

ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Прикладная Деловая Динамика



5
2024

*50 лет Александру Евгеньевичу Храмову
(20 сентября 1974 года)*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

М. В. Сысоева, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

С. А. Каценко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПИМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Пиковский, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

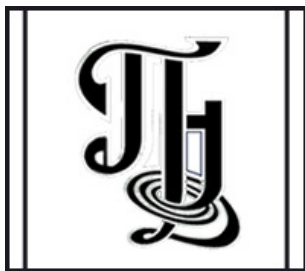
Е. Я. Фрисман, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

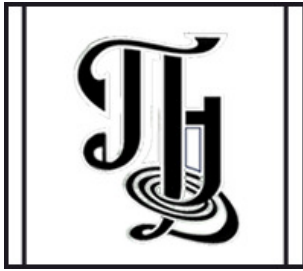
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией А. А. Грищенко
Редактор А. Р. Нигметулина
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 16.09.2024
Вышел в свет 30.09.2024
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 16,97 (18,25)
Тираж 100 экз. Заказ № 116-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru)

The journal is Open Access

Head of Editorial office A. A. Grishchenko
Editor A. R. Nigmatulina
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 16.09.2024. Published 30.09.2024
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 16,97 (18,25)
Edition of 100 copies. Order No. 116-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

Куркин С. А. К юбилею профессора Александра Евгеньевича Храмова..... 567

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Часть 2. Амплитудно-фазовое приближение..... 574

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Киселев М. В., Ларионов Д. А., Урусов А. М. Импульсный бинарный нейрон — детектор причинно-следственных связей..... 589

Мальшев Ю. А., Яхно В. Г. Версия биоморфной системы навигации 606

Никулина М. В. Новый подход к определению физиологической стоимости нагрузки: антиноцицепция и нормализация дыхательного паттерна variability ритма сердца..... 625

Шабунин А. В. Определение структуры связей в ансамбле хаотических отображений при помощи нейронной сети 636

Преображенский И. Е., Преображенская М. М. Дискретные бегущие волны в релейной системе дифференциально-разностных уравнений, моделирующей полносвязную сеть синаптически связанных нейронов..... 654

Стасенко С. В. Регуляция пачечной динамики в нейрон-глиальной сети с синаптической пластичностью 670

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Медведев А. В., Кузенков О. А. Моделирование конкуренции языков в двуязычном сообществе..... 691

C O N T E N T S

EDITORIAL

Kurkin S. A. On the anniversary of Professor Alexander Hramov 567

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Adilova A. B., Ryskin N. M. Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay. Part 2. Amplitude-phase approximation 574

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Kiselev M. V., Larionov D. A., Urusov A. M. A spiking binary neuron – detector of causal links 589

Malichev Y. A., Yakhno V. G. Biomorphic navigation system version 606

Nikulina M. V. The new approach to calculation of physiological cost of activity: antinociception and normalization of the respiratory pattern of heart rate variability 625

Shabunin A. V. Searching the structure of couplings in a chaotic maps ensemble by means of neural networks 636

Preobrazhenskii I. E., Preobrazhenskaia M. M. Discrete traveling waves in a relay system of differential-difference equations modeling a fully connected network of synaptically connected neurons 654

Stasenko S. V. Regulation of burst dynamics in the neuron-glia network with synaptic plasticity 670

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

Medvedev A. V., Kuzenkov O. A. Modeling language competition in a bilingual community 691



К юбилею профессора Александра Евгеньевича Храмова

С. А. Куркин

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Россия
E-mail: ✉kurkinsa@gmail.com

Поступила в редакцию 30.08.2024, опубликована 30.09.2024

Для цитирования: Куркин С. А. К юбилею профессора Александра Евгеньевича Храмова // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 567–573. DOI: 10.18500/0869-6632-003124. EDN: AZKDQM

For citation: Kurkin SA. On the anniversary of Professor Alexander Hramov. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5):567–573. DOI: 10.18500/0869-6632-003124

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

20 сентября 2024 года исполняется 50 лет доктору физико-математических наук, профессору Александру Евгеньевичу Храмову — блестящему ученому, общепризнанному специалисту в области радиофизики, нелинейной динамики и теории сложных сетей, биофизики, нейронауки, искусственного интеллекта и его приложений в анализе данных и биомедицине. Предстоящий юбилей является поводом и возможностью взглянуть на многогранную и очень плодотворную научную деятельность Александра Евгеньевича и на основные вехи его научного пути. Мне выпала честь сделать это.

Научная карьера Александра Евгеньевича Храмова началась на кафедре электроники, колебаний и волн физического факультета Саратовского государственного университета, который он окончил в 1996 году. Александр Евгеньевич — пример настоящего университетского человека. Как он рассказывал, впервые переступив порог университета, он понял — это то место, с которым он хотел бы связать свою жизнь и карьеру. Так и случилось, и университет стал для него фактически вторым домом. В 1999 году Храмов А. Е. под руководством доктора физико-математических наук, профессора Юрия Дмитриевича Жаркова и кандидата физико-математических наук Василия Геннадиевича Анфиногентова защищает диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика», а уже через 6 лет — диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по той же специальности; научным консультантом по ней выступал член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Дмитрий Иванович Трубецков. В 2008 году Храмову А. Е. присвоено ученое звание профессора кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета.



С коллегами по кафедре электроники, колебаний и волн СГУ (2008). Во втором ряду слева направо: А. Е. Храмов, С. В. Гришин, М. И. Перченко, Р. А. Филатов, В. Н. Скороходов, М. В. Белоглазкина, Е. Н. Егоров, А. А. Короновский, В. Н. Титов, А. Е. Храмова, А. В. Стародубов, А. В. Муштаков, С. А. Куркин. В первом ряду слева направо: В. М. Аникин, Ю. Д. Жарков, Ю. А. Калинин, Д. И. Трубецков, О. И. Москаленко, И. С. Ремпен, Ю. Г. Гамаюнов, П. В. Попов

Старшие коллеги Александра Евгеньевича — Жарков Юрий Дмитриевич, Трубецков Дмитрий Иванович, Лёвин Юрий Иванович, Калинин Юрий Александрович и многие другие — все они оказали заметное влияние на его научный стиль и высокую научную культуру как во время его обучения в университете, аспирантуре, подготовке диссертаций, так и в процессе совместной плодотворной научной работы. Александр Евгеньевич фактически перенял и продолжил славные традиции Саратовской школы нелинейной динамики и электроники.

В конце 1990-х и начале 2000-х годов первые научные исследования и интересы Храмова А. Е. лежали на стыке электроники и нелинейной динамики и касались изучения моделей систем со сверхкритическим электронным потоком и приборов на их основе, так называемых виркаторных систем, а также ряда других СВЧ-устройств (ЛБВ, ЛОВ, gyroприборов и др.) В данной области им с коллегами были получены важные пионерские результаты, позволившие продвинуться в понимании сложной нелинейной динамики подобных систем, включая развитие хаотических режимов, синхронизации и различных типов неустойчивостей, а также предложить способы повышения эффективности работы рассматриваемых устройств [1–5]. Также большой пласт его работ в то время посвящен фундаментальным вопросам нелинейной динамики: исследованию сложной динамики, перехода к хаосу, процессов мультистабильности и управления в модельных системах; изучению хаотической динамики и образования структур в пространственно-распределенных системах; исследованию синхронизации, в том числе хаотической, в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах [6, 7].

Александр Евгеньевич посвящал себя не только науке, он также много сил и энергии тратил на преподавательскую деятельность в то время преимущественно на факультете нелинейных процессов, на кафедре электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета. Здесь хочется, например, отметить его написанный в соавторстве с Д. И. Трубецковым 2-томник «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» [8], который фактически стал настольной книгой для многих студентов и молодых специалистов, начинающих изучение СВЧ-электроники, в том числе и для меня. Также в 2003 году совместно с профессором, доктором физико-математических наук А. А. Короновским они издали первую в России монографию, посвященную вейвлет-анализу [9]. Эти книги до сих пор остаются общепризнанными.

Прекрасными качествами Александра Евгеньевича являются стратегическое видение общей картины развития науки в области нелинейной физики, теории сложных систем и методов ИИ, а также способность выделять наиболее перспективные тенденции. Александр Евгеньевич с легкостью развивает новые плодотворные коллаборации как внутри страны, так и за рубежом. Всё это приводит к тому, что области научных интересов Александра Евгеньевича со временем расширяются, пополняются всё новыми современными и востребованными направлениями. Так, с 2006 г. совместно с коллегами из Университета Неймегена (Нидерланды) и Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН Александр Евгеньевич начинает исследования эпилептиформной активности на животных моделях эпилепсии [10], а также разработку методов для предсказания приступов абсансной эпилепсии [11]; с 2008 г. совместно с коллегами из Университета Лафборо (Великобритания) начинает исследования сложной динамики и процессов генерации субтерагерцовых сигналов в полупроводниковой сверхрешетке [12].

Отмечу ещё несколько наиболее значимых и длительных коллабораций профессора Храмова, результатом которых стало множество замечательных работ: с коллегами из Индийского статистического института и Джадавпурского университета (Индия) — по исследованию сложных сетей модельных нейронов, в том числе химерного состояния в таких сетях [13]; Института сложных систем (Италия) и Берлинского университета имени Гумбольдта (Германия) — по изучению модельных сложных сетей, в том числе процессов синхронизации в них, и разработке методов анализа сетей [14, 15]; Нижегородского государственного университета — по разработке различных биоморфных систем; Национального медико-хирургического центра имени Н. И. Пирогова — по исследованию эпилепсии и другим биомедицинским направлениям [16]; Северозападного политехнического университета (Китай) — по исследованию и моделированию сетевых структур в мозге [17]; Мадридского политехнического института (Испания) — по исследованию когнитивных процессов с использованием различных методов нейровизуализации, в особенности МЭГ [18], а также по изучению эффекта когерентного резонанса в живых системах и стохастических процессов в нейронной сети головного мозга. Результаты его исследований по последним двум направлениям были обобщены совместно с работами других авторов в обзорных статьях Александра Евгеньевича, опубликованных в престижных физических журналах [19, 20].

С 2014 года фокус исследований Александра Евгеньевича всё сильнее начинает смещаться в область нейронауки, преследуя основную цель — продвинуться в понимании функционирования такой бесконечно сложной системы, как мозг человека. Эта область исследований представлена в группе Александра Евгеньевича разнообразными актуальными направлениями: от фундаментальных исследований восприятия человеком информации, включая неоднозначные визуальные стимулы [21], изучения механизмов запоминания информации и процесса обучения [22], формирования мозгом воображаемых моторных образов [23] до развития интерфейсов мозг-компьютер (ИМК). Глубокое понимание состояния развития ИМК в мировой науке и их разностороннее изучение естественным образом привело Александра Евгеньевича к опубликованию значимой обзорной статьи по данной тематике в одном из самых престижных физических журналов [24].

В последние годы исследования Александра Евгеньевича в области нейронауки преимущественно проводятся в контексте решения актуальных задач биомедицины, связанных с ранней диагностикой и реабилитацией различных нейродегенеративных, неврологических и психиатрических нарушений. При этом здесь его интересуют не только фундаментальные исследования, но и прикладные аспекты развития и внедрения систем поддержки принятия врачебных решений.

Это лишь основная часть направлений исследований, которые юбиляр когда-либо проводил, и в развитие каждого из них он с коллегами внес огромный вклад. Его работы активно цитируются как в нашей стране, так и за рубежом, о чем свидетельствуют высокие наукометрические показатели Александра Евгеньевича в базах данных научного цитирования. Александр Евгеньевич является автором более 15 коллективных монографий, являлся приглашенным редактором большого

числа специальных выпусков журналов и материалов научных конференций. Им опубликовано более 500 научных рецензируемых статей.

Александр Евгеньевич является членом редколлегии журналов *Chaos, Solitons & Fractals*, «Врач и информационные технологии», *Journal of Pediatric Neuroscience*, *Applied Science*, «Информационно-управляющие системы», *Russian Open Medical Journal*, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, *Digital Diagnostics* и др. Профессор Храмов является членом наблюдательного совета Международного общества «Физика и управление» (IPACS), членом Института инженеров электротехники и электроники (IEEE), Японского нейронаучного сообщества, академиком Болгарской академии наук и искусств.

Отличительной чертой исследовательского подхода Александра Евгеньевича является разработка оригинальных, часто пионерских, методов для решения поставленных задач. Например, примечательным является развитие им вейвлетного анализа для различных приложений: от задач нелинейной динамики до нейронауки. Последнее направление оказалось особенно востребованным, что привело к написанию монографии по данной теме, опубликованной в 2015 г. престижным издательством Springer [25], которая была отмечена наградой издательства как самая цитируемая книга в 2015–2019 гг. и затем была переиздана в переработанном и дополненном виде в 2021 г. Не менее важными и востребованными оказываются и развиваемые Александром Евгеньевичем подходы к анализу и моделированию сложных систем на основе теории сетей. Особенно органично данные методы дополнили инструментарий изучения головного мозга человека. Разностороннее видение Александром Евгеньевичем данных вопросов, а также современного состояния в этой области науки нашли своё отражение в примечательном обзоре по функциональным сетям головного мозга [26]. В настоящее время в области теории сетей наибольший интерес у Александра Евгеньевича вызывает перспективное направление, связанное со взаимодействиями высоких порядков между элементами сети [27] — таким образом, анализ смещается в область теории гиперграфов.

Наконец, в последние годы Александр Евгеньевич активно развивает инновационные подходы на базе методов ИИ и машинного обучения, основной целью которых является предсказание поведения динамических систем, а также эффективная диагностика по данным нейровизуализации нейродегенеративных и психиатрических заболеваний. Здесь отмечу несколько наиболее ярких примеров: применение графовой нейронной сети для диагностики большого депрессивного расстройства по функциональной сети головного мозга, восстановленной по данным фМРТ [28]; резервуарные вычисления для предсказания динамики систем на примере сетей Курамото [29] и сетей нейроподобных осцилляторов ФитцХью–Нагумо [30]; совершенствование моделей машинного обучения для диагностики эпилепсии у людей и выделения эпилептических приступов на ЭЭГ [16]; контрастное машинное обучение для диагностики расстройств аутистического спектра у детей [31]. Визионерское видение профессором Храмовым развития информационных технологий, вычислительных систем и искусственного интеллекта в медицине отражено в его недавней монографии, подготовленной совместно с академиком РАН, генеральным директором Пироговского центра, профессором, доктором медицинских наук О. Э. Карповым [32]. Особый интерес у Александра Евгеньевича вызывают вопросы интерпретируемости и объяснимости методов ИИ в задачах биомедицины.

Шло время, менялись должности Александра Евгеньевича, а иногда и места работы (за время своей научной деятельности он успел поработать в Саратовском государственном университете, Саратовском государственном техническом университете, Университете Иннополис, а в настоящее время является руководителем Балтийского центра нейротехнологий и искусственного интеллекта БФУ им. И. Канта и приглашенным ведущим ученым в лаборатории исследований тактильной коммуникации, созданной в рамках программы мегагрантов в Институте русского языка им. А. С. Пушкина), но неизменным у юбиляра остается одно — настоящая любовь к Науке, тяга к познанию и изучению неисследованного. Результатом такой самоотдачи делу



После защиты А. К. Куцем диссертации на соискание ученой степени к.ф.-м.н. в совете по специальности «Биофизика» (председатель — А. Е. Храмов) на базе БФУ им. И. Канта (декабрь 2023, Калининград, Россия). Слева направо: Е. Б. Постников, В. В. Клиньшов, А. В. Андреев, В. В. Грубов, С. А. Куркин, В. Б. Казанцев, В. А. Максименко, С. Ю. Гордлеева, А. К. Куц, В. В. Рафальский, Н. Н. Шушарина, А. Е. Храмов, А. А. Бадарин. Сзади на экране, слева направо, сверху вниз: Д. Г. Захаров, А. С. Караваяев, С. А. Лобов, М. Д. Прохоров, М. В. Иванченко

и увлеченности стало то, что к Александру Евгеньевичу всегда тянулись талантливые ученики. Первую лабораторию — физики нелинейных явлений НИИ Естественных наук Саратовского государственного университета — Александр Евгеньевич создал и возглавил уже в 2004 году. Со временем она переросла «обычную» лабораторию и эволюционировала в динамично развивающуюся научную школу, которая стабильно пополняется талантливой и мотивированной молодежью и готовит уже зрелых ученых — кандидатов и докторов наук. Так, под руководством Храмова А. Е. защитилось 17 кандидатов и 3 доктора наук, а один из учеников, Максименко В. А., был удостоен в 2020 г. престижной научной премии Президента РФ в области науки и инноваций для молодых учёных. Научная школа Храмова А. Е. была признана на самом высоком российском уровне и трижды становилась победителем конкурса по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации — в 2018, 2020 и 2022 годах.

Александр Евгеньевич — не просто наш коллега и руководитель, а Учитель, наставник, друг и просто очень хороший человек, к которому всегда можно обратиться с вопросом или просьбой и который никогда не откажет в поддержке. Своими мудрыми советами, глубокими познаниями в различных областях и бесконечным энтузиазмом он вдохновляет и мотивирует коллег и учеников на постижение новых научных высот.

Коллеги и друзья от души поздравляют Александра Евгеньевича с 50-летием и желают ему крепкого здоровья, вдохновения, новых научных идей и энергии на их реализацию, много талантливых учеников и удачи во всех начинаниях!

Список литературы

1. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Popov P. V., Rempen I. S.* Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2005. Т. 15, iss. 1. P. 013705. DOI: 10.1063/1.1857615.
2. *Dmitriev B. S., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Starodubov A. V., Trubetskov D. I., Zharkov Y. D.* First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators// *Physical Review Letters*. 2009. Т. 102, iss. 7. P. 074101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.074101.
3. *Filatov R. A., Hramov A. E., Bliokh Y. P., Koronovskii A. A., Felsteiner J.* Influence of background gas ionization on oscillations in a virtual cathode with a retarding potential // *Physics of Plasmas*. 2009. Vol. 16, iss. 3. P. 033106. DOI: 10.1063/1.3080200.
4. *Kurkin S. A., Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Microwave radiation power of relativistic electron beam with virtual cathode in the external magnetic field // *Applied physics letters*. 2013. Vol. 103, iss. 4. P. 043507. P. 122110. DOI: 10.1063/1.4816471.
5. *Kurkin S. A., Badarin A. A., Koronovskii A. A., Hramov A. E.* The development and interaction of instabilities in intense relativistic electron beams // *Physics of Plasmas*. 2015. Vol. 22, iss. 12. P. 122110. DOI: 10.1063/1.4938216.
6. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2004. Vol. 14, iss. 3. P. 603–610. DOI: 10.1063/1.1775991.
7. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Generalized synchronization: A modified system approach // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2005. Vol. 71, iss. 6. P. 067201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.067201.
8. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2 т. М.: Физматлит, 2004. 496 с.
9. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
10. *Hramov A., Koronovskii A. A., Midzyanovskaya I. S., Sitnikova E., Van Rijn C. M.* On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy // *CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2006. Vol. 16, iss. 4. P. 043111. DOI: 10.1063/1.2360505.
11. *Maksimenko V. A., Van Heukelum S., Makarov V. V., Kelderhuis J., Lüttjohann A., Koronovskii A. A., Hramov A. E., Van Luijtelaar G.* Absence seizure control by a brain computer interface // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, iss. 1. P. 2487. DOI: 10.1038/s41598-017-02626-y.
12. *Hramov A. E., Makarov V. V., Koronovskii A. A., Kurkin S. A., Gaifullin M. B., Alexeeva N. V., Alekseev K. N., Greenaway M. T., Fromhold T. M., Patanè A., Kusmartsev F. V., Maksimenko V. A., Moskalenko O. I., Balanov A. G.* Subterahertz chaos generation by coupling a superlattice to a linear resonator // *Physical review letters*. 2014. Vol. 112, iss. 11. P. 116603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.116603.
13. *Maksimenko V. A., Makarov V. V., Bera B. K., Ghosh D., Dana S. K., Goremyko M. V., Frolov N. S., Koronovskii A. A., Hramov A. E.* Excitation and suppression of chimera states by multiplexing // *Physical Review E*. 2016. Vol. 94, iss. 5. P. 052205. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205.
14. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Boccaletti S.* Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // *Physical review letters*. 2006. Vol. 97, iss. 11. P. 114101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.114101.
15. *Pitsik E., Frolov N., Hauke Kraemer K., Grubov V., Maksimenko V., Kurths J., Hramov A.* Motor execution reduces EEG signals complexity: Recurrence quantification analysis study // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020. Vol. 30, iss. 2. P. 023111. DOI: 10.1063/1.5136246.
16. *Karpov O. E., Grubov V. V., Maksimenko V. A., Kurkin S. A., Smirnov N. M., Utyashev N. P., Andrikov D. A., Shusharina N. N., Hramov A. E.* Extreme value theory inspires explainable machine learning approach for seizure detection // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12, iss. 1. P. 11474. DOI: 10.1038/s41598-022-15675-9.

17. Wang W., He C., Wang Z., Hramov A., Fan D., Yuan M., Luo X., Kurths J. Dynamic analysis of synaptic loss and synaptic compensation in the process of associative memory ability decline in Alzheimer's disease // *Applied Mathematics and Computation*. 2021. Vol. 408. P. 126372. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126372.
18. Chholak P., Niso G., Maksimenko V. A., Kurkin S. A., Frolov N. S., Pitsik E. N., Hramov A. E., Pisarchik A. N. Visual and kinesthetic modes affect motor imagery classification in untrained subjects // *Scientific reports*. 2019. Vol. 9, iss. 1. P. 9838. DOI: 10.1038/s41598-019-46310-9.
19. Pisarchik A. N., Hramov A. E. Coherence resonance in neural networks: Theory and experiments // *Physics Reports*. 2023. Vol. 1000, iss. L453–L457. P. 1–57. DOI: 10.1016/j.physrep.2022.11.004
20. Писарчик А. Н., Храмов А. Е. Стохастические процессы в нейронной сети головного мозга и их влияние на восприятие и принятие решений // *Успехи физических наук*. 2023. Т. 193, вып. 12. С. 1298–1324. DOI: 10.3367/UFNe.2022.12.039309.
21. Maksimenko V., Kuc A., Frolov N., Kurkin S., Hramov A. Effect of repetition on the behavioral and neuronal responses to ambiguous Necker cube images // *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11, iss. 1. P. 3454. DOI: 10.1038/s41598-021-82688-1.
22. Grubov V. V., Khramova M. V., Goman S., Badarin A. A., Kurkin S. A., Andrikov D. A., Pitsik E., Antipov V., Petushok E., Brusinskii N., Bukina T., Fedorov A. A., Hramov A. E. Open-loop neuroadaptive system for enhancing student's cognitive abilities in learning // *IEEE Access*. 2024. Vol. 12. P. 49034–49049. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3383847.
23. Kurkin S., Gordleeva S., Savosenkov A., Grigorev N., Smirnov N., Grubov V. V., Udoratina A., Maksimenko V., Kazantsev V., Hramov A. E. Transcranial magnetic stimulation of the dorsolateral prefrontal cortex increases posterior theta rhythm and reduces latency of motor imagery // *Sensors*. 2023. Vol. 23, iss. 10. P. 4661. DOI: 10.3390/s23104661.
24. Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N. Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // *Physics Reports*. 2021. Vol. 918. P. 1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
25. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E. *Wavelets in neuroscience*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015. 518 p.
26. Храмов А. Е., Фролов Н. С., Максименко В. А., Куркин С. А., Казанцев В. Б., Писарчик А. Н. Функциональные сети головного мозга: от восстановления связей до динамической интеграции // *Успехи физических наук*. 2021. Т. 191, №. 6. С. 614–650. DOI: 10.3367/UFNr.2020.06.038807.
27. Anwar M. S., Frolov N., Hramov A. E., Ghosh D. Self-organized bistability on globally coupled higher-order networks // *Physical Review E*. 2024. Vol. 109, iss. 1. P. 014225. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.014225.
28. Pitsik E. N., Maksimenko V. A., Kurkin S. A., Sergeev A. P., Stoyanov D., Paunova R., Kandilarova S., Simeonova D., Hramov A. E. The topology of fMRI-based networks defines the performance of a graph neural network for the classification of patients with major depressive disorder // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023. Vol. 167. P. 113041. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.113041.
29. Andreev A. V., Badarin A. A., Maksimenko V. A., Hramov A. E. Forecasting macroscopic dynamics in adaptive Kuramoto network using reservoir computing // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022. Vol. 32, no. 10. DOI: 10.1063/5.011412.
30. Hramov A. E., Kulagin N., Andreev A. V., Pisarchik A. N. Forecasting coherence resonance in a stochastic Fitzhugh–Nagumo neuron model using reservoir computing // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2024. Vol. 178. P. 114354. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.114354.
31. Kabir M. S., Kurkin S., Portnova G., Martynova O., Wang Z., Hramov A. Contrastive machine learning reveals in EEG resting-state network salient features specific to autism spectrum disorder // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2024. Vol. 185. P. 115123. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.115123.
32. Карпов О. Э., Храмов А. Е. *Информационные технологии, вычислительные системы и искусственный интеллект в медицине*. М.: ДПК Пресс, 2022. 480 с.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 537.86/530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003120
EDN: LTWRTA

Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой Часть 2. Амплитудно-фазовое приближение

А. Б. Адилова^{1,2}✉, Н. М. Рыскин^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ✉AdilovaAB@gmail.com, RyskinNM@gmail.com

Поступила в редакцию 28.02.2024, принята к публикации 26.04.2024,

опубликована онлайн 9.08.2024, опубликована 30.09.2024

Аннотация. Цель работы — развитие теории взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Учет запаздывания сигнала, распространяющегося в канале связи, принципиально необходим, в частности, при анализе синхронизации на сверхвысоких частотах, когда расстояние между генераторами не мало по сравнению с длиной волны. **Методы.** Проводится строгий бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением в амплитудно-фазовом приближении. Результаты бифуркационного анализа сопоставляются с результатами численного моделирования системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. **Результаты.** Построена полная бифуркационная картина взаимной синхронизации на плоскости «частотная расстройка — параметр связи». Показано, что в случае малых расстройек и слабой связи с увеличением параметра связи неподвижные точки, которые соответствуют режимам с доминированием одного из генераторов, сливаются с седловыми неподвижными точками и исчезают. В случае больших расстройек одна из таких точек либо исчезает, либо теряет устойчивость в результате обратной (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа. Другая из этих точек остается устойчивой при любых значениях параметра связи, причем амплитуды колебаний обоих осцилляторов постепенно сравниваются, а разность фаз стремится к нулю, то есть режим колебаний с доминированием одного из осцилляторов постепенно трансформируется в режим нулевой синхронизации. Установлено, что в системе двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, при увеличении параметра связи происходит трансформация бассейна притяжения устойчивой нулевой неподвижной точки, в результате которой, если в начальный момент времени колебания генераторов близки к противофазным, колебания затухают при любых начальных амплитудах. **Заключение.** Изучена картина синхронизации в системе генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Обнаружено, что помимо режимов взаимной синхронизации с примерно равными амплитудами колебаний, возможны также стационарные режимы с подавлением колебаний одного генератора другим. Изучены бифуркационные механизмы появления и исчезновения мультистабильности в системе.

Ключевые слова: связанные генераторы, автоколебательные системы с жестким возбуждением, синхронизация, запаздывание, амплитудно-фазовое приближение.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-00109.

Для цитирования: Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Часть 2. Амплитудно-фазовое приближение // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 574–588. DOI: 10.18500/0869-6632-003120. EDN: LTWRTA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay

Part 2. Amplitude-phase approximation

A. B. Adilova^{1,2}✉, N. M. Ryskin^{1,2}

¹Saratov State University, Russia

²Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

E-mail: ✉ AdilovaAB@gmail.com, RyskinNM@gmail.com

Received 28.02.2024, accepted 26.04.2024, available online 9.08.2024, published 30.09.2024

Abstract. *Aim of this work* is to develop the theory of mutual synchronization of two oscillators with hard excitation associated with a delay. Taking into account the delay of a coupling signal is necessary, in particular, when analyzing synchronization at microwave frequencies, when the distance between the oscillators is large compared to the wavelength. *Methods.* A bifurcation analysis of the mutual synchronization of two generators with hard excitation in the amplitude-phase approximation is carried out. The results of the bifurcation analysis are compared with the results of numerical simulation of the system of differential equations with delay. *Results.* A complete bifurcation pattern of mutual synchronization on the plane “frequency mismatch — coupling parameter” is presented. In the case of small mismatch and weak coupling, the fixed points, which correspond to modes with dominance of one of the oscillators, merge with saddle fixed points and disappear when the coupling parameter increases. In the case of large mismatch, one of these points either vanishes or loses stability as a result of a subcritical Andronov–Hopf bifurcation. The other of these points remains stable at any values of the coupling parameter, and the oscillation amplitudes of both oscillators gradually equalize and the phase difference tends to zero, i.e., the oscillation mode with dominance of one of the oscillators gradually transforms into the in-phase synchronization mode. It has been found that with an increase in the coupling parameter, a transformation of the basin of attraction of a stable zero fixed point occurs. As a result of this transformation, if at the initial moment of time the oscillations of the generators are close to antiphase, the oscillations decay at any initial amplitudes. *Conclusion.* The synchronization pattern in the system of delay-coupled oscillators with hard excitation has been studied. It was discovered that in addition to mutual synchronization modes with approximately equal oscillation amplitudes, stationary modes with suppression of oscillations of one generator by another are also possible. The bifurcation mechanisms of the appearance and disappearance of multistability in the system have been examined.

Keywords: coupled generators, self-oscillating systems with hard excitation, synchronization, delay, amplitude-phase approximation.

Acknowledgements. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 22-72-00109.

For citation: Adilova AB, Ryskin NM. Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay. Part 2. Amplitude-phase approximation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(5):574–588. DOI: 10.18500/0869-6632-003120

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование синхронизации в ансамблях связанных автоколебательных систем является актуальной задачей радиофизики и электроники. Как известно, взаимная синхронизация связанных сверхвысокочастотных (СВЧ) генераторов широко применяется в системах сложения мощностей [1]. Отметим, что при изучении синхронизации связанных СВЧ-генераторов принципиальную роль играет запаздывание, которое обусловлено конечным временем распространения сигнала от одного генератора к другому. Запаздывание существенно влияет на картину синхронизации связанных генераторов [2, 3]. Интерес вызывает задача о взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Поскольку генератор с жестким возбуждением демонстрирует бистабильность, картина синхронизации в такой системе значительно усложняется по сравнению со связанными системами с мягким самовозбуждением.

В частности, появляется мультистабильность синхронных режимов. Подобное поведение характерно и для задач о вынужденной синхронизации генераторов с жестким возбуждением (см., например, [4–8]).

В первой части данной работы [9] анализ синхронизации системы двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, был проведен в фазовом приближении, которое справедливо при слабой связи и при малых расстройках. В этом случае связь практически не изменяет амплитуды колебаний взаимодействующих подсистем, так что можно ограничиться исключительно анализом динамики разности фаз, что существенно упрощает рассмотрение. Синхронизация наступает в результате седлоузловой бифуркации (такой механизм обычно называют частотным или фазовым захватом, см., например, [10, 11]). В [9] были получены обобщенные уравнения Адлера, из которых следуют простые аналитические формулы для условий седлоузловых бифуркаций. Найдены условия, при которых связь является чисто консервативной или чисто диссипативной, что позволило проследить переход от одного типа связи к другому при изменении управляющих параметров.

Однако фазовое приближение дает лишь упрощенное описание процессов синхронизации в области малых расстройок и, соответственно, слабой связи. В данной части статьи представлено построение более полной картины синхронизации в рамках системы амплитудно-фазовых уравнений.

1. Основные уравнения и классификация неподвижных точек

В [9] была введена в рассмотрение модель генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, которая в случае, когда время задержки мало по сравнению с характерным временем установления колебаний, описывается системой уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= \left(\sigma + (1 + ib) |A_1|^2 - |A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= \left(\sigma + (1 + ib) |A_2|^2 - |A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь σ — параметр возбуждения, b — параметр неизохронности, Δ — нормированная расстройка собственных частот, ρ — коэффициент связи, ψ — набег фазы сигнала, распространяющегося в канале связи. Режим жесткого возбуждения реализуется при $-1/4 < \sigma < 0$.

Несмотря на то, что (1) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в ней опосредованно учитываются эффекты запаздывания, поскольку набег фазы ψ определяется временем задержки. Условия применимости данного приближения более подробно обсуждаются в [12].

Разделив систему (1) на уравнения для вещественных амплитуд и фаз, полагая $A_{1,2} = R_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$, можно в итоге прийти к системе трех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= (\sigma + R_1^2 - R_1^4) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi), \\ \dot{R}_2 &= (\sigma + R_2^2 - R_2^4) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз, точка сверху означает дифференцирование по времени t . Отметим, что близкие по структуре уравнения возникают в задачах, где рассматриваются связанные осцилляторы различной (физической, химической, биологической) природы [6, 13–15].

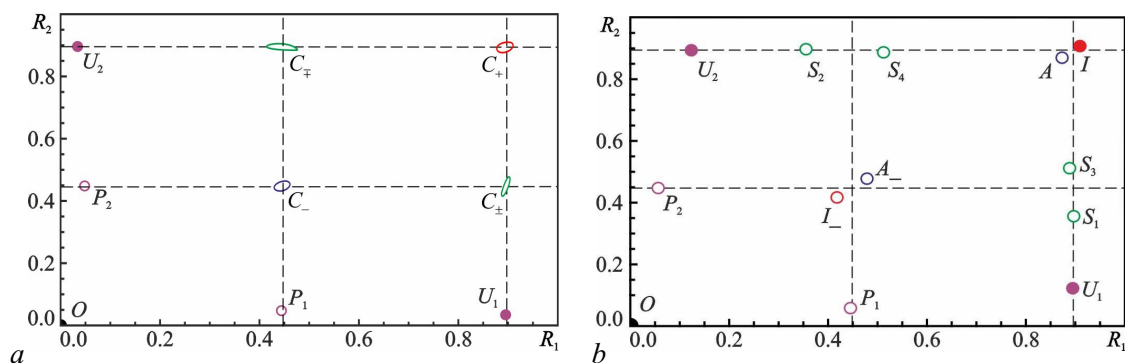


Рис. 1. Проекция неподвижных точек и предельных циклов системы (2) на плоскость R_1, R_2 при $\sigma = -0.16, b = 0, \psi = 0.2\pi, \rho = 0.02, \Delta = 0.5$ (a) и $\Delta = 0$ (b) (цвет онлайн)

Fig. 1. Projection of the fixed points and limit cycles of the system (2) onto the R_1, R_2 plane at $\sigma = -0.16, b = 0, \psi = 0.2\pi, \rho = 0.02, \Delta = 0.5$ (a) и $\Delta = 0$ (b) (color online)

Перейдем к анализу неподвижных точек (состояний равновесия) данной системы. Как известно, в случае отсутствия связи (автономные генераторы) решения системы (2) имеют вид

$$R_{1,2}^2 = R_{\pm}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sigma}}{2}. \quad (3)$$

Решение R_+ является устойчивым, а R_- — неустойчивым [10]. Помимо этого, при $\sigma < 0$ устойчивым является также нулевое решение $R_{1,2} = 0$. Выберем параметр возбуждения равным $\sigma = -0.16$, так чтобы $R_+ = \sqrt{0.8} \approx 0.894, R_- = \sqrt{0.2} \approx 0.447$.

При введении слабой связи в фазовом пространстве образуются четыре предельных цикла. На рис. 1, a приведен пример проекции неподвижных точек и циклов на плоскость R_1, R_2 , построенный для случая $\Delta = 0.5$ и малой связи $\rho = 0.02$. Горизонтальные и вертикальные штриховые линии соответствуют значениям $R_{1,2} = R_{\pm}$. Как видно из рис. 1, a, имеется цикл с примерно равными амплитудами $R_{1,2} = R_+$, который будем обозначать C_+ и цикл C_- с амплитудами примерно равными $R_{1,2} = R_-$. Первый из этих циклов является устойчивым, второй — неустойчивым. Существует также еще два неустойчивых цикла, для которых $R_1 \approx R_+, R_2 \approx R_-$ и наоборот. Их будем обозначать C_{\pm} и C_{\mp} соответственно.

Как и в случае изолированных генераторов, существует устойчивое нулевое решение O . Помимо этого, имеется еще четыре неподвижных точки. Для первой пары таких точек амплитуда одного генератора близка к R_+ , а второго — к нулю, и наоборот. Будем обозначать их $U_{1,2}$ соответственно. Данные точки будут устойчивыми, поскольку, как уже отмечалось выше, R_+ — устойчивое решение в случае изолированных генераторов. Для второй пары точек, которые будем обозначать $P_{1,2}$, амплитуда одного генератора близка к нулю, а второго — к R_- , и наоборот. Эти точки, очевидно, будут неустойчивыми, поскольку R_- — неустойчивое состояние. Таким образом, в фазовом пространстве существует две устойчивые точки и устойчивый цикл, отвечающий режиму биений.

При уменьшении расстройки между генераторами на циклах $C_{\mp}, C_{\pm}, C_-, C_+$ происходят седлоузловые бифуркации, в результате которых последовательно рождаются пары точек S_2 и S_4, S_1 и S_3, I_- и A_-, I и A соответственно (см. рис. 1, b)¹. На рисунке темными кружками отмечены устойчивые точки, светлыми — неустойчивые. Следуя [9], точки A, A_-, I и I_- будем называть

¹Более строго, в данном случае имеет место исчезновение предельного цикла и рождение пары состояний равновесия в результате бифуркации петли сепаратрисы седлоузла [16].

Таблица. Классификация неподвижных точек системы (2)

Table. Classification of fixed points of the system (2)

	$R_1 = 0$	$R_1 = R_-$	$R_1 = R_+$
$R_2 = 0$	O	P_1	U_1
$R_2 = R_-$	P_2	I_-, A_-	$S_{1,3}$
$R_2 = R_+$	U_2	$S_{2,4}$	I, A

составим Таблицу, в которой в первой строке приведены значения амплитуды первого генератора в отсутствие связи, в первом столбце — значения амплитуды второго, а в остальных ячейках Таблицы показаны обозначения для неподвижных точек системы (2), которые возникают при ненулевой связи.

Отметим, что при $\Delta = 0$ для симметричных точек I, A, I_-, A_- значения R_1 и R_2 равны, в то время как пары несимметричных точек $U_{1,2}, P_{1,2}, S_{1,2}$ и $S_{3,4}$ инвариантны относительно замены

$$(R_1, R_2, \varphi) \rightarrow (R_2, R_1, -\varphi).$$

2. Бифуркационный анализ

Бифуркационный анализ системы (2) в амплитудно-фазовом приближении был проведен при помощи пакета XPPAUT [17]. Как показано в работах [2, 3, 9], картина синхронизации во многом определяется набегом фазы в канале связи ψ . В зависимости от ψ связь может носить либо диссипативный, либо консервативный характер. В случае, когда доминирует диссипативная связь, синхронизация возможна только на синфазной моде. Когда доминирует консервативная связь, в системе появляется фазовая бистабильность, то есть появляются области противофазной синхронизации. Для начала будем считать осцилляторы изохронными ($b = 0$) и рассмотрим ситуацию, когда набег фазы $\psi = 0.2\pi$. В этом случае связь носит по преимуществу диссипативный характер [2–4].

На рис. 2 построены линии седлоузловых бифуркаций SN и бифуркаций Андронова–Хопфа AH на плоскости параметров Δ, ρ .

Как было показано в [9], в системе связанных генераторов с жестким возбуждением наряду с режимом синхронизации, в котором амплитуды колебаний в обеих подсистемах примерно равны (ему в данном случае отвечает неподвижная точка I на рис. 1, б), возможны также синхронные режимы, в которых амплитуда одного генератора значительно больше, чем другого (неподвижные точки $U_{1,2}$ на рис. 1, б). Соответственно, на рис. 2 различными цветами закрашены области плоскости параметров, где система (2) имеет одно (голубой), два (розовый) или три (фиолетовый) устойчивых решения. Белым цветом показана область биений, где режим синхронизации отсутствует.

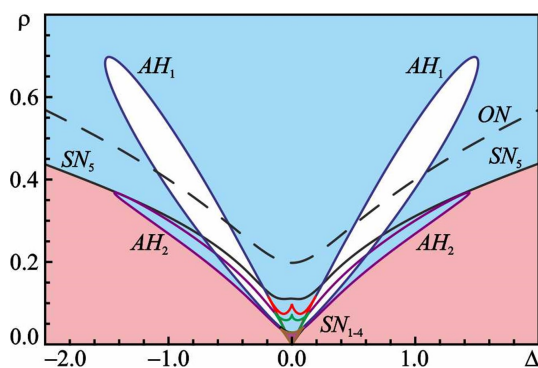


Рис. 2. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16, \psi = 0.2\pi, b = 0$. Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами (цвет онлайн)

Fig. 2. Boundaries of saddle-node bifurcations (SN) and Andronov–Hopf bifurcations (AH) on the parameter plane Δ, ρ at $\sigma = -0.16, \psi = 0.2\pi, b = 0$. Domains of stability of synchronous modes are shaded in different colors (color online)

Из рис. 2 видно, что области устойчивости синхронных режимов имеют сложную структуру, которая значительно отличается от случая связанных генераторов с мягким самовозбуждением, рассмотренного в работе [3]. В частности, области биений оказываются замкнутыми. Отметим, что похожая структура на плоскости параметров наблюдалась в задаче о синхронизации двухмодовой автоколебательной системы внешним сигналом [18].

Далее рассмотрим более подробно случаи малых и больших расстроек.

2.1. Случай малых расстроек. Рассмотрим вначале случай малых расстроек, когда имеют место седлоузловые бифуркации, которые были подробно проанализированы в первой части настоящей работы [9]. Динамику системы наглядно иллюстрируют однопараметрические бифуркационные диаграммы, построенные для различных значений расстройки собственных частот (рис. 3). Сплошными линиями показаны устойчивые состояния, штриховыми — неустойчивые. Обозначения особых точек введены в соответствии с Таблицей.

На рис. 3, а приведена бифуркационная диаграмма для амплитуды колебаний первого генератора R_1 в случае $\Delta = 0$. Видно, что существует пять седлоузловых бифуркаций, соответствующих слиянию разных неподвижных точек. При $\rho \approx 0.028$ происходят две седлоузловые бифуркации, в результате которых устойчивые точки U_1 и U_2 сливаются с седловыми точками S_1 и S_2 , соответственно и исчезают. Таким образом, вместо четырех устойчивых режимов остаются два: режим синхронизации на синфазной моде (точка I) и точка O в начале координат.

При $\rho \approx 0.071$ неустойчивые точки P_1 и P_2 сливаются с точкой I_- . Далее эта точка при $\rho \approx 0.197$ сливается с точкой O в начале координат, которая теряет устойчивость. После этого единственным устойчивым режимом остается синфазная синхронизация. Кроме того, при $\rho \approx 0.098$ точки S_3 и S_4 сливаются с точкой A , а затем при $\rho \approx 0.111$ — с точкой A_- .

Условие потери устойчивости точкой O нетрудно найти аналитически. Проводя стандартную процедуру линеаризации уравнений (1) относительно малых возмущений, приходим к характеристическому уравнению, которое имеет вид

$$(p - \sigma)^2 + (\Delta/2)^2 = \rho^2 e^{-2i\psi}. \quad (4)$$

Поскольку на границе потери устойчивости корень характеристического уравнения является чисто мнимым, $p = i\omega$, разделяя (4) на вещественную и мнимую части и исключая из полученных соотношений ω , получим выражение, определяющее границу устойчивости на плоскости Δ, ρ :

$$\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 = \rho^2 \cos 2\psi + \frac{\rho^4 \sin^2 2\psi}{4\sigma^2} - \sigma^2. \quad (5)$$

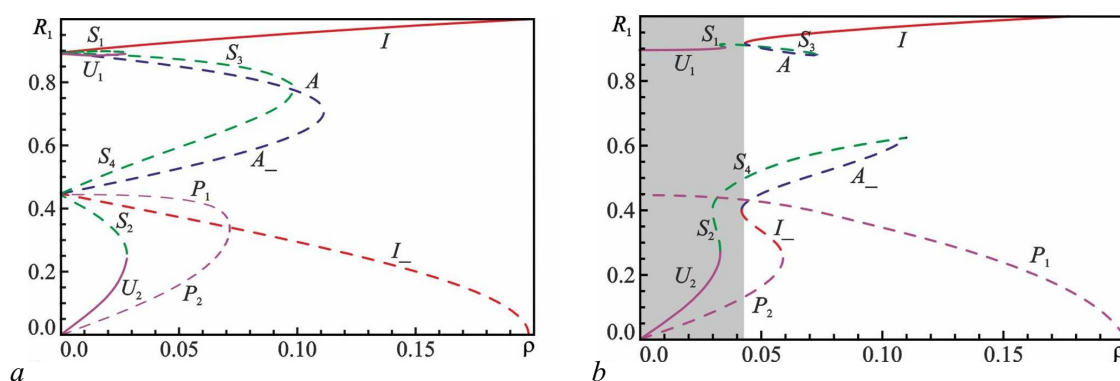


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы при $\sigma = -0.16$, $b = 0$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0$ (а) и $\Delta = 0.07$ (б). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными — неустойчивые (цвет онлайн)

Fig. 3. Bifurcation diagrams at $\sigma = -0.16$, $b = 0$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0$ (a) and $\Delta = 0.07$ (b). Stable points are plotted by solid lines, unstable points — dotted lines (color online)

На рис. 2 эта граница показана штриховой линией ON .

Из полученного соотношения видно, при $\psi \rightarrow \pi/2$, то есть когда связь приобретает чисто реактивный характер, граница устойчивости смещается в область больших значений ρ . При чисто реактивной связи нулевое решение всегда устойчиво. Действительно, при $\Delta = 0$ из (5) нетрудно найти

$$\rho = |\sigma| \frac{\sqrt{2(1 - \cos 2\psi)}}{\sin 2\psi}, \quad (6)$$

откуда видно, что $\rho \rightarrow \infty$ при $\psi = \pi/2$. При $\psi = 0$, когда связь чисто диссипативная, получаем $\rho = |\sigma|$.

Обсудим теперь особенности синхронизации при ненулевой расстройке. На рис. 3, *b* построена бифуркационная диаграмма для $\Delta = 0.07$. Видны некоторые отличия от случая $\Delta = 0$. Прежде всего, как уже отмечалось выше, при малых значениях ρ в фазовом пространстве существует четыре предельных цикла, один из которых устойчив (см. рис. 1, *a*). При увеличении связи происходят четыре седлоузловые бифуркации, в результате которых последовательно рождаются пары точек: S_2 и S_4 ; S_1 и S_3 ; I_- и A_- ; I и A . При дальнейшем увеличении параметра связи видно, что вместо тройного слияния точек $P_{1,2}$ и I_- (см. рис. 3, *a*) происходит слияние точек I_- и P_2 , а точка P_1 сливается с точкой O при $\rho \approx 0.21$ (при $\Delta < 0$, наоборот, точка I_- сливается с P_1 , а O — с P_2). Аналогично вместо бифуркации, в результате которой одновременно сливаются точки S_3, S_4 и A , при $\rho \approx 0.073$ сливаются точки S_3 и A , а при $\rho \approx 0.109$ — точки S_4 и A_- .

На рис. 4 в увеличенном масштабе построена наиболее сложно устроенная часть плоскости параметров рис. 2, соответствующая малым значениям расстройки и связи. На этом рисунке обозначено, какие точки рождаются или исчезают при тех или иных седлоузловых бифуркациях.

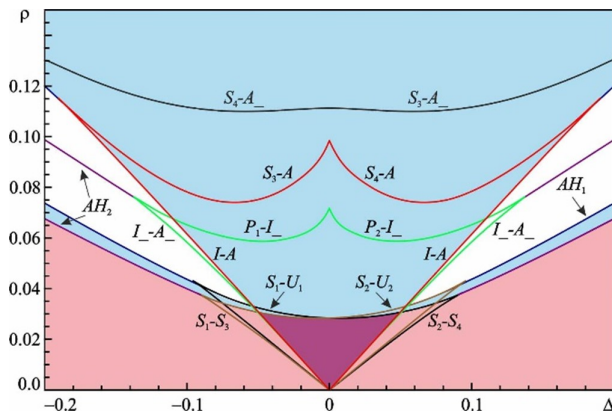


Рис. 4. Увеличенный фрагмент плоскости параметров Δ, ρ в области малых расстройек. Параметры те же, что на рис. 2 (цвет онлайн)

Fig. 4. Enlarged fragment of the Δ, ρ parameter plane in the domain of small mismatch. The other parameters are the same as in 2 (color online)

Области устойчивости точек $U_{1,2}$, то есть области устойчивости режимов, в которых один из генераторов доминирует, при малых расстройках ограничены сверху линиями, на которых происходит слияние точек $S_1 - U_1$ и $S_2 - U_2$, а при больших расстройках — линиями бифуркаций Андронова–Хопфа AH_2 . Эти линии заканчиваются на линиях седлоузловых бифуркаций $I_- - A_-$ (сверху), $S_1 - S_3$ и $S_2 - S_4$ (снизу слева и справа соответственно). Линии бифуркаций Андронова–Хопфа AH_1 заканчиваются на линиях бифуркаций $I - A$ (сверху), $S_1 - U_1$ и $S_2 - U_2$ (снизу слева и справа соответственно). В точках коразмерности два, где соединяются линии AH_1 и $I - A$, имеет место бифуркация Богданова–Тakens [10, 19]. Ситуация в точках соединения линий AH_1 и $S_1 - S_3$ и $S_2 - S_4$ требует более детального изучения.

2.2. Случай больших расстройек. Теперь обратимся к случаю больших расстройек. На рис. 5 приведены бифуркационные диаграммы для амплитуд колебаний первого R_1 и второго R_2 генераторов в случае $\Delta = 1.8$. Как уже отмечалось выше (см. рис. 1), при слабой связи существует два устойчивых состояния $U_{1,2}$, две неустойчивые точки $P_{1,2}$, устойчивое нулевое решение O и четыре предельных цикла. Области существования цикла C_+ показаны на рис. 5 серым цветом, области существования циклов C_- , C_{\pm} и C_{\mp} — штриховкой. Инвариантные многообразия неустойчивых циклов C_- , C_{\pm} и C_{\mp} разграничивают бассейны притяжения четырех существующих аттракторов

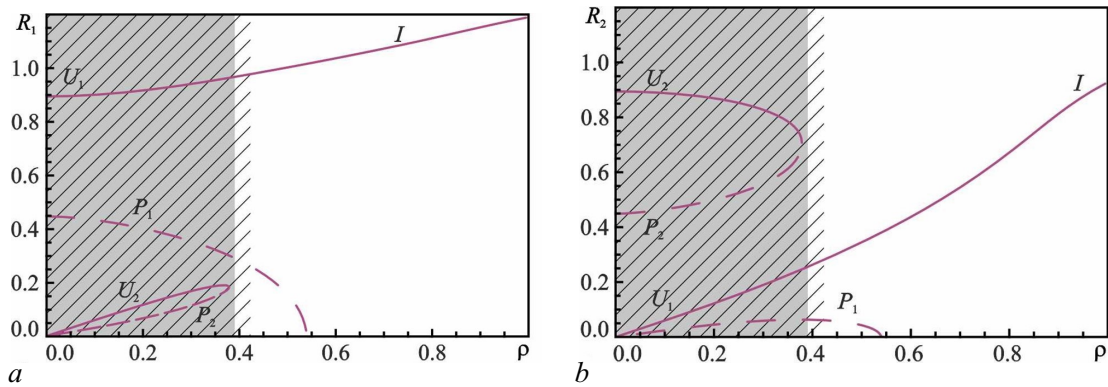


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы для амплитуды первого (а) и второго (б) генераторов при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $\Delta = 1.8$. Серым показана область существования устойчивого предельного цикла, штриховкой – неустойчивых (цвет онлайн)

Fig. 5. Bifurcation diagrams for the amplitude of the first (a) and second (b) oscillators at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ and $\Delta = 1.8$. The domain of existence of a stable limit cycle is plotted in gray, and unstable ones are hatched (color online)

(точки O , $U_{1,2}$ и цикл C_+). Анализ показывает, что при увеличении ρ вначале (при $\rho \approx 0.39$) происходит слияние циклов C_+ и C_{\pm} , а затем – слияние циклов C_- и C_{\mp} .

Как видно из бифуркационных диаграмм, при $\rho \approx 0.381$ режим, когда второй генератор доминирует над первым, исчезает в результате слияния точек U_2 и P_2 . Что касается режима, в котором доминирует первый генератор (точка U_1), то он сохраняет устойчивость при любых значениях параметра связи. Однако стоит отметить, что с увеличением ρ амплитуда колебаний второго генератора R_2 увеличивается и становится примерно такой же, как R_1 , а разность фаз при этом приближается к нулю. Таким образом, при больших расстройках режим с сильно различающимися амплитудами колебаний плавно переходит в режим синфазной синхронизации и существует при любом значении параметра связи.

Более сложное поведение имеет место при меньших значениях расстройки, когда, двигаясь вверх по плоскости параметров Δ, ρ , мы пересекаем линии бифуркаций Андронова–Хопфа. На рис. 6 приведены бифуркационные диаграммы для случая $\Delta = 1.0$. При слабой связи ситуация такая же, как и при $\Delta = 1.8$: в фазовом пространстве существует пять неподвижных точек

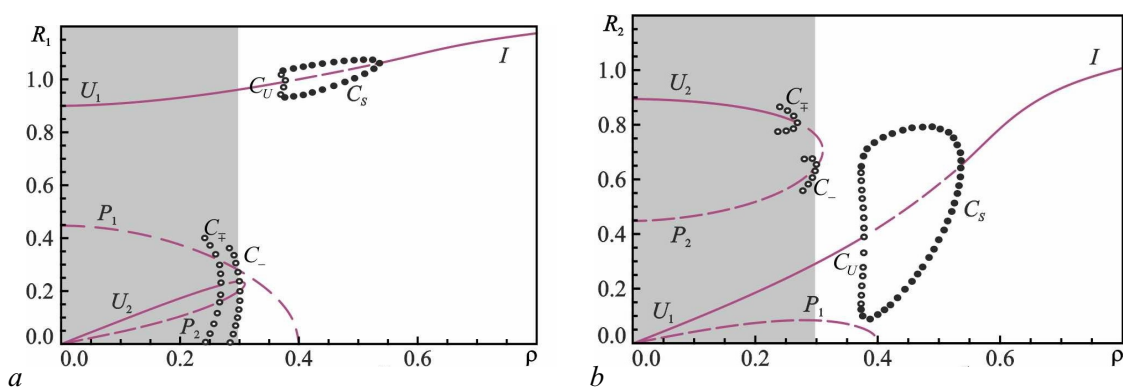


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы для первого (а) и второго (б) генераторов при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $\Delta = 1.0$. Серым закрашена область существования устойчивых предельных циклов (цвет онлайн)

Fig. 6. Bifurcation diagrams for the first (a) and second (b) oscillators at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ and $\Delta = 1.0$. The domain of existence of stable limit cycles is shaded in gray (color online)

и четыре предельных цикла. Отличие состоит в том, что с увеличением ρ циклы C_{\mp} и C_{-} уменьшаются в размерах и стягиваются к точкам U_2 и P_2 . На рис. 6 они показаны кружками². При $\rho \approx 0.269$ происходит обратная бифуркация Андронова–Хопфа: цикл C_{\mp} сливается с точкой U_2 , в результате чего она теряет устойчивость (линия AH_2 на рис. 2). Неустойчивый цикл C_{-} сливается с точкой P_2 при $\rho \approx 0.301$. Что касается циклов C_{+} и C_{\mp} , то они сливаются друг с другом и исчезают так же, как и при $\Delta = 1.8$. После этого устойчивыми остаются только режим синхронизации, в котором доминирует первый осциллятор (точка U_1), и режим отсутствия колебаний (точка O).

Однако при дальнейшем увеличении происходит бифуркация образования еще одной пары предельных циклов из сгущения фазовых траекторий ($\rho \approx 0.327$). Один из этих циклов является устойчивым, другой — неустойчивым. Будем обозначать их C_s и C_S соответственно. Когда мы пересекаем линию AH_1 на рис. 2 ($\rho \approx 0.377$), цикл C_U в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа сливается с точкой U_1 и она теряет устойчивость. Однако устойчивым остается режим биений, которому соответствует цикл C_S . Этот цикл при $\rho \approx 0.536$ стягивается к точке U_1 , в результате чего она снова становится устойчивой. Таким образом, при обратном движении по параметру наблюдается нормальная (суперкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа.

3. Численное моделирование

Результаты, полученные в рамках бифуркационного анализа, были проверены путем непосредственного численного интегрирования системы уравнений (2). Рассмотрим случай малых расстройек, который представляет наибольший интерес. Выберем значения параметров, при которых в фазовом пространстве имеется четыре устойчивые точки. На рис. 7 приведены примеры зависимостей амплитуд первого и второго генераторов от времени. Если обе начальные амплитуды достаточно велики (превышают R_{-}), в системе установится синфазный режим синхронизации (рис. 7, а). Этому режиму соответствует устойчивая точка I . Если начальная амплитуда одного из генераторов превышает значение R_{-} , а у другого — нет, будет происходить подавление колебаний одного из генераторов и установление режимов, которым соответствуют устойчивые точки U_1 или U_2 . Данную ситуацию иллюстрируют рис. 7, б, с. Если же начальная амплитуда обоих генераторов меньше, чем R_{-} , происходит затухание колебаний (см. рис. 7, д).

Как было показано выше (см. рис. 3, б), при увеличении параметра связи происходят седлоузловые бифуркации, в результате которых исчезают точки $U_{1,2}$. Однако следует отметить еще одно важное обстоятельство. При дальнейшем увеличении ρ происходит седлоузловая бифуркация, в результате которой сливаются точки A_{-} и S_3 или S_4 (линии $A_{-} - S_3$ и $A_{-} - S_4$ на рис. 4). При этом бассейн притяжения точки I трансформируется таким образом, что при начальной разности фаз $\varphi(0) \approx \pi$ фазовая траектория стремится к точке O , независимо от того, каковы были значения начальных амплитуд. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 8. Если начальная разность фаз является неблагоприятной, даже при начальных значениях амплитуд $R_{1,2}(0) > R_{-}$, сигнал одного генератора начинает поступать в колебательную систему другого в противофазе, в результате чего происходит полное взаимное подавление колебаний обоих генераторов (см. рис. 8, а). Однако при небольшом изменении начальной разности фаз устанавливается режим взаимной синхронизации (см. рис. 8, б). Таким образом, в данном случае мы имеем специфический случай эффекта гибели колебаний, который, в отличие от известного (см., например, [11, 19]), обусловлен не увеличением эффективной диссипации, а изменением структуры бассейнов притяжения. Аналогичное поведение

²Программный пакет XPPAUT позволяет построить максимальные и минимальные значения переменных, отвечающие предельному циклу. Поскольку мы анализируем уравнения (2), где в качестве одной из переменных выступает разность фаз φ , на бифуркационные диаграммы можно нанести только стягиваемые циклы, то есть такие, для которых φ изменяется в конечных пределах.

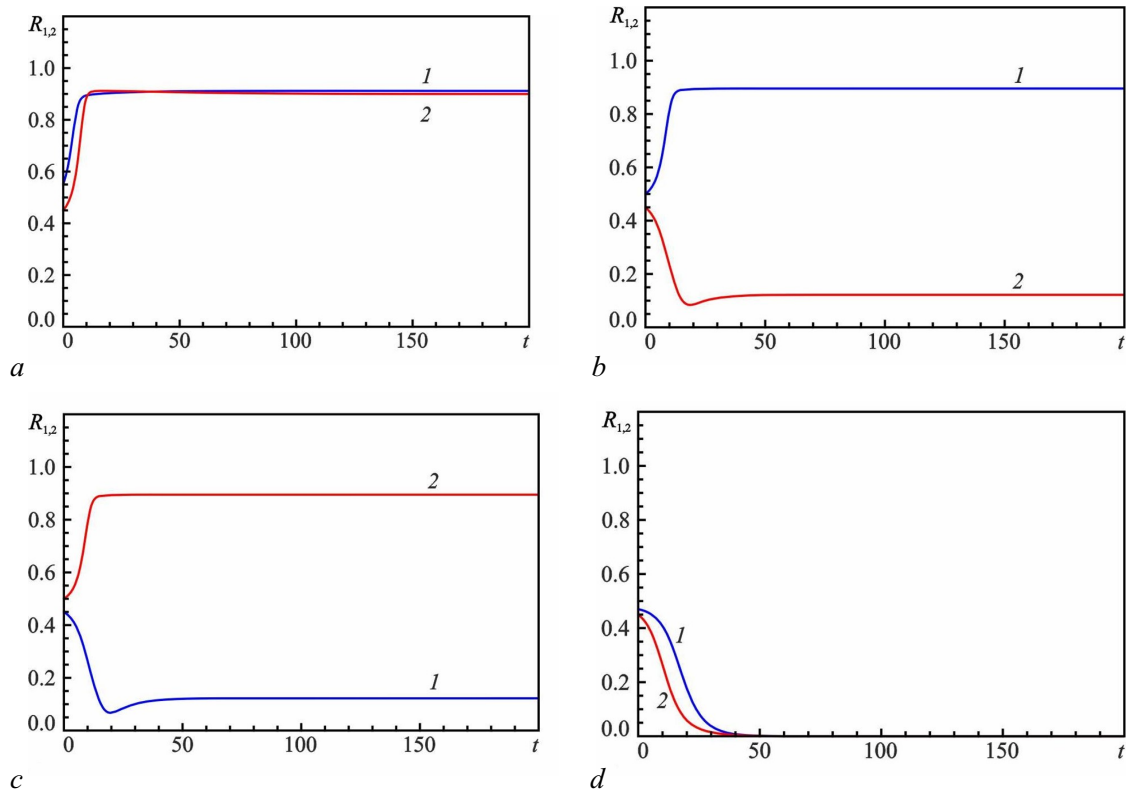


Рис. 7. Зависимости амплитуд первого и второго генератора от времени при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\rho = 0.02$, $\Delta = 0.02$ и различных начальных условиях: (a) $R_{1,2} > R_1$ – режим взаимной синхронизации; (b, c) $R_1 > R_-, R_2 < R_-$, (c) $R_1 < R_-, R_2 > R_-$ – режимы подавления одного генератора другим; (d) $R_{1,2} < R_-$ – затухание колебаний (цвет онлайн)

Fig. 7. Time dependences of the amplitudes of the first and second oscillators at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\rho = 0.02$, $\Delta = 0.02$ and different initial conditions: (a) $R_{1,2} > R_1$ – mutual synchronization; (b, c) $R_1 > R_-, R_2 < R_-$, (c) $R_1 < R_-, R_2 > R_-$ – suppression of one generator by another; (d) $R_{1,2} < R_-$ – oscillation damping (color online)

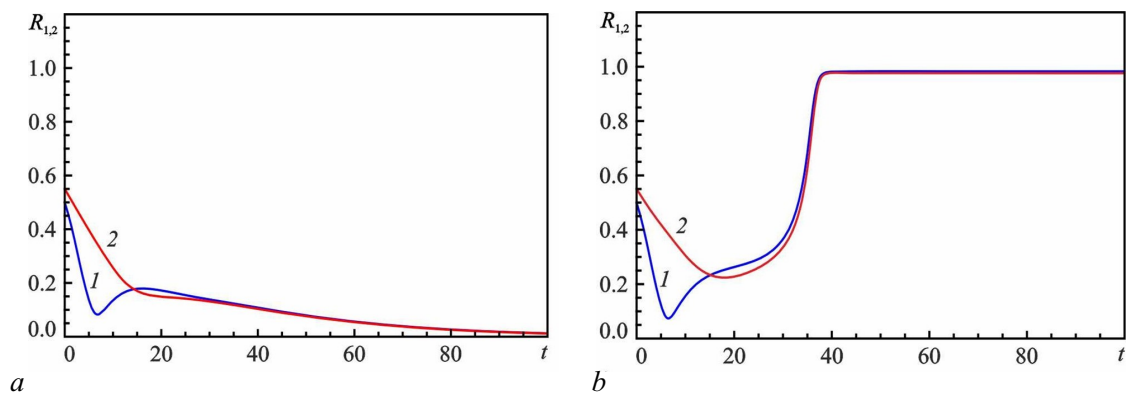


Рис. 8. Зависимости амплитуд первого и второго генератора от времени при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0.02$, $\rho = 0.15$ и различных начальных условиях: (a) $R_1(0) = 0.5$, $R_2(0) = 0.55$, $\varphi(0) = 0.98\pi$ – гибель колебаний; (b) начальные амплитуды те же, а $\varphi(0) = 0.97\pi$ – режим взаимной синхронизации (цвет онлайн)

Fig. 8. Time dependences of the amplitudes of the first and second oscillators at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0.02$, $\rho = 0.15$ and different initial conditions: (a) $R_1(0) = 0.5$, $R_2(0) = 0.55$, $\varphi(0) = 0.98\pi$ – oscillation death; (b) initial amplitudes are the same and $\varphi(0) = 0.97\pi$ – mutual synchronization (color online)

ние наблюдалось и в случае вынужденной синхронизации генератора с жестким возбуждением внешним сигналом [7].

Ясно, что с практической точки зрения зависимость от начальной разности фаз, которая, вообще говоря, является случайной величиной — явление нежелательное. Поэтому целесообразно выбирать параметры таким образом, чтобы находиться ниже границы седлоузловой бифуркации, в результате которой сливаются точки A и S_3 или S_4 (см. рис. 4), или же в области, где нулевое состояние уже потеряло свою устойчивость.

4. Влияние неизохронности

Выше рассматривался случай, когда осцилляторы являются изохронными ($b = 0$). Рассмотрим, какое влияние на картину синхронизации оказывает неизохронность, выбрав для определенности значение $b = 0.1$. На рис. 9, *a* построены границы седлоузловых бифуркаций и бифуркаций Андронова–Хопфа на плоскости параметров для этого случая.

В целом представленная картина синхронизации аналогична изохронному случаю, за исключением того, что границы седлоузловых бифуркаций SN_3 и SN_4 выходят не из начала координат, а из точек $\Delta = \pm\sqrt{1+4\sigma}$, как было показано в работе [9]. На рис. 9, *b* приведен увеличенный фрагмент в области малых расстройк.

Отметим, что границы седлоузловых бифуркаций SN_{1-4} достаточно хорошо согласуются с результатами анализа в фазовом приближении [9], что иллюстрирует рис. 10.

Когда параметр ψ принимает такие значения, что инерционная связь становится существенной, возникает устойчивый режим противофазной синхронизации с примерно равными амплитудами. Это подтверждает рис. 11, на котором построены области устойчивости синхронных режимов на плоскости параметров Δ, ρ в случае $\psi = 0.4\pi$. Видно, что появляется область противофазной синхронизации, которая локализована в области малых расстройк. Она в основном ограничена линией бифуркации Андронова–Хопфа AH_3 . Бифуркационный механизм появления и исчезновения режима противофазной синхронизации аналогичен описанному в [3] для связанных генераторов с мягким самовозбуждением, поэтому останавливаться подробно на его анализе мы не будем.

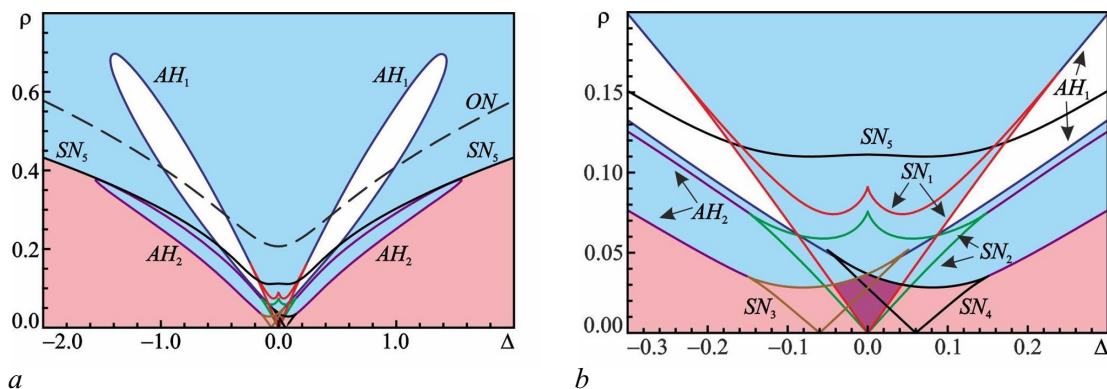


Рис. 9. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $b = 0.1$ (*a*) и ее увеличенный фрагмент в области малых расстройк (*b*). Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами (цвет онлайн)

Fig. 9. Boundaries of saddle-node bifurcations (SN) and Andronov–Hopf bifurcations (AH) on the parameter plane Δ, ρ at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ and $b = 0.1$ (*a*) and its enlarged fragment in the domain of small mismatch (*b*). The stability domains of synchronous modes are shaded in different colors (color online)

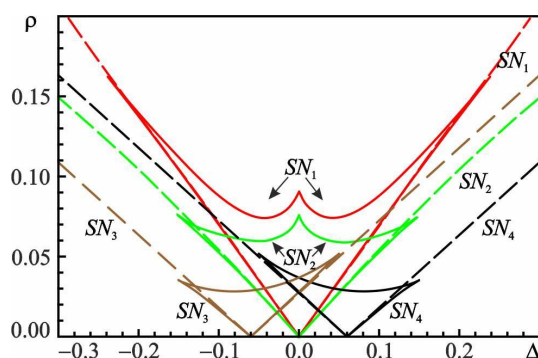


Рис. 10. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16, \psi = 0.2\pi$ и $b = 0.1$. Сплошными линиями показаны результаты бифуркационного анализа с помощью XPPAUT, штриховыми – результаты анализа в рамках фазового приближения [9] (цвет онлайн)

Fig. 10. Boundaries of saddle-node bifurcations (SN) on the parameter plane Δ, ρ at $\sigma = -0.16, \psi = 0.2\pi$ and $b = 0.1$. The results of bifurcation analysis with XPPAUT and analysis within the phase approximation [9] are plotted by solid and dashed lines, respectively (color online)

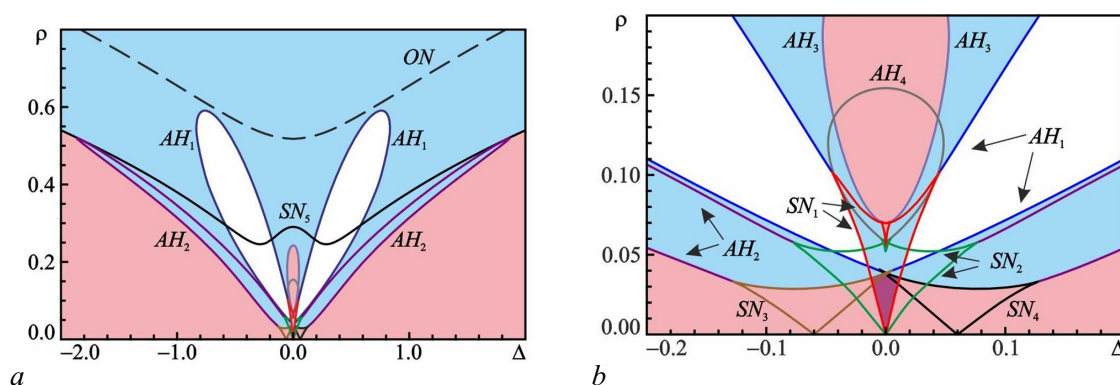


Рис. 11. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16, \psi = 0.4\pi$ и $b = 0.1$ (a) и ее увеличенный фрагмент в области малых расстройек (b). Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами (цвет онлайн)

Fig. 11. Boundaries of saddle-node bifurcations (SN) and Andronov–Hopf bifurcations (AH) on the parameter plane Δ, ρ for $\sigma = -0.16, \psi = 0.4\pi$, and $b = 0.1$ (a) and its enlarged fragment in the domain of small mismatch (b). The stability domains of synchronous modes are shaded in different colors (color online)

Заключение

В статье представлен анализ взаимной синхронизации системы двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой.

При слабой связи в фазовом пространстве имеется пять неподвижных точек, из которых три (две, отвечающие режимам с доминированием одного из генераторов, и точка O , отвечающая отсутствию колебаний) являются устойчивыми, а также четыре предельных цикла, один из которых является устойчивым. При увеличении связи на четырех упомянутых циклах происходят седлоузловые бифуркации, в результате чего число неподвижных точек увеличивается до 13, из которых 4 устойчивы.

Показано, что в случае малых расстройек и слабой связи наблюдается картина, хорошо согласующаяся с фазовым приближением [9]. С увеличением параметра связи неподвижные точки $U_{1,2}$, которые соответствуют режимам с доминированием одного из осцилляторов, сливаются с седловыми неподвижными точками S_{1-4} и исчезают.

При дальнейшем увеличении ρ происходит трансформация бассейна притяжения точки O , в результате которой, если в начальный момент времени колебания генераторов близки к противофазным, колебания затухают при любых начальных амплитудах. Это своеобразная разновидность эффекта гибели колебаний, которая обусловлена не увеличением эффективной диссипации, а изменением структуры бассейнов притяжения.

Показано, что с увеличением параметра связи точка O в начале координат теряет устойчивость, сталкиваясь с одной из седловых точек P_1 или P_2 . После этого единственным устойчивым режимом является режим взаимной синхронизации. Такое поведение обусловлено увеличением эффективной добротности колебательной системы. Таким образом, с практической точки зрения наиболее благоприятная ситуация реализуется в том случае, когда параметр превышает значение, при котором нулевое решение теряет устойчивость.

В случае больших расстройек устройство плоскости параметров во многом определяется поведением упомянутых выше предельных циклов. При слабой связи устойчивы два режима с доминированием одного из осцилляторов (точки $U_{1,2}$) и режим биений (предельный цикл C_+). С увеличением параметра связи цикл C_+ теряет устойчивость не в результате седлоузловой бифуркации, как в случае малых расстройек, а сливается с циклом C_{\mp} и исчезает. Что касается точек $U_{1,2}$, то одна из них либо сливается с одной из седловых точек $P_{1,2}$, либо теряет устойчивость в результате обратной (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа. Другая из этих точек остается устойчивой при любых значениях параметра связи, причем амплитуды колебаний обоих осцилляторов постепенно сравниваются, то есть режим колебаний с доминированием одного из осцилляторов постепенно трансформируется в режим синфазной синхронизации.

Список литературы

1. Zhang J., Zhang D., Fan Y., He J., Ge X., Zhang X., Ju J., Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources // *Physics of Plasmas*. 2020. Vol. 27, no. 1. P. 010501. DOI: 10.1063/1.5126271.
2. Usacheva S. A., Ryskin N. M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling // *Chaos*. 2014. Vol. 24, no. 2. P. 023123. DOI: 10.1063/1.4881837.
3. Adilova A. B., Balakin M. I., Gerasimova S. A., Ryskin N. M. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators // *Chaos*. 2021. Vol. 31, no. 11. P. 113103. DOI: 10.1063/5.0065670.
4. Королев В. И., Постников Л. В. К теории синхронизации генератора автоколебаний. I // *Известия вузов. Радиофизика*. 1969. Т. 12, № 3. С. 406–414.
5. Кузнецов А. П., Милованов С. В. Синхронизация в системе с бифуркацией слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 4-5. С. 16–30. DOI: 10.18500/0869-6632-2003-11-4-16-30.
6. Милованов С. В. Синхронизация систем с сосуществующими устойчивым и неустойчивым предельными циклами и бифуркацией их слияния и исчезновения. Дисс. ... к.ф.-м.н. Саратов, СГУ, 2005. 209 с.
7. Yakunina K. A., Kuznetsov A. P., Ryskin N. M. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode // *Physics of Plasmas*. 2015. Vol. 22, no. 11. P. 113107. DOI: 10.1063/1.4935847.
8. Григорьева Н. В., Рыскин Н. М. Исследование синхронизации гиротрона в режиме жёсткого возбуждения на основе модифицированной квазилинейной модели // *Известия вузов. Радиофизика*. 2022. Т. 65, № 5/6. С. 406–419. DOI: 10.52452/00213462_2022_65_05_406.
9. Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Часть 1. Фазовое приближение // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2024. Т. 32, № 1. С. 42–56. DOI: 10.18500/0869-6632-003080.
10. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. *Нелинейные колебания*. М.: Физматлит, 2005. 292 с.

11. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
12. *Izhikevich E. M.* Phase models with explicit time delays // *Physical Review E*. 1998. Vol. 58, no. 1. P. 905–908. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.905.
13. Глызин С. Д. Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия» // *Дифференциальные уравнения*. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811.
14. *Jessop M. R., Li W., Armour A. D.* Phase synchronization in coupled bistable oscillators // *Physical Review Research*. 2020. Vol. 2, no. 1. P. 013233. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.013233.
15. *Burić N., Grozdanović I., Vasović N.* Excitable systems with internal and coupling delays // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008. Vol. 36, no. 4. P. 853–861. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.09.061.
16. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // *Математический сборник*. 1963. Т. 61(103), № 4. С. 443–466.
17. <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>.
18. Перегородова Е. Н., Рыскин Н. М., Усачева С. А. Синхронизация системы двух конкурирующих мод внешним гармоническим сигналом // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 3. С. 154–170. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-3-154-170.
19. Кузнецов А. П., Емельянова Ю. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация в задачах. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. 256 с.

References

1. Zhang J, Zhang D, Fan Y, He J, Ge X, Zhang X, Ju J, Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources. *Physics of Plasmas*. 2020;27(1):010501. DOI: 10.1063/1.5126271.
2. Usacheva SA, Ryskin NM. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling. *Chaos*. 2014;24(2):023123. DOI: 10.1063/1.4881837.
3. Adilova AB, Balakin MI, Gerasimova SA, Ryskin NM. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators. *Chaos*. 2021;31(11):113103. DOI: 10.1063/5.0065670.
4. Korolev VI, Postnikov LV. To the synchronization theory of the auto oscillator generator. I. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1969;12:323–330. DOI: 10.1007/BF01030321.
5. Kuznetsov AP, Milovanov SV. Synchronization in a system with bifurcation of merging stable and unstable limit cycles. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2003;11(4-5):16–30. DOI: 10.18500/0869-6632-2003-11-4-16-30.
6. Milovanov SV. Synchronization of systems with coexisting stable and unstable limit cycles and the bifurcation of their merger and disappearance. PhD Thesis. Saratov, SSU, 2005. 209 p. (in Russian).
7. Yakunina KA, Kuznetsov AP, Ryskin NM. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode. *Physics of Plasmas*. 2015;22(11):113107. DOI: 10.1063/1.4935847.
8. Grigorieva NV, Ryskin NM. A Study of Gyrotron Synchronization in the Hard-Excitation Regime on the Basis of the Modified Quasilinear Model. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2022;65:371–383. DOI: 10.1007/s11141-023-10220-8.
9. Adilova AB, Ryskin NM. Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay Part 1. Phase approximation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):42–56. DOI: 10.18500/0869-6632-003080.
10. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Ryskin NM. *Nonlinear Oscillations*. M.: Fizmatlit, 2005. 292 p. (in Russian).
11. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.

12. Izhikevich EM. Phase models with explicit time delays. *Physical Review E*. 1998;58(1):905–908. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.905.
13. Glyzin SD. Dynamical properties of the simplest finite-difference approximations of the “reaction-diffusion” boundary value problem // *Differential Equations*. 1997;33(6):808–814.
14. Jessop MR, Li W, Armour AD. Phase synchronization in coupled bistable oscillators. *Physical Review Research*. 2020;2(1):013233. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.013233.
15. Burić N, Grozdanović I, Vasović N. Excitable systems with internal and coupling delays. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008;36(4):853–861. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.09.061.
16. Shilnikov L. P. About some cases of birth of periodic motions from special trajectories. *Sbornik: Mathematics*. 1963;61(4):443–466 (in Russian).
17. <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>
18. Peregorodova EN, Ryskin NM, Usacheva SA. Synchronization of the system of two competing modes by external harmonic signal. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2011;19(3): 154–170. (in Russian) DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-3-154-170
19. Kuznetsov AP, Emelyanova YP, Sataev IR, Turukina LV. *Challenges in synchronization*. Saratov: Nauka, 2010 (in Russian).



Адилова Асель Булатовна — окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2015). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2021). С 2015 года работает в Саратовском государственном университете. В настоящее время — доцент кафедры физики открытых систем Института физики СГУ. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, вакуумная СВЧ-электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: AdilovaAB@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-4079-4488
 AuthorID (eLibrary.Ru): 848993



Рыскин Никита Михайлович — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: ryskinm@info.sgu.ru
 ORCID: 0000-0001-8501-6658
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29838



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003121
EDN: MJFDNA

Импульсный бинарный нейрон — детектор причинно-следственных связей*

М. В. Киселев¹✉, Д. А. Ларионов^{1,2}, А. М. Урусов^{1,3}

¹Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

²Частное учреждение «Цифрум», Госкорпорация «Росатом», Москва, Россия

³Акционерное общество «Газпромбанк», Москва, Россия

E-mail: ✉mkiselev1@yandex.ru, denis.larionov@gmail.com, imurusov@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2023, принята к публикации 11.04.2024,
опубликована онлайн 10.09.2024, опубликована 30.09.2024

Аннотация. Цель. Распознавание причинно-следственных связей является фундаментальной функцией нейронных сетей, обучающихся целенаправленному поведению, осуществляющих планирование действий и формирующих модели динамики внешнего мира. Эта функциональность особенно важна для реализации обучения с подкреплением. В контексте импульсных нейронных сетей события представлены в виде импульсов (спайков), испускаемых нейронами сети или входными узлами. Обнаружение причинно-следственных связей между этими событиями является необходимым для эффективной реализации обучения с подкреплением. **Методы.** В данной работе представлен новый подход к распознаванию причинно-следственных связей с использованием импульсного бинарного нейрона. Этот подход основан на специально разработанных простых и эффективных правилах синаптической пластичности. При этом учитываются временные аспекты обнаруженных причинно-следственных связей, а также то, что спайковые сигналы могут иметь вид как одиночных импульсов, так и плотных последовательностей импульсов (всплесков), как это наблюдается в биологическом мозге. Кроме того, в данном исследовании уделяется большое внимание вопросу эффективной реализации предложенных моделей на современных и перспективных нейропроцессорах. **Результаты.** В сравнении с точными методами машинного обучения, такими как алгоритмы деревьев решений и сверточные нейронные сети, наш нейрон демонстрирует удовлетворительную точность, несмотря на свою простоту. **Заключение.** В данной работе представлена архитектура импульсной нейронной сети, включающая нейроны описываемого типа, которая может эффективно применяться в более сложных информационных окружениях, что делает ее перспективным кандидатом для реализации обучения с подкреплением в импульсных нейронных сетях.

Ключевые слова: импульсные нейронные сети, бинарный нейрон, зависящая от времени спайков пластичность, модулированная дофамином пластичность, анти-Хеббовская пластичность, обучение с подкреплением, нейроморфная аппаратура.

Для цитирования: Киселев М. В., Ларионов Д. А., Урусов А. М. Импульсный бинарный нейрон — детектор причинно-следственных связей // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 589–605. DOI: 10.18500/0869-6632-003121. EDN: MJFDNA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нейроинформатика — 2023».

A spiking binary neuron — detector of causal links*

M. V. Kiselev¹✉, D. A. Larionov^{1,2}, A. M. Urusov^{1,3}

¹I. N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

²Cifrum, subsidiary of Rosatom, Moscow, Russia

³Gazprombank (JSC), Moscow, Russia

E-mail: ✉mkiselev1@yandex.ru, denis.larionov@gmail.com, imurusov@mail.ru

Received 31.10.2023, accepted 11.04.2024, available online 10.09.2024, published 30.09.2024

Abstract. *Purpose.* Causal relationship recognition is a fundamental operation in neural networks aimed at learning behavior, action planning, and inferring external world dynamics. This operation is particularly crucial for reinforcement learning (RL). In the context of spiking neural networks (SNNs), events are represented as spikes emitted by network neurons or input nodes. Detecting causal relationships within these events is essential for effective RL implementation. *Methods.* This research paper presents a novel approach to realize causal relationship recognition using a simple spiking binary neuron. The proposed method leverages specially designed synaptic plasticity rules, which are both straightforward and efficient. Notably, our approach accounts for the temporal aspects of detected causal links and accommodates the representation of spiking signals as single spikes or tight spike sequences (bursts), as observed in biological brains. Furthermore, this study places a strong emphasis on the hardware-friendliness of the proposed models, ensuring their efficient implementation on modern and future neuroprocessors. *Results.* Being compared with precise machine learning techniques, such as decision tree algorithms and convolutional neural networks, our neuron demonstrates satisfactory accuracy despite its simplicity. *Conclusion.* We introduce a multi-neuron structure capable of operating in more complex environments with enhanced accuracy, making it a promising candidate for the advancement of RL applications in SNNs.

Keywords: spiking neural network, binary neuron, spike timing dependent plasticity, dopamine-modulated plasticity, anti-Hebbian plasticity, reinforcement learning, neuromorphic hardware.

For citation: Kiselev MV, Larionov DA, Urusov AM. A spiking binary neuron — detector of causal links. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(5):589–605. DOI: 10.18500/0869-6632-003121

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Если мы стремимся создать интеллектуальную систему на основе нейронных сетей, способную формировать адаптивное поведение для достижения определенных целей, необходимо наделять ее способностью идентифицировать и фиксировать в ее структуре причинно-следственные связи между событиями, происходящими как внутри сети, так и во внешней среде. Эти связи могут включать в себя последовательности однородных паттернов, образующих единый пространственно-временной паттерн, команды, генерируемые сетью, и реакции внешней среды на них или события, предшествующие вознаграждению, и само вознаграждение. Поэтому способность различать причины и следствия должна рассматриваться как базовая функциональность нейросетевых структур или отдельных нейронов. В большинстве сценариев обучаемая сеть не имеет доступа к априорным знаниям, описывающим причинно-следственные связи в ее окружении, — она должна выводить их из наблюдаемых временных закономерностей появления различных событий, исходя из предположения, что если событие В часто наблюдается в определенном временном интервале после события А, то А служит причиной, а В — следствием.

В данном исследовании рассматривается реализация описанной выше функциональности в рамках импульсной нейронной сети (ИмНС), а если более точно, одного конкретного нейрона как части сети. В контексте ИмНС информация кодируется последовательностями спайков,

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Neuroinformatics — 2023”.

что делает необходимым формулирование задачи в этих терминах. Формализуем задачу относительно одного конкретного нейрона (назовем его детектором причинно-следственных связей). Этот нейрон принимает сигналы в виде спайков от пресинаптических нейронов. Будем считать, что срабатывание некоторого заранее неизвестного набора пресинаптических нейронов соответствует событию А (причина), тогда как активация некоторого другого нейрона соответствует событию В (следствие). Предположим, что событие В почти всегда происходит в течение времени T_p после события А, тогда задача нейрона-детектора состоит в том, чтобы срабатывать каждый раз при выявлении активности набора нейронов, соответствующих наступлению события А. Подобно другим задачам обучения нейросетей, будем решать эту с помощью изменения синаптических весов нейрона-детектора (синаптической пластичности). Важно отметить особенность, которая существенно ограничивает применимость большинства существующих на сегодняшний день моделей синаптической пластичности, основанных на относительной задержке между отдельными пре- и постсинаптическими спайками: нейрон-детектор и пресинаптические нейроны могут генерировать как единичные спайки, так и их плотно сгруппированные и продолжительные последовательности, так что невозможно сказать, какой из спайков был раньше или позже — пре- или пост-синаптический. Описанная ниже модель синаптической пластичности учитывает это обстоятельство.

Многочисленные исследования демонстрируют, как ИмНС могут выявлять причинно-следственные связи между различными событиями. Однако данное исследование предлагает уникальное сочетание трех отличительных атрибутов.

1. Причинно-следственные связи между событиями распознаются единственным нейроном-детектором, а не сетью.
2. Учитывается временной аспект причинно-следственных связей, при котором события-причины происходят за определенное время до соответствующих им событий-последствий.
3. Используются специально разработанные локальные правила синаптической пластичности для обучения.

В большинстве работ, имеющих на сегодняшний день, данная задача рассматривается вне временного аспекта — для такого типа задач часто используется термин Байесовский вывод (Bayesian inference). Эта задача близко связана с обучением с учителем, где сеть должна определить наиболее достоверные факторы, независимо или в сочетании указывающие на принадлежность определенного объекта к целевому классу. В статьях [1–3] представлены примеры исследований, в которых применяются различные подходы для решения таких задач. Следует отметить, что обычно в задачах обучения с учителем время явно не учитывается. Даже когда объектом обучения являются временные ряды, каждый временной ряд рассматривается как единая сущность, относимая к некоторому целевому классу. В отличие от этого, данное исследование более тесно связано с обучением с подкреплением, где все сигналы (входные сигналы, команды сети и вознаграждение/наказание) существуют в непрерывном времени и временные интервалы имеют большое значение.

Наш подход может быть важен с точки зрения концепции свободной энергии Фристана [4], поскольку понимание, что является «ожидаемым событием», важно для количественной оценки величины «неожиданности» событий в терминах свободной энергии. Настоящее исследование заостряет внимание на распознавании причинно-следственных связей в контексте времени, что имеет особое значение для динамических систем.

Следует отметить, что рассматриваемая исследовательская задача перекликается с еще одной обширной областью машинного обучения — прогнозированием временных рядов. Подходы прогнозирования временных рядов направлены на предсказание будущих значений определенных переменных (дискретных или непрерывных) на основе их текущих и недавних значений, а также, возможно, значений других связанных переменных. Естественно, если возможно определить

причинно-следственные связи между значениями определенных переменных или состояний объекта и значениями определенных параметров в будущем — это дает инструмент для прогнозирования будущих значений. Однако наша основная цель отличается от традиционного прогнозирования временных рядов, поскольку мы не сосредоточены на предсказании конкретного точного значения определенной переменной в определенный момент времени. Вместо этого наша цель — вывести причинно-следственные правила, которые указывают на то, что после события А ожидается, что событие В произойдет в интервале времени длиной T_p . Следовательно, задача может быть более точно характеризована как прогнозирование будущих событий, а не временных рядов.

Примечательно, что на сегодняшний день относительно немного применений ИмНС для решения подобных задач. Один из подходов, описанный в [5], использует систему NeuCube [6], которая основана на так называемой машине с жидким состоянием (Liquid State Machine, LSM) [7]. LSM — это большая хаотичная непластичная ИмНС, разработанная для преобразования комбинации временных рядов и статических (или медленно изменяющихся) параметров в многомерное представление в виде частот генерации спайков нейронами внутри LSM. Благодаря большому количеству нейронов в LSM, представления различных пространственно-временных паттернов в форме нейронной активности LSM с высокой вероятностью являются линейно сепарабельными. Следовательно, задачи классификации, связанные с такими представлениями, могут быть эффективно решены с помощью простых линейных классификаторов. Как описано в [5], были продемонстрированы несколько примеров применения NeuCube для прогнозирования редких событий. Один конкретный пример — прогнозирование инсультов, рассматривается более подробно в [8]. Хотя подход на основе LSM продемонстрировал успех в широком диапазоне задач, у него есть заметный недостаток в том, что для достижения эффективности LSM она должна быть большой и, следовательно, требовать значительных вычислительных мощностей. В отличие от этого, подход, предложенный в данном исследовании, эффективно решает аналогичную задачу, используя всего один нейрон, что является более ресурсоэффективным решением.

В статье [9] показано, как специальные структуры ИмНС могут использоваться для получения графа причинно-следственных связей, но опять же, без учета временного аспекта, как упоминалось ранее.

Наконец, существует еще одно направление исследований ИмНС, тесно связанное с нашим исследованием. Как описано ниже, для решения задачи выявления причинно-следственных связей используется комбинация двух моделей синаптической пластичности, обычно называемых, хотя и в очень приблизительном смысле, Хеббовской и дофаминовой пластичностью. Хеббовский принцип пластичности, когда он применяется к пластичности импульсных нейронов, часто обозначается как модель STDP (Spike Timing Dependent Plasticity) [10], а дофаминовая пластичность обычно связана с эффектами, связанными с вознаграждением. Коллективное терминологическое обозначение для этих объединенных моделей пластичности — R-STDP (Reward Spike Timing Dependent Plasticity). Различные модели R-STDP изучались в многочисленных работах (например, [11–14]), некоторые из которых уже были протестированы в реальных приложениях [15]. В настоящее время нет единого мнения о том, как лучше объединять эти два типа синаптической пластичности, так что спектр рассматриваемых моделей остается весьма широк. Кроме того, в отличие от нашего подхода, где вознаграждение имеет форму спайкового сигнала, эти модели обычно представляют вознаграждение как глобальную вещественную переменную. Насколько нам известно, ни одна из предшествующих работ не использовала подобные правила синаптической пластичности для цели обнаружения причинно-следственных связей.

Кроме того, цель данного исследования заключалась в создании достаточно простой модели пластичности для ее эффективной реализации на современных и будущих нейропроцессорах. Согласно работе [16], существует явный тренд в появлении и развитии программных и аппаратных систем, которые основаны не на преобразовании традиционных сверточных нейронных

сетей в форму ИмНС, а на использовании «нативных» моделей импульсных нейронов и правил пластичности, открывая возможность для непрерывного обучения ИмНС.

В следующем разделе будет подробно описана наша инновационная модель синаптической пластичности, которая объединяет Хеббовскую (фактически анти-Хеббовскую) и дофаминовую пластичность. После этого будет рассмотрено применение модели к задаче предсказания вознаграждений в обучении с подкреплением (reinforcement learning, RL), используя в качестве примера задачу предсказания вознаграждений в задаче «Пинг-понг». В заключение мы опишем наше видение того, как нейроны такого рода могут формировать сетевые структуры, способные выводить сложные графы причинно-следственных связей, необходимые для построения моделей внешнего мира в RL. Далее, будут оценены преимущества и ограничения данного подхода и определен план будущих исследований.

1. Методы и материалы

В данном исследовании рассматривается процесс обучения одного импульсного нейрона в контексте выявления причинно-следственных связей между событиями. Этот нейрон (рис. 1) связан с группой пресинаптических нейронов, образующих множество C , чья активность представляет различные события. Будем интерпретировать эти события как потенциальные триггеры для другого события, которое назовем «целевым событием». Это целевое событие соответствует спайку от отдельного пресинаптического нейрона, обозначаемого как S , который не является частью множества C . Момент времени j -й генерации спайка i -м пресинаптическим нейроном из множества C обозначим как t_{ij} . Моменты времени, когда нейрон S генерирует спайк, будем обозначать как t_j^S . Мы говорим, что некоторое событие является причиной целевого события, если целевое событие часто наблюдается не позднее времени T_p после этого события. Как уже упоминалось, возможные причины целевого события определяются специфической активностью пресинаптических нейронов, которую должен попытаться распознать обучаемый нейрон-детектор.

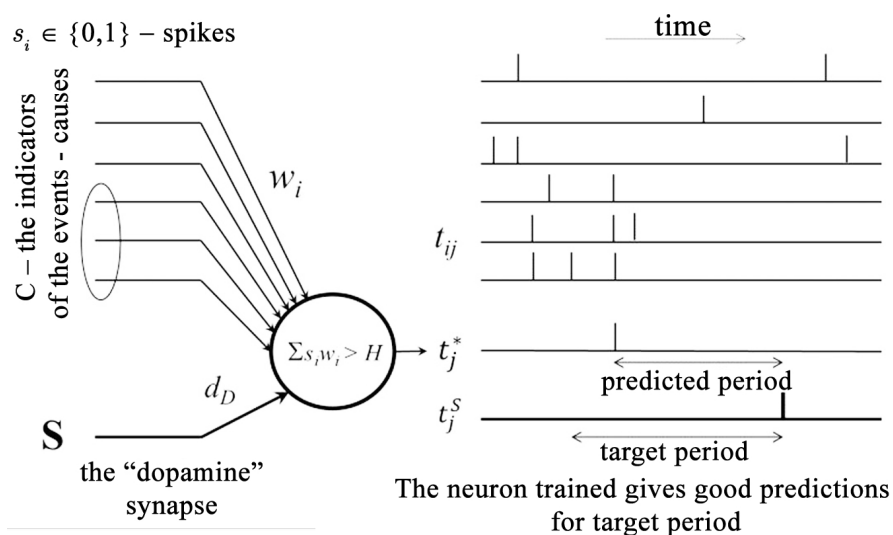


Рис. 1. Схематичная модель бинарного импульсного нейрона и временная диаграмма его входных и выходных спайков (для обученного состояния)

Fig. 1. The schematic model of binary spiking neuron and the temporal diagram of its pre- and postsynaptic spikes (for the trained state)

T_p — это временная константа, фиксирующая временной масштаб конкретной задачи. Предполагается, что целевые события редкие — это означает, что T_p намного меньше минимального значения интервалов между спайками $t_j^S - t_{j-1}^S$. Это единственное важное предположение — без него наша задача поиска причинно-следственных связей, по-видимому, теряет смысл.

Введем также понятие «целевой период», охватывающее временной интервал длиной T_p , предшествующий каждому t_j^S . Обучаемый нейрон должен пометить целевые периоды своей активностью (спайками, испускаемыми им в моменты времени t_j^*). Если он научится делать это с достаточной точностью, это означает, что он успешно распознает причинно-следственную связь между конкретным событием (активностью пресинаптических нейронов, которая вызывает срабатывание нейрона) и целевым событием. Для оценки точности этого распознавания введем понятие «предсказанный период». Каждый предсказанный период начинается в момент времени t_j^* и заканчивается либо через время T_p от этого момента, либо в один из моментов t_j^S — в зависимости от того, что произойдет раньше. Общая продолжительность времени T_{err} , в течение которого целевые периоды и предсказанные периоды не пересекаются, служит естественной метрикой для измерения неточности предсказания целевого события. Целью обучаемого нейрона является максимизация метрики, представленной формулой

$$R = 1 - \frac{T_{err}}{T_{tar}}, \quad (1)$$

где T_{tar} обозначает общую продолжительность целевых периодов.

В данном исследовании используется самая простая модель нейрона, называемая «бинарным нейроном». Этот нейрон работает в дискретном времени. В каждый квант времени он получает спайки через свои пластичные синапсы с весами w_i . Предполагается, что величина этих квантов — порядка возможного времени рассогласования входных спайков из множества S , индицирующих событие-причину, так что значительная часть этих спайков приходит в рамках одного кванта. Если сумма весов синапсов, получивших спайки в данный квант, больше порогового значения H , то нейрон генерирует спайк. Выбор столь простой модели делает наш результат общим — фактически он не зависит от конкретной модели нейрона. После соответствующей дискретизации времени любая модель импульсного нейрона может быть приближена бинарным нейроном, который сохраняет основное свойство — нейрон срабатывает, когда несколько сильных возбуждающих синапсов получают спайки в течение короткого временного периода. Чтобы сделать веса w_i безразмерными, мы устанавливаем $H = 1$.

1.1. Общая идея метода и правила синаптической пластичности, используемые в исследовании. Предполагается, что информация о потенциальных событиях-причинах, приводящих к целевому событию, закодирована в спайках, исходящих от пресинаптических нейронов из множества S . Синапсы, отвечающие за передачу этих импульсов, являются пластичными, и их синаптические веса должны корректироваться таким образом, чтобы заставить постсинаптический нейрон-детектор срабатывать во время целевого периода.

Активность обучаемого постсинаптического нейрона-детектора и корректировка его синаптических весов должны быть связаны следующим образом.

- a. Необученный нейрон должен быть неактивен — механизм пластичности должен усиливать те синапсы, которые заставляли бы нейрон генерировать спайки в правильное время. По этой причине мы устанавливаем веса всех пластичных синапсов равными 0 в начале обучения.
- b. Если нейрон генерирует спайк в неправильное время (вне целевых периодов), то синапсы, которые помогли ему сгенерировать ложный спайк, должны быть подавлены.
- c. Если нейрон генерирует спайк в правильное время, то с его синаптическими весами ничего не должно происходить, в противном случае их изменение может вывести его из обученного состояния.

Это достигается благодаря специфическому выбору правил синаптической пластичности. Важно, что свойства пластичных синапсов полностью отличны от единственного синапса, через который подключен пресинаптический нейрон S . Мы называем его «дофаминовым» синапсом, потому что спайки, поступающие на него, контролируют пластичность всех остальных синапсов.

Принципы А, В и С, указанные выше, выполняются благодаря комбинации двух правил пластичности.

1. Дофаминовая пластичность. Каждый раз, когда обучаемый нейрон получает спайк от нейрона S , все пластичные синапсы, получившие спайки в течение времени T_p перед этим «дофаминовым» спайком, усиливаются.
2. Анти-Хеббовская пластичность. Все синапсы, способствующие срабатыванию нейрона, подавляются.

Очевидно, что в случае баланса между дофаминовой и анти-Хеббовской пластичностью условия А, В и С удовлетворяются, обеспечивая успешное обучение и функционирование нейрона.

1.2. Модель синаптической пластичности в деталях. Аналогично нашим предыдущим исследованиям [17, 18], используемые в данной работе правила синаптической пластичности являются аддитивными и применяются к переменной, называемой «синаптический ресурс», обозначаемой как W , а не непосредственно к синаптическому весу, обозначаемому как w . Функциональная зависимость между W и w выражается формулой

$$w = w_{\min} + \frac{(w_{\max} - w_{\min}) \cdot \max(W, 0)}{w_{\max} - w_{\min} + \max(W, 0)}, \quad (2)$$

где w_{\min} и w_{\max} — константы. Очевидно, что значения w пробегает диапазон $[w_{\min}, w_{\max})$, когда W изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. В данном исследовании $w_{\min} < 0$, а $w_{\max} > 0$, так что синаптическая пластичность может сделать возбуждающий синапс тормозным и наоборот.

Как уже упоминалось ранее, модель синаптической пластичности состоит из двух отдельных и независимых компонент. Они описаны в подразделах 1.2.1 и 1.2.2.

1.2.1. Анти-Хеббовская пластичность. Стандартная модель STDP [10] утверждает, что спайки, поступающие за короткое время до срабатывания постсинаптического нейрона, усиливают синапсы, которые их получают. Эта концепция соответствует принципу Дональда Хебба, который утверждает, что синаптическая пластичность должна отражать причинно-следственные связи между срабатываниями нейронов — синапсы, ответственные за генерацию спайков постсинаптическим нейроном, должны быть усилены. Этот принцип был подтвержден множеством нейрофизиологических наблюдений. Однако глубокие исследования пластичности в биологических нейронах показали, что в природе существуют и несколько альтернативных моделей синаптической пластичности [19, 20]. Кроме того, в различных организмах были обнаружены примеры правил пластичности, действующих в направлении, противоположном Хеббовскому принципу (анти-Хеббовская пластичность) [21]. Это позволяет заключить, что различные виды синаптической пластичности подходят для решения разных задач. Кроме того, стандартная модель STDP теряет смысл в случае (который довольно распространен в биологическом мозге), когда мы имеем дело не с одиночными пре- и постсинаптическими спайками, а с их плотно сгруппированными во времени последовательностями. В этом случае бессмысленно говорить о конкретной последовательности прихода пресинаптического и постсинаптического спайков, потому что есть множество постсинаптических спайков в непосредственной близости до и после момента прихода конкретного пресинаптического спайка.

По этой причине нами был разработан новый вариант модели анти-Хеббовской пластичности, рассмотренный ниже.

Как уже упоминалось, изменения весов в стандартной модели STDP связаны с одиночными пре- и постсинаптическими спайками. Однако в случае плотных последовательностей спайков эти правила теряют свою применимость. В нашей модели синаптическая пластичность связана с последовательностями постсинаптических спайков, а не с отдельными спайками. Назовем эти последовательности «плотными спайковыми последовательностями» (англ. tight spike sequences, TSS). Принимая постоянную ISI_{\max} (ISI — inter-spike interval) как меру «плотности» TSS, определим TSS как последовательность спайков, соответствующую следующим критериям.

1. Отсутствуют спайки в течение времени ISI_{\max} до первого спайка в TSS.
2. Интервалы между всеми соседними спайками в TSS не превышают ISI_{\max} .
3. Отсутствуют спайки в течение времени ISI_{\max} после последнего спайка в TSS.

В данной работе ISI_{\max} устанавливается равным T_p .

Предлагаемая модель анти-Хеббовской пластичности задается следующими правилами.

1. Ресурс любого синапса может изменяться не более одного раза в течение одной TSS. Здесь и далее понятие TSS относится к постсинаптическим спайкам.
2. Изменяются ресурсы только тех синапсов, которые получают хотя бы один спайк в течение TSS.

Все синаптические ресурсы изменяются (уменьшаются) на одно и то же значение d_H , независимо от точного времени пресинаптических импульсов.

1.2.2. Дофаминовая пластичность. Описываемый нейрон-детектор имеет синапс (соединенный с нейроном S), модулирующий пластичность остальных синапсов. Когда он получает спайк, синаптические ресурсы всех пластичных синапсов, получивших хотя бы один пресинаптический спайк в течение временного интервала T_p до этого спайка, изменяются (увеличиваются) на одно и то же значение d_D .

Подчеркнем, что дофаминовая пластичность и анти-Хеббовская пластичность — это два совершенно логически независимых механизма. Хотя их сочетание как раз и дает желаемый эффект обучения нейрона.

1.2.3. Стабильность нейрона. В нашей модели пластичность синапсов d_H и d_D не является постоянной. В начале обучения значения d_H и d_D должны быть достаточно большими. Однако для уже обученного нейрона, который постоянно делает точные предсказания, они должны стремиться к нулю. Эта адаптация важна для предотвращения дальнейших изменений синаптических весов нейрона, которые могут нарушить его обученное состояние. Чтобы учесть эту адаптивную функцию, в состояние нейрона вводится дополнительный компонент s , называемый «стабильностью». Значения пластичности синапсов экспоненциально уменьшаются до нуля при росте значения стабильности в соответствии с уравнениями

$$d_H = \overline{d}_H \cdot \min(2^{-s}, 1), \quad d_D = \overline{d}_D \cdot \min(2^{-s}, 1). \quad (3)$$

Здесь \overline{d}_H и \overline{d}_D являются константами модели нейрона. Чтобы сбалансировать анти-Хеббовскую и дофаминовую пластичность (что необходимо для выполнения условия С из подраздела 2.1, мы устанавливаем $\overline{d}_H = \overline{d}_D$. Значение стабильности нейрона изменяется в двух случаях.

1. Уменьшается на константу d_S при каждом TSS.
2. Меняется на величину $d_s \cdot \max\left(2 - \frac{|t_{TSS} - ISI_{\max}|}{ISI_{\max}}, -1\right)$ при приходе дофаминового спайка.

Здесь t_{TSS} — временной интервал между началом последнего TSS и дофаминовым спайком.

Очевидно, что если TSS начался ровно ISI_{\max} ($= T_p$) времени назад до дофаминового спайка (то есть целевого события), то увеличение стабильности нейрона будет максимальным и равным d_S — если учесть его уменьшение на d_S в соответствии с правилом 1. Это соответствует наиболее точному предсказанию целевого события и служит показателем того, что нейрон обучен.

Напротив, если дофаминовый спайк происходит в момент, когда нейрон находился в неактивном состоянии в течение продолжительного времени — это признак недостаточной обученности нейрона, в результате чего его стабильность уменьшается на d_S , чтобы облегчить дальнейшее обучение.

1.3. Тестовая задача — найти причину получения вознаграждения в игре «Пинг-понг» из набора тестов ATARI. Описанный подход обладает большим потенциалом в области обучения с подкреплением (RL). В то время как обучение с учителем может рассматриваться как определение причинно-следственных связей между предикторами в качестве причин и целевым значением в качестве следствия, задачи RL охватывают более широкий спектр определения причинно-следственных связей, явно включая элемент времени. Сигналы вознаграждения могут поступать редко и, возможно, со значительной задержкой по отношению к состояниям мира или действиям агента, которые они оценивают. Чтобы преодолеть проблемы недостаточной частоты сигналов оценки, необходимо использовать механизм промежуточных целей, который также основан на выводе причинно-следственных связей.

Более того, ключевой момент для реализации наиболее развитого варианта RL, известного как RL, основанное на моделях (model-based RL), заключается в создании агентом внутренней модели динамики внешнего мира и реакций мира на действия агента. Механизм создания модели неизбежно включает нахождение сети причинно-следственных связей между изменениями состояния мира и действиями агента. Таким образом, вполне разумно утверждать, что вывод причинно-следственных связей является одной из основных операций в RL.

Исходя из этого, для проверки возможностей модели нейрона была выбрана одна из задач RL из часто используемого тестового набора игр ATARI [22]. Эта задача связана с компьютерной игрой «Пинг-понг», где мяч перемещается внутри квадратной области, отскакивая от ее стен. Область имеет только три стены. Вместо левой стены — ракетка, которая движется в вертикальном направлении по левой границе этой квадратной области. Ракеткой управляет агент, который может двигать ее вверх и вниз. Когда мяч попадает в ракетку и отскакивает назад, агент получает сигнал вознаграждения. Если мяч пересекает левую границу без попадания в ракетку, то агент получает сигнал наказания, и мяч возвращается в случайную точку средней вертикальной линии квадратной области, получая случайное направление движения и скорость, и игра продолжается. Используя полученные сигналы вознаграждения/наказания, агент должен понять, что его цель — отразить мяч и обучиться этому.

В нашем примере сеть (фактически один нейрон) должна решить первую задачу — понять, какие условия приводят к получению вознаграждения в ближайшем будущем.

Информация, поступающая на пластичные синапсы нейрона, в этой задаче включает текущие положения мяча и ракетки, скорость мяча. В то время как в окончательной формулировке этой задачи нейронная сеть должна работать с первичной растровой информацией (изображением на экране), предмет данной статьи лежит не в области компьютерного зрения, а состоит в нахождении причинно-следственных связей. Поэтому мы предполагаем, что входные слои нейросети уже обработали первичные растровые данные и преобразовали их в спайковое представление, подающееся на пластичные синапсы нейрона — детектора причинно-следственных связей.

Входные узлы (источники спайков) подразделяются на следующие секции.

1. Координата X мяча. Состоит из 30 узлов, отображающих горизонтальное положение мяча. Горизонтальное измерение разбито на 30 равных непересекающихся интервалов. Когда мяч находится в интервале i , i -й узел генерирует спайки с частотой 300 Гц. Чтобы установить пространственные и временные масштабы, мы предполагаем, что размер квадратной области составляет 10×10 см (так что координаты границ равны ± 5 см), а дискретный шаг эмуляции времени составляет 1 мс.

2. Координата Y мяча. Состоит из 30 узлов, фиксирующих вертикальное положение мяча. Аналогично X , но для вертикальной оси.
3. Компонента X скорости мяча. Состоит из 9 узлов, соответствующих горизонтальной скорости мяча. Когда мяч вбрасывается в середине квадратной области, его скорость устанавливается равной случайному значению из диапазона $[10, 33.3]$ см/с. Его исходное направление движения также случайно, но выбирается таким образом, чтобы абсолютное значение его компоненты X не была меньше 10 см/с. Весь диапазон возможных значений компоненты скорости X мяча разбит на 9 интервалов таким образом, чтобы вероятности обнаружить мяч в случайный момент времени в каждом из этих интервалов были примерно равны. Пока компонента X скорости мяча находится в каком-то интервале, соответствующий входной узел генерирует спайки с частотой 300 Гц.
4. Компонента Y скорости мяча. Состоит из 9 узлов, фиксирующих вертикальную скорость мяча. Та же логика, что и для компоненты X скорости.
5. Координата Y ракетки. Состоит из 30 узлов, фиксирующих вертикальное положение ракетки. Аналогично Y координате мяча. Размер ракетки составляет 1.8 см, поэтому ракетка занимает чуть больше 5 вертикальных интервалов.
6. Относительное положение мяча и ракетки в ближней зоне. Состоит из 25 узлов, соответствующих положениям мяча, близким к ракетке. Квадратное поле зрения размером 3×3 см перемещается вместе с ракеткой, так что центр ракетки всегда находится в центре левой границы этого поля. Поле зрения разбито на 5×5 квадратных зон. Когда мяч находится в какой-то зоне, соответствующий входной узел генерирует спайки с частотой 300 Гц.

Таким образом, всего имеется 133 входных узла, передающих свои спайки обучаемому нейрону. Цель нейрона — распознать условия, приводящие к получению сигнала вознаграждения в течение 100 мс, и, соответственно, мы устанавливаем $T_p = 100$ мс.

1.4. Выбор параметров нейрона с использованием генетического алгоритма. Хотя модель нейрона кажется относительно простой, она включает несколько параметров, требующих настройки. Их четыре.

- Максимальное изменение синаптического ресурса $\overline{d_H}$. Этот параметр контролирует скорость обучения. Низкие значения делают обучение медленным, высокие могут сделать его нестабильным.
- Минимальное значение веса синапса w_{\min} . Оно отрицательное.
- Максимальное значение веса синапса w_{\max} .
- Скорость изменения стабильности d_S .

Оптимальные значения $\overline{d_H}$ и d_S определяются силой причинно-следственных связей — в случае слабого детерминизма или высокого уровня шума большие значения этих параметров приведут к нестабильности обучения. w_{\min} и w_{\max} должны быть выбраны на основе среднего потока входных спайков — количества входных узлов и средней частоты спайков на узел.

Хотя общие принципы для установки этих параметров достаточно ясны, было принято решение найти их оптимальные значения, используя генетический алгоритм и очень широкие диапазоны поиска: $[0.03, 1]$ для $\overline{d_H}$; $[0.003, 1]$ для w_{\min} ; $[0.03, 1]$ для w_{\max} ; $[0.003, 3]$ для d_S . Для установки их случайных значений использовалось лог-равномерное распределение. Размер популяции был выбран равным 300; уровень элитарности составлял 0.1; вероятность мутации на каждую хромосому была равна 0.5. Критерием оптимизации был R (1). Он измерялся за последние 600 секунд 2000-секундной записи игры в пинг-понг, где ракетка двигалась хаотично. Общее количество вознаграждений составило 951. Генетический алгоритм завершился, когда три последовательных поколения не показывали увеличения R .

2. Результаты и обсуждение

Лучший результат, достигнутый в ходе наших экспериментов, был получен в 17-м поколении генетического алгоритма. Значение R составило 0.553. Оптимальные значения параметров: $\overline{d_H} = 0.056$; $w_{\min} = -0.017$ (нулевое значение слегка снижает R); $w_{\max} = 0.48$ (то есть для срабатывания требуется не менее трех входных спайков); $d_S = 0.23$.

Учитывая значительную неопределенность взаимосвязи между текущим состоянием мира и получением вознаграждения из-за дискретного описания мира и хаотичного движения ракетки, полученное значение R представляется удовлетворительным. Чтобы объективно оценить этот результат, было произведено сравнение нашей техники с традиционными методами машинного обучения. Чтобы обеспечить корректное сравнение, было выбрано два алгоритма машинного обучения абсолютно разной природы: дерево решений и сверточная нейронная сеть. Все алгоритмы обучались на тех же двоичных сигнальных данных от входных узлов; каждый шаг (квант времени) эмуляции служил отдельным обучающим примером. В качестве целевой переменной использовалось булевское значение, индицирующее нахождение в целевом периоде. Алгоритмы машинного обучения применялись к тем же данным, что и наш нейрон (первые 1 400 000 шагов), и создавали модели оценки вероятности того, что текущий шаг принадлежит к целевому периоду. Кванты времени, когда возвращаемое моделью значение превышало некоторый порог (чье значение определялось с помощью оптимизационной процедуры), рассматривались аналогично срабатыванию нейрона. По тем же правилам, описанным в начале раздела 2, на последних 600 000 шагах определялись предсказанные периоды и рассчитывалось значение R . Оптимальное значение порога находилось из условия максимизации значения R на первых 1 400 000 шагах. Алгоритм дерева решений использовал критерий расщепления на взаимной информации. Сверточная сеть включала 2 сверточных слоя ReLU.

Максимальное значение R , полученное деревом решений, равно 0.742, сверточная сеть дала результат $R = 0.731$. Наблюдаемая близость результатов, показанных очень разными методами, доказывает корректность нашего подхода к определению теоретического предела для значения R в текущей задаче. Таким образом, оценка этого предела, равная 0.75, кажется реалистичной.

Хотя результат, достигнутый описанным единичным нейроном (74% от теоретического максимума), можно рассматривать как скромный, мы считаем нашу модель успешной. Рассматриваемая модель нейрона очень проста — ей соответствует предиктивная модель, содержащая только 133 степени свободы. В отличие от этого, например, модель дерева решений включает 51 уровень и 403 нетерминальных узла. По сути, функция нашего нейрона аналогична конъюнкции логических значений, соответствующих нескольким его сильнейшим синапсам (см. ниже). Совпадение этих факторов рассматривается как причина целевого события. Однако очевидно, что получению вознаграждения в нашем примере могут предшествовать несколько существенно разных условий. Поэтому хорошая предсказательная модель — это скорее дизъюнкция нескольких конъюнкций. Таким образом, весьма вероятно, что сеть, состоящая из описываемых нейронов, могла бы давать гораздо более точный прогноз вознаграждения, и мы рассмотрим возможную структуру такой сети ниже.

Рассмотрим процесс обучения и его результаты несколько более подробно. Динамика активности нейрона, его стабильности и общего изменения весов (суммы абсолютных значений изменений весов каждого синапса) представлены на рис. 2. Поскольку исходные веса всех пластичных синапсов были равны нулю, сначала работала только дофаминовая пластичность. В течение первых 100 секунд нейрон не генерировал спайков. После 250 секунд частота генерации спайков стабилизировалась. Из-за механизма стабилизации весов (как видно из рис. 2, стабильность

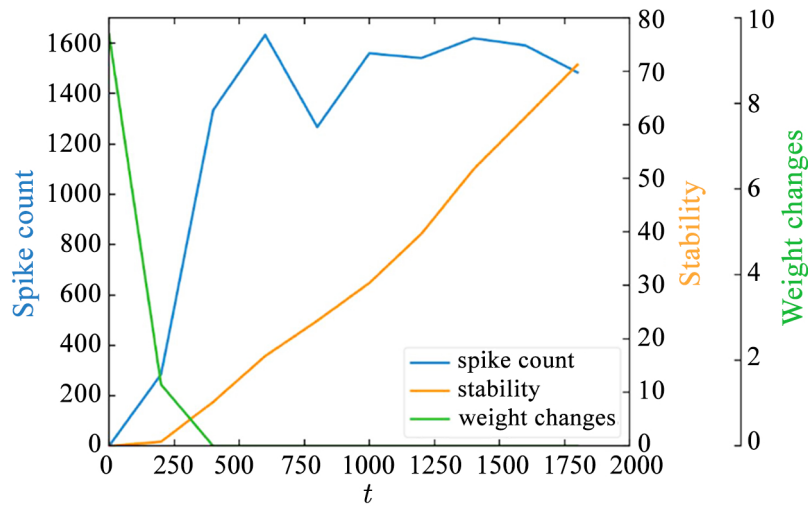


Рис. 2. Динамика частоты спайков, стабильности и изменения веса обучающегося нейрона (цвет онлайн)

Fig. 2. The time course of firing frequency, stability and weight changes of the learning neuron (color online)

нейрона почти линейно растет) синаптические веса не менялись после 400 секунд. В целом процесс обучения занял 400 секунд вместо запланированных 1400 секунд.

Результаты обучения представлены на рис. 3, который отражает значения синаптических ресурсов обучающегося нейрона на 2000-й секунде. Самый левый график соответствует 30 входным узлам, кодирующим координату X мяча. Вертикальная ось всех графиков, кроме самого правого, отражает значение синаптического ресурса. Второй график соответствует 30 входным узлам, кодирующим координату Y мяча (синяя линия) и ракетки (оранжевая линия). Следующие два графика представляют 9+9 входных узлов, кодирующих горизонтальную и вертикальную составляющую скорости мяча. На правом графике показана цветовая кодировка значений синаптических ресурсов 25 входных узлов, соответствующих местоположению мяча внутри сетки 5×5, которая движется с ракеткой. Распределение значений синаптических ресурсов на этих графиках выглядит разумным и соответствует ожиданиям.

Итак, можно сделать заключение, что представленный нейрон способен обнаруживать причинно-следственные связи между наблюдаемыми событиями. Однако, как уже обсуждалось, даже при достаточной длительности обучения, одиночный нейрон не может точно предсказать наступление целевого события в реальных задачах. Это связано с тем, что целевое событие может быть вызвано несколькими совершенно разными по своей природе событиями. Для более точных прогнозов требуется сеть нейронов, способных распознавать причинно-следственные связи и учитывать несколько значимых причин.

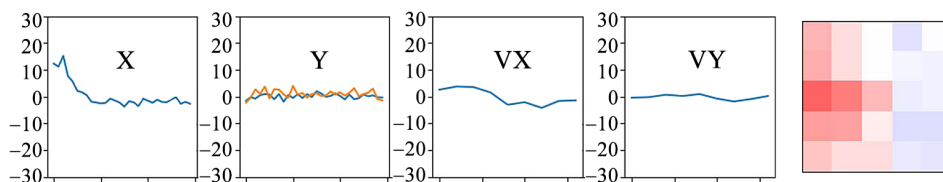


Рис. 3. Синаптические ресурсы обученного нейрона (цвет онлайн)

Fig. 3. The synaptic resource of the neuron trained (color online)

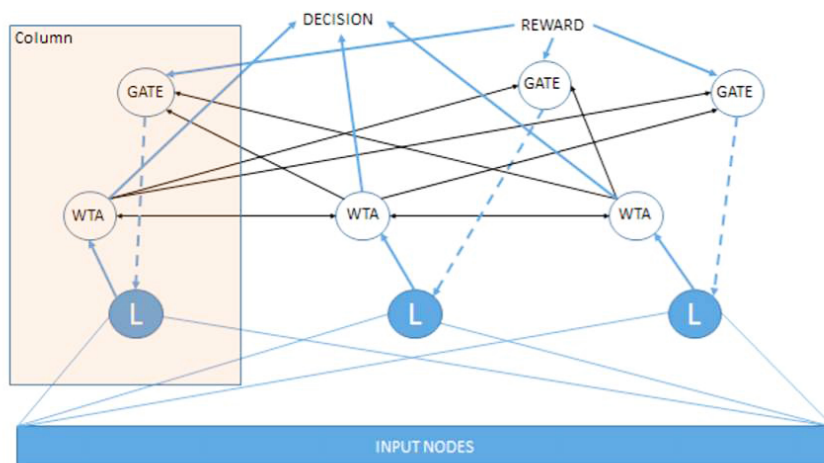


Рис. 4. Возможная нейросетевая структура, состоящая из нескольких нейронов, распознающих причинно-следственные связи, для предсказания целевого события, возникающего в результате разных причин. Синие стрелки — возбуждающие связи, черные — блокирующие, пунктирные — дофаминовые (цвет онлайн)

Fig. 4. The proposed structure of an SNN, which includes several neurons recognizing causal relationships for predictions of target events caused by several other events. The blue arrows depict excitatory connections, the black arrows — blocking connections, the dashed lines — dopamine connections (color online)

Можно предположить возможную архитектуру такой сети (рис. 4). В этой сети нейроны, распознающие различные причины целевого события (синие круги L), входят в колончатую структуру, где каждая колонка соответствует отдельной причине. Эти колонки конкурируют за распознавание событий-причин за счет латеральных блокирующих связей между их нейронами по принципу «победитель забирает все» (“winner-takes-all”, WTA). «Победивший» (сработавший первым) нейрон блокирует не только другие нейроны WTA, но и нейроны GATE в других колонках. Если один нейрон L генерирует спайк, то другие нейроны L не должны этого делать, потому что нейроны L должны распознавать различные причинные связи. Если какой-то нейрон L генерирует спайк после победителя, то он не получит сигнала вознаграждения, потому что этот сигнал не пройдет через GATE, заблокированный победителем. Синапсы, вызвавшие его спайк, будут подавлены анти-Хеббовской пластичностью, чтобы эта ситуация не повторилась в следующий раз. Если победивший нейрон правильно генерировал спайк, то он будет вознагражден, так как его GATE не заблокирован. На наш взгляд, такой архитектурный подход имеет потенциал для распознавания сложных сетей причинно-следственных связей, что и планируется проверить в дальнейших исследованиях.

Заключение

Неоспоримо, что способность распознавать причинно-следственные связи в динамических потоках данных является фундаментальной функциональностью для любой самообучающейся системы, работающей в реальном мире. В данном исследовании продемонстрирована возможность реализации этой критически важной функции на уровне отдельного нейрона благодаря предложенному сочетанию анти-Хеббовской и дофаминовой пластичности. Учитывая ключевую роль таких механизмов в контексте реализации обучения с подкреплением в ИмНС, описанная модель была проверена на простой, но нетривиальной задаче обучения с подкреплением — компьютерной игре «Пинг-понг» из набора тестов ATARI. Полученные результаты,

включая оценку теоретического верхнего предела точности прогнозирования в этой задаче, подтверждают эффективность предложенной модели нейрона для определения причинно-следственных связей.

Наряду с этим, очевидно, что описанный в работе нейрон сам по себе недостаточно сложен, чтобы описывать причинно-следственные связи между многими различными факторами. В этом смысле имеется прямая аналогия с традиционными нейронными сетями. Известно, что уже единичный нейрон обладает ограниченной возможностью аппроксимировать узкий класс многомерных нелинейных функций, однако для аппроксимации широкого класса функций требуется многослойная сеть таких нейронов. Поэтому в работе представлена возможная архитектура ИмНС, в которой используются нейроны описанного типа, которая должна быть способна выводить комплексы причинно-следственных связей непосредственно из сырых данных. В последующих исследованиях планируется тщательно проверить и настроить эту ИмНС структуру. Планируется также расширить возможности этой ИмНС для учета временных аспектов причинно-следственных связей, переходя от вопроса «Каковы возможные последствия данных событий?» к более сложному — «Когда эти последствия могут проявиться?». Полагаем, что данное исследование является существенным шагом в развитии импульсных нейронных сетей, которые могут моделировать и понимать сложную причинно-следственную динамику реального мира.

Список литературы

1. *Moreno-Bote R., Drugowitsch J.* Causal inference and explaining away in a spiking network // *Scientific Reports*. 2015. Vol. 5. P. 17531. DOI: 10.1038/srep17531.
2. *Lansdell B. J., Kording K. P.* Neural spiking for causal inference and learning // *PLoS Computational Biology*. 2023. Vol. 19, no. 4. P. e1011005. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1011005.
3. *Skatchkovsky N., Jang O., Simeone O.* Bayesian continual learning via spiking neural networks // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2022. Vol. 16. P. 1037976. DOI: 10.3389/fncom.2022.1037976.
4. *Friston K.* The history of the future of the bayesian brain // *Neuroimage*. 2012. Vol. 62, no. 2. P. 1230–1233. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.10.004.
5. *Kasabov N., Scott N. M., Tu E., Marks S., Sengupta N., Capecchi E., Othman M., Doborjeh M. G., Murlu N., Hartono R., Espinosa-Ramos J. I., Zhou L., Alvi F. B., Wang G., Taylor D., Feigin V., Gulyaev S., Mahmoud M., Hou Z.-G., Yang J.* Evolving spatio-temporal data machines based on the NeuCube neuromorphic framework: Design methodology and selected applications // *Neural Networks*. 2016. Vol. 78. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.neunet.2015.09.011.
6. *Kasabov N. K.* NeuCube: a spiking neural network architecture for mapping, learning and understanding of spatio-temporal brain data // *Neural Networks*. 2014. Vol. 52. P. 62–76. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.01.006.
7. *Schliebs S., Fiasché M., Kasabov N.* Constructing robust liquid state machines to process highly variable data streams // *International Conference on Artificial Neural Networks ICANN 2012: Artificial Neural Networks and Machine Learning — ICANN*. 2012. P. 604–611. DOI: 10.1007/978-3-642-33269-2_76.
8. *Doborjeh M., Doborjeh Z., Merkin A., Krishnamurthi R., Enayatollahi R., Feigin V., Kasabov N.* Personalized spiking neural network models of clinical and environmental factors to predict stroke // *Cognitive Computation*. 2022. Vol. 14. P. 2187–2202. DOI: 10.1007/s12559-021-09975-x.
9. *Fernando C.* From blickets to synapses: Inferring temporal causal networks by observation // *Cognitive Science*. 2013. Vol. 37, no. 8. P. 1426–1470. DOI: 10.1111/cogs.12073.
10. *Markram H., Gerstner W., Sjöström P. J.* A history of spike-timing-dependent plasticity // *Frontiers in Synaptic Neuroscience*. 2011. Vol. 3. P. 4. DOI: 10.3389/fnsyn.2011.00004.

11. *Kerr R. R., Grayden D. B., Thomas D. A., Gilson M., Burkitt A. N.* Coexistence of reward and unsupervised learning during the operant conditioning of neural firing rates // PLoS ONE. 2014. Vol. 9, no. 1. P. e87123. DOI: 10.1371/journal.pone.0087123.
12. *Yuan M., Wu X., Yan R., Tang H.* Reinforcement learning in spiking neural networks with stochastic and deterministic synapses // Neural Computation. 2019. Vol. 31, no. 12. P. 2368–2389. DOI: 10.1162/neco_a_01238.
13. *Mozafari M., Ganjtabesh M., Nowzari-Dalini A., Thorpe S. J., Masquelier T.* Bio-inspired digit recognition using reward-modulated Spike-Timing-Dependent Plasticity in deep convolutional networks // Pattern Recognition. 2019. Vol. 94. P. 87–95. DOI: 10.1016/j.patcog.2019.05.015.
14. *Frémaux N., Sprekeler H., Gerstner W.* Functional requirements for reward-modulated Spike-Timing-Dependent Plasticity // The Journal of Neuroscience. 2010. Vol. 30, no. 40. P. 13326–13337. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.6249-09.2010.
15. *Juarez-Lora A., Ponce-Ponce V. H., Sossa H., Rubio-Espino E.* R-STDP spiking neural network architecture for motion control on a changing friction joint robotic arm // Frontiers in Neurobotics. 2022. Vol. 16. P. 904017. DOI: 10.3389/fnbot.2022.904017.
16. *Ivanov D., Chezhegov A., Kiselev M., Grunin A., Larionov D.* Neuromorphic artificial intelligence systems // Frontiers in Neuroscience. 2022. Vol. 16. P. 959626. DOI: 10.3389/fnins.2022.959626.
17. *Kiselev M., Ivanov A., Ivanov D.* Approximating conductance-based synapses by current-based synapses // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research IV. Neuroinformatics 2020. Studies in Computational Intelligence. 2020. Vol. 925. P. 394–402. DOI: 10.1007/978-3-030-60577-3_47.
18. *Kiselev M. V.* A synaptic plasticity rule providing a unified approach to supervised and unsupervised learning // Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks. 2017. P. 3806–3813. DOI: 10.1109/IJCNN.2017.7966336.
19. *Ho V. M., Lee J. A., Martin K. C.* The cell biology of synaptic plasticity // Science. 2011. Vol. 334, no. 6056. P. 623–628. DOI: 10.1126/science.1209236.
20. *Citri A., Malenka R. C.* Synaptic plasticity: Multiple forms, functions, and mechanisms // Neuropsychopharmacology Reviews. 2008. Vol. 33. P. 18–41. DOI: 10.1038/sj.npp.1301559.
21. *Roberts P. D., Leen T. K.* Anti-hebbian spike-timing-dependent plasticity and adaptive sensory processing // Frontiers in Computational Neuroscience. 2010. Vol. 4. P. 156. DOI: 10.3389/fncom.2010.00156.
22. *Jiajun F.* A review for deep reinforcement learning in atari: Benchmarks, challenges, and solutions // ArXiv:abs/2112.04145. 2022.

References

1. *Moreno-Bote R, Drugowitsch J.* Causal inference and explaining away in a spiking network. Scientific Reports. 2015;5:17531. DOI: 10.1038/srep17531.
2. *Lansdell BJ, Kording KP.* Neural spiking for causal inference and learning. PLoS Computational Biology. 2023;19(4):e1011005. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1011005.
3. *Skatchkovsky N, Jang O, Simeone O.* Bayesian continual learning via spiking neural networks. Frontiers in Computational Neuroscience. 2022;16:1037976. DOI: 10.3389/fncom.2022.1037976.
4. *Friston K.* The history of the future of the bayesian brain. Neuroimage. 2012;62(2):1230–1233. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.10.004.
5. *Kasabov N, Scott NM, Tu E, Marks S, Sengupta N, Capecchi E, Othman M, Doborjeh MG, Murli N, Hartono R, Espinosa-Ramos JI, Zhou L, Alvi FB, Wang G, Taylor D, Feigin V, Gulyaev S, Mahmoud M, Hou Z-G, Yang J.* Evolving spatio-temporal data machines based on the NeuCube neuromorphic framework: Design methodology and selected applications. Neural Networks. 2016;78:1–14. DOI: 10.1016/j.neunet.2015.09.011.

6. Kasabov NK. NeuCube: a spiking neural network architecture for mapping, learning and understanding of spatio-temporal brain data. *Neural Networks*. 2014;52:62–76. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.01.006.
7. Schliebs S, Fiasché M, Kasabov N. Constructing robust liquid state machines to process highly variable data streams. *International Conference on Artificial Neural Networks ICANN 2012: Artificial Neural Networks and Machine Learning – ICANN*. 2012;604–611. DOI: 10.1007/978-3-642-33269-2_76.
8. Doborjeh M, Doborjeh Z, Merkin A, Krishnamurthi R, Enayatollahi R, Feigin V, Kasabov N. Personalized spiking neural network models of clinical and environmental factors to predict stroke. *Cognitive Computation*. 2022;14:2187–2202. DOI: 10.1007/s12559-021-09975-x.
9. Fernando C. From blickets to synapses: Inferring temporal causal networks by observation. *Cognitive Science*. 2013;37(8):1426–1470. DOI: 10.1111/cogs.12073.
10. Markram H, Gerstner W, Sjöström PJ. A history of spike-timing-dependent plasticity. *Frontiers in Synaptic Neuroscience*. 2011;3:4. DOI: 10.3389/fnsyn.2011.00004.
11. Kerr RR, Grayden DB, Thomas DA, Gilson M, Burkitt AN. Coexistence of reward and unsupervised learning during the operant conditioning of neural firing rates. *PLoS ONE*. 2014;9(1): e87123. DOI: 10.1371/journal.pone.0087123.
12. Yuan M, Wu X, Yan R, Tang H. Reinforcement learning in spiking neural networks with stochastic and deterministic synapses. *Neural Computation*. 2019;31(12):2368–2389. DOI: 10.1162/neco_a_01238.
13. Mozafari M, Ganjtabesh M, Nowzari-Dalini A, Thorpe SJ, Masquelier T. Bio-inspired digit recognition using reward-modulated Spike-Timing-Dependent Plasticity in deep convolutional networks. *Pattern Recognition*. 2019;94:87–95. DOI: 10.1016/j.patcog.2019.05.015.
14. Frémaux N, Sprekeler H, Gerstner W. Functional requirements for reward-modulated Spike-Timing-Dependent Plasticity. *The Journal of Neuroscience*. 2010;30(40):13326–13337. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.6249-09.2010.
15. Juarez-Lora A, Ponce-Ponce VH, Sossa H, Rubio-Espino E. R-STDP spiking neural network architecture for motion control on a changing friction joint robotic arm. *Frontiers in Neurorobotics*. 2022;16:904017. DOI: 10.3389/fnbot.2022.904017.
16. Ivanov D, Chezhegov A, Kiselev M, Grunin A, Larionov D. Neuromorphic artificial intelligence systems. *Frontiers in Neuroscience*. 2022;16:959626. DOI: 10.3389/fnins.2022.959626.
17. Kiselev M, Ivanov A, Ivanov D. Approximating conductance-based synapses by current-based synapses. *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research IV. Neuroinformatics 2020. Studies in Computational Intelligence*. 2020;925:394–402. DOI: 10.1007/978-3-030-60577-3_47.
18. Kiselev MV. A Synaptic Plasticity rule providing a unified approach to supervised and unsupervised learning. *Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks*. 2017:3806–3813. DOI: 10.1109/IJCNN.2017.7966336.
19. Ho VM, Lee JA, Martin KC. The cell biology of synaptic plasticity. *Science*. 2011;334(6056): 623–628. DOI: 10.1126/science.1209236.
20. Citri A, Malenka RC. Synaptic plasticity: Multiple forms, functions, and mechanisms. *Neuropsychopharmacology Reviews*. 2008;33:18–41. DOI: 10.1038/sj.npp.1301559.
21. Roberts PD, Leen TK. Anti-hebbian spike-timing-dependent plasticity and adaptive sensory processing. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2010;4:156. DOI:10.3389/fncom.2010.00156.
22. Jiajun F. A review for deep reinforcement learning in atari: Benchmarks, challenges, and solutions. *ArXiv:abs/2112.04145*. 2022.

Киселев Михаил Витальевич — родился в Московской области (1966). Окончил с отличием физический факультет и аспирантуру МГУ им. М. В. Ломоносова. Кандидат технических наук (1993, МГТУ им. Н. Э. Баумана). Сооснователь и генеральный директор компании «Мегапьютер Интеллиджес» (1994–2020). В настоящее время — руководитель направления в частном учреждении «Цифрум» ГК «Росатом»; доцент факультета физики, прикладной математики и информационных технологий Чувашского государственного университета, руководитель лаборатории нейроморфных вычислений ЧГУ. Научные интересы: новые модели импульсных нейронов и синапсов, изучение их свойств, методы кодирования информации в нейронных сетях, модели механизмов кратковременной памяти, процессы самоорганизации хаотических импульсных нейронных сетей, моделирование больших импульсных нейронных сетей на нейроморфных массивно-параллельных компьютерах (GPU, SpiNNaker, Loihi), реализация механизмов обучения ИНС с учителем и без учителя в различных постановках (unsupervised learning, supervised learning, reinforcement learning). Опубликовал свыше 40 научных работ по этой тематике.



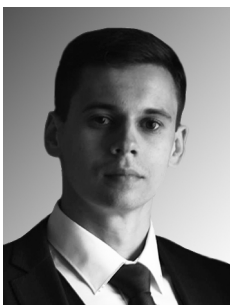
Россия, 428000 Чувашия, Чебоксары, Московский пр-т, 15
Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова
E-mail: mkiselev1@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-7403-6418
AuthorID (eLibrary.Ru): 734474
AuthorID (Scopus): 7005285769

Ларионов Денис Александрович — родился в Москве (1983). Окончил МФТИ (2006). В настоящее время обучается в аспирантуре Чувашского государственного университета им. Ульянова. Руководитель отдела искусственного интеллекта в компании ЧУ «Цифрум» (компания Госкорпорации «Росатом»). Эксперт фонда «Сколково» по искусственному интеллекту. Научный сотрудник МНИОИ им. П. А. Герцена. Область научных интересов: нейроморфные вычисления, предиктивная аналитика в промышленности, анализ медицинских данных. Автор нескольких научных и научно-популярных публикаций, научный редактор.



Россия, 115230 Москва, Варшавское шоссе, 46
Частное учреждение «Цифрум», Государственная корпорация «Росатом»
E-mail: denis.larionov@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7437-2646
AuthorID (WoS): JDM-7863-2023
AuthorID (Scopus): 57417043900

Урусов Андрей Михайлович — родился в Чебоксарах (1993). Окончил магистратуру Чувашского государственного университета им. Ульянова (ЧГУ). В настоящее время обучается в аспирантуре ЧГУ. Работал в НПФ и ведущих банках страны (моделирование и количественная оценка рисков). Области научных интересов: нейроморфные вычисления, анализ данных, задачи оптимизации, количественные финансы, предиктивная аналитика в банковском деле, распределенные финансы. Автор нескольких научных публикаций.



Россия, 117420 Москва, ул. Наметкина, д. 16, корпус 1
Акционерное общество «Газпромбанк»
E-mail: imurusov@mail.ru
AuthorID (eLibrary.Ru): 864799



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 57.024

DOI: 10.18500/0869-6632-003107
EDN: BUSCAO

Версия биоморфной системы навигации*

Ю. А. Мальшев¹✉, В. Г. Яхно^{1,2}

¹Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

²Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия
E-mail: ✉smmalisheva@gmail.com, yakhno@ipfran.ru

Поступила в редакцию 7.11.2023, принята к публикации 13.02.2024,
опубликована онлайн 27.05.2024, опубликована 30.09.2024

Аннотация. Цель настоящей работы состоит в создании и изучении динамики функционирования биорелевантной системы визуальной навигации. **Методы.** В работе используются системы одновременной навигации и составления карты RatSLAM и Orb-SLAM. RatSLAM является биорелевантной моделью визуальной навигации в гиппокампе грызунов. Orb-SLAM представляет собой систему одновременной навигации и составления карты, работающую по принципу поиска и отслеживания изменения положения особых точек на изображении. **Результаты.** В статье представлена версия модифицированной системы визуальной навигации. Система состоит из модуля визуальной одометрии на основе системы Orb-SLAM, а также модуля составления карты и замыкания циклов на основе системы RatSLAM. Это позволяет сочетать точность локализации систем, работающих по принципу отслеживания особых точек на изображении, и нейронную фильтрацию биорелевантных систем. С помощью построенной системы были получены оценки местоположения на публичных и новых наборах данных. **Заключение.** Построенная система визуальной навигации дает оценку местоположения субъекта (видеокамеры) в пространстве, хорошо согласующуюся с истинными данными о местоположении.

Ключевые слова: системы одновременной локализации и картирования, интеграция пути, ориентиры, нейронные сети.

Благодарности. Работа профинансирована Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № FFUF-2024-0037.

Для цитирования: Мальшев Ю. А., Яхно В. Г. Версия биоморфной системы навигации // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 606–624. DOI: 10.18500/0869-6632-003107. EDN: BUSCAO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях — 2023».

Biomorphic navigation system version*

Y. A. Malichev¹✉, V. G. Yakhno^{1,2}

¹National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

²Federal Research Center A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉smmalisheva@gmail.com, yakhno@ipfran.ru

Received 7.11.2023, accepted 13.02.2024, available online 27.05.2024, published 30.09.2024

Abstract. The purpose of this work is to create and study the dynamics of the functioning of a biorelevant visual navigation system. **Methods.** The work uses simultaneous navigation and mapping systems RatSLAM and Orb-SLAM. The RatSLAM system is a biorelevant model of visual navigation in the rodent hippocampus. The Orb-SLAM system is a simultaneous navigation and mapping system that works on the principle of searching and tracking changes in the position of key points in the image. **Results.** The article presents a version of a modified visual navigation system. The system consists of a visual odometry module based on the Orb-SLAM system, as well as a mapping and loop closure module based on the RatSLAM system. This allows you to combine the localization accuracy of systems operating on the principle of tracking key points in the image and neural filtering of biorelevant systems. Using the constructed system, location estimates were obtained on public and new data sets. **Conclusion.** The constructed visual navigation system determines the location of the subject (video camera) in space, which is in good agreement with the ground truth location data.

Keywords: simultaneous localization and mapping systems, path integration, landmarks, neural networks.

Acknowledgements. The study has been supported in the frames of the Governmental Project of the Institute of Applied Physics RAS (Project #FFUF-2024-0037).

For citation: Malichev YA, Yakhno VG. Biomorphic navigation system version. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(5):606–624. DOI: 10.18500/0869-6632-003107

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Способность ориентироваться в пространстве и определять положение вещей важна для выживания людей и животных. В последние десятилетия исследования в области пространственного восприятия особенно успешны и становятся предметом интереса нейробиологии [1–10]. Данные исследования позволили понять некоторые механизмы, используемые животными в процессе навигации, и определили набор типов клеток, ответственных за обработку пространственной информации. Это позволяет приблизиться к пониманию функционирования нейронных сетей, лежащих в основе этой фундаментальной когнитивной способности.

Для изучения механизмов работы навигации в нейронных системах и проверки гипотез об их функционировании представляется разумным создание вычислительных моделей. Подобные модели существуют и называются биоморфными моделями систем навигации [11]. Данные модели принимают на вход те же данные, которые доступны биологическим системам навигации, а на выходе дают оценку положения субъекта в пространстве относительно других объектов. Выходные данные этих систем возможно изучать статистическими методами, получая метрики качества работы систем для их сравнения. Разработке одной из версий подобной системы и настройке режимов её работы посвящена данная работа.

Визуальная навигация в биологических системах. Эдвард Толман выдвинул и доказал гипотезу о том, что у животных есть так называемая когнитивная карта — ментальная картина окружающей среды, несущая информацию о нахождении различных ключевых ориентиров

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Nonlinear dynamics in cognitive research — 2023”.

и их соотношении друг с другом. Эта картина поддерживает ориентацию в сложной изменяющейся обстановке [1]. Кроме того, было показано, что животные при определении местоположения полагаются на вычисление пройденного расстояния. Таким образом, животные могут двигаться между двух локаций в отсутствии информации об окружающей среде, например, в темноте, по мере того как они интегрируют свои внутренние сигналы об изменении местоположения [2]. Примерами таких сигналов являются сигналы вестибулярной системы, отслеживающей движения, а также проприоцепция (ощущение собственной позы в пространстве).

У животных есть несколько навигационных стратегий. Взаимодействие этих стратегий позволяет уменьшить ошибку локализации и позволяет использовать новые возможности. Многие животные могут определять местоположение при помощи интеграции пути [3], при которой животное производит непрерывный мониторинг своего текущего направления и расстояния от некоторой контрольной точки по мере удаления от неё. Зная свое текущее местоположение, животное может определять относительные положения других мест, координаты интеграции пути которых ему известны с точностью, пропорциональной той, с которой он оценивает свое положение с помощью интеграции пути. Кроме того, известно, что в пределах знакомой местности неизбежную ошибку, связанную с интеграцией пути, можно уменьшить за счет информации, полученной при распознавании ориентиров. Etienne et al [4] сообщили о первых поведенческих доказательствах этой гипотезы, показав, что хомяки используют визуальные ориентиры для сброса ошибок своего внутреннего интегратора пути.

Важным аспектом исследования является понимание биологических основ, элементов системы. Основными физиологическими областями познания окружающей среды и навигации в мозге является гиппокамп и его окружение [12–14]. Джон О'Киф в серии экспериментов со свободно двигающимися грызунами, во время которых проводилась внеклеточная регистрация активности, обнаружил, что активность некоторых клеток областей Ca1 и Ca3 гиппокампа была почти точно предсказана пространственным положением животных. Данные нейроны были названы клетками места [5].

Клетки места обычно имеют низкую активность, но сильно увеличивают ее, когда животное находится в области пространства, в котором находится область активации нейрона. Различные клетки места чувствительны к разным областям окружающего пространства, так что в любом месте активна только небольшая группа таких клеток, выполняя таким образом точное кодирование местоположения животного. Более того, на популяционном уровне клетки места предоставляют своего рода «карту» среды, подобную когнитивной карте, предложенной Толманом [1]. Для одной локации активация нейронов места постоянна во времени, что позволяет основным ориентирам оставаться постоянными. Однако в другой области нейроны места могут изменять место своей активности или прекращать активность вообще. Этот процесс назван ремаппингом. Таким образом, для любой области нейрон места будет иметь определенную репрезентацию пространства. Тем не менее на больших пространствах нейрон места может кодировать несколько пространственных областей [15]. Нейроны места способны полагаться на информацию, полученную при интеграции пути. Кроме того, нейроны места также играют роль и в эпизодической памяти [16].

Клетки направления головы были вторым классом пространственно реагирующих нейронов, обнаруженных у грызунов. Об этих нейронах впервые сообщил Ранк [8], который был одним из первых нейробиологов, успешно записавших отдельные нейроны из мозга свободно двигающихся животных. Мотивированный недавним открытием О'Кифа клеток места в гиппокампе он исследовал части мозга, афферентные к гиппокампу, и обнаружил в постсубикулуме (также называемом дорсальным пресубикулумом) преобладание нейронов, чье возбуждение заметно усиливалось, когда животное поворачивалось лицом в определенном направлении. В 1984 году он опубликовал реферат с сообщением об их открытии и поставил перед своим аспирантом Таубе задачу охарактеризовать эти нейроны [6]. В дальнейшем Таубе и его коллеги проследили связи постсубикулярных нейронов направления головы и обнаружили широкую и сложную схему,

включающую как низкоуровневые структуры ствола мозга, так и высокоуровневые корковые структуры [7].

Каждая клетка направления головы имеет свое собственное предпочтительное направление активации, и вся популяция вместе охватывает все 360 градусов горизонтального пространства [7]. Примечательной особенностью системы является тот факт, что сигнал нейронов имеет одну из самых резких кривых настройки среди нейронов мозга и очень когерентен, то есть активация нейронов в любой точке сети согласована с тем, в какую сторону обращено животное в данный момент времени. Любые манипуляции с окружающей средой или самим животным, искажающие обработку направления, затрагивают все клетки вместе, и не получается изменить направление активации одной клетки без изменения направления активации всех остальных. Такая высокая степень согласованности привела к предположению, что сеть имеет взаимосвязи, гарантирующие, что каждая клетка управляется не только входящими сенсорными сигналами, но и активностью других нейронов направления головы в сети. Этот тип сети получил название «сеть с непрерывным кольцевым аттрактором» [8]. Такая сеть обеспечивает возможность обновления сигнала при повороте головы животного в другую сторону — для этого нужен только механизм, который связывает поворот в определенную сторону со сдвигом активности аттракторной сети на определенный угол [8].

Мей-Бритт и Эдвард Мозеры в 2005 году открыли ещё один вид нейронов, которые используются в процессе обработки пространственной информации — решетчатые нейроны [9]. Подобно нейронам места, этот тип нейронов активировался при нахождении в определенной области пространства. Однако данные клетки активировались на всей площади повторяющимся треугольным рисунком по принципу «замощения». На основе регулярного и повторяющегося паттерна активации эти нейроны получили свое название [9]. Решетчатые нейроны считаются одними из самых многочисленных клеток в поверхностных слоях средней энторинальной коры, хотя они встречаются и в более глубоких слоях. Решетчатый нейрон может быть описан тремя координатами: периодом (расстоянием между соседствующими полями активации), ориентацией (по отношению к некоторому опорному направлению) и фазой (двухмерным смещением осей решетки к внешней базовой точке отчета). Более того, решетчатые нейроны анатомически организованы в модули, которые имеют схожий период и ориентацию, но их фазы смещены на разные значения. Фаза активации сигнала такого нейрона может меняться в зависимости от того, в какой среде оказывается животное, но, как с нейронами направления головы, они могут активироваться во всех средах [10]. Сейчас известно, что с наибольшей вероятностью решетчатые нейроны являются субстратом для интеграции пути и влияют на активность нейронов места.

Таким образом, известны различные биологические модули, выполняющие функции, связанные с навигацией, но конкретный механизм обработки информации до сих пор плохо изучен. Гиппокамп может интегрировать путь и направлять животных к цели по неизвестному маршруту. Как гиппокамп выполняет эти расчеты, до сих пор неясно [17–19]. Текущие исследования в области нейробиологии сосредоточены на деталях механизма передачи информации от решетчатых клеток к клеткам места, но не рассматривают работу всей системы навигации в совокупности [20–24]. Однако интерес представляет также и динамика всей системы. Для её изучения на основе описанных биологических фактов представляется разумным создать функциональную модель биологической системы навигации.

1. Техническая реализация системы визуальной навигации

В первую очередь отметим весьма перспективные универсальные модели, предложенные В. Д. Цукеманом [25–29]. В них для описания операций навигации в различных пространствах используются реляционные нейроноподобные сети с четным циклическим торможением. Однако

для оптимизации выполняемой на данном этапе разработки и более наглядного сопоставления с тестовыми результатами ранее разработанных технических систем [11, 30] в описываемой здесь разработке был выбран подход, получивший название система одновременной локализации и картирования (SLAM). Данные технические системы, аналогичные системам визуальной навигации в живых прототипах и работающие на основе обработки изображений, быстро развиваются в последние годы. В основе большинства подходов лежит обнаружение обычных визуальных признаков, таких как SIFT или SURF, извлеченных из монокулярных или стереоизображений с относительно высоким разрешением [30]. Среди данных систем существуют и более биологически релевантные системы, например, RatSLAM [11] – альтернативная система SLAM, основанная на нейронных процессах, лежащих в основе навигации в мозге грызунов. Нейронная фильтрация системы, которая строит гипотезы о локализации путем накопления сенсорных данных, позволяет ей функционировать даже при неоднозначности их восприятия.

1.1. Система RatSLAM. Система состоит из трех основных модулей – клеток позы, клеток локального вида и карты опыта, также возможно добавление четвертого модуля – визуальной одометрии. Данная система функционирует в составе операционной системы для роботов (Robot operating system – ROS) [31], что позволяет использовать модульную архитектуру программ, облегчает использование многозадачности и позволяет пользоваться стандартизированными методами обмена информацией (темы и сообщения) между программными модулями. Структура системы представлена на рис. 1.

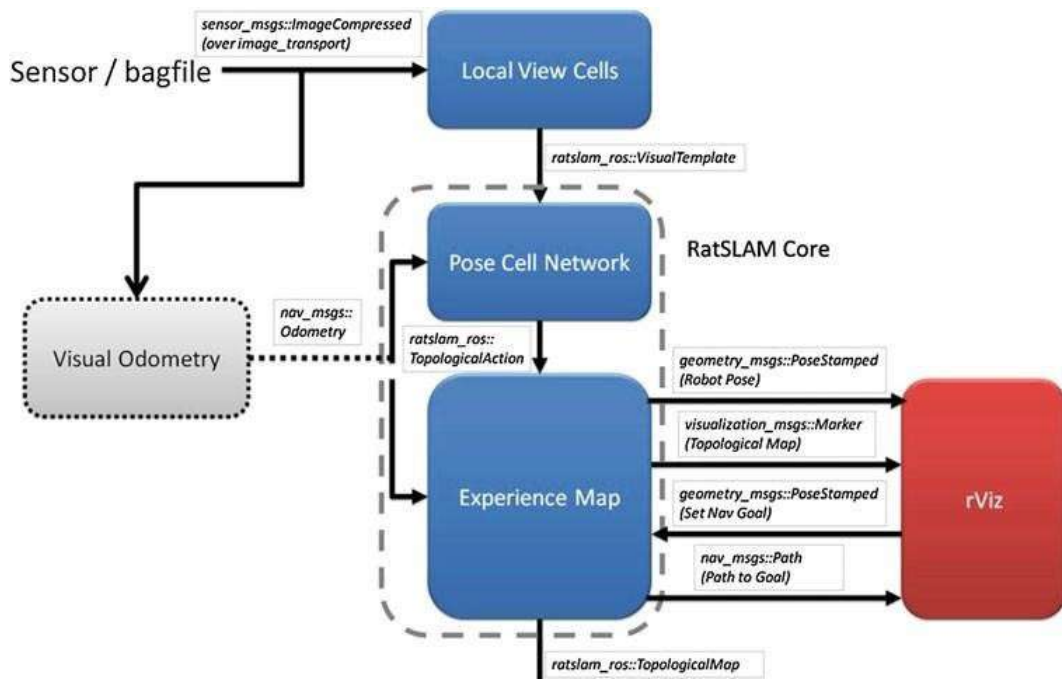


Рис. 1. Структура узлов и сообщений для OpenRatSLAM [32]. Если одометрия уже предоставлена набором данных или роботом, узел Visual Odometry не требуется, как показано пунктирными линиями

Fig. 1. Structure of nodes and messages for OpenRatSLAM [32]. If odometry is already provided by the dataset or robot, the Visual Odometry node is not required, as shown by the dotted lines

1.2. Клетки позы. Клетки позы представляют собой непрерывную аттракторную сеть (CAN) из модулей [33], соединенных возбуждающими и тормозными связями, похожую по своим характеристикам на навигационный нейрон, встречающийся у многих млекопитающих

и называемый решетчатым нейроном [9]. Сеть имеет конфигурацию трехмерной призмы, клетки которой соединены с соседними клетками возбуждающими связями, которые проходят через все границы сети. Сеть представлена на рис. 2.

Координаты массива клеток номинально соответствуют трехмерному положению наземного робота — x , y и θ . Динамика сети клеток в позе такова, что стабильным состоянием является один кластер активированных клеток, называемый пакетом активности или энергетическим пакетом. Центроид этого пакета кодирует наилучшую внутреннюю оценку текущей позы робота. Такое динамическое поведение достигается с помощью локально возбуждающих и глобально тормозящих связей, описываемых распределением ε :

$$\varepsilon_{a,b,c} = e^{-(a^2+b^2)/k_p^{exc}} e^{-c^2/k_d^{exc}} - e^{-(a^2+b^2)/k_p^{inh}} e^{-c^2/k_d^{inh}}, \quad (1)$$

где k_p и k_d — константы дисперсии для места и направления соответственно, а a , b и c — расстояния между клетками в координатах x , y и θ соответственно. Константы дисперсии фиксированы в результате настройки и не должны изменяться. Связи охватывают все шесть граней сети клеток позы, как показано более длинными стрелками на рис. 2. Изменение уровня активности клетки ΔP , вызванное внутренней динамикой, определяется следующим образом:

$$\Delta P_{x',y',\theta'} = \sum_{i=0}^{S_{xy}-1} \sum_{j=0}^{S_{xy}-1} \sum_{k=0}^{S_z-1} P_{i,j,k} \varepsilon_{a,b,c} - \varphi, \quad (2)$$

где S_{xy} — длина стороны квадрата (x , y) плоскости сети клеток позы, S_z — высота сети, а φ — величина глобального торможения.

Информация о собственном движении, предоставляемая одометрическим входом, смещает активность в сети клеток позы для представления движения робота на основе номинального пространственного масштаба для каждой клетки позы. Возбуждающие связи от клеток локального вида обеспечивает механизм для выполнения замыкания цикла.

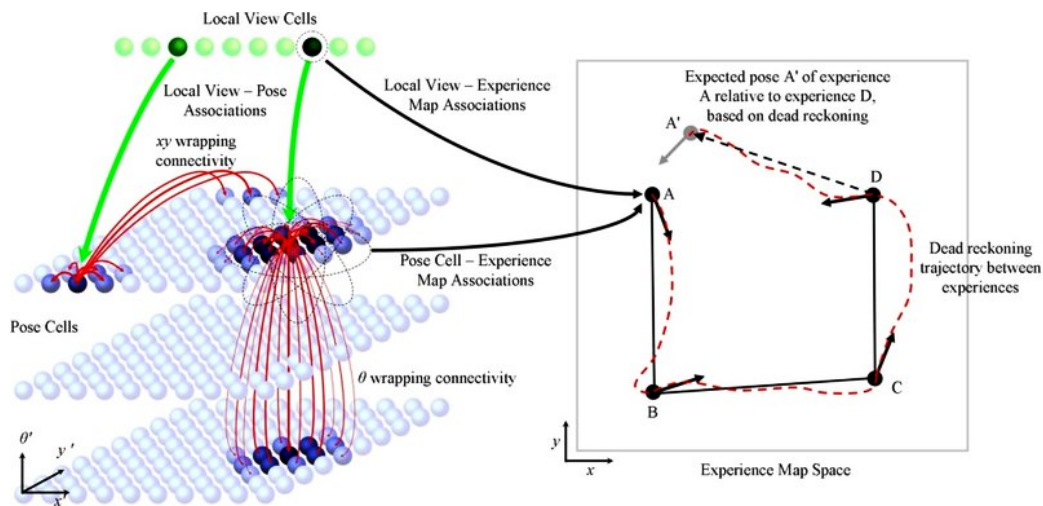


Рис. 2. Основные модули системы RatSLAM [32]

Fig. 2. Basic modules of the RatSLAM system [32]

1.3. Клетки локального вида. Клетки локального вида представляют собой расширяемый массив блоков, каждый из которых соответствует отдельной визуальной сцене в окружающей среде. При появлении новой визуальной сцены создается новая клетка локального вида, которая ассоциируется с пиксельными данными этой сцены. Кроме того, создается возбуждающая связь β (однократное обучение) между этой клеткой локального вида и центроидом доминирующего пакета активности в сети клеток позы в данный момент времени. Когда система снова видит эту сцену, клетка локального вида активируется и увеличивает активность соответствующей клетки позы через эту возбуждающую связь:

$$\Delta P_{x',y',\theta'} = \delta \sum_i \beta_{i,j,k} V_i, \quad (3)$$

где константа δ определяет силу влияния визуальных подсказок на оценку позы робота.

Процесс насыщения гарантирует, что каждый визуальный шаблон может вводить активность только в течение короткого периода времени, чтобы избежать ложной повторной локализации, когда робот неподвижен. Активация клеток локального вида, связанных с конкретным визуальным шаблоном, является нелинейным процессом, таким образом, изменение представления о местоположении субъекта в сети клеток позы, вызываемое визуальными шаблонами, также является нелинейным процессом. Если достаточно длинная последовательность знакомых визуальных сцен протекает в правильном порядке, постоянное возбуждение клетки позы приводит к релокализации, то есть доминирующий пакет активности переходит в то же положение, что и при первом показе сцены.

После предварительной обработки изображения, поступающего с камеры (обрезки неинформативных областей кадра, нормализации яркостей, перевода в монохромный вид и сжатия) модуль клеток локального вида сравнивает полученный визуальный шаблон, представляющий текущее изображение с камеры, со всеми ранее изученными шаблонами. Вычисляется мера сходства на основе суммы абсолютных разностей (SAD) между текущим визуальным шаблоном и каждым ранее изученным визуальным шаблоном. Если наименьшая разница меньше порогового значения, то выбирается соответствующий имеющийся шаблон. В противном случае текущий визуальный шаблон добавляется в базу данных шаблонов. Схема работы модуля представлена на рис. 3.

Данная операция является нелинейной, так как имеет пороговое значение. Кроме того, сеть клеток позы имеет конечные размеры, но соединение противоположных краев сети означает, что теоретически сетью может быть отображена бесконечная область пространства, что подразумевает, что некоторые клетки позы отвечают за несколько точек в пространстве.

Карта опыта — это графическая карта, которая оценивает уникальную оценку позы робота путем объединения информации из клеток позы и клеток локального вида. Каждая точка карты опыта может быть определена тремя переменными:

$$e_i = \{P^i, V^i, p^i\}, \quad (4)$$

где P^i и V^i — состояния активности в ячейках позы и локального представления соответственно в момент формирования опыта, а p^i — расположение опыта в пространстве карты опыта (пространство, в котором выполняется распределение ошибки по графу). Новый опыт создается, когда текущее состояние активности в ячейках позы P^i и локального вида V^i не совпадает с состоянием, связанным с любым из существующих опытов. Для сравнения того, насколько близко текущие состояния позы и локального вида соответствуют состояниям, связанным с каждым опытом, используется метрика S , задаваемая следующим образом:

$$S^i = \mu_p |P^i - P| + \mu_v |V^i - V|, \quad (5)$$

где μ_p и μ_v — веса соответствующих вкладов кодов позы и локального вида в оценку соответствия. Если $\min(S) \geq S_{\max}$, создается новый опыт, определяемый текущими состояниями

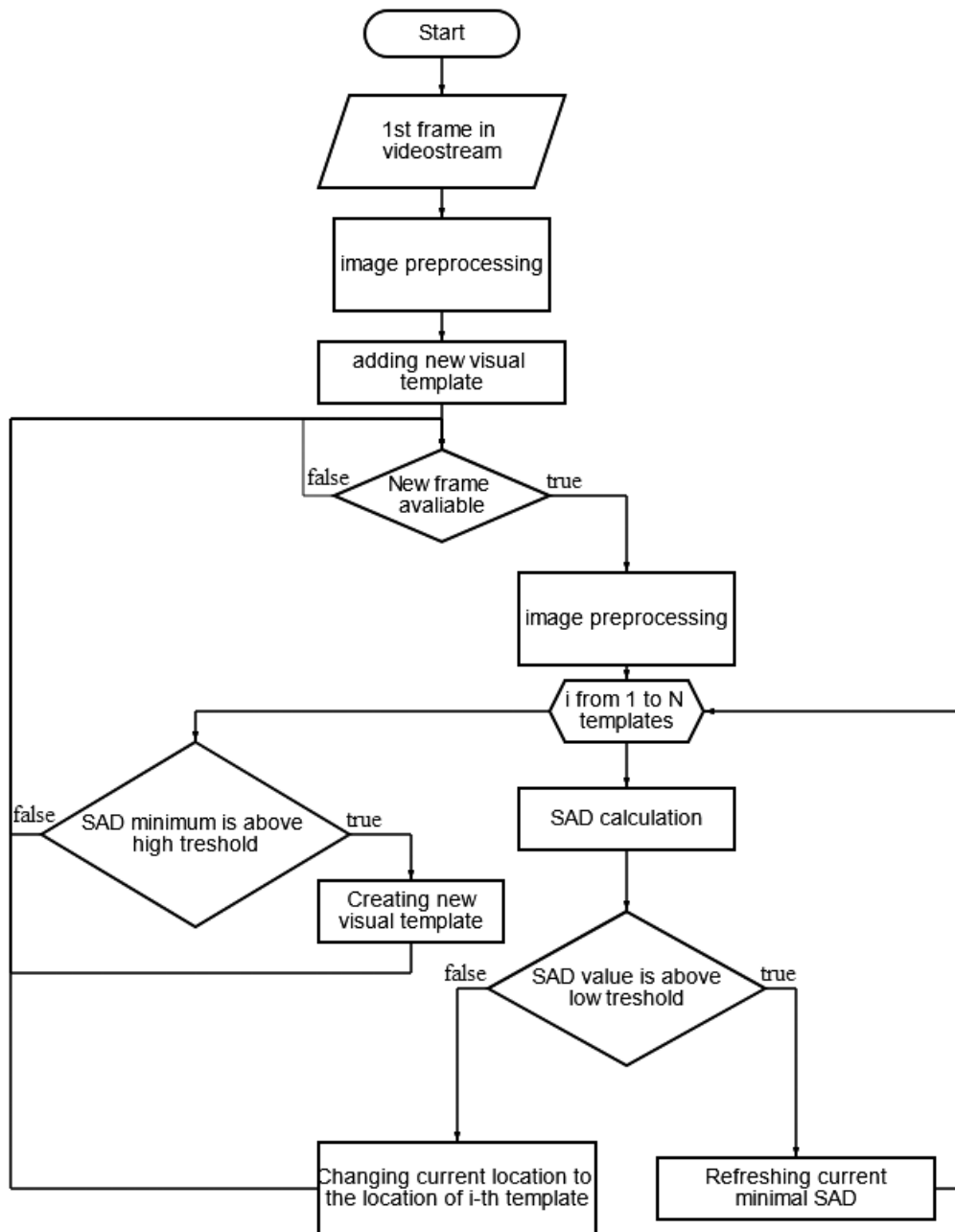


Рис. 3. Блок-схема обработки видеоданных в модуле клеток локального вида

Fig. 3. Block diagram of video data processing in a local view cells module

активности ячеек позы и локального вида. Алгоритм распределения ошибки распределяет одометрическую ошибку по всему графу, создавая карту окружения объекта, которая может быть легко интерпретирована человеком. Изменение местоположения опыта определяется

$$\Delta p^i = \alpha \left[\sum_{j=1}^{N_f} (p^j - p^i - \Delta p^{ij}) + \sum_{k=1}^{N_t} (p^k - p^i - \Delta p^{ki}) \right], \quad (6)$$

где α — константа скорости коррекции, равная 0.5, N_f — количество связей от опыта p_i к другим опытам, и N_t — количество связей от других опытов к опыту p_i .

1.4. Визуальная одометрия. Модуль визуальной одометрии определяет движение камеры путем сравнения последовательных изображений. Скорость вращения оценивается путем определения относительного горизонтального смещения двух последовательных профилей интенсивности изображения с минимальной средней абсолютной разницей между двумя профилями. Профили интенсивности создаются путем суммирования интенсивностей пикселей изображения в вертикальном направлении. Скорость перемещения оценивается путем умножения минимальной разницы на масштабный коэффициент и ограничивается максимальным значением для предотвращения искажения результатов при больших изменениях освещенности.

1.5. Дополнительный модуль визуальной одометрии. Система RatSLAM имеет в своем составе модуль визуальной одометрии, однако данный модуль имеет низкую точность определения местоположения. Использование данного модуля в качестве источника одометрической информации является одним из вариантов работы системы. При этом также возможно использование внешних источников одометрии, таких как сигнал скорости с колес робота. Таким образом, возможно повысить точность работы системы, применив внешнюю визуальную одометрию, основанную на более современных технологиях.

В качестве источника визуальной одометрии высокой точности может использоваться система ORB-SLAM2, работа которой основана на поиске особых точек на изображении с видеокamеры, отслеживании их перемещения между кадрами видеопотока и построении их предположительного положения и положения субъекта в трехмерном пространстве [30]. В данной системе используются особые точки FAST с дескрипторами ORB [34].

Для вычисления перемещения видеокamеры между кадрами видеопотока применяется алгоритм Bundle Adjustment [35], а для замыкания петель применяется DBoW [36]. Данная система является полноценной системой навигации и построения карты, то есть создает глобальную карту и выполняет замыкание петель (сброс ошибки интегрирования пути при попадании в известные области пространства). Следовательно, для использования данной системы в качестве системы визуальной одометрии достаточно отключить систему замыкания петель и преобразовать (произвести дифференцирование по времени) выходные данные системы ORB-SLAM.

Таким образом, в модифицированной системе визуальную одометрию определяет блок, представляющий собой систему ORB-SLAM, а составление карты местности (в виде визуальных шаблонов, соответствующих определенным точкам пространства) и замыкание петель выполняет система RatSLAM, что должно позволить совместить метрическую точность ORB-SLAM и нейронную обработку RatSLAM.

2. Тестирование разработанной системы

Результатом работы алгоритма SLAM является предполагаемая траектория камеры вместе с оценкой полученной карты. Несмотря на то, что оценка качества полученной карты возможна, получение точных карт пространства проблематично из-за влияния различных неконтролируемых факторов. Например, алгоритмы, работающие с ключевыми точками на изображении, составляют карту размещения в пространстве ключевых точек, однако нахождение реальных точек, соответствующих особым точкам карты, может быть затруднительно. Поэтому анализ основывается в основном на качестве предполагаемой траектории, полученной из последовательности изображений RGB. Для оценки мы предполагаем, что выход алгоритма представляет собой последовательность положений из предполагаемой траектории $P_1, \dots, P_n \in SE$ и из реальной траектории $Q_1, \dots, Q_n \in SE$.

2.1. Абсолютная ошибка траектории (ATE). Абсолютная ошибка траектории (ATE — Absolute Trajectory Error) оценивается путем сравнения абсолютных расстояний между расчетной и истинной траекторией. Поскольку обе эти траектории могут быть заданы в произвольных системах координат, для начала их необходимо выровнять. Это делается в закрытой форме при помощи метода Хорна [37], который определяет преобразование твердого тела S , соответствующее решению методом наименьших квадратов, которое отображает предполагаемую траекторию $P_1 : n$ на реальную траекторию $Q_1 : n$. Абсолютную ошибку траектории на временном шаге i можно рассчитать как

$$F_i = Q_i^{-1} S P_i. \quad (7)$$

Оценивая среднеквадратичную ошибку (RMSE) по всем временным показателям компонентов перевода, получаем

$$\text{RMSE}(F_{1:n}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\text{trans}(F_i)\|^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

2.2. Относительная ошибка положения (RPE). Относительная ошибка положения (RPE — Relative Position Error) измеряет локальную точность траектории за фиксированный интервал времени Δt . Таким образом, относительная погрешность положения соответствует дрейфу траектории, что полезно для оценки систем визуальной одометрии. Мы определяем относительную ошибку позы на временном шаге i в качестве

$$E_i = (Q_i^{-1} Q_{i+\Delta})^{-1} (P_i^{-1} P_{i+\Delta})^{-1}. \quad (9)$$

Из последовательности n поз камеры таким образом получается $m = n - \Delta t$ (где Δt — количество кадров) отдельных относительных значений ошибки позы внутри последовательности. На основе этих значений вычисляется среднеквадратичная ошибка (RMSE) по всем временным индексам компонента перемещения как

$$\text{RMSE}(E_{1:n}, \Delta) = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|\text{trans}(E_i)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (10)$$

где $\text{trans}(E_i)$ относится к компоненту перемещения относительной ошибки позы E_i . Возможно оценивать среднюю ошибку, поскольку она более устойчива к выбросам. Некоторые используют медиану вместо среднего, что приписывает выбросам еще меньшее влияние. Для систем визуальной одометрии, которые соответствуют последовательным кадрам, параметр времени $\Delta t = 1$, что является интуитивным выбором; $\text{RMSE}(E_{1:n})$ в таком случае определяет дрейф за кадр. Для систем, которые используют более одного предыдущего кадра, большие значения Δ также могут быть уместными. Поэтому имеет смысл усреднять по всем возможным интервалам времени Δt , то есть вычислить

$$\text{RMSE}(E_{1:n}) = \frac{1}{n} \sum_{\Delta=1}^n \text{RMSE}(E_{1:n}, \Delta). \quad (11)$$

RPE можно использовать для оценки глобальной ошибки траектории путем усреднения по всем возможным интервалам времени. RPE оценивает как поступательные, так и вращательные ошибки, в то время как ATE оценивает только поступательные ошибки. Таким образом, метрика RPE дает нам возможность объединить вращательные и поступательные ошибки в одну меру. Однако ошибки вращения также косвенно фиксируются ATE, поскольку они проявляются в неправильных переносах. С практической точки зрения ATE имеет интуитивно понятную визуализацию, облегчающую визуальный осмотр. Тем не менее эти два показателя сильно коррелированы.

Поскольку в исследуемой системе используются исключительно монокулярные (использующие одну камеру) алгоритмы, определение точного масштаба карты без дополнительной информации невозможно. Таким образом, вычисление ошибки масштаба невозможно, и все метрики будут получены для нормированного масштаба карты.

2.3. Используемые для тестирования наборы данных. Для тестирования используются следующие наборы данных:

- 1) KITTI Dataset [38];
- 2) последовательности НН (видеопоток, снятый авторами).

Набор данных KITTI представляет собой последовательности изображений, полученных стереокамерой (в данной работе используются изображения только с одного объектива), размещенной на автомобиле, поэтому все последовательности сняты вне помещений. Камеры откалиброваны, имеется точная информация о положениях кадров, полученная с помощью LiDAR и GPS датчика. Никакая другая информация не использовалась. Все последовательности сняты со скоростью 10 FPS. Для тестирования были взяты последовательности под номерами 0, 2 [38].

2.4. Запись набора данных «Последовательности НН». Работа системы также проверена на новых тестовых последовательностях, записанных в Нижнем Новгороде с камеры смартфона, установленного за лобовым стеклом автомобиля. Полученные изображения имеют размер 1280×960 точек, в течение последовательностей происходит несколько замыканий петель.

Для создания набора данных для тестирования систем визуальной навигации необходимо, чтобы изображения из данного набора были достаточно высокого разрешения, а также чтобы в поле зрения камеры не было объектов, мешающих обзору пространства (при размещении за лобовым стеклом автомобиля — бликов на стекле, деталей конструкции автомобиля и т. д.). Кроме этого, необходимо также выполнение требований, специфичных для систем визуальной навигации.

Для возможности проведения оценки точности работы системы необходимо записывать истинную траекторию движения. Для данной системы возможно использование сигнала с GPS/ГЛОНАСС, поскольку погрешность получаемого от них сигнала о местоположении меньше погрешности определения местоположения данной системы. Кроме того, поскольку в составе системы присутствует модуль, работающий с ключевыми точками, получаемыми из изображений, необходимо было дополнительно выполнить устранение дисторсии изображений для правильной работы данного модуля. Для устранения дисторсии необходимо знать параметры дисторсии камеры, то есть необходимо было произвести калибровку камеры.

Используемый модуль визуальной одометрии, работающий с ключевыми точками, получаемыми из изображений, не позволяет применять камеры с автоматической настройкой фокуса. Таким образом, изображения записывались без автоматической настройки фокуса.

Поскольку в данной системе ориентирами на карте маршрута являются визуальные шаблоны, формируемые непосредственно из пиксельных данных изображения, желательно иметь наибольшую вариабельность изображения в течение последовательности: разный тип застройки, разный тип улиц и т. д.

Таким образом, возможно использование камеры смартфона при условии её предварительной калибровки, а также отключения функции автоматической настройки фокусного расстояния и параллельной записи местоположения, определяемого через GPS. Данные требования были выполнены при использовании открытых программных продуктов Android camera calibration tool и Android dataset recorder, созданных Robot Perception and Navigation Group, University of Delaware. Данные программы используются для калибровки камеры и записи набора данных соответственно. Записанный набор данных далее переводился в формат сообщений ROS (Robot Operating System).

3. Результаты настройки и их обсуждение

3.1. Система визуальной навигации. В качестве основной системы выбрана реализация системы RatSLAM в библиотеке OpenRatSLAM [32]. Данная система была собрана и протестирована на наборе данных от разработчиков системы, а также на тестовых наборах данных. Были подтверждены корректное отображение положения камеры и работа системы замыкания петель. В ходе работы были добавлены возможность работы системы RatSLAM с изображениями с битовым форматом rgb8, вывод траектории после окончания работы, вычисление и вывод сообщения одометрии в ORB-SLAM2, а также было доработано средство просмотра визуальных шаблонов и текущего вида. Кроме того, в систему ORB-SLAM2 была добавлена возможность пропуска событий замыкания циклов. Скриншот работы системы приведен на рис. 4

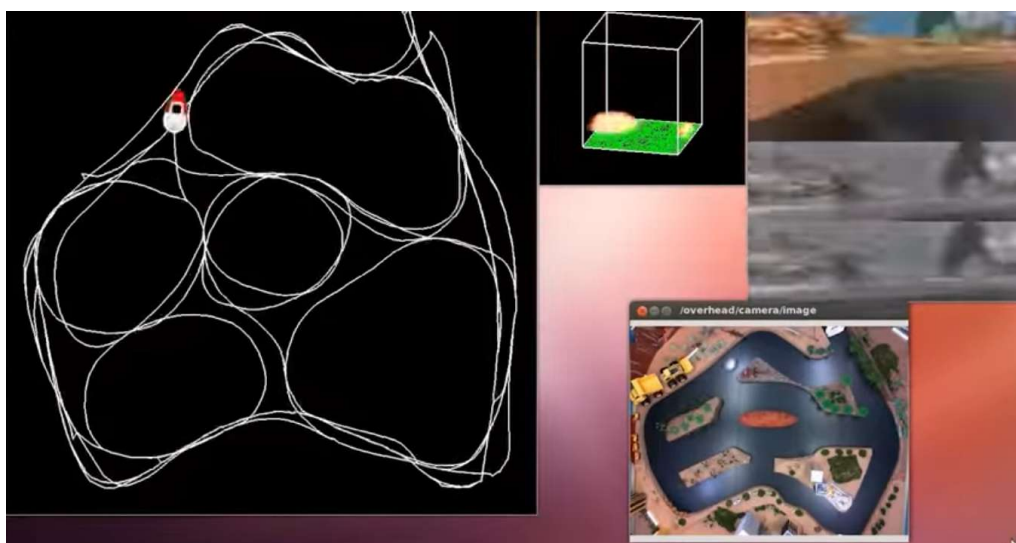


Рис. 4. Скриншот системы OpenRatSLAM [32]. Верхний ряд слева направо: карта, построенная системой; визуализация процессов активации в сети клеток позы; изображение, подаваемое на вход системы. Внизу: вид сверху на испытательный полигон (цвет онлайн)

Fig. 4. Screenshot of the OpenRatSLAM system [32]. Top row from left to right: map built by the system; visualization of activation processes in the network of pose cells; input image. Bottom image is a top view of the test site (color online)

3.2. Метрики работы систем. При проверке работы системы на наборе данных KITTI были получены метрики, представленные в Таблице.

Таблица. Метрики работы систем (м)
Table. Model performance metrics (m)

Последовательность	Метрики	Параметры	Система	
			Ratslam	Модифицированная система
Kitti-00	APE	Max	98.51	42.17
		Mean	39.81	19.68
		Median	35.81	19.90
		Min	0.57	6.03
	RPE	Max	5.38	8.17
		Mean	1.75	2.83
		Median	1.58	2.57
		Min	0.05	0.17

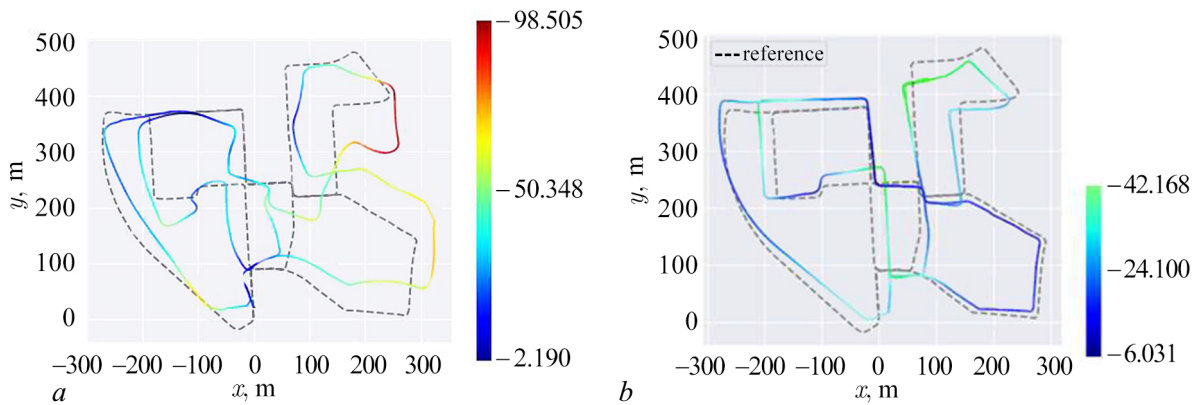


Рис. 5. Визуализации распределения ошибки работ систем на траектории движения: *a* — оригинальная система Ratslam, *b* — модифицированная система (цвет онлайн)

Fig. 5. Visualizations of the error distribution of systems along the motion trajectory: *a* — original Ratslam system, *b* — modified system (color online)

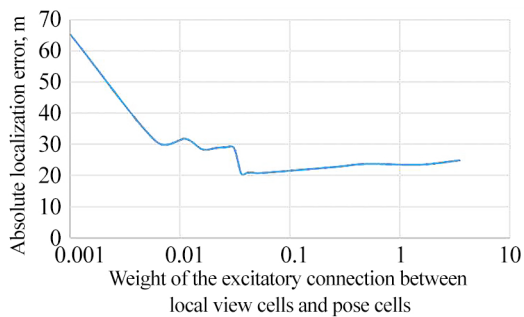


Рис. 6. Зависимость средней абсолютной ошибки локализации от веса возбуждающей связи между клеткам локального вида и клетками позы

Fig. 6. Dependence of the average absolute localization error on the weight of the excitatory connection between local view cells and pose cells

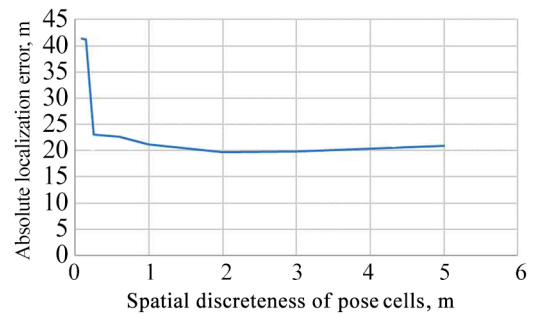


Рис. 7. Зависимость средней абсолютной ошибки локализации от веса пространственной дискретности работы системы

Fig. 7. Dependence of the average absolute localization error on the weight of the spatial discreteness of the system operation

На рис. 5 представлены визуализации распределения абсолютной ошибки локализации систем на траектории движения (слева — оригинальная система Ratslam, справа — для модифицированной системы). Кроме того, были построены графики зависимости среднего значения ошибки определения местоположения от силы возбуждающей связи от клеток локального вида, которая определяет порог нелинейного процесса — события замыкания цикла, а также от пространственной дискретности работы системы. Данные графики представлены на рис. 6, 7.

Заключение

В соответствии с поставленной целью были рассмотрены возможные пути создания версии сложной нелинейной системы управления, выполняющей биологически релевантные операции визуальной навигации. Для собранного прототипа были выбраны необходимые метрики, оценивающие точность работы этой системы. Ориентируясь на эти метрики, была проведена настройка некоторых параметров системы-прототипа, позволившая оптимизировать её функционирование.

В полученной системе реализованы навигационные стратегии, подобные используемым в биологических протопах. В сети клеток позы, функционально подобной сетям решетчатых нейронов в мозге млекопитающих, выполняется интегрирование пути, позволяющее определять местоположение в незнакомых областях пространства, что согласуется с экспериментами [3]. В процессе интегрирования пути накапливается ошибка интегрирования, которая, как и в биологических системах, сбрасывается при попадании в знакомые области пространства, при узнавании знакомых мест [4].

В полученной системе подобное узнавание происходит при совпадении видимого изображения и знакомого визуального шаблона. Однако методы, применяемые для сравнения изображений, слабо релевантны предполагаемым биологическим аналогам. Биологические методы имеют более высокую устойчивость при изменении освещенности, угла обзора и на длительных временных интервалах. Поэтому в дальнейшем планируется применение более биологически релевантных методов [39]. Кроме того, получаемая карта одинаково подробна на часто и редко посещаемых областях, что не соответствует современным представлениям [40]. Поэтому в дальнейшем планируется применение модели пространства, расширяемого с опытом [40]. Также в будущих исследованиях возможно применение методов одометрии, более релевантных биологическим аналогам.

Список литературы

1. Tolman E. C. Cognitive maps in rats and men // *Psychological Review*. 1948. Vol. 55, no. 4. P. 189–208. DOI: 10.1037/h0061626.
2. McNaughton B. L., Battaglia F. P., Jensen O., Moser E. I., Moser M.-B. Path integration and the neural basis of the “cognitive map” // *Nature Reviews Neuroscience*. 2006. Vol. 7. P. 663–678. DOI: 10.1038/nrn1932.
3. Mittelstaedt H., Mittelstaedt M.-L. Homing by Path Integration. In: Papi F., Wallraff H. G. (eds) *Avian Navigation. Proceedings in Life Sciences*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1982. P. 290–297. DOI: 10.1007/978-3-642-68616-0_29.
4. Etienne A. S., Maurer R., Boulens V., Levy A., Rowe T. Resetting the path integrator: a basic condition for route-based navigation // *Journal of Experimental Biology*. 2004. Vol. 207, iss. 9. P. 1491–508. DOI: 10.1242/jeb.00906.
5. O’Keefe J., Dostrovsky J. The hippocampus as a spatial map. Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat // *Brain Research*. 1971. Vol. 34, iss. 1. P. 171–175. DOI: 10.1016/0006-8993(71)90358-1.
6. Muller R. U, Ranck J. B. Jr, Taube J. S. Head direction cells: properties and functional significance // *Current Opinion in Neurobiology*. 1996. Vol. 6, iss. 2. P. 196–206. DOI: 10.1016/s0959-4388(96)80073-0.
7. Taube J. S. The head direction signal: Origins and sensory-motor integration // *Annual Review of Neuroscience*. 2007. Vol. 30. P. 181–207. DOI: 10.1146/annurev.neuro.29.051605.112854.
8. Amit D. J. *Modeling Brain Function: The World of Attractor Neural Networks*. New York, NY: Cambridge University Press, 1989. DOI: 10.1017/CBO9780511623257.
9. Moser E. I., Roudi Y., Witter M. P., Kentros C., Bonhoeffer T., Moser M.-B. Grid cells and cortical representation // *Nature Reviews Neuroscience*. 2014. Vol. 15. P. 466–481. DOI: 10.1038/nrn3766.
10. Hafting T., Fyhn M., Molden S., Moser M.-B., Moser E. I. Microstructure of a spatial map in the entorhinal cortex // *Nature*. 2005. Vol. 436. P. 801–806. DOI: 10.1038/nature03721.
11. Milford M. J. *Robot Navigation from Nature: Simultaneous Localisation, Mapping, and Path Planning Based on Hippocampal Models*. Vol. 41. Springer Tracts in Advanced Robotics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 196 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77520-1.

12. *Eichenbaum H.* The role of the hippocampus in navigation is memory // *Journal of Neurophysiology*. 2017. Vol. 117, no. 4. P. 1785–1796. DOI: 10.1152/jn.00005.2017.
13. *Gu Y., Lewallen S., Kinkhabwala A. A., Domnisoru C., Yoon K., Gauthier J. L., Fiete I. R., Tank D. W.* A map-like micro-organization of grid cells in the medial entorhinal cortex // *Cell*. 2018. Vol. 175, iss. 3. P. 736–750. DOI: 10.1016/j.cell.2018.08.066.
14. *Poulter S., Hartley T., Lever C.* The neurobiology of mammalian navigation // *Current Biology*. 2018. Vol. 28, iss. 17. P. R1023-R1042. DOI: 10.1016/j.cub.2018.05.050.
15. *Park E., Dvorak D., Fenton A. A.* Ensemble place codes in hippocampus: CA1, CA3, and dentate gyrus place cells have multiple place fields in large environments // *PLoS One*. 2011. Vol. 6, iss. 7. P. e22349. DOI: 10.1371/journal.pone.0022349.
16. *Goode T. D., Tanaka K. Z., Sahay A., McHugh T. J.* An integrated index: Engrams, place cells, and hippocampal memory // *Neuron*. 2020. Vol. 107, iss. 5. P. 805–820. DOI: 10.1016/j.neuron.2020.07.011.
17. *Epstein R. A., Patai E. Z., Julian J. B., Spiers H. J.* The cognitive map in humans: spatial navigation and beyond // *Nature Neuroscience*. 2017. Vol. 20, iss. 11. P. 1504–1513. DOI: 10.1038/nn.4656.
18. *Sarel A., Finkelstein A., Las L., Ulanovsky N.* Vectorial representation of spatial goals in the hippocampus of bats // *Science*. 2017. Vol. 355, iss. 6321. P. 176–180. DOI: 10.1126/science.aak9589.
19. *Savelli F., Knierim J. J.* Origin and role of path integration in the cognitive representations of the hippocampus: computational insights into open questions // *Journal of Experimental Biology*. 2019. Vol. 222, iss. 1. P. jeb188912. DOI: 10.1242/jeb.188912.
20. *Rolls E. T., Stringer S. M., Elliot T.* Entorhinal cortex grid cells can map to hippocampal place cells by competitive learning // *Network*. 2006. Vol. 17, iss. 4. P. 447–65. DOI: 10.1080/09548980601064846.
21. *Si B., Treves A.* The role of competitive learning in the generation of DG fields from EC inputs // *Cognitive Neurodynamics*. 2009. Vol. 3, iss. 2. P. 177–187. DOI: 10.1007/s11571-009-9079-z.
22. *Savelli F., Knierim J. J.* Hebbian analysis of the transformation of medial entorhinal grid-cell inputs to hippocampal place fields // *Journal of Neurophysiology*. 2010. Vol. 103, iss. 6. P. 3167–83. DOI: 10.1152/jn.00932.2009.
23. *Danjo T., Toyozumi T., Fujisawa S.* Spatial representations of self and other in the hippocampus // *Science*. 2018. Vol. 359, iss. 6372. P. 213–218. DOI: 10.1126/science.aao3898.
24. *Lian Y., Burkitt A. N.* Learning spatiotemporal properties of hippocampal place cells // *eNeuro*. 2022. Vol. 9, iss. 4. ENEURO.0519-21.2022. DOI: 10.1523/ENEURO.0519-21.2022.
25. *Цукерман В. Д., Чешков Г. Н.* Основы нелинейной динамики сенсорного восприятия. I. Фазовое кодирование в осцилляторных сетях // *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. 2002. № 7–8. С. 65–72.
26. *Цукерман В. Д.* Математическая модель фазового кодирования событий в мозге // *Математическая биология и биоинформатика*. 2006. Т. 1, № 1. С. 97–107. DOI: 10.17537/2006.1.97.
27. *Цукерман В. Д., Еременко З. С., Каримова О. В., Кулаков С. В., Сазыкин А. А.* Когнитивная нейродинамика двух стратегий навигационного поведения организмов // *Известия вузов. ПНД*. 2011. Т. 19, № 6. С. 96–108. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-96-108.
28. *Цукерман В. Д., Харьбина З. С., Кулаков С. В.* Математическая модель пространственного кодирования в гиппокампальной формации. II. Нейродинамические корреляты ментальных траекторий и проблема принятия решений // *Математическая биология и биоинформатика*. 2014. Т. 9, № 1. С. 216–256. DOI: 10.17537/2014.9.216.
29. *Цукерман В. Д.* К творческому познанию креативные начала реляционных нейронных сетей с четным циклическим торможением // *Труды VII Всероссийской конференции. Нелинейная*

динамика в когнитивных исследованиях 2021. Нижний Новгород, 20–24 сентября 2021. Нижний Новгород: ИПФРАН, 2021. С. 186–189.

30. *Mur-Artal R., Montiel J. M. M., Tardós J. D.* ORB-SLAM: A Versatile and Accurate Monocular SLAM System. *IEEE Transactions on Robotics*. 2015. Vol. 31, iss. 5. P. 1147–1163. DOI: 10.1109/TRO.2015.2463671.
31. *Quigley M., Conley K., Gerkey B., Faust J., Foote T., Leibs J., Wheeler R., Ng A. Y.* ROS: an open-source Robot Operating System // *ICRA Workshop on Open Source Software*. 2009. Vol. 3, iss. 3.2. P. 5.
32. *Ball D., Heath S., Wiles J., Wyeth G., Corke P., Milford M.* OpenRatSLAM: an open source brain-based SLAM system // *Autonomous Robots*. 2013. Vol. 34. P. 149–176. DOI: 10.1007/s10514-012-9317-9.
33. *Samsonovich A., McNaughton B. L.* Path integration and cognitive mapping in a continuous attractor neural network model // *The Journal of Neuroscience*. 1997. Vol. 17, iss. 15. P. 5900–5920. DOI: 10.1523/jneurosci.17-15-05900.1997.
34. *Rublee E., Rabaud V., Konolige K., Bradski G. R.* ORB: An efficient alternative to SIFT or SURF. In: *IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV 2011*. Barcelona, Spain, November 6–13, 2011. P. 2564–2571.
35. Triggs B., McLauchlan P. F., Hartley R. I., Fitzgibbon A. W. Bundle Adjustment — A Modern Synthesis. In: Triggs, B., Zisserman, A., Szeliski, R. (eds) *Vision Algorithms: Theory and Practice*. IWVA 1999. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1883. Berlin, Heidelberg: Springer, 2000. P. 298–372. DOI: 10.1007/3-540-44480-7_21.
36. *Galvez-López D., Tardos J. D.* Bags of Binary Words for Fast Place Recognition in Image Sequences // *IEEE Transactions on Robotics*. 2012. Vol. 28, iss. 5. P. 1188–1197. DOI: 10.1109/TRO.2012.2197158.
37. *Horn B. K. P.* Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions // *Journal of the Optical Society of America A*. 1987. Vol. 4, iss. 4. P. 629–641. DOI: 10.1364/josaa.4.000629.
38. *Geiger A., Lenz P., Stiller C., and Urtasun R.* Vision meets robotics: the KITTI dataset // *The International Journal of Robotics Research*. 2013. Vol. 32, iss. 11. P. 1231–1237. DOI: 10.1177/0278364913491297.
39. *Yu F., Wu Y., Ma S., Xu M., Li H., Qu H., Song C., Wang T., Zhao R., Shi L.* Brain-inspired multimodal hybrid neural network for robot place recognition // *Science Robotics*. 2023. Vol. 8, iss. 78. DOI: 10.1126/scirobotics.abm6996.
40. *Zhang H., Rich P. D., Lee A. K., Sharpee T. O.* Hippocampal spatial representations exhibit a hyperbolic geometry that expands with experience // *Nature Neuroscience*. 2023. Vol. 26, iss. 1. P. 131–139. DOI: 10.1038/s41593-022-01212-4.

References

1. Tolman EC. Cognitive maps in rats and men. *Psychological Review*. 1948;55(4):189–208. DOI: 10.1037/h0061626.
2. McNaughton BL, Battaglia FP, Jensen O, Moser EI, Moser M-B. Path integration and the neural basis of the “cognitive map”. *Nature Reviews Neuroscience*. 2006;7:663–678. DOI: 10.1038/nrn1932.
3. Mittelstaedt H, Mittelstaedt M-L. Homing by Path Integration. In: Papi F, Wallraff HG, editors. *Avian Navigation*. Proceedings in Life Sciences. Berlin, Heidelberg: Springer; 1982. P. 290–297. DOI: 10.1007/978-3-642-68616-0_29.
4. Etienne AS, Maurer R, Boulens V, Levy A, Rowe T. Resetting the path integrator: a basic

- condition for route-based navigation. *Journal of Experimental Biology*. 2004;207(9):1491–508. DOI: 10.1242/jeb.00906.
5. O’Keefe J, Dostrovsky J. The hippocampus as a spatial map. Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat. *Brain Research*. 1971;34(1):171–175. DOI: 10.1016/0006-8993(71)90358-1.
 6. Muller RU, Ranck JB Jr, Taube JS. Head direction cells: properties and functional significance. *Current Opinion in Neurobiology*. 1996;6(2):196–206. DOI: 10.1016/s0959-4388(96)80073-0.
 7. Taube JS. The head direction signal: Origins and sensory-motor integration. *Annual Review of Neuroscience*. 2007;30:181–207. DOI: 10.1146/annurev.neuro.29.051605.112854.
 8. *Amit DJ*. Modeling Brain Function: The World of Attractor Neural Networks. New York, NY: Cambridge University Press; 1989. DOI: 10.1017/cbo9780511623257.004.
 9. Moser E, Roudi Y, Witter MP, Kentros C, Bonhoeffer T, Moser M-B. Grid cells and cortical representation. *Nature Reviews Neuroscience*. 2014;15:466–481. DOI: 10.1038/nrn3766
 10. Hafting T, Fyhn M, Molden S, Moser MB, Moser EI. Microstructure of a spatial map in the entorhinal cortex. *Nature*. 2005;436:801–806. DOI: 10.1038/nature03721.
 11. Milford MJ. Robot Navigation from Nature: Simultaneous Localisation, Mapping, and Path Planning Based on Hippocampal Models. Vol. 41. Springer Tracts in Advanced Robotics. Berlin, Heidelberg: Springer; 2008. 196 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77520-1.
 12. Eichenbaum H. The role of the hippocampus in navigation is memory. *Journal of Neurophysiology*. 2017;117(4):1785–1796. DOI: 10.1152/jn.00005.2017.
 13. Gu Y, Lewallen S., Kinkhabwala AA, Domnisoru C, Yoon K, Gauthier JL, Fiete IR, Tank DW. A map-like micro-organization of grid cells in the medial entorhinal cortex. *Cell*. 2018;175(3):736–750. DOI: 10.1016/j.cell.2018.08.066.
 14. Poulter S, Hartley T, Lever C. The neurobiology of mammalian navigation. *Current Biology*. 2018;28(17):R1023–R1042. DOI: 10.1016/j.cub.2018.05.050.
 15. Park E, Dvorak D, Fenton AA. Ensemble place codes in hippocampus: CA1, CA3, and dentate gyrus place cells have multiple place fields in large environments. *PLoS One*. 2011;6(7):e22349. DOI: 10.1371/journal.pone.0022349.
 16. Goode TD, Tanaka KZ, Sahay A, McHugh TJ. An integrated index: Engrams, place cells, and hippocampal memory. *Neuron*. 2020;107(5):805–820. DOI: 10.1016/j.neuron.2020.07.011.
 17. Epstein RA, Patai EZ, Julian JB, Spiers HJ. The cognitive map in humans: spatial navigation and beyond. *Nature Neuroscience*. 2017;20(11):1504–1513. DOI: 10.1038/nn.4656.
 18. Sarel A, Finkelstein A, Las L, Ulanovsky N. Vectorial representation of spatial goals in the hippocampus of bats. *Science*. 2017;355(6321):176–180. DOI: 10.1126/science.aak9589.
 19. Savelli F, Knierim JJ. Origin and role of path integration in the cognitive representations of the hippocampus: computational insights into open questions. *Journal of Experimental Biology*. 2019;222(1):jeb188912. DOI: 10.1242/jeb.188912.
 20. Rolls ET, Stringer SM, Elliot T. Entorhinal cortex grid cells can map to hippocampal place cells by competitive learning. *Network*. 2006;17(4):447–65. DOI: 10.1080/09548980601064846.
 21. Si B, Treves A. The role of competitive learning in the generation of DG fields from EC inputs. *Cognitive Neurodynamics*. 2009;3(2):177–87. DOI: 10.1007/s11571-009-9079-z.
 22. Savelli F, Knierim JJ. Hebbian analysis of the transformation of medial entorhinal grid-cell inputs to hippocampal place fields. *Journal of Neurophysiology*. 2010;103(6):3167–83. DOI: 10.1152/jn.00932.2009.
 23. Danjo T, Toyozumi T, Fujisawa S. Spatial representations of self and other in the hippocampus. *Science*. 2018;359(6372):213-218. DOI: 10.1126/science.aao3898.

24. Lian Y, Burkitt AN. Learning spatiotemporal properties of hippocampal place cells. *eNeuro*. 2022;9(4):ENEURO.0519-21.2022. DOI: 10.1523/ENEURO.0519-21.2022.
25. Tsukerman VD, Cheshkov GN. Fundamentals of nonlinear dynamics of sensory perception. I. Phase coding in oscillatory networks. *Neurocomputers: development, application*. 2002;(7-8): 65–72.
26. Tsukerman VD. Mathematical model of phase coding of events in the brain. *Mathematical biology and bioinformatics*. 2006;1(1):97–107. DOI: 10.17537/2006.1.97.
27. Tsukerman VD, Eremenko ZS, Karimova OV, Kulakov SV, Sazykin AA. Cognitive neurodynamics of two strategies of navigation behavior of organisms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2011;19(6):96–108. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-96-108.
28. Tsukerman VD, Kharybina ZS, Kulakov SV. Mathematical model of spatial encoding in the hippocampal formation. II. Neurodynamic correlates of mental trajectories and the problem of decision making. *Mathematical biology and bioinformatics*. 2014;9(1):216–256. DOI: 10.17537/2014.9.216.
29. Tsukerman VD. Towards creative cognition, the creative principles of relational neural networks with even cyclic inhibition. In: *Proceedings of the VII All-Russian Conference. Nonlinear dynamics in cognitive research 2021, Nizhny Novgorod, September 20–24, 2021*. Nizhny Novgorod: IPFRAN; 2021. P. 186–189.
30. Mur-Artal R, Montiel JMM, Tardós JD. ORB-SLAM: A Versatile and Accurate Monocular SLAM System. *IEEE Transactions on Robotics*. 2015;31(5):1147–1163. DOI: 10.1109/TRO.2015.2463671.
31. Quigley M, Conley K, Gerkey B, Faust J, Foote T, Leibs J, Wheeler R, Ng A. ROS: an open-source Robot Operating System. *ICRA Workshop on Open Source Software*. 2009;3(3.2):5.
32. Ball D, Heath S, Wiles J, Wyeth G, Corke P, Milford M. OpenRatSLAM: an open source brain-based SLAM system. *Autonomous Robots*. 2013;34:149–176. DOI: 10.1007/s10514-012-9317-9.
33. Samsonovich A, McNaughton BL. Path integration and cognitive mapping in a continuous attractor neural network model. *The Journal of Neuroscience*. 1997;17(15):5900–5920. DOI: 10.1523/jneurosci.17-15-05900.1997.
34. Rublee E, Rabaud V, Konolige K, Bradski GR. ORB: An efficient alternative to SIFT or SURF. In: *Proceedings of the 2011 International Conference on Computer Vision, ICCV 2011, Barcelona, Spain, November 6–13, 2011*. P. 564–2571.
35. Triggs B, McLauchlan PF, Hartley RI, Fitzgibbon AW. Bundle Adjustment – A Modern Synthesis. In: *Triggs, B., Zisserman, A., Szeliski, R. (eds) Vision Algorithms: Theory and Practice. IWVA 1999. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1883. Berlin, Heidelberg: Springer; 2000*. P. 298–372. DOI: 10.1007/3-540-44480-7_21.
36. Galvez-López D, Tardós JD. Bags of Binary Words for Fast Place Recognition in Image Sequences. *IEEE Transactions on Robotics*. 2012;28(5). P. 1188–1197. DOI: 10.1109/TRO.2012.2197158.
37. Horn BK. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *Journal of the Optical Society of America A*. 1987;4(4):629–641. DOI: 10.1364/josaa.4.000629.
38. Geiger A, Lenz P, Stiller C, and Urtasun R. Vision meets robotics: the KITTI dataset. *The International Journal of Robotics Research*. 2013;32(11):1231–1237. DOI: 10.1177/0278364913491297.
39. Yu F, Wu Y, Ma S, Xu M, Li H, Qu H, Song C, Wang T, Zhao R, Shi L. Brain-inspired multimodal hybrid neural network for robot place recognition. *Sci Robot*. 2023;8(78). DOI: 10.1126/scirobotics.abm6996.
40. Zhang H, Rich PD, Lee AK, Sharpee TO. Hippocampal spatial representations exhibit a hyperbolic geometry that expands with experience. *Nature Neuroscience*. 2023;26(1):131–139. DOI: 10.1038/s41593-022-01212-4.



Мальшев Юрий Александрович — родился в Тольятти (1999). Окончил с отличием факультет электроники и приборостроения Самарского государственного аэрокосмического университета по направлению «Биотехнические системы и технологии» (2021), факультет биологии и биомедицины Нижегородского государственного университета по направлению «Нейробиология» (2023). Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, компьютерное моделирование.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: smmalisheva@gmail.com



Яхно Владимир Григорьевич — родился в 1947 году. Доктор физико-математических наук. Заведующий лабораторией в Институте прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Научные интересы связаны с исследованием процессов самоорганизации в распределенных неравновесных системах и применением автоволновых представлений для моделирования процессов обработки сенсорных сигналов, развития компьютерных алгоритмов кодирования сложных изображений (разработка биометрических систем); рассмотрением характерных процессов в модельных системах, имитирующих функционирование живых систем. Имеет более 200 научных публикаций (в том числе 2 монографии и 10 патентов).

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН
E-mail: yakhno@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0002-4689-472X
AuthorID (eLibrary.Ru): 18659



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 612.176:4, 004.021

DOI: 10.18500/0869-6632-003118
EDN: EBQJPT

Новый подход к определению физиологической стоимости нагрузки: антиноцицепция и нормализация дыхательного паттерна вариабельности ритма сердца*

М. В. Никулина

Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия
E-mail: [✉nikamarathon@gmail.com](mailto:nikamarathon@gmail.com)

*Поступила в редакцию 30.12.2023, принята к публикации 9.04.2024,
опубликована онлайн 9.09.2024, опубликована 30.09.2024*

Аннотация. Цель этой работы — предложить подход к оценке аллостатической нагрузки, основанный на антиноцицептивном эффекте, возникающем, очевидно, вследствие изменения активности эндогенной опиоидной системы; сравнить оценки, полученные путем измерения болевого порога и расчета индекса респираторного влияния на вариабельность ритма сердца (ВРС). Метод измерения болевого порога основан на фиксации латентного времени термонцицептивной реакции (ЛВТР). Респираторное влияние измеряется путем графического определения минимума нормализованной мощности быстрой составляющей ВРС в диапазоне 0.16...0.67 Гц, соответствующем частоте дыхательного паттерна. **Результаты.** На экспериментальных данных малого объема (4 спортсмена и 4 эпизода физической активности) рассчитано квадратичное уравнение двухфакторной регрессии для ЛВТР, факторов респираторного влияния и стресса. Продемонстрирована высокая корреляция между ЛВТР и респираторным влиянием на ВРС для одного обследованного спортсмена. **Заключение.** На примере спорта показана возможность отслеживать физиологическую стоимость деятельности через ЛВТР. Неудобства и субъективизм процедуры измерения ЛВТР можно обойти, если заменить ее нормализованным числовым индексом, учитывающим влияние дыхания на ВРС и стресс-индекс. Предложенный подход демонстрирует на исследованной группе наличие референсных значений, однако требует дальнейших специально спланированных клинических исследований.

Ключевые слова: эндогенная опиоидная система, антиноцицепция, латентное время термонцицептивной реакции, нормализация вариабельности ритма сердца, индекс анальгезии/ноцицепции, аллостатическая нагрузка.

Благодарности. Работа частично профинансирована Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № FFUF-2024-0029.

Для цитирования: Никулина М. В. Новый подход к определению физиологической стоимости нагрузки: антиноцицепция и нормализация дыхательного паттерна вариабельности ритма сердца // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 625–635. DOI: 10.18500/0869-6632-003118. EDN: EBQJPT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях — 2023».

The new approach to calculation of physiological cost of activity: antinociception and normalization of the respiratory pattern of heart rate variability*

M. V. Nikulina

Federal Research Center A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics
of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ✉nikamarathon@gmail.com

Received 30.12.2023, accepted 9.04.2024, available online 9.09.2024, published 30.09.2024

Abstract. Purpose of this work is to propose an approach to the assessment of allostatic load based on the antinociceptive effect, which appears, obviously, due to changes in the activity of the endogenous opioid system (EOS); to compare the estimates obtained by measuring the pain threshold and calculating the index of respiratory effects on heart rate variability (HRV). The method of measuring the pain threshold is based on fixing the latent time of the thermociceptive reaction (LTTR). The respiratory effect is measured by graphically determining the minimum normalized power of the fast HRV component in the range of 0.16..0.67 Hz, corresponding to the frequency of the respiratory pattern. Results. Based on small-volume experimental data (4 athletes and 4 episodes of physical activity), a quadratic two-factor regression equation was calculated for LTTR, respiratory effects factor and stress. A high correlation was demonstrated between the respiratory effect on HRV and the LTTR for one studied athlete. Conclusion. Using the example of sports, it is shown that it is possible to track the physiological cost of activities through LTTR. The inconveniences and subjectivity of the LTTR measurement procedure can be circumvented by replacing it with a normalized numerical index that considers the effect of breathing on HRV and the stress index. The proposed approach demonstrates the presence of reference values in the studied group, but requires further specially planned clinical studies.

Keywords: endogenous opioid system, antinociception, latent time of thermociceptive reaction, normalization of heart rate variability, analgesia/nociception index, allostatic load.

Acknowledgements. The work was partially funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment of the IPF RAS, the project № FFUF-2024-0029.

For citation: Nikulina MV. The new approach to calculation of physiological cost of activity: antinociception and normalization of the respiratory pattern of heart rate variability. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(5):625–635. DOI: 10.18500/0869-6632-003118

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В данной работе предлагается простая идея стандартизации измерения аллоstaticической нагрузки (АН). Аллоstaticическая нагрузка — суть физиологической стоимости конкретной деятельности для организма. При превышении разумного уровня АН закономерно возникают срыв адаптации и болезнь.

Предлагаемый метод оценки АН основан на измерении вызванного физической нагрузкой антиноцицептивного эффекта, который, очевидно, возникает вследствие изменения активности эндогенной опиоидной системы. Полученные результаты позволяют предположить возможность замены исследования порога боли более простым (легкодоступным) анализом нормализованной variability ритма сердца (ВРС).

Существующие стандартные методы анализа ВРС [1–5] неоднозначны и требуют компетенций интерпретатора, искусственных условий для записи кардиоритмограммы, индивидуального подхода, динамического наблюдения и учета контекста деятельности. Предлагаемый метод предоставляет нормализованный числовой индекс. Индекс вычисляется по временному

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Nonlinear dynamics in cognitive research — 2023”.

анализу ВРС, выявляющему респираторное влияние на ВРС. Логика обработки кардиоинтервалограммы (КИГ), записываемой мобильным устройством, основана на логике расчета индекса анальгезии/ноцицепции, предложенном группой французских исследователей в 2006 году [6, 7]. Нормализованный числовой индекс может рассчитываться в реальном времени.

Цель настоящего исследования — продемонстрировать на примере спорта возможность объективного численного мониторинга аллостатической нагрузки, а также сравнить способы оценки АН по латентному времени термоноцицептивной реакции (ЛВТР) и variability ритма сердца.

1. Методика

1.1. Теоретические предпосылки метода. Предлагаемая простая идея стандартизации оценки нагрузки стала логическим объединением следующих известных положений.

1. В 1991 году Дросте отметил, что после физической нагрузки с любыми характеристиками возникает антиноцицептивный эффект [8]. Исследования на людях и животных «показали, что физические упражнения приводят к временной гипоалгезии. Снижение чувствительности к боли проявляется не только после упражнений на длинные дистанции (например, марафонского бега), но также во время и после интенсивных физических упражнений. Гипоалгезия сохраняется после прекращения нагрузки, демонстрируя, что системный анальгетический эффект вызван процессом упражнений» [8].
2. Данный эффект упражнений можно объяснить активацией эндогенной опиоидной системы (ЭОС) в ответ на их стрессогенное действие, поскольку опиоиды обладают анальгетическим свойством. Трехкомпонентная теория стресса С. Б. Парина [9] позиционирует ЭОС как стресс-лимитирующую систему, ограничивающую активацию симпатoadреналовой и гипоталамо-гипофизарно-адреналовой систем. ЭОС с разной степенью доминирования присутствует на всех трех стадиях стресс-реакции.
3. Клиническими наблюдениями и экспериментальными исследованиями показана связь между концентрацией эндогенных опиоидных пептидов мозга, цереброспинальной жидкости, плазмы крови, уровнем болевой чувствительности и происхождением болевого синдрома (Калужный Л. В.; Пузин М. Н., Вязьмин А. Я.) [10, 11]. «Порог боли не является абсолютно стабильной величиной, а подвержен функциональным колебаниям, которые коррелируют с содержанием опиоидных пептидов...». Порог термоноцицептивной реакции было предложено оценивать временным интервалом и изучать его динамику как один из маркеров состояния ЭОС (Литвинова С. В., Надеждин А. В.) [12, 13].
4. Регуляция сердечного ритма осуществляется вегетативной нервной системой (ВНС) и гуморально-метаболическими влияниями. В свою очередь, ВНС находится под модулирующим влиянием центральной нервной системы и импульсов, возникающих в ответ на раздражение различных интеро- и экстерорецепторов (рефлекторная регуляция). Традиционно при спектральном анализе КИГ выделяются диапазоны частот: очень низкий — VLF (0.003...0.040 Гц), низкий — LF (0.04...0.15 Гц) и высокий — HF (0.15...0.4 Гц) [2, 3]. LF соответствует симпатическим, HF — парасимпатическим влияниям. Влияние парасимпатической нервной системы вызывает изменения ритма сердца с частотой 0.15...0.5 Гц, формируя так называемые быстрые или дыхательные высокочастотные волны (HF) [2, 3].
5. С 2006 года в интраоперационную практику внедряется индекс анальгезии/ноцицепции (ANI), в котором степень анальгезии на фоне седации оценивается по респираторному влиянию на ВРС [6, 7, 14–17]. Утверждается, что индекс не зависит от частоты сердечных сокращений и частоты дыхания. Индекс показывает качество анестезии в условиях отсутствия ответа пациента из-за седации.

Очевидно, что антиноцицептивный эффект, возникающий при физической нагрузке, можно объяснить активацией ЭОС. Такая активация была подтверждена автором путем налоксоновой блокады опиоидных рецепторов [18]. Как стресс-лимитирующая ЭОС включается параллельно со стрессорным воздействием, например, физическими упражнениями. Предлагаемый автором метод оценки физической нагрузки основан на измерении её антиноцицептивного эффекта. Порог боли после упражнений различной направленности оценивается по ЛВТР. Его динамика сравнивается с изменением респираторного влияния на ВРС, оцениваемым по индексу, получаемому в соответствии с логикой ANI.

Поскольку «структура субъективного сенсорного пространства специфична для стресса, симпатотонии и ваготонии» [19], естественно, что при недостаточном противодействии ЭОС уровень стресса остается высоким, что влияет на субъективное ощущение боли. Стресс-индекс (SI) входит в пул стандартных параметров ВРС [2–4]. Индекс напряжения регуляторных систем, стресс-индекс — показатель вариационной пульсометрии, характеризующий состояние центрального контура регуляции. Устойчив к эпизодам нарушений ритма, проводимости и артефактам записи. $SI = AMo/2M(x) \cdot Mo$, где $M(x)$ — математическое ожидание, Mo — мода, AMo — амплитуда моды.

1.2. Источники данных и исследуемая группа. Для сбора данных использовались рутинно применяемые в тренировочном процессе кардиопояс и карманная аккумуляторная грелка для рук. Исследуемая группа состояла из 4-х спортсменов-ориентировщиков 1 разряда с симпатикотоническим типом вегетативной регуляции пятнадцати лет: 2 девушки (спортивный стаж 2 и 6 лет) и 2 юношей (стаж 2 и 6 лет) без вредных привычек и хронических заболеваний. Данные собирались в течение трехдневного тренировочного микроцикла из 4-х занятий. Выполненные беговые нагрузки: 9 км, (5×580 м), (2×1000 м), 15 км (девушки) / 20 км (юноши).

1.3. Регистрация КИГ. Кардиоинтервалограмма (рис. 1) — изменение интервала между зубцами R электрокардиограммы во времени — регистрировалась посредством нагрудного пояса — фитнес-датчика сердечного ритма, соединенного со смартфоном, с точностью измерения кардиоинтервалов 1 мс [20].

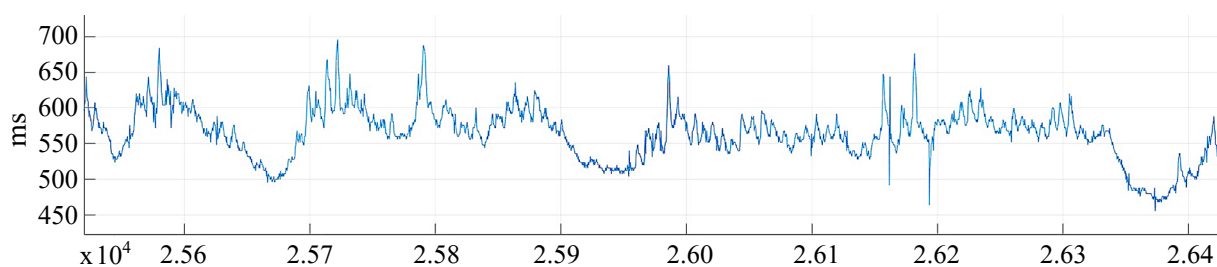


Рис. 1. Отрезок исходной кардиоинтервалограммы $\{RR\}$ длительностью 19 мин ($9 \cdot 10^2$ отсчетов) с артефактами записи. Ордината — величина RR интервала в мс, абсцисса — номер интервала с начала записи

Fig. 1. A segment of the original cardiointervalogram $\{RR\}$ with a duration of 19 minutes ($9 \cdot 10^2$ counts) and artifacts. Ordinate — value of the RR interval in ms, abscissa — number of the interval from the beginning of recording

1.4. Измерение порога термоноцицептивной реакции. Болевой порог оценивался посредством фиксации латентного времени термоноцицептивной реакции. Измерение проводилось в положении сидя в отдельном помещении с исключением отвлекающих факторов. Параллельно записывалась КИГ.

Обычная мощность и температура рукогрейки были снижены и стабилизированы до 5 Вт и 47°C. Спортсменам предлагалось держать грелку не полной рукой, как обычно, а положить запястье левой руки у основания большого пальца на термопластину 1×2 см. Фиксировалось время удержания в секундах до появления неприятных ощущений. Измерение ЛВТР проводились до и через 20–25 минут после каждого занятия.

Ранее метод опробован автором при проведении группового статистического анализа изменения ЛВТР взрослых добровольцев при длительной аэробной нагрузке [20]. Были получены две достоверно различающиеся выборки — до и после нагрузки (непараметрический критерий Вилкоксона для зависимых выборок, $p < 0.05$, количество участников 11). ЛВТР увеличилось в 5.4 ± 4.2 раза (рис. 2). В группу входили различные по квалификации, полу, состоянию ЭОС, типу ВНС участники.

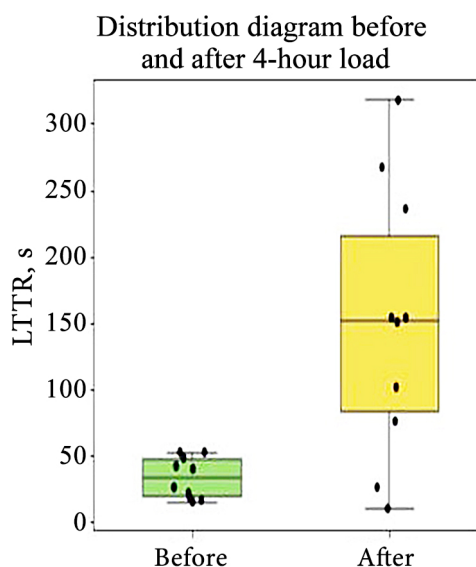


Рис. 2. Диаграмма распределения ЛВТР (с) до и после длительной (> 4 часов) аэробной физической нагрузки. Стандартное отклонение

Fig. 2. LTTR distribution diagram before and after long-term (> 4 hour) aerobic exercise. Standard deviation

1.5. Алгоритм нормализации КИГ. Для измерения респираторного влияния на ВРС к исходной кардиоинтервалограмме RR применяются преобразования, соответствующие логике графического измерения индекса ANI, описанной R. Logier с сотрудниками [6]. Дыхательный паттерн ВРС присутствует в частотном диапазоне 0.15...0.5 Гц. Задача: получить нормализованную мощность ВРС в этом диапазоне.

1. Для исходной временной последовательности RR -интервалов, по определению дискретизированной неравномерно, проводится передискретизация и кубическая интерполяция КИГ на частоте 16 Гц. Получается новая, равномерно дискретизированная последовательность $\{RR_N\}$.
2. К $\{RR_N\}$ применяется Гауссово сглаживание путем вычисления свертки с окном Гаусса G :

$$G(n) = \exp\left(-\frac{2(n - m/2)^2}{(am)^2}\right), \quad (1)$$

имеющим размер $m = 256$ отсчетов и стандартное отклонение $a = 2$.

$$\{RR_M\} = \{RR_N\} * G / \sum G, \quad (2)$$

$\{RR_M\}$ — сглаженная последовательность.

Гауссово сглаживание как фильтр низкой частоты лучше скользящего среднего вследствие меньшей утечки спектра.

3. Вычитанием сглаженной последовательности производится декомпозиция $\{RR_N\}$ на быструю и медленную составляющие. $\{RR_F\} = \{RR_N\} - \{RR_M\}$, где $\{RR_F\}$ — быстрая компонента вариальности [21].

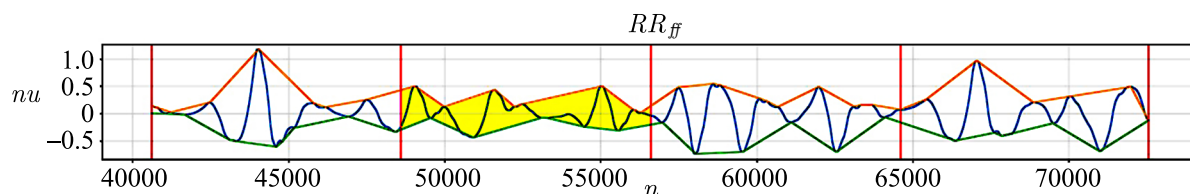


Рис. 3. Отрезок из 512 отсчетов нормализованной $\{RR_{FF}\}$. Залита четверть окна с минимальной площадью между кривыми экстремумов (цвет онлайн)

Fig. 3. A segment of 512 samples of the normalized $\{RR_{FF}\}$. A quarter of the window with the minimum area between the extremum curves is filled in (color online)

4. Вычисляется скользящая норма $\{S\}$ по окну $m = 128$ отсчетов $\{RR_F\}$.

$$S_i = 3 \cdot \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (RR_{Fj})^2}{m}}. \quad (3)$$

5. Каждый элемент последовательности $\{RR_F\}$ делится на соответствующую норму из $\{S\}$: $RR_{Fi} = RR_{Fi}/S_i$.
6. Поскольку метод основан на измерении амплитуд дыхательного паттерна ВРС, нас интересуют частоты в диапазоне 0.15...0.5 Гц. Этот диапазон получается цифровой вейвлет-фильтрацией с базисным вейвлетом Добеши 4 из быстрой компоненты $\{RR_F\}$. При обратном восстановлении последовательности после вейвлет-разложения оставляются только 4-й и 5-й коэффициенты разложения, что соответствует диапазону 0.16...0.67 Гц. Так получается фильтрованная $\{RR_{FF}\}$ [7].
7. На графике нормализованной последовательности $\{RR_{FF}\}$ находятся и соединяются между собой локальные отрицательные минимумы и локальные положительные максимумы (рис. 3). Изменения площади между кривыми локальных минимумов и максимумов отражают изменения сердечно-дыхательного взаимодействия. Площадь измеряется в нормализованных единицах.
8. На отрезке длительностью 512 отсчетов (32 с) горизонтальная ось равномерно делится на 4 части (см. рис. 3). Определяется минимальная площадь из 4-х сегментов, S_{\min} . Вычисляются мгновенное значение S_{\min} каждые 4 с, скользящее среднее каждые 16 с и среднее S_{aver} за интересующий период, например, за время удержания руки на термопластине.
9. Вводится IRI — индекс респираторного влияния на ВРС, вычисляемый как процент заполнения площадью между огибающими поля в границах ± 0.1 н.е.

2. Результаты

На рис. 4 показано изменение ЛВТР в занятиях микроцикла у участников группы. Начало и конец отрезков соответствуют началу и окончанию одного занятия. Примечателен момент окончания 2-го занятия. Основываясь на внешних признаках усталости спортсменки w2, тренер сократил для нее задание с 5 до 3-х повторений, что по физиологическому эффекту соответствовало 5-кратному повторению участницы w1 и было подтверждено замерами ЛВТР и расчетом IRI (окончание второго отрезка см. на рис. 4 и столбец 4 на рис. 5). Видно, что юноши m1 и m2 перенесли данную нагрузку легче. В то же время, как показывает рис. 4, на первой тренировке

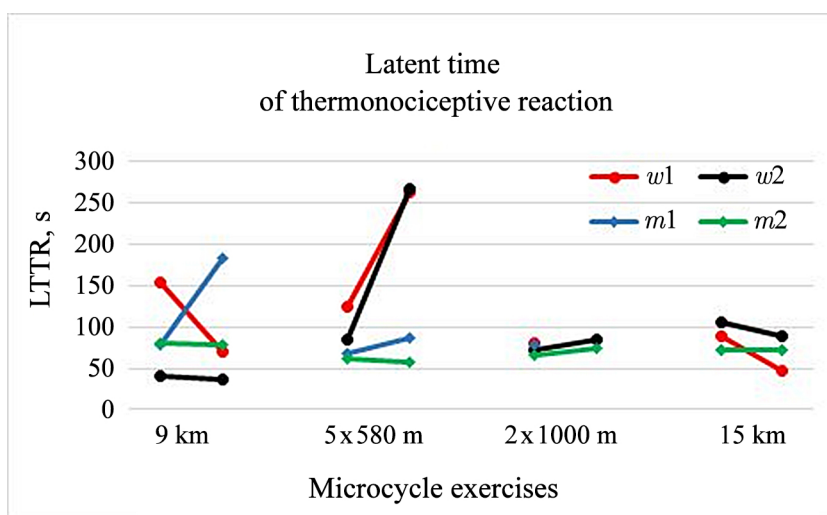


Рис. 4. Изменение ЛВТР при выполнении четырех различных нагрузок тренировочного микроцикла для группы спортсменов. Один отрезок соответствует одному занятию одного человека (w – девушки, m – юноши) (цвет онлайн)

Fig. 4. Changing the LTTR when performing four different exercises of the training microcycle for a group of athletes. One segment corresponds to one activity of the one person (w – girls, m – young men) (color online)

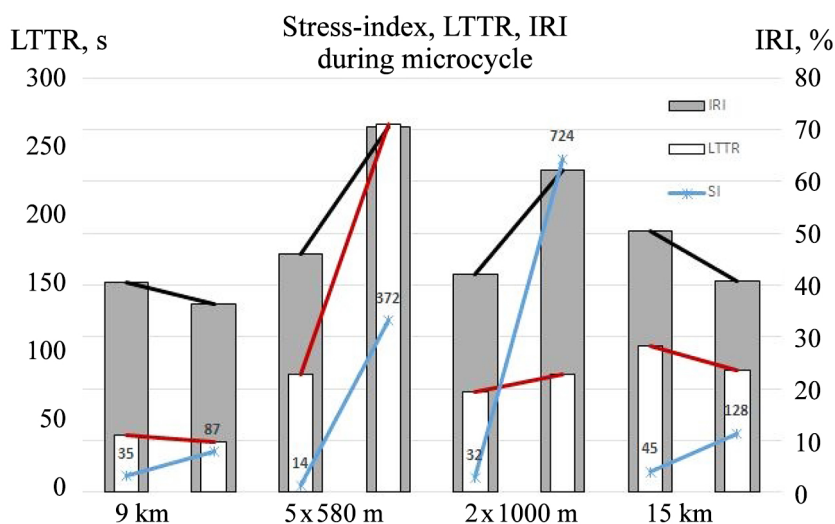


Рис. 5. Изменения в тренировочном микроцикле у спортсменки $w2$: ЛВТР (с) – белые столбцы, латентное время термонцицептивной реакции; IRI (%) – серые столбцы, индекс респираторного влияния на ВРС. Для наглядности красные и черные линии соединяют состояния до и после тренировки. Отрезки с цифрами показывают значение стресс-индекса SI (цвет онлайн)

Fig. 5. The changes in the training microcycle of the athlete $w2$: LTTR (s) – the white columns, the latent time of the thermociceptive reaction; IRI (%) – the gray columns, the index of the respiratory effect on HRV. For clarity, red and black lines connect the states before and after training. The segments with numbers show the value of the stress-index SI (color online)

9 км дались участнику $m1$ тяжелее остальных, что соответствовало более интенсивному прохождению дистанции. Для спортсменки $w1$ занятие имело восстанавливающий характер. Очевидно, что динамика ЛВТР позволяет отслеживать аллостатическую нагрузку деятельности.

Для демонстрации возможной корреляции отдельных физиологических параметров на рис. 5 представлены результаты, полученные для спортсменки $w2$ (спортивный стаж 6 лет).

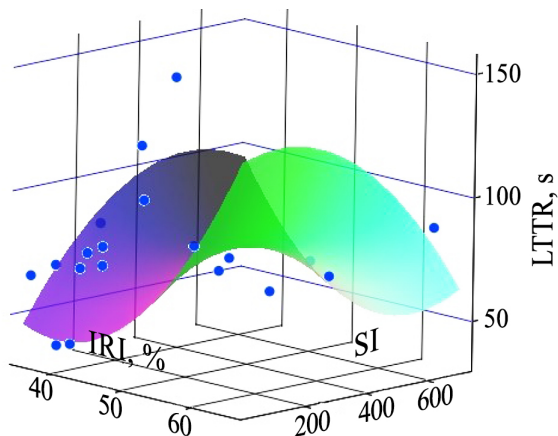


Рис. 6. Поверхность квадратичной двухфакторной регрессии $f(IRI, SI)$ (цвет онлайн)

Fig. 6. The surface of quadratic two-factor regression $f(IRI, SI)$ (color online)

С помощью введения дополнительного фактора стресса SI представленные данные малого объема (4 спортсмена и 4 эпизода физической активности) можно описать квадратичной математической моделью (рис. 6).

$$f(IRI, SI) = C_0 + C_1 \cdot IRI + C_2 \cdot SI + C_3 \cdot IRI \cdot SI + C_4 \cdot IRI^2 + C_5 \cdot SI^2, \quad (4)$$

где $f(IRI, SI)$ – латентное время термонцицептивной реакции, $C_0 \dots C_5$ – коэффициенты, описывающие как независимое, так и синергическое влияние факторов IRI и SI . В Таблице представлены значения коэффициентов двухфакторной регрессии, полученные методом наименьших квадратов.

Анализ показал, что IRI и SI влияют независимо и взаимоусиление незначительно.

Предложенная модель потенциально позволяет заменить трудоемкую процедуру измерения ЛВТР на расчет индексов IRI и SI в реальном времени и исключить субъективность, присущую ЛВТР.

Таблица / Table

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
-299.764	13.688	0.066	$-5.355 \cdot 10^{-3}$	-0.107	$2.528 \cdot 10^{-4}$

Заключение

В работе показано, что динамика ЛВТР позволяет отслеживать аллостатическую нагрузку деятельности. ЛВТР позволяет оценить степень физиологической аналгезии, возникающей вследствие нагрузки на организм.

Показано также, как неудобную, субъективную и выбивающую из контекста деятельности процедуру измерения ЛВТР можно заменить на объективный, неподверженный манипуляциям анализ variability ритма сердца. Предложена модель, связывающая ЛВТР как оценку АН с индексом респираторного влияния IRI и стресс-индексом SI .

Оригинальный графический расчет нормализованной мощности ВРС в диапазоне 0.16...0.67 Гц (IRI) [7] позволяет обойти нелинейные взаимодействия регуляторных систем, которым уделяется внимание при традиционном подходе к анализу ВРС [1–5]. Он не зависит от эпизодических нарушений ритма и проводимости, не чувствителен к артефактам записи, не зависит от частоты дыхания и сердечных сокращений.

Выбор участницы w2 обусловлен наибольшей полнотой зарегистрированных экспериментальных данных. По рисунку заметна высокая корреляция между оцененным по ЛВТР уровнем термонцицептивной чувствительности и нормализованной мощностью высокой частоты ВРС в диапазоне 0.16...0.67 Гц (индексом IRI). Её численная оценка показывает величину $r = 0.86$.

Равенство ЛВТР в столбцах 3 и 6 рис. 5, несмотря на различия в уровне IRI , очевидно, связано с разным уровнем стресса. Некомпенсированный ЭОС стресс может нарушать корреляцию на данных остальных спортсменов. Для других участников значение коэффициента не приводится ввиду очевидной неполноты экспериментальных данных.

Предложенный подход демонстрирует на исследованной группе наличие референсных значений, однако требует дальнейших специально спланированных клинических исследований статистически значимых групп для подтверждения объективности и воспроизводимости предлагаемого метода.

Ожидается, что общедоступное мобильное приложение поможет адекватно оценивать текущую аллостатическую нагрузку в реальном времени при любом виде деятельности.

Предполагается, что исследование динамики мгновенных значений IRI и SI может помочь в оценке скорости развертывания и эффективности ЭОС как стресс-лимитирующей системы.

Список литературы

1. Шлык Н. И. Управление тренировочным процессом спортсменов с учетом индивидуальных характеристик variability ритма сердца // Физиология человека. 2016. Т. 42, № 6. С. 1–10. DOI: 10.7868/S0131164616060187.
2. Малик М., Биггер Дж. Т., Камм А. Дж., Кляйгер Р. Е., Маллиани А., Мосс А. Дж., Шварц П. Дж. Variability сердечного ритма. Стандарты измерения, физиологической интерпретации и клинического использования // Вестник аритмологии. 1999. № 11. С. 52–77.
3. Бабунц И. В., Муриджанян Э. М., Мамаев Ю. А. Азбука анализа variability сердечного ритма. Ставрополь: Принт-мастер, 2002. 112 с.
4. Михайлов В. М. Variability ритма сердца: опыт практического применения метода. Иваново: Иван. гос. мед. академия, 2002. 290 с.
5. Гаврилова Е. А. Спорт, стресс, variability: монография М.: Спорт, 2015. 168 с.
6. Logier R., Jeanne M., De Jonckheere J., Tavernier B. Pain/Analgesia evaluation using heart variability analysis // Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, New York City, USA, 2006. P. 4303–4306. DOI: 10.1109/IEMBS.2006.260494.
7. Jeanne M., Logier R., De Jonckheere J., Tavernier B. Validation of a graphic measurement of heart rate variability to assess analgesia/nociception balance during general anesthesia // 31st Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Minneapolis, Minnesota, USA, 2009. P. 1840–1843. DOI: 10.1109/IEMBS.2009.5332598.
8. Droste C. Körperliche Belastung, endogene Opiate und Schmerz [Physical exercise, endogenous opiates and pain regulation] // Schmerz. 1991. Vol. 5, no 3. P. 138–147. DOI: 10.1007/BF02528099.
9. Парин С. Б. Люди и животные в экстремальных ситуациях: нейрохимические механизмы, эволюционный аспект // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Психология. 2008. Т. 2, № 2. С. 118–135.
10. Калюжный Л. В. Физиологические механизмы регуляции болевой чувствительности. М.: Медицина, 1984. 216 с.
11. Пузин М. Н., Вязьмин А. Я. Эндогенная опиоидная система в механизмах регуляции болевой чувствительности / В кн.: Болевая дисфункция височно-нижнечелюстного сустава. М.: Медицина, 2002. С. 140–146.
12. Литвинова С. В., Надеждин А. В. Способ оценки состояния эндогенной опиоидной системы у человека: патент Рос. Федерация RU2199942; заявл. 27.04.2001; опубл. 10.03.2003.
13. Литвинова С. В., Надеждин А. В., Авдеев С. Н., Хохлов С. Е., Тетенова Е. Ю., Теребилина Н. Н., Панченко Л. Ф., Габаева М. В., Соколов О. Ю., Шульговский В. В. Анализ соотношения порогов ноцицептивных реакций и оценки энкефалиновой активности сыворотки крови у больных героиновой наркоманией // Международный Медицинский Журнал. 2000. № 5. С. 431–435.
14. Ledowski T., Tiong S. W., Lee C., Wong B., Fiori T., Parker N. Analgesia nociception index: evaluation as a new parameter for acute postoperative pain // British Journal of Anaesthesia. 2013. Vol. 111, no. 4. P. 627–629. DOI: 10.1093/bja/aet111.
15. Shahiri T. S., Richebé P., Richard-Lalonde M. Description of the validity of the Analgesia

Nociception Index (ANI) and Nociception Level Index (NOL) for nociception assessment in anesthetised patients undergoing surgery: A systematised review // *Journal of Clinical Monitoring and Computing*. 2021. Vol. 36. P. 623–635. DOI: 10.1007/s10877-021-00772-3.

16. *Спасова А. П., Тихова Г. П., Базаров Р. О.* Индекс анальгезии-ноцицепции: возможности и пределы // *Вестник анестезиологии и реаниматологии*. 2015. Т. 12, № 5. С. 64–70.
17. *Тарасова Н. Ю., Шмигельский А. В., Лубнин А. Ю., Куликов А. С.* Количественный интраоперационный мониторинг анальгезии // *Анестезиология и реаниматология*. 2020. № 3. С. 27–36. DOI: 10.17116/anaesthesiology202003127.
18. *Никулина М. В.* Периодограмма Ломба-Скаргла при активизации эндогенной опиоидной системы // *Безопасный спорт — 2022: IX международная научно-практическая конференция, Санкт-Петербург, 12–13 мая 2022*. СПб.: Изд-во СЗГМУ им. И. И. Мечникова, 2022. С. 389–395.
19. *Полевая С. А.* Интеграция эндогенных факторов в систему обработки экстерорецептивных сигналов: дис ... доктора биологических наук: 03.00.02, 03.00.13. Ин-т теоретической и экспериментальной биофизики РАН, 2009.
20. *Никулина М. В., Творогова О. В.* Мониторинг анальгезии в тренировочном контроле // *Современные подходы к оптимизации физического воспитания, спортивной тренировки и оздоровления населения: Материалы XXI международной научно-практической конференции, Н. Новгород, 9 декабря 2022*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2022. С. 521–530.
21. *Никулина М. В., Антонец В. А.* Опыт оценки variability сердечного ритма по сглаженным кардиоинтервалограммам // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2022. Т. 30, № 2. С. 176–188. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-176-188.

References

1. Shlyk NI. Management of Athletic Training Taking into Account Individual Heart Rate Variability Characteristics. *Human Physiology*. 2016;42(6):655–665. DOI: 10.1134/S0362119716060189.
2. Malik M, Bigger JT, Camm AJ, Kleiger RE, Malliani A, Moss AJ, Schwartz PJ. Heart rate variability: Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use. *European Heart Journal*. 1996;17(3):354–381. DOI: 10.1093/oxfordjournals.eurheartj.a014868.
3. Babunts IV, Mirijanyan EM, Mashayeh YuA. *Abc of heart rate variability analysis*. Stavropol: Print-master; 2002. 112 p. (in Russian).
4. Mikhailov VM. *Heart rate variability: experience of practical application of the method*. Ivanovo: Ivan. state. med. academy; 2002. 290 p. (in Russian).
5. Gavrilova EA. *Sport, stress, variability: monograph*. Moscow: Sport; 2015. 168 p. (in Russian).
6. Logier R, Jeanne M, De Jonckheere J, Tavernier B. Pain/Analgesia evaluation using heart rate variability analysis. *Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, New York City, USA, 2006*. P. 4303–4306. DOI: 10.1109/IEMBS.2006.260494.
7. Jeanne M, Logier R, De Jonckheere J, Tavernier B. Validation of a graphic measurement of heart rate variability to assess analgesia/nociception balance during general anesthesia. *31st Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Minneapolis, Minnesota, USA, 2009*. P. 1840–1843. DOI: 10.1109/IEMBS.2009.5332598.
8. Droste C. Körperliche Belastung, endogene Opiate und Schmerz [Physical exercise, endogenous opiates and pain regulation]. *Schmerz*. 1991;5(3):138–147. DOI: 10.1007/BF02528099.
9. Parin SB. People and animals in extreme situations: neurochemical mechanisms, evolutionary aspect. *Novosibirsk State University Bulletin. Series: Psychology*. 2008;2(2):118–135 (in Russian).
10. Kalquzhnyi LV. *Physiological mechanisms of pain regulation/AMS USSR*. Moscow: Medisina; 1984. 216 p. (in Russian).
11. Puzin MN, Vyazmin AYa. The endogenous opioid system in the mechanisms of pain sensitivity

- regulation. In book: Painful dysfunction of the temporomandibular joint. Moscow: Medisina; 2002. P. 140–146 (in Russian).
12. Litvinova SV, Nadezhdin AV. A method for assessing the state of the endogenous opioid system in humans: RF Patent RU2199942, 27.04.2001 (in Russian).
 13. Litvinova SV, Nadezhdin AV, Avdeev SN, Khokhlov SE, Tetenova EYu, Terebilina NN, Panchenko LF, Shabaeva MV, Sokolov OYu, Shulgovsky VV. Analysis of the ratio of thresholds of nociceptive reactions and total enkephalinase activity of blood serum in patients with heroin addiction. *International Medical Journal*. 2000;5:431–435(in Russian).
 14. Ledowski T., Tiong SW., Lee C, Wong B, Fiori T, Parker N. Analgesia nociception index: evaluation as a new parameter for acute postoperative pain. *British Journal of Anaesthesia*. 2013;111(4):627–629. DOI: 10.1093/bja/aet111.
 15. Shahiri TS, Richebé P, Richard-Lalonde M. Description of the validity of the Analgesia Nociception Index (ANI) and Nociception Level Index (NOL) for nociception assessment in anesthetised patients undergoing surgery: A systematised review. *Journal of Clinical Monitoring and Computing*. 2021;36:623–635. DOI: 10.1007/s10877-021-00772-3.
 16. Spasova AP., Tikhova GP., Bazarov RO. Index of analgesia-nociception: opportunities and limits. *Bulletin of Anesthesiology and Resuscitation*. 2015;12(5):64–70 (in Russian).
 17. Tarasova NYu, Shmigelskii AV, Lubnin AYu, Kulikov AS. Quantitative intraoperative monitoring of analgesia. *Russian Journal of Anesthesiology and Reanimatology*. 2020;3:27–36 (in Russian). DOI: 10.17116/anaesthesiology202003127.
 18. Nikulina MV. Lomb-Scargle periodogram during activation of the endogenous opioid system. *Safe sport — 2022: IX International Scientific and Practical Conference, Saint-Petersburg, May 12-13, 2022*. Saint-Petersburg: Publishing house of I. I. Mechnikov NWSMU; 2022. P. 389–395 (in Russian).
 19. Poleyeva CA. Integration of endogenous factors into the system of processing extraceptive signals: dissertation... Doctors of Biological Sciences: 03.00.02, 03.00.13. Place of protection: Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of the Russian Academy of Sciences. 2009 (in Russian).
 20. Nikulina MV, Tvorogova OV. Analgesia monitoring in the training control. Modern approaches to optimization of physical education, sports training and health improvement of the population: *Proceedings XXI International Scientific and Practical Conference, Nizhny Novgorod, December 9, 2022*. Nizhny Novgorod: Publishing House of N. I. Lobachevsky National Research University; 2022. P. 521–530 (in Russian).
 21. Nikulina MV., Antonets VA. Experience in assessing heart rate variability by smoothed cardiointervalograms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(2):176–188 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-176-188.



Никulina Марина Валентиновна — окончила Институт радиоэлектроники и информационных технологий Нижегородского технического университета имени Р. Е. Алексева по направлению «Вычислительная техника» (1986), Национальный государственный университет физической культуры, спорта и здоровья имени П. Ф. Лесгафта, Санкт-Петербург (1997) и аспирантуру Института биологии и биомедицины ННГУ им. Н. И. Лобачевского (2022). Работает ведущим технологом Института прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук. Мастер спорта России. Награждена медалью «В память 800-летия Нижнего Новгорода». Научные интересы — физиология спорта и экстремальной деятельности, компьютерные технологии.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
 Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН
 E-mail: nikamarathon@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-1548-1583
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1142627



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003111
EDN: EYKFOY

Определение структуры связей в ансамбле хаотических отображений при помощи нейронной сети

А. В. Шабунин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

*Поступила в редакцию 15.01.2024, принята к публикации 3.03.2024,
опубликована онлайн 20.06.2024, опубликована 30.09.2024*

Аннотация. Цель — разработка и исследование алгоритма определения структуры связей ансамбля хаотических автоколебательных систем. Метод основан на определении причинности по Грэнджеру и использовании искусственных нейронных сетей прямого распространения, обучаемых с регуляризацией. Результаты. Рассмотрен метод выявления структуры связей в сети хаотических отображений, использующий принцип причинности по Грэнджеру и аппарат искусственных нейронных сетей. Алгоритм показал свою работоспособность на примере небольших ансамблей отображений с диффузионными связями. Помимо определения топологии сети, он может быть использован для оценки величины коэффициента связи. Точность метода критически зависит от наблюдаемого колебательного режима: он эффективно работает только в случае однородного пространственно-временного хаоса. Обсуждение. Метод показал свою эффективность для простых математических моделей. Однако возможность его использования для реальных систем будет зависеть от ряда факторов, таких как чувствительность к шуму, искажения формы сигналов, наличие перекрестных наводок и внешних воздействий, нестационарность и т. п. Эти вопросы требуют дополнительных исследований.

Ключевые слова: динамический хаос, искусственные нейронные сети, ансамбли отображений, определение структуры связей.

Для цитирования: Шабунин А. В. Определение структуры связей в ансамбле хаотических отображений при помощи нейронной сети // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 636–653. DOI: 10.18500/0869-6632-003111. EDN: EYKFOY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Searching the structure of couplings in a chaotic maps ensemble by means of neural networks

A. V. Shabunin

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

Received 15.01.2024, accepted 3.03.2024,

available online 20.06.2024, published 30.09.2024

Abstract. The purpose of this work is development and research of an algorithm for determining the structure of couplings of an ensemble of chaotic self-oscillating systems. The method is based on the determination of causality by Granger and the use of direct propagation artificial neural networks trained with regularization. Results. We have considered a method for recognition structure of couplings of a network of chaotic maps based on the Granger causality principle and artificial neural networks approach. The algorithm demonstrates its efficiency on the example of small ensembles of maps with diffusion couplings. In addition to determining the network topology, it can be used to estimate the magnitude of the couplings. Accuracy of the method essentially depends on the observed oscillatory regime. It effectively works only in the case of homogeneous space-time chaos. Discussion. Although the method has shown its effectiveness for simple mathematical models, its applicability for real systems depends on a number of factors, such as sensitivity to noise, to possible distortion of the waveforms, the presence of crosstalks and external noise etc. These questions require additional research.

Keywords: dynamical chaos, artificial neural networks, ensembles of maps, couplings structure identification.

For citation: Shabunin AV. Searching the structure of couplings in a chaotic maps ensemble by means of neural networks. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5):636–653. DOI: 10.18500/0869-6632-003111

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Одной из задач математического моделирования является идентификация динамических систем (ДС), то есть реконструкция уравнений, описывающих динамику системы по генерируемым ею сигналам [1–6]. Возможность ее решения основана на теореме Такенса [7]. Если ДС представляет собой сеть из взаимодействующих подсистем, сигналы от которых доступны для наблюдения, то в задачу идентификации войдет также выявление структуры связей сети. Для ее решения используется ряд методов, один из которых основан на определении причинности по Грэнджеру (ПГ) [8,9]. Метод ПГ позволяет выявить влияние одной системы (Active) на другую (Reserient) посредством построения временного прогноза поведения последней при учете динамики A и без такового. Очевидно, что учет A должен либо улучшать прогноз R , то есть уменьшать ошибки предсказания, если A влияет на R , либо оставлять точность прогноза без изменения в противном случае. Таким образом, для определения ПГ строятся два фильтра-предсказателя:

$$\mathbf{R}(n+1) = f(\mathbf{R}(n), \mathbf{A}(n)) \quad (1)$$

$$\mathbf{R}(n+1) = g(\mathbf{R}(n)).$$

Вводя в качестве меры качества предсказания усредненную среднеквадратичную ошибку $\varepsilon = \sqrt{|\mathbf{R}(n+1) - \mathbf{R}(n)|^2}$, можно определить степень влияния A на R как $PI = (\varepsilon_g^2 - \varepsilon_f^2) / \varepsilon_g^2$ [10].

Метод ПГ, а также его модификации используются для определения зависимостей между системами живой и неживой природы [11–17], а его достоверность и особенность применения тестировались на множестве моделей нелинейной динамики [18–20]. Несмотря на кажущуюся

простоту алгоритма, его практическая применимость зависит от ряда факторов: зашумленности наблюдаемых сигналов, их разреженности по времени, задержки между генерируемыми и наблюдаемыми сигналами, наличия «скрытых» источников, воздействующих одновременно на обе анализируемые подсистемы и т.п. Существенную роль могут играть такие факторы, как размерность анализируемой системы, сложность ее топологии, а также выбор алгоритма предсказания.

В качестве инструмента для определения структуры связей ансамбля хаотических генераторов можно использовать искусственную нейронную сеть (ИНС) [21, 22]. Способность нейронной сети работать в качестве фильтра-предсказателя хаотической динамики хорошо известна [23–25]. Соответственно, ИНС могут использоваться в качестве функций f и g в уравнениях (1), реализуя тем самым описанный выше алгоритм. В работе [26] была предложена идея иного подхода, которая представляется нам интересной — воспользовавшись тем, что сама ИНС обладает сетевой структурой, заставить ее в ходе обучения подстроить собственную структуру синаптических связей под структуру связей ансамбля, выявляя тем самым последнюю. Данную задачу можно рассматривать как задачу структурной оптимизации. Как известно, в исходном состоянии необученная ИНС является полносвязной. Такая архитектура может оказаться избыточной для успешного предсказания динамики анализируемой системы. Можно ли заставить нейронную сеть в ходе обучения «убрать» лишние связи? Подобный метод известен и давно используется, правда, для других целей — борьбы с переобучением сети. Он основан на введении «штрафа за сложность», который обеспечивает максимальное упрощение структуры сети при приемлемом уровне ее эффективности. Этот способ называется *обучением с регуляризацией* [21]. Метод регуляризации был впервые предложен А. Н. Тихоновым [27] и получил широкое применение в задачах оптимизации.

При использовании структурной оптимизации, происходящей в ходе обучения ИНС предсказанию хаотической динамики ансамбля, интенсивность синаптических коэффициентов принимает минимально необходимые значения, достаточные для успешного предсказания. Эти величины, должным образом нормированные, могут использоваться для оценки наличия связей между элементами ансамбля и их интенсивности. Такой метод является альтернативой использованию стандартного критерия в форме PI-фактора.

В данной работе мы предлагаем алгоритм оценки структуры связей ансамбля хаотических отображений, основанный на методе [26]. Алгоритм тестируется на нескольких простых примерах — цепочках идентичных одномерных отображений с однонаправленными и взаимными диффузионными связями, для которых показывается его работоспособность. В работе также определяется чувствительность метода к выбору параметра регуляризации и исследуется возможность его использования для оценки величины связей.

1. Исследуемые ансамбли

Пусть автоколебательная система задана отображением последования $x(n+1) = f(x(n))$, где x — вещественная динамическая переменная, описывающая состояние системы в момент времени n ; f — функция, задающая его изменение на одном шаге дискретного времени. Рассмотрим ансамбль из N идентичных взаимодействующих систем:

$$x_i(n+1) = f(x_i) + \sum_{j=1}^N C_{ij} (f(x_j) - f(x_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь нижний индекс представляет собой номер (идентификатор) элемента ансамбля, а матрица \hat{C} задает топологию и интенсивности связей между отображениями. Слагаемое в скобках

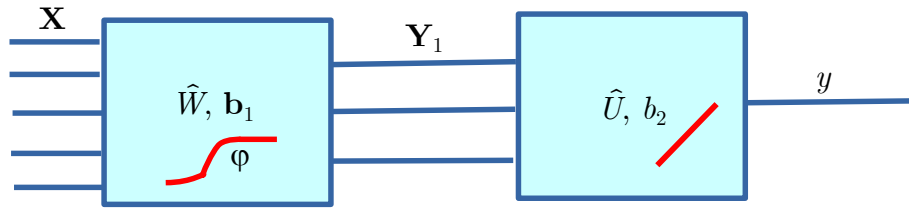


Рис. 1. Схема двухслойной нейронной сети
 Fig. 1. The scheme of a two-layer neural network

представляет собой дискретный аналог оператора ∇ , поэтому данный тип связей называется *диффузионным* (см. [28,29]). В целях упрощения задачи будем полагать силы всех связей одинаковыми. В этом случае матрица \hat{C} принимает вид $\gamma\hat{L}$, где γ — общий для всех элементов коэффициент связи, а матрица смежности \hat{L} задает их структуру: элемент L_{ij} принимает значение 1, если узел j воздействует на узел i , и значение 0, если такое воздействие отсутствует.

Систему уравнений (2) удобно переписать в матрично-векторной форме. Для этого определим вектор-столбец $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, где верхний индекс T означает транспонирование. Тогда получим уравнение

$$\mathbf{x}(n+1) = \hat{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \quad (3)$$

где $N \times N$ матрица \hat{M} — общая матрица связей ансамбля. Она учитывает как взаимные воздействия осцилляторов друг на друга, так и самовоздействия: диагональные элементы $M_{ii} = 1 - q\gamma$, где $q \in [0, N-1]$ — число других узлов, действующих на i -й, а недиагональные $M_{ij} = \gamma L_{ij}$. Определение матрицы \hat{M} , исходя из наблюдений за динамикой ансамбля, и является задачей настоящего исследования.

Выберем в качестве элемента ансамбля (2) логистическое отображение, задаваемое уравнением

$$x(n+1) = \alpha x(n)(1 - x(n)), \quad (4)$$

где $\alpha \in [0 : 4[$ — параметр. Отображение (4) является одной из базовых моделей нелинейной динамики, поведение которой хорошо известно. В зависимости от α оно может демонстрировать различные регулярные и хаотические режимы: неподвижную точку (периодические колебания) с периодом один, колебания с периодом 2^k ($k = 1, 2, 3, \dots$), слабый (когерентный) хаос в виде многолучевых хаотических аттракторов, развитый некогерентный хаос. Последний режим ($\alpha = 3.95$) и выбран нами в качестве исходного.

При объединении отображений (4) в ансамбль, режим колебаний, помимо α , определяется также параметром γ и матрицей \hat{L} . Соответственно, при определенных связях он может смениться с хаотического на регулярный. Такие случаи будут исключаться из рассмотрения.

2. Использование ИНС для оценки матрицы связей ансамбля

Определение структуры связей ансамбля тесно связано с задачей идентификации систем, для решения которой применяются многослойные нейронные сети прямого распространения, обучаемые с учителем [21]. Наиболее простой вариант такой сети — двухслойная сеть с нелинейной и монотонной функцией активации первого слоя и линейным выходным слоем (см. рис. 1), уравнение которой имеет вид

$$\mathbf{Y}_1 = \boldsymbol{\Phi}(\hat{W}\mathbf{X} + \mathbf{b}_1), \quad y = \hat{U}\mathbf{Y}_1 + b_2. \quad (5)$$

Здесь y – скалярный сигнал на выходе сети, $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$ – N -мерный вектор входного сигнала, $\mathbf{Y}_1 = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M]^T$ – M -мерный вектор выходного сигнала первого слоя, \hat{W} и \hat{U} – $M \times N$ и $1 \times M$ матрицы весовых коэффициентов (*синаптических весов*) нейронов первого и второго слоев соответственно, а $M \times 1$ вектор \mathbf{b}_1 и b_2 – значения их порогов; $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_M(\mathbf{x})]^T$ – векторная сигмоидная функция активации первого слоя в виде гиперболического тангенса, действующая поэлементно на каждую компоненту своего аргумента согласно правилу $\varphi_i(\mathbf{x}) = \tanh(x_i)$. Так как ИНС используется в качестве фильтра-предсказателя для системы (2), ее входная размерность (N) должна быть равна размерности ансамбля, в то время как промежуточная размерность (M) может быть выбрана произвольной и определяется сложностью задачи и точностью аппроксимации. В данном исследовании используется значение $M = 10$.

Для идентификации системы (2, 4) будем использовать метод обучения *с учителем*, где в качестве входного сигнала берется вектор $\mathbf{x}(n)$ в текущий момент времени, а в качестве целевого значения – скалярный сигнал от i -го узла $x_i(n+1)$. Таким образом, целью обучения является предсказание динамики i -го отображения на один шаг вперед. Суть обучения заключается в оптимизации параметров сети, минимизирующей целевую функцию $\Phi(\hat{W}, \mathbf{b}_1, \hat{U}, b_2)$. В качестве последней выбирается, как правило, средний квадрат ошибок предсказания $\varepsilon(n) = y(n) - \hat{x}_i(n+1)$:

$$\Phi_{\text{ош}} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K \varepsilon^2(n), \quad (6)$$

где $K \gg 1$ – число обучающих векторов, то есть длительность наблюдения за динамикой ансамбля.

При успешном исходе обучения, то есть при $\Phi_{\text{ош}} \simeq 0$, нейронная сеть правильно предсказывает динамику соответствующего (i -го) отображения ансамбля по предыдущим данным, полученным от всех отображений. Означает ли это, что структура связей внутри нейронных слоев следует структуре связей между осцилляторами в ансамбле? Как будет показано далее, такого соответствия не наблюдается. Причина заключается в том, что используемая при обучении целевая функция ошибок (6) оценивает лишь точность аппроксимации системы (2, 4), однако никак не связана со структурой самой нейронной сети. Для того чтобы ИНС при обучении подстраивалась под структуру ансамбля, необходимо дополнительно к существующей цели обучения – уменьшению ошибок предсказания – потребовать также и одновременного упрощения структуры самой нейронной сети, то есть удаления из нее («обнуления») ненужных для успешной аппроксимации синаптических коэффициентов. Для решения этой задачи, следуя рекомендациям работы [26], добавим к целевой функции (6) «штраф за сложность», представляющий собой сумму квадратов синаптических коэффициентов всей сети:

$$\Phi_{\text{шс}} = \sum_{k=1}^2 \sum_{ij} W_{ij,k}^2, \quad (7)$$

где k – номер слоя, i, j – номера строк и столбцов соответствующих матриц. Новая целевая функция будет представлять собой взвешенную сумму (6) и (7):

$$\Phi = \Phi_{\text{ош}} + r\Phi_{\text{шс}}, \quad (8)$$

где весовой коэффициент $r \geq 0$ называется *коэффициентом регуляризации* (КР). КР определяет соотношение между обеими целями обучения: умением предсказывать динамику ансамбля и уменьшением требующихся для этого синаптических коэффициентов ИНС.

Таким образом, метод диагностирования структуры связей ансамбля отображений заключается в следующем:

1. Создается ИНС, структура которой изображена на рис. 1, со входной размерностью, равной числу элементов ансамбля N , и числом нейронов скрытого слоя $M = 10$.
2. Коэффициенты сети инициализируются случайными значениями, равномерно выбираемыми из интервала $[-1, 1]$.
3. Для обучения ИНС формируется обучающее множество из $K = 5000$ векторов $\{\mathbf{X}^{(n)}\}_{n=0}^{K-1}$, каждый из которых представляет собой отображение всего ансамбля в n -й момент времени: $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}(n)$.
4. Формируется множество целевых значений $\{y_i^{(n)}\}_{n=0}^{K-1}$, т.ч. $y_i^{(n)} = x_i(n+1)$.
5. Проводится обучение сети с регуляризацией, основанной на целевой функции (8). Обучение может проводиться при помощи метода обратного распространения ошибки с использованием градиентных методов. В работе для более быстрой сходимости использовался квазиньютонов алгоритм, относящийся к методам второго порядка. Значения рабочих параметров алгоритма выбирались следующими: минимальное значение целевой функции $\Phi_{\min} = 10^{-6}$; минимальное значение модуля градиента целевой функции $|\nabla\Phi|_{\min} = 10^{-6}$; максимальное число эпох обучения составляло 3000.
6. Для идентификации связей используется матрица синаптических коэффициентов первого слоя \hat{W} , столбцы которой соответствуют номерам входов сети (то есть номерам осцилляторов ансамбля). Для количественного определения степени влияния j -го осциллятора на предсказание динамики i -го рассчитывается среднеквадратичное значение коэффициентов j -го столбца

$$w_{ij} = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{k=1}^M W_{kj}^2},$$

которое затем нормируется на сумму таких значений для всех столбцов:

$$S_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{l=1}^N w_{il}}. \quad (9)$$

Полученные величины S_{ij} будем называть *коэффициентами влияния* j -го узла на i -й, а составленную из них матрицу \hat{S} — *матрицей влияния*. Последняя будет использоваться для выявления структуры связей ансамбля.

3. Определение структуры связей ансамбля логистических отображений

Используя описанный в предыдущем разделе алгоритм, оценим структуру связей в ансамбле (4), постепенно усложняя задачу.

3.1. Два отображения с однонаправленной связью. Рассмотрим сначала простейший случай — два отображения с однонаправленной связью

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f(x_1(n)) \\ x_2(n+1) &= f(x_2(n)) + \gamma(f(x_1(n)) - f(x_2(n))). \end{aligned} \quad (10)$$

Матрица связей для (10) имеет вид

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 - \gamma \end{bmatrix}. \quad (11)$$

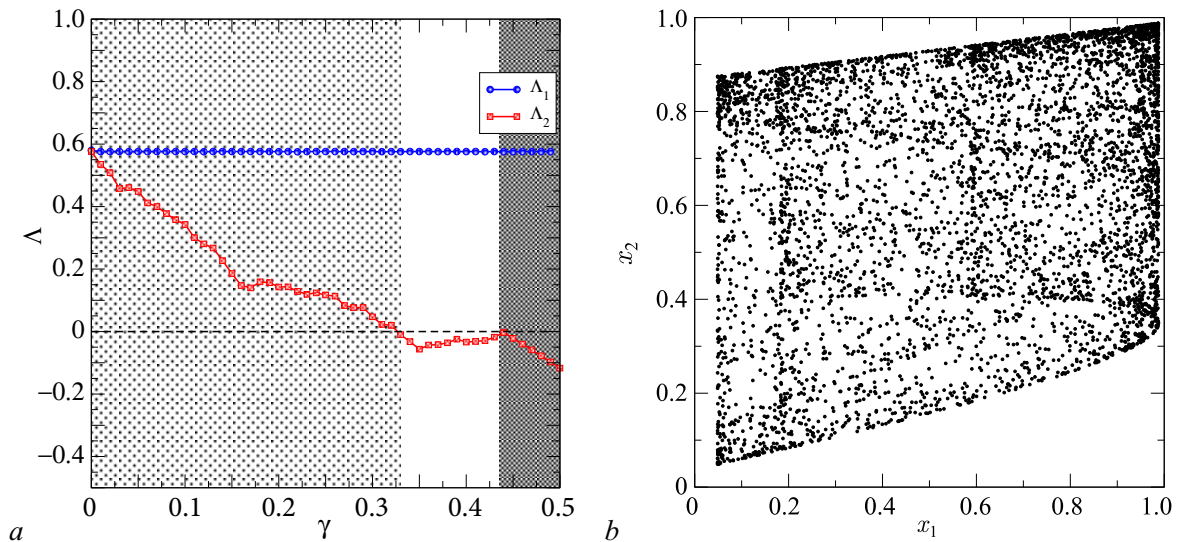


Рис. 2. Динамика системы (10) при $\alpha = 3.95$: a — графики показателей Ляпунова в зависимости от γ ; b — фазовый портрет при $\gamma = 0.12$ (цвет онлайн)

Fig. 2. System dynamics (10) at $\alpha = 3.95$: a — plots of Lyapunov exponents in dependence of γ ; b — phase portrait at $\gamma = 0.12$ (color online)

При выбранном параметре $\alpha = 3.95$ ансамбль демонстрирует режим развитого хаоса во всем рассматриваемом интервале $0 \leq \gamma \leq 0.5$, что подтверждается значениями показателей Ляпунова (см. рис. 2, a). При этом в области $0 \leq \gamma < 0.33$ (отмечена светло-серым цветом) наблюдается режим гиперхаоса, а при $\gamma > 0.436$ — режим полной хаотической синхронизации (отмечена серым цветом).

Выберем значение $\gamma = 0.12$, соответствующее несинхронному хаотическому режиму, фазовый портрет которого изображен на рис. 2, b , и проведем обучение ИНС предсказанию динамики первого осциллятора. Сначала проведем обучение без регуляризации, то есть при $r = 0$. Обучение сети проходит успешно, о чем свидетельствует малость среднеквадратичной ошибки $\Phi_{\text{ош}} < 10^{-6}$. Полученные в результате обучения значения синаптических коэффициентов первого и второго слоев ИНС отображены в табл. 1а.

Для анализа связанности будем использовать матрицу коэффициентов первого слоя, то есть векторы \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 . Из табл. 1а видно, что они не соответствуют матрице связей (11), поскольку значения коэффициентов второго столбца (\mathbf{W}_2), определяющих влияние второго входа сети на выходной сигнал, отнюдь не малы, а сравнимы по величине с коэффициентами первого столбца (\mathbf{W}_1): среднеквадратичные значения коэффициентов для обоих входов равны 3.12 и 2.36 соответственно. Аналогичные результаты получаются при обучении ИНС предсказанию динамики второго отображения (см. табл. 1б). В этом случае среднеквадратичные значения коэффициентов для обоих входов оказываются почти равны: 2.68 и 2.62. Таким образом, при отсутствии регуляризации мы не видим существенной разницы между значениями коэффициентов \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 . Это означает, что ИНС не подстраивает собственную структуру связей под структуру ансамбля и ее нельзя использовать для оценки последней.

Рассмотрим теперь обучение ИНС с регуляризацией. Выберем достаточно малое значение КР, $r = 10^{-4}$, и проведем обучение сети заново. Полученные новые значения синаптических коэффициентов обученной ИНС для первого и второго отображений представлены в табл. 2а и 2б соответственно. Рассмотрим табл. 2а. Здесь коэффициенты первого и второго столбцов различаются на два порядка: для первого слоя средний квадрат коэффициентов составляет 0.99,

Таблица 1. Матрицы синаптических коэффициентов первого ($\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$) и второго ($\mathbf{U}_1^{(T)}$) слоев ИНС, обученных предсказанию динамики первого отображения (а) и второго отображения (б); параметр регуляризации $r = 0$

Table 1. Matrices of synaptic coefficients of the first ($\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$) and second ($\mathbf{U}_1^{(T)}$) ANN layers trained to predict the dynamics of the first (a) and the second maps (b); the regularization parameter $r = 0$

	\mathbf{W}_1	\mathbf{W}_2	$\mathbf{U}_1^{(T)}$		\mathbf{W}_1	\mathbf{W}_2	$\mathbf{U}_1^{(T)}$
a	-2.0798	0.0027	2.1324	b	0.1227	-2.1740	1.6062
	2.4799	-3.4474	0.2769		2.3330	1.0260	-0.2417
	-0.8994	4.3298	-0.2313		-3.3696	-1.4181	-0.0895
	2.6254	0.0041	0.9538		-0.6316	4.2700	-2.6671
	-3.8335	-1.8255	-0.0099		0.1671	-2.4699	-1.1406
	-4.4584	0.0720	-1.2758		-2.8242	-3.2945	-0.5918
	-4.2626	-1.1638	-0.1892		-3.025	-2.0144	-0.7058
	-2.8823	-3.3587	-0.0315		4.197	1.4731	-0.0585
	3.5911	-2.4527	0.0782		3.9470	1.9978	0.1933
	2.3295	-1.7919	-2.4551		2.0082	3.9453	0.4832

Таблица 2. Матрицы синаптических коэффициентов первого ($\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$) и второго ($\mathbf{U}_1^{(T)}$) слоев ИНС, обученных предсказанию динамики первого отображения (а) и второго отображения (б); параметр регуляризации $r = 0.0001$

Table 2. Matrices of synaptic coefficients of the first ($\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$) and second ($\mathbf{U}_1^{(T)}$) ANN layers trained to predict the dynamics of the first (a) and the second map (b); the regularization parameter $r = 0.0001$

	\mathbf{W}_1	\mathbf{W}_2	$\mathbf{U}_1^{(T)}$		\mathbf{W}_1	\mathbf{W}_2	$\mathbf{U}_1^{(T)}$
a	0.0285	-0.0023	-0.3762	b	0.2392	0.0040	-0.5196
	0.0298	0.0097	-0.1169		-0.2426	0.0160	0.5004
	2.1769	-0.0007	-1.8684		0.2493	-0.0322	-0.6014
	0.0065	-0.0068	-0.3424		0.0018	-2.0389	1.7979
	-0.0279	0.0041	0.2610		0.0029	-2.1686	-1.4956
	-2.2665	-0.0008	-1.6906		-0.2423	0.0182	0.5939
	-0.0241	-0.0096	0.3830		-0.2463	0.0208	0.4664
	-0.0218	0.0190	0.3879		1.3376	0.0094	0.8936
	-0.0323	-0.0087	0.4603		0.2419	-0.0103	-0.4914
	0.0299	0.0099	-0.4659		0.2449	-0.0157	-0.4937

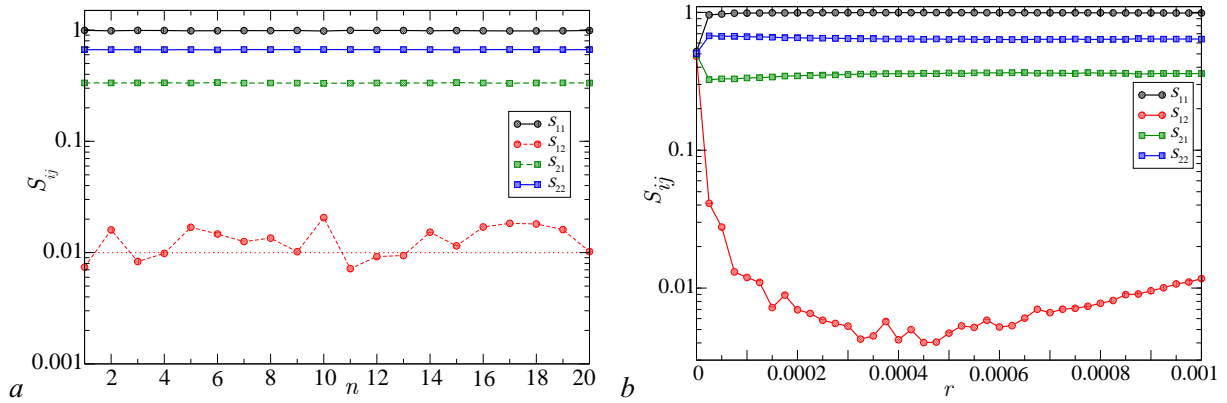


Рис. 3. Зависимость коэффициентов влияния S_{ij} от номера попытки обучения n (a) и от параметра регуляризации r (b) (цвет онлайн)

Fig. 3. The dependence of the influence coefficients S_{ij} on the number of the training attempt n (a) and on the regularization parameter (b) (color online)

тогда как для второго только 0.009. По величинам коэффициентов \mathbf{W}_2 можно сделать вывод о том, что влияние второго отображения на динамику первого либо очень мало, либо отсутствует вовсе. При обучении ИНС предсказанию динамики второго отображения различие в величинах коэффициентов \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 , как видно из табл. 2b, не столь существенно. Полученные результаты воспроизводятся и при повторных обучении, о чем свидетельствует представленная на рис. 3, a серия коэффициентов S_{ij} , полученных по двадцати отдельным обучением. В ходе каждого из испытаний нейронная сеть заново инициализировалась, после чего происходило ее повторное обучение на том же обучающем множестве. Из графиков видно, что (a) результаты повторяются с точностью порядка процента; (б) влияние второго осциллятора на динамику первого (S_{12}) во всех случаях остается около одного процента, тогда как влияние первого на второй (S_{21}) составляет около 34%.

Оценим влияние коэффициента регуляризации на величины S_{ij} . Для этого проведем обучение ИНС при разных значениях r и построим графики зависимостей $S_{ij}(r)$. Результаты расчетов приведены на рис. 3, b в логарифмическом по оси ординат масштабе. Их анализ удобнее проводить на примере S_{12} , так как точным значением для него является нулевое. Из проведенных расчетов следует, что при $r \in [0.0001, 0.001]$ значение коэффициента S_{12} не выходит за пределы одного процента. Зависимость $S_{12}(r)$ достигает минимума при $r \simeq 0.00045$, составляя здесь около 0.5 процента. Значения остальных коэффициентов влияния при $r > 0.000025$ почти не меняются и в рассмотренном диапазоне принимают значения $S_{11} \simeq 1$, $S_{22} \simeq 0.64$, $S_{21} \simeq 0.36$. Исходя из анализа, можно заключить, что любые значения КР в интервале от 0.0001 до 0.001

являются допустимыми для расчета коэффициентов влияния. В дальнейших расчетах мы будем использовать $r = 0.0003$.

Таблица 3. Матрица \hat{S} для системы (10), полученная по итогам обучения ИНС с параметром регуляризации $r = 0.0003$

Table 3. The matrix \hat{S} for system (10), obtained from the results of training the ANN with the regularization parameter $r = 0.0003$

0.996	0.004
0.36	0.64

Таким образом, процедура обучения ИНС с регуляризацией позволяет получить матрицу коэффициентов влияния, представленную в табл. 3, которая качественно соответствует матрице связей ансамбля (11). Что касается количественного соответствия, то оно будет рассмотрено далее.

4. Сравнение решетки ВКА с моделью среднего поля

4.1. Ансамбль из шести отображений. Рассмотрим теперь аналогичную по структуре систему, но большей размерности — ансамбль из шести одинаково связанных отображений:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f(x_1(n)), \\ x_i(n+1) &= f(x_i(n)) + \gamma(f(x_{i-1}(n)) - f(x_i(n))), \\ i &= 2 \dots 6 \end{aligned} \quad (12)$$

с матрицей связей

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 1 - \gamma & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \gamma & 1 - \gamma \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Динамика данного ансамбля схожа с динамикой двух отображений. При выбранном α в нем наблюдается режим развитого временного хаоса, который при $\gamma \geq 0.436$ становится синхронным. Подтверждением служат графики характеристических показателей Ляпунова, приведенные на рис. 4.

Из их сопоставления с графиками на рис. 2, а хорошо видно сходство в поведении обеих систем.

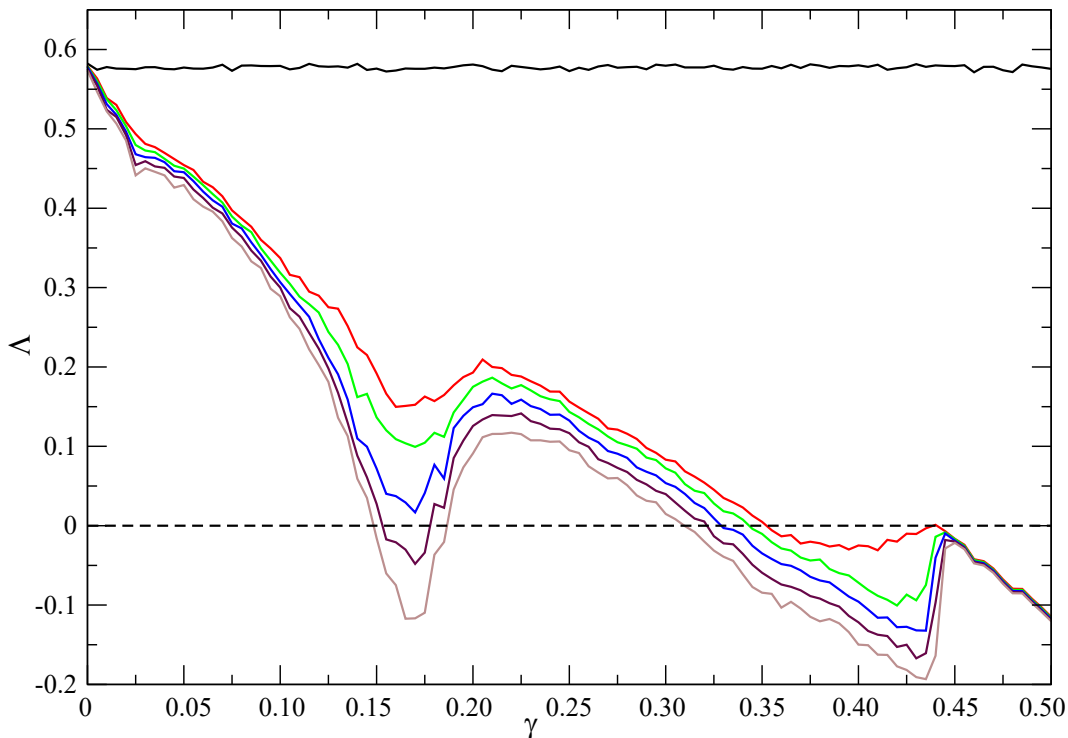


Рис. 4. Зависимость характеристических показателей Ляпунова от γ для системы (12) (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of Lyapunov exponents on γ for system (12) (color online)

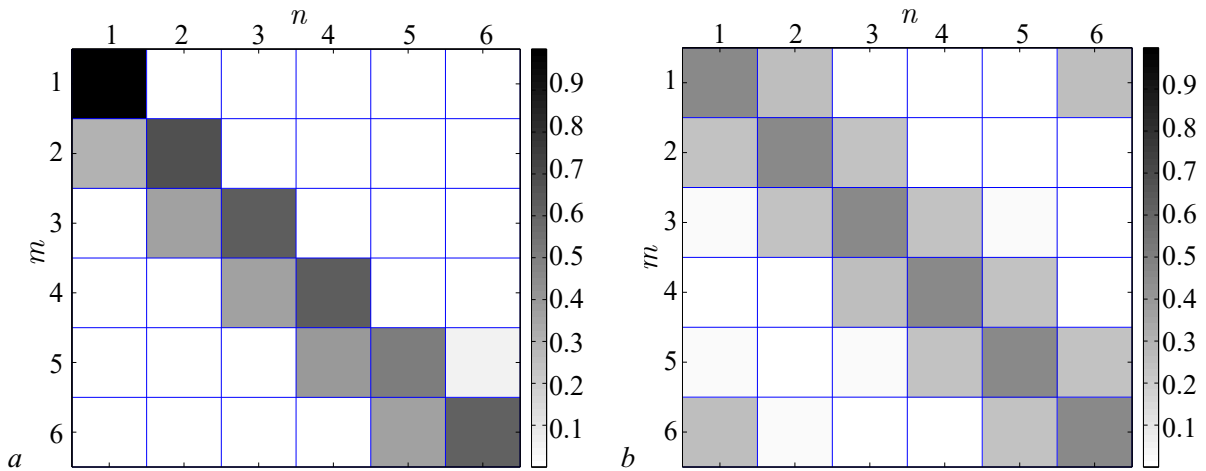


Рис. 5. Визуальное представление матрицы влияния \hat{S} в виде карты для ансамбля (12) (a) и ансамбля (14) (b)
 Fig. 5. Visual representation of \hat{S} influence matrix as a map for ensemble (12) (a) and ensemble (14) (b)

Выберем то же, что и для системы (10), значение параметра связи $\gamma = 0.12$ и проведем обучение ИНС при $r = 0.0003$. Полученные в результате обучения коэффициенты влияния

Таблица 4. Матрица \hat{S} для системы (12), полученная по итогам обучения ИНС с параметром регуляризации $r = 0.0003$

Table 4. Matrix \hat{S} for system (12), obtained from the results of training the ANN with the regularization parameter $r = 0.0003$

0.9617	0.0090	0.0067	0.0073	0.0079	0.0073
0.3256	0.6264	0.0117	0.0102	0.0154	0.0108
0.0055	0.3350	0.6245	0.0097	0.014	0.0113
0.0053	0.0068	0.3426	0.6283	0.0083	0.0087
0.0077	0.0096	0.0081	0.3423	0.6251	0.0071
0.0080	0.0083	0.0124	0.0074	0.3404	0.6235

S_{ij} приведены в табл. 4 и представлены в виде карты на рис. 5, a. Как видно из рисунка, структура матрицы \hat{S} для ансамбля (12), так же, как и для более простой системы (10), качественно соответствует матрице \hat{M} . Так, белые клетки на карте 5, a соответствуют нулевому, черная — единичному, а серые — остальным коэффициентам матрицы (13). Таким образом, увеличение размерности ансамбля не привело к ухудшению работы метода, который по-прежнему уверенно распознает структуру связей системы.

4.2. Ансамбль с симметричными связями. Перейдем теперь к случаю, когда у элемента ансамбля может быть несколько связей. Одной из таких систем является кольцо из шести осцилляторов с симметричными связями:

$$x_i(n+1) = f(x_i(n)) + \gamma(f(x_{i-1}(n)) + f(x_{i+1}(n)) - 2f(x_i(n))) \quad (14)$$

$$i = 1 \dots 6.$$

Матрица связей кольца имеет вид

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 - 2\gamma & \gamma & \dots & \gamma \\ \gamma & 1 - 2\gamma & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ \gamma & 0 & \gamma & 1 - 2\gamma \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Система (14) демонстрирует гораздо большее разнообразие режимов, чем ансамбли с однонаправленными связями. В частности, при выбранном α здесь, в зависимости от интенсивности

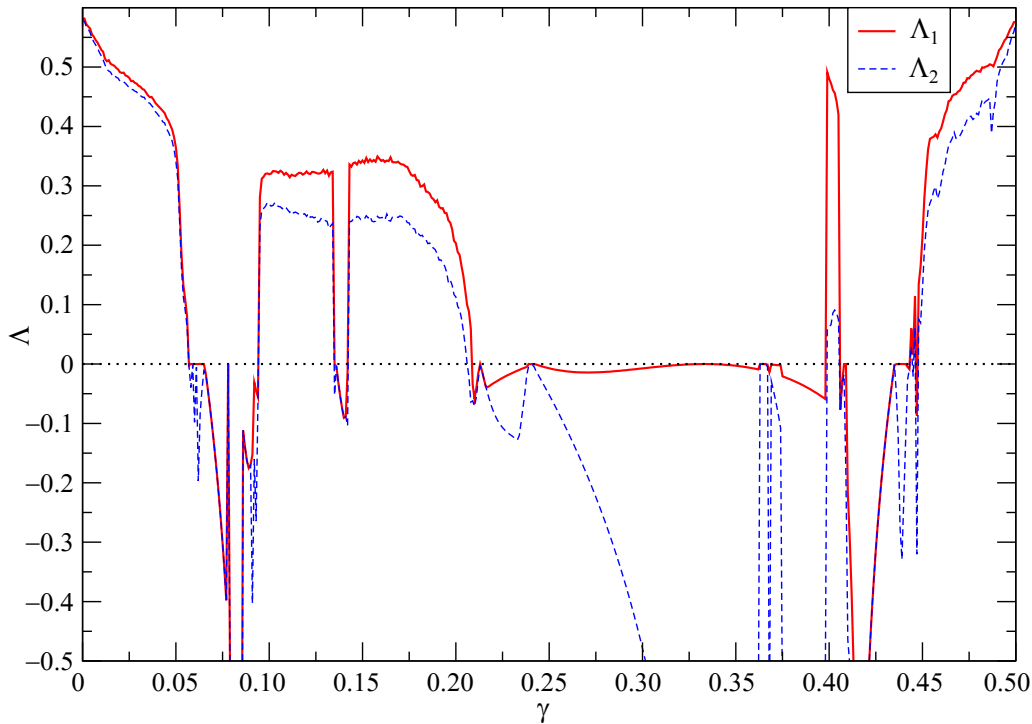


Рис. 6. Зависимость двух старших характеристических показателей Ляпунова от γ в системе (14) (цвет онлайн)
 Fig. 6. The dependence of the two largest Lyapunov exponents from γ in system (14) (color online)

связей, можно наблюдать как хаотические, так и регулярные режимы. Подтверждением могут служить графики двух старших показателей Ляпунова (см. рис. 6), которые были рассчитаны для $\alpha = 3.95$. Выбранное ранее значение $\gamma = 0.12$ здесь также соответствует режиму хаотических колебаний, поэтому может использоваться при анализе связанности. Кроме того, при небольших γ ансамбль (14) демонстрирует мультистабильность, поэтому при проведении исследований, помимо параметров, требуется контролировать и начальные условия. Последние были выбраны в малой окрестности симметричного подпространства: $x_0 = 0.1 + 0.001\xi$, где ξ — случайный вектор единичной длины.

Проведем расчет коэффициентов влияния согласно той же методике, что и ранее. В результате были получены коэффициенты S_{ij} , которые отображены в табл. 5, а также представлены на рис. 5, b в виде карты. Из сравнения полученной матрицы \hat{S} с матрицей связей \hat{M} (15) хорошо видно их качественное соответствие.

Таким образом, ИНС, обучаемые предсказанию динамики ансамбля хаотических отображений, подстраивают, при условии регуляризации, значения синаптических коэффициентов под структуру связей ансамбля, позволяя тем самым определить последнюю. Метод работает для небольших ансамблей как с однонаправленными, так и с взаимными связями.

Таблица 5. Матрица \hat{S} для системы (14), полученная по итогам обучения ИНС с параметром регуляризации $r = 0.0003$

Table 5. Matrix \hat{S} for system (14), obtained from the ANN training with the regularization parameter $r = 0.0003$

0.4628	0.2506	0.0123	0.0085	0.0150	0.2509
0.2488	0.4654	0.2494	0.0118	0.0093	0.0152
0.0182	0.2437	0.4644	0.2447	0.0166	0.0124
0.0088	0.0133	0.2509	0.4645	0.2495	0.0130
0.0176	0.0099	0.0165	0.2486	0.4595	0.2480
0.2497	0.0164	0.0090	0.0152	0.2464	0.4633

5. Оценка значений коэффициента связи

В предыдущих разделах рассматривался вопрос об определении топологии сети. Может ли предлагаемый метод также использоваться и для оценки величины коэффициента связи? Для ответа на этот вопрос проведем расчет коэффициентов влияния в зависимости от параметра связи γ и проанализируем полученные зависимости.

Рассмотрим сначала простейший случай — систему двух отображений (10) — и рассчитаем для нее графики $S_{ij}(\gamma)$. Результаты расчетов представлены на рис. 7, а. Проанализируем полученные зависимости. Прежде всего, заметим, что во всем интервале от $\gamma \simeq 0$, вплоть до значения $\gamma \simeq 0.436$, величины коэффициентов S_{11} и S_{12} близки к значениям единица и ноль соответственно. Таким образом, в этом интервале $S_{11} \simeq M_{11}$ и $S_{12} \simeq M_{12}$. При $\gamma \simeq 0.436$ в системе (10) происходит переход к режиму полной синхронизации хаоса, одновременно с которым коэффициенты влияния, как видно из графиков, скачкообразно меняют свои значения до $S_{11} \simeq S_{12} \simeq 0.5$. Соответственно, при переходе в зону хаотической синхронизации, которая на рис. 7, а отмечена серым цветом, алгоритм перестает работать.

Перейдем теперь к двум оставшимся коэффициентам. Поскольку они связаны соотношением $S_{21} + S_{22} = 1$, ограничимся анализом одного из них — S_{21} . Из рис. 7, а хорошо видно, что в области несинхронного хаоса $S_{21}(\gamma)$ представляет собой плавную монотонно возрастающую функцию связи, форма которой напоминает степенную зависимость $S_{21} \sim A\gamma^p$ при $p < 1$. Для проверки данной гипотезы построим график $S_{21}(\gamma)$ в логарифмическом масштабе (рис. 7, б), при котором степенные функции выглядят как прямые линии. Действительно, из вида графика можно заключить, что в диапазоне $0.01 < \gamma < 0.436$ зависимость $S_{21}(\gamma)$ близка к степенной функции. Подбор коэффициентов A и p , осуществленный по методу наименьших квадратов, приводит к соотношению

$$S_{21} \simeq 0.57\sqrt[4]{\gamma}, \quad (16)$$

которое отображено на рис. 7, а и 7, б пунктирной линией. Необходимо отметить, что само наличие однозначной взаимосвязи между S_{21} и γ выглядит достаточно тривиальным. Однако ее простой вид представляется интересным результатом, причины которого на данный момент не вполне ясны. Тем не менее для рассматриваемой системы выражение (16) позволяет производить оценку коэффициента связи исходя из значений синаптических коэффициентов обученной нейронной сети.

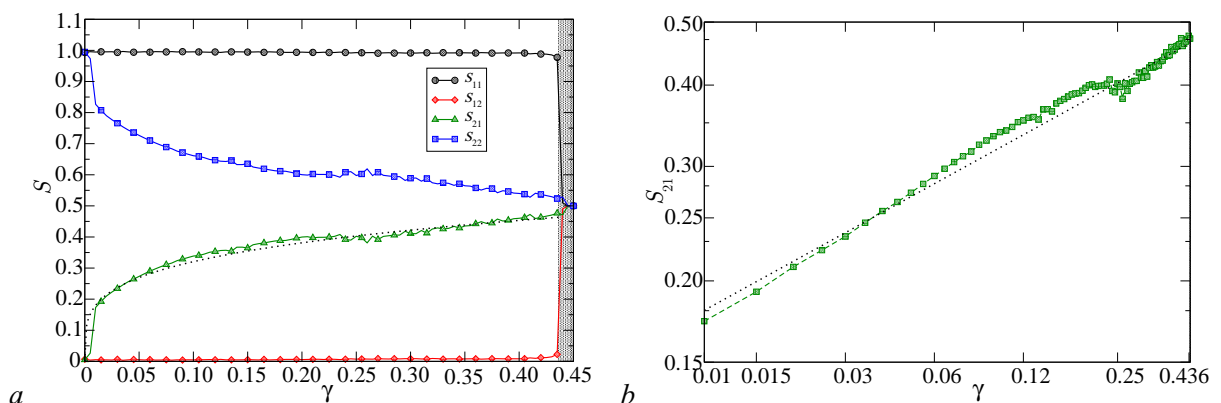


Рис. 7. Зависимость коэффициентов влияния от γ для системы (10) в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах (цвет онлайн)

Fig. 7. The dependence of the coefficients of influence on γ for the system (10) in linear (a) and logarithmic (b) scales (color online)

Рассмотрим теперь случай ансамбля более высокой размерности (13), построив те же графики, что и в предыдущем случае. Результаты расчетов приведены на рис. 8, *a*, где для сравнения штриховыми линиями приведены графики для двумерной системы. Как видно из сопоставления, налицо существенное сходство зависимостей $S_{ij}(\gamma)$ наряду с небольшими отличиями. Так, при $\gamma \lesssim 0.13$ график $S_{21}(\gamma)$ почти совпадает с аппроксимирующей кривой (16), тогда как в диапазоне $0.15 \lesssim \gamma < 0.436$ отстает от нее на величину ~ 0.1 . Причина этого различия не вполне ясна, можно лишь предположить, что оно связано с изменением структуры хаотического аттрактора, которое происходит при $\gamma \simeq 0.15$; последнее можно заметить по резкому уменьшению величины трансверсальных показателей Ляпунова (см. рис. 4). Если эта гипотеза верна, то она означает, что точность оценки величины связей должна быть связана со степенью хаотичности динамики подсистем и ухудшаться в случаях, когда колебания отображений становятся более регулярными.

Перейдем теперь к оценке коэффициентов связи для ансамбля с симметричными связями (14), которая является существенно более трудной. Помимо большего числа связей, основным препятствием является богатство динамики системы, заключающееся в многообразии колебательных режимов, сменяющих друг друга при изменении γ , мультистабильности и существовании диссипативных структур [30].

Проведем измерение $S_{ij}(\gamma)$ при том же $\alpha = 3.95$. Поскольку система (14) обладает трансляционной симметрией, все строки матрицы \hat{M} отличаются лишь циклическим сдвигом. Поэтому достаточно ограничиться измерением коэффициентов только первой строки. Полученные в результате расчетов графики $S_{1i}(\gamma)$ ($i = 1, \dots, 6$) приведены на рис. 8, *b*. Их вид свидетельствует о существенной неоднородности зависимостей, качественно различающихся в разных диапазонах параметра связи.

Проведем анализ графиков на рис. 8, *b*. Прежде всего, разделим интервал на зоны с хаотическим и регулярным поведением, для чего используем характеристические показатели Ляпунова (см. рис. 6). Выявленные таким образом интервалы регулярной динамики отмечены на рис. 8, *b* серым цветом (II, IV, VII и IX). Очевидно, что в этих зонах измерение направленности используемым методом невозможно. Однако и в хаотических областях качественное соответствие между коэффициентами матриц \hat{S} и \hat{M} наблюдается не везде. Критерием здесь может служить малость «нулевых» коэффициентов S_{13} , S_{14} и S_{15} . Согласно ему, хорошее соответствие наблюдается в зонах I и III, где величина этих коэффициентов не превосходит 1–2 процента, и несколько

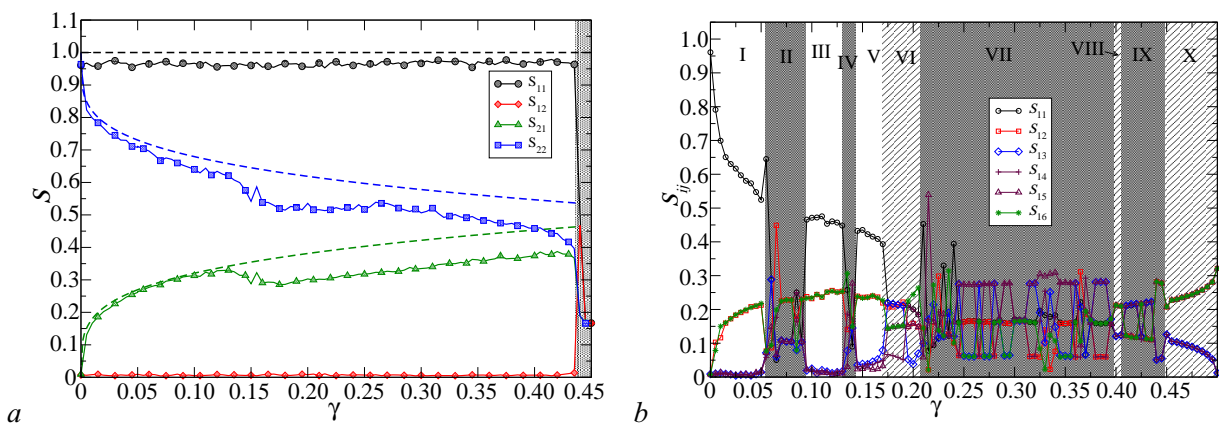


Рис. 8. Графики $S_{ij}(\gamma)$ для системы (12) (*a*) и системы (14) (*b*) (цвет онлайн)

Fig. 8. Plots $S_{ij}(\gamma)$ for system (12) (*a*) and system (14) (*b*) (color online)

худшее — в интервале V , где данные коэффициенты «подрастают» до ~ 5 процентов. В остальных хаотических зонах (отмечены штриховкой) соответствия между коэффициентами влияния и матрицей связи \hat{M} не наблюдается вовсе. Очевидно, в этих интервалах метод не работает. Причина этому, вероятно, кроется в особенности динамики системы, а именно, в пространственной неоднородности хаотических колебаний и перемежаемости, наблюдающихся при больших значениях симметричной диффузионной связи, что было отмечено в работе [30]. Проверка этой гипотезы требует дополнительных исследований.

Заключение

Рассмотрен метод выявления структуры связей в сети хаотических отображений, использующий аппарат искусственных нейронных сетей, предложенный ранее в статье [26]. Он заключается в обучении ИНС предсказанию динамики ансамбля с одновременной регуляризацией, в ходе которой нейронная сеть подстраивает собственную структуру синаптических связей под структуру связей ансамбля. На основании данного подхода разработан алгоритм, позволяющий оценивать влияние отдельных узлов сети на ее динамику в целом, который был протестирован на примерах небольших ансамблей одномерных хаотических отображений, для которых он продемонстрировал свою эффективность. Помимо определения топологии сети, данный подход позволяет также оценивать и величину коэффициента связи.

Проведенные исследования показали, что применимость метода критически зависит от наблюдаемого колебательного режима. Он хорошо работает для режима развитого пространственно-однородного хаоса, неприменим для регулярных колебаний и режима синхронизации хаоса, а также при формировании в ансамбле пространственных структур.

Эффективность предлагаемого алгоритма для анализа связей между реальными системами требует дополнительного исследования. Она определяется такими факторами, как его чувствительность к шуму, искажения формы сигналов, наличие перекрестных наводок, внешние воздействия, нестационарность и т. п.

Список литературы

1. *Cremers J., Hübler A.* Construction of differential equations from experimental data // *Zeitschrift für Naturforschung A.* 1987. Vol. 42, no. 8. P. 797–802. DOI: 10.1515/zna-1987-0805.
2. *Crutchfield J. P., McNamara B. S.* Equations of motion from a data series // *Complex Systems.* 1987. Vol. 1, no. 3. P. 417–452.
3. *Павлов А. Н., Янсон Н. Б.* Применение методики реконструкции математической модели к кардиограмме // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 1. С. 93–108.
4. *Anishchenko V. S., Pavlov A. N.* Global reconstruction in application to multichannel communication // *Physical Review E.* 1998. Vol. 57, no. 2. P. 2455–2457. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.2455.
5. *Mukhin D. N., Feigin A. M., Loskutov E. M., Molkov Y. I.* Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series // *Physical Review E.* 2006. Vol. 73, no. 3. P. 036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036211.
6. *Безручко Б. П., Смирнов Д. А., Зборовский А. В., Сидак Е. В., Иванов Р. Н., Беспятов А. Б.* Реконструкция по временному ряду и задача диагностики // *Технологии живых систем.* 2007. Т. 4, № 3. С. 49–56. EDN: ICFWEN
7. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence (Lecture Notes in Mathematics).* 1980. Vol. 898. P. 366–381. DOI: 10.1007/BFB0091924.
8. *Granger C. W. J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica.* 1969. Vol. 37, no. 3. P. 424–438. DOI: 10.2307/1912791.

9. *Granger C. W. J.* Testing for causality. A personal viewpoint // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1980. Vol. 2. P. 329–352. DOI: 10.1016/0165-1889(80)90069-X.
10. *Сысоев И. В.* Диагностика связанности по хаотическим сигналам нелинейных систем: решение обратных задач. Саратов: КУБиК, 2019. 46 с. EDN: UJVGGO
11. *Hesse R., Molle E., Arnold M., Schack B.* The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies // *Journal of Neuroscience Methods*. 2003. Vol. 124, no. 1. P. 27–44. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7.
12. *Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Смирнов Д. А., Тасс П. А.* Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // *Успехи физических наук*. 2008. Т. 178, № 3. С. 323–329. DOI: 10.3367/UFN.0178.200803h.0323.
13. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Диагностика причинно-следственной связи солнечной активности и глобальной приповерхностной температуры Земли // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2008. Т. 44, № 3. С. 283–293. DOI: 10.1134/S0001433808030018.
14. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Эмпирические оценки воздействия естественных и антропогенных факторов на глобальную приповерхностную температуру // *Доклады Академии наук*. 2009. Т. 426, № 5. С. 679–684. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.
15. *Сысоев И. В., Караваев А. С., Наконечный П. И.* Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 4. С. 81–90. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
16. *Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // *Письма в ЖТФ*. 2012. Т. 38, № 3. С. 103–110. EDN: RCVQZD.
17. *Sysoev I. V., Sysoeva M. V.* Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015. Vol. 309. P. 9–19. DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
18. *Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M.* Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality // *Physics Letters A*. 2004. Vol. 324, no. 1. P. 26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
19. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // *Physical Review E*. 2006. Vol. 73, no. 6. P. 066216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066216.
20. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Реконструкция архитектуры связей в цепочке из трех однонаправленно связанных систем методом причинности по Грейнджеру // *Письма в ЖТФ*. 2018. Т. 44, no. 10. С. 86–95. DOI: 10.21883/PJTF.2018.10.46103.17201.
21. *Хайкин С.* Нейронные сети. М: Вильямс, 2006. 1104 с.
22. *Галушкин А. И.* Нейронные сети. Основы теории. Телеком, 2012. 496 с. EDN: RBAWYZ
23. *de Oliveira K. A., Vannucci A., Da Silva E. C.* Using artificial neural networks to forecast chaotic time series // *Physica A*. 2000. Vol. 284, no. 1–4. P. 393–404. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00215-6.
24. *Антипов О. И., Неганов В. А.* Прогнозирование и фрактальный анализ хаотических процессов дискретно-нелинейных систем с помощью нейронных сетей // *Доклады Академии наук*. 2011. Т. 436, № 1. С. 34–37. DOI: 10.1134/S1028335811010034.
25. *Шабунин А. В.* Нейронная сеть как предсказатель динамики дискретного отображения // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2014. Т. 22, no. 5. С. 58–72. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72.

26. *Tank A., Covert I., Foti N., Shojaie A., Fox E.* Neural granger causality for nonlinear time series // arXiv preprint arXiv:1802.05842. 2018.
27. *Тихонов А. Н.* О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.
28. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 69, no. 1. P. 32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
29. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. The mapping approach // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 70, no. 5. P. 1240–1248. DOI: 10.1143/PTP.70.1240.
30. *Shabunin A.* Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 7. P. 073132. DOI: 10.1063/5.0054510.

References

1. Cremers J, Hübler A. Construction of differential equations from experimental data. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 1987;42(8):797–802. DOI: 10.1515/zna-1987-0805.
2. Crutchfield JP, McNamara BS. Equations of motion from a data series. *Complex Systems*. 1987;1(3):417–452.
3. Pavlov AN, Yanson NB. Application of reconstruction method to a cardiogram. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 1997;5(1):93–108 (in Russian).
4. Anishchenko VS, Pavlov AN. Global reconstruction in application to multichannel communication. *Physical Review E*. 1998;57(2):2455–2457. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.2455.
5. Mukhin DN, Feigin AM, Loskutov EM, Molkov YI. Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series. *Physical Review E*. 2006;73(3):036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036211.
6. Bezruchko BP, Smirnov DA, Zborovsky AV, Sidak EV, Ivanov RN, Bespyatov AB. Reconstruction from time-series and a task of diagnostics. *Technologies of living systems*. 2007;4(3):49–56 (in Russian).
7. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lect. Notes in Math*. 1980;898:366–381. DOI: 10.1007/BFB0091924.
8. Granger CWJ. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*. 1969;37(3):424–438. DOI: 10.2307/1912791.
9. Granger CWJ. Testing for causality. A personal viewpoint. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1980;2:329–352. DOI: 10.1016/0165-1889(80)90069-X.
10. Sysoev IV. Diagnostics of connectivity by chaotic signals of nonlinear systems: solving reverse problems. *Saratov: Kubik*; 2019. 46 p. (in Russian).
11. Hesse R, Molle E, Arnold M, Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies. *Journal of Neuroscience Methods*. 2003;124(1):27–44. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7.
12. Bezruchko BP, Ponomarenko VI, Prohorov MD, Smirnov DA, Tass PA. Modeling nonlinear oscillatory systems and diagnostics of coupling between them using chaotic time series analysis: applications in neurophysiology. *Physics-Uspekhi*. 2008;51:304–310. DOI: 10.1070/PU2008v051n03ABEH006494.
13. Mokhov II, Smirnov DA. Diagnostics of a cause-effect relation between solar activity and the Earth's global surface temperature. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2008;44(3): 263–272. DOI: 10.1134/S0001433808030018.
14. Mokhov II, Smirnov DA. Empirical estimates of the influence of natural and anthropogenic factors on the global surface temperature. *Doklady Earth Sciences*. 2009;427(1):798–803. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.

15. Sysoev IV, Karavaev AS, Nakonechny PI. Role of model nonlinearity for Granger causality based coupling estimation for pathological tremor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2010;18(4):81–90. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
16. Sysoeva MV, Sysoev IV. Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure. *Technical Physics Letters*. 2012;38(2):151–154. DOI: 10.1134/S1063785012020137.
17. Sysoev IV, Sysoeva MV. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015;309:9–19. DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
18. Chen Y, Rangarajan G, Feng J, Ding M. Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality. *Physics Letters A*. 2004;324(1):26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
19. Marinazzo D, Pellicoro M, Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. *Physical Review E*. 2006;73(6):066216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066216.
20. Kornilov MV, Sysoev IV. Recovering the Architecture of Links in a Chain of Three Unidirectionally Coupled Systems Using the Granger-Causality Test. *Technical Physics Letters*. 2018;44(5):445–449. DOI: 10.21883/PJTF.2018.10.46103.17201.
21. Haykin S. *Neural Networks*. New Jersey: Prentice Hall; 1999. 938 p.
22. Galushkin AI. *Neural Networks. The theory basics*. Telekom; 2012. 496 p. (in Russian).
23. de Oliveira KA, Vannucci A, Da Silva EC. Using artificial neural networks to forecast chaotic time series. *Physica A*. 2000;284(1–4):393–404. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00215-6.
24. Antipov OI, Neganov VA. Neural network prediction and fractal analysis of the chaotic processes in discrete nonlinear systems. *Doklady Physics*. 2011;56(1):7–9. DOI: 10.1134/S1028335811010034.
25. Shabunin AV. Neural network as a predictor of discrete map dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014;22(5):58–72. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72.
26. Tank A, Covert I, Foti N, Shojaie A, Fox E. Neural granger causality for nonlinear time Series. arXiv preprint arXiv:1802.05842. 2018.
27. Tihonov AN. On incorrect linear algebra problems and a stable solution method. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1965;163(3):591–594.
28. Fujisaka H, Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*. 1983;69(1):32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
29. Fujisaka H, Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. The mapping approach. *Progress of Theoretical Physics*. 1983;70(5):1240–1248. DOI: 10.1143/PTP.70.1240.
30. Shabunin A. Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos. *Chaos*. 2021;31(7):073132. DOI: doi.org/10.1063/5.0054510.

Шабунин Алексей Владимирович — родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1998, СГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2007, СГУ). С 1990 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности профессора. Научные интересы — нелинейная динамика, синхронизация, мультистабильность, клеточные автоматы, искусственные нейронные сети. Опубликовал свыше 100 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru
 ORCID: 0000-0002-3495-9418
 AuthorID (eLibrary.Ru): 34839





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003117
EDN: GAVURR

**Дискретные бегущие волны
в релейной системе дифференциально-разностных уравнений,
моделирующей полносвязную сеть синаптически связанных нейронов**

И. Е. Преображенский, М. М. Преображенская ✉

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия
E-mail: preobrazenskii@gmail.com, ✉rita.preo@gmail.com

Поступила в редакцию 4.02.2024, принята к публикации 21.03.2024,
опубликована онлайн 9.08.2024, опубликована 30.09.2024

Аннотация. Цель. Рассмотреть систему дифференциальных уравнений с запаздыванием, которая моделирует полносвязную цепь из $m + 1$ нейрона с запаздывающей синаптической связью. Для этой полносвязной системы построить периодические решения в виде дискретных бегущих волн. Это означает, что все компоненты представлены одной и той же периодической функцией $u(t)$ со сдвигом, кратным некоторому параметру Δ (который предстоит найти). Методы. Для поиска описанных решений в настоящей работе осуществляется переход от системы к уравнению относительно неизвестной функции $u(t)$, содержащему m упорядоченных запаздываний, отличающихся с шагом Δ . В нем выполняется экспоненциальная замена (характерная для уравнений вольтерровского типа) для того, чтобы получить релейное уравнение специального вида. Результаты. Для полученного уравнения найдена область параметров, в которой удастся построить периодическое решение с периодом T , зависящим от параметра Δ . Для найденной формулы периода $T = T(\Delta)$ удастся доказать разрешимость уравнения периодов, то есть доказать существование ненулевых параметров — целого p и вещественного Δ — удовлетворяющих уравнению $(m + 1)\Delta = pT(\Delta)$. Построенная функция $u(t)$ обладает bursting-эффектом. Это означает, что $u(t)$ имеет на периоде n высоких всплесков, после которых следует промежуток с малыми значениями. Заключение. Существование подходящего параметра Δ обеспечивает существование периодического решения в виде дискретной бегущей волны для исходной системы. За счет выбора перестановки обеспечивается сосуществование сразу $(m + 1)!$ периодических решений.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, полносвязная система, дискретные бегущие волны, bursting-эффект, периодические решения, моделирование нейронов.

Благодарности. Работа над разделами 1 и 4 выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>. Работа над разделами 2 и 3 выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Для цитирования: Преображенский И. Е., Преображенская М. М. Дискретные бегущие волны в релейной системе дифференциально-разностных уравнений, моделирующей полносвязную сеть синаптически связанных нейронов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 654–669. DOI: 10.18500/0869-6632-003117. EDN: GAVURR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Discrete traveling waves in a relay system of differential-difference equations modeling a fully connected network of synaptically connected neurons

I. E. Preobrazhenskii, M. M. Preobrazhenskaia

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia

E-mail: preobrazenskii@gmail.com, rita.preo@gmail.com

Received 4.02.2024, accepted 21.03.2024, available online 9.08.2024, published 30.09.2024

Abstract. *Purpose.* Consider a system of differential equations with delay, which models a fully connected chain of $m + 1$ neurons with delayed synaptic communication. For this fully connected system, construct periodic solutions in the form of discrete traveling waves. This means that all components are represented by the same periodic function $u(t)$ with a shift that is a multiple of some parameter Δ (to be found). *Methods.* To search for the described solutions, in this work we move from the original system to an equation for an unknown function $u(t)$, containing m ordered delays, differing with step Δ . It performs an exponential substitution (typical of equations of the Volterra type) in order to obtain a relay equation of a special form. *Results.* For the resulting equation, a parameter range is found in which it is possible to construct a periodic solution with period T depending on the parameter Δ . For the found period formula $T = T(\Delta)$, it is possible to prove the solvability of the period equation, that is, to prove the existence of non-zero parameters – integer p and real Δ – satisfying the equation $(m + 1)\Delta = pT(\Delta)$. The constructed function $u(t)$ has a bursting effect. This means that $u(t)$ has a period of n high spikes, followed by a period of low values. *Conclusion.* The existence of a suitable parameter Δ ensures the existence of a periodic solution in the form of a discrete traveling wave for the original system. Due to the choice of permutation, the coexistence of $(m + 1)!$ periodic solutions is ensured.

Keywords: differential-difference equations, fully coupled system, discrete traveling waves, bursting effect, periodic solutions, neuron modeling.

Acknowledgements. The work on Sections 1 and 4 was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>. The work on Sections 2 and 3 was carried out within the framework of the implementation of the development program of the regional scientific and educational mathematical center (YarSU) with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on the provision of subsidies from the federal budget No. 075-02-2024-1442).

For citation: Preobrazhenskii IE, Preobrazhenskaia MM. Discrete traveling waves in a relay system of differential-difference equations modeling a fully connected network of synaptically connected neurons. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(5):654–669. DOI: 10.18500/0869-6632-003117

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В настоящей работе рассматривается модель полносвязной сети нейронов. В ее основе лежит уравнение [1–3]

$$\dot{u} = \lambda F(u(t - 1))u, \quad (1)$$

которое служит для описания поведения уединенного нейрона. Здесь $u(t) > 0$ – нормированный мембранный потенциал нейрона, $\lambda > 0$ характеризует скорость протекания электрических процессов, F – кусочно-постоянная функция,

$$F(u) = \begin{cases} -a, & u \in (0, 1], \\ 1, & u > 1, \end{cases}$$

$a = \text{const} > 0$. Уравнение (1) является в некотором смысле предельной версией обобщенного уравнения Хатчинсона [4, 5]

$$\dot{u} = \lambda f(u(t - 1))u, \quad (2)$$

где f – гладкая функция,

$$u = u(t) > 0; \quad \lambda \gg 1; \quad f(0) = 1; \quad \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = -a \quad (a > 0); \quad f'(u), u f''(u) = O(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty.$$

В работе [4] было доказано, что уравнение (2) допускает устойчивый релаксационный цикл $u(t) = e^{\lambda(x_0(t)+O(1/\lambda))}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, где

$$x_0(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ -a(t - t_0), & t \in [1, t_0 + 1], \\ t - T_0, & t \in [t_0 + 1, T_0], \end{cases} \quad (3)$$

$$x_0(t + T_0) = x_0(t), \quad t_0 = (a + 1)/a, \quad T_0 = (a + 1)^2/a.$$

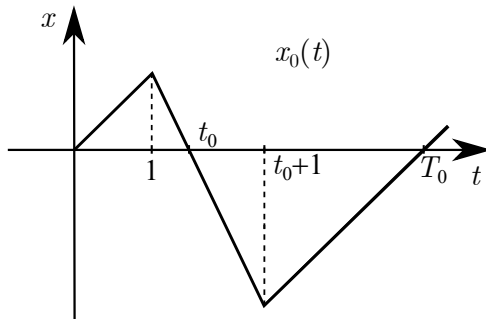


Рис. 1. Функция $x_0(t)$

Fig. 1. The function $x_0(t)$

Функция $x_0(t)$ изображена на рис. 1.

Возвращаясь к уравнению (1), отметим, что оно обладает орбитально устойчивым T_0 -периодическим решением $u(t) = e^{\lambda x_0(t)}$.

В настоящей работе нейроны, каждый из которых по отдельности моделируется уравнением (1), связываются в полносвязную систему с синаптическим односторонним взаимодействием. Способ моделирования синаптической связи базируется на идее быстрой пороговой модуляции, описанной, например, в [6-8]. Он выбран как некоторая предельная версия

связи, используемой, например, в работах [9, 10] при моделировании кольцевых цепочек нейронов. Для описания полной связи используется симметричная относительно перестановки своих аргументов функция

$$G(u_1, \dots, u_m) = \begin{cases} 0, & \text{если для } \forall i \ u_i < 1, \\ b, & \text{если } \exists k \ u_k > 1, \end{cases}$$

$b = \text{const} > 0$. Синаптическая связь предполагается запаздывающей, поэтому каждый аргумент функции G обладает запаздыванием $h > 0$.

В качестве модели полносвязной цепочки нейронов с запаздывающей синаптической связью предлагается система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{u}_j = \left(\lambda F(u_j(t - 1)) + G(u_0(t - h), \dots, u_{j-1}(t - h), u_{j+1}(t - h), \dots, u_m(t - h)) \cdot \ln \frac{u_*}{u_j} \right) u_j, \quad (4)$$

$j = 0, 1, \dots, m$. Здесь $u_j(t) > 0$ — нормированные мембранные потенциалы нейронов, $\lambda > 0$ характеризует скорость протекания электрических процессов, $h > 0$ — запаздывание в цепи связи, слагаемые $G(u_0(t - h), \dots, u_{j-1}(t - h), u_{j+1}(t - h), \dots, u_m(t - h)) \cdot \ln(u_*/u_j)u_j$ моделируют синаптическое взаимодействие с запаздыванием по времени. При описании j -го нейрона функция G умножается на логарифм $\ln(u_*u_j)$, который меняет знак при переходе значений функции u_j через пороговую величину $u_* = \exp(c\lambda)$, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Подобные (4) системы уравнений, которые описывают сети нейронов и базируются на модели уединенного нейрона (1) или (2), рассматриваются в ряде работ [1, 2, 11]. В [11] для кольцевой цепочки нейронов с односторонним синаптическим взаимодействием строился так называемый импульсно-рефрактерный режим. Под ним понимается периодический режим, в котором чередуются компоненты, обладающие экспоненциально высокими всплесками, и компоненты с экспоненциально малыми значениями. В работах [1, 2] рассматривается взаимодействие двух нейронов. Доказаны результаты о мультистабильности сосуществующих периодических режимов с фиксированным суммарным количеством всплесков.

В отличие от вышеупомянутых работ в настоящей статье рассматривается полносвязная система, то есть считаем, что каждый нейрон связан с каждым. В работе [12] вводится полносвязная система нейроосцилляторов с электрической синаптической связью, каждый из осцилляторов описывается уравнением (2). Для случая кольцевой системы с однонаправленной связью доказываются результаты о буферности, а для полносвязной сети, где все связи равноправны и одинаковы, исследуется вопрос двукластерной синхронизации. В статье [13] также исследуется вопрос двукластерной синхронизации, однако на примере осцилляторов ван дер Поля. В работе [14] рассматривается полносвязная система нелинейных осцилляторов, изучаются динамические свойства решений химерного типа, возникающие при двукластерной синхронизации.

Раздел 1 посвящен постановке задачи. В нем описывается механизм поиска дискретных бегущих волн, переход к вспомогательному релейному уравнению с m запаздываниями, вводится для него множество начальных функций. В разделе 2 приводится основной результат в виде трех теорем. В разделах 3 и 4 доказываются сформулированные теоремы.

1. Постановка задачи

1.1. Дискретные бегущие волны. Мы интересуемся существованием периодического решения системы (4) в виде дискретной бегущей волны. Техника построения решений такого типа для полносвязной системы та же, что, например, в работе [15], и аналогична технике для кольцевой цепи генераторов (см. [16]): предполагаем, что все функции u_k представлены одной и той же периодической функцией u со сдвигами, кратными некоторому параметру Δ :

$$u_k(t) = u(t + j_k\Delta), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (5)$$

где j_0, j_1, \dots, j_m обозначают некоторую перестановку номеров $0, 1, \dots, m$, а параметр Δ предстоит определить.

Зафиксируем k . После подстановки (5) в k -е уравнение (4) и перенормировки времени $t + j_k\Delta \mapsto t$ получим

$$\begin{aligned} \dot{u} = & \left(\lambda F(u(t-1)) + G(u(t + (j_0 - j_k)\Delta - h), \dots, u(t + (j_{k-1} - j_k)\Delta - h), \right. \\ & \left. u(t + (j_{k+1} - j_k)\Delta - h), \dots, u(t + (j_m - j_k)\Delta - h) \right) \cdot \ln \frac{u_*}{u} \Big| u. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что разности $j_l - j_k$ ($l = 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$) принимают все значения из упорядоченного множества $\{-j_k, \dots, -1, 1, \dots, m - j_k\}$. Обозначим период функции $u(t)$ через $T = T(\Delta)$. С учетом симметричности функции G относительно перестановки своих аргументов уравнение (6) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & \left(\lambda F(u(t-1)) + G(u(t - \Delta - h), \dots, u(t - j_k\Delta - h), \right. \\ & \left. u(t + (m - j_k)\Delta - T - h), \dots, u(t + \Delta - T - h) \right) \cdot \ln \frac{u_*}{u} \Big| u. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку для каждого $k = 0, 1, \dots, m$ должно получиться одно и то же уравнение относительно функции $u(t)$, естественным оказывается требование

$$u(t - (j_k + 1)\Delta - h) \equiv u(t + (m - j_k)\Delta - T - h),$$

то есть величина $(j_k + 1)\Delta + (m - j_k)\Delta - T$ должна быть кратна T . Отсюда получаем, что для периодичности решения (u_0, u_1, \dots, u_m) системы (4) необходимо, чтобы параметр Δ и период $T = T(\Delta)$ функции $u(t)$ удовлетворяли уравнению периодов

$$(m + 1)\Delta = pT(\Delta), \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (8)$$

При этом все уравнения системы (7) преобразуются в

$$\dot{u} = \left(\lambda F(u(t-1)) + G(u(t+m\Delta-h), \dots, u(t+\Delta-h)) \cdot \ln \frac{u_*}{u} \right) u. \quad (9)$$

Таким образом, задача поиска периодических решений системы (4) в виде дискретных бегущих волн (5) свелась к поиску периодической функции $u(t)$, удовлетворяющей (9), и параметра Δ таких, что период $T = T(\Delta)$ функции $u(t)$ удовлетворяет уравнению периодов (5) при некотором целом p .

Отметим, что в случае существования указанной функции $u(t)$ и параметра Δ за счет выбора перестановки обеспечивается сосуществование сразу $(m+1)!$ периодических решений системы (4).

1.2. Релейное уравнение с m запаздываниями. Вместо уравнения (9) рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = \left(\lambda F(u(t-1)) + G(u(t-h_1), \dots, u(t-h_m)) \cdot \ln \frac{u_*}{u} \right) u \quad (10)$$

с упорядоченными запаздываниями

$$h_1 < h_2 < \dots < h_m, \quad h_{s+1} = h_s + |\Delta|, \quad s = 1, \dots, m-1. \quad (11)$$

1.3. Переход к логарифмической шкале. Сделаем в (10) экспоненциальную замену переменных: $u = e^{\lambda x}$, предполагая, что $c = \text{const}$ такая, что $u_* = e^{\lambda c}$:

$$\dot{x} = F(e^{\lambda x(t-1)}) + (c-x) G(e^{\lambda x(t-h_1)}, \dots, e^{\lambda x(t-h_m)}).$$

Введем обозначения функций с экспоненциальными аргументами

$$R(x) = F(e^{\lambda x}) = \begin{cases} -a, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$H(x_1, \dots, x_m) = G(e^{\lambda x_1}, \dots, e^{\lambda x_m}) = \begin{cases} 0, & \text{если для } \forall i \ x_i < 0, \\ b, & \text{если } \exists k \ x_k > 0. \end{cases}$$

Таким образом, новая неизвестная функция $x(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + (c-x)H(x(t-h_1), \dots, x(t-h_m)). \quad (12)$$

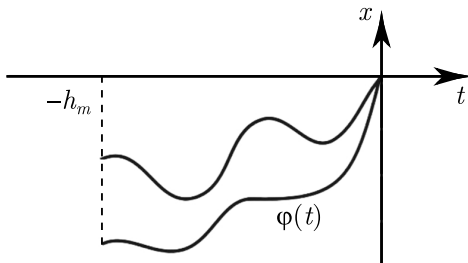


Рис. 2. Представители множества начальных функций
Fig. 2. Representatives of the set of initial functions

1.4. Начальное множество функций.

В качестве множества начальных функций для уравнения (12) выберем следующее:

$$S = \{ \varphi \in C[-h_m, 0] : \varphi(t) < 0 \text{ при } t \in [-h_m, 0), \varphi(0) = 0 \}. \quad (13)$$

Это отрицательные функции на промежутке длины наибольшего запаздывания h_m , принимающие в нуле значение ноль (см. схематичный рис. 2).

2. Результат

2.1. Решение релейного уравнения относительно переменной x . Введем обозначение

$$y_0(\tilde{x}, t) = \begin{cases} \left(\tilde{x} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt} + \frac{1}{b} + c, & t \in [0, t_0], \\ t - t_0 + y_0(\tilde{x}, t_0) & t \in [t_0, T_0], \end{cases} \quad y_0(\tilde{x}, t + T_0) = y_0(y_0(\tilde{x}, T_0), t). \quad (14)$$

Эта функция изображена на рис. 3. Она состоит из непрерывно «склеенных» чередующихся частей экспоненты и линейных функций с угловым коэффициентом 1. Величина \tilde{x} обозначает значение функции y_0 при $t = 0$. Ниже, в лемме 2, будет доказано, что условие

$$c < -a - \frac{1}{b} - \frac{a+1}{1-e^{-bt_0}} \quad (15)$$

гарантирует, что $y_0((k+1)T_0) < y_0(kT_0)$.

Введем также величины

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= x_0(h_1), \\ x_0^{(s+1)} &= h_{s+1} - h_s - t_0 - (n-1)T_0 + \\ &+ y_0(x_0^{(s)}, t_0 + (n-1)T_0), \quad s = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

Теорема 1. Зафиксируем натуральное число n . Пусть

- 1) параметры $a > 0$, $b > 0$ и c удовлетворяют ограничению (15);
- 2) запаздывания h_s удовлетворяют неравенствам

$$(n-1)T_0 + t_0 + 1 < h_1 < nT_0, \quad (16)$$

$$h_{s+1} - h_s > t_0 + (n-1)T_0, \quad s = 1, \dots, m-1; \quad (17)$$

$$h_{s+1} - h_s < nT_0 + a(1 - e^{-nbt_0}), \quad s = 1, \dots, m-1. \quad (18)$$

Тогда уравнение (12) с любой начальной функцией из множества (13) имеет T -периодическое решение

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [0, h_1] \\ y_0(x_0^{(s)}, t - h_s), & t \in [h_s, h_s + t_0 + (n-1)T_0], \\ & s = 1, \dots, m, \\ t - h_s - t_0 - (n-1)T_0 + y_0(x_0^{(s)}, t_0 + (n-1)T_0), & t \in [h_s + t_0 + (n-1)T_0, h_{s+1}], \\ & s = 1, \dots, m-1, \\ t - h_m - t_0 - (n-1)T_0 + y_0(x_0^{(m)}, t_0 + (n-1)T_0), & t \in [h_m + t_0 + (n-1)T_0, T], \end{cases} \quad (19)$$

$$T = h_m + t_0 + (n-1)T_0 - \left(x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} - \frac{1}{b} - c. \quad (20)$$

Величины $x_0^{(s)}$ обозначают значения решения $x(t)$ в точках h_s . Схематичный график функции $x(t)$ изображен на рис. 4.

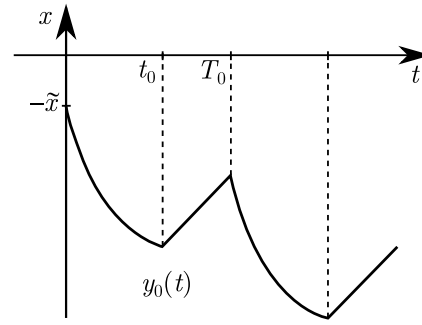


Рис. 3. Функция $y_0(t)$

Fig. 3. The function $y_0(t)$

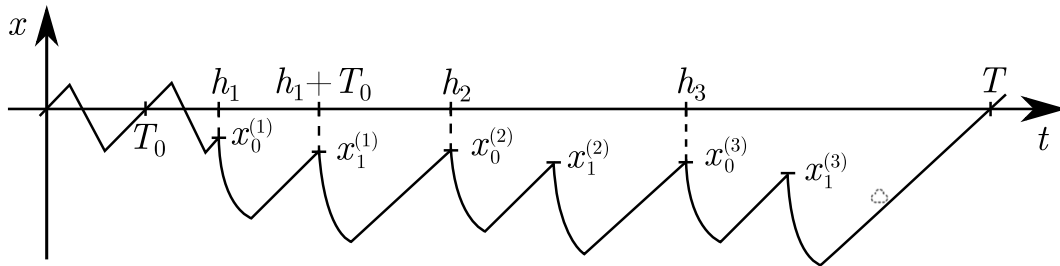


Рис. 4. Функция $x(t)$ при $n = 2, m = 3$

Fig. 4. The function $x(t)$ for $n = 2, m = 3$

Подробное доказательство теоремы 1 изложено в разделе 3. Ограничимся здесь описанием смысла приведенных в теореме условий на параметры.

Двойное неравенство (16) означает, что момент времени $t = h_1$ попадает на n -й период функции $x_0(t)$, причем на отрезок, где $x_0(t)$ возрастает и отрицательна (см. рис. 1).

Ограничение (17) означает, что длины отрезков $[h_s, h_{s+1}]$ больше длины промежутка, на котором решение $x(t)$ совпадает с функцией $x_0(t)$ и меняет знак (до последней точки положительности на периоде).

Неравенства (18) обеспечивают отрицательность величин $x_0^{(s)}$ при $s = 1, \dots, m$. Это будет доказано в лемме 6.

2.2. Разрешимость уравнения периодов. Для периода T , описанного формулой (20), удастся доказать утверждение о разрешимости уравнения периодов (8).

Теорема 2. *Зафиксируем натуральные числа $m \geq 2$ и n . Пусть*

- 1) *параметры $a > 0, b > 0$;*
- 2) *значение c удовлетворяет ограничениям (15) и*

$$c > -2a - \frac{1}{b} - \frac{a+1}{1-e^{-bt_0}}; \quad (21)$$

- 3) *запаздывания h_s удовлетворяют (16) и (11).*

Тогда существуют $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, удовлетворяющие уравнению (8), причем

$$t_0 + (n-1)T_0 < |\Delta| < nT_0 + a(1 - e^{-nbt_0}). \quad (22)$$

Неравенство (22) означает, что для $h_{s+1} - h_s = |\Delta|$ выполнены условия (17) и (18) теоремы 1. Доказательство теоремы приведено в пункте 4.

2.3. Периодическое решение исходной системы. Наличие подходящего параметра Δ обеспечивает существование периодического решения исходной системы в виде дискретной бегущей волны. Таким образом, из теорем 1 и 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Пусть*

- 1) *n – фиксированное натуральное число,*
- 2) *параметры a, b, c, h_s ($s = 1, \dots, m$) удовлетворяют условиям теоремы 1,*
- 3) *$\lambda > 0$,*

4) $\Delta \neq 0$ удовлетворяет уравнению периодов (8) при некотором целом $p \neq 0$, тогда существует h такое, что система (4) имеет $(m + 1)!$ сосуществующих решений вида

$$u_k = e^{\lambda x(t + j_k \Delta)}, \quad (23)$$

где $x(t)$ описывается формулой (19), j_0, j_1, \dots, j_m представляют собой некоторую перестановку номеров $0, 1, \dots, m$. При этом каждая компонента обладает на периоде n «высокоамплитудными» (порядка e^λ) всплесками, после которых следует промежуток с «малыми» (порядка $e^{-\lambda}$) значениями функции $u_k(t)$. Величина $(m + 1)\Delta$ кратна периоду этого решения.

Поведение компонент решения, описанное в теореме, естественно называть bursting-эффектом (см. рис. 5).

С учетом (5) и сделанной экспоненциальной замены $u = e^{\lambda x}$ справедливость теоремы 3 следует из теоремы 1 и теоремы 2. Отметим способ выбора параметра h . Если $h_1 > \Delta$, то $h = h_1 - \Delta$. Если $h_1 < \Delta$, то можно взять $h = \Delta - h_1$.

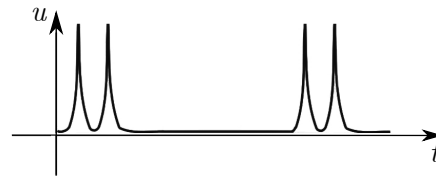


Рис. 5. Функция $u(t)$ с bursting-эффектом, содержащая $n=2$ всплеска на периоде

Fig. 5. A function $u(t)$ with a bursting effect, containing $n = 2$ bursts per period

3. Доказательство теоремы 1

На промежутке $[0, h_1]$ функция $H(x(t - h_1), \dots, x(t - h_m))$ равна 0, следовательно, на текущем отрезке $x(t)$ отыскивается из начальной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = R(x(t - 1)), \\ x(t)|_{t \in [-h_m, 0]} = \varphi(t). \end{cases} \quad (24)$$

Решение задачи (24) — периодическая функция $x_0(t)$, описанная формулами (3). Эта функция изображена на рис. 1. Она обращается в ноль в точках

$$kT_0, t_0 + kT_0, k = 0, 1, \dots \quad (25)$$

и терпит излом в точках

$$1 + kT_0, t_0 + 1 + kT_0, k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

По условию теоремы 1 величина h_1 попадает на n -й период функции $x_0(t)$. Более точно: ограничение (16) гарантирует, что h_1 попадает на отрезок периода функции $x_0(t)$, где она возрастает и отрицательна.

Уравнение (12) на промежутке $[h_1, h_2]$ принимает вид

$$\dot{x} = 1 + (c - x)H(x_0(t - h_1), \varphi(t - h_2), \dots, \varphi(t - h_m)).$$

Первый аргумент функции H меняет знак, а аргументы со 2-го по m -й отрицательны. Значит, значение функции H здесь определяется знаком ее первого аргумента $x_0(t - h_1)$. На отрезках $[h_1 + kT_0, h_1 + t_0 + kT_0]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ функция $x_0(t - h_1)$ положительна, а на отрезках $[h_1 + t_0 + kT_0, h_1 + t_0 + (k + 1)T_0]$ отрицательна. Обозначим значение функции x в точках $h_1 + kT_0$ через $x_k^{(1)}$, эти величины предстоит определить. Таким образом, в зависимости от знака $x_0(t - h_1)$ на отрезке $[h_1, h_1 + t_0 + (n - 1)T_0]$ получаем одну из двух возможных задач Коши.

1. При $t \in [h_1 + kT_0, h_1 + t_0 + kT_0]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$,

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + (c - x)b, \\ x|_{t=h_1+kT_0} = x_k^{(1)}, \end{cases} \quad (27)$$

откуда

$$x(t) = \left(x_k^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-b(t-h_1-kT_0)} + \frac{1}{b} + c. \quad (28)$$

2. При $t \in [h_1 + t_0 + kT_0, h_1 + (k + 1)T_0]$, $k = 0, 1, \dots, n - 2$,

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{h_1+t_0+kT_0} = \left(x_k^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь начальное значение определяется формулой (28). Решение задачи Коши (29) имеет вид

$$x(t) = t - h_1 - t_0 - kT_0 + \left(x_k^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c \quad (30)$$

Тем самым доказано, что на отрезке $[h, h_1 + t_0 + kT_0]$ решение $x(t)$ уравнения (12) совпадает с функцией $y_0(x_0^{(1)}, t - h_1)$, описанной формулой (14), $x_0^{(1)} = x_0(h_1)$. При этом

$$x_k^{(1)} = y_0(x_0^{(1)}, kT_0).$$

Далее докажем две леммы, описывающие поведение последовательности $x_k^{(1)}$.

Лемма 1. Последовательность $x_k^{(1)}$ задается формулой

$$x_k^{(1)} = (a + 1) \frac{1 - e^{-kbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-kbt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (31)$$

Доказательство. Учитывая рекуррентную форму y_0 и то, что $T_0 - t_0 = a + 1$, получаем рекуррентную последовательность для $x_k^{(1)}$:

$$x_{k+1}^{(1)} = a + 1 + \left(x_k^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (32)$$

Отсюда, суммируя соответствующую геометрическую прогрессию, накапливающуюся в коэффициенте при $(a + 1)$, найдем явную формулу для вычисления $x_k^{(1)}$:

$$x_k^{(1)} = (a + 1) \frac{1 - e^{-kbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-kbt_0} + \frac{1}{b} + c.$$

Лемма 1 доказана.

Докажем лемму о монотонности последовательности $x_k^{(1)}$.

Лемма 2. Пусть параметры a, b, c удовлетворяют неравенству (15). Тогда последовательность $x_k^{(1)}$, описанная формулой (31), убывает.

Доказательство. Докажем, что

$$x_{k+1}^{(1)} < x_k^{(1)}.$$

Это неравенство, с учетом (31), эквивалентно следующему неравенству:

$$(a+1) \frac{1 - e^{-(k+1)bt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-(k+1)bt_0} < (a+1) \frac{1 - e^{-kbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-kbt_0},$$

откуда следует

$$c < x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - \frac{a+1}{1 - e^{-bt_0}}.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку $x_0^{(1)} = x_0(h_1) > x_0(t_0 + 1 + (n-1)T_0) = -a$, и по условию (15) выполняется.

В рамках предположения (16) справедливо $x_0^{(1)} = x_0(h_1) = h_1 - nT_0 < 0$, поэтому лемма 2 и убывание экспоненты в составе функции y_0 обеспечивают отрицательность решения на промежутке $[h_1, h_1 + t_0 + (n-1)T_0]$.

Следующий промежуток построения начинается в точке $h_1 + t_0 + (n-1)T_0$ и продлится либо до точки h_2 , либо до очередного корня, увеличенного на 1. Здесь задача принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{t=h_1+t_0+(n-1)T_0} = \left(x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = t - h_1 - t_0 - (n-1)T_0 + \left(x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (33)$$

Подставляя h_2 в формулу (33), используя (31), неравенства (18), (15) и отрицательность $x_0^{(1)}$, убеждаемся, что $x(h_2) < 0$. Это означает, что h_2 меньше следующего корня функции $x(t)$. Таким образом, текущий промежуток построения — это $[h_1 + t_0 + (n-1)T_0, h_2]$, и на нем справедлива формула (33).

Далее решение строится аналогично тому, как это было сделано на промежутке $[h_1, h_2]$.

Лемма 3. При $t \in [h_s, h_s + t_0 + (n-1)T_0]$, $s = 1, \dots, m$ функция H имеет один аргумент с чередующимся знаком (это $x(t - h_s)$), а остальные аргументы отрицательны. На отрезках $[h_s + t_0 + (n-1)T_0, h_{s+1}]$, $s = 1, \dots, m-1$ все аргументы функции H отрицательны.

Доказательство леммы проводится методом математической индукции и включает в себя несколько лемм о поведении величин $x_k^{(s)}$.

На каждом из промежутков $[h_s, h_s + t_0 + (n-1)T_0]$ при решении уравнения возникают задачи Коши, аналогичные задачам (27) и (29).

1. При $t \in [h_s + kT_0, h_s + t_0 + kT_0]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $s = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + (c-x)b, \\ x|_{t=h_s+kT_0} = x_k^{(s)}. \end{cases} \quad (34)$$

Последовательность $x_k^{(s)}$ равна значениям функции $x(t)$ в точках $h_s + kT_0$. Они будут описаны рекуррентными соотношениями ниже. Из (34) находим

$$x(t) = \left(x_k^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-b(t-h_s-kT_0)} + \frac{1}{b} + c. \quad (35)$$

Подставляя $t = h_s + t_0 + kT_0$ в (35), получаем начальное значение для следующей по номеру задачи Коши.

2. При $t \in [h_s + t_0 + kT_0, h_s + (k + 1)T_0]$, $k = 0, 1, \dots, n - 2$, $s = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{h_s+t_0+kT_0} = \left(x_k^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = t - h_s - t_0 - kT_0 + \left(x_k^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (36)$$

3. При $t \in [h_s + t_0 + (n - 1)T_0, h_{s+1}]$, $s = 1, \dots, m - 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{h_s+t_0+(n-1)T_0} = \left(x_{n-1}^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = t - h_s - t_0 - (n - 1)T_0 + \left(x_{n-1}^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (37)$$

Для завершения доказательства сформулируем еще 3 леммы.

Лемма 4. Последовательности $x_k^{(s)}$ при $s = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, n - 1$ задаются формулами

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} = x_0(h_1), \quad x_k^{(s+1)} = (|\Delta| - nT_0) \frac{1 - e^{-snbt_0}}{1 - e^{-nbt_0}} e^{-kbt_0} + (a + 1) \frac{1 - e^{-(sn+k)bt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \\ + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-(sn+k)bt_0} + \frac{1}{b} + c. \end{aligned} \quad (38)$$

Доказательство. Аналогично тому, как была получена формула (31), найдем

$$x_k^{(s)} = (a + 1) \frac{1 - e^{-kbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-kbt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (39)$$

Формула (37) при $t = h_{s+1}$ дает значение для величины $x_0^{(s+1)}$:

$$x_0^{(s+1)} = h_{s+1} - h_s - t_0 - (n - 1)T_0 + \left(x_{n-1}^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \quad (40)$$

Подставляя в (40) формулу (39) при $k = n - 1$ и учитывая равенство $T_0 - t_0 = a + 1$, получаем рекуррентную зависимость $x_0^{(s+1)}$ от $x_0^{(s)}$:

$$x_0^{(s+1)} = h_{s+1} - h_s - nT_0 + (a + 1) \frac{1 - e^{-nbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-nbt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (41)$$

Отсюда, суммируя геометрическую прогрессию и учитывая, что $h_{s+1} - h_s = |\Delta|$, получаем

$$x_0^{(s+1)} = (|\Delta| - nT_0) \frac{1 - e^{-snbt_0}}{1 - e^{-nbt_0}} + (a + 1) \frac{1 - e^{-snbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-snbt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (42)$$

Из формул (39) и (42) следует (38).

Лемма 5. Пусть параметры a, b, c удовлетворяют неравенству (15). Тогда последовательности $x_k^{(s)}$, $s = 1, \dots, m$, описанные формулами (38), убывают по k при фиксированном s .

Эта лемма доказывается аналогично лемме 2.

Следующая лемма гарантирует отрицательность значений функции x в точках h_s .

Лемма 6. Пусть параметры a, b, c, h_s ($s = 1, \dots, m$) удовлетворяют условиям (18) и (15), тогда величины $x_0^{(s)} < 0$ при $s = 1, \dots, m$.

Доказательство. Докажем утверждение методом математической индукции. Из условия (16) следует, что $x_0^{(1)} = x_0(h_1) = h_1 - nT_0 < 0$. Это означает выполнение базы индукции. Предположим, что $x_0^{(s)} < 0$, тогда, применяя к (41) неравенства (18) и $c + \frac{1}{b} < -a - \frac{a+1}{1-e^{-bt_0}}$, которое следует из (15), получим

$$x_0^{(s+1)} = h_{s+1} - h_s - nT_0 + (a+1) \frac{1 - e^{-nbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + x_0^{(s)} e^{-nbt_0} + \left(\frac{1}{b} + c\right) (1 - e^{-nbt_0}) < x_0^{(s)} e^{-nbt_0} < 0.$$

Лемма 6 доказана.

Леммы 2 и 6 гарантируют отрицательность значений решения $x(t)$ при $t \in [h_s, h_{s+1}]$, тем самым обосновывается индукционный переход доказательства леммы 3.

На заключительном этапе построения решения получим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{t=h_m+t_0+(n-1)T_0} = \left(x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = t - h_m - t_0 - (n-1)T_0 + \left(x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (43)$$

Правая часть уравнения (12) оказывается равна 1, поскольку все аргументы H отрицательны после $t = h_m + t_0 + (n-1)T_0$. Эта ситуация сохранится на отрезке $[h_m + t_0 + (n-1)T_0, T]$, где через T обозначен первый ноль функции $x(t)$, больший $(n-1)T_0 + t_0$ (положительный корень с номером $2n$). Из формулы (43) следует (20).

Лемма 7. Пусть $x(t)$ — построенное на отрезке $[0, T]$ решение уравнения (12), описанное формулами (3) при $t \in [0, h_1]$, (35), (36) и (37) при $t \in [h_1, h_m + t_0 + (n-1)T_0]$, (43) при $t \in [h_m + t_0 + (n-1)T_0, T]$. Тогда функция $x(t+T)$ при $t \in [-h_m, 0]$ принадлежит множеству (13).

Доказательство. Докажем, что промежуток $((n-1)T_0 + t_0, T)$, на котором $x(t) < 0$, имеет длину больше h_m . Действительно,

$$T - (n-1)T_0 - t_0 = h_m - \underbrace{\left(x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} - \frac{1}{b} - c}_{=-x(h_s) > 0} > h_s.$$

Тогда промежуток $[T - h_m, T)$ вложен в $((n-1)T_0 + t_0, T)$, причем $x(T) = 0$.

Лемма 7 обеспечивает T -периодичность построенного решения $x(t)$.

Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Отметим, что в уравнении периодов (8), в силу положительности T и $m + 1$, величины Δ и p имеют одинаковый знак, поэтому можно записать

$$T = \frac{(m + 1)|\Delta|}{|p|}. \quad (44)$$

Приведем явную формулу для вычисления периода T . Подставляя (38) в (20), а также учитывая, что $h_m = h_1 + (m - 1)|\Delta|$ и $x_0^{(1)} = h_1 - nT_0$, получаем

$$T = |\Delta| \left(m - \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} \right) + h_1(1 - e^{-mnb t_0}) + nT_0 \frac{1 - e^{-(m+1)nb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} - (a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} - c. \quad (45)$$

Из (44) и (45) следует

$$\begin{aligned} \left(\frac{m + 1}{|p|} - m + \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} \right) |\Delta| &= \\ &= h_1(1 - e^{-mnb t_0}) + nT_0 \frac{1 - e^{-(m+1)nb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} - (a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} - c. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь коэффициент при $|\Delta|$ положителен, так как $\frac{m+1}{|p|} > m$ и экспонента с отрицательным показателем меньше 1. Правая часть положительна в силу неравенства (15), из которого следует

$$-(a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} - c > -(a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} + a + \frac{a + 1}{1 - e^{-bt_0}} = \frac{(a + 1)e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} + a > 0.$$

Таким образом, мы убедились в корректности нахождения Δ из уравнения (46) и можем записать

$$|\Delta| = \frac{h_1(1 - e^{-mnb t_0}) + nT_0 \frac{1 - e^{-(m+1)nb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} - (a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} - c}{\frac{m + 1}{|p|} - m + \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}}}.$$

Теперь остается проверить справедливость ограничений (22). Допустим, $|p| = 1$, тогда $\frac{m+1}{|p|} - m = 1$. Применяя неравенства (15), (21) и (16), получим требуемое.

Теорема 2 доказана.

Заключение

Нами введена система (4), моделирующая полносвязную цепочку $m + 1$ нейронов с синаптической запаздывающей связью. Для нее доказана теорема 3 о существовании $(m + 1)!$ периодических решений в виде дискретных бегущих волн с bursting-эффектом. С этой целью для вспомогательного уравнения (12) с m упорядоченными запаздываниями h_1, \dots, h_m доказана теорема 1 о существовании специального периодического режима. После чего доказана теорема 2 о разрешимости уравнения периодов.

Отметим, что ограничение (16) в теореме 1 носит искусственный характер. Величина h_1 попадает на некоторый период функции $x_0(t)$, номер которого обозначен через n . При этом возможны четыре случая взаимного расположения точек (25), (26) и h_1 :

- (I) $(n-1)T_0 < h_1 < (n-1)T_0 + 1$;
- (II) $(n-1)T_0 + 1 < h_1 < (n-1)T_0 + t_0$;
- (III) $(n-1)T_0 + t_0 < h_1 < (n-1)T_0 + t_0 + 1$;
- (IV) $(n-1)T_0 + t_0 + 1 < h_1 < nT_0$.

Для определенности нами подробно рассмотрен случай (IV), для которого доказана теорема 1. В остальных случаях можно доказать аналогичные утверждения, в которых форма решения немного отличается от (19), но сохраняется общая идея чередования промежутков с положительными и отрицательными значениями, что обеспечивает наличие bursting-эффекта у функции $u(t)$. Таким образом, bursting-эффект может сохраняться при изменении h_1 в более широком диапазоне.

Список литературы

1. Glyzin S. D., Preobrazhenskaia M. M. Multistability and bursting in a pair of delay coupled oscillators with a relay nonlinearity // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, no. 18. P. 109–114. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.215.
2. Glyzin S. D., Preobrazhenskaia M. M. Two delay-coupled neurons with a relay nonlinearity. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y. (eds) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research III. NEUROINFORMATICS 2019, Moscow, 7–11 October 2019. Studies in Computational Intelligence, vol. 856. Cham: Springer, 2020. P. 181–189. DOI: 10.1007/978-3-030-30425-6_21.
3. Preobrazhenskaia M. M. Three unidirectionally synaptically coupled bursting neurons. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y., Klimov V. V. (eds) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research V. NEUROINFORMATICS 2021, 18–22 октября 2021. Studies in Computational Intelligence, vol. 1008. Cham: Springer, 2022. P. 135–141. DOI: 10.1007/978-3-030-91581-0_18.
4. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
5. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. 2015. Т. 70, № 3(423). С. 3–76. DOI: 10.4213/rm9659.
6. Somers D., Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation // Biol. Cybern. 1993. Vol. 68. P. 393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
7. Somers D., Kopell N. Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions // J. Math. Biol. 1995. Vol. 33. P. 261–280. DOI: 10.1007/BF00169564.
8. Terman D. An introduction to dynamical systems and neuronal dynamics // In: Tutorials in Mathematical Biosciences I: Mathematical Neuroscience. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. P. 21–68. DOI: 10.1007/978-3-540-31544-5_2.
9. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244. DOI: 10.1134/S0374064113100014.
10. Преображенская М. М. Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 2. С. 186–204. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-186-204.

11. Преображенская М. М. Импульсно-рефрактерный режим в кольцевой цепи синаптически связанных осцилляторов нейронного типа // *Модел. и анализ информ. систем.* 2017. Т. 24, № 5. С. 550–566. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-550-566.
12. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Об одном способе математического моделирования электрических синапсов // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58, № 7. С. 867–881. DOI: 10.31857/S0374064122070019.
13. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Периодические режимы двухкластерной синхронизации в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // *ТМФ.* 2022. Т. 212, № 2. С. 213–233. DOI: 10.4213/tmf10191.
14. Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // *Известия вузов. ПНД.* 2022. Т. 30, № 2. С. 152–175. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175.
15. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Бегущие волны в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Т. 61, № 1. С. 71–89. DOI: 10.31857/S0044466922010070.
16. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в кольцевых генных сетях // *ТМФ.* 2016. Т. 187, № 3. С. 560–579. DOI: 10.4213/tmf9052.

References

1. Glyzin SD, Preobrazhenskaia MM. Multistability and bursting in a pair of delay coupled oscillators with a relay nonlinearity. *IFAC-PapersOnLine.* 2019;52(18):109–114. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.215.
2. Glyzin SD, Preobrazhenskaia MM. Two delay-coupled neurons with a relay nonlinearity. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y. (eds) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research III. NEUROINFORMATICS 2019, Moscow, 7–11 October 2019. Studies in Computational Intelligence, vol. 856.* Cham: Springer; 2020. P. 181–189. DOI: 10.1007/978-3-030-30425-6_21.
3. Preobrazhenskaia M. M. Three unidirectionally synaptically coupled bursting neurons. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y., Klimov V. V. (eds) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research V. NEUROINFORMATICS 2021, 18–22 October 2021. Studies in Computational Intelligence, vol. 1008.* Cham: Springer; 2022. P. 135–141. DOI: 10.1007/978-3-030-91581-0_18.
4. Kolesov AYu, Mishchenko EF, Rozov NKh. A modification of Hutchinson’s equation. *Comput. Math. Math. Phys.* 2010;50(12):1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
5. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons. *Russian Mathematical Surveys.* 2015;70(3):383–452. DOI: 10.1070/RM2015v070n03ABEH004951.
6. Somers D, Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation. *Biol. Cybern.* 1993;68:393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
7. Somers D, Kopell N. Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions. *J. Math. Biol.* 1995;33:261–280. DOI: 10.1007/BF00169564.
8. Terman D. An introduction to dynamical systems and neuronal dynamics. In: *Tutorials in Mathematical Biosciences I: Mathematical Neuroscience.* Berlin, Heidelberg: Springer; 2005. P. 21–68. DOI: 10.1007/978-3-540-31544-5_2.
9. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. On a method for mathematical modeling of chemical synapses. *Differential Equations.* 2013;49(10):1193–1210. DOI: 10.1134/S0012266113100017.

10. Preobrazhenskaia MM. Relaxation cycles in a model of synaptically interacting oscillators. MAIS. 2017;24(2):186–204. (in Russian) DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-186-204.
11. Preobrazhenskaia MM. The impulse-refractive mode in a neural network with ring synaptic interaction. Automatic Control and Computer Sciences. 2018;52(7):777–789. DOI: 10.3103/S0146411618070210.
12. Glyzin SD, Kolesov AYu. On a method of mathematical modeling of electrical synapses. Differential Equations. 2022;58(7):853–868. DOI: 10.1134/S0012266122070011.
13. Glyzin SD, Kolesov AYu. Periodic two-cluster synchronization modes in fully coupled networks of nonlinear oscillators. Theoret. and Math. Phys. 2022;212(2):1073–1091. DOI: 10.1134/S0040577922080049.
14. Glyzin DS, Glyzin SD, Kolesov AYu. Hunt for chimeras in fully coupled networks of nonlinear oscillators. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2):152–175. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175.
15. Glyzin SD, Kolesov AYu. Traveling waves in fully coupled networks of linear oscillators. Comput. Math. Math. Phys. 2022;62(1):66–83. DOI: 10.1134/S0965542522010079.
16. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. Buffering in cyclic gene networks. Theoret. and Math. Phys. 2016;187(3):935–951. DOI: 10.1134/S0040577916060106.



Преображенский Игорь Евгеньевич — родился в Ярославле (1984). Окончил математический факультет Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова по направлению «Прикладная математика» (2007). Работает на кафедре дифференциальных уравнений ЯрГУ им. П. Г. Демидова в должности старшего преподавателя, а также в Центре интегрируемых систем в должности научного сотрудника. Научные интересы — функциональный анализ, нейронаука.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
 E-mail: preobrazenskii@gmail.com
 ORCID: 0009-0007-0631-8158
 AuthorID (eLibrary.Ru): 751131



Преображенская Маргарита Михайловна — родилась в Переславле-Залесском (1991). Окончила с отличием математический факультет Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова по направлению «Прикладная математика» (2013). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2018, ННГУ им. Н. И. Лобачевского). Работает на кафедре математического анализа ЯрГУ им. П. Г. Демидова в должности доцента, а также в Центре интегрируемых систем в должности научного сотрудника. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, интегрируемые системы. Опубликовала множество научных статей по указанным направлениям.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
 E-mail: rita.preo@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-7032-1155
 AuthorID (eLibrary.Ru): 974850



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003122
EDN: ZWPCXX

Регуляция пачечной динамики в нейрон-глиальной сети с синаптической пластичностью

С. В. Стасенко^{1,2}

¹Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

²Московский физико-технический институт, Россия

E-mail: ✉stasenko@neuro.nnov.ru

Поступила в редакцию 7.03.2024, принята к публикации 29.05.2024,
опубликована онлайн 9.08.2024, опубликована 30.09.2024

Аннотация. Цель настоящего исследования — разработка и исследование модели астроцитарной регуляции пачечной динамики импульсной нейронной сети с синаптической пластичностью в тормозных синапсах. *Методы.* В качестве модели нейрона была использована модель «сброса и накопления». Для описания динамики синаптических связей была использована модель зависимого от проводимости синапса с соответствующим характерным временем релаксации для возбуждающих и тормозных синапсов. При этом в динамике тормозных синапсов между возбуждающими и тормозными нейронами была использована модель тормозной синаптической пластичности, описанная в работе Вогеля. В то же время динамика возбуждающих синапсов регулировалась среднеполевой моделью концентрации глиотрансмиттера. *Результаты.* Была разработана и исследована модель регуляции пачечной динамики в нейрон-глиальной сети с тормозной синаптической пластичностью. Были получены основные динамические режимы нейронной активности в отсутствие регуляций, в присутствии только синаптической пластичности и в присутствии также астроцитарной регуляции синаптической передачи. Было проведено исследование влияния астроцитарной модуляции на частоту пачечной активности нейронной сети. *Заключение.* В результате исследования показана возможность управления пачечной активностью импульсной нейронной сети за счет учета тормозной синаптической пластичности для тормозных синапсов между тормозными и возбуждающими нейронами, а также астроцитарной модуляции возбуждающих синапсов. Астроцитарная модуляция синаптической передачи может выступать дополнительным механизмом поддержания гомеостаза в нейронной сети, помимо синаптической передачи, существующей на более быстром временном масштабе.

Ключевые слова: импульсная нейронная сеть, рекуррентная сеть, трехчастный синапс, синаптическая пластичность, нейрон, астроцит.

Благодарности. Работа в части разработки модели и симуляции выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00134), работа в части подбора параметров модели тормозной синаптической пластичности выполнена при поддержке Программы развития Регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (Соглашение № 075-02-2024-1439).

Для цитирования: Стасенко С. В. Регуляция пачечной динамики в нейрон-глиальной сети с синаптической пластичностью // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 670–690. DOI: 10.18500/0869-6632-003122. EDN: ZWPCXX

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Regulation of burst dynamics in the neuron-glia network with synaptic plasticity

S. V. Stasenko^{1,2}

¹National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology, Russia

E-mail: ✉stasenko@neuro.nnov.ru

Received 7.03.2024, accepted 29.05.2024, available online 9.08.2024, published 30.09.2024

Abstract. The *purpose* of this study is to develop and investigate a model of astrocytic regulation of burst dynamics of a spiking neural network with synaptic plasticity in inhibitory synapses. *Methods.* The “integrate and firing” model was used as a neuron model. To describe the dynamics of synaptic connections, a conductance-dependent synapse model with corresponding characteristic relaxation times for excitatory and inhibitory synapses was used. At the same time, inhibitory synaptic plasticity, described by the Vogel model, was used in the dynamics of inhibitory synapses between excitatory and inhibitory neurons. At the same time, the dynamics of excitatory synapses was regulated by the mean-field model of gliotransmitter concentration. *Results.* A model for the regulation of burst dynamics in a neuron-glia network with inhibitory synaptic plasticity was developed and studied. The main dynamic modes of neuronal activity were obtained in the absence of regulation, in the presence of only synaptic plasticity, and in the presence of also astrocytic regulation of synaptic transmission. A study was conducted of the influence of astrocytic modulation on the frequency of burst activity of the neural network. *Conclusion.* The study showed the possibility of controlling the burst activity of a spiking neural network by taking into account inhibitory synaptic plasticity for inhibitory synapses between inhibitory and excitatory neurons, as well as astrocytic modulation of excitatory synapses. Astrocytic modulation of synaptic transmission may act as an additional mechanism for maintaining homeostasis in the neural network beyond synaptic transmission, which exists on a faster time scale.

Keywords: spiking neural network, recurrent network, tripartite synapse, synaptic plasticity, neuron, astrocyte.

Acknowledgements. Work regarding the development of the model and simulation was carried out with the support of a grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-11-00134), work regarding the selection of parameters for the model of inhibitory synaptic plasticity was carried out with the support of the Development Program of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies” (Agreement No. 075-02-2024-1439).

For citation: Stasenko SV. Regulation of burst dynamics in the neuron-glia network with synaptic plasticity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(5):670–690. DOI: 10.18500/0869-6632-003122

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Пачечная динамика, характеризующаяся синхронизацией импульсов в группах нейронов, повышает синаптическую надежность и избирательность связи внутри импульсных нейронных сетей [1]. Управление пачечной динамикой имеет решающее значение для точной обработки информации и стабильности сети [2]. Пачечная динамика, находящаяся под влиянием таких факторов, как возбуждающие и тормозящие связи, топология сети и свойства отдельных нейронов, играет значительную роль в сетевых взаимодействиях [3]. Временные аспекты пачечной динамики важны для чувствительного ко времени обучения и пластичности, так как помогают связывать нейроны на основе паттернов возбуждения [4].

В диссоциированных нейрональных культурах популяционные пачки демонстрируют квазисинхронную динамику, представляя собой высокочастотные последовательности импульсов, вовлекающие большинство нейронов сети в пределах определенного временного окна. Эти пачки кодируют различные динамические состояния сети [5–7]. Механизмы синхронизации нейронов включают свойства нейронов и сетей, а также нейромодуляцию, опосредованную различными нейромодуляторами. Хотя большинство из них действуют в миллисекундном масштабе времени,

нейромодуляция с участием глиальных клеток (астроцитов) действует в секундном временном масштабе, а молекулы внеклеточного матрикса действуют в течение нескольких минут или часов [8–18].

Функциональность мозга от базового двигательного контроля до высших когнитивных функций зависит от регуляций синаптических связей [19]. Хотя возбуждающие синапсы исторически привлекали больше внимания, недавние исследования показали важность тормозных связей в формировании сложных состояний мозга [20]. Зависимые от активности изменения, такие как долговременная потенциация (LTP) и долговременная депрессия (LTD), происходят в тормозных синапсах по всему мозгу, но изучение этих изменений затруднено из-за разнообразия тормозных интернейронов и путей [21].

Интересным феноменом в современной нейробиологии является тормозная синаптическая пластичность, которая включает в себя различные молекулярные и функциональные механизмы, влияющие на возбудимость нейронов и персистентную пластичность [22]. Понимание ключевой роли и механизмов тормозной синаптической пластичности имеет решающее значение, поскольку она существенно влияет на обучение, память и баланс между возбуждением и торможением в нейронной сети [23]. Тормозная пластичность охватывает разнообразные формы, включая модуляцию пресинаптического высвобождения, изменения активности постсинаптических рецепторов и гетеросинаптическую пластичность, запускаемую близлежащими синапсами [24]. Различные области мозга демонстрируют разные механизмы индукции тормозной синаптической пластичности, часто связанные с передачей сигналов кальция, активацией рецепторов NMDA и ретроградными мессенджерами, такими как оксид азота (NO) и эндоканнабиноиды (eCB) [25].

Гетеросинаптическая тормозная синаптическая пластичность широко изучена и играет жизненно важную роль в балансировании процессов возбуждения и торможения в нейронной сети, особенно во время развития [26]. Пресинаптические LTP и LTD, опосредованные NMDA-рецепторами или эндоканнабиноидами, способствуют динамической регуляции высвобождения тормозных нейротрансмиттеров [27, 28]. Помимо гетеросинаптической пластичности, гомосинаптические механизмы, включающие прямые ГАМКергические связи, могут индуцировать тормозную синаптическую пластичность [29]. Кальций-зависимые изменения в ГАМКергических соединениях и динамике постсинаптических рецепторов играют решающую роль в модуляции тормозной силы [30, 31]. Тоническое торможение, опосредованное экстрасинаптическими рецепторами, претерпевает пластичность под влиянием различных сигнальных путей, включая глутаматергическую и каннабиноидную системы [32, 33]. Хотя правила обучения тормозной синаптической пластичности менее понятны по сравнению с синаптической пластичностью в возбуждающих синапсах, пластичность, зависящая от времени возникновения импульсов (STDP), была идентифицирована для некоторых ГАМКергических синапсов [34]. Правила STDP варьируются в зависимости от области мозга и могут приводить либо к потенцированию, либо к депрессии тормозных синапсов в зависимости от времени пре- и постсинаптической активации [35, 36].

Функциональная роль тормозной синаптической пластичности выходит за рамки синаптической модуляции: она способствует поддержанию баланса возбуждения / торможения, который имеет решающее значение для правильного функционирования нейронных сетей [37]. В ряде теоретических работ было показано, что тормозная синаптическая пластичность стабилизирует динамику сети, предотвращает доминирование определенных групп нейронов и регулирует представление стимулов [38–40]. Более того, тормозная синаптическая пластичность является неотъемлемой частью процессов обучения и памяти, формирования сетевых путей и облегчения координации движений [41, 42].

В работе [43] были исследованы кортикальные нейроны, поддерживающие баланс между возбуждающими и тормозными синаптическими токами за счет синаптической пластичности тормозных синапсов. Было показано, что тормозная пластичность в рекуррентных сетях служит гомеостатическим механизмом, приводящим к асинхронным нерегулярным состояниям сети.

Кроме того, это предполагает, что этот механизм позволяет формировать и поддерживать синаптические воспоминания, которые могут быть реактивированы внешними раздражителями.

Астроциты, играющие ключевую роль в синаптической передаче информации, высвобождают глиотрансмиттеры, такие как глутамат, АТФ, D-серин и ГАМК, воздействуя как на пре-, так и на постсинаптические компоненты [44, 45]. Их взаимодействия с пресинаптическими и постсинаптическими терминалями составляют концепцию трехчастного синапса [45, 46]. В ряде теоретических работ математические модели нейрон-глиального взаимодействия представляют либо в виде нейрона, окруженного глией [47, 48], либо в виде частотно-избирательного фильтра [49], либо модулятора пресинаптической активности нейрона [50]. Было также показано на уровне сетевых и среднеполевых моделей, что астроциты способствуют синаптической пластичности, обучению и нейронной синхронизации [51–58]. Нейрон-глиальные взаимодействия различаются в зависимости от структурной и функциональной связи. Модели (импульсных) нейронных сетей, включающие астроциты, демонстрируют улучшение кратковременной памяти [59–64]. В ряде экспериментальных работ было показано, что астроциты участвуют в регуляции синхронизации нейронов по типу режимов «вверх-вниз» [65].

В данной работе предлагается новая модель импульсной нейронной сети с синаптической пластичностью тормозных синапсов и астроцитарной регуляцией синаптической передачи в возбуждающих синапсах. В случае активности только тормозной пластичности модель импульсной нейронной сети демонстрирует асинхронную активность нейронов, в то же время присутствие астроцитарной регуляции синаптической передачи в возбуждающих синапсах позволяет сохранить синхронизацию нейронов и формирование пачечной динамики.

1. Методика

1.1. Математическая модель нейрона. Модель нейрона типа «сброса и накопления» использовалась для моделирования динамики нейронов. Эта модель объединяет сложные биофизические процессы в базовую структуру, фокусируясь на интеграции входящих сигналов и генерации импульсов при достижении порогового значения. В отличие от детальных моделей, таких как модель Ходжкина-Хаксли, она упрощает динамику до двоичных событий «генерация импульсов» или «не генерация импульсов», помогая понять обработку информации нейронами. Она эффективна в вычислительном отношении и часто используется при моделировании крупномасштабных сетей. Для оптимизации синаптических связей в модель были включены возбуждающие (g_{exc}) и тормозные (g_{inh}) синапсы, динамика которых определялась проводимостями

$$\begin{cases} C_m \frac{dV}{dt} = -g_l(V - E_l) - (g_{exc}V + g_{inh}(V - E_r)) + I_{ext}, \\ \frac{dg_{exc}}{dt} = -\frac{g_{exc}}{\tau_{exc}} + \sum_i w_{exc}^i \cdot \delta(t - t_{spike}^i), \\ \frac{dg_{inh}}{dt} = -\frac{g_{inh}}{\tau_{inh}} + \sum_i w_{inh}^i \cdot \delta(t - t_{spike}^i). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь V — мембранный потенциал, E_l — потенциал утечки, E_r — реверсивный потенциал тормозных синапсов, I_{ext} — прямой входной ток, C_m — ёмкость мембраны, τ_{exc} и τ_{inh} — постоянные времени для возбуждающих и тормозных синаптических входов (5 мс и 10 мс соответственно), g_{exc} и g_{inh} — синаптические проводимости, а w_{exc}^i и w_{inh}^i — синаптические веса от нейрона i . t_{spike}^i обозначает время появления импульса на нейроне i . Когда мембранный потенциал достигает порогового значения V_t , он сбрасывается до E_l . Параметры модели нейрона: $g_l = 10$ нСм, $E_l = -60$ мВ, $E_r = -80$ мВ, $V_t = -50$ мВ, $C_m = 200$ пФ и $I_{ext} = 200$ пА.

В нашей модели синаптические веса между тормозными нейронами фиксированы, тогда как веса между возбуждающими и тормозными нейронами, а также между возбуждающими и возбуждающими нейронами регулируются астроцитами. Между тормозными и возбуждающими нейронами синаптические веса пластичны и определяются тормозной синаптической пластичностью.

1.2. Тормозная синаптическая пластичность. В ряде экспериментальных работ было показано, что тормозные синапсы претерпевают изменения с совпадающей пре- и постсинаптической активностью в пределах временного окна τ_{STDP} [43]. Кроме того, отдельные пресинаптические импульсы вызывают снижение синаптической эффективности. Данное явление моделируется с помощью симметричного правила обучения, зависящего от времени импульса между пресинаптическим нейроном j и постсинаптическим нейроном i [43]. Потенциация зависит от $\Delta t = |t_j - t_i|$, тогда как депрессия возникает с каждым пресинаптическим импульсом на фиксированную величину α . Это правило пластичности, зависящей от времени импульса (STDP), применяется к тормозным синапсам на возбуждающих клетках. Синаптические изменения w_{ij} определяются синаптическим следом x_i , присвоенным каждому нейрону, следующему $\tau_{\text{STDP}} \frac{dx_i}{dt} = -x_i$ с $\tau_{\text{STDP}} = 20$ мс. Для каждого пре- или постсинаптического события w_{ij} обновляется следующим образом:

$$\begin{aligned} w_{ij} &\rightarrow w_{ij} + \eta (x_i - \alpha) && \text{— для пресинаптических импульсов в момент времени } t_j, \\ w_{ij} &\rightarrow w_{ij} + \eta x_j && \text{— для постсинаптических импульсов в момент времени } t_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где η — скорость обучения, а $\alpha = 2 \times \rho_0 \times \tau_{\text{STDP}}$, где ρ_0 является постоянным параметром.

1.3. Нейрон-глиальное взаимодействие. В предлагаемой модели каждый импульс запускает высвобождение нейротрансмиттера, при этом глутаматергические синапсы построены с учетом концепции трехчастного синапса. Предыдущие исследования [66, 67] показывают, что метаболизм, опосредованный глутаматом, приводит к синхронизированной активации нейронов. Для упрощения была использована феноменологическая модель для описания динамики глутамата. Используя подход среднего поля, среднюю внесинаптическую концентрацию глутамата X для каждого возбуждающего синапса можно записать с помощью следующих уравнений:

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{X}{\tau_X} + b_X \theta(t - t_{\text{spike}}^i). \quad (2)$$

Здесь b_X представляет собой долю высвобождения глутамата, а τ_X — время релаксации. Когда пресинаптический нейрон срабатывает, нейротрансмиттер высвобождается, вызывая временное увеличение концентрации синаптического глутамата, которое со временем затухает с постоянной времени τ_X . Параметры принимают следующие значения: $\tau_X = 20$ мс и $b_X = 1$.

Часть синаптического глутамата связывается с метаболитными рецепторами глутамата на мембране астроцита, инициируя серию молекулярных изменений, приводящих к высвобождению глиотрансмиттера. Упрощенно этот процесс можно записать следующим образом [11, 12, 51]:

$$\frac{dY}{dt} = -\alpha_Y Y + \frac{\beta_Y}{1 + \exp(-X + X_{thr})}. \quad (3)$$

В уравнении (3) Y представляет собой концентрацию глиотрансмиттера вблизи соответствующего возбуждающего синапса, а α_Y — скорость клиренса со значениями параметров $\alpha_Y = 120$ мс, $\beta_Y = 1$, $X_{thr} = 4$. Второй член уравнения (3) описывает выработку глиотрансмиттера, когда концентрация среднего поля превышает порог X_{thr} .

Было обнаружено, что астроциты модулируют вероятность высвобождения нейротрансмиттеров, влияя на синаптическую потенциацию или депрессию [68–70]. В предлагаемой модели

рассматривается потенциация синаптической передачи (увеличение вероятности высвобождения нейротрансмиттера) для глутаматергических синапсов во время генерации пресинаптических импульсов нейронов:

$$w_{exc} \leftarrow w_{exc} + \Delta w_{exc} \left(1 + \frac{\gamma Y}{1 + \exp(-Y + Y_{thr})} \right). \quad (4)$$

Здесь w_{exc} представляет собой вес глутаматергических синапсов между нейронами, а γY — коэффициент, отражающий влияние астроцитов на синаптические связи.

1.4. Нейронная сеть. На рис. 1 показана схема импульсной нейронной сети, состоящей из 8000 возбуждающих нейронов (изображены красным) и 2000 тормозных нейронов (изображены синим), соединенных между собой с 2-процентной вероятностью связи по схеме «все со всеми». На этом изображении тормозно-возбуждающие связи (выделены жирными синими стрелками) состоят из синапсов с тормозной синаптической пластичностью. Схема также иллюстрирует механизм нейронно-глиального взаимодействия, реализуемый для глутаматергических синапсов. Другие связи, такие как возбуждающе-возбуждающие, возбуждающе-тормозные и тормозно-тормозные, подчиняются динамике, определяемой уравнениями (1) и (4) (для возбуждающе-возбуждающих и возбуждающе-тормозных связей).

Частота популяционной активности определялась путем суммирования импульсов нейронов в секунду, а сглаживание достигалось с использованием окна Гаусса со стандартным отклонением 0.5 мс.

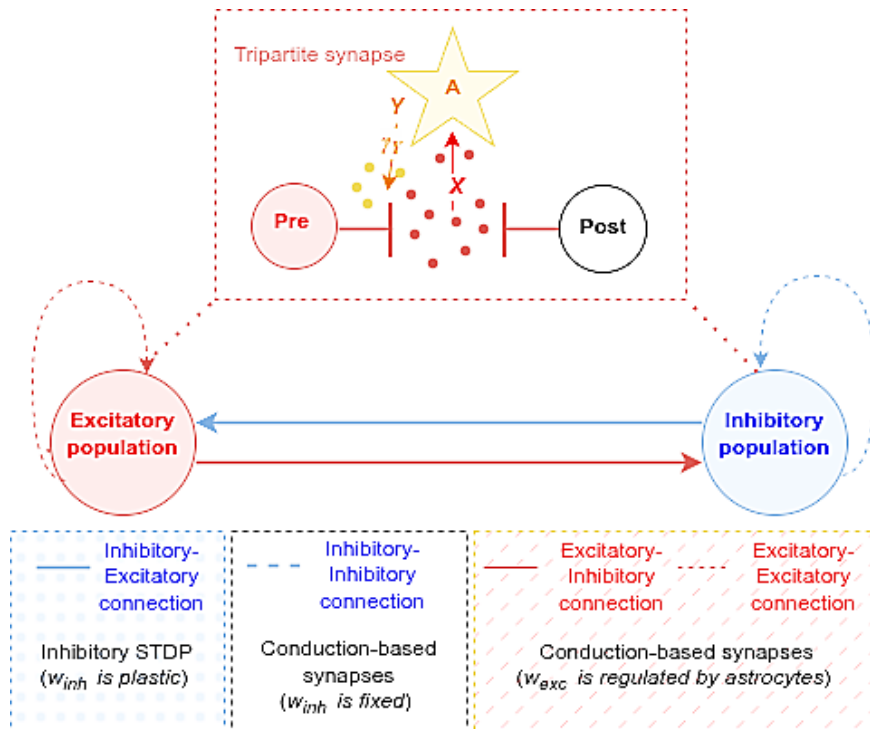


Рис. 1. Схема импульсной нейронной сети с тормозной синаптической пластичностью и астроцитарной регуляцией синаптической передачи в возбуждающих синапсах (цвет онлайн)

Fig. 1. Scheme of a spiking neural network with inhibitory synaptic plasticity and astrocytic regulation of synaptic transmission at excitatory synapses (color online)

2. Результаты

В работе была исследована астроцитарная регуляция синаптической передачи импульсной нейронной сети с тормозной синаптической пластичностью для трех случаев.

- Нейрональная синхронизация без регуляции.
- Подавление синхронизации нейронов с помощью тормозной синаптической пластичности.
- Восстановление синхронизации нейронов в присутствии тормозной синаптической пластичности за счет астроцитарной регуляции синаптической передачи.

Для последних двух случаев симуляция модели импульсной нейронной сети в течение первой секунды проводилась без каких-либо регуляций. Общая продолжительность симуляции составляла 10 секунд. Сначала рассмотрим динамику нейронной сети в отсутствие каких-либо регуляций. Сеть демонстрирует синхронную активность.

Все заметно меняется при добавлении тормозной синаптической пластичности для тормозно-возбуждающих связей.

Как можно заметить из рис. 3, *a*, учет тормозной синаптической проводимости в тормозно-возбуждающих синапсах приводит к постепенному изменению динамики нейронной сети. Тормозная синаптическая пластичность приводит к постепенной адаптации синаптических связей, ведущей к изменению процессов возбуждения и торможения нейронной сети. Пачки на растровой диаграмме рис. 3, *a* со временем становятся более длительными, межпачечное расстояние уменьшается (можно наблюдать визуально из рис. 3, *a*), как и уменьшается амплитуда частоты популяционной активности. Все меньшее количество нейронов участвует в образовании пачки, и после 1.3 секунды происходит резкий переход в асинхронное состояние нейронной сети.

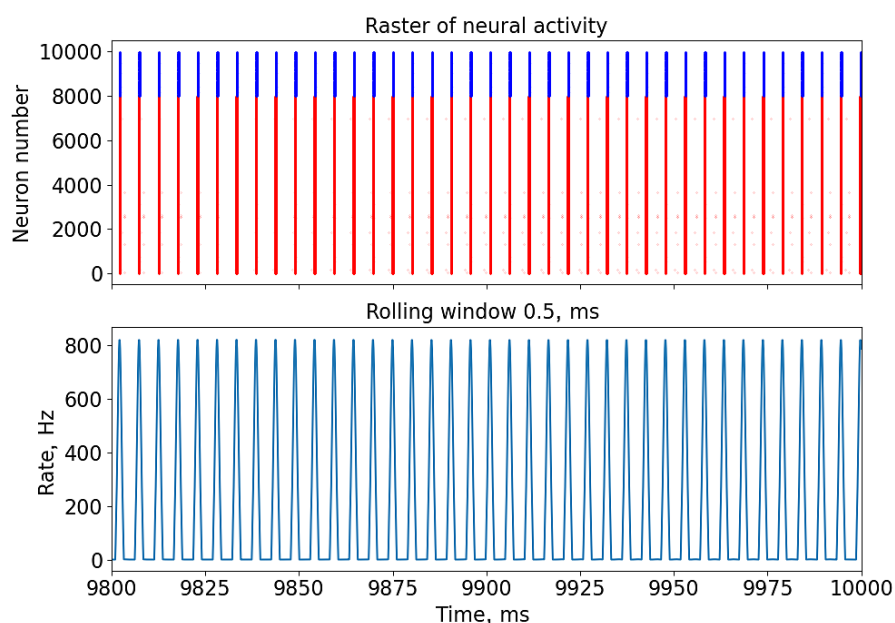


Рис. 2. Растровая диаграмма (сверху) нейронной активности импульсной нейронной сети в отсутствие регуляций и соответствующая частота популяционной активности (снизу). На растровой диаграмме красным цветом отмечены возбуждающие нейроны, а синим цветом — тормозные нейроны (цвет онлайн)

Fig. 2 Raster diagram (top) of the neural activity of a spiking neural network in the absence of regulation and the corresponding frequency of population activity (bottom). The raster diagram shows excitatory neurons in red and inhibitory neurons in blue (color online)

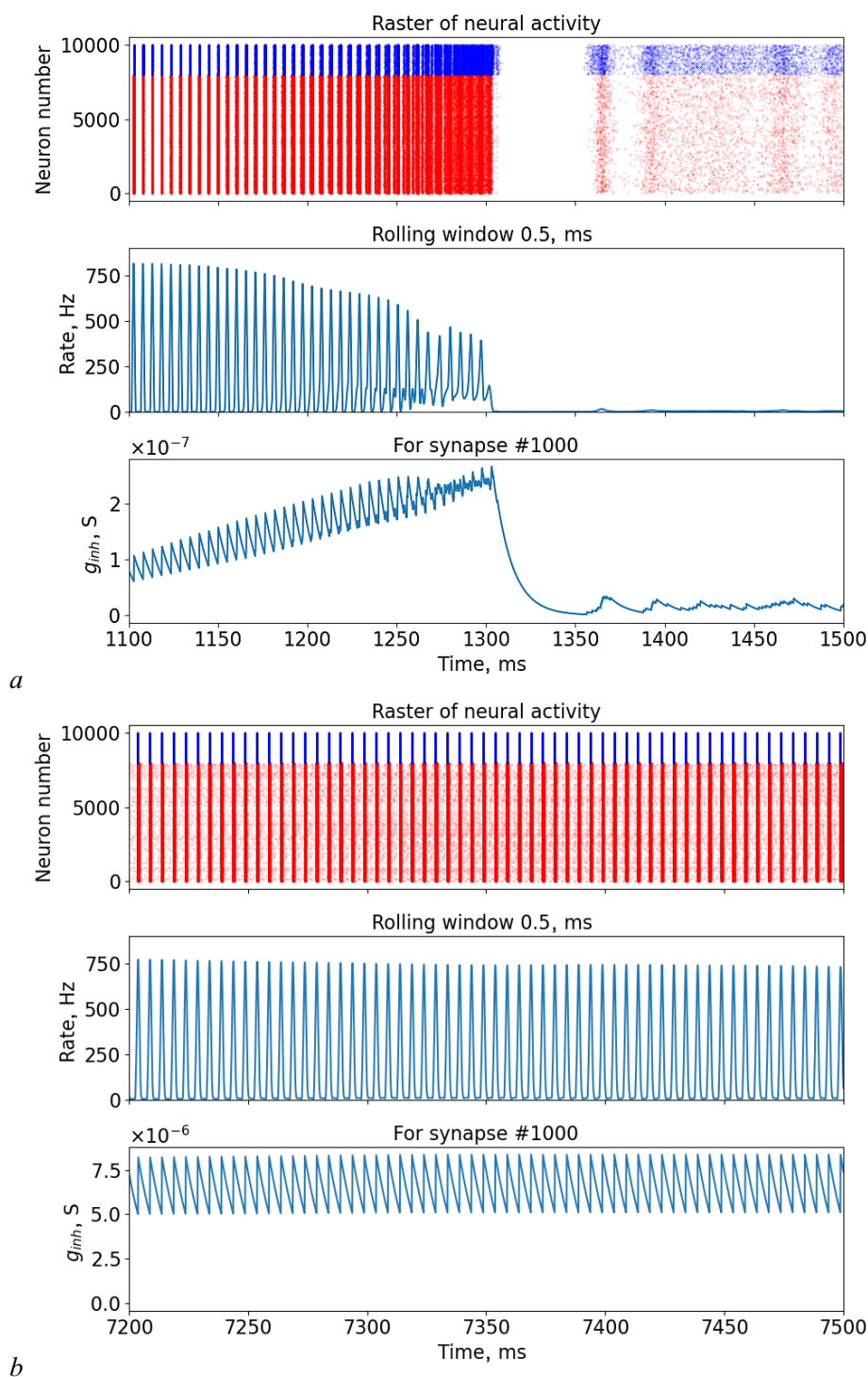


Рис. 3. Растровая диаграмма (сверху) нейронной активности импульсной нейронной сети, соответствующая частота популяционной активности (в середине) и изменение синаптической проводимости в одном из тормозно-возбуждающих синапсов (снизу): *a* — в присутствии тормозной синаптической пластичности и *b* — в присутствии всех регуляций. На растровой диаграмме красным цветом отмечены возбуждающие нейроны, а синим цветом — тормозные нейроны (цвет онлайн)

Fig. 3. Raster diagram (top) of the neural activity of a spiking neural network, the corresponding frequency of population activity (middle), and the change in synaptic conductance at one of the inhibitory-excitatory synapses (bottom): *a* — in the presence of inhibitory synaptic plasticity and *b* — in the presence of all regulations. The raster diagram shows excitatory neurons in red and inhibitory neurons in blue (color online)

Синяя область на рис. 4 демонстрирует период активности тормозной синаптической пластичности. Изменение динамики нейронной сети происходит заметно быстро. Асинхронное состояние нейронной сети сохраняется на протяжении всего периода симуляции модели после перехода из состояния синхронной активности. Серая область на рис. 4 и рис. 5 соответствует отсутствию каких-либо воздействий.

Красная область на рис. 5 соответствует учёту всех регуляций в модели. Можно заметить, что изменение амплитуды частоты популяционной активности происходит не сразу и держится порядка 5 секунд. Рис. 3, *b* построен на промежутке от 7.2 до 7.5 секунд рис. 5. Можно заметить, что нейронная сеть демонстрирует синхронную активность с небольшим изменением амплитуды пачек (менее 10 процентов). При этом визуально не меняются межпачечные интервалы.

Затем было проведено исследование влияния синаптической потенциации, вызванной астроцитами, на среднюю частоту генерации пачек (рис. 6, *a*) и среднее количество импульсов (рис. 6, *b*) в присутствии тормозной синаптической пластичности. Для этого были рассмотрены временные реализации длительностью 10 секунд. Затем значения для 5 экспериментов усреднялись и вносились на график. При расчете среднего количества импульсов и средней частоты генерации пачек не учитывалась первая секунда симуляции модели, поскольку в этот период могли происходить переходные процессы. Исследование проводилось в том числе для разных значений параметров

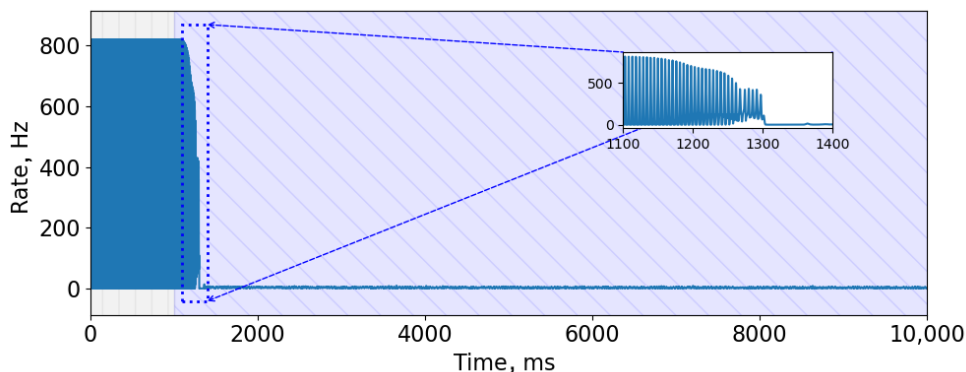


Рис. 4. Частота популяционной активности нейронной сети при тормозной синаптической пластичности (цвет онлайн)

Fig. 4. Frequency of population activity of a neural network during inhibitory synaptic plasticity (color online)

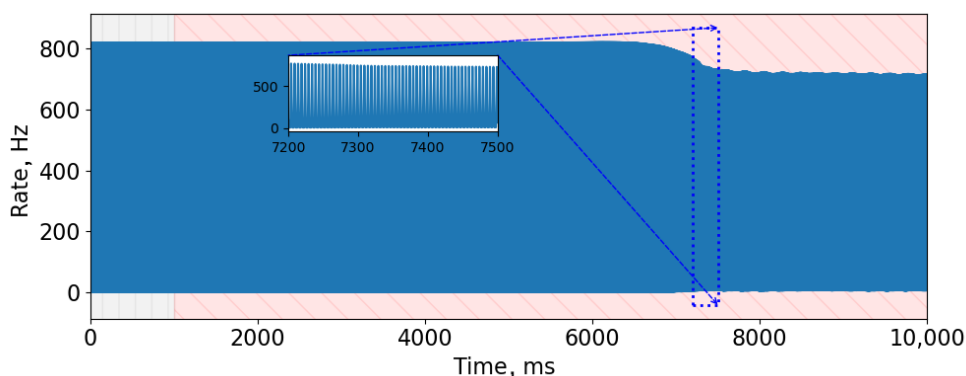


Рис. 5. Частота популяционной активности нейронной сети при всех регуляциях (цвет онлайн)

Fig. 5. Frequency of population activity of the neural network under all regulations (color online)

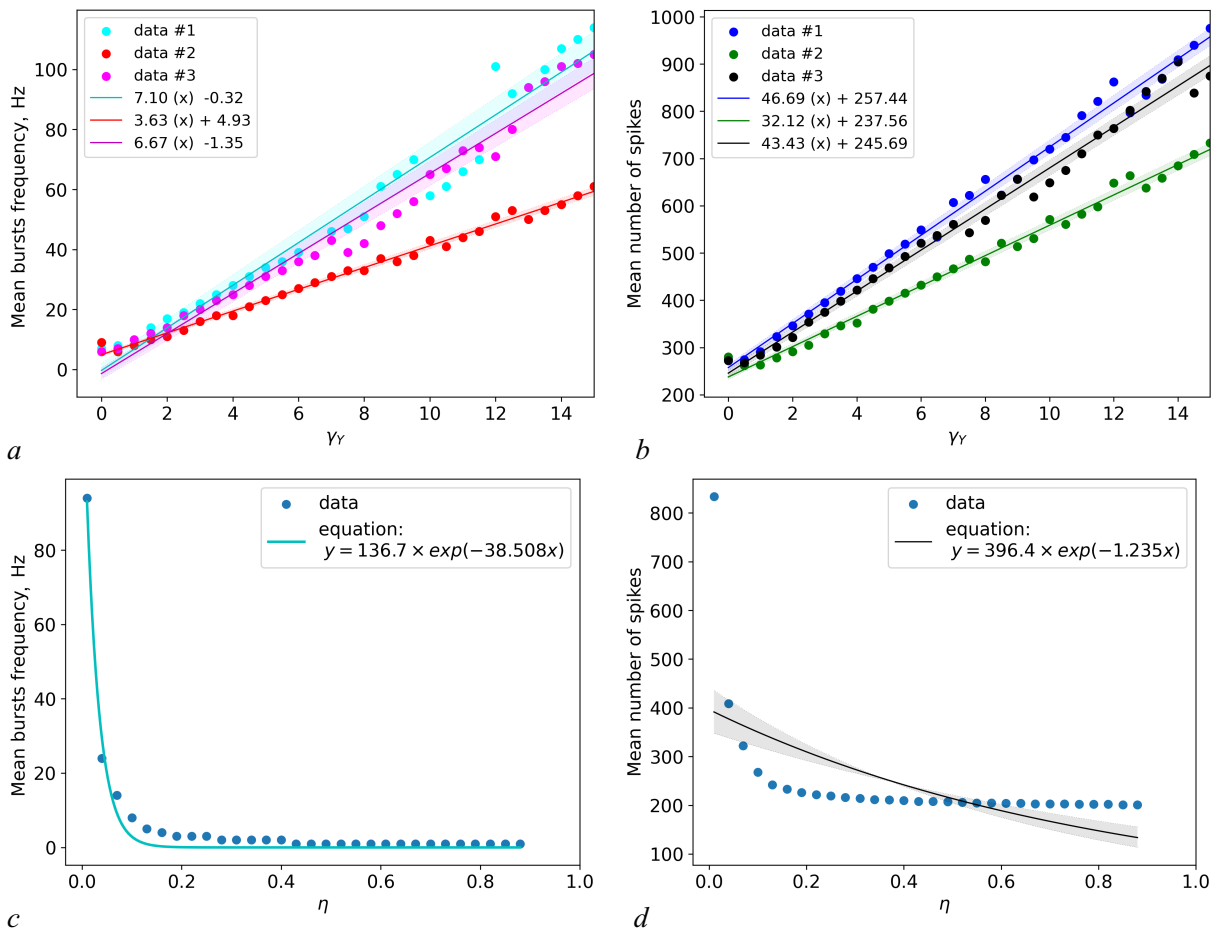


Рис. 6. *a* – Зависимость частоты генерации пачек от параметра γ_Y . Кривая аппроксимации данных представлена красным цветом. *b* – Зависимость среднего количества импульсов от параметра γ_Y . Кривая аппроксимации данных представлена зелёным цветом. Данные №1 (голубые и синие точки) соответствуют значениям параметров $V_t = -50$ мВ, $\tau_{exc} = 5$ мс и $\tau_{inh} = 10$ мс, данные №2 (красные и зелёные точки) соответствуют значениям параметров $V_t = -45$ мВ, $\tau_{exc} = 4$ мс и $\tau_{inh} = 8$ мс и данные №3 (пурпурные и черные точки) соответствуют значениям параметров $V_t = -55$ мВ, $\tau_{exc} = 6$ мс и $\tau_{inh} = 11$ мс. *c* – Зависимость частоты генерации пачек от параметра η . Кривая аппроксимации данных представлена сине-зелёным цветом. *d* – Зависимость среднего количества импульсов от параметра η . Кривая аппроксимации данных представлена черным цветом (цвет онлайн)

Fig. 6. *a* – Dependence of the burst generation frequency on the parameter γ_Y . Data fitting curves are indicated in red. *b* – Dependence of the average number of spike on the γ_Y parameter. The curve fit of the data shows green. Data No. 1 (cyan and blue dots) correspond to the parameter values $V_t = -50$ mV, $\tau_{exc} = 5$ ms and $\tau_{inh} = 10$ ms, data No. 2 (red and green points) correspond to the parameter values $V_t = -45$ mV, $\tau_{exc} = 4$ ms and $\tau_{inh} = 8$ ms and data No. 3 (magenta and black points) correspond to the parameter values $V_t = -55$ mV, $\tau_{exc} = 6$ ms and $\tau_{inh} = 11$ ms. *c* – Dependence of the frequency of burst generation on the parameter η . Data fitting curves are shown in blue-green. *d* – Dependence of the average number of spike on the parameter η . Data fitting curves are shown in black (color online)

порога генерации импульсов V_t нейроном и разными значениями времени релаксации τ_{exc} и τ_{inh} . Данные №1 на рис. 6, *a* (голубой цвет) и рис. 6, *b* (синий цвет) соответствуют значениям параметров, указанных в подразделе 1.1. При получении данных №2 на рис. 6, *a* (красный цвет) и рис. 6, *b* (зелёный цвет) были использованы значения параметров $V_t = -45$ мВ, $\tau_{exc} = 4$ мс и $\tau_{inh} = 8$ мс. Для данных №3 на рис. 6, *a* (пурпурный цвет) и рис. 6, *b* (черный цвет) были использованы значения параметров $V_t = -55$ мВ, $\tau_{exc} = 6$ мс и $\tau_{inh} = 11$ мс.

Можно заметить, что с увеличением параметра γ_Y линейно увеличивается частота пачек независимо от значения порога генерации импульса нейрона и времени релаксации синаптической

проводимости. Ненулевое первое значение объясняется тем, что существует переходный период влияния тормозной пластичности, который занимает некоторое время. Аналогично линейно растет среднее количество импульсов при увеличении параметра γ_U . Было также исследовано влияние изменения скорости обучения η тормозной синаптической пластичности на частоту генерации пачек (см. рис. 6, *c*) и количество импульсов (см. рис. 6, *d*) при фиксированном значении параметра γ_U . Частота пачек экспоненциально падает по мере увеличения скорости обучения. И также наблюдается быстрое падение среднего количества импульсов. Это обусловлено увеличением тормозных синаптических весов и превалированием в последующем торможения над астроцитарной потенциацией возбуждающих синапсов.

3. Обсуждение результатов

Нейрональная синхронизация является фундаментальным аспектом работы мозга, лежащим в основе различных когнитивных процессов, таких как память, внимание и сенсорная интеграция. В ее основе могут лежать как синаптические, так и несинаптические механизмы, каждый из которых играет различную роль в формировании сетевой динамики.

К основным синаптическим механизмам можно отнести активацию специфических рецепторов на клеточной мембране нейрона, синаптические задержки, соотношение возбуждающих / тормозных входов и синаптическую пластичность. Синхронизация через рецепторы включает координацию активности нейронов, опосредованную активацией специфических рецепторов на клеточной мембране. Эти рецепторы, часто чувствительные к нейротрансмиттерам или нейромодуляторам, играют решающую роль в модуляции возбудимости и коммуникации нейронов. Активация ионотропных рецепторов глутамата (например, AMPA, NMDA) и ГАМК-рецепторов (например, ГАМК-A) приводит к быстрым изменениям мембранного потенциала и синаптической передачи [71, 72]. Активация ацетилхолиновых рецепторов (например, никотиновых) и моноаминовых рецепторов (например, дофамина, серотонина) может модулировать возбудимость нейронов и синаптическую передачу [73, 74]. Синаптические задержки, возникающие в процессе распространения сигналов между нейронами, могут влиять на динамику сети. Возбуждающие синаптические входы, опосредованные нейротрансмиттерами, такими как глутамат, быстро распространяются по синапсам, способствуя синхронизации нейрональных импульсов в миллисекундных временных масштабах [75, 76]. Ингибирующие интернейроны обеспечивают быстрое ГАМКергическое торможение целевых нейронов, обеспечивая точный временной контроль над их паттернами возбуждения и влияя на динамику синхронизации [77, 78]. Возбуждающие синаптические входы деполяризуют постсинаптический нейрон, тогда как тормозные входы гиперполяризуют его. Баланс между возбуждающими и тормозящими воздействиями могут определять синхронизацию в нейронной сети [79, 80]. Стоит отметить, что перечисленные синаптические механизмы, кроме синаптической пластичности, определяют динамику нейронной сети на миллисекундном временном масштабе.

К внесинаптическим механизмам синхронизации нейронов относят астроцитарную модуляцию, влияющую на синхронизацию нейронов через высвобождение глиотрансмиттеров [81, 82], поддержание ионного гомеостаза [83, 84] и модуляцию синаптической пластичности [85, 86] на временах порядка секунд.

Для возможности рассмотрения более медленного механизма синхронизации нейронов была использована упрощенная модель нейронной сети, не учитывающая быстрые механизмы синхронизации. Полученные результаты качественно подтвердили экспериментальные работы [87, 88] на срезах гиппокампа, что высвобождаемый из астроцитов глиотрансмиттер (глутамат) является одним из несинаптических механизмов, приводящих к нейронной синхронизации.

Заключение

Ранее исследователями было получено, что баланс возбуждения и торможения в нейронной сети может поддерживаться за счет синаптической пластичности в тормозных синапсах. Введение такой синаптической пластичности в сеть приводит к формированию асинхронной нейронной активности. В данной работе показана возможность управления пачечной активностью импульсной нейронной сети за счет учета тормозной синаптической пластичности для тормозных синапсов между тормозными и возбуждающими нейронами, а также астроцитарной модуляции возбуждающих синапсов. Астроцитарная модуляция синаптической передачи может выступать дополнительным механизмом поддержания гомеостаза в нейронной сети, помимо синаптической передачи, существующей на более быстром временном масштабе.

Список литературы

1. *Izhikevich E. M.* Bursting // Scholarpedia. 2006. Vol. 1, no. 3. P. 1300. DOI: 10.4249/scholarpedia.1300.
2. *Izhikevich E., Desai N., Walcott E., Hoppensteadt F.* Bursts as a unit of neural information: Selective communication via resonance // Trends in Neurosciences. 2003. Vol. 26, no. 3. P. 161–167. DOI: 10.1016/S0166-2236(03)00034-1.
3. *Sjöström P., Häusser M.* A cooperative switch determines the sign of synaptic plasticity in distal dendrites of neocortical pyramidal neurons // Neuron. 2006. Vol. 51, no. 2. P. 227–238. DOI: 10.1016/j.neuron.2006.06.017.
4. *Abeles M.* Corticonics: Neural Circuits of the Cerebral Cortex. Cambridge University Press, 1991. 280 p. DOI: 10.1017/CBO9780511574566.
5. *Wagenaar D., Madhavan R., Pine J., Potter S.* Controlling bursting in cortical cultures with closed-loop multi-electrode stimulation // The Journal of Neuroscience. 2005. Vol. 25, no. 3. P. 680–688. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.4209-04.2005.
6. *Zeldenrust F., Wadman W., Englitz B.* Neural coding with bursts—Current state and future perspectives // Frontiers in Computational Neuroscience. 2018. Vol. 12. P. 48. DOI: 10.3389/fncom.2018.00048.
7. *Pimashkin A., Kastalskiy I., Simonov A., Koryagina E., Mukhina I., Kazantsev V.* Spiking signatures of spontaneous activity bursts in hippocampal cultures // Frontiers in Computational Neuroscience. 2011. Vol. 5. P. 46. DOI: 10.3389/fncom.2011.00046.
8. *Tsybina Y., Kastalskiy I., Kazantsev V., Gordleeva S.* Synchronization events in a spiking neural network // Proceedings of the Fourth International Conference Neurotechnologies And Neurointerfaces (CNN), 2022. P. 206–208. DOI: 10.1109/CNN56452.2022.9912521.
9. *Boccaletti S., Pisarchik A. N., Del Genio C. I., Amann A.* Synchronization: from coupled systems to complex networks. Cambridge University Press, 2018. 255 p. DOI: 10.1017/9781107297111.
10. *Pisarchik A.N., Hramov A.E.* Coherence resonance in neural networks: Theory and experiments // Physics Reports. 2023. Vol. 1000. P. 1–57. DOI: 10.1016/j.physrep.2022.11.004.
11. *Stasenko S., Lazarevich I., Kazantsev V.* Quasi-synchronous neuronal activity of the network induced by astrocytes // Procedia Computer Science. 2020. Vol. 169. P. 704–709. DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.175.
12. *Лазаревич И. А., Стасенко С. В., Казанцев В. Б.* Синаптическая мультистабильность и сетевая синхронизация, индуцированные нейрон-глиальным взаимодействием в мозге // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2017. Т. 105, №3–4. С. 198–201. DOI: 10.7868/S0370274X17030134.
13. *Stasenko S., Kazantsev V.* Information Encoding in Bursting Spiking Neural Network Modulated by Astrocytes // Entropy. 2023. Vol. 25, no. 5. P. 745. DOI: 10.3390/e25050745.
14. *Makovkin S., Kozinov E., Ivanchenko M., Gordleeva S.* Controlling synchronization of gamma

- oscillations by astrocytic modulation in a model hippocampal neural network // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12. P. 6970. DOI: 10.1038/s41598-022-10649-3.
15. *Kazantsev V., Gordleeva S., Stasenko S., Dityatev A.* A homeostatic model of neuronal firing governed by feedback signals from the extracellular matrix // *PLoS ONE*. 2012. Vol. 7, no. 7. P. e41646. DOI: 10.1371/journal.pone.0041646.
 16. *Lazarevich I., Stasenko S., Rozhnova M., Pankratova E., Dityatev A., Kazantsev V.* Activity-dependent switches between dynamic regimes of extracellular matrix expression // *PLoS ONE*. 2020. Vol. 15, no. 1. P. e0227917. DOI: 10.1371/journal.pone.0227917.
 17. *Rozhnova M., Pankratova E., Stasenko S., Kazantsev V.* Bifurcation analysis of multistability and oscillation emergence in a model of brain extracellular matrix // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. Vol. 151. P. 111253. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111253.
 18. *Stasenko S., Kazantsev V.* Bursting dynamics of spiking neural network induced by active extracellular medium // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 9. P. 2109. DOI: 10.3390/math11092109.
 19. *Siegelbaum S.A., Kandel E.R.* Learning-related synaptic plasticity: LTP and LTD // *Current Opinion in Neurobiology*. 1991. Vol. 1, no. 1. P. 113–120. DOI: 10.1016/0959-4388(91)90018-3.
 20. *Maffei A.* The many forms and functions of long term plasticity at GABAergic synapses // *Neural Plasticity*. 2011. Vol. 2011. P. 254724. DOI: 10.1155/2011/254724.
 21. *Allene C., Lourenço J., Bacci A.* The neuronal identity bias behind neocortical GABAergic plasticity // *Trends in Neurosciences*. 2015. Vol. 38, no. 9. P. 524–534. DOI: 10.1016/j.tins.2015.07.008.
 22. *Vogels T.P., Froemke R.C., Doyon N., Gilson M., Haas J.S., Liu R., Maffei A., Miller P., Wierenga C.J., Woodin M.A.* Inhibitory synaptic plasticity: Spike timing-dependence and putative network function // *Frontiers in Neural Circuits*. 2013. Vol. 7. P. 119. DOI:10.3389/fncir.2013.00119.
 23. *Scanziani M., Häusser M.* Electrophysiology in the age of light // *Nature*. 2009. Vol. 461. P. 930–939. DOI: 10.1038/nature08540.
 24. *Gaiarsa J., Caillard O., Ben-Ari Y.* Long-term plasticity at GABAergic and glycinergic synapses: Mechanisms and functional significance // *Trends in Neurosciences*. 2002. Vol. 25, no. 11. P. 564–570. DOI: 10.1016/S0166-2236(02)02269-5.
 25. *Mapelli J., Gandolfi D., Vilella A., Zoli M., Bigiani A.* Heterosynaptic GABAergic plasticity bidirectionally driven by the activity of pre- and postsynaptic NMDA receptors // *PNAS*. 2016. Vol. 113, no. 35. P. 9898–9903. DOI: 10.1073/pnas.1601194113.
 26. *Maffei A., Nelson S.B., Turrigiano G.G.* Selective reconfiguration of layer 4 visual cortical circuitry by visual deprivation // *Nature Neuroscience*. 2004. Vol. 7. P. 1353–1359. DOI: 10.1038/nn1351.
 27. *Castillo P.E., Chiu C.Q., Carroll R.C.* Long-term plasticity at inhibitory synapses // *Current Opinion in Neurobiology*. 2011. Vol. 21, no. 2. P. 328–338. DOI: 10.1016/j.conb.2011.01.006.
 28. *Ahumada J., Fernández de Sevilla D., Couve A., Buño W., Fuenzalida M.* Long-term depression of inhibitory synaptic transmission induced by spike-timing dependent plasticity requires coactivation of endocannabinoid and muscarinic receptors // *Hippocampus*. 2013. Vol. 23. P. 1439–1452. DOI: 10.1002/hipo.22196.
 29. *Maffei A., Nataraj K., Nelson S.B., Turrigiano G.G.* Potentiation of cortical inhibition by visual deprivation // *Nature*. 2006. Vol. 443. P. 81–84. DOI: 10.1038/nature05079.
 30. *Barberis A.* Postsynaptic plasticity of GABAergic synapses // *Neuropharmacology*. 2020. Vol. 169. P. 107643. DOI: 10.1016/j.neuropharm.2019.05.020.
 31. *Chiu C.Q., Barberis A., Higley M.J.* Preserving the balance: Diverse forms of long-term GABAergic synaptic plasticity // *Nature Reviews Neuroscience*. 2019. Vol. 20. P. 272–281. DOI: 10.1038/s41583-019-0141-5.
 32. *Lecca S., Trusel M., Mameli M.* Footshock-induced plasticity of GABAB signalling in the lateral habenula requires dopamine and glucocorticoid receptors // *Synapse*. 2017. Vol. 71, no. 6. P. e21948. DOI: 10.1002/syn.21948.

33. *Sanchez-Rodríguez I., Gruart A., Delgado-García J. M., Jiménez-Díaz L., Navarro-López J. D.* Role of GIRK channels in long-term potentiation of synaptic inhibition in an in vivo mouse model of early amyloid- β pathology // *International Journal of Molecular Sciences*. 2019. Vol. 20, no. 5. P. 1168. DOI: 10.3390/ijms20051168.
34. *Hennequin G., Agnes E. J., Vogels T. P.* Inhibitory plasticity: balance, control, and codependence // *Annual Review of Neuroscience*. 2017. Vol. 40. P. 557–579. DOI: 10.1146/annurev-neuro-072116-031005.
35. *D'amour J., Froemke R.* Inhibitory and excitatory spike-timing-dependent plasticity in the auditory cortex // *Neuron*. 2015. Vol. 86, no. 2. P. 514–528. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.03.014.
36. *Vickers E. D., Clark C., Osypenko D., Fratzl A., Kochubey O., Bettler B., Schneggenburger R.* Parvalbumin-interneuron output synapses show spike-timing-dependent plasticity that contributes to auditory map remodeling // *Neuron*. 2018. Vol. 99, no. 4. P. 720–735.e6. DOI: 10.1016/j.neuron.2018.07.018.
37. *Wang L., Maffei A.* Inhibitory plasticity dictates the sign of plasticity at excitatory synapses // *The Journal of Neuroscience*. 2014. Vol. 34, no. 4. P. 1083–1093. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.4711-13.2014.
38. *Wilmes K. A., Clopath C.* Inhibitory microcircuits for top-down plasticity of sensory representations // *Nature Communications*. 2019. Vol. 10. P. 5055. DOI: 10.1038/s41467-019-12972-2.
39. *Soloduchin S., Shamir M.* Rhythmogenesis evolves as a consequence of long-term plasticity of inhibitory synapses // *Scientific Reports*. 2018. Vol. 8. P. 13050. DOI: 10.1038/s41598-018-31412-7.
40. *Weber S. N., Sprekeler H.* Learning place cells, grid cells and invariances with excitatory and inhibitory plasticity // *eLife*. 2018. Vol. 7. P. e34560. DOI: 10.7554/eLife.34560.
41. *Gilra A., Gerstner W.* Predicting non-linear dynamics by stable local learning in a recurrent spiking neural network // *eLife*. 2017. Vol. 6. P. e28295. DOI: 10.7554/eLife.28295.
42. *Luque N. R., Garrido J. A., Naveros F., Carrillo R. R., D'Angelo E., Ros E.* Distributed Cerebellar Motor Learning: A Spike-Timing-Dependent Plasticity Model // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2016. Vol. 10. P. 17. DOI: 10.3389/fncom.2016.00017.
43. *Vogels T. P., Sprekeler H., Zenke F., Clopath C., Gerstner W.* Inhibitory plasticity balances excitation and inhibition in sensory pathways and memory networks // *Science*. 2011. Vol. 334, no. 6062. P. 1569–1573. DOI: 10.1126/science.1211095.
44. *Araque A., Parpura V., Sanzgiri R., Haydon P.* Glutamate-dependent astrocyte modulation of synaptic transmission between cultured hippocampal neurons // *European Journal of Neuroscience*. 1998. Vol. 10, no. 6. P. 2129–2142. DOI: 10.1046/j.1460-9568.1998.00221.x.
45. *Araque A., Parpura V., Sanzgiri R., Haydon P.* Tripartite synapses: Glia, the unacknowledged partner // *Trends in Neurosciences*. 1999. Vol. 22, no. 5. P. 208–215. DOI: 10.1016/S0166-2236(98)01349-6.
46. *Haydon P.* GLIA: Listening and talking to the synapse // *Nature Reviews Neuroscience*. 2001. Vol. 2. P. 185–193. DOI: 10.1038/35058528.
47. *Nadkarni S., Jung P.* Dressed neurons: Modeling neural-glia interactions // *Physical Biology*. 2004. Vol. 1, no. 1. P. 35–41. DOI: 10.1088/1478-3967/1/1/004.
48. *Nadkarni S., Jung P.* Modeling synaptic transmission of the tripartite synapse // *Physical Biology*. 2007. Vol. 4, no. 1. P. 1–9. DOI: 10.1088/1478-3975/4/1/001.
49. *Volman V., Ben-Jacob E., Levine H.* The astrocyte as a gatekeeper of synaptic information transfer // *Neural Computation*. 2007. Vol. 19, no. 2. P. 303–326. DOI: 10.1162/neco.2007.19.2.303.
50. *De Pittà M., Volman V., Berry H., Ben-Jacob E.* A tale of two stories: Astrocyte regulation of synaptic depression and facilitation // *PLoS Computational Biology*. 2011. Vol. 7, no. 12. P. e1002293. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002293.
51. *Gordleeva S., Stasenko S., Semyanov A., Dityatev A., Kazantsev V.* Bi-directional astrocytic

- regulation of neuronal activity within a network // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2012. Vol. 6. P. 92. DOI: 10.3389/fncom.2012.00092.
52. *De Pittà M.* Gliotransmitter exocytosis and its consequences on synaptic transmission // *Computational Glioscience*. 2019. P. 245–287. DOI: 10.1007/978-3-030-00817-8_10.
 53. *Lenk K., Satuvuori E., Lallouette J., Guevara A., Berry H., Hyttinen J.* A computational model of interactions between neuronal and astrocytic networks: The role of astrocytes in the stability of the neuronal firing rate // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2020. Vol. 13. P. 92. DOI: 10.3389/fncom.2019.00092.
 54. *Barabash N., Levanova T., Stasenko S.* STSP model with neuron-glia interaction produced bursting activity // *Proceedings of the Third International Conference Neurotechnologies And Neurointerfaces (CNN)*. 2021. P. 12–15. DOI: 10.1109/CNN53494.2021.9580314.
 55. *Stasenko S., Kazantsev V.* 3D model of bursting activity generation // *Proceedings of the Fourth International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN)*. 2022. P. 176–179. DOI: 10.1109/CNN56452.2022.9912507.
 56. *Barabash N., Levanova T., Stasenko S.* Rhythmogenesis in the mean field model of the neuron–glial network // *The European Physical Journal Special Topics*. 2023. Vol. 232. P. 1–6. DOI: 10.1140/epjs/s11734-023-00778-9.
 57. *Olenin S., Levanova T., Stasenko S.* Dynamics in the Reduced Mean-Field Model of Neuron–Glial Interaction // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 9. P. 2143. DOI: 10.3390/math11092143.
 58. *Stasenko S. V., Hramov A. E., Kazantsev V. B.* Loss of neuron network coherence induced by virus-infected astrocytes: A model study // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13, no. 1. P. 6401. DOI: 10.1038/s41598-023-33622-0.
 59. *Postnov D., Koreshkov R., Brazhe N., Brazhe A., Sosnovtseva O.* Dynamical patterns of calcium signaling in a functional model of neuron–astrocyte networks // *Journal of Biological Physics*. 2009. Vol. 35. P. 425–445. DOI: 10.1007/s10867-009-9156-x.
 60. *De Pittà M., Brunel N.* Multiple forms of working memory emerge from synapse–astrocyte interactions in a neuron–glia network model // *PNAS*. 2022. Vol. 119, no. 43. P. e2207912119. DOI: 10.1073/pnas.2207912119.
 61. *Stasenko S., Kazantsev V.* Astrocytes Enhance Image Representation Encoded in Spiking Neural Network // *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI*. 2022. Vol. 1064. P. 200–206. DOI: 10.1007/978-3-031-19032-2_20.
 62. *Stasenko S., Kazantsev V.* Dynamic Image Representation in a Spiking Neural Network Supplied by Astrocytes // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 3. P. 561. DOI: 10.3390/math11030561.
 63. *Gordleeva S., Tsybina Y., Krivososov M., Ivanchenko M., Zaikin A., Kazantsev V., Gorban A.* Modeling working memory in a spiking neuron network accompanied by astrocytes // *Frontiers in Cellular Neuroscience*. 2021. Vol. 15. P. 631485. DOI: 10.3389/fncel.2021.631485.
 64. *Zimin I., Kazantsev V., Stasenko S.* Artificial Neural Network Model with Astrocyte-Driven Short-Term Memory // *Biomimetics*. 2023. Vol. 8, no. 5. P. 422. DOI: 10.3390/biomimetics8050422.
 65. *Blum Moyse L., Berry H.* Modelling the modulation of cortical Up-Down state switching by astrocytes // *PLoS Computational Biology*. 2022. Vol. 18. P. e1010296. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1010296.
 66. *Angulo M. C., Kozlov A. S., Charpak S., Audinat E.* Glutamate released from glial cells synchronizes neuronal activity in the hippocampus // *The Journal of Neuroscience*. 2004. Vol. 24, no. 31. P. 6920–6927. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0473-04.2004.
 67. *Halassa M., Fellin T., Haydon P.* Tripartite synapses: Roles for astrocytic purines in the control of synaptic physiology and behavior // *Neuropharmacology*. 2009. Vol. 57, no. 4. P. 343–346. DOI: 10.1016/j.neuropharm.2009.06.031.
 68. *Perea G., Araque A.* Astrocytes potentiate transmitter release at single hippocampal synapses // *Science*. 2007. Vol. 317, no. 5841. P. 1083–1086. DOI: 10.1126/science.1144640.

69. Jourdain P., Bergersen L., Bhaukaurally K., Bezzi P., Santello M., Domercq M., Matute C., Tonello F., Gundersen V., Volterra A. Glutamate exocytosis from astrocytes controls synaptic strength // *Nature Neuroscience*. 2007. Vol. 10. P. 331–339. DOI: 10.1038/nm1849.
70. Fiacco T., McCarthy K. Intracellular astrocyte calcium waves in situ increase the frequency of spontaneous AMPA receptor currents in CA1 pyramidal neurons // *The Journal of Neuroscience*. 2004. Vol. 24, no. 3. P. 722–732. DOI: 10.1523/jneurosci.2859-03.2004.
71. Farrant M., Nusser Z. Variations on an inhibitory theme: phasic and tonic activation of GABA_A receptors // *Nature Reviews Neuroscience*. 2005. Vol. 6. P. 215–229. DOI: 10.1038/nrn1625.
72. Gu N., Jackson J., Goutagny R., Lowe G., Manseau F., Williams S. NMDA-dependent phase synchronization between septal and temporal CA3 hippocampal networks // *The Journal of Neuroscience*. 2013. Vol. 33, no. 19. P. 8276–8287. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0179-13.2013.
73. Teles-Grilo Ruivo L., Mellor J. Cholinergic modulation of hippocampal network function // *Frontiers in Synaptic Neuroscience*. 2013. Vol. 5. P. 2. DOI: 10.3389/fnsyn.2013.00002.
74. Puig M., Gullledge A. Serotonin and prefrontal cortex function: neurons, networks, and circuits // *Molecular Neurobiology*. 2011. Vol. 44. P. 449–464. DOI: 10.1007/s12035-011-8214-0.
75. Feldmeyer D., Egger V., Lübke J., Sakmann B. Reliable synaptic connections between pairs of excitatory layer 4 neurones within a single “barrel” of developing rat somatosensory cortex // *The Journal Of Physiology*. 1999. Vol. 521, no. 1. P. 169–190. DOI: 10.1111%2Fj.1469-7793.1999.00169.x.
76. Isaacson J., Scanziani M. How inhibition shapes cortical activity // *Neuron*. 2011. Vol. 72, no. 2. P. 231–243. DOI: 10.1016/j.neuron.2011.09.027.
77. Pouille F., Scanziani M. Enforcement of temporal fidelity in pyramidal cells by somatic feed-forward inhibition // *Science*. 2001. Vol. 293, no. 5532. P. 1159–1163. DOI: 10.1126/science.1060342.
78. Galarreta M., Hestrin S. Spike transmission and synchrony detection in networks of GABAergic interneurons // *Science*. 2001. Vol. 292, no. 5525. P. 2295–2299. DOI: 10.1126/science.1061395.
79. Börgers C., Kopell N. Synchronization in networks of excitatory and inhibitory neurons with sparse, random connectivity // *Neural Computation*. 2003. Vol. 15, no. 3. P. 509–538. DOI: 10.1162/089976603321192059.
80. Fries P. A mechanism for cognitive dynamics: neuronal communication through neuronal coherence // *Trends In Cognitive Sciences*. 2005. Vol. 9, no. 10. P. 474–480. DOI: 10.1016/j.tics.2005.08.011.
81. Fellin T., Pascual O., Gobbo S., Pozzan T., Haydon P., Carmignoto G. Neuronal synchrony mediated by astrocytic glutamate through activation of extrasynaptic NMDA receptors // *Neuron*. 2004. Vol. 43, no. 5. P. 729–743. DOI: 10.1016/j.neuron.2004.08.011.
82. Parpura V., Zorec R. Gliotransmission: Exocytotic release from astrocytes // *Brain Research Reviews*. 2010. Vol. 63, no. 1-2. P. 83–92. DOI: 10.1016/j.brainresrev.2009.11.008.
83. Bazargani N., Attwell D. Astrocyte calcium signaling: the third wave // *Nature Neuroscience*. 2016. Vol. 19. P. 182–189. DOI: 10.1038/nn.4201.
84. MacVicar B., Newman E. Astrocyte regulation of blood flow in the brain // *Cold Spring Harbor Perspectives in Biology*. 2015. Vol. 7. P. a020388. DOI: 10.1101/cshperspect.a020388.
85. Perea G., Navarrete M., Araque A. Tripartite synapses: astrocytes process and control synaptic information // *Trends in Neurosciences*. 2009. Vol. 32, no. 8. P. 421–431. DOI: 10.1016/j.tins.2009.05.001.
86. Navarrete M., Perea G., Sevilla D., Gomez-Gonzalo M., Nunez A., Martin E., Araque A. Astrocytes mediate in vivo cholinergic-induced synaptic plasticity // *PLoS Biology*. 2012. Vol. 10. P. e1001259. DOI: 10.1371/journal.pbio.1001259.
87. Fellin T. Communication between neurons and astrocytes: relevance to the modulation of synaptic and network activity // *Journal Of Neurochemistry*. 2009. Vol. 108, no. 3. P. 533–544. DOI: 10.1111/j.1471-4159.2008.05830.x.

88. *Carmignoto G., Fellin T.* Glutamate release from astrocytes as a non-synaptic mechanism for neuronal synchronization in the hippocampus // *Journal Of Physiology-Paris*. 2006. Vol. 99, no. 2-3. P. 98–102. DOI: 10.1016/j.jphysparis.2005.12.008.

References

1. Izhikevich EM. Bursting. *Scholarpedia*. 2006;1(3):1300. DOI: 10.4249/scholarpedia.1300.
2. Izhikevich E, Desai N, Walcott E, Hoppensteadt F. Bursts as a unit of neural information: Selective communication via resonance. *Trends in Neurosciences*. 2003;26(3):161–167. DOI: 10.1016/S0166-2236(03)00034-1.
3. Sjöström P, Häusser M. A cooperative switch determines the sign of synaptic plasticity in distal dendrites of neocortical pyramidal neurons. *Neuron*. 2006;51(2):227–238. DOI: 10.1016/j.neuron.2006.06.017.
4. Abeles M. *Corticonics: Neural Circuits of the Cerebral Cortex*. Cambridge University Press. 1991. 280 p. DOI: 10.1017/CBO9780511574566.
5. Wagenaar D, Madhavan R, Pine J, Potter S. Controlling bursting in cortical cultures with closed-loop multi-electrode stimulation. *The Journal of Neuroscience*. 2005;25(3):680–688. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.4209-04.2005.
6. Zeldenrust F, Wadman W, Englitz B. Neural coding with bursts—Current state and future perspectives. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2018;12:48. DOI: 10.3389/fncom.2018.00048.
7. Pimashkin A, Kastalskiy I, Simonov A, Koryagina E, Mukhina I, Kazantsev V. Spiking signatures of spontaneous activity bursts in hippocampal cultures. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2011;5:46. DOI: 10.3389/fncom.2011.00046
8. Tsybina Y, Kastalskiy I, Kazantsev V, Gordleeva S. Synchronization events in a spiking neural network. *Proceedings of the Fourth International Conference Neurotechnologies And Neurointerfaces (CNN)*. 2022:206–208. DOI: 10.1109/CNN56452.2022.9912521.
9. Boccaletti S, Pisarchik AN, Del Genio CI, Amann A. *Synchronization: from coupled systems to complex networks*. Cambridge University Press. 2018. 255 p. DOI: 10.1017/9781107297111.
10. Pisarchik AN, Hramov AE. Coherence resonance in neural networks: Theory and experiments. *Physics Reports*. 2023;1000:1–57. DOI: 10.1016/j.physrep.2022.11.004.
11. Stasenko S, Lazarevich I, Kazantsev V. Quasi-synchronous neuronal activity of the network induced by astrocytes. *Procedia Computer Science*. 2020;169:704–709. DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.175.
12. Lazarevich I, Stasenko S, Kazantsev V. Synaptic multistability and network synchronization induced by the neuron–glial interaction in the brain. *JETP Letters*. 2017;105:210–213. DOI: 10.1134/S0021364017030092.
13. Stasenko S, Kazantsev V. Information Encoding in Bursting Spiking Neural Network Modulated by Astrocytes. *Entropy*. 2023;25(5):745. DOI: 10.3390/e25050745.
14. Makovkin S, Kozinov E, Ivanchenko M, Gordleeva S. Controlling synchronization of gamma oscillations by astrocytic modulation in a model hippocampal neural network. *Scientific Reports*. 2022;12:6970. DOI: 10.1038/s41598-022-10649-3.
15. Kazantsev V, Gordleeva S, Stasenko S, Dityatev A. A homeostatic model of neuronal firing governed by feedback signals from the extracellular matrix. *PLoS ONE*. 2012;7(7):e41646. DOI: 10.1371/journal.pone.0041646.
16. Lazarevich I, Stasenko S, Rozhnova M, Pankratova E, Dityatev A, Kazantsev V. Activity-dependent switches between dynamic regimes of extracellular matrix expression. *PLoS ONE*. 2020;15(1):e0227917. DOI: 10.1371/journal.pone.0227917.
17. Rozhnova M, Pankratova E, Stasenko S, Kazantsev V. Bifurcation analysis of multistability and oscillation emergence in a model of brain extracellular matrix. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;151:111253. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111253.

18. Stasenko S, Kazantsev V. Bursting Dynamics of Spiking Neural Network Induced by Active Extracellular Medium. *Mathematics*. 2023;11(9):2109. DOI: 10.3390/math11092109.
19. Siegelbaum SA, Kandel ER. Learning-related synaptic plasticity: LTP and LTD. *Current Opinion in Neurobiology*. 1991;1(1):113–120. DOI: 10.1016/0959-4388(91)90018-3.
20. Maffei A. The many forms and functions of long term plasticity at GABAergic synapses. *Neural Plasticity*. 2011;2011:254724. DOI: 10.1155/2011/254724.
21. Allene C, Lourenço J, Bacci A. The neuronal identity bias behind neocortical GABAergic plasticity. *Trends in Neurosciences*. 2015;38(9):524–534. DOI: 10.1016/j.tins.2015.07.008.
22. Vogels TP, Froemke RC, Doyon N, Gilson M, Haas JS, Liu R, Maffei A, Miller P, Wierenga CJ, Woodin MA. Inhibitory synaptic plasticity: Spike timing-dependence and putative network function. *Frontiers in Neural Circuits*. 2013;7:119. DOI: 10.3389/fncir.2013.00119.
23. Scanziani M, Häusser M. Electrophysiology in the age of light. *Nature*. 2009;461:930–939. DOI: 10.1038/nature08540.
24. Gaiarsa J, Caillard O, Ben-Ari Y. Long-term plasticity at GABAergic and glycinergic synapses: Mechanisms and functional significance. *Trends in Neurosciences*. 2002;25(11):564–570. DOI: 10.1016/S0166-2236(02)02269-5.
25. Mapelli J, Gandolfi D, Vilella A, Zoli M, Bigiani A. Heterosynaptic GABAergic plasticity bidirectionally driven by the activity of pre- and postsynaptic NMDA receptors. *PNAS*. 2016; 113(35):9898–9903. DOI: 10.1073/pnas.1601194113.
26. Maffei A, Nelson SB, Turrigiano GG. Selective reconfiguration of layer 4 visual cortical circuitry by visual deprivation. *Nature Neuroscience*. 2004;7:1353–1359. DOI: 10.1038/nn1351.
27. Castillo PE, Chiu CQ, Carroll RC. Long-term plasticity at inhibitory synapses. *Current Opinion in Neurobiology*. 2011;21(2):328–338. DOI: 10.1016/j.conb.2011.01.006.
28. Ahumada J, Fernández de Sevilla D, Couve A, Buño W, Fuenzalida M. Long-term depression of inhibitory synaptic transmission induced by spike-timing dependent plasticity requires coactivation of endocannabinoid and muscarinic receptors. *Hippocampus*. 2013;23:1439–1452. DOI: 10.1002/hipo.22196.
29. Maffei A, Nataraj K, Nelson SB, Turrigiano GG. Potentiation of cortical inhibition by visual deprivation. *Nature*. 2006;443:81–84. DOI: 10.1038/nature05079.
30. Barberis A. Postsynaptic plasticity of GABAergic synapses. *Neuropharmacology*. 2020;169:107643. DOI: 10.1016/j.neuropharm.2019.05.020.
31. Chiu CQ, Barberis A, Higley MJ. Preserving the balance: Diverse forms of long-term GABAergic synaptic plasticity. *Nature Reviews Neuroscience*. 2019;20:272–281. DOI: 10.1038/s41583-019-0141-5.
32. Lecca S, Trusel M, Mameli M. Footshock-induced plasticity of GABAB signalling in the lateral habenula requires dopamine and glucocorticoid receptors. *Synapse*. 2017;71(6):e21948. DOI: 10.1002/syn.21948.
33. Sanchez-Rodríguez I, Gruart A, Delgado-García JM, Jiménez-Díaz L, Navarro-López JD. Role of GIRK Channels in Long-Term Potentiation of Synaptic Inhibition in an In Vivo Mouse Model of Early Amyloid- β Pathology. *International Journal of Molecular Sciences*. 2019;20(5):1168. DOI: 10.3390/ijms20051168.
34. Hennequin G, Agnes EJ, Vogels TP. Inhibitory Plasticity: Balance, Control, and Codependence. *Annual Review of Neuroscience*. 2017;40:557–579. DOI: 10.1146/annurev-neuro-072116-031005.
35. D'amour J, Froemke R. Inhibitory and excitatory spike-timing-dependent plasticity in the auditory cortex. *Neuron*. 2015;86(2):514–528. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.03.014.
36. Vickers ED, Clark C, Osypenko D, Fratzl A, Kochubey O, Bettler B, Schneggenburger R. Parvalbumin-Interneuron Output Synapses Show Spike-Timing-Dependent Plasticity that Contributes to Auditory Map Remodeling. *Neuron*. 2018;99(4):720–735.e6. DOI: 10.1016/j.neuron.2018.07.018.
37. Wang L, Maffei A. Inhibitory plasticity dictates the sign of plasticity at excitatory synapses. *The Journal of Neuroscience*. 2014;34(4):1083–1093. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.4711-13.2014.

38. Wilmes KA, Clopath C. Inhibitory microcircuits for top-down plasticity of sensory representations. *Nature Communications*. 2019;10:5055. DOI: 10.1038/s41467-019-12972-2.
39. Soloduchin S, Shamir M. Rhythmogenesis evolves as a consequence of long-term plasticity of inhibitory synapses. *Scientific Reports*. 2018;8:13050. DOI: 10.1038/s41598-018-31412-7.
40. Weber SN, Sprekeler H. Learning place cells, grid cells and invariances with excitatory and inhibitory plasticity. *eLife*. 2018;7:e34560. DOI: 10.7554/eLife.34560.
41. Gilra A, Gerstner W. Predicting non-linear dynamics by stable local learning in a recurrent spiking neural network. *eLife*. 2017;6:e28295. DOI: 10.7554/eLife.28295.
42. Luque NR, Garrido JA, Naveros F, Carrillo RR, D'Angelo E, Ros E. Distributed Cerebellar Motor Learning: A Spike-Timing-Dependent Plasticity Model. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2016;10:17. DOI: 10.3389/fncom.2016.00017.
43. Vogels TP, Sprekeler H, Zenke F, Clopath C, Gerstner W. Inhibitory plasticity balances excitation and inhibition in sensory pathways and memory networks. *Science*. 2011;334(6062):1569–1573. DOI: 10.1126/science.1211095.
44. Araque A, Parpura V, Sanzgiri R, Haydon P. Glutamate-dependent astrocyte modulation of synaptic transmission between cultured hippocampal neurons. *European Journal of Neuroscience*. 1998;10(6):2129–2142. DOI: 10.1046/j.1460-9568.1998.00221.x.
45. Araque A, Parpura V, Sanzgiri R, Haydon P. Tripartite synapses: Glia, the unacknowledged partner. *Trends in Neurosciences*. 1999;22(5):208–215. DOI: 10.1016/S0166-2236(98)01349-6.
46. Haydon P. GLIA: Listening and talking to the synapse. *Nature Reviews Neuroscience*. 2001;2:185–193. DOI: 10.1038/35058528.
47. Nadkarni S, Jung P. Dressed neurons: Modeling neural-glia interactions. *Physical Biology*. 2004;1(1):35–41. DOI: 10.1088/1478-3967/1/1/004.
48. Nadkarni S, Jung P. Modeling synaptic transmission of the tripartite synapse. *Physical Biology*. 2007;4(1):1–9. DOI: 10.1088/1478-3975/4/1/001.
49. Volman V, Ben-Jacob E, Levine H. The astrocyte as a gatekeeper of synaptic information transfer. *Neural Computation*. 2007;19(2):303–326. DOI: 10.1162/neco.2007.19.2.303.
50. De Pittà M, Volman V, Berry H, Ben-Jacob E. A tale of two stories: Astrocyte regulation of synaptic depression and facilitation. *PLoS Computational Biology*. 2011;7(12):e1002293. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002293.
51. Gordleeva S, Stasenko S, Semyanov A, Dityatev A, Kazantsev V. Bi-directional astrocytic regulation of neuronal activity within a network. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2012;6:92. DOI: 10.3389/fncom.2012.00092.
52. De Pittà M. Gliotransmitter exocytosis and its consequences on synaptic transmission. *Computational Glioscience*. 2019:245–287. DOI: 10.1007/978-3-030-00817-8_10.
53. Lenk K, Satuvuori E, Lallouette J, Guevara A, Berry H, Hyttinen J. A computational model of interactions between neuronal and astrocytic networks: The role of astrocytes in the stability of the neuronal firing rate. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2020;13:92. DOI: 10.3389/fncom.2019.00092.
54. Barabash N, Levanova T, Stasenko S. STSP model with neuron-glia interaction produced bursting activity. *Proceedings of the Third International Conference Neurotechnologies And Neurointerfaces (CNN)*. 2021:12–15. DOI: 10.1109/CNN53494.2021.9580314.
55. Stasenko S, Kazantsev V. 3D model of bursting activity generation. *Proceedings of the Fourth International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN)*. 2022:176–179. DOI: 10.1109/CNN56452.2022.9912507.
56. Barabash N, Levanova T, Stasenko S. Rhythmogenesis in the mean field model of the neuron–glial network. *The European Physical Journal Special Topics*. 2023;232:1–6. DOI: 10.1140/epjs/s11734-023-00778-9.
57. Olenin S, Levanova T, Stasenko S. Dynamics in the Reduced Mean-Field Model of Neuron–Glial Interaction. *Mathematics*. 2023;11(9):2143. DOI: 10.3390/math11092143.

58. Stasenko SV, Hramov AE, Kazantsev VB. Loss of neuron network coherence induced by virus-infected astrocytes: A model study. *Scientific Reports*. 2023;13(1):6401. DOI: 10.1038/s41598-023-33622-0.
59. Postnov D, Koreshkov R, Brazhe N, Brazhe A, Sosnovtseva O. Dynamical patterns of calcium signaling in a functional model of neuron–astrocyte networks. *Journal of Biological Physics*. 2009;35:425–445. DOI: 10.1007/s10867-009-9156-x.
60. De Pittà M, Brunel N. Multiple forms of working memory emerge from synapse–astrocyte interactions in a neuron–glia network model. *PNAS*. 2022;119(43):e2207912119. DOI: 10.1073/pnas.2207912119.
61. Stasenko S, Kazantsev V. Astrocytes Enhance Image Representation Encoded in Spiking Neural Network. *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI*. 2022;1064:200–206. DOI: 10.1007/978-3-031-19032-2_20.
62. Stasenko S, Kazantsev V. Dynamic Image Representation in a Spiking Neural Network Supplied by Astrocytes. *Mathematics*. 2023;11(3):561. DOI: 10.3390/math11030561.
63. Gordleeva S, Tsybina Y, Krivonosov M, Ivanchenko M, Zaikin A, Kazantsev V, Gorban A. Modeling working memory in a spiking neuron network accompanied by astrocytes. *Frontiers in Cellular Neuroscience*. 2021;15:631485. DOI: 10.3389/fncel.2021.631485.
64. Zimin I, Kazantsev V, Stasenko S. Artificial Neural Network Model with Astrocyte-Driven Short-Term Memory. *Biomimetics*. 2023;8(5):422. DOI: 10.3390/biomimetics8050422.
65. Blum Moyse L, Berry H. Modelling the modulation of cortical Up-Down state switching by astrocytes. *PLoS Computational Biology*. 2022;18:e1010296. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1010296.
66. Angulo MC, Kozlov AS, Charpak S, Audinat E. Glutamate released from glial cells synchronizes neuronal activity in the hippocampus. *The Journal of Neuroscience*. 2004;24(31):6920–6927. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0473-04.2004.
67. Halassa M, Fellin T, Haydon P. Tripartite synapses: Roles for astrocytic purines in the control of synaptic physiology and behavior. *Neuropharmacology*. 2009;57(4):343–346. DOI: 10.1016/j.neuropharm.2009.06.031.
68. Perea G, Araque A. Astrocytes potentiate transmitter release at single hippocampal synapses. *Science*. 2007;317(5841):1083–1086. DOI: 10.1126/science.1144640.
69. Jourdain P, Bergersen L, Bhaukaurally K, Bezzi P, Santello M, Domercq M, Matute C, Tonello F, Gundersen V, Volterra A. Glutamate exocytosis from astrocytes controls synaptic strength. *Nature Neuroscience*. 2007;10:331–339. DOI: 10.1038/nn1849.
70. Fiacco T, McCarthy K. Intracellular astrocyte calcium waves in situ increase the frequency of spontaneous AMPA receptor currents in CA1 pyramidal neurons. *The Journal of Neuroscience*. 2004;24(3):722–732. DOI: 10.1523/jneurosci.2859-03.2004.
71. Farrant M, Nusser Z. Variations on an inhibitory theme: phasic and tonic activation of GABAA receptors. *Nature Reviews Neuroscience*. 2005;6:215–229. DOI: 10.1038/nrn1625.
72. Gu N, Jackson J, Goutagny R, Lowe G, Manseau F, Williams S. NMDA-dependent phase synchronization between septal and temporal CA3 hippocampal networks. *The Journal of Neuroscience*. 2013;33(19):8276–8287. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0179-13.2013.
73. Teles-Grilo Ruivo L, Mellor J. Cholinergic modulation of hippocampal network function. *Frontiers in Synaptic Neuroscience*. 2013;5:2. DOI: 10.3389/fnsyn.2013.00002.
74. Puig M, Gullledge A. Serotonin and prefrontal cortex function: neurons, networks, and circuits. *Molecular Neurobiology*. 2011;44:449–464. DOI: 10.1007/s12035-011-8214-0.
75. Feldmeyer D, Egger V, Lübke J, Sakmann B. Reliable synaptic connections between pairs of excitatory layer 4 neurones within a single “barrel” of developing rat somatosensory cortex. *The Journal Of Physiology*. 1999;521(1):169–190. DOI: 10.1111/j.1469-7793.1999.00169.x.
76. Isaacson J, Scanziani M. How inhibition shapes cortical activity. *Neuron*. 2011;72(2):231–243. DOI: 10.1016/j.neuron.2011.09.027.

77. Pouille F, Scanziani M. Enforcement of temporal fidelity in pyramidal cells by somatic feed-forward inhibition. *Science*. 2001;293(5532):1159–1163. DOI: 10.1126/science.1060342.
78. Galarreta M, Hestrin S. Spike transmission and synchrony detection in networks of GABAergic interneurons. *Science*. 2001;292(5525):2295–2299. DOI: 10.1126/science.1061395.
79. Börgers C, Kopell N. Synchronization in networks of excitatory and inhibitory neurons with sparse, random connectivity. *Neural Computation*. 2003;15(3):509–538. DOI: 10.1162/08997660321192059.
80. Fries P. A mechanism for cognitive dynamics: neuronal communication through neuronal coherence. *Trends In Cognitive Sciences*. 2005;9(10):474–480. DOI: 10.1016/j.tics.2005.08.011.
81. Fellin T, Pascual O, Gobbo S, Pozzan T, Haydon P, Carmignoto G. Neuronal synchrony mediated by astrocytic glutamate through activation of extrasynaptic NMDA receptors. *Neuron*. 2004;43(5):729–743. DOI: 10.1016/j.neuron.2004.08.011.
82. Parpura V, Zorec R. Gliotransmission: Exocytotic release from astrocytes. *Brain Research Reviews*. 2010;63(1-2):83–92. DOI: 10.1016/j.brainresrev.2009.11.008.
83. Bazargani N, Attwell D. Astrocyte calcium signaling: the third wave. *Nature Neuroscience*. 2016;19:182–189. DOI: 10.1038/nn.4201.
84. MacVicar B, Newman E. Astrocyte regulation of blood flow in the brain. *Cold Spring Harbor Perspectives in Biology*. 2015;7:a020388. DOI: 10.1101/cshperspect.a020388.
85. Perea G, Navarrete M, Araque A. Tripartite synapses: astrocytes process and control synaptic information. *Trends in Neurosciences*. 2009;32(8):421–431. DOI: 10.1016/j.tins.2009.05.001.
86. Navarrete M, Perea G, Sevilla D, Gomez-Gonzalo M, Nunez A, Martin E, Araque A. Astrocytes mediate in vivo cholinergic-induced synaptic plasticity. *PLoS Biology*. 2012;10:e1001259. DOI: 10.1371/journal.pbio.1001259.
87. Fellin T. Communication between neurons and astrocytes: relevance to the modulation of synaptic and network activity. *Journal Of Neurochemistry*. 2009;108(3):533–544. DOI: 10.1111/j.1471-4159.2008.05830.x.
88. Carmignoto G, Fellin T. Glutamate release from astrocytes as a non-synaptic mechanism for neuronal synchronization in the hippocampus. *Journal Of Physiology-Paris*. 2006;99(2-3):98–102. DOI: 10.1016/j.jphysparis.2005.12.008.



Стасенко Сергей Викторович — родился в 1988 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. Кандидат физико-математических наук (2017). Доцент кафедры нейротехнологий ННГУ. Область научных интересов: математическая биофизика, математическое моделирование живых систем, моделирование нейрон-astroцитарного и нейрон-ВКМ взаимодействий, спайковые нейронные сети и анализ данных.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр-кт Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: stasenko@neuro.nnov.ru
 ORCID: 0000-0002-3032-5469
 AuthorID (eLibrary.Ru): 655311



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 51.77

DOI: 10.18500/0869-6632-003123
EDN: ZYQCCL

Моделирование конкуренции языков в двуязычном сообществе*

А. В. Медведев[✉], О. А. Кузенков

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: ✉a.medvedev.unn@gmail.com, kuzenkov_o@mail.ru

Поступила в редакцию 29.11.2023, принята к публикации 10.05.2024,
опубликована онлайн 11.09.2024, опубликована 30.09.2024

Аннотация. Цель настоящего исследования — построение и исследование новой математической модели динамики численности носителей языков в двуязычном сообществе, которая учитывает: эффект взаимопомощи внутри группы носителей одного языка, эффект освоения языков детьми в раннем возрасте, различную престижность языков для их носителей. **Методы.** Строится новая модель, учитывающая новые эффекты. Модель исследуется классическими методами качественной теории динамических систем при неограниченном увеличении времени динамики. Проводится сравнение эффекта взаимопомощи с эффектом языковой волатильности Абрамса и Строгатти. На основании наблюдаемых статистических данных методом регрессии определяются параметры некоторых языков Англии и Канады. Для моделирования языковой динамики при помощи новой модели использованы реальные статистические данные по языковым парам: валлийско-английской, шотландско-английской, франко-английской. Строится прогноз для дальнейшей динамики. **Результаты.** Установлен эффект долгосрочного сосуществования двух языков в сообществе, а также определены характеристики языков, при которых этот эффект возможен: большим значениям параметров взаимопомощи соответствует такая языковая динамика, при которой один язык вытесняет второй; при низких значениях взаимопомощи языки сосуществуют. Построен прогноз дальнейшего развития динамики по языкам. **Заключение.** Общие понятия языковой динамики дополнены новой характеристикой языков — сила взаимопомощи внутри группы носителей одного языка. Отмечена схожесть эффекта языковой волатильности и эффекта взаимопомощи.

Ключевые слова: исчезновение языков, эффект взаимопомощи, языковая волатильность, билингвизм, языковая конкуренция, языковая динамика, сохранение языка, математическая модель, обыкновенные дифференциальные уравнения.

Для цитирования: Медведев А. В., Кузенков О. А. Моделирование конкуренции языков в двуязычном сообществе // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 691–708. DOI: 10.18500/0869-6632-003123. EDN: ZYQCCL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

* Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях — 2023».

Modeling language competition in a bilingual community*

A. V. Medvedev[✉], O. A. Kuzenkov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉a.medvedev.unn@gmail.com, kuzenkov_o@mail.ru

Received 29.11.2023, accepted 10.05.2024, available online 11.09.2024, published 30.09.2024

Abstract. The *purpose* of this study — construction and research of a new mathematical model of a bilingual community, which takes into account: the effect of mutual assistance within a group of speakers of the same language, the effect of language acquisition by children of bilingual parents at an early age, different prestige of languages for adults. *Methods.* A new model is being built that takes into account new effects. The model is studied using classical methods with an unlimited increase in dynamics time. The effect of mutual assistance is compared with the effect of language volatility introduced by Abrams and Strogatti. Based on the observed statistical data, using the regression method, the parameters of some languages of England and Canada are determined: Welsh, Scottish, English, French. A forecast is being made for the further development of dynamics. *Results.* The effects taken into account in the model are confirmed by the correspondence of the development of language dynamics to the characteristics of the language: large values of the parameters of mutual assistance correspond to such a development of language dynamics in which one language displaces the second; at low values of mutual assistance, languages coexist. To model language dynamics using the new model, real statistical data on language pairs is used: Welsh-English, Scots-English, French-English. A forecast is being made for the further development of dynamics by language. *Conclusion.* General concepts in language dynamics have been supplemented with new ones — the power of mutual assistance within a group of speakers of the same language. The similarity between the effect of language volatility and the effect of mutual assistance is noted.

Keywords: extinction of languages, mutual aid effect, language volatility, bilingualism, language competition, language dynamics, language preservation, mathematical model, ordinary differential equations.

For citation: Medvedev AV, Kuzenkov OA. Modeling language competition in a bilingual community. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(5):691–708. DOI: 10.18500/0869-6632-003123

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В настоящее время очень остро стоит проблема исчезновения языков. Она исследуется различными методами, в том числе и при помощи математического моделирования [1–7]. Одними из первых в математическом моделировании языковой динамики были Абрамс и Строгатти [1]. Их модель позволяет объяснить исторические данные об упадках валлийского, шотландского и других исчезающих языков. Модель Абрамса–Строгатти (AS) предполагает, что любой член рассматриваемого сообщества, вне зависимости от того, какими языками он владеет, в текущий момент времени отдаёт предпочтение лишь одному из двух. Она также предполагает, что родившиеся дети изучают и используют язык, которому их родители отдают предпочтение, поэтому смена поколений не влияет на доли носителей языков в обществе. Абрамс и Строгатти ввели понятия престижности языка и языковой волатильности как готовности носителей языка к его смене. Количество членов сообщества предполагалось постоянным. Модель AS показала, что один язык при сделанных предположениях всегда вытесняется другим с течением времени. Последнее в модели языковой динамики AS было названо языковой смертью [1]. В 2005 году появилась модель Мира и Передес [2]. В этой модели была введена новая характеристика — языковое сходство. Данная модель показала, что если языки очень похожи, то они могут сосуществовать вместе продолжительное время.

В 2006 году появилась модель Кастелло [3]. Её автор ввёл новую группу двуязычных индивидов — билингвы, и показал возможности устойчивого сосуществования двух языков

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Nonlinear dynamics in cognitive research — 2023”.

в сообществе. Модель взаимодействия между одноязычным и двуязычным населением Бэггса и Фридмана [4, 5] продемонстрировала возможности развития динамики, при которых языковые группы могут сосуществовать или вытеснять друг друга. Уайберн и Хейворд в своей модели продемонстрировали важность стабильной двуязычной группы для сосуществования двух языков [6]. Диаз и Швидке ввели новое понятие — статус языка [7].

Абрамс и Строгатти обоснованно полагали, что ребёнок будет владеть языком своих родителей, и в последующем эта гипотеза была сохранена в новых моделях, включая модели с билингвами. Но идея о том, что дети билингов, как и их родители, осваивают два языка, не совсем точна. Ребёнок, растущий в двуязычной среде, может в какой-то мере освоить два языка, но за ненадобностью один из них может быть утрачен [8, 9]. Отмечен эффект, при котором дети двуязычных родителей сперва осваивают первый или второй язык с разными степенями вероятности и только после, предположительно во взрослом возрасте, с некоторой вероятностью изучают второй язык, а дети, чьи родители говорят лишь на одном языке, сперва осваивают язык родителей, а второй язык осваивают с некоторой вероятностью. То есть освоение двух языков детьми происходит последовательно [8, 10].

Стоит отметить, что в начальной модели AS показатель языковой волатильности отсутствовал. Он был добавлен авторами для лучшего согласования динамики модели с динамикой, наблюдаемой в реальности. Мы предполагаем, что на динамику оказывают влияние также и другие эффекты, например, эффект взаимопомощи в соответствующей языковой группе. Взаимопомощь внутри группы носителей одного языка напрямую влияет на привлекательность второго языка для них. Таким образом, если взаимопомощь высокая, то носителя данного языка ничто не стимулирует к его смене, и наоборот. В связи с этим мы дополняем общие понятия языковой динамики новыми характеристиками: вероятность освоения языка детьми в раннем возрасте, вероятность освоения второго языка взрослыми и сила взаимопомощи внутри группы одного языка. В исследованиях были предприняты первые попытки учесть эффект освоения языков детьми в раннем возрасте [11, 12], но этот эффект рассмотрен без учёта различной вероятности освоения второго языка взрослыми. Получившиеся модели описывают ситуации, при которых существует устойчивое двуязычие или сохраняется лишь один из двух языков. В настоящем исследовании мы изучаем модель, учитывающую все описанные эффекты. Это может привести к появлению новых качественных особенностей в поведении модели.

Цель настоящего исследования — построение и исследование новой модели двуязычного сообщества, которая учитывает: эффект взаимопомощи внутри групп одного языка; эффект освоения языков детьми двуязычных родителей в раннем возрасте, учитывающий различные вероятности для освоения второго языка; различную престижность языка для носителей.

1. Методика

1.1. Модель двуязычного сообщества. Примем следующие гипотезы для построения модели:

- члены сообщества могут владеть одним из двух языков, условно называемых «первый» и «второй», или двумя сразу; z_1 — доля членов сообщества, владеющих только первым языком, z_2 — доля членов сообщества, владеющих только вторым языком, z_{12} — доля членов сообщества, владеющих двумя языками (билингвы);
- доля индивидов, не владеющих ни одним языком пренебрежимо мала;
- численность любой языковой группы неотрицательна: $0 \leq z_1, z_2, z_{12} \leq 1$;
- численность сообщества постоянна во времени (число рождений равно числу смертей), $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$;
- коэффициент r одновременно характеризует и рождаемость, и смертность;

- вероятность одновременного (самопроизвольного) освоения двух языков ребёнком пренебрежимо мала;
- дети билингвов первоначально осваивают первый или второй язык с вероятностями c_1 и c_2 соответственно; $c_1 + c_2 = 1$, предполагается, что $c_1 > c_2$ [8, 9];
- внутри языковых групп присутствует эффект взаимопомощи, который определяется коэффициентами: α -для носителей первого языка и β -для носителей второго языка;
- сила эффекта взаимопомощи имеет линейную зависимость с обратным знаком от числа доли носителей языка: при доле численности носителей языка, близкой к нулю, сила эффекта близка к своему максимуму; при доле численности, близкой к единице, сила эффекта близка к нулю;
- престижность, введённая Абрамсом и Строгатти, определяется коэффициентами b_1 и b_2 для первого и второго языков соответственно;
- при встрече носителей разных языков (частота которых прямо пропорциональна произведению долей их численностей) возможна смена языка с коэффициентами $b_{1,2}$ для первого и второго языков соответственно;
- предполагается возможным обучение одноязычных членов сообщества второму языку билингвами [3];
- принцип взаимодействия носителей языков в сообществе друг с другом обобщает известную гипотезу эффективных встреч [13].

Учитывая принятые гипотезы, получаем, что динамика носителей языков в обществе характеризуется следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r z_{12} - b_1 z_1 (z_2 + z_{12}) + \alpha z_1^2 (1 - z_1), \\ \dot{z}_2 = c_2 r z_{12} - b_2 z_2 (z_1 + z_{12}) + \beta z_2^2 (1 - z_2), \\ \dot{z}_{12} = z_1 (b_1 - \alpha z_1) (z_2 + z_{12}) + z_2 (b_2 - \beta z_2) (z_1 + z_{12}) - r z_{12}, \end{cases} \quad (1)$$

Начальные значения долей численности носителей языков не могут быть отрицательными, исходя из понимания смысла этих значений. Доказана справедливость утверждения о том, что для неотрицательности решений по всем фазовым координатам, при неотрицательных начальных условиях, необходимо и достаточно выполнение следующего требования: при занулении любой фазовой координаты правая часть соответствующего уравнения модели (1) должна быть неотрицательной (эти условия называются условиями квазиположительности [14]). Для данной системы эти условия выполняются. Сохранение постоянной суммы фазовых координат обеспечивается тем, что сумма всех уравнений системы тождественно равна нулю: $\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{z}_{12} = 0$. Для системы (1) это условие также выполняется. Поскольку в начальный момент $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$, то это равенство будет сохраняться во все последующие моменты времени. В работе [1] путем изучения статистических данных были установлены приблизительные значения параметров: $\alpha, \beta = 1.31 \pm 0.25$. Исходя из этого, настоящее исследование проводится для следующих реалистичных границ изменения указанных параметров: $\alpha, \beta = 1.5 \pm 0.5$.

2. Результаты

2.1. Исследование модели. Фазовым пространством системы (1) является трёхмерный стандартный симплекс [14]. Путём проектирования, выразив z_{12} через z_1 и z_2 , данную модель можно привести к системе на плоскости

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r (1 - z_1 - z_2) - b_1 z_1 + (\alpha + b_1) z_1^2 - \alpha z_1^3, \\ \dot{z}_2 = c_2 r (1 - z_1 - z_2) - b_2 z_2 + (\beta + b_2) z_2^2 - \beta z_2^3, \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку $z_{12} \geq 0$, то для модели (2) справедливо неравенство $z_1 + z_2 \leq 1$. Проверим выполнение условий квазиположительности для модели (2). Пусть $z_1 = 0$, тогда $\dot{z}_1 = c_1 r (1 - z_2)$, а поскольку $0 \leq z_2 \leq 1$, то $\dot{z}_1 \geq 0$. Пусть $z_2 = 0$, тогда $\dot{z}_2 = c_2 r (1 - z_1)$, а так как $0 \leq z_1 \leq 1$, то $\dot{z}_2 \geq 0$.

Система (2) была исследована стандартными качественными методами. Фазовые портреты системы (2) для различных параметров языков приведены на (рис. 1). Красными точками помечены устойчивые состояния равновесия, а красными квадратами неустойчивые. Кривыми синего и зелёного цвета изображены изоклины горизонтального и вертикального наклонов соответственно. Число пересечений изоклин друг с другом определяет количество и характер точек равновесия, а также возможные бифуркации. Подробное рассмотрение бифуркаций приведено в разделе 2.2. Состояния №1 и №2, в зависимости от параметров, являются либо устойчивыми узлами, либо неустойчивыми по типу седло, и всегда находятся на границе фазового пространства в точках $(0, 1)$ и $(1, 0)$ (см. рис. 1). Устойчивость данных состояний была определена методом Ляпунова путём определения собственных чисел. Получено неравенство $\alpha > b_1$, при выполнении которого точка $(1, 0)$ является устойчивым узлом, в противном случае она является неустойчивой по типу седло. Получено неравенство $\beta > b_2$, при котором точка $(0, 1)$ является устойчивым узлом, в противном случае она является неустойчивой по типу седло. Учитывая это, можно гарантированно утверждать о сосуществовании языков при одновременном выполнении условий $\alpha < b_1, \beta < b_2$. Оставшиеся состояния равновесия находятся внутри области, определяемой следующими ограничениями:

$$\begin{cases} 0 \leq z_1, z_2 \leq 1, \\ z_1 + z_2 \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Их координаты определялись через поиск точек пересечения изоклин вертикального и горизонтального наклона. Данная задача решалась при помощи программного комплекса WolframAlpha.

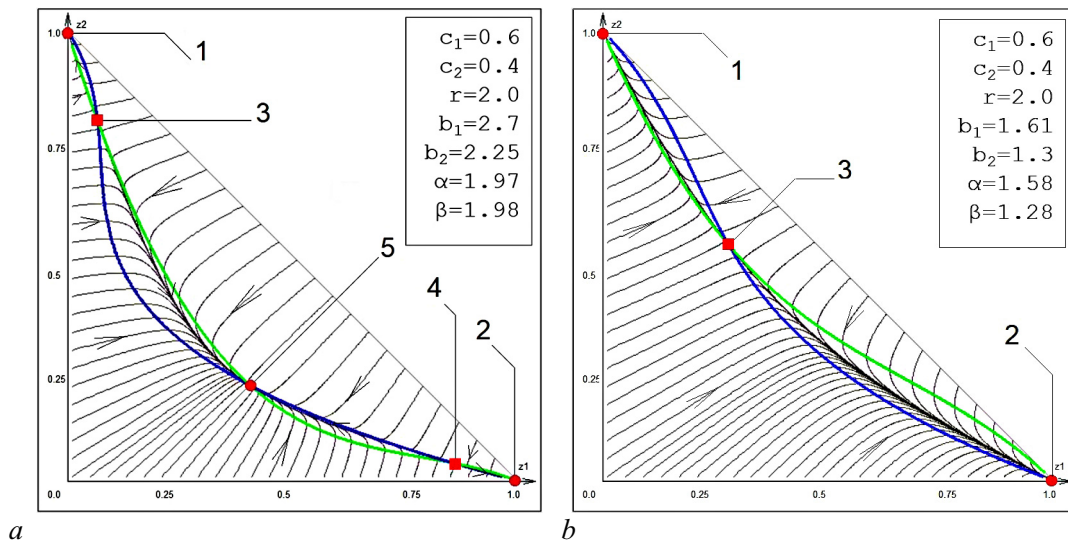


Рис. 1. Фазовые портреты модели (2): a – сосуществование двух языков и билингвов, $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 < 0$; b – вытеснение одного языка другим, $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 > 0$; синяя кривая – изоклина горизонтального наклона; зелёная кривая – изоклина вертикального наклона (цвет онлайн)

Fig. 1. Phase plane for model (2): a – coexistence of two languages and bilinguals, $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 < 0$; b – displacement of one language by another, $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 > 0$; blue curve – isocline of horizontal slope; green curve – is the isocline of the vertical slope (color online)

Вычисления показали, что система (2) может иметь 2–5 состояний равновесия. Характер равновесия остальных состояний определялся путём численного построения фазового портрета: №3 и №4 являются неустойчивыми по типу седло, а состояния №1, №2 и №5 – устойчивые по типу узел (см. рис. 1). Для построения фазового портрета использовался следующий диапазон параметров: $0.0 \leq c_1, c_2 \leq 1.0$; $1.0 \leq r, b_1, b_2 \leq 9.0$; $0.5 \leq \alpha, \beta \leq 2.5$; шаг сетки $\text{step} = 0.005$. Качественное исследование системы (2) показывает два возможных варианта динамики: выживание только одного языка или их сосуществование. Численно были получены оценки параметров, гарантирующих реализацию для первого случая $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 > 0$, для второго случая $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 < 0$.

2.2. Влияние различных значений коэффициентов взаимопомощи на языковую динамику. Рассмотрим вариант параметров модели (2), когда в сообществе гарантированно сохраняется билингвизм $\alpha < b_1, \beta < b_2$, при этом также верны и оценочные параметры $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 < 0$. На первом этапе рассмотрения параметры двух конкурирующих языков выберем равными: $c_1 = c_2, b_1 = b_2, \alpha = \beta$. Для рассмотрения возможных бифуркаций в системе параметры взаимопомощи будем увеличивать, начиная с β . Если параметр взаимопомощи достаточно мал, то языковая динамика будет развиваться таким образом, что устойчивое сосуществование языков будет возможно при любых начальных значениях долей численности языков. Это хорошо видно по бассейну притяжения устойчивого состояния №5 на фазовой плоскости (рис. 2, а), которое находится в середине области (3). Границы бассейна притяжения состояния №5 определялись численно. Состояния №1 и №2 являются неустойчивыми. Увеличение параметра взаимопомощи для второго языка β приведёт к выполнению неравенства $\beta \geq b_2$, при этом в результате седло-узловой бифуркации неустойчивое состояние №1 распадётся на два новых состояния: №1 – устойчивый узел и №3 – неустойчивое по типу седло.

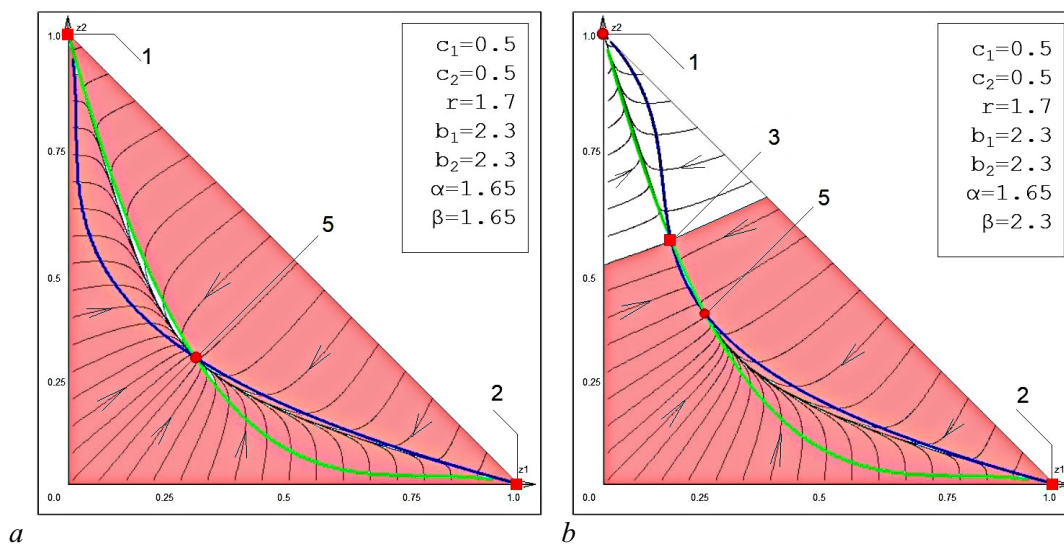


Рис. 2. Бассейн притяжения устойчивого состояния №5 модели (2): красным помечена область начальных состояний в которой два языка и билингвы сосуществуют; синяя кривая – изоклина горизонтального наклона; зелёная кривая – изоклина вертикального наклона; а – параметры взаимопомощи языков: $\alpha < b_1, \beta < b_2$; б – параметры взаимопомощи языков: $\alpha < b_1, \beta \geq b_2$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Steady State attraction pool No. 5 and No. 6 models (2): the are a in which two languages and bilinguals coexist is marked in red; blue curve – isocline of horizontal slope; green curve – is the isocline of the vertical slope; a – language mutual aid parameters: $\alpha < b_1, \beta < b_2$; b – language mutual aid parameters: $\alpha < b_1, \beta \geq b_2$ (color online)

Бассейн притяжения устойчивого состояния №5, динамика траекторий которого соответствует сосуществованию языков, сократится (см. рис. 2, b). Увеличение параметра взаимопомощи для первого языка α приведёт к аналогичным изменениям в фазовом портрете для противоположного угла области (3) — неустойчивый узел в точке (1, 0) в результате седло-узловой бифуркации превратится в два новых состояния: №2 — устойчивый узел, №4 — неустойчивое по типу седло (рис. 3, a).

Дальнейшее увеличение параметра взаимопомощи β приведёт к тому, что бассейн притяжения устойчивого состояния №5, при котором языки сосуществуют, будет сокращаться со стороны оси z_2 , а состояние равновесия №3 — седло — будет приближаться к состоянию равновесия №5 — устойчивый узел. Продолжая увеличение параметра β , мы получим такие изменения в фазовом портрете системы, при которых состояние №3 и №5 в результате седло-узловой бифуркации сольются в одно состояние №6 по типу седло-узел (см. рис. 3, b). Изоклины вертикального и горизонтального наклона при этом будут касаться друг друга. Данная ситуация является негрубой и при дальнейшем увеличении параметра β произойдёт исчезновение состояния равновесия №6 (рис. 4, a). Сосуществование языков станет невозможным, и один язык всегда будет вытеснять второй. Динамика модели в окрестности состояния равновесия №6 ведёт себя таким образом, что численность носителей первого языка сокращается. Если соотношение первого и второго языка выше определённого уровня, то с течением времени устанавливается фиксированная пропорция на этом уровне между билингвами и носителями двух языков. Но если их соотношение ниже этого уровня, то первый язык с течением времени утрачивается. Если в системе, изображённой на (см. рис. 3, b), параметр β зафиксировать и начать увеличивать параметр α , то состояние равновесия №4 (седло) начнёт смещаться в сторону состояния равновесия №6 (седло-узел) и в результате седло-узловой бифуркации сольётся с ним в состояние №7 (седло). Это также приведёт

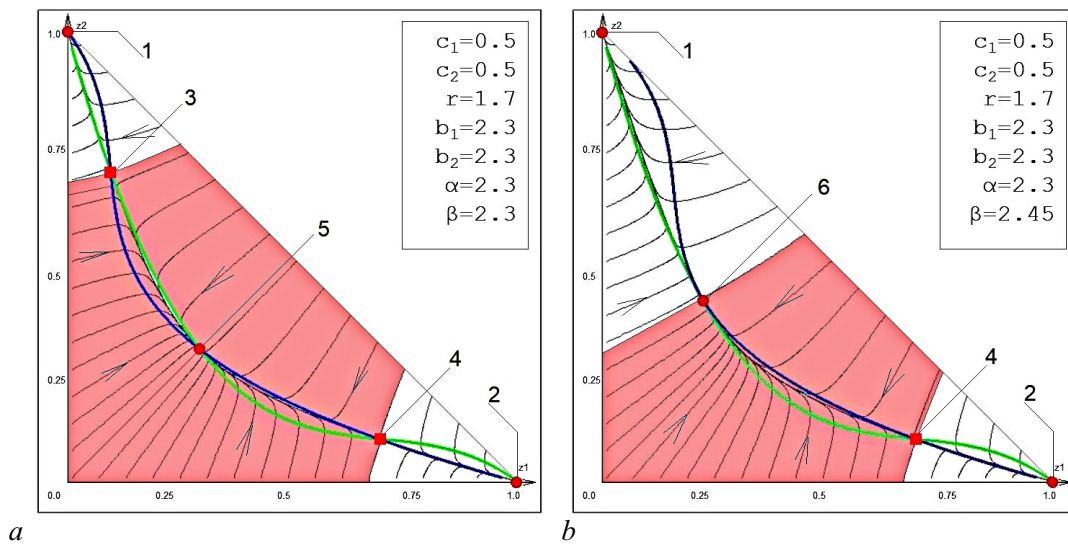


Рис. 3. Бассейн притяжения устойчивого состояния №5 и №6 модели (2): красным помечена область начальных состояний, в которой два языка и билингвы сосуществуют; синяя кривая — изоклина горизонтального наклона; зелёная кривая — изоклина вертикального наклона; а — параметры взаимопомощи языков: $\alpha \geq b_1, \beta \geq b_2$; б — параметры взаимопомощи языков: $\alpha \geq b_1, \beta > b_2$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Pools of attraction for equilibrium states of the model (2): the are a in which two languages and bilinguals coexist is marked in red; blue curve — isocline of horizontal slope; green curve — is the isocline of the vertical slope; a — language mutual aid parameters: $\alpha \geq b_1, \beta \geq b_2$; b — language mutual aid parameters: $\alpha \geq b_1, \beta > b_2$ (color online)

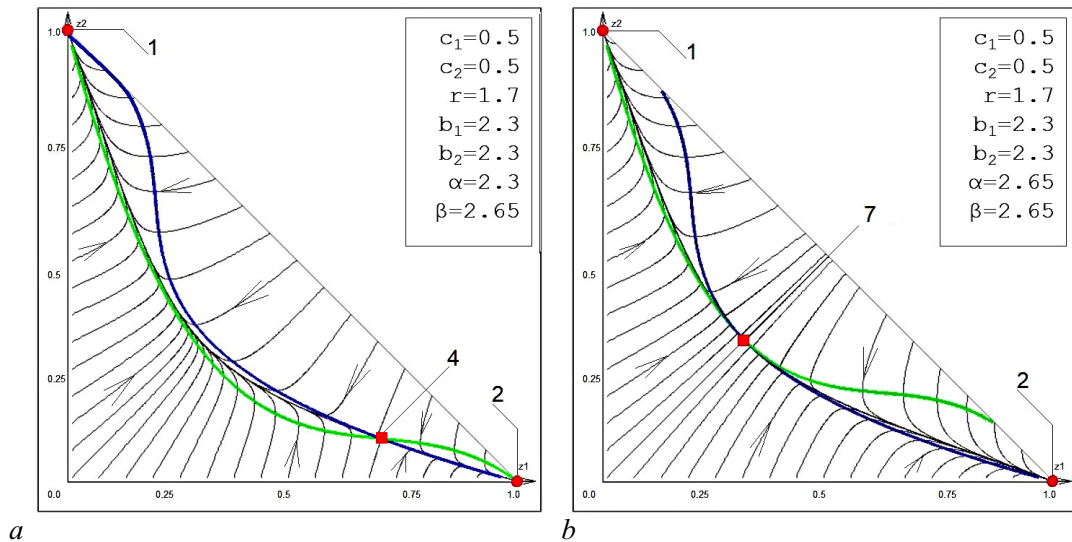


Рис. 4. Фазовые траектории модели (2): случай вытеснения одного языка другим; *синяя кривая* — изоклина горизонтального наклона; *зелёная кривая* — изоклина вертикального наклона; *a* — параметры взаимопомощи языков: $\alpha \geq b_1, \beta > b_2$; *b* — параметры взаимопомощи языков: $\alpha > b_1, \beta > b_2$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Phase trajectories of the model (2): case of one language being replaced by another; *blue curve* — isocline of horizontal slope; *green curve* — is the isocline of the vertical slope; *a* — language mutual aid parameters: $\alpha \geq b_1, \beta > b_2$; *b* — language mutual aid parameters: $\alpha > b_1, \beta > b_2$ (color online)

систему к случаю, в котором сосуществование языков невозможно. Увеличение коэффициентов взаимопомощи приводит к тому, что в середине фазовой плоскости остаётся одно неустойчивое состояние равновесия по типу седла, а динамика системы соответствует второму случаю — вытеснение одного языка другим (см. рис. 4, *b*). Получается, что при увеличении коэффициентов α и β эффект взаимопомощи внутри групп одного языка набирает силу и начинает действовать таким образом, что билингвизм становится невозможным. На основе данного анализа динамики системы можно утверждать, что взаимопомощь внутри группы препятствует образованию билингвизма и способствует доминированию языка в рассматриваемом сообществе.

2.3. Модель с эффектом языковой волатильности Абрамса и Стругатти. Для сравнения двух моделей с различными эффектами (взаимопомощи и языковой волатильности) рассмотрим модель на основе классических уравнений языковой волатильности. Учитывая гипотезы принятые для построения модели (1) и заменив гипотезу о взаимопомощи на гипотезу языковой волатильности, используемую в модели AS, получим, что динамика носителей языков в обществе определяется следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r z_{12} - b_1 z_1 (z_2 + z_{12})^\alpha, \\ \dot{z}_2 = c_2 r z_{12} - b_2 z_2 (z_1 + z_{12})^\beta, \\ \dot{z}_{12} = b_1 z_1 (z_2 + z_{12})^\alpha + b_2 z_2 (z_1 + z_{12})^\beta - r z_{12}. \end{cases} \quad (4)$$

Фазовым пространством для (4) является трёхмерный единичный симплекс. Фазовые портреты для различных параметров языков системы (4) приведены на рис. 5. Состояния равновесия №1 и №2, в зависимости от параметров, являются либо устойчивыми узлами, либо неустойчивыми по типу седло, и всегда находятся на границе симплекса в точках (0, 1) и (1, 0). Их устойчивость была исследована методом Ляпунова. Через поиск собственных чисел было установлено,

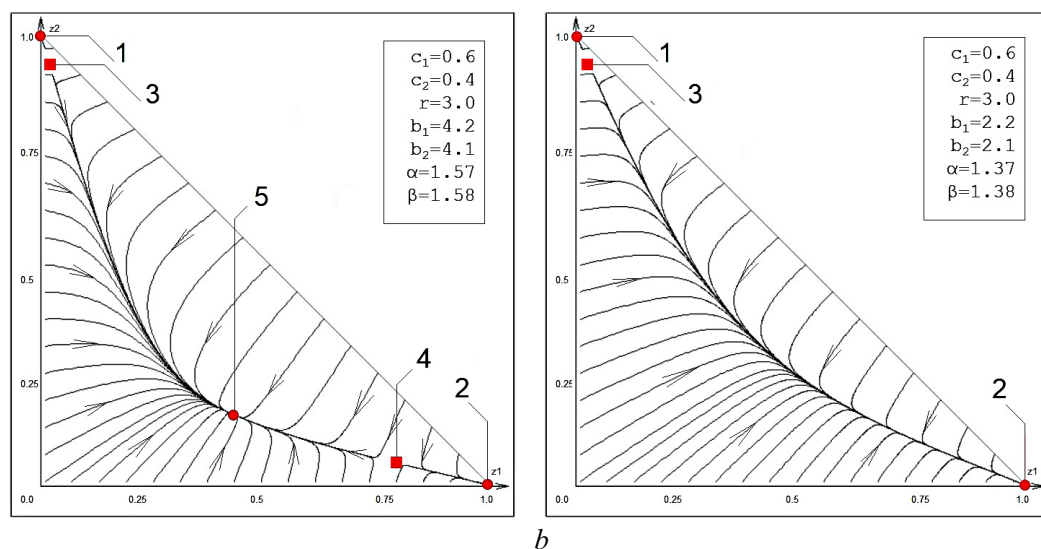


Рис. 5. Фазовые портреты модели (4): *a* – сосуществование двух языков и билингвов, $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) > 0$; *b* – вытеснение одного языка другим, $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) < 0$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Phase plane for model (4): *a* – coexistence of two languages and bilinguals, $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) > 0$; *b* – displacement of one language by another, $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) < 0$ (color online)

что при $\frac{\alpha}{2} \geq b_1$ точка $(1, 0)$ является устойчивым узлом, в противном случае она является неустойчивой по типу седло, а при $\frac{\beta}{2} \geq b_2$ точка $(0, 1)$ является устойчивым узлом, в противном случае она является неустойчивой по типу седло. Учитывая это, можно гарантированно утверждать о сосуществовании языков при одновременном выполнении условий $\frac{\alpha}{2} \geq b_1, \frac{\beta}{2} \geq b_2$. Оставшиеся состояния равновесия находятся внутри симплекса, их первые координаты определяются уравнением, имеющим следующий вид:

$$1 - \left(1 - z_1 \left(1 + \frac{b_1}{c_1 r} (1 - z_1)^\alpha\right)\right) \left(1 + \frac{b_2}{c_2 r} \left(1 - \left(1 - z_1 \left(1 + \frac{b_1}{c_1 r} (1 - z_1)^\alpha\right)\right)^\beta\right)\right) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) решалось численно для всевозможных значений параметров. Ограничения на параметры $b_{1,2}, c_{1,2}$ определяются данными, наблюдаемыми в реальности. Ограничения на параметры волатильности $\alpha, \beta = 1.31 \pm 0.25$ введены Абрамсом и Строгатти [1]. В результате было установлено, что корней уравнения на отрезке $[0, 1]$ может быть от 2 до 5. Всегда имеются два корня 1 и 0. Определены уравнения изоклин вертикального и горизонтального наклона:

$$\text{Ver} : z_2 = 1 - z_1 - \frac{b_1}{c_1 r} z_1 (1 - z_1)^\alpha, \quad \text{Hor} : z_1 = 1 - z_2 - \frac{b_2}{c_2 r} z_2 (1 - z_2)^\beta. \quad (6)$$

Состояния №3, №4 и №5 определялись численно как точки пересечения изоклин вертикального и горизонтального наклона, а характер их равновесия определялся путём численного построения фазового портрета. Для (рис. 5) состояния равновесия имеют следующий тип: №1, №2 и №5 – устойчивое по типу узел, №3 и №4 – неустойчивые по типу седло. Для построения фазового портрета использовался следующий диапазон параметров: $0.0 \leq c_1, c_2 \leq 1.0$; $1.0 \leq r, b_1, b_2 \leq 9.0$; $0.5 \leq \alpha, \beta \leq 2.5$; шаг сетки $\text{step} = 0.005$. Качественное исследование модели (4) показало, что при выполнении хотя бы одного из неравенств $\frac{\alpha}{2} \geq b_1$ и $\frac{\beta}{2} \geq b_2$ сосуществование языков определяется наличием устойчивых состояний внутри симплекса. Численно были получены оценки параметров, гарантирующих реализацию для первого случая $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) \geq 0$, для второго

случая $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) < 0$. Динамика по двум моделям почти совпадает, сравнение фазовых портретов для (4) и (1) выявило их близкое сходство. Такое соответствие даёт право говорить о схожести эффектов языковой волатильности и взаимопомощи. Выразив z_{12} через z_1 и z_2 , приведём модель (4) к модели на плоскости, а степенные члены правых частей уравнений модели (4) аппроксимируем при помощи рядов Тейлора.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r (1 - z_1 - z_2) - b_1 z_1 + \alpha b_1 z_1^2 - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} z_1^3, \\ \dot{z}_2 = c_2 r (1 - z_1 - z_2) - b_2 z_2 + \beta b_2 z_2^2 - \frac{\beta(\beta - 1)}{2} z_2^3. \end{cases} \quad (7)$$

Полученная в результате аппроксимации модель (7) оказалась почти идентичной модели (2). Они отличаются лишь коэффициентами при переменных второй и третьей степени: для (2) они равны $\alpha + b_1, \beta + b_2, \alpha, \beta$, а для (7) $\alpha b_1, \beta b_2, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \frac{\beta(\beta-1)}{2}$. Учитывая ограничения на параметры волатильности $\alpha, \beta = 1.31 \pm 0.25$, введенные Абрамсом и Строгатти [1], численные выражения параметров моделей (2), (7) становятся близкими. Такая аппроксимация является очень полезной с точки зрения математики, поскольку упрощаются уравнения динамической системы и её исследование. Данная аппроксимация также позволяет дать объяснение взаимопомощи между носителями отдельных языков через уже известный эффект языковой волатильности, и наоборот. В исходной модели (7) параметры языковой волатильности не имели очевидного объяснения, но после сравнения её аппроксимации с моделью (2) эффект языковой волатильности можно интерпретировать как проявление эффекта взаимопомощи. В связи с этим члены правых частей уравнений при коэффициентах α и β в моделях (7 и 4) могут быть интерпретированы как влияние эффекта взаимопомощи внутри группы носителей одного языка, а значения α и β как сила этой взаимопомощи. Для сохранения эффекта достаточно второго порядка аппроксимации.

В модели (7) была исследована зависимость предельного развития языковой динамики от параметров языковой волатильности. Результаты оказались аналогичными результатам полученным в разделе 2.2 для модели (1): при увеличении коэффициентов α и β эффект языковой волатильности набирает силу и начинает действовать таким образом, что билингвизм становится невозможным.

2.4. Применение модели к статистическим данным. Методом регрессии были идентифицированы параметры моделей (1) и (4), значения коэффициентов приведены в табл. 1.

Рассмотрены статистические данные долей валлийского и английского языков за 1901–2001 годы в Англии [15, 16]. Модели (1) и (4) показали, что хотя английский язык и вытесняет валлийский, но он не вытеснит его полностью. Динамика придёт к устойчивому сосуществованию

Таблица 1. Коэффициенты моделей (1) и (4) для языковых пар

Table 1. Coefficients of models (1) and (4) for language pairs

Языковая пара	c_1	c_2	b_1	b_2	r	α	β	diff
Валлийский и английский (1)	0.1	0.9	8.5	5.5	6.1	2.4	0.2	0.012
Валлийский и английский (4)	0.1	0.9	8.0	0.5	2.7	2.3	0.1	0.007
Шотландский и английский (1)	0.1	0.9	8.5	1.0	8.8	2.4	0.5	0.111
Шотландский и английский (4)	0.1	0.9	0.5	0.5	4.2	2.4	0.3	0.724
Французский и английский (Канада) (1)	0.3	0.7	1.0	3.0	1.5	1.5	0.5	0.000
Французский и английский (Канада) (4)	0.7	0.3	0.5	2.5	3.2	0.1	0.5	0.000
Французский и английский (Монреаль) (1)	0.5	0.5	6.5	3.5	1.6	0.1	2.1	0.000
Французский и английский (Монреаль) (4)	0.6	0.4	7.1	3.1	3.1	0.1	2.3	0.000

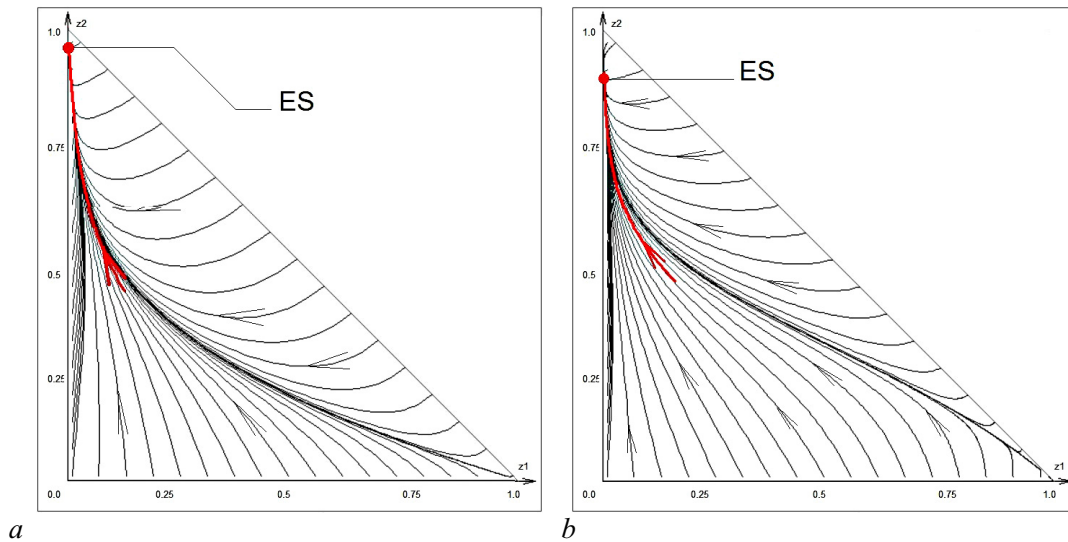


Рис. 6. Валлийско-английская языковая пара. *a* – фазовая плоскость модели (1), сосуществование языков. *b* – фазовая плоскость модели (4), сосуществование языков. Жирная траектория соответствует текущему развитию динамики (цвет онлайн)

Fig. 6. Welsh-English language pair. *a* – phase plane of the model (1), first analytical case. *b* – phase plane of the model (4), first analytical case. The bold trajectory corresponds to the current development of dynamics (color online)

языков, при этом группа валлийского языка будет весьма немногочисленна (рис. 6, *a, b*). Получен результат по статистическим данным долей шотландского и английского языков за 1891–1971 годы в Англии [15, 16]. Результаты моделирования для двух моделей показали разные результаты исхода динамики. Модель (1) показала, что шотландский язык будет вытесняться со временем (рис. 7, *a*). Модель (4) показала, что хотя английский язык и преобладает над шотландским,

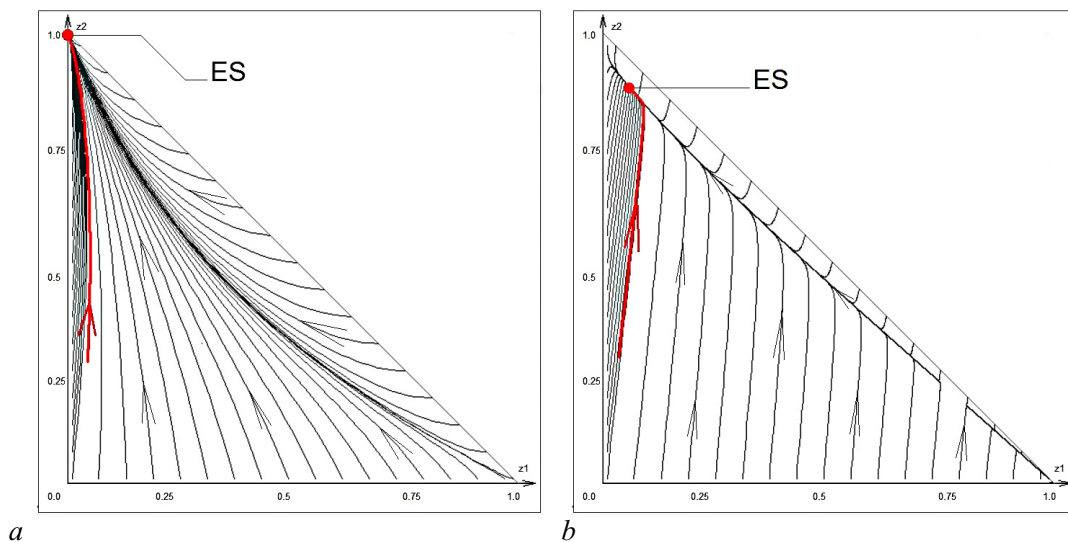


Рис. 7. Шотландско-английская языковая пара. *a* – фазовая плоскость модели (1), вытеснение шотландского языка английским. *b* – фазовая плоскость модели (4), сосуществование языков. Жирная траектория соответствует текущему развитию динамики (цвет онлайн)

Fig. 7. Gaelic-English language pair. *a* – phase plane of the model (1), English is replacing Scots. *b* – phase plane of the model (4), coexistence of languages. The bold trajectory corresponds to the current development of dynamics (color online)

но он не вытеснит его полностью. Динамика придёт к устойчивому сосуществованию языков, при этом группа шотландского языка будет весьма немногочисленна (см. рис. 7, *b*). Поскольку модели показали разные результаты для предельного поведения динамики, то для сравнения были взяты значения между фактическими данными и данными, полученными в результате моделирования. Для модели (1) разница в значениях оказалась равной $\text{diff} = 0.111$, а для модели (4) $\text{diff} = 0.724$ (табл. 1). Таким образом, новая модель показала другие результаты в предельном развитии динамики, но при этом точность моделирования её оказалась выше, чем у предшествовавшей модели.

Рассмотрены также статистические данные долей французского и английского языков по всей Канаде и отдельно по Монреалю за 1996–2016 годы [15, 17]. Модель (1) показала, что французский язык вытесняет английский, но скорость вытеснения крайне мала (рис. 8, *a*). Модель (4) показала, что языки сосуществуют, динамика близка к устойчивому состоянию (рис. 8, *b*). Обе модели показали разные результаты предельного развития динамики, при этом точность моделирования для двух моделей примерно одинаковая (табл. 1). По Монреалю обе модели показали соответствие первому случаю — языки сосуществуют совместно с билингвами (рис. 9). Точность моделирования языковой динамики для моделей (1) и (4) оказалась примерно одинаковой. Сравнение данных, полученных в результате моделирования, и данных, взятых из статистики для валлийского и английского языков, приведено на (рис. 10, *a*), для шотландского и английского на (рис. 10, *b*), английского и французского для всей Канады на (рис. 11, *a*), только по Монреалю на (рис. 11, *b*). Точками отмечены значения долей языков, взяты из статистических данных, кривыми показаны доли языков, полученные в результате моделирования. Для проверки качества модели (1) методом регрессии было сделано три идентификации параметров: первая и вторая идентификация параметров производились на начальных фрагментах натуральных данных различного периода (4 и 5 лет), третья идентификация параметров производилась на полном фрагменте данных продолжительностью в 10 лет. Сравнение параметров представлено в табл. 2.

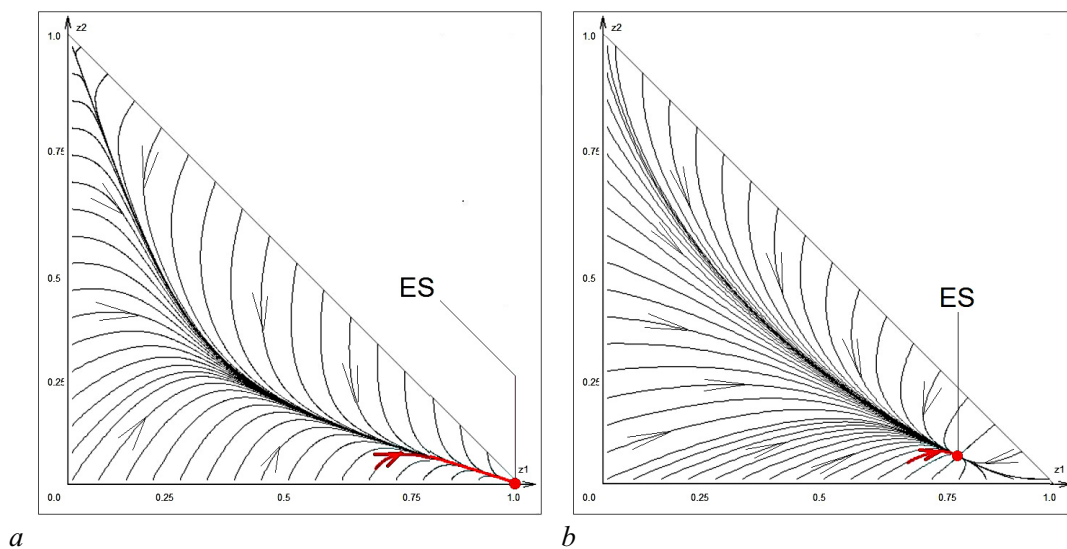


Рис. 8. Франко-английская языковая пара (Канада). *a* — фазовая плоскость модели (1), французский язык вытесняет английский. *b* — фазовая плоскость модели (4), сосуществование языков. Жирная траектория соответствует текущему развитию динамики (цвет онлайн)

Fig. 8. French-English language pair (Canada). *a* — phase plane of the model (1), French is replacing English. *b* — phase plane of the model (4), coexistence of languages. The bold trajectory corresponds to the current development of dynamics (color online)

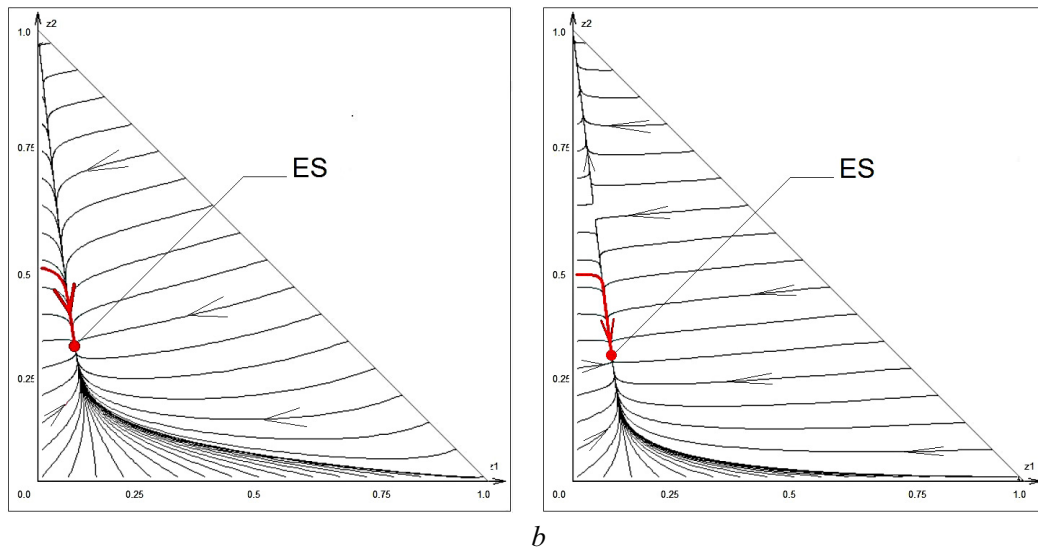


Рис. 9. Франко-английская языковая пара (Монреаль). *a* – фазовая плоскость модели (1), сосуществование языков. *b* – фазовая плоскость модели (4), сосуществование языков. Жирная траектория соответствует текущему развитию динамики (цвет онлайн)

Fig. 9. French-English language pair (Montreal). *a* – phase plane of the model (1), coexistence of languages. *b* – phase plane of the model (4), coexistence of languages. The bold trajectory corresponds to the current development of dynamics (color online)

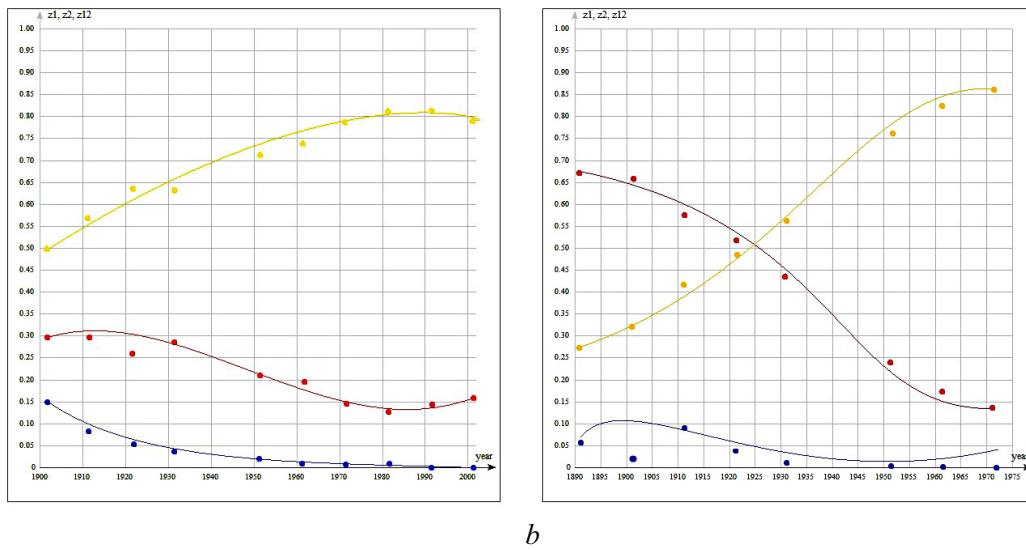


Рис. 10. Точками отмечены значения долей языков, взятые из статистических данных, кривыми показаны доли языков, полученные в результате моделирования: *красный* – билингвы; *синий* – валлийский и шотландский язык; *жёлтый* – английский язык. *a* – валлийский и английский языки. *b* – шотландский и английский (цвет онлайн)

Fig. 10. The dots mark the values of the shares of languages taken from statistical data, the curves show the shares of languages obtained as a result of modeling: *red* – bilinguals; *blue* – Gaelic or Welsh; *yellow* – English. *a* – Gaelic-English language pair. *b* – Welsh-English language pair (color online)

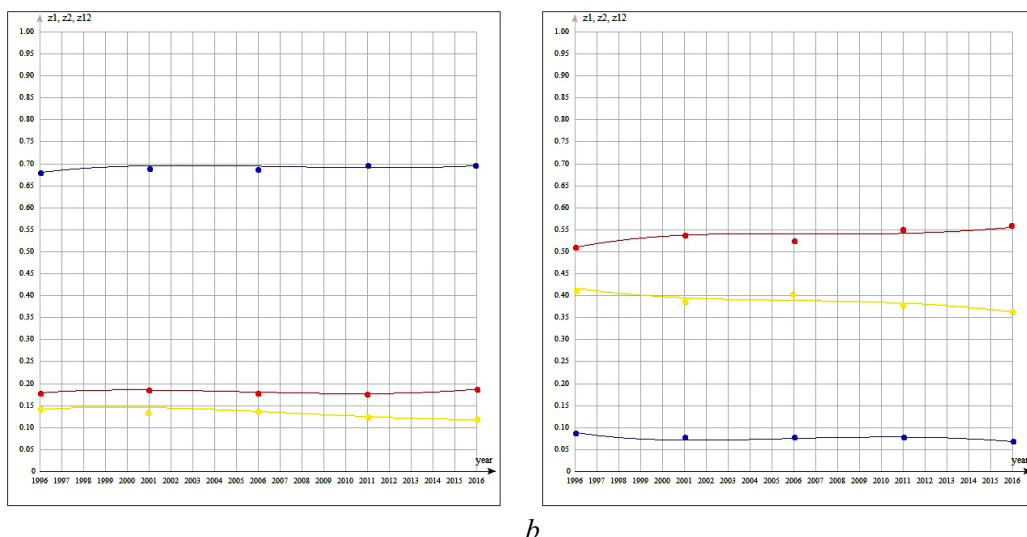


Рис. 11. Точками отмечены значения долей языков, взятые из статистических данных, кривыми показаны доли языков, полученные в результате моделирования: *красный* – билингвы; *синий* – французский язык; *жёлтый* – английский язык. *a* – вся Канада. *b* – Монреаль (цвет онлайн)

Fig. 11. The dots mark the values of the shares of languages taken from statistical data, the curves show the shares of languages obtained as a result of modeling: *red* – bilinguals; *blue* – French; *yellow* – English. *a* – in Canada. *b* – in Montreal (color online)

Таблица 2. Параметры модели (1) на различных временных периодах

Table 2. Model parameters (1) for different time periods

Размер фрагмента данных		c_1	c_2	b_1	b_2	r	α	β
4 значения	1901–1921	0.2	0.8	7.5	8.5	6.7	1.1	1.2
5 значений	1901–1931	0.1	0.9	7.0	8.5	6.7	2.4	1.2
10 значений	1901–2001	0.1	0.9	6.5	8.5	6.4	2.2	1.2

Анализ данных из табл. 2 показывает, что значения коэффициентов, полученных на начальных фрагментах данных, близки к значениям, полученным на полном фрагменте натуральных данных. На основании этого можно утверждать, что модель (1) способна адекватно предсказывать исход конкуренции языков.

3. Обсуждения

Параметр языковой волатильности, который появился в результате наблюдения Абрамсом и Стругатти нелинейности в языковой динамике, является важным открытием, сделанным в их работе. Они интерпретировали его как готовность членов сообщества к смене языка, но такое объяснение не является очевидным. В настоящей работе рассмотрены другие возможные интерпретации этого параметра. Волатильность, введённая Абрамсом и Стругатти, была отражена в уравнениях новой динамической системы членами уравнений, которые можно интерпретировать как взаимопомощь внутри группы одного языка. По сути, взаимопомощь внутри одной языковой группы и готовность к смене языка очень близки по смыслу. Чем выше взаимопомощь, тем члены одной языковой группы активнее осваивают свой язык и менее склонны к смене языка, а чем она ниже, тем готовность к смене языка выше, потому что нет мотивации к использованию только языка своей языковой группы.

На основании таких рассуждений параметр языковой волатильности можно также объяснить и как эффект от взаимопомощи внутри группы одного языка, поскольку, во-первых, он близок к ней по смысловой интерпретации, во-вторых, также находит своё объяснение в математическом выражении. Это подтверждается и сравнением двух моделей, приведённым в данной работе.

Рассматривая статистические данные и данные, полученные в результате моделирования для языковых пар Англии, стоит отметить весьма высокое значение параметров взаимопомощи для валлийского и шотландского языков. Они превышают соответствующее значение для английского языка в 8–20 раз, и этот порядок подтверждается двумя рассмотренными моделями. Английский язык вытесняет их благодаря своей высокой престижности, но благодаря высокой взаимопомощи малые группы этих двух языков до сих пор сохраняются. Анализируя данные по Канаде, стоит отметить, что динамика французского и английского языков близка к устойчивому состоянию и фактически не меняется. Французский язык доминирует в Канаде, но в её столице, благодаря высокой взаимопомощи внутри группы английского языка, которая отражается в параметрах модели, преимущество сместилось в сторону английского языка.

На примере динамики этих двух языков также стоит отметить, что стабильно сосуществовать способны языки с совершенно разными параметрами. Новая и старая модели показали различные результаты моделирования предельного развития динамики по двум языковым парам: шотландский-английский и французский-английский (Канада). При этом для первой языковой пары точность моделирования новой модели (1) оказалась выше, чем у модели (4), для второй языковой пары точность оказалась одинаковой. На этом основании можно сделать вывод о том, что новая модель более точна в прогнозах, которые не совпадают с прогнозами старой модели. На моменте тестирования модели её параметры настраивались на начальном фрагменте натуральных данных, а исход конкуренции сравнивался с данными на конец периода. Прогноз пробного результата оказался весьма точным. Это позволяет сделать прогноз на будущее и сказать, что на данный момент динамика по рассмотренным языкам близка к устойчивым состояниям. При меняющихся условиях в Англии будет продолжать доминировать язык английский, а в Канаде французский. Рассмотренные эффекты (взаимопомощи и языковой волатильности) оказались довольно схожими и показали очень близкий результат при моделировании, но при рассмотрении предельного развития динамики могут давать как совпадающие, так и различные прогнозы.

Симметричность уравнений системы по форме не означает, что языки одинаковые, потому что разница по языкам отражается не в уравнениях системы, а в её параметрах. Это позволяет рассматривать языковую пару по типу «международный–национальный» в рамках исследованных моделей. В реальности могут быть случаи, когда из-за политических, социальных или других причин один из двух конкурирующих языков подвергается целенаправленному давлению и начинает существовать в принципиально других условиях. В ходе данного исследования отмечено, что при рассмотрении языковых пар по типу «международный–национальный» взаимопомощь для международного языка близка к значению 0, а для национального близка к максимальному значению. По языковой престижности ситуация обратная — у международного языка престижность близка к значению 1, а национального близка к значению 0. Учёт этих особенностей в последующих исследованиях может привести к появлению новых моделей с несимметричными уравнениями.

Заключение

В работе построена и исследована новая модель языковой динамики для двуязычного сообщества. Общие понятия языковой динамики расширены новыми характеристиками языков: силы взаимопомощи внутри групп носителей одного языка. Эффект взаимопомощи находит эмпирическое подтверждение. Учтён эффект последовательного освоения языков детьми в раннем

возрасте. В работе рассмотрена языковая динамика, основанная на реальных статистических данных по некоторым языкам Англии и Канады: шотландскому, валлийскому, английскому, французскому. Наблюдаемая статистика была сопоставлена с результатами математического моделирования и подтвердила адекватность новой модели. Построен прогноз дальнейшего развития динамики данных языков. Отмечено сходство эффекта взаимопомощи носителей одного языка с эффектом языковой волатильности в модели AS. Эффект взаимопомощи продемонстрирован на примере того, как изменению параметров взаимопомощи следует соответствующее изменение фазовых портретов модели.

Список литературы

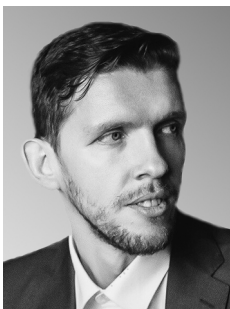
1. *Abrams D., Strogatz S.* Modelling the Dynamics of Language Death // *Nature*. 2003. Vol. 424. P. 900. DOI: 10.1038/424900a.
2. *Mira J., Paredes B.* Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 69, no. 6. P. 1031–1034. DOI: 10.1209/epl/i2004-10438-4.
3. *Castelly X., Eguiluz V., San Miguel M.* Ordering dynamics with Two non-excluding option: Bilingualism in language competition // *New Journal of Physics*. 2006. Vol. 8, no. 12. P. 308. DOI: 10.1088/1367-2630/8/12/308.
4. *Baggs I., Freedman H.* A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction // *Journal of Mathematical Sociology*. 1990. Vol. 16, no. 1. P. 51–75. DOI: 10.1080/0022250X.1990.9990078
5. *Baggs I., Freedman H.* Can the speakers of a dominated language survive as unilinguals?: A mathematical model of bilingualism // *Mathematical and Computer Modelling*. 1993. Vol. 18, no. 6. P. 9–18. DOI: 10.1016/0895-7177(93)90122-F.
6. *Wyburn J., Hayward J.* The future of bilingualism: an application of the Baggs and Freedman model // *Journal of Mathematical Sociology*. 2008. Vol. 32, no. 4. P. 267–284. DOI: 10.1080/00222500802352634.
7. *Diaz M., Switkes J.* Speaking out: A mathematical model of language preservation // *Heliyon*. 2021. Vol. 7, no. 5. P. 2405–2425. DOI: 10.1016/j.heliyon.2021.e06975.
8. *Александрова Н. Ш.* Исчезновение языков и естественный билингвизм // *Полилингвистическая и транскультурные практики*. 2023. Т. 20, № 3. С. 436–455. DOI: 10.22363/2618-897X-2023-20-3-436-455
9. *Paradis M.* A Neurolinguistic Theory of Bilingualism. Amsterdam; Philadelphia: John Benjamins Publishing Company. 2004. 299 p. DOI: 10.1075/sibil.18.
10. *Александрова Н. Ш.* Родной язык, иностранный язык и языковые феномены, у которых нет названия // *Вопросы языкознания*. 2006. Т. 3. С. 88–100.
11. *Alexandrova N. S., Antonets V. A., Kuzenkov O. A., Nuidel I. V., Shemagina O. V., Yakhno V. G.* Bilingualism as an Unstable State // *Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2021. Vol. 1358. P. 359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0_41.
12. *Медведев А. В., Кузенков О. А.* Моделирование конкуренции языков. Современные информационные технологии и ИТ-образование // 2023. Т. 19, № 2. С. 381–392.
13. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М: Наука, 1976. 286 с.
14. *Кузенков О. А., Рябова Е. А.* Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. 323 с.
15. *Sutantawibul C., Xiao P., Richie S., Fuentes-Rivero D.* Revisit language modeling competition and extinction: A Data-Driven Validation // *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2018. Vol. 6, no. 7. P. 1558–1570. DOI: 10.4236/jamp.2018.67132.
16. *Menghan Z., Tao G.* Principles of parametric estimation in modeling language competition //

Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS). 2013. Vol. 110, no. 24. P. 194–212. DOI: 10.1073/pnas.1303108110.

17. Statistics of Canada. <https://www.statcan.gc.ca>. Last accessed 3 Sep 2023.

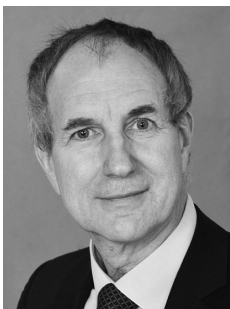
References

1. Abrams D, Strogatz S. Modelling the Dynamics of Language Death. *Nature*. 2003;424:900. DOI: 10.1038/424900a.
2. Mira J, Paredes B. Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics. *Europhysics Letters*. 2005;69(6):1031–1034. DOI: 10.1209/epl/i2004-10438-4.
3. Castelly X, Eguiluz V, San Miguel M. Ordering dynamics with Two non-excluding option: Bilingualism in language competition. *New Journal of Physics*. 2006;8(12):308. DOI: 10.1088/1367-2630/8/12/308.
4. Baggs I, Freedman H. A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction. *Journal of Mathematical Sociology*. 1990;16(1):51–75. DOI: 10.1080/0022250X.1990.9990078.
5. Baggs I, Freedman H. Can the speakers of a dominated language survive as unilinguals?: A mathematical model of bilingualism. *Mathematical and Computer Modelling*. 1993;18(6):9–18. DOI: 10.1016/0895-7177(93)90122-F.
6. Wyburn J, Hayward J. The future of bilingualism: an application of the Baggs and Freedman model. *Journal of Mathematical Sociology*. 2008;32(4):267–284. DOI: 10.1080/00222500802352634.
7. Diaz M, Switkes J. Speaking out: A mathematical model of language preservation. *Heliyon*. 2021;7(5):2405–2425. DOI: 10.1016/j.heliyon.2021.e06975.
8. Alexandrova NS. The disappearance of languages and natural bilingualism. *Polylinguality & Transcultural Practices*. 2023;20(3):436–455. DOI: 10.18500/0869-6632-00312310.22363/2618-897X-2023-20-3-436-455 (In Russian).
9. Paradis M. *A Neurolinguistic Theory of Bilingualism*. Amsterdam; Philadelphia: John Benjamins Publishing Company. 2004. 299 p. DOI: 10.1075/sibil.18.
10. Alexandrova NS. Native language, foreign language and linguistic phenomena that have no name. *Voprosy Jazykoznanija*. 2006;3:88–100 (In Russian).
11. Alexandrova NS, Antonets VA, Kuzenkov OA, Nuidel IV, Shemagina OV, Yakhno VG. Bilingualism as an Unstable State. *Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2021;1358:359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0_41.
12. Medvedev AV, Kuzenkov OA. Modeling language competition. *Modern Information Technologies and IT-education*. 2023;19(2):381–392 (In Russian).
13. Volterra V. *Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*. Paris: Gauthier-Villars. 1931. 222 p. (In France).
14. Kuzenkov OA, Ryabova EA. *Mathematical modeling of selection processes*. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University publ. 2007. 323 p. (In Russian).
15. Sutantawibul C, Xiao P, Richie S, Fuentes-Rivero D. Revisit language modeling competition and extinction: A Data-Driven Validation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2018;6(7):1558–1570. DOI: 10.4236/jamp.2018.67132.
16. Menghan Z, Tao G. Principles of parametric estimation in modeling language competition. *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*. 2013;110(24):194–212. DOI: 10.1073/pnas.1303108110.
17. Statistics of Canada. <https://www.statcan.gc.ca>. Last accessed 3 Sep 2023.



Александр Викторович Медведев — аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского.
E-mail: a.medvedev.unn@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4650-0938



Кузенков Олег Анатольевич — родился в Горьковской области (1961). Окончил с отличием факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (1989, ГГУ). С 2015 года работает на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Научные интересы — теория меры, оптимизация и теория оптимального управления, математическое моделирование. Имеет более 120 публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: kuzenkov_o@mail.ru
ORCID: 0000-0001-9407-0517
AuthorID (eLibrary.Ru): 12881

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

MANAGING EDITOR

M. V. Sysoeva, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Pikovskiy, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

E. Ya. Frisman, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >