогического университета. Область научных интересов – волновые процессы в газоразрядной плазме. Общее количество публикаций – более 60.



## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ ДВУХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

*В.В. Матросов*

В работе представлены результаты качественно-численного исследования динамики системы на фазовом торе, описывающей поведение ансамбля двух каскадно связанных фазовых систем. Изучаются динамические режимы и их бифуркации. Полученные результаты могут быть полезны при исследовании математических моделей с тороидальным фазовым пространством из других приложений.

### Введение

В настоящее время при изучении динамических явлений и процессов, возникающих в различных областях естествознания, большое значение приобретают исследования нелинейных моделей. Среди этих исследований особое место занимают исследования динамических систем с тороидальным фазовым пространством. Это объясняется тем, что модели на торе, имеющие небольшое число степеней свободы, допускают существование в фазовом пространстве значительное разнообразие аттракторов, которые, в свою очередь, определяют богатый набор различных динамических режимов. Широкий спектр режимов и порождаемых ими бифуркационных сценариев, делают привлекательным использование этих свойств в различных приложениях.

В данной работе в качестве объекта исследования выбран ансамбль из двух генераторов с фазовым управлением. Объединение генераторов осуществлено таким образом, что на вход первого генератора подается опорный сигнал, а входным сигналом для второго служит выходной сигнал с первого генератора. Такое соединение называется каскадным и применяется для улучшения фильтрации помех [1]. Кроме основной связи для улучшения динамических характеристик введены дополнительные связи по цепям управления: «вперед» – от первого генератора ко второму и «назад» – от второго к первому. В статьях [2–5] проведено исследование этой системы в случае одинаковых начальных частотных расстроек генераторов относительно опорного сигнала. В представляемой работе рассмотрен наиболее общий случай, когда начальные частотные расстройки не равны между собой.

Математической моделью рассматриваемого каскада служит система уравнений [4]

$$d\psi_1/d\tau = \gamma - \sin\psi_1 - \kappa\sin\psi_2, \quad (1)$$

$$d\psi_2/d\tau = (\beta - \gamma) + (1 - \delta)\sin\psi_1 - (1 - \kappa)\sin\psi_2,$$

где  $\psi_1$  – текущее фазовое рассогласование между сигналом первого генератора и опорным сигналом;  $\psi_2$  – текущее фазовое рассогласование между сигналами первого и второго генераторов;  $\gamma$  и  $\beta$  – начальные расстройки частот первого и второго генераторов относительно опорного сигнала;  $\delta$  и  $\kappa$  – параметры дополнительных связей между генераторами через сигналы рассогласований в прямом и обратном направлениях, соответственно.

Система (1) в силу периодичности ее правых частей по переменным  $\psi_1$  и  $\psi_2$  с периодом  $2\pi$  является динамической системой на торе  $U_0 = \{\psi_1(\text{mod } 2\pi), \psi_2(\text{mod } 2\pi)\}$ . При определенных соотношениях параметров модель (1) описывает так же динамическое поведение системы фазовой автоподстройки частоты с гармоническим делителем частоты [6] и двухконтурной взаимосвязанной системы фазовой синхронизации [7]. Нелинейные явления коллективной динамики, демонстрируемые моделью (1), имеют большое значение для установления основных закономерностей динамического поведения связанных управляемых систем, а так же могут быть полезными при исследовании других объектов, в том числе и более сложных (многоэлементные автоколебательные системы, джозефсоновские соединения, системы пространственно-временной обработки и др.).

Исследование модели (1) проведено качественно-численными методами и алгоритмами на основе построения фазовых портретов, анализа корней соответствующего характеристического уравнения, поведения сепаратрис седловых состояний равновесия, периодических решений и их бифуркаций [7–10]. Особое внимание уделено изучению аттракторов, поскольку они определяют рабочие режимы каскадной системы.

## 1. Синхронные режимы

Синхронные режимы рассматриваемой каскадной системы определяются устойчивыми состояниями равновесия модели (1). При  $(\gamma, \beta, \kappa, \delta) \in C_s$  в ее фазовом пространстве существует четыре состояния равновесия

$$O_1(\psi_1^*, \psi_2^*), O_2(\psi_1^*, \pi - \psi_2^*), O_3(\pi - \psi_1^*, \pi - \psi_2^*), O_4(\pi - \psi_1^*, \psi_2^*),$$

где

$$C_s = \{ \max( [(\kappa\delta - 1)\text{sign}(1 - \kappa\delta)\text{sign}\delta + \beta]/\delta, (\kappa\delta - 1)\text{sign}(1 - \kappa\delta) + \kappa\beta) < \\ < \gamma < \min( [(1 - \kappa\delta)\text{sign}(1 - \kappa\delta)\text{sign}\delta + \beta]/\delta, (1 - \kappa\delta)\text{sign}(1 - \kappa\delta) + \kappa\beta) \},$$

а величины  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$  определяются равенствами

$$\psi_1^* = \arcsin[(\gamma - \kappa\beta)/(1 - \delta\kappa)], \quad \psi_2^* = \arcsin[(\beta - \delta\gamma)/(1 - \delta\kappa)].$$

Область существования состояний равновесия  $C_s$  на плоскости  $(\kappa, \gamma)$  при  $\delta \neq 0$  ограничена прямыми, которые пересекаются в точке  $M(1/\delta, \beta/\delta)$ . По мере приближения  $\delta$  к нулю точка  $M$  устремляется в бесконечность, при  $\delta = 0$  границы области  $C_s$  вырождаются в параллельные прямые  $\gamma = \beta\kappa \pm 1$ .

Устойчивость состояний равновесия определяется величинами  $\sigma_1 = 1 - \delta\kappa$  и  $\sigma_2 = \cos\psi_1^* \text{sign}\sigma_1 + (1 - \kappa)\cos\psi_2^*$ . При  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$  устойчиво состояние равновесия  $O_1$ ; при  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$  – состояние равновесия  $O_3$ ; при  $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$  –  $O_2$ ; при  $\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$  –  $O_4$ .

Устойчивые состояния равновесия  $O_1, O_2, O_3$  и  $O_4$  определяют синхронные режимы  $I_{S1}, I_{S2}, I_{S3}$  и  $I_{S4}$ , соответственно, отличающиеся друг от друга остаточной разностью фаз [5]. Область  $C_s$  является областью существования синхронных режимов.

## 2. Квазисинхронные режимы

Квазисинхронным режимам каскадной системы соответствуют предельные циклы, ограниченные на торе  $U_0$  по координатам  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Такие циклы называют  $O$ -циклами, циклами 1-го рода [11] или колебательными [12]. В модели (1) они возникают при смене устойчивости состояний равновесия, а так же из петель сепаратрис седловых состояний равновесия, не охватывающих тор  $U_0$ , и двойных предельных циклов 1-го рода. Представление о взаимном расположении кривых, отвечающих этим бифуркациям, дает рис. 1, который построен по результатам численных экспериментов с моделью (1) при фиксированных  $\beta=0.7$  и  $\delta=0.1$ .

На рис. 1 штриховыми линиями проведены границы области  $C_s$ ; линия 1 (кривая  $\gamma=\gamma^*(\beta,\delta,\kappa)$ ) соответствует смене устойчивости состояний равновесия  $O_1$  и  $O_3$ ; линия 2 (кривая  $\gamma=\gamma^p(\beta,\delta,\kappa)$ ) – петлям сепаратрис седел  $O_2$  и  $O_4$ ; линии 3,4 (кривые  $\gamma=\gamma^{1,2}(\beta,\delta,\kappa)$ ) – двойным предельным циклам, а штрих-пунктирные линии 5,6 (кривые  $\gamma=\gamma^{\delta 1,2}(\beta,\delta,\kappa)$ ) отвечают совпадению сепаратрис  $S_3$  и  $R_2$ ,  $S_4$  и  $R_3$  (рис.2).

Кривая  $\gamma^*$  имеет две точки  $N_1$  и  $N_2$ , в которых первая ляпуновская величина  $L$ , вычисленная в соответствии с [13] для состояния равновесия  $O_1$ , обращается в ноль. Участок кривой, заключенный между  $N_1$  и  $N_2$ , является безопасным ( $L < 0$ ); при пересечении его с ростом  $\kappa$  из  $O_1$  мягко возникает устойчивый колебательный цикл  $L_{O_1}$ , который определяет квазисинхронный режим  $I_{K1}$ . При дальнейшем увеличении  $\kappa$  цикл  $L_{O_1}$  исчезает, вливая в петлю сепаратрис  $R_2, R_3$  седла  $O_2$ . Система (1) при этом в зависимости от параметров  $\gamma$  и  $\kappa$  срывается либо на устойчивое состояние равновесия  $O_3$ , либо на колебательно-вращательный или вращательный предельный цикл. Этот сценарий определяет мягкий переход каскадной системы от синхронного режима  $I_{S1}$  к квазисинхронному  $I_{K1}$ , который далее сменяется либо синхронным режимом  $I_{S3}$ , либо автоколебательным, при котором один из генераторов находится в квазисинхронизме, либо наблюдается полная рассинхронизация.

На участках кривой  $\gamma^*$  левее точек  $N_1$  и  $N_2$  смена устойчивости состояния равновесия  $O_1$  происходит жестко. Система (1) при этом переходит либо в устойчивое состояние равновесия  $O_3$ , либо на устойчивый предельный цикл, тип которого может быть любой: колебательный, колебательно-вращательный,

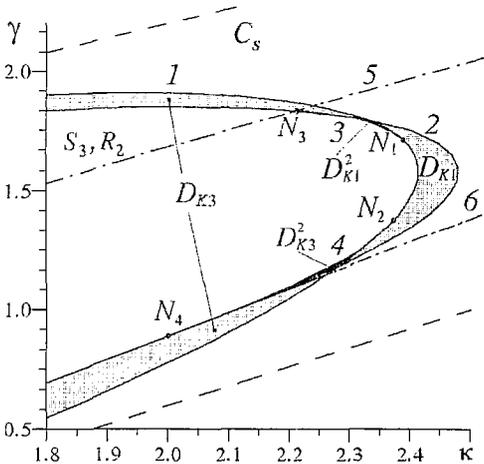


Рис.1. Области существования колебательных аттракторов модели (1) при  $\beta=0.7$  и  $\delta=0.1$

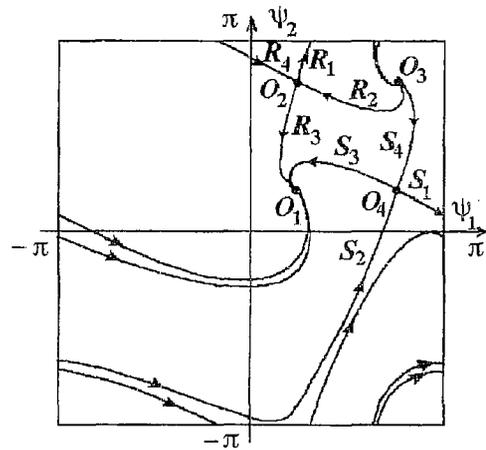


Рис.2. Фазовый портрет модели (1)

вращательный. Финальный режим работы каскадной системы в этом случае определяется значениями параметров  $\gamma$  и  $k$ .

Одной из особенностей модели (1) является то, что бифуркационная кривая  $\gamma^p$  разделяется кривыми  $\gamma^{s_1}$  и  $\gamma^{s_2}$  на три участка. Ветвь кривой  $\gamma^p$ , расположенная левее точки  $N_3$ , соответствует петлям, образованным сепаратрисами  $R_1, R_2$  седла  $O_2$  и  $S_3, S_2$  седла  $O_4$  (см.рис.2); часть кривой  $\gamma^p$  между точками  $N_3$  и  $N_4$  отвечает петлям, образованным сепаратрисами  $R_3, R_2$  и  $S_4, S_2$ , а часть кривой левее  $N_4$  – совпадению сепаратрис  $R_3, R_4$  и  $S_1, S_4$ . Хотя петли сепаратрис седла  $O_2$  всегда устойчивые, а седла  $O_4$  неустойчивые, рождение предельных циклов из них при пересечении кривой  $\gamma^p$  происходит по-разному: на участках левее точек  $N_3$  и  $N_4$  – с увеличением значений  $k$ , а между точками  $N_3$  и  $N_4$  – при уменьшении  $k$ . При этом устойчивый цикл  $L_{O_3}$ , родившийся при совпадении сепаратрис  $R_1, R_2$  и  $R_3, R_4$ , охватывает состояние равновесия  $O_3$ , а цикл  $L_{O_1}$ , возникший из петли  $R_3, R_2$ , окружает состояние равновесия  $O_1$ . Устойчивые колебательные циклы  $L_{O_1}$  и  $L_{O_3}$  определяют соответственно квазисинхронные режимы  $I_{K1}$  и  $I_{K3}$ , отличающиеся друг от друга значением среднего, около которого колеблются разности фаз  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

Поскольку точки  $N_1, N_3$  и  $N_2, N_4$  не совпадают, то в пространстве параметров системы (1) существуют области  $D_{K1^2}=(\gamma^{l_1}<\gamma<\min(\gamma^*,\gamma^p))$  и  $D_{K3^2}=(\max(\gamma^*,\gamma^p)<\gamma<\gamma^{l_2})$ , при значениях параметров из которых на торе  $U_0$  одновременно существуют две пары колебательных циклов. Кривая  $\gamma^{l_1}$  (линия 3 на рис.1), соединяющая точки  $N_1$  и  $N_3$ , и кривая  $\gamma^{l_2}$  (линия 4), заключенная между точками  $N_2$  и  $N_4$ , соответствуют образованию на торе  $U_0$  двух двойных предельных циклов 1-го рода. При пересечении с увеличением  $k$  этих кривых в фазовом пространстве системы (1) возникают две пары колебательных циклов: одна вокруг устойчивого состояния равновесия  $O_1$  (неустойчивый цикл  $\Gamma_{O_1}$  расположен внутри устойчивого  $L_{O_1}$ ), другая вокруг неустойчивого состояния равновесия  $O_3$  (устойчивый цикл  $L_{O_3}$  расположен внутри неустойчивого  $\Gamma_{O_3}$ ). Дальнейшее увеличение  $k$  приводит к тому, что циклы  $L_{O_1}$  и  $\Gamma_{O_3}$  влипают в петли сепаратрис седел  $O_2$  и  $O_4$ , а циклы  $L_{O_3}$  и  $\Gamma_{O_1}$  стягиваются в точки  $O_3$  и  $O_1$ .

В заключение отметим, что квазисинхронные режимы каскадной системы существуют совместно с синхронными режимами, поэтому они могут реализоваться только при значениях параметров из области  $C_s$ .

### 3. Колебательные и асинхронные режимы

Вне области существования состояний равновесия  $C_s$  движения системы (1) характеризуются числом вращения  $\mu=i/j$  [14]. Устойчивые периодические решения с числом вращения  $\mu=0$  или  $\mu=\pm\infty$  определяют автоколебательные режимы каскадной системы [5]. При движении по устойчивому предельному циклу, охватывающему фазовый тор  $U_0$  в направлении  $\psi_1$  ( $\mu=0$ ), в каскадной системе устанавливается режим, при котором синхронизация генераторов относительно опорного сигнала отсутствует, однако, между генераторами имеет место взаимная квазисинхронизация. В случае движения по циклу, охватывающему тор  $U_0$  в направлении  $\psi_2$  ( $\mu=\pm\infty$ ), первый генератор находится в режиме квазисинхронизма по отношению к опорному сигналу, а второй генератор работает в асинхронном режиме. Характерно, что в отличие от квазисинхронных режимов автоколебательные режимы могут реализовываться при значениях параметров вне области  $C_s$ .

Движения с  $\mu \neq 0$  и  $\mu \neq \infty$  соответствуют асинхронным режимам, при которых разности фаз  $\psi_1$  и  $\psi_2$  непрерывно нарастают, а степень нарастания определяется числом вращения  $\mu$ .

При  $\kappa \neq 0$  области параметров  $D_{i,j}$ , отвечающие существованию предельных циклов  $L_{i,j}$  (устойчивого) и  $\Gamma_{i,j}$  (неустойчивого) с числом вращения  $\mu = i/j$ , вклиниваются в область  $C_s$ . В этом случае  $D_{i,j}$ , как правило, ограничены с одной стороны бифуркационной кривой двойных предельных циклов  $\gamma = \gamma_{i,j}^d(\beta, \delta, \kappa)$ , а с другой – кривой петель сепаратрис седловых состояний равновесия  $\gamma = \gamma_{i,j}^p(\beta, \delta, \kappa)$ . Поскольку уравнения (1) не изменяются при замене  $(\psi_1, \psi_2, \tau)$  на  $(\pi - \psi_1, \pi - \psi_2, -\tau)$ , то при значениях параметров на кривой  $\gamma = \gamma_{i,j}^p$  в фазовом пространстве  $U_0$  образуется две петли противоположной устойчивости.

На рис. 3 изображены некоторые области, соответствующие автоколебательным и асинхронным режимам каскадной системы, в плоскости  $(\kappa, \gamma)$  для  $\beta = 0.7$  и  $\delta = 0.1$ . На этом рисунке штриховыми линиями проведены границы области  $C_s$ , нечетными цифрами обозначены кривые  $\gamma = \gamma_{i,j}^d$ , а четными –  $\gamma = \gamma_{i,j}^p$ . Отметим некоторые особенности системы (1), связанные с колебательно-вращательными и вращательными предельными циклами и областями их существования.

**1.** Циклы с одним и тем же числом вращения могут возникать в результате совпадения различных сепаратрис. Этот факт влечет за собой возможность существования в  $C_s$  нескольких областей параметров, соответствующих наличию на торе  $U_0$  циклов с одним числом вращения. На рис.3 эти области обозначены как  $D_{i,j}$  и  $D'_{i,j}$ . Области параметров с одним и тем же числом вращения располагаются в  $C_s$  по-соседству и обращены друг к другу бифуркационными кривыми петель сепаратрис.

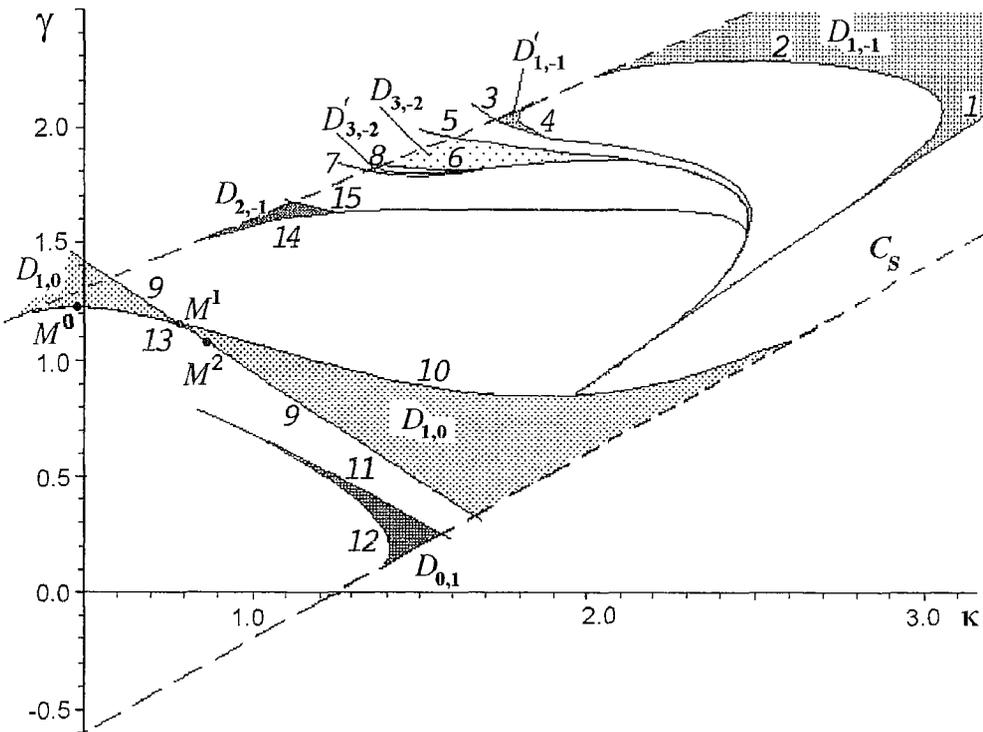


Рис.3. Области существования колебательно-вращательных и вращательных аттракторов модели (1) при  $\beta = 0.7$  и  $\delta = 0.1$

2. Области  $D_{ij}$  и  $D'_{ij}$  могут пересекаться, что служит одной из причин одновременного существования в фазовом пространстве  $U_0$  двух устойчивых циклов с  $\mu=i/j$ .

На рис. 4 в качестве примера приведены фазовые портреты устойчивых циклов модели (1), которые имеют одинаковые числа вращения и родились при совпадении различных сепаратрис. Цикл, изображенный на рис. 4, а (рис. 4, в), возникает в результате совпадения сепаратрис  $R_4$  и  $R_3$  (см. рис. 2), а цикл на рис. 4, б (рис. 4, з) – при совпадении  $R_2$  и  $R_3$ . Цикл  $L'_{0,1}$  с числом вращения  $\mu=0$ , представленный на рис. 4, д, может появляться как при замыкании сепаратрис  $R_2, R_3$ , так и при совпадении  $R_4, R_1$ . Аналогичное (с числом вращения  $\mu=0$ ) периодическое движение  $L_{0,1}$  рождается при разрушении петли сепаратрис  $R_1, R_2$  (рис. 4, е). Устойчивые циклы  $L_{0,1}$  и  $L'_{0,1}$  могут существовать совместно, например, при  $\kappa=1.4120508$ ,  $\gamma=0.2$  (рис. 4, ж) или при  $\kappa=1.39$ ,  $\gamma=0.28$  (рис. 4, з).

3. Совместное существование двух устойчивых предельных циклов с одним и тем же числом вращения  $\mu=i/j$  наблюдается при значениях параметров из областей  $D^2_{ij}$ . Области  $D^2_{ij}$  возникают, когда кривые  $\gamma=\gamma_{i,j}^p$  и  $\gamma=\gamma_{i,j}^d$  пересекаются в точке  $M_{i,j}^1$ , которая не совпадает с точкой  $M_{i,j}^0$ , где седловая величина [15] обращается в ноль. В этом случае появляется кривая  $\gamma=\gamma_{i,j}^{2d}(\beta, \delta, \kappa)$ , соединяющая точки  $M_{i,j}^0$  и  $M_{i,j}^2 \in \gamma_{i,j}^d$  и отвечающая образованию на торе  $U_0$  двух двойных предельных циклов с числом вращения  $\mu=i/j$ . Область  $D^2_{ij}$  ограничена с одной стороны кривой  $\gamma=\gamma_{i,j}^{2d}$ , а с другой –  $\gamma=\gamma_{i,j}^p$  или  $\gamma=\gamma_{i,j}^d$ .

На рис. 3 кривая  $\gamma=\gamma_{0,1}^{2d}$  (линия 13) проходит вблизи  $\gamma=\gamma_{0,1}^d$  (линия 9) или  $\gamma=\gamma_{0,1}^p$  (линия 10), область  $D_{0,1}^2$  мала, поэтому на рисунке нанесены только точки  $M_{0,1}^0, M_{0,1}^1$  и  $M_{0,1}^2$ , нижние индексы точек при этом опущены.

4. При совпадении одних и тех же сепаратрис седловых состояний равновесия модели (1) на торе  $U_0$  могут возникать периодические движения с различными числами вращения. Числа вращения таких циклов определяются выражением

$$\mu = i_1/j_1 = \nu_{k_1, k_2} = (i_0 + k_1 n) / (j_0 + k_2 n), \quad (2)$$

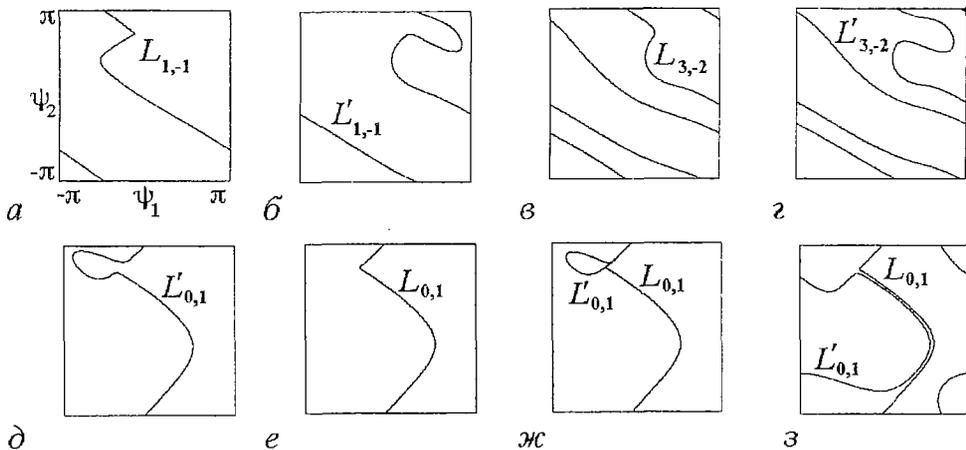


Рис. 4. Фазовые портреты аттракторов системы (1) при  $\beta=0.7$ ,  $\delta=0.1$ :  $\gamma=1.9$ ,  $\kappa=3$  (а);  $\gamma=2$ ,  $\kappa=1.8$  (б);  $\gamma=1.5$ ,  $\kappa=1.85$  (в);  $\gamma=1.7875$ ,  $\kappa=1.43$  (г);  $\gamma=0.2$ ,  $\kappa=1.41$  (д);  $\gamma=0.2$ ,  $\kappa=1.42$  (е);  $\gamma=0.2$ ,  $\kappa=1.4120508$  (ж);  $\gamma=0.28$ ,  $\kappa=1.39$  (з)

где  $i_0, j_0, k_{1,2}$  – постоянные величины;  $n=0,1,2,3,\dots$ . Области параметров  $D_{i_1, j_1}$ , отвечающие существованию предельных циклов с числом вращения  $\mu=v_{k_1, k_2}^n$ , при увеличении  $n$ , последовательно сменяя друг друга, «накапливаются» к бифуркационной кривой  $\gamma=\gamma_{k_1, k_2}^d$ . Здесь под «накапливанием» понимается процесс, при котором расстояние от кривой  $\gamma_{k_1, k_2}^d$  до границы области  $D_{i_1, j_1}$  сокращается, а сами области  $D_{i_1, j_1}$  и области их разделяющие становятся более узкими. Кривую  $\gamma=\gamma_{k_1, k_2}^d$  далее будем называть «предельной», поскольку, во-первых, она ограничивает подпространство параметров, когда в фазовом пространстве системы (1) существуют циклы с  $\mu=v_{k_1, k_2}^n$ , а во-вторых, она соответствует бифуркации двойного предельного цикла с числом вращения  $\mu=k_1/k_2$ , которое является пределом числа  $v_{k_1, k_2}^n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Отметим, что бифуркационные кривые  $\gamma=\gamma_{i_1, j_1}^d$ , которые ограничивают области  $D_{i_1, j_1}$ , могут выступать в качестве предельных. В этом случае подпространство параметров между двумя соседними областями  $D_{i_1-k_1, j_1-k_2}$  и  $D_{i_1, j_1}$  имеет структуру аналогичную той, какую образуют сами области  $D_{i_1, j_1}$ , а именно: между бифуркационными кривыми  $\gamma=\gamma_{i_1-k_1, j_1-k_2}^d$  и  $\gamma=\gamma_{i_1, j_1}^d$  размещаются области  $\bar{D}_{i_1, j_1}$ , при значениях параметров из которых в фазовом пространстве  $U_0$  существуют предельные циклы с числом вращения

$$\bar{\nu}_{i_1, j_1}^n = (i_1 - k_1, j_1 - k_2 + i_1 n) / (j_1 - k_2 + j_1 n).$$

Области  $\bar{D}_{i_1, j_1}$  с ростом  $n$  накапливаются к бифуркационной кривой  $\gamma=\gamma_{i_1, j_1}^d$ .

На рис. 5 приведены примеры устойчивых предельных циклов системы (1),

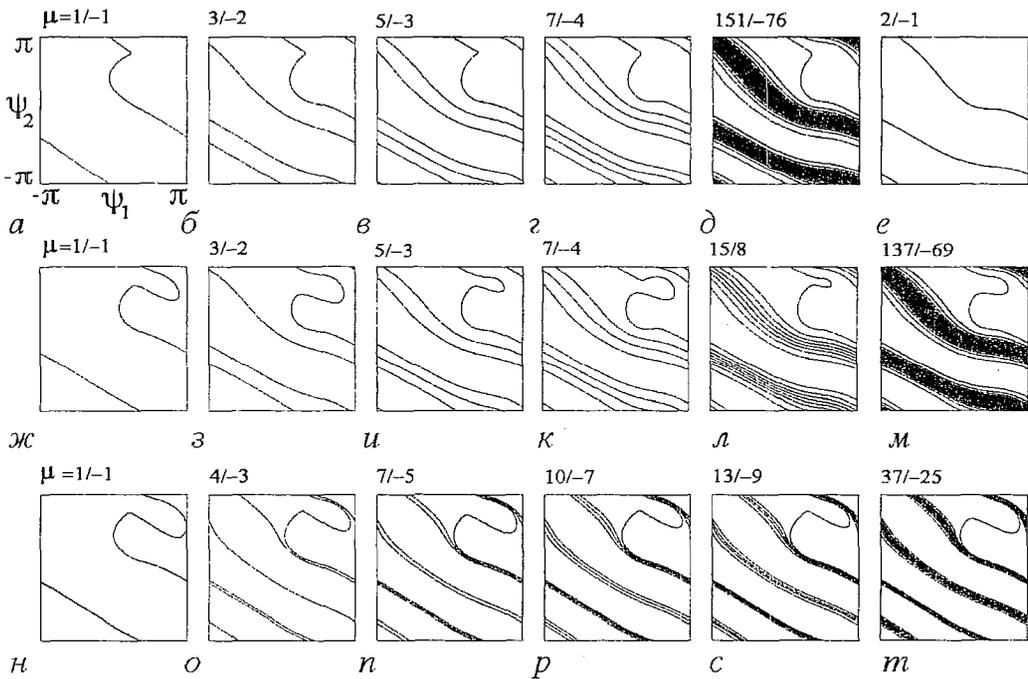


Рис. 5. Устойчивые предельные циклы системы (1) при  $\beta=0.7, \delta=0.1$ :  $\gamma=2.3, \kappa=2.5$  (1);  $\gamma=1.82, \kappa=1.5$  (2);  $\gamma=1.75, \kappa=1.3$  (3);  $\gamma=1.71, \kappa=1.3$  (4);  $\gamma=1.6735, \kappa=1.13$  (5);  $\gamma=1.6735, \kappa=1.128$  (6);  $\gamma=2, \kappa=1.8$  (7);  $\gamma=1.5, \kappa=1.85$  (8);  $\gamma=1.74, \kappa=1.3$  (9);  $\gamma=1.7408, \kappa=1.3$  (10);  $\gamma=1.69, \kappa=1.165$  (11);  $\gamma=1.6735, \kappa=1.13029$  (12);  $\gamma=1.935, \kappa=1.960866$  (13);  $\kappa=1.839$  (14);  $\kappa=1.78$  (15);  $\kappa=1.756$  (16);  $\kappa=1.738$  (17);  $\kappa=1.7$  (18)

числа вращения у которых изменяются согласно выражению (2). Для циклов изображенных на диаг. 1–5 и 7–12 имеем  $i_0=1$ ,  $j_0=-1$ ,  $k_1=2$ ,  $k_2=-1$ . Области существования этих циклов накапливаются к бифуркационной кривой  $\gamma=\gamma_{2,-1}^d$  (линия 15 на рис. 3), ограничивающей область  $D_{2,-1}$  существования цикла с числом вращения  $\mu=2/(-1)$  (диаг. 6). Циклы, представленные на диаг. 13–18, имеют  $i_0=1$ ,  $j_0=-1$ ,  $k_1=3$ ,  $k_2=-2$ . На рис. 3 области существования этих циклов расположены между линиями 3 и 5, а предельной для них является кривая  $\gamma=\gamma_{3,-2}^d$  (линия 5), ограничивающая область  $D_{3,-2}$ . Характерно, что вид циклов модели (1) при значениях параметров из областей близких к предельным кривым похож на двумерные проекции хаотических аттракторов.

Анализ параметрических портретов, представленных на рис. 1 и рис. 3, свидетельствует о том, что автоколебательные и асинхронные режимы рассматриваемой каскадной системы могут существовать совместно с синхронными и квазисинхронными режимами. Это объясняет гистерезисные явления и мультистабильное поведение каскадной системы, когда при одних и тех же параметрах в зависимости от начальных условий реализуются различные динамические режимы.

### Заключение

Представленные результаты исследования системы (1) свидетельствуют о том, что каскадное соединение двух простейших фазовых систем (аттракторами парциальных систем в соответствующих фазовых пространствах являются либо состояние равновесия либо предельный цикл) обладает сложным поведением. Оно выражается в богатстве динамических режимов, в том числе и новых, не свойственных парциальным системам (квазисинхронные режимы), в широком спектре бифуркаций, в ярко выраженных свойствах мультистабильности и гистерезисных явлениях. Сложная динамика наиболее сильно проявляется при неодинаковых начальных частотных расстройках генераторов относительно опорного сигнала. Существенное усложнение динамического поведения каскадной системы обусловлено введением дополнительных связей по цепям управления, однако, изменяя параметры связей, можно управлять динамическими процессами и добиваться улучшения динамических характеристик.

Полученные результаты расширяют базу знаний о нелинейных взаимосвязанных системах и могут быть полезны при использовании подобных систем в устройствах обработки информации и связи.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 94–01–00957, 96–02–16559). При численном исследовании использована технология компьютерного моделирования и программные средства, созданные при финансовой поддержке Министерства науки и технической политики РФ (Государственная научно-техническая программа «Перспективные информационные технологии», проект 05.06.1172).*

### Библиографический список

1. Капранов М.В. Каскадная система фазовой подстройки частоты // Динамика систем. Горький: ГГУ, 1976. № 11. С.76.
2. Матросов В.В., Корзинова М.В. Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С.10.
3. Матросов В.В., Корзинова М.В. О влиянии связей на нелинейную

динамику двух каскадно связанных управляемых генераторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т.38, № 3–4. С.275.

4. *Матросов В.В., Корзинова М.В.* Синхронные и автоколебательные режимы каскадного соединения фазовых систем // Вестник ННГУ. Нелинейная динамика – синхронизация и хаос / Под ред. М.И.Рабиновича. Н.Новгород: ННГУ, 1996. С.77.

5. *Корзинова М.В., Матросов В.В.* Моделирование нелинейной динамики каскадного соединения фазовых систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т.36, № 8. С.815.

6. *Федосова Т.С.* Особенности бифуркаций в системе ФАПЧ с гармоническим делителем частоты // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1978. Т.21, № 7. С.60.

7. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Динамические свойства двухконтурной взаимосвязанной системы фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1984. Т.29, № 6. С.1125.

8. Системы фазовой синхронизации / Под ред. Шахгильдяна В.В., Белюстиной Л.Н. М.: Связь, 1975.

9. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990.

10. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения Академии технологических наук Российской Федерации. Высокие технологии в радиоэлектронике. Н.Новгород, 1997. Вып. 2(4). С. 15.

11. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.

12. *Белых В.Н., Веричев Н.Н.* О динамике взаимосвязанных ротаторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31, № 6.

13. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.

14. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1967.

15. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца // *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С.317.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию 29.09.97  
после переработки 26.01.98

## SOME PARTICULARITIES OF DYNAMICAL BEHAVIOUR OF TWO CASCADE COUPLED PHASE LOCKED LOOPS

*V.V. Matrosov*

Results of investigations of dynamic regimes and their bifurcations in the model on phase torus of two cascade coupled phase locked loops are presented.



*Матросов Валерий Владимирович* – родился в 1961 году. Окончил факультет прикладной математики и кибернетики Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1982), к.ф.-м.н., старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ. Область научных интересов – теория синхронизации, математическое моделирование нелинейных систем, автоматизация научных исследований. Имеет более 30 публикаций в отечественных и иностранных журналах.



## НЕАВТОНОМНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ВИРТУАЛЬНЫМ КАТОДОМ В ПЛОСКОМ ДИОДНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

*В.Г. Анфиногентов, А.Е. Храмов*

В работе исследуется влияние внешнего воздействия на колебания электронного потока с виртуальным катодом в плоском диоде. Представлены результаты численного эксперимента на модели с модуляцией электронного потока, поступающего в пространство дрейфа, и модели с электромагнитным сигналом, воздействующим непосредственно на колебания виртуального катода в пространстве взаимодействия. Показано, что в неавтономном режиме исследуемая система демонстрирует различные нелинейные колебания, включая детерминированный хаос и синхронизацию колебаний виртуального катода внешним воздействием. Рассмотрение особенности обоих типов внешнего воздействия обнаружило, что модуляция потока является более эффективным и гибким методом управления колебаниями виртуального катода. Исследование физических процессов в системе показало, что сложная динамика в системе появляется в результате взаимодействия большого числа структур в потоке, а режимы синхронизации связаны с подавлением их роста. Полученные в численном эксперименте фазовые соотношения между сигналом, генерируемым колебаниями виртуального катода, и внешним сигналом согласуются с результатами физического эксперимента.

### Введение

Приборы, использующие неизлучательные пучковые неустойчивости [1,2] для генерации СВЧ излучения высокой мощности, виркаторы [3], являются одними из наиболее активно изучаемых в последнее время. В них колебания виртуального катода – области в пространстве взаимодействия с потенциалом, близким к потенциалу катода – используются для фазовой селекции электронного потока. Широко известными преимуществами приборов на виртуальном катоде являются высокая выходная мощность, простота конструкции, возможность работы без ведущего магнитного поля. Вместе с тем, в связи с перспективами использования виркаторов в задачах энергетики, связи и обороны встает вопрос о возможности эффективного управления такими характеристиками подобных приборов, как частота и ширина полосы генерации СВЧ колебаний.

Один из перспективных путей решения проблемы управления динамикой подобных приборов – введение в систему управляемой обратной связи [4–7]. Другой путь – разработка виркаторов с синхронизацией по фазе и частоте от внешнего источника [8–12]. Такой подход ведет в перспективе к созданию фазированных антенных решеток на нескольких параллельно работающих

виркаторах [13,14]. При этом внешний сигнал может воздействовать либо непосредственно на колебания виртуального катода в пространстве взаимодействия [8–11,14,15], либо на формирование релятивистского электронного пучка [12,13,16–18]. В последнем случае управляющий сигнал может быть существенно меньше, что важно для практической реализации этого метода управления.

Кроме того, интерес к проблеме влияния внешнего воздействия на колебания виртуального катода определяется предложенными в последнее время комбинированными системами с виртуальным катодом, например, виркатор–клистрон [19] или связанная система виртод – лампа обратной волны [4,7,20]. При этом опять можно выделить указанные выше два типа внешнего воздействия: модуляция электронного пучка в системах с высокочастотной резонансной системой в области ускорения потока (виркатор–клистрон) и воздействие сигнала из цепи обратной связи непосредственно на виртуальный катод (системы типа виртод – ЛОВ).

Вопросу влияния внешнего воздействия на колебания виртуального катода посвящено сравнительно большое число экспериментальных работ [8–11,14,15,17,21]. Однако, практически нет работ, посвященных математическому моделированию каких–либо простейших распределенных моделей, описывающих неавтономные колебания электронного потока с виртуальным катодом, хотя именно анализ простых моделей позволяет детально изучить механизм синхронизации в такой системе.

В данной работе приводятся результаты численного исследования неавтономных колебаний виртуального катода в простейшей модельной системе – плоском диоде со сверхкритическим током для различных типов внешнего воздействия.

### Обсуждение исследуемой модели

Рассмотрим простую электростатическую диодную модель (рис. 1). Электронный поток без нейтрализации ионным фоном распространяется между двумя плоскостями. Исследуем два типа внешнего воздействия. В первом случае внешний электромагнитный сигнал воздействует на формирование электронного потока, что приводит к кинематической модуляции потока на левой границе системы (в плоскости инжекции). Во втором случае внешний сигнал воздействует на электронный поток в пространстве взаимодействия.

Заметим, что такая система является важной и в теоретическом смысле, так как она представляет собой простейшую модель микроволнового генератора в неавтономном режиме. Хорошо известно, что электронный поток с виртуальным катодом в диоде без внешнего воздействия обладает сложной нерегулярной динамикой (см., например, [22–28]). Нас интересует влияние внешнего воздействия на хаотическую динамику электронного потока с виртуальным катодом в нашей модели.

Поведение электронного потока в диоде в автономном режиме определяется невозмущенным углом пролета по плазменной частоте  $\omega_p$

$$\alpha = (\eta |p_0| / \epsilon_0)^{1/2} L / v_0 = \omega_p L / v_0,$$

где  $\eta$  – удельный заряд электрона,  $p_0$  и  $v_0$  – соответственно невозмущенные скорость и плотность электронного потока,  $L$  – расстояние между плоскостями диода и  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная.

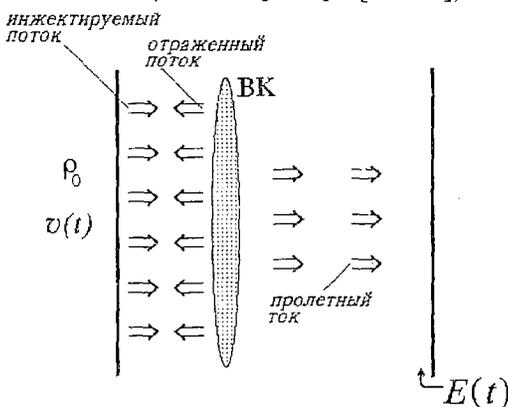


Рис. 1. Схема исследуемой системы

Неустойчивость, приводящая к формированию виртуального катода, появляется в системе для  $\alpha > 4/3$  [27]. С увеличением  $\alpha$  система демонстрирует периодические, квазипериодические и хаотические колебания [26]. Мы исследуем систему при фиксированном  $\alpha$ , что соответствует хаосу с размерностью аттрактора в диапазоне значений  $1.5 \div 2.0$ .

Исследование нелинейных и нестационарных процессов в рассматриваемой системе осуществлялось с помощью PIC (*particle-in-cell*) моделирования [29] в электростатическом приближении.

### Модель с модуляцией электронного потока, поступающего в пространство взаимодействия

Предположим, что на входе в пространство взаимодействия имеет место скоростная модуляция следующего вида:

$$v(x=0) = v_0(1 + m \sin \omega t),$$

а модуляция по плотности отсутствует

$$\rho(x=0) = \rho_0.$$

Здесь  $m$  – глубина модуляции, а  $\omega$  – частота внешнего воздействия, приводящего к модуляции потока.

На рис. 2 приведено разбиение плоскости параметров (глубина модуляции – частота внешнего воздействия) на характерные режимы, построенное по результатам численного эксперимента. По горизонтальной оси отложена частота внешнего воздействия  $\omega$ , нормированная на характерную частоту  $\omega_0$  колебаний виртуального катода в автономном режиме. По вертикальной оси отложена глубина модуляции потока в плоскости инжекции в процентах. Области с качественно отличающимися режимами поведения отмечены на карте режимов различными узорами «заливки»; белые области соответствуют регулярным движениям с базовой частотой, равной частоте внешнего воздействия  $\omega$ . Они обозначены отношением двух чисел ( $a:b$ ), где  $a$  – число витков траектории аттрактора, оставшихся в плоскости, а  $b$  – число витков, выходящих в пространство. Сумма этих двух чисел ( $a+b$ ) равна полному числу витков траектории аттрактора в фазовом пространстве.

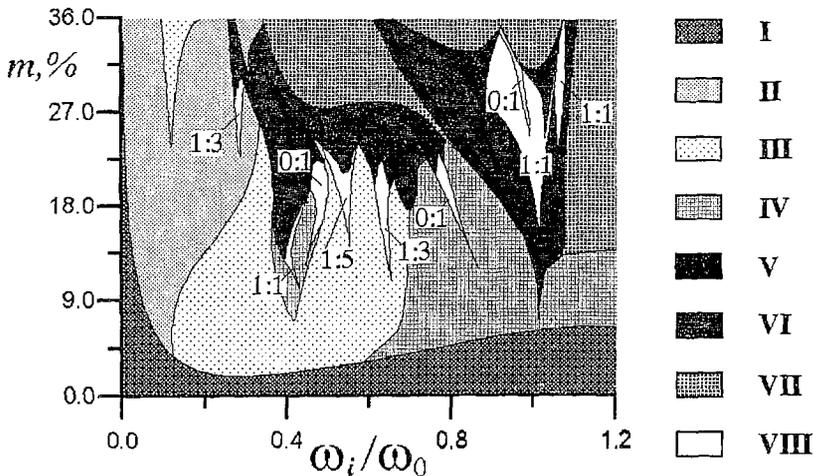


Рис. 2. Разбиение плоскости параметров ( $m, \omega/\omega_0$ ) на области с различными режимами колебаний виртуального катода для модели с предварительной модуляцией потока

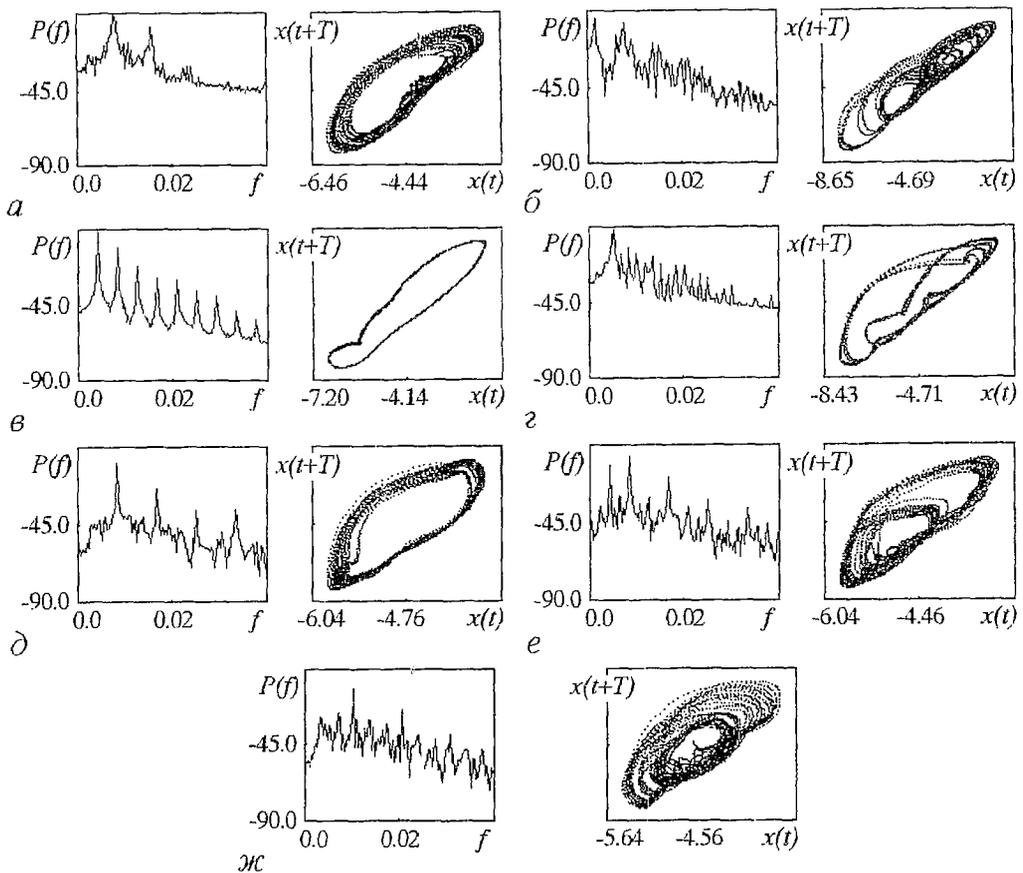


Рис. 3. Спектры мощности и фазовые портреты колебаний электрического поля в области виртуального катода для различных режимов поведения системы

На рис. 3 представлены спектры мощности в логарифмическом масштабе, проекции фазовых портретов, построенных по методу Такенса [30] по временным реализациям колебаний электрического поля в области виртуального катода для различных режимов поведения системы. Рис. 4 демонстрирует результаты расчета размерности восстановленных аттракторов [31] для характерных режимов, отмеченных на бифуркационной диаграмме. На нем приведены в двойной логарифмической шкале зависимости наклона  $D_C$  корреляционного интеграла [32]

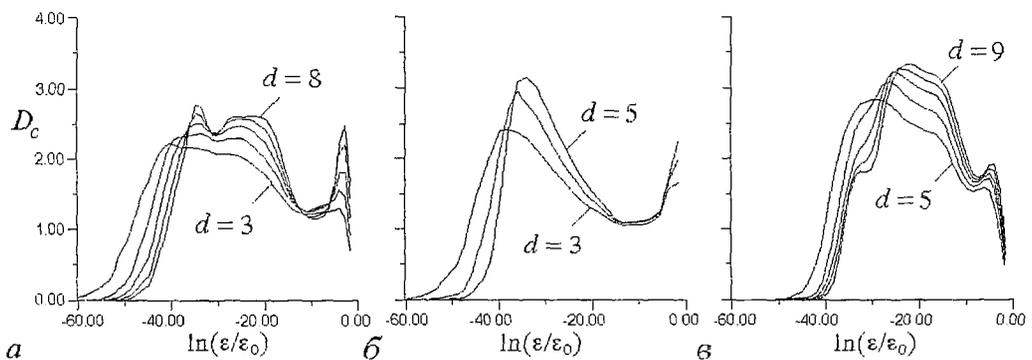


Рис. 4. Зависимости наклона корреляционного интеграла  $D_C$  от масштаба наблюдения  $\epsilon$  для различных режимов поведения системы

от нормированного на характерный размер аттрактора  $\epsilon_0$  масштаба наблюдения  $\epsilon$  для различных значений размерности пространства вложения  $d$ .

Рис. 3, а, 4, а соответствуют колебаниям системы в автономном и слабовозмущенном режиме (область I на карте режимов). В спектре выделяются пики с частотой  $\omega_0$  и ее гармониками  $2\omega_0$  и  $3\omega_0$ . Зависимость наклона корреляционного интеграла от масштаба наблюдения свидетельствует о сложной неоднородной структуре ленточного аттрактора, соответствующего этому режиму. Об этом свидетельствует три характерных масштаба, четко выделяющихся на графике размерности (рис. 4, а).

Рост глубины модуляции  $m$  приводит к появлению режимов с двумя характерными частотами  $\omega_0$  и  $\omega_1$ . Обнаружены квазипериодические колебания (область II), что хорошо видно на спектре (рис. 3, б). Сечение Пуанкаре соответствующего этому режиму аттрактора (рис. 5, а), имеет характерный для подобных режимов вид замкнутой кривой. При  $\omega_1/\omega_0 > 0.2$  наблюдается режим с двумя характерными частотами, которые возможно классифицировать как тор-хаос [33] (область III; сечение приведено на рис. 5, б; видно, что инвариантная кривая в сечении теряет гладкость) и хаотические колебания со сравнительно однородным аттрактором (область IV). Сечение Пуанкаре в этом случае (рис. 5, в) представляет собой однородное заполнение некоторой области в плоскости сечения точкими.

На фоне этих режимов с дальнейшим увеличением глубины модуляции при  $\omega_1/\omega_0 \leq 1$  появляются сравнительно узкие области регулярных движений (синхронизации) колебаний виртуального катода на частоте внешнего воздействия. При этом режим синхронизации характеризуется циклами различного периода в фазовом пространстве (см., например, рис. 3, в, г).

Для значений частоты внешнего воздействия  $\omega_1/\omega_0 \leq 0.8$  регулярные режимы возникают жестким образом, что свидетельствует о сложной многолистной структуре карты режимов.

Режимы синхронизации окружены широкими областями хаоса, в фазовом пространстве которому соответствуют ленточные аттракторы. Можно выделить области одноленточного (область V, рис. 3, д) и двухленточного (VI, рис. 3, е) аттрактора. В спектре на фоне шумового пьедестала присутствуют выбросы на частоте внешнего воздействия, ее гармоник и, для двухленточного хаоса, ее субгармоники. Размерность ленточных аттракторов, как видно из рис. 4, б, равна  $1+\Delta$ , где  $\Delta \leq 0.2$ .

Отметим, что в областях ленточных аттракторов, включая клыки регулярных движений, возможно управление исследуемой системой. Это иллюстрирует рис. 6, на котором построены зависимости характерной частоты генерации системы  $\omega$  в зависимости от тока  $\alpha$  для случая автономных колебаний (пунктирная линия; в качестве  $\omega$  берется значение частоты колебаний в

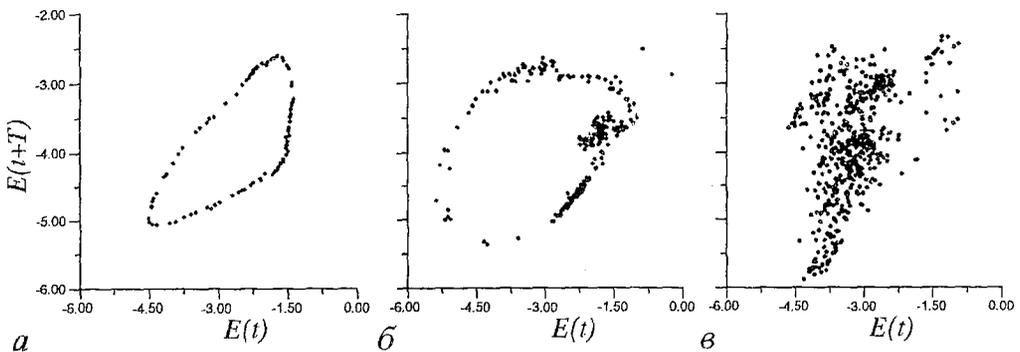


Рис. 5. Сечения Пуанкаре для режимов II (а); III (б); IV (в)

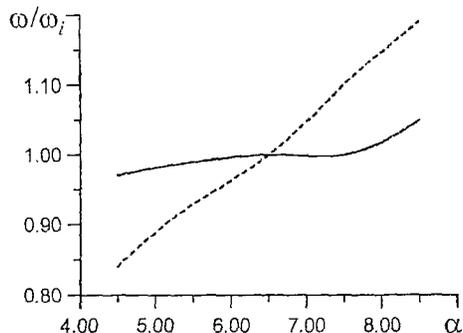


Рис. 6. Зависимость частоты колебаний виртуального катода от тока пучка

разброса скоростей потока. Вид зависимости на рис. 6, а также спектральный состав генерации в нашей модели согласуется с результатами моделирования виркатора-клистрона [18, с.ШЕ; 19], который в случае высокой добротности входного резонатора может быть сведен к рассматриваемой нами системе.

При больших  $m$  и при  $\omega_i > \omega_0$  в системе наблюдаются колебания (область VII), предельное множество которых в фазовом пространстве имеет сложную структуру (рис. 3, ж). На проекции выделяется область быстрых движений (внутренняя петля аттрактора) и область медленных движений (внешняя лента). На временной реализации наблюдаются сдвиги фазы колебаний, в спектре мощности на фоне развитого шумового пьедестала присутствуют выбросы с базовой частотой  $\omega_i$ . Кривые наклона корреляционного интеграла для этого случая приведены на рис. 4, в. Сравнивая эти кривые с предыдущими (см. рис.4,а,б), можно видеть, что с ростом глубины модуляции сложность динамики виртуального катода возрастает, в колебательное движение вовлекаются новые степени свободы

автономной системе при  $\alpha \approx 2\pi$ ) и для случая модуляции электронного потока с  $m \approx 20\%$  (сплошная линия). Видно, что с изменением тока пучка (а следовательно, и частоты невозмущенных колебаний виртуального катода, определяемых плазменной частотой потока [36,37]) частота генерации в неавтономном случае практически не меняется. Этот эффект может применяться для стабилизации характеристик генерации виркатора при помощи модуляции потока в случае нестабильности импульса ускоряющего напряжения или большого

разброса скоростей потока. Вид зависимости на рис. 6, а также спектральный состав генерации в нашей модели согласуется с результатами моделирования виркатора-клистрона [18, с.ШЕ; 19], который в случае высокой добротности входного резонатора может быть сведен к рассматриваемой нами системе.

( $D_C > 3$  в отличие от других режимов, где  $D_C < 3$ ). Однако, сравнительно небольшое значение размерности  $d$  пространства вложения достаточное для насыщения размерности свидетельствует о том, что сложные колебания возникают в результате взаимодействия небольшого числа мод.

Переходы от одного режима к другому осуществляются либо мягким образом, например, при переходе от квазипериодических колебаний к торхаосу, либо через перемежаемость [38]. В последнем случае наблюдается резкий скачок амплитуды колебаний при переходе от одного режима к другому. Характерная временная реализация для перемежаемости и гистограмма длительности ламинарных фаз приведены на рис. 7.

Физические процессы анализировались с помощью пространственно-временных диаграмм электронного потока в пространстве дрейфа (рис. 8). На них изображены траектории заряженных частиц в координатах: местоположение частицы – время. Рис. 8, а иллюстрирует движение частиц в случае хаотических

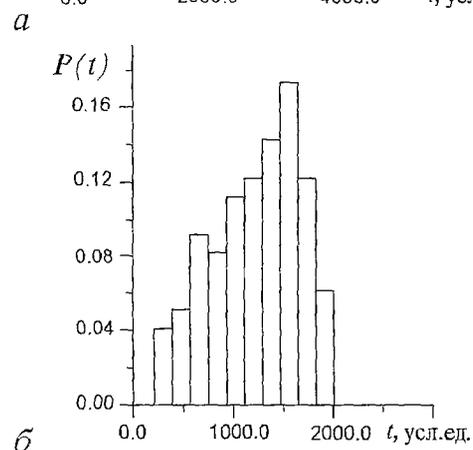
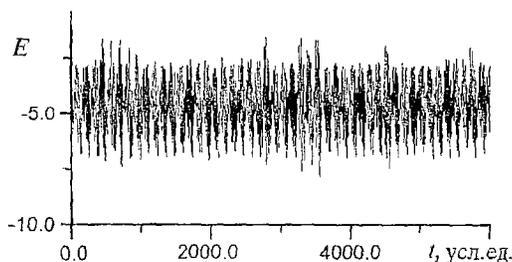


Рис. 7. Вид временной реализации (а) и гистограмма длительности ламинарных фаз (б) для режима перемежаемости

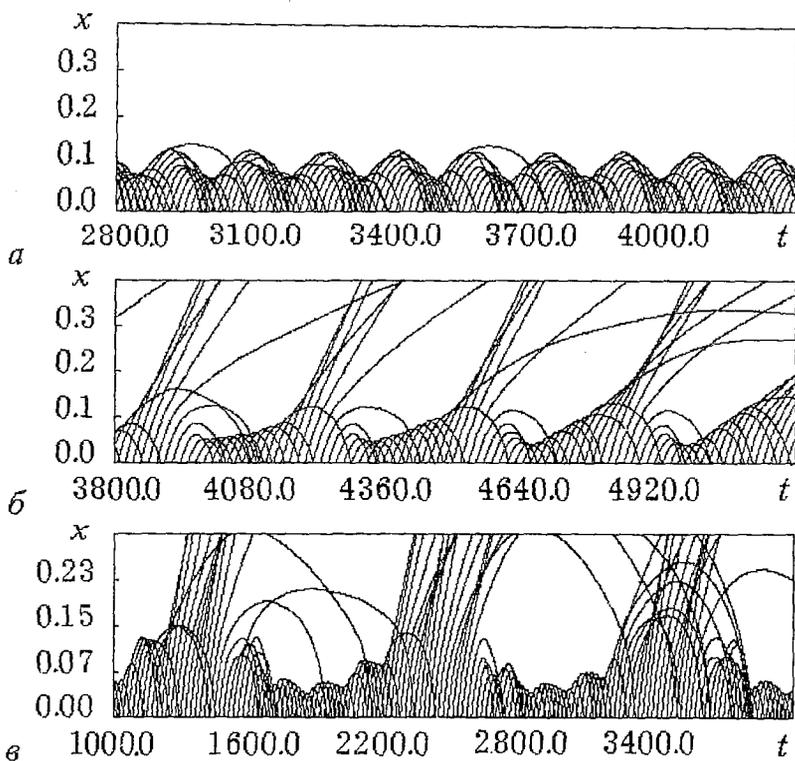
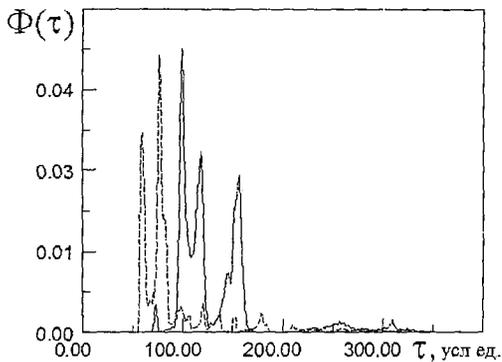


Рис. 8. Пространственно-временные диаграммы электронного потока в пространстве взаимодействия для режимов I (а); VIII (б); II (в)

колебаний в системе. Хаотическая динамика связана с появлением в потоке внутренней распределенной обратной связи. В этом случае наблюдается расслоение потока на несколько групп заряженных частиц с различным временем жизни  $\tau$  в пространстве взаимодействия. Функция распределения электронов по временам жизни  $\Phi(\tau)$  показана на рис. 9. Для нерегулярной динамики характерно многогорбое распределение  $\Phi(\tau)$  (сплошная линия на рис. 9), где каждый пик соответствует группе электронов со своим временем жизни и собственной характерной траекторией в пространстве взаимодействия. Многогорбый вид функции распределения свидетельствует, что в потоке формируются нескольких электронных структур. Взаимодействие, связанное с обменом частиц между структурами, приводит к сложной динамике системы. При этом группа заряженных частиц с временем жизни  $\tau > T_{vc}$  ( $T_{vc}$  – характерный масштаб колебаний виртуального катода) обеспечивает запаздывающую обратную связь, так как эти частицы существуют в пространстве взаимодействия более, чем в течении одного периода колебаний виртуального катода, и влияют на стартовые условия образования виртуального катода на каждом периоде колебаний.



Для количественного анализа процессов структурообразования в потоке мы выделяли внутренние

Рис. 9. Распределение заряженных частиц по временам жизни в пространстве взаимодействия для режима хаотических (сплошная линия) и регулярных (пунктирная линия) колебаний

Таблица

Режим	$W_1, \%$	$W_2, \%$	$W_3, \%$	$W_4, \%$
I	36	27	16	9
V	52	18	7	6
VI	34	29	8	8
VII	54	22	14	3

когерентные структуры с помощью разложения Карунена – Лоэва [39–43]. В таблице приведены значения относительных энергий первых четырех мод для различных режимов. Из нее видно, что энергия, заключенная в колебательном движении, в хаотическом режиме распределена по модам более гладко, чем в режимах регулярных колебаний. То есть с переходом от режимов регулярных колебаний к хаотическим энергия перераспределяется от основной структуры потока (виртуального катода) к другим структурам.

При этом подавление внутренних структур в потоке за счет предварительной модуляции электронного потока (с помощью отвода части заряженных частиц, в первую очередь из группы с  $\tau > T_{VC}$ , к правой границе диода) обеспечивает регулярные колебания виртуального катода (рис. 8, б; соответствующие спектр и проекция аттрактора показаны на рис. 3, в). При этом функция распределения электронов по временам жизни  $\Phi(\tau)$  имеет два основных пика, которые соответствуют пролетным и отраженным от виртуального катода частицам (штриховая линия на рис. 9). Видно, что вес долгоживущих частиц, осуществляющих внутреннюю обратную связь, незначителен.

Рис. 8, в иллюстрирует динамику потока в режиме с двумя характерными частотами. В этом случае на пространственно–временной диаграмме четко прослеживаются два временных масштаба: период автономных колебаний виртуального катода, определяемый плазменной частотой пучка ( $\omega_0 \approx 2.5\omega_p$ ; оценка по результатам численного моделирования), и период внешнего воздействия  $2\pi/\omega_s$ , через который за счет увеличения скорости электронного потока неустойчивость в системе подавляется, а затем опять с уменьшением скорости инжектируемого потока возникает. Это приводит к достаточно длинному интервалу времени, когда в потоке существует виртуальный катод, и небольшому промежутку времени, когда наблюдается полное прохождение тока. Отметим, что в модели с модуляцией инжектируемого электронного потока синхронизация возможна только в случае, когда период внешнего воздействия больше времени  $T_e$  пролета заряженных частиц от входной плоскости до виртуального катода. При выполнении этого условия электронный поток «видит» внешнее воздействие. В противном случае можно говорить о перемодуляции электронного потока и возникновении дополнительных структур, вызванных внешним воздействием, что приводит к усложнению динамики в системе (рис. 3, ж и 4, в).

Таким образом, предварительная модуляция электронного потока со сверхкритическим током обеспечивает возможность эффективного управления колебаниями виртуального катода. При соотношении частот внешнего воздействия и собственной частоты колебаний виртуального катода как 1 : 2 и 1 : 1 в системе возможны режимы синхронизации с высоким качеством спектра. Модуляция потока обеспечивает также возможность стабильных по частоте колебаний виртуального катода при изменении тока пучка или ускоряющего напряжения, что представляет значительный практический интерес. Анализ физических процессов показывает, что режимы синхронизации связаны с подавлением роста в потоке долгоживущей электронной структуры, обеспечивающей в автономном случае распределенную обратную связь.

### Модель с синхронизацией колебаний виртуального катода внешним электромагнитным сигналом

В данном случае внешний сигнал воздействует непосредственно на колебания виртуального катода в пространстве взаимодействия. Для выяснения влияния такого воздействия на динамику виртуального катода предположим, что воздействие вида

$$E_i(x=L) = A \sin(\omega_i t)$$

подается на правую границу системы. Влияние внешнего сигнала на поведение системы определяется амплитудой  $A$  и частотой внешнего воздействия  $\omega_i$ .

На рис. 10 показана карта режимов на плоскости параметров  $(A/E_0, \omega_i/\omega_0)$ . Здесь  $E_0$  – средняя амплитуда автономных колебаний электрического поля в области виртуального катода в точке с координатой  $x/L=0.38$ . Рис. 11 демонстрирует характеристики поведения системы для различных областей на бифуркационной диаграмме. Серая область на карте режимов соответствует слабозмущенным колебаниям виртуального катода. Максимальный ляпуновский характеристический показатель  $\lambda_1$ , определенный с помощью алгоритма Вольфа [44], положителен ( $\lambda_1=0.069$ ). Рост амплитуды внешнего воздействия, как и в предыдущем случае, приводит к появлению хаотического режима с двумя характерными частотами  $\omega_0$  и  $\omega_i$  (темная область на карте режимов). Он характеризуется достаточно однородным аттрактором (рис. 11, а),  $\lambda_1=0.044$ . Заштрихованные области соответствуют движениям, которым в фазовом пространстве, соответствуют ленточные аттракторы (рис. 11, б). Локальная неустойчивость траекторий на аттракторе в этом случае существенно меньше ( $\lambda_1=0.017 \div 0.018$ ). На фоне этих режимов с дальнейшим увеличением амплитуды  $A$  появляются клювы синхронизации (белые области на карте режимов; регулярные колебания обозначаются также как и на рис. 2). Рис. 11, в, г соответствуют

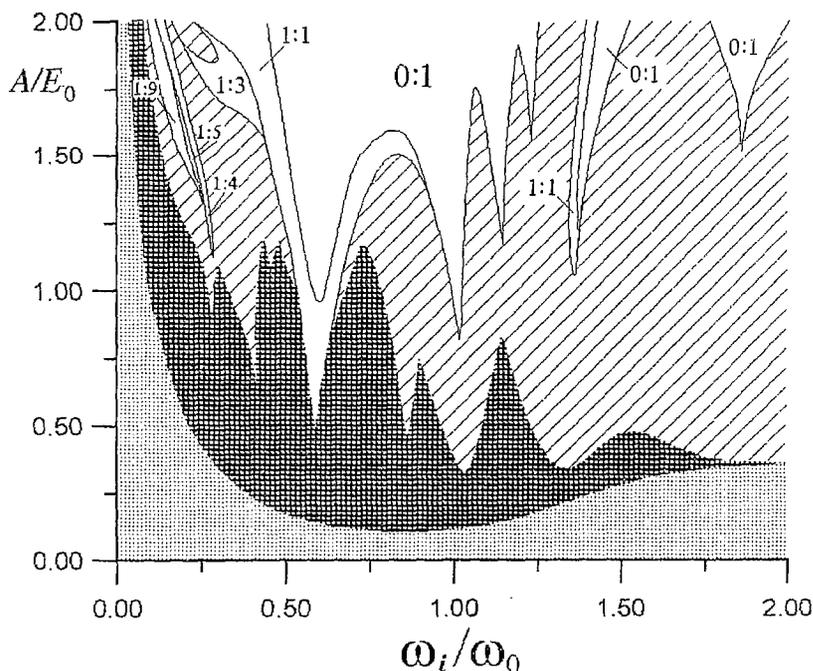


Рис. 10. Карта режимов колебаний виртуального катода для модели с электромагнитным сигналом, вводимым в пространство дрейфа

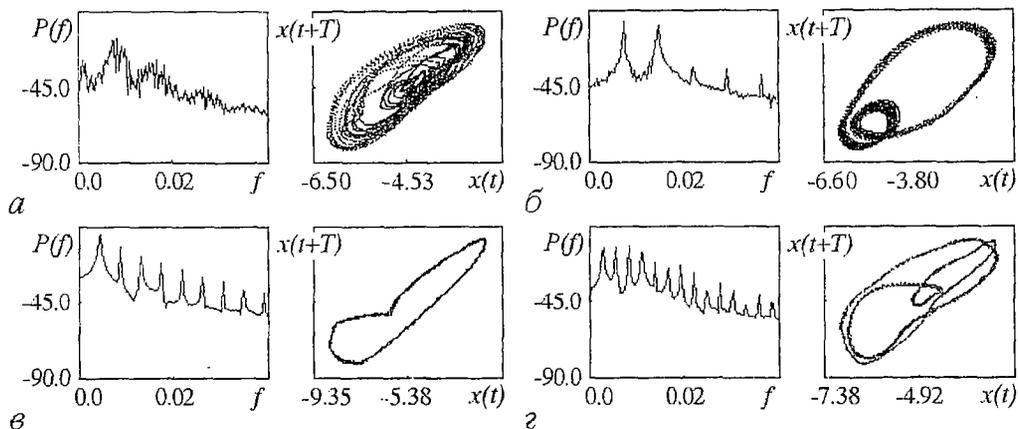


Рис. 11. Спектры мощности и фазовые портреты колебаний электрического поля в области виртуального катода для различных областей на карте режимов

движениям с одно- и трехтактным циклом. Отметим, что при  $\omega_i > \omega_0$  на карте режимов существуют узкие области регулярных движений с шириной  $\Delta\omega/\omega_i \approx 1\%$ , не показанные на карте режимов.

На рис. 12 приведена бифуркационная диаграмма, на которой представлены максимальные значения электрического поля  $E$  в области виртуального катода, построенные в зависимости от медленно меняющейся частоты внешнего воздействия при фиксированной амплитуде внешнего воздействия  $A/E_0 \approx 0.8$ . Количество приращений  $\omega_i$  равно 250. На каждом шаге по частоте представлено порядка 20 максимумов электрического поля. Диаграмма наглядно демонстрирует эволюцию режимов в системе с изменением частоты внешнего воздействия. Хорошо видны области одноленточных и двухленточных аттракторов. С увеличением  $A$  области, занимаемые двухленточным аттрактором, уменьшаются и при  $A/E_0 \approx 2.0$  их уже не существует.

При  $\omega_i > \omega_0$  выход из клювов синхронизации сопровождается режимами, представляющими собой перемежаемость [38].

Внешний электромагнитный сигнал, подаваемый в область взаимодействия, позволяет воздействовать непосредственно на потенциальный рельеф между плоскостями диода, то есть на колебания виртуального катода как «единого целого». Это позволяет синхронизировать колебания виртуального катода внешним воздействием в достаточно широком диапазоне частот внешнего воздействия, который увеличивается с ростом амплитуды внешнего воздействия. В отличие от этого модуляция инжектируемого электронного потока в пространство дрейфа не влияет на движение виртуального катода как единого образования в потоке, а позволяет управлять отдельными группами электронов («дополнительная селекция» электронного потока), исключая, например, частицы, осуществляющие внутреннюю обратную связь в потоке, за счет отвода их к коллектору (пролетный ток при этом увеличивается).

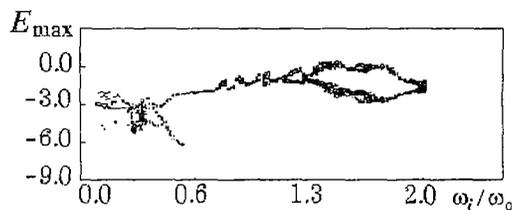


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма колебаний электрического поля в области виртуального катода. Здесь  $A/E_0 = 0.8$

В связи с таким механизмом воздействия на динамику системы в случае предварительной модуляции электронного потока управление поведением системы возможно лишь до частот внешнего воздействия  $\omega_i$ , которые, как уже говорилось, удовлетворяют условию  $2\pi/\omega_i > T_e$ . В случае внешнего электромагнитного сигнала такого ограничения на частоту не существует.

Кратко остановимся на фазовых соотношениях между сигналами, генерируемыми в системе, и внешним воздействием. Для оценки разности фаз  $\Delta\phi$  между двумя сигналами мы использовали следующую методику. В качестве опорного использовался внешний управляющий гармонический сигнал с частотой  $f_i$ . В окрестности области синхронизации генерируемый сигнал близок к регулярному и его частоту можно представить как

$$f = f_0 + \delta f(t),$$

где  $f_0 = 1/T$ ,  $\delta f \ll f_0$ . Здесь  $T$  – характерный временной масштаб колебаний в системе, который в режиме синхронизации равен  $1/f_i$ . Тогда разность фаз между сигналами

$$\Delta\phi = 2\pi(f - f_i)t = 2\pi\delta f(t)t, \quad \text{mod}(2\pi). \quad (*)$$

Для оценки  $\Delta\phi$  можно сравнивать взаимное расположение максимумов на временных реализациях сигналов, то есть выражение (\*) будет определяться в дискретные моменты времени, отстоящие друг от друга на величину  $T$ . Если расстояние между максимумами в момент времени  $t_k = kT$  равно  $l$ , то

$$\Delta\phi(t_k) = 2\pi l/T.$$

На рис. 13 представлены разности фаз  $\Delta\phi$  между колебаниями в системе и внешним сигналом для  $\Delta\omega/\omega_0 \approx 5.4\%$  (кривая 1) и  $\Delta\omega/\omega_0 \approx -5.4\%$  (кривая 2). Разность фаз меняется от  $-40^\circ$  до  $-60^\circ$  при изменении частоты внешнего воздействия в пределах области синхронизации. Полученные результаты соответствуют результатам [9] как феноменологической теории (кривая 3), так и физического эксперимента по синхронизации виркатора сигналом релятивистского магнетрона (кривая 4). Флуктуации на кривой 4 объясняются авторами этой статьи нестабильностью электронного импульса, инжектируемого в виркатор, однако, среднее значение  $\Delta\phi \approx -50^\circ$ , что достаточно хорошо согласуется с численным экспериментом.

В случае модуляции электронного потока разности фаз между внешним сигналом (модуляцией) и колебаниями виртуального катода при  $\Delta\omega \rightarrow 0$  также стремятся к нулю. Например, для вышеприведенного отношения ( $\Delta\omega_0 \approx 5.4\%$ )  $\Delta\phi \approx 5^\circ$ . Это делает перспективным использование виркаторов с предварительной модуляцией электронного потока в качестве модулей антенных решеток, так как суммарная мощность связанной системы будет пропорциональна  $\cos\Delta\phi$ . Во второй модели с внешним сигналом, подаваемым в область виртуального катода, разность фаз далека от оптимальной.

### Заключение

Проведенное численное моделирование показало, что внешнее воздействие на колебания электронного потока с виртуальным катодом приводит к движениям, которые принципиально отличаются от автономных колебаний виртуального

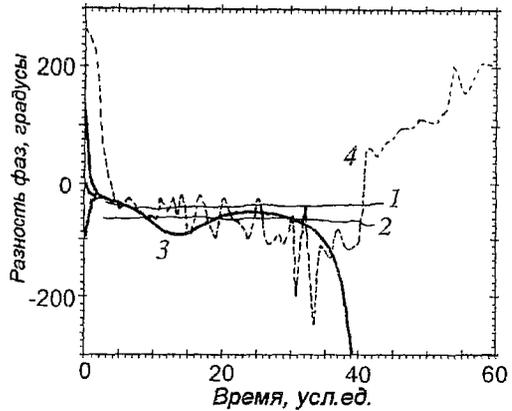


Рис. 13. Разность фаз между колебаниями в системе и внешним сигналом для различных отношений  $\Delta\omega/\omega_0$  (кривые 1 и 2). Кривые 3 и 4 соответствуют результатам феноменологической теории и натурного эксперимента [9]

катода. Неавтономная система демонстрирует широкий спектр нелинейных динамических явлений, включая стохастическую синхронизацию внешними гармоническими сигналами.

Отметим, что различным видам внешнего воздействия соответствуют различные механизмы влияния на динамику системы. Модуляция электронного потока позволяет проводить дополнительную «селекцию» заряженных частиц, подавляя внутреннюю обратную связь в потоке, связанную с электронами, отраженными не в фазе от виртуального катода. Внешний электромагнитный сигнал воздействует непосредственно на форму потенциального рельефа в пространстве взаимодействия.

Предварительная модуляция электронного потока, видимо, является более перспективным путем управления или, по крайней мере, стабилизации некоторых характеристик динамики электронного потока с виртуальным катодом, что подтверждается большим интересом к приборам с модуляцией электронного потока, а именно: к виртоду [4] и виркатору–клистрону [19]. В первую очередь это связано с различными уровнями мощности управляющего сигнала (см., например, [4,9,10,17]). Дополнительный интерес к системам с модуляцией потока может быть связан с более оптимальными фазовыми соотношениями между управляющим и генерируемым сигналом (см. предпоследний раздел, а также [16]).

Полученные результаты позволяют рассматривать систему с виртуальным катодом как базовый элемент, на основе которого могут быть построены системы с большим числом степеней свободы – антенные решетки на параллельно работающих виркаторах, синхронизируемых внешними сигналами.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–02–16753).*

#### **Библиографический список**

1. *Pierce J.* Limiting current in electron beam in presence of ions // *J.Appl.Phys.* 1944. Vol. 15, № 8. P. 721.
2. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
3. *Thode L.E.* // *High Power Microwave Sources* / Eds V.L. Granatstein and I. Alexeff. Boston: Artech House, 1987. Ch.14. P. 506.
4. *Гадецкий Н.Н., Магда И.И., Найстетер С.И., Прокопенко Ю.В., Чумаков В.И.* Генератор на сверхкритическом токе РЭП с управляемой обратной связью – виртод // *Физика плазмы.* 1993. Т. 19, вып. 4. С. 530.
5. *Anfinogentov V.G.* Chaotic dynamics of electron beam with virtual cathode in the bounded system // *Proc. of the 11th Conf. on High–Power Particle Beams.* Prague, 1996. Vol. 1. P. 381.
6. *Храмов А.Е.* Влияние обратной связи на сложную динамику электронного потока с виртуальным катодом в виртоде // *Письма в ЖТФ.* 1998. Т. 24, вып. 5. С.51.
7. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Сложное поведение электронного потока с виртуальным катодом и генерация хаотических сигналов в виртодных системах // *Изв. РАН. Сер. физическая.* 1997. Т. 61, № 12. С.2391.
8. *Sze H., Price D., Woo W., Benford J.* Priming and phase locking of high power vircators // *Abstr. of the 7th Int. Conf. on High–Power Particle Beams.* Karlsruhe, 1988. P. 328.
9. *Woo W., Benford J., Fittinghoff D., Harteneck B., Price D., Smith R., Sze H.* Phase locking of high–power microwave oscillators // *J.Appl.Phys.* 1989. Vol. 65, № 2. P. 861.
10. *Григорьев В.П., Жерлицын А.Г., Коваль Т.В., Кузнецов С.И., Мельников Г.В.* О возможности изменения частоты излучения внешним сигналом в СВЧ–триоде с виртуальным катодом // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14, вып. 23. С. 2164.
11. *Fazio M.V., Noeberling R.F.* A reflexing electron microwave amplifier for RF

particle-accelerator applications // Proc. of the 6th Conf. on High-Power Particle Beams. Kobe, 1986. P. 569.

12. *Hramov A.E.* Influence of external action on chaotic dynamics of virtual cathode oscillations // Proc. of the 5th Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic systems. Moscow, Russia, 26–27 June, 1997. P. 443.

13. *Magda I.I., Prokopenko Yu.V.* Co-operative high-power radiation of two beams at the dual vircator complex // Proc. of the 11th Conf. on High-Power Particle Beams. Prague, 1996. Vol. 1. P. 442.

14. *Hendrics K.J., Adler R., Noggle R.C.* Experimental results of phase locking two virtual cathode oscillators // J.Appl.Phys. 1990. Vol. 68, № 2. P. 820.

15. *Didenko A.N.* Influence of external high frequency signal on generation in the virtual cathode // Abstr. of the 7th Int. Conf. on High-Power Particle Beams. Karlsruhe, 1988. P. 338.

16. *Храмов А.Е.* Колебания в системе двух связанных генераторов на виртуальном катоде виртодного типа с управляемой связью: вычислительный эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. P. 108.

17. *Friedman M., Serlin V.* Modulation of intense relativistic electron beams by an external microwave sources // Phys.Rev.Lett. 1985. Vol. 55, № 26. P. 2860.

18. *Jiang W., Masugata K., Yatsui K.* New configuration of a virtual cathode oscillator for microwave generation // Physics of Plasmas. 1995. Vol. 2, № 12. P. 4635.

19. *Jiang W., Masugata K., Yatsui K.* High power microwave oscillator: vircator-klystron // Proc. of the 11th Conf. on High-Power Particle Beams. Prague, 1996. Vol. 1. P. 477.

20. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Исследование хаотической динамики в активных системах на виртуальном катоде с внутренней обратной связью // Мат. науч. конф. «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ». Саратов, 4–8 сентября 1997. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. С. 6.

21. *Sze H., Price D., Harteneck B.* Phase locking of two strongly coupled vircators // J.Appl.Phys. 1990. Vol. 67, № 5. P. 2278.

22. *Anfinogentov V.G.* Nonlinear dynamics and chaotic behaviour of electron beam with virtual cathode in the Pierce diode // Proc. of the 3rd Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic systems. Dublin, Ireland, 28–29 July, 1995. P. 79.

23. *Афонин А.М., Диденко А.Н., Пауткин А.Ю., Рошаль АС.* Нелинейная динамика виртуального катода в триодных системах // РЭ. 1992. Т. 37, вып. 10. С. 1889.

24. *Анфиногентов В.Г.* Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С.69.

25. *Селемир В.Д., Алёхин Б.В., Ватрунин В.Е., Дубинов АЕ., Степанов Н.В., Шамро О.А., Шибалко К.В.* Теоретические и экспериментальные исследования СВЧ-приборов с виртуальным катодом // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 7,8. С. 689.

26. *Anfinogentov V.G.* Influence of neutralisation degree on the complex behaviour of the electron beam with virtual cathode // Proc. of the 5th Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Moscow, Russia, 26–27 June, 1997. P. 284.

27. *Sullivan D.J., Walsh J.E., Coustias E.A.* Virtual cathode oscillator (vircator) theory // in Ref. [3], Ch.13. P. 441.

28. *Anfinogentov V.G.* Chaotic dynamics and structure formation in the plasma diode with virtual cathode // Abstr. of the 24th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Berchtesgaden, Germany, 9–13 June, 1997.

29. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics via computer simulation. N.–Y.: McGraw–Hill, 1985.

30. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // Lect. Notes in Math. Warwick: Springer–Verlag, 1980. Vol. 898. P. 366.

31. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // Phys.Rev.Lett. 1983. Vol. 50, № 5. P. 364.

32. Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Андрушкевич А.В. Диагностика сложных колебаний по корреляционной размерности // Тр. междунар. семинара «Нелинейные цепи и системы». Москва, Россия, 16–18 июня, 1992. Т. 2. С. 308.
33. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
34. Березин Ю.А., Вишивцов В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1983.
35. Morey I.J., Birdsall C.K. Travelling-wave-tube simulation: the IBC code // IEEE Trans. on Plasma Sci. 1990. Vol. 18, № 3. P. 482.
36. Диденко А.Н., Рациков В.И. Физика плазмы. 1992. Т. 18, № 9. С.1182.
37. Kadish A., Faehl R.J., Snell C.M. // Phys. Fluids. 1986. Vol.29, № 12. P.4192.
38. Manneville P., Pomeau J. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica 1D. Moscow: Nauka, 1980. P. 219.
39. Ватанабе С. Разложение Карунена – Лозва и факторный анализ. Теория и приложения // Автоматический анализ сложных изображений / Под ред. Э.М. Бравермана. М.: Мир, 1969. С.310.
40. Lumley J.L. The structure of inhomogeneous turbulent flows // Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation: Proc. of the Int. Colloquium / Eds A.M. Yaglom and V.I. Tatarsky. Moscow: Nauka, 1967. P. 166.
41. Анфиногентов В.Г. Взаимодействие когерентных структур и хаотическая динамика в электронном потоке с виртуальным катодом // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, вып. 8. С. 70.
42. Храмов А.Е. Сложная динамика когерентных структур в двухпотоковом виркаторе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2 (в печати).
43. Aubry N., Holmes P., Lumley J., Stone E. Application of dynamical system theory to coherent structures in the wall region // Physica D. 1989. Vol. 37. P. 1.
44. Wolf A., Swift J., Swinney H.L., Vastano J. Determining Lyapunov exponents from time series // Physica D. 1989. Vol. 16. P. 285.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 22.12.97  
после переработки 26.02.98

## NONAUTONOMOUS OSCILLATIONS OF ELECTRON BEAM WITH VIRTUAL CATHODE IN THE PLANAR DIODE REGION

*V.G. Anfinogentov, A.E. Hramov*

The influence of external action on the oscillations of electron beam with virtual cathode in the planar diode is investigated. The results of numerical simulations are shown for model with modulated electron beam and model with action of external signal on the virtual cathode oscillation. It is shown that system demonstrates different nonlinear oscillations, including deterministic chaos and synchronization regimes. Features of both types of external action are considered and it is shown that modulation is the most effective method of control of the virtual cathode oscillation. The investigation of physical processes in the system demonstrates appearance of complex behaviour as a result of structure interaction in the beam. Synchronization regimes are connected with suppression of structure growth. Phase correlations between external signal and virtual cathode oscillations obtained from numerical simulations and physical experiments are in the good agreement.



*Анфиногентов Василий Геннадиевич* – родился в 1968 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1991). После окончания университета работает на кафедре электроники и волновых процессов СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) по специальности радиофизика. Область научных интересов – сложная динамика в распределенных системах электронной природы, мощная СВЧ электроника.



*Храмов Александр Евгеньевич* – в 1996 году закончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. В настоящее время работает в НИИ механики и физики СГУ. Работает в научном секторе Государственного учебно-научного центра «Колледж» СГУ. Область научных интересов – нелинейные явления и процессы структурообразования в распределенных системах электронно-плазменной природы, мощная СВЧ электроника.



## ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛАМПЫ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ

*А.П. Кузнецов, А.П. Широков*

Получено дискретное двухпараметрическое отображение, приближенно описывающее динамику во времени амплитуды поля в релятивистской лампе обратной волны. Построена карта динамических режимов на плоскости параметр взаимодействия – релятивистский параметр. Найдена трикритическая точка и исследован нефейгенбаумовский каскад бифуркаций удвоения периода.

### Введение

В настоящее время ведутся интенсивные исследования динамических систем, способных демонстрировать хаотическое поведение, в частности, различных радиофизических устройств. Среди них можно назвать нелинейный колебательный контур с внешним воздействием [1,2], электронную схему Чуа [3,4], различные радиофизические генераторы [5–7], а также практически все известные генераторы с распределенным взаимодействием, относящиеся к микроволновой электронике [8–11]. Однако полноценное адекватное описание в терминах нелинейной динамики пока возможно лишь для систем, представляемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такие системы в той или иной мере поддаются аналитическому, а в большей степени – численному исследованию. Для них можно найти стационарные и периодические решения, исследовать их устойчивость, определить бифуркационные значения параметров, построить карты динамических режимов. Значительно хуже обстоит дело с анализом сложной динамики распределенных систем, которые описываются нелинейными уравнениями в частных производных. Причина этого состоит как в ограниченности соответствующих аналитических методов, так и в резком увеличении затрат машинного времени при переходе к численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Так построение карты динамических режимов все еще остается за пределами возможностей современных компьютеров. Восполнить соответствующие пробелы можно, привлекая к анализу распределенных систем простые конечномерные дискретные модели. Идея построения таких моделей для популярных в микроволновой электронике систем типа электронный пучок – обратная электромагнитная волна, к которым относится лампа обратной волны и аналогичные ей устройства, была предложена в работе [12]. С помощью такой модели удастся предсказать существование каскада бифуркаций удвоения периода и возникновение хаоса в системе, наблюдаемых при увеличении тока пучка. В настоящем сообщении мы развиваем аналогичный подход в релятивистском случае.

## 1. Построение дискретного отображения

Для построения дискретного отображения вслед за [12] предположим, что обмен энергией между пучком электронов и электромагнитной волной происходит исключительно в двух узких интервалах, расположенных в начале и в конце пространства взаимодействия. (Соответствующее приближение известно в микроволновой электронике как «клистронная модель» [12].) Известные уравнения, описывающие эволюцию во времени и пространстве амплитуды электромагнитного поля и движение пучка, в этом случае принимают вид [12,13]

$$\partial^2\theta/\partial\xi^2 = -(1 + \nu\partial\theta/\partial\xi)^{3/2} \operatorname{Re}\{1/2L[\delta(\xi) + \delta(\xi-L)]Fe^{i\theta}\}, \quad (1)$$

$$\partial F/\partial\tau - \partial F/\partial\xi = -[1/\pi\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}d\theta_0]1/2L[\delta(\xi) + \delta(\xi-L)]$$

с граничными условиями

$$\theta(0,\tau) = \theta_0, \quad \partial\theta(0,\tau)/\partial\xi = 0, \quad F(L+0,\tau) = 0.$$

Здесь  $\theta$  – фаза электрона относительно волны,  $F$  – безразмерная комплексная амплитуда волны,  $\tau \sim \tau - \xi/\nu_0$  – безразмерное «запаздывающее» время,  $\xi$  – безразмерная координата,  $L$  – безразмерная длина пространства взаимодействия,  $\nu = 2C(\gamma_0^2 - 1)$  – релятивистский параметр,  $C$  – модифицированный параметр усиления,  $\gamma_0$  – отношение энергии электрона к энергии покоя на входе в пространство взаимодействия.

Модуляция электронов по скорости происходит на пушечном конце ЛОВ, и их группировка развивается по мере движения вдоль системы. Таким образом в начале пространства взаимодействия (то есть при  $\xi=0$ ) можно не учитывать воздействие пучка на поле, а в конце (то есть при  $\xi=L$ ) – поля на пучок. Поэтому уравнения (1) упрощаются

$$\partial^2\theta/\partial\xi^2 = -(1 + \nu\partial\theta/\partial\xi)^{3/2} \operatorname{Re}(Fe^{i\theta})1/2L\delta(\xi), \quad (2)$$

$$\partial F/\partial\tau - \partial F/\partial\xi = -L\delta(\xi-L)/(2\pi)\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}d\theta_0. \quad (3)$$

Уравнение движения пучка (2) можно представить таким образом, чтобы в левой части стояла производная от некоторого выражения по  $\xi$

$$\partial/\partial\xi[(2/\nu)(1 + \nu\partial\theta/\partial\xi)^{-1/2}] = \operatorname{Re}(Fe^{i\theta})1/2L\delta(\xi). \quad (4)$$

Теперь, полагая  $F(\tau,0) = A(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$ , где  $A(\tau)$  – модуль комплексной амплитуды волны в точке  $\xi=0$  в момент времени  $\tau$ , проинтегрируем уравнение (4) по  $\xi$

$$(2/\nu)/(1 + \nu\partial\theta/\partial\xi)^{1/2} = 2/\nu + 1/2LA\cos(\theta_0 + \varphi). \quad (5)$$

После повторного интегрирования приходим к окончательному выражению для фазы электрона относительно волны

$$\theta = \theta_0 + \xi/\nu\{[1 + 1/4\nu LA\cos(\theta_0 + \varphi)]^{-2} - 1\}. \quad (6)$$

Как видно из формулы (6), после дельтообразного воздействия фазовая переменная для каждого электрона изменяется по линейному закону на протяжении его следования в пространстве взаимодействия. При этом коэффициент пропорциональности является функцией параметров  $L$ ,  $\nu$ , а также начальной фазы электрона  $\theta_0$  и амплитуды модулирующей волны  $A$ , и может быть как положительным, так и отрицательным, что соответствует ускорению и замедлению электронов в момент воздействия волны в точке  $\xi=0$ .

Используя соотношение (6), уравнение возбуждения (3) можно представить в следующем виде:

$$\partial F/\partial \tau - \partial F/\partial \xi = L\delta(\xi-L)I, \quad (7)$$

где

$$I = -(e^{i\varphi}/2\pi) \int_0^{2\pi} \exp\{-i[\alpha + (L/\nu)(1 + 1/4\nu LA \cos\alpha)^{-2} - L/\nu]\} d\alpha. \quad (8)$$

Здесь через  $I$  обозначен ток на выходе пространства взаимодействия. В области  $0 < \xi < L$  источников нет, и уравнение (7) имеет общее решение в виде  $F(\tau, \xi) = f(\tau + \xi)$ , где  $f$  – некоторая функция. Учитывая, что  $F(\tau, L+0) = 0$ , проинтегрируем уравнение (7) по  $\xi$ . Тогда нетрудно получить следующее выражение:

$$F(\tau, 0) = -I(L, \tau-L)L. \quad (9)$$

Поскольку в переменных  $\tau, \xi$  скорость переноса возмущений в соответствии с уравнением (7) равна единице, то подставляя выражение для тока (8) в формулу (9) и полагая, что  $F(\tau, 0) = A(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$ , получаем

$$A(T+\tau)e^{i\varphi(T+\tau)} = 1/2Le^{i\varphi(T)}/\pi \int_0^{2\pi} \exp\{-i[\alpha + (L/\nu)(1 + 1/4LvA(\tau)\cos\alpha)^{-2} - L/\nu]\} d\alpha. \quad (10)$$

Взяв модуль этого выражения, приходим к уравнению для действительной амплитуды волны

$$A_{n+1} = L/(2\pi) \left| \int_0^{2\pi} \exp\{-i[\alpha + (L/\nu)(1 + 1/4LvA_n \cos\alpha)^{-2} - L/\nu]\} d\alpha \right|, \quad (11)$$

где введены обозначения  $A_{n+1} = A(T+\tau)$  и  $A_n = A(\tau)$ , а  $n$  – дискретное время.

Уравнение (11) представляет собой одномерное двухпараметрическое отображение, в котором  $L$  – безразмерный параметр длины пространства взаимодействия, а  $\nu$  – релятивистский параметр. В нерелятивистском пределе при стремящемся к нулю  $\nu$  оно превращается в

$$A_{n+1} = 1/2L^3 |J_1(A_n)|, \quad (12)$$

где  $J_1$  – функция Бесселя, что совпадает с выражением, найденным в [12].

## 2. Карта динамических режимов

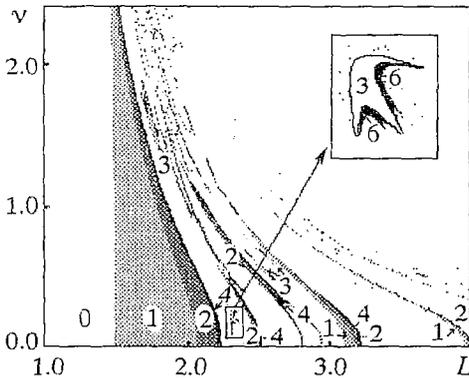


Рис. 1. Карта динамических режимов отображения (11). Цифрами обозначены следующие режимы: 0 – отсутствие колебаний; 1 – колебания с постоянной амплитудой; 2, 3, 4, 6 – автомодуляция по амплитуде с соответствующими периодами

На рис. 1 приведена карта динамических режимов, полученная при численном исследовании отображения (11). В области малых значений параметра  $L < 1.6$  в дискретном отображении существует единственная неподвижная точка в нуле (рис. 2, а), причем, как нетрудно показать, она является устойчивой. При увеличении  $L$  происходит бифуркация (ее можно интерпретировать как бифуркацию «вилка»), в результате которой появляется новая устойчивая неподвижная точка, а точка в начале координат становится неустойчивой (рис. 2, б). При дальнейшем увеличении  $L$  происходят бифуркации удвоения периода: отличная от нуля неподвижная точка становится неустой-

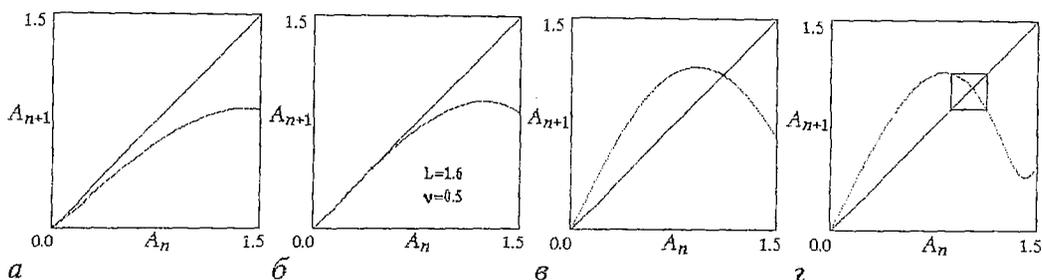


Рис. 2. Диаграммы Ламерея при различных значениях параметров  $L$  и  $\nu$ : а -  $L=1.5, \nu=0.5$ ; б -  $L=1.6, \nu=0.5$ ; в -  $L=2.0, \nu=0.1$ ; г -  $L=2.0, \nu=0.5$

чивой, и возникает цикл периода 2, затем и он теряет устойчивость, и рождается цикл периода 4 и т.д. до бесконечности. Бифуркационные значения параметров  $L_n$  сходятся к критическому значению  $L_{cr}$  по закону Фейгенбаума, причем величина  $L_{cr}$  зависит от релятивистского параметра  $\nu$ . Соответственно, на плоскости  $(L, \nu)$  имеется фейгенбаумовская критическая линия. В области слева от этой линии существует регулярная динамика, а справа от нее система может демонстрировать хаотическое поведение. В области хаоса находятся многочисленные островки периодических режимов.

Применительно к лампе обратной волны можно сказать, что при небольших значениях тока генерация отсутствует, а малые возмущения поля в системе затухают. При превышении током пучка некоторого порогового значения возникает генерация с постоянной амплитудой выходного сигнала. Затем этот режим становится неустойчивым к малым возмущениям, и появляется автомодуляция сигнала по амплитуде. Далее наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода автомодуляции, после чего в системе возможно как хаотическое поведение, так и весьма разнообразные режимы автомодуляции.

В нерелятивистском случае аналогичная картина установлена в [12] для дискретного отображения (12), причем она в определенной мере подтверждается и непосредственным численным исследованием исходных уравнений лампы обратной волны [14]. В работе [12] при численном решении дифференциальных уравнений в релятивистском случае было предсказано, что значение параметра  $L$ , при котором возникает автомодуляция, уменьшается с ростом релятивистского параметра  $\nu$ . Такой же характер зависимости наблюдается и на рис. 1. Как можно видеть, подобная ситуация соответствует уменьшению угла наклона касательной в неподвижной точке отображения (11) с ростом параметра  $\nu$  (рис. 2, в, г).

Карта динамических режимов на рис. 1 дает, однако, существенно более богатую количественную и качественную информацию о возможных режимах динамики в релятивистском случае.

### 3. Трикритическая точка

На рис. 3, а показан в увеличенном виде фрагмент карты динамических режимов, выделенный на исходном рис. 1. На нем присутствует характерная для мультимодальных одномерных отображений конфигурация линий удвоения периода - «crossroad area» по терминологии [15]. Представленный фрагмент карты соответствует области параметров, в пределах которой наблюдаются удвоения цикла периода 3 отображения (11). Линии, являющиеся границами областей устойчивости циклов удвоенного периода (6, 12, 24, ...), при увеличении  $n$  сходятся к фейгенбаумовской критической линии  $\Gamma_{cr}$ , которая теперь обрывается в так называемой трикритической точке [16].

На рис. 3, а показана также найденная численно линия  $\Gamma$ , соответствующая значениям параметров, при которых происходит отображение ближайшего к началу координат максимума в следующий за ним минимум.

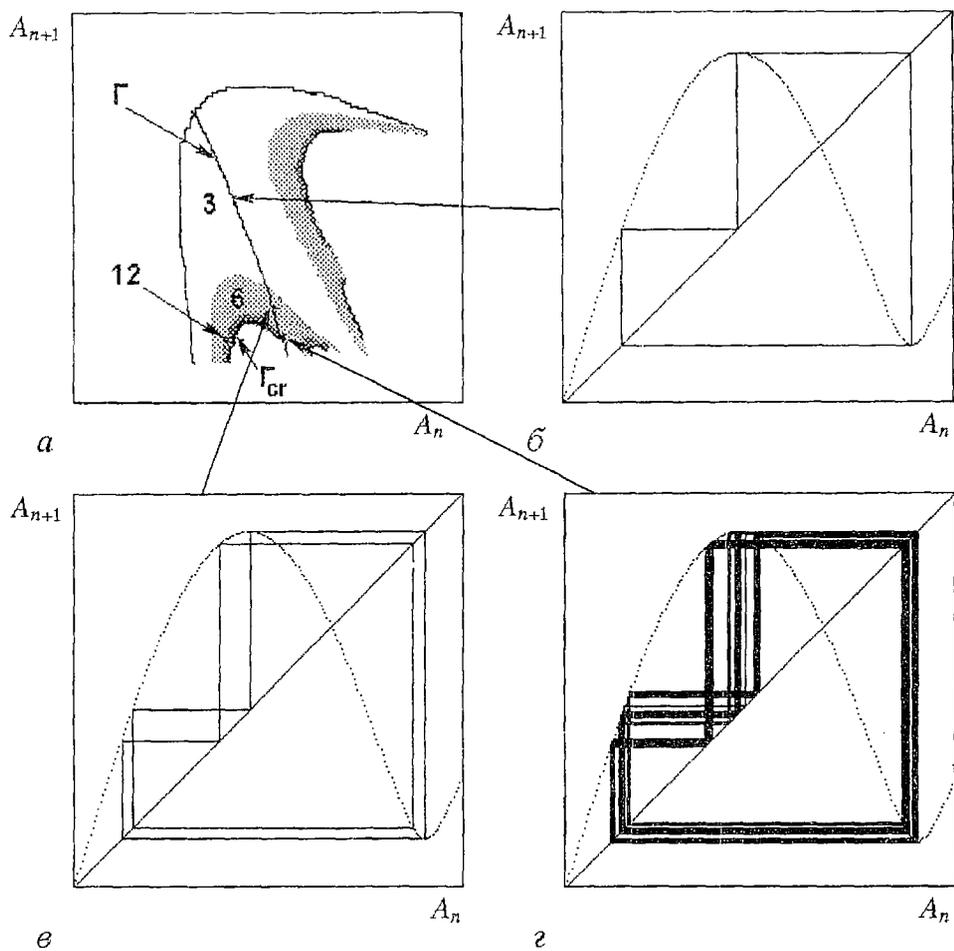


Рис. 3. Фрагмент карты динамических режимов (а) и итерационные диаграммы в некоторых характерных точках: б -  $L=2.314$ ,  $\nu=0.214$ ; в -  $L=2.330$ ,  $\nu=0.167$ ; г -  $L=L_T$ ,  $\nu = \nu_T$ .  $\Gamma_{cr}$  обозначает фейгенбаумовскую критическую линию;  $\Gamma$  - линию, соответствующую значениям параметров, при которых происходит отображение экстремума в экстремум

Как мы уже отмечали, при движении по карте динамических режимов по типичному маршруту (например, вдоль линии  $\nu=const$ ) наблюдается переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Однако при движении по особому маршруту, которым является линия  $\Gamma$ , можно наблюдать нефейгенбаумовский каскад бифуркаций удвоения периода. Соответствующие итерационные диаграммы показаны на рис. 3, б, в. Бифуркационные значения параметров приведены в таблице. Они накапливаются к предельной точке  $L_T=2.334075433$ ,  $\nu_T=0.158449576$ . Используя данные таблицы, легко показать, что закон накопления бифуркационных точек соответствует геометрической прогрессии, однако, ее показатель  $\delta_T=7.284$  отличен от известного фейгенбаумовского значения  $\delta_F=4.669$  и характерен для отображений, имеющих экстремум четвертой степени. Причина этого состоит в том, что при условии отображения максимума в минимум дважды проитерированное отображение будет иметь экстремум четвертой степени [17]. Отметим, что предельная точка  $(L_T, \nu_T)$  является концевой точкой фейгенбаумовской линии, то есть трикритической точкой.

Итерационная диаграмма для отображения (11) в трикритической точке приведена на рис. 3, г. Видно, что аттрактор как бы организован «на базе» цикла периода 3, причем аттрактору принадлежат два экстремума. Трикритический

Значения параметров, соответствующих нефейгенбаумовским бифуркациям удвоения периода, при движении вдоль линии  $\Gamma$

Период цикла	$L_n$	$\nu_n$
3	2.328043	0.176106
6	2.333301	0.160800
12	2.333970	0.1587700
24	2.3340610	0.1584929
48	2.33407350	0.15845479
96	2.334075200	0.158449576
.....	.....	.....
$\infty$	2.334075433	0.158449576

аттрактор представляет собой фрактальное множество, подобное Канторовскому, и характеризуется дробной размерностью Хаусдорфа.

На рис. 4, *a* показано бифуркационное дерево, дающее зависимость переменной  $A$  на аттракторе от параметра  $L$  при движении по плоскости параметров вдоль линии  $\Gamma$ . Хорошо видны точки бифуркаций удвоения периода, в которых каждая ветвь расщепляется на две. Точно при трикритических значениях параметров  $L_T, \nu_T$  существует бесконечное число «ветвей». Серия рис. 4, *a-v* иллюстрирует скейлинг на бифуркационном дереве. Каждый последующий рисунок серии представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. Пересчет картинок производился относительно трикритической точки по оси  $L$  с масштабным фактором  $\delta_T=7.284686217$ , а по оси  $A_n$  – с константой скейлинга

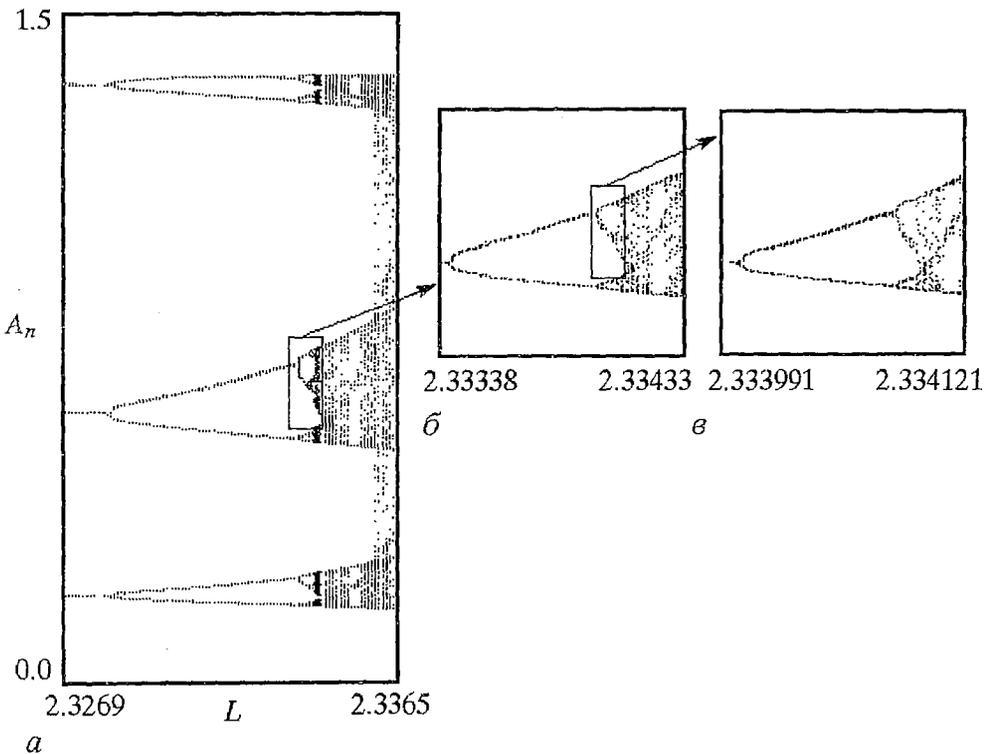


Рис. 4. Бифуркационное дерево и иллюстрации скейлинга в окрестности трикритической точки

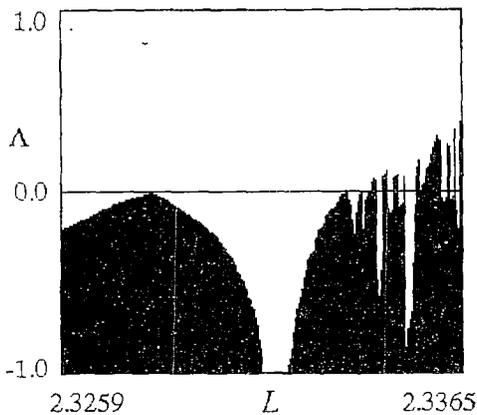


Рис. 5. График зависимости ляпуновского показателя от параметра  $L$  вдоль линии  $\Gamma$

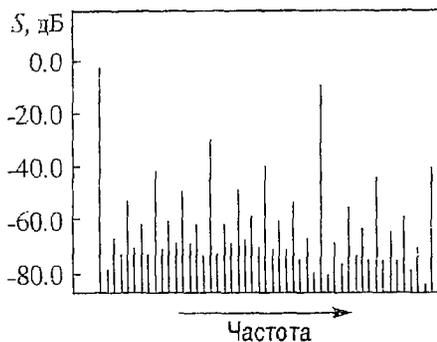


Рис. 6. Спектр отображения (11) в трикритической точке

$a_T = -1.6903029714$  (значения констант  $\delta_T$  и  $a_T$  получены в [16] с помощью ренормгруппового анализа). Поскольку константа  $a_T$  отрицательна, то для того, чтобы наблюдалось совпадение картинок, все четные рисунки необходимо перевернуть.

График зависимости ляпуновского показателя от параметра  $L$ , соответствующий линии  $\Gamma$ , изображен на рис. 5. При значениях  $L < L_T$  ляпуновский показатель  $\Lambda$  всюду отрицателен за исключением точек, в которых происходят бифуркации удвоения цикла, где  $\Lambda$  обращается в нуль. При превышении параметром  $L$  значения  $L_T$  показатель Ляпунова может быть положительным, что отвечает хаотическим режимам. В закритической области существуют также различные «окна» периодичности, которым соответствуют отрицательные значения ляпуновского показателя.

Спектр колебаний отображения (11) в трикритической точке представлен на рис. 6. Можно видеть, ярко «выраженную» гармонику, соответствующую циклу периода 3. Как и в фейгенбаумовском случае, спектр на рис. 6 имеет иерархическую организацию по уровням амплитуд субгармоник. Отметим, однако, что для трикритической точки перепад между субгармониками соседних уровней составляет 10.40 дБ [17] в отличие от универсального значения 13.35 дБ, соответствующего фейгенбаумовской критической динамике.

Авторы выражают благодарность Д.И. Трубецкову, С.П. Кузнецову, Н.М. Рыскину за полезное обсуждение.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-15-96921).*

## Библиографический список

1. Linsay P.S. Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol.47, №19. P.1349.
2. Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П. Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // РЭ. 1987. Т.32, №12. С. 2558.
3. Леон О. Чуа. Генезис схемы Чуа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, №3. С.4.
4. Matsumoto T. A chaotic attractor from Chua's circuit // IEEE Trans. 1984. Vol. CAS-31. P. 1055.

5. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1995.

6. *Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А.* Путь к хаосу в кусочно–линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 1. С. 93.

7. *Пиковский А.С., Рабинович М.И.* Простой автогенератор со стохастическим поведением // Докл. ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 2. С.301.

8. *Соколов Д.В., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны, динамический хаос и некоторые задачи сверхвысокочастотной электроники // Проблемы физической электроники. Л., 1988. С. 141.

9. *Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Автоколебания в распределенных системах электронный поток – встречная (обратная) электромагнитная волна // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, № 5. С. 9.

10. *Блюх Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б.* Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ–генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, №1. С. 34.

11. *Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г.* Динамический хаос в двухрезонаторных клистронных автогенераторах с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, №5. С. 88.

12. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П.* Периодические и стохастические режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 29.

13. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.

14. *Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И.* О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // Матер. Всероссийской межвуз. конф. «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ». Саратов, 4–8 сентября 1997. С. 40.

15. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* Crossroad area – spring area transition (1). Parameter plane representation // Int. J. Bifurc. & Chaos, 1991. Vol. 1. P. 183.

16. *Chang S. J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one–dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior. // Phys. Rev. 1981. Vol. 24, № 5.

17. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 3–4. С. 17.

Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники РАН  
Высший колледж прикладных наук СГУ

Поступила в редакцию 11.12.97

## DISCRETE MODEL OF A BACKWARD–WAVE TUBE

*A.P. Kuznetsov, A.P. Shirokov*

The discrete two–parameter map approximately describing dynamics of a field amplitude in the backward–wave tube is received. The bifurcation diagram on a plane «parameter of interaction – relativistic parameter» is obtained. The tricritical point is found and nonfeigenbaum cascade of period–doubling bifurcations is investigated.



*Кузнецов Александр Петрович* родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу во многопараметрических модельных и физических нелинейных системах. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Разработал и прочитал несколько оригинальных учебных курсов для Колледжа прикладных наук СГУ. Автор двух популярных книг.



*Широков Андрей Петрович* – родился в Ершове Саратовской области (1977). В настоящее время студент 4-го курса Колледжа прикладных наук СГУ. Инженер Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Соросовский студент. Лауреат премии фонда им. Н.И. Вавилова. Занимается научной работой в студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор одной научной публикации.



## КОЛМОГОРОВ, ПЕТРОВСКИЙ, ПИСКУНОВ, ФИШЕР И НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

*Д.И. Трубецков*

Если оглянуться назад, то окажется, что математики упустили прекрасную возможность получить важные научные результаты только потому, что они игнорировали изучение нелинейного уравнения диффузии. Исключением была работа А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова. «Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества...». Они показали, что любое начальное возмущение в виде перепада стремится к одному и тому же уединенному стационарному решению типа бегущей волны. Авторы изучили это решение с помощью фазовой плоскости и получили в явном виде выражение для скорости.

... То, что математики не сумели своевременно изучить уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова, не может быть объяснено слабостью их техники перед лицом огромных математических трудностей... Препятствие вероятно заключалось в том, что математики автоматически перенесли вывод о неволновом поведении решений линейного диффузионного уравнения на нелинейный случай.

*Элвиль Скотт*<sup>1</sup>

Уравнение, о котором пойдет речь, было впервые исследовано в 1937 году А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским, Н.С. Пискуновым [1] и независимо Р.Э. Фишером [2]. Так что есть повод отпраздновать шестидесятилетний юбилей уравнения, которое все чаще и чаще называют уравнением КПП.

Работа [1] была задумана авторами применительно к следующей биологической задаче. В экологической среде внезапно, в некотором очаге, локально, возникает новый тип организмов, обладающий, например, лучшей приспособленностью к условиям данной среды, большей плодовитостью (повышенный биологический потенциал) по сравнению с ранее существовавшим. Новый тип расселяется по всему пространству и вытесняет старый тип организмов. Предполагается, что в любой точке среды организм начинает

<sup>1</sup> Элвиль Скотт. Электрофизика нервного волокна / Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. С. 288–289.

размножаться немедленно после возникновения (среда является активной), а вне очага активные организмы появляются за счет диффузии. В одномерном случае задача сводится к решению уравнения

$$\partial u / \partial t = D \partial^2 u / \partial x^2 + F(u), \quad D > 0, \quad (1)$$

где  $x$  – координата точки на плоскости;  $t$  – время;  $u$  – плотность организмов в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Кроме диффузии, как указано выше, имеет место возрастание плотности организмов, скорость которого в данной точке и в данный момент времени зависит от уже существующей, причем, представляют интерес значения  $F(u)$  при  $u \geq 0$ . Предполагается, что  $F(u)$  – непрерывная и необходимое количество раз дифференцируемая функция  $u$ , удовлетворяющая условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad (2)$$

$$F(u) > 0, \quad 0 < u < 1, \quad (3)$$

$$\partial F(0) / \partial u = \alpha > 0, \quad \partial F(u) / \partial u < \alpha, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (4)$$

Из (4) следует, что при достаточно малых  $u$  скорость  $F(u)$  возрастает и пропорциональна  $u$  (с коэффициентом пропорциональности  $\alpha$ ). Кроме того, при приближении  $u$  к единице возрастание  $F(u)$  прекращается. Поэтому рассматриваются только решения уравнения (1), удовлетворяющие условию

$$0 \leq u \leq 1. \quad (5)$$

Статья [1] оригинально построена: во введении изложены все основные результаты, а доказательства даны в основном тексте. Поступим также и мы, приведя здесь часть введения из [1]. «Предположим теперь, что в начальный момент  $t=0$ , при  $x < a$  плотность  $u=0$ , а при  $x > b \geq a$  плотность достигает своего максимального возможного значения  $u=1$ . Естественно, что область плотностей, близких к единице, будет с возрастанием  $t$  распространяться справа налево, оттесняя область малых плотностей влево. В частном случае  $a=b$  картина будет приблизительно такова, как изображено на рис. 1. Тот участок кривой плотности (как функция  $x$ ), на который приходится основная часть падения плотности от единицы до нуля, с течением времени перемещается справа налево. По формуле кривая плотности при  $t \rightarrow \infty$  приближается к определенной предельной кривой. Задача заключается в том, чтобы определить эту предельную форму кривой плотности и предельную скорость ее перемещения справа налево. Оказывается, что искомая предельная скорость равна

$$\lambda_0 = 2(D\alpha)^{1/2}, \quad (6)$$

а предельная форма кривой плотности дается решением уравнения

$$\lambda_0 du / dx = D d^2 u / dx^2 + F(u), \quad (7)$$

обращающимся в нуль при  $x = -\infty$  и в единицу при  $x = +\infty$ . Такое решение всегда существует и единственно с точностью до преобразования  $x' = x + C$ , не меняющего

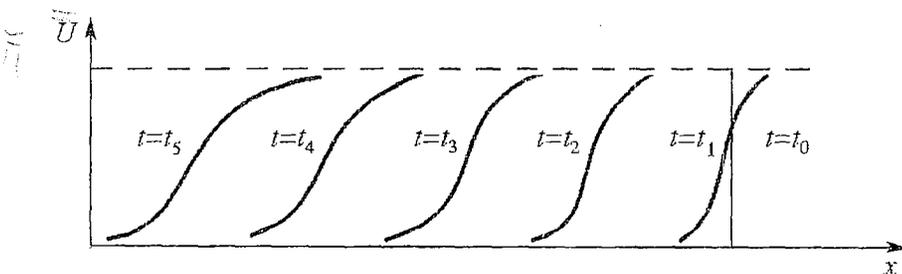


Рис. 1

форму кривой. Заметим, что уравнение (7) может быть получено следующим образом. Будем искать решение уравнения (1), обладающее тем свойством, что при изменении  $t$  форма кривой, изображающей зависимость  $u$  от  $x$ , не меняется, а сама эта кривая перемещается справа налево со скоростью  $\lambda$ . Такое решение имеет вид

$$u(x,t) = u(x+\lambda t). \quad (8)$$

Рассматривая теперь  $u$  как функцию одного переменного  $z=x+\lambda t$ , получим уравнение

$$\lambda du/dz = Dd^2u/dz^2 + F(u).$$

Уравнение это, оказывается, имеет решения, удовлетворяющие условиям, поставленным выше для уравнения (7), при всевозможных  $\lambda \geq \lambda_0$ . Но только при  $\lambda = \lambda_0$  мы получим интересующую нас предельную форму кривой плотности при указанных выше начальных условиях».

Немного о двух авторах работы [1].

Андрей Николаевич Колмогоров – один из величайших математиков нашего века, один из крупнейших ученых в истории русской науки, гениальный человек и великий просветитель. В интересной статье [3], посвященной девяностолетию со дня рождения А.Н. Колмогорова, есть раздел «Вехи творческого пути», где указано, что список его трудов насчитывает около 500 работ. «Одно лишь перечисление математических разделов («сюжетов»), в которые Колмогоров внес фундаментальный вклад, необычайно велико. Назовем некоторые: метрическая теория функций, дескриптивная теория множеств, математическая логика, теория вероятностей, геометрия, случайные процессы, математическая статистика, функциональный анализ, теория приближений, теоретико-множественная топология, алгебраическая топология, дифференциальные уравнения, теория турбулентности, теория стрельбы, теория алгоритмов и автоматов, динамические системы, классическая механика, теория суперпозиций функций, теория информации, алгоритмическая теория вероятностей.

Существенную долю в его научных исследованиях составляют работы в области приложений к физике, биологии, геологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии и т. п. И помимо всего этого Андрей Николаевич имел труды по вопросам педагогики, методики, стиховедения, философии, истории, естествознания, написал множество статей в различные энциклопедии» [3, с. 7–8].

Несомненно, что читателям журнала известен спектр Колмогорова – Обухова в теории турбулентности, колмогоровская энтропия как лира хаоса, теория Колмогорова – Арнольда – Мозера (КАМ-теория), эргодическая теория динамических систем и, конечно, уравнение КПП, о котором идет речь в этой статье.

Второй автор статьи [1] – академик Иван Георгиевич Петровский. Его работы относятся к теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и другим областям математики. Он заложил основы общей теории систем дифференциальных уравнений с частными производными. В области алгебраической геометрии им решена задача о расположении овалов алгебраической кривой 6-го порядка, поставленная Давидом Гильбертом. И.Г. Петровский автор неоднократно издававшихся учебников «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», «Лекции по теории интегральных уравнений» и «Лекции об уравнениях с частными производными». В замечательных воспоминаниях И.С. Шкловского «Эшелон» есть рассказ, посвященный Петровскому – ректору МГУ (он возглавлял университет с 1951 года). Вот небольшие отрывки из этого рассказа [4].

«22 года Иван Георгиевич руководил самым крупным университетом страны. У него ничего не было более близкого, чем университет, бывший ему родным домом и семьей. Ради университета он забросил даже любимую математику. Вместе с тем Иван Георгиевич – человек высочайшей порядочности и чести

никогда не был полным хозяином в своем доме. Могущественные «удельные князья» на факультетах гнули свою линию, и очень часто Иван Георгиевич ничего тут не мог поделаться... Он всегда любил повторять: «Поймите – моя власть далеко не безгранична!» На ветер обещаний бесчисленным «ходакам» он никогда не давал. Но если говорил: «Попробую что-нибудь для вас сделать», – можно было не сомневаться, что все, что в человеческих силах, будет сделано... Судьба ректора Московского университета академика Ивана Георгиевича Петровского была глубоко трагична. Это ведь древний сюжет – хороший человек на трудном месте в тяжелые времена. Надо понять, как было ему тяжело. Я был свидетелем многих десятков добрых дел, сделанных этим замечательным человеком. Отсюда, будучи достаточно хорошо знакомым со статистикой, я с полной ответственностью могу утверждать, что количество добрых дел, сделанных им за все время пребывания на посту ректора должно быть порядка  $10^4$ ! Много ли найдется у нас людей с таким жизненным итогом? Некий поэт по фамилии Куняев написал такие туманные строчки: «... Добро должно быть с кулаками...» Это ложь! Добро должно быть прежде всего конкретно. Нет ничего хуже абстрактной доброты. Эту простую истину следовало бы усвоить нашим «радикалам». И было бы справедливо, если бы на надгробьи Ивана Георгиевича, что на Новодевичьем, была высечена простая надпись: «Здесь покоится человек, совершивший 10000 хороших поступков».

Покажем теперь, как получаются результаты решения уравнения КПП, приведенного выше. Будем следовать работе Фишера в изложении Дж. Марри [2]. Несклько слов и о Фишере.

Рональд Эймлер Фишер родился в Лондоне в 1890 году. Он окончил в 1912 году Кембриджский университет, где изучал физику и математику. В 1919 году он стал сотрудником Экспериментальной станции (до этого он преподавал и занимался статистикой), где столкнулся с проблемой статистической обработки массовых опытов по селекции сельскохозяйственных культур и генетике. Именно тогда он написал свою известную книгу «Методы статистики для научных работников». На протяжении всей своей жизни Фишер занимался разработкой, пропагандированием и внедрением методов математической статистики в биологию и другие области экспериментальных исследований. Он занимал Гальтоновскую кафедру в Лондоне, затем – кафедру генетики в Кембридже. После своей отставки в 1957 году Фишер переехал в Австралию; он умер в Аделаиде в 1962 году.

Фишер сформулировал основные концепции популяционной генетики, что было важно для объяснения механизмов эволюционного процесса. Его книга «Генетическая теория естественного отбора» (1930) стала классическим сочинением, с которого началось развитие популяционной генетики.

Предположим непосредственному изложению работы Фишера простой иллюстративный пример, имеющий методическое значение. Пусть скалярная функция  $u(x,t)$  удовлетворяет уравнению

$$du/dt = u(1-u), \quad (9)$$

причем,  $u(0,x) = 1/(1+e^{-sx})$ ,  $s = \text{const} > 0$ , а пространственная переменная  $x$  рассматривается как параметр. Уравнение (9), как известно, называется логистическим уравнением и описывает, например, рост популяции бактерий, мушек и т. п. Стационарные состояния получаются из условия  $du/dt = 0$  и, следовательно,  $u_{\text{ст}} = 0$  и  $u_{\text{ст}} = 1$ . Исследуем каждое из них на устойчивость, полагая  $u = u_{\text{ст}} + \tilde{u}$ , где  $\tilde{u} \ll u_{\text{ст}}$ . Тогда для  $u_{\text{ст}} = 0$  имеем

$$d\tilde{u}/dt = \tilde{u}, \quad \tilde{u} \sim e^{pt} \quad \text{и} \quad p=1,$$

то есть состояние  $u_{\text{ст}} = 0$  является неустойчивым. Для  $u_{\text{ст}} = 1$

$$d\tilde{u}/dt = -\tilde{u}, \quad p=-1$$

и состояние устойчиво. Уравнение (9) допускает аналитическое решение. Действительно,

$$du/[u(1-u)] = dt, \quad t = \int du/[u(1-u)] + F(x).$$

Проводя интегрирование и полагая  $F(x) = \ln f(x)$ , находим

$$u = 1/[1 - f(x)e^{-t}].$$

Используя выражение для  $u(0,x)$  и вводя обозначение  $z = t + sx$ , окончательно получаем

$$u(x,t) = 1/(1 + e^{-z}). \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что при  $z=0$   $u(x,t) = 1/2$ , при  $z \rightarrow -\infty$   $u(x,t) \rightarrow 0$ , при  $z \rightarrow +\infty$   $u(x,t) \rightarrow 1$ . Таким образом, решение (10) представляет собой волну, которая движется влево с постоянной скоростью и имеет вид, представленный на рис. 2. Понятно, что такое решение структурно неустойчиво, потому что его форма и скорость полностью зависят от начального условия. Могут ли решения, подобные изображенному на рис. 2, быть устойчивыми? Может ли, например, стабилизировать такую волну диффузия? Наверное, хотя возможна и диффузионная неустойчивость, которая может породить пространственные структуры конечной амплитуды.

Фишер исследовал частный случай уравнения КПП (1) с квадратичной нелинейностью, то есть

$$\partial u / \partial t = ku(1-u) + D \partial^2 u / \partial x^2, \quad (11)$$

$k$  и  $D$  – положительные постоянные. Уравнение (11) можно рассматривать как простейшую диффузионную модель логистического роста популяции. Исследуем существование и форму решений уравнения (11) типа бегущей волны, для которых  $0 \leq u \leq 1$ , и найдем скорость распространения таких волн. Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = f(z), \quad z = x + ct, \quad (12)$$

где  $c$  – скорость волны, которая может быть и положительной и отрицательной, поскольку уравнение (11) инвариантно относительно замены  $x$  на  $(-x)$ . Пусть для определенности  $c > 0$ , то есть волна, описываемая соотношениями (12), движется в отрицательном направлении  $x$ . Очевидно, что

$$\partial u / \partial x = \partial u / \partial z, \quad \partial u / \partial t = c \partial u / \partial z$$

и, следовательно, уравнение (11) принимает вид

$$D d^2 f / dz^2 - c df / dz + kf(1-f) = 0. \quad (13)$$

Мы хотим найти значения  $c$  (или одно значение) такие, что у уравнения (13) существует решение, удовлетворяющее условиям

$$0 \leq f \leq 1, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 1. \quad (14)$$

Перепишем уравнение (13) следующим образом:

$$df/dz = F, \quad D dF/dz = cF - kf(1-f).$$

Тогда траектории на фазовой плоскости подчиняются уравнению

$$dF/df = [cF - kf(1-f)] / (DF), \quad (15)$$

которое имеет две особые точки на плоскости  $(F, f)$ :  $(0,0)$  и  $(0,1)$ . Это

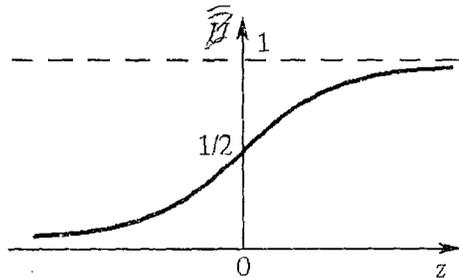


Рис. 2

следует из уравнений  $F(z)=0$  и  $cF(z)-kf(z)[1-f(z)]=0$ . Исследуем характер этих особых точек.

Вблизи особой точки  $(0,0)$  уравнение (13) для малого возмущения  $\tilde{f}$  ( $f=f_{ст}+\tilde{f}$ ) становится таким

$$Dd^2\tilde{f}/dz^2 - cdf\tilde{f}/dz + k\tilde{f} = 0.$$

Тогда  $\tilde{f} \sim e^{p_1 z}$  и характеристическое уравнение

$$p^2 - (c/D)p + k/D = 0$$

имеет решение

$$p_{1,2} = c/(2D) \pm \{[c/(2D)]^2 - k/D\}^{1/2}.$$

Поскольку  $k$  и  $D > 0$ , при  $c^2 > 4kD$ , то есть при

$$c \geq c_{\min} = 2(kD)^{1/2}$$

оба корня характеристического уравнения положительны, и особая точка  $(0,0)$  – неустойчивый узел. Если  $0 < c < c_{\min}$ , то  $p_{1,2} = c/(2D) \pm j[k/D - [c/(2D)]^2]^{1/2}$ ,  $j = (-1)^{1/2}$  и особая точка – неустойчивый фокус; при  $c=0$  особая точка – центр. В двух последних случаях вблизи точки  $(0,0)$  на любой траектории найдутся точки, для которых  $f < 0$ , то есть решений, удовлетворяющих требуемым условиям (14), быть не может.

Уравнение (15) вблизи точки  $(0,0)$  приближенно можно записать следующим образом:

$$dF/df \approx (cF - kf)/(DF).$$

Вблизи особой точки  $(0,1)$   $f=1+\tilde{f}$ ; уравнение (13) выглядит так

$$Dd^2\tilde{f}/dz^2 - cdf\tilde{f}/dz - k\tilde{f} = 0$$

и, соответственно,

$$p_{1,2} = c/(2D) \pm \{[c/(2D)]^2 + k/D\}^{1/2}.$$

Поскольку для любых  $c \geq 0$  и  $p_1 > 0$ , и  $p_2 > 0$ , особая точка  $(0,1)$  – седло, вблизи которого

$$dF/df \approx (cF + kf)/(DF).$$

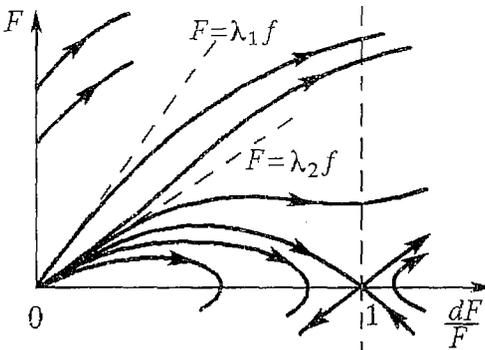


Рис. 3

На рис. 3, взятом из книги Марри, качественно представлены траектории волновых решений уравнения (13) на фазовой плоскости при  $c > 2(kD)^{1/2}$ . Таким образом, из приведенного анализа и рис. 3 следует, что для каждого  $c > c_{\min}$  есть единственная траектория, начинающаяся в точке  $f=0$  и движущаяся к  $f=1$  в полосе  $0 \leq f \leq 1$ , у которой  $F > 0$ , за исключением точек  $f=0$  и  $f=1$ , где  $F=0$ <sup>2</sup>. При  $c=c_{\min}$  узел в точке  $(0,0)$  вырожденный с двумя наклонами  $\lambda_{1,2} = [1/(2D)][c \pm (c^2 - 4kD)^{1/2}]$ , сливающимися в  $c_{\min}/(2D) = (kD)^{1/2}$ .

Фишер предложил простое доказательство того, что начальные данные,

<sup>2</sup> Строгое доказательство этого есть как в работе [1], так и в монографии [5] в разделе «Задача А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова».

выражаемые, например, условием

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (16)$$

приводят к решению, которое будет эволюционировать в волновое со скоростью  $c=c_{\min}$ . Идея доказательства в том, что, по предположению, решение эволюционирует в волновое решение постоянной формы, подобное представленному на рис. 2. Общая площадь под кривой в любой момент времени  $t$  слева от точки  $x=-R < 0$  равна

$$U = \int_{-\infty}^R u(x,t) dx, \quad R > 0. \quad (17)$$

В анализируемой задаче  $U$  означает общее число особей слева от  $x=-R$ . Для достаточно большого  $R$  и конечного  $t$  значения  $u$  слева от  $x=-R$  малы, а при выполнении (16) вообще  $u=0$ . Фишер предложил зафиксировать некоторое произвольно малое значение  $U$  и найти из (17)  $R$  как функцию времени так, чтобы  $U$  оставалось равным выбранному значению. Если определена функция  $R(t)$ , то можно найти и скорость распространения  $dR/dt$ . Случай малых  $u$  и больших  $R$  соответствуют области  $0 < u < 1$ , поэтому в уравнении можно пренебречь слагаемым  $ku^2$  по сравнению с  $ku$ . В результате получаем линейное уравнение

$$\partial u / \partial t = ku + D \partial^2 u / \partial x^2. \quad (18)$$

Для упрощения выкладок Фишер рассмотрел двумерную симметричную задачу с радиальной координатой  $r \geq 0$  и функцией  $u=u(r,t)$ , которая вместо (18) удовлетворяет уравнению

$$\partial u / \partial t = ku + D[\partial^2 u / \partial r^2 + (1/r)\partial u / \partial r], \quad u(r,0) = \delta(r), \quad (19)$$

где  $\delta(r)$  – дельта-функция Дирака. В такой постановке задачи вместо (17) требуем, чтобы площадь под  $u$  вне круга  $r=R$  была постоянной, то есть

$$2\pi \int_{r=R(t)}^{\infty} u(r,t) r dr = U = \text{const}. \quad (20)$$

Пусть  $u(r,t) = e^{k\varphi}$ . Тогда из (19) следует, что

$$\partial \varphi / \partial t = D[\partial^2 \varphi / \partial r^2 + (1/r)\partial \varphi / \partial r], \quad \varphi(r,0) = \delta(r). \quad (21)$$

Решение задачи (21) известно (см., например, [6]) и имеет вид

$$u(r,t) = [1/(4\pi Dt)] \exp[kt - r^2/(4Dt)]. \quad (22)$$

Подставляя решение (22) в уравнение (20) и проводя интегрирование, после простых преобразований находим, что

$$R(t) = [4kDt^2 - 4D(\ln u)t]^{1/2} \approx 2(kD)^{1/2}t,$$

поскольку второе слагаемое под корнем мало. Следовательно, скорость распространения волны  $dR/dt = c_{\min} = 2(kD)^{1/2}$ . Если вернуться к общей постановке задачи, то легко проследить, что в формуле (6) для нашего случая  $\alpha=k$ . Так как уравнение (11) инвариантно относительно изменения знака  $x$ , имеется и решение волны, бегущей направо:  $u(x,t) = u(x-ct)$ ,  $c > 0$ ,  $f(-\infty) = 1$ ,  $f(+\infty) = 0$ . Типичная картина развития во времени решения уравнения (11), демонстрирующая постоянство волновых фронтов, показана на рис. 4, взятом из книги Марри.

Годом позже работы [1] появилась статья Я.Б. Зельдовича и Д.А. Франк-Каменецкого [7]. В ней была описана нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло. Рассматривалась среда, в которой при высокой температуре

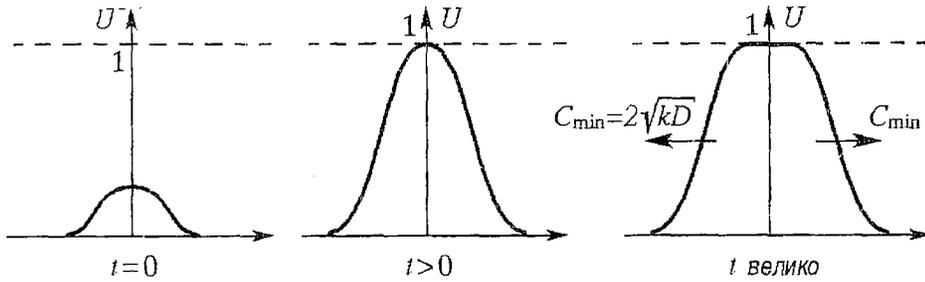


Рис. 4

происходят необратимые химические реакции, сопровождающиеся выделением энергии. В этом случае оказывается возможным эстафетный механизм передачи тепла, когда тепло, выделившееся в некотором слое  $x_1$ , передается в следующий слой  $x_2$  (рис. 5, здесь  $T$  – температура). При этом нелинейная температурная волна (достигаемая температура определяется теплотворной способностью и теплоемкостью вещества) распространяется без затухания и с постоянной скоростью. Определение скорости распространения и структуры переходной зоны есть предмет теории равномерного распространения пламени как части теории горения. Математическая теория сводится к решению уравнения для температуры, которое имеет вид

$$\partial T / \partial t = D \partial^2 T / \partial x^2 + W(T), \quad (23)$$

с граничными условиями  $T=T_0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $T=T_b$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $W(T_b)=0$ ,  $D$  – коэффициент диффузии. Следуя [8], удобно перейти в (23) к безразмерным величинам  $T=T_0+(T_b-T_0)\theta$ , так что  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $y=x/D^{1/2}$ ,  $w=W/(T_b-T_0)$ . Тогда приходим к уравнению

$$\partial \theta / \partial t = \partial^2 \theta / \partial y^2 + w(\theta), \quad (24)$$

решения которого будем искать в виде  $\theta=\theta(y-vt)=\theta(\xi)$ ,  $\xi=y-vt$ ,  $v=\text{const}$ . Подставляя  $\theta$  в виде такой бегущей волны, находим

$$-v \, d\theta / d\xi = d^2\theta / d\xi^2 + w(\theta).$$

Положим далее  $(-v \, d\theta / d\xi) = p$ . Учитывая, что  $d/d\xi = (d\theta / d\xi)(d/d\theta) = (-p/v)d/d\theta$ ,  $d^2\theta / d\xi^2 = (-1/v)dp/d\xi = (p/v^2)dp/d\theta$ , окончательно получаем

$$p = (p/v^2)dp/d\theta + w(\theta) \text{ и } dp/d\theta = (v^2/p)[p - w(\theta)]. \quad (25)$$

Граничное условие  $\theta=0$  и  $\theta=1$  при  $\xi=\pm\infty$  включает и условие  $d\theta/d\xi=0$  при  $\xi=\pm\infty$ , то есть на уравнение (25) первого порядка для  $p(\theta)$  наложены два условия  $p(0)=0$  и  $p(1)=0$ . Следовательно, можно найти  $v$ . Для случая, когда  $w(\theta)$  имеет вид, показанный на рис. 6, Я.Б. Зельдович и Д.А. Франк-Каменицкий предложили

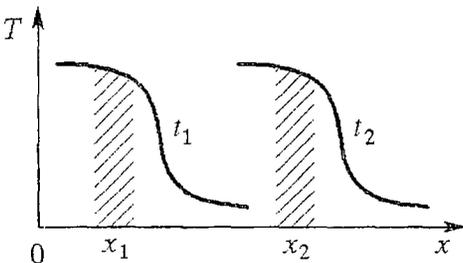


Рис. 5

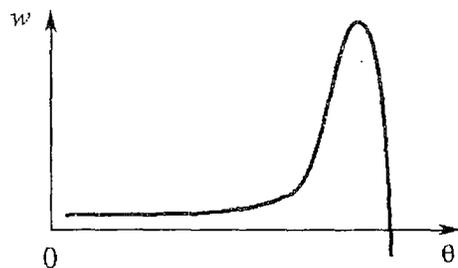


Рис. 6

следующий изящный способ решения. Пренебрежем в квадратных скобках уравнения (25) величиной  $p$  по сравнению с  $w(\theta)$ . Получаем в области изменения  $\theta$  от 1 до максимума

$$p dp \approx -v^2 w(\theta) d\theta, \quad p_1 = v \left[ \int_{\theta_1}^1 w(\theta) d\theta \right]^{1/2}.$$

При этом максимальное значение  $p_{\max}$  достигается уже при  $(1-\theta_{\max}) \ll (1-\theta_1) \ll 1$  и равно

$$p_{\max} = v \left[ \int_0^1 w(\theta) d\theta \right]^{1/2}.$$

В области, где  $w(\theta)$ , пройдя максимум, стало малым, пренебрегаем  $w(\theta)$  по сравнению с  $p$ . Тогда имеем

$$dp/d\theta \approx v^2, \quad p = p_1 - v^2(\theta_1 - \theta) \approx p_{\max} - v^2(1 - \theta).$$

Последнее решение удовлетворяет условию  $\theta=1, p=0$ . Продолжение его до  $\theta=0$  дает  $p(0) = p_{\max} - v^2$ , и из условия  $p(0) = 0$  находим искомую скорость

$$v = \left[ 2 \int_0^1 w(\theta) d\theta \right]^{1/2}.$$

В настоящее время параболическое уравнение типа уравнения КПП является базовой моделью, используемой для описания однокомпонентных активных сред, в которых энергия, расходуемая на поддержание автоволн (АВ) <sup>3</sup> не восстанавливается. В такой среде АВ представляет собой волну переключения из состояния с высокой энергией в низкоэнергетическое состояние.

Для анализа автоволновых процессов в средах с диффузией в настоящее время чаще всего используются квазилинейные параболические уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u) + D \Delta u, \quad (26)$$

где  $u$  и  $f$  – векторы,  $D$  – диагональная матрица,  $\Delta$  – лапласиан [9].

Закончим цитатой из книги [9, с. 6–7]: «Уравнение (26) весьма общего вида, и такого типа уравнениями описываются самые разнообразные активные среды в физике, химии, биологии: распределенные химические системы, физические системы с инверсной населенностью (активные тела лазеров), цепочки мультивибраторов, линии туннельных диодов, биологические распределенные системы (нейронные структуры, нервные и мышечные волокна, сердечный синцитий, популяции организмов)».

Вот такое богатство. А началось все с уравнения КПП, полученного и решенного для частной задачи.

## Библиографический список

1. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической задаче // Бюллетень МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1, сер. А, № 16. С. 1. Позднее статья перепечатана в сб. Вопросы кибернетики. Проблемы биомедицинской кибернетики. М., 1975. Вып. 12. С. 3.

2. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. Ann. Eugenics. 1937.

<sup>3</sup> Напомним, что АВ называют самоподдерживающиеся волны в активных средах, сохраняющие свои характеристики (период, длина волны, амплитуда, форма) постоянными за счет распределенного в среде источника энергии [9].

Vol. 7. P. 355. Изложение работы Фишера есть в монографии Дж. Марри. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях*. М.: Мир, 1983.

3. Тихомиров В. Андрей Николаевич Колмогоров. Квант. 1993. №3/4. С.3.

4. Шкловский И.С. Эшелон. Химия и жизнь. 1989. № 2. С. 82.

5. Зельдович Я.Б., Баренблат Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.

6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1964.

7. Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. Теория теплового распространения пламени. ЖФХ. 1938. Т. 12, вып. 1. С. 100.

8. Зельдович Я.Б. Горение: нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло // *Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие*. М.: Наука. 1981. С. 30.

9. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сб. науч. тр. Горький, 1981.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 14.07.97*



*Трубецков Дмитрий Иванович* родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Ректор СГУ, заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук, заслуженный деятель науки РФ. В Саратовском государственном университете в разное время подготовил и прочитал общие курсы лекций «Основы электроники сверхвысоких частот», «Квантовая электроника», «Методы математической оптимизации», «Теория волновых процессов», а также специальные курсы «Введение в специальность (радиофизика и электроника)», «Теория СВЧ электронных приборов О и М-типа», «Вакуумная микроэлектроника», «Высокочастотная релятивистская электроника», «Хаос и структуры», «Линейные волны», «Нелинейные волны». Некоторые из спецкурсов читал в Санкт-Петербургском государственном техническом университете и Ростовском государственном университете. Научный руководитель Колледжа прикладных наук СГУ. Соросовский профессор (1994, 1995). Автор учебных пособий «Введение в теорию колебаний и волн» (М.: Наука, 1984; The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989; М.:Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем); «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУРЦ «Колледж», 1995; совместно с А.А. Короновским) и «Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996; совместно с А.Г. Рожневым и Д.В. Соколовым), «Колебания и волны для гуманитариев» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997).



## ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА ЛОЖНЫХ СОСЕДЕЙ НА ОЦЕНКУ МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ВЛОЖЕНИЯ

*А.В. Красков, С.А. Ракитин*

На простых тестовых примерах иллюстрируется идея метода ложных соседей, используемого при обработке временных рядов. Рассматривается влияние параметров процедуры (выбор метрики, длина реализации, разрядность представления данных, время задержки) на оценку размерности множеств, восстановленных в фазовом пространстве.

В настоящее время исследование поведения нелинейных систем в фазовом пространстве, восстановленном по временной реализации одной динамической переменной, становится общепринятым [1,2]. Это связано с тем, что в эксперименте для наблюдения часто доступна лишь одна переменная, а такой подход позволяет дополнить информацию об исследуемой системе. Восстановление аттрактора является, в частности, составной частью процедуры построения динамических моделей по временным рядам. Наиболее популярным приемом восстановления фазовых траекторий является метод задержек. Из точек временной реализации доступной наблюдению переменной, представленной в виде дискретного ряда  $x(n)=x(n\Delta t)$ , где  $\Delta t$  – время дискретизации, составляются вектора состояния системы в восстанавливаемом фазовом пространстве в моменты  $n$  дискретного времени

$$y(n) = [x(n), x(n+\tau), \dots, x(n+\tau(d-1))], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-\tau(d-1), \quad (1)$$

где  $\tau$  – время задержки,  $N$  – количество точек временной реализации,  $d$  – размерность восстанавливаемого фазового пространства.

Узловым моментом в решении задачи восстановления является определение минимальной размерности  $d_E$  фазового пространства, обеспечивающей однозначность задания состояния (точке восстановленной фазовой траектории должно соответствовать единственное состояние системы). При моделировании значение  $d_E$  позволяет судить о необходимом числе уравнений конструируемой математической модели. Выбор слишком высокой размерности ведет к неоправданному усложнению модели и усилению влияния шумов [3]. Занижение размерности может привести к неправильному описанию поведения системы.

По теореме Такенса [1] достаточной для однозначного восстановления считается размерность  $d \geq 2d_A+1$ . Размерность аттрактора  $d_A$  обычно определяют как корреляционную размерность. В [2] было показано, что для восстановления достаточна размерность равная дополненной до ближайшего целого значения

корреляционной размерности. Принципиально другой подход реализуется в методе ложных соседей [3], который опирается непосредственно на запрет самопересечений фазовых траекторий динамической системы. Если у восстановленной траектории наблюдаются самопересечения, то это говорит о недостаточной размерности фазового пространства. Последовательно увеличивая размерность вложения можно добиться удаления всех пересечений. Минимальная размерность пространства, в котором отсутствуют пересечения, является размерностью вложения  $d_E$ , определяемой методом ложных соседей.

Проиллюстрируем суть проблемы реализации метода ложных соседей на примере восстановленной фазовой траектории гармонической временной реализации  $x(t)=\sin t$  (периода  $T=2\pi$ ), оцифрованной с некоторым временным шагом  $\Delta t$  (рис. 1, а). При  $d=1$  восстановленное по  $x(t)$  множество расположено на отрезке прямой (рис. 1, б). На нем точка  $k$  имеет соседями точки  $l$  и  $s$ , причем  $k$  и  $s$  соответствуют двум качественно разным состояниям системы (в них разные по знаку производные). При восстановлении в двумерном пространстве все точки «разойдутся» (рис. 1, в), но  $l$  и  $k$  – слабо, а  $k$  и  $s$  сильно ( $\Delta_{lk} < \Delta_{ks}$ ). По этому признаку точки  $k$  и  $s$  называют «ложными» соседями, а точки  $l$  и  $k$  «истинными». В [3] для каждой точки находится один, ближайший, сосед. Итак, последовательно увеличивая  $d$ , добиваются удаления всех ложных соседей, а следовательно, и пересечений. Относительное число пересечений фиксируется по графику зависимости отношения числа ложных соседей к общему числу точек в восстановленном пространстве от размерности вложения  $d$  (рис 1, г). В рассматриваемом примере, как можно показать, все ложные соседи исчезают при  $d=2$ , то есть минимальная размерность вложения  $d_E$  равна двум. В общем случае оценка ложности требует применения специальной процедуры.

В качестве основной количественной меры «истинности–ложности соседства» в [3] предложено условие

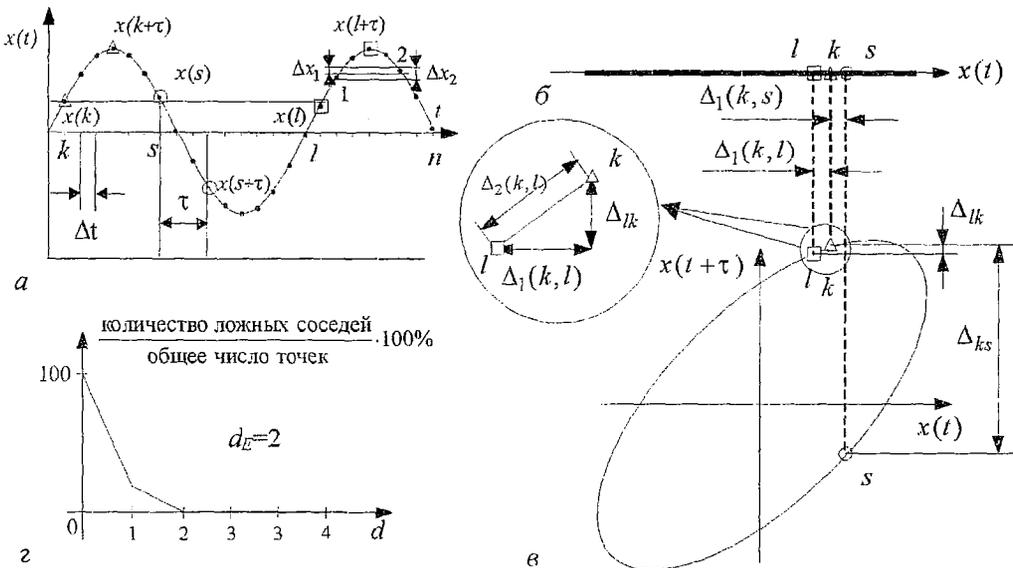


Рис. 1. Иллюстрация метода ложных соседей: а – временная реализация  $x(t)$  с дискретными отсчетами  $x(n\Delta t)$ . Выделены точки  $n=k, s, l$ , имеющие близкие значения  $x(t)$ , и точки  $n=k+3, s+3, l+3$ , задержанные на  $\tau=3\Delta t$  ( $\Delta t \approx T/16$ ), а также точки 1 и 2, совпадающие при разрядности  $p-1$  ( $\Delta x_2=1/2^{p-1}$ ) и отличающиеся при разрядности  $p$  ( $\Delta x_1=1/2^p$ ); б – фазовый портрет, восстановленный в одномерном пространстве; в – фазовый портрет, восстановленный в двумерном пространстве; г – график зависимости отношения числа ложных соседей к общему числу точек в восстановленном пространстве от размерности вложения  $d$

$$\Delta_{ks}/\Delta_d(k,s) > R_{кр} \quad (\text{либо } \Delta_{ks} > R_{кр} \Delta_d(k,s)), \quad (2)$$

где  $\Delta_d(k,s)$  – расстояние между точками  $k$  и  $s$  в  $d$ -мерном пространстве, которое определяется на основе той или иной метрики, например, евклидовой;  $\Delta_{ks}=|x(k+d\tau)-x(s+d\tau)|$  – характеризует приращение расстояния между соседними точками при переходе в  $(d+1)$ -мерное пространство;  $R_{кр}$  – эмпирический параметр, характеризующий величину расхождения точек в восстановленном пространстве при увеличении его размерности на 1 (например, в [3]  $R_{кр}=15$ , в [4]  $15 < R_{кр} < 20$ ). Если при восстановлении в фазовом пространстве возникают соседи, которые идеально совпадают, то  $\Delta_d(k,s)$  обращается в ноль и для любого, даже незначительного, приращения  $\Delta_{ks}$ , которое может наблюдаться и у истинных соседей, точки  $k$  и  $s$  будут идентифицироваться как ложные. При проведении натурального эксперимента из-за ограниченной разрядности аналого-цифрового преобразователя (АЦП) вероятность совпадения соседей повышается. При разрядности АЦП равной  $p$  различаются  $2^p$  значений наблюдаемой переменной ( $\Delta x=1/2^p$  – наименьшая различимая величина). Так на рис. 1, а при разрядности  $p$  ( $\Delta x_1=1/2^p$ ) значения оцифрованной реализации  $x(t)$  в точках 1 и 2 различаются, а при разрядности  $p-1$  ( $\Delta x_2=1/2^{p-1}=2/2^p=2\Delta x_1$ ) – совпадают. Из сказанного следует, что условие (2) в случае идеального совпадения точек необходимо модифицировать. В данной работе это делалось заменой  $\Delta_d(k,s)$  на половину наименьшей различимой величины

$$\Delta_{ks}/(0.5\Delta x) > R_{кр}. \quad (2a)$$

*Целью работы* является иллюстрация и эмпирическая оценка влияния выбора разрядности  $p$  представления данных, метрики  $L^1$ , количества точек  $N$  реализации и времени задержки  $\tau$ , используемого при восстановлении, на результаты определения размерности вложения  $d_E$ . Сначала для выявления особенностей метода исследуется простой тестовый пример с заранее известным значением размерности  $d_E=2$  (гармоническая временная реализация  $x(t)=\sin t$ ). Затем выделенные особенности проверяются и уточняются на более сложных примерах систем с хаотической динамикой:

трехмерный поток Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ y = ay + x, \\ \dot{z} = b + z(x - \mu), \end{cases} \text{ при } a=0.2, b=0.2, \mu=4.6$$

и аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - z), \\ y = Rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \text{ при } R=42.92, b=4, \sigma=16.$$

Результаты представляются графически на плоскости параметров  $(\tau, R_{кр})$ . Линии на плоскости разделяют области, приводящие к значению  $d_E$ , указанному цифрами. Для синусоиды областью параметров, обеспечивающих удовлетворительные результаты, являются значения, для которых  $d_E=2$ .

Рассмотрим результаты численного исследования влияния параметров метода на определяемое значение  $d_E$  для синусоиды.

**1. Время задержки.** На рис. 2, а представлены результаты расчета

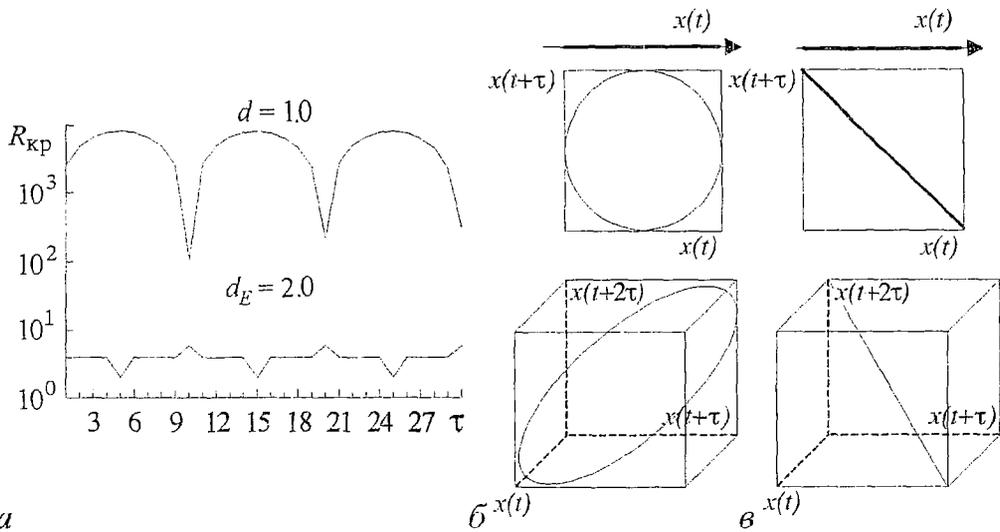


Рис. 2. Влияние времени задержки  $\tau$  на значение размерности  $d_E$  в первом тестовом примере  $x(t)=\sin t$ : а – области различных значений  $d$  на плоскости  $(\tau, R_{кр})$ ,  $N=20000$ ,  $\Delta t=2\pi/(11.5 \cdot 3^{1/2})$ ,  $p=12$ ; эволюция фазовых портретов для времени задержки  $\tau \cong T/4$  (б) и  $\tau \cong T/2$  (в)

размерности вложения при разных значениях времени задержки  $\tau$ . Метод дает оптимальную размерность  $d_E=2$  в некотором диапазоне  $R_{кр}$ , наиболее широком (примерно от 10 до 10000) при  $\tau=T/4, 3T/4, \dots$ , и занижает ее до  $d=1$  при  $\tau$  кратном половине периода  $T$  ( $\tau \cong mT/2$ ). Это можно объяснить тем, что в последнем случае точки фазовой траектории, восстановленной в пространстве любой размерности  $d$ , располагаются на отрезке (диагональ  $d$ -мерного куба) (рис. 2, б) и при переходе из  $d$  в  $d+1$  точки не расходятся сильно. Таким образом, для удовлетворительной работы метода желательно избегать  $\tau \cong mT/2$ , а выбирать время задержки около  $T/4$  (ср. рис. 2, б, в), что эквивалентно выбору  $\tau$  в первом нуле автокорреляционной функции (АКФ). При таком выборе  $\tau$  компоненты вектора состояния не коррелированы между собой. Если же у АКФ отсутствуют нули, то  $\tau$  можно выбирать так, чтобы компоненты были наименее коррелированы, то есть в ее первом минимуме.

**2. Количество точек на реализации.** Если, не меняя шага  $\Delta t$ , увеличить число точек  $N$  (увеличивая длину временной выборки), то на фазовом портрете в  $d$ -мерном пространстве рядом с ближайшими соседями  $l$  и  $k$ , которые при переходе в  $(d+1)$ -мерное пространство оказываются ложными, может появиться какая-нибудь точка  $s$ , причем так, что расстояние между  $s$  и  $l$  меньше, чем между  $l$  и  $k$ . В этом случае ближайшим соседом точки  $l$  будет не  $k$ , а  $s$ . Тогда количество ложных соседей может:

- *остаться* тем же самым, если при переходе в  $(d+1)$ -мерное пространство  $l$  и  $s$  оказываются ложными, а  $k$  и ее ближайший сосед – истинными;
- *увеличиться*, если при переходе в  $(d+1)$ -мерное пространство оказываются ложными точки  $l$  и  $s$ ,  $k$  и ее ближайший сосед;
- *уменьшиться*, если при переходе в  $(d+1)$ -мерное пространство оказываются истинными точки  $l$  и  $s$ ,  $k$  и ее ближайший.

При равновесии процессов уменьшения и увеличения количества ложных соседей результаты перестают зависеть от количества точек реализации. На рис. 3, а представлены кривые для синусоиды. Видно, что уже начиная с 4000 точек результаты практически не меняются, область размерности  $d_E=2$  остается постоянной примерно в диапазоне  $10 < R_{кр} < 1000$ . Для системы Ресслера при

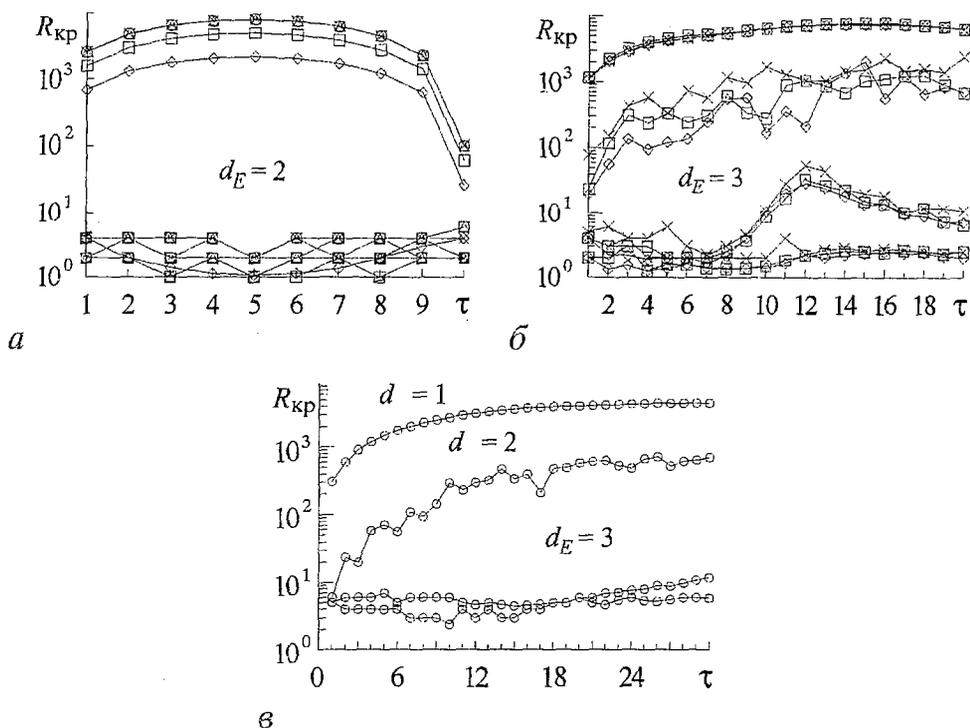


Рис. 3. Границы области оптимального значения размерности вложения  $d_E$  в зависимости от длины временной реализации  $N$ : *а* –  $x(t)=\sin t$ ,  $p=12$ ,  $\Delta t=2\pi/(11.5 \cdot 3^{1/2})$ ,  $\square$  – 2000,  $\circ$  – 3000,  $\Delta$  – 4000,  $\times$  – 25000; *б* – система Ресслера шаг интегрирования 0.1,  $p=12$ ,  $\diamond$  – 5000,  $\square$  – 10000,  $\times$  – 25000; *в* – система Лоренца шаг интегрирования 0.004,  $p=12$ ,  $N=10000$

увеличении числа точек кривые, отделяющие область размерности  $d_E=3$ , поднимаются, но со стороны низких размерностей рост больше, тем самым область оптимального значения  $d_E$  увеличивается и уже при  $N=10000$  она становится достаточно большой, примерно от 10 до 100 (рис. 3, б). На рис. 3, а, б выделены области только оптимальных размерностей вложения  $d_E=2$  и  $d_E=3$ , соответственно. На рис. 3, в для системы Лоренца показаны все области размерности вложения, включая оптимальное значение  $d_E=3$ .

**3. Выбор метрики.** В работах [3,4] расстояние между точками в критерии ложности рассчитывалось в евклидовой метрике  $L^2$ : в [3] по формуле

$$\Delta_d(k,s) = \{\sum_{i=1}^d [x(k+(i-1)\tau) - x(s+(i-1)\tau)]^2\}^{1/2},$$

а в [4] – с использованием нормировки

$$\Delta_d(k,s) = (1/d)\{\sum_{i=1}^d [x(k+(i-1)\tau) - x(s+(i-1)\tau)]^2\}^{1/2}.$$

Рассмотрим влияние на результат определения  $d_E$  изменения метрики на  $L^1$ . При этом по аналогии с [3,4] будем использовать нормированное и ненормированное межточечное расстояние

$$\Delta_d(k,s) = \sum_{i=1}^d |x(k+(i-1)\tau) - x(s+(i-1)\tau)|.$$

Такой выбор обеспечивает сокращение времени счета. Качественное различие этих метрик состоит в скорости роста расстояния между точками с увеличением размерности вложения. Медленнее всего растет расстояние в метрике, предложенной в [4], быстрее всего в  $L^1$ . При применении евклидовой метрики  $L^2$  и

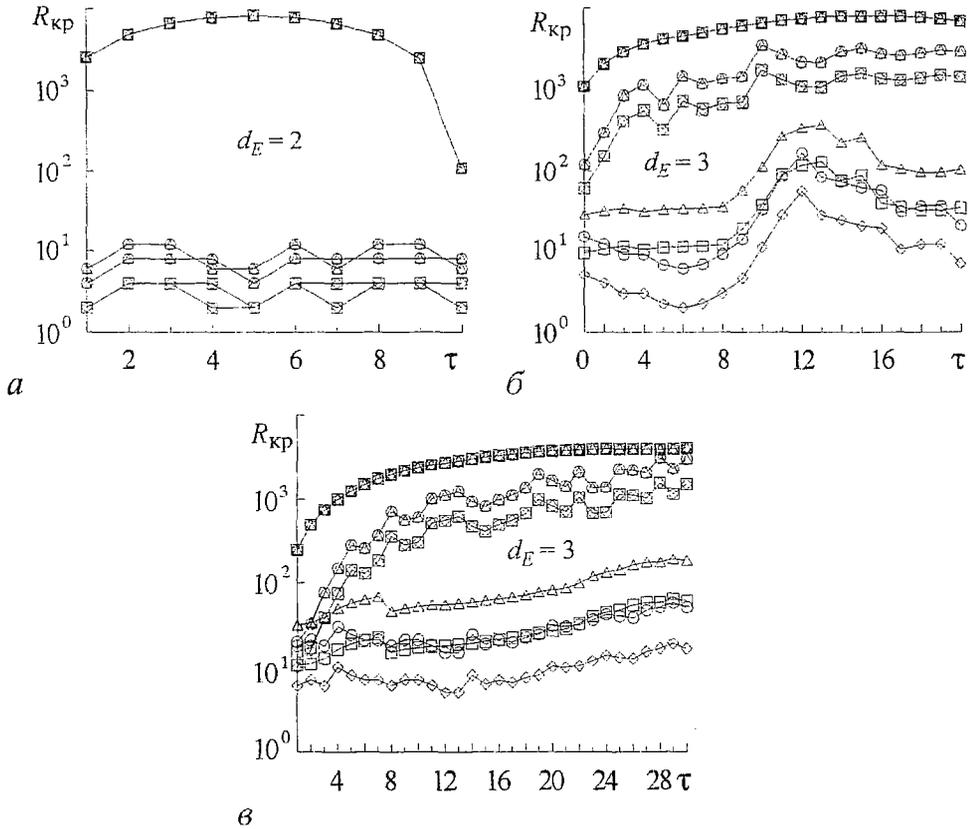


Рис. 4. Границы области оптимального значения размерности в зависимости от выбора метрики: *a* –  $x(t)=\sin t$ ,  $p=12$ ,  $\Delta t=2\pi/(11.5 \cdot 3^{1/2})$ ,  $N=15000$ ; *б* – система Ресслера шаг интегрирования 0.1,  $p=12$ ,  $N=20000$ ; *в* – система Лоренца шаг интегрирования 0.004,  $p=12$ ,  $N=20000$ . Здесь  $\diamond$  – метрика  $L^1$ ;  $\square$  – метрика  $L^2$  (евклидова);  $\circ$  – метрика  $L^1/d$ ;  $\times$  – метрика  $L^2/d$

метрики  $L^1$  была получена одинаковая область параметров, в которой  $d_E=2$  (рис. 4, *a*). Метрики  $L^1/d$  и  $L^2/d$  несколько сузили эту область по параметру  $R_{кр}$ . Это произошло из-за того, что расстояние в нормированных метриках растет медленнее, чем в  $L^1$  и  $L^2$ , так как знаменатель условий (2) и (2а) уменьшился, а значения  $R_{кр}$ , при которых ближайшие соседи идентифицируются как ложные, возросли. Таким образом нет никакого основания отдавать предпочтение более «долгой» евклидовой метрике, а даже наоборот, на примере системы Ресслера (рис. 4, *б*) видно, что при расчетах в метрике  $L^1$  область параметров с оптимальной размерностью  $d_E=3$  увеличилась в сторону высоких размерностей.

**4. Разрядность цифрового преобразователя.** При исследовании зависимости размерности вложения от разрядности  $p$  АЦП было обнаружено, что при увеличении  $p$  область параметров с  $d_E=2$  расширяется по параметру  $R_{кр}$  (рис. 5, *a*). Это можно объяснить тем, что при малой разрядности практически все ближайшие соседи совпадают, то есть работает условие (2а). При увеличении разрядности идеально совпадающих точек становится меньше и начинает работать условие (2). Одновременно растет количество различных значений  $x(t)$ , а так как при оцифровке наименьшая различимая величина  $\Delta x$  принимается равной единице, то растут и оцифрованные значения  $x(t)$ , а вместе с ними и  $\Delta_{kss}$ , поэтому ближайшие соседи будут идентифицироваться как ложные при больших  $R_{кр}$ . Отметим, что кривая, ограничивающая снизу область оптимальных значений  $d_E$  на плоскости параметров (со стороны высоких размерностей), опускается с ростом  $p$ , так как

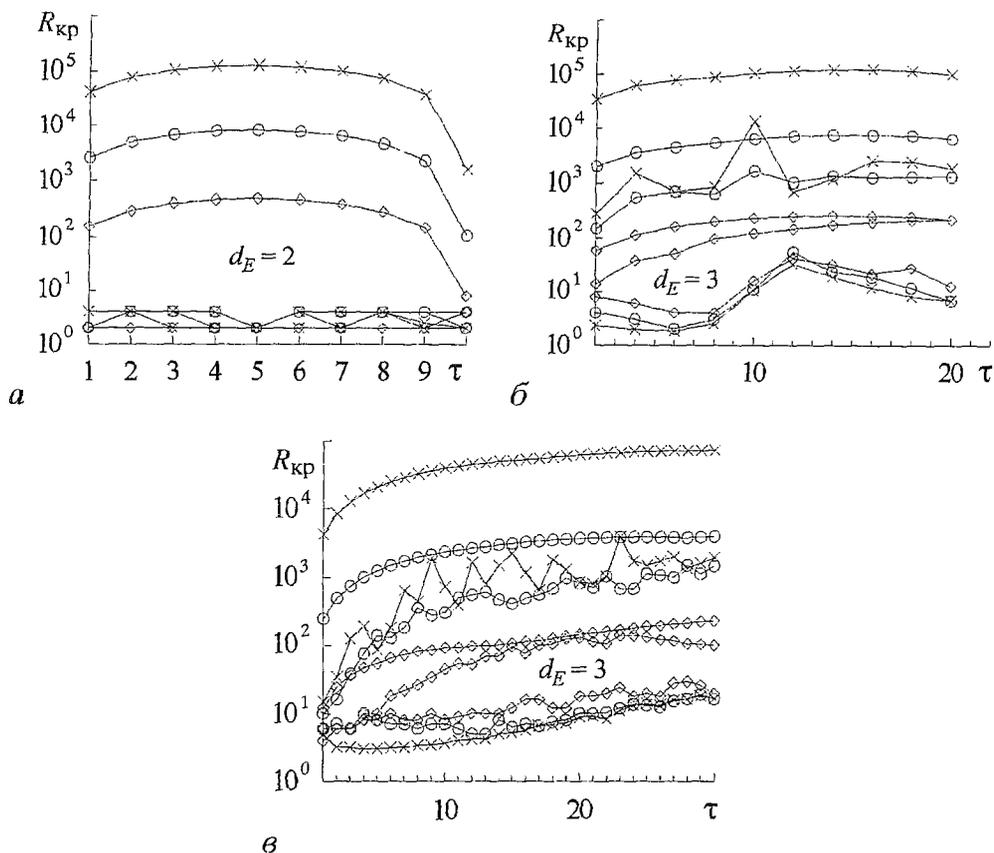


Рис. 5. Влияние разрежности  $p$  АЦП на размер области оптимального значения размерности вложения  $d_E$ : а -  $x(t)=\sin t$ ,  $\Delta t=2\pi/(11.5 \cdot 3^{1/2})$ ,  $N=15000$ ; б - система Ресслера шаг интегрирования 0.1,  $N=20000$ ; в - система Лоренца шаг интегрирования 0.004,  $N=20000$ . Здесь  $\diamond$  -  $p=8$ ,  $\circ$  -  $p=12$ ,  $\times$  -  $p=16$

уменьшается количество ложных соседей, появившихся из-за недостаточной разрежности. При увеличении разрежности область оптимальной размерности вложения будет увеличиваться, но при определенном значении  $p$  (которое зависит и от сложности сигнала) наступает момент, когда дальнейшее наращивание разрежности не имеет смысла, так как ширина этой области по параметру  $R_{кр}$  выходит за пределы диапазона  $10 \div 100$ . Для синусоиды (рис.5, а) это происходит при  $p=8$ , а для систем Ресслера и Лоренца при  $p=12$  (рис. 5, б, в).

Изложенные результаты для простого примера (синусоида) и более сложных (хаотического режима систем Ресслера и Лоренца) позволяют сказать, что применительно к малоразмерным системам при выборе параметров метода ложных соседей целесообразно придерживаться следующих соображений.

1.  $R_{кр}$  желательно выбирать в диапазоне  $10 \div 100$ .

2. С увеличением разрежности оцифровки область оптимальной размерности вложения увеличивается. В рассмотренных малоразмерных примерах приемлемым является значение  $p=12$ , что соответствует реальным АЦП.

3. Увеличение числа точек (длины реализации) при постоянном шаге  $\Delta t$  расширяет область допустимых значений  $R_{кр}$ , одновременно с этим увеличивается нижний предел  $R_{кр}$ .

4. При соблюдении рекомендаций п. 1-3 выбор метрики ( $L^1$  или  $L^2$ ) практически не существен, но для некоторых систем (например, Ресслера) метрика  $L^1$  дает лучшие результаты.

Вопрос о времени задержки наиболее сложный. Выбор  $\tau$  для гармонического

сигнала не вызывает трудностей: около  $T/4$ , что эквивалентно выбору  $\tau$  в первом нуле АКФ. Для рассматриваемого хаотического режима в системе Ресслера выбор  $\tau$  в первом нуле АКФ ( $\tau_{\text{АКФ}}=14$ ) поднимает (от 10 до 40) нижнюю границу области оптимальной размерности, тем самым уменьшая ее ширину. Аналогичная процедура для системы Лоренца ( $\tau_{\text{АКФ}}=103$  при  $10 < R_{\text{кр}} < 100$ ) дает более высокую размерность. Выбор  $\tau$  в первом минимуме функции взаимной информации (mutual information function) [5] для системы Лоренца ( $\tau_{\text{МИФ}}=4$ ) несколько улучшает ситуацию, но не на много (диапазон  $R_{\text{кр}}$  уменьшается со стороны низких размерностей). Для системы Ресслера значение  $\tau_{\text{АКФ}} \approx \tau_{\text{МИФ}}=15$  также не дает желаемого результата. Визуальный выбор  $\tau$ , при котором фазовый портрет имеет наибольший поперечный размер, но еще без «перехлестов», дает достаточно удовлетворительные результаты. В этом случае для системы Лоренца  $10 < \tau < 25$ , а для системы Ресслера  $3 < \tau < 11$ .

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96–02–16755).*

### **Библиографический список**

1. *Takens F.* // Dynamical Systems and Turbulence / Eds. by D. Rand and L.S. Young. Warwick, 1980.
2. *Casdagli M., Sauer T., Yorke J.A.* Embedology // J. Stat. Phys. 1991. Vol. 65. P. 579.
3. *Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.I.* Determining Minimum Embedding Dimension using a Geometrical Construction // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 3403.
4. *Abarbanel H.D.I. and Kennel M.B.* Local False Nearest Neighbors and Dynamical Dimensions from Observed Chaotic Data // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47. P. 3057.
5. *Fraser A.M., Swinney H.L.* Independent coordinates for strange attractors from mutual information. // Phys.Rev. A. 1986. Vol. 33, №2. P. 1134.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 15.11.97  
после переработки 26.12.97*

## **FALSE NEAREST NEIGHBORS: INFLUENCE OF METHOD PARAMETERS ON MINIMUM EMBEDDING DIMENSION ESTIMATION**

*A.V. Kraskov, S.A. Rakitin*

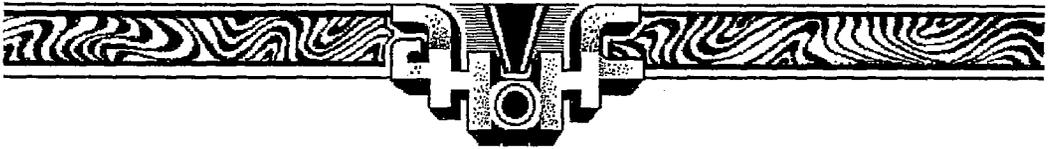
In the paper, simple test systems are used to illustrate the false nearest neighbors method which is among the tools for analyzing time series. We study the influence of some parameters of the above method (data set length, number of bits in binary data representation, metrics chosen, and delay time) on minimum embedding dimension estimation.



*Красков Александр Владимирович – студент третьего курса Высшего колледжа прикладных наук СГУ. Соросовский студент. Область научных интересов – методы обработки временных рядов.*



*Ракитин Сергей Александрович* – родился в 1973 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). В настоящее время является аспирантом кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов – анализ временных рядов.



*Вышел в свет журнал*

ISSBN: 1026-0226 DDSFA

**DISCRETE DYNAMICS IN NATURE AND SOCIETY**

**An International Multidisciplinary Research and Review Journal**

**Editors-in-Chief**

Vladimir Gontar and Michael Sonis

**Contents**

Vol. 1, N 3 (1997) 179–242

Synchronization of Spatiotemporal Chaos Using Nonlinear Feedback Functions. *M.K. Ali and J.Q. Fang* . . . . . 179

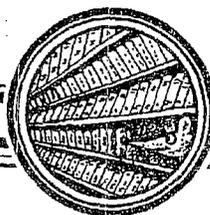
Catastrophe Models and the Expansion Method: a Review of Issues and an Application to the Econometric Modeling of Economic Growth. *E. Casetti* . . . . 185

Endogenous Oscillations in a Discrete Dynamic Model with Inventory. *A. Matsu-moto* . . . . . 203

Well-Posedness of Difference Elliptic Equation. *P.E. Sobolevskii* . . . . . 219

About Chaotization Mechanisms of the Distributed Dynamical Systems Which are Close to Discrete. *Yu.P. Bliokh, M.G. Lyubarsky and V.O. Podobinsky* . . . . 233





Изв.вузов «ГНД», т.5, № 6, 1997

Известия высших учебных заведений  
**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Содержание журнала за 1993–1997 гг.

Том 1, № 1–2, 1993

Гуляев Ю.В. От редактора	3
<b>КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ</b>	
Трубецков Д.И. ХАОС–91: Обзор номера	5
<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
Доценко Н.М., Сонечкин Д.М. Вейвлетный анализ временных рядов и динамика атмосферы	9
<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b>	
Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений. Часть 1: Сценарий Фейгенбаума	15
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
Блюх Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б. Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ–генератора с запаздывающей обратной связью	34
Сонечкин Д.М. Поиск периодических траекторий и описание аттрактора по временным реализациям	50
Буц В.А., Куприянов А.Н., Мануйленко О.В., Толстолужский А.П. Неустойчивость и динамический хаос при слабонелинейном взаимодействии волн	57
Сочнев С.В. Построение одномерных отображений по данной плотности распределения и автокорреляционной функции	63
<b>ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС</b>	
Зверев В.В. О возникновении хаотического аттрактора при движении ядерных спинов в ферромагнетике	72
Рождественский В.В., Стручков И.Н. Переходный хаос в системах с четной нелинейностью	83
Андрюшкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Путь к хаосу в кусочно–линейной модели генератора на туннельном диоде	93
Намаюнас А.М., Тамашявичюс А.В. Измерение корреляционной размерности из временных реализаций	104
<b>АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ</b>	
Санин А.Л., Ермолаев Ю.Л., Мизандронцев Д.Б. Структуры электронного тока в неоднородных системах	109
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ</b>	
Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. Как в эксперименте увидеть то, что реально «не должно существовать»	117

<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.</i> Задача	123
PERSONALIA	
Памяти Льва Израилевича Каца	124
АНОНС	
Специальные выпуски журнала	8
Новая книга	14, 33

### Том1, №3–4, 1993

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ	
<i>Леон О. Чуа.</i> Генезис схемы Чуа	4
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ	
<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.</i> Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу	24
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Климов В.И., Ланда П.С.</i> Простейшая динамическая модель экономического развития общества	36
<i>Анищенко В.С., Постнов Д.Э.</i> Синхронизация хаотических колебаний и электрическая активность человеческого мозга	45
<i>Анищенко В.С., Сапарин П.И.</i> Нормированная энтропия как диагностический признак реакции сердечно-сосудистой системы человека на внешнее воздействие	54
СОЛИТОНЫ	
<i>Елеонский В.М., Королев В.Г., Кулагин Н.Е.</i> О динамической системе, порожденной уравнением Уизема с осциллирующим ядром	72
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ	
<i>Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е.</i> Формирование диссипативных структур в акустическом поле	87
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA	
<i>Пойзнер Б.Н.</i> Хаос, порядок, время в древних картинах мира	97
ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ	
<i>Пригожин И.</i> Новое открытие времени	110
ДЕБЮТЫ	
<i>Мчедлова Е.С.</i> Аналитическое исследование сложной динамики параметрического осциллятора	125
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ	
<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.</i> Ответ на задачу	129
КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА	131

### Том2, №1, 1994

#### *Нелинейная динамика в Нижегородском университете к 75-летию со дня основания ННГУ*

<i>Шалфеев В.Д.</i> От редактора	3
ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ	
<i>Аббарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Цимринг Л.Ш.</i> «Кристаллы» и «квазикристаллы» в неравновесных средах	5

<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Осипов Г.В., Сушиц М.М.</i> Механизм образования локализованных структур в связанных цепочках автогенераторов	24
<i>Пономаренко В.П., Заулин И.А.</i> Сложная динамика систем с неединственным состоянием равновесия	30
<i>Максимов А.Г.</i> О численном построении двоякоасимптотических траекторий в фазовом пространстве динамических систем	43
<i>Баженков М.В., Сабеев Е.Ф.</i> Глобальная ограниченность решений некоторых уравнений математической физики	52
<b>ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС</b>	
<i>Корзинов Л.Н., Рабинович М.И.</i> Диагностика пространственно-временного беспорядка	59
<i>Алексеев А.А., Козлов А.К., Шалфеев В.Д.</i> Хаотический режим и синхронный отклик в автогенераторе, управляемом по частоте	71
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b>	
<i>Андронов Александр Александрович</i> (11. 04. 1901 – 31. 10. 1952). Автобиография	78
<i>Горяченко В.Д.</i> Андронов Александр Александрович	81
<b>КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА</b>	86
<b>ШКОЛЫ. КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ</b>	
<i>Азудов Н.В.</i> Информационное сообщение о международной конференции по экспериментальному хаосу	89
<b>АНОНС</b>	
Специальный выпуск	23 70
Новая книга	77

**Том 2, № 2, 1994**

*Нелинейная динамика в Нижегородском университете  
к 75-летию со дня основания ННГУ*

<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Макаров В.А., Некоркин В.И.</i> Пространственно-временная динамика цепочки автоколебательных элементов	3
<i>Матросов В.В., Корзинова М.В.</i> Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем	10
<i>Вышикин С.Я., Девятьярова А.А.</i> О динамике некоторых математических моделей в социологии	17
<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b>	
<i>Кивелева К.Г., Фрайман Л.А.</i> Бифуркационный анализ неавтономного маятникового уравнения из теории систем фазовой синхронизации	27
<b>ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС</b>	
<i>Козлов А.К., Шалфеев В.Д.</i> Управление хаотическими колебаниями в генераторе с запаздывающей петлей фазовой автоподстройки	36
<i>Волковский А.Р.</i> Хаотический релаксационный генератор	49
<i>Васин Д.Ю., Громов В.П.</i> Классификация сигналов стохастического автогенератора методами распознавания образов	57
<b>АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ</b>	
<i>Езерский А.Б., Кияшко С.В., Матусов П.А., Рабинович М.И.</i> Динамика доменов в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби	64
<i>Корзинов Л.Н., Цикулин А.С., Рабинович М.И.</i> Динамика дефектов в структуре типа «мишень» и формирование спиралей с высоким топологическим зарядом	73

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ <i>Баженов М.В., Кияшко С.В., Рабинович М.И.</i> Хаотическая динамика простой электронной схемы	81
КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ	101
КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ	105
АНОНС Новая книга	48, 106

**Том 2, № 3–4, 1994**

*Нелинейная динамика живых систем*

<i>Романовский Ю.М.</i> От редактора	3
ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ <i>Алексеев В.В.</i> Эколого–экономические аналогии	4
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН <i>Лоскутов А.Ю.</i> Нелинейная динамика и сердечная аритмия	14
<i>Нетребко А.В., Нетребко Н.В., Романовский Ю.М., Хургин Ю.И., Шидловская Е.Г.</i> Сложные модуляционные режимы и стохастизация колебаний в кластерных динамических моделях макромолекул	26
<i>Ульянов С.С., Тучин В.В.</i> Получение фазовых портретов кардиовибраций человека с помощью спекл–интерферометрии	44
<i>Анищенко В.С., Сапарин П.И., Куртс Й., Витт Ф., Фосс А.</i> Анализ динамики сер- дечного ритма человека на основе критерия перенормированной энтропии	55
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ <i>Ханин М.А.</i> Нелинейная динамика системы гемостаза	65
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ <i>Регирер С.А.</i> Резистивный кровеносный сосуд как нелинейная механическая система	77
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ <i>Кузнецова Г.Д., Пелиновский Д.Е., Яхно В.Г.</i> Математические модели динамики волн распространяющейся депрессии в коре головного мозга	86
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ <i>Пойзнер Б.Н.</i> Бытие становления как объект познания	100
PERSONALIA Памяти Анатолия Михайловича Богомолова	111
КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ Международная конференция по биофизике, 3.10.–8.10.93, Солнечногорск, Россия	114
V Международная конференция по применению лазеров в науках о жизни, 28.06.– 2.07.94, Минск, Беларусь	117
Международный симпозиум по биологической подвижности, 25.09.–1.10.94, Пущино, Россия	120
Международная школа по нелинейной науке, 5.09.–16.09.95, Нижний Новгород, Россия	121
АНОНС	13, 54, 85, 124

**Том 2, №5, 1994**

***Нелинейные волны, хаос и структуры в сверхвысокочастотной электронике***

<i>Трубецков Д.И.</i> Нелинейные волны, хаос и структуры в сверхвысокочастотной электронике: обзор тематического выпуска	3
<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
<i>Трубецков Д.И., Четвериков А.П.</i> Автоколебания в распределенных системах: электронный поток – встречная (обратная) электромагнитная волна	9
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Усанов Д.А., Вениг С.Б., Горбатов С.С., Семенов А.А.</i> Влияние нелинейного характера импеданса диодов Ганна на работу СВЧ генераторов на их основе	35
<i>Четвериков А.П.</i> Нелинейная динамика системы взаимодействующих встречных электромагнитной волны и электронной волны с кубичной фазовой нелинейностью	46
<b>ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС</b>	
<i>Привезенцев А.П., Фоменко Г.П.</i> Сложная динамика потока заряженных частиц с виртуальным катодом	56
<i>Анфиногентов В.Г.</i> Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом	69
<b>НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ</b>	
<i>Рыскин Н.М.</i> Уединенные волны пространственного заряда	84
<i>Рыскин Н.М.</i> Модуляционная неустойчивость волн пространственного заряда	93
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ</b>	
<i>Миллер М.А.</i> Размышления о размышлениях. Лекция 1	101
<b>ДЕБЮТ</b>	
<i>Бессуднова Н.О.</i> К нелинейной теории электростатических волн в кольцах Сатурна	109
<b>КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ</b>	
Международная конференция по нелинейной динамике и хаосу, 7–14.07.96, Саратов, Россия	114
<b>АНОНС</b>	92, 116

**Том 2, №6, 1994**

***Нелинейные волны, хаос и структуры в сверхвысокочастотной электронике***

<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
<i>Гинзбург Н.С., Петелин М.И.</i> Конкуренция и кооперация мод в лазерах на свободных электронах	3
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Братман В.Л., Савилов А.В.</i> Сценарий перехода к многочастотному режиму в ЛСЭ-генераторе с низкочастотной электродинамической системой	27
<i>Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А.С.</i> Динамика лазеров на свободных электронах с двумерной распределенной обратной связью	39
<b>НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ</b>	
<i>Рыскин Н.М.</i> Модуляционная неустойчивость волн пространственного заряда: численный эксперимент	48

## НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Пономаренко В.И., Трубецков Д.И.* Сложная динамика автогенератора на вакуумном микротриоде: вычислительный и аналоговый эксперименты на радиотехнической модели 56

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

- Миллер М.А.* Размышления о размышлениях. Лекция 2 66
- Фролов Ю.Н.* О модели объекта управления в системе планирования и бюджетного финансирования научных исследований . . . . . 82

## ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

- Phystech journal* 85
- Айленбергер Г.* Свобода, наука и эстетика 88

## КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

- Региональная конференция ISSEP для Соросовских учителей 23–24.04.95, Саратов, Россия 95
- Международная конференция по самоорганизации в физических, химических и биологических системах 13–18.06.95, Москва–Суздаль, Россия 96
- 10–я Международная школа–семинар по электронике СВЧ и радиофизике 12–20.01.96, Саратов, Россия 98
- АНОНС 101

## Том 3, № 1, 1995

## ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Тулебаев С.Д., Харрасов М.Х.* Периодические решения модели Гарела – Росслера 3
- Соловей Д.В., Шараевский Ю.П.* Прохождение сложных сигналов через нелинейную линию передачи на магнитостатических волнах 11
- Аришинов А.И., Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н.* Тройка керровских сред в кольцевом интерферометре: роль неидентичности 20
- Алехин Б.В., Дубинов А.Е., Селемир В.Д., Степанов Н.В., Шамро О.А., Шибалко К.В.* Натурная имитация импульсной фазированной антенной решетки на основе виркаторов 28
- Беннер Г., Хенн Р., Рёдельшпергер Ф., Визе Г.* Анализ и наблюдение хаоса при спин–волновой неустойчивости 32

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

- Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках 52

## АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

- Григорьева Е.В., Каценко С.А.* Нормальные и квазинормальные формы для полуклассических лазерных уравнений с дифракцией 59
- Мчедлова Е.С., Трубецков А.Д.* Процессы самоорганизации как результат нелинейных взаимодействий в системах биологических осцилляторов 73

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Дубинов А.Е., Селемир В.Д.* Прохождение плоских электромагнитных волн через стационарные фрактальные среды 82
- Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н.* Азбука синергетики на дисплее учебного компьютера 90

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

- Езерский А.Б.* Самоорганизация в экспериментах Фарадея по параметрическому возбуждению капиллярной ряби 98
- АНОНС 106–110

Том 3, № 2, 1995

*Проблемы нелинейной гидродинамической устойчивости*

<i>Ланда П.С.</i> Гидродинамическая турбулентность и когерентные структуры: обзор тематического выпуска	4
<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
<i>Климонтович Ю.Л.</i> Что же такое турбулентность?	7
<i>Ланда П.С.</i> Так что же такое турбулентность? (послесловие)	38
<i>Гиневский А.С., Ланда П.С.</i> Возбуждение гидродинамических и акустических волн в дозвуковых струйных и отрывных течениях	42
<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b>	
<i>Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Сухоруков А.Н.</i> О переходе от ламинарного режима движения к турбулентному в гидродинамических задачах	60
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.</i> Компьютерная концепция вихревой турбулентности	72
<i>Белоцерковский С.М., Хлапов Н.В.</i> Моделирование влияния диффузии вихрей на турбулентные характеристики струй	94
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ</b>	
<i>Abarbanel H.D.I.</i> Tools for analyzing observed chaotic data	104
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b>	
<i>Минаев А.Ф., Смыслов В.И.</i> Сергей Павлович Стрелков	106
<i>Трубецков Д.И.</i> Жозеф Валентен Буссинеск, Дидерик Йоганн Кортевег, Густав де Вриз и уравнение КдВ	111
<b>ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ</b>	
<i>Стрелков С.П.</i> Две «Задачки» (из прошлого)	114
<b>КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ</b>	
<i>Landa P.S.</i> Nonlinear oscillation and waves in dynamical systems	119
<b>КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ</b>	
Московский Синергетический Форум «Устойчивое развитие в изменяющемся мире» 27–31.01.96, Москва, Россия	128
Научно – методическая конференция «Динамика образования в регионе» 12–18.10.95, Саратов, Россия	129
III Международная конференция «Mathematics, computer, education» 29.01–03.02.96, Дубна, Россия	130
Международная конференция «Women–Matematicians: Matematics, Modelling, Ecology», 27–30.05.96, Волгоград, Россия	131
<b>АНОНС</b>	127

Том 3, № 3, 1995

*Роль шумов в нелинейной динамике*

<i>Анищенко В.С.</i> От редактора	4
<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b>	
<i>Нейман А.Б.</i> Применение кумулянтного анализа для исследования бифуркаций динамических систем, возмущаемых внешним шумом	8
<b>АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ</b>	
<i>Ebeling W.</i> Nonlinear dynamics of mixed evolutionary strategies for solving optimization problems	22

## ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Стратонович Р.Л.* Динамический хаос в системе с марковскими отображениями и экспоненциальный характер выхода из метастабильного состояния 28
- Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В.* Механизмы рождения странного нехаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием 34
- Старобинец И.М., Угриновский В.А.* Динамический метод оптимизации управления хаосом 44

## ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Dukman M.I., Luchinsky D.G., Mannella R., McClintock P.V.E., Stein N.D., Stocks N.G.* Stochastic resonance and its provenance 56
- Малахов А.Н., Панкратов А.Л.* Времена стохастических переходов в кусочно-параболических бистабильных системах с шумом 70
- Агудов Н. В., Малахов А. Н.* Влияние формы потенциального профиля метастабильного состояния на температурную зависимость его времени жизни 80
- Анищенко В.С., Хованов И.А., Шульгин Б.В.* Стохастический резонанс в цепи Чуа при взаимодействии различных типов аттракторов системы 91
- Постнов Д.Э.* Стохастический резонанс в автогенераторах с жестким возбуждением 100
- Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Моделирование динамических систем по экспериментальным данным 112

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Abarbanel H.D.I.* Tools for analyzing observed chaotic data. I Introduction 122

## КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

- Anishchenko V.S.* Dynamical chaos – models and experiments 126

## КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА

- Kaplan D., Glass L.* Understanding nonlinear dynamics 131

## Том 3, № 4, 1995

### Хаос – 94

## БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Гибрид удвоенный периода и касательной бифуркации: количественная универсальность и двухпараметрический скейлинг 3

## ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Блиох Ю.П., Любарский М.Г., Подобинский В.О.* Управление частотой в одном классе распределенных динамических систем 12
- Журавлева В.Д., Морев С.П., Пензяков В.В., Роговин В.И.* Эволюция протяженных электронных потоков, фокусируемых аксиально-симметричными магнитными полями 23
- Калинин Ю.А., Лазерсон А.Г., Чемичев Г.В.* Сложная динамика непараксиальных электронных потоков в периодическом магнитном поле 32
- Архипов А.В., Богданов Л.Ю., Воскресенский С.В., Левчук С.А., Лукша О.И., Соминский Г.Г.* Исследование колебаний объемного заряда и формирования пространственных структур в электронном потоке с магнитным удержанием. Часть 1. 41
- Брюханов Ю.А., Глызин С.Д.* Устойчивые периодические режимы одной разностной модели цифрового фильтра с характеристикой типа насыщения 53

## ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Зеерев В.В.* Фрактальная структура инвариантных распределений диссипативных случайных отображений 62
- Анищенко В.С., Астахов В.В., Стрелкова Г.И., Шабунин А.В.* Стабилизация симметричных седловых циклов в связанных системах с хаотической динамикой 73

## АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Ринкевич А.Б.* Элементы самоорганизации электромагнитных волн в меандровой линии под действием тока 80

*Майоров В.В.* Самоорганизация колебаний в кольцевой системе из однородных нейронных модулей. Часть 1. Модель нейронов и взаимодействия между ними 87

## НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

*Нефедов И.С.* Распространение электромагнитных волн в слоистых фрактальных структурах 97

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

*Abarbanel H.D.I.* Tools for analyzing observed chaotic data. Part 3. 106

### Том 3, №5, 1995

### Хаос - 94

## БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

*Андреев Ю.В.* Атракторы и бифуркационные явления в одномерных динамических системах с записанной информацией 3

## ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В.* Стохастический резонанс в бистабильной электрической цепи 16

*Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Роль инерционности и начального рассогласования в развитии колебательных режимов в бистабильной системе с фазовым управлением 26

*Архипов А.В., Богданов Л.Ю., Воскресенский С.В., Левчук С.А., Лукша О.И., Соминский Г.Г.* Исследование колебаний объемного заряда и формирования пространственных структур в электронном потоке с магнитным удержанием. Часть 2 35

*Санин А.Л., Ермолаев Ю.Л.* Реконструкция структур тока при рассеянии электронов на ионизированных донорах и фонах в неоднородном полупроводнике 55

## ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

*Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Фрактальный сигнал и динамика систем, демонстрирующих удвоения периода 64

*Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г.* Динамический хаос в двухрезонаторных клистронных автогенераторах с запаздывающей обратной связью 88

## АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Кальянов Э.В.* Самоорганизация при взаимодействии связанных автостохастических автоколебательных систем 100

*Майоров В.В.* Самоорганизация колебаний в кольцевой системе из однородных нейронных модулей. Часть 2. Модель кольцевой системы из однородных модулей 109

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

*Abarbanel H.D.I.* Tools for analyzing observed chaotic data. Part 4 and 5 Summary 119

### Том 3, №6, 1995

*Нелинейная динамика лазеров и оптических систем*  
посвящается 90-летию со дня рождения Марка Львовича Каца

*Тучин В.В.* От редактора 3

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

*Поль Мандель.* Лазер без инверсии: полезная концепция? 7

<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b> <i>Татаркова С.А., Тучин В.В.</i> Механизмы бифуркаций, структура и свойства хаотических аттракторов в модели лазера с насыщающимся поглотителем	24
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b> <i>Rabinovich E.M., Kowalski J.M., Littler C.L., Bystrik A.P., Prasad J., West B.J.</i> Dynamical instabilities in a CO <sub>2</sub> laser with an externally modulated optical feedback <i>Соколов А.А., Татарков Г.Н.</i> Численное исследование динамики пассивной синхронизации мод в кольцевом однонаправленном лазере	37 44
<b>ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС</b> <i>Владимиров А.Г., Торонов В.Ю., Дербов В.Л.</i> О комплексной модели Лоренца <i>Капцов Л.Н., Ростовцев А.В.</i> Частоты релаксационных колебаний системы связанных твердотельных лазеров с перекрещивающимися каналами генерации <i>Мельников Л.А., Вешнева И.В., Конюхов А.И.</i> Численное моделирование нелинейной динамики поперечной структуры поля в лазере <i>Прокофьева К.В., Шмальгаузен В.И.</i> Пространственные структуры в лазере с поворотом поля <i>Аришинов А.И., Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н.</i> Поперечная динамика лазерного пучка в нелинейной оптической системе с двумерной обратной связью: интерпретация результатов моделирования	51 64 73 90 100
<b>НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ</b> <i>Козлов В.В., Фрадкин Э.Е.</i> Влияние далекой линии поглощения на условия распространения солитона самоиндуцированной прозрачности <i>Рабинович М.И., Цимринг М.Ш.</i> Стохастизация распространения монохроматических волн в оптическом одномодовом фибере	112 120
<b>АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ</b> <i>Зимняков Д.А., В.В. Тучин, А.А. Мишин, К.В. Ларин.</i> Корреляционная размерность спекл-полей для рассеивающих структур с фрактальными свойствами	126
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b> <i>Тучин В.В.</i> Марк Львович Кац. 50 лет оптической науки и образования в Саратовском университете	135

**Том 4, №1, 1996**

<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b> <i>Ораевский А.Н.</i> Динамика одномодовых лазеров и динамический хаос	3
<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b> <i>Баженев М.В., Рабинович М.И., Рубчинский Л.Л.</i> Простая модель нейрона, обладающего сложной осцилляторной активностью	33
<b>АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ</b> <i>Короновский А.А.</i> Об одной модели распространения эпидемии	40
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b> <i>Зимняков Д.А., Тучин В.В., Мишин А.А.</i> Визуализация фрактальных структур биотканей с использованием метода пространственной спекл-коррелометрии	49
<b>ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ</b> <i>Агаджанян Н.А.</i> От редактора	60
<i>Зацепина Г.Н., Горюнов Н.Н., Тульский С.В., Мальшев Д.К., Елисеева Т.О.</i> Развитие методов дифференциальной диагностики болезней людей посредством исследований изменений тонкой структуры постоянного электрического поля по коже человека <i>Иванов П.С., Бутылин А.А.</i> Непараметрический анализ коллективных состояний системы ионных каналов	66 71

<i>Кудряшов Ю.И., Розанов В.В., Сысоев Н.Н., Усков Л.Ф.</i> Численное исследование нелинейных задач взрывных технологий	81
<i>Акимов А.И., Баранов А.Н., Салецкий А.М.</i> Влияние слабых магнитных полей на рост и фотосинтетическую активность листьев бобов	91
<i>Пивоваров Ю.П., Королик В.В.</i> Современное состояние вопроса о гигиеническом регламентировании биотехнологических штаммов в объектах окружающей среды	96
<i>Воробьева Т.Н.</i> Динамический гомеостаз: равновесие, стационарное состояние, хаос?	102
<i>Крейнес М.Г.</i> Моделирующие системы представления знаний для задач классификации: новая информационная технология для работы с плохо формализованными знаниями	109
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b>	
<i>Данилов Ю.А.</i> Льюис Карролл как нелинейное явление	119
<b>КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА</b>	
<i>Короновский А.А., Трубецков Д.И.</i> Нелинейная динамика в действии	126
<b>АНОНС</b>	58, 118, 129

#### Том 4, № 2, 1996

<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
<i>Астафьева Н.М.</i> Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений (основы теории и примеры применения)	3
<i>Мира Кристиан.</i> О бассейнах, порождаемых двумерными необратимыми отображениями	40
<i>Ковригин Д.А., Потапов А.И.</i> Нелинейная волновая динамика одномерных упругих систем	72
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b>	
<i>Болотовский Б.М., Левин М.Л., Миллер М.А., Суворов Е.В.</i> Фарадей – Максвелл – Герц – Хевисайд... О согласованности функциональных специализаций мозга	103
<b>КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ</b>	124
<b>АНОНС</b>	123, 125

#### Том 4, № 3, 1996

<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b>	
<i>Бакалейников Л.А.</i> Об одном методе построения динамических систем с гомоклинической траекторией седлового состояния равновесия	3
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Каценко С.А.</i> Сравнительный асимптотический анализ динамики автогенераторов с различными нелинейными запаздывающими связями. Часть.1	10
<i>Музычук О.В.</i> Некоторые точные результаты для вероятностных характеристик стохастического уравнения Ферхюльста	18
<i>Музычук О.В.</i> Нестационарные вероятностные характеристики стохастического уравнения Ферхюльста	25
<i>Короновский А.А., Трубецков Д.И.</i> Использование модифицированных уравнений Вайдлица для моделирования социальных процессов	31
<i>Беднов А.А., Ульянов С.С., Тучин В.В., Бриль Г.Е., Захарова Е.И.</i> Исследование динамики лимфотока методами спекл-интерферометрии	42
<b>ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ</b>	
<i>Нетребко А.В., Нетребко Н.В., Романовский Ю.М., Хургин Ю.И., Эбелинг В.</i> Стохастическая кластерная динамика фермент-субстратного комплекса	53

<i>Чернавский Д.С., Пирогов Г.Г., Чернавская О.Д., Шербаков А.В., Сулаков Б.А.</i> Динамика экономической структуры общества (математическая модель)	67
<i>Волков Д.В., Столяров М.Н., Волков Е.И.</i> Эффективный численный способ изучения динамики цепочек сильно релаксационных осцилляторов	77
<i>Кайгородова Н.З., Сухарева Л.Н., Эйдукайтис А.С., Яценко М.В.</i> Влияние индивидуально-типологических особенностей на суточную динамику хаотичности ЭКГ	89
<i>Ванаг В.К., Вирченко А.Ю., Ванаг К.В.</i> Моделирование эффекта перемешивания в автокаталитической реакции при помощи вероятностного клеточного автомата	97
<i>Якушевич Л.В.</i> Моделирование нелинейной динамики ДНК	107

#### ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

<i>Хвольсон О.Д.</i> Знание и вера в физике	113
---	-----

#### КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

Межрегиональный научный семинар «Нелинейные системы и их модели»	129
--	-----

### Том 4, №4,5,1996

#### БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

<i>Кузнецов С.П.</i> Каскад удвоений периода в комплексном кубическом отображении	3
<i>Кивглева К.Г., Фрайман Л.А.</i> Бифуркационный анализ нелинейной динамики неавтономной системы маятникового типа	13
<i>Лебедева Л.В.</i> О фазовых картинах стандартного отображения тора	21
<i>Кипчатов А.А., Подин С.В.</i> Исследование поведения неавтономного релаксационного генератора в пространстве управляющих параметров	30

#### ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

<i>Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е.</i> Синхронизация ансамблей связанных отображений	40
<i>Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.</i> Построение моделей класса решеточных газов для решения задач газодинамики	59
<i>Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.</i> Взрывная неустойчивость в системах типа «два взаимодействующих электронных потока – электромагнитная волна»	65
<i>Кручинин Л. А., Разенштейн П. С., Сморгонский А. В.</i> Об одном механизме усиления и развития инфляции	78
<i>Короновский А.А.</i> Динамика одномерной цепочки логистических отображений с однонаправленной пороговой связью	92

#### ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

<i>Прохоров М.Д.</i> Виды колебаний диссипативно связанных систем с удвоением периода при сильной связи	99
<i>Сонечкин Д.М., Даценко Н.М., Иващенко Н.Н.</i> Новый способ экстраполяции хаотических временных рядов посредством вейвлетов с приложением к динамике климата	108

#### АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

<i>Короновский А.А.</i> О механизмах установления рыночной цены	122
---	-----

#### НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

<i>Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В.</i> Вакуумная микроэлектроника – время ожиданий	130
--	-----

#### МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

<i>Пойзнер Б.Н.</i> О «субъекте» самоорганизации	149
--	-----

#### КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

Фракталы в прикладной физике	159
------------------------------	-----

#### КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

Научная конференция «Проблемы фундаментальной физики» 7–12.10.96, Саратов, Россия	161
---	-----

## Том 4, № 6, 1996

<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
<i>Торонов В.Ю., Дербов В.Л., Приютова О.М.</i> Геометрические фазы в динамике нелинейных оптических систем	3
<i>Мельников Л.А., Конюхов А.И., Рябинина М.В.</i> Динамика поперечной поляризации структуры поля в лазерах	33
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Бочков Г.Н., Горохов К.В., Дубков А.А., Желтов С.Н., Марков Г.А.</i> Полиспектральные методы анализа, синтеза и передачи информации	54
<i>Синицкий Л.А., Цвигун О.А.</i> О квазипериодических решениях в диссипативных динамических системах третьего порядка	66
<i>Меглинский И.В., Боас Д.А., Йод А.Г., Чанс Б., Тучин В.В.</i> Развитие метода корреляции флуктуаций интенсивности лазерного излучения для неинвазивного мониторинга и измерения параметров кровотока	72
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ</b>	
<i>Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Фельдштейн И.В.</i> Новый подход к оценке коэффициента переноса	82
<i>Жогаль С. П., Жогаль С. И.</i> Об интегрируемости уравнений Колмогорова – Фоккера – Планка для неавтономных квазилинейных систем с параметрическим случайным воздействием	92
<i>Чуканов С.Н.</i> О формализации взаимодействия гладких нелинейных динамических систем	100
<b>КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ</b>	
<i>Пойзнер Б.Н.</i> Информация и самоорганизация – ключи к тайне эволюции?	107

## Том 5, № 1, 1997

*Молодое поколение выбирает нелинейную динамику  
посвящается 90-летию со дня рождения Венедикта Ивановича Калинина*

<i>Анищенко В.С.</i> От редактора	3
<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
<i>Анищенко В.С., Нейман А.Б.</i> Стохастический резонанс и стохастическая синхронизация	5
<i>Астахов В.В., Шабунин А.В.</i> Синхронизация хаотических осцилляторов посредством периодической модуляции коэффициента связи	15
<i>Никитин А.П.</i> Индуцированный шумом перенос броуновских частиц в стохастических системах с асимметричным периодичным в пространстве потенциалом	30
<b>ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС</b>	
<i>Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В.</i> Динамика цепочки отображений окружности с квазипериодическим воздействием	42
<i>Постнов Д.Э., Баланов А.Г., Черняков В.И.</i> Синхронизация и хаос в моделях динамики популяций	54
<i>Постнов Д.Э., Баланов А.Г.</i> Синхронизация в хаотических системах со счетным числом состояний равновесия	69
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Анищенко Т.Г., Игошева Н.Б., Хохлова О.Н.</i> Нормированная энтропия в оценке особенностей реакций сердечно-сосудистой системы на стрессорные воздействия у особей разного пола	81
<i>Павлов А.И., Янсон Н.Б.</i> Применение методики реконструкции математической модели к электрокардиограмме	93

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ <i>Анищенко В.С.</i> Аттракторы динамических систем	109
Список избранных публикаций сотрудников лаборатории нелинейной динамики за 1994–97 гг.	128
КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ International conference «Control of oscillations and chaos». August 27–29, 1997, St.Peterburg, Russia	131
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA <i>Патрушев В.Л., Герштейн Г.М., Красильников В.Я.</i> Венедикт Иванович Калинин	134
АНОНС	133

**Том 5, № 2, 3, 1997**

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ <i>Купцов П.В., Кузнецов С.П.</i> О динамике модельных систем с дискретным временем под действием бинарных самоподобных последовательностей	3
<i>Кипчатов А.А., Короновский А.А.</i> Тонкие эффекты самоподобного поведения кусочно-линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора	17
<i>Короновский А.А.</i> Мультипликаторы периодических решений для генератора с кусочно-линейным элементом	24
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН <i>Андреев А.В., Шитлин С.Л.</i> Сверхизлучение двухкомпонентных пространственно неоднородных сред	35
<i>Безручко Б.П., Жалнин А.Ю., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П.</i> Дискретные нелинейные модели периодически возбуждаемой <i>RL</i> -диод цепи	48
<i>Короновский А.А., Пономаренко В.И., Трубецков Д.И.</i> Динамика отображений с пороговым типом связи	63
<i>Кипчатов А.А., Подин С.В.</i> Применение методики адаптивной фильтрации для определения периода колебаний потоковых систем	72
<i>Музычук О.В.</i> Вероятностные характеристики системы «хищник–жертва» со случайно изменяющимися параметрами	80
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС <i>Астахов С.А., Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.</i> Эволюция бассейнов притяжения аттракторов связанных систем с удвоением периода	87
ДЕБЮТЫ <i>Кащенко Д.С.</i> Синхронизация в системе из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью	100
<i>Иваньков Н.Ю.</i> Свойства скейлинга пространства параметров логистического отображения под внешним периодическим воздействием	118
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA Руслан Леонтьевич Стратонович	128
<i>Стратонович Р.Л.</i> Немарковская теория флуктуаций в нелинейных динамических системах с линейным трением	131
АНОНС	79

**Том 5, № 4, 1997**

*Нелинейная динамика в образовании*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ <i>Трубецков Д.И.</i> Университетский колледж прикладных наук – первые пять лет	3
<i>Трубецков Д.И., Левин Ю.И., Рыскин Н.М.</i> Физика волн: учебная программа	13

<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.</i> Нелинейные колебания, катастрофы, бифуркации, хаос: учебные программы	19
<i>Кузнецов А.П.</i> Нелинейные колебания, катастрофы и бифуркации: задачи	29
<i>Рыскин М.И.</i> «Стихи живые сами говорят...»: заметки о гуманитарном образовании в физико-математических лицах	44
<i>Анищенко В.С.</i> Размышления о нелинейной динамике: к вопросу об учебных планах подготовки специалистов по нелинейной динамике	59
<i>Климонтович Ю.Л.</i> Физика открытых систем: проект программы междисциплинарного курса лекций	65
<i>Романовский Ю.М.</i> Автоволновые процессы: программа специального курса для биофизиков и радиофизиков	72
<i>Малинецкий Г.Г.</i> «Историческая механика» и нелинейная динамика	76
<i>Неймарк Ю.И.</i> О курсе «Математические модели естествознания и техники»	89
<i>Пойзнер Б.Н.</i> Основы синергетики: программа курса	96
<i>Стромберг А.Г.</i> Опыт изложения синергетики в учебнике физической химии	99
<i>Пойзнер Б.Н.</i> Неллинейная динамика учебника: эскиз	102
<i>Качак В.В., Мчедлова Е.С.</i> Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений	110

#### КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА

<i>Трубецков Д.И.</i> Колебания и волны для гуманитариев: учебное пособие	120
<i>Соснин Э.А., Пойзнер Б.Н.</i> Лазерная модель творчества: от теории доминанты – к синергетике культуры	135

#### ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

<i>Discrete Dynamics in Nature and Society: an International Multidisciplinary Research and Review Journal</i>	137
--	-----

#### КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

Нелинейная динамика и новые методы образования в области фундаментальных наук. Саратов, 7–12 октября 1997	141
Международный центр – фонд перспективных исследований в Нижнем Новгороде (МЦФПИН)	143

### Том 5, № 5, 1997

#### ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

<i>Астафьева Н.М.</i> Нелинейное сдвиговое течение во вращающихся сферических слоях и моделирование глобальных атмосферных движений	3
<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b>	
<i>Баланов А.Г., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сосновцева О.В.</i> Бифуркация синхронизации хаоса в осцилляторе Ресслера с гармоническим воздействием	31
<i>Пономаренко В.П.</i> Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением	44

#### ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

<i>Некоркин В.И., Казанцев В.Б., Веларде М.Г.</i> Динамическое копирование в многослойных бистабильных решетках	56
<i>Скляр Ю.А., Двинских В.А., Бричков Ю.И., Воробьев В.А., Котума А.И.</i> Солнечная активность и осцилляции солнечного потока	69
<i>Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.</i> Моделирование движения толпы при помощи клеточных автоматов	75
<i>Ремтен И.С., Короновский А.А.</i> Нелинейная модель взаимодействия продавцов и потребителей	80

#### МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

<i>Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.</i> Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости	89
--	----

#### НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

<i>Дмитриев Б.С., Левин Ю.И.</i> Об открытии электрона	107
--	-----

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ  
Научная конференция «Молодежь и наука на пороге XXI века», март 1998,  
Саратов, Россия 117

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ  
Регулярная & хаотическая динамика 118

**Том 5, № 6, 1997**

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ  
*Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Селезнев Е.П., Фойдель У. О* динамика нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора 3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН  
*Никитин А.П., Постнов Д.Э.* Индуцированный шумом перенос броуновских частиц в системе с «пульсирующим» периодическим потенциалом 21

*Дудко Г.М., Филлимонов Ю.А.* Самофокусировка ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках: численный эксперимент 29

*Морозов Д.А., Степанов В.А., Чиркин М.В.* Образование фронта ионизации в газоразрядной плазме 41

*Матросов В.В.* Некоторые особенности динамического поведения каскадного соединения двух фазовых систем 52

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ  
*Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Неавтономные колебания электронного потока с виртуальным катодом в плоском диодном промежутке 61  
*Кузнецов А.П., Широков А.П.* Дискретная модель релятивистской лампы обратной волны 76

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ  
*Трубецков Д.И.* Колмогоров, Петровский, Пискунов, Фишер и нелинейное уравнение диффузии 85

ДЕБЮТЫ  
*Красков А.В., Ракитин С.А.* Влияние параметров метода ложных соседей на оценку минимальной размерности вложения 95

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ  
Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. Содержания за 1993–1997 гг. 104

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ  
V International school «Chaotic oscillations and pattern formation». 5–10 October, 1998,  
Saratov, Russia 120

АНОНС 39, 103

**Заинтересованный читатель может получить журнал или ксерокопию нужной статьи наложенным платежом. Стоимость наложенного платежа от 5 до 20 руб.**

Заказы направлять по адресу  
410601, Саратов, главпочтамт, а/я 3150,  
Левиной Н.Н.  
или по электронной почте  
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru



Изв. вузов «ПНД», т.5, № 6, 1997

V International School

## CHAOTIC OSCILLATIONS and PATTERN FORMATION

### CHAOS 98

Saratov, Russia, October 5–10, 1998

#### Organized by

- Saratov State University (SSU)
- State Educational and Scientific Center «College» of SSU
- Saratov Branch of the Radio Engineering and Electronics Institute of
- Russian Academy of Sciences
- Ministry for Young People Affair, Sport and Tourism of Saratov Region

#### Sponsored by

- Ministry for General and Professional Education of Russian Federation
- Russian Foundation for Basic Research
- Center for Assistance in Consolidation of High Education and Fundamental
- Science (Center «Integration»)
- The International Center for Advanced Studies in Saratov
- Institute of Electrical and Electronic Engineers, Electron Device Society, USA (technical support)

#### Organizing committee

Chairman D.I.Trubetskov, Saratov State University, Russia

#### Scientific committee

V.S.Anishchenko, Saratov State University, Saratov, Russia  
A.V.Gaponov-Grekhov, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia  
Yu.A.Danilov, Kurchatov Scientific Center, Moscow, Russia  
A.S.Dmitriev, Institute of Radio-Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
W.Ebeling, Humboldt-University Berlin, Germany  
S.N.Gurbatov, University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia  
G.Th.Guria, National Center for Haematology, Biophysics and Cryobiology Laboratory, Moscow, Russia  
Yu.L.Klimontovich, Moscow State University, Moscow, Russia  
S.P.Kuznetsov, Institute of Radio-Engineering and Electronics, Saratov, Russia  
P.S.Landa, Moscow State University, Moscow, Russia  
M.I.Rabinovich, University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia  
V.D.Shalfeev, University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia  
M.M.Sushchik, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia

#### Local committee

D.I.Trubetskov, Chairman  
V.G.Anfinogentov, B.P.Bezruchko, A.E.Hramov, A.A.Koronovskiy,  
L.V.Krasichkov, Yu.I.Levin, E.S.Mchedlova, S.V.Podin, Yu.P.Sharaevskii.

## Objective and scope

The School is organized to continue the series of International Schools on Chaotic Oscillations in Radio-physics and Electronics held in Saratov (1985, 1988, 1991, 1994). These Schools were widely attended by researchers from the former Soviet Union and provided a discussion of different problems in nonlinear dynamics.

## The main Topics of the school

- Methods of Theoretical Analysis of Chaotic Behaviour
- Experimental Investigations of Nonlinear Phenomena
- Diagnostics of Chaos
- Piece-Wise Linear Systems
- Nonlinear Waves
- Self-Organization and Spatio-Temporal Chaos
- Application to Microwave Electronic Systems
- Nonlinear Phenomena in Biology and Sociology
- Nonlinear Dynamics and Modern Education

The lectures, talks of participants, discussions on modern problems of nonlinear dynamics and its applications will be organized. Authors are welcome to take part in the School. Please fill the attached Registration form and send one to Organizing Committee before 30 April 1998. You can contribute a presentation as Lecture, Talk or Poster. In this case, please send one page abstract of your presentation in LaTeX format by e-mail preferably. You have not to use any your own commands and macroses in LaTeX. You can find LaTeX sample file at <http://cas.ssu.runnet.ru/chaos98/chaos98.html> or ask the file by e-mail: [chaos98@cas.ssu.runnet.ru](mailto:chaos98@cas.ssu.runnet.ru). The official School languages will be Russian and English. The lectures will be published in focus issue of «Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics» journal. We plan to publish all accepted abstracts before the School. Note, that your abstract will appear in Book of Abstracts if you will send its electronic version to Organizing Committee of CHAOS'98 by e-mail.

## Location

To keep up the traditions the School will be held in a comfortable holiday hotel not far from Saratov city. Participants will be accommodated in single and double rooms. Three meals (breakfast, dinner and supper) will be served at cafeteria.

## Schedule

Tentative School schedule is following: three lectures (50 min each) before dinner, two lectures and talks after dinner. Poster session will be organized throughout the School. Scientific discussions and social events will take place in the evening.

## Registration

A Registration Form is attached (return by e-mail if possible). The registration deadline is 30 April 1998. A confirmation of registration and information on acceptance of contribution will be sent to participants after registration deadline. Full information on the registration and accommodation will be provided in the second announcement.

*The Second Announcement will be distributed to those interested in May 1998. The organization of the School will be carried out by e-mail.*

## Address

Organizing Committee of CHAOS 98  
College of Applied Science  
Saratov State University  
83 Astrakhanskaya Saratov 410026 RUSSIA  
Tel.: +7 (8452) 514294,  
Fax: +7 (8452) 514298  
E-mail: [chaos98@cas.ssu.runnet.ru](mailto:chaos98@cas.ssu.runnet.ru)  
WWW: <http://cas.ssu.runnet.ru/chaos98/chaos98.html>

## Registration form

Full name (first, middle initial and surname):  
Full organization address:  
Telephone and FAX numbers:  
E-mail address:  
The title of presentation:  
Abstract:  
 I plan to attend the School.  
     I would like to present:  
 Lecture (50 min)  
 Talk (15 min)  
 Poster

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

### Правила оформления рукописей

1. Статьи объемом не более 16 страниц должны быть напечатаны на белой бумаге через два интервала и представлены в двух экземплярах. При компьютерном наборе размер шрифта – не меньше стандартного машинописного.

2. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, *краткий реферат статьи, составленный по форме удобной для непосредственного включения его в РЖ «Физика», издаваемый ВИНТИ* (см. ниже). К статье прилагаются:

а) перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, краткого реферата;

б) краткие сведения об авторах с фотографиями любого формата.

Приложения даются в двух экземплярах.

3. Весь иллюстративный материал представляется в двух экземплярах. Рисунки выполняются тушью на белой бумаге. Рисунки, полученные машинной графикой, должны быть достаточно четкими и яркими. На обороте указываются: порядковый номер рисунка, фамилии авторов, название статьи. Подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

4. Все формулы должны быть вписаны черными чернилами четко и ясно. Формулы должны быть размечены во всех случаях, когда строчные и прописные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своими размерами (С и с, V и v, U и u, W и w, S и s, P и p, K и k, X и x, Y и y, Z и z, Q и q, J и j). Необходимо прописные буквы подчеркивать простым карандашом двумя черточками снизу (C, V), а строчные – двумя черточками сверху ( $\bar{c}$  и  $\bar{v}$ ). При написании необходимо также делать ясное различие между буквами J и I и пояснять их на полях. Буква O подчеркивается двумя черточками снизу, цифра 0 не подчеркивается. Особенно четко следует вписывать схожие по написанию l и e (l подчеркивается зеленым карандашом), k (русское) и k (латинское), h и n, q и g, «,» (запятую), «'» (штрих), «1» (единицу), «2» (двойку), r и z. Особое внимание должно быть обращено на аккуратное написание индексов и показателей степеней. Надстрочные знаки нужно отчеркивать дугой –  $\cup$ , подстрочные дугой –  $\cap$ . Индексы, являющиеся сокращениями слов, должны быть пояснены отдельно. В вещественных числах ставится десятичная точка.

5. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, прописные указываются особо. Для обозначения вектора используются стрелки над буквой, для усреднения величины – черта сверху.

6. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке должны быть указаны:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны.

7. Статьи, направляемые авторам на переработку, должны быть возвращены в редакцию не позднее двух месяцев после получения. При нарушении этого условия статья рассматривается как вновь поступившая.

### ***Рекомендации по составлению «краткого реферата» и «сведений об авторах»***

1. Публикация реферата преследует две основные цели:

а) помочь ученым, работающим над теми же вопросами, по которым написана статья, уточнить, имеет ли смысл читать статью полностью;

б) упростить и ускорить работу реферативных журналов, которые получают возможность немедленно перепечатывать авторские рефераты;

Реферат должен представлять собой самостоятельное законченное сообщение объемом не более 200–250 слов. В нем должны быть обозначены основные идеи и результаты, содержащиеся в статье. Авторы должны иметь в виду, что рефераты могут оказаться единственными материалами, которые будут прочитаны.

2. Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:

Иванов Петр Сидорович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико–технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в МГУ (1964) и доктора физико–математических наук (1977) в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и соавтор учебника «Волны в экологии». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала *International Journal of Chaos Theory* и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

*Статьи принимаются на дискетах для компьютера IBM PC, формат MS DOS – 5,25" или 3,5". Текстовые файлы записываются в ASC II– кодировке. Иллюстрации – в виде файлов в формате PCX, TIFF или GIF. Наличие текста на дискете не исключает необходимость представления размеченной распечатки статьи ( в двух экз.), с которой работает рецензент и из которой вносятся формулы в макет статьи. В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.*

**СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ВЫШЕ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ НЕ ПРИНИМАЮТСЯ**

*Редакция*

E–mail:and@cas.ssu.runnet.ru

для статей

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты –  
р/с №40503810000000000378 в АКБ «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, корсчет банка 30101810100000000722

**Подписка на I-ое полугодие 1998 года**  
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498.  
и по заявочным письмам непосредственно в редакции

Сдано в набор 15.02.98. Подписано к печати 18.03.98. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 10,85 (7,75). Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 200 экз. Заказ 73

Издательство ГосУНЦ «Колледж»  
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.  
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 514298  
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

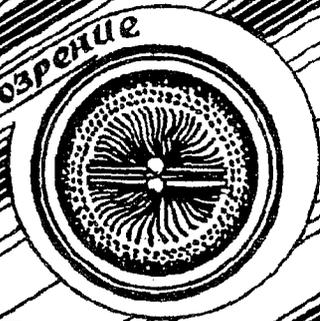
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1998



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



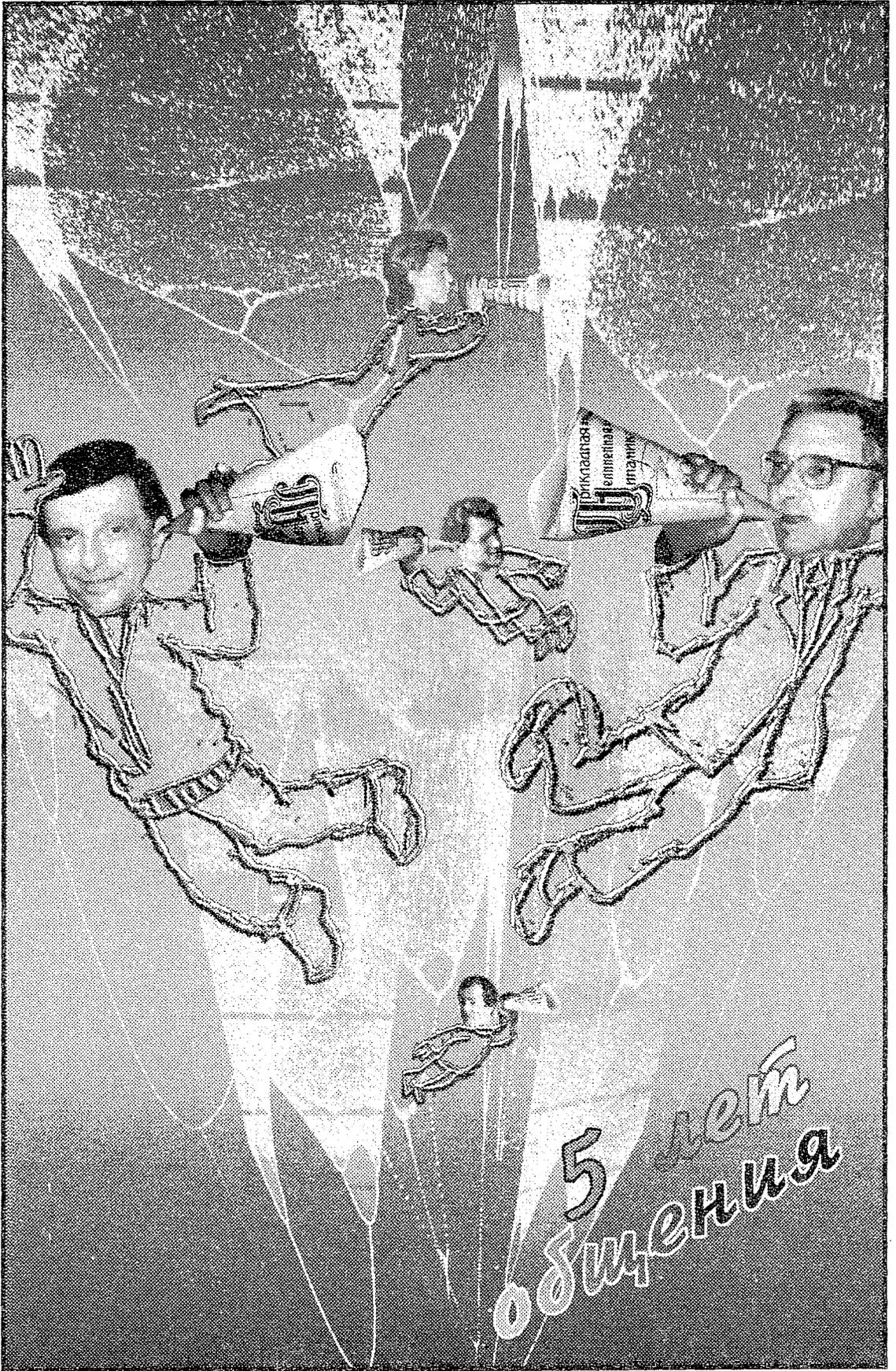
Методы преподавателей



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики



5 лет  
общения