

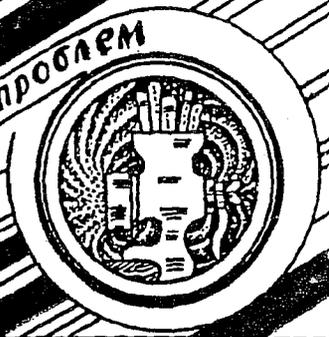
# Трикладная Делнейная Динамика

1  
1995





Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы



Конференции, семинары, симпозиумы



детерминированные системы



Автоволны, самоорганизация

Прикладные нелинейные теории колебаний и волн



нелинейная динамика в лицах. история. personalia

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Ашищенко*, профессор, Саратовский государственный университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*В.И. Крицкий*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

*П.С. Лауда*, профессор, Московский государственный университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет

*В.К. Юлматов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

<i>Тулбаев С.Д., Харрасов М.Х.</i> Периодические решения модели Гарела - Росслера . . . . .	3
<i>Соловей Д.В., Шараевский Ю.П.</i> Прохождение сложных сигналов через нелинейную линию передачи на магнитостатических волнах . . . . .	11
<i>Аришинов А.И., Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н.</i> Тройка керровских сред в кольцевом интерферометре: роль неидентичности . . . . .	20
<i>Алехин Б.В., Дубинов А.Е., Селемир В.Д., Степанов Н.В., Шамро О.А., Шибалко К.В.</i> Натурная имитация импульсной фазированной антенной решетки на основе виркаторов . . . . .	28

**ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС**

<i>Беннер Г., Хенн Р., Рёдельшпергер Ф., Визе Г.</i> Анализ и наблюдение хаоса при спин-волновой нестабильности . . . . .	32
---	----

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ**

<i>Землянухин А.И., Могилевич Л.И.</i> Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках . . . . .	52
---	----

**АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ**

<i>Григорьева Е.В., Каценко С.А.</i> Нормальные и квазинормальные формы для полуклассических лазерных уравнений с дифракцией . . . . .	59
<i>Мчедлова Е.С., Трубецков А.Д.</i> Процессы самоорганизации как результат нелинейных взаимодействий в системах биологических осцилляторов . . . . .	73

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

<i>Дубинов А.Е., Селемир В.Д.</i> Прохождение плоских электромагнитных волн через стационарные фрактальные среды . . . . .	82
<i>Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н.</i> Азбука синергетики на дисплее учебного компьютера . . . . .	90

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA**

<i>Езерский А.Б.</i> Самоорганизация в экспериментах Фарадея по параметрическому возбуждению капиллярной ряби . . . . .	98
<b>АНОНС . . . . .</b>	106-110

*Благодарим Российский Фонд Фундаментальных Исследований за поддержку нашего журнала*

CONTENTS

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Periodic solutions of Gurel - Rossler model <i>S.D. Tulebaev, M.Kh. Kharrasov</i> . . .	3
Complex signal passing through the nonlinear transmission line on magneto-static waves. <i>D. Solovey, U. Sharaevsky</i> . . . . .	11
Three kerr nonlinear mediums in the ring interferometer: the importance of non-identity. <i>A.I. Arshinov, R.R. Mudarisov, B.N. Poizner</i> . . . . .	20
A full-scale simulation of a pulsed vircator-based phased array. <i>B.V. Alekhin, A.E. Dubinov, V.D. Selemir, N.V. Stepanov, O.A. Shamro, K.V. Shibalko</i> . . . . .	28

DETERMINISTIC CHAOS

Analysing and controlling chaos in spin-wave instabilities. <i>H. Benner, R. Henn, F. Rödelsperger, G. Wiese</i> . . . . .	32
--	----

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

Nonlinear deformation waves in cylindrical shells. <i>A.I. Zemlyanukhin, L.I. Morigilevich</i> . . . . .	52
--	----

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Normal and quasi-normal forms of the semiclassical laser equations with diffraction. <i>E.V. Grigorieva, S.A. Kashchenko</i> . . . . .	59
Self-organization as a result of nonlinear interactions in large groups of biological oscillators. <i>E.S. Mchedlova, A.D. Trubetskov</i> . . . . .	73

METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS

Description of flat electromagnetic waves through stationary fractal media. <i>A.E. Dubinov, V.D. Selemir</i> . . . . .	66
The ABC of synergetics is displayed on the computer screen. <i>R.R. Mudarisov, B.N. Poizner</i> . . . . .	90

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

Self-organization in Faraday's experiments on parametric excitation of capillary ripples. <i>A.B. Ezersky</i> . . . . .	98
---	----

ANNOUNCEMENTS . . . . .	106-110
-------------------------	---------



## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ГАРЕЛА - РОССЛЕРА

*С.Д. Тулебаев, М.Х. Харрасов*

На основе асимптотических методов Боголюбова для динамической модели Гарела - Росслера показана возможность автоколебательных режимов и существование последовательности бифуркаций удвоения периода. Качественные результаты подтверждаются численными исследованиями.

В современной теории динамических систем большой интерес представляет исследование механизмов и путей развития автостохастических процессов в нелинейных системах различной природы, допускающих математическую формализацию с помощью, например, систем дифференциальных уравнений [1-4].

Исследования конкретных динамических систем показали, что наиболее распространенный путь перехода к хаотическому режиму связан с последовательностью бифуркаций удвоения периода [1, 2]. В этом случае существует важная закономерность в распределении бифуркационных параметров системы, установленная при исследовании некоторых одномерных отображений [5].

Заметим, что возможность появления решений с удвоенным периодом в нелинейных системах рассматривалась еще Н.Н.Боголюбовым в его классических работах по асимптотическим методам в нелинейной механике [6]. Эти методы основаны на принципе усреднения и весьма эффективны при исследовании поведения нелинейных систем.

Здесь, используя основополагающие идеи Н.Н. Боголюбова, мы ставим целью показать возможность одночастотного колебательного режима и последовательность бифуркаций удвоения периода в нелинейной модели Гарела - Росслера [7]. Данная модель предложена в химической кинетике и допускает автостохастическое поведение.

Рассмотрим автономную динамическую систему, описываемую следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - ax_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - x_2 + x_2x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3/(x_3 + c), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mu = (a, b, c)$  - совокупность параметров системы ( $a > 0, b > 0, c > 0$ ).

Покажем, что в системе (1) возможны автоколебательные режимы, существует последовательность бифуркаций удвоения периода и предельное множество в пространстве параметров.

Заметим, что система (1) имеет единственное нетривиальное стационарное решение

$$\begin{aligned} x_{10} &= \{a[1 - (ab)^{1/2}] / [(a+b)(1 - (ab)^{1/2} + c)]\}^{1/2}, & x_{20} &= \{b[1 - (ab)^{1/2}] / [(a+b)(1 - (ab)^{1/2} + c)]\}^{1/2}, \\ & & x_{30} &= 1 - (ab)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

область существования которого задается условием

$$(1+c)^2/b < a < 1/b.$$

Матрица линеаризованной системы и ее характеристический многочлен имеют соответственно вид

$$A = \begin{vmatrix} 1 - x_{30} & -a & -x_{10} \\ b & x_{30} - 1 & x_{20} \\ 2x_{10} & 2x_{20} & -c/(x_{30} + c)^2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$D(\lambda, \mu) = \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3,$$

$$\begin{aligned} \text{где } \alpha_1 &= c/[1 - (ab)^{1/2} + c]^2, & \alpha_2 &= 2(a-b)[1 - (ab)^{1/2}] / [(a+b)(1 - (ab)^{1/2} + c)], \\ \alpha_3 &= 4(ab)^{1/2}[1 - (ab)^{1/2}] / [1 - (ab)^{1/2} + c]. \end{aligned}$$

Для того, чтобы решение (2) было устойчивым, необходимо и достаточно выполнение следующих условий Рауса - Гурвица:

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \Delta = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 > 0.$$

В силу определения параметров системы (1) достаточно проанализировать лишь последнее из них. Тем самым определяется область существования и устойчивости стационарного решения.

Обозначим корни характеристического уравнения через  $\lambda_k$ , где  $k=1,2,3$ , и рассмотрим случай

$$\lambda_1 = \lambda_1^* < 0, \lambda_2 = \lambda_3^* = \nu + i\omega. \quad (4)$$

Здесь  $\nu$  и  $\omega$  вещественные, а звездочка здесь и далее обозначает комплексное сопряжение. В качестве собственных векторов матрицы (3) выберем вектор-столбец

$$U^{(k)} = \begin{pmatrix} -x_{10}[\lambda_k + 2(ab)^{1/2}] \\ x_{20}[\lambda_k - 2(ab)^{1/2}] \\ \lambda_k^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

и определим такой базис  $V^{(k)}$  ( $k=1,2,3$ ) пространства дуального к  $U^{(k)}$ , что для системы векторов  $U^{(k)}$  и  $V^{(k)}$  имеет место условие

$$(U^{(k)}, V^{(m)}) = \delta_{km},$$

где скалярное произведение определено таким образом:

$$(U, V) = \sum_n U_n V_n.$$

Тогда найдем

$$V^{(l)} = W^{-1}[U^{(k)} * V^{(l)}], \quad (6)$$

где в векторном произведении  $j, k, l = 1, 2, 3$  определены в циклическом порядке. Здесь

$$W = -W^* = 8ab[1 - (ab)^{1/2}]\{(\lambda_1 - \nu)^2 + \omega^2\}i\omega / [(a+b)(1 - (ab)^{1/2} + c)].$$

Рассмотрим теперь решения системы (1) вблизи особой точки (2). Положим  $x = x_0 + u_\epsilon$  и представим малый член  $u_\epsilon$  в виде ряда

$$u_\epsilon = \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) \bar{U}^{(k)}.$$

Тогда после стандартных преобразований уравнений (1), учитывая определение матрицы (3), векторов (6) и опуская громоздкие выкладки, получим для неизвестных величин  $\xi_k$  ( $k=1,2,3$ ) уравнения

$$\begin{aligned} \xi_k(t) = & \lambda_k \xi_k + b_1^{(k)} \xi_1^2 + b_2^{(k)} \xi_2^2 + b_3^{(k)} \xi_3^2 + b_{12}^{(k)} \xi_1 \xi_2 + b_{13}^{(k)} \xi_1 \xi_3 + b_{23}^{(k)} \xi_2 \xi_3 + c_1^{(k)} \xi_1^3 + \\ & + c_2^{(k)} \xi_2^3 + c_3^{(k)} \xi_3^3 + c_{122}^{(k)} \xi_1 \xi_2^2 + c_{133}^{(k)} \xi_1 \xi_3^2 + c_{233}^{(k)} \xi_2 \xi_3^2 + c_{112}^{(k)} \xi_1^2 \xi_2 + c_{113}^{(k)} \xi_1^2 \xi_3 + \\ & + c_{223}^{(k)} \xi_2^2 \xi_3 + c_{123}^{(k)} \xi_1 \xi_2 \xi_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b_j^{(s)} = & \sum_{j,k=1}^3 (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) U_j^{(s)} U_k^{(s)}; & b_{lm}^{(s)} = & \sum_{j,k=1}^3 (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(l)} U_k^{(m)} + U_j^{(m)} U_k^{(l)}); \\ c_l^{(s)} = & \sum_{j,k,m}^3 (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) U_j^{(l)} U_k^{(l)} U_m^{(l)}; \\ c_{122}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(1)} U_k^{(2)} U_l^{(2)} + U_j^{(2)} U_k^{(1)} U_l^{(2)} + U_j^{(2)} U_k^{(2)} U_l^{(1)}); \\ c_{133}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(1)} U_k^{(3)} U_l^{(3)} + U_j^{(3)} U_k^{(1)} U_l^{(3)} + U_j^{(3)} U_k^{(3)} U_l^{(1)}); \\ c_{233}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(2)} U_k^{(3)} U_l^{(3)} + U_j^{(3)} U_k^{(2)} U_l^{(3)} + U_j^{(3)} U_k^{(3)} U_l^{(2)}); \\ c_{112}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(1)} U_k^{(1)} U_l^{(2)} + U_j^{(1)} U_k^{(2)} U_l^{(1)} + U_j^{(2)} U_k^{(1)} U_l^{(1)}); \\ c_{223}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(2)} U_k^{(2)} U_l^{(3)} + U_j^{(2)} U_k^{(3)} U_l^{(2)} + U_j^{(3)} U_k^{(2)} U_l^{(2)}); \\ c_{123}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(1)} U_k^{(2)} U_l^{(3)} + U_j^{(1)} U_k^{(3)} U_l^{(2)} + U_j^{(2)} U_k^{(1)} U_l^{(3)} + U_j^{(2)} U_k^{(3)} U_l^{(1)} + \\ & + U_j^{(3)} U_k^{(1)} U_l^{(2)} + U_j^{(3)} U_k^{(2)} U_l^{(1)}); \\ \mathbf{a}_{jk} = & \text{col}(a_{1jk}, a_{2jk}, a_{3jk}), & \mathbf{a}_{jkl} = & \text{col}(a_{1jkl}, a_{2jkl}, a_{3jkl}), \\ \mathbf{a}_{ikj} = & (1/2) \partial^2 F_i(x_0, \mu) / \partial x_j \partial x_k, & \mathbf{a}_{ijkl} = & (1/3!) \partial^3 F_i(x_0, \mu) / \partial x_j \partial x_k \partial x_l. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $F_i$  - правые части уравнений (1).

Принимая во внимание выражения (5) и (6), для коэффициентов (8) уравнений (7) в случае (4) можно установить следующие соотношения симметрии

$$\begin{aligned} b_1(1) = b_1(1)^* & & b_3(2) = b_2(2)^* & & b_3(1) = b_2(1)^* & & b_1(3) = b_1(2)^* \\ b_2(3) = b_3(2)^* & & b_3(2) = b_2(3)^* & & b_{12}(3) = b_{13}(2)^* & & b_{13}(3) = b_{12}(2)^* \\ b_{33}(1) = b_{22}(1)^* & & b_{23}(3) = b_{23}(2)^* & & b_{13}(1) = b_{12}(1)^* & & b_{23}(1) = b_{23}(1)^* \\ c_{123}(1) = c_{123}(1)^* & & c_{123}(3) = c_{123}(2)^* & & c_{133}(1) = c_{122}(1)^* & & c_{133}(3) = c_{122}(2)^* \\ c_{113}(1) = c_{112}(1)^* & & c_{233}(3) = c_{223}(2)^* & & c_{233}(1) = c_{223}(1)^* & & c_{113}(3) = c_{112}(2)^* \\ c_{223}(3) = c_{233}(2)^* & & c_{122}(3) = c_{133}(2)^* & & c_{112}(3) = c_{113}(2)^* & & c_{123}(3) = c_{213}(3) = c_{321}(3). \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда следует, что третье уравнение в (7) является комплексно-сопряженным второму, то есть  $\xi_3 = \xi_2^*$ .

Рассмотрим подробно бифуркацию стационарного решения. Известно, что граница области устойчивости стационарного состояния определяется из уравнения

$$D(i\omega, \mu) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) позволяет определить величины  $\omega$  и  $\lambda_1$  в точке бифуркации и дает  $\omega^2 = \alpha_2 > 0$ ,  $\lambda_1 = -\alpha_1 < 0$ .

Аналогично [8] можно установить, что в изучаемой системе, при переходе через границу устойчивости решения (2) происходит бифуркация рождения предельного цикла. Найдем решения системы (7), которую с учетом (9) запишем таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) = & \lambda_1 \xi_1 + b_1^{(1)} \xi_1^2 + b_2^{(1)} \xi_2^2 + b_2^{(1)*} \xi_3^2 + b_{12}^{(1)} \xi_1 \xi_2 + b_{13}^{(1)*} \xi_1 \xi_2^* + b_{23}^{(1)} |\xi_2|^2 + \\ & + c_1^{(1)} \xi_1^3 + c_2^{(1)} \xi_2^3 + c_3^{(1)*} \xi_2^* \xi_3 + c_{122}^{(1)} \xi_1 \xi_2^2 + c_{122}^{(1)*} \xi_1 \xi_2^* \xi_2 + c_{223}^{(1)} \xi_2 |\xi_2|^2 + \\ & + c_{112}^{(1)} \xi_1^2 \xi_2 + c_{112}^{(1)*} \xi_1^2 \xi_2^* + c_{223}^{(1)*} \xi_2^* |\xi_2| + c_{123}^{(1)} \xi_1 |\xi_2|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2(t) = & \lambda_2 \xi_2 + b_1^{(2)} \xi_1^2 + b_2^{(2)} \xi_2^2 + b_3^{(2)} \xi_2^* \xi_3 + b_{12}^{(2)} \xi_1 \xi_2 + b_{13}^{(2)} \xi_1 \xi_2^* + b_{23}^{(2)} |\xi_2|^2 + \\ & + c_1^{(2)} \xi_1^3 + c_2^{(2)} \xi_2^3 + c_3^{(2)} \xi_2^* \xi_3 + c_{122}^{(2)} \xi_1 \xi_2^2 + c_{133}^{(2)} \xi_1 \xi_2^* \xi_2 + c_{233}^{(2)} \xi_2^* |\xi_2|^2 + \\ & + c_{112}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2 + c_{113}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2^* + c_{223}^{(2)} \xi_2 |\xi_2|^2 + c_{123}^{(2)} \xi_1 |\xi_2|^2. \end{aligned}$$

Теперь полагаем, что  $\lambda_2$  имеет положительную реальную часть

$$\lambda_2 = \lambda' + i\omega, \quad \lambda' > 0, \quad \lambda_1 < 0.$$

Представив комплексные коэффициенты этих уравнений в виде

$$\begin{aligned} b_j^{(s)} &= |b_j^{(s)}| \exp(i\beta_j^{(s)}), & c_j^{(s)} &= |c_j^{(s)}| \exp(i\gamma_j^{(s)}), \\ b_{jk}^{(s)} &= |b_{jk}^{(s)}| \exp(i\beta_{jk}^{(s)}), & c_{jk}^{(s)} &= |c_{jk}^{(s)}| \exp(i\gamma_{jk}^{(s)}), \\ b_{jkl}^{(s)} &= |b_{jkl}^{(s)}| \exp(i\beta_{jkl}^{(s)}), & c_{jkl}^{(s)} &= |c_{jkl}^{(s)}| \exp(i\gamma_{jkl}^{(s)}), \end{aligned}$$

решение системы (11) будем искать в форме

$$\xi_j(t) = r_j(t) \exp(i\varphi_j(t)), \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

После простых преобразований находим

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 = & \lambda_1 r_1 + |b_1^{(1)}| r_1^2 \cos(\varphi_1 + \beta_1^{(1)}) + |b_2^{(1)}| r_2^2 [\cos(2\varphi_2 - \varphi_1 + \beta_2^{(1)}) + \cos(2\varphi_2 + \varphi_1 + \beta_2^{(1)})] + \\ & + |b_{12}^{(1)}| r_1 r_2 [\cos(\varphi_2 + \beta_{12}^{(1)}) + \cos(\varphi_2 - \beta_{12}^{(1)})] + |b_{23}^{(1)}| r_2^2 \cos(\beta_{23}^{(1)} - \varphi_1) + |c_1^{(1)}| r_1^3 \cos(2\varphi_1 + \\ & + \gamma_2^{(1)}) + |c_2^{(1)}| r_2^3 [\cos(3\varphi_2 - \varphi_1 + \gamma_2^{(1)}) + \cos(3\varphi_2 + \varphi_1 + \gamma_2^{(1)})] + |c_{122}^{(1)}| r_1 r_2^2 [\cos(2\varphi_2 + \\ & + \gamma_{122}^{(1)}) + \cos(2\varphi_2 - \gamma_{122}^{(1)})] + |c_{112}^{(1)}| r_1^2 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \gamma_{122}^{(1)}) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \\ & - \gamma_{122}^{(1)})] + |c_{223}^{(1)}| r_2^3 [\cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \gamma_{223}^{(1)}) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \gamma_{223}^{(1)})] + |c_{123}^{(1)}| r_1 r_2^2 \cos \gamma_{123}^{(1)}; \\ \dot{\varphi}_1 = & |b_1^{(1)}| r_1 \sin(\varphi_1 + \beta_1^{(1)}) + |b_2^{(1)}| (r_2^2 / r_1) [\sin(2\varphi_2 - \varphi_1 + \beta_2^{(1)}) - \sin(2\varphi_2 + \varphi_1 + \beta_2^{(1)})] + \\ & + |b_{23}^{(1)}| (r_2^2 / r_1) \sin(\beta_{23}^{(1)} - \varphi_1) + |c_1^{(1)}| r_1^2 \sin(2\varphi_1 + \gamma_1^{(1)}) + |c_2^{(1)}| (r_2^3 / r_1) [\sin(3\varphi_2 - \varphi_1 + \gamma_2^{(1)}) - \\ & - \sin(3\varphi_2 + \varphi_1 + \gamma_2^{(1)})] + |c_{223}^{(1)}| (r_2^3 / r_1) [\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \gamma_{223}^{(1)}) - \sin(\varphi_2 + \varphi_1 + \gamma_{223}^{(1)})] + \\ & + |c_{112}^{(1)}| r_1 r_2 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \gamma_{122}^{(1)}) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma_{122}^{(1)})] + |c_{123}^{(1)}| r_2^2 \sin \gamma_{123}^{(1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что полученные уравнения допускают решение  $\dot{\varphi}_1=0$  и, следовательно, можно выбрать  $\varphi_1=0$ . Тогда, имея ввиду (9), получим

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 = & \lambda_1 r_1 + b_1^{(1)} r_1^2 + 2|b_2^{(1)}| r_2^2 \cos(2\varphi_2 + \beta_2^{(1)}) + 2|b_{12}^{(1)}| r_1 r_2 \cos(\varphi_2 + \beta_{12}^{(1)}) + |b_{23}^{(1)}| r_2^2 + \\ & + c_1^{(1)} r_1^3 + 2|c_2^{(1)}| r_2^3 \cos(3\varphi_2 + \gamma_2^{(1)}) + 2|c_{122}^{(1)}| r_1 r_2^2 \cos(2\varphi_2 + \gamma_{122}^{(1)}) + \\ & + 2|c_{112}^{(1)}| r_1^2 r_2 \cos(\varphi_2 + \gamma_{112}^{(1)}) + 2|c_{223}^{(1)}| r_2^3 \cos(\varphi_2 + \gamma_{223}^{(1)}) + c_{123}^{(1)} r_1 r_2^2, \\ \dot{\varphi}_1 = & 0. \end{aligned} \quad (13a)$$

Для нахождения приближенных решений системы (11) усредним эти уравнения по углу  $\varphi_2$  в интервале  $(0, 2\pi)$ . Получим

$$\begin{aligned} \overline{\dot{r}_1} = & \lambda_1 r_1 + b_1^{(1)} r_1^2 + 2b_{23}^{(1)} r_2^2 + c_1^{(1)} r_1^3 + c_{123}^{(1)} r_1 r_2^2, \\ \overline{\dot{\varphi}_1} = & 0. \end{aligned} \quad (13b)$$

Аналогичные выкладки для второго уравнения из (11) дают

$$\begin{aligned} \overline{\dot{r}_2} = & \lambda_2 r_2' + |b_{12}^{(2)}| r_1 r_2 \cos \beta_{12}^{(2)} + |c_{223}^{(2)}| r_2^3 \cos \gamma_{223}^{(2)} + |c_{112}^{(2)}| r_1^2 r_2 \cos \gamma_{112}^{(2)}, \\ \overline{\dot{\varphi}_2} = & \omega + |b_{12}^{(2)}| r_1 \sin \beta_{223}^{(2)} + |c_{223}^{(2)}| r_2^2 \cos \gamma_{223}^{(2)} + |c_{112}^{(2)}| r_1^2 \sin \gamma_{112}^{(2)}. \end{aligned}$$

Полученные уравнения допускают стационарное решение  $r_{10} \neq 0$ ,  $r_{20} \neq 0$ . При этом для перенормированной частоты имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 = \omega + \Delta\omega = \Omega, \quad \varphi_2 = \Omega t + \theta_0, \quad \theta_0 = \text{const}, \\ \Delta\omega = |b_{12}^{(2)}| r_1 \sin \beta_{223}^{(2)} + |c_{223}^{(2)}| r_2^2 \cos \gamma_{223}^{(2)} + |c_{112}^{(2)}| r_1^2 \sin \gamma_{112}^{(2)}. \end{aligned}$$

Окончательно искомое решение записывается в форме

$$u_{k0}(t) = x_{10} + r_{10} u_k^{(1)} + r_{20} \{u_k^{(2)} \exp[i(\Omega t + \theta_0)] + \text{к.с.}\}. \quad (14)$$

Данное решение описывает автоколебательный режим с периодом  $T_1 = 2\pi/\Omega$ . Покажем ниже, что в рассматриваемой системе возможны периодические колебания с удвоенным периодом  $T_2 = 2T_1$ . Вводя оператор усреднения по времени  $M_{T_n}$

$$M_{T_n} f(x, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T_n} f(x, \tau) d\tau \equiv \langle f(x, t) \rangle_n$$

и произведя вариацию уравнения (1) вблизи периодического решения (14):  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \mathbf{x}$ , напишем точное уравнение для малых колебаний ( $x \sim \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \ll 1$ )

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \langle A_1(t) \rangle_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1} (A_1(t) - \langle A_1(t) \rangle_1) \mathbf{x}, \quad (15)$$

где 
$$A_1(t) = \begin{vmatrix} 1 - x_{30}(t) & -a & -x_{10}(t) \\ b & x_{30}(t) - 1 & x_{20}(t) \\ 2x_{10}(t) & 2x_{20}(t) & -c/(x_{30}(t) + c)^2 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \text{col}(-x_1 x_3, x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2 - x_3/(x_3 + c)).$$

Матрица  $\langle A_1(t) \rangle_1$  получена путем усреднения элементов матрицы  $A_1(t)$ . Наряду с уравнением (15), рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \langle A_1(t) \rangle_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (16)$$

Допустим, что в соответствующей линейной системе возможен одночастотный колебательный режим с частотой  $\omega/2$ . Для этого необходимо выполнение условия

$$D(\lambda^{\sim}, \mu^{\sim}) = \lambda^{\sim} + \alpha_1^{\sim} \lambda^{\sim} + \alpha_2^{\sim} \lambda^{\sim} + \alpha_3^{\sim} = 0,$$

где перенормированные значения коэффициентов  $\alpha_j^{\sim}$ ,  $j = 1, 2, 3$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\sim} &= c / (\langle x_{30}(t) \rangle_1 + c)^2, & \alpha_2^{\sim} &= \langle x_{30}(t) \rangle_1^2 + ab + 1 + 2\langle x_{10}(t) \rangle_1^2 - 2\langle x_{20}(t) \rangle_1^2, \\ \alpha_3^{\sim} &= 2(a+b)\langle x_{10}(t) \rangle_1 \langle x_{20}(t) \rangle_1 - 2(\langle x_{30}(t) \rangle_1 - 1) + (\langle x_{10}(t) \rangle_1^2 + \langle x_{20}(t) \rangle_1^2) + \\ &+ [ab - (1 - \langle x_{30}(t) \rangle_1)^2] c / (\langle x_{30}(t) \rangle_1 + c)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Причем собственные значения матрицы  $\langle A_1(t) \rangle_1$  должны задаваться выражениями

$$\lambda_1^{\sim} = -\alpha_1^{\sim} < 0, \quad \lambda_{2,3}^{\sim} = \pm i\omega/2 = \pm i(\alpha_2^{\sim})^{1/2}. \quad (18)$$

Тогда вместо величин, определенных при рассмотрении бифуркации стационарной точки, нужно взять их перенормированные значения согласно (17), (18). Следовательно, при  $\lambda_2^{\sim} = \lambda_3^{\sim} = \pm i\omega/2$  ( $\lambda_2^{\sim} > 0$ ) решение системы (16), если не интересоваться переходными решениями, представляется двухпараметрическим семейством решений

$$u_k = r_{20}^{\sim} u_k^{\sim(2)} \exp i\psi + r_{20}^{\sim} u_k^{\sim(2)*} \exp(-i\psi), \quad (19)$$

где  $2\psi = \Omega^{\sim} t + \theta^{\sim}$ ,  $\theta^{\sim} = \text{const}$ ,  $\Omega^{\sim} = \omega^{\sim} + 2\Delta\omega^{\sim}$ .

Положим далее  $\Omega^{\sim} = \Omega$  и будем интересоваться решением системы (15). Будем считать величины  $r_{20}^{\sim}$  и  $\theta^{\sim}$  в (19) функциями времени и воспользуемся для них стандартными разложениями по степеням малого параметра. Тогда, если ограничиться рамками теории первого приближения, указанные величины являются постоянными. Действительно, в этом случае правая часть (15) не содержит основной гармоник по углу  $\psi$ . Итак, в первом приближении, в качестве искомого решения можно взять выражение (19). Обратим внимание на следующий факт: поскольку в силу (13) величины  $x_{k0}$  и  $\langle x_{k0}(t) \rangle$  совпадают с точностью порядка  $\epsilon^2$ , то новый предельный цикл периода  $2T_1$  находится на малом расстоянии от старого. Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место бифуркация удвоения периода. Нахождение подобных решений, соответствующих одночастотным колебательным состояниям системы с периодами  $T_n = 2^{n-1}T_1$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ , может быть последовательно продолжено. Можно также показать, что

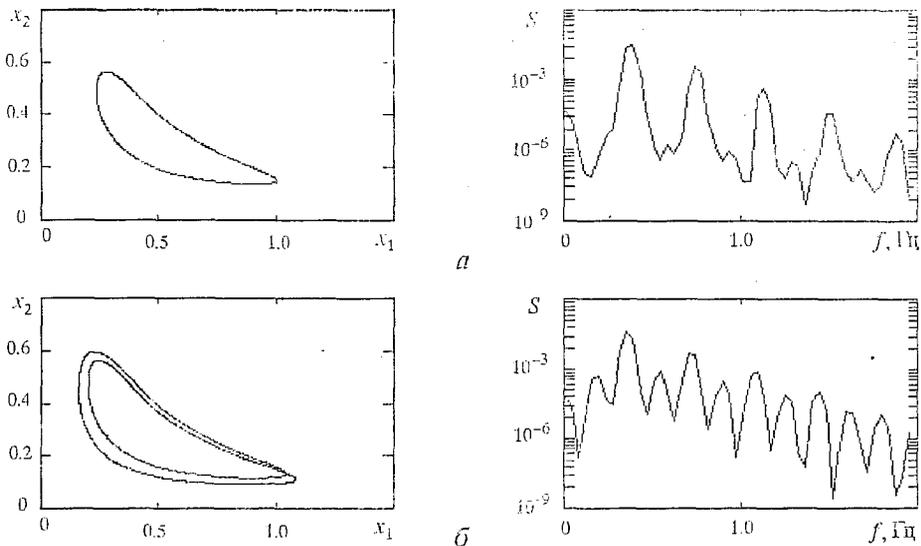


Рис. 1. Бифуркация удвоения периода: а -  $a=0.1$ ,  $b=0.048$ ,  $c=1.0$ ; б -  $a=0.1$ ,  $b=0.051$ ,  $c=1.0$

существует предельное множество бифуркационных значений параметров. Таким образом, полученные результаты указывают на возможность автостохастических решений модели (1).

Нами были проведены численные исследования модели (1) с использованием методов отображения Пуанкаре и спектрального анализа (дискретное преобразование Фурье). В основу численного анализа был положен алгоритм Рунге - Кутты - Фельберга 4(5) порядка. В результате были подтверждены выводы качественного характера, а именно:

1) автоколебательные режимы возникают при переходе через область

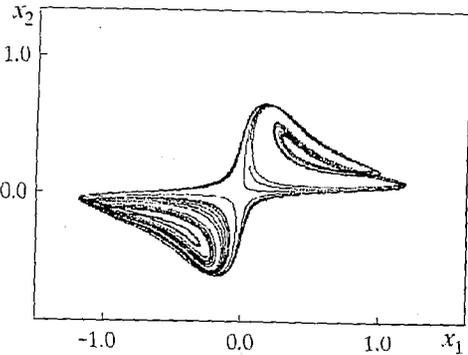
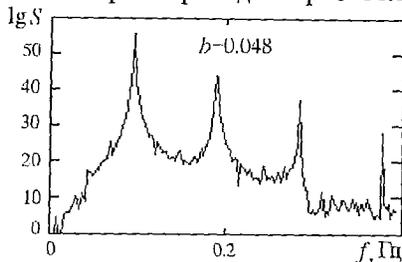


Рис. 2. Странный аттрактор модели Гарела - Росслера:  $a=0.1, b=0.0523, c=1.0$

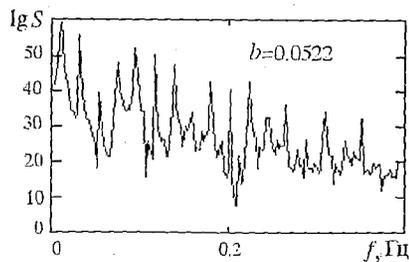
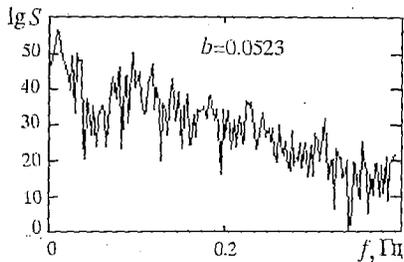
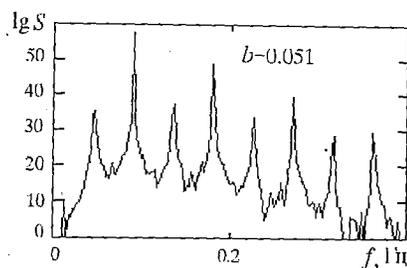


Рис. 3. Последовательность бифуркаций удвоения периода: появление в спектре кратных гармоник;  $a=0.1, c=1.0$

устойчивости стационарного решения (2) в пространстве параметров системы; обнаружено несколько предельных циклов, например, при значениях управляющих параметров  $a=0.2, b=0.05, c=1.0$  или  $a=5.0, b=1.15, c=1.0$ ;

2) обнаружено явление бифуркации удвоения периода предельного цикла; факт бифуркации дополнительно фиксируется появлением в спектре гармоники с частотой, вдвое меньшей основной (рис. 1);

3) в системе (1) возможен автостохастический режим; получен динамический хаос при значениях управляющих параметров  $a=0.1, b=0.0523, c=1.0$  (рис. 2). Переход к нему, как и предполагалось, совершается через последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 3). Кроме того, при переходе параметра  $b$  в

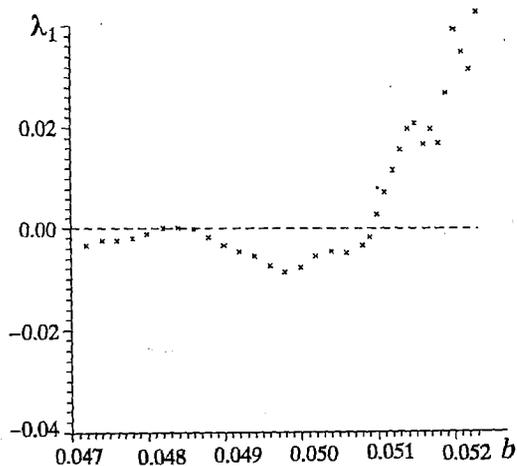


Рис. 4. Зависимость максимального показателя Ляпунова от параметра  $b$ :  $a=0.1, c=1.0$

закритическую область максимальный ляпуновский показатель становится больше нуля (рис. 4), что является дополнительным аргументом в пользу существования хаоса.

В заключение авторы выражают благодарность В.В.Алексееву за оказанную помощь.

### Библиографический список

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века. Развитие и перспективы. М.:Наука,1985.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука,1990.
3. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны. Диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука,1987.
4. Alekseev V.V., Kornilovsky A.N. Ecosystem stochasticity model // Ecol. Model. 1985. Vol.28. P.217.
5. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем //УФН. 1983. Т.141, вып.2. С.343.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.:Наука,1974.
7. Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические реакции. М.:Мир,1986.
8. Алексеев В.В., Харрасов М.Х. О последовательности бифуркаций удвоения периода в моделях типа Росслера // ТМФ. 1991. Т. 88, № 1.С.96.

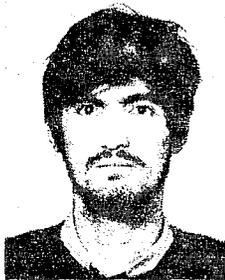
Башкирский государственный  
университет

Поступила в редакцию 18.05.94  
после переработки 02.02.95

## PERIODIC SOLUTIONS OF GUREL - ROSSLER MODEL

*S.D. Tulebaev, M.Kh. Kharrassov*

On the basis of the Bogoljubov's asymptotic methods the existence of self-oscillating modes and a sequence of the period doubling bifurcation in dynamical Gurel - Rossler model are demonstrated. Qualitative results are confirmed by numerical calculations.



*Тулєбаев Салават Дильмухаметович* - родился в 1970 году в Уфе. В 1993 году окончил физический факультет Башкирского государственного университета. С 1993 года - аспирант кафедры теоретической физики.



*Харрасов Мухаммед Хадисович* родился в 1948 году. После окончания физико-математического факультета (1971) работает в Башкирском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1977). С 1988 года - доцент кафедры теоретической физики. С ноября 1991 года по настоящее время - докторант физического факультета МГУ.



## ПРОХОЖДЕНИЕ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНУЮ ЛИНИЮ ПЕРЕДАЧИ НА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

*Д.В. Соловей, Ю.П. Шараевский*

Проанализированы особенности прохождения сложных сигналов, включая шумовые, через пеллшейную линию передачи, нагруженную на ферритовую пленку, в которой возбуждается магнитостатическая волна (МСВ). Анализ основан на модели, в которой линия передачи представляется как отрезок длиной линии с нелинейным распределенным сопротивлением, обусловленным возбуждением МСВ при различных уровнях входного сигнала. Сигнал на входе линии рассматривается в виде суммы монохроматического и шумового сигналов. Показано, что при превышении величины входного монохроматического сигнала над «пороговым» подавление шума уменьшается и возможно сужение спектра по сравнению со случаем без монохроматического сигнала.

### Введение

Возможность использования устройств на магнитостатических волнах (МСВ) для аналоговой обработки СВЧ сигналов [1,2] делает актуальным вопрос исследования прохождения через них сложных сигналов, включая шумовые. Интересной особенностью, связанной с прохождением сигналов различного уровня мощности, обладает линия передачи, нагруженная на ферритовую пленку, в которой возбуждается поверхностная магнитостатическая волна [2-5]. Линия передачи представляет из себя микрополосковую линию, параллельно которой приложено постоянное магнитное поле  $H_0$ ; вход и выход устройства непосредственно связаны с микрополосковой (рис.1, а). Сигналы с малым уровнем мощности (ниже определенного «порогового» значения), проходя по такой структуре, будут ослабляться сильнее, чем сигналы, уровень мощности которых лежит выше «порога». Поэтому устройства, выполненные на основе подобной линии передачи, получили в литературе название «усилитель отношения сигнал/шум» [3,4] или «шумоподавитель» [2,5,6].

В связи с этим существенный интерес представляют исследования, связанные с прохождением монохроматических и шумовых сигналов различного уровня мощности через указанную нелинейную линию передачи на МСВ. Однако, эти вопросы к настоящему времени практически не изучены. Известно лишь небольшое число экспериментальных работ [3,5,7-9], в которых, в основном, приведены результаты по исследованию влияния сигнала большой мощности на поведение слабого сигнала при возбуждении поверхностных МСВ в зависимости от расстройки по частоте между сигналами.

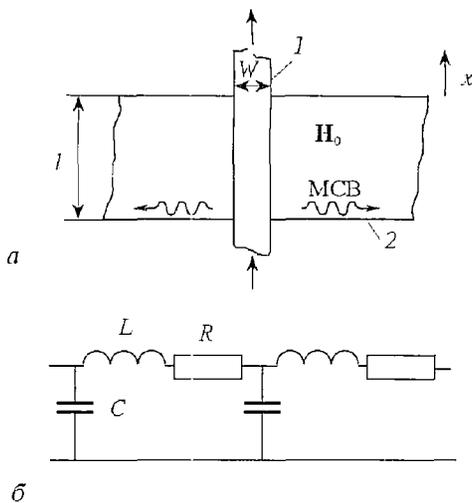


Рис. 1. *a* - нелинейная линия передачи на магнитоэлектрических волнах: 1 - микрополосковая линия, 2 - ферритовая пленка,  $l$  - длина линии,  $W$  - ширина микрополоски; *б* - эквивалентная схема

возникающих в ферритовой пленке при возбуждении поверхностной МСВ, предпринята в [2,10]. Аналогичный подход для расчета характеристики «шумоподавителя» использовался в [11]. Однако применение этой модели даже для анализа одночастотных нелинейных режимов устройства требует громоздких численных расчетов.

В настоящей работе на основе простой нелинейной модели проводится анализ прохождения шумовых сигналов различного уровня мощности через линию передачи на МСВ и рассмотрено влияние монохроматического сигнала большой амплитуды на поведение шумового сигнала. Используемая нелинейная модель была апробирована в [12] при рассмотрении прохождения двух сигналов с различными уровнями мощности.

### Нелинейная модель линии передачи с ферритовой пленкой при возбуждении МСВ

Микрополосковая линия, нагруженная ферритовой пленкой (см. рис. 1, *a*), представляется как длинная линия с распределенными параметрами, потери в которой обусловлены возбуждением МСВ [2]. Эквивалентная схема такой линии приведена на рис.1, *б*. Изменение активной мощности  $P(x)$  в линии вдоль длины описывается уравнением

$$dP/dx = - (R/\text{Re}\check{Z}_0)P(x), \quad (1)$$

где  $R$  - погонное сопротивление;  $\check{Z}_0$  - комплексное волновое сопротивление линии. Введем значение пороговой мощности  $P_{\text{пор}}$ , соответствующее уровню входной мощности в линии, при котором начинается насыщение МСВ за счет параметрических процессов в пленке\*. При входной мощности  $P_{\text{вх}} < P_{\text{пор}}$  и в пренебрежении собственными потерями микрополоски значение  $R$  совпадает со значением  $R_r$ , равным сопротивлению излучения МСВ на единицу длины [2,13].

\* Механизм насыщения МСВ за счет параметрического возбуждения коротковолновых спиновых волн в ферритовой пленке подробно описан в [2].

Предположим, что при  $P_{\text{вх}} \geq P_{\text{пор}}$ , то есть при насыщении МСВ, изменение мощности в линии можно описать уравнением

$$dP/dx = -(R_i/\text{Re}\dot{Z}_0)P_{\text{пор}} = \text{const.} \quad (2)$$

В этом случае, как показывают экспериментальные исследования [2, 6], потери в линии зависят от мощности сигнала и можно считать погонное сопротивление линии нелинейным. Выражение для него в соответствии с (1) и (2) можно записать в виде [12]

$$R = R_i \frac{P_{\text{пор}}}{P(x)} = R_i \frac{I_{\text{пор}}^2}{|I|^2}, \quad (3)$$

где  $|I|$  - амплитуда тока в линии,  $I_{\text{пор}}$  - значение амплитуды, соответствующее пороговой мощности  $P_{\text{пор}} = (I_{\text{пор}}^2 \text{Re}\dot{Z}_0)/2$ . В этом случае нелинейные уравнения для эквивалентной схемы линии запишутся таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} - R(|I|)I, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $L, C$  - погонные индуктивность и емкость,  $R=R_i$  при  $|I| < I_{\text{пор}}$ , а при  $|I| \geq I_{\text{пор}}$   $R$  определяется выражением (3). В результате численного решения системы уравнений (4) с учетом (3) для гармонического сигнала  $I = I(x) \exp(j\omega t)$  получаем, что фаза тока при  $|I| \geq I_{\text{пор}}$  линейно зависит от длины линии и практически не зависит от амплитуды сигнала. Поэтому, считая, что для гармонического сигнала ток в линии изменяется по закону

$$I = |I| \exp(j(\omega t - \beta x)),$$

где  $\omega$  - частота сигнала,  $\beta$  - фазовая постоянная, не зависящая от тока, из (4) получим нелинейное уравнение для амплитуды тока в виде

$$2\beta \frac{d|I|}{dx} = -\omega C R(|I|)|I|, \quad (5)$$

где  $\beta^2 = [\omega^2 C L + \omega C (\omega^2 L^2 + R_i^2)^{1/2}]/2$ . Решение уравнения (5) с учетом (3) приводит к следующим соотношениям для амплитуды тока в линии:

при  $I_0 < I_{\text{пор}}$

$$|I| = I_0 \exp(-\alpha_0 x), \quad \text{для любых } x; \quad (6a)$$

при  $I_0 \geq I_{\text{пор}}$

$$|I| = (I_0^2 - 2\alpha_0 I_{\text{пор}}^2 x)^{1/2}, \quad \text{для } x \leq x^*, \quad x^* = (I_0^2 - I_{\text{пор}}^2)/(2\alpha_0 I_{\text{пор}}^2); \quad (6б)$$

$$|I| = I_{\text{пор}} \exp(-\alpha_0 (x - x^*)), \quad \text{для } x > x^*, \quad (6в)$$

здесь  $I_0 = (2P_{\text{вх}}/\text{Re}\dot{Z}_0)^{1/2}$ ,  $\alpha_0 = R_i/(2\text{Re}\dot{Z}_0)$  - параметр потерь в линии. В соотношениях (6) характеристики МСВ определяются величиной  $R_i$ , а нелинейный механизм насыщения МСВ в пленке - значением  $P_{\text{пор}}$ .

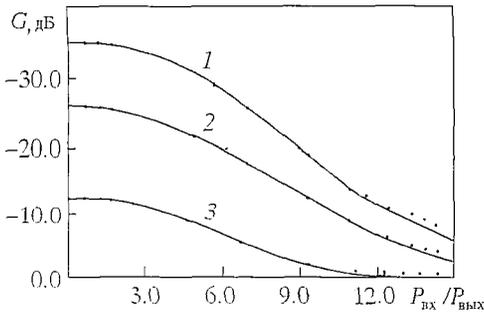


Рис. 2. Теоретические (—) и экспериментальные (•) зависимости коэффициента передачи от величины входной мощности при значениях параметров  $P_{пор} = 7.10^{-2}$  мВт;  $f = 2.9$  ГГц;  $4\pi M_0 = 1750$  Гс;  $W = 50$  мкм и длины линий  $l$  равной: 1 - 48 мм; 2 - 32 мм; 3 - 18 мм; толщина пленки - 10 мкм

соответствие с экспериментом, особенно если уровень входного сигнала не сильно превышает пороговую величину.

На рис. 2 приведены рассчитанные в соответствии с (6) зависимости коэффициента ослабления в линии  $G = -10 \lg(P/P_{вх})$  от уровня входной мощности ( $P_{вх}/P_{пор}$ ) для различных значений длины линии  $l$ . Величина сопротивления излучения  $R_i$  для поверхностной МСВ рассчитывалась по соотношениям работы [2], а  $P_{пор}$  определялось из эксперимента. На этом же рисунке показаны экспериментальные значения коэффициента ослабления в линии. Из сравнения экспериментальных и теоретических зависимостей следует, что предложенное описание нелинейной характеристики линии передачи на магнитостатических волнах в виде (6) дает хорошее

### Теоретическая модель преобразования шумового сигнала

Рассмотрим сигнал на входе исследуемой линии передачи как совокупность детерминированного (регулярный сигнал  $I_0(t)$ ) и случайного (шумовой сигнал  $I_{ш}(t)$ ) процессов, то есть  $I_{вх}(t) = I_0(t) + I_{ш}(t)$ . Предположим, что рассматриваемый случайный процесс стационарный и эргодический; мгновенные значения колебаний подчинены нормальному закону распределения. Тогда двумерная функция распределения для входного процесса в нашем случае будет иметь вид [14]

$$w_2(I_{вх1}, I_{вх2}, t, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2(1-R^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(I_{вх1}-I_{01})^2 - 2R(I_{вх1}-I_{01})(I_{вх2}-I_{02}) + (I_{вх2}-I_{02})^2}{2\sigma_0^2(1-R^2)^{1/2}}\right], \quad (7)$$

где  $I_{вх1} = I_{вх}(t)$ ,  $I_{вх2} = I_{вх}(t+\tau)$ ,  $I_{01} = I_0(t)$ ,  $I_{02} = I_0(t+\tau)$ , а  $R = R(\tau)$  и  $\sigma_0$  - коэффициент корреляции и дисперсия стационарной части случайного процесса, соответственно.

Предположим, что анализируемую линию с потерями можно рассматривать как четырехполюсник, состоящий из двух элементов, один из которых представляет из себя линейную линию передачи, а на другом происходит безынерционное нелинейное преобразование сигнала. Такой подход, в частности, широко использовался при анализе прохождения многочастотных и шумовых сигналов через распределенные СВЧ усилители (см. например, [15;16]). В рассматриваемом случае нелинейная характеристика безынерционного элемента описывается соотношением (6).

Далее будем считать, что шумовой сигнал на входе достаточно узкополосный. Узкополосность сигнала будет определяться не только медленностью изменения его огибающей и фазы, но и независимостью от частоты нелинейных характеристик линии передачи во всей рассматриваемой полосе частот.

Пусть нелинейная характеристика линии передачи описывается функцией  $I = f(I_{вх})$ ; в этом случае корреляционная функция на выходе системы с учетом (7) запишется следующим образом:

$$B(\tau, t) = \frac{1}{2\pi(1-R^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(I_1) f(I_2) \exp\left[-\frac{(I_1 - \alpha_1)^2 - 2R(I_1 - \alpha_1)(I_2 - \alpha_2) + (I_2 - \alpha_2)^2}{2(1-R^2)^{1/2}}\right] dI_1 dI_2, \quad (8)$$

где  $I_{1,2} = I_{вх1,2}/\sigma_0$ ,  $\alpha_{1,2} = I_{01,2}/\sigma_0$ .

Для вычисления интегралов в (8) введем одномерные функции распределения типа

$$w_{1,2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(I_{1,2} - \alpha_{1,2})^2}{2}\right]$$

и используем их в качестве весовых при разложении двумерной функции распределения в ряд по полиномам Эрмита [14]

$$w_2(I_1, I_2, t, \tau) = w_{1,2} w_{1,2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} H_n(I_1 - \alpha_1) H_n(I_2 - \alpha_2), \quad (9)$$

где  $H_n$  - полиномы Эрмита. Введя обозначение

$$C_{n,2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(I_{1,2}) H_n(I_{1,2} - \alpha_{1,2}) w_{1,2} dI_{1,2},$$

выражение (8) с учетом (9) можно представить в виде

$$B(\tau, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n1} C_{n2} \frac{R^n}{n!}. \quad (10)$$

Усредним функцию корреляции (10) по времени

$$B^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} B(\tau, t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* \frac{R^n}{n!}, \quad (11)$$

где  $C_n^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_{n1} C_{n2} dt.$

Для вычисления спектра нормального случайного процесса на выходе нелинейной системы используем выражение [14]

$$N(\omega) = 4 \int_0^{\infty} B^*(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (12)$$

Рассмотрим случай, когда на входе действует шумовой сигнал, энергетический спектр которого сосредоточен в достаточно узкой полосе  $\Omega$  вблизи частоты  $\omega_0$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) и симметричен относительно  $\omega_0$ . Каждую реализацию такого случайного процесса можно представить как гармонический сигнал с медленно изменяющимися случайными значениями амплитуды  $I_{ш}^0(t)$  и фазы  $\Phi(t)$

$$I_{ш}(t) = I_{ш}^0(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t)).$$

Для такого шума входную функцию корреляции можно представить в виде [17]

$$R(\tau) = R_0(\tau) \cos(\omega_0 \tau), \quad (13)$$

где  $R_0(\tau)$  - огибающая корреляционной функции. Если задан энергетический спектр  $N_0(\omega)$  входного случайного процесса, то его дисперсия  $\sigma_0^2$  и  $R_0(\tau)$  определяются соотношениями [17]

$$\sigma_0^2 = 2 \int_0^{\infty} N_0(\omega) d\omega, \quad (14a)$$

$$R_0(\tau) = 2 \int_0^{\infty} N_0(\omega_0 - \omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (14b)$$

Проанализируем сначала ситуацию, когда регулярный сигнал на входе нелинейной системы отсутствует, то есть  $\alpha_{1,2}=0$ . В этом случае из (10) для корреляционной функции с учетом (13) получаем выражение

$$B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \frac{R_0^n(\tau)}{n!} \cos^n \omega_0 \tau, \quad (15)$$

где

$$C_n = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(I_{\text{вх}}) H_n(I_{\text{вх}}) \exp\left(-\frac{I_{\text{вх}}^2}{2}\right) dI_{\text{вх}}. \quad (16)$$

Первый член ряда (15) соответствует постоянной составляющей (дискретная часть спектра), а сумма остальных членов - непрерывной части энергетического спектра на выходе. Заменяя в (15) степени косинусов суммой косинусов кратных дуг, можно получить следующее соотношение для корреляционной функции [14]

$$B(\tau) = B_0(\tau) + \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r-1}(\tau) \cos[(2r-1)\omega_0\tau] + \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r}(\tau) \cos(2r\omega_0\tau), \quad (17)$$

где

$$B_0(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^2 R_0^{2n}(\tau)}{n! 2^{2n}}; \quad B_{2r-1}(\tau) = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{C_{2n-1}^2 R_0^{2n-1}(\tau)}{(n-r)!(n+r-1)! 2^{2n-1}}; \quad B_{2r}(\tau) = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{C_{2n}^2 R_0^{2n}(\tau)}{(n-r)!(n+r)! 2^{2n-1}}.$$

В соответствии с (12) и (17) первая непрерывная компонента спектра выходного сигнала вблизи частоты  $\omega_0$  будет иметь вид

$$N_1(\omega) = 4 \int_0^{\infty} B_1(\tau) \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau, \quad (18)$$

где

$$B_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2n-1}^2 R_0^{2n-1}(\tau)}{2^{2n-2} (n-1)! n!}. \quad (19)$$

Для вычисления коэффициентов  $C_n$  согласно (16) используется нелинейная переходная характеристика в виде (6). Численные оценки интеграла (16) с учетом (6) показывают, что в рамках используемой модели можно ограничиться значением верхнего предела на уровне десяти пороговых значений сигнала. Численные значения коэффициентов имеют примерно один и тот же порядок, поэтому ряд (19) является быстро убывающим, причем уже третий член ряда более, чем на порядок, меньше второго. Поэтому в (19) с достаточной степенью точности можно ограничиться двумя членами ряда, то есть

$$B_1(\tau) = C_1^2 R_0(\tau) + \frac{1}{8} C_3^2 R_0^3(\tau). \quad (20)$$

При рассмотрении общего случая, когда на входе системы присутствует регулярный сигнал и шум, необходимо определять коэффициенты  $C_{n1}$  и  $C_{n2}$  и для вычисления корреляционной функции в виде (11) использовать усреднение по периоду регулярного сигнала.

### Результаты расчета

Проанализируем случай, когда на входе нелинейной линии передачи присутствует только шумовой сигнал, спектр которого имеет вид

$$N_0(\omega) = N_0 \exp[-\gamma^2(\omega - \omega_0)^2], \quad (21)$$

где  $N_0$  - значение спектральной составляющей плотности мощности шума при  $\omega = \omega_0$ ;  $\gamma$  - коэффициент, определяющий ширину спектра. Дисперсия (средняя шумовая мощность) и огибающая корреляционной функции вычисляются по формулам (14а) и (14б).

На рис. 3 показана зависимость дисперсии выходного сигнала  $\sigma^2/\sigma_0^2$  от значения дисперсии входного сигнала  $\sigma_0^2$ . На том же рисунке для сравнения приведен коэффициент передачи  $K^2 = |I|^2/I_0^2$ , рассчитанный по соотношениям (6), от величины  $I_0^2$  для регулярного сигнала. Из сравнения кривых видно, что нелинейность для шумового сигнала наступает при меньших значениях интегральной входной мощности, так как для шумового сигнала даже при небольших значениях входной мощности ( $\sigma_0^2$ ) мгновенные значения амплитуды могут достигать значений выше «порогового».

На рис. 4 приведены огибающие спектров входного и выходного шумовых сигналов для двух различных значений  $\sigma_0^2$ . Кривые 3 и 3' на рис. 4 соответствуют случаю, когда огибающие выходных спектров приведены к максимальному значению спектральной плотности шума на выходе. Из результатов расчета видно, что с ростом входной шумовой мощности (с ростом  $\sigma_0^2$ ) подавление шума уменьшается (см. кривые 2 и 2'), и также уменьшается расширение спектра (ср. кривые 1, 3 с 1', 3').

Проанализирован также случай, когда на вход линии передачи подается шумовой сигнал и монохроматический сигнал  $I_0$  на частоте  $\omega_0$ . На рис. 5 показаны огибающие спектров входного и выходного шумовых сигналов в присутствии сигнала  $I_0$ . Кривая 3 на рис. 5 соответствует случаю, когда максимальные значения спектральной плотности мощности совмещены для входного и выходного шумовых сигналов. Из результатов расчета следует, что при  $I_0 < I_{\text{пор}}$  (кривая 2) имеет место значительное подавление шумового сигнала ( $G \approx -15$  дБ при  $\omega = \omega_0$ ), соответствующее фактически подавлению сигнала в линейном режиме ( $G = -8.68 \alpha_0 l \approx -17$  дБ), но в то же время происходит значительное расширение спектра шумового сигнала (ср. кривые 1 и 3). При  $I_0 > I_{\text{пор}}$  (кривая 4) подавление шума значительно уменьшается ( $G \approx -7.22$  дБ при  $\omega = \omega_0$ ) по сравнению со случаем  $I_0 < I_{\text{пор}}$  и практически отсутствует уширение спектра - приведенная огибающая спектра выходного шумового сигнала совпадает с кривой 1.

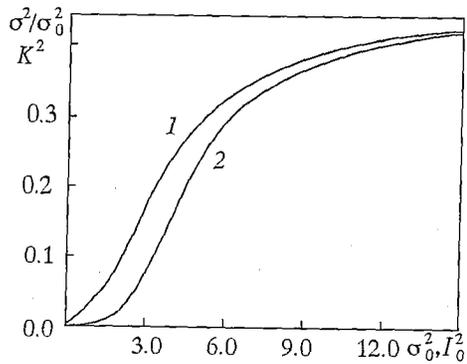


Рис. 3. Зависимость дисперсии выходного сигнала  $\sigma^2/\sigma_0^2$  (1) от величины  $\sigma_0^2$  и коэффициента передачи  $K^2$  (2) для регулярного сигнала от величины входного тока  $I_0^2$  ( $I_0^2 = 2 \sigma_0^2$ )

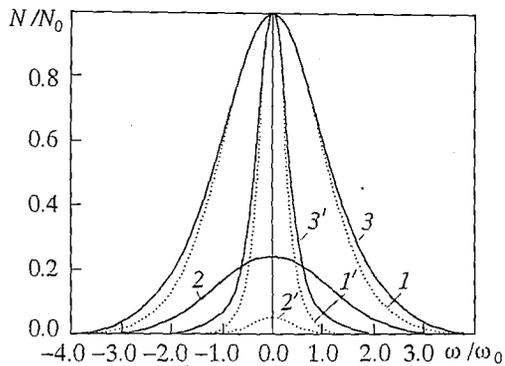


Рис. 4. Огибающие спектров входного (1 и 1') и выходного сигналов (2, 2', 3, 3') при  $\alpha_0 l = 1.998$ ;  $\omega_0 = 2$  ГГц; 1, 2, 3 -  $\sigma_0^2 = 1.88$ ; 1', 2', 3' -  $\sigma_0^2 = 0.5$

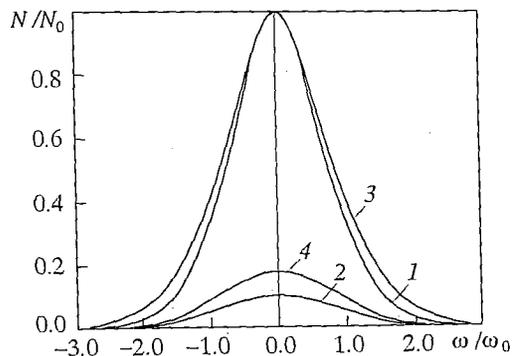


Рис. 5. Огибающие спектров входного (1) и выходного (2, 3, 4) сигналов при  $\alpha_0 l = 1.988$ ;  $\omega_0 = 2$  ГГц; 2, 3 -  $I_0/I_{\text{пор}} = 0.5$ ;  $\sigma_0^2 = 1$ ; 4 -  $I_0/I_{\text{пор}} = 1.5$ ;  $\sigma_0^2 = 0.5$

## Заключение

Проведенный теоретический анализ с использованием простой модели выявил ряд важных особенностей прохождения шумового сигнала через линию передачи с нелинейным сопротивлением, величина которого обратно пропорциональна квадрату амплитуды тока. Переходная характеристика такой линии достаточно хорошо описывает нелинейную амплитудную характеристику устройства на магнитостатических волнах типа «шумоподавитель». Результаты анализа находятся в хорошем качественном соответствии с известными экспериментальными результатами работ [3,5], в которых отмечается возможность сужения спектра шумового сигнала в нелинейном режиме.

Кроме того, полученные результаты носят общий характер, так как отражают особенности прохождения шумовых сигналов через нелинейные устройства, обладающие аналогичной нелинейной динамической характеристикой. В частности, некоторые из особенностей (слабое искажение шумового спектра и насыщение динамической характеристики при малых уровнях шумовой мощности) были отмечены ранее при анализе прохождения шумового сигнала через лучевой усилитель магнетронного типа [17], коэффициент усиления которого в определенном интервале входных мощностей в нелинейном режиме выше, чем в линейном.

## Библиографический список

1. Адам Дж.Д. Аналоговая обработка сигналов с помощью СВЧ ферритов // ТИИЭР. 1988. Т.76, № 2. С.73.
2. Ваишковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1993.
3. Adam J.D., Stitzer S.N. A magnetostatic wave signal- to noise enhancer // J. Appl. Phys. Lett. 1980. Vol.36, № 3. P. 485.
4. Adam J.D. A broadband microwave signal- to noise enhancer // IEEE Trans. on Magnetics. 1980. MAG-16, № 5. P. 1168.
5. Гурзо В.В., Прокушкин В.Н., Рейхель В.В., Шараевский Ю.П. Характеристики аттенюатора с динамической нелинейностью на поверхностных магнитостатических волнах // Изв. вузов. Сер. РЭ. 1986. Т.29, № 9. С. 95.
6. Зубков В.И., Кильдишев В.Н. Влияние мощности СВЧ сигнала на характеристики микрополосковой линии, нагруженной ферритовой пленкой // РЭ. 1988. Т.33, № 5. С.1839.
7. Чивилева О.А., Анисимов А.Н., Гуревич А.Г. и др. Взаимодействие запорогового и слабого сигналов при возбуждении поверхностной магнитостатической волны // Письма в ЖТФ. 1987. Т.13, № 24. С. 1497.
8. Ваишковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Никитов С.А. Влияние СВЧ сигнала большой мощности на распространение магнитостатических волн в ферритовых пленках // ФТТ. 1988. Т.30, № 3. С. 827.
9. Анисимов А.Н., Чивилева О.А., Гуревич А.Г. Влияние волны большой амплитуды на затухание слабой поверхностной магнитостатической волны // ФТТ. 1990. Т.32, № 6. С. 1622.
10. Gurso V., Procushkin V., Stalmahov V., Sharaevsky J. A peculiarities of the excitation of the surface magnetostatic waves above the threshold of parametric instability // Proc. ISSWSS. Novosibirsk. USSR. 1986. Vol.2. P. 296.
11. Rogozin V.B., Belskiy V.P. Теория ферритовых ограничителей и шумоподавителей на магнитостатических волнах // Радиоэлектроника и связь. 1991. № 2. С. 46.
12. Шараевский Ю.П. Прохождение сигналов через нелинейную линию передачи на магнитостатических волнах // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике (IX-я зимняя школа-семинар). Саратов: ГосУНЦ «Колледж». 1992. С. 218.

13. Вугальтер Г.А., Гилинский И.А. Возбуждение и прием поверхностных магнитостатических волн микрополосковым преобразователем // ЖТФ. 1985. Т.55. № 11.

14. Левин Б.Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1957.

15. Мальшиенко В.И., Солнцев В.А. Нелинейный анализ многочастотных режимов работы ЛБВ при близких частотах // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1972. № 10. С. 16.

16. Бунимович В.И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М.: Сов. радио, 1951.

17. Левин Ю.И., Шараевский Ю.П. Усиление узкополосного шумового сигнала в ЛБВ О и М-типов // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (V-я зимняя школа-семинар). Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. С. 148.

Научно-исследовательский  
институт механики  
и физики при СГУ

Поступила в редакцию 23.03.95  
после переработки 24.04.95

## COMPLEX SIGNAL PASSING THROUGH THE NONLINEAR TRANSMISSION LINE ON MAGNETOSTATIC WAVES

*D. Solovey, U. Sharaevsky*

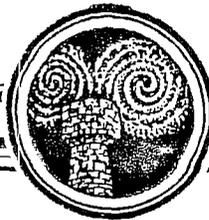
This article is about peculiarity of the complex signal passing (including noise signal) through the nonlinear transmission line on magnetostatic waves (MSW). The analysis is based on the method where our device is a part of transmission line with nonlinear distributive resistance. The excitement of MSW depending on different level of input signal is a cause of this nonlinear resistance. The entrance signal is considered as a sum of monochromatic and noise signals. It is shown the suppression of noise is reducing and the spectrum is narrowing on comparison with a case without monochromatic signal when the entrance monochromatic signal exceeds the «threshold» level.



*Соловей Дмитрий Владимирович* - родился в 1970 г. Окончил в 1992 г. физический факультет Саратовского госуниверситета. До 1995 года работал инженером кафедры общей физики СГУ, в настоящее время - младший научный сотрудник НИИМФ. Область научных интересов - физика магнитостатических волн в тонких ферритовых пленках. Имеет ряд научных работ по этой тематике.



*Шараевский Юрий Павлович* - родился в 1942 г. Окончил (1965) физический факультет Саратовского госуниверситета, защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972). С 1967 г. работает в Саратовском госуниверситете (аспирант, старший научный сотрудник, зав. лабораторией, в настоящее время - доцент кафедры общей физики). Занимался научными исследованиями в области вакуумной электроники СВЧ, в последнее время круг научных интересов - физика и техника магнитостатических волн в тонких ферритовых пленках. Автор более 100 научных работ, в том числе ряда учебных пособий, и соавтор монографий «Электроника ламп с обратной волной» и «Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот».



### ТРОЙКА КЕРРОВСКИХ СРЕД В КОЛЬЦЕВОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ: РОЛЬ НЕИДЕНТИЧНОСТИ

*А.И. Аришинов, Р.Р. Мударисов, Б.Н. Пойзнер*

Рассмотрена упрощенная модель динамики нелинейной фазовой модуляции в кольцевом интерферометре, содержащем три нелинейные среды, поля в которых взаимосвязаны. Предложена количественная мера неидентичности  $\Theta V$  начальных скоростей процессов в подсистемах. Моделирование показало, что, во-первых, строение аттрактора в фазовом пространстве многокомпонентной системы зависит от величины  $\Theta V$ , и возможны семь вариантов эволюции системы, включающих непериодические, периодические, стационарные процессы; во-вторых, для значений  $\Theta V$  порядка  $10^{-3}$  (и менее) длительность переходного процесса со стационарным фазовым набегом в начале эволюции многокомпонентной системы  $t_s$  зависит от величины  $\Theta V$  по закону:  $t_s = -A \ln \Theta V - B$ , причем минимального значения  $\Theta V$  (вплоть до значений порядка  $10^{-12}$ ) не установлено; в-третьих, непериодические процессы зафиксированы в ограниченном интервале значений  $\Theta V \in ]0,1[$ .

1. Среди объектов, подлежащих исследованию методами нелинейной динамики, выделяются относительно малознакомыми активные многокомпонентные системы. Они представляют собой несколько пространственно разделенных подсистем, связанных в единое целое. В простейшем случае, которым здесь удобно ограничиться, вид нелинейностей подсистем одинаков, а их параметры могут различаться. Тогда правомерны вопросы: как влияет неидентичность параметров подсистем на характер динамики процессов в многокомпонентной системе? С помощью каких характеристик целесообразно описывать это влияние? Каким значениям количественной характеристики неидентичности соответствует тот или иной тип динамики процессов в системе?

В поисках ответов на эти вопросы авторы обратились к простейшей многокомпонентной системе, чьим прототипом является кольцевой интерферометр с керровской нелинейностью, в котором осуществляются мелкомасштабные (по сравнению с диаметром лазерного пучка) и крупномасштабные преобразования световых полей [1,2]. Эксперименты С. А. Ахманова, М. А. Воронцова и др., а также компьютерное моделирование, выполненное нами [3], свидетельствуют: в поперечном сечении пучка на выходе из интерферометра распределение фазового набег  $U$ , пропорционального интенсивности света, представляет собой эволюционирующие оптические структуры. Авторы работы [1] рассмотрели цепочку из  $N$  нелинейных интерферометров и составили ее математическую модель

$$\gamma_j \partial U_j / \partial t + U_j = d_j \Delta_{\perp} U_j + K_j [1 + \gamma_j \cos(U_j + f_{0j})] + F_j(U_j). \quad (1)$$

В обзоре [2] М. А. Воронцова приведены результаты экспериментального изучения активной двухкомпонентной системы для случая, в котором величины  $\tau_1$  и  $\tau_2$  существенно различны, но в задачу автора не входило специальное исследование роли неидентичности.

2. В данной работе рассматривается оптическая схема с параллельным расположением нелинейных сред, как это показано на рис. 1, в противоположность случаю последовательного расположения, исследованного в работе [1, рис. 6.6]. Оптические поля  $E_1, E_2, E_3$  в них взаимодействуют благодаря частичной и/или полной передаче излучения из одной подсистемы в другую с помощью восьми зеркал  $M$  (см. рис.1, короткие толстые линии). Ради простоты и уменьшения числа варьируемых параметров выбран случай пренебрежимо малого мелкомасштабного взаимодействия оптических полей в нелинейной среде, когда коэффициенты диффузии  $d_j = 0$ . При сделанных предположениях модели трёхкомпонентной системы можно придать вид

$$dU_j/dt = K_j [1 + \gamma_j \cos(U_i + f_{0j})]/\tau_j - U_j/\tau_j, \quad (2)$$

где  $j = 1, 2, 3$ ,  $i = 2, 3, 1$ . Согласно [1],  $\tau_j$  - время релаксации нелинейной части показателя преломления;  $U_j$  - фазовый набег волны в  $j$ -й нелинейной среде;  $n_j = n_{0j} + n_2 |E_j(t)|^2$ ;  $K_j = n_2 I_{\text{вх}j} / k L_j (1 - R_j)$  - параметр нелинейности;  $k$  - волновое число;  $L_j$  - длина среды;  $I_{\text{вх}j}$  - интенсивность излучения на входе в  $j$ -ю среду;  $R_j$  - коэффициент отражения зеркал интерферометра для излучения в  $j$ -м канале;  $\gamma_j$  - контрастность, зависящая от потерь излучения в контуре обратной связи и в  $j$ -й среде;  $f_{0j} = k L_j n_{0j}$  - постоянный фазовый набег. Поскольку в устройстве используется керровская среда, для которой  $n_2 > 0$ , параметр  $K_j$  и фазовый набег  $U_j$  положительны.

Следуя схеме [4] элементарного анализа свойств динамической системы применительно к устройству, изображенному на рис. 1, можно сделать следующие замечания.

Во-первых, динамическая система, описываемая уравнениями (2), является диссипативной, и для нее изменение объема в фазовом пространстве происходит по закону

$$\dot{v} = \Omega v, \quad \text{где } \Omega = \sum_j \partial \dot{U}_j / \partial U_j = - \sum_j \tau_j^{-1} \quad (3)$$

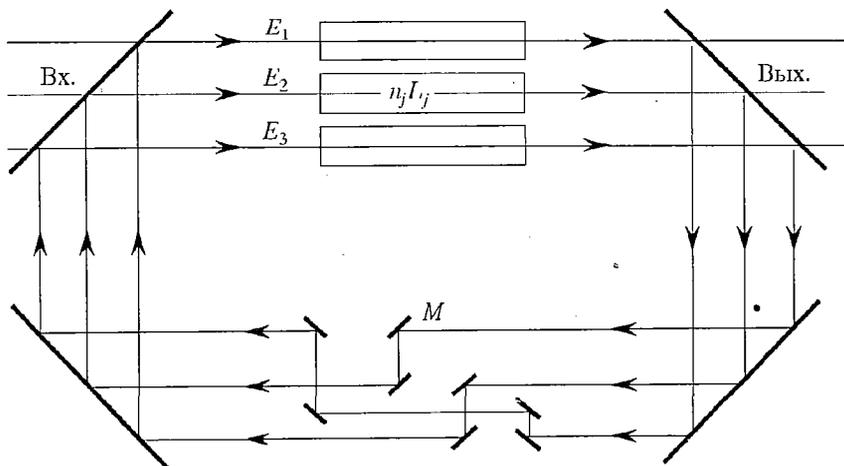


Рис. 1 Оптическая схема с параллельным расположением нелинейных сред:  $E_1, E_2, E_3$  - оптические поля;  $M$  - зеркала

Во-вторых, хотя оптико-физические схемы устройств в [1, рис. 6.6] и на рис. 1 отличаются в конструктивном отношении, вид обоих уравнений (1) и (2) инвариантен относительно замены индексов

$$U_j \rightarrow U_i \rightarrow U_q, \quad q = 3, 1, 2, \quad (4)$$

если выполняется условие

$$\tau_j = \tau, \quad K_j = K, \quad \gamma_j = \gamma, \quad f_{0j} = f_0. \quad (5)$$

В-третьих, благодаря вышеуказанному свойству инвариантности уравнений (2) относительно замены индексов (4) в схеме, приведенной на рис. 1, возможно реализовать такое расположение зеркал, для которого направление обхода подсистем в интерферометре противоположно рассмотренному.

3. Возможны различные варианты количественных характеристик, которые пригодны для описания влияния степени отличия параметров подсистем и начальных условий  $U_{0j}$  на характер динамики процессов. По-видимому, наиболее просто учесть указанные величины в совокупности, воспользовавшись стартовыми скоростями процессов в подсистеме  $V_j = dU_j/dt|_{t=0}$ , равными значениям правых частей уравнений (2) при  $t=0$ . Неодинаковость стартовых скоростей  $V_j$  можно описывать, используя соотношения между ними. Простейшей количественной характеристикой степени неидентичности может служить величина  $\Theta V = N - (V_1/V_2 + V_2/V_3 + V_3/V_1)$  или  $\Theta V = 1 / \{(N+1) - (V_1/V_2 + V_2/V_3 + V_3/V_1)\}$ , где  $N$  - число подсистем. В этом случае  $\Theta V$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Можно предложить иную разновидность этой характеристики, в которой фигурируют только модули отношений  $V_j/V_i$ .

Еще одним вариантом характеристики различия стартовых скоростей  $V_j$  может служить нормированная мера их неидентичности, которой и будем оперировать в дальнейшем. Для  $N = 3$  она имеет вид

$$\Theta V = \frac{3[ (|V_1| - |V_2|)^2 + (|V_2| - |V_3|)^2 + (|V_3| - |V_1|)^2 ]^{1/2}}{|V_1| + |V_2| + |V_3|}. \quad (6)$$

Очевидно, что в случае идентичности параметров подсистем (5) и начальных условий ( $U_{0j} = U_0$ ), согласно (6), величина  $\Theta V \equiv 0$ . Строгое равенство  $\Theta V$  нулю имеет место лишь в этом случае. Наоборот, при неидентичных параметрах подсистем даже при подборе соответствующих начальных условий достичь строгого равенства ( $\Theta V \equiv 0$ ) не удастся. Причина, на наш взгляд, состоит в том, что эта задача сводится к нахождению таких значений начальных условий  $U_{0j}$ , для которых величины  $V_j$ , входящие во взаимосвязанные трансцендентные уравнения

$$V_j = K_j [1 + \gamma_j \cos(U_{0j} + f_{0j})] / \tau_j - U_{0j} / \tau_j,$$

строго, а не приближенно, равны между собой, обеспечивая, согласно (6), строгое равенство нулю  $\Theta V$ . Однако, решение указанных трансцендентных уравнений получается с неустранимой погрешностью, определяющей отличие  $\Theta V$  от нуля. Заметим, что здесь задаваемые параметры  $K_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $f_{0j}$ ,  $\tau_j$  и неизвестные  $U_{0j}$  положительны в силу их физического смысла.

С целью выяснить влияние неидентичности стартовых скоростей процессов  $V_j$  на динамику многокомпонентной системы уравнения (2) решались численным методом Рунге - Кутты - Мерсона [5], и строились проекции фазовых портретов на плоскости  $U_1, U_2$  и  $U_3, U_2$ . Относительная погрешность вычислений не превышала  $10^{-12}$ . При интегрировании (2) начальными условиями служили задаваемые величины  $U_{0j}$ . Если  $U_{0j}$  заданы и все параметры в (2) известны, то тем самым заданы и стартовые скорости  $V_j$ , вычисляемые как правые части уравнений

(2) при  $t=0$ . В свою очередь знание величины  $V_j$  позволяет рассчитать по формуле (6) значение меры неидентичности  $\Theta V$ .

**1 тип динамики.** Моделирование показало, что при выполнении соотношений (5) и начальных условиях  $U_{0j} = U_0$  (то есть при идентичности стартовых скоростей процессов в подсистемах, когда  $\Theta V = 0$ ) в трехкомпонентной системе возникает только стационарное движение. В этом тестовом случае значения фазовых набегов  $U_j$ , естественно, одинаковы.

Если же параметры подсистем идентичны (то есть соотношения (5) выполняются), а начальные условия  $U_{0j}$  различны, либо наоборот, параметры подсистем неидентичны (то есть хотя бы одно из соотношений (5) не выполняется), а начальные условия  $U_{0j}$  одинаковы, то в зависимости от величины  $\Theta V$  возможны еще шесть типов эволюции многокомпонентной системы.

**2-4 типы динамики.** При  $0 < \Theta V < 0.001$  сперва реализуется начальный процесс установления  $U_j$ , затем - переходный процесс со стационарным (постоянным и одинаковым) значением фазовых набегов  $U_j = U_{st}$  (ППСФ). В качестве критерия идентификации ППСФ использовалось следующее условие:

$$|dU_j/dt|/U_j < 0.01. \quad (7)$$

Как показало моделирование, длительность  $t_s$  ППСФ по критерию (7) зависит от степени неидентичности  $\Theta V$  стартовых скоростей по закону

$$t_s = -A \ln \Theta V - B, \quad (8)$$

который получен аппроксимацией зависимости, показанной на рис. 2 кривой 3. Здесь величина  $t_s$  нормирована на единицу времени; для удобства построения на оси абсцисс приведены значения величины  $\Theta V^{1/5}$ ; величина  $\Theta V$  изменялась заданием значения  $U_{01}$ .

Необходимо подчеркнуть, что ППСФ возможен в кольцевом интерферометре не только с тремя керровскими средами, но также и с другим их числом. Соотношение (8) в таких случаях сохраняет силу, изменяются лишь входящие в него константы. Для сравнения на рис. 2 приведены кривая 1 (случай двух и четырех сред) и кривая 2 (случай пяти сред).

В случае трех керровских сред после завершения ППСФ возможны три альтернативных варианта динамики фазового набегания: неперидический, периодический, стационарный «разноуровневый» процессы. При этом значения  $U_j$  различны, что отличает «разноуровневый» стационарный процесс от ППСФ.

Порога неидентичности, то есть минимального значения  $\Theta V$ , начиная с которого стационарность процесса сохраняется как угодно долго, не выявлено вплоть до значения  $\Theta V \sim 10^{-12}$ . Этот факт согласуется с установленной зависимостью (8) (см. кривую 3 на рис. 2).

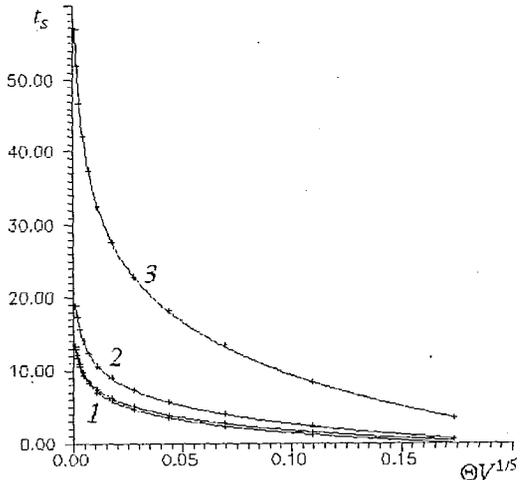


Рис. 2. Зависимость длительности  $t_s$  ППСФ от меры неидентичности  $\Theta V$  стартовых скоростей: при значениях параметров  $\tau_j=1c$ ,  $\gamma_j=0.8$ ,  $K_j=5$ ,  $f_{0j}=U_{02}=U_{03}=0$  для случаев: 1 - двух ( $A=0.50$ ,  $B=4.45$ ) и четырех ( $A=0.51$ ,  $B=4.11$ ) сред; 2 - пяти сред,  $A=0.72$ ,  $B=5.63$ ; 3 - трех сред,  $A=2.09$ ,  $B=14.77$

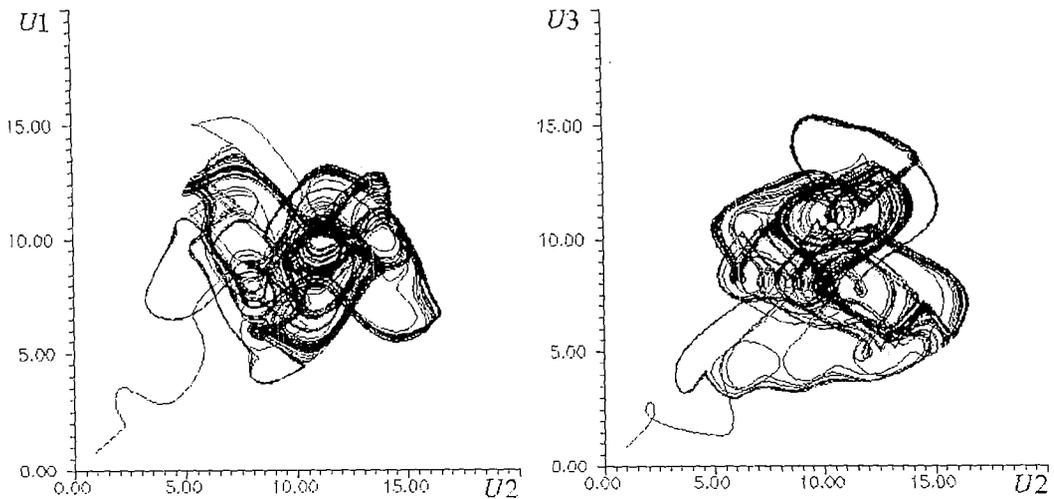


Рис. 3. Проекция фазовых портретов для неперидического процесса при  $\Theta V = 0.1515$  и значениях параметров  $\tau_j = 1$  с,  $\gamma_j = 1$ ,  $U_{0j} = f_{0j} = 0$ ,  $K_1 = 9$ ,  $K_2 = 10$ ,  $K_3 = 9$

**5-7 типы динамики.** Для значений  $\Theta V \in [0.001, 1[$  после начального процесса установления  $U_j$  переходный процесс со стационарным (и одинаковым) значением  $U_j = U_{st}$  (с ограниченной длительностью  $t_s$ ) не зафиксирован. В зависимости от степени неидентичности стартовых скоростей процессов в подсистемах реализуется либо неперидический процесс (примеры проекций фазовых портретов приведены на рис. 3, 4), либо перидический (пример проекций фазовых портретов приведен на рис. 5), либо «разноуровневый» стационарный, то есть с разными значениями  $U_j$ .

Значение  $\Theta V = 1$  служит своего рода границей, поскольку при  $\Theta V > 1$  во всех проведенных вычислительных экспериментах неперидические процессы не зафиксированы. Пример проекций фазовых портретов перидического процесса приведен на рис. 6. О перидичности процессов приходилось судить по виду проекций фазовых портретов, изображенных на рис. 5, 6 и идентифицированных как предельные циклы.

Естественно было бы ожидать, что при «сильной» неидентичности стартовых скоростей динамика многокомпонентной системы далека от перидичности и наоборот. Но представляется продуктивным использование

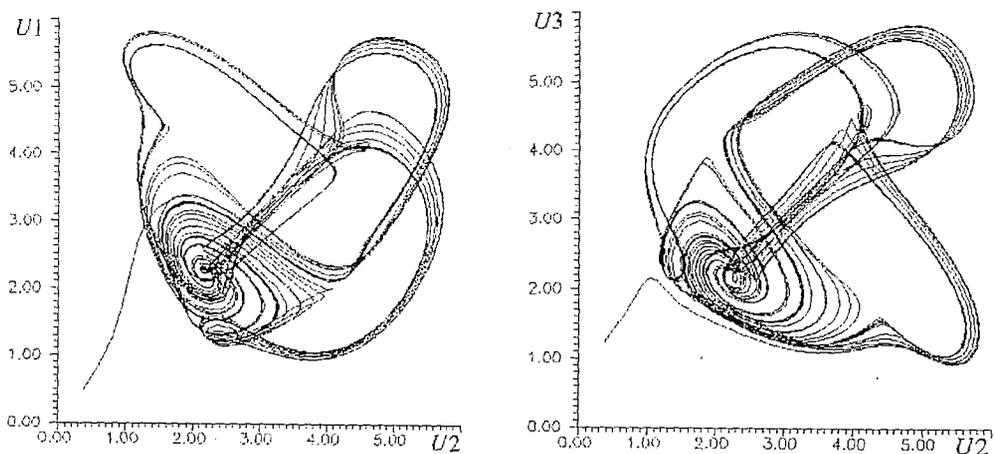


Рис. 4. Проекция фазовых портретов для неперидического процесса при  $\Theta V = 0.1938$  и значениях параметров  $\tau_j = 1$  с,  $\gamma_j = 1$ ,  $f_{0j} = 0$ ,  $K_j = 5$ ,  $U_{01} = U_{02} = 0$ ,  $U_{03} = 0.785$  рад

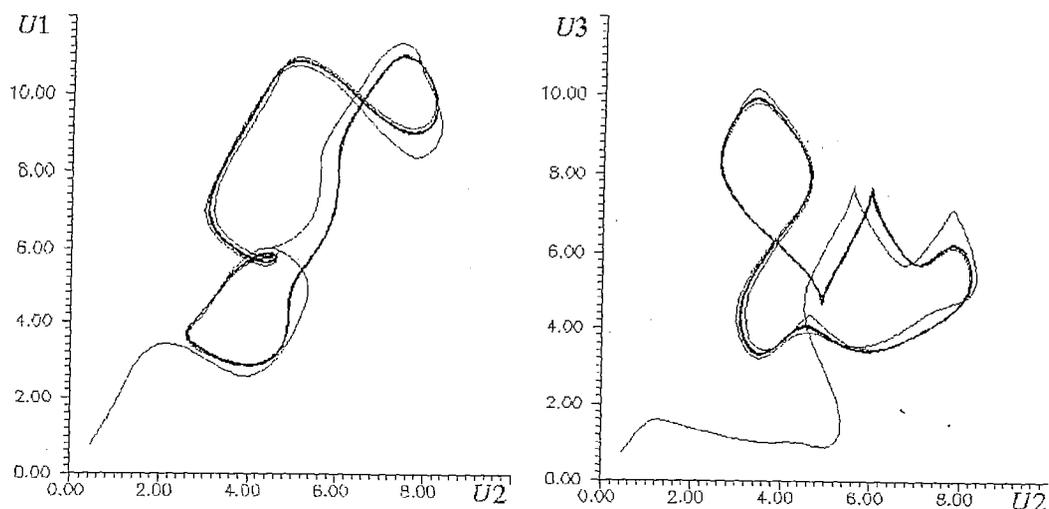


Рис. 5. Проекция фазовых портретов для периодического процесса при  $\Theta V = 0.606$  и значениях параметров  $\tau_j = 1c$ ,  $\gamma_j = 1$ ,  $U_{0j} = f_{0j} = 0$ ,  $K_1 = 8$ ,  $K_2 = 5$ ,  $K_3 = 8$

некоторой аналогии между многокомпонентной системой (2) и биологическими объектами\*, для которых еще в 1966 г. был сформулирован «принцип наименьшего действия». Согласно принципу, каждая подсистема в организме реагирует так, чтобы взаимодействие с другими подсистемами, отличными от нее, было минимальным. На основе этого принципа объясняется тот факт, что динамика взаимосвязи между отличающимися подсистемами приобретает повторяющийся, циклический характер, то есть наступает синхронизация колебательных процессов во взаимосвязанных подсистемах [6]. При «сильной» неидентичности, когда  $\Theta V > 1$ , типичными динамическими состояниями системы, согласно результатам моделирования, оказываются периодические и стационарные процессы, что можно интерпретировать как синхронное взаимодействие подсистем.

Однако, если на биосистему воздействуют «слабо» отличающиеся «сигналы», то наиболее вероятен случай десинхронизации динамического состояния биосистемы, нарушения взаимодействия ее частей [6]. Определенную

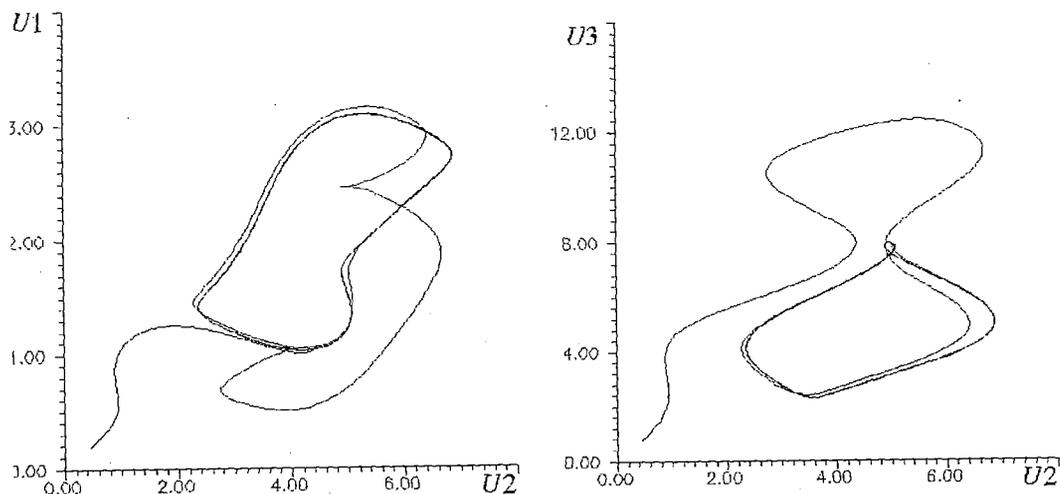


Рис. 6. Проекция фазовых портретов для периодического процесса при  $\Theta V = 1.4696$  и значениях параметров  $\tau_j = 1c$ ,  $\gamma_j = 1$ ,  $U_{0j} = f_{0j} = 0$ ,  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = 5$ ,  $K_3 = 8$

\* На эту аналогию внимание авторов обратил И. В. Мигалкин.

аналогию такой ситуации можно усмотреть в том, что при  $\Theta V < 1$  неперiodические процессы могут являться финалом эволюции трехкомпонентной системы.

Отметим, что, согласно результатам моделирования, интервал ]0,1[ значений  $\Theta V$ , в котором динамика многокомпонентной системы сложна, относительно узок.

4. Таким образом, в работе сделана попытка посредством компьютерного моделирования выяснить влияние степени неидентичности  $\Theta V$  начальных скоростей процессов в трех взаимосвязанных нелинейных подсистемах кольцевого интерферометра на динамику нелинейных фазовых набегов  $U_j$ . Применительно к рассмотренному варианту оптико-физической схемы, в приближении пренебрежимо малого мелкомасштабного взаимодействия оптических полей в каждой из подсистем, для динамической системы, описываемой (2), вычислена ее дивергенция (3). Предложено несколько численных характеристик отличия параметров подсистем и начальных условий. На основе одной из них (6) проведена классификация типов динамики нелинейных фазовых набегов  $U_j$ . Показано, что величина  $U_j$  влияет на строение аттрактора, причем возможны семь вариантов эволюции трехкомпонентной системы, включающие неперiodические, перiodические и стационарные (двух типов) процессы. При  $\Theta V < 10^{-3}$  реализуется переходный процесс - по критерию (7) - со стационарным (и одинаковым) значением фазовых набегов, длительность которого зависит от  $\Theta V$  по закону (8). Такой процесс имеет место также в двух-, четырех- и пятикомпонентной системах при  $0 < \Theta V < 10^{-2}$  (см. рис. 2), что позволяет считать ППСФ признаком «слабой» неидентичности стартовых скоростей процессов в подсистемах. Отсутствие при  $\Theta V > 1$  неперiodических процессов можно объяснить, исходя из «принципа наименьшего действия», справедливого для многокомпонентных биологических систем [6]. Завершение эволюции трехкомпонентной системы неперiodическим процессом возможно при  $\Theta V < 1$  предлагается интерпретировать, также исходя из аналогии с биосистемой [6].

Полученные результаты дают аргументы в пользу постановки задачи о синтезе многокомпонентной системы с заданным типом динамики путем выбора степени неидентичности параметров пространственно разделенных подсистем и их начальных состояний. Следует отметить, что связь между неидентичностью частей и характером поведения целого составляет одно из направлений исследования эволюционной диатропики - учения о разнообразии. Согласно Ю.В. Чайковскому, для самоорганизации системы, формирующей собственную среду, необходимо высокое разнообразие элементов и их связей. Но всякое разнообразие не формально, то есть не может быть полностью упорядочено алгоритмом, а, значит, оно случайно с алгоритмической точки зрения [7].

Актуальной представляется проверка полученных закономерностей на экспериментальной основе, созданной авторами работы [1]. Тем самым удалось бы исключить естественные подозрения относительно того, что описанные явления могут существовать - по точному выражению Л. О. Чуа - «лишь в математических абстракциях и в компьютерных экспериментах с придуманными уравнениями» [8].

Авторы благодарны И. В. Мингалкину за обсуждение результатов моделирования и А. Л. Магазинникову - за помощь в исследовании двух- и четырехкомпонентных систем.

## Библиографический список

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации/ Под ред. С.А. Ахманова и М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 263.

2. Вороцов М.А. Нелинейная волновая взаимодействующая структура световых полей // Изв. РАН. Сер. физ., 1992. Т. 56, № 4. С 7.
3. Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Поизнер Б.Н. Формообразование в интерферометре с керровской нелинейностью: вычислительный эксперимент // Изв. вузов. Сер. Физика. 1994. № 6. С.102.
4. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику: Учеб. руководство. М.: Наука, 1990. С. 122.
5. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск : МП «РАСКО», 1991.
6. Мигалкин И.В., Каложин В.А., Карташев А.Г. Некоторые закономерности влияния магнитных полей на сбраживание глюкозы дрожжевыми грибами // Живые системы в электромагнитных полях. Томск, 1979. Вып. 2. С. 65.
7. Чайковский Ю.В. К общей теории эволюции // Путь. 1993. № 4. С.101.
8. Чуа Л.О. Генезис схемы Чуа // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3-4. С. 5.

Томский государственный  
университет

Поступила в редакцию 5.07.94  
после переработки 25.01.95

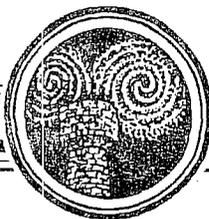
### THREE KERR NONLINEAR MEDIUMS IN THE RING INTERFEROMETER: THE IMPORTANCE OF NONIDENTITY

*A.I. Arshinov, R.R. Mudarisov, B.N. Poizner*

The simplified dynamics model of the nonlinear phase modulation in the ring interferometer, containing three nonlinear mediums, whose light fields are interdependent is considered. The quantitative measure of nonidentity of start velocities  $\Theta V$  of the processes in the subsystems is proposed. The computer imitation has shown: 1 - attractor structure in phase space of multicomponent system depends on value of  $\Theta V$ , and seven alternatives of system dynamics including nonperiodic, periodic, stationary processes are possible; 2 - when value of  $\Theta V$  is order  $10^{-3}$  or less then duration  $t_s$  of transitive stationary process in early evolution of multicomponent system depends on the value of  $\Theta V$  as  $t_s = -A \ln \Theta V - B$ , in so doing the minimal value of  $\Theta V$  (up to and including  $10^{-12}$ ) was not found; 3 - nonperiodic processes were disclosed only in the limited interval  $]0,1[$  of values  $\Theta V$ .



*Аршинов Алексей Иванович* - родился в 1967 году в Томске. Аспирант радиофизического факультета Томского университета. Области научных интересов: нелинейная динамика пространственно разделенных систем, моделирование процессов оптической морфогенетики.



## НАТУРНАЯ ИМИТАЦИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ФАЗИРОВАННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ НА ОСНОВЕ ВИРКАТОРОВ

*Б.В. Алехин, А.Е. Дубинов, В.Д. Селемир, Н.В. Степанов,  
О.А. Шамро, К.В. Шибалко*

При помощи волноводного имитатора осуществлено моделирование излучения импульсно-периодической фазированной антенной решеткой с виркаторами в качестве элементов решетки. Исследовано искажение суммарного импульса вследствие неодновременности прихода парциальных сигналов.

При разработке фазированных антенных решеток (ФАР) важно заранее знать характеристики ее излучения: коэффициент усиления, качество сложения парциальных волн от отдельных излучателей и т.д., однако теоретически рассчитать эти характеристики чаще всего не удается. Поэтому прибегают к экспериментальным методам, когда поле излучения ФАР моделируется с помощью одного излучателя (СВЧ генератора), помещенного в так называемый имитатор ФАР [1,2].

В последнее время получили развитие мощные ФАР с релятивистскими СВЧ генераторами в качестве своих элементов [3]. Обычно такие генераторы представляют собой дорогостоящие устройства, выполненные на основе высокопоточных ускорителей электронов. Поэтому предварительное исследование одиночного СВЧ генератора в имитаторе ФАР особенно актуально.

Имитатор ФАР обычно представляет собой сверхразмерный волновод с зеркальными стенками и излучателем на оси. Форма поперечного сечения волновода определяет элементарную ячейку моделируемой ФАР. Принцип действия имитатора сходен с принципом действия калейдоскопа и основан на многократных отражениях электромагнитной волны от стенок волновода, при которых формируется бесконечное поле изображений (рис. 1). Поэтому сигнал, регистрируемый приемником, будет идентичен сигналу от бесконечной идеально синфазной ФАР.

В реальном случае мы имеем дело с излучателем, диаграмма направленности которого практически сосредоточена в некотором конусе, ось которого совпадает с осью излучателя. В этом случае моделируется ФАР с конечным количеством элементов решетки. Особенностью имитации импульсной ФАР, когда длительность импульса излучателя сравнима с временем распространения сигнала до приемника, является неизохронность прихода парциальных сигналов. Это приводит к динамической перестройке суммарного сигнала, проявляющейся, например, в затягивании его заднего фронта.

Эффекты динамической перестройки легко учесть в приближении геометрической оптики. При этом неизохронность прихода парциальных сигналов соответствует кажущейся волне возбуждения элементов ФАР, движущейся со скоростью

$$v = cy(L^2 + y^2)^{-1/2}, \quad (1)$$

где  $L$  - расстояние между генератором и приемником,  $c$  - скорость света,  $y$  - поперечная координата ( $y = nD$ ,  $D$  - период решетки,  $n$  - номер изображения). Тогда суммарный сигнал можно записать в виде

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0 \{ t - (1/c) [(L^2 + n^2 D^2)^{1/2} - L] \} \frac{g_n f_E(\varphi_n) f_R(\varphi_n)}{1 + (nD/L)^2} R^n(\varphi_n), \quad (2)$$

где  $p_0(t)$  - сигнал с одного генератора в свободном пространстве,  $f_E(\varphi_n)$  и  $f_R(\varphi_n)$  - диаграммы направленности антенн генератора и приемника соответственно, нормированные так, чтобы  $f_E(0) = f_R(0) = 1$ ,  $R(\varphi_n)$  - коэффициент отражения электромагнитной волны стенкой имитатора,  $\varphi_n = \arctg(nD/L)$ ,  $g_n = 1$  при  $n=0$  и  $g_n = 2$  в остальных случаях. Согласно (2), возможна имитация лишь конечной ФАР, размер которой определяется угловыми характеристиками антенн  $f_E(\varphi_n)$  и  $f_R(\varphi_n)$ .

В экспериментах по натурной имитации ФАР элементом решетки (излучателем) являлся импульсный СВЧ генератор типа виркатор [4], являющийся, по сути, единственным генератором, способным работать без магнитного сопровождения пучка, что упрощает создание импульсно-периодической ФАР на его основе. Характеристики излучения виркатора следующие: выходная мощность - более 100 МВт, длина волны излучения - 3 см, длительность импульса - 20 нс, частота повторения импульсов - до 10 Гц, поляризация круговая, диаграмма направленности, представленная на рис. 2, имеет двухлепестковый профиль с эффективным углом полураствора  $18^\circ$ .

Виркатор помещался в середину плоского волновода с металлическими стенками длиной 3000 мм, расстояние между которыми составляло 720 мм. В качестве приемника использовался расположенный в отрезке волновода размерами  $23 \times 10$  мм полупроводниковый детектор, аналогичный описанному в [5]. Отрезок волновода приемника возбуждался с помощью приемной антенны с диаграммой направленности, лежащей в  $22^\circ$ -ом угле полураствора по уровню 0.5. Сам приемник располагался на расстоянии  $L = 3000$  мм от излучателя.

В такой конфигурации осуществляется имитация конечной линейной ФАР с периодом  $D = 720$  мм, длина которой и количество элементов в ней определяются в основном диаграммой направленности виркатора.

Результаты имитации представлены на рис. 3, где приведены осциллограммы огибающих СВЧ сигналов:  $a$  - для одного генератора в свободном пространстве;  $b$  - для генератора, расположенного вдоль одной отражающей поверхности (генератор + одно изображение);  $c$  - для генератора в имитаторе.

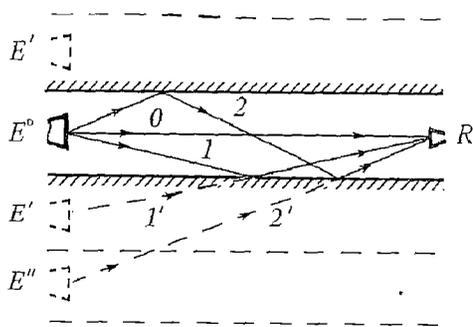


Рис. 1. Схема имитатора ФАР

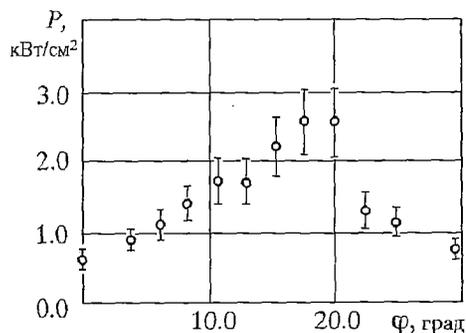


Рис. 2. Диаграмма направленности виркатора

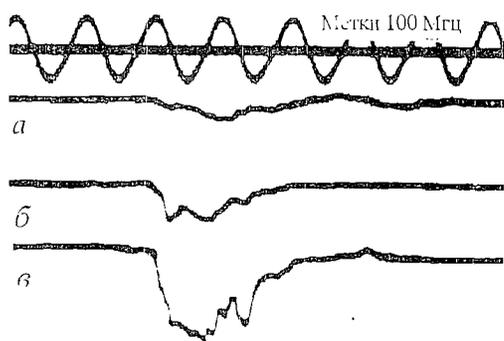


Рис. 3. Осциллограммы огибающих СВЧ сигналов

Расчеты по формуле (2) и анализ осциллограмм рис. 3 показывают, что основной вклад в излучение оказывают лишь  $N=2n+1=7$  генераторов моделируемой ФАР, а уширение сигнала не превышает

$$\Delta t = (1/c)((L^2 + n^2 D^2)^{1/2} - L) = 3 \text{ нс.}$$

Эти результаты свидетельствуют о возможности натурального моделирования ФАР с помощью лишь одного генератора. Разумеется, такая имитация возможна и для излучателей ИК и оптического диапазонов.

### Библиографический список

1. Hannan P.W., Meier P.J., Balfour M.A. Simulation of Phased-Array Antenna Impedance in Waveguide// IEEE Trans. Antenna Propagat. 1963. № 11. P. 715.
2. Wheeler H.A. A Survey of the Simulator Technique for Designing a Radiating Element in a Phased-Array Antenna// Phased-array antennas/ Eds. Dedham. Mass. Artech house, 1970.
3. Levine J.S., Aiello N., Benford J., Harteneck B. Design and Operation of a Module of Phase-Locked Relativistic Magnetrons// J. Appl. Phys. 1991. Vol. 70, № 5. P. 2838.
4. Рухадзе А.А., Столбецов С.Д., Тараканов В.П. Виркаторы // РЭ. 1992. Т.37, № 3. С. 385.
5. Райзер М.Д., Цопп Д.Э. Детектирование и измерение мощности СВЧ излучения наносекундной длительности // РЭ. 1975. Т. 20, № 8. С. 1691.

Российский Федеральный ядерный центр  
ВНИИ экспериментальной физики

Поступила в редакцию 7.10.94  
после переработки. 25.04.95

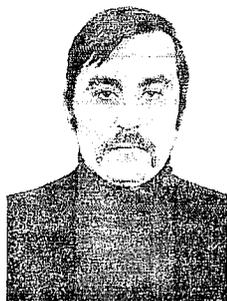
### A FULL-SCALE SIMULATION OF A PULSED VIRCATOR-BASED PHASED ARRAY

B.V.Alekhin, A.E.Dubinov, V.D.Selemir, N.V.Stepanov,  
O.A.Shamro, K.V.Shibalko

With the help of a waveguide simulator there was carried out the modeling of a phased array with vircators in the capacity of the array elements. The distribution of a total pulse because of non-simultaneity of partial signals arrival was investigated.



Алексей Борис Васильевич - родился в 1944 году в Мелеузе, Башкортостан. Окончил Московский инженерно-физический институт (1969). С 1969 года работает во ВНИИЭФ в области квантовой радиофизики, а с 1990 года в области СВЧ электроники. Автор более 30 статей и докладов.



*Дубинов Александр Евгеньевич* - родился в 1958 году в городе Арзамас-16. Окончил Московский инженерно-физический институт по специальности приборостроение. Работает во ВНИИЭФ с 1984 года. Возглавляет теоретическую группу в лаборатории релятивистской СВЧ электроники. Область научных интересов - нелинейная динамика, физика плазмы. Автор более 20 публикаций.



*Селамир Виктор Дмитриевич* - родился в 1948 году в Черновцах, Украина. Окончил Харьковский государственный университет. Заведующий отделом физики высоких плотностей энергии и направленных потоков излучения. Область научных интересов: физика сверхточных ускорителей электронов, релятивистская СВЧ электроника. Автор более 30 публикаций.



*Степанов Николай Владимирович* - родился в 1957 году в Салавате. По окончании службы в Советской Армии поступил в Московский инженерно-физический институт. Закончив кафедру экспериментальной ядерной энергии (1987), начал работу во ВНИИЭФ в отделе физики высоких плотностей энергии. Занимается задачами, связанными с диагностикой электронных потоков и электромагнитных излучений. Одним из дополнительных направлений деятельности является исследование фрактальных моделей в ядерной физике.



*Шамро Олег Алексеевич* - родился в 1962 году. Окончил физико-технический факультет Уральского политехнического института по специальности квантовая радиофизика и физика твердого тела (1986). С того же года работает во ВНИИЭФ. Область научных интересов - диагностика и применение сверхточных электронных пучков. Автор и соавтор 10 статей и докладов, в том числе и на международных конференциях.



*Шибалко Константин Викторович* - родился в 1964 году в городе Арзамас-16. Окончил Горьковский государственный университет, радиофизический факультет. Работает во ВНИИЭФ с 1987 года научным сотрудником. Автор более 10 публикаций.



## ANALYSING AND CONTROLLING CHAOS IN SPIN-WAVE INSTABILITIES

*H. Benner, R. Henn, F. Rödelberger, G. Wiese*

Ferromagnetic samples excited by strong microwave fields show a variety of non-linear phenomena. We report on magnetic resonance experiments in yttrium iron garnet (YIG) probing spin-wave instabilities above the first-order Suhl threshold. A variety of different scenarios, e.g. period doubling routes, quasiperiodicity, different types of intermittency together with a very complex multistability have been found and analysed. In the case of nonresonant excitation of the uniform mode the observed chaotic autooscillations correspond to a low-dimensional attractor ( $D_2 \approx 2.1$ ) with a characteristic time scale of  $\mu\text{s}$ , whereas for resonant excitation very high-dimensional attractors ( $D_2 \approx 7 \dots >15$ ) are obtained. In order to stabilise unstable periodic orbits in such a fast system we developed an analog feedback device, which is related to the controlling scheme of Ott, Grebogi and Yorke. We succeeded in suppressing the low-dimensional chaos by applying a very small time-dependent feedback signal of about  $10^{-3}$  the amplitude of the input microwave field.

### 1. Introduction

Magnetic insulators are very interesting objects for studying nonlinear dynamics, since even their simplest equation of motion

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = -\gamma \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) + \text{dissipation} \quad (1a)$$

contains intrinsically nonlinear terms. Considering non-fluctuating terms only and neglecting dissipation for a moment, the time evolution of magnetization is described by the torque of an effective field

$$\mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} + h \cos \omega t + A \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + D \nabla^2 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \nabla \left\{ \nabla \int d^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}', t) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right\}, \quad (1b)$$

where  $A$  - matrix.

For the systems of interest  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  is composed of the external dc and ac magnetic fields, of demagnetizing and single-site anisotropy fields, of an exchange field, and of a dipolar field, depending themselves on the magnetization and giving rise to nonlinearities. Usually, this equation is discussed only for weak excitation ( $h \ll H, A M$ , etc.) by linearizing its r.h. side with respect to deviations of  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  from thermal equilibrium  $\mathbf{M}_0$ . However, even if confining ourselves to uniform magnetization, the exact solution of (1) shows a bistability («foldover effect») at moderate excitation amplitudes [1]. Moreover, the additional effect of the non-local exchange and dipolar fields may result in more complicated threshold phenomena indicating self-induced formation of spatio-temporal structures.

Part of these phenomena are well known for several decades from high-power ferromagnetic resonance (FMR) experiments [2-5], and have theoretically been explained by Suhl [6] to result from the parametric excitation of spin waves through transverse pumping of the uniform mode. Suhl considered two cases, where the excitation of spin waves should be most efficient: *The first-order Suhl instability* results from the excitation of spin waves at half the pumping frequency,  $\omega_k = \omega/2$ , the second-order instability from spin waves at  $\omega_k = \omega$ . The specific properties of these instabilities have extensively been studied since a long time and have been reviewed in several articles [1,7-9].

During the last decade the progress of nonlinear dynamics has stimulated the re-examination of high-power FMR experiments under the more general aspect of deterministic chaos. Experiments, mostly performed on the low-dissipative prototype of a ferromagnet, yttrium iron garnet (YIG), have exhibited a variety of nonlinear phenomena, e.g. low-frequency auto-oscillations, period doublings, quasiperiodicity, mode-locking, intermittency, and chaos [9-18]. The experiments were mainly discussed in terms of models considering only a minimum number (2 or 3) of coupled spin-wave modes [17-21]. More realistic descriptions have taken into account the full degenerate spin-wave manifold [22-24] or are based on the direct integration of the equation of motion for  $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$  [25].

Here, in an exemplary way, we focus on recent experimental results obtained on YIG spheres at the first-order Suhl instability (Sect.2). Since the complexity of this system can be varied within a wide range by the proper choice of external parameters (e.g. pumping frequency and input power, magnetic field, orientation, and temperature), it could be used as a (nearly) ideal model system for probing general concepts of nonlinear dynamics which generally work quite well in computer systems or in tailored mechanical or electrical devices, but often fail in real systems, especially in solid state physics. Several new and interesting phenomena have been observed: the occurrence of auto-oscillations starting directly at the Suhl threshold, a very complex multistability accompanied by sequences of bifurcations, different types of intermittency, including a new type of chaos-chaos intermittency and crises. We try to classify the observed pre-chaotic behaviour, report on techniques how to characterize the chaotic state, and present analyses of our data (Sect.3). A theoretical interpretation of these phenomena, taking into account the specific properties of long-wave modes, has been developed by us in a series of papers [26-29], but is beyond the scope of this article.

Finally, we consider the topical problem concerning the possibility of chaos suppression by stabilizing inherent unstable periodic orbits with the help of very weak external perturbations. By means of an analogy feedback device related to the controlling scheme of Ott, Grebogi, and Yorke (OGY)[30] we succeeded in suppressing the observed chaotic signal by a small time-dependent perturbation of the applied microwave power (Sect.4). To our knowledge, this experiment represents the fastest system controlled so far by a feedback system which stabilizes the inherent periodic dynamics of a strange attractor.

## 2. Experiments in YIG Spheres

**2.1. Subsidiary absorption and coincidence regime.** The first-order Suhl instability is characterized by the decay of the externally driven uniform mode into two spin waves of half the pumping frequency  $\omega_k = \omega_p/2$  and opposite wave vectors ( $\mathbf{k}$ ,  $-\mathbf{k}$ ) according to the conservation of energy and quasi-momentum. This instability can either be observed off resonance (i.e. with the pumping frequency  $\omega_p$  far away from the usual ferromagnetic resonance  $\omega_0$ ) as a *subsidiary absorption*, or directly on resonance ( $\omega_p = \omega_0$ ) within the *coincidence regime*. Profiting from the resonance amplification of the uniform mode, experiments in the coincidence require much less microwave power to reach the threshold (for pure YIG three orders of magnitude less).

For spherical samples the eigenfrequency of the uniform mode  $\omega_0$ , which describes the uniform precession of the spins around the external magnetic field  $\mathbf{H} \parallel z^{\wedge}$ , is given by

$$\omega_0 = \gamma(H + H_a). \quad (1)$$

$H_a$  describes the influence of weak cubic crystal field (cf. Table1) which depends on sample orientation and can generally be neglected. The uniform mode is driven by a transverse homogeneous microwave field  $h\cos(\omega_p t)x^{\wedge}$  at a pumping frequency  $\omega_p$ . The dispersion relation  $\omega_k$  of plane spin waves with a wave vector  $\mathbf{k}$  and a propagation angle  $\theta_k = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{H})$  reads [1]

$$\omega_k^2 = \gamma^2(H_i + Dk^2)(H_i + Dk^2 + 4\pi M_S \sin^2\theta_k), \quad (2)$$

where  $\gamma = g\mu_B/\hbar$  denotes the gyromagnetic ratio,  $D$  the stiffness constant and  $M_S$  the saturation magnetization. The internal magnetic field  $H_i \equiv H + H_a - 4\pi M_S/3$  includes the demagnetizing field of the sphere. The dependence on  $\theta_k$  reflects the anisotropy of the dipolar interaction and gives rise to a band of spin waves, the lower edge corresponding to spin waves which propagate parallel to  $\mathbf{H}$  and the upper edge to those which propagate in perpendicular direction.

The first-order instability only occurs if  $\omega_p/2$  exceeds the bottom of the spin-wave band, which is the case for

$$\omega_p \geq 2\gamma H_i. \quad (3)$$

Normally this condition can only be fulfilled for off-resonance excitation of the uniform mode. In this case subsidiary absorption shows up in a field scan as a broad structure below the main FMR line, which was the standard situation in previous experiments. Only in low fields it is possible to observe the instability on resonance ( $\omega_p = 2\omega_k = \omega_0$ ). The corresponding field range of this so-called *coincidence regime* is limited by [6]

$$4/3\pi\gamma M_S \leq \omega_p \leq 8/3\pi M_S. \quad (4)$$

The upper limit follows from (1) and (3), the lower limit from the vanishing of the FMR signal due to the formation of magnetic domains for  $H_i < 0$ . For pure YIG samples at room temperature this regime occurs for pumping frequencies  $\omega_p/2\pi$  between 1.7 and 3.3 GHz, corresponding to external magnetic fields between about 700 and 1300 Oe for  $\mathbf{H} \parallel (100)$ .

In order to determine the critical modes which are the first to become unstable at the threshold one has to minimize the critical amplitude  $b_0$  of the uniform mode for exciting a pair of eigenmodes at  $\omega_k = \omega_p/2$ . In the case of plane spin waves ( $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$ ) this critical amplitude is given by [1]

$$|b_{0,crit.}| = \eta_k / |\rho_{kk'}|, \quad |\rho_{kk'}| = 4\pi\gamma M_S \sin\theta_k \cos\theta_k (\omega_k + \gamma H_i + \gamma Dk^2) \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}} / \omega_k, \quad (5)$$

where  $\eta_k$  denotes the spin-wave damping and  $\rho_{kk'}$  the dipolar coupling coefficient. Assuming the spin-wave damping  $\eta_k$  to be constant, the minimum threshold is obtained for  $\theta_k = 45^\circ$  as long as  $\omega_p/2$  meets the  $45^\circ$ -branch of the spin-wave band. Then we have  $k \gg d^{-1}$  (inverse sample diameter), and the plane-wave approximation can be applied. If  $\omega_p/2$  is below the  $45^\circ$ -branch, one expects the excitation of longwave modes with  $k \rightarrow 0$  (Fig.1), which are not adequately described by the plane-wave approximation. Hence, the analysis of our data has to be based on a generalized type of eigenmodes including the boundary conditions of the sample as proposed by Wiese [28]. In practice, this means that (5) has to be adapted to this more appropriate type of eigenmodes. A detailed analysis of the critical modes, which is based on the experimental observation of a distinct fine structure occurring at the threshold, has been presented recently [28,29].

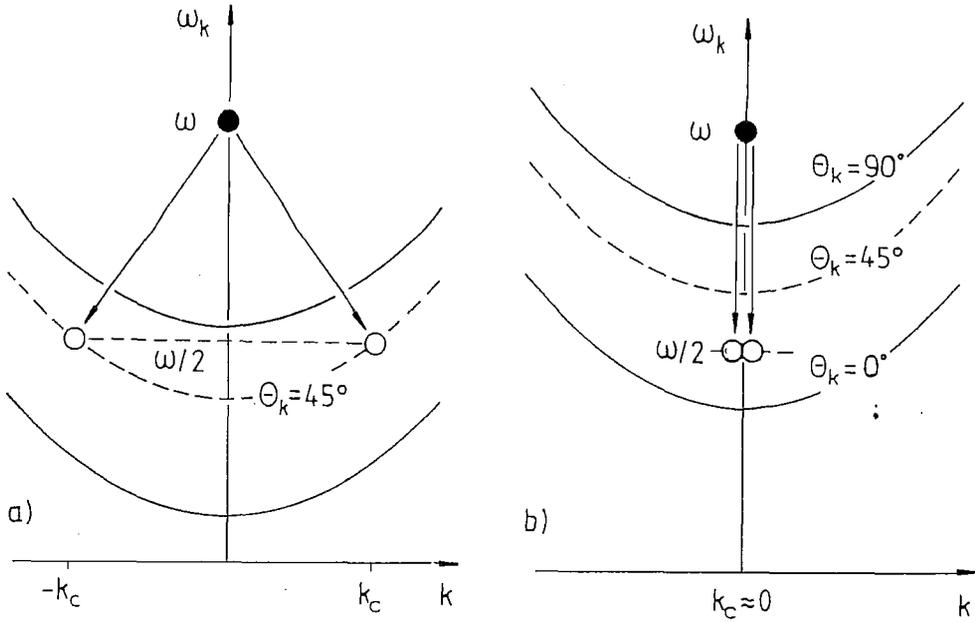


Fig. 1. Parametric excitation of non-uniform modes at the first-order Suhl instability ( $\omega_k = \omega_p/2$ ). a) Excitation of spin waves ( $k_c \approx 10^4 - 10^5 \text{ cm}^{-1}$  and  $\theta_k \approx 45^\circ$ ) in low magnetic field. b) Excitation of long-wavelength modes ( $k_c \rightarrow 0$  and  $\theta_k < 45^\circ$ ) in higher magnetic field

Table. Properties of spherical YIG samples

	$T = 300 \text{ K}$	$T = 4.2 \text{ K}$
saturation magnetization $4\pi M_S$	1780 Oe	2440 Oe
gyromagnetic ratio $\gamma/2\pi$	2.798 MHz Oe $^{-1}$	2.798 MHz Oe $^{-1}$
stiffness constant $D$	$4.48 \times 10^{-9} \text{ Oe cm}^2$	$4.24 \times 10^{-9} \text{ Oe cm}^2$
anisotropy field $H_a, H \parallel \langle 100 \rangle$	+ 90 Oe	+ 260 Oe
$H \parallel \langle 111 \rangle$	- 50 Oe	- 140 Oe
coincidence regime $\omega_p/2\pi$	1.66 - 3.32 GHz	2.28 - 4.56 GHz

**2.2. Experimental Set-up.** A prototype ferromagnet used most often for the investigation of nonlinear spin dynamics is yttrium iron garnet  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  [31]. Its important advantages are a rather strong magnetization even at room temperature and extremely narrow resonance lines of both the uniform mode ( $\Delta H_0 \approx 2 \eta_0/\gamma < 1 \text{ Oe}$ ) and of the spin waves ( $\Delta H_k \approx 2\eta_k/\gamma \approx 0.3 \text{ Oe}$ ) resulting in a very low threshold for spin-wave instabilities. Note that the threshold amplitude in the coincidence regime only amounts to  $h_{c1} \approx \Delta H_0 \Delta H_k / 8\pi M < 1 \text{ mOe}$ , corresponding to an irradiated power of some  $50 \mu\text{W}$ .

In view of such small thresholds, «high power» FMR experiments, in principle, can be performed with a conventional ESR spectrometer. We studied the subsidiary absorption, for example, at 9.3 GHz by means of a bimodal transmission type cavity of quality factor 3000. For our experiments in the coincidence regime we preferred a broad-band (1 - 4 GHz) transmission-type set-up (Fig.2). For the transverse excitation and detection of the uniform mode, instead of a microwave cavity, we used two microcoils with perpendicular orientation in order to minimize mutual disturbances by crosstalk. The squared amplitude of the driving field  $h$  at sample position was proportional to the input power  $P_{in}$  supplied by the microwave source. The signal transmitted to the pick-up coil was amplified and detected by a diode. Within the quadratic regime of the diode, the

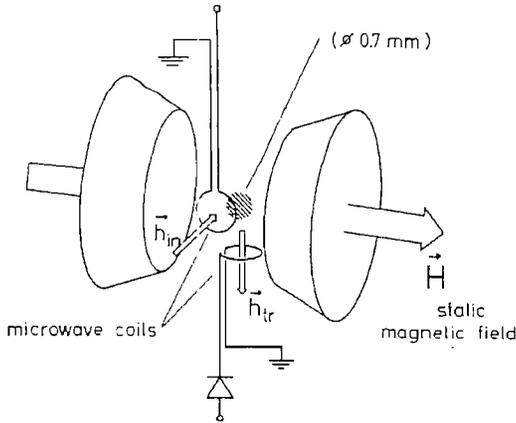


Fig. 2. Experimental set-up. The driving coil (1 - 4 GHz) is directly fed by a very stable microwave generator. The signal transmitted to the pick-up coil is amplified, rectified, and recorded by a digital oscilloscope

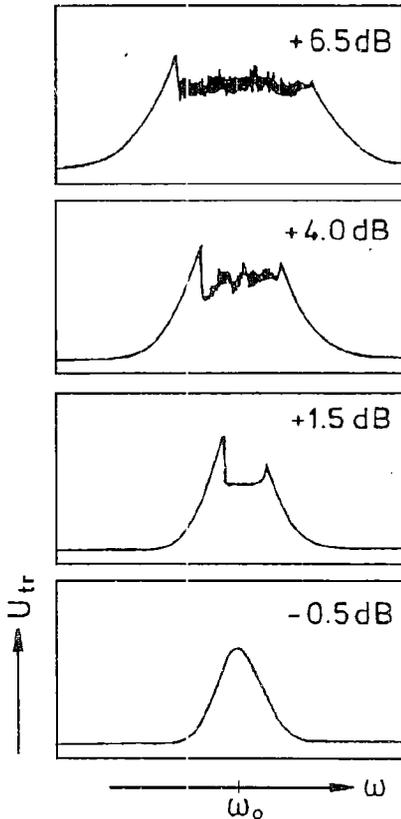


Fig. 3. Shape of the FMR line below and above the Suhl threshold (denoted by «0 dB»). Frequency scale:  $\pm 10 \text{ MHz} \cdot 2\pi$ . The asymmetric breaks show hysteresis effects and time-dependent oscillations

rectified signal was proportional to the squared amplitude  $|b_0|^2$  of the uniform mode, i.e. to the transmitted power  $P_{tr}$ . By means of a digital oscilloscope and an integrating voltmeter we recorded both the time dependence of  $P_{tr}(t)$  and its average value  $P_{tr}$  - with respect to the input power  $P_{in}$ .

The presented data were obtained at room temperature on a highly polished sphere of pure YIG with 0.71 mm diameter. We generally used the orientations  $\mathbf{H} \parallel (100)$ ,  $\mathbf{H} \parallel (111)$ , or the « $30^\circ$  orientation», where the crystal is rotated by  $31.7^\circ$  from the (100) to the (111) direction. For the latter orientation  $H_a$  is exactly zero.

**2.3. Observed Phenomena.** While in conventional off-resonance FMR experiments ( $\omega_p = 2\omega_k \neq \omega_0$ ) the first-order Suhl threshold occurs as a broad «subsidiary» absorption structure in lower field [2], the threshold within the coincidence regime ( $\omega_p = 2\omega_k = \omega_0$ ) shows up even more pronounced as a sharp and asymmetric break at the top of the line. This break becomes broader with increasing input power and shows «noisy» oscillations (Fig.3). The coincidence condition means that  $\omega_p$  and  $H$  are locked to resonance and only varied simultaneously.

The coincidence regime of the investigated YIG sphere was found to range from 1.8 to 3.4 GHz (680 - 1280 Oe for  $\mathbf{H} \parallel (100)$ ). Below 680 Oe the FMR signal vanishes due to the occurrence of magnetic domains. Above 1280 Oe a drastic increase of the threshold takes place, indicating the changeover from the first- to the second-order Suhl instability. The intermediate field range may be divided into three regimes (Fig.4) differing by their characteristic behaviours:

(i) *Regime A* (680-760 Oe): Up to the Suhl threshold  $P_{tr}$  increases linearly with  $P_{in}$ , indicating that only the uniform mode is excited. Above the threshold  $P_{tr}$  remains constant for a range of nearly 10 dB. No oscillations are observed, until finally a sudden jump of  $P_{tr}$  occurs, accompanied by a transition from constant to chaotic time dependence of  $P_{tr}(t)$  and by a weak hysteresis.

(ii) *Regime B* (760-1030 Oe) is characterized by a variety of sudden jumps of  $P_{tr}$  starting directly above threshold, accompanied by the occurrence of a complicated multistability. If  $P_{in}$  is again decreased af-

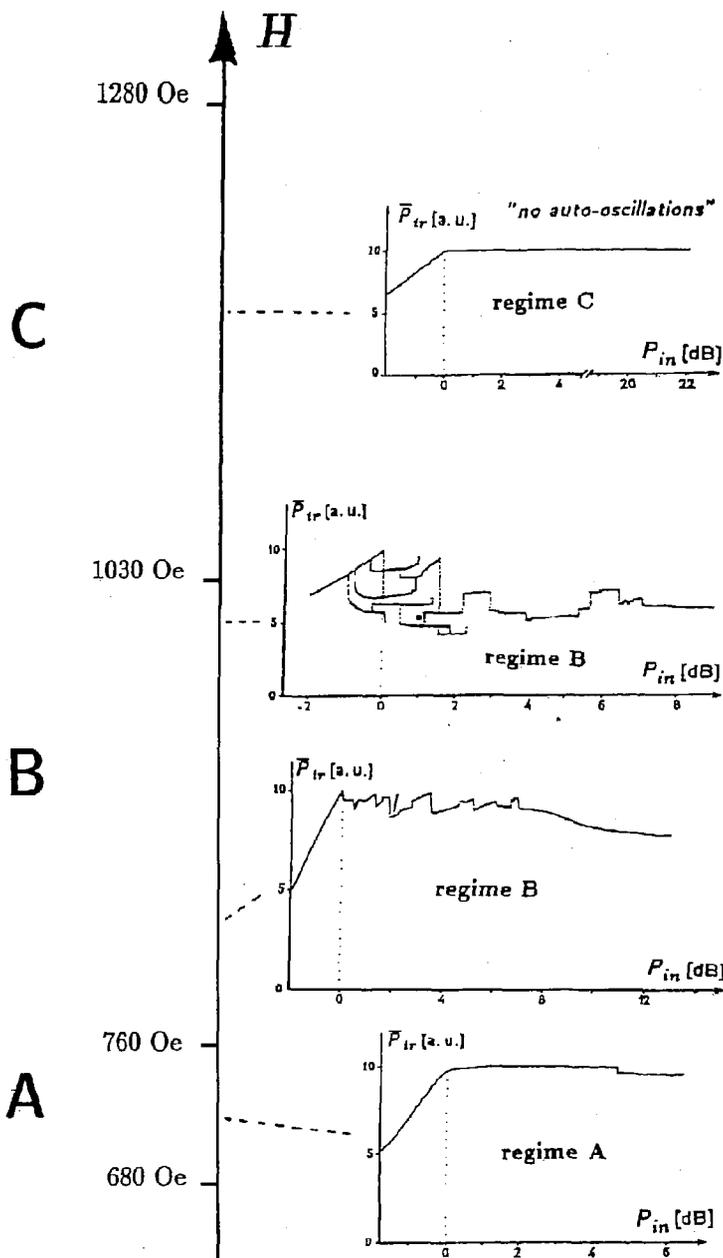


Fig. 4. Average transmitted FMR signal  $P_{tr}$  vs. input power  $P_{in}$  on variation of the magnetic field. Regime B is characterized by a variety of jumps and multistable behaviour which is connected with rather complex time dependences. A and C differ from B by their constant and time independent behaviour above threshold

ter a jump, the system remains on the new level. Variation of  $P_{in}$  yields a number of new levels, i.e. for the same input power there exist several stable states, sometimes up to ten. Simultaneously, the system shows very complex types of time dependence. We observed constant behaviour, periodic and quasiperiodic oscillations, intermittency and chaos. Generally, the oscillation amplitudes are less than 10% of  $P_{tr}$ , and frequencies occur between 10 and 600 kHz, most often between 30 and 200 kHz, apart from higher harmonics. The sudden jumps of  $P_{tr}$  are always accompanied by an abrupt change of the observed time dependence. As long as  $P_{tr}$  remains on the same level,  $P_{tr}(t)$  shows only

continuous variations of the oscillations or bifurcations without any hysteresis (e.g. transitions from constant to periodic, from periodic to quasiperiodic, locking phenomena, period doublings). About 5 - 10 dB above threshold the system becomes chaotic, showing various kinds of irregularity at higher input power, e.g. multiple chaotic attractors, high-dimensional intermittency and crises. Moreover, the corresponding chaotic levels sometimes appear already at lower power within the regime of regular behaviour. The experiment turns out to be very sensitive to the control parameters  $\omega$  and  $H$ ; a detuning of  $H$  by only 0.2 Oe was already sufficient to change the level structure. Nevertheless, the levels could be reproduced even after several weeks.

(iii) *Regime C* (1030-1280 Oe): Qualitatively, the behaviour resembles very much that of regime A.  $P_{in}$  remains constant above the threshold, and oscillations occur only at higher excitation. The transition to chaos also occurs at higher input power (20 - 30 dB above the Suhl threshold).

For other sample orientations ( $\mathbf{H}$  parallel to the (110) or (111) directions) we found very similar behaviour, but the three regimes were shifted in field (by - 100 Oe and - 140 Oe, respectively).

We interpret these different regimes to be related to the different types of parametrically excited modes. It is obvious to identify A with the regime of spin waves with  $k \approx 10^4 - 10^5 \text{ cm}^{-1}$  and  $\theta_k \approx 45^\circ$ , whereas in B and C Suhl's theory predicts the excitation of long-wavelength modes ( $k \rightarrow 0$ ). Apparently, the observed discontinuities in B are related to the discreteness of these modes. The different behaviour of C, however, cannot be understood in terms of the conventional theory, but requires a more detailed discussion [26,29].

**2.4. Scenarios.** Experimentally, one cannot exclude a very fine-graduated locking to rational frequency ratios similar to a devil's staircase, but this would be rather unlikely.

Under the aspect of nonlinear dynamics the most interesting phenomena were observed at coincidence in regime B. To get a more systematic impression of the observed oscillations, a large number of time series of  $P_{in}(t)$  - up to 16000 data points each - was recorded on variation of  $P_{in}$  or some other control parameter. The corresponding power spectra were obtained by Fourier transformation, and their strongest spectral components were plotted versus the parameter under variation. This way, one obtains a number of «maps» visualizing the dependence of the oscillation frequencies on various control parameters. Such maps are useful for classifying the observed routes to chaos.

As a general result, we found that a global correspondence to one of the well-known scenarios of *Feigenbaum*, *Ruelle-Takens-Newhouse* or *Pomeau-Manneville* [32] does not occur, but a variety of parts from all of them. This obviously corresponds to the fact that the nonlinearities of our real system are more complicated and based on a larger number of internal degrees of freedom than represented by the simple maps where these standard routes have been derived from. The physical meaning of these degrees of freedom is probably that of specific eigenmodes or a collective motion of several of them. Thus, a jump from one level to the other might correspond to a sudden change of the number of degrees of freedom induced by the coupling or decoupling of certain modes.

Often quasiperiodicity was observed with up to three fundamental frequencies. A typical example, suggesting an interpretation in terms of the Ruelle-Takens scenario, is shown in Fig.5. Very close above threshold (denoted by «0 dB») the system starts oscillating at about 130 kHz, that means, a first Hopf bifurcation changes the *fixed point* into a *limit cycle*. At 2.5 dB a second fundamental frequency of 40 kHz occurs - corresponding to a second Hopf bifurcation - together with several sum and difference frequencies of harmonics. Note that no jump is observed in  $P_{in}$ . With increasing microwave power both oscillation frequencies seem to vary independently<sup>1</sup>, indicating that the attractor is a *2-torus*. This quasiperiodic oscillation remains stable for about 1dB. Then, according to Ruelle and Takens, one would expect a third Hopf bifurcation and the immediate break of the arising unstable *3-torus* to chaos. The different behaviour observed

<sup>1</sup> Experimentally, one cannot exclude a very fine-graduated locking to rational frequency ratios similar to a *devil's staircase*, but this would be rather unlikely.

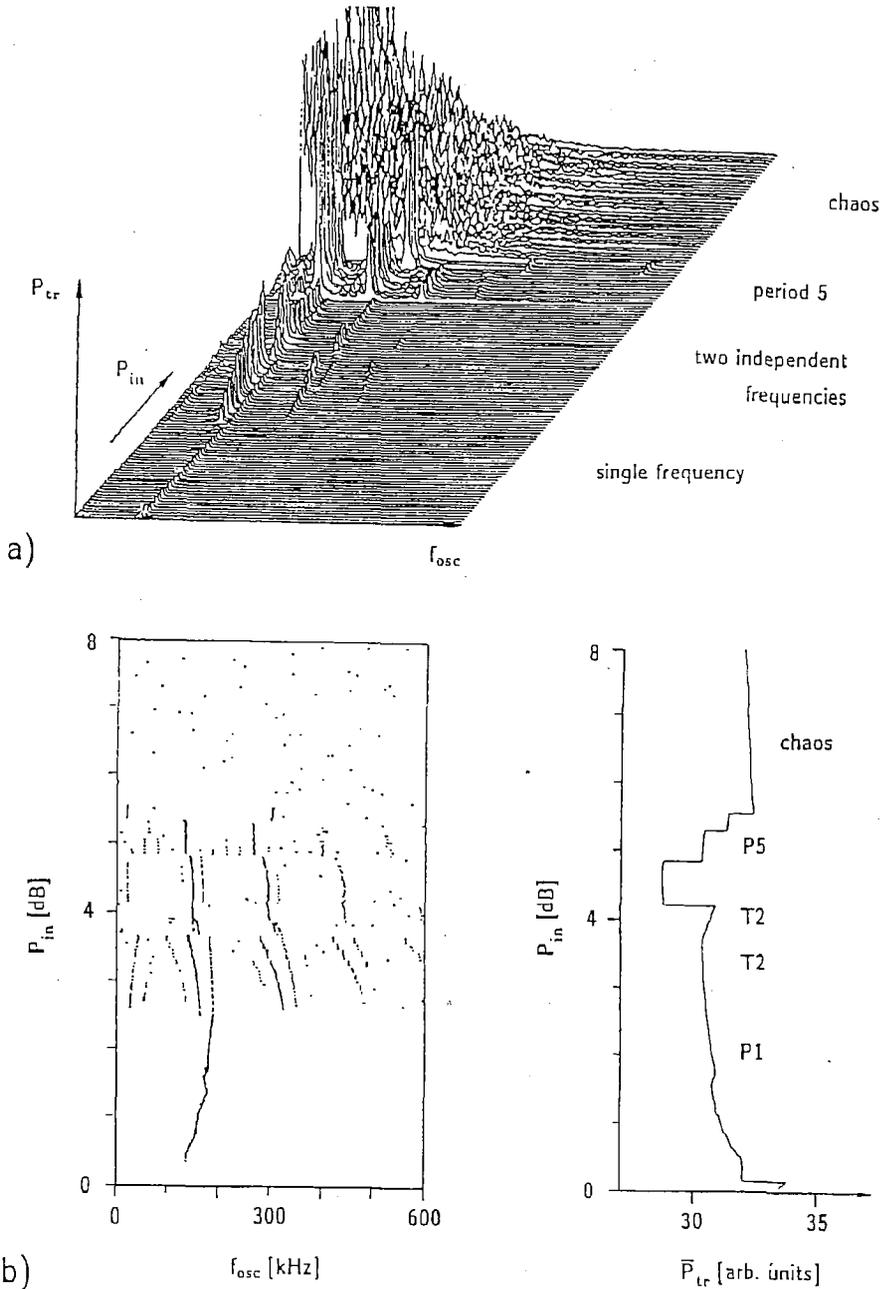


Fig. 5. Power spectra of auto-oscillations in Regime B with respect to  $P_{in}$  (input power is scaled to the Suhl threshold). a) Three-dimensional «landscape» of spectral components. b) «Map» of oscillation frequencies; the corresponding level of  $P_{tr}$  is presented in the r.h.s. diagram. The system shows quasiperiodic behaviour and mode-locking

in our experiment can be interpreted by the spin system switching over to a coexisting stable attractor. Nevertheless, we also found experimental examples where a third fundamental frequency occurred for an extended parameter range. There are other levels where the different frequencies tend to lock. At 5 dB, for instance, instead of quasiperiodicity a period-5 (P5) oscillation takes place. Low-period oscillations, such as P2, P3, P4 or P6 were observed rather often, but sometimes also higher periods of 11 or even 25. The changeover to chaos is generally accompanied by a jump of  $P_{tr}$ . Since in most cases this

changeover does not start from a 2-torus, it cannot be related to the third bifurcation of a Ruelle-Takens scenario. We rather suppose that the chaotic behaviour results from a sudden increase of the number of coupled modes, which is related to some global symmetry-breaking bifurcation [33], and does not follow one of the standard routes.

A period-doubling route, as reported previously from both transverse and parallel pumping experiments [10,12], was observed up to period 8 but occurred rather seldom. More often, only a single period doubling occurred, remaining stable for an extended range of  $P_{in}$  and then changing directly over to chaos. Though the Feigenbaum route is known to be very sensitive to noise which might suppress the subsequent period doublings, we rather interpret the observed behaviour to present an independent route. We also observed a sequence of period triplings (not to confuse with a period-3 window!) up to period 9.

By intermittency we mean the occurrence of a signal which randomly alternates between two (or more) different types of time behaviour, e.g. laminar phases and irregular bursts (Fig.6). Three universal types of intermittency (I - III) have been derived by Pomeau and Manneville [34] corresponding to the basically different ways how a fixed point of a 1D map can lose its stability. Often these types can already be distinguished from their characteristic time behaviour, but also from a reconstruction of the generating map and from the distribution and scaling behaviour of the laminar lengths [32]. Intermittency, so far, has been found rather seldom in magnetic systems, and only the observation of the Pomeau - Manneville type III has been reported in literature [35]. Both in the coincidence regime and for subsidiary absorption we observed various kinds of intermittency starting from a fixed point, a limit cycle, a 2-torus, or even alternating between different chaotic states (Fig.6e,f). From analyzing the distribution and scaling

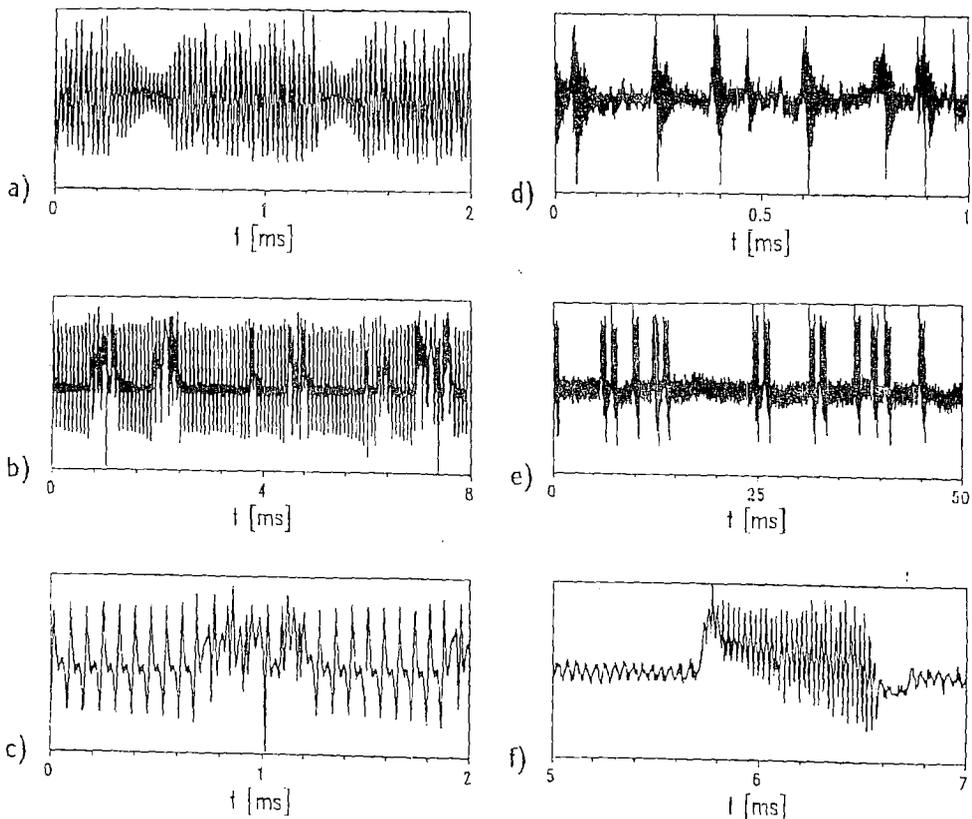


Fig. 6. Different types of intermittency, observed in the coincidence regime (a-c, e, f) and in subsidiary absorption (d). a) Pomeau-Manneville type I, b) type III, c) extended time scale of b). d) Homoclinic crisis. e) Chaos-chaos intermittency due to a global symmetry-breaking bifurcation, f) extended time scale of e)

behaviour of the 'laminar' lengths, the observed signals could clearly be attributed to each of the universal types I, II or III or to crises [33,36]. It is interesting to note that the Pomeau - Manneville types are generally observed in parameter regimes where the system remains *low-dimensional* (see next section), whereas chaos-chaos intermittency occurs at *higher dimension*, especially in the coincidence regime. We found that in most cases chaos-chaos intermittency scaled like the Pomeau - Manneville type III [36] which is not consistent with the common interpretation of arising from a crisis [37]. Very recently this specific behaviour was interpreted in terms of a global symmetry-breaking bifurcation which seems to be related to the excitation of an additional spin-wave mode [33].

For the coincidence regime it is impossible, because of the very complex multistability, to present a global diagram showing the dependence of these various complex scenarios on e.g. magnetic field and microwave input power. For subsidiary absorption, we have systematically analysed the dynamic behaviour of the parametric excitation signal observed at room temperature at a fixed pumping frequency of 9.26 GHz. Typical scenarios and the respective bifurcation lines in a two dimensional control parameter space, spanned by the magnetic field  $H$  and the applied microwave power  $P_{in}$ , are represented in Fig.7. The lower line shows the dependence of the Suhl threshold (the so-called *butterfly curve*) on  $H$ . The broad bumps at 1.6 and 1.9 kOe have been attributed to the excitation of discrete magnetostatic modes [38]. The steep increase of the threshold at 2.2 kOe corresponds to the fact that  $\omega_p/2$  falls below the spin-wave band. The bifurcation line above indicates the onset of autooscillations. The local scenarios occurring at higher  $P_{in}$  show similarities with the behaviour observed at the coincidence regime: again we have three regimes with essentially different behaviours. Especially in B we have areas of period doublings, quasiperiodicity, intermittency, and chaos in very close vicinity, and the observed behaviour depends very much on the chosen variation of parameters. We observed several codimension-2 bifurcations, e.g. at 1650 Oe/11dB where a supercritical Hopf bifurcation meets a subcritical one, giving rise to intermittency of Pomeau - Manneville type II. Intermittency of type III was observed at 1990 Oe/10 dB characterizing the tran-

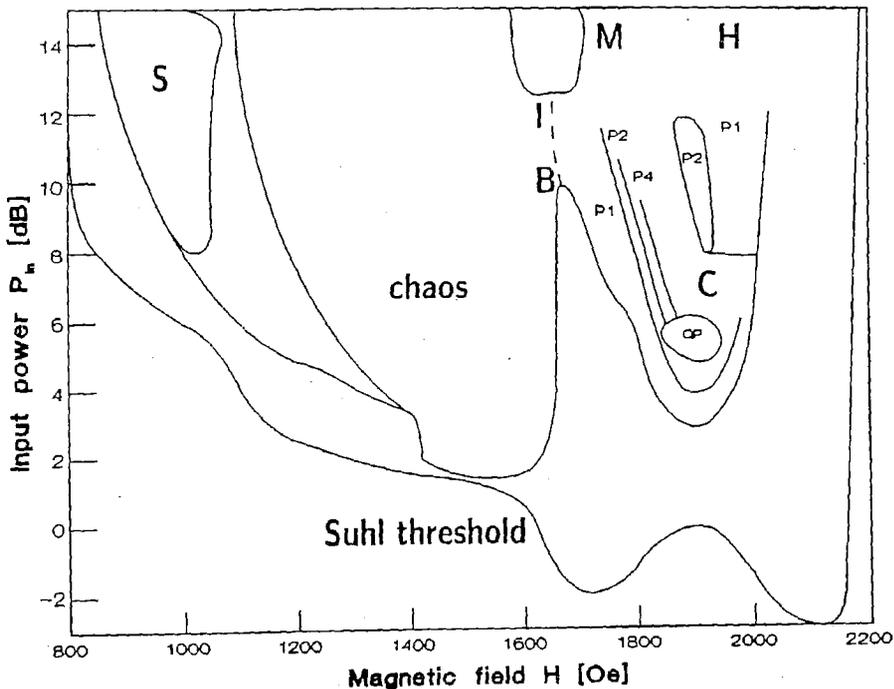


Fig.7. Codimension-2 scenario in subsidiary absorption. The lower line indicates the Suhl threshold, the next upper line the onset of autooscillations. M: multistability, H: homoclinic crisis, S: small amplitude crises, I: intermittency of Pomeau - Manneville type II, B: codimension-2 bifurcation, P1- P4: period doubling bifurcations, QP: quasiperiodic behaviour, C: marginal chaos, application of OGY control

sion from a period-2 oscillation into chaos. At higher power we also observed both homoclinic crises and multistability, which in subsidiary absorption plays only a minor role.

### 3. Characterization of chaos from experimental data

The chaotic behaviour of a dissipative system can be attributed to the existence of a *strange attractor* describing its asymptotic long-time behaviour (without transients) in phase space. The property which makes the attractor strange is its sensitive dependence on the initial conditions: despite the contraction in phase space volume, lengths need not simultaneously shrink in *all* directions, and points, which are infinitesimally close at the beginning, become exponentially separated for sufficiently long times. Specific techniques have been developed to determine the characteristic properties of a strange attractor, e.g. its topological structure or the time scales of exponential separation. For details see e.g. the textbooks by Schuster [32] or Bergé et al. [39].

**3.1. Lyapunov exponents, entropies, dimensions.** In order to quantify specific properties of strange attractors - e.g. its topological structure or the strength of chaos - a special notation has been developed and appropriate methods to probe them.

The distortion of a  $d$ -dimensional volume element in phase space is characterized by a set of *Lyapunov exponents*  $\lambda_i$ ,  $i=1, \dots, d$ , describing the evolution of distances  $\delta x_i$  along the local eigendirections of distortion at a given point  $\mathbf{x}(t_0)$ :

$$\delta x_i(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)} \delta x_i(t_0). \quad (6)$$

Necessary and sufficient for the occurrence of chaos is the condition that at least one of these exponents has to be positive, giving rise to the exponential divergence of neighbouring trajectories.

The *Kolmogorov entropy*  $K$  is the sum of all positive Lyapunov exponents averaged over the whole attractor [40] and, thus, a measure how fast information on the present state of motion gets lost. Its reciprocal value gives the time scale where the behaviour of a chaotic system is still predictable. For example, a regular system (no positive Lyapunov exponent!), which can be predicted for infinite times, has the entropy  $K=0$ . Noise, as a purely stochastic and unpredictable process, is characterized by  $K \rightarrow \infty$ . Chaotic behaviour is somewhere in between, and, again,  $K > 0$  is a necessary and sufficient criterion for the occurrence of deterministic chaos.

Another interesting quantitative characterization of chaotic behaviour is given by a set of *generalized fractal dimensions*  $D_q$  characterizing the topological structure of the attractor:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \log \left( \sum_{i=0}^{M(\varepsilon)} p_i^q \right) / \log \varepsilon, \quad (7)$$

$q$  is an integer classification index,  $M(\varepsilon)$  is the number of phase space cells of size  $\varepsilon$  visited by the attractor and  $p_i$  is the probability to visit the  $i$ -th cell. The  $D_q$  are generalizations of the usual Euclidean dimensions allowing the characterization of self-similar geometrical objects. The  $D_q$  differ by the weight of the local probabilities which is interesting for inhomogeneous attractors.  $D_0$  is the well-known *Hausdorff - Besicovich dimension*,  $D_1$  is called the *information dimension* and  $D_2$  the *correlation dimension*.

All strange attractors investigated so far show fractal, i.e. noninteger, dimensions, so the fractal property is considered as an additional signature of chaos. The physical importance of analyzing the dimension is to get some idea of the minimum number of degrees of freedom necessary for modelling the system.

**3.2. Reconstruction of the phase space.** One of the basic problems when analyzing experimental data concerns the reconstruction of the underlying chaotic attractor from a time series of experimental data representing only a single component  $U(t)$ . Every reconstruction of phase space is based on the implicit assumption that each observable

reflects sufficiently well the overall behaviour of the system to permit a complete analysis. Different methods can be used to define the vectors of the reconstructed space:

(i) The components of a  $d$ -dimensional vector  $\mathbf{x}(t)$  of the new phase space are built up by the signal  $U(t)$  successively shifted in time by a certain delay  $\tau$ :

$$\mathbf{x}(t) = \{U(t), U(t+\tau), \dots, U(t+(d-1)\tau)\}. \quad (8)$$

Because of its simplicity this *method of time delay coordinates* [41] is widely used for the analysis of both experimental data and numerical simulations.

(ii) Instead of using delayed coordinates we can also treat  $U(t)$  and its time derivatives as independent components of a substitute vector

$$\mathbf{x}(t) = \{U(t), \dot{U}(t), \ddot{U}(t), \dots, U^{(d-1)}(t)\}. \quad (9)$$

For data acquisition, generally the second method is more laborious to apply, but it can be of advantage, when the derivative signals are obtained by an analog technique.

The reconstruction does not yield an attractor identical with that in the original phase space, but merely retains general topological properties, which may be sufficient for studying its essentials, such as dimensions, exponents or entropies.

**3.3. Analysis of time series data.** Following the work of Grassberger and Procaccia [42] we confine ourselves to estimates of  $D_2$  and  $K_2$ .

As an example, we present the analysis of correlation dimension and entropy by means of the well-known method of Grassberger and Procaccia [42], applied to the chaotic signals of our experiment.

In a first step, we reconstruct the new phase space vectors  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$  of the attractor by means of the time delay method, as described in the preceding section.

In a second step, from  $N$  of such vectors  $\mathbf{x}_i$  the *correlation integral*<sup>2</sup>

$$C_d(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta[l - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|] \quad (10)$$

is calculated, where  $N$  denotes the total number of data points,  $M$  the number of reference points,  $\Theta(x)$  the Heaviside function,  $l$  a distance parameter and  $\|\mathbf{x}\|$  some arbitrary norm, e.g. Euclidian norm. The correlation integral  $C_d(l)$  counts the number of pairs of  $d$ -dimensional vectors with a distance  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  smaller than a given value  $l$ . Grassberger and Procaccia [36] have shown that for sufficiently large embedding dimensions the correlation integral scales like  $l^{D_2}$  and, therefore, can be used to estimate the correlation dimension:

$$D_2 \approx \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log C_d(l)}{\log l}. \quad (11)$$

To this end,  $\log C_d(l)$  is plotted vs.  $\log l$  (Fig.8). In practice, since the limit  $l \rightarrow 0$  cannot be reached, the slope of the curve is taken instead. The limit  $d \rightarrow \infty$  is not essential and is taken only to guarantee a proper embedding. In addition, the correlation entropy  $K_2$  can be obtained from the vertical distance of two neighbouring curves  $\log C_d(l)$  and  $\log C_{d+1}(l)$  at fixed  $l$  [42]:

$$K_2 \approx - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} (\log C_{d+1}^2(l) - \log C_d^2(l)). \quad (12)$$

Here, the limit  $d \rightarrow \infty$  results from the original definition of  $K_2$  [32] and is necessary to obtain the correct asymptotic behaviour.

In order to get some idea of the minimum number of relevant degrees of freedom involved in the evolution, we have systematically analysed the correlation dimension of our data. To this end we have evaluated a large number of time series of  $P_{rr}(t)$ , up to

<sup>2</sup> Following the work of Grassberger and Procaccia [42] we confine ourselves to estimates of  $D_2$  and  $K_2$ .

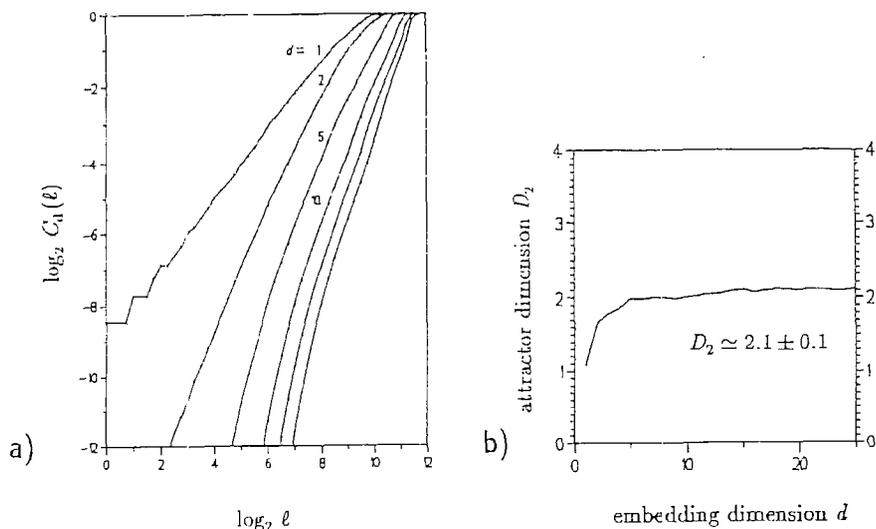


Fig. 8. Grassberger - Procaccia analysis of a chaotic signal. a) Log-log plot of the correlation function vs. distance parameter  $l$ . b) Attractor dimension  $D_2$  as a function of the embedding dimension. The chaotic signal investigated was observed in subsidiary absorption at  $\omega/2\pi=9.26$  GHz,  $H=1.83$  kOe and  $P_{in}=7.5$  dB (see Fig.7)

16000 points each, taken from the whole investigated parameter range. For regular signals we found values of  $D_2$  close to 1 or 2, in some cases even close to 3, as expected from the power spectra. A typical signal observed at subsidiary absorption is presented in Fig.8. Our analysis yields a correlation dimension of  $2.1 \pm 0.1$ , indicating very weak («*marginal*») chaos, and a correlation entropy of about  $0.04(\mu s)^{-1}$ .

In the coincidence regime chaotic signals, in general, showed higher dimensions ranging from 5 to larger than 15. We already mentioned that multistability also occurs in the chaotic regime, indicating the coexistence of several strange attractors (Fig.9). At 10 dB e.g. there occur two separate levels of chaotic oscillations differing markedly in amplitude, but also in fractal dimension. We even observed a different tendency of variation with respect to the control parameter; while on the lower level  $D_2$  was found to increase with  $P_{in}$ , it was decreasing on the upper one.

In total, this analysis supports our earlier impression that jumps of  $P_{ir}$  are related to discontinuous changes of relevant degrees of freedom. As long as the system remains on the same level, only slight and continuous changes of  $D_2$  occur on variation of  $P_{in}$ , whereas  $D_2$  changes drastically at every jump. It is obvious to ascribe such behaviour to some nonlinear mechanism «switching certain modes on or off» with respect to the control parameters and to the previous state of the system. This idea is supported by the model developed by Wiese [26-28], which is based on a novel indirect coupling via degenerate magnetostatic modes.

#### 4. Controlling chaos

This choice of coordinates, in addition, avoids a possible instability of the controlling algorithm which may occur in the case of time-delay coordinates [47]. A general problem of current interest concerns the possibility of *controlling* the chaotic behaviour of nonlinear systems, which means to change the irregular into a regular behaviour, without drastically affecting the system parameters. The practical use of such a control would be to suppress undesired irregularity and to select among a large number of possible regular oscillations by just applying rather small controlling power.

Different strategies have been proposed how to achieve such a control:

(i) Modulation methods are either based on the synchronization to an external pe-

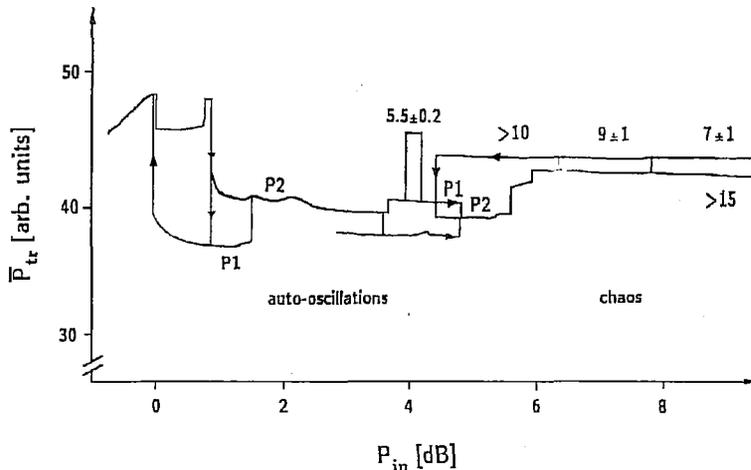


Fig. 9. Correlation dimensions estimated by the method of Grassberger and Procaccia (coincidence regime B,  $H=839$  Oe). Two chaotic levels occur above 7 dB, differing in amplitude and dimension

riodic force with a frequency close to an intrinsic system frequency [43] or on the change of stability induced by a fast modulation of some system parameter [44]. A prominent example of the latter method is represented by the well-known Kapitza pendulum [45]. These simple non-feedback methods generally require rather large control power.

(ii) More sophisticated feedback control methods aim at the stabilization of existing, system inherent unstable periodic orbits. This can be achieved by a simple time-delayed feedback [46] or by calculated time-dependent corrections on one of the system parameters as proposed by OGY [30]. Since these techniques are making use of the intrinsic properties of the underlying chaotic attractor they can, in principle, be run with very small controlling power.

**4.1. Method of OGY.** The algorithm of OGY is based on the idea that chaotic attractors are generally embedded in an infinite number of unstable periodic orbits. If the trajectory comes into the vicinity of such a hyperbolic orbit, it approaches the orbit as long as the distance vector is located close to the *stable manifold*, and leaves it again in the direction of the *unstable manifold* (Fig.10). Since these processes evolve exponentially in time, they are rather slow in the vicinity of the orbit and can be affected by weak external perturbations. Unstable periodic orbits can be detected by means of the recurrence time method. In order to stabilise one of these orbits, one first has to calculate the evolution of a trajectory in its neighbourhood. Technically, this is achieved by reconstructing the trajectory (of e.g. a 3D flow) from a time series by means of time-delayed coordinates [41]. The problem is simplified by applying a Poincaré section perpendicular to the unstable periodic orbit, thus converting the 3D flow to a 2D discrete map (Fig.10). This way, the unstable periodic orbit is mapped to a hyperbolic fixed point  $\xi_F(\mu_0)$  the stability of which has to be analysed. From the evolution of previous intersection points the stable and unstable eigenvalues  $\lambda_s$  and  $\lambda_u$  and the respective eigendirections  $\mathbf{e}_s$  and  $\mathbf{e}_u$  are determined. Such analysis yields a linearized prediction of the system dynamics in the neighbourhood of  $\xi_F(\mu_0)$  where the evolution matrix can be expressed in terms of the stable and unstable eigenvalues ( $\mathbf{e}_{s,u}$  and  $\mathbf{e}_{s,u}^*$  denote the covariant and contravariant eigenvectors, respectively):

$$\xi_{n+1}(\mu_0) - \xi_F(\mu_0) \approx (\mathbf{e}_s \lambda_s \mathbf{e}_s^* + \mathbf{e}_u \lambda_u \mathbf{e}_u^*) [\xi_n(\mu_0) - \xi_F(\mu_0)]. \quad (13)$$

Next, one considers a small change of the control parameter  $\mu$  and calculates the corresponding shift  $\mathbf{g}$  of this fixed point:

$$\mathbf{g} \equiv \partial \xi_F(\mu) / \partial \mu|_{\mu_0} \approx [\xi_F(\mu) - \xi_F(\mu_0)] / (\mu - \mu_0). \quad (14)$$

The basic idea of OGY is to shift the fixed point and the corresponding evolution for a

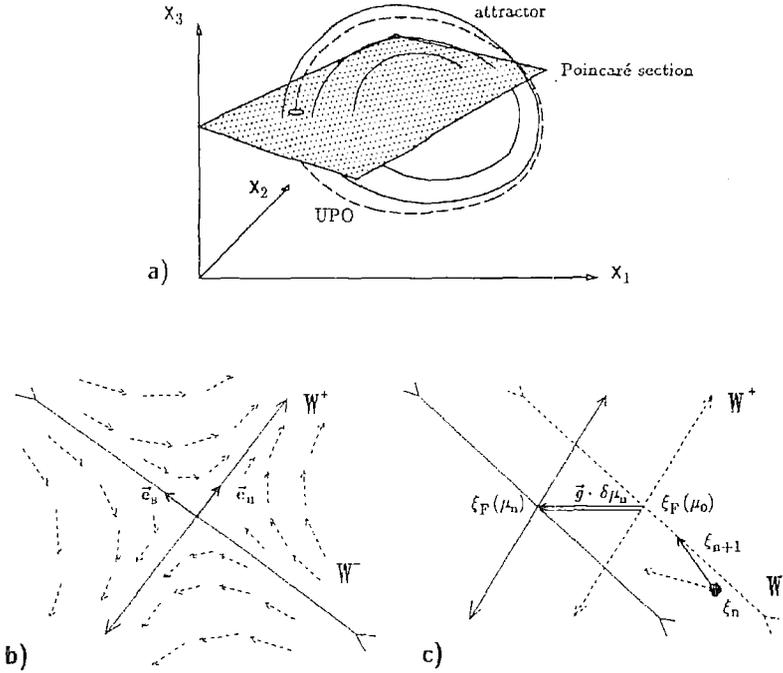


Fig. 10. Controlling scheme of OGY. a) Poincaré section and unstable periodic orbit. b) Neighbourhood of the fixed point  $\xi_F$  with stable and unstable manifolds  $W^-$  and  $W^+$ ; dashed lines indicate shift of intersection points after one cycle. c) Effect of a small change of the control parameter  $\mu$  (see text)

short time in such a way that after one cycle the system - described by  $\xi_{n+1}(\mu \neq \mu_0)$  - ends up on the *stable manifold* of the original fixed point  $\xi_F(\mu_0)$ , and then to switch the perturbation off again. This way the following intersection points  $\xi_{n+2}(\mu_0)$ ,  $\xi_{n+3}(\mu_0)$ , ... exactly approach the fixed point without being repelled, i.e. after a well-targetted perturbation the intrinsic dynamics of the system is used for stabilizing the trajectory at the unstable periodic orbit. The value of this perturbation is obtained by combining eqs. (13), (14), and the condition that  $\xi_{n+1}(\mu)$  be orthogonal to the unstable manifold:

$$\Delta\mu = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{(\xi_F(\mu_0) - \xi_F(\mu_n)) \mathbf{e}_u^*}{\mathbf{g} \mathbf{e}_u^*}. \quad (15)$$

Once the system has approached the orbit, the still necessary corrections (due to linearization error and noise) can be maintained by very small perturbations. Though originally developed for discrete maps, this concept can also be applied in low-dimensional continuous flows, but in practice is limited to only one unstable direction.

In contrast to our device Hunt is using a stroboscopic mapping for the Poincaré section and only one window, so his device is limited to non-autonomic, periodically driven systems.

**4.2. Control by analog feedback device.** Although the OGY method should apply to real experimental systems as well, in practice its application is restricted for the following reasons:

(i) Experimental systems often show high-dimensional chaos (*hyperchaos*), i.e. there is more than one unstable direction.

(ii) The measured signal is disturbed by noise; this may either prevent the control to work at all, if in the case of strong noise the system is pushed away from the neighbourhood of the fixed point, or at least reduces the sensitivity of the feedback in the case of weak noise.

(iii) The characteristic time scale of real systems can be too fast. For the magnetic

system investigated typical cycle times are in the order of  $\mu\text{s}$  (!), whereas the numerical calculation of the feedback signal requires at least some ms.

The first problem might be overcome by selecting only chaotic signals of sufficiently low dimensionality. Our Grassberger - Procaccia analyses showed that this is nearly impossible for the coincidence regime but rather easy to obtain in the case of non-resonant subsidiary absorption. Letter «C» in Fig.7 marks the corresponding range of control parameters where weak (*marginal*) chaos was observed. The chaotic signal to be controlled (Fig.12) was of the same type as analysed in Fig.8, which means characterized by  $D_2 = 2.1 \pm 0.1$ , only one positive Lyapunov exponent  $\lambda_1 = 0.04(\mu\text{s})^{-1}$ , and a mean cycle time of about  $2 \mu\text{s}$ .

Since it was impossible to make numerical-real-time predictions for a time scale of  $\mu\text{s}$  we had to modify the OGY algorithm in a way to be processed by an intelligent analog feedback device: For reconstructing the attractor we used analog time derivatives instead of time delay coordinates<sup>3</sup>. The Poincaré plane and the location of intersection points were determined by analog window discriminators for the signal and its first and second time derivatives triggering a track-and-hold amplifier (Fig.11a). The amplitude of the control signal was not determined from a preceding stability analysis of the periodic orbit. Instead, we used a feedback signal which is proportional to the deviation of the momentary signal  $U(t_n)$  from the set-point (the « $\bar{U}$ -coordinate» of the phase space window to be adjusted to the position of the unstable orbit)

$$U_{\text{contr}}(t_n) = A[U(t_n) - U_{\text{ref}}] \quad (16)$$

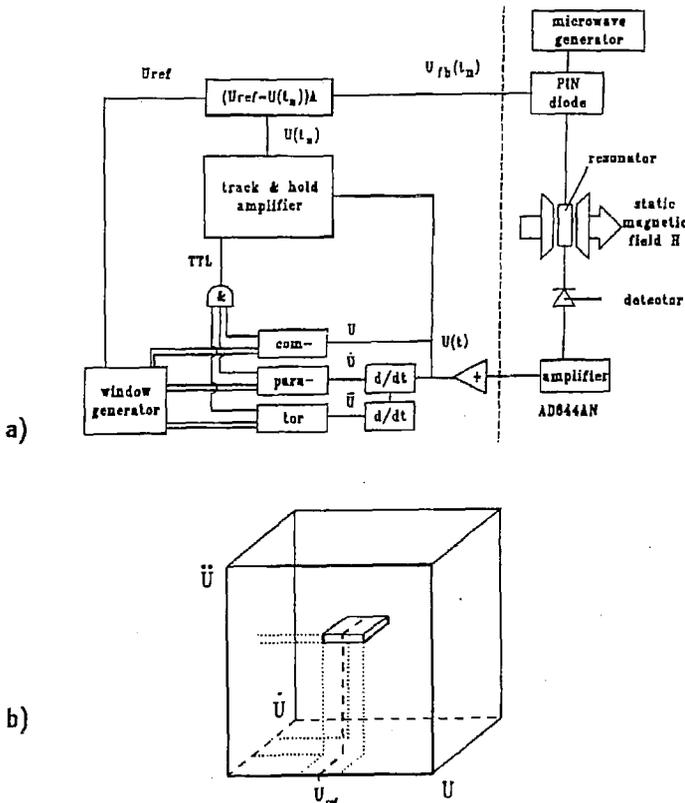


Fig. 11. Analog feedback device for controlling the chaotic FMR signal. a) Experimental set-up. b) Reconstruction of the phase space by means of analog derivatives. The small probe volume can be moved around by varying the settings of the window generator

<sup>3</sup> This choice of coordinates, in addition, avoids a possible instability of the controlling algorithm which may occur in the case of time-delay coordinates [47].

and variate the phase space coordinates in order to meet the neighbourhood of some unstable periodic orbit where the given feedback results in a proper control. A similar technique<sup>4</sup> was applied by Hunt [48] for controlling a diode-capacity resonator who called it *occasional proportional feedback*. There is complete correspondence of Eq.(16) to the original result of OGY, Eq.(15), identifying the amplification factor  $A$  with  $\lambda_u(\lambda_u - 1)^{-1}(\mathbf{g}\mathbf{e}_u)^{-1}$  and the deviation  $U(t_n) - U_{ref}$  with  $(\xi_u(\mu) - \xi_r(\mu))\mathbf{e}_u$ .

In our experiment the position of the unstable periodic orbit was selected by setting windows for the observed signal  $U(t)$  and its first and second time derivative by means of analogy window comparators. The corresponding signal was held by an ultrafast track-and-hold amplifier. The deviation of this value from a given set-point is fed back to change the microwave pumping power. By careful adjustment of the windows and variation of the set-point we succeeded in suppressing the chaotic oscillations and stabilizing periodic orbits by means of a perturbation which is less than  $10^{-3}$  of the actual pumping power  $P_{in}$ . The effect of control is illustrated by Fig. 12, where we have compared the chaotic signal before and after switching on the feedback. The controlled signal shows a very regular oscillation, and the corresponding phase space trajectory, in fact, consists of a single orbit slightly smeared out by noise. To our knowledge this is the first and fastest

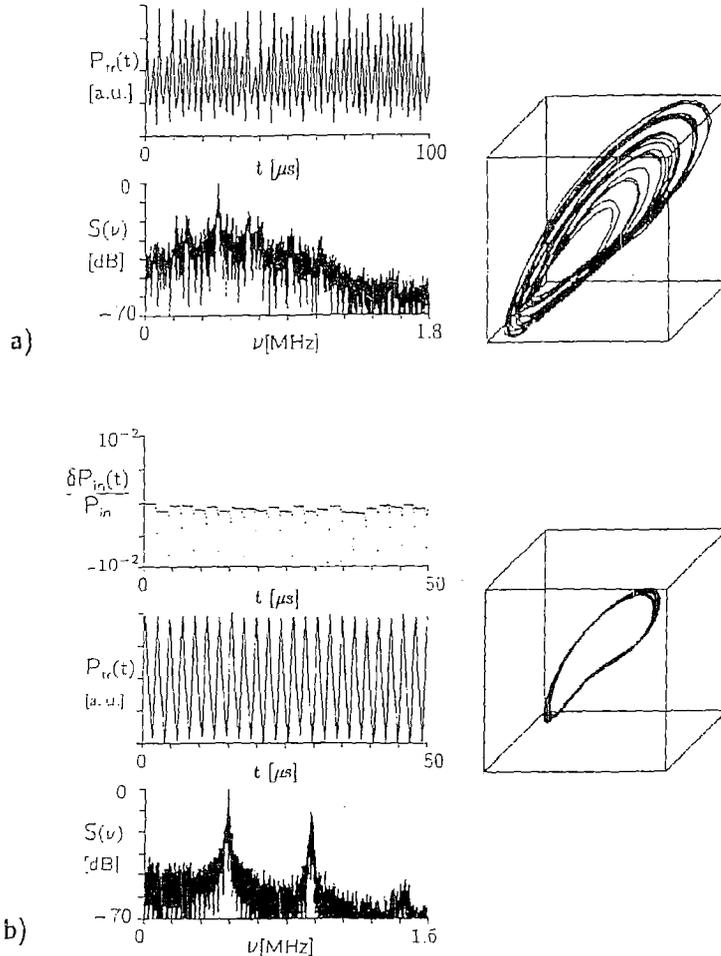


Fig. 12. Result of the feedback control. a) Chaotic time signal, spectrum and reconstructed attractor without control. b) Control signal, regular oscillations, spectrum and stabilized orbit after having switched on the control

<sup>4</sup> In contrast to our device Hunt is using a stroboscopic mapping for the Poincaré section and only one window, so his device is limited to non-autonom, periodically driven systems.

experimental control of chaos in spin-wave turbulence using a feedback system which stabilizes the inherent periodic dynamics of a strange attractor.

## 5. Conclusions

The experimental results presented in this article indicate that transverse-pumped YIG spheres at the first-order Suhl instability are of particular interest for studying concepts of nonlinear dynamics in real solids. The experimental conditions differ from the more often investigated second-order Suhl instability or from parallel pumping by the variety and complexity of the observed phenomena, and also by more complicated nonlinear mechanisms. Most of the effects reported in previous investigations, such as period doublings, quasiperiodicity, or mode-locking, have been observed in this system, but also new phenomena were found: sudden jumps in the transmitted FMR signal and a well reproducible multistability. We have tried to classify the observed bifurcation scenarios, to characterize the chaotic state, and to draw physical conclusions from this information. For a quantitative theoretical interpretation of these phenomena based on three-magnon processes and a novel indirect coupling mechanism via degenerate modes, which was found to be much stronger in the coincidence regime than conventional four-magnon processes, we refer to the literature [26-29]. Finally, as a first possible application of nonlinear dynamics, we have considered the problem of chaos suppression effected by very weak external forces. By means of an analog feedback device related to the controlling scheme of Ott, Grebogi, and Yorke we succeeded in stabilizing inherent unstable periodic orbits with the help of very weak external time-dependent perturbations.

Altogether, we have seen that the investigation of spin systems represents a very interesting topic both from the viewpoint of solid-state physics and of nonlinear dynamics. The reasons are manifold:

(i) They represent intrinsically nonlinear systems with nonlinearities originating from well-known interactions.

(ii) Their nonlinearities can partly be controlled by external fields - as in the present example.

(iii) Their nonlocal couplings allow the formation of spatio-temporal patterns. Nevertheless, in experiment one meets the problem that most of the interesting phenomena in spin systems occur on rather inconvenient time and length scales. While the time scale of auto-oscillations - typically one microsecond - remains accessible by modern electronics, it has been impossible so far to resolve dynamic magnetic patterns of micrometer size. Conventional magnetic resonance only probes the uniform mode, optical scattering experiments, in general, suffer from too low resolution. Very recently, new techniques for recording the local magnetization have been developed [49,50]. If they could be improved to probe standing spin waves, then again the coincidence regime would offer favourite conditions, because of the long-wavelength modes involved. Such investigations could be of crucial importance for confirming or modifying our present understanding of the underlying nonlinear mechanisms.

## Acknowledgements

We thank Prof. Dr. W. Tolksdorf from Philips Research Laboratory, Hamburg, for supplying us with high quality samples. This project of SFB 185 «Nichtlineare Dynamik» was partly financed by special funds of the Deutsche Forschungsgemeinschaft.

## References

1. R.W. Damon in: Magnetism, Vol. 1, ed. by G.T. Rado and H. Suhl (Academic, New York 1963) pp. 551.
2. R.W. Damon: Rev. Mod. Phys. **25**, 239 (1953).
3. N. Bloembergen, S. Wang: Phys. Rev. **93**, 72 (1954).
4. F.R. Morgenthaler: J. Appl. Phys. **31**, 95S (1960).
5. E.S. Schlömann, J.J. Green, U. Milano: J. Appl. Phys. **31**, 386S (1960).
6. H. Suhl: J. Phys. Chem. Solids **1**, 209 (1957).
7. V.E. Zakharov, V.S. L'vov, S.S. Starobinets: Sov. Phys. Usp. **17**, 896 (1975).

8. V.S. L'voy, L.A. Prozorova in: Spin Waves and Magnetic Excitations, Vol. 1, ed. by A.S. Borovik-Romanov and S.K. Sinha (Elsevier, Amsterdam 1988) pp. 233-285.
9. Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials ed. Ph. E. Wigen (World Scientific, Singapore, New Jersey 1994).
10. G. Gibson, C. Jeffries: Phys. Rev. A **29**, 811 (1984).
11. F. Waldner, D.R. Barberis, H. Yamazaki: Phys. Rev. A **31**, 420 (1985); H. Yamazaki, M. Warden: J. Phys. Soc. Jpn. **55**, 4477 (1986).
12. F.M. de Aguiar, S.M. Rezende: Phys. Rev. Lett. **56**, 1070 (1986); F.M. de Aguiar, A. Azevedo, S.M. Rezende: Phys. Rev. B **39**, 9448 (1989).
13. T.L. Carroll, L.M. Pecora, F.J. Rachford: J. Appl. Phys. **64**, 5396 (1988); Phys. Rev. A **42**, 377 (1989).
14. H. Benner, F. Rödelsperger, H. Seitz, G. Wiese: J. de Physique, Colloque C8, **49**, 1603 (1988); H. Benner, F. Rödelsperger, G. Wiese, in: Nonlinear Dynamics in Solids, ed. H. Thomas (Springer, Berlin, Heidelberg 1992).
15. M. Warden, F. Waldner: J. Appl. Phys. **64**, 5386 (1988).
16. P. E. Wigen, H. Dötsch, M. Ye, L. Baselgia, F. Waldner: J. Appl. Phys. **63**, 4157 (1988).
17. P.H. Bryant, C.D. Jeffries, K. Nakamura: Phys. Rev. A **38**, 4223 (1988).
18. H. Yamazaki, M. Mino: Progr. Theor. Phys. Suppl. **98**, 400 (1989).
19. K. Nakamura, S. Ohta, K. Kawasaki: J. Phys. C **15**, L 143 (1982).
20. X.Y. Zhang, H. Suhl: Phys. Rev. A **32**, 2530 (1985).
21. S.M. Rezende, O.F. de Alcantara Bonfim, F.M. de Aguiar: Phys. Rev. B **33**, 5153 (1986).
22. X.Y. Zhang, H. Suhl: Phys. Rev. B **38**, 4893 (1988).
23. S.P. Lim, D.L. Huber: Phys. Rev. B **37**, 5426 (1988).
24. V.B. Cherepanov, A.N. Slavin: Phys. Rev. B **47**, 5874 (1993).
25. F. Waldner: J. Phys. C **21**, 1243 (1988).
26. G. Wiese, H. Benner: Z. Phys. B **79**, 119 (1990).
27. G. Wiese, H.-A. Krug von Nidda, H. Benner: Europhys. Lett. **15**, 585 (1991).
28. G. Wiese: Z. Phys. B **82**, 453 (1991).
29. H.-A. Krug von Nidda, G. Wiese, H. Benner: Z. Phys. B **95**, 55 (1994).
30. E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke: Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).
31. Landolt-Börnstein: New Series, Vol. III/4a (Springer, Berlin, Heidelberg 1970) p. 315.
32. see e.g. H.G. Schuster: Deterministic Chaos (2. rev. ed.) (VCH, Weinheim 1988).
33. F. Rödelsperger, Chaos und Spinwelleninstabilitäten (Harri Deutsch, Frankfurt 1994); F. Rödelsperger, H. Benner, A. Cenys, to be published.
34. Y. Pomeau, P. Manneville: Commun. Math. Phys. **74**, 189 (1980).
35. F.M. de Aguiar: Phys. Rev. A **40**, 7244 (1989).
36. F. Rödelsperger, T. Weyrauch, H. Benner: J. Magn. Magn. Mater. (1992).
37. C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke: Physica 7D, 181 (1983); C. Grebogi, E. Ott, F. ROMEIRAS, J.A. Yorke: Phys. Rev. A **36**, 5365 (1987).
38. C.E. Patton, W. Jantz: J. Appl. Phys. **50**, 7082 (1979); M. Chen, C.E. Patton: J. Appl. Phys. **69**, 5724 (1991).
39. P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal: Order within Chaos (Wiley, New York 1986) pp. 247-258.
40. Y.B. Pesin: Usp. Mat. Nauk **32**, 55 (1977).
41. F. Takens in: Lecture Notes in Mathematics, ed. by D. A. Rand and L.S. Young (Springer, Berlin, Heidelberg 1981) Vol. 898, p. 366.
42. P. Grassberger, I. Procaccia: Physica 9D, 189 (1983); Phys. Rev. A **28**, 2591 (1983).
43. V.V. Alekseev, A.Yu. Loskutov: Dokl. Akad. Nauk SSSR **293**, 1346 (1987); R. Lima, M. Pettini: Phys. Rev. A **41** (1990) 726; *ibid.* **47**, 4630 (1993).
44. S. Parthasarathy: Phys. Rev. A **46**, 2147 (1992); Y.S. Kivshar, F. Rödelsperger, H. Benner: Phys. Rev. E **49** (1994) 319.
45. L.D. Landau, M. Lifshitz, Mechanics (Pergamon Press, Oxford, 1960).
46. K. Pyragas: Phys. Lett. A **170** (1992) 421.
47. U. Dressler, G. Nitsche: Phys. Rev. Lett. **68**, 1 (1992).
48. E.R. Hunt, Phys. Rev. Lett. **67**, 1953 (1991).
49. D. Rugar, H.J. Mamin, R. Erlandson, J.E. Stern, B.D. Terris: IBM Research Report RJ 6272 (1988).
50. J. Pelzl, B.K. Bein: Phys. Bl. **46**, 12 (1990); F. Rödelsperger, O. von Geisau, H. Benner, J. Pelzl: Proc. XXVI Congress Ampère on Magnetic Resonance, Athens 1992, p. 116.

## АНАЛИЗ И НАБЛЮДЕНИЕ ХАОСА ПРИ СПИН-ВОЛНОВОЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ

Г. Беннер, Р. Хенн, Ф. Рёдельшпергер, Г. Визе

Ферромагнитные образцы, возбуждаемые сильным высокочастотным полем, демонстрируют разнообразные нелинейные явления. Описываются эксперименты по ферромагнитному резонансу в образцах железо-иттриевого граната (ЖИГ) обнаруживающие спин-волновую нестабильность при сигналах выше порогового уровня первого порядка по Сулу. Выявлено и проанализировано множество различных сценариев, а именно: удвоение периода, квазипериодичность, различные типы перемежаемости совместно с очень сложными явлениями мультистабильности. В случае нерезонансного возбуждения однородной моды исследуемые хаотические колебания относятся к низко-размерному аттрактору ( $D_2 \approx 2.1$ ) с характерным временным масштабом порядка  $\mu s$ , в то время как для резонансного возбуждения получаются очень высокоразмерные аттракторы ( $D_2 \approx 7 \dots > 15$ ). Для стабилизации неустойчивых циклов в такой быстрой системе разработано устройство с обратной связью, относящееся к управляющей схеме Ott, Grebogi и Yorke. Подавление низко-размерного хаоса осуществлялось введением малого (зависимого от времени) сигнала обратной связи порядка  $10^{-3}$  амплитуды входного высокочастотного поля.



*Benner Hartmut* - born in 1945. Diploma in Physics at Technische Hochschule Darmstadt (THD), Scholarship of *Studienstiftung des deutschen Volkes* (1973). Ph.D. thesis on non-Markovian dynamics in magnetic low dimensional systems (1979). Visiting Scientist at Centre d'Etude Nucleaires de Grenoble, France (1981). Habilitation on nonlinear spin dynamics in magnetic insulators (1988). Head of the experimental Non-linear Spin Dynamics Group at the Institute of Solid State Physics, THD, probing nonlinear phenomena in magnetic systems by means of resonance techniques (NMR, FMR, AFMR). Scientific interests: High temperature and critical dynamics of low-dimensional Heisenberg magnets; Topological solitons in ferro- and antiferromagnetic spin chains; Spin-wave turbulence; Parametric excitation of nuclear spin waves and magneto-elastic waves; Theory of solitons and chaos; Analysis of time series data; Chaos control; Stochastic resonance; Pattern formation in magnetic films. More than 60 publications.



*Henn Rüdiger* - born in 1965. Diploma in Physics at Technische Hochschule Darmstadt, Thesis on chaos control in fast experimental systems (1993). Now at Max Planck Institute for Solid State Research, Stuttgart, preparing a Ph.D. thesis on superconductivity in low-dimensional metals.



*Rödelsperger Frank* - born in 1963. Diploma in Physics at Technische Hochschule Darmstadt, Thesis on experimental and theoretical analysis of time series data (1989). Ph.D. thesis on concepts of nonlinear dynamics in spin-wave instabilities (1994). Scientific interests: Spin-wave instabilities and chaos observed by high-power FMR; Theory of chaos; Analysis of time series data; Chaos control in spin systems. About 15 publications, author of a book on Spin-wave instabilities and Chaos. Now chief efficiency expert at Gaggenau Industries, Germany.



*Wiese Garrelt* - born in 1962. Diploma in Physics at Technische Hochschule Darmstadt (THD), Thesis in experimental solid state physics (1986). Ph.D. thesis on instabilities and chaos in high-power ferromagnetic resonance experiments (1991). Visiting Scientist at the Department of Physics of Colorado State University (1992). Scientist at the Institute of Solid State Physics, THD, Scholarship of German Research Foundation (DFG) (1993). Scientific interests: Microwave and light scattering spectroscopy; Spin-wave instabilities and chaos observed by high-power FMR; Theory of parametric excitation of spin waves in ferromagnetic spheres and films; Analysis of chaos. More than 20 publications. Now project manager at Telekom, Germany.



## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

*А.И. Землянухин, Л.И. Могилевич*

Проанализирована эволюция нелинейных продольных волн в упругих и нелинейно-упругих цилиндрических оболочках. В упругих оболочках выявлены одномерные и двумерные солитоны уравнений КдВ и Кадомцева - Петвиашвили. Показано, что в нелинейно-упругих оболочках существуют одномерные солитоны уравнения мКдВ. Учет диссипативных эффектов позволил получить для компоненты продольной деформации эволюционные уравнения, близкие к интегрируемым.

Два последних десятилетия отмечены значительными успехами в исследовании нелинейных волновых процессов в акустических волноводах. Эти успехи связаны, главным образом, с развитием быстро прогрессирующей теории солитонов. Теоретическое обоснование существования солитонов деформаций в стержнях и пластинах и положительные результаты их экспериментального наблюдения [1,2] позволили существенно расширить имеющиеся представления о нелинейной динамике деформируемых твердых тел. Между тем, нелинейный волновой процесс в цилиндрических оболочках, волноводные свойства которых находят широкое практическое применение, изучен недостаточно. Поэтому целью настоящего исследования является анализ распространения нелинейных волн деформаций в упругих и нелинейно-упругих цилиндрических оболочках с позиций теории солитонов.

При решении динамических задач теории тонких оболочек обычно используются два основных подхода. Первый подход (классический) базируется на гипотезах Кирхгофа - Лява, а соответствующие модели оболочек называют моделями первого приближения. Второй подход, связываемый с именем С.П. Тимошенко, в дополнение к «классическим» деформациям, учитывает деформации, связанные с поперечными силами и инерцией вращения. Модели, основанные на таком подходе, называются моделями второго приближения [3]. Уравнения движения для модели первого приближения имеют параболический тип, тогда как во втором случае получаются уравнения гиперболического типа, наиболее часто используемые при описании волновых явлений. Между тем, в статье [4] было показано, что при исследовании эволюции нелинейных продольных волн в оболочках оба подхода приводят к одинаковым результатам, то есть в данном случае параболическость уравнений модели Кирхгофа - Лява не является недостатком, как и гиперболическость уравнений модели Тимошенко не является преимуществом. Это связано с тем, что рассматриваемые волны деформаций являются дисперсионными [5]. Дисперсионность волн в оболочках является прямым следствием их тонкостенности (то же относится к стержням и пластинам).

Уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа - Лява имеют вид [3]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \mu k_y \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{g} \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - k_y \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{g} \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{h^2}{12} \nabla^4 W - \mu k_y \frac{\partial U}{\partial x} - k_y \frac{\partial V}{\partial y} + k_y^2 W - \frac{\mu k_y}{2} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{k_y}{2} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \mu \frac{\partial V}{\partial y} - \mu k_y W \right) + \dots \right] + \frac{\gamma}{g} \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1)-(3)  $U$ ,  $V$ ,  $W$  - перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно,  $E$  - модуль Юнга,  $\mu$  - коэффициент Пуассона,  $k_y = 1/R$  - параметр кривизны,  $\gamma$  - удельный вес материала оболочки,  $g$  - ускорение свободного падения,  $t$  - время,  $h$  - толщина оболочки,

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Для исследования уравнений движения (1)-(3) введем в рассмотрение безразмерные независимые и зависимые переменные

$$U^* = \frac{U}{A}, \quad V^* = \frac{V}{A}, \quad W^* = \frac{W}{h}, \quad X^* = \frac{x}{l}, \quad (4)$$

$$Y^* = \frac{y}{R}, \quad t^* = \left( \frac{E g}{\gamma(1-\mu^2)} \right)^{1/2} \frac{t}{l},$$

где  $A$  - амплитудный параметр возмущения,  $l$  - характерная длина волны. В дальнейшем звездочки над безразмерными переменными опускаем.

Подстановка переменных (4) в уравнения (1) - (3) позволяет выявить в них четыре малых параметра

$$\varepsilon = \frac{A}{l}, \quad \delta_1 = \frac{(hR)^{1/2}}{l}, \quad \delta_2 = \frac{h}{R}, \quad \delta_3 = \frac{A}{R}, \quad (5)$$

характеризующих соответственно нелинейность волнового процесса, его дисперсию, тонкостенность оболочки, а также дифракционную расходимость квазиплоской волны.

Заметим, что в отличие от пластинок, характеризуемых параметром

дисперсии  $\delta = h/l$ , оболочечный дисперсионный параметр  $\delta_1$  зависит и от радиуса кривизны  $R$ . При этом  $\delta_1 = (1 - \mu^2)^{-1/4} Z^{-1/2}$ , где  $Z$  - широко используемый в динамике оболочек параметр Батдорфа [6].

Будем считать, что возмущение распространяется с постоянной скоростью вдоль образующей оболочки, медленно эволюционирует в окружном направлении и медленно меняет свои параметры во времени. Согласно методу многих масштабов [7], введем в рассмотрение новые независимые переменные и разложения зависимых переменных по степеням малого параметра  $\epsilon$ , соответствующие предположению о характере возмущения

$$\begin{aligned} \xi &= x - Ct, \quad U = U_0 + \epsilon U_1, \\ \eta &= \epsilon y, \quad V = \epsilon^{1/2} (V_0 + \epsilon V_1), \\ \tau &= \epsilon t, \quad W = W_0 + \epsilon W_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда параметры нелинейности, дисперсии и тонкостенности имеют одинаковый порядок малости ( $\epsilon \sim \delta_1 \sim \delta_2$ ). Кроме того, предположим, что параметры дифракционной расходимости и нелинейности связаны следующим образом ( $\delta_3 \sim \epsilon^{1/2}$ ).

Подставляя переменные (6) в уравнения движения, получим в нулевом (по  $\epsilon$ ) приближении следующую систему уравнений (здесь и далее по тексту нижний буквенный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей независимой переменной):

$$(1 - C^2)U_{0\xi\xi} - \mu W_{0\xi} = 0, \quad (7)$$

$$\left(\frac{1-\mu}{2} - C^2\right)V_{0\xi\xi} + \frac{1+\mu}{2}U_{0\xi\eta} - W_{0\eta} = 0, \quad (8)$$

$$W_0 - \mu U_{0\xi} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) находим связь между безразмерным нормальным перемещением и осевой деформацией

$$W_0 = \mu U_{0\xi}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7), определяем безразмерную скорость распространения возмущения  $C^2 = 1 - \mu^2$ . Используя (10), из уравнения (8) после интегрирования по  $\xi$  получим связь между сдвиговыми деформациями в волновом пучке

$$U_{0\eta} = (1 + 2\mu)V_{0\xi}. \quad (11)$$

В следующем приближении имеем систему уравнений

$$\mu^2 U_{1\xi\xi} - \mu W_{1\xi} + \frac{1-\mu}{2}U_{0\eta\eta} + \frac{1+\mu}{2}V_{0\xi\eta} + U_{0\xi}U_{0\xi\xi} + 2CU_{0\xi\tau} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mu U_{1\xi\eta} - W_{1\eta} + V_{0\eta\eta} + \frac{1+\mu}{2}U_{0\xi}U_{0\xi\eta} + \frac{1-\mu}{2}U_{0\eta}U_{0\xi\eta} + \\ + \frac{1-\mu}{2}U_{1\xi\eta} + \left[\frac{1-\mu}{2} - C^2\right]V_{1\xi\xi} + 2CV_{0\xi\tau} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mu U_{1\xi} - W_1 + V_{0\eta} + \frac{\mu}{2}U_{0\xi}^2 + C^2W_{0\xi\xi} = 0. \quad (14)$$

Заметим, что первые два слагаемых уравнения (12) равны двум первым слагаемым

уравнения (14), умноженного на  $\mu$  и продифференцированного по  $\xi$ . Тогда, используя (11), получим, приравнявая соответствующие слагаемые в (12) и (14), уравнение Кадомцева - Петвиашвили для компоненты продольной деформации  $U_0$ :

$$U_{0\xi\tau} + \alpha U_{0\xi} U_{0\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi} = -\gamma U_{0\eta\eta}, \quad (15)$$

где  $\alpha = (1-\mu^2)^{1/2}/2$ ,  $\beta = \mu^2(1-\mu^2)^{1/2}/2$ ,  $\gamma = (1-\mu^2)^{1/2}(1+2\mu)^{-1/2}$ .

В пространственно-одномерном случае (случай цилиндрической симметрии, игнорирующий зависимость от окружной координаты) имеем вместо (15) уравнение Кортевега - де Вриза (КдВ)

$$U_{0\xi\tau} + \alpha U_{0\xi} U_{0\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi} = 0. \quad (16)$$

Известно [1], что уравнение (15) допускает частные решения в виде локализованных двумерных образований - алгебраических солитонов. Солитонные решения уравнения КдВ также хорошо известны [5]. Таким образом, в упругих цилиндрических оболочках существуют одномерные и двумерные солитоны деформаций уравнений (15) и (16).

Для исследования эволюции нелинейных продольных волн в оболочке проанализируем систему уравнений (12) - (14). Введем в рассмотрение новую пространственную «продольно-сдвиговую» координату  $\chi = \xi + \eta$ . Тогда после домножения на  $\mu$  уравнений (13) и (14) и дифференцирования (14) по  $\chi$  можно заметить, что первые два слагаемых всех трех уравнений системы равны. Приравнявая соответствующие слагаемые уравнений (12) и (13), получим для продольно-сдвиговой деформации  $U_{0\chi}$  нелинейное волновое уравнение

$$U_{0\chi\tau} + \alpha_1 U_{0\chi} U_{0\chi\chi} + \beta_1 U_{0\chi} = 0, \quad (17)$$

где  $\alpha_1 = (1-\mu^2)^{1/2}(1+2\mu)(2+3\mu)^{-1}$ ,  $\beta_1 = 1/(4+6\mu)^{-1}$ .

Замена переменных  $\tau = \tau^*$ ,  $\chi = \chi^* - \beta_1\tau$  переводит (17) в уравнение опрокидывающейся волны Римана (звездочки опускаем)

$$U_{0\chi\tau} + \alpha_1 U_{0\chi} U_{0\chi\chi} = 0. \quad (18)$$

С другой стороны, приравнявая соответствующие слагаемые (13) и (14), получим для  $U_{0\chi}$  уравнение КдВ

$$U_{0\chi\tau} + \alpha^2 U_{0\chi} U_{0\chi\chi} + \beta^2 U_{0\chi\chi\chi} = 0, \quad (19)$$

где  $\alpha^2 = (1-\mu)^{1/2}(1+\mu)^{-1/2}(1+2\mu)$ ,  $\beta^2 = \mu(1-\mu^2)(1+2\mu)$ .

Итак, компонента продольно-сдвиговой деформации эволюционирует либо согласно уравнению волны Римана (18), либо как солитон уравнения КдВ (19). Обе эти возможности равновероятны.

Таким образом, проведенный с помощью метода многих масштабов асимптотический анализ уравнений (1)-(3), позволяет следующим образом описать эволюцию слабодвумерного пучка нелинейных продольных волн в цилиндрической оболочке.

Существует быстрый (линейный) масштаб времени, в течение которого имеется волна, бегущая без изменения профиля с постоянной скоростью.

Далее, существует более медленный масштаб времени, в течение которого изменение параметров волны за счет нелинейности, дисперсии и дифракционной расходимости приводит к разбиению исходного импульса на одномерные и слабодвумерные солитоны.

На этом же этапе происходит образование «продольно-сдвиговых» волн, распространяющихся либо в виде солитонов, либо в виде волн Римана. Можно сказать, что волновой процесс перестает быть однозначно определенным и появляются элементы хаотичности.

В любом случае взаимодействие неустойчивых к поперечным возмущениям солитонов уравнения (16) с волнами уравнений (18) или (19) приводит к их опрокидыванию [8] и, возможно, разрушению. Это отличает эволюцию солитонов в деформируемых твердых телах от гидродинамических солитонов, разрушающихся постепенно, вследствие естественной диссипации.

При решении многих динамических задач механики сплошной среды появляется необходимость учета диссипации энергии. В теории оболочек энергетические потери обычно учитываются путем введения в уравнение (3) дополнительного слагаемого  $\epsilon_D \gamma W/g$  ( $\epsilon_D$  - коэффициент демпфирования, так называемое конструктивное демпфирование). Тогда метод многих масштабов при выполнении условия  $\epsilon_D \sim \epsilon^{1/2}$  позволяет получить вместо (15) и (16) близкие к интегрируемым уравнения Кадомцева - Петвиашвили - Бюргерса (КПБ) и Кортевега - де Вриза - Бюргерса (КдВБ)

$$U_{0\xi\tau} + \alpha U_{0\xi} U_{0\xi\xi} + \chi U_{0\xi\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = -\gamma U_{0\eta\eta}, \quad (20)$$

$$U_{0\xi\tau} + \alpha U_{0\xi} U_{0\xi\xi} + \chi U_{0\xi\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (21)$$

где  $\chi = -\mu^2/2$ .

Теперь рассмотрим нелинейные продольные волны в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке. Зависимость между интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  и интенсивностью деформаций  $e_i$  примем в следующей форме

$$\sigma_i = E e_i - m e_i^3, \quad (22)$$

где  $E$  и  $m$  - константы материала оболочки, определяемые экспериментально. Уравнения движения элемента оболочки в данном случае имеют чрезвычайно громоздкий вид. Их редукция, проводимая описанным выше методом многих масштабов, приводит в нулевом приближении к системе уравнений, совпадающей с системой (7) - (9). Это закономерно, так как зависимость  $\sigma_i(e_i)$ , принятая в форме (22), разделяет процесс на упругую и нелинейно-упругую составляющие.

Система уравнений, возникающая в первом нелинейном приближении, приводит к модифицированному уравнению Кадомцева - Петвиашвили для компоненты продольной деформации  $U_{0\xi}$

$$U_{0\xi\tau} - \alpha^3 U_{0\xi}^2 U_{0\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = -\gamma U_{0\eta\eta}, \quad (23)$$

где  $\alpha^3 = 2m(1-\mu-\mu^2-\mu^3)(1-\mu^2)^{-1/2}/E$ , а коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  те же, что и в случае упругой оболочки. Эволюционное уравнение (23) не обладает бесконечным набором законов сохранения и не интегрируется методом обратной задачи рассеяния [9], то есть слабодвумерные нелинейно-упругие волны деформаций солитонами не являются.

В случае независимости волнового процесса от окружной координаты вместо (23) имеем модифицированное уравнение Кортевега - де Вриза (мКдВ) для  $U_{0\xi}$

$$U_{0\xi\tau} - \alpha^3 U_{0\xi}^2 U_{0\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (24)$$

Солитонные и бризерные решения уравнения мКдВ хорошо известны. Таким образом, в нелинейноупругих оболочках существуют пространственно-одномерные солитоны уравнения мКдВ (24).

Уравнения КдВ и мКдВ связаны между собой преобразованием Миуры, то есть существует замена переменных, переводящая решения одного уравнения в решения другого. Это говорит о внутренней взаимосвязи динамических процессов, протекающих в упругих и нелинейно-упругих цилиндрических оболочках.

Эволюция нелинейно-упругих солитонов аналогична описанной для упругого случая. Отличие заключается в том, что временной масштаб, соответствующий

устойчивому поведению солитонов уравнения мКдВ, характеризуется образованием продольно-сдвиговых (с пространственной координатой  $\chi = \xi + \eta$ ) простых волн или солитонов уравнений

$$\alpha_4 U_{0\chi\tau} - \beta_2 U_{0\chi}^2 U_{0\chi\chi} + \gamma_2 U_{0\chi\chi} = 0, \quad (25)$$

где  $\alpha_4 = 2(1-\mu)^{1/2}(1+\mu)/(1+2\mu)$ ,  $\gamma_2 = (1-\mu^2)/(1+2\mu)$ ,

$$\beta_2 = 4m(1-\mu - \mu^2 - \mu^3)/E - 2\mu(1-\mu)m[(2+2\mu)/(1+2\mu) - \mu]/3E,$$

и

$$U_{0\chi\tau} - \alpha_5 U_{0\chi}^2 U_{0\chi\chi} - \beta_3 U_{0\chi\chi\chi} = 0, \quad (26)$$

где  $\alpha_5 = m(1-\mu)(1+2\mu)(1-\mu^2)^{-1/2}[(2+2\mu)/(1+2\mu) - \mu]/E$ ,  $\beta_3 = \mu(1+2\mu)(1-\mu^2)^{1/2}/2$ .

Взаимодействие с этими продольно-сдвиговыми волнами является причиной разрушения солитонов уравнения мКдВ (24).

Учет энергетических потерь в нелинейно-упругой оболочке приводит к тому, что уравнения (23) и (24) дополняются диссипативными членами. Таким образом, получаются модифицированные варианты уравнений КПБ (20) и КдВБ (21):

$$U_{0\xi\tau} - \alpha_3 U_{0\xi}^2 U_{0\xi\xi} + \chi U_{0\xi\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = -\gamma U_{0\eta\eta}, \quad (27)$$

$$U_{0\xi\tau} - \alpha_3 U_{0\xi}^2 U_{0\xi\xi} + \chi U_{0\xi\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (28)$$

Аналитическое и численное исследование уравнений (27) и (28) представляет самостоятельный интерес.

Выводы об эволюции упругих и нелинейно-упругих солитонов в оболочках справедливы и для тонких пластин и стержней.

## Библиографический список

1. *Потапов А.И.* Нелинейные волны деформаций в стержнях и пластинах. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1985.
2. *Кившиарь Ю.С., Сыркин Е.С.* Сдвиговые солитоны в упругой пластине // Акуст. журнал. 1991. Т.37. Вып. 1.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
4. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Эволюция нелинейных продольных волн в цилиндрических оболочках. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 1993. 45 с. Деп. в ВИНИТИ № 1737 - В93.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. *Batdorf S.B.A.* A simplified method of elastic stability analysis for thin cylindrical shells. 1. Donnell's equations // NASA Tech. Note. 1947. № 1341.
7. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
8. *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны. М.: Наука, 1991.
9. *Абловиц С., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

Саратовский технический университет  
Саратовский агротехнический  
университет

Поступила в редакцию 19.09.94  
после переработки 16.02.95

# NONLINEAR DEFORMATION WAVES IN CYLINDRICAL SHELLS

*A.I. Zemlyanukhin, L.I. Mogilevich*

The evolution of nonlinear longitudinal waves in elastic and nonlinear-elastic cylindrical shells has been analysed. In elastic shells one-dimensional and two-dimensional solitons of the equations KdV and Kadomtsev - Petviashvili have been revealed. It was demonstrated that there exist one-dimensional solitons of the equation mKdV in nonlinear-elastic shells. Calculation of dissipation effects allowed to get integrable evolution equations for the longitudinal deformation component.



*Землянухин Александр Исаевич* родился в 1967 году. Окончил механико-математический факультет СГУ (1989) по специальности «Механика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995). Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения в динамических задачах механики твердых деформируемых тел, групповой анализ дифференциальных уравнений.



*Могилевич Лев Ильич* родился в 1946 году. Профессор, зав. кафедрой «Математика, математическое моделирование и информатика» Саратовского государственного аграрно-инженерного университета. Окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Механика» (1969). Закончил аспирантуру СГУ (1972) по кафедре «Теоретическая механика и аэрогидродинамика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972) по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы» и доктора технических наук (1990) по специальности «Гирроскопы, навигационные приборы и комплексы». Область научных интересов: нелинейные волны в сплошных средах, механика сложных систем с распределенными параметрами.



## НОРМАЛЬНЫЕ И КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ПОЛУКЛАССИЧЕСКИХ ЛАЗЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИФРАКЦИЕЙ

*Е.В. Григорьева, С.А. Каценко*

На основе метода нормальных форм рассмотрено формирование поперечных пространственных структур в лазерном излучении: вращающихся и стоячих волн, режимов модовых бленей. Показана возможность сложной динамики при больших размерах системы вследствие нейтральной устойчивости решений укороченных уравнений.

### Введение

В последнее время большое внимание уделяется поперечной динамике оптического излучения лазеров в связи с перспективами их использования в новых информационных технологиях [1-3]. Подробно исследована структура невысоких пространственных мод в лазерах с цилиндрической геометрией [1,2], показана возможность высокомодовых пространственных бифуркаций [3], обсуждаются спонтанное нарушение симметрии и аналогия между оптической и гидродинамической турбулентностями [4,5].

Наиболее интригующим остается вопрос о возникновении когерентного, (упорядоченного) поведения в системах с бесконечным (асимптотически большим) числом возбужденных пространственных мод. Такая ситуация может иметь место, в частности, в системах с «большими» геометрическими размерами. При исследовании нелинейной динамики в случаях, когда критические условия одновременно выполняются для бесконечного числа мод, известные методы интегральных многообразий и нормальных форм не применимы. В настоящей работе для этой цели будет использован алгоритм [7,8] построения специальных эволюционных уравнений, которые играют роль укороченных нормальных форм, причем их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной краевой задачи в окрестности состояния равновесия.

Физический процесс в одномерном приближении и в предположении, что линия усиления однородно уширена и в нее попадает одна продольная мода резонатора и достаточно большое число поперечных мод, описывается полуклассическими лазерными уравнениями [1,4,5]

$$\begin{aligned} \partial E / \partial t &= -\mu(E - P) + iD_c \partial^2 E / \partial x^2, \\ \partial P / \partial t &= -(1 + i\Delta)P + NE, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\partial N/\partial t = \gamma[N - N_0 - 1/2(E^*P + EP^*)] + D_n \partial^2 N/\partial x^2,$$

где  $E$  и  $P$  - пропорциональны комплексным амплитудам электрической напряженности световой волны и поляризации активной среды;  $N$  характеризует инверсию населенностей активной среды;  $N_0$  - ее насыщенное (максимальное) значение, определяемое однородной по пространственной переменной накачкой;  $\Delta = (\omega_a - \omega_c)/\gamma_{\perp}$  - частотная расстройка между центром линии усиления  $\omega_a$  и резонатора  $\omega_c$ ; скорости релаксации фотонов в резонаторе  $\mu$  и инверсии населенностей  $\gamma$  нормированы на скорость релаксации поляризации  $\gamma_{\perp}$ ;  $D_c$  - коэффициент дифракции электромагнитной волны;  $D_n$  - коэффициент диффузии носителей инверсной населенности.

Два типа граничных условий будут рассмотрены, чтобы выяснить их влияние на динамику при «больших» геометрических размерах системы.

Периодические граничные условия:

$$E, P, N|_{x=0} = E, P, N|_{x=l},$$

$$\partial E/\partial x, \partial P/\partial x, \partial N/\partial x|_{x=0} = \partial E/\partial x, \partial P/\partial x, \partial N/\partial x|_{x=l}. \quad (2)$$

Наиболее близкий физический объект, соответствующий таким условиям - узкое кольцо активной среды - может быть получен с помощью специальной диафрагмы. Пространственная переменная в этом случае соответствует угловой координате на кольце, поэтому в дальнейшем для удобства поперечный размер системы нормируем к  $2\pi$ :  $l=2\pi$ . Отметим, что такая нормировка приводит к изменению коэффициентов дифракции и диффузии при изменении размеров системы, поскольку  $D_c, D_n \sim l^{-2}$ .

Для систем, имеющих отражающие боковые грани, более пригодны граничные условия Неймана (отсутствие потоков через границу)

$$\partial E/\partial x, \partial P/\partial x, \partial N/\partial x|_{x=0} = \partial E/\partial x, \partial P/\partial x, \partial N/\partial x|_{x=2\pi} = 0. \quad (3)$$

Геометрия такой задачи соответствует узкой полоске активной среды длиной  $l=2\pi$  и может быть реализована в полупроводниковых лазерных устройствах.

В разделе 1 рассмотрены критические случаи, возникающие в окрестности первого порога генерации и показано существенное различие задач с конечным и малым значением коэффициента дифракции. В разделе 2 построены универсальные обыкновенные дифференциальные уравнения для параметров порядка - нормальные формы, и с их помощью анализируются решения исходной задачи в случаях, когда коэффициент дифракции не является малым параметром. В последующих разделах предполагается, что коэффициент дифракции является малым. В разделе 3 построены квазинормальные формы для установившихся режимов, формирующихся на невысоких модах; в разделе 4 возбуждаемые моды являются асимптотически большими.

На базе полученных результатов сформулирован ряд выводов, объясняющих экспериментальные данные.

## 1. Линейный анализ

Характер потери устойчивости состояния равновесия ( $E=P=0, N=N_0$ ) в системе (1) для обоих типов граничных условий определяется корнями характеристического уравнения

$$(\gamma + D_n k^2 + \lambda)[\lambda^2 + \lambda(\mu + 1 + i\Delta + iD_c k^2) + \mu(N_0 + 1 + i\Delta) + iD_c k^2(1 + i\Delta)] = 0. \quad (4)$$

Критический случай реализуется, если при некоторых значениях волновых чисел

$k_s, s=1,2,\dots$  имеются корни  $\lambda_k$  с нулевой вещественной частью, а для остальных  $k \neq k_s$  характеристические числа  $\lambda_k$  имеют отрицательные вещественные части.

Из (4) следует, что корень с нулевой вещественной частью  $\lambda_k = i\omega_{0k}$  имеет место при значениях параметров  $\Delta = \Delta^{\sim}, D_e = D_e^{\sim}, N_0 = N_0^{\sim}$  таких, что [3]

$$N_0^{\sim} = 1 + \left( \frac{\Delta^{\sim} - D_e^{\sim} k^2}{1 + \mu} \right)^2, \quad \omega_{0k} = \pm \frac{D_e^{\sim} k^2 + \Delta^{\sim} \mu}{1 + \mu}. \quad (5)$$

Рассмотрим отдельно критические случаи, возникающие при конечном (не малом) значении дифракции  $D_e$  и малом значении  $D_e \rightarrow 0$ .

Если дифракция не мала и частотная расстройка в системе отрицательная ( $\Delta < 0$ ), то бифуркация от устойчивого состояния равновесия к периодическому решению происходит на нулевой пространственной моде ( $k_0 = 0$ ) при превышении накачки порогового значения (рис.1, а)

$$N_0^{\sim} = 1 + \delta^2, \quad (6)$$

где обозначено  $\delta = -\Delta^{\sim}/(1+\mu)$ . Частота автоколебаний соответствующей линеаризованной системы близка к  $\omega_0 = \mu\delta$ . Такое поведение соответствует поведению точечной системы (без дифракции).

Если дифракция не мала и расстройка положительная ( $\Delta > 0$ ), то потеря устойчивости стационарного решения обусловлена как «временной», так и «пространственной» динамикой и может иметь место на двух, трех или четырех пространственных модах.

Критические условия для двух мод с волновыми числами  $k = \pm m$  осуществляются при значениях параметров  $\Delta = \Delta^{\sim}, D_e = D_e^{\sim}, N_0 = N_0^{\sim}$  таких, что (рис.1, б)

$$(\Delta^{\sim}/D_e^{\sim})^{1/2} + \theta = m, \quad N_0^{\sim} = 1 + \delta_1^2,$$

$$\delta_1 = (\Delta^{\sim} - D_e^{\sim} m^2)/(1 + \mu). \quad (7)$$

Параметр  $\theta$  дополняет  $(\Delta^{\sim}/D_e^{\sim})^{1/2}$  до целого числа. Мнимые характеристические числа:  $\lambda_{\pm m} = i\omega_1$ , где  $\omega_1 = -\Delta^{\sim} + \delta_1$ , а остальные  $\lambda_k$  имеют отрицательные вещественные части.

Три пространственные моды с волновыми числами  $k=0, \pm 1$  возбуждаются одновременно при значениях параметров (рис.1, в)

$$N_0^{\sim} = 1 + \delta^2, \quad D_e^{\sim} = 2\Delta^{\sim}. \quad (8)$$

Соответствующие характеристические числа:  $\lambda_0 = i\delta\mu, \lambda_{\pm 1} = i\delta(\mu+2)$ .

Четыре моды с волновыми числами  $k = \pm m, \pm(m+1)$  одновременно возбуждаются при условии, что (рис.1, г)

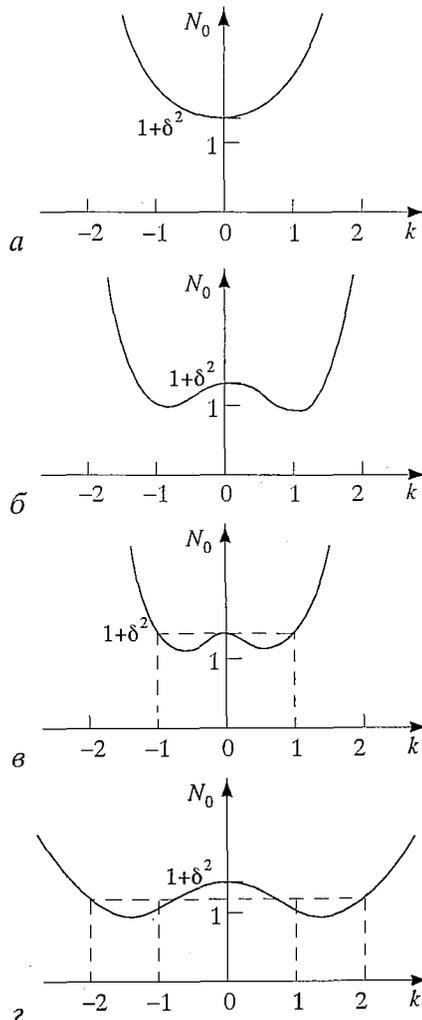


Рис.1

$$N_0 \sim 1 + \delta^2[(2m+1)/M]^2, \quad D_e \sim 2\Delta/M, \quad M = 2m^2 + 2m + 1. \quad (9)$$

При этом характеристические числа вычисляются следующим образом:

$$\lambda_{\pm m} = i\delta(\mu + 2m^2/M), \quad \lambda_{\pm(m+1)} = i\delta(\mu + 2(m+1)^2/M).$$

Более сложная ситуация возникнет, если значение коэффициента дифракции является малым. Например, с увеличением поперечных размеров системы и в результате нормировки, сохраняющей краевые условия (2) или (3), получаем  $D_e = \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда критические условия могут быть выполнены (асимптотически) сразу для бесконечно большого числа пространственных мод.

При отрицательной расстройке ( $\Delta < 0$ ) и малой дифракции условия потери устойчивости одинаковы для всех мод с номерами  $k_m = k_0 + m$ ,  $k_0 = 0, m = 0, \pm 1, \dots$  (рис. 2, а):

$$N_{0m} \sim 1 + [\delta + \varepsilon m^2/(1+\mu)]^2 = N_0 \sim 1 + O(\varepsilon), \quad \lambda_m = i\delta\mu + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

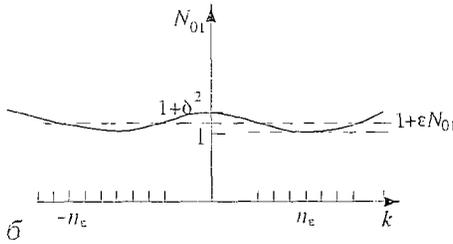
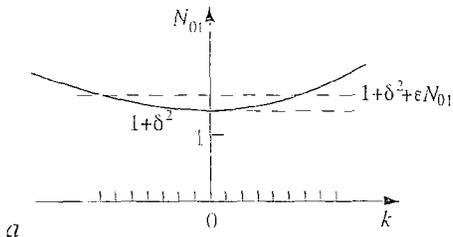


Рис. 2

При положительной расстройке ( $\Delta > 0$ ) и малой дифракции одновременно теряют устойчивость множество мод с номерами  $k_m = \pm[(\Delta/\varepsilon)^{1/2} + \theta] + m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  («внутренний» параметр  $\theta \in (-1, 0]$  дополняет  $(\Delta/\varepsilon)^{1/2}$  до целого числа:  $\theta = \{(\Delta/\varepsilon)^{1/2}\} - (\Delta/\varepsilon)^{1/2}$ , (рис. 2, б). Для всех таких мод при накачке

$$N_{0m} \sim 1 + O(\varepsilon) \quad (11)$$

характеристические числа имеют асимптотически малую действительную часть  $\lambda_k = -i\Delta + O(\varepsilon)$ .

Ниже построим решения нелинейной системы (1) в окрестности точки бифуркации каждого типа.

## 2. Нормальные формы в случае, когда коэффициент дифракции $D_e$ не является малым

В этом разделе используем традиционные методы теории нормальных форм [6]. Вначале рассмотрим случай отрицательной расстройки ( $\Delta < 0$ ). При превышении накачкой порогового значения (6)  $N_0 = N_0 \sim 1 + \varepsilon N_{01}$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , локальная динамика краевой задачи (1), (2), (3) определяется уравнением (нормальной формой) на одномерном комплексном центральном многообразии

$$d\xi/d\tau = N_{01}R\xi - R\xi|\xi|^2 + O(\varepsilon), \quad (12)$$

где  $R = \frac{\mu(1+i\delta\nu)}{(1+\mu)(1+\delta^2\nu^2)}$ ,  $\nu = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ ,  $\tau = \varepsilon t$ .

По функции  $\xi(\tau)$  равномерно на любом конечном отрезке изменения времени  $t$  «восстанавливаются» решения краевой задачи (1)-(3) с помощью формул

$$E = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau) \exp(i\omega_0 t + i\varphi) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$P = \varepsilon^{1/2} a_0 \xi(\tau) \exp(i\omega_0 t + i\varphi) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad N = N_0 + O(\varepsilon), \quad a_0 = 1 + i\delta. \quad (13)$$

При  $N_{01} > 0$  нормальная форма (12) имеет семейство зависящих от параметра  $\varphi$  устойчивых стационарных решений  $|\xi|^2 = N_{01}$ , которым соответствуют устойчивые периодические решения исходной системы с частотой генерации  $\omega_0 = \mu\delta + O(\varepsilon^2)$ . Такое поведение одинаково для краевых задач обоого типа и аналогично поведению сосредоточенной системы.

В случае положительной расстройки ( $\Delta > 0$ ) потеря устойчивости может происходить на ненулевых пространственных модах, и результаты существенно зависят от граничных условий.

Рассмотрим сначала систему (1) с периодическими граничными условиями и с параметрами (7), при которых возбуждаются две моды с волновыми числами  $m = \pm[(\Delta \sim / D_c \sim)^{1/2} + \theta]$ . Поведение решений в малой окрестности точки бифуркации  $N_0 = 1 + \varepsilon N_{01}$ ,  $D_c = D_c \sim + \varepsilon D_1$ ,  $\Delta = \Delta \sim + \varepsilon \Delta_1$  определяется нормальной формой на двумерном многообразии

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= (N_{01} - i\Delta_1 - iD_1 m^2 a_1^* / \mu) R_1 \xi - R_1 \xi (|\xi|^2 + b|\eta|^2) + O(\varepsilon), \\ d\eta/dt &= (N_{01} - i\Delta_1 - iD_1 m^2 a_1^* / \mu) R_1 \eta - R_1 \eta (|\eta|^2 + b|\xi|^2) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $R_1 = \frac{\mu(1 + i\delta_1 \nu)}{(1 + \mu)(1 + \delta_1^2 \nu^2)}$ ,  $a_1 = 1 + i\delta_1$ ,  $b = 1 + (1 + 4D_n m^2 / \gamma)^{-1}$ .

Амплитуду генерируемого поля восстанавливаем по формуле

$$E = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) \exp(i\omega_1 t + mx + i\varphi) + \eta(\tau) \exp(i\omega_1 t - mx + i\varphi_1)] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Система (14) имеет три стационарных решения. Состояние  $|\xi|^2 = |\eta|^2 \neq 0$ , соответствующее генерации противоположно направленных волн, всегда неустойчиво. Состояния равновесия  $\eta = 0$ ,  $|\xi|^2 = N_{01} + D_1 \delta_1 m^2 / \mu$  и  $\xi = 0$ ,  $|\eta|^2 = N_{01} + D_1 \delta_1 m^2 / \mu$  имеют нулевое и отрицательные вещественные числа и, следовательно, являются устойчивыми. Они соответствуют в исходной задаче режимам генерации лево- или правовращающихся волн (той же устойчивости) с частотой генерации  $\omega_1 \sim = -\Delta \sim + \delta_1 - \varepsilon \mu (\Delta_1 + D_1 m^2 / \mu) (1 + \mu)^{-1} (1 + \delta_1^2 \nu^2)^{-1} + O(\varepsilon^2)$ . Отметим, что отклонение частотной расстройки от критического значения приводит только к изменению частоты генерации и диффузия носителей не оказывает влияния на наблюдаемые процессы в первом приближении.

Для краевой задачи на отрезке с непроницаемыми концами (1), (3) нормальная форма на центральном многообразии запишется следующим образом:

$$d\xi/dt = (N_{01} - i\Delta_1 - iD_1 m^2 a_1^* / \mu) R_1 \xi - R_1 (b+1) \xi |\xi|^2 / 4 + O(\varepsilon). \quad (15)$$

«Одномерность» уравнения (15), в отличие от двумерной системы (14), связана с тем, что в случае краевых условий Неймана номера мод принимают только неотрицательные значения. В исходной задаче стационарным режимам (15) соответствуют режимы генерации типа стоячей волны с частотой  $\omega_1 \sim$  и амплитудой поля, зависящей от величины коэффициента диффузии носителей  $D_n$

$$E(t, x) = 2[\varepsilon(N_{01} + D_1 \delta_1 m^2 / \mu) / (1 + b)]^{1/2} \cos(mx) \exp(i\omega_1 \sim t + i\varphi) + O(\varepsilon).$$

Рассмотрим теперь случай одновременной потери устойчивости трех пространственных мод в задаче с периодическими граничными условиями. Критические условия определяются по формулам (8). Отметим, что в силу специфики задачи резонансных явлений здесь не возникает (речь идет о «главных» резонансах 1:1, 1:2 и 1:3). В окрестности точки бифуркации  $N_0 = 1 + \delta^2 + \varepsilon N_{01}$ ,

$D_c = 2\Delta + \varepsilon D_1$  динамика главных членов разложения определяется нормальной формой

$$\begin{aligned} d\xi/d\tau &= N_{01}R\xi - R\xi[|\xi|^2 + b_0(|\eta|^2 + |\chi|^2)] + O(\varepsilon), \\ d\eta/d\tau &= (N_{01} - iD_1a_0/\mu)R^*\eta - R^*\eta(|\eta|^2 + b_0^*|\xi|^2 + b_1|\chi|^2) + O(\varepsilon), \\ d\chi/d\tau &= (N_{01} - iD_1a_0/\mu)R^*\chi - R^*\chi(|\chi|^2 + b_0^*|\xi|^2 + b_1|\eta|^2) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $a_0$ ,  $R$  определены в (12), (13),  $b_0 = 1 + a_0(1 + D_n/\gamma)^{-1}$ ,  $b_1 = 1 + (1 + 4D_n/\gamma)^{-1}$ . Переменные  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\chi$  являются медленными амплитудами возбужденных пространственных мод с волновыми числами  $k=0$  и  $k=\pm 1$ ,  $-1$  и частотами  $\omega_0 = \delta\mu$ ,  $\omega_{\pm 1} = \delta(\mu + 2)$ , соответственно.

Стационарным решениям системы уравнений (16) будут соответствовать установившиеся режимы генерации исходной системы, описываемой уравнениями (1) и (2). Стационарному решению  $|\xi|^2 = N_{01}$ ,  $\eta = \chi = 0$  соответствует генерация однородного по пространству поля  $E = (\varepsilon N_{01})^{1/2} \exp(i\delta\mu t + O(\varepsilon^2))$ , которое устойчиво, если

$$N_{01}B > D_1C, \quad (17)$$

где  $B = (1 - \delta^2\nu)(1 + D_n/\gamma)^{-1}$ ,  $C = 2\delta/(\mu + 1)$ .

Решения  $\xi=0$ ;  $\eta$ ,  $\chi \neq 0$  и  $\xi$ ,  $\eta \neq 0$ ,  $\chi \neq 0$ , отвечающие генерации противоположно бегущих волн, всегда неустойчивы.

Решения  $\xi = \chi = 0$ ,  $\eta \neq 0$  или  $\xi = \eta = 0$ ,  $\chi \neq 0$ , описывающие генерацию бегущей волны  $E = [\varepsilon(N_{01} + D_1C)]^{1/2} \exp(\omega_2 \sim it \pm ix)$ ,  $\omega_2 \sim \delta(\mu + 2) - \varepsilon D_1(\mu + 1)^{-1} + O(\varepsilon^2)$ , устойчивы, если

$$N_{01}B > -D_1C(1+B). \quad (18)$$

В области перекрытия параметров, определяемых условиями (17), (18), реализуется бистабильность режимов генерации, а при дополнительном условии  $0 < B < 1$  (которое для лазеров обычно выполняется, так как  $\mu < 1$ ) возможна генерация визуально наблюдаемой вращающейся неоднородной структуры с интенсивностью

$$I = |E|^2 = \varepsilon[\xi_0^2 + \eta_0^2 + 2\xi_0\eta_0 \cos((2\delta - \varepsilon\omega)t - x)].$$

Для граничных условий Неймана на отрезке активной среды получаем нормальную форму

$$\begin{aligned} d\xi/d\tau &= N_{01}R\xi - R\xi(|\xi|^2 + b_0|\eta|^2/2) + O(\varepsilon), \\ d\eta/d\tau &= (N_{01} - iD_1a_0/\mu)R^*\eta - R^*\eta(b_0^*|\xi|^2 + b_1|\eta|^2/2) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (19)$$

Условия генерации однородного поля с частотой  $\omega_0$  такие же, как в (17), генерация стоячей волны  $E = [2\varepsilon(N_{01} + D_1C)/B_1]^{1/2} \cos(x) \exp(\omega_2 \sim it)$ , где  $B_1 = 1 + [2(1 + 4D_n/\gamma)]^{-1}$ , устойчива, если

$$N_{01}(B - B_1) > -D_1C(1+B). \quad (20)$$

В области перекрытия условий (17) и (20) наряду с однородным и неоднородным режимами генерации возможны также, если  $(1+B)^2 < 2$ , неоднородные расслоения на фоне устойчивых автоколебаний

$$I = |E|^2 = \varepsilon[\xi_1^2 + \eta_1^2 \cos^2(x) + 2\xi_1\eta_1 \cos(x) \cos((2\delta - \varepsilon\omega_1)t)].$$

Амплитуды  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  и поправки к частотам  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  в закритической области даны в Приложении А.

Для полноты изложения приведем нормальную форму в задаче с перио-

дическими граничными условиями в случае четырех характеристических показателей с нулевой вещественной частью для пространственных мод с номерами  $k=\pm 1, \pm 2$

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= (N_{01} - iD_1 a_2^*/\mu)R_2 \xi - R_2 \xi (|\xi|^2 + b_1 |\eta|^2 + b_2 |\chi|^2 + b_3 |\varepsilon|^2) + O(\varepsilon), \\ d\eta/dt &= (N_{01} - iD_1 a_2^*/\mu)R_2 \eta - R_2 \eta (|\eta|^2 + b_1 |\xi|^2 + b_2 |\chi|^2 + b_3 |\varepsilon|^2) + O(\varepsilon), \\ d\chi/dt &= (N_{01} - iD_1 a_2^*/\mu)R_2 \chi - R_2 \chi (|\chi|^2 + b_2^* |\xi|^2 + b_3^* |\eta|^2 + b_4 |\varepsilon|^2) + O(\varepsilon), \\ d\varepsilon/dt &= (N_{01} - iD_1 a_2^*/\mu)R_2 \varepsilon - R_2 \varepsilon (|\varepsilon|^2 + b_2^* |\xi|^2 + b_3^* |\eta|^2 + b_4 |\chi|^2) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

где  $R_2 = \mu(1+i\delta_2\nu)/[(1+\mu)(1+\delta_2^2\nu^2)]$ ,  $a_2 = 1+i\delta_2$ ,  $\delta_2 = 2\delta/5$ ,  $b_2 = 1+a_2(1+D_n/\gamma)^{-1}$ ,  $b_3 = 1+a_2(1+9D_n/\gamma)^{-1}$ ,  $b_4 = 1+(1+16D_n/\gamma)^{-1}$ .

Как и раньше, легко могут быть получены области устойчивости режимов генерации лево- или правовращающихся волн с волновыми числами  $k=\pm 1, \pm 2$  и частотами вращения  $\omega_{\pm 1} = \delta(\mu+2/5)$ ,  $\omega_{\pm 2} = \delta(\mu+8/5)$ . Визуально наблюдаемые структуры с частотой вращения  $\omega = 6\delta/5$  образуются при сложении двух волн с разными волновыми числами  $m = \pm(1-2)$ ;  $\pm(1+2)$ . Режимы биения противоположно направленных волн с одинаковыми волновыми числами, как и в предыдущем случае, оказываются неустойчивыми.

### 3. Низкомодовые пространственные бифуркации в случае малых значений коэффициента дифракции

Пусть  $D_0 = \varepsilon$  и  $\varepsilon \rightarrow +0$ . В разделе 1 было показано, в этом случае корней характеристического многочлена, стремящихся к мнимой оси, становится бесконечно много и, следовательно, при превышении порога генерации возбуждается множество пространственных мод. Метод нормальных форм привел бы к необходимости анализировать бесконечную (счетную) систему уравнений сложного вида. Вместо этого, следуя идеологии метода нормальных форм, получим квазинормальную форму для параметров порядка, зависящих от пространственной переменной. Принципиальным моментом является наличие в исходной системе малого параметра дифракции  $\varepsilon$ . Поэтому малый параметр надкритичности, по степеням которого обычно идет разложение решений в ряд\*, оказывается существенно связанным с дифракцией [7,8].

При отрицательной расстройке ( $\Delta < 0$ ) возбуждается множество мод вокруг нулевой пространственной моды. В окрестности критических значений параметров (10) максимальный член разложения, определяющий скорость изменения амплитуд вследствие пространственных взаимодействий, имеет порядок  $\varepsilon$ . Поэтому параметр надкритичности удобно выбрать в форме  $\varepsilon N_{01}$ . Формальные ряды, с помощью которых ищем решение исходной задачи, представлены в (B.1). Для медленных амплитуд получаем следующую квазинормальную форму:

$$d\xi/dt = ia_0^* \mu^{-1} R \partial^2 \xi / \partial x^2 + N_{01} R \xi - R \xi |\xi|^2 + O(\varepsilon), \quad (21)$$

с периодическими граничными условиями для задачи в кольце

$$\xi|_{x=0} = \xi|_{x=2\pi}, \quad \partial \xi / \partial x|_{x=0} = \partial \xi / \partial x|_{x=2\pi},$$

а для задачи с условиями непроницаемости на концах отрезка имеем аналогичную квазинормальную форму (21) с граничными условиями

$$\partial \xi / \partial x|_{x=0} = \partial \xi / \partial x|_{x=2\pi} = 0.$$

\* Ряды, с помощью которых получены квазинормальные формы, приведены в Приложении В; соответствующие формулы имеют номера (B.1) - (B.5).

От нормальной формы (12) уравнение (21) отличается слагаемым  $i\alpha_0^* \mu^{-1} R \partial^2 \xi / \partial x^2 = A$ , которое описывает как дифракционный, так и диффузионный процессы, причем коэффициент возникшей реальной диффузии в (21)  $\text{Re}A = -2\Delta\mu(1+\mu)^{-3} * (1+\delta^2\nu^2)^{-1}$  всегда положительный при  $\Delta < 0$ , в отличие от результатов [4,5], где появлялась нефизическая отрицательная диффузия. Отметим также, что уравнение (21) определено на конечном пространственном интервале и теперь не имеет малых параметров при производной, как в исходной системе.

Комплексное уравнение Гинзбурга - Ландау (21) является одной из базовых моделей в гидродинамике, математической биологии, химической кинетике и подробно исследовалось как аналитически, так и численно [10,12]. В частности, показано, что сложные неоднородные режимы (инвариантные торы, диффузионный хаос, турбулентная динамика дефектов) возможны при разрушении устойчивости однородного решения ( $\partial \xi / \partial x = 0$ ). Линейный анализ показывает, что однородное решение уравнения (21), совпадающее с решением (13), устойчиво относительно малых возмущений, если  $1+c_1c_2 > 0$ , где  $c_1 = (1+\delta^2\nu)[\delta(1-\nu)]^{-1}$ ,  $c_2 = \delta\nu$ . Это неравенство всегда справедливо при отрицательной расстройке. Для  $\Delta < \Delta_0 = -N_{01}(1+\mu)^2/2$ , по-видимому, не существует других решений, кроме однородного и, следовательно, «высокая» размерность критического случая не приводит к усложнению динамики. Поэтому при превышении порога генерации однородная структура поля спонтанно не нарушается. Такой вывод поддерживается также отсутствием экспериментальных фактов возникновения длинноволновой турбулентности через хаотизацию динамики дефектов в лазерах [11], теоретически предсказанной в [4].

Для  $\Delta_0 < \Delta < 0$  наряду с устойчивым однородным решением в уравнении (21) с периодическими граничными условиями появляются простые решения в виде бегущих волн

$$E_k = [\epsilon N_{01} - \epsilon k^2 2\delta / (1+\mu)]^{1/2} \exp(i\omega_k t + ikx + i\phi),$$

где  $\omega_k = \delta\mu - \epsilon [k^2 / (1+\mu) + \mu\delta\nu / (\mu+1) / (1+\delta^2\nu^2)] + O(\epsilon^2)$ ,  $k=0,1,2 \dots$ , причем только некоторые из них являются устойчивыми. Число устойчивых бегущих волн возрастает при  $\Delta \rightarrow -0$ , и появляются длительные, неоднородные переходные режимы [12,13]. Следовательно, здесь возможно нарушение симметрии однородного состояния при жестком возбуждении.

Для граничных условий Неймана в области устойчивости однородного режима уравнение (21) других решений не имеет [10].

При значениях расстройки  $\Delta$ , близких к 0 (как отрицательных, так и положительных), динамика формируется также на пространственных модах, ближайших к нулевой. Формальные ряды для построения решения в этом случае даны в (B.2). С их помощью получаем квазинормальную форму для параметра порядка

$$\partial \xi / \partial \tau = K\mu^{-1} \partial^2 \xi / \partial x^2 + (N_{01} - i\Delta_1) K \xi - K \xi |\xi|^2 + O(\epsilon), \quad (22)$$

где  $K = \mu / (\mu+1)$ , с соответствующими граничными условиями. Уравнение (22) допускает решения в виде устойчивых бегущих волн для периодических граничных условий

$$E = (\epsilon N_{01})^{1/2} \exp[i\epsilon t (-K\Delta_1 - m^2 / (\mu+1)) + imx], \quad m=0,1,2 \dots$$

Таким образом, заключаем, что при малых расстройках наряду с устойчивым однородным режимом может реализоваться мультистабильность пространственных неоднородных структур. Для граничных условий Неймана имеем только устойчивое однородное решение.

#### 4. Высокомодовые пространственные бифуркации при малой дифракции и положительной расстройке

Пусть  $D_\epsilon = \epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow +0$ ,  $\Delta > 0$ . В этом случае пространственно-временная динамика формируется при участии асимптотически большого числа возбужденных пространственных мод вокруг мод с большими номерами  $n_\epsilon = \pm((\Delta/\epsilon)^{1/2} + \theta)$ , где  $\theta \in (-1, 0]$  и дополняет  $(\Delta/\epsilon)^{1/2}$  до целого числа.

Главный член разложения, определяющий скорость изменения амплитуд вследствие пространственных взаимодействий, имеет порядок  $\epsilon^{1/2}$ . Поэтому параметр надкритичности удобно выбрать в виде  $\epsilon^{1/2}N_{01}$  и рассматривать малую окрестность критического параметра  $N_0 = 1 + \epsilon^{1/2}N_{01}$ . Так как малость коэффициента дифракции  $\epsilon$  часто связана с большими поперечными размерами системы, то и коэффициент диффузии носителей удобно выбрать в виде  $D_n = \epsilon d_n$ . Конечно, дифракция, накачка и диффузия носителей - физически независимые параметры. Эта независимость учитывается в произвольном выборе множителей  $N_{01}$  и  $d_n$ . Тогда, как будет видно ниже, при некоторых их значениях может возникнуть необходимость повторной нормализации уже нормализованных уравнений.

В окрестности состояния равновесия решение системы (1) с периодическими граничными условиями следует искать в виде ряда, данного в (B.3). Динамика медленных амплитуд определяется квазинормальной формой

$$\begin{aligned} \partial \xi / \partial \tau' + \alpha \partial \xi / \partial x &= (N_{01} - i\Delta^{1/2}2\theta/\mu)K\xi - K\xi(|\xi|^2 + b^-\eta^2) + O(\epsilon), \\ \partial \eta / \partial \tau' - \alpha \partial \eta / \partial x &= (N_{01} - i\Delta^{1/2}2\theta/\mu)K\eta - K\eta(|\eta|^2 + b^-\xi^2) + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $b^- = 1 + (1 + 4\Delta d_n/\gamma)^{-1}$ ,  $\alpha = 2\Delta^{1/2}/(1 + \mu)$ , а медленное время теперь связано с дифракцией так:  $\tau' = \epsilon^{1/2}t$ . Систему (23) дополняют периодические граничные условия для  $\xi$  и  $\eta$ . В таком случае (23) допускает решения типа бегущих (вращающихся по кольцу) волн

$$\xi(\tau', x) = \xi_0 \exp[i\alpha(\theta - m) - imx], \quad \eta(\tau', x) = \eta_0 \exp[i\alpha(\theta - m) + imx], \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Линейный анализ показывает, что генерация противоположно вращающихся волн с амплитудами  $|\xi_0|^2 = |\eta_0|^2 = N_{01}(1 + b^-)^{-1}$  всегда неустойчива. Генерация однонаправленных волн  $\eta = 0$ ,  $|\xi_0|^2 = N_{01}$  или  $\xi = 0$ ,  $|\eta_0|^2 = N_{01}$  возможна, так как эти решения имеют характеристические числа  $g_{1n} = g_{2n} = -N_{01} - i\alpha$ ,  $g_{3n} = -i\alpha$ ,  $\text{Reg}_{4n} = -2N_{01} < 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и, следовательно, являются нейтрально устойчивыми.

Таким образом, динамика исходной системы (1),(2) в главном демонстрирует вращающиеся волны

$$E_m(x, t) = \epsilon^{1/4} N_{01}^{1/2} \exp(i\omega_m t + ik_m x + i\phi) + O(\epsilon^{3/4}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

с частотой генерации  $\omega_m = -\Delta - (\epsilon\Delta)^{1/2}(\theta - m)/(1 + \mu) + O(\epsilon)$  и волновыми числами  $k_m = n_\epsilon - m$ . Известный скейлинговый закон роста амплитуды в закритической области связан теперь с параметром дифракции  $\epsilon$ .

Поскольку достоверные решения на компьютере системы уравнений (1) с малой дифракцией  $\epsilon$  получить затруднительно, особое значение приобретают экспериментальные факты. Реализацию коротковолновых режимов демонстрирует лазер на красителе [11], где обнаружено, что сложная светодинамика проявляется только на достаточно малых пространственных масштабах.

В уравнениях (23) значение постоянной фазы  $\phi$  и номера моды  $m$  равноправны и задаются начальными условиями. Вследствие нейтральной устойчивости решений малые члены порядка  $\epsilon^{1/2}$  в уравнениях (23) могут

накапливаться за время  $t > \varepsilon^{-1/2}$  и переводить систему из состояния с номером  $m$  в соседнее. Конечно, время жизни каждого решения будет уменьшаться при повышении уровня внешних шумов. Так как квазинормальные формы являются универсальными для различных систем с одинаковым характером потери устойчивости, то аналогичный сценарий может служить универсальным путем хаотизации динамики. Здесь отметим, например, эксперимент [16] с фоторефрактивным материалом, где исследовались поперечные световые структуры, возникающие при увеличении числа Френеля  $F$  (что эквивалентно уменьшению коэффициента дифракции). При достаточно больших  $F$  наблюдаются различные (близкие) поперечные структуры, сменяющие друг друга через длительные нерегулярные интервалы времени. Такую же природу, возможно, имеет явление «хаотического блуждания» [17,18] в лазерах с большим числом возбужденных продольных мод, а также в лазерах с внешней запаздывающей обратной связью [14,15], где при наличии внешней подсветки быстро осциллирующие решения оказывались нейтрально устойчивыми в укороченной системе для отобранных решений.

Поперечные световые структуры вызывают особый интерес, так как они претендуют на роль «образов» в оптическом нейрореподобном компьютере. Поэтому интересно отметить, что явление хаотического блуждания можно интерпретировать как генерацию новых, или распознавание близких образов, после предъявления исходного образа - моды с номером  $m$ .

Поскольку вращающиеся волны в эксперименте различимы только по частоте генерации, то более перспективной для визуального наблюдения структур оказывается геометрия отрезка с граничными условиями Неймана. В этом случае с помощью ряда (В.4) получаем уравнения для параметров порядка

$$\partial \xi / \partial \tau' - i \alpha \partial \eta / \partial x = (N_{01} - i \Delta^{1/2} 2\theta / \mu) K \xi - K \xi (|\xi|^2 + |\eta|^2) / 2 - K(b^{-1} - 1) \xi^* (\xi^2 + \eta^2) / 4 + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (24)$$

$$\partial \eta / \partial \tau' + i \alpha \partial \xi / \partial x = (N_{01} - i \Delta^{1/2} 2\theta / \mu) K \eta - K \eta (|\xi|^2 + |\eta|^2) / 2 - K(b^{-1} - 1) \eta^* (\xi^2 + \eta^2) / 4 + O(\varepsilon^{1/2})$$

со смешанными граничными условиями

$$\partial \xi / \partial x|_{x=0} = \partial \xi / \partial x|_{x=2\pi} = 0, \quad \eta|_{x=0} = \eta|_{x=2\pi} = 0.$$

Уравнения (24) допускают решения вида

$$\xi(\tau', x) = \rho(\tau') \cos(mx), \quad \eta(\tau', x) = \rho(\tau') \sin(mx), \quad m=0, 1, 2, \dots$$

При нейтральной устойчивости в исходной системе будем наблюдать медленную смену пространственных структур типа стоячей волны с различным числом узлов и пучностей:  $E = \varepsilon^{1/4} \rho_0 \cos(n_\varepsilon x - mx) \exp(i\omega t + i\varphi)$  с максимальной интенсивностью в пучностях  $|\rho_0|^2 = 4 N_{01}(1+b)^{-1}$  и с частотой генерации  $\omega = -\Delta - (\varepsilon \Delta)^{1/2} 2\theta / (1+\mu) + O(\varepsilon)$ .

Остановимся теперь на важном случае «малой накачки» в задаче с периодическими граничными условиями, когда в уравнениях (23)  $N_{01} \ll 1$  и существенными оказываются слагаемые порядка  $O(\varepsilon^{1/2})$ . Тогда возникает необходимость повторной нормализации уже нормализованных уравнений. При этом будем использовать информацию о решениях системы (23). Поскольку генерация противоположно направленных волн неустойчива, то будем строить решения на основе волны, бегущей в одном направлении. В окрестности критического значения накачки  $N_0 = 1 + \varepsilon N_{01}$  ищем решения в виде ряда (В.5). Получаем уравнение для медленных амплитуд с периодическими граничными условиями

$$\partial \xi / \partial \tau = (i \partial^2 \xi / \partial x^2 - 2\theta \partial \xi / \partial x) / (1+\mu) + (N_{01} - i\theta^2 / \mu) K \xi - K \xi |\xi|^2 + O(\varepsilon). \quad (25)$$

Это уравнение имеет устойчивые решения, соответствующие генерации бегущих волн

$$E_m = (\varepsilon N_{01})^{1/2} \exp(i\omega_m t + ik_{mz} z)$$

с частотой генерации

$$\omega_m = -\Delta - (\varepsilon \Delta)^{1/2} 2\theta / (1 + \mu) - \varepsilon (\theta^2 - 2\theta m - 2m\Delta^{1/2}) / (1 + \mu) + O(\varepsilon^{3/2})$$

и волновыми числами  $k_m = n_\varepsilon - m$ .

Таким образом, увеличение накачки в закритической области приводит (в отличие от явления кооперативного захвата частоты [1]) к изменению устойчивости бегущих волн и возможности переходов между ними.

### Заключение

Рассмотрена задача о формировании пространственных структур в кольце и одномерном отрезке активной среды на основе полуклассических лазерных уравнений с дифракцией.

С использованием методов теории нормальных форм получены решения нелинейных уравнений в малой окрестности первого порога генерации. Показано существенное различие задач с конечным и малым значением коэффициента дифракции.

Для отрицательной расстройки и коэффициента дифракции, не являющимся малым параметром, найдено однородное по пространству и осциллирующее во времени решение. При этом изучаемая система ведет себя, как сосредоточенная, и не зависит от геометрии и граничных условий.

Если же расстройка положительная, то имеет место потеря устойчивости, обусловленная временной и пространственной динамикой. Критический случай может быть реализован для двух, трех или четырех пространственных мод одновременно. Решения существенно зависят от граничных условий. Кольцо активной среды будет генерировать право- или левовращающуюся волну, причем их одновременная генерация невозможна. На отрезке активной среды, наоборот, реализуется стоячая волна. Возможны би- и трехстабильные по пространственному распределению интенсивности излучения режимы генерации: однородный, неоднородный стационарный и неоднородный автоколебательный (вращающийся).

В случае малого коэффициента дифракции предложен корректный метод построения квазинормальных форм для параметров порядка, определяющих динамику системы с учетом граничных условий. Параметр надкритичности оказывается существенно связанным с дифракцией. Для отрицательной расстройки квазинормальной формой является одномерное комплексное уравнение Гинзбурга - Ландау, причем спонтанным (мягким) образом рождаются только однородные структуры.

Для положительной расстройки получены быстро осциллирующие по пространственной переменной решения типа бегущих волн в кольце или стоячих волн на отрезке. Возможна генерация счетного количества таких волн, а их амплитуда и изменение частоты определяются коэффициентом дифракции. Полученные волны имеют нейтральную устойчивость в укороченных уравнениях. Это может стать причиной явления «хаотического блуждания».

Полученные нормальные и квазинормальные формы являются универсальными для различных задач, имеющих одинаковый характер потери устойчивости. Размерность нормальной формы определяется числом характеристических показателей с близкой к нулю вещественной частью, а тип нелинейности исходной задачи учитывается в конкретных значениях постоянных коэффициентов нормальной формы. Такой подход может стать основой для классификации явлений пространственно-временной самоорганизации в диссипативных системах.

Развитые методы построения квазинормальных форм могут быть распространены и на двумерные пространственно-временные динамические задачи. Результаты будут представлены в последующих публикациях.

*Работа частично финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь, грант Ф35-211.*

## Приложение А

Амплитуды нулевой  $\xi_0$  и первой  $\eta_0$  пространственных мод и поправка к частоте  $w_0$  в закритической области в случае периодических граничных условий

$$\xi_0^2 = \frac{N_{01}B + D_1C(1+B)}{(1+B)^2 - 1}, \quad \eta_0^2 = \frac{N_{01}B - D_1C}{(1+B)^2 - 1},$$

$$w_0 = \frac{\mu}{\mu+1} \left[ -D_1/\mu + \left(1 + \frac{\delta}{1+D_n/\gamma}\right) (|\xi_0|^2 + |\eta_0|^2) \right].$$

Амплитуды нулевой  $\xi_1$  и первой  $\eta_1$  пространственных мод и поправка к частоте  $w_1$  в закритической области в случае граничных условий Неймана

$$\xi_1^2 = \frac{N_{01}(B - B_1) + D_1C(1+B)}{(1+B)^2 - (1+B_1)}, \quad \eta_1^2 = \frac{2(N_{01}B - D_1C)}{(1+B)^2 - (1+B_1)},$$

$$w_1 = \frac{\mu}{\mu+1} \left[ -D_1/\mu + \left(1 + \frac{\delta}{1+D_n/\gamma}\right) (|\xi_0|^2 + \frac{1}{2} |\eta_0|^2) \right].$$

## Приложение В

Формальные ряды, с помощью которых получены квазинормальные формы в следующих случаях.

1. Критические условия (10) для обоих типов граничных условий

$$E = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, x) \exp(i\omega_0 t) + \varepsilon^{3/2} e_3(\tau, x, t) + \dots,$$

$$P = \varepsilon^{1/2} a_0 \xi(\tau, x) \exp(i\omega_0 t) + \varepsilon^{3/2} p_3(\tau, x, t) + \dots, \quad (\text{B.1})$$

$$N = N_0 \sim + \varepsilon n_2(\tau) + \dots,$$

$$\tau = \varepsilon t, \quad \omega_0 = \delta \mu, \quad a_0 = 1 + i\delta, \quad N_0 \sim = 1 + \delta^2.$$

2. Критические условия (10) и  $\Delta \rightarrow 0$

$$E = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} e_3(\tau, x, t) + \dots,$$

$$P = \varepsilon^{1/2} a \xi(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} p_3(\tau, x, t) + \dots, \quad (\text{B.2})$$

$$N = N_0 \sim + \varepsilon n_2(\tau) + \dots,$$

$$\tau = \varepsilon t, \quad a = 1, \quad N_0 \sim = 1.$$

3. Критические условия (11) и «большая» накачка  $N_0 = N_0 \sim + \varepsilon^{1/2} N_{01}$  для периодических граничных условий

$$E = \varepsilon^{1/4} [\xi(\tau, x) \exp(i\omega_1 t + n_\varepsilon x) + \eta(\tau, x) \exp(i\omega_1 t - n_\varepsilon x)] + \varepsilon^{3/4} e_3(\tau, x, t) + \dots,$$

$$P = \varepsilon^{1/4} a [\xi(\tau, x) \exp(i\omega_1 t + n_\varepsilon x) + \eta(\tau, x) \exp(i\omega_1 t - n_\varepsilon x)] + \varepsilon^{3/4} p_3(\tau, x, t) + \dots, \quad (\text{B.3})$$

$$N = N_0 \sim + \varepsilon^{1/2} n_2(\tau, x) + \dots,$$

$$\tau = \varepsilon^{1/2} t, \quad \omega_1 = -\Delta, \quad a = 1, \quad N_0 \sim = 1.$$

4. Критические условия (11) и «большая» накачка для граничных условий Неймана

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon^{1/4} [\xi(\tau, x) \cos(n_\varepsilon x) + \eta(\tau, x) \sin(n_\varepsilon x)] \exp(i\omega_1 t) + \varepsilon^{3/4} e_3(\tau, x, t) + \dots, \\ P &= \varepsilon^{1/4} \gamma [\xi(\tau, x) \cos(n_\varepsilon x) + \eta(\tau, x) \sin(n_\varepsilon x)] \exp(i\omega_1 t) + \varepsilon^{3/4} p_3(\tau, x, t) + \dots, \\ N &= N_0 \sim + \varepsilon^{1/2} n_2(\tau, x) + \dots, \\ \tau &= \varepsilon^{1/2} t, \quad \omega_1 = -\Delta, \quad a = 1, \quad N_0 \sim = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

5. Критические условия (11) и «малая» накачка для периодических граничных условий

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau, x - \alpha t) \exp(i\omega_1 t + n_\varepsilon x - i\alpha \theta \varepsilon^{1/2} t)] + \varepsilon^{3/2} e_3(\tau, x, t) + \dots, \\ P &= \varepsilon^{1/2} a [\xi(\tau, x - \alpha t) \exp(i\omega_1 t + n_\varepsilon x - i\alpha \theta \varepsilon^{1/2} t)] + \varepsilon^{3/2} p_3(\tau, x, t) + \dots, \\ N &= N_0 \sim + \varepsilon n_2(\tau, x) + \dots, \\ \tau &= \varepsilon t, \quad \omega_1 = -\Delta, \quad a = 1, \quad N_0 \sim = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

### Библиографический список

1. *Lugiato L.A.* Spatio-temporal structures. Part 1. // *Phys.reports.* 1992. 219, Nos 3-6. P. 293.
2. *Brambilla M. et.al.* Transverse laser patterns. 1. Phase singularity crystals // *Phys.Rev.A* 1991. Vol. 3. P. 5090.
3. *Jakobsen P.K., Moloney J.V., Newell A.C., Indik R.* Space-time dynamics of wide-gain-section lasers // *Phys.Rev.A* 1992. Vol. 45. P. 8129.
4. *Staliunas K.* Laser Ginzburg - Landau equation and laser hydrodynamics // *Phys.Rev.A* 1993. Vol. 48. P. 1573.
5. *Collett P., Gil L., Rocca F.* Optical vortices // *Commun.* 1989. Vol. 73. P. 403.
6. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
7. *Каценко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // *Докл. акад. наук СССР.* 1989. №. 299. С. 1049.
8. *Каценко С.А.* Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // *Kashchenko S.A. // Sov.J.Diff.Equat.* 1989. Vol.25. P. 262.
9. *Loper Ruiz R., Midlin G.B., Perez-Garcia P., Tredicce J.* Mode-mode interaction for CO<sub>2</sub> laser with imperfect O(2) symmetry // *Phys.Rev. A* 1993. Vol. 47. P. 500.
10. *Ахромеева Т.С., Курдюмова С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* О классификации решений системы нелинейных уравнений в окрестности точки бифуркации // *Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР.* 1986. Т. 28. С. 207.
11. *Perez-Garcia V.M., Guerra J.M.* Weak turbulent behavior and dynamical frequency locking in high-Fresnel-number laser // *Phys.Rev.A* 1994. Vol. 50. № 1.
12. *Collett P., Gil L., Lega J.* A form of turbulence associated with defects // *Physica D* 37. 1989. P. 91.
13. *Bekki N., Nozaki K.* Formations of spatial patterns and holes in the generalized Ginzburg - Landau equation // *Phys.Lett.* 1985. Vol. 110 A P. 133.
14. *Grigorieva E.V., Kashchenko S.A.* Complex temporal structures in models of a laser with optoelectronic delayed feedback // *Opt.Commun.* 1993. Vol. 102. P. 183.
15. *Grigorieva E.V., Kashchenko S.A.* Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // *Bifurcation & Chaos.* 1993. Vol. 3. № 15. P. 15-15.29.
16. *Arecchi F.T. et.al.* Experimental evidence of chaotic itinerancy and spatio-temporal chaos in optics // *Phys.Rev.Lett.* 1990. Vol. 65. P. 2531.
17. *Ikeda K., Otsuka K., Matsumoto K.* Maxwell - Bloch Turbulence // *Progr. Theor.Phys.Suppl.* 1989. Vol. 99. P. 295.

18. *Otsuka K.*// Phys.Rev.Lett. 1990.Vol.65. P. 329.

Беларуский государственный университет  
Международный лазерный центр  
Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию 14.10.94  
после переработки 14.02.95

## NORMAL AND QUASI-NORMAL FORMS OF THE SEMICLASSICAL LASER EQUATIONS WITH DIFFRACTION

*E.V. Grigorieva, S.A. Kashchenko*

The transverse pattern formation of rotating and standing waves and transverse mode beating in laser are considered using of the normal form method. The complicated dynamics possibility due to the neutral stability solutions of the shortened equations is demonstrated.



*Григорьева Елена Викторовна* - окончила физический факультет Белорусского государственного университета (1979). Работала в Институте физики АН БССР в лаборатории общей спектроскопии по теме формирования сложных режимов генерации в лазерах с нелинейными элементами. В настоящее время - сотрудник Международного лазерного центра при БГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика лазерно-оптических систем.



*Кашченко Сергей Александрович* - родился в 1953 году. Окончил Ярославский государственный университет. В 1990 году защитил докторскую диссертацию (МГУ). С 1991 года - профессор, зав. кафедрой математического моделирования ЯГУ. Область научных интересов - асимптотические методы исследования сложной динамики систем с запаздыванием, систем параболического и гиперболического типов.



## ПРОЦЕССЫ САМООРГАНИЗАЦИИ КАК РЕЗУЛЬТАТ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В СИСТЕМАХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*Е.С. Мчедлова, А.Д. Трубецков*

В процессе численного эксперимента исследуются взаимодействия в системе биологических ритмов, находящихся в периодически изменяющихся внешних условиях. Каждый биологический осциллятор моделируется автоколебательным процессом. Рассмотрена реакция системы на нарушение периодичности внешнего воздействия, определены значения времен адаптации. В связи с конкретным практическим применением предложен способ оценки негативного влияния, оказываемого на систему разными типами фазовых возмущений.

### Введение

Многолетний практический опыт и современные исследования в различных областях медицины и, в частности, в биоритмологии, позволяют утверждать, что большинство физиологических и биохимических процессов в живых системах носит вполне закономерный колебательный характер и подчиняется определенному функциональному порядку организма. Такой порядок, в известной мере, обусловлен взаимодействиями многих периодически изменяющихся процессов. Как показывает практика, одним из основных механизмов взаимодействий в таких системах может считаться синхронизация (см., например, [1-4]), которая в различной степени присуща всем уровням биологической иерархии.

В общем случае можно считать, что взаимодействие биологических ритмов в живых системах определяется двумя факторами: 1) внешними влияниями (вынужденная синхронизация) и 2) внутренними связями (самосинхронизация). Согласно такой классификации указанные работы посвящены взаимной синхронизации, обусловленной только внутренними взаимодействиями. В частности, в работе [4] автор описывает биологическую систему как совокупность  $N$  автоколебательных процессов, связанных так, что каждый из них находится под непосредственным влиянием остальных. Результатом исследования такой модели явилась взаимная синхронизация фаз и амплитуд осцилляторов.

Возникает вопрос, что произойдет, если рассматривать совокупность биологических процессов при наличии изменяющихся внешних условий. Обратим внимание на тот факт, что с точки зрения взаимодействий «организм - окружающая среда» выделяют два типа колебательных процессов [5,6]: адаптивные и физиологические. Будем рассматривать адаптивные ритмы или биоритмы, то есть колебания с периодами, близкими к геофизическим циклам, роль которых заключается в адаптации организма к периодическим изменениям внешней среды,

и основное внимание сосредоточим на циркадных процессах, период которых близок к 24 часам. Главное свойство циркадных колебаний - способность подстраиваться по фазе к внешнему периодическому сигналу (в качестве сигнала может выступать, например, смена дня и ночи) [7].

При создании моделей взаимодействий в живых системах разумно придерживаться известного для исследователей в области хронобиологии мультиосцилляторного принципа [5], согласно которому циклические процессы в организме осуществляются относительно независимыми пейсмекерами, синхронизированными по фазе и периоду. Подчеркнем двоякую роль данного принципа: с одной стороны, он позволяет организму эффективно приспосабливаться к изменениям временной организации окружающей среды, с другой - в нем заложено патологическое начало, так как относительная независимость отдельных элементов биоритмологической структуры может, при определенных условиях, приводить к десинхронизации внутренних циклических процессов и быть причиной патологии. В этой связи математические модели биологических взаимодействий становятся важными для изучения динамических болезней [8], которые классифицируются как процессы с аномальной временной организацией.

### Математическая модель

Рассмотрим совокупность биологических процессов (биоритмов) в организме при наличии изменяющихся внешних условий. Формально модель может быть представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных относительно комплексных переменных состояния  $Z_n$ ,

$$\dot{Z}_n = f(Z_n) + \varepsilon F(Z_1, Z_2, \dots, Z_N) + G(t), \quad n=1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $Z_n$  - переменная, характеризующая состояние  $n$ -го осциллятора в системе;  $N$  - общее количество осцилляторов; точка над  $Z_n$  означает производную по безразмерному времени;  $G(t)$  определяет внешнее воздействие на систему;  $F(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$

- функция, задающая характер взаимодействия. Уравнение  $\dot{Z}_n = f(Z_n)$  описывает поведение  $n$ -го изолированного ритма, где функция  $f(Z_n)$  должна содержать нелинейность.

Частному случаю исследования системы (1) посвящена работа [4]. В ней каждый элемент описывался уравнением автогенератора с кубичной нелинейностью, взаимодействия определялись как

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Z_n - Z_k)$$

и внешнее воздействие отсутствовало. Как было отмечено выше, в системе наблюдалась самосинхронизация для разных распределений собственных частот автогенераторов.

Мы также будем моделировать динамику каждого осциллятора (ритма) автоколебательным процессом, но иначе зададим связь между осцилляторами и учтем внешнее воздействие ( $G(t) \neq 0$ ). Такая система может быть описана следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{i,m} = j\omega_{i,m} Z_{i,m} + Z_{i,m} (1 - |Z_{i,m}|^2) + \varepsilon (Z_{i-1,m} + Z_{i+1,m} + Z_{i,m-1} + Z_{i,m+1}) + \\ + K \exp(j\varphi), \quad i, m=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $Z_{i,m}$  - переменная состояния,  $\varepsilon$  - параметр, характеризующий степень связи

между осцилляторами;  $K$  - амплитуда внешнего воздействия;  $\varphi = \omega_0 t$  - фаза;  $\omega_0$  - частота внешнего воздействия;  $j = \sqrt{-1}$ . Обратим внимание на тип связи: осцилляторы объединены в решетку. Такой подход не случаен - в биологической системе ритмы связаны неравноправно и, в этом смысле, решетка может считаться менее грубым приближением, чем глобальная связь, когда каждый осциллятор связан со всеми остальными непосредственно.

Необходимо учесть тот факт, что ритмы не вполне идентичны: периоды колебаний отдельных процессов несколько отличаются друг от друга и от периода внешнего воздействия. Мы полагаем, что собственные частоты осцилляторов  $\omega_{i,m}$  распределены равномерно в малом интервале вблизи частоты  $\omega_0$  внешнего воздействия.

### Результаты численного исследования

Система уравнений (2) интегрировалась численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Начальные условия выбирались случайным образом в диапазоне от 0 до 1. Граничные условия задавались в виде

$$Z_{0,m} = Z_{1,m}, \quad Z_{N+1,m} = Z_{N,m}, \quad m = 1, \dots, N,$$

$$Z_{i,0} = Z_{i,1}, \quad Z_{i,N+1} = Z_{i,N}, \quad i = 1, \dots, N,$$

что при данном типе связей в решетке практически полностью ликвидирует «краевые эффекты». Интегрируя уравнения (2), нетрудно убедиться, что процессы достаточно быстро (за время, соизмеримое с несколькими периодами внешнего воздействия) синхронизируются по фазе и амплитуде.

Представлялось интересным выяснить, какова будет реакция моделируемой системы на фазовые изменения во внешнем воздействии

вида

$$G(t) = K \exp(j\varphi)$$

$$\varphi = \begin{cases} \omega_0 t, & t \leq t_0; \\ \omega_0 t + \text{Shift}, & t > t_0. \end{cases} \quad (3)$$

Условие (3) соответствует тому, что в момент времени  $t_0$  в систему вносится возмущение в виде сдвига Shift фазы  $\varphi$ .

Оказалось, что после скачкообразного изменения фазы внешнего воздействия синхронизация разрушается, а затем вновь устанавливается (рис.1) по прошествии некоторого переходного процесса, длительность которого мы будем называть далее *временем адаптации* и обозначать  $T_{ad}$ . Таким образом, мы можем выяснить, как быстро система возвращается в прежнее состояние при заданной величине возмущения.  $T_{ad}$  будем вычислять как разницу между двумя моментами: временем внесения возмущения  $t_0$  и моментом восстановления синхронного режима  $t_{sync}$ . Естественно, что  $t_{sync}$  и, следовательно,  $T_{ad}$ , мы можем определить с конечной степенью точности  $\Delta$ .

Отметим здесь, что наша модель имеет значительное число параметров:  $\omega_{i,m}$ ,  $\varepsilon$ ,  $K$ ,  $\omega_0$ ,  $t_0$ ,  $\Delta$ , Shift,  $N$  и большинство из них необходимо задать постоянными. Очевидно, соотношение значений  $\varepsilon$ ,  $K$  и  $\Delta$ , которые следует определить в начале вычислений, непосредственно влияет на величину  $T_{ad}$ . Задавая значения этих параметров мы, главным образом, руководствовались следующим «нормировочным» принципом как следствием практического опыта: величины  $\varepsilon$ ,  $K$  и  $\Delta$  должны быть такими, чтобы максимальное время адаптации (при Shift= $\pi$ ) составляло не менее трех периодов внешнего воздействия, а минимальное (при фазовых сдвигах, близких к 0 и  $2\pi$ ) - было бы незначительным при сопоставлении с периодом синхронных колебаний в системе.

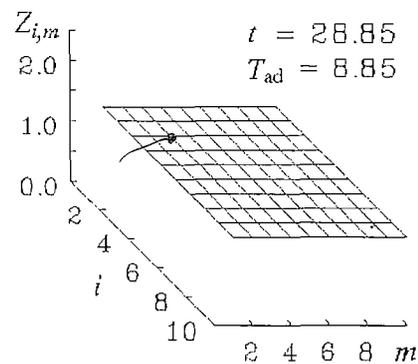
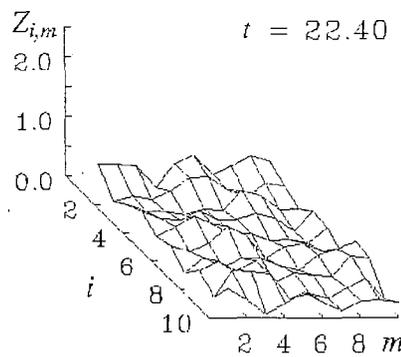
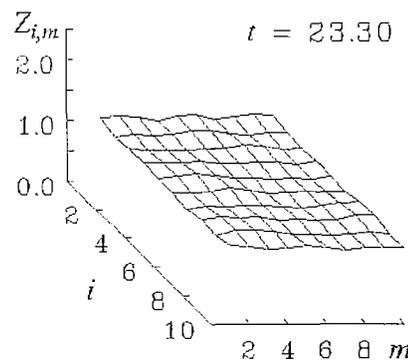
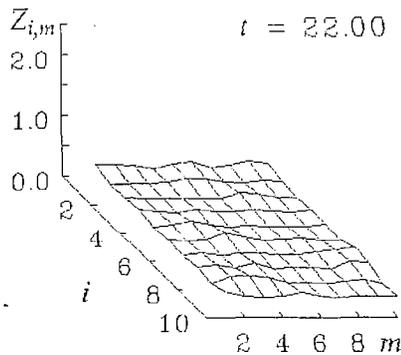
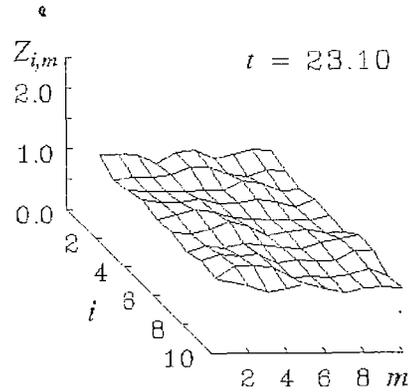
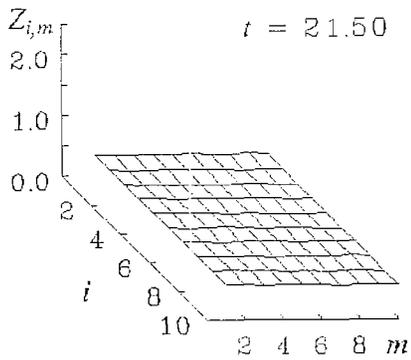
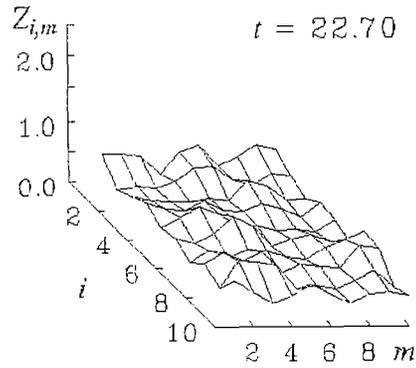
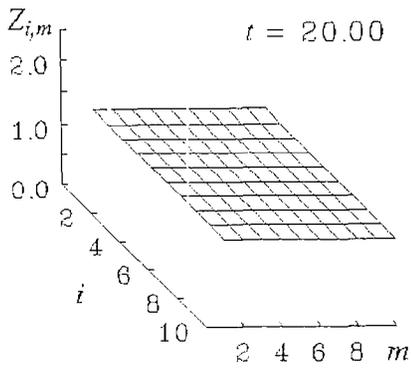


Рис. 1. Временная эволюция пространственного распределения абсолютных величин комплексных переменных  $Z_{i,m}$ , иллюстрирующая разрушение и восстановление режима синхронных колебаний при внесении сдвига фазы внешнего воздействия  $\text{Shift}=\pi$ .  $K=1$ ,  $\epsilon=0.1$ ,  $h=0.05$ ,  $t_0=20$ ,  $\Delta=0.0001$ ,  $\omega_0=1$ ,  $\omega_{i,m} \in [0.95; 1.05]$ ,  $i, m=1, \dots, 10$

Обратим внимание на тот факт, что слабая\* по сравнению с «интенсивностью» внешнего воздействия связь ритмов, совсем не означает наложения на  $K$  и  $\epsilon$  ограничения вида  $\epsilon \ll K$ . Причиной является то, что одна и та же связь  $\epsilon$  может быть сильной для одинаковых, но слабой для разнородных элементов ([6], том 2, с. 82). В данном случае различия между элементами определяются разбросом частот  $\omega_{i,m}$ .

Результаты расчета зависимости времени адаптации от величины сдвига фазы внешнего воздействия приведены на рис. 2, а. Как видно из рисунка функция  $T_{ad}$  (Shift) существенно нелинейна, симметрична относительно Shift= $\pi$  и имеет в этой точке максимум, что хорошо согласуется с практикой: наибольшие времена адаптации требуются организму при изменении фазы внешних условий на 1/2 периода. Сравнивая кривые 1 и 2, соответствующие норме и патологии, в последнем случае можно заметить увеличение  $T_{ad}$  при относительном сохранении формы кривой, что вполне согласуется с реальными данными: живые системы с патологическими отклонениями гораздо хуже адаптируются при изменении условий окружающей среды. Данный результат представляет собой попытку моделирования аномалии, заложенной непосредственно в самом организме, когда частоты одного или нескольких ритмов существенно отличаются от остальных (рис. 2.б), считается, что это не является физиологической нормой и соответствует заболеванию).

До сих пор мы рассматривали влияние на систему одиночного возмущения. Но, как правило, на практике более часто встречаются случаи, когда на биологическую систему действует последовательность возмущений (например, процесс сменного труда в условиях непрерывного производства). Обратимся к случаю, когда во внешнем воздействии последовательно друг за другом осуществляются два фазовых сдвига: Shift<sub>1</sub> и Shift<sub>2</sub>. Результат, иллюстрированный рис. 3 и представляет собой зависимость времени адаптации системы (после двух возмущений) от момента  $t_2$  внесения второго сдвига фазы после первого. Первое возмущение всегда осуществлялось при  $t=t_0=20$ . Значения остальных параметров здесь и далее те же, что и для рис. 2. Сплошной горизонтальной линией обозначен уровень на оси ординат, соответствующий  $T_{ad1}$  времени, в течение которого восстанавливается синхронизация после внесения возмущения Shift<sub>1</sub> (при условии

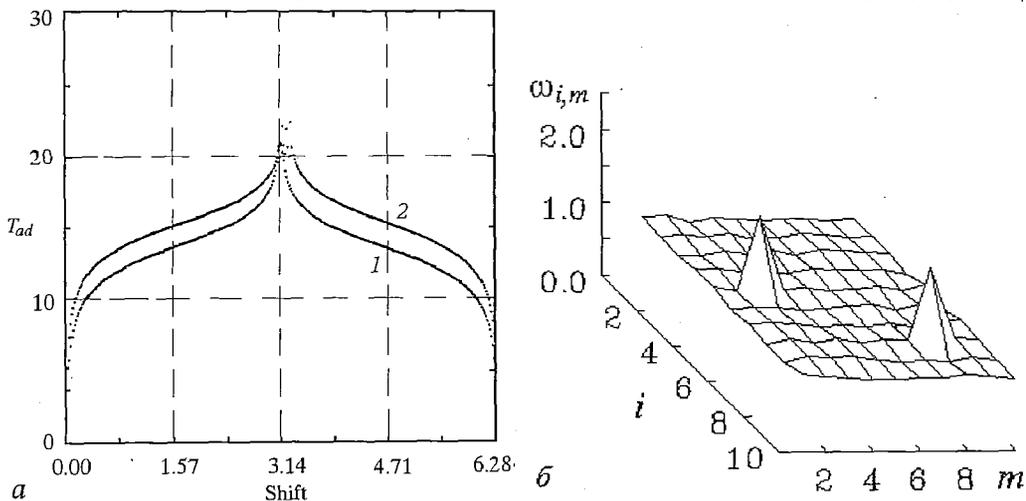


Рис. 2. а - зависимость времени адаптации системы от величины сдвига фазы внешнего воздействия. при  $K = 1$ ,  $\epsilon = 0.5$ , шаг интегрирования  $h=0.05$ ,  $t_0=20$ ,  $\Delta=0.0001$ ; 1 - физиологическая норма,  $\omega_0=1$ ,  $\omega_{i,m} \in [0.95; 1.05]$ ,  $i,m=1, \dots, 10$ ; 2 - патология, заключающаяся в наличии двух ритмов, существенно отличающихся от остальных:  $\omega_0=1$ ,  $\omega_{5,3}=\omega_{8,8}=2.0$ ,  $\omega_{i,m} \in [0.95; 1.05]$ ,  $i,m=1, \dots, N$ ; б - пространственное распределение собственных частот  $\omega_{i,m}$  осцилляторов решетки, соответствующее кривой 2.

\* Согласно мультиосцилляторному принципу.

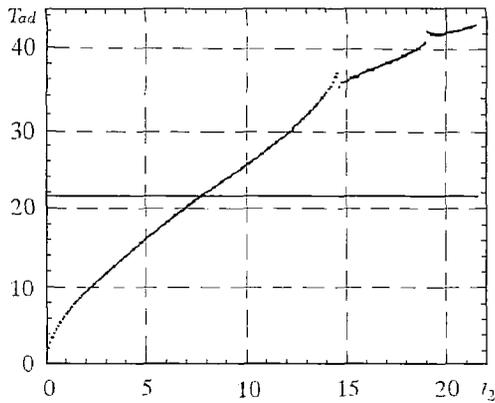


Рис. 3. Время адаптации системы, возмущаемой двумя последовательно вносимыми фазовыми сдвигами  $\text{Shift}_1 = \text{Shift}_2 = \pi$ , в зависимости от интервала времени между моментами внесения возмущений

период  $T$ . Необходимо определить параметр, который бы отражал степень неупорядоченности в системе, или степень десинхронизации (таким образом мы сможем оценить условную меру вреда, наносимого системе тем или иным режимом возмущения извне). Численные исследования показали, что при синхронизации ритмов абсолютные значения комплексных переменных состояния  $Z_{i,m}$  становятся одинаковыми и перестают изменяться во времени (см. рис.1). Это означает стремление к нулю величин

$$s_{i,m} = \|Z_{i,m}(t-h) - Z_{i,m}(t)\|,$$

где  $h$  - малый интервал времени, шаг численного интегрирования. Выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow t_{\text{sync}}} \sum_{i,m=1}^N s_{i,m} = 0$$

означает наступление режима синхронных колебаний в момент времени  $t = t_{\text{sync}}$ . Именно из этих соображений в предыдущих случаях вычислялось  $T_{\text{ad}} = t_{\text{sync}} - t_0$ ;

условие  $S(t) < \Delta$  служило численным критерием определения  $T_{\text{ad}}$ , где  $S(t) = \sum_{i,m=1}^N s_{i,m}$ .

В тех случаях, когда колебания в ансамбле взаимосвязанных осцилляторов рассогласованы, несинхронны, значение  $S(t)$  будет отличным от нуля и, кроме того, может изменяться во времени. Именно это мы наблюдаем, когда система возмущается периодически (рис. 4). Представляется разумным ввести величину

$$S_{T_n} = \max_{T_n} S(t),$$

определяемую как максимальное на каждом периоде  $T$  значение  $S(t)$ . Тогда проводя усреднение по числу периодов  $\mathcal{N}$ , получаем *степень десинхронизации*

$$\bar{S}_T = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} S_{T_n},$$

которую и будем считать мерой неупорядоченности в системе.

На рис. 5 представлена зависимость  $\bar{S}_T$ , вычисленная за  $\mathcal{N} = 50$  периодов, от величины фазового сдвига  $\text{Shift}$ . Из графика видно, что в достаточно большом

$\text{Shift}_2 = 0$ ). Из рис. 3 следует, что данный способ воздействия на систему при  $t_2 \in [T_{\text{ad}1}; T_{\text{ad}1} + 0.3 T_{\text{ad}1}]$  позволяет значительно уменьшить  $T_{\text{ad}}$  по сравнению с тем, каким бы оно было в отсутствие второго сдвига фазы.

Следующий шаг в моделировании поведения системы взаимодействующих биоритмов заключался в возмущении фазы  $\varphi$  на каждом периоде  $T$  внешнего воздействия, то есть

$$G(t) = K \exp(j(\omega_0 t + n \text{Shift}));$$

$$n = \text{int}((t - t_0)/T), \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, в этом случае о времени адаптации не следует говорить, поскольку осцилляторы «не успевают» синхронизироваться полностью за один

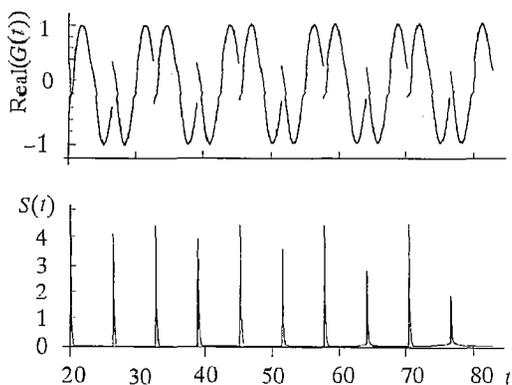


Рис. 4. Иллюстрация изменения во времени действительной части функции  $G$ , задающей внешнее воздействие, и величины  $S$ , определяющей уровень десинхронизации при периодическом возмущении системы.

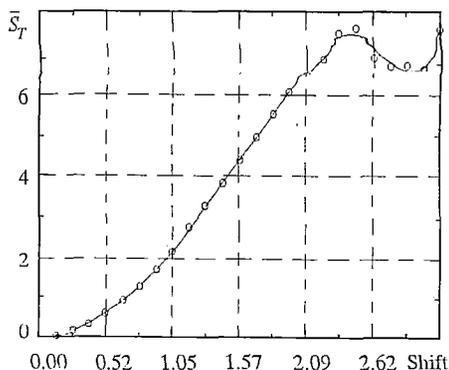


Рис. 5. Зависимость степени десинхронизации  $S_T$  от величины фазового сдвига Shift, вносимого в систему каждый период. Точками обозначены рассчитанные значения. Кривая - аппроксимация полиномом 9-го порядка.

диапазоне  $\text{Shift} \in (0.52; 2.09)$  функция  $\bar{S}_T(\text{Shift})$  линейно растет, а затем при дальнейшем увеличении значения фазового сдвига  $\bar{S}_T$  уже мало изменяется, что позволяет сделать вывод о приближительной эквивалентности сдвигов  $\text{Shift} > 2.09$  с точки зрения создаваемой ими десинхронизации.

### Практическое применение результатов моделирования

Очевидно, что в реальности влияние внешней среды на циркадные ритмы человека носит многокомпонентный характер. Синхронизирующий эффект оказывают длительность дня и ночи, время и длительность работы, физической активности, режим приема пищи и т. д. Однако, существуют ситуации, когда происходит резкое изменение временной среды, затрагивающее большинство из отмеченных факторов одновременно.

Частным примером переходного процесса в результате смены фазы внешнего воздействия может служить десинхронизация ритмов при трансмеридианальных перелетах через несколько часовых поясов. Вследствие этого на определенный период после перемещения наблюдается снижение умственной и физической работоспособности, нарушения сна, увеличивается подверженность инфекционным заболеваниям и т. д.

Другим и наиболее существенным примером является сменный труд, попытка интерпретации которого была положена в основу наших моделей. Целью разработки моделей можно считать унификацию подхода к различным сменным режимам, определение количественных критериев выраженности влияния рабочего графика на биологические ритмы человека. Ниже приводятся некоторые результаты исследований в этом направлении.

Под медицинским наблюдением находились вахтовые рабочие трех различных групп.

Группа I и группа III включала в себя рабочих, проживавших в Среднем Поволжье и трудившихся в Западной Сибири (разница по временным поясам в 2 часа), чередуя 12-дневный рабочий период с 12-дневным отдыхом по месту жительства. При этом в I группе происходило чередование вахтовых периодов в дневную и ночную смены по 12 часов, а в III группе работа велась только в дневную смену. Принимая совокупность внешних датчиков циркадных ритмов за одно периодическое воздействие, изменения, связанные с перелетом в новый часовой пояс, при жестком графике труда представляются, как смещение ритма на  $\pi/6$ , ночной труд - как смещение на  $\pi/2$ . В группе II вахтовый период и период отдыха длились по 8 дней, места проживания и трудовой деятельности находились в одном часовом поясе, а чередование ночных и дневных вахт проходило аналогично группе I.

Обследовались мужчины в возрасте от 25 до 45 лет со стажем работы вахтовым методом от 1 года до 10 лет. Число обследованных в I, II и III группах составляло 397, 475 и 149 человек, соответственно.

С использованием вышеизложенного математического аппарата для каждого режима труда было вычислено значение степени десинхронизации ( $\bar{S}_T$  вычислялось как среднее по всем периодам, составляющим заверченный цикл режима труда). Значения  $\bar{S}_T$  и данные медицинских наблюдений (частота  $\beta$  возникновения определенных типов заболеваний) приведены в таблице.

Таблица

№ группы	Режим трудовой деятельности	$\bar{S}_T$	Частота возникновения заболеваний (% в группе)		
			тип 1*	тип 2*	тип 3*
I	В течение 12 периодов осуществляется сдвиг фазы внешнего воздействия на $\pi/6$ , затем следует 12 невозмущенных периодов.	0.3	8.8	6.9	2.8
II	16 невозмущенных периодов, 8 периодов - сдвиг фазы на $\pi$ и затем 8 невозмущенных периодов	1.49	15.6	6.3	3.3
III	Сдвиг фазы внешнего воздействия на $\pi/6$ в течение 12 периодов, 12 невозмущенных периодов, 12 периодов - сдвиг фазы на $\pi$ и снова 12 обычных периодов	1.73	18.2	6.4	3.4

\*) тип 1 - инфекционные заболевания сердечно-сосудистой системы (гипертоническая болезнь, ишемическая болезнь сердца и пр.);  
 тип 2 - вертеброгенные и дегенеративные изменения нервной системы;  
 тип 3 - инфекционные заболевания желудочно-кишечного тракта (хронический гастрит, дуоденит, язвенная болезнь желудка и пр.).

Расположив  $\bar{S}_T$  на оси абсцисс, а  $\beta$  - на оси ординат (рис.6), мы имеем возможность сравнить между собой степени распространенности тех или иных типов заболеваний, выявленных у рабочих в ходе медицинского обследования. Из графиков видно, что разные режимы труда по-разному влияют на развитие того или иного типа заболевания. Так, можно заметить, что процентное содержание сердечно-сосудистых заболеваний (тип 1) заметно

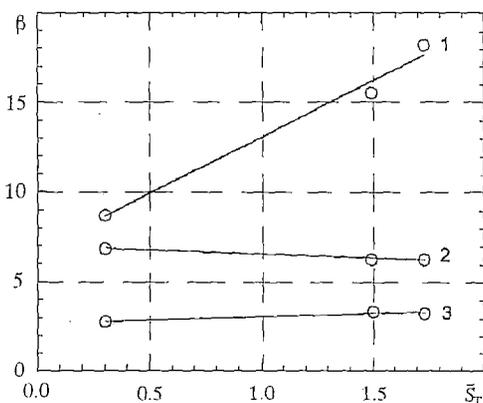


Рис. 6. Зависимость частоты  $\beta$  появления определенных типов заболеваний (% в группе) от степени десинхронизации  $\bar{S}_T$ , соответствующей конкретному режиму сменного труда: 1 - тип 1; 2 - тип 2; 3 - тип 3.

возрастает с увеличением степени десинхронизации  $S_T$ , а влияние режима труда на развитие заболеваний типов 2 и 3 выражено гораздо слабее.

Таким образом, появилась возможность оценить сменный труд как фактор риска изучаемых нарушений здоровья. С другой стороны, определив значение степени десинхронизации для нового способа чередования смен, который не использовался ранее, мы сможем сделать прогноз частоты возникновения заболеваний, исходя из полученных ранее данных.

### Библиографический список

1. Kuramoto Y., Nishikawa I. Onset of collective rhythms in large populations of coupled oscillators // *Coop. Dyn. Complex Phys. Syst.: Proc. 2nd Yukawa Int. Symp.*, Kyoto. Aug. 24-27. 1988. P. 300.
2. Matthews P.C., Mirollo R.E., Strogatz S.H. Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators // *Physica D*. 1991. Vol. 52. P. 293.
3. Kelso J.A.S., Schoner G., Sholz J.P., Haken H. Phase-locked modes, phase transitions and component oscillators in biological motion // *Physica Scripta*. 1987. Vol.35. P.79.
4. Aizawa Y. Synergetic approach to the phenomena of mode-locking in nonlinear systems // *Progr.Theor. Phys*. 1976. Vol.56. №3. P.703-716.
5. Деряпа Н.Р., Мошкин М.П., Посный В.С. Проблемы медицинской биоритмологии. М.: Медицина, 1985.
6. Биологические ритмы. В 2-х томах. Перевод с англ. М.: Мир, 1984.
7. Уинффри А.Т. Время по биологическим часам. М.: Мир, 1990.
8. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. С.189.

## SELF-ORGANIZATION AS A RESULT OF NONLINEAR INTERACTIONS IN LARGE GROUPS OF BIOLOGICAL OSCILLATORS

*E.S. Mchedlova, A.D. Trubetskov*

Interactions in the system of biological rhythms under external influence are investigated numerically. Each of rhythms is represented by autooscillator. Mathematical index, showing degree of desynchronization under different breaks in external influence is suggested. The model allows to study the influence of shift work on the human organism at the computer experiment.



*Мчедлова Елена Сумбатовна* - окончила Саратовский государственный университет (1993). Аспирантка кафедры электроники и волновых процессов СГУ, автор ряда работ по численному моделированию распределенных систем со сверхизлучением. В последнее время увлекается взаимодействиями в биологических системах.



*Трубецков Алексей Дмитриевич* - родился в 1964 году. Закончил Саратовский медицинский институт (1988). Защитил диссертацию на соискание звания кандидата медицинских наук (1992). Работает ассистентом кафедры профпатологии и гематологии СГМУ. Научные интересы - профессиональная и профессионально обусловленная патология, влияние на организм человека сменного и вахтового режимов труда, хронопатология и хронотерапия, математическое моделирование биологических процессов. Автор 22 печатных работ.



## ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ СТАЦИОНАРНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ СРЕДЫ

*А.Е. Дубинов, В.Д. Селемир*

Выведены волновые уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн через стационарные фрактальные среды. В основу вывода положен формализм операций интегрирования и дифференцирования дробного порядка. Полученные уравнения могут быть использованы при изучении прохождения электромагнитных волн через сильно турбулизированные потоки жидкости, газа, плазмы.

### Введение

С момента появления обзора Мандельброта [1] началось стремительное проникновение идей фрактальной геометрии в различные области современного естествознания: фракталы обнаруживаются и в структуре твердых тел, и в турбулентных потоках, и на фазовых портретах динамических систем. Но, по-видимому, эпоха обнаружения новых фрактальных проявлений в природе начинает уже сменяться эпохой систематического изучения динамических явлений на фрактальных объектах. К числу таких явлений следует отнести перенос массы и энергии по фрактальным средам.

Неудивительно, что первые попытки описания этих явлений основывались на использовании традиционных линейных уравнений: уравнения диффузии для описания переноса массы [2,3], волнового уравнения и уравнения Гельмгольца для описания прохождения квантовой частицы через потенциальный барьер [4] и для описания андерсоновской локализации волн [5]. В некоторых из вышеперечисленных работ изучалось прохождение потоков частиц путем искусственного введения в уравнение степенных зависимостей с соответствующим дробным показателем. В других работах исследовались уравнения на фрактальных средах, заданных функциями, порождаемыми множеством Кантора или функцией Вейерштрасса - Мандельброта, причем эти функции аппроксимировались гладкими предфракталами очередного поколения. Несмотря на существенное отличие гладких предфракталов от истинных фракталов все же эти работы не представляются нам бесполезными: в них удалось выяснить, что с увеличением номера очередного предфрактала решение соответствующих традиционных уравнений все более усложняется, так что для истинного фрактала решение вряд ли может быть продифференцировано, по крайней мере, два раза для подстановки в уравнение (например, волновое). Поэтому распространение частиц и волн по истинным фрактальным средам должно описываться иными, более общими уравнениями, переходящими для гладких сред в традиционные линейные. Здесь уместно напомнить основные свойства фрактальных функций:

фрактальная функция всюду недифференцируема;  
 фрактальная функция самоподобна (или самоаффинна), причем свойство самоподобия случайного фрактала нужно понимать в статистическом смысле;  
 фрактальная функция имеет размерность Хаусдорфа - Безиковича, отличную от топологической (чаще всего дробную).

Заметим, что первое и, по нашему мнению, самое важное свойство зачастую остается без внимания. Ведь именно операция дифференцирования, входящая в формализм традиционных уравнений переноса массы и энергии, делает их непригодными для всюду негладких функций.

В настоящее время имеются достаточно веские основания предполагать, что для описания динамических явлений на фракталах может оказаться плодотворным формализм операций интегрирования и дифференцирования дробного порядка [6-8]. В этих работах анонсируются обобщенные уравнение диффузии и волновое уравнение, в которых используется оператор дифференцирования по временной переменной порядка  $0 < \lambda < 1$  и  $1 < \lambda < 2$ , соответственно. Однако из этих работ пока не ясно, как связано с решениями предложенных уравнений прохождение, например, электромагнитных волн через среду с диэлектрической и/или магнитной проницаемостями, имеющими фрактальные профили. На наш взгляд, проблема еще далека от разрешения, указан лишь один из вариантов путей.

В настоящей работе с использованием операций интегрирования и дифференцирования дробного порядка получены непосредственно из уравнений Максвелла новые обобщенные волновые уравнения для динамики электромагнитных волн в стационарных фрактальных средах. Структура работы следующая. Сначала вводятся некоторые математические понятия, необходимые для вывода и анализа новых волновых уравнений, в частности, рассматривается иерархия пространств функций Гельдера - Липшица. Далее приведены примеры непрерывных фрактальных функций, а затем введены понятия операций дифференцирования и интегрирования дробного порядка. Здесь же рассмотрены некоторые свойства интегральных и дифференциальных операторов дробного порядка. Перечисленных математических сведений достаточно для вывода волновых уравнений электродинамики во фрактальных средах, сделанного ниже. В заключение рассматриваются возможные перспективы данного подхода.

## 1. Иерархия пространств функций Гельдера - Липшица и примеры фрактальных функций

Пусть функция одной переменной  $f(x)$  задана на отрезке  $\Omega=[a,b]$ . Говорят, что функция, заданная на  $\Omega$ , удовлетворяет условию Гельдера порядка  $\lambda$  на  $\Omega$ , если для всех  $x_1, x_2 \in \Omega$  выполняется неравенство

$$\sup_{x_1 \neq x_2} |f(x_1) - f(x_2)| \leq A |x_1 - x_2|^\lambda, \quad (1.1)$$

где  $A$  - постоянная. В этом случае говорят, что указанная функция принадлежит пространству функций Гельдера порядка  $\lambda$ . Этот факт будем обозначать  $f(x) \in \text{Hö}^\lambda(\Omega)$ . При  $\lambda = 1$  пространство Гельдера обычно называют пространством Липшица (обозначение:  $f(x) \in \text{Lip}(\Omega)$ ). Свойства функциональных пространств Гельдера - Липшица подробно рассмотрены в [9, 10].

Можно провести некоторое обобщение системы пространств функций типа  $\text{Hö}^\lambda(\Omega)$ . Пусть имеется показатель  $0 \leq \Lambda \leq \infty$ . Его можно представить в виде суммы его целой и дробной частей  $\Lambda = [\Lambda] + \{\Lambda\}$ . Тогда будем говорить, что функция  $f(x)$  принадлежит пространству функций  $\text{Hö}^\Lambda(\Omega)$  из расширенной системы этих

пространств, если сама функция  $f(x) \in C^n(\Omega)$ , где  $n = [\Lambda]$ , а ее  $n$ -я производная принадлежит пространству  $\text{Hö}l^\lambda(\Omega)$  порядка  $\lambda = \{\Lambda\}$  [11].

Это обобщение для пространств можно кратко записать в виде

$$\sup_{x_1 \neq x_2} |D_{x_1}^n[f(x_1)] - D_{x_2}^n[f(x_2)]| \leq A|x_1 - x_2|^\lambda, \quad (1.2)$$

$$(n = [\Lambda], \lambda = \{\Lambda\}),$$

где  $D_{x_1}^n[f(x)]$  - оператор дифференцирования  $n$ -го порядка по переменной  $x$ .

Легко видеть, что данные расширенной системы пространств Гельдера - Липшица включают в себя все классы непрерывных функций. Это можно схематично изобразить в виде диаграммы на рис. 1. Результат  $n$ -кратного дифференцирования функции находится на диаграмме левее самой функции на  $n$  единиц, а результат  $n$ -кратного интегрирования - правее на  $n$  единиц.

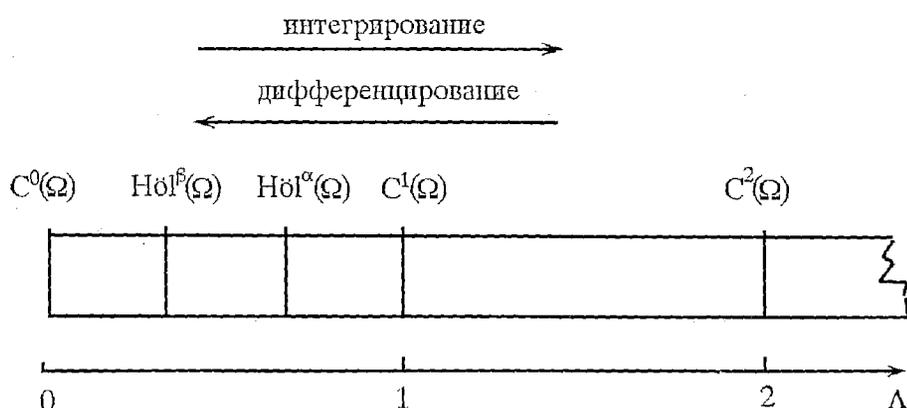


Рис. 1. Иерархия пространств функций Гельдера

Обратим внимание на то, что показатель  $\Lambda$  при  $\Lambda > 1$  не следует путать с порядком пространства  $\lambda$ , так как при  $\lambda > 1$  пространство Гельдера наполнено лишь постоянными функциями (см. выше). Из всех фрактальных функций или функций, порождаемых фракталами, нас будут интересовать всюду непрерывные, однозначные функции одного переменного на  $x$ . Такие функции должны иметь фрактальную размерность из диапазона  $1 < \dim(f) < 2$ .

Наиболее известной из таких функций является функция Вейерштрасса - Мандельброта

$$f_{WM}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{-n\alpha} \cos(K^n x), \quad (1.3)$$

где  $K > 1$  - целое число и  $\alpha$  - положительное число. Фрактальные свойства этой функции подробно рассмотрены, например, в [12]. В частности, фрактальная размерность этой функции удовлетворяет соотношению  $\dim(f_{WM}) = 2 - \alpha$ .

Справедливо утверждение, доказательство которого можно найти в [13].

**Утверждение 1.1.** Если  $0 < \alpha < 1$ , то  $f_{WM}(x) \in \text{Hö}l^\alpha(\Omega)$ .

Вейерштрасс показал, что при достаточно малых  $\alpha$  функция  $f_{WM}(x)$  нигде не дифференцируема. Распространение этого результата на случай  $\alpha \leq 1$  впервые было получено Харди. (Для  $\alpha > 1$  производная  $D_{x_1}^n[f_{WM}(x)]$ , очевидно, существует и непрерывна). Этими же свойствами обладает и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{-n\alpha} \sin(K^n x). \quad (1.4)$$

Функциями Вейерштрасса не исчерпывается арсенал фрактальных функций: большое количество примеров таких функций представлено в [14]. Среди них, например, функция Ван-дер-Вардена

$$f_V(x) = \sum \langle 10^n x \rangle 10^{-n}, \quad (1.5)$$

где через  $\langle y \rangle$  обозначен модуль разности между  $y$  и ближайшим к нему целым числом. Функция Ван-дер-Вардена всюду непрерывна, но всюду недифференцируема.

## 2. Интегрирование и дифференцирование дробного порядка

Интегрирование и дифференцирование дробного порядка представляет собой достаточно разработанный математический аппарат, но, к сожалению, не нашедший пока широкого применения в теоретической физике. Весь накопленный материал по этому вопросу опубликован в основном на страницах математических журналов, и только сравнительно недавно изданная книга [15], где подробно, в удобной для практического применения форме изложены основы дробного интегрирования и дифференцирования, позволит в ближайшем будущем применить этот аппарат для прикладных целей.

Перед введением понятий интегралов и производных дробного порядка уместно напомнить хорошо известное тождество

$$\int_a^x \underbrace{dx \dots dx}_n \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (2.1)$$

доказательство которого легко провести методом математической индукции. Замечая, что  $(n-1)! = \Gamma(n)$ , видим, что правой части (2.1) можно придать более общий смысл при нецелых значениях  $n$ . Поэтому естественно определить интеграл дробного порядка следующим образом:

$$\mathbf{I}_x^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad (x > a). \quad (2.2)$$

Интеграл типа (2.2) называется дробным интегралом Римана - Лиувилля. Справедливо тождество

$$\mathbf{I}_x^\alpha \mathbf{I}_x^\beta = \mathbf{I}_x^\beta \mathbf{I}_x^\alpha = \mathbf{I}_x^{\alpha+\beta}. \quad (2.3)$$

По аналогии с интегралом дробного порядка Римана - Лиувилля можно определить и дробные производные

$$\mathbf{D}_x^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad (2.4)$$

которые называются производными дробного порядка Римана - Лиувилля. Здесь имеет место тождество

$$\mathbf{D}_x^\alpha \mathbf{D}_x^\beta = \mathbf{D}_x^\beta \mathbf{D}_x^\alpha = \mathbf{D}_x^{\alpha+\beta}. \quad (2.5)$$

Заметим, что результат дробного интегрирования порядка  $\alpha$  находится на диаграмме рис. 1 на  $\alpha$  единиц правее полдинтегральной функции, а результат дробного дифференцирования соответственно левее. Имеет место следующее утверждение, касающееся операторов дробного порядка  $\mathbf{D}_x^\alpha [\dots]$  и  $\mathbf{I}_x^\alpha [\dots]$ .

**Утверждение 2.1.** Справедлива композиция операторов

но

$$D_{x^+}^\alpha [I_{x^+}^\alpha f(x)] = f(x), \quad (2.6)$$

$$I_{x^+}^\alpha [D_{x^+}^\alpha f(x)] = f(x) - \sum_{k=1}^{[\alpha]} D_{x^+}^{\alpha-k} f(x) \Big|_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \quad (2.7)$$

Действие операторов  $I_{x^+}^\alpha [f(x)]$  и  $D_{x^+}^\beta [f(x)]$  для дробных значений порядка легко проследить на рис. 2.

В заключение приведем важное для решения уравнений в дробных производных свойство совместного действия преобразования Лапласа и оператора дробного интегрирования

$$L[I_{x^+}^\alpha f(x)] = p^{-\alpha} L[f(x)] \quad (2.8)$$

и обобщенное правило Лейбница

$$D_{x^+}^\alpha [f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D_{x^+}^{\alpha-k} f(x) D_{x^+}^k g(x), \quad (2.9)$$

$$D_{x^+}^\alpha [f(x)g(x)] = \sum_{k=-\infty}^{\alpha} \binom{\alpha}{k+\beta} D_{x^+}^{\alpha-\beta-k} f(x) D_{x^+}^{\beta+k} g(x), \quad (2.10)$$

с обобщенным биномиальным коэффициентом

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} = \frac{\sin[(\beta-\alpha)\pi]}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}. \quad (2.11)$$

Наряду с формулами Лейбница типа (2.9) и (2.10) имеет место формула Лейбница с остаточным членом

$$D_{x^+}^\alpha [f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} D_{x^+}^{\alpha-k} f(x) D_{x^+}^k g(x) + R_n, \quad (2.12)$$

где

$$R_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(-\alpha)(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt \int_t^x (x-\xi)^{n-1} D_{\xi^+}^n [g(\xi)] d\xi. \quad (2.13)$$

Формула (2.12) имеет то преимущество по сравнению с (2.9), что не требует от функции  $g(x)$  бесконечной дифференцируемости.

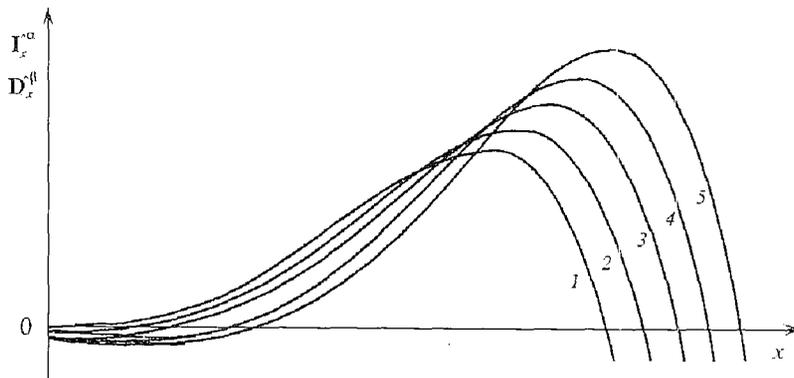


Рис. 2. Действие операторов  $I_{x^+}^\alpha [f(x)]$  и  $D_{x^+}^\beta [f(x)]$  для различных значений  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha=1-\beta$ ): 1 -  $\alpha=0$ ; 2 -  $\alpha=0.25$ ; 3 -  $\alpha=0.5$ ; 4 -  $\alpha=0.75$ ; 5 -  $\alpha=1.0$

### 3. Уравнения для плоских электромагнитных волн в стационарных фрактальных средах

Приступим теперь к выводу волновых уравнений, описывающих распространение плоских волн через фрактальные стационарные среды.

Пусть среда представляет собой неоднородный диэлектрик с профилями  $\epsilon(x)$  и  $\mu(x)$  диэлектрической и магнитной проницаемостей, соответственно, причем  $\epsilon(x) \in \text{Hö}l^{\lambda_\epsilon}(\Omega)$  и  $\mu(x) \in \text{Hö}l^{\lambda_\mu}(\Omega)$  ( $0 < (\lambda_\epsilon; \lambda_\mu) < 1$ ). Рассмотрим уравнения Максвелла для волны, имеющей лишь компоненты  $E_y(x,t)$  и  $H_z(x,t)$ ,

$$\mathbf{D}_x^{-1}[E_y(x,t)] = -(1/c)\mathbf{D}_t^{-1}[\mu(x)H_z(x,t)], \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D}_x^{-1}[H_z(x,t)] = (1/c)\mathbf{D}_t^{-1}[\epsilon(x)E_y(x,t)]. \quad (3.2)$$

Пусть  $E_y(x,t) \in \text{Hö}l^{\lambda_E}(\Omega)$  и  $H_z(x,t) \in \text{Hö}l^{\lambda_H}(\Omega)$ . Тогда для нахождения показателей  $\lambda_E$  и  $\lambda_H$  из (3.1) и (3.2) получим систему уравнений

$$\lambda_E - 1 = \min(\lambda_\mu; \lambda_H), \quad (3.3)$$

$$\lambda_H - 1 = \min(\lambda_\epsilon; \lambda_E), \quad (3.4)$$

имеющую единственное решение  $\lambda_H = 1 + \lambda_\epsilon$ ,  $\lambda_E = 1 + \lambda_\mu$ . Продифференцируем оба уравнения по  $x$  с порядком  $\lambda = \min(\lambda_\epsilon; \lambda_\mu)$ , пользуясь при этом обобщенным правилом Лейбница (2.12),

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x^{1+\lambda}[E_y(x,t)] &= \frac{1}{c} \mathbf{D}_x^\lambda[\mu(x)] \mathbf{D}_t^{-1}[H_z(x,t)] + \\ &+ \frac{1}{c\Gamma(-\lambda)} \int_a^x (x-\xi)^{-\lambda-1} \mu(\xi) d\xi \int_\xi^x \mathbf{D}_t^{-1}[\mathbf{D}_t^{-1}[H_z(\eta,t)]] d\eta, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x^{1+\lambda}[H_z(x,t)] &= \frac{1}{c} \mathbf{D}_x^\lambda[\epsilon(x)] \mathbf{D}_t^{-1}[E_y(x,t)] - \\ &- \frac{1}{c\Gamma(-\lambda)} \int_a^x (x-\xi)^{-\lambda-1} \epsilon(\xi) d\xi \int_\xi^x \mathbf{D}_t^{-1}[\mathbf{D}_t^{-1}[E_y(\eta,t)]] d\eta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Меняя порядок дифференцирования во внутренних интегралах правых частей (3.5) и (3.6) и подставляя в них (3.1) и (3.2), получим искомые волновые уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x^{1+\lambda}[E_y(x,t)] &= \frac{1}{\mu(x)} \mathbf{D}_x^\lambda[\mu(x)] \mathbf{D}_x^{-1}[E_y(x,t)] + \\ &+ \frac{1}{c^2\Gamma(-\lambda)} \int_a^x (x-\xi)^{-\lambda-1} \mu(\xi) d\xi \int_\xi^x \epsilon(\eta) \mathbf{D}_t^{-2}[E_y(\eta,t)] d\eta, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x^{1+\lambda}[H_z(x,t)] &= \frac{1}{\epsilon(x)} \mathbf{D}_x^\lambda[\epsilon(x)] \mathbf{D}_x^{-1}[H_z(x,t)] + \\ &+ \frac{1}{c^2\Gamma(-\lambda)} \int_a^x (x-\xi)^{-\lambda-1} \epsilon(\xi) d\xi \int_\xi^x \mu(\eta) \mathbf{D}_t^{-2}[H_z(\eta,t)] d\eta, \end{aligned} \quad (3.8)$$

описывающие динамику плоской электромагнитной волны при прохождении ее через фрактальную среду. Кстати, к аналогичным уравнениям приводят интегральные и дифференциальные операции дробного порядка над системой телеграфных уравнений для длинных линий с фрактальными стационарными параметрами.

При выводе полученных волновых уравнений возникает один деликатный вопрос: почему мы брали производную именно порядка  $\lambda$  в (3.3) и (3.4)? Ведь мы могли взять производную любого другого порядка  $\lambda'$  при условии лишь  $0 < \lambda' < \lambda$ ? Да, могли. И в этом случае мы получили бы другое волновое уравнение. Однако это другое уравнение имело бы то же самое решение, что и уравнение любого другого порядка, ведь все такие уравнения являются следствиями единых уравнений Максвелла. Поэтому полученные волновые уравнения справедливы и для обычных гладких сред. Фактически, порядок пространства функций Гельдера - Липшица, к которому принадлежат  $\epsilon(x)$  и  $\mu(x)$ , как раз и определяет возможный порядок производной и, следовательно, возможный внешний вид волнового уравнения.

### Заключение

Итак, получены новые волновые уравнения для описания динамики плоских электромагнитных волн в стационарных фрактальных (недифференцируемых) средах. Но остались два обстоятельства, о которых хочется упомянуть.

Во-первых, важным свойством фрактала является самоподобие (самоаффинность). Учет этой симметрии позволит, подобно теореме Флоке, эффективно решать интегродифференциальные уравнения с фрактальными коэффициентами. Тут слово за математиками.

Во-вторых, можно представить себе среду, однородную в пространстве, параметры  $\epsilon(t)$  и  $\mu(t)$  которой меняются во времени фрактальным образом, то есть  $\epsilon(t); \mu(t) \in \text{Hö}l^{\lambda}(\Omega)$ . В этом случае уравнения Максвелла (3.1) и (3.2) не имеют смысла. Значит, должны существовать более общие, чем уравнения Максвелла, соотношения, которые можно вывести из вариационного принципа для лагранжиана электромагнитного поля путем дробного интегрирования и дифференцирования. Об этой идее сообщается в [16] со ссылкой на неопубликованную работу Гелиодора и Мьети. Во всяком случае, обобщение уравнений Максвелла для фрактальных нестационарных сред - дело ближайшего будущего.

### Библиографический список

1. Mandelbrot B.B. Fractals, Form, Chance, and Dimension/ Ed. W.H.Freeman. San Francisco (CA), 1977.
2. Bahavar J.R., Willemsen J.F. Probability density for diffusion on fractals// Phys. Rev. B. 1984. Vol. 30, №11. P. 6778.
3. Соколов И.М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания// Успехи физических наук. 1986. Т. 150, № 2. С.221.
4. Носков М.Д., Шаповалов А.В. Прохождение квантовой частицы через одномерный фрактальный потенциальный барьер// Изв. вузов. Сер. Физика. 1993. № 7. С. 120.
5. De Vries P., de Raedt H., Legendijk A. Wave localization in disordered and fractal systems // Comp. Phys. Comm. 1993. Vol. 75, № 3.
6. Нугматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 90, № 3. С. 354.

7. Wyss W. The fractional diffusion equation// J. Math. Phys. 1986. Vol. 27, № 11. P. 2782.
8. Schneider W.R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equations // Ibid. 1989. Vol. 30, №1. P. 134.
9. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М., 1985.
10. Мухомелидзе Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
11. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
12. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
13. Зигмунд М. Тригонометрические ряды. Т.1. М.: Мир, 1965.
14. Дришфельд Г.И. Дополнение к общему курсу математического анализа. Харьков: Изд-во ХГУ, 1958.
15. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
16. Kopotov V.V., Bulgakov S.A. Two-scale method in the theory of scattering by fractal structures: one-dimensional regular problems// Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, № 8. P. 1007.

*Российский федеральный ядерный центр  
ВНИИ экспериментальной физики*

*Поступила в редакцию 7.10.94  
после переработки 25.04.95*

## DESCRIPTION OF FLAT ELECTROMAGNETIC WAVES THROUGH STATIONARY FRACTAL MEDIA

*A.E. Dubinov, V.D. Selemir*

New wave equations, describing electromagnetic propagation through fractal media, are derived. The formalism of fractional order of integration and differentiation serves as a basis for the derivation, mentioned above. The equations derived can be used at studying propagation of electromagnetic waves through highly turbulized fluxes of liquid, gas and plasma.



## АЗБУКА СИНЕРГЕТИКИ НА ДИСПЛЕЕ УЧЕБНОГО КОМПЬЮТЕРА

12

*Р.Р. Мударисов, Б.Н. Пойзнер*

Разработан учебный вычислительный эксперимент «Азбука синергетики: порядок в дискретной системе, бифуркации, одномерный хаос, фракталы». Основные дефиниции синергетики и объекты ее изучения сжато изложены во Введении. Методические указания разделов помогают освоить базовые термины и математические модели, необходимые для понимания учебных и научных текстов, в которых используются категории синергетики. Для наглядности и простоты изложения выбраны различные сюжеты синергетики, позволяющие продемонстрировать процессы, наиболее показательные для очерченного круга явлений. Индивидуализация задания в учебном вычислительном эксперименте служит удобным способом организации проблемного обучения [1].

Необходимо класть в основу всего число.  
*Платон, V-IV в. до н.э.*

### 1. Сложные упорядоченные режимы в дискретных системах

Для дискретной среды достаточно сложные структуры можно получить, задавая состояние её элементарной ячейки - «клетки», которое меняется в зависимости от состояния ее соседей. По такому принципу построена игра «Жизнь». Эта игра имитирует рост, распад и различные изменения в популяции простейших живых организмов - белковых цепей [2]. Рассмотрим правила и условия игры.

Игра происходит на плоской поверхности квадратных ячеек-клеток. Клетка может быть «живой» или «мертвой». Время изменяется дискретно. Изменение состояния клетки в момент времени  $t+1$  определяется состоянием ее соседей в предшествующий момент времени  $t$ . У каждой клетки восемь соседей, из них четыре имеют с ней общее ребро, а четыре - вершины. Если клетка «мертва» в момент времени  $t$ , она «оживает» в момент  $t+1$  тогда и только тогда, если трое из ее восьми соседей были живы в предшествующий момент  $t$ . Если клетка была «жива» в момент времени  $t$ , она «погибает» в момент  $t+1$  тогда и только тогда, если меньше, чем две, или больше, чем три соседних клетки были «живы» в предшествующий момент  $t$ .

*Содержанием деятельности студента является:*

- варьирование условий, влияющих на ход образования, рост, различные изменения и распад упорядоченных структур в дискретных системах;
- выяснение влияния симметрии/асимметрии формы начального состояния на окончательную структуру;
- определение роли простоты/сложности формы начального состояния на окончательную структуру.

## 2. Бифуркации

Рассматривается система уравнений вида

$$\partial X/\partial t = f(X, A), \quad (1)$$

где  $X=(x_1, \dots, x_n) \in R$  - вектор фазовых переменных,  $A=(a_1, \dots, a_k) \in R$  - вектор параметров системы. Даются определения [3]: качественной одинаковости двух фазовых портретов; структурной устойчивости уравнения (1); бифуркации; точки бифуркации. Исследуются три основных типа бифуркации фазового портрета.

**2.1. Бифуркация типа седло-узел.** В качестве примера выбрано однопараметрическое уравнение

$$\partial x/\partial t = x^2 + a, \quad x \in R, a \in R. \quad (2)$$

Анализ фазового портрета уравнения (2) показывает, что при  $a=0$  происходит качественное изменение фазового портрета, то есть значение 0 является бифуркационным значением параметра  $a$ . Построение зависимости положения равновесия от параметра  $a$  дает диаграмму стационарных решений. Верхняя ветвь диаграммы показывает точки неустойчивого положения равновесия ( $x(a)=+|a|^{1/2}$ ), нижняя ветвь - устойчивого ( $x(a)=-|a|^{1/2}$ ). При значениях  $a>0$  система неустойчива. При  $a<0$  система стабилизируется в одном положении равновесия, другое положение равновесия (неустойчивое), как правило, не наблюдается. Название типа бифуркации появилось благодаря тому, что в двумерном случае положения равновесия имеют форму седла и узла.

**2.2. Бифуркация типа вилки** возникает в системах, в которых есть симметрия, то есть для которых дифференциальное уравнение (1) обладает свойством  $f(-x, a) = -f(x, a)$ . Примером является уравнение вида

$$\partial x/\partial t = ax - x^3. \quad (3)$$

Анализ фазовых портретов этого уравнения и диаграммы стационарных решений приводит к выводу, что при  $a>0$  система имеет три положения равновесия: два устойчивых ( $X(a) = (a)^{1/2}$ ,  $X(a) = -(a)^{1/2}$ ) и одно неустойчивое ( $X=0$ ). При  $a<0$  существует одно положение равновесия ( $X=0$ ).

**2.3. Бифуркация Хопфа.** Для примера рассматривается однопараметрическая система уравнений в полярных координатах [4]

$$\begin{aligned} \partial r/\partial t &= r(a - r^2), \\ \partial \varphi/\partial t &= 2\pi. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что положение равновесия  $r=0$  существует при любых значениях параметра  $a$ . Для  $a<0$  у уравнения существует еще один корень:  $r=a$ . Если рассматривать фазовую плоскость  $(r, \varphi)$ , то второй корень будет соответствовать окружности. При значениях параметра  $a$  от  $-a$  до  $a$  малому изменению параметра соответствует малое изменение величины  $r$  - мягкая потеря устойчивости. Противоположный случай называется жесткой потерей устойчивости и описывается системой однопараметрических уравнений вида

$$\begin{aligned} \partial r/\partial t &= r(a + 2r^2 - r^4), \\ \partial \varphi/\partial t &= 2\pi. \end{aligned} \quad (5)$$

### 3. Одномерный хаос

Рассматривается одномерное разностное уравнение, описывающее динамику нелинейной системы. Например, изменение популяции какого-либо вида животного в определенном районе описывается отображением

$$X_{n+1} = AX_n(1 - X_n). \quad (6)$$

Здесь  $X$  - число животных,  $n$  - номер года наблюдения изменения их числа,  $A$  - параметр, который определяется внешними факторами (питание, хищники, погодные условия и т.д.). Подчеркивается, что уравнение (6) описывает детерминированный процесс, поскольку начальное условие  $X_0$  и параметр  $A$  не являются случайными. Казалось бы, движение, задаваемое уравнением (6), не может быть непредсказуемым. Однако при определенных значениях параметра  $A$  процессы, описываемые этим уравнением, могут обладать рядом стохастических свойств. Далее изучается, как происходит переход от упорядоченных режимов к стохастическим; как чередуются порядок и хаос; каковы основные сценарии переходов к стохастическим режимам.

**3.1. Хаос по сценарию Фейгенбаума.** Результат наблюдения за эволюцией популяции согласно (6) представляется графически посредством кривой  $Y=X_{n+1} = f(A, X)$  (рис. 1 [5]). Из рис. 1, а видно, что при  $n \rightarrow \infty X_n \rightarrow 0$ . Таким образом, при  $A \leq 1$  уравнение (6) имеет единственный корень  $X=0$ . Для  $A=2$  (рис.1, б), при  $n \rightarrow \infty X_n \rightarrow X''$ , то есть у уравнения (6) два неотрицательных корня:  $X=0$  и  $X=X''$ . В случае

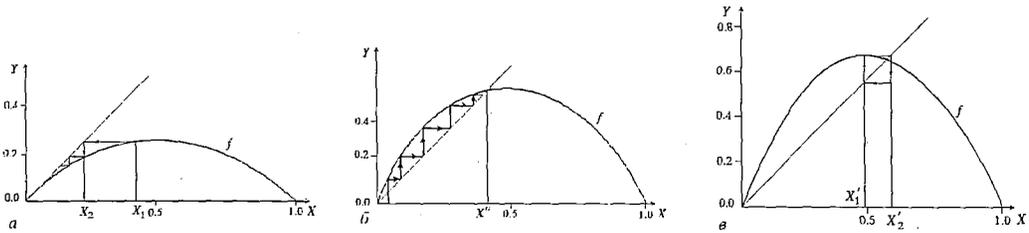


Рис. 1. Отображение первого возвращения для последовательности, формируемой уравнением (6) [5]: а -  $A=1.0$ ; б -  $A=2.0$ ; в -  $A=3.236$

же, когда параметр  $A=1+5^{1/2}$  (рис. 1, в), то, начиная с достаточно больших  $n$ , мы будем получать чередующиеся значения величин  $X_1'$  и  $X_2'$ . Такое решение называется устойчивым циклом с периодом 2 и обозначается  $S_2$ . Переход к  $S_2$  происходит благодаря бифуркации, которая в данном случае носит название бифуркации удвоения периода. Дальнейшее увеличение  $A$  приводит к возникновению циклов с периодом 4, 8 и т.д.

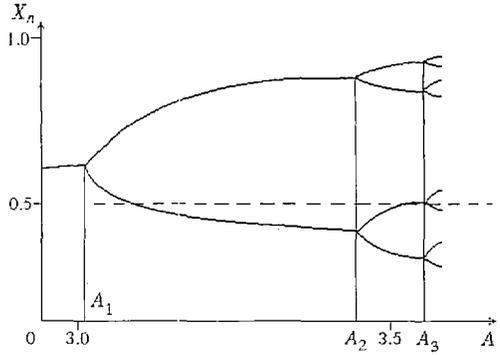
Обсуждается устойчивость таких циклов. Как известно из теории устойчивости Ляпунова, в первом приближении можно предположить, что цикл устойчив, если выполняется условие

$$|\partial f(X_1')/\partial x * \partial f(X_2')/\partial x * \dots * \partial f(X_n')/\partial x| < 1,$$

где  $X_n'$  - чередующиеся величины. Показано, что каждый раз, когда параметр  $A$  становится таким, что цикл  $S_p$  теряет устойчивость, происходит бифуркация и устойчивым становится цикл  $S_{p+1}$ . По мере роста  $A$  уравнение (6) дает непериодическую последовательность  $X_n$ , поскольку в этом случае в некоторой области фазового пространства существует бесконечное множество неустойчивых периодических циклов. Диаграмма стационарных решений для уравнения (6) представлена на рис. 2 [5]. Как было показано М. Фейгенбаумом, числовая

Рис. 2. Диаграмма стационарных решений уравнения (6) [5]

последовательность  $A_n$  точек бифуркационных значений параметра  $A$  ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\delta=4.6692016\dots$ . Поэтому можно записать выражение  $(A_{n+1}-A_n)/(A_{n+2}-A_{n+1}) \rightarrow \delta$  при  $n \rightarrow \infty$ . Число  $\delta$ , называемое числом Фейгенбаума, есть универсальная постоянная.



**3.2. Хаос, связанный с перемежаемостью.** Напоминается, что при наблюдении за спокойно текущей жидкостью можно заметить появление вихрей, поведение которых кажется случайным. После исчезновения вихрей картина становится вновь простой до появления следующего вихря. Между появлениями вихрей может пройти непредсказуемый по длительности интервал времени. Формулируются определения перемежаемости как типа хаотического движения, и в качестве простейшей модели, иллюстрирующей этот феномен, приводится следующее отображение

$$X_{n+1} = 1 - |X_n - A|^{1/2} / [1 + (X_n - A)^2]. \quad (7)$$

Типичная картина перемежаемости применительно к (7) представлена на рис. 3 [5] и рис. 4 [5]. В связи с анализом нелинейных систем вводятся понятия и даются определения странного аттрактора, кризиса аттрактора и метастабильного переходного хаоса (рис. 5 [5]).

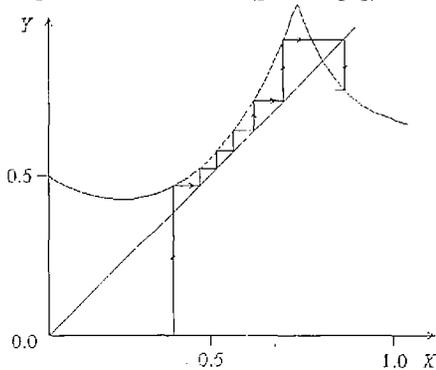


Рис. 3. Отображение первого возвращения для последовательности, формируемой уравнением (7) при  $A=0.769$  [5]

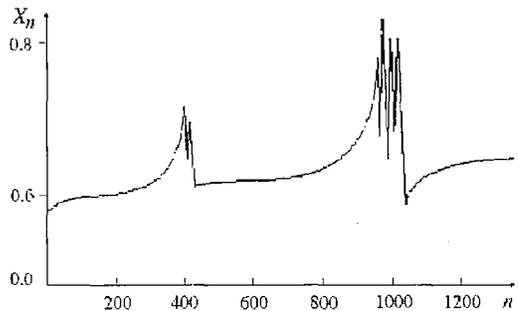
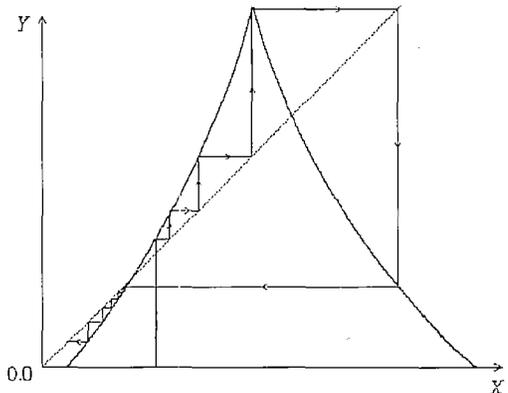


Рис. 4. Зависимость точек последовательности (7) от номера итераций [5]

*Содержанием деятельности студента является:*

- знакомство с типами переходов к хаосу через бифуркации и через перемежаемость;
- анализ на примерах одномерных отображений (6) и (7) эволюции систем, приводящей к детерминированному хаосу; к попаданию системы в странный аттрактор; к кризису.

Рис. 5. Отображение первого возвращения для последовательности, формируемой уравнением (7) (метастабильный хаос) [5]



#### 4. Фракталы

Даются понятие и примеры фракталов; вводится фрактальная размерность как количественная мера структурности фракталов. Для этого предварительно рассматривается плоский однородный кружок массой  $M$  и радиусом 1. При увеличении радиуса объекта от 1 до  $R$ , его масса увеличивается в  $R^2$  раз, то есть связь массы и длины, можно записать в виде

$$M(R) \sim R^d, \quad (8)$$

где  $d$  - размерность пространства. Масштабное соотношение (8) тесно связано с интуитивным представлением о размерности и оказывает полезным для обобщения на другие значения размерности. Если  $d$  целая величина, то масштабное соотношение для плотности  $\rho = M/R^d$  будет одинаковым для всех  $R$  и выразится как  $\rho \sim R^0$ . В самом общем случае  $d$  - величина не целочисленная (обозначается  $d_f$ ). Тогда выражение (8) принимает вид:  $M(R) \sim R^{d_f}$  и, следовательно, соотношение для плотности выглядит так

$$\rho(R) \sim M/R^{d_f} \sim R^{d_f - d},$$

то есть плотность такого объекта зависит от его радиуса. Величина  $d_f$  называется фрактальной размерностью. Приводится более точное определение фрактальной размерности, принадлежащее Ф. Хаусдорфу: пусть изучаемое множество лежит в  $p$ -мерном евклидовом пространстве. Рассматривается его покрытие  $p$ -мерными шарами радиуса  $\epsilon_i$ , и определяется величина  $l_d(\epsilon)$  как

$$l_d(\epsilon) = \inf \sum_i \epsilon_i^d,$$

где нижняя грань берется по всем возможным покрытиям таким, что  $\epsilon_i < \epsilon$ . Пусть

$$l_d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} l_d(\epsilon).$$

При больших значениях  $d$   $l_d \rightarrow 0$ , при малых -  $l_d \rightarrow \infty$ . Хаусдорф показал, что существует критическое значение  $d_H$ :  $d_H = \inf(d: l_d = 0) = \sup(d: l_d = \infty)$ . Обычно при  $d = d_H$  величина  $l_d$  конечна. Вводится понятие хаусдорфовой размерности  $d_H$  множества. Для простых геометрических объектов хаусдорфова размерность является целочисленной: для отрезка  $d_H = 1$ , для квадрата  $d_H = 2$ , для куба  $d_H = 3$ . Однако для фракталов, например, канторова множества хаусдорфова размерность будет дробной. Дробная хаусдорфова размерность называется фрактальной.

*Содержанием деятельности студента является:*

- подтверждение существования фракталов и возможности их конструирования на примере множества  $X_{n+1} = \text{AMOD}(X_n + C, 1.0)$ ;
- письменная интерпретация полученных результатов с использованием учебного словаря [6].

#### Библиографический список

1. Паскаль И.Ю., Пойзнер Б.Н. Сочетание реального и численного эксперимента в лабораторном практикуме вуза // Изв.вузов.Сер.Физика.1986. № 7. С.124.
2. Баблюниц А. Молекулы, динамика и жизнь. М.: Мир, 1990. С. 242.
3. Холодишок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991
4. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.

5. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*. М.: Наука, 1992.

6. 101 термин синергетики: Учебный словарь/ Б.Н.Пойзнер, Т.А. Тухфатуллин. Томск, 1991.

Томский государственный  
университет

Поступила в редакцию 27.07.94  
после переработки 31.01.95

## THE ABC OF SYNERGETICS IS DISPLAYED ON THE COMPUTER SCREEN

*R.R. Mudarisov, B.N. Poizner*

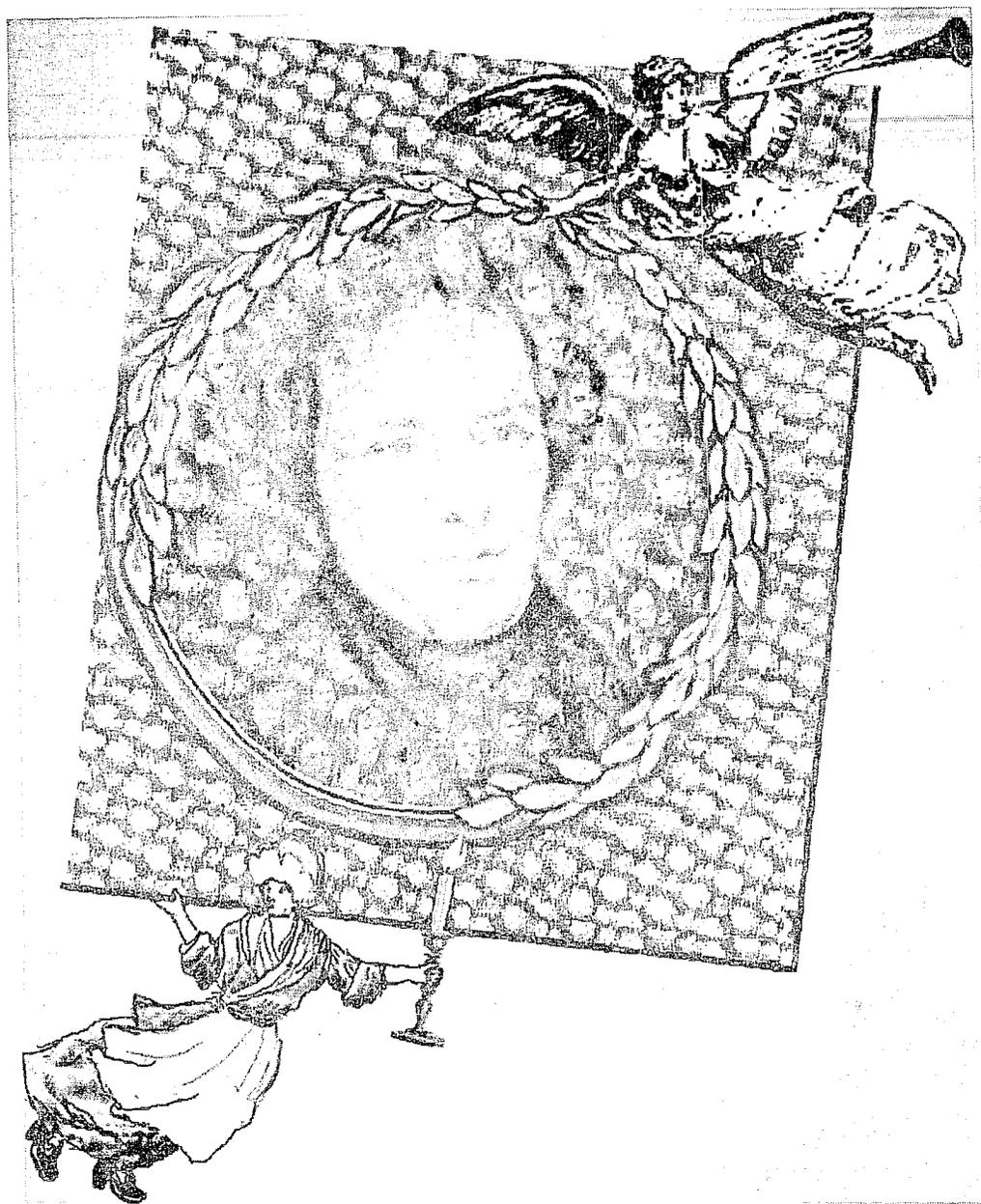
Educational computing experiment «The ABC of synergetics: order in discrete system, bifurcations, one-dimension chaos, fractals» is elaborated. Basic definitions of synergetics and objects under exploring are briefly presented. Methodics accounted in the manual familiarize students with the basic ideas and mathematical models, necessary for understanding educational and scientific texts, concerning synergetics. Various nonlinear scenarios illustrate the processes typical for synergetics. Individual tasks solving by means of computer simulation carried out by students serve as a method of the problem education.



*Мударисов Ренат Рамильевич* - родился в 1967 году в Томске. Аспирант радиофизического факультета Томского университета. Области научных интересов: оптическая синергетика, нелинейная динамика лазерных систем.



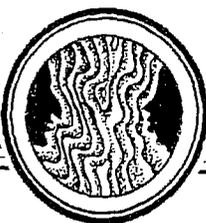
*Пойзнер Борис Николаевич* - родился в 1941 году в Томске, окончил Томский университет в 1963 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТГУ (1970) в области теории колебаний и волн. Доцент ТГУ. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Соавтор учебных пособий «Лабораторный практикум по физике лазеров», «Импульсные лазеры на плотных газах» и др. Опубликовал статьи по указанной тематике и по ряду гуманитарных проблем. Инициатор издания и редактор библиографических указателей, посвященных научному творчеству, применению компьютера в образовании, литературе и философии русской эмиграции, университетскому образованию, синергетике и сопредельным наукам. Член комиссии по творческому наследию Густава Шпета. Председатель Вольного Гуманитарного Семинара Томска.



Фарадей был великим мастером кухонной физики. Если верно, что этапы познания природы человечеством соответствуют различным стадиям человеческого возраста, то юношеское восторженно-всеобъемлюще-всеохватывающее отношение к Природе, нашедшее выражение в создании стройных философских систем - от греков до Гегеля - сменилось в XIX веке трезвым стремлением взрослого человека к планомерному и систематическому обустройству своего очага во всех смыслах этого слова - от кухонного до жертвенного. Лаборатории тогдашних химиков-физиков (разница тогда была не очень велика, и Фарадей начал с открытия бензола и бутилена) еще не потеряли внешнего сходства с кухней средневекового алхимика и можно считать, что наука об электричестве родилась, когда Зевесов огонь удалось запахнуть в кухонную склянку (с гордым названием Лейденская банка).

Фарадей общался с природой на самом бытовом, приземленном уровне - недаром молодого Гельмгольца поразили те проволочки и кусочки дерева, с помощью которых Фарадею удавалось выведывать совершенно непредсказуемые и, казалось бы, непостижимые тайны природы. Представляется символичным, что именно обыкновенную свечу выбрал Фарадей в своих знаменитых научно-популярных лекциях в качестве объекта проявления (выявления, высветления) основных физических и химических законов.

Публикуемая ниже статья - еще один пример блестящего предвидения Фарадея, достигнутого с помощью кусочков стекла, пальцев и все той же излюбленной свечи!



## САМООРГАНИЗАЦИЯ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ФАРАДЕЯ ПО ПАРАМЕТРИЧЕСКОМУ ВОЗБУЖДЕНИЮ КАПИЛЛЯРНОЙ РЯБИ

*А.Б. Езерский*

На основе дневниковых записей М.Фарадея показано, что в его экспериментах с параметрически возбуждаемой капиллярной рябью был установлен факт существования структур, вид которых в широкой области параметров не зависел от начальных и граничных условий, а также физических свойств жидкостей.

Имя Майкла Фарадея у тех, кто занимается физикой, ассоциируется прежде всего с открытием таких явлений, как электромагнитная индукция, поляризация света, законы электролиза, диа- и парамагнетизма. Его исследования, касающиеся класса явлений, который сейчас называется нелинейной динамикой структур и самоорганизацией в неравновесных средах, известны значительно меньше. В монографиях по синергетике и диссипативным структурам [1, 2] обычно ссылаются на опыты Бенара (1901) по термоконвекции в слое жидкости, где возникают шестигранники [3], эксперименты с вихрями Куэтта - Тейлора между вращающимися цилиндрами или с дорожкой Кармана за плохо обтекаемыми телами как на первые эксперименты по изучению упорядоченных структур в неравновесных гидродинамических системах. Однако, именно Фарадей, по крайней мере, на 70 лет раньше Бенара, в 1831 году первый описал явление самоорганизации в неравновесной среде - в системе параметрически возбуждаемых капиллярных волн.

Фарадей обнаружил [4], что на поверхности протяженного слоя жидкости, колеблющегося вертикально, возникает капиллярная рябь, образующая структуру в виде паркета из квадратных клеток. Такая структура состоит из двух взаимно ортогональных пар стоячих волн; частота капиллярных волн, составляющих эту структуру, равна половине частоты внешней силы. Возбуждение каждой пары аналогично параметрическому возбуждению маятника с колеблющейся вертикально точкой подвеса. В жидком слое, характерные горизонтальные размеры которого значительно больше длины волны, все направления равноправны, и параметрически возбуждаться могут пары с произвольной ориентацией волнового вектора. В экспериментах Фарадея [4, 5] азимутальная симметрия разрушалась, и реализовалась всегда квадратная структура. Экспериментально было выяснено, что такая структура капиллярной ряби не зависела от начальных возмущений, а в определенных пределах и от физических свойств жидкости и геометрической формы кюветы, в которой проводились опыты. Это, по-видимому, были первые осмысленные эксперименты по самоорганизации в неравновесных диссипативных системах (источником энергии здесь является поле накачки, а диссипация обусловлена вязкостью жидкости).

Результаты экспериментов были опубликованы Фарадеем в сжатом виде как приложение к статье [4]. Сохранились и дневники [5], где Фарадей очень подробно описал все свои наблюдения.

В этой статье мы попытаемся проследить за тем, как Фарадей исследовал структуру параметрически возбуждаемой капиллярной ряби, опираясь именно на его записи в дневнике. По дневнику можно понять ход рассуждений выдающегося экспериментатора, что представляется, на наш взгляд, интересным не только с исторической точки зрения, но очень поучительным для тех, кто занимается экспериментом с диссипативными структурами. Многие эксперименты с капиллярной рябью были повторены совсем недавно на более высоком техническом уровне [6-10]; с точки зрения идей эти эксперименты были очень близки тем, что были сделаны более 160 лет назад Фарадеем.

Установка для изучения параметрического возбуждения капиллярной ряби, использованная Фарадеем, была очень проста. В его экспериментах для создания колебаний применялись горизонтально расположенные стеклянные или деревянные пластинки, один конец или оба конца которых были жестко закреплены. В пучность изгибных колебаний, которые возбуждались в таких пластинах, прикреплялась кювета с жидкостью (рис. 1, а). В некоторых экспериментах кювета не использовалась, жидкость просто наливалась на пластину (она не растекалась за счет плохой смачиваемости). Чтобы иметь возможность изменять форму жидкого слоя, Фарадей помещал на пластину кусочки стекла, на которые разливалась жидкость. Жидкий слой покрывал всю поверхность такой подложки и повторял ее форму.

Для возбуждения колебаний Фарадей не располагал какими-либо вибраторами. Создание периодических колебаний в его опытах было возможно благодаря ловкости его рук - он тер влажным пальцем по стеклу и возбуждал колебания пластины на резонансной частоте. В некоторых экспериментах Фарадей в качестве источника периодических колебаний использовал камертон. За счет его большой добротности затухание колебаний происходило достаточно медленно, и он мог в течение определенного времени наблюдать за структурами на поверхности жидкости.

Для визуализации ряби использовалась свеча, изображение которой отражалось от поверхности жидкости. При возбуждении ряби на поверхности жидкости, налитой на стеклянную пластину, изображение создавалось за счет прошедшего через слой жидкости света: «Если помещать свечу непосредственно под пластиной и держать экран из бумаги в дюйме над ней, получается прекрасная

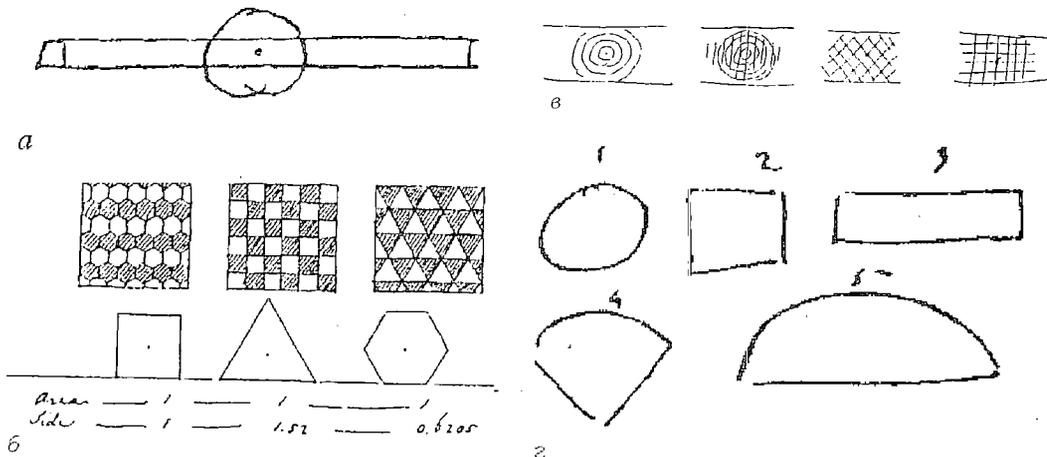


Рис. 1. Копии рисунков из дневника М. Фарадея [5]: а - кювета, закрепленная на упругой пластине; б - возможный вид структур параметрически возбуждаемой капиллярной ряби; в - эволюция структур во времени при возникновении квадратной решетки; г - форма резонаторов, используемых в экспериментах Фарадея

картина. Каждое возвышение давало в своем фокусе изображение в виде звездочки, которая мерцала, то есть появлялась и исчезала непрерывно по мере того как возвышение увеличивалось или уменьшалось ... Это было исключительно красиво и легко можно сделать доступным для наблюдения большой аудитории» (цит. по [5, §73]). Сейчас такая схема визуализации (теневой метод) используется во многих работах по капиллярной ряби [9,11].

Фарадей возбуждал капиллярную рябь на поверхности многих жидкостей - воды, молока, спирта, масла, чернил, яичного белка, ртути. В его экспериментах, «... структура ряби почти всегда четырехугольная, форма всегда правильная, но слегка модифицированная у края воды или жидкости ...» [5, § 2]. Проблема, которую Фарадей сформулировал предельно четко, как только этот результат был подтвержден им во многих экспериментах, состояла в том, почему же именно квадратная структура наиболее предпочтительна? Может ли реализоваться система из роликов, треугольников или шестиугольников?

Рассуждения Фарадея о том, какая структура наиболее предпочтительна, состояли в следующем: «Совершенно очевидно, что квадратная форма ряби - системы капиллярных волн - весьма естественна из-за того, что расстояние, которое должны преодолеть частицы, двигаясь в этой структуре, является наименьшим из расстояний, возможных в структурах такого вида, то есть если рассматривать отношение числа направлений, по которым двигаются частицы, к числу всех возможных направлений. В такой структуре разделительные линии (линии узлов) также наиболее короткие, есть также и другие физические причины, которые необходимо рассмотреть в дальнейшем» [5, § 14]. Более развернутого доказательства наибольшей предпочтительности квадратных решеток Фарадей не приводил. Картинка, которая в дневниках Фарадея сопровождает эту цитату, представлена на рис. 1, б. Совершенно очевидно, что длина разделительных линий (периметр элементарной ячейки для паркетов на рис. 1, б) при фиксированной площади ячейки минимален для шестиугольника, а не для квадрата. Более того, при параметрическом возбуждении частота внешней силы определяет длину волны капиллярных волн, поэтому сравнение структур необходимо проводить не при фиксированной площади, а при фиксированном периоде структуры. Из-за этого приведенные выше качественные объяснения Фарадея, почему возникают именно квадраты, нельзя признать удовлетворительными.

Теоретическое исследование вопроса о том, какая из структур капиллярной ряби наиболее предпочтительна при параметрической генерации в пространственно протяженной системе, и к настоящему времени не доведено до конца. Как показано недавно в работе [12] при малых надкритичностях (под надкритичностью понимается величина  $\epsilon = a/a_{п} - 1$ , где  $a$  - амплитуда ускорения жидкого слоя,  $a_{п}$  - порог параметрической генерации) уравнения, описывающие ансамбль капиллярных волн, могут быть получены варьированием диссипативной функции (ляпуновского функционала). В этом приближении задача об определении наиболее предпочтительной структуры капиллярной ряби аналогична исследованию проблемы отбора структур в слое жидкости, подогреваемом снизу [13]. Как показано в [12], при параметрическом возбуждении волны среди валов, гексагональных решеток и четырехугольников последняя из структур соответствует самому глубокому минимуму диссипативной функции. Что же означает этот результат? Представим, что на систему, описываемую диссипативной функцией, действует случайная внешняя сила. Система под действием этой силы может переходить из одного состояния в другое. Задача о нахождении вероятности пребывания в окрестности состояний равновесия может быть точно решена [1]. Если грубо сформулировать результат расчета, то он заключается в следующем. При воздействии шумов система проводит больше всего времени вблизи состояния равновесия, соответствующего наиболее глубокому минимуму диссипативной функции. Вывод, сделанный в работе [12], что наиболее предпочтительна четырехгранная структура, говорит о том, что она лишь наиболее вероятна среди других совершенных структур (валов,

шестигранников) и не затрагивает вопроса, насколько она, например, более вероятна, чем структуры с амплитудной модуляцией или структуры с дефектами. Более того, при таком подходе полностью игнорируется, какую область притяжения в пространстве начальных условий имеет та или иная структура. Можно, в принципе, предположить, что какая-либо структура имеет большую область притяжения, но не слишком глубокий минимум. Тогда именно эта структура будет наиболее вероятна, если, конечно, шумы не велики.

Как выяснено недавно в [11], кроме квадратов при параметрическом возбуждении волн возможно возникновение и шестигранных структур, образованных тремя парами волн, сориентированными под углом  $120^\circ$ . Более того, если спектр внешней силы состоит из синхронизованных по фазе гармоник [14], частоты которых относятся как  $\omega_1 : \omega_2 = m:n$  ( $m, n$  - целые числа), то возможно возникновение структур, напоминающих квазикристаллы, открытые недавно в физике твердого тела. Под квазикристаллом в случае параметрического возбуждения ряби подразумевается случай, когда пары стоячих волн равномерно распределены по азимуту; угол между направлением распространения волн в соседних парах составлял  $2\pi/k$ ,  $k$  - целое число. Поле капиллярной ряби обладает при этом поворотной симметрией, но не имеет при  $k > 4$  трансляционной симметрии - пространственного периода. Это, очевидно, связано с тем, что плоскость может быть плотно заполнена лишь правильными треугольниками, квадратами или правильными шестиугольниками. При параметрическом возбуждении волн наблюдались структуры с симметрией, например, двенадцатого порядка ( $k=12$ ) (рис. 2), если соотношение частот гармоник было  $m:n = 4:5$  [14]. Отметим, что в достаточно узкой области параметров квазикристаллические структуры могут наблюдаться на поверхности капиллярной ряби, если накачка чисто гармоническая [11] ( $k=8$ ), однако структурой, реализующейся в наиболее широкой области контролируемых параметров, является квадратная решетка.

Каким же образом система из начального состояния переходит в квадратную решетку? Эта проблема специально изучалась Фарадеем. Как указывалось в [5], «возбуждение ряби обычно начинается с цилиндрических волн, но есть тенденция к образованию линейных параллельных друг другу фронтов; это разрушает круги и они сами разрушаются, производя независимые возмущения, сначала весьма нерегулярные, но почти мгновенно приходящие к квадратным структурам, ориентированным под углом  $45^\circ$  к краям пластины, а затем структуры поворачивались на  $45^\circ$  и становились параллельными краям пластины; хотя иногда наблюдалось и вращение в противоположную сторону, тенденция к ориентации фронтов параллельно краям пластины сохранялась». Временная последовательность наблюдавшихся в эксперименте структур, зарисованная Фарадеем, показана на рис. 1, в.

Детальное изучение того, как из начальных возмущений возникает квадратная решетка, проведено недавно в [15], где исследовалось распространение фронта параметрической неустойчивости в круглой кювете. При включении внешнего источника возмущения генерировались у краев кюветы, а фронт распространялся к центру. Скорость распространения фронта не совпадала с групповой скоростью капиллярных волн, а зависела от величины надкритичности. Этот результат хорошо совпадает с выводами

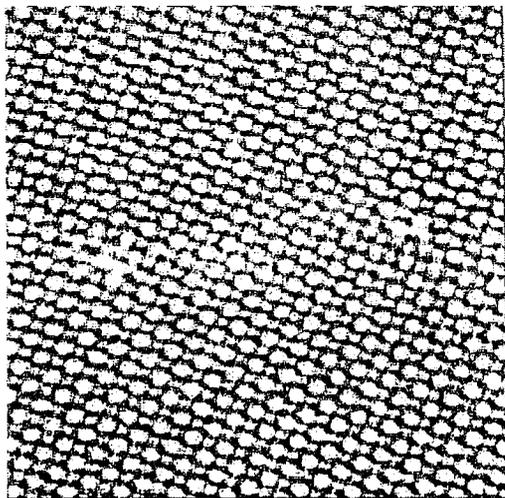


Рис. 2. Квазикристалл с симметрией двенадцатого порядка [14]

теории, развитой в этой работе. Как показано там же экспериментально, цилиндрические волны параметрически возбуждаемой капиллярной ряби неустойчивы. Еще до того, как фронт параметрической неустойчивости достигает центра кюветы, на фоне цилиндрических фронтов, повторяющих форму краев кюветы, возникает система волн со взаимно ортогональными фронтами. Разрушение цилиндрической моды начинается у краев кюветы и распространяется к центру. В результате разрушения аксиально симметричной моды возникает структура из двух взаимно ортогональных пар.

Определяется ли структура капиллярной ряби формой кюветы? Чтобы получить ответ на этот вопрос, Фарадей провел следующий эксперимент [5, § 92]: «Несколько кусочков стекла различной формы (рис. 1, г - А.Б.Е.) были помещены на колеблющуюся пластинку и покрыты водой. Во всех случаях наблюдалась тенденция к возникновению четырехугольников: в случаях 1, 2, 3 они возникали достаточно легко и почти всегда были одни и те же; в случаях 2 и 3 линии пучностей были развернуты чаще всего под углом  $45^\circ$  к боковым сторонам. Для случаев 4 и 5 структура была более нерегулярна и ее возникновение начиналось по-разному. Очевидно, что форма пластины и краев жидкого слоя оказывала влияние на конечную структуру ряби». Наибольшей сложностью в изучении капиллярной ряби было то, что четырехугольная структура наблюдалась лишь как тенденция - в экспериментах Фарадея обычно не возникал паркет из совершенных четырехгранников - всегда имели место нарушения порядка, которые обычно существовали в окрестности боковых границ. Все нарушения совершенной структуры Фарадей приписывал именно воздействию краев жидкого слоя. Как отмечалось им в [5, § 58]: «Однако, кроме нерегулярности краев, структура может быть представлена как квадратная».

Хотя края кюветы действительно являются источником возмущений, не это является определяющим для нарушений порядка совершенных структур, существующих в пространственно протяженных системах. Как показано в работе [7], возникновение пространственно неупорядоченных состояний связано с нелинейной динамикой капиллярной ряби. Экспериментально выяснено, что в квадратной решетке, образованной двумя взаимно ортогональными парами стоячих волн, каждая из пар неустойчива по отношению к возникновению поперечной модуляции. Такая модуляция (рис. 3) возникает при достаточно малой надкритичности, с ростом надкритичности волны огибающих становятся нерегулярными и в системе параметрически возбужденных капиллярных волн возникает хаос. Свойства такого пространственно-временного хаоса изучались в [6,7,10]. Показано, например, что даже при больших надкритичностях структура в виде двух взаимно ортогональных пар волн сохраняется, хотя спектр модуляции достаточно широкий. Расчет пространственной корреляционной функции [10] показал, что в системе капиллярных волн может наблюдаться явление, напоминающее фазовый переход: с увеличением надкритичности длина пространственной корреляции, составляющая  $40-50 \lambda$  ( $\lambda$  - длина капиллярной волны) скачком уменьшается до нескольких длин волн.

На основе экспериментов [7] было предложено модельное уравнение (модифицированное уравнение Гинзбурга - Ландау), описывающее переход от регулярной структуры капиллярной ряби к пространственному беспорядку.

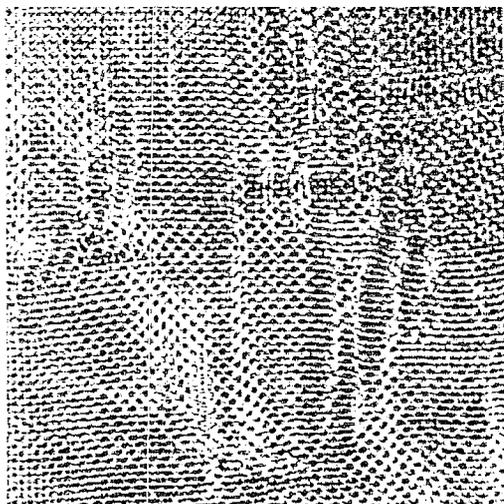


Рис. 3. Капиллярная рябь с модуляцией [7]

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{v_g}{k} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \gamma a = iHa^* - i\beta a + i\sigma |a|^2.$$

Здесь  $a$  - амплитуда капиллярных волн в паре,  $t$  - время,  $y$  - поперечная по отношению к направлению распространения волн координата,  $v_g$  - групповая скорость волн,  $k$  - волновое число,  $\gamma$  - затухание,  $H$  - коэффициент взаимодействия с полем накачки,  $\beta$  - расстройка от точного синхронизма с частотой поля накачки,  $\sigma$  - коэффициент, отвечающий за нелинейный сдвиг частоты. Применение этого уравнения к описанию пространственной модуляции ряби базируется на том, что взаимодействием волн огибающих, распространяющихся на фоне каждой из взаимно ортогональных пар капиллярных волн, образующих квадратную решетку, можно пренебречь [7].

При увеличении параметра  $H$  (амплитуды внешней силы) в уравнении наблюдается переход от регулярной пространственной модуляции к хаотической модуляции, характеризующейся сплошным спектром колебаний в фиксированной точке и сильно спадающей пространственной корреляционной функцией. Такая же последовательность бифуркаций наблюдалась и в экспериментах [7,10].

Таким образом, возникновение пространственно-временного хаоса параметрически возбуждаемой ряби не связано с воздействием случайных возмущений, а обусловлено собственной динамикой системы капиллярных волн.

При проведении экспериментов с капиллярной рябью Фарадей изучал движение частиц, которые располагались у дна (песок) или у поверхности (ликоподий). Наблюдение за переносом примеси капиллярной рябью и за полем освещенности поверхности, на которой возбуждены капиллярные волны, позволяло ему проводить визуализацию структур двумя независимыми методами. Как показано в [5, §§ 43,44]: «При распределении ликоподия на поверхности воды и песка на дне, ликоподий мог образовывать пересекающиеся линии, достаточно широкие, но он не оставался на этих линиях, которые были параллельны линиям распределения песка на дне. Когда обе системы линий были хорошо сформированы, то они в точности совпадали, но в распределениях песка гораздо лучше проявлялись структуры ... Ликоподий двигался почти по всей поверхности воды вначале достаточно быстро, так как если бы его движение не было вызвано рябью и было обусловлено другой причиной. Поверхность воды была в движении, и на это движение не влияли форма и месторасположение возвышений ряби, так как движение ликоподия происходило во всевозможных направлениях, тогда как положение возвышений капиллярной ряби было фиксировано в пространстве. Направление колебаний стекла - дуновения воздуха, и т.д. возможно были причиной, вызывающей это явление». Здесь, также как и при изучении возникновения структур, Фарадей объясняет неупорядоченный транспорт примеси воздействием случайных внешних возмущений. Как обнаружено совсем недавно, даже регулярные в пространстве и времени гидродинамические поля могут вызывать хаотический перенос частиц.

Изучение движения примеси в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби проводилось недавно в работах [16,17]. В экспериментах изучалось движение как отдельной частицы, плавающей на поверхности жидкости [16], так и облака частиц [17]. Для этого в жидкость добавлялась флуоресцирующая краска, а световой нож осуществлял подсветку распределения краски на фиксированной глубине. В экспериментах изучалось, как зависит характер движения частиц от режима, реализующегося в системе параметрически возбужденных волн. Как установлено в этих экспериментах, при малых надкритичностях, когда поле капиллярной ряби промодулировано почти регулярно, в системе может наблюдаться аномальная диффузия: квадрат среднего смещения  $r$  частицы увеличивается как  $\langle r^2 \rangle \sim t^\gamma$ , где  $\gamma > 1$ . Нормальная диффузия ( $\gamma=1$ ), которая также имеет место в системе капиллярных волн, реализуется при больших надкритичностях, когда поле ряби хаотически модулировано [17].

Теоретическая модель для описания аномальной диффузии примеси была разработана недавно в [18]. Как показано в этой работе, регулярная поперечная амплитудная модуляция капиллярных волн в каждой паре может приводить к аномальной диффузии примеси. Частицы, помещенные на поверхность, могут в течение довольно длительного времени двигаться равномерно прямолинейно, что называется полетами Леви. Именно с наличием таких движений связано возникновение аномальной диффузии частиц в параметрически возбуждаемых волнах [18].

Таким образом, капиллярная рябь, наряду с другими системами - термоконвекцией в слое жидкости, подогреваемом снизу, или электрогидродинамической конвекцией в жидких кристаллах, представляется очень удобной для изучения самоорганизации в нелинейных средах. При параметрическом возбуждении волн можно легко создать протяженную систему, длина которой значительно больше, чем пространственный период возмущений, можно легко менять контролируемые параметры - надкритичность, частоту и спектральный состав внешней силы, а также параметры жидкости - вязкость, поверхностное натяжение и т.д.

Существенной особенностью самоорганизации в системе параметрически возбуждаемой капиллярной ряби по сравнению с термоконвекцией является то, что в этой гидродинамической системе формирование структур происходит благодаря взаимодействию распространяющихся возмущений - поверхностных волн. Это приводит к новым эффектам, например, возможности управления пространственной структурой паттерна за счет изменения временного спектра параметрической накачки.

Изучение параметрического возбуждения волн проводится сейчас многими группами исследователей [19-23]. Акцент при этом делается на две фундаментальные проблемы нелинейной физики: в результате каких процессов из первоначально случайных возмущений в физических системах появляются пространственно организованные поля и напротив - каким образом регулярные в пространстве движения становятся случайными. Недавно, например, было экспериментально обнаружено [19], что при параметрическом возбуждении капиллярной ряби в жидких слоях малой (по сравнению с длиной волны) глубины могут существовать дислокации, обладающие топологическим зарядом (рис. 4). Как показано в работе [23], при сближении дислокаций они аннигилируют и структура становится совершенной. Пространственно-временной хаос, возникающий при увеличении надкритичности в этом случае, может быть представлен как ансамбль таких взаимодействующих дислокаций. Переход от случайных в пространстве возмущений к ансамблю взаимодействующих дислокаций может происходить через формирование в решетках капиллярных волн линейной цепочки дислокаций - доменных стенок - границ, разделяющих области, внутри которых структура поля совершенна. Здесь возникает ряд очень интересных проблем: как взаимодействуют дислокации с доменными стенками и с волнами модуляции? Возможна ли взаимная трансформация дислокаций и волн модуляции? Существуют ли дислокации в квазикристаллических структурах?

В заключение отметим, что Фарадей был первым, кто установил, что возникновение квадратной струк-

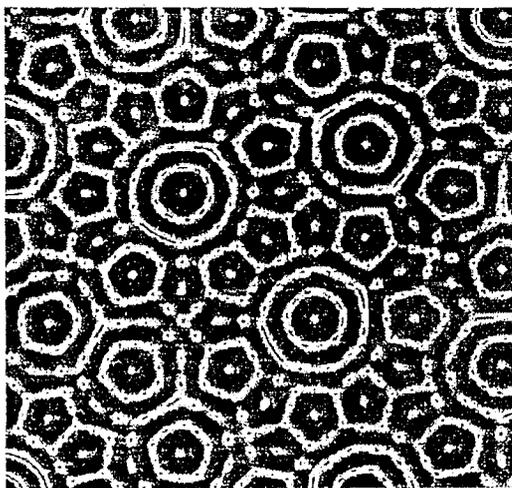


Рис. 4. Дислокации с противоположными топологическими зарядами [23]

туры при параметрическом возбуждении ряби обусловлено не формой кюветы и не зависит от сорта жидкости, а определяется только характером взаимодействия капиллярных волн. Фарадей даже употреблял выражение «... arranged itself ...» [5, § 119], что близко к используемому сейчас термину «самоорганизация». Однако он не сделал никаких обобщений из своих экспериментов и никогда не возвращался после 1831 года к изучению капиллярной ряби. Что также ясно из описания его экспериментов, он сводил возникновение неупорядоченных движений к воздействию возмущений - неровных краев, возмущений, вносимых движением воздуха. По всей видимости, Фарадею легче было принять идею о самоорганизации - существовании в Природе тенденции к возникновению пространственно упорядоченных структур из начального случайного состояния, - чем идею о возможности возникновения неупорядоченных движений, возникающих как результат нелинейной динамики системы.

Автор признателен Ю.А. Данилову и Д.И. Трубецкову за предложение написать эту работу и М.И. Рабиновичу за постоянный интерес и ценные замечания.

### Библиографический список

1. *Haken G.* Спиргетика. М.: Мир, 1980.
2. *Manneville P.* Dissipative structures and weak turbulence. Boston- Toronto: Academic Press, 1990.
3. *Benar H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent // Ann. Chim. Phys. 1901. (7). Vol.23. P. 62.
4. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Philos. Trans. R. Soc. London, 1831. Vol.121. P.299.
5. Entry in Faraday's Diary/ Ed. T.Martin. London: G.Bell, 1932.
6. *Езерский А.Б., Короткий П.И., Рабинович М.И.* Хаотическая автомодуляция двумерных структур на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41, вып.4. С.129.
7. *Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М.* Пространственно-временной хаос параметрически возбуждаемой капиллярной ряби // ЖЭТФ. 1986. Т. 91, вып. 6(12). С.2070.
8. *Левин Б.В., Трубишников Б.А.* Фазовые переходы в решетке параметрических волн на поверхности колеблющейся жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, вып. 7. С. 311.
9. *Tufillaro N.B., Ramshankar R., Gollub J.P.* Order-disorder transition in capillary ripples // Phys.Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 422.
10. *Douady S., Fauve S.* Pattern selection in Faraday instability // Europhys. Lett. 1988. Vol. 6, №3. P.221.
11. *Christiansen B., Alrom P., Levinsen M. T.* Ordered capillary-wave states: Quasicrystals, hexagons, and radial waves // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68, № 14. P. 2157.
12. *Milner S.T.* Square patterns and secondary instabilities in driven capillary waves // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 225. P. 81.
13. *Сазонов А.Г.* К проблеме отбора конвективных структур в жидкости с зависимостью вязкости от температуры // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т.166, № 5. С. 463.
14. *Edwards W.S., Fauve S.* Parametrically excited quasicrystalline surface waves / Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47. P.788.
15. *Matusov P.A., Tsimring L.Sh.* The propagation of the front of parametrically excited capillary ripples. Nonlinear Waves III // Ed. A.V.Gaponov-Grekhov. Berlin: Springer - Verlag. 1990. P. 98.
16. *Ramshankar R., Berlin D., Gollub J.* Transport by capillary waves. Part I: Par-tical trajectories // Phys. Fluids. A. 1990. Vol. 2. P. 1955.

17. *Ramshankar R., Gollub J.* Transport by capillary waves. Part II: Scalar dispersion and structure of the concentration field // *Phys. Fluids. A.* 1991. Vol. 3, № 5. P. 1344.

18. *Aranson I.S., Ezersky A.B., Rabinovich M.I., Tsimring L.Sh.* Impurity transport in parametrically excited capillary ripples // *Phys. Lett. A.* 1991. Vol. 153, № 4,5. P. 211.

19. *Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Matusov P.A., Rabinovich M.I.* Domain, domain walls and dislocations in capillary ripples // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 26, № 3. P. 183.

20. *Muller H.W.* Periodic triangular patterns in the Faraday experiment // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 20. P. 3287.

21. *Bosch E., van de Water W.* Spatiotemporal intermittency in the Faraday experiment // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, № 22. P. 3420.

22. *Gluckman B.J., Marcq P., Bridger J. and Gollub J.* Time averaging of chaotic spatio-temporal wave pattern // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 13. P. 2034.

23. *Ezersky A.B., Ermoshin D.A., Kiyashko S.V.* Dynamics of defects in parametrically excited capillary ripples // Submitted to *Phys. Rev. E.*

*Институт прикладной физики РАН  
Нижний Новгород*

*Поступила в редакцию 15.09.94*

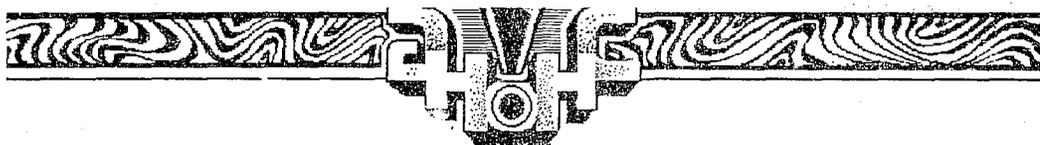
## SELF-ORGANIZATION IN FARADAY'S EXPERIMENTS ON PARAMETRIC EXCITATION OF CAPILLARY RIPPLES

*A.B. Ezersky*

On the basis of Faraday's diary concerning parametric excitation of capillary ripples it is shown that he discovered the existence of the structures which characteristics are independent of initial and boundary conditions and liquid properties in a wide range of parameters.



*Езерский Александр Борисович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1976). Область научных интересов - гидродинамические неустойчивости, взаимодействие вихрей с акустическими волнами, формирование структур. Имеет более 60 публикаций.*



Издательство «Фазис» готовит к выпуску монографию

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ

*Р.А. Силин*

Монография посвящена теории периодических волноводов для электронных приборов СВЧ с длительным взаимодействием. Такие волноводы используются в качестве замедляющих систем и линий задержки для широкого класса электронных приборов и устройств - от ламп с бегущей волной и магнетронов до черенковских счетчиков и линейных ускорителей. Из книг, собирающих вместе основные результаты по замедляющим системам, за последние 30 лет выходила в свет только книга: *Р.А. Силин, В.П. Саонов. Замедляющие системы* (Москва, «Сов.радио», 1966) и перевод этой книги на английский язык: *R.A. Silin, V.P. Saonov. Slow-wave Structure*. (Tr.ed. by H. Stachera) - Boston Spa, Eng.: National Lending Library for Science and Technology, 1971. Vol 1-3. Других фундаментальных книг по этой тематике не появлялось. Настоящее издание, адекватно отражающее современное состояние этой области, восполняет указанный пробел в мировой литературе.

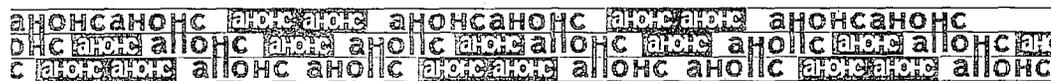
По сравнению с изданием 1966 года настоящая книга кардинально переработана и существенно дополнена, добавлены новые разделы. Первые 15 глав посвящены одномерно-периодическим структурам, которые наиболее широко используются в технике СВЧ. В остальных 7 главах описываются двумерно-периодические системы. В приложениях приведены необходимые справочные данные (см. содержание книги).

Книга рассчитана на специалистов по разработке и эксплуатации электронных приборов, использующих технику СВЧ. Без сомнения, книга будет полезна также преподавателям и студентам соответствующих специальностей, большинство глав снабжено упражнениями.

*Заявки на приобретение книги Р.А. Силин «Периодические волноводы» и запросы на получение дополнительной информации следует направлять издательству «Фазис» по адресу: Москва, 123557, Пресненский вал, 42-44, телефоны: (095) 253-08-20 или 202-61-09, факс: (095) 135-03-45, e-mail: VFO@CCAS.MSK.SU или VFO@CCAS.RU*

### СОДЕРЖАНИЕ

- Гл. 1. Основные понятия и определения.
- Гл. 2. Симметрия замедляющих систем.
- Гл. 3. Лемма Лоренца и ее следствия.
- Гл. 4. Пространственные гармоники.
- Гл. 5. Волны в периодических системах.
- Гл. 6. Спиральные замедляющие системы.
- Гл. 7. Радиальные матрицы передачи для расчета спиральных замедляющих систем.





- Гл. 8. Расчет спиральных замедляющих систем методом Фурье.
- Гл. 9. Замедляющие системы типа «гребенка».
- Гл. 10. Цепочки связанных резонаторов.
- Гл. 11. Многоступенчатые замедляющие системы.
- Гл. 12. Анодные блоки магнетронов со связками.
- Гл. 13. Метод многопроводных линий.
- Гл. 14. Одноступенчатые штыревые замедляющие системы.
- Гл. 15. Многоступенчатые штыревые замедляющие системы.
- Гл. 16. Свойства симметрии двумерно-периодических систем.
- Гл. 17. Многорядные штыревые системы.
- Гл. 18. Многоэтажные штыревые системы
- Гл. 19. Замедляющие системы как искусственные диэлектрики.
- Гл. 20. Системы, замкнутые в цилиндр.
- Гл. 21. Системы, ограниченные двумя плоскостями.
- Гл. 22. Двумерно-периодические системы как антенные решетки.
- Пр. 1. Классификация замедляющих систем.
- Пр. 2. Элементы теории многополюсников.
- Пр. 3. Коэффициенты в усредненных граничных условиях.
- Пр. 4. Волновая проводимость многопроводной линии с прямоугольными проводниками.

**В плане издательства «Фазис» выпуск научно-популярной книги  
НЕОБЫЧНЫЕ ЗАКОНЫ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ**

*Р.А. Силин*

В небольшой по объему книге автору удалось в занимательной форме изложить новые законы физики, известные до сих пор лишь узкому кругу специалистов. Эти законы реализуются в технике СВЧ, в звуковых волнах, но пока не обнаружены в оптике. Даны рекомендации, для каких сред следует искать реализации этих законов в оптическом диапазоне. Книга предназначена для интересующихся физикой школьников и студентов, преподавателей физики, но будет интересна также и специалистам.





INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING  
PHYSICS OF INTENSE BEAMS IN PLASMAS

Plasma Physics Series

*M.V.Nezlin*

*Kurchatov Institute of Atomic Energy, Moscow, Russia*

1993 344 pages, illustrated, hardcover  
£74.00/US\$147  
ISBN 0 7503 0186 4

A comprehensive description of the interaction between extremely intense particle beams and plasmas. The emphasis is on experimental beam plasma physics, but necessary theory is also explained - much of which is innovative and original. Central to the book is the discussion of beam instabilities, emphasizing their hydrodynamic nature. New experimental results are given so providing fresh insights into the phenomena of beam instabilities.

**Contents:** Introduction and general overview. Aperiodic beam instabilities (theory). Oscillatory beam instabilities (theory). Beam instabilities as a result of active coupling between waves of different signs of energy, electron, ion and plasma beams in laboratory plasma. Experimental data on instabilities and limiting currents of electron ion and plasma beams. Mechanisms of current limitation (disruption) in beams. Acceleration and heating of plasma ions in a regime close to the limiting beam current. Instability of intense ion beam with neutralized space charge in magnetic field. Electric double layers in electron, ion and plasma beams and the mechanism of the Aurora Borealis. Langmuir solitons in electron (plasma) beams. Novel methods of generation and amplification of electromagnetic waves by relativistic electron beams. Index.

**HOW TO ORDER**

By Mail: **UK/ROW:** Books Marketing Dept., IOP Publishing, Techno House,  
Bristol, BS1 6NX, UK  
**USA & Canada** IOP Publishing c/o AIDC, 2 Wintersport Lane, PO Box 20,  
Williston, VT 05495-0020, USA  
By Phone: **UK/ROW** + 44(0) 117 929 7481 or (UK ONLY 0800 373921)  
**USA & Canada** 1-800 632 0880 or Outside USA 1-802 862 0095  
By Fax: **UK/ROW** + 44(0) 117 929 4318  
**USA & Canada** 1-802 864 7626 (NEZLIN/7/95)





## ROSSBY VORTICES, SPIRAL STRUCTURES, SOLITONS

Springer series in Nonlinear Dynamics

*M.V. Nezlin & E. Snezhkin*

*Kurchatov Institute of Atomic Energy, Moscow, Russia*

1993 223 pages, illustrated, hardcover  
DM 128,-; öS 998,40; sFr. 128,  
ISBN 3-540-50115-0

The understanding of the complex dynamics in plasmas, in meteorological and astrophysical systems etc. is of great relevance not only to academic research but also to our daily lives. Computer simulations are still a long way from yielding satisfactory results and it is thus all the more striking that the simple (hydrodynamic) laboratory simulations devised by the authors provide so much insight into the nature of these phenomena and even facilitate predictions.

This book provides a comprehensive description and analysis of rotating shallow water experiments used to simulate a variety of natural phenomena. The analysis is based on the physical analogies between two-dimensional gas dynamics and the dynamics of shallow water.

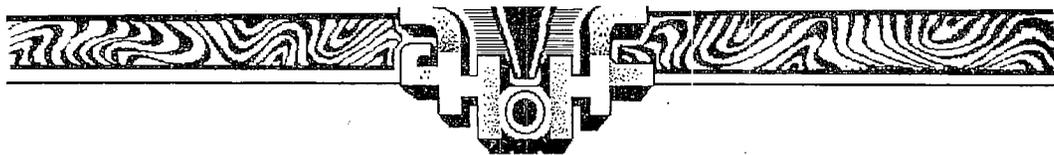
The important phenomena that are simulation and discussed include:

- Spiral structures in galaxies
- Vortices in the atmospheres of giant planets
- The Great Red Spot of Jupiter
- Ocean vortices, e.g. the rings of the Gulf Stream
- Cyclone-anticyclone asymmetry
- Motion of charged particles in a magnetized plasma

**PLEASE ORDER THIS BOOK FROM:**

Springer - Verlag  
Postfach 31 13 40  
D-10643 Berlin





ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*научно-технический журнал*  
издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 3, № 2, 1995, Саратов

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

*Проблемы нелинейной гидродинамической устойчивости*

*Ланда П.С.* Гидродинамическая турбулентность и когерентные структуры: обзор тематического выпуска

**ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ**

*Климонтович Ю.Л.* Что же такое турбулентность?

*Ланда П.С.* Так что же такое турбулентность? (послесловие)

*Гиневский А.С., Ланда П.С.* Возбуждение гидродинамических и акустических волн в дозвуковых струйных и отрывных течениях

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

*Герценштейн С.Я., Родичев Б.В., Сухоруков А.Н.* О переходе от ламинарного режима движения к турбулентному в гидродинамических задачах

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

*Белоцерковский С.М., Хлапов И.В.* Моделирование влияния диффузии вихрей на турбулентные характеристики струй

*Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.* Компьютерная концепция вихревой турбулентности

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA**

*Минаев А.Ф., Смыслов В.И.* Сергей Павлович Стрелков (1905 - 1974)

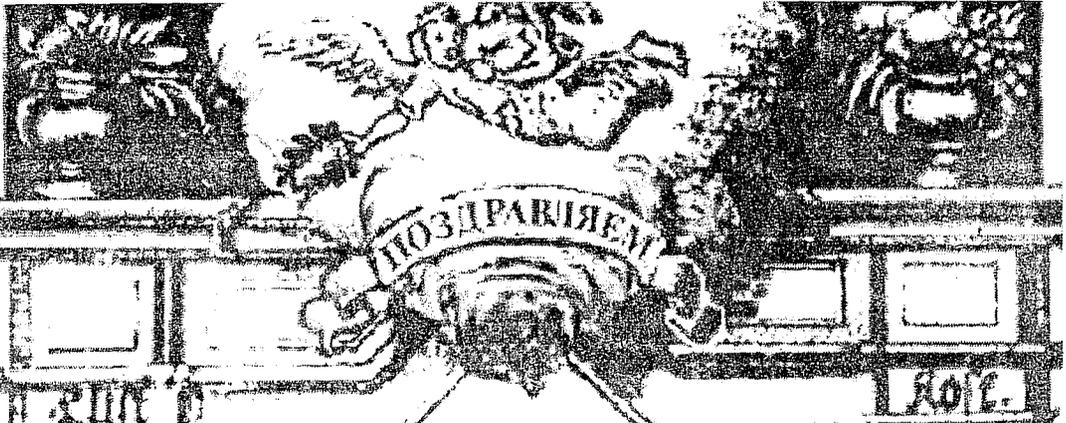
**ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ**

*Стрелков С.П.* Две «Задачки» (из прошлого)

**КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ**

Международная школа по нелинейным явлениям 5-16.09.95, Нижний Новгород, Россия





ПОЗДРАВЛЯЕМ

**ГУЛЯЕВА**

Юрия Васильевича

главного редактора  
нашего журнала  
с присуждением Президиумом  
Российской академии наук

**ЗОЛОТОЙ МЕДАЛИ**

им. А.С. Попова 1995 года  
по совокупности работ большого  
научного и практического значения  
в области радиотехники,  
электроники и связи, выполненных  
за последние 35 лет.



Желаем  
здоровья и успехов  
во всех делах!

*Редакционная коллегия*



Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал - макет подготовлен *Г.А. Суминой* с использованием  
программы Design Studio на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам  
осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж»  
при Саратовском государственном университете.  
Банковские реквизиты - р/с № 000609446 в КБ «Экономбанк»  
г. Саратова, МФО 251279, корсчет банка 700161122, РКЦ, МФО 251008.

Индекс издания по каталогу «Газеты и журналы» 73498

Сдано в набор 10.06.95. Подписано к печати 15.09.95. Формат 70x108/16.  
Бумага писчая № 1. Печать офсетная. Гарнитура Латинская.  
Усл. печ.л. 9,8 (7,0). Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 200 экз. Заказ 3 2 2 8

Издательство ГосУНЦ «Колледж».  
410071, Саратов, ул. Астраханская, 83.  
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446  
E-mail:and@ccollege.saratov.su

МГП «Типография №1». 410040, Саратов, Вишнёвая, 10.

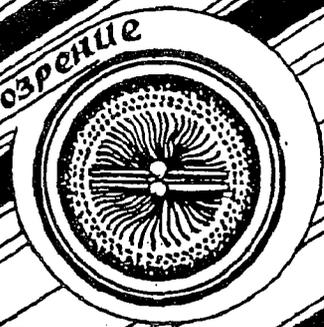
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1994



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

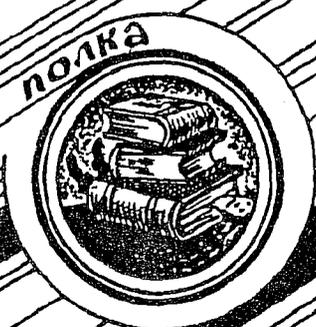
*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



В журнале - мнения и преподавателей



Книжная студента



современной нелинейной динамики

## ВСЕМИРНАЯ ИСТОРИЯ И ПНД

(Взгляд через призму изобразительного искусства)

### Первобытное искусство

Есть все основания полагать, что нелинейно-динамическая парадигма является одной из древнейших, воспринятых и прочувствованных на самой заре развития человечества, когда любой простейший объект - какой-нибудь камень или деревяшка - мог оказаться вместителем стихийных, магических сил, и в этом качестве становился способным на самое сложное поведение; когда человек был погружен в таинственно-непознаваемый мир безграничного хаоса, но хаоса, четко структурированного жесткой иерархической системой богов, духов и демонов разнообразных рангов и ограниченного кругом видимого горизонта.

Не имея возможности пространного развития своих мыслей по данному предмету, остановимся на отдельных, наугад взятых, но тем не менее вполне красноречивых примерах.

1. Стандартное объяснение феномена наскальной живописи, как необходимой принадлежности ритуальных плясок с целью повышения эффективности предстоящей охоты, может оказаться теперь уже не столь очевидным.

Проведенное на рис. 1 сопоставление достаточно типичного наскального изображения - головы быка из пещеры Ласко в Южной Франции - с достаточно же типичным странным аттрактором на фазовой плоскости заставляет задуматься о многом... Но это многое еще не все... Даже беглого взгляда на рис.1,а довольно, чтобы убедиться во фрактальной структуре поверхности живописного изображения (для ясности в углу рисунка помещен увеличенный фрагмент). Так вот, фрактальная размерность этой поверхности с точностью до 3.14% совпадает с фрактальной размерностью аттрактора (рис.1,б). Но и это не все! Странный аттрактор на рис.1,б принадлежит уравнению, описывающему колебания продольно изогнутого стержня при периодическом возбуждении (рис.1,в), а это - не что иное, как лук с тетивой в трепетно подрагивающей руке!! Таким образом, пещера из ритуального плясалища превращается в пещерную исследовательскую лабораторию (ПИЛ) одного (из многих!) тогдашних ЛТП (луково-тетивных предприятий), и косвенным подтверждением этому служит густо усеянный наконечниками пол.

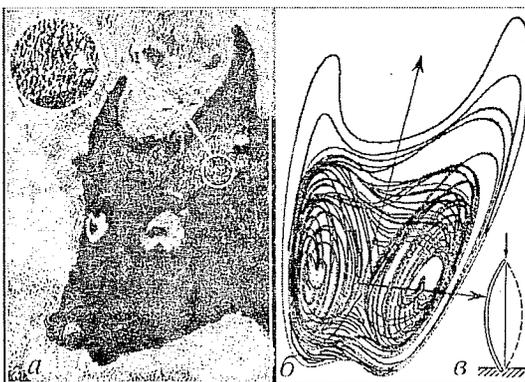


Рис.1

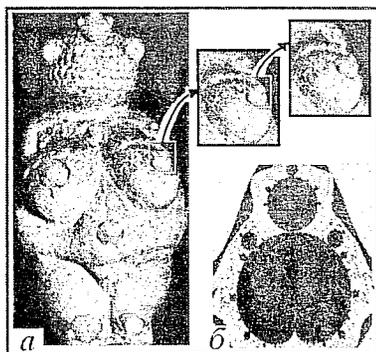


Рис. 2

2. Эта каменная статуэтка (рис.2,а) получила название Виллендорфской Венеры. Только неудовлетворенные или нездоровые сексуальные наклонности какого-нибудь археолога-отшельника могли дать повод к такому сопоставлению. С этой позиции и мандельброву фигуру (рис.2,б) следовало бы назвать «Сидящая Венера сада»; но даже в наше развращенное время это никому не приходит в голову. Две эти фигурки не зря помещены рядом: любому непредубежденному наблюдателю становится ясным, что в древней статуэтке нашли зримое пластическое выражение глубокие идеи как ренорм-группового анализа, так и пространственной фрактализации. Мы не знаем ее назначения, да это не так уж и важно, - с равным успехом она могла быть и учебным пособием, и игрушкой-ренормушкой, и предметом неизвестного нам культа, объединяющего идеи тотального скейлинга с иерархией разномасштабных мифологических объектов.

3. Но, пожалуй, самым убедительным примером древности ПНД-представлений являются черепки, найденные вблизи селения Аль-Хенон в Алжире (рис.3, здесь представлены восстановленные из черепков сосуды). Подобно тому, как маленькая долговая расписка на новгородской берестяной грамоте говорит одновременно о высоком уровне развития социальных отношений, экономической интеграции, всеобщей грамотности, знания математики и бухучета и т.п., так и эти черепки свидетельствуют, что нелинейная динамическая идеология проникла в самую гущу народных масс, и любая кухарка могла управлять при посредстве подобных сосудов нелинейными процессами и для постижения истины, и для достижения каких-либо утилитарных целей.

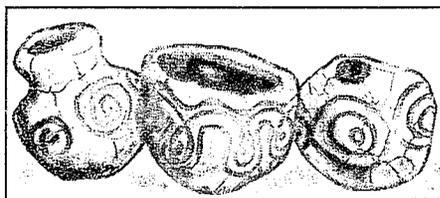


Рис.3