

Трикладная Желпневная Динамика



См. последнюю страницу обложки





БИФУРКАЦИИ
в динамических
системах различной природы



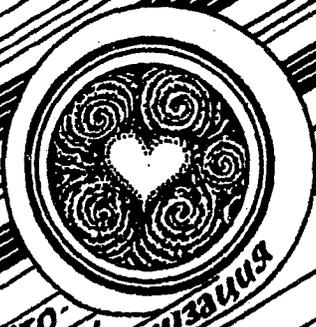
Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ
АОС



АВТО-
БОЛЬШИЕ
САМООРГАНИЗАЦИЯ



Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн



Нелинейная
динамика
в
лицах.
История. Personalia

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Кашиникос, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пуцдино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

<i>Астафьева Н.М.</i> Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений (основы теории и примеры применения)	3
<i>Мира Кристиан.</i> О бассейнах, порождаемых двумерными необратимыми отображениями	40
<i>Ковригин Д.А., Потапов А.И.</i> Нелинейная волновая динамика одномерных упругих систем	72

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

<i>Болотовский Б.М., Левин М.Л., Миллер М.А., Суворов Е.В.</i> Фарадей - Максвелл - Герц - Хевисайд... О согласованности функциональных специализаций мозга	103
---	-----

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ 124

АНОНС 123,125

HIGH EDUCATION STATE COMMITTEE OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.4, №2, 1996, Saratov

CONTENTS

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

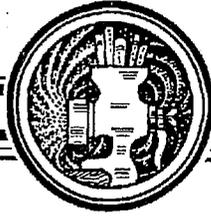
- Wavelet analysis: local inhomogeneities spectral analysis (fundamental properties and applications). *N.M. Astafyeva* 3
- Some results on basins generated by two-dimensional noninvertible maps. *Kristian Mira* 40
- Nonlinear wave dynamics of one-dimensional elastic systems. *D.A. Kovriguine, A.I. Potapov* 72

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- Faraday - Maxwell - Hertz - Heaviside... On the coordination of the functional specialization of cerebrum. *B.M. Bolotovskiy, M.L. Levin, M.A. Miller, E.V. Suvorov* 103

CONFERENCES. MEETING. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS 124

ANNOUNCEMENTS 123, 125



**ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ: СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
(основы теории и примеры применения)**

Н.М. Астафьева

Представлены основы теории вейвлет-преобразования - математического аппарата, хорошо приспособленного для изучения структуры сложных неоднородных процессов, характеризующихся взаимодействиями возмущений в широких диапазонах масштабов. За пределами работы оставлены проблемы, связанные с использованием вейвлетов для очистки, фильтрации и упаковки информации. Применение вейвлетов для численного моделирования и решения уравнений является предметом следующей работы. Здесь возможности вейвлет-преобразования показаны на примерах анализа сигналов: модельных (гармонических, с различными особенностями, фрактальных) и натуральных геофизических временных рядов. Подробно изучены мультимасштабные свойства процесса ЮКЭН (Южное Колебание - Эль-Ниньо) - крупномасштабного процесса в системе океан-атмосфера, оказывающего влияние на климат всей планеты.

Термин «вейвлет» (дословный перевод - маленькая волна) появился сравнительно недавно - его ввели Гроссман и Морле [1] в середине 80-х годов в связи с анализом свойств сейсмических и акустических сигналов. В настоящее время семейство анализаторов, названных вейвлетами, начинает широко применяться в задачах распознавания образов; при обработке и синтезе сигналов (например, речевых); при анализе изображений различной природы (изображение радужной оболочки глаза, рентгенограмма почки, спутниковые изображения облаков или поверхности планеты, снимок минерала и т.п.); для изучения свойств турбулентных полей; для решения уравнений; для свертки (упаковки) больших объемов информации и во многих других случаях.

Вейвлет-преобразование одномерного временного сигнала состоит в разложении его по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством ее масштабных преобразований и переносов. Каждая из функций базиса характеризует как частоту, так и ее локализацию во времени. Таким образом, вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку сигнала, при этом частота и время рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно во временном и в частотном пространстве.

Сказанное обобщается на неоднородные сигналы (или функции). Область использования вейвлетов не ограничивается анализом свойств сигналов и полей различной природы, полученных численно, в эксперименте или при наблюдениях. Вейвлеты начинают применяться и для численного моделирования - как

иерархический базис, хорошо приспособленный для описания динамики нелинейных процессов, характеризующихся взаимодействиями в широких диапазонах пространственных и временных масштабов. Вейвлет-анализ оказывается очень удобным инструментом для изучения существенно неоднородных процессов, поскольку элементы его базиса хорошо локализованы и обладают подвижным частотно-временным окном.

Далеко не случайно многие исследователи называют вейвлет-анализ «математическим микроскопом» - название прекрасно отражает замечательное свойство метода сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Способность этого «микроскопа» обнаружить внутреннюю структуру исследуемого объекта и изучить его локальные скейлинговые свойства уже продемонстрирована на многих примерах.

Например, на таких классических, как фрактальные функции Вейерштрасса и вероятностные меры канторовских рядов. Применение вейвлет-анализа к турбулентному полю скорости в ветровом туннеле при больших числах Рейнольдса дало наглядное подтверждение наличия каскада Ричардсона. Показано сходство энергетического каскадного процесса со структурой мультифрактальных неоднородных канторовских рядов. Еще более эффективным оказалось применение вейвлет-анализа к мультифрактальным инвариантным мерам некоторых хорошо известных динамических систем, моделирующих наблюдаемые в диссипативных системах ситуации перехода к хаосу.

Таким образом, вейвлеты могут с успехом применяться для решения различных проблем. В настоящей работе сделана попытка собрать и по возможности наглядно и просто изложить сведения из теории вейвлетов, необходимые при практическом применении вейвлет-преобразования для анализа сигналов различной природы.

В первом разделе проводится аналогия между рядами Фурье и разложением в ряды по вейвлетам, определяется вейвлет-преобразование, описываются его свойства и некоторые следствия из них; материал основан, главным образом, на сборниках и монографиях [2-4] и прекрасных работах Ингрид Добечи [5] и Мари Фарж [6]. Во втором разделе приводятся примеры применения вейвлет-преобразования к модельным сигналам различного характера и результаты вейвлет-анализа некоторых натуральных временных геофизических рядов.

1. Основы теории

Определения, свойства и их следствия мы приводим для вейвлет-преобразования одномерных функций. При необходимости все сказанное может быть обобщено на многомерные случаи.

1.1. От преобразования Фурье к вейвлет-преобразованию

Интегральное преобразование Фурье и ряды Фурье являются основой гармонического анализа. Получаемые в результате преобразования коэффициенты Фурье поддаются достаточно простой физической интерпретации, что ни в коем случае не умаляет важности последующих выводов о характере исследуемого сигнала. Применение интегрального преобразования и рядов Фурье очень наглядно, все необходимые свойства и формулы выписываются с помощью всего двух действительных функций $\sin(t)$, $\cos(t)$ или одной комплексной - синусоидальной волны $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$, $i = (-1)^{1/2}$ и достаточно легко доказываются.

Вейвлет-преобразование применяется сравнительно недавно и математический аппарат находится в стадии активной разработки. Поэтому для большей наглядности будем, следуя [4], вводить необходимые понятия вейвлет-анализа, проводя аналогии и сравнения с анализом Фурье, значимость и

привлекательность которого для широкого круга исследователей неоспоримы и проверены временем.

1.1.1. Ряды Фурье. Напомним некоторые понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем. Пусть $L^2(0,2\pi)$ - пространство квадратично интегрируемых функций с конечной энергией

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad t \in (0,2\pi).$$

Это - определение кусочно-непрерывной функции $f(t)$. Она может быть периодически расширена и определена на всей оси $R(-\infty, \infty)$ так, что

$$f(t) = f(t - 2\pi) \quad \text{для всех } t \text{ из } R.$$

Любая $f(t)$ из пространства 2π -периодических квадратично интегрируемых функций может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(int)$$

с коэффициентами

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int) dt$$

и ряд равномерно сходится к $f(t)$, то есть

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(t) - \sum_M^N c_n \exp(int)|^2 dt = 0.$$

Отметим, что

$$w_n(t) = \exp(int), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

есть ортонормированный базис пространства $L^2(0,2\pi)$, построенный с помощью масштабного преобразования единственной функции $w(t) = \exp(it)$ таким образом, что $w_n(t) = w(nt)$.

Итак, каждая 2π -периодическая квадратично интегрируемая функция может быть получена суперпозицией масштабных преобразований базисной функции $w(t) = \exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$, то есть является композицией синусоидальных волн с различными частотами (с коэффициентами, зависящими от номера гармоники (частоты)).

Напомним, что для коэффициентов ряда Фурье выполняется равенство Парсевала

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

1.1.2. Разложение по вейвлетам. Рассмотрим пространство $L^2(R)$ функций $f(t)$ с конечной энергией, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Функциональные пространства $L^2(0,2\pi)$ и $L^2(R)$ существенно различны. В

частности, локальное среднее значение каждой функции из $L^2(R)$ должно стремиться к нулю на $(\pm\infty)$. Синусоидальная волна не принадлежит $L^2(R)$ и, следовательно, семейство синусоидальных волн w_n не может быть базисом функционального пространства $L^2(R)$. Попробуем найти достаточно простые функции для конструирования базиса пространства $L^2(R)$.

«Волны», образующие пространство $L^2(R)$, должны стремиться к нулю на $(\pm\infty)$ и для практических целей, чем быстрее, тем лучше. Рассмотрим в качестве базисных функций вейвлеты - хорошо локализованные солитоноподобные «маленькие волны». Как и в случае с пространством $L^2(0,2\pi)$, которое полностью формировалось с помощью одной базисной функции $w(t)$, сконструируем функциональное пространство $L^2(R)$ также с помощью одного вейвлета $\psi(t)$.

Как же с помощью быстро стремящейся к нулю локализованной функции покрыть всю ось $R(-\infty, \infty)$? Это можно сделать, предусмотрев систему сдвигов (переносов) вдоль оси. Пусть для простоты сдвиги будут целыми, то есть $\psi(t-k)$.

Введем аналог синусоидальной частоты. Для простоты и определенности запишем его через степени двойки: $\psi(2^j t - k)$, здесь j и k - целые числа ($j, k \in I$).

Таким образом, с помощью масштабных преобразований $(1/2^j)$ и сдвигов $(k/2^j)$ мы можем описать все частоты и покрыть всю ось, имея единственный базисный вейвлет, $\psi(t)$.

Напомним определение нормы

$$\|\psi\|_2 = \langle \psi, \psi \rangle^{1/2}, \quad \langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \bar{q}(t) dt$$

(черта сверху обозначает комплексно-сопряженное). Следовательно, $\|\psi(2^j t - k)\|_2 = 2^{-j/2} \|\psi(t)\|_2$. Таким образом если вейвлет $\psi(t) \in L^2(R)$ имеет единичную норму, то и все вейвлеты семейства $\{\psi_{jk}\}$, вида

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in I \quad (1)$$

также нормированы на единицу $\|\psi_{jk}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$.

Вейвлет $\psi \in L^2(R)$ называется ортогональным, если определенное в (1) семейство $\{\psi_{jk}\}$ представляет собой ортонормированный базис функционального пространства $L^2(R)$

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$$

и каждая $f \in L^2(R)$ может быть представлена в виде ряда

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (2)$$

равномерная сходимость которого в $L^2(R)$

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \|f - \sum_{-M_2}^{N_2} \sum_{-M_1}^{N_1} c_{jk} \psi_{jk}\|_2 = 0.$$

Простейшим примером ортогонального вейвлета является HAAR-вейвлет, определяемый соотношением

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & t < 0, t \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Каждый может легко проверить, что любые две функции ψ_{jk}^H, ψ_{lm}^H , полученные из этого вейвлета по формуле (1) с помощью масштабных преобразований $(1/2^j)$, $(1/2^l)$ и сдвигов $(k/2^j)$, $(m/2^l)$, ортогональны и имеют единичную норму.

Сконструируем базис функционального пространства $L^2(R)$ с помощью масштабных преобразований и переносов вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями базисных параметров: масштабного коэффициента a и параметра сдвига b

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \psi((t-b)/a), \quad a, b \in R, \quad \psi \in L^2(R), \quad (4)$$

и на его основе запишем интегральное вейвлет-преобразование

$$[W_\psi f](a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}((t-b)/a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{ab}(t) dt. \quad (5)$$

Проводя дальнейшую аналогию с преобразованием Фурье, можно определить коэффициенты $c_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle$ разложения (2) функции f в ряд по вейвлетам через интегральное вейвлет-преобразование

$$c_{jk} = [W_\psi f](1/2^j, k/2^j).$$

В дальнейшем иногда вместо $[W_\psi f](a, b)$ для коэффициентов (амплитуд) вейвлет-преобразования будут использоваться обозначения $W(a, b)$, или $W_\psi f$, или $W[f]$.

Итак, каждая функция из $L^2(R)$ может быть получена суперпозицией масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета, то есть является композицией «маленьких волн» с коэффициентами, зависящими от номера волны (частоты, масштаба) и от параметра сдвига (времени).

Использование дискретного вейвлет-преобразования (дискретного частотно-временного пространства в виде целых сдвигов и растяжений по степеням двойки) позволяет провести доказательство многих положений теории вейвлетов [2-5], связанных с полнотой и ортогональностью базиса, сходимостью рядов и т.п. Доказательность этих положений необходима, например, при сжатии информации или в задачах моделирования, то есть в случаях, когда важно провести разложение с минимальным числом независимых коэффициентов вейвлет-преобразования и иметь точную формулу обратного преобразования.

При применении вейвлетов для анализа сигналов непрерывное вейвлет-преобразование более удобно; его некоторая избыточность становится положительным качеством, так как позволяет более полно и четко представить содержащуюся в данных информацию.

1.1.3. Обратное вейвлет-преобразование. Синусоидальная волна формирует ортонормированный базис функционального пространства $L^2(0, 2\pi)$ и с обратным преобразованием Фурье проблем не возникает. Ортонормированность же базисов пространства $L^2(R)$, построенных на основе вейвлетов, определяется и выбором базисного вейвлета и способом построения базиса (значениями базисных параметров - сдвига и масштабного коэффициента).

Конечно же, вейвлет может считаться базисной функцией $L^2(R)$ только в том случае, если построенный с его помощью базис ортонормирован и обратное преобразование существует. Однако, строгие доказательства полноты и ортогональности сложны и громоздки, примеры этого можно видеть в [2-5], где разрабатывается теория вейвлет-преобразования. Кроме того, для практических целей часто достаточно бывает устойчивости и «приблизительной» ортогональности системы функций разложения, то есть достаточно, чтобы она была «почти базисом». Как правило, для анализа сигналов используются такие почти базисные вейвлеты, сколь ни кощунственно в этом контексте слово «почти».

За подробным изложением и доказательствами отошлем к уже цитированным работам, здесь же выпишем обратное преобразование лишь для тех двух случаев, что описаны выше: для базиса (1), допускающего расширение и сдвиги $(1/2^j, k/2^j)$, $j, k \in I$, и базиса (4), построенного при произвольных значениях (a, b) , $a, b \in R$.

При базисных параметрах (a,b) , $a,b \in R$ обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса (4), что и прямое

$$f(t) = C_\psi^{-1} \iint [W_\psi f](a,b) \psi_{ab}(t) da db/a^2,$$

C_ψ - нормализующий коэффициент (аналогичный коэффициенту $(2\pi)^{1/2}$, нормализующему преобразование Фурье)

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi^\wedge(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty$$

(крышечкой обозначается фурье-образ).

Условие конечности C_ψ ограничивает класс функций $\psi(t) \in L^2(R)$, которые могут быть использованы в качестве базисных вейвлетов. В частности, очевидно, что образ Фурье ψ^\wedge должен быть равен нулю в начале координат $\omega=0$ и, следовательно, должен быть равен нулю по крайней мере нулевой момент $\psi(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Чаще всего в приложениях достаточно рассмотрения только положительных частот, то есть $a>0$; вейвлет, соответственно, должен удовлетворять условию

$$C_\psi = 2 \int_0^{\infty} |\psi^\wedge(\omega)|^2 \omega^{-1} d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\psi^\wedge(-\omega)|^2 \omega^{-1} d\omega < \infty.$$

В случае дискретного вейвлет-преобразования устойчивый базис определяется следующим образом.

Функция $\psi \in L^2(R)$ называется R -функцией, если базис $\{\psi_{jk}\}$, определенный (1), является базисом Riesz'a в том смысле, что существуют две константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$, для которых соотношение

$$A \|\{c_{jk}\}\|_2^2 \leq \|\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}\|_2^2 \leq B \|\{c_{jk}\}\|_2^2$$

выполняется при любой ограниченной, дважды квадратично суммируемой последовательности $\{c_{jk}\}$

$$\|\{c_{jk}\}\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{jk}|^2 < \infty.$$

Для любой R -функции существует базис $\{\psi^{jk}\}$ - «двойник» базиса $\{\psi_{jk}\}$ в том смысле, что $\langle \psi_{jk}, \psi^{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$, с помощью которого можно построить реконструкционную формулу

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi^{jk}(t). \quad (6)$$

Если ψ - ортогональный вейвлет и $\{\psi_{jk}\}$ - ортонормированный базис, то $\{\psi^{jk}\}$ и $\{\psi_{jk}\}$ совпадают и формула (6) является формулой обратного преобразования. Если ψ - не ортогональный вейвлет, но является двухместным или парным R -вейвлетом (dyadic wavelet), то он имеет двойника ψ^* , с помощью которого строится двойник семейства $\{\psi_{jk}\}$ подобно базису (1)

$$\psi^{jk}(t) = \psi_{jk}^*(t) = 2^{j/2} \psi^*(2^j t - k), \quad j, k \in I.$$

В общем же случае реконструкционная формула (6) даже не обязательно является вейвлет-рядом в том смысле, что ψ^* не является вейвлетом и $\{\psi^k\}$ может не иметь базиса-двойника, построенного по типу (4).

1.1.4. Частотно-временная локализация. Преобразование Фурье и ряды Фурье являются прекрасным математическим аппаратом и с успехом используются в приложениях для физической интерпретации процессов при анализе различных сигналов.

Реальный сигнал всегда (или, лучше, как правило) принадлежит пространству $L^2(R)$. Преобразование Фурье сигнала $f(t)$ с конечной энергией, определенной нормой $\|f\|_2$, представляет собой спектр этого сигнала

$$f^{\wedge}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

В некоторых случаях физическая интерпретация с помощью этой формулы бывает затруднительна. Так, чтобы получить спектральную информацию на выбранной частоте, необходимо иметь и всю прошлую и всю будущую временную информацию; к тому же формула не учитывает, что частота может эволюционировать со временем. Преобразование Фурье, например, не отличает сигнал, представляющий собой сумму двух гармоник $\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$, от сигнала, состоящего из тех же гармоник, включающихся последовательно одна за другой (пример рассмотрен во второй главе).

Кроме того, известно, что частота сигнала обратно пропорциональна его продолжительности. Поэтому для получения высокочастотной информации с хорошей точностью важно извлекать ее из относительно малых временных интервалов, а не из всего сигнала; и наоборот - низкочастотную спектральную информацию извлекать из относительно широких временных интервалов.

Часть описанных трудностей снимается при использовании оконного преобразования Фурье. Однако, бесконечно осциллирующая базисная функция (синусоидальная волна) не позволяет получать по-настоящему локализованную информацию. Элементом базиса вейвлет-преобразования является хорошо локализованная функция, быстро стремящаяся к нулю вне небольшого интервала, что позволяет провести «локализованный спектральный анализ» - смысл этого несколько странного сочетания слов станет ясен из дальнейшего. Иными словами, вейвлет-преобразование автоматически обладает подвижным частотно-временным окном, узким на малых масштабах и широким на больших.

Каковы же параметры частотно-временного окна вейвлет-преобразования? Поскольку и сам вейвлет ψ , и его фурье-образ ψ^{\wedge} достаточно быстро спадают, они могут быть использованы как «оконные функции» с «центром» и «шириной», определяемыми следующим образом.

Для нетривиальной оконной функции $z(t) \in L^2(R)$ (необходимо, чтобы $tz(t)$ также принадлежала $L^2(R)$), ее центр t^* и радиус Δ_z определяются формулами

$$t^* = (1/\|z\|_2^2) \int_{-\infty}^{\infty} t |z(t)|^2 dt \quad \text{и} \quad \Delta_z = (1/\|z\|_2^2) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |z(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

при этом ширина оконной функции есть $2\Delta_z$.

Пусть t^* , Δ_ψ , ω^* , $\Delta_{\psi^{\wedge}}$ - определенные по этим формулам центры и радиусы вейвлета ψ и его фурье-образа ψ^{\wedge} , соответственно. Тогда интегральное вейвлет-преобразование (5) ограничено «временным окном»

$$[\text{win}_t] = [b + at^* - 2a \Delta_\psi, b + at^* + 2a \Delta_\psi].$$

То есть имеет место временная локализация с центром окна в $b + at^*$ и шириной

окна $2a\Delta\psi$. Введем функцию $\eta(\omega) = \psi^*(\omega + \omega^*)$, которая также является оконной функцией с центром в нуле и радиусом $\Delta\psi$. Воспользовавшись равенством $\langle f, g \rangle = \langle f^*, g^* \rangle / 2\pi$, можно записать интегральное вейвлет-преобразование (5) для фурье-образа f^* в виде

$$W(a, b) = |a|^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) e^{ib\omega} \bar{\eta}(a(\omega - \omega^*/a)) d\omega. \quad (7)$$

Если отвлечься от фазового сдвига и константы, то станет очевидным, что преобразование (7) дает локализованную информацию и о спектре $f^*(\omega)$ сигнала $f(t)$ с «частотным окном»

$$[\text{win}_\omega] = [\omega^*/a - \Delta\psi/a, \omega^*/a + \Delta\psi/a].$$

Частотная локализация происходит около центра окна в ω^*/a с шириной окна, равной $2\Delta\psi/a$.

Заметим, что отношение центральной частоты к ширине окна

$$(\omega^*/a) / (2\Delta\psi/a) = \omega^*/(2\Delta\psi)$$

не зависит от местоположения центральной частоты, а частотно-временное окно $[\text{win}_t] \times [\text{win}_\omega]$, имеющее площадь $4\Delta\psi\Delta\psi^*$, сужается при высокой центральной частоте ω^*/a и расширяется при низкой (рис. 1, а).

Для сравнения на рис. 1 показана локализация в частотно-временном пространстве преобразований Фурье (рис. 1, б) и Шеннона (рис. 1, в). Известно, что преобразование Фурье ряда данных с равномерной дискретизацией по времени Δt не может достичь дискретизации по частоте больше, чем $\Delta\omega = \Delta t / 2$ (частота Найквиста, демонстрирующая частный случай принципа неопределенности между временной и частотной локализацией). Аналогичное ограничение для вейвлет-преобразования можно выразить соотношением $\Delta t \Delta\omega \geq 1 / (4\pi)$. Рис. 1 демонстрирует, что преобразование Фурье хорошо локализует частоту, но без временного разрешения; преобразование Шеннона не обладает частотной локализацией; вейвлет-преобразование имеет подвижное окно, локализованное около выбранного момента времени и расширяющееся с ростом масштаба, что и является наиболее желательным при получении спектральной информации.

Проведем сравнение вейвлет-преобразования (5) с часто используемым для анализа сигналов оконным, или коротко-временным, преобразованием Фурье

$$F(\omega, b) = \int f(t) z(t-b) e^{i\omega t} dt$$

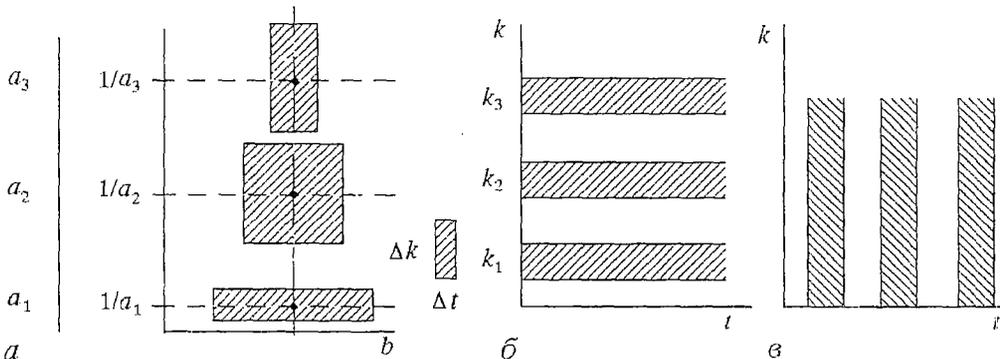


Рис. 1. Частотно-временная локализация преобразований с разными анализаторами: а - вейвлеты, б - гармоника Фурье, в - функции Шеннона

- преобразованием Фурье сигнала, умноженного предварительно на оконную функцию z . Таким образом, $F(\omega, b)$ есть разложение сигнала по семейству функций $z(t-b)e^{i\omega t}$, образованному из единственной функции $z(t)$ с помощью переносов b во времени и переносов ω по частоте, в то время, как результат вейвлет-преобразования $W(a, b)$ есть разложение сигнала по семейству $\psi((t-b)/a)$, образованному из единственной функции $\psi(t)$ с помощью переносов b во времени и растяжений a также во времени. Вейвлет-преобразование представляет собой как бы непрерывный банк оконных преобразований Фурье с различными окнами для каждой частоты.

Таким образом, базисные функции оконного преобразования Фурье имеют одно и то же разрешение по времени и частоте $(z(t), z^*(\omega))$ для всех точек плоскости преобразования, в то время, как базисные функции вейвлет-преобразования имеют уменьшающееся с масштабом a разрешение по времени $\psi(t/a)$ и увеличивающееся с масштабом a разрешение по частоте $\psi^*(a\omega)$. Это свойство вейвлет-преобразования дает ему большое преимущество при анализе сигналов, так как высокочастотные характеристики обычно хорошо локализованы, а медленно меняющиеся характеристики требуют хорошего низкочастотного разрешения.

Легко видеть, что описанные преимущества вейвлетов окажутся чрезвычайно полезными и при решении уравнений.

1.2. Базисные функции вейвлет-преобразования

До сих пор термином «вейвлет» без определения обозначалась некая солитоноподобная функция, вводились связанные с нею понятия и описывались некоторые ее свойства. В литературе мы не встретили общепринятого удачного определения вейвлета. Выпишем некоторые признаки вейвлета. Отметим, что большинство ограничений, накладываемых на вейвлет, связано с необходимостью иметь обратное преобразование (или реконструкционную формулу).

1.2.1. Признаки вейвлета. Для практического применения важно знать признаки, которыми обязательно должна обладать функция, чтобы быть вейвлетом; приведем их здесь, а также рассмотрим в качестве примеров некоторые хорошо известные функции и их соответствие этим необходимым признакам.

Локализация. Вейвлет-преобразование в отличие от преобразования Фурье использует локализованную базисную функцию. Вейвлет должен быть локализован и во временном и в частотном пространстве.

Нулевое среднее

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Часто для приложений оказывается необходимым, чтобы не только нулевой, но и все первые m моментов были равны нулю (вейвлет m -ого порядка)

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0.$$

Такие вейвлеты позволяют, игнорируя наиболее регулярные полиномиальные составляющие сигнала, анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка.

Ограниченность

$$\int |\psi(t)|^2 dt < \infty.$$

Оценка хорошей локализации и ограниченности может быть записана в виде $|\psi(t)| < 1/(1+|t|^n)$ или $|\psi^\wedge(\omega)| < 1/(1+|k-\omega_0|^n)$, здесь ω_0 - доминантная частота вейвлета, n должно быть возможно большим.

Самоподобие. Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования является его самоподобие: все вейвлеты семейства $\psi_{ab}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и базисный вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и переносов.

Продемонстрируем сказанное выше на конкретных примерах из [6,7]. Для сравнения среди приведенных функций есть вейвлеты (три последние примера) и функции, которые вейвлетами не являются (три первые примера). На рис. 2 приведены функции, зависящие от времени, (верхний ряд) и их фурье-образы (нижний ряд).

Хорошо локализованная в t -пространстве δ -функция не обладает этим свойством в k -пространстве (рис. 2, а). Хорошо локализованный в k -пространстве синус не локализован в t -пространстве (рис. 2, б). Функция Габора (рис. 2, в)

$$G(t) = \exp[i\Omega(t-t_0) - i\vartheta] \exp[-(t-t_0)^2/2\sigma^2] / [\sigma(2\pi)^{1/2}]$$

- модулированная функция Гаусса с четырьмя параметрами: сдвиг t_0 , стандартное (среднеквадратичное) отклонение σ , частота модуляции Ω и фазовый сдвиг ϑ . Разложение по функциям Габора является разложением по модулированным фрагментам синусоид. Длина фрагментов для всех частот постоянна, что дает различное число осцилляций для разных гармоник. То есть хорошо локализованные и в t - и в k -пространстве функции Габора не обладают свойством самоподобия.

НААР-вейвлет (формула (3), рис. 2, г) - пример ортогонального дискретного вейвлета, порождающего ортонормированный базис. Недостатками этого вейвлета являются негладкость - резкие границы в t -пространстве, вследствие чего возникают бесконечные (убывающие, как k^{-1}), «хвосты» в k -пространстве, а также несимметрия формы. Для некоторых приложений эти недостатки не существенны, а иногда односторонность вейвлета даже становится достоинством. Часто применяется похожий дискретный, но симметричный ФНАТ-вейвлет, более известный под названием «Французская шляпа» (French hat)

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \quad \psi^\wedge(k) = 3H(k) (\sin k/k - \sin 3k/3k),$$

где $H(k)$ - функция Хевисайда.

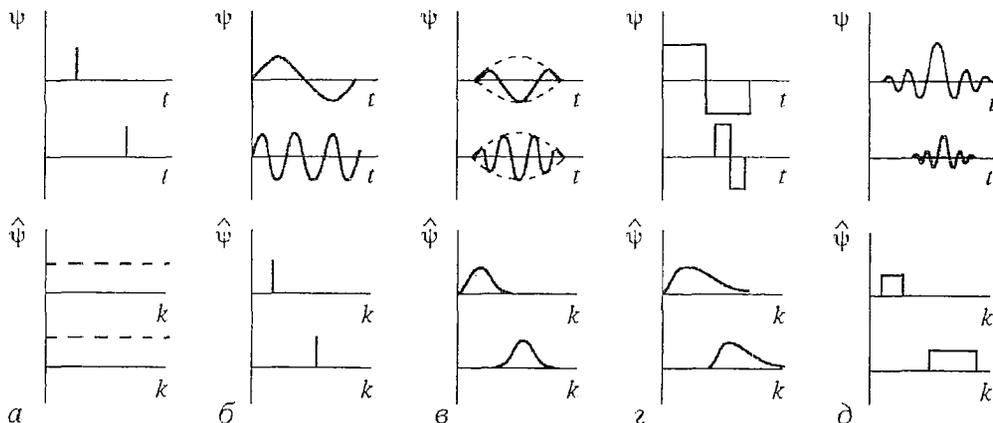


Рис. 2. Анализирующие функции (в зависимости от времени - верхний ряд, образы Фурье - нижний ряд) преобразований: а - Шеннона, б - Фурье, в - Габора; и вейвлет-преобразования: НААР-вейвлет (г) и ЛР-вейвлет (д)

На рис. 2, δ для примера показан LP-вейвлет (Littlewood, Paley). FHAT-вейвлет, нерегулярный во временном пространстве и недостаточно быстро спадающий в частотном, и LP-вейвлет, наоборот, имеющий резко очерченные границы в пространстве Фурье и плохо спадающий во временном пространстве, можно считать предельными случаями, между которыми находятся наиболее приемлемые вейвлеты.

1.2.2. Примеры вейвлетообразующих функций. Поскольку вейвлет-преобразование есть скалярное произведение анализирующего вейвлета и анализируемого сигнала, коэффициенты $W(a,b)$ содержат комбинированную информацию о вейвлете и сигнале (как и коэффициенты преобразования Фурье, которые содержат информацию о сигнале и синусоидальной волне). Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временном и в частотном пространстве, поэтому иногда с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала.

Если продолжить уже упоминавшуюся аналогию с «математическим микроскопом», то параметр сдвига b фиксирует точку фокусировки микроскопа, масштабный коэффициент a - увеличение и, наконец, выбором базисного вейвлета ψ определяются оптические качества микроскопа.

Вещественные базисы часто конструируются на основе производных функции Гаусса

$$\psi_m(t) = (-1)^m \partial_t^m [\exp(-|t|^2/2)], \quad \psi^*_m(k) = m(ik)^m \exp(-|k|^2/2),$$

здесь $\partial_t^m = \partial^m / \partial t^m$. Более высокие производные имеют больше нулевых моментов и позволяют извлечь информацию об особенностях более высокого порядка, содержащихся в сигнале.

На рис. 3, a , b показаны вейвлеты, полученные при $m=1$ и $m=2$, соответственно. Из-за их формы первый называют обычно WAVE-вейвлет, второй - MHAT-вейвлет, или «Мексиканская шляпа» (Mexican hat).

MHAT-вейвлет, имеющий узкий энергетический спектр и два нулевых момента, хорошо приспособлен для анализа сложных сигналов. Обобщенный на двумерный случай, MHAT-вейвлет часто используется для анализа изотропных полей. Если же производная берется лишь в одном направлении, получается неизотропный базис с хорошей угловой избирательностью [6]. Для построения такого базиса к масштабным преобразованиям и сдвигам базисного вейвлета необходимо добавить его вращение. При этом «математический микроскоп» приобретает еще и качества поляризатора с углом поляризации, пропорциональным углу поворота вейвлета.

На основе функции Гаусса строится также хорошо известный DOG-вейвлет (difference of Gaussians)

$$\psi(t) = \exp(-|t|^2/2) - 0.5 \exp(-|t|^2/8),$$

$$\psi^*(k) = (2\pi)^{-1/2} [\exp(-|k|^2/2) - \exp(-2|k|^2)].$$

Примеры комплексных вейвлетов приведены на рис. 3, β, γ (показаны их действительные составляющие). Наиболее часто используемый комплексный базис строится на основе хорошо локализованного в k - и в t -пространстве вейвлета Морле [1]

$$\psi(t) = \exp(ik_0 t) \exp(-t^2/2), \quad \psi^*(k) = H(k) \exp[-(k - k_0)^2/2]$$

- плоская волна, модулированная гауссианом единичной ширины. На рис. 3, β вейвлет Морле показан при $k_0=6$. С увеличением k_0 возрастает угловая избирательность базиса, но ухудшается пространственная.

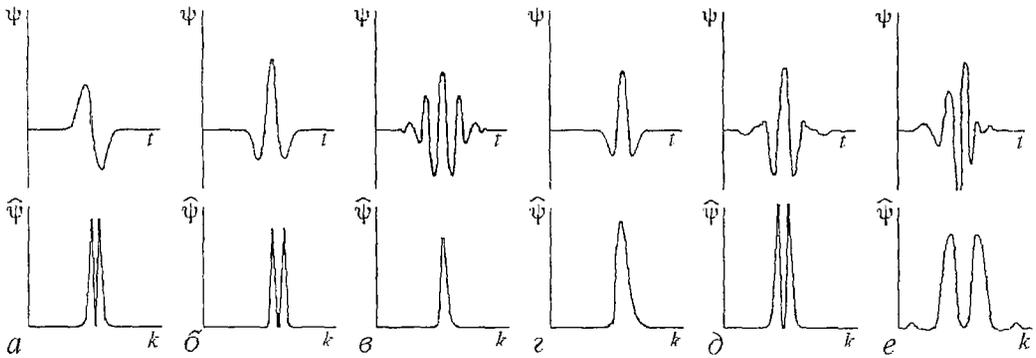


Рис. 3. Примеры часто используемых вейвлетов: а - WAVE, б - MHAТ, в - Morlet, г - Paul, д - LMB, е - Dobeschies. Показаны вейвлеты в зависимости от времени (верхний ряд) и их образы Фурье (нижний ряд)

Часто применяемый в квантовой механике вейвлет Пауля [8]

$$\psi(t) = \Gamma(m+1) im / (1-it)^{m+1}, \quad \psi^{\wedge}_m(k) = H(k) (k)^m \exp(-k)$$

показан на рис. 3, г при $m=4$. Чем больше m , тем больше нулевых моментов имеет вейвлет.

Представленные комплексные вейвлеты являются прогрессивными. Так называются вейвлеты, имеющие нулевые коэффициенты Фурье при отрицательных значениях волновых чисел. Они хорошо приспособлены для анализа сигналов, для которых важен принцип причинности, - эти вейвлеты сохраняют направление времени и не создают паразитической интерференции между прошлым и будущим.

Отметим, что при анализе комплексного одномерного сигнала или использовании комплексного анализирующего вейвлета в результате вейвлет-преобразования получаются двумерные массивы значений модуля коэффициентов и фазы $W(a,b) = |W(a,b)| \exp(i\Phi(a,b))$.

На рис.3,д,е приведены примеры вейвлетов, которые часто служат основой для построения ортогональных дискретных базисов типа (1) с помощью процедуры Малла [9]: LMB-вейвлет (Lemarie, Meyer, Battle) [10,11] и один из вейвлетов Добечи [5]. Это би-ортогональные вейвлеты, имеющие пару (двойника), необходимую для получения реконструкционной формулы. В цитированных работах представлены другие примеры таких вейвлетов и способы их конструирования.

1.3. Свойства и возможности вейвлет-преобразования

В отличие от одномерного преобразования Фурье, дающего также одномерную информацию об относительном вкладе (амплитудах) разных временных масштабов (частот), результатом вейвлет-преобразования одномерного ряда является двумерный массив амплитуд вейвлет-преобразования - значений коэффициентов $W(a,b)$. Распределение этих значений в пространстве $(a,b) =$ (временной масштаб, временная локализация) дает информацию об эволюции относительного вклада структур разного масштаба во времени и называется (по аналогии со спектром амплитуд или коэффициентов преобразования Фурье) спектром коэффициентов вейвлет-преобразования, частотно- или масштабно-временным спектром или вейвлет-спектром.

В литературе уже принято спектр Фурье называть single spectrum, в отличие от вейвлет-спектра - time-scale spectrum, или wavelet spectrum.

1.3.1. Способы представления результатов. Спектр $W(a,b)$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации этой информации могут быть различными. Кроме поверхностей,

часто представляют их проекции на плоскость (a,b) с изолиниями (изоуровнями) или теневые картины, позволяющие проследить изменение амплитуд вейвлет-преобразования на разных масштабах и во времени, а также картины линий локальных экстремумов этих поверхностей (так называемый «skeleton»), четко выявляющие структуру анализируемого процесса. Термин «скелет» или «скелетон» хорошо отражает смысл картин линий локальных экстремумов и мы часто будем использовать его для краткости.

В тех случаях, когда необходимо показать очень широкий диапазон масштабов, предпочтительнее визуализация результатов в координатах $(\log a, b)$.

Продемонстрируем сказанное на примере преобразования конкретного сигнала, не касаясь интерпретации результатов анализа. На рис. 4, а представлена зависимость интенсивности глобального тропического циклогенеза от времени в период с 1983 по 1992 год; ряд составлен из значений количества тайфунов в тропической зоне Земли в сутки, длина ряда равна 3654 суткам. Результаты анализа частично опубликованы в [12]. На рис. 4,б,в показаны картина значений коэффициентов $W(a,b)$ и картина значений плотности энергии сигнала $E_w(a,b) = W^2(a,b)$ (см.п. 1.3.3.) в проекциях на плоскость (a,b) : по оси абсцисс b отложено время, по оси ординат a - временной масштаб, меняющийся от недели до полутора лет (масштаб линейно растет вниз). В вычислениях использовался МНАТ-вейвлет. На рис.4, б светлые области соответствуют положительным, а темные - отрицательным значениям $W(a,b)$, оттенками серого цвета в каждой из областей выделены диапазоны значений $W(a,b)$. На рис. 4, в светлые области соответствуют большим значениям плотности энергии $E_w(a,b)$, темные - меньшим.

Значение амплитуды вейвлет-преобразования в точке (a_0, b_0) тем больше, чем выше корреляция между вейвлетом данного масштаба и поведением сигнала в окрестности $t=b_0$. Обе картины демонстрируют, что процесс составляют компоненты разных масштабов и что он нестационарен - экстремумы $W(a,b)$ наблюдаются на разных масштабах, интенсивность их меняется и со временем и с масштабом. На масштабах полгода-год процесс почти периодический, годовой ход отчетливо прослеживается на обеих картинах. Пересоединения максимумов на крупных масштабах могут говорить о нелинейности процесса на масштабах более года (нелокальные взаимодействия являются одним из характерных свойств нелинейных систем).

Процесс заметно усложняется на масштабах менее полугода. Для иллюстрации этого на рис. 4, г, д в другом масштабе для небольшого фрагмента, выделенного на рис. 4, б рамкой, показаны картина значений плотности энергии $E_w(a,b)$ и картина линий локальных экстремумов - линий, от масштаба к масштабу соединяющих экстремумы каждой поверхности («холма» или «впадины») отдельно. Многие авторы полагают, что скелетон не только четко и без лишних деталей визуализирует структуру анализируемого процесса, но содержит всю информацию о нем. Темные линии на рисунке отмечают положение максимумов $W(a,b)$ - вершин «холмов», более светлые пунктирные линии отмечают положение минимумов $W(a,b)$ - дно «впадин».

На рис. 4, г, д можно подробно рассмотреть мелкомасштабные детали процесса: в верхней части картины есть эволюционирующие частоты, видны диапазоны локальной периодичности процесса на разных масштабах, линии локальных экстремумов четко обозначают годовую и полугодовую периодичности (в нижней части картины), на некоторых масштабах (в верхней и средней части картины) они образуют «вилочки», характерные для бифуркаций удвоения периода.

Мы уже говорили, что вейвлет-преобразование разлагает анализируемый процесс на составляющие его волны, компоненты разного масштаба и, кроме того, дает «локализованную» во времени информацию о процессе. Горизонтальное сечение показанных на рис. 4 картин при заданном масштабе a покажет изменение компоненты выбранного масштаба со временем. Вертикальное сечение картин коэффициентов или картин плотности энергии в некоторый момент времени t_0 продемонстрирует поведение процесса в окрестности выбранного момента

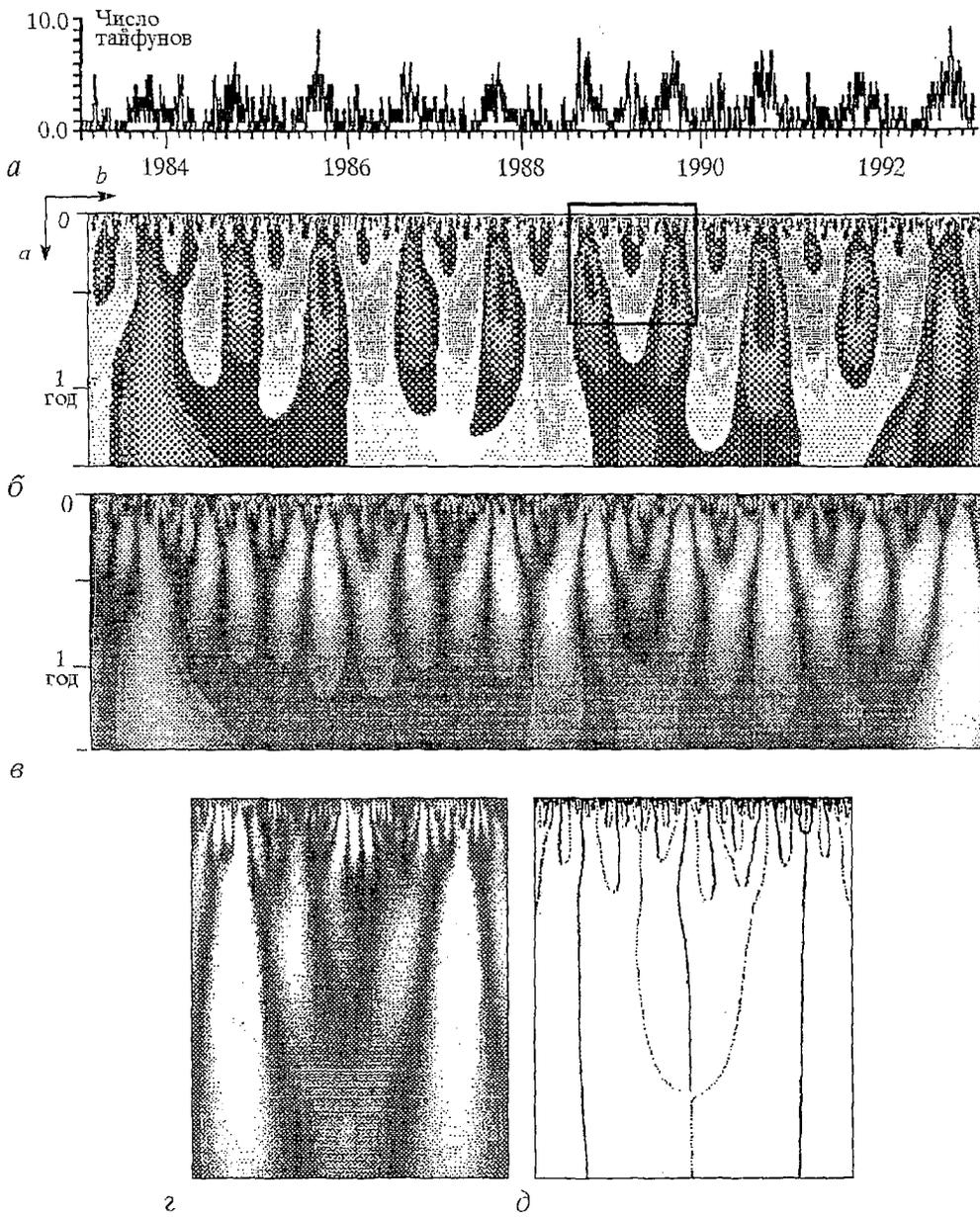


Рис. 4. Пример вейвлет-преобразования реального сигнала: а - анализируемый сигнал, б - картина коэффициентов $W(a,b)$, в - плотность энергии $E_W(a,b)$, з - плотность энергии (фрагмент), д - линии локальных экстремумов (фрагмент)

времени (можно определить наличие и порядок особенности, набор задействованных масштабов, см. анализ локальной регулярности в п.1.3.3).

Обратим внимание, что значение анализируемой функции в точке t_0 влияет на значения коэффициентов преобразования в растущих с масштабom временных диапазонах в так называемом угле влияния (рис. 5, а). Ясно, что угол влияния выглядит иначе, если масштаб меняется не линейно, а по иному закону (например, логарифмическому). В свою очередь, коэффициент $W(a,b)$ в точке (a_0, b_0) зависит от значений ряда из определяемого тем же углом влияния временного диапазона (диапазона интегрирования) около b_0 (рис. 5, б). Диапазон этот тем больше, чем больше масштаб a_0 , то есть высокочастотная (или мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых отрезков ряда, а низкочастотная - больших.

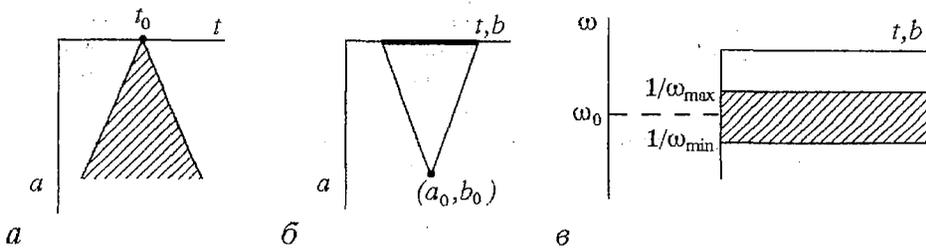


Рис. 5. Угол влияния (а), (б) и полоса влияния (в)

Максимальный угол влияния - угол достоверности (для примера он показан на рис. 5, б), отмечает область достоверности - область, вне которой коэффициенты $W(a, b)$ вычисляются уже по отрезкам, выходящим за границы ряда (как бы по дополненному ряду). Для уменьшения ошибок вычисления коэффициентов вне угла достоверности ряд часто дополняют с учетом его поведения (средним значением, известным временным ходом и т.п.).

Вейвлет-преобразование может быть записано также через образы Фурье сигнала $f^{\wedge}(\omega)$ и вейвлета $\psi^{\wedge}(\omega)$. Легко показать, что влияние компоненты Фурье $f^{\wedge}(\omega_0)$ испытывают коэффициенты $W(a, b)$, находящиеся в горизонтальной полосе $\omega_{\min} < a\omega_0 < \omega_{\max}$ (рис. 5, в); в свою очередь, на коэффициент $W(a, b)$ в точке (a_0, b_0) влияют все компоненты Фурье $f^{\wedge}(\omega)$ сигнала, для которых $\omega_{\min} < a_0\omega < \omega_{\max}$. Раствор угла влияния и ширина полосы влияния зависят от базисного вейвлета. Так, МНАТ-вейвлет (см. рис. 3, б) хорошо локализован во времени и имеет узкий энергетический спектр. Это удачное качество означает, в частности, что коэффициенты $W(a, b)$ зависят от малого интервала области частот вейвлета, то есть ширина полосы влияния невелика.

Вопросы, связанные с алгоритмами, остаются за рамками работы. Скажем лишь, что дискретное вейвлет-преобразование очень хорошо приспособлено для быстрого алгоритма, использующего широко применяемую процедуру быстрого преобразования Фурье [13]. Непрерывное преобразование выполняется, как правило, прямым интегрированием. Самая простая (и быстрая) проверка алгоритма заключается в вычислении вейвлет-преобразования функции Дирака: в результате на каждом масштабе должен быть получен анализирующий вейвлет. Проверить достаточную плотность дискретизации по масштабу можно, вычислив вейвлет-преобразование самого анализирующего вейвлета и убедившись в отсутствии каких-либо паразитных краевых деталей.

Для дальнейшего анализа коэффициентов нам понадобятся свойства вейвлет-преобразования. Все они следуют из изложенного уже в первом разделе материала.

1.3.2. Свойства вейвлет-преобразования. Коэффициенты вейвлет-преобразования содержат комбинированную информацию об анализирующем вейвлете и анализируемом сигнале. Несмотря на это, вейвлет-анализ позволяет получить и объективную информацию об анализируемом сигнале, так как некоторые свойства вейвлет-преобразования не зависят от выбора анализирующего вейвлета. Независимость от анализатора делает эти простые свойства преобразования очень важными.

Выпишем основные элементарные свойства вейвлет-преобразования функции $f(t)$. Будем использовать обозначения $[W_{\psi}f](a, b) = W[f] = W(a, b)$.

1⁰. *Линейность*

$$W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W[f_1] + \beta W[f_2] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b).$$

Отсюда, в частности, следует, что вейвлет-преобразование векторной функции есть вектор с компонентами, представляющими собой вейвлет-преобразование каждой из компонент анализируемого вектора в отдельности.

2⁰. *Инвариантность относительно сдвига*

$$W[f(t - b_0)] = W(a, b - b_0).$$

Из этого свойства следует коммутативность дифференцирования, в частности, $\partial_t W[f] = W[\partial_t f]$, здесь $\partial_t = \partial/\partial t$. Вместе с первым свойством это означает перестановочность и для производных векторного анализа.

3⁰. *Инвариантность относительно растяжения (сжатия)*

$$W[f(t/a_0)] = (1/a_0) W(a/a_0, b/a_0).$$

Это свойство позволяет, в частности, определять наличие и характер особенностей анализируемой функции (см. следующий пункт).

Кроме трех выписанных независимых от выбора анализирующего вейвлета элементарных свойств вейвлет-преобразование обладает еще несколькими. Наиболее важными и полезными из них, на наш взгляд, являются следующие.

1¹. *Частотно-временная локализация и наличие частотно-временного окна и угла влияния* (правильнее было бы говорить масштабно-временная локализация). Параметры частотно-временного окна выписаны в пункте 1.1.4.

2¹. *Дифференцирование*

$$W[\partial_t^m f] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_t^m [\bar{\psi}_{ab}(t)] dt.$$

Таким образом, чтобы проигнорировать, например, крупномасштабные полиномиальные составляющие и проанализировать высокого порядка особенности или мелкомасштабные вариации функции f , безразлично, дифференцировать ли нужное число раз анализирующий вейвлет или саму функцию. Очень полезное свойство, если учесть, что функция f часто представляет собой ряд чисел, а анализирующий вейвлет задан формулой.

3¹. *Для вейвлет-преобразования существует аналог теоремы Парсеваля и выполняется равенство*

$$\int f_1(t) \bar{f}_2(t) dt = C_{\psi}^{-1} \iint W_1(a,b) \bar{W}_2(a,b) da db / a^2,$$

откуда следует, что энергия сигнала может быть вычислена через амплитуды (коэффициенты) вейвлет-преобразования подобно тому, как она вычисляется через амплитуды преобразования Фурье $E = \int f^2(t) dt = \int |A(\omega) - iB(\omega)|^2 d\omega$.

Определения и свойства одномерного непрерывного вейвлет-преобразования обобщаются на многомерный и на дискретный случаи. Каждый из них имеет свои особенности. Здесь мы не будем о них говорить, поскольку для дальнейшего нам понадобится непрерывное вейвлет-преобразование одномерных функций.

1.3.3. Некоторые возможности вейвлет-анализа. Имея вейвлет-спектры, можно вычислить полезные характеристики изучаемого процесса и проанализировать многие его свойства. Опишем более подробно возможности анализа особенностей сигнала и его энергетических характеристик.

а) *Анализ локальной регулярности* [6,13]. Рассмотрим некоторые следствия свойства масштабной инвариантности 3⁰.

Если $f \in C^m(t_0)$, то есть анализируемая функция в точке t_0 непрерывно дифференцируема вплоть до производной порядка m , тогда коэффициенты ее вейвлет-преобразования при $t=t_0$ должны подчиняться неравенству $W(a,t_0) \leq a^{m+1} a^{1/2}$ при $a \rightarrow 0$.

Множитель $a^{1/2}$ возникает из-за того, что вследствие масштабной инвариантности 3⁰ скейлинговые свойства функции f необходимо изучать на основе L^1 - нормированных коэффициентов. Напомним, что L^1 - и L^2 - нормированные коэффициенты связаны простым соотношением $W(a,b) = a^{-1/2} W(a,b)$.

Если $f \in \Lambda^\alpha(t_0)$, то есть анализируемая функция принадлежит пространству холдеровских функций с показателем α (напомним, это означает, что f непрерывна, не обязательно дифференцируема в t_0 , но такая, что $|f(t+t_0) - f(t)| = c|t_0|^\alpha$, $\alpha < 1$,

$c = \text{const} > 0$), то коэффициенты ее вейвлет-преобразования при $t=t_0$ должны подчиняться соотношению $W(a, t_0) \sim c a^\alpha a^{1/2}$ при $a \rightarrow 0$.

Вейвлет-преобразование так устроено, что $W(a, t)$ - регулярная функция даже при нерегулярной $f(t)$. Вся информация о возможной особенности $f(t)$ (локализация t_0 , интенсивность c , показатель α) заключена в асимптотическом поведении коэффициентов $W(a, t_0)$ при малых a . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, тогда f имеет особенность в t_0 и показатель сингулярности α определяется наклоном $\log|W(a, t_0)|$ к $\log a$. Если они, напротив, близки к нулю в окрестности t_0 на малых масштабах, тогда f в точке t_0 регулярна.

Описанное свойство часто и с успехом используется при анализе фрактальных и мультифрактальных сигналов [14, 15]. Типичным свойством фрактальных множеств является их асимптотическое самоподобие, так, разглядывая f вблизи точки t_0 с разным увеличением, мы на разных масштабах увидим практически ее же: $f(\lambda t + \lambda t_0) - f(\lambda t) \sim \lambda^{\alpha(t_0)} (f(t + t_0) - f(t))$. Базис преобразования самоподобен; легко показать, что и коэффициенты преобразования масштабируются с тем же показателем, что и анализируемая функция: $W(\lambda a, t_0 + \lambda b) \sim \lambda^{\alpha(t_0)} W(a, t_0)$. Отсюда легко получить скейлинговый показатель $\alpha(t_0)$, который, как известно, тесно связан с фрактальной размерностью множества. Анализ мультифрактального множества позволяет определить спектр показателей и спектр размерностей.

Особо отметим, что анализ локальной регулярности в некотором смысле универсален - он не зависит от выбора анализирующего вейвлета.

б) *Энергетические характеристики* [6,16]. Рассмотрим некоторые следствия свойства \mathcal{Z}^1 .

Из существования для вейвлет-преобразования аналога равенства Парсевала следует, что в пространстве действительных функций полная энергия сигнала f может быть записана через амплитуды вейвлет-преобразования в виде

$$E_f = \int f^2(t) dt = C_\Psi^{-1} \iint W^2(a, b) da db / a^2.$$

Плотность энергии сигнала $E_W(a, b) = W^2(a, b)$ характеризует энергетические уровни (уровни возбуждения) исследуемого сигнала $f(t)$ в пространстве $(a, b) = (\text{масштаб}, \text{время})$.

Локальный спектр энергии. Одним из основных отличий вейвлет-преобразования является возможность получать локализованные характеристики и изучать локальные свойства процессов. Как ни парадоксально звучат слова «локальный энергетический спектр», однако, природа вейвлет-преобразования такова, что термин имеет право на существование. Поясним сказанное.

Зная плотность энергии $E_W(a, b)$, можно с помощью окна определить локальную плотность энергии в точке b_0 (или t_0)

$$E_\xi(a, t_0) = \int E_W(a, b) \xi((b - t_0)/a) db.$$

Оконная функция ξ «поддерживает» диапазон около t_0 и удовлетворяет равенству $\int \xi(b) db = 1$. Если в качестве ξ выбрать функцию Дирака, то локальный спектр энергии примет вид

$$E_\delta(a, t_0) = W^2(a, t_0).$$

Эта характеристика позволяет проанализировать временную динамику передачи энергии процесса по масштабам - обмен энергией между составляющими процесс компонентами разного масштаба в любой заданный момент времени.

Глобальный спектр энергии. Полная энергия распределена по масштабам в соответствии с глобальным спектром энергии коэффициентов вейвлет-преобразования

$$E_w(a) = \int W^2(a,b) db. \quad (8)$$

Его называют также скалограммой (scalogram) или дисперсией вейвлет-преобразования (wavelet variance).

Выразив спектр энергии $E_w(a)$ через спектр энергии сигнала в пространстве Фурье $E_F(\omega) = |f^\wedge(\omega)|^2$

$$E_w(a) = \int E_F(\omega) |\psi^\wedge(a\omega)|^2 d\omega, \quad (9)$$

можно видеть, что вейвлет-спектр энергии сигнала соответствует спектру Фурье энергии сигнала, сглаженному на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета.

Энергия сигнала определяется через спектр энергии равенством

$$E_f = C_\psi^{-1} \int E_w(a) da/a^2.$$

Таким образом, E_f пропорциональна площади под кривой $E_w(a)/a^2$, а скалограмма отражает относительный вклад различных масштабов в полную энергию и выявляет распределение энергий процесса по масштабам.

Анализируемая функция имеет конечную энергию, а анализирующий вейвлет - нулевое среднее значение, вследствие чего спектр энергии $E_w(a)$ должен стремиться к нулю на обоих концах шкалы масштабов и должен иметь по крайней мере один максимум. Положение подобных максимумов (пиков) спектра Фурье $E_F(\omega)$ привычно связывается с частотами и соответствующими характерными модами анализируемого сигнала, несущими в себе основную энергию процесса. Максимумы энергетического спектра $E_w(a)$ интерпретируются аналогично - они определяют основной вклад в полную энергию E_f .

Покажем на простом примере связь между выявленным в результате вейвлет-преобразования масштабом и характерным масштабом, полученным из спектра Фурье. Пусть $f(t) = \sin(\omega_0 t) = \sin(2\pi t/T_0)$ - обыкновенный синус; его вейвлет-преобразование, записанное через образы Фурье (см., например, формулу (7)), $W(a,b) = [\exp(i\omega_0 b)\psi^\wedge(a\omega_0) + \exp(-i\omega_0 b)\psi^\wedge(-a\omega_0)]/i2$, а спектр $E_w(a) = |\psi^\wedge(a\omega_0)|^2$. Необходимым и достаточным условием наличия пика на масштабе $a=a_0$ является равенство нулю производной $d\psi^\wedge(a\omega_0)/da$ при $a=a_0$. Условие выполняется при $a_0\omega_0 = \omega_\psi$, где ω_ψ - зависящая от вейвлета ψ константа с размерностью частоты. Для многих вейвлетов константа ω_ψ вычисляется аналитически; так, для HAAR- и МНАТ-вейвлетов она равна 1.484π и $2^{1/2}$, соответственно.

На практике, если скалограмма $E_w(a)$ имеет пик при $a=a_0$, характерный временной масштаб определяется как $d=T_0/2=a_0\pi/\omega_\psi$. Множитель $1/2$ появился из-за того, что определяется не период, а масштаб элементарного события, детали. В этом смысле синус, например, имеет две элементарные детали на периоде.

Константа ω_ψ получена для простой функции. Распространяя результат на произвольный сигнал, даже негармонический, мы предполагаем, что положение максимума $E_w(a)$, то есть выявленный масштаб можно интерпретировать как среднюю продолжительность элементарного события (событий), вносящего основной вклад в энергию анализируемого процесса. Этот факт проверен на многих известных сигналах с разными вейвлетами и признан очень хорошим приближением (см., например, [16]).

2. Примеры применения вейвлет-преобразования

В разделе 2.1 мы продемонстрируем возможности вейвлетов в выявлении различных характерных особенностей сигналов на примерах применения вейвлет-

преобразования к некоторым модельным сигналам, построенным на основе функций с хорошо известными свойствами (см. также [17]). В разделе 2.2 представлены результаты анализа реальных данных - долговременных рядов наблюдений за изменениями некоторых геофизических параметров.

2.1. Модельные примеры

Для каждого примера приведен график анализируемого ряда. Коэффициенты $W(a,b)$ показаны в виде проекций на плоскость (a,b) (временной масштаб, время); по оси абсцисс отложено время, по оси ординат - временной масштаб (он линейно растет вниз). Как и на рис.4, б, светлые области соответствуют положительным, а темные - отрицательным значениям $W(a,b)$, оттенками серого цвета в каждой области выделены диапазоны значений $W(a,b)$. Картины линий локальных экстремумов или локальных максимумов представлены в тех же координатах.

Приведенные результаты получены с помощью МНАТ-вейвлета. Вычисления проводились в прямоугольной области значений параметров (a,b) . Ряды данных для этого продлевались; способ дополнения показан на графиках анализируемых функций. На картинах линий локальных максимумов показан треугольник достоверности, или максимальный угол влияния; его граница продолжается стрелочкой, если она совпадает с какой-нибудь линией максимумов.

2.1.1. Гармоническая функция. Вейвлет-преобразование с МНАТ-вейвлетом применялось к рядам синусоид

$$f(t) = \sin(2\pi t/T_1) + C\sin(2\pi t/T_2).$$

Результаты вейвлет-преобразования такой функции легко сравнить с тем, что дает привычное преобразование Фурье. Значения периодов T_1 , T_2 и постоянной C анализируемых сигналов приведены в таблице. В нее также занесены масштабы $D_1=T_1/2$, $D_2=T_2/2$, которые должны быть получены по коэффициентам вейвлет-преобразования, номер соответствующего рисунка и номер сигнала.

Таблица

Характеристики анализируемых гармонических функций

T_1	T_2	C	D_1	D_2	Номер рисунка	Номер сигнала
10	200	0.4	5.0	100	6	1
10	200	0.4	5.0	100	7	2
50	-	-	25.0	-	9	3
25	-	-	12.5	-	10	4
25	50	1.0	12.5	25.0	13	5
25	50	1.0	12.5	25.0	14	6
25	23	1.0	12.5	11.5	16	7

Сигнал 1. На рис. 6, а показан сигнал I - сумма синусоид с заметно отличающимися частотами (как видно из графика, ряд продолжен средним значением). На картине значений коэффициентов (рис. 6, б) легко различаются повторяющиеся детали в верхней части картины (при малых значениях масштаба a), являющиеся результатом резонанса высокочастотной составляющей сигнала с мелкомасштабными вейвлетами; а также три темные и две светлые области на крупных масштабах (положительные и отрицательные значения $W(a,b)$, соответственно), являющиеся результатом высокой корреляции между

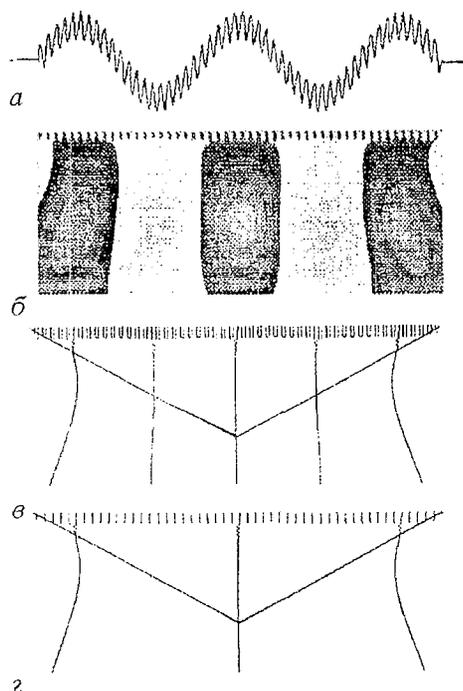


Рис. 6. Сигнал 1 (а) и результаты его вейвлет-преобразования: картины коэффициентов (б), линий локальных экстремумов (в) и линий локальных максимумов (г)

период (рис. 7, а), но даже в этом случае картина коэффициентов (рис. 7, б) позволяет говорить о наличии крупномасштабной составляющей в сигнале, а две крупномасштабные линии скелетона (рис. 7, в) позволяют говорить о наличии у нее двух экстремумов - максимума и минимума. Сдвоенные линии локальных экстремумов по краям отмечают граничные особенности (см. п.2.1.2). Отметим, что крупномасштабные детали, связанные с краевыми эффектами, малоинтенсивны. На рис. 7, б это отражено тем, что они имеют заметно меньше цветовых уровней, чем основные периодические детали.

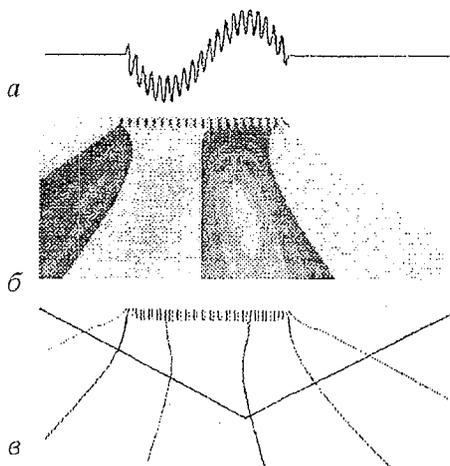


Рис. 7. Сигнал 2 (а), картины коэффициентов (б) и линий локальных экстремумов (в)

крупномасштабными вейвлетами и низкочастотной составляющей сигнала, представленной всего двумя с половиной периодами.

На рис. 6, в представлены линии локальных экстремумов; черные линии отмечают локальные максимумы, серые - локальные минимумы. На картине локальных максимумов (рис. 6, г) показаны только линии, относящиеся к положительным экстремумам. Обе картины выявляют периодическую структуру анализируемого сигнала и представляют собой масштабновременной скелет описываемого сигналом процесса. Линии, отмечающие положение локальных экстремумов коэффициентов вейвлет-преобразования, соответствуют экстремумам анализируемой функции - точкам смены знака ее производной.

В дальнейшем будет демонстрироваться лишь один из скелетонов. Если линии локальных минимумов не несут смысловой нагрузки и лишь усложняют рисунок, как для сигнала 1, будет представлена только картина линий локальных максимумов.

Сигнал 2. На длине сигнала уложился один крупномасштабный

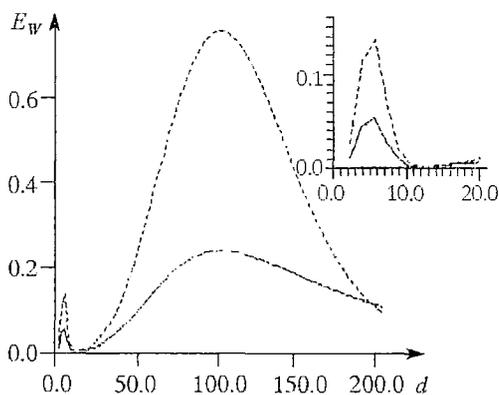


Рис. 8. Энергетические спектры $E_W(d)$ сигналов 1 (пунктир) и 2 (сплошная линия); в верхнем углу справа более крупно показана мелко-масштабная часть спектра

Энергетический спектр $E_w(a)$ позволяет в этом простом случае определить даже масштаб крупномасштабной составляющей сигнала, хотя она и представлена всего одним периодом. На рис. 8 показан спектр энергии $E_w(a)$; напомним, что для МНАТ-вейвлета характерный временной масштаб d связан с масштабом вейвлет-преобразования a соотношением $d=a\pi/2^{1/2}$. Сплошной линией на рисунке показан энергетический спектр сигнала 2, пунктирной - сигнала 1. В обоих случаях легко выделяются пики, соответствующие масштабам 5 и 100; мелкомасштабная часть спектра более подробно показана в правом верхнем углу рисунка. С помощью спектров Фурье в обоих случаях нам удастся выявить только высокочастотную составляющую.

Сигналы 3 и 4. На рис. 9 и 10 показаны картины коэффициентов и линий локальных максимумов, полученные в результате преобразования синусоид с периодами, равными 50 и 25, соответственно. Верхние части рисунков демонстрируют периодический характер сигнала. Темные и светлые области в нижней части рисунков связаны с граничными эффектами и очень малоинтенсивны (поэтому они имеют один цветовой уровень и волнистые линии локальных экстремумов).

Одинаковая длина линий локальных максимумов внутри треугольника достоверности и периодичность их появления указывают на единственную характерную частоту сигнала и постоянство периода. Об этом свидетельствует также своеобразная «пунктирная» структура скелетона в нижней части треугольника достоверности; в случае наличия нескольких частот (см. результаты для сигналов 6, 7, 8) она станет «интерференционной».

Такая своеобразная интерференционная (или пунктирная, как для сигналов 3 и 4) структура скелета возникает в тех случаях, когда длина ряда оказывается достаточной, чтобы внутри треугольника достоверности реализовались все присущие сигналу масштабы (это выполняется для всех рассмотренных сигналов, кроме первого), и из-за того, что коэффициенты $W(a,b)$ после реализации всех масштабов резко падают, становятся очень малыми и стремятся к нулю колебательным образом.

На рис. 11 показаны спектры $E_w(d)$ сигналов 3 и 4, имеющие характерные пики на масштабах 25 и 12.5, соответственно.

Сигналы 5 и 6 представляют собой разные комбинации сигналов 3 и 4: сигнал 5 составлен из последовательно включающихся сигналов 3 и 4, сигнал 6 представляет собой их сумму. Сигналы 5 и 6 интересны тем, что они неразличимы для преобразования Фурье - их спектры Фурье $E_F(\omega)$, показанные на рис.12,

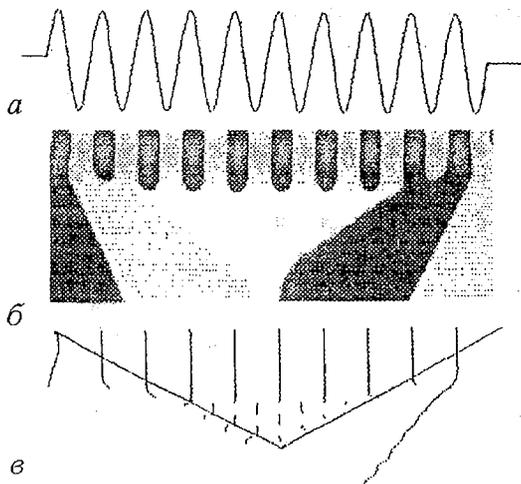


Рис. 9. Сигнал 3 (а), картины коэффициентов (б) и линий локальных максимумов (в)

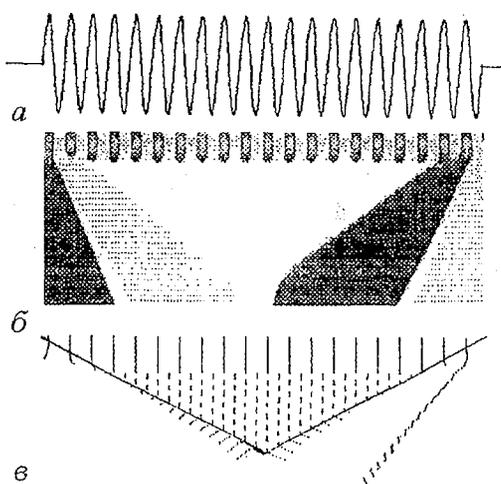


Рис. 10. Сигнал 4 - то же, что на рис.9

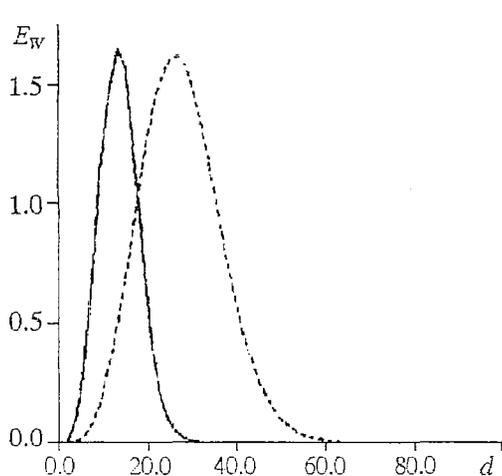


Рис. 11. Энергетические спектры $E_W(d)$ сигналов 3 (пунктир) и 4 (сплошная линия)

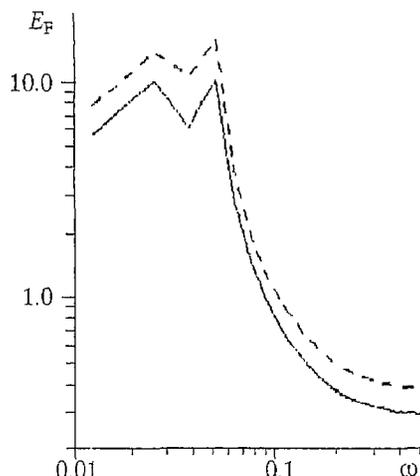


Рис. 12. Спектры Фурье $E_F(\omega)$ сигналов 5 (сплошная линия) и 6 (пунктир)

практически одинаковы. Для вейвлет-преобразования эти сигналы очень разные, что демонстрируют картины коэффициентов и линий локальных максимумов на рис.13 и 14.

Энергетические вейвлет-спектры этих сигналов, как и их спектры Фурье, очень похожи, поскольку получены сверткой по всей длине ряда. Они имеют широкие максимумы, поглощающие характерные масштабы; выделить оба масштаба удастся только по спектрам в разной нормировке, (рис.15, а, б, ср. с рис.11).

Заметим, что нестационарные свойства сигналов, например, эволюционирующие частоты (масштабы), хорошо выявляются с помощью локализованного спектрального анализа, когда при вычислении спектров $E_W(d)$ свертка коэффициентов вейвлет-преобразования ведется не по всей длине ряда, а по его отрезкам.

Сигнал 7. На рис. 16 представлены результаты для сигнала, представляющего собой сумму двух синусоид с очень близкими частотами; наличие второй частоты проявляется лишь наклоненными линиями локальных максимумов. Подобные наклоны могут появиться и в результате низкочастотной модуляции, однако, в таком случае не было бы характерной интерференционной картины скелетона, говорящей о реализации всех масштабов, присутствующих в сигнале.

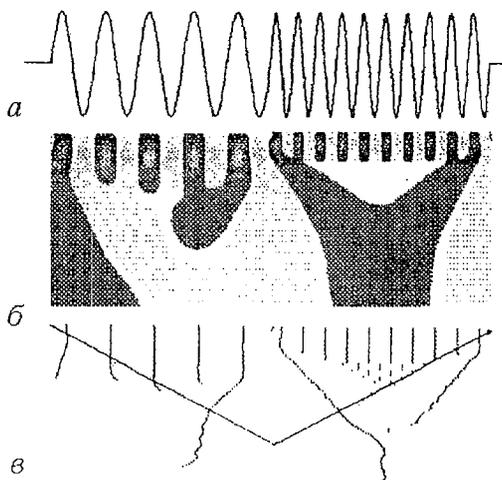


Рис. 13. Сигнал 5 (а), картины коэффициентов (б) и линий локальных максимумов (в)

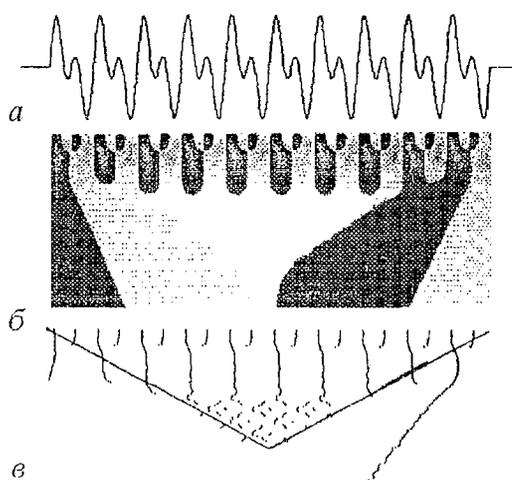


Рис. 14. Сигнал 6 - то же, что на рис.13

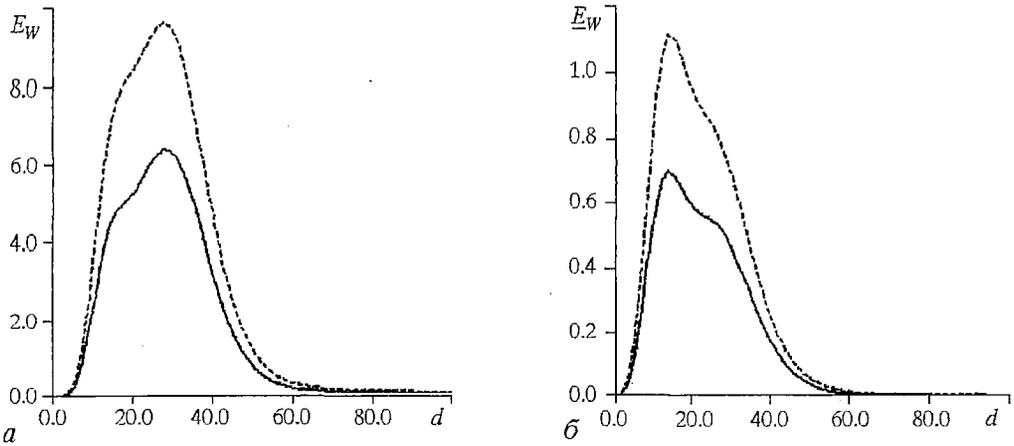


Рис. 15. Энергетические спектры вейвлет-преобразования сигналов 5 (сплошная линия) и 6 (пунктир) в разной нормировке: а - $E_W(d)$; б - $\underline{E}_W(d)$

Значения характерных масштабов 11.5 и 12.5 определяются положением пиков энергетических спектров в разной нормировке. На рис. 17 спектр $\underline{E}_W(d)$ нанесен сплошной линией, $E_W(d)$ - пунктиром.

2.1.2. Сигнал с особенностью. В сигналах часто встречаются изолированные особенности типа импульса, ступеньки, степенные особенности и т.п. Это могут быть как присущие описываемому сигналом процессу детали, так и паразитные детали, например, сбой аппаратуры. Преобразование Фурье сигнала, регулярного везде, за исключением одной сбойной точки, несет информацию о ней во всех своих коэффициентах. Изолированные особенности практически не фильтруются, искажая спектр и реконструированный сигнал.

Вейвлет-преобразование применялось к сигналам с особенностями некоторых из перечисленных типов. На рис. 18 кроме сигналов представлены картины линий локальных экстремумов (они более характерны) и, схематически, несколько линий уровня значений коэффициентов $W(a,b)$. Сплошные линии относятся к положительным, пунктирные - к отрицательным значениям.

Все точечные особенности, содержащиеся в сигналах, сопровождаются линиями локальных максимумов, исходящими из этих точек. Количество их определяется характером особенности сигнала и анализирующим вейвлетом.

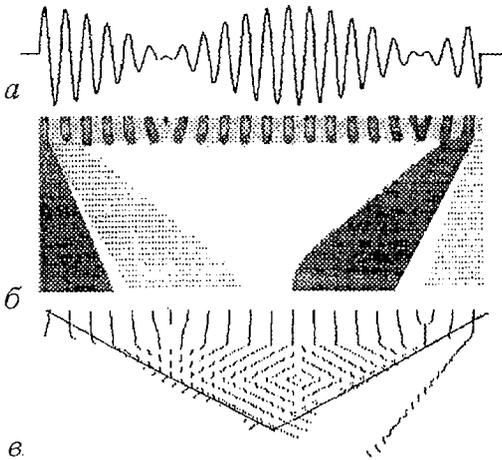


Рис. 16. Сигнал 7 (а), картины коэффициентов (б) и линий локальных максимумов (в)

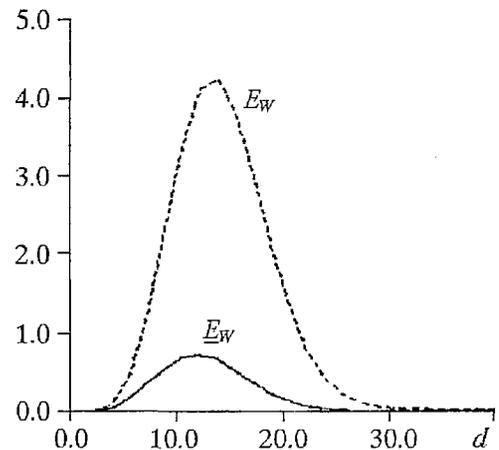


Рис. 17. Энергетические спектры вейвлет-преобразования сигнала 7 в разной нормировке

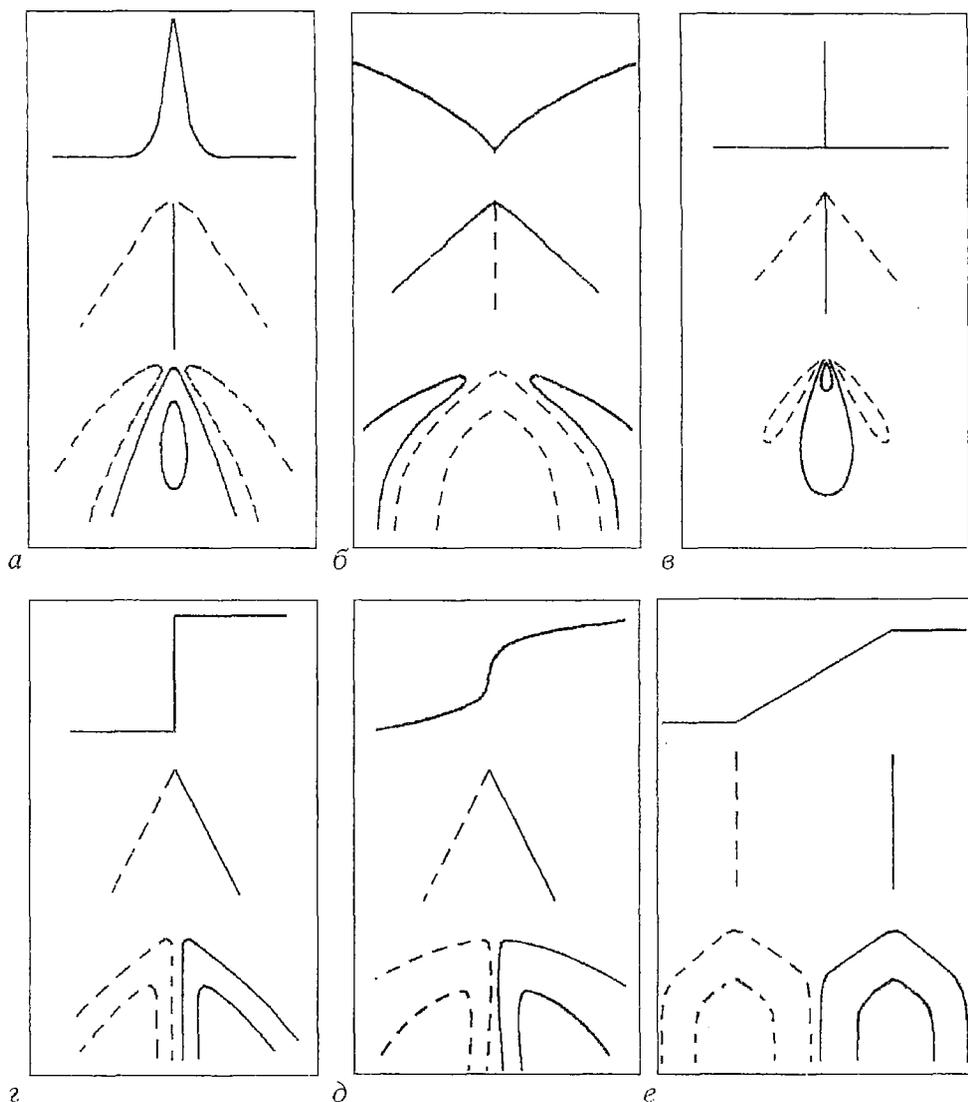


Рис. 18. Вейвлет-преобразование сигнала с особенностями: *a* - сигнал $|t^5|$, *б* - сигнал $t^{2/3}$, *в* - δ -функция, *г* - скачок сигнала, *д* - сигнал $t^{1/3}$, *е* - излом

Примеры предыдущего пункта показали, что смена знака производной анализируемой функции отмечается линией локальных экстремумов распределения $W(a,b)$.

Первые два примера, показанные на рис. 18, *a, б*, содержат особенности, при которых смена знака производной сопровождается разрывом функции (степенные особенности, вида $|t^5|$ и $t^{2/3}$, соответственно). В этом случае точка локализации особенности сигнала отмечена тремя линиями скелетона. Центральная линия является линией максимумов или минимумов в зависимости от того, имеет ли сигнал в этой точке максимум или минимум. Аналогично выглядят результаты вейвлет-преобразования δ -функции (рис. 18, *в*).

Особенности менее высокого порядка, такие, как перегиб функции $t^{1/3}$ (рис.18, *д*) или скачок (рис.18, *г*), отмечаются двумя линиями локальных экстремумов, излом (рис.18, *е*) - одной.

Таким образом, вейвлет-преобразование способно выявить положение особенности - коэффициенты вейвлет-преобразования гладкой функции малы и резко возрастают при появлении особенности, отмечая ее локализацию линиями

локальных экстремумов. Характер особенности в точке определяется из асимптотического поведения коэффициентов вейвлет-преобразования при стремлении масштаба к нулю (см. п.1.3.3). Например, значение коэффициентов вейвлет-преобразования δ -функции максимально при наименьшем значении масштаба, а затем резко падает, повторяя характер особенности. Изолированная особенность локальным образом влияет на коэффициенты вейвлет-преобразования и при необходимости может быть легко удалена из сигнала или скорректирована.

Приведенные результаты получены с помощью МНАТ-вейвлета, имеющего два нулевых момента. Вейвелеты, имеющие только один нулевой момент, неспособны различать особенности производных; распределение коэффициентов вейвлет-преобразования, полученное с помощью такого вейвлета, имеет меньше линий локальных экстремумов. Например, для первых трех сигналов отсутствует центральная линия экстремумов, особенность производной сигнала $t^{1/3}$ (рис. 18, д) не отмечена вообще, а скачок сигнала (рис. 18, г) отмечен одной линией экстремумов.

Чем выше порядок анализирующего вейвлета, чем больше нулевых моментов он имеет, тем лучше вейвлет-преобразование дифференцирует особенности.

Отметим, что особенности вейвлет-преобразования с вейвелетами разного порядка с успехом могут быть использованы для выявления наличия и характера наиболее крупномасштабной составляющей сигнала, так называемого тренда. Применяя к коэффициентам реконструкционную формулу и вычтя реконструированный сигнал из исходного, можно выделить ту самую крупномасштабную составляющую, которая «зануляется» вследствие наличия нулевых моментов у вейвлета: постоянная составляющая, линейный или полиномиальный тренд и т.п. Таким образом, устраняется элемент субъективизма, который почти всегда присутствует при определении тренда другими способами.

2.1.3. Фрактальное множество. Вейвлет-преобразование, с его иерархическим базисом, хорошо приспособлено для анализа каскадных процессов, турбулентных сигналов, фрактальных и мультифрактальных множеств, имеющих иерархическую природу.

Приведем пример анализа фрактального множества, построенного на основе однородного триадного канторовского ряда. Как известно, при построении первого поколения этого ряда отрезок делится на три части, средняя из которых выбрасывается; при построении второго поколения такая же процедура продельвается с двумя оставшимися отрезками и так на каждом последующем этапе до бесконечности. На рис.19, а показаны первые этапы построения ряда.

На основе получившегося множества - канторовской пыли - строится числовая последовательность, состоящая из нулей и единиц (нули соответствуют выбрасываемым при построении ряда частям отрезка).

На рис. 19, б, в показаны фрагменты картины коэффициентов и линий локальных максимумов. Они достаточно подробны, однако линейное изменение масштаба не позволяет охватить большой диапазон масштабов. Чтобы продемонстрировать общий характер процесса, на рис. 20, а скелетон показан в логарифмическом масштабе.

Картина коэффициентов показывает иерархическую структуру анализируемого множества. Еще более ясно она видна на картинах линий локальных максимумов. Скелетон выявляет не только иерархическую структуру анализируемого множества, но и способ построения фрактальной меры, на которой оно сформировано.

Каждый этап каскадного процесса, каждое дробление масштаба отмечено на картине локальных максимумов ветвлением, появлением характерной «вилочки» - линия, отмечающая положение локального максимума, раздваивается, расходясь на два независимых локальных максимума. Это неизменно повторяется с ростом масштаба, так как мера обладает свойством самоподобия и монофрактальна.

Известно, что фрактальная размерность или размерность подобия

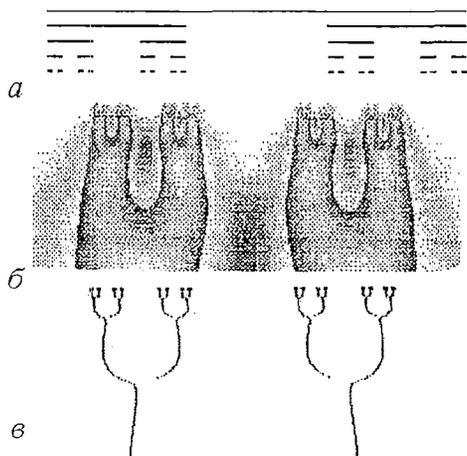


Рис. 19. Первые поколения однородного триадного канторовского ряда (а), фрагменты картин коэффициентов (б) и линий локальных максимумов (в)

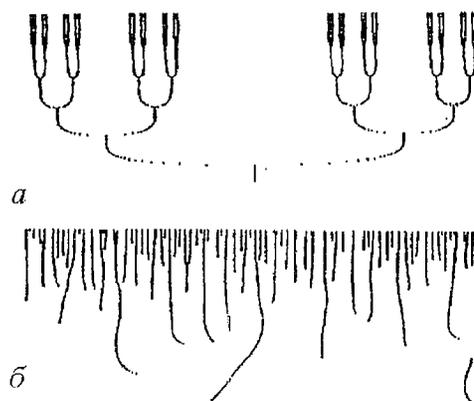


Рис. 20. Картины линий локальных максимумов триадного однородного канторовского ряда (а) и случайного процесса (б); масштаб меняется логарифмически

однородного канторовского ряда $D_f = \ln(m)/\ln(s)$, где m - скорость ветвления, s - масштабный множитель. В случае триадного ряда $D_f = \ln(2)/\ln(3)$. Аналогично размерность вычисляется по коэффициентам вейвлет-преобразования как предел отношения $\ln(N(a))/\ln(a)$ при стремлении масштаба к нулю, здесь $N(a)$ - число локальных максимумов. Чем более высокое поколение канторовского ряда используется, тем точнее определяется его размерность; для 10-11 поколения вычисленное по коэффициентам вейвлет-преобразования значение размерности практически совпадает с теоретическим.

Для сравнения на рис. 20, б представлены линии локальных максимумов случайного процесса. Видно, насколько отличаются даже качественно «древовидная» структура скелетона каскадного процесса и «травовидный» скелетон случайного (можно сравнить с периодическими скелетами гармонических функций и «кустами» линий, отмечающими особенности сигналов).

2.2. Вейвлет-анализ метеорологических рядов

Приведем примеры анализа реальных данных - долговременных рядов наблюдений за изменениями метеорологических параметров.

2.2.1. Южное Колебание - Эль-Ниньо (ЮКЭН). Южное Колебание - крупномасштабный атмосферный процесс, развивающийся над акваторией Тихого океана. Южное Колебание тесно связано с явлением Эль-Ниньо - резким потеплением океанических вод вблизи тихоокеанского побережья Центральной Америки. Этот глобальный процесс планетарного масштаба в системе атмосфера - океан оказывает заметное влияние на динамику всей климатической системы планеты. Меняются циркуляция Гадлея и Уокера и расположение областей активной конвекции в приэкваториальной зоне.

Процессы в тропической зоне, как предполагается, играют важную роль в формировании динамики климата в масштабах десятилетия и более. Опишем коротко это чрезвычайно интересное и важное явление ЮКЭН - своеобразные «диалоги ветра и моря».

El-Nino (испанское для Christ Child) - так издавна называли рыбаки Эквадора и Перу теплое течение в океане, появлявшееся чаще всего к Рождеству и существовавшее в течение некоторого времени. Теплое течение могло появиться в мае или даже в июне, однако, термин Эль-Ниньо за ним и связанными с ним явлениями с годами закрепился.

В 1920-х годах известный английский ученый Gilbert Walker работал в Индии над проблемой предсказания муссонов, приносящих иногда катастрофические ливни. Изучая, в частности, показания барометров, он обнаружил зависимость между данными, полученными на станциях в западной и восточной частях Тихого океана. Термин Южное Колебание был введен им для обозначения аномалий приземного атмосферного давления вдоль тропической зоны. Чередование знаков аномалий напоминает гигантские качели, перекачивающие массы воздуха между восточным и западным полушариями. Вблизи центров действия Южного Колебания противоположного знака находятся станции Таити (17° ю.ш., 150° з.д.) и Дарвин (12° ю.ш., 150° в.д.). Именно поэтому временной ряд разностей нормализованных аномалий давления этих станций представляет собой наиболее обоснованный индекс Южного Колебания $S(t)$.

Связь между этими двумя явлениями, Эль-Ниньо и Южное Колебание, была осознана гораздо позже - после сильного Эль-Ниньо в 1957 году. Уже долгое время общепринятой является интерпретация этой связи, основанная на гипотезе Виртки [18]. Изложим ее с иллюстрациями, взятыми из [19] и представленными на рис. 21, 22.

При нормальных условиях $S \approx 0$ северо-восточные и юго-восточные пассатные ветры нагоняют теплую воду в западную часть Тихого океана (см. рис. 21, а); уровень моря здесь на 40 см превышает уровень моря в восточной части. Сгон воды сопровождается апвеллингом - подъемом глубинной холодной богатой питательными веществами воды у тихоокеанского побережья Южной Америки. При $S > 0$ описанные явления выражены сильнее.

Когда индекс S уменьшается и становится отрицательным, градиент давления между восточной и западной частями Тихого океана заметно уменьшается. Не испытывая сопротивления ветра (см. рис. 21, б), теплая вода устремляется на восток, достигает берегов Южной Америки и затем движется к северу, к югу и в виде отраженной волны на запад. Область теплой воды быстро расширяется.

Повышение температуры поверхности в восточной и центральной частях Тихого океана меняет расположение областей конвекции в атмосфере. Обычно конвекция активна над Индонезией и в западной части Тихого океана (см. рис. 21, а, 22, а). С уменьшением индекса Южного Колебания в окрестностях австралийско-индонезийского центра действия наступает период очень сухой погоды, а в центральных и восточных частях Тихого океана, где дождей обычно не бывает, начинаются проливные дожди. Население прибрежных стран Южной Америки страдает от наводнений и шквалов; из-за прекращения прибрежного апвеллинга и выноса питательных веществ мигрирует или гибнет рыба, птицы, животные.

Меняется расположение областей конвекции в атмосфере не только над Тихим океаном, но и во всей приэкваториальной зоне. Сухая погода приходит на западные побережья Африки и Южной Америки, где обычно выпадает нормальное

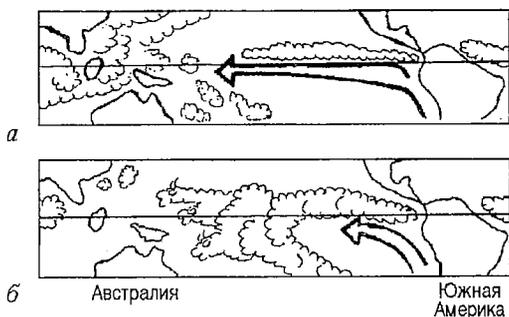


Рис. 21. Схематическое распределение дождевых зон над тропической частью Тихого океана при $S \geq 0$ (а) и $S \leq 0$ (б); доминирующий приповерхностный ветер показан стрелкой, дождевые зоны - облаками



Рис. 22. Структура атмосферной циркуляции и расположение областей повышенной конвекции в приэкваториальной зоне при $S \geq 0$ (а) и $S \leq 0$ (б); направление циркуляции показано стрелочками, зоны повышенной конвекции - облаками

количество осадков (см. рис. 22, а, б). Наблюдается смещение путей распространения тропических циклонов, так в Атлантике при Эль-Ниньо заметно уменьшается число дней с тропическими циклонами.

Необычное расположение областей повышенной конвекции при Эль-Ниньо возмущает атмосферную циркуляцию не только в приэкваториальной зоне, но и на всем земном шаре. Связанные с этим аномалии погоды обнаруживаются в зонах умеренных широт. Так, сильное Эль-Ниньо 1982-1983 годов привело к тому, что зимой 1982/83 г. с Северной Атлантики через Скандинавию двигались на восток необычайно интенсивные циклоны. Напомним, что вызванные ими штормы размыли Куршскую косу. Многие природные явления, происходящие во время действия Эль-Ниньо имеют тяжелые экологические и экономические последствия.

Неудивительно, что интереснейший процесс ЮКЭН и его последствия являются предметом неугасающего уже многие годы внимания исследователей. Последнее десятилетие было посвящено его пристальному изучению. Получены новые данные, интерпретация связи Южного Колебания с Эль-Ниньо, основанная на гипотезе Виртки претерпела некоторые изменения. Выяснилось, что периодичность и сценарии ЮКЭН заметно меняются во времени. Так, аномалия поверхностной температуры может мигрировать не только на восток, но и на запад; пятно теплой воды может не достигать берегов Эквадора и Перу, а ограничиваться центральной частью Тихого океана и т.п.

Явлениям Эль-Ниньо и Южное Колебание посвящено много публикаций, однако, многие детали изучены недостаточно, особенно на масштабах более десятилетий и менее месяцев.

Объектом анализа являются следующие временные ряды: данные, свидетельствующие о динамике Эль-Ниньо за последние 500 лет из статьи [20], среднемесячные значения индекса Южного Колебания $C(t)$ за период с 1882 по 1990 год из [21] и суточные значения индекса $C(t)$ за период с 1981 по 1990 год, полученные сотрудниками проф. Д.М. Сонечкина (Гидрометеоцентр); частично результаты анализа динамики индекса Южного Колебания опубликованы в работе [22].

2.2.2. 500 лет из жизни Эль-Ниньо. Интерес к истории ЮКЭН определяется изложенными выше причинами, а также тем, что частота процесса Южное Колебание - Эль-Ниньо иногда ассоциируется с глобальным потеплением климата [19]. Существуют многочисленные попытки реконструкции более чем тысячелетней истории ЮКЭН. Данные об аномалиях давления и поверхностной температуры охватывают чуть более столетия. При реконструкции используются косвенные свидетельства, которые могут говорить о событиях Эль-Ниньо. Например, свидетельства о засухах и наводнениях, состоянии снега и льда на горных вершинах, составе ископаемой микрофлоры, скорости роста скелета кораллов, кольцах роста деревьев и др.

Наиболее достоверными нам представляются данные из [20] о частоте событий Эль-Ниньо за последние 500 лет. Данные основаны на свидетельствах о количестве тайфунов в Южном Китае, холодных зимах в Восточной Азии, засухах в Австралии, наводнениях на Ниле и в Перу, причиной которых являются события Эль-Ниньо. За период с 1470 по 1987 год обнаружено 114 событий Эль-Ниньо со средним интервалом между ними около 4.5 лет. Близкой связи между частотой событий и глобальным потеплением автором [20] не замечено.

На рис. 23, а представлен график зависимости числа событий от времени. Для удобства показаны усредненные по десяти годам значения - за десятилетие происходило от 1 до 4 событий Эль-Ниньо. Картина коэффициентов вейвлет-преобразования неусредненных данных, состоящих из ряда нулей и единиц, показана на рис.23,б. Шкала времени здесь совпадает с осью абсцисс графика, шкала масштабов линейно растет вниз до 330 лет (чтобы показать все крупномасштабные детали). Распределение плотности энергии $E_{\psi}(a,b)$ позволяет более детально изучить характерные масштабы; на рис. 23, в оно показано для верхней трети диапазона масштабов - до 100 лет.

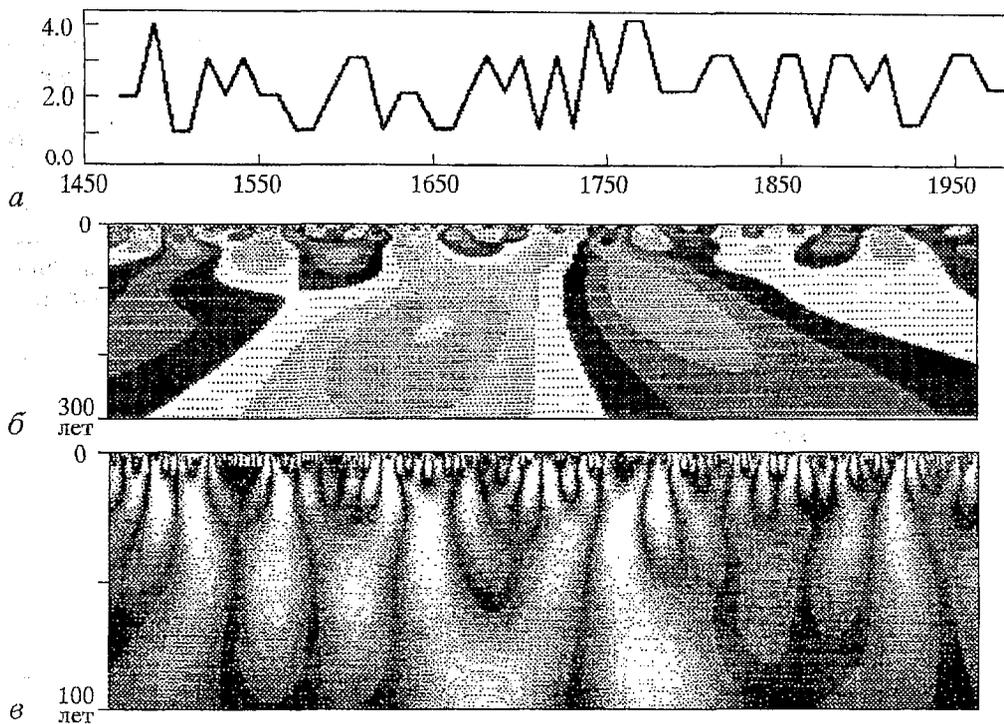


Рис. 23. Динамика количества событий Эль-Ниньо за 500 лет (а), картина коэффициентов (б) и распределения плотности энергии (в)

Показанное на рис. 24 распределение энергии по масштабам $E_w(a)$, полученное по коэффициентам вейвлет-преобразования (на графике выделяется диапазон в 9 лет), имеет три максимума - в диапазонах масштабов около 9-10, 37-40 и 150 лет.

Масштаб 9-10 лет обычно связывают с лунным циклом в 18.6 лет, который присутствует в динамике засух, наводнений и в ходе температуры в Северной Америке [24]. Масштаб 37-40 лет согласуется с 70-80 летним циклом Эль-Ниньо, обнаруженным в [20, 23, 25]; причины генерации этот цикла пока неясны. Попытки связать его с вулканической деятельностью [26] не представляются обоснованными. Третий характерный масштаб (около 150 лет - ему соответствуют три самые крупно-масштабные детали на рис. 23, б) находится на границе точности из-за недостаточной длины анализируемого ряда и может быть признан недостоверным.

Распределение плотности энергии $E_w(a,b)$ (см. рис. 23, в) позволяет более детально изучить характерные масштабы. Несмотря на явную нестационарность процесса, вблизи некоторых масштабов видна похожая на квазипериодическую структура. В начале и в конце анализируемого временного отрезка выделяются по три детали с масштабами 42-43 и 41-42 года, соответственно; в середине рисунка - несколько деталей с масштабами около 25-30 лет, которые формируют две крупномасштабные детали приблизительно в 91-93 года. Кроме того, видны несколько диапазонов локальных периодичностей с масштабами от 8 до 11 лет (и с еще меньшими).

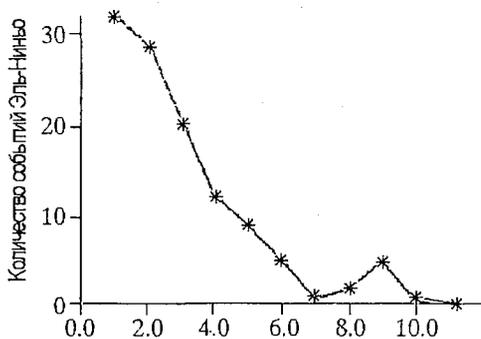


Рис. 24. Количество событий Эль-Ниньо с определенными промежутками лет между ними (ось абсцисс)

Таким образом, вейвлет-анализ, одна из сильных сторон которого состоит в возможности изучения нестационарных процессов, показал следующее. Существуют локальные периодичности с масштабами от 8 до 11 лет; необходимо дополнительное изучение вопроса, связаны ли они с лунным циклом в 18.6 лет или 22-летним циклом солнечной активности. О меньших масштабах при годичных данных говорить не имеет смысла. Крупномасштабная динамика не показывает устойчивого 70-80-летнего цикла. Существуют достаточно продолжительные эпохи повторяющейся длительности - около 25-30 лет, 40-42 года и, возможно, порядка 90 лет. О более длительных эпохах не позволяет говорить конечная длина ряда. О связи между частотой событий Эль-Ниньо и глобальным потеплением судить сложно, поскольку важна, повидимому, не только частота, но и длительность, и интенсивность событий.

При интерпретации результатов, необходимо помнить, что анализируемые данные реконструированы по косвенным свидетельствам и, кроме того, не содержат информации об интенсивности процесса (они отражают только наличие или отсутствие события Эль-Ниньо в течение года) и не содержат информации об анти-Эль-Ниньо, или Ла-Нинья, являющегося неотъемлемой частью процесса ЮКЭН. Гораздо больше и гораздо более достоверной информации содержат данные наблюдений за последнее столетие.

2.2.3. Среднемесячные значения индекса Южного Колебания. Напомним, что индекс $C(t)$ - это определенным образом нормированная разность атмосферного давления, измеряемого на уровне моря на станциях, расположенных вблизи центров действия Южного Колебания. Отрицательные значения этого индекса тесно связаны с событиями Эль-Ниньо, положительные, соответственно, с Ла-Нинья.

На рис. 25 представлено изменение среднемесячных значений индекса $C(t)$ за последние 108 лет (рис. 25, *a*) и картина коэффициентов вейвлет-преобразования (рис. 25, *b*) в таком диапазоне масштабов, чтобы охватить по возможности все крупномасштабные детали процесса, описываемые этим конечным рядом (масштаб линейно растет вниз до 97 лет). На рис. 25, *в* представлено распределение плотности энергии среднемесячных значений индекса $C(t)$ в более мелкомасштабной области (масштаб меняется до 10.5 лет).

Обращают на себя внимание два крупномасштабных минимума почти на границах ряда и ветвящееся «дерево» положительных экстремумов между ними. Ствол дерева и две его почти одновременно начинающиеся ветви выделяют два практически одинаковых периода - между Эль-Ниньо на границах дерева и в его середине - по 39.8 лет.

Распределение плотности энергии (рис. 25, *в*) показывает, что мелкомасштабная часть процесса демонстрирует наличие диапазонов локальных периодичностей и, кроме того, качественное отличие структуры процесса в отрезки времени, принадлежащие и не принадлежащие дереву. Внутренняя часть дерева содержит в основном детали с характерными масштабами около 30 и 12 месяцев, а внешние - около 18 месяцев. Возможно, этим объясняется отличие характера сценариев Эль-Ниньо до и после середины 70-х годов, которое отмечается многими авторами.

Два крупномасштабных минимума на границах дерева и один между его ветвями соответствуют интенсивным и продолжительным явлениям Эль-Ниньо 1899-1902, 1940-1941 и 1982-1983 годов. При сравнении с 500-летними данными убеждаешься, что эти сильнейшие за последнее столетие Эль-Ниньо являются вполне ординарными событиями. Несмотря на то, что 500-летние данные не содержат информации об интенсивности процесса и усреднены по 12 месяцам, детали картин хорошо согласуются. Можно считать, что 500-летняя хронология Эль-Ниньо динамику Южного Колебания на больших временах описывает.

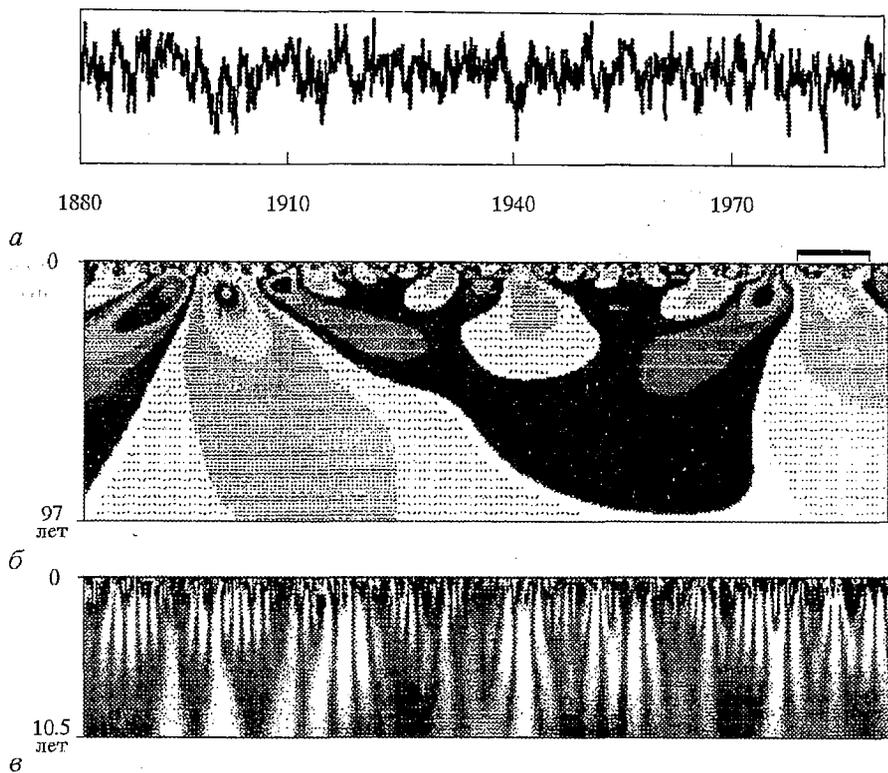


Рис. 25. Среднемесячные значения индекса Южного Колебания (а), картина коэффициентов (б) и распределения плотности энергии (в)

Более подробно ветви дерева показаны на рис. 26, а - здесь масштаб растёт до 29 лет. На рис. 26, б показаны соответствующие линии локальных максимумов. Картины коэффициентов и линий локальных максимумов демонстрируют

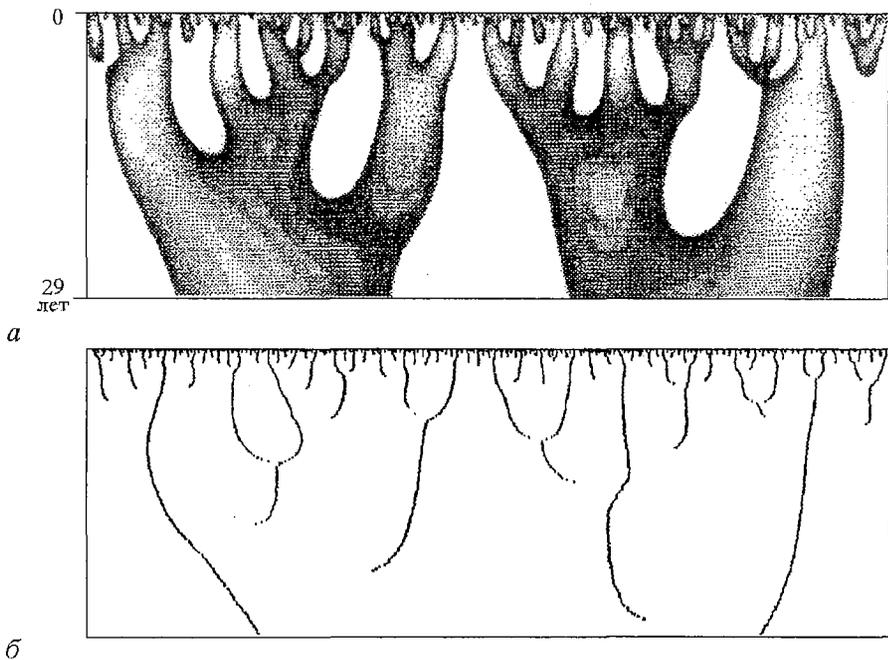


Рис. 26. Отмеченная на рис. 25, б часть картины коэффициентов (а) и соответствующая картина линий локальных максимумов (б)

непростую иерархическую структуру. Если в основании дерева мы отметили укрупнение масштаба в виде удвоения периода, то уже две главные ветви дерева ветвятся по-разному - левая на три, а правая на две ветви. На более мелких масштабах продолжается, как кажется, нерегулярное чередование удвоения и утроения линий локальных максимумов. Встречаются и ветвления типа водораздела, когда в главную линию локальных максимумов по мере роста масштаба вливаются последовательно несколько побочных.

Внешне похожие ветвления можно смоделировать канторовским множеством, когда из единичного отрезка (у нас это примерно 80 лет) удаляется средняя треть, из оставшихся частей также удаляются средние трети и т.д. (модель удвоения линий локальных максимумов); или удаляются две из пяти частей единичного отрезка и т.д. в каждом следующем поколении из каждой части (модель утроения).

В нашем случае процесс сложнее по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, встречаются чередующиеся нерегулярным образом ветвления двух (или даже более) типов - так устроены неоднородные или мультифрактальные множества. Во-вторых, в отличие от стандартной процедуры построения канторовского множества, где раз удаленная часть отрезка не восстанавливается ни в какой своей части, здесь продолжают ветвления линий локальных экстремумов обоих знаков, то есть в удаленном отрезке на следующих этапах как бы восстанавливаются некоторые его части. Будет ли результатом такого каскадного процесса канторовская пыль или иное фрактальное множество, зависит от совокупности правил ветвления, выяснить которые по ограниченному ряду данных затруднительно.

Таким образом, вейвлет-анализ ряда среднемесячных значений индекса Южного Колебания выявил автомодельную структуру данных и наличие процесса, подобного каскадному, на масштабах от месяца до нескольких десятилетий (до 70-80 лет). Является ли полученная древовидная картина линий локальных максимумов свидетельством того, что система демонстрирует каскад увеличений (удвоений, утроений и т.п.) периода, квазипериодическое или иное поведение, является ли продолжающееся на малых временных масштабах ветвление линий локальных экстремумов обоих знаков свидетельством наличия каскадного процесса на масштабах порядка месяца и менее, покажут дальнейшие исследования. Для этого необходимо, в частности, анализ рядов с более мелким разрешением.

2.2.4. Суточные значения индекса Южного Колебания. Анализируемый ряд суточных значений индекса $C(t)$ охватывает десятилетний отрезок времени (к сожалению, не принадлежащий дереву, описанному в предыдущем разделе). На рис. 27, в, г представлены ряд суточных значений индекса $C(t)$ и картина коэффициентов его вейвлет-преобразования (масштаб растет до 3 лет). Для сравнения на рисунке (рис. 27, а, б) представлены те же характеристики и для соответствующей части ряда среднемесячных значений (на рис. 25, б она помечена горизонтальной чертой).

Сравнение показывает, что среднемесячные значения очень хорошо описывают межгодовую изменчивость процесса и достаточно хорошо - годовой ход. Внутригодовая изменчивость гораздо лучше описывается подробным рядом, однако наиболее характерные детали прослеживаются на обеих картинах.

Интересно, что характер межгодовой изменчивости глобального тропического циклогенеза полностью совпадает с изменчивостью Южного Колебания - см. рис. 4, б, на котором представлены результаты анализа интенсивности циклогенеза в 1983-1992 годах.

Картина распределения плотности энергии индекса Южного Колебания (рис. 27, д, здесь масштаб меняется до 0.5 года) показывает ярко выраженный годовой ход и существенно нестационарную структуру процесса на меньших временных масштабах. Подробный анализ выявляет в этой нестационарной структуре диапазоны локальных периодичностей процесса с масштабами около

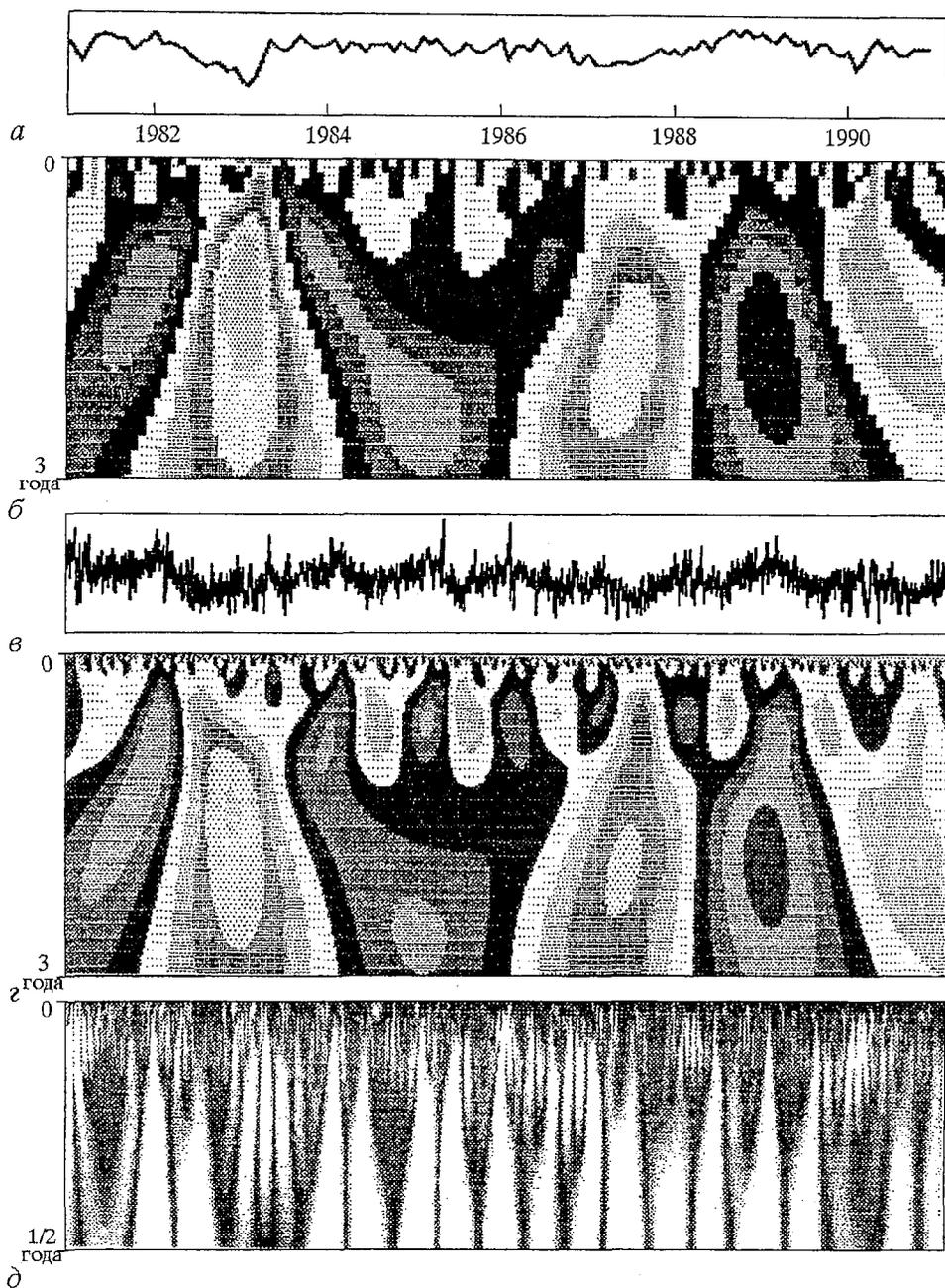


Рис. 27. Часть ряда среднемесячных значений $C(t)$ и картина коэффициентов (а,б); суточные значения индекса Южного Колебания за тот же период, картина коэффициентов и распределение плотности энергии (в-д)

недели (большинство максимумов наблюдается на масштабах примерно 5 и 9 дней), месяца (примерно 25 дней), 8-9 месяцев и около 2 лет (примерно 22 месяца).

Эти и описанные в двух предыдущих разделах масштабы можно обнаружить на спектрах мощности, представленных на рис. 28. Здесь показаны спектры мощности, рассчитанные по коэффициентам преобразования Фурье E_F (рис. 28, а) и вейвлет-преобразования E_W (рис. 28, б) рядов среднемесячных и суточных значений $C(t)$. Спектр мощности E_W (см. формулы (8) и (9)) соответствует сглаженному на каждом масштабе спектру Фурье. Оба спектра имеют довольно большие отрезки со степенным поведением.

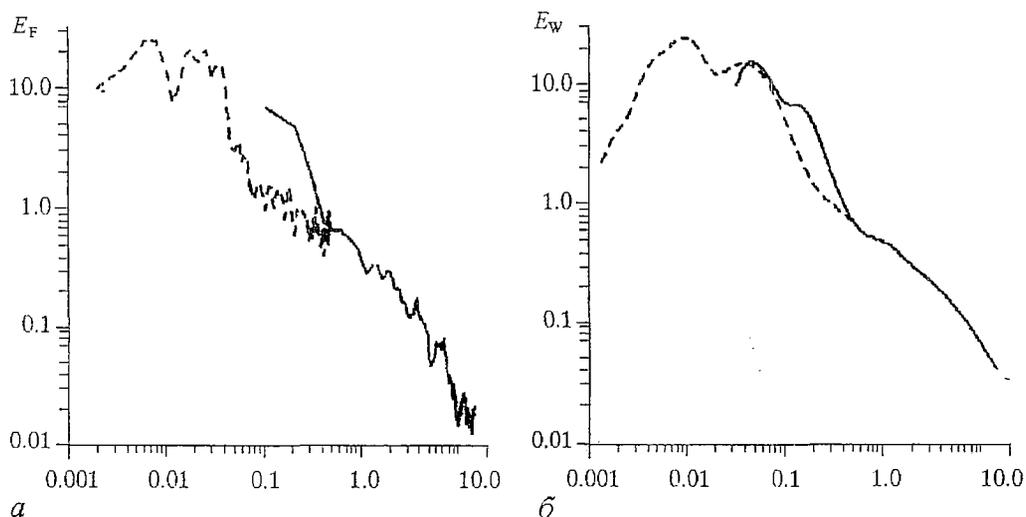


Рис. 28. Спектры мощности для среднемесячных (пунктир) и суточных (сплошные линии) данных

Таким образом, описываемый временным рядом $C(t)$ процесс, как и большинство процессов в природе, происходит в очень широком диапазоне временных масштабов. Спектры Фурье анализируемого ряда достаточно зашумлены, однако, на них выделяются пики вблизи выделенных характерных периодов (практически тех же, что и на спектрах мощности, полученных по коэффициентам вейвлет-преобразования). Картины распределения плотности энергии $E_W(a,b)$, представленные выше, демонстрируют сложное нестационарное поведение процесса, наличие периодических и непериодических составляющих на разных масштабах.

Такой процесс может быть композицией стохастической компоненты и нескольких регулярных компонент. Воспользуемся процедурой Такенса (теорией вложения нелинейных динамических систем [27]) для конструирования фазового пространства по временной реализации и построения возможного аттрактора.

Следуя Такенсу, сконструируем из $C(t)$ m -компонентные вектора состояния

$$X_i = \{x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_m(t_i)\}.$$

Здесь $x_k(t_i) = x[t_i + (k-1)\tau]$ и τ - временная задержка. Распределение векторов состояния составляет реконструированное фазовое пространство.

Двумерные проекции полученных траекторий показаны на рис. 29 для разных значений параметра временной задержки τ . Первые три портрета получены на основе ряда суточных значений, два последние - из ряда среднемесячных значений. Все траектории ограничены, однако не показывают явно периодической структуры. Характерные петельки видны на двух первых портретах, пропадают при задержке в один месяц и снова появляются при $\tau=3$ месяцам. В остальных портретах с задержкой, равной одному и трем месяцам, практически повторяют друг друга.

Последний из приведенных портретов построен на пределе или уж совсем за пределами возможностей длины имеющейся у нас реализации. Он отличается от предыдущих и интересен тем, что траектория этого аттрактора имеет три оси (можно представить себе динамическую систему с тремя стационарными решениями).

Ограниченность траекторий и не слишком большая размерность системы говорят о возможности построения модели процесса и хотя бы о принципиальной возможности предсказания его поведения по крайней мере на не слишком больших временах. Ясно, однако, что длина имеющихся реализаций не позволяет делать

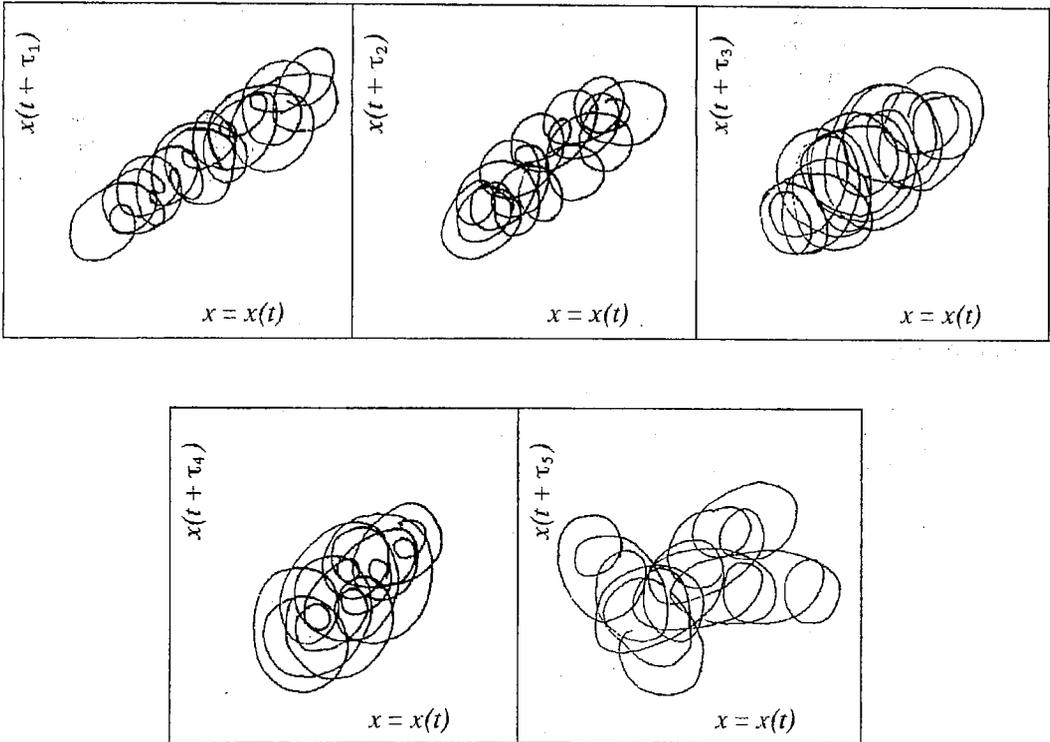


Рис. 29. Проекция фазового пространства, полученные из $C(t)$: $\tau_1=1$, $\tau_2=3$, $\tau_3=30$ дней; $\tau_4=3$, $\tau_5=12$ месяцев

категорических выводов, а форма последней проекции говорит по крайней мере о необходимости анализа более представительных данных.

Заключение

Итак, на простых модельных примерах и на примере анализа геофизических временных рядов продемонстрированы некоторые возможности вейвлет-преобразования, позволяющего наглядно показать структуру (квазипериодическую, автомодельную,...) анализируемого процесса и дающего информацию о его характерных масштабах.

По коэффициентам вейвлет-преобразования, а также по значениям локальных экстремумов можно вычислить размерность анализируемого множества или спектр размерностей, если оно мультифрактально.

Масштабно-временная развертка, получающаяся в результате вейвлет-преобразования сигнала, позволяет выявить не только осцилляции с хорошо фиксированным периодом, но и нестационарные осцилляции, локализованные периодичности и т.п.

Энергия (или дисперсия) коэффициентов вейвлет-преобразования $E_W(a)$ пропорциональна дисперсии анализируемых данных и дает распределение энергии процесса по масштабам. Возможность получения этой характеристики локально позволяет, например, при анализе турбулентных процессов не только получить набор характерных масштабов, но и объективно определить масштабы, связанные с когерентными структурами, и исследовать перемежаемость процесса.

Фильтрационные и реконструкционные свойства преобразования позволяют оперировать информацией (сглаживание, разложение на компоненты, свертка и т.п.) без потери значимых деталей. Разрывы непрерывности, скачки и другие

особенности, возникающие из-за вариаций измеряемой характеристики и сбоев или шума инструментов измерения, легко детектируются, локализируются и при необходимости могут быть устранены или скорректированы.

В заключение следует сказать, что вейвлет-преобразование представляется очень перспективным математическим аппаратом не только для задач, связанных с анализом сигналов различной природы, но и для решения уравнений, описывающих сложные нелинейные процессы с взаимодействиями в широких диапазонах масштабов.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ N 93-01-17342.

Библиографический список

1. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J.Math. Anal.1984. Vol. 15, № 4. P.723.
2. Wavelets / Ed. J.M.Combes, A. Grossmann, P. Tchamitchian. Springer-Verlag. Berlin, 1989. 386 p.
3. Wavelets and their applications / Eds. Coifman. Jones and Barlett Publ., 1991. 475 p.
4. Wavelet analysis and its applications, Vol.1. An introduction to wavelets. Charlts K. Chui. Vol.2. Wavelets: A tutorial in theory and applications. Academ.Press, Inc., San Diego, 1992. 237 p.
5. Daubechies I. Orthogonal bases of compactly supported wavelets // Comm.Pure Appl.Math. 1988. Vol. 41, № 7. P. 906.
6. Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis // IEEE Trans.Inform.Theory. 1990. Vol. 36. P. 961.
7. Daubechies I. Ten lectures on wavelets // CBMS Lecture Notes Series. SIAM. Philadelphia, 1991. 136 p.
8. Farge M. Wavelet transforms and their applications to turbulence // Annu.Rev.Fluid Mech. 1992. Vol. 24. P. 395.
9. Фрик П.Г. // Препринт. Пермь: ИМСС УрО РАН, 1992. 40 с.
10. Paul T. Function analitic on half-plane as quantum mechanical states // J.Math.Phys. 1984. Vol. 25, № 11. P. 136.
11. Mallat S. G. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans.Amer.Math.Soc. 1989. Vol. 315. P. 69.
12. Mallat S.G. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation // IEEE Trans.Patt. Anal.Mach.Int. 1989. Vol. 31(7). P. 674.
13. Lemarie P.G., Meyer Y. Ondelettes et bases hilbertinennes // Rev. Math. Ibero-Americana. 1986. Vol. 2. P. 1.
14. Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part 1. Lemarie functions // Commun.Math.Phys. 1987. Vol. 110. P. 607.
15. Астафьева Н.М., Покровская И.В., Шарков Е.А. Иерархическая структура глобального тропического циклогенеза // Исследования Земли из Космоса. 1994. № 2. С. 14.
16. Астафьева Н.М., Покровская И.В., Шарков Е.А. Масштабные свойства глобального тропического циклогенеза // Доклады РАН. 1994. Т. 337, № 4. С.85.
17. Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms // Comm.Pure Appl.Math. 1991. Vol. 44. P. 141.
18. Holschneider M. On wavelet transformation of fractal object // J.Stat.Phys. 1988. Vol. 50. P. 953.
19. Arneodo A., Grasseau G., Holschneider M. Wavelet transform of multifractals / Phys.Rev.Lett. 1988. Vol. 61, № 20. P. 2281.
20. Collineau S., Brunet Y. Detection on turbulent coherent motins in a forest canopy. Part 1. Wavelet analysis // Boundary-Layer Meteorology. 1993. Vol. 65. P.357.
21. Астафьева Н.М. Вейвлет-преобразование; основные свойства и примеры применения // Препринт - 1891 ИКИ РАН, Москва, 1994. 57 с.

18. *Wyrski K.* El-Nino - the dynamic response of the equatorial Pacific ocean to atmospheric forcing // *J.Phys.Oceanogr.* 1975. Vol. 5. P. 572.
19. *MacKenzie D.* How the Pacific drains the Nile//*New Scientist.* 1987, 16 April, P. 16.
20. *Wang Shaowu.* Reconstruction of El-Nino event chronology for the last 600 years period // *Acta Meteorologica Sinica.* 1992. Vol. 6, № 1. P. 47.
21. *Сидоренков И.С.* Характеристики явления Южное Колебание - Эль-Ниньо // *Труды Гидрометеоцентра СССР.* 1991. Вып. 316. С.31.
22. *Астафьева Н.М., Сонечкин Д.М.* Мультимасштабный анализ индекса Южного колебания // *ДАН.* 1995. Т. 344, № 4. С. 539.
23. *Enfield D.B., Cids L.* Statistical analysis of El-Nino/Southern Oscillation over the last 500 year//*TOGA Notes.* 1990. №1. P.1.
24. *Currie R.G.* Periodic (18.6-year) and cyclic (11-year) induced drought and flood in western North America // *J.Geoph.Res.* 1984. Vol. 89, № D5. P.7213.
25. *Quinn W.H., Neal V.T., Antunez de Maylo S.E.* El-Nino occurrences over the last four and a half centuries // *J.Geoph.Res.* 1987. Vol. 92, № C13. P.14449.
26. *Haudler R., Andsager K.* Volcanic aerosol, El-Nino and Southern Oscillation// *Inter.J.Climato.* 1990. Vol. 10. P.413.
27. *Takens F.* Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence // *Warwick 1980, Lecture Notes in Mathematics / Eds. D. Rand and L.-S.Young, N.-Y.:* Springer-Verlag. 1981. P. 366.

*Институт космических исследований
РАН*

Поступила в редакцию 25.12.95

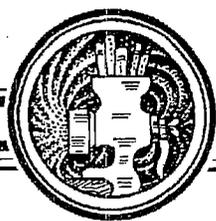
WAVELET ANALYSIS: LOCAL INHOMOGENEITIES SPECTRAL ANALYSIS (fundamental properties and applications)

N.M. Astafyeva

We present the wavelet transform as a mathematical method which is well suited for studying the local scaling and spectral properties of complex natural, experimental and numerical data. Set of examples have been included to illustrate the potential of wavelets for different signals analysing: the model time series (harmonic, with singularities, fractal) and the geophysical natural time series. We have analysed the features of ENSO - global process in ocean-atmosphere system which has direct bearing on climat.



Астафьева Наталья Михайловна родилась в 1944 году в Москве, окончила механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (1967). После окончания МГУ работает в Институте космических исследований. Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук (1972, ИКИ). Область научных интересов: гидродинамическая устойчивость, пространственно-временной хаос и структурообразование, применение нелинейной динамики в геофизике, численное моделирование.



О БАСЕЙНАХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ДВУМЕРНЫМИ НЕОБРАТИМЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Кристиан Мира

Эта статья подводит итог работам, посвященным свойствам бассейнов в необратимых отображениях плоскости. Эти результаты были опубликованы либо в относительно старых работах на французском языке, либо совсем недавно. Свойства бассейнов получены с использованием метода критических кривых, естественного обобщения понятия критической точки одномерного эндоморфизма. Частные случаи бифуркаций, ведущих к фрактализации границы, проиллюстрированы простыми примерами.

Введение

Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы представить обзор некоторых результатов, относящихся к структуре бассейнов в необратимых отображениях плоскости (двумерных эндоморфизмах) и их бифуркациям. Особое внимание уделяется таким последовательностям бифуркаций, в результате которых регулярная граница превращается во фрактальную, то есть явление *фрактализации*. Некоторые из аспектов этого явления были недавно описаны для квадратичных необратимых отображений, принадлежащих классу $(Z_0 - Z_2)$ [1,2]. Напомним, что такие отображения имеют кривую LC , которая делит плоскость на две открытые области Z_0 и Z_2 такие, что точка X , принадлежащая Z_2 , имеет два разных прообраза (предшественника, антецедента) ранга один, а точка X из Z_0 - ни одного. Кривая LC является геометрическим местом точек X , имеющих два совпадающих прообраза, $T^{-1}(X)$, расположенных на кривой LC_{-1} . Напомним также, что множество точек $T^{-n}(X)$ состоит из *прообразов ранга n* для данной точки X . Кривая LC , для которой $T^{-1}(LC) \supseteq LC_{-1}$ и $T(LC_{-1})=LC$, называется *критической кривой*. Это двумерное обобщение понятия критической точки (в смысле Жюлиа - Фато) для одномерного эндоморфизма.

Следует подчеркнуть, что $(Z_0 - Z_2)$ отображения составляют класс, обладающий простейшими свойствами. Поэтому отображения, обладающие кривой LC , разделяющей области с более чем двумя различными прообразами ранга один, могут иметь иные свойства, кроме тех, что справедливы для $(Z_0 - Z_2)$ типа. В частности, в последнее время стали популярными двумерные квадратичные необратимые отображения вида $(Z_0 - Z_2 - Z_4)$, где Z_4 - область R^2 , имеющая четыре различных прообраза ранга один, или $(Z_2 - Z_4)$, причем подразумевается, что это простейшие типы. Однако это не лучший первый шаг в таком

исследовании, поскольку тип $(Z_0 - Z_2)$ содержит на своем уровне очень сложные ситуации, которые должны быть выявлены в первую очередь. Если отображение является непрерывным и непрерывно дифференцируемым (класса C^1), то LC_{-1} включена в множество, определяемое условием $J=0$, где J обозначает якобиан отображения T . Условие $J=0$ может также описывать такие точки X , для которых $J(X)=0$, однако T локально обратимо в X ; тогда X эквивалентна точке перегиба для одномерного случая. Кривая LC_{-1} является двумерным аналогом точки локального экстремума одномерного дифференцируемого отображения. Если T недифференцируемо, то роль LC_{-1} (геометрическое место точек, являющихся двумя совпадающими прообразами ранга один) обычно играет кривая недифференцируемости [3, с. 369-371]. Образ ранга k кривой LC - критическая кривая ранга $k+1$, $LC_k = T^k(LC)$. Необратимые отображения могут принадлежать к классам, которые не связаны с существованием критической кривой. Это имеет место в ситуациях, когда кривая LC вырождается в точку.

Насколько нам известно, понятие критической кривой при изучении двумерных эндоморфизмов было впервые введено в 1964 году в связи с его ролью в определении границ бассейнов [4-6]. Начиная с 1969 года в нескольких работах была исследована роль критических кривых при бифуркациях типа «односвязный бассейн ↔ несвязный бассейн» [3,7] и «односвязный бассейн ↔ многосвязный бассейн» [8-10]. Эти основные бифуркации всегда являются результатом касания границы бассейна и сегмента критической кривой и порождаются единым фундаментальным механизмом. Очевидно, что при наличии двух аттракторов (один из них может быть на бесконечности) дыры в многосвязном бассейне одного аттрактора являются несвязными компонентами бассейна другого аттрактора. Кроме того, с 1977 года исследовалась роль критических кривых при определении *поглощающих областей, хаотических областей* (то есть поглощающих областей, точки которых обладают положительной устойчивостью по Пуассону и чувствительностью к начальным условиям) и в бифуркациях, приводящих либо к разрушению, либо к внезапной и значительной перестройке этих областей [3,11-21].

Заслуживает упоминания тот факт, что многие системы, в частности, в теории управления и электронике, приводят к моделям в виде необратимых отображений. Это имеет место в некоторых системах управления, использующих выборки из данных, или переключающие элементы, или импульсную модуляцию, а также при некоторых видах адаптивного контроля [3,7,13,22-25]. При моделировании в экономике и биологии также часто возникают необратимые отображения [26-29].

Во втором разделе статьи для иллюстрации четырех основных теорем, доказанных в [1], приводятся репрезентативные модельные отображения. Четыре из них имеют исторический интерес, поскольку, по-видимому, это первые примеры, демонстрирующие ситуации, приводящие к несвязным и многосвязным бассейнам [7,8,12,30]. Эти результаты оставались относительно малоизвестными из-за того, что были опубликованы на французском языке; здесь они приводятся вследствие своей значимости. Остальные примеры являются более свежими. Они относятся к необратимым квадратичным отображениям типа $(Z_0 - Z_2)$, которые уже рассматривались ранее [1,2], и к кубическим отображениям типа $(Z_1 < Z_3 >)$. Такое кубическое отображение характеризуется замкнутой критической кривой LC с двумя точками сборки (LC имеет форму губ, что символизируется знаком «<...>»), которая ограничивает область с тремя прообразами первого ранга, окруженную неограниченной областью с единственным прообразом. Эти примеры демонстрируют:

- различные случаи несвязных бассейнов, состоящих либо только из двух несвязанных областей (область, не содержащая аттрактор, называется «остров»), либо из бесконечного множества таких областей;
- различные случаи многосвязных бассейнов;
- различные типы фрактализации границы бассейна, часть из которых возникает

вследствие явления объединения (aggregation) островов в случае несвязных бассейнов, или объединения «озер» (то есть дырок в многосвязном бассейне), а также различные бифуркации, относящиеся к этим ситуациям.

Более подробно эти вопросы рассмотрены в [31] (случай хаотического поведения рассмотрен в [32]).

Следует отметить, что результаты, представленные в статье, получены численным способом (с необходимыми предосторожностями, предполагаемыми этим методом), но **на основе фундаментального исследования**, краткому изложению которого посвящен раздел 1 (см. также [1]). Некоторые склонные к абстракциям читатели могут оспаривать такой «modus operandi» при решении проблем подобного рода. К сожалению, принимая во внимание сложность предмета исследования и его природе, даже в простейшем случае (а это отображение типа $(Z_0 - Z_2)$), по-видимому, маловероятно, что удастся провести успешное исследование каким-либо другим способом. С другой стороны, без доступа к основным фундаментальным положениям, упомянутым выше, простые численные исследования не позволили бы получить результаты, описанные в этой статье. Только связка «фундаментальные исследования - численные методы» дает возможность прийти к решению проблемы.

Вслед за этим введением, в разделе 1, рассматриваются некоторые основные элементы, необходимые для понимания содержания представленных здесь проблем (определения, свойства и четыре основные теоремы). Раздел 2 посвящен четырем примерам, имеющим «исторический» интерес, на основании которых много позже была проведена формализация свойств бассейнов [1]. В разделах 3 и 4 рассматриваются необратимые квадратичные отображения типа $(Z_0 - Z_2)$, описанные в [1,2], и кубическое отображение типа $(Z_1 < Z_3 >)$.

1. Общая часть

1.1. Основные определения и некоторые свойства. Как уже упоминалось выше, в этой статье рассматривается семейство двумерных эндоморфизмов $(X \rightarrow T(X))$ таких, что критическая кривая LC состоит только из одной ветви, разделяющей плоскость R^2 на две области Z_0 и Z_2 , точки которых имеют соответственно 0 или 2 прообраза (или антецедента, предшественника, или обратной итерации) ранга один. Такие эндоморфизмы называются отображениями $(Z_0 - Z_2)$ типа. Представляется совершенно необходимым исследовать их перед тем, как перейти к более сложным типам, которые локально могут иметь свойства $(Z_0 - Z_2)$ плюс другие качества, проистекающие из того, что некоторые области R^2 могут иметь более двух прообразов ранга один.

Обозначим через R_1 и R_2 две открытые области такие, что $LC_{-1} = \overline{R_1} \cap \overline{R_2}$, и для каждой $X \in Z_2$ пусть $T_1^{-1}(X) \in R_1$, $T_2^{-1}(X) \in R_2$ будут прообразами ранга один точки X . Если $X \in LC$, то $T_1^{-1}(X) = T_2^{-1}(X) \in LC_{-1}$. Обозначим также $T_1^{-1}(X) = X_{-1}^1$, $T_2^{-1}(X) = X_{-1}^2$.

Замкнутое и инвариантное множество A называется *притягивающим множеством*, если существует некоторая окрестность U такая, что $T(U) \subset U$ и $T^n(U) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, $\forall X \in U$. Притягивающее множество A может содержать один или несколько аттракторов, сосуществующих с множеством отталкивающих (repulsive) точек, которые порождают хаотические переходные процессы при «намотке» на эти аттракторы или «пушистые» (неясные) границы их бассейнов [33]. В простейшем случае A содержит лишь один аттрактор, например, неподвижную точку. Множество $D = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$ является *полным бассейном* (или

просто: бассейном притяжения, или областью влияния) притягивающего множества A . Таким образом D - это множество точек, для которых траектории при итерации вперед (то есть множество образов X) сходятся к A . *Граница D*

обозначается ∂D . Она определяется геометрическим равенством $\partial D = \bar{D} \cap \overline{C(D)}$, где $C(D)$ означает множество, дополнительное к D . Область D инвариантна относительно обратных итераций T^{-1} , но необязательно инвариантна относительно T :

$$T^{-1}(\partial D) = \partial D, \quad T^{-1}(D) = D, \quad T(D) \subseteq D. \quad (1)$$

В уравнениях (1) строгое включение справедливо, только если D содержит точки Z_0 , то есть точки без прообразов. Соотношения (1) справедливы также для замыкания \bar{D} . Заметим, что $T^{-1}(\partial D) = \partial D$ предполагает, что ∂D должна содержать множество прообразов любого из своих циклов (то есть, ∂D должна содержать устойчивое многообразие - или устойчивое множество в том случае, если многообразия не существует - W^s любого из циклов T , принадлежащего ∂D), в то время как соотношение

$$T(\partial D) \subseteq \partial D \quad (2)$$

означает, что прямые итерации любой из ее точек принадлежат $\partial D \cap Z_0$.

Стоит заметить, что в случае циклов, представляющих собой неустойчивый узел или фокус, устойчивое многообразие (или устойчивое множество) W^s состоит из множества прообразов возрастающего ранга точек цикла и предельных точек этого множества. В случае обратимых отображений такого множества не существует. Для седлового цикла W^s включает сегмент, представляющий собой устойчивое многообразие W^s , связанное с таким определением обратного отображения, для которого точки цикла являются неподвижными, а также прообразы возрастающего ранга этого сегмента.

Бассейн D может быть *связным* либо *несвязным*. Связный бассейн может быть *односвязным* либо *многосвязным* (это означает, что он содержит дырки). Несвязный бассейн состоит из конечного или бесконечного числа связных компонент (которые могут быть одно- или многосвязными). Свойства и бифуркации, относящиеся к этим различным ситуациям, будут рассмотрены в следующем разделе. Если A - связный аттрактор (например, A - неподвижная точка), то *непосредственный (ближайший) бассейн* D_0 (*immediate basin*) можно определить как наибольшую связанную компоненту D , содержащую A .

Если A является максимальным притягивающим множеством отображения T , то его бассейн D является полным бассейном (*total basin*), то есть это откры-

тое множество D , содержащее A такое, что \bar{D} - геометрическое место точек плоскости, имеющих ограниченные траектории. Множество, дополнительное к нему, обозначаемое D' ($\bar{D} \cup D' = R^2$), если оно непустое, является бассейном притяжения бесконечно удаленного притягивающего множества, экватора Пуанкаре, то есть это геометрическое место точек плоскости с расходящимися траекториями. В этом случае два бассейна имеют общую границу (разделяющее множество), $\partial D = \partial D'$.

Отображение T может не обладать конечноудаленным притягивающим множеством (если на конечном расстоянии существуют только репеллеры, хаотические либо нехаотические). В этом случае геометрическое место точек плоскости, имеющих ограниченные траектории, принадлежит границе $\partial D'$ (и $R^2 = \bar{D}'$). Тогда $\partial D'$ может быть странным репеллером, порождающим хаотические переходные орбиты, уходящие к экватору Пуанкаре. Эти ограниченные траектории не имеют «физического» смысла, так как они предполагают бесконечную точность данных и отсутствие возмущений в системе, моделью которой является отображение.

Если существует полный бассейн на конечном расстоянии, то его свойства

могут быть выведены из свойств непосредственного бассейна D_0 (поскольку $D = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(D_0)$).

Структура множеств \bar{D}, \bar{D}' часто напоминает географическую карту. По этой причине в статье будут использоваться следующие географические аналогии: D' - море; D_0 - континент; сегменты ∂D - берег; дыры внутри D_0 (когда оно многосвязно) - озера; несвязные части D , отличные от D_0 , - острова; точка сборки, принадлежащая ∂D , - мыс. Два мыса могут ограничивать сегмент ∂D , образуя *рейд* [1]. Необратимые отображения могут также иметь озера внутри островов и острова внутри озер.

Если D_0 многосвязно, то его *внешняя граница* обозначается F_{0e} . Это граница односвязного множества, обозначаемого D_0^* , которое получается при выбрасывании из D_0 всех дыр (озер). Таким образом $\partial D_0^* = F_{0e}$, а $D_0^* \setminus D_0$ состоит из всех дыр, которые являются несвязными частями D' (бассейн экватора Пуанкаре). F_{0i} обозначает *внутреннюю границу* D_0 , то есть, иными словами, объединение границ всех дыр, принадлежащих $D_0^* \setminus D_0$.

Отображения типа $(Z_0 - Z_2)$ характеризуются тем, что они могут иметь одну или две неподвижные точки, либо же не иметь их вовсе. Если T имеет простой вид $(x \rightarrow ax + by, y \rightarrow g(x, y))$, где g - квадратичная форма от (x, y) , то она может либо не обладать ни одной, либо иметь две неподвижные точки, скажем P и Q . В таком простом случае оба обратные к T отображения, T_1^{-1} и T_2^{-1} , а также неподвижные точки P и Q можно найти явно, в виде корней полинома второй степени.

Пусть X - точка плоскости (x, y) . Для любого $n \geq 1$, $T^{-n}(X)$ содержит не более 2^n различных точек (прообразов X ранга n). $T^{-n}(X)$ содержит 2^n тогда и только тогда, когда ни один из прообразов ранга i точки X , $i=1, \dots, n$, не принадлежит Z_0

или LC . Множество $\bigcup_{i=1}^n T^{-i}(X)$ называется *последовательностью прообразов точки* X . Множество $\bigcup_{i \geq 1} T^{-i}(X)$ может не быть конечным. В случае бесконечного

множества его называют *древовидной последовательностью прообразов* (*arborescent sequence of preimages*), если оно включает бесконечное количество точек, подмножество которых порождает конечные или бесконечные последовательности из 2^q прообразов ранга q , $q=1, 2, 3, \dots$. В работе [1] приведены примеры ситуаций, когда точка X или множество озер, или островов обладают либо конечной последовательностью прообразов, $\bigcup_{i \geq 1} T^{-i}(X)$, либо бесконечной, но не

древовидной, либо древовидной.

Если неподвижная точка, например P , принадлежащая внешней границе бассейна, $P \in F_{0e}$, является неустойчивым узлом и ее собственные числа (мультипликаторы) удовлетворяют соотношениям $S_1 > 1$, $S_2 < -1$ и $|S_2| > S_1$, то она называется *точкой сборки*, потому что выходящие из P инвариантные кривые образуют геометрическую конфигурацию, характерную для точки сборки. В этом случае прообразы P также являются точками сборки внешней границы F_{0e} (детали см. в [1]).

Граница $\partial D_0 = F_{0e} \cup F_{0i}$ называется *слабо фрактальной границей*, если F_{0e} содержит только конечное число точек сборки, и если внутренняя граница F_{0i} состоит из дуг, имеющих фрактальную структуру, причем F_{0e} может быть фрактальной. Будем называть ∂D_0 *сильно фрактальной границей*, если F_{0e} состоит из дуг, имеющих фрактальную структуру, содержащую древовидную последовательность прообразов точки сборки (и, таким образом, ∂D_0 имеет бесконечное количество точек сборки). F_{0i} также может быть сильно фрактальной границей. Эти две фрактальные структуры были обнаружены при изучении

отображения $(x \rightarrow ax+y, y \rightarrow x'+b)$ при $a < 0$ [1]. Это отображение типа $(Z_0 - Z_2)$, и оно, так же как и квадратичное отображение, рассматриваемое ниже, таково, что $D_0 \cap Z_0 \neq \emptyset$, если существует максимальное конечноудаленное притягивающее множество. Тогда мы имеем $T(\partial D) \subset \partial D$.

1.2. Фундаментальные теоремы о несвязных и многосвязных бассейнах.

Пусть T - отображение типа $(Z_0 - Z_2)$. Пусть D_0 - непосредственный бассейн конечноудаленного притягивающего множества, а D - полный бассейн. Цель этого раздела - напомнить две первые основные теоремы из [1], которые определяют условия существования несвязного и многосвязного бассейнов. Предполагается, что

A - притягивающее множество периода $k=1$. Если $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ - притягивающее множество периода $k>1$, то каждое A_i может рассматриваться по отношению к отображению T^k и его непосредственному бассейну D_0 . Таким образом, нижеследующие теоремы остаются справедливыми при замене A, T и D_0 на A_i, T^k и D_0 . Доказательства теорем 1 и 2 приведены в [1].

Теорема 1. Пусть T - отображение типа $(Z_0 - Z_2)$ и D_0 - непосредственный бассейн притягивающего множества A такой, что $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$, тогда:

(а) D связно $\Leftrightarrow D_0 \cap \bar{Z}_2$ связно $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) = D_0 \cap LC$;

(б) D несвязно $\Leftrightarrow D_0 \cap \bar{Z}_2$ несвязно $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) \subset D_0 \cap LC$.

Каждая одномерная максимальная связная компонента множества $(D_0 \cap LC) \setminus T(D_0 \cap LC_{-1})$ принадлежит границе двумерной максимальной связной компоненты

множества $D_0 \cap \bar{Z}_2$, которая представляет собой «полуостров», обозначаемый Δ_0^i , $i=1,2,\dots,m$, где m - конечное или бесконечное целое, и которая не содержит A .

Области Δ_0^i не содержат других неблуждающих точек, принадлежащих \bar{D} . Прообразы ранга один полуостровов Δ_0^i , $D_1^{(i)} = T^{-1}(\Delta_0^i)$, являются отдельными связными компонентами, или островами, множества D такими, что $D_1^{(i)} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. Полный бассейн $D = D_0 \cup \bigcup_{i \geq 0} T^{-i}(D_1^{(i)})$, где $\bigcup_{i \geq 0} T^{-i}(D_1^{(i)})$ конечная, бесконечная или древовидная последовательность прообразов D_0 .

Эта теорема представляет собой формализацию результатов, приведенных в [7] (см. также [3, с. 243-245]).

Рис. 1, а, б подтверждают содержание части (б) теоремы в простейшем случае ($m = 1$). Пусть $\overline{\alpha\beta}$ обозначает сегмент, ограниченный двумя точками α и β .

$D_0 \cap LC = \overline{ca} \cup \overline{bd}$ имеет две несвязные компоненты \overline{ca} и \overline{bd} , которые являются сегментами критической кривой LC . Каждый из них обладает двумя слившимися прообразами ранга один $\overline{c_{-1}a_{-1}}$, $\overline{b_{-1}d_{-1}}$ на LC_{-1} . Относительно T^{-1} область Z_2 должна рассматриваться как состоящая из двух листов, соединяющихся по LC . Один из них ассоциируется с T_1^{-1} , другой - с T_2^{-1} , $T^{-1}(X) = T_1^{-1}(X) \cup T_2^{-1}(X)$.

Рис. 1, а относится к случаю $D_1 \subset Z_0$. Область $D_0 \cap Z_2$ состоит из двух несвязных компонент $(bPdb)$ и $\Delta_0 = (aP_{-1}ca)$, первая из которых содержит конечноудаленное притягивающее множество. Здесь $(bPdb)$ обозначает область, ограниченную объединением сегментов \overline{dP} , \overline{Pd} , \overline{db} . В случае квадратичного отображения T или эквивалентного ему, P - неподвижная точка, принадлежащая

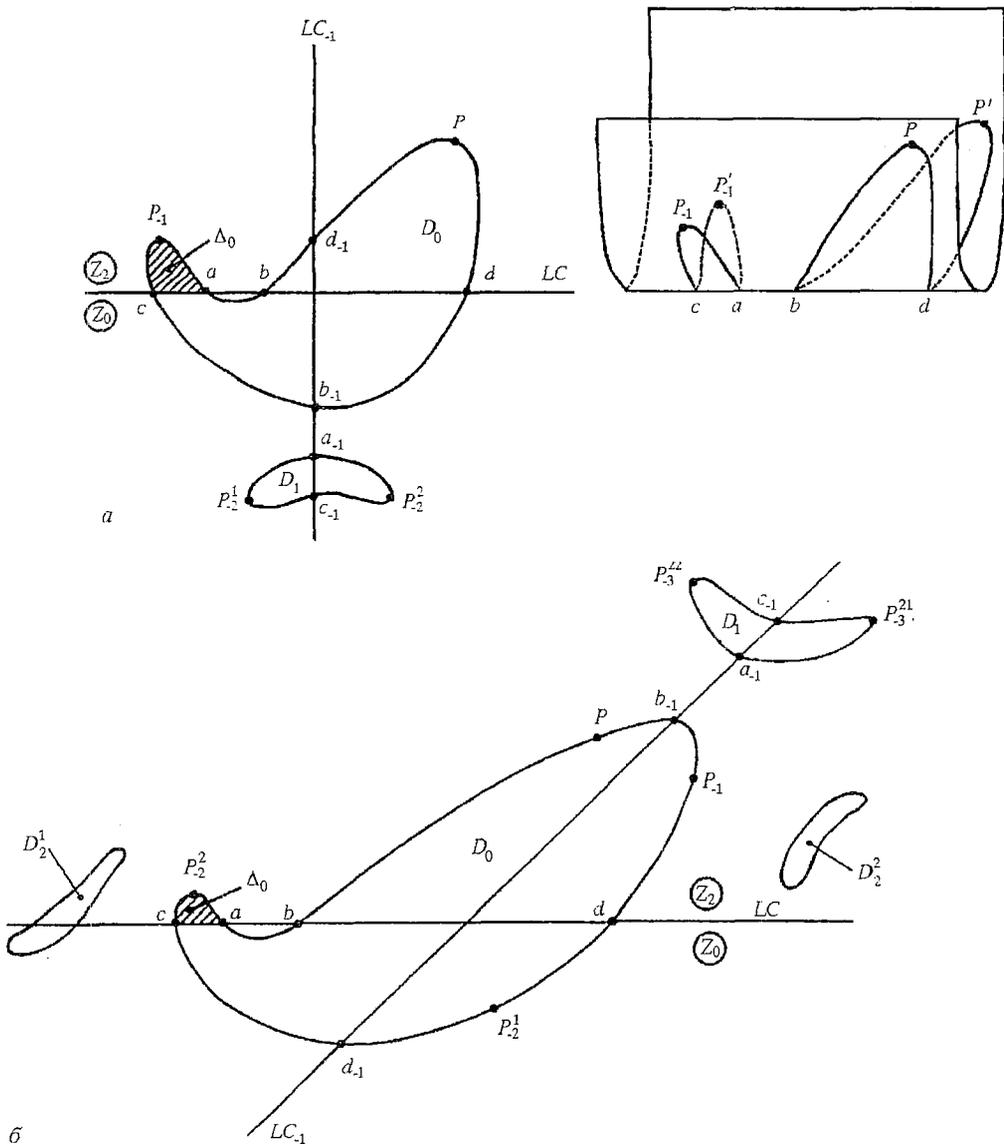


Рис. 1. Несвязный бассейн: а) - случай, когда есть только один остров D_1 ; б) - бесконечное множество островов [1]

F_{0e} (см. раздел 1.1), $T^{-1}(P) = P \cup P_{-1}$. По отношению к T^{-1} каждая из этих двух компонент должна рассматриваться как находящаяся на двух вышеупомянутых листах с одной и той же «проекцией». При раздвижении листов они образуют области $(PbP'dP)$ и $(P_{-1}cP_{-1}'aP_{-1})$. Здесь P, P' (соответственно P_{-1}, P_{-1}') относятся к одной и той же точке P (соответственно P_{-1}). В результате имеем

$$T_2^{-1}(bPdb) = (b_{-1}dPd_{-1}b_{-1}), \quad T_1^{-1}(bPdb) = (b_{-1}cP_{-1}abd_{-1}b_{-1}),$$

$$T_1^{-1}(\Delta_0) = (a_{-1}P_{-2}^1c_{-1}a_{-1}), \quad T_2^{-1}(\Delta_0) = (a_{-1}P_{-2}^2c_{-1}a_{-1}),$$

$$T^{-1}(bPdb) = D_0, \quad T^{-1}(\Delta_0) = (a_{-1}P_{-2}^1c_{-1}P_{-2}^2a_{-1}) = D_1, \quad T^{-1}(P_{-1}) = P_{-2}^1 \cup P_{-2}^2.$$

Здесь D_1 принадлежит к полному бассейну D , для которого D_0, D_1 - две

несвязанные компоненты. Это приводит к тому, что $\overline{c_{.1}a_{.1}}$, $\overline{b_{.1}d_{.1}}$ являются двумя несвязанными сегментами $LC_{.1}$, причем $\overline{c_{.1}a_{.1}} \cap Z_2 = 0$, $\overline{b_{.1}d_{.1}} \cap Z_2 \neq 0$.

Рис. 1, б иллюстрирует содержание теоремы для случая $D_1 \subset Z_2$, с одним только полуостровом ($i=1$) $\Delta_0 = (aP_{.2}^2ca)$, где P рассматривается как неподвижная точка. Здесь имеем:

$$T^{-1}(P) = P \cup P_{.1}, \quad T^{-1}(P_{.1}) = P_{.2}^1 \cup P_{.2}^2, \quad P_{.2}^2 \in Z_2,$$

$$T^{-1}(P_{.2}^2) = P_{.3}^{21} \cup P_{.3}^{22} \subset \partial D_1, \dots, \quad T^{-1}(P_{.-(i+1)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i}) \subset \partial D_i,$$

$$\alpha_j = 1 \text{ или } 2; \quad j = 1, 2, \dots, i; \quad i = 2, 3, \dots$$

В результате получаем древовидную последовательность островов $D_{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}}$, $\beta_j = 1$ или 2 , $j = 1, 2, \dots, i-1$, $i = 1, 2, \dots$. Если один из этих островов принадлежит Z_0 , то соответствующая ветвь древовидной последовательности прообразов обрывается.

Если $D_i \cap LC \neq 0$, то $D_{i+1} = T^{-1}(D_i \cap \bar{Z}_2)$ пересекается с $LC_{.1}$ и порождает другие прообразы, то есть древовидную последовательность островов. Если существуют такие древовидные последовательности, то предельное множество Ω_i всех островов, при возрастании ранга прообразов, состоит из неустойчивых циклов (периодических точек), принадлежащих ∂D , плюс предельные точки этих циклов при стремлении порядка (периода) к бесконечности, плюс все древовидные последовательности прообразов всех этих особых точек. При наличии такого предельного множества полный бассейн D становится фрактальным.

Как указывается в разделе 1.1, непосредственный бассейн может быть одно- или многосвязным. Пусть D_0^* - односвязная область такая, что $\partial D_0^* = F_{0e} = \partial_e D_0$. Рассмотрим случай связного бассейна $D = D_0$.

Теорема 2. Пусть T - отображение типа $(Z_0 - Z_2)$ и D_0 - непосредственный бассейн притягивающего множества A такой, что $D_0 \cap LC_{.1} \neq 0$ и $D_0 \cap \bar{Z}_2$ - связное множество, тогда:

$$(a) \quad T^{-1}(D_0^*) = D_0^* \Leftrightarrow D = D_0 \text{ односвязно} \Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{.1}) = D_0^* \cap LC;$$

$$(б) \quad T^{-1}(D_0^*) \subset D_0^* \Leftrightarrow D = D_0 \text{ многосвязно} \Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{.1}) \supset D_0^* \cap LC.$$

Каждая одномерная максимальная компонента множества $T(D_0^* \cap LC_{.1}) \setminus (D_0^* \cap LC)$

принадлежит границе двумерного замкнутого множества $C(D) \cap \bar{Z}_2$, которое представляет собой залив, обозначаемый $H_0^{(i)}$, $i=1, 2, \dots, m$, где m - конечное целое или бесконечность. Области $H_0^{(i)}$ не содержат неблуждающих точек, принадлежащих ∂D или $C(D)$. Прообразы ранга один залива $H_0^{(i)}$, $H_1^{(i)} = T^{-1}(H_0^{(i)})$, являются отдельными замкнутыми связными множествами, или озерами (дырами),

множества D такими, что $H_1^{(i)} \cap LC_{.1} \neq 0$, а само $D = D_0^* \bigcup_{i \geq 0} (\bigcup_{n \geq 0} UT^{-n}(H_1^{(i)}))$, где $\bigcup_{n \geq 0} UT^{-n}(H_1^{(i)})$

- конечная, бесконечная или древовидная последовательность прообразов D_0 .

Эта теорема представляет собой формализацию результатов, приведенных в [8]. Она характеризует многосвязный бассейн D , если D является связным. Комбинация условий теорем 1 и 2 может привести к ситуации, когда бассейн D одновременно является несвязным и многосвязным, а также к ситуациям озер внутри островов и островов внутри озер. Таким образом выявляется двойственность острова - озера, «континент - море» и «теор.1 - теор.2».

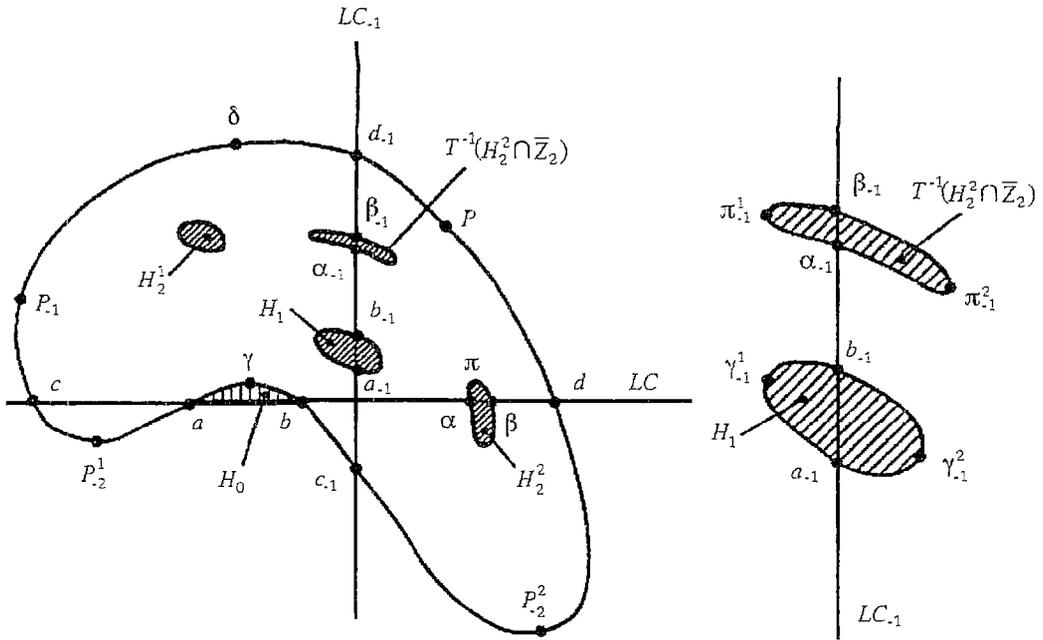


Рис. 2. Многосвязный бассейн. Область Z_2 расположена выше критической кривой LC , а Z_0 - ниже [1]

Рис. 2 иллюстрирует содержание теоремы 2. Множество $D_0^* \cap Z_2$ представляет собой связную область, ограниченную контуром $(\alpha\gamma b d \delta c a)$, точки a, b, c, d принадлежат LC , а сегменты $\overline{c\delta d}$ и $\overline{a\gamma b}$ таковы, что

$$\overline{c\delta d} \cup \overline{a\gamma b} = F_{0e} \cap Z_2, \quad D_0^* \cap Z_2 = (\alpha\gamma b d \delta c a).$$

Пусть неустойчивая неподвижная точка $P \in F_{0e}$ реализуется в ситуации, изображенной на рис.2, а $P_{-1}, P_{-2}^1, P_{-2}^2$ - ее прообразы первого и второго ранга. Прообразы первого ранга c_{-1}, d_{-1} от c, d принадлежат $F_{0e} \cap LC_{-1}$. На LC_{-1} имеем $\overline{a_{-1}b_{-1}} \subset \overline{c_{-1}d_{-1}}$, и прообраз первого ранга открытой области $(\alpha\gamma b a) \equiv H_0$, принадлежащей к области разбегания D' , является дырой (озером)

$$(a_{-1}\gamma_{-1}^1 b_{-1}\gamma_{-1}^2 a_{-1}) \equiv H_1,$$

$$T_1^{-1}(H_0) = (a_{-1}\gamma_{-1}^1 b_{-1} a_{-1}), \quad T_2^{-1}(H_0) = (a_{-1}\gamma_{-1}^2 b_{-1} a_{-1}),$$

$$T^{-1}(H_0) = T_1^{-1}(H_0) \cup T_2^{-1}(H_0) = H_1.$$

Это озеро и все последовательности (древовидные или нет) его прообразов H_n ранга $n=1,2,\dots$, приводят к многосвязности непосредственного бассейна D_0 . Первое описание этого случая было дано в [8].

Если образующиеся таким образом дыры $H_i, i>1$, пересекаются с LC , то это приводит к новой несвязной компоненте $D_0 \cap LC$. Затем две компоненты $T^{-1}[H_i \cap Z_2]$ дают новую дыру (озеро), пересекающуюся с LC_{-1} (см. рис.2 для $i=2$), прообразы которой образуют новую последовательность озер. Предположим, что существует бесконечное множество древовидных последовательностей прообразов ранга $n=1,2,\dots$ от дыр, пересекаемых LC_{-1} . Тогда предельное множество Ω_i всех дыр (озер), при возрастании ранга прообразов, состоит из неустойчивых циклов (периодических точек), принадлежащих ∂D , плюс предельные точки этих циклов

при стремлении порядка (периода) к бесконечности, плюс все древовидные последовательности прообразов всех этих особых точек. Это приводит к фрактализации внутренней границы F_{0i} области D_0 .

Замечание 1. Если бесконечное множество неустойчивых циклов существует в качестве предельного множества древовидной последовательности островов или озер, то есть в качестве точек границы бассейна, то они образуют «хаотический репеллер». Его следует отличать от бесконечного множества неустойчивых циклов, приводящих к появлению «хаотического аттрактора», который образует хаотическую область, если такая область существует.

Замечание 2 (обобщение теорем 1, 2): Теоремы 1, 2 могут быть переформулированы для необратимых отображений, имеющих тип отличный от (Z_0-Z_2) путем добавления некоторых дополнительных условий, касающихся того факта, что ситуацию (Z_0-Z_2) можно встретить локально. Это возможно, если области (D_0, H_0) на рис.1,2, приводящие к появлению островов или озер, относятся к двум листам отображения T^{-1} , соединенным только одной складкой. Пусть W - такая область. Рассмотрим отображение типа (Z_1, Z_3, Z_1) , для которого два сегмента критических кривых первого ранга LC и LC' ограничивают множество Z_3 точек, имеющих три прообраза первого ранга, а множество Z_1 , дополнительное к его

замыканию \bar{Z}_3 , соответствует точкам, у которых только один прообраз первого ранга. Тогда листы T^{-1} устроены так, как показано на рис.3 [3, с.240].

Рис. 3, а относится к случаю, когда теоремы 1 и 2 справедливы для двух верхних листов, то есть W - это связанное множество, пересекающее только один критический сегмент кривой LC . По отношению к T^{-1} W следует рассматривать как состоящую из компоненты W' , сложенной вдоль LC на двух верхних листах, и компоненты W'' , расположенной на нижнем листе. Тогда $T^{-1}(W)$ состоит из двух несвязанных компонент: W'_{-1} , пересекающей LC_{-1} - геометрическим местом точек, представляющих два слившихся прообраза ранга один точек LC , и W''_{-1} , пересекающей LC_{-1}^e , которая является третьим прообразом LC ранга один, то есть $T^{-1}(LC) = LC_{-1} \cup LC_{-1}^e$. Область W'_{-1} - компонента, ассоциируемая с поведением типа (Z_0-Z_2) . W''_{-1} порождает бесконечную древовидную или недревовидную последовательность прообразов, в зависимости от того, заходят ли прообразы области W''_{-1} в Z_3 или нет.

Рис. 3, б относится к случаю, для которого теоремы 1, 2 неприменимы локально, если W является либо областью D_0 , либо H_0 . Здесь W пересекает LC и LC' , и относительно T^{-1} она должна рассматриваться как состоящая из одной только компоненты W' , сложенной вдоль LC и LC' и лежащей на трех листах.

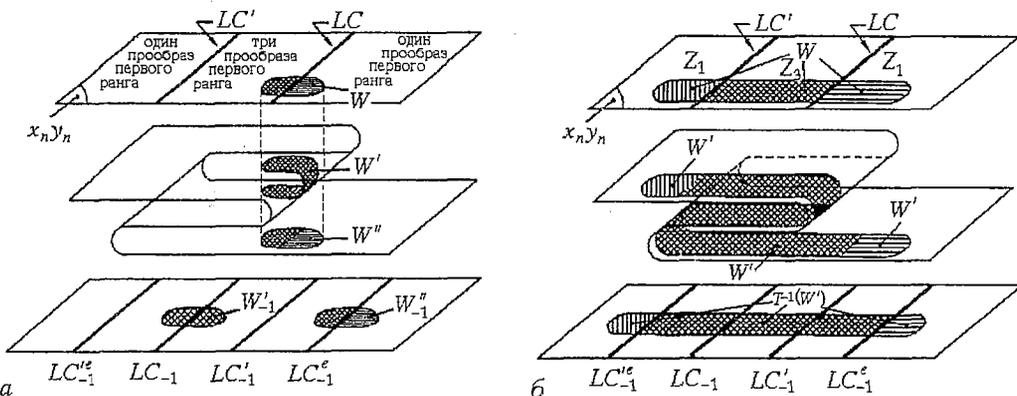


Рис.3. [1]

Тогда $T^{-1}(W)$ - односвязная область, пересекающая LC_{-1} , LC'_{-1} - местоположение двух слившихся прообразов первого ранга от LC , LC' и LC_{-1}^e , LC'^e_{-1} соответствующих третьему прообразу первого порядка от LC , LC' .

1.3. Некоторые бифуркации бассейнов. Следующая теорема была впервые приведена в [1].

Теорема 3. Рассмотрим необратимое отображение T , зависящее от векторного параметра Λ . Если число связных компонент множества $D \cap LC$ изменяется при переходе параметра Λ через бифуркационное значение Λ_b , то бассейн D может претерпеть качественное изменение одного из следующих типов:

(а) связный бассейн \leftrightarrow несвязный бассейн (когда меняется число связных компонент $D \cap LC$),

(б) односвязный бассейн \leftrightarrow многосвязный бассейн (когда меняется число связных компонент $D \cap LC$),

(в) изменение числа островов D или новая древовидная последовательность таких компонент,

(г) изменение числа дыр (озер) в D или новая древовидная последовательность дыр,

(д) переход озеро \leftrightarrow рейд,

(е) переход слабо фрактальная внешняя граница \leftrightarrow сильно фрактальная внешняя граница.

Каждая из таких бифуркаций соответствует касанию двух особых множеств различной природы: границы бассейна ∂D и критической кривой LC .

Эта теорема основывается на результатах, приведенных в [3,7-10,34]. Часть (а) этой теоремы следует из теоремы 1(а) и рис.1 при изменении параметра Λ . На рис. 4 показаны две возможные бифуркации. Первая бифуркация $\Lambda = \Lambda_{1b}$, соответствующая касанию между ∂D_0 и LC , происходит при $a \equiv c$ (рис.4,б), причем $T^{-n}(a)$ порождает древовидную последовательность из N точек (на рис.4,б эта порождаемая последовательность представлена одной только точкой $a_{-1} \equiv c_{-1}$). Эти N точек являются зародышами древовидной последовательности из N островов, $N=1,2,\dots$ (на рис.4,в $N=1$, потому что $D_1 \subset Z_0$). Эта ситуация иллюстрируется также рис.1,а,б. Вторая бифуркация $\Lambda = \Lambda_{2b}$ соответствует тангенциальному касанию между ∂D и LC такому, что $a \equiv b$, приводя к нетрансверсальному, но нетангенциальному касанию между ∂D_0 и границей ∂D_1 области D_1 (см. рис.4,г). После бифуркации (см. рис.4,д) D становится связным.

Часть (б) теоремы 3 иллюстрируется рис.5, а, б, в для различных значений Λ и является следствием теоремы 1(б) и рис. 2. Бифуркация $\Lambda = \Lambda_{3b}$ (см. рис. 5, б) происходит в момент касания между ∂D_0 и LC ($a \equiv b$). После бифуркации древовидная последовательность точек $T^{-n}(a \equiv b)$, $n=1,2,\dots$, показанная на рис. 5, б,

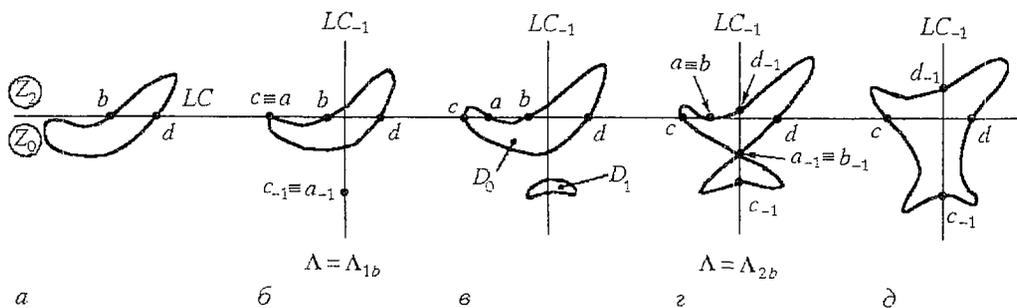


Рис. 4. [1]

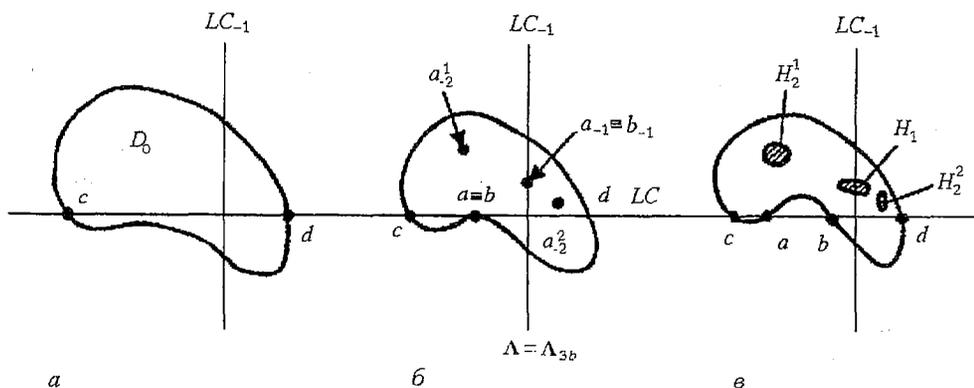


Рис. 5. [1]

становится зародышем древовидной последовательности озер $T^{-p}(H_1) = \cup H_{p+1}^{i, \dots, r, s}$, $p=1, 2, \dots$

Часть (в) иллюстрируется рис.6, где D_0 не представлено во избежание загромождения рисунка. Возможны две различные бифуркации. Первая показана на рис. 6, а и происходит из ситуации, когда есть остров $D_i \subset Z_0$, $D_i \cap LC = 0$. При

$\Lambda = \Lambda_{4b}$, $\bar{D}_i \cap LC = a$ и $T^{-n}(a)$, $n=1, 2, \dots$ ($T^{-1}(a) = a_{-1} \in LC_{-1}$) - древовидная последовательность точек, которая порождает после бифуркации древовидную последовательность островов D_{i+n} , $D_{i+1} \cap LC_{-1} \neq 0$ (см. рис. 6, б).

Вторая бифуркация $\Lambda = \Lambda_{5b}$, соответствует рис. 6, в. $\bar{D}_i \cap LC = \beta$ - новая точка касания между островом D_i и LC . $T^{-1}(\beta) = \beta_{-1} \in LC_{-1}$ - предельная точка касания, $D_{i+1} \cap LC_{-1} = \beta_{-1}$, по которой в результате бифуркации происходит разрыв перемычки и остров D_{i+1} делится на два острова $D_{i+1}^1 \subset R_1$, $D_{i+1}^2 \subset R_2$ (см. рис. 6, г), $D_{i+1} = D_{i+1}^1 \cup D_{i+1}^2$, $D_{i+1} \cap LC_{-1} = 0$.

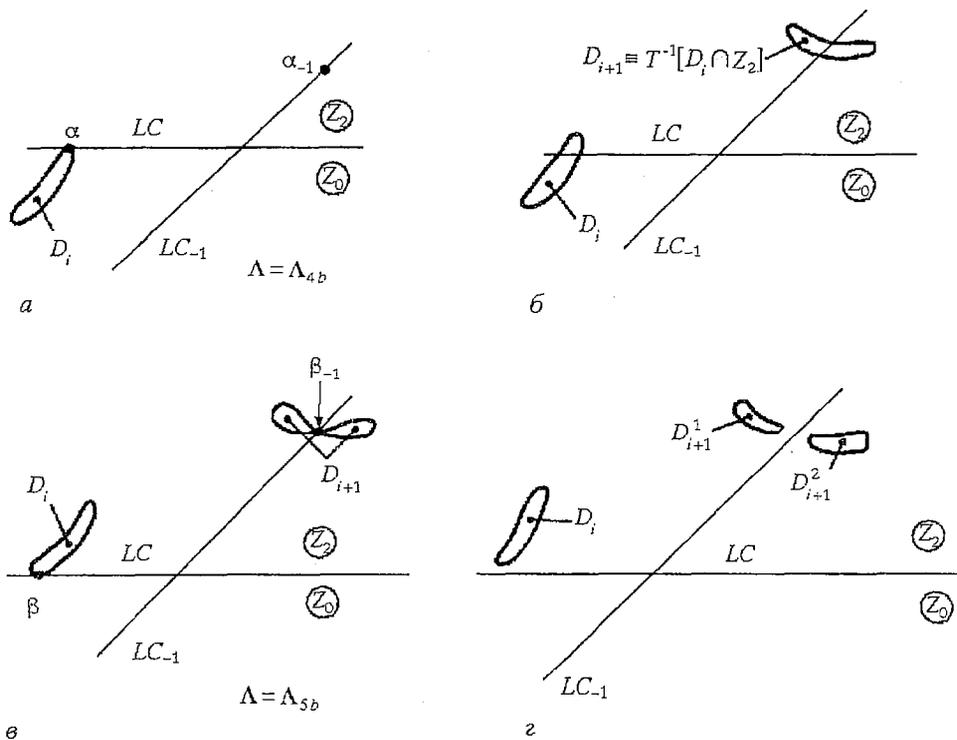


Рис. 6. [1]

Часть (г) теоремы 3 иллюстрируется рис.7, где ω - локальный минимум F_{0e} . На рис. 7, а озеро H_i - одна из составляющих древовидной последовательности, возникающей из H_1 (как показано на рис.2), $H_i \subset T^{-(i-1)}(H_1)$, $i > 2$. Континент D_0 не показан полностью на рис.7. Возможны две различные бифуркации для $\Lambda = \Lambda_{6b}$ и $\Lambda = \Lambda_{7b}$. Они проиллюстрированы на рис.7, а-д. Ситуация на рис.7 является дуальной по отношению к той, что изображена на рис.6 при замене «моря» на

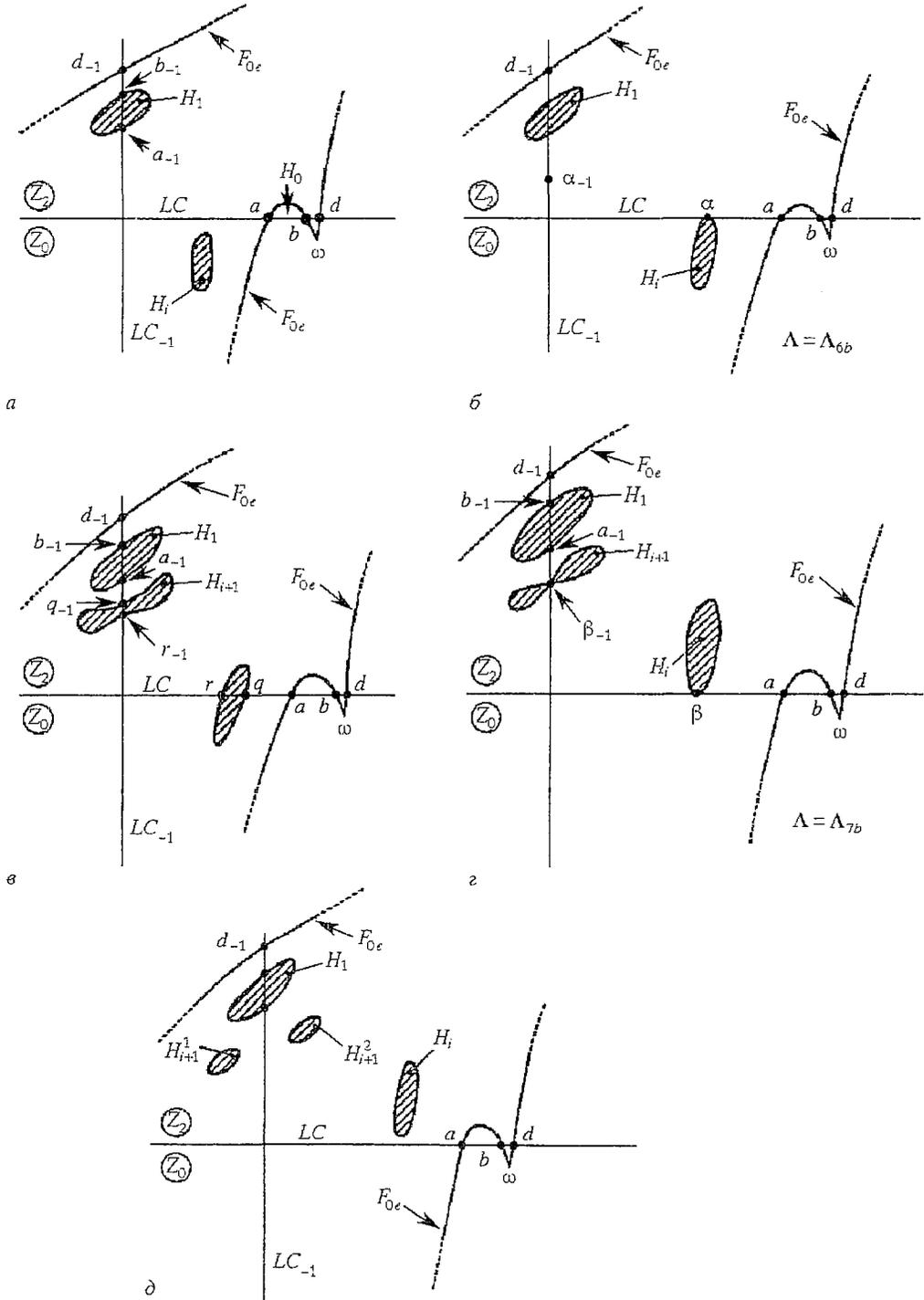


Рис. 7. [1]

«континент», «островов» на «озера». Видно также, что при изменении Λ новые острова и новые озера могут порождаться в том числе и новыми осцилляциями (изменениями кривизны) границы F_{0e} , пересекающей LC .

Рис.8 относится к части (д), причем граница бассейна может быть либо гладкой в точке ω , либо негладкой. Ситуация до бифуркации та же, что на рис.7, д. В момент бифуркации (рис. 8, а) $b=d\equiv\omega$, и $\omega_{-1}\in LC_{-1}$ - точка касания между F_{0e} и границей ∂H_1 озера H_1 , $\omega_{-1}=F_{0e}\cap\partial H_1$. Тогда, учитывая (1) и (2), имеем $e_i=F_{0e}\cap\partial H_i$, $e_i\in T^{-(i-1)}(\omega_{-1})$, $e_i\in Z_2$, что приводит к появлению двух точек касания e_{-1}^1, e_{-1}^2 между ∂H_1 и ∂H_{i+1} , $e_{-1}^1\cup e_{-1}^2=\partial H_1\cap\partial H_2$. После бифуркации (рис. 8, б) эти озера открываются в море. $T^{-1}(\omega)=\omega_{-1}^1\cup\omega_{-1}^2$, $\omega_{-1}^1\cup\omega_{-1}^2\subset T^{-(i-1)}(\omega_{-1}^1\cup\omega_{-1}^2)$, $T^{-1}(\omega_{-1}^2)=\omega_{-(i+1)}^{221}\cup\omega_{-(i+1)}^{222}$. В соответствии с теоремой 1(а), $T^{-1}(p\omega_{-1}^{12}qp)=(p_{-1}\omega_{-(i+1)}^{121}q_{-1}\omega_{-(i+1)}^{122}p_{-1})$ - остров. Озера H_1, H_i, H_{i+1} превращаются в рейды B_1, B_i, B_{i+1} . В общем случае такая бифуркация происходит, когда F имеет фрактальную структуру, поэтому рис.8 можно рассматривать как локальное изображение ситуации, которая повторяется по всей границе вследствие самоподобия. Тогда если ω - точка сборки (прообраз некоторого ранга неподвижной точки P , принадлежащей F_{0e} , когда P - точка сборки), то до бифуркации только конечное число сборок (мысов) существует на F_{0e} , которая является слабо фрактальной границей (см. рис. 7, д). После бифуркации $\omega\in Z_2$ порождает бесконечную древовидную последовательность мысов. Вследствие вышеуказанного самоподобия это приводит к сильно фрактальной границе, часть(е) теоремы 3.

Замечание. Принимая во внимание замечание из раздела 1.2, условия теоремы 3 не ограничиваются только эндоморфизмами типа (Z_0-Z_2) , если только

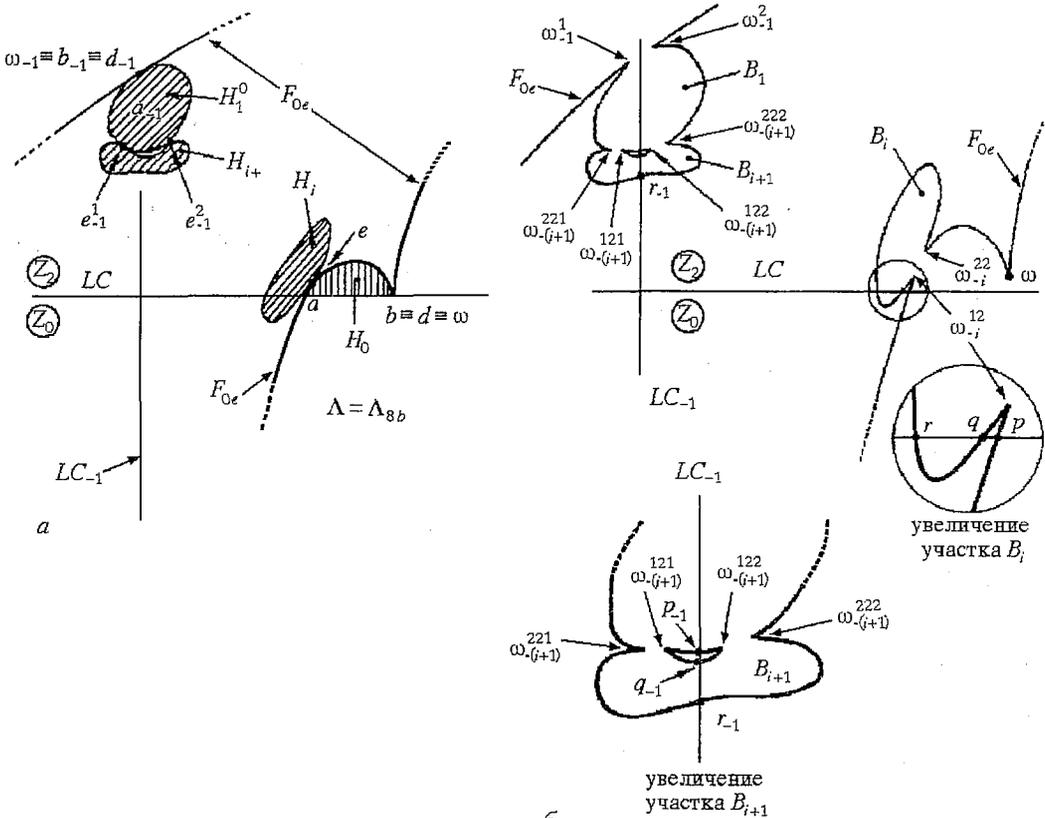


Рис. 8. [1]

связная компонента $D \cap LC$, рассмотренная в теореме 3, не соответствует ситуации на рис. 3, б. В этом последнем случае, если число связных компонент $D \cap LC$ меняется локально при переходе от ситуации, когда ∂D пересекает две ветви точки сборки, к ситуации, когда такое локальное пересечение исчезает, качественные изменения, описанные в теореме 3, не имеют места (см. [3, с.255-259] и кубическое отображение в [8]). В этом случае сборка соответствует двум листам, представленным на рис.3, которые соединяются в точке сборки, причем между ветвями сборки локально присутствуют три листа, а вне этой области - один лист.

Теорема 4. Хаотическая область (d) претерпевает бифуркацию при значении параметра $\Lambda = \Lambda^*$, которое соответствует касанию между ее границей ∂d и границей ее непосредственного бассейна ∂D_0 . Прохождение через $\Lambda = \Lambda^*$ приводит либо к разрушению (d) и возникновению странного репеллера, либо к качественному изменению свойств (d), либо к непритягивающему (repulsive) множеству Ω , Ω_1 (см. раздел 1.2).

Эта теорема была сформулирована в [12]. Когда (d) существует, её граница ∂d в общем случае состоит из конечного числа сегментов критической кривой. При $\Lambda = \Lambda^*$ граница ∂d состоит из сегментов критических кривых LC_i , где $i=0,1,\dots,m$, $LC_0 \equiv LC$, причем m является конечным целым лишь в исключительных случаях (см. [3, с.368-371]), в общем случае $m = \infty$ (см., например, [35]). В случае «смешанной хаотической области» [17], граница состоит из сегментов LC_i , перемежающихся с сегментами неустойчивого инвариантного многообразия $W^u(S)$ некоторого седлового цикла. ∂D_0 может либо быть фрактальной (см. разделы 5.2 и 5.3 в [1]), либо нет. Разрушение области (d) после прохождения значения Λ^* было показано в [12, 3]. Оно приводит к непритягивающему множеству Ω , состоящему из неустойчивых циклов вместе с их предельными точками и древовидных последовательностей прообразов этого множества точек, которые принадлежали (d) до бифуркации. Такое множество приводит к появлению хаотических переходных траекторий, уходящих либо на бесконечность, либо к другому конечноточечному аттрактору (одномерный эквивалент см. в [33, с.74-77]).

Качественные изменения (d) могут быть различных типов. Два из них относятся к трансформациям кольцевидной хаотической области (двусвязная область) либо в односвязную область (d) (Λ^* соответствует касанию с изолированным неустойчивым фокусом, принадлежащим ∂D_0), либо в несвязную периодическую (d) с периодом k (∂D_0 определяется через T^k). Эти две бифуркации описаны в [9]; другие два типа перестроек различной природы описаны в [35].

Бифуркации теоремы 4 относятся к *гомоклиническим* и *гетероклиническим бифуркациям*, и критические кривые оказываются полезными при интерпретации проблем такого рода (см. [3, с.395-397]). По отношению к обратимым отображениям эти проблемы представляют новые трудности, поскольку неустойчивое многообразие седла может привести к бесконечному числу самопересечений и пересечений с неустойчивым многообразием другого седла (см. [34, с.217-223]). Таким образом, *бифуркации, приводящие к касанию между устойчивым седловым многообразием и критическим сегментом* (это случай, когда в теореме 4 устойчивое седловое многообразие может принадлежать границе бассейна) могут иметь *гомоклинический* или *гетероклинический* тип. В самом деле, в общем случае критические кривые содержат бесконечное количество складок, пересекающихся с неустойчивыми многообразиями различных циклов, и которые не позволяют этим многообразиям пересекаться на рассматриваемых сегментах критических кривых.

2. Четыре старые модели, иллюстрирующие некоторые свойства бассейнов

Теоремы из раздела 1, относящиеся к несвязным или многосвязным бассейнам, являются формальными обобщениями относительно старых результатов, касающихся четырех примеров, демонстрирующих фундаментальные свойства.

Первый пример относится к бифуркации «односвязный бассейн ↔ несвязный бассейн» [7] (см. также [3, с. 243-244]) в квадратичном отображении T типа $(Z_0 - Z_2)$:

$$x' = y, \quad y' = -ax - y - x^2, \quad (3)$$

где a - параметр, $0.04 < a < 0.31$. Область Z_0 (прообразы отсутствуют) определяется соотношением $y > -x + a^2/4$. T имеет две неподвижные точки: $O(x=y=0)$ - устойчивый узел и A - неустойчивый узел, являющийся мысом (точкой сборки) границы непосредственного бассейна ∂D_0 аттрактора O , то есть его мультипликаторы $S_1 > 1$, $S_2 < -1$ и $|S_2| > S_1$. ∂D_0 также содержит седловой цикл (B_1, B'_1) периода два, $S_1 > 1$, $-1 < S_2 < 0$. При $a=0.05$ бассейн аттрактора O несвязный и состоит из непосредственного бассейна D_0 и одного острова $D_1 = T^{-1}(\Delta_0)$, причем область $\Delta_0 = (T, A_{-1}, S, T)$. Эта ситуация представлена на рис. 9, а, где буква с отрицательным нижним индексом означает прообраз ранга n точки, обозначенной этой буквой. Это иллюстрация части (б) теоремы 1, когда $D_1 \subset Z_0$. Рис. 9, б относится к части (а) теоремы 1 для односвязного бассейна O . Бифуркация, показанная на рис. 4, 2, которая разделяет эти две ситуации, соответствует тангенциальному касанию критической кривой (обозначенной на рисунках LC) и границы ∂D_0 , то есть когда $T \equiv Q$.

Второй пример [30] (см. также [3, с.244-247]) представляет собой отображение (3) с введенным возмущением в виде кубического члена:

$$x' = y, \quad y' = -ax - y - x^2 - 0.1x^3, \quad a=0.1. \quad (4)$$

При этом получается отображение типа $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$, то есть критическая кривая ранга один состоит из двух сегментов, ограничивающих область Z_3 , в которой каждая точка имеет три прообраза первого ранга. В двух дополнительных областях (Z_1) точки обладают только одним прообразом ранга один. Здесь две неподвижные точки O и A $(-3, -3)$ имеют те же характеристики, что и для (3), однако появляется новая устойчивая точка A_1 $(-7, -7)$ - устойчивый фокус, полный бассейн которой

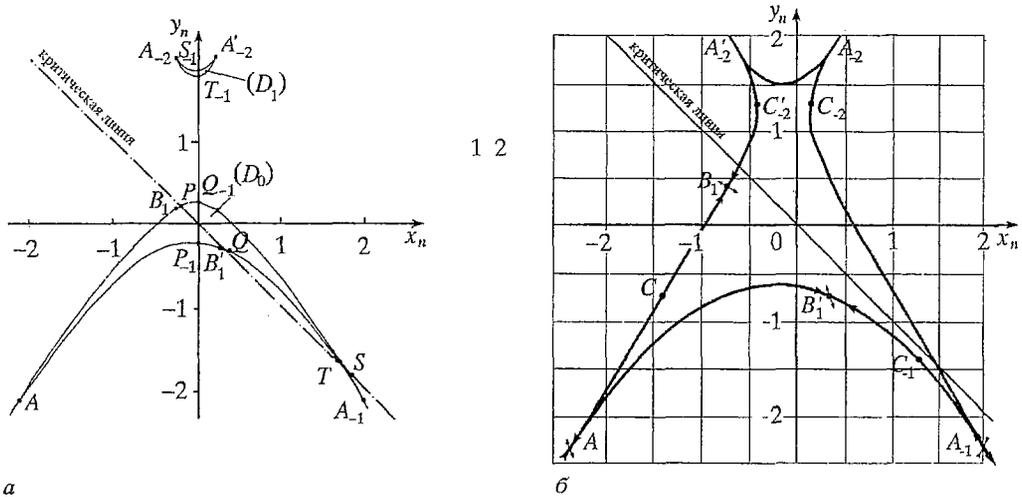


Рис. 9. Отображение (3). а) - $a=0.05$; б) - $a=0.3$. Первый опубликованный (1969) пример бифуркации «связный бассейн - несвязный бассейн» [7]

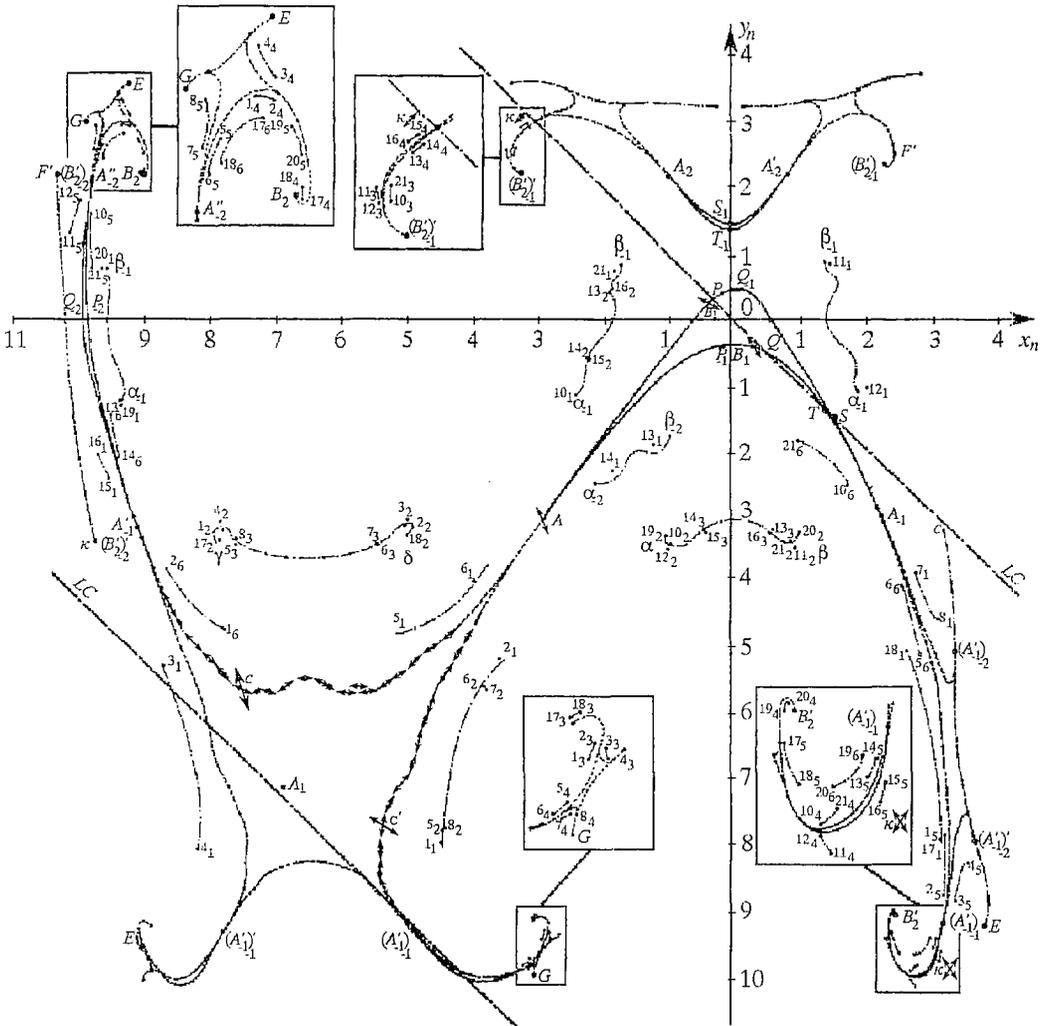


Рис. 10. Отображение (4), $a=0.1$. Первый пример (1969) фрактального бассейна. Бассейны двух притягивающих неподвижных точек O и A_1 - несвязные. Предельное множество островов принадлежит к Ω , типу [30]

также является несвязным (рис.10). Этот пример иллюстрирует замечание 2 раздела 1.2 по отношению к части (б) теоремы 1. Здесь возникают древовидные последовательности из бесконечного количества островов, относящихся к бассейнам O и A_1 , предельными точками которых (множество Ω_i , определенное в разделе 1.2) являются точки бесконечного множества отталкивающих циклов возрастающего периода, их прообразы возрастающего ранга и их точки накопления. Отображение (4), по-видимому, было первым примером фрактального бассейна. В то время слова «фрактал» еще не существовало, но описание, данное в [30], и увеличенная часть рис.11 ясно указывают на самоподобные свойства структуры бассейна.

Третий пример относится к бифуркации «односвязный бассейн \leftrightarrow многосвязный бассейн» [8] в кубическом отображении T типа $(Z_1 < Z_3)$:

$$x' = \rho(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + xy, \quad y' = \rho(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + x^2 + y^3, \quad \varphi = 2\pi/3. \quad (5)$$

Критическая кривая LC для этого отображения содержит точку сборки (символ «<<» в $(Z_1 < Z_3)$) и ограничивает область с тремя прообразами ранга один от областей с одним только прообразом ранга один. Это иллюстрация к части (б) теоремы 2 и частям (б) и (г) теоремы 3.

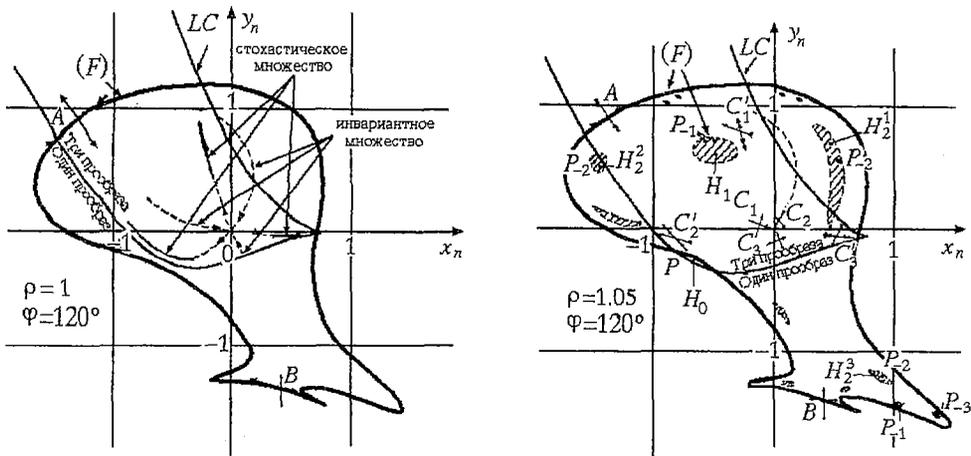


Рис. 11. Отображение (5). Первый пример (1976) бифуркации «односвязный бассейн - многосвязный бассейн», которая объясняется расположением критической кривой относительно границы бассейна [8]. P - точка, принадлежащая заливу H_0 , а все её прообразы принадлежат озерам (заштрихованные области)

Рис.11, на котором $(F) \equiv \partial D$, демонстрирует границу многосвязного бассейна хаотического аттрактора, располагающегося в Z_3 .

Четвертый пример иллюстрирует бифуркацию теоремы 4. Он был опубликован в [12] и [3, с.369-371] как, по-видимому, наипростейший пример, демонстрирующий эту фундаментальную гомоклиническую бифуркацию. Здесь T - непрерывное линейное отображение:

$$x' = y, \quad y' = y - \lambda x \quad \text{при } x \leq 6, \quad y' = y + 2x - 6(2 + \lambda) \quad \text{при } x \geq 6. \quad (6)$$

На рис.12 представлена ситуация в момент бифуркации, $\lambda = \lambda^* = 1.2$.

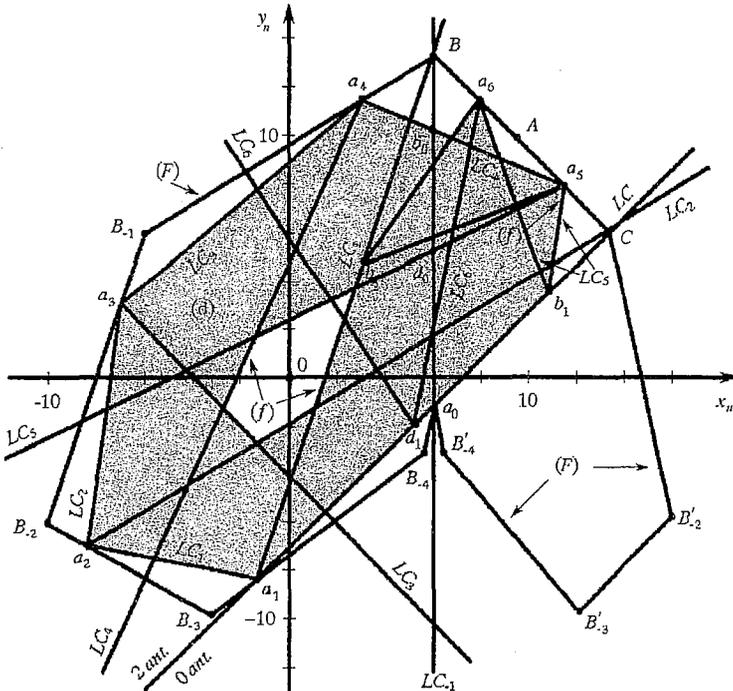


Рис. 12. Отображение (6), $\lambda = 1.2$. Бифуркационная ситуация, соответствующая теореме 1. $(F) \equiv \partial D$ - граница бассейна, $f \equiv \partial d$ - граница хаотической области (d) (серый цвет), $LC_k = T^k(LC)$, B_{-i} - прообразы точки B ранга i . Область «2 ant.» (два прообраза) соответствует Z_2 , область «0 ant.» (прообразы отсутствуют) - Z_0 . Этот рисунок, взятый из [12] (1978), похоже, является первым примером такой бифуркации

Хаотическая область (d) - кольцеобразная (двусвязная) и ограничена сегментами критических кривых LC_k , $k=0,1,\dots,6$; $LC_0=LC$. Граница бассейна (обозначенная (F) на рисунке) состоит из отрезков прямых линий, точками которых являются: (B,C) - неустойчивые циклы периода два ($S_1=1$, $S_2=4$), A - неподвижная точка ($S_1=-1$, $S_2=2$) и прообразы ранга n точек (B,C), $n=1,2,3,4$.

При $\lambda=\lambda^*$ имеем $(F)\cap\partial d=U_{i=0}^{i=6}a_i$, где ∂d - граница области (d).

При $1.1<\lambda\leq\lambda^*$, (d) - хаотический аттрактор. При $\lambda>\lambda^*$, (d) превращается в странный репеллер (repulsor), приводя к появлению в этой области переходных траекторий, уходящих на бесконечность.

3. Фундаментальные бифуркации на примере квадратичных ($Z_0 - Z_2$) отображений

В этом разделе представлены основные результаты подробного исследования, проведенного в [1] для квадратичного отображения T:

$$x' = ax + y, \quad y' = x^2 + b. \quad (7)$$

Здесь также рассматривается другое квадратичное отображение, исследованное в [2],

$$x' = y + ex, \quad y' = 0.5x + gy + 0.1x^2 + hxy \quad (8)$$

с единственной целью проиллюстрировать содержание теорем из первого раздела. Эти два отображения имеют тип ($Z_0 - Z_2$). Детали и доказательства представленных ниже результатов можно найти в работах, ссылки на которые указаны для каждого отображения. Для всех рисунков, рассматриваемых ниже, значения параметров указаны в подписях к рисункам.

3.1. Бифуркации отображения (7)

3.1.1. Положительные значения параметра a. Если существует конечноудаленное притягивающее множество A, то его бассейн является односвязным, $D\equiv D_0$ и это отображение имеет неподвижную точку P на границе бассейна ∂D_0 аттрактора A, причем P - седловая точка или неустойчивый узел, который не является мысом для ∂D_0 , то есть $S_1>1$, $S_2<-1$ и $|S_2|<S_1$ при $a>0$. T имеет вторую неподвижную точку Q, которая является неустойчивым фокусом, окруженным кольцевой хаотической областью [3] при $a=1$ и $0.59<b<0.59873$.

Рис.13, а, б, в иллюстрируют теорему 2 и части (б)+(г) теоремы 3. Здесь озера появляются в результате бифуркации (б) теоремы 3 ($\Lambda=\Lambda_{3b}$, рис. 5, б) и затем серии бифуркаций (г) теоремы 3 ($\Lambda=\Lambda_{6b}$, $\Lambda=\Lambda_{7b}$, рис.7, б, в, г, д). Отображение (7) представляет простой пример ситуации, в которой бесконечное множество озер имеет только две предельные точки: Q и ее прообраз первого ранга $Q_{-1}\in Z_0$. Следовательно, эти озера не имеют фрактальной структуры.

В отличие от отображения (б) здесь бифуркация $\lambda=\lambda^*$ теоремы 4 приводит к бесконечному множеству нетрансверсальных точек касания $\partial d\cap\partial D_0$, причем P является их предельной точкой, если она седловая и принадлежит ∂D_0 (случай рис.13, г).

3.1.2. Отрицательные значения параметра a. Если существует конечноудаленное притягивающее множество A, то это отображение имеет неподвижную точку P на границе бассейна ∂D_0 аттрактора A, причем P - неустойчивый узел, мыс (точка сборки) границы ∂D_0 , то есть $S_1>1$, $S_2<-1$ и $|S_2|>S_1$, при $a<0$.

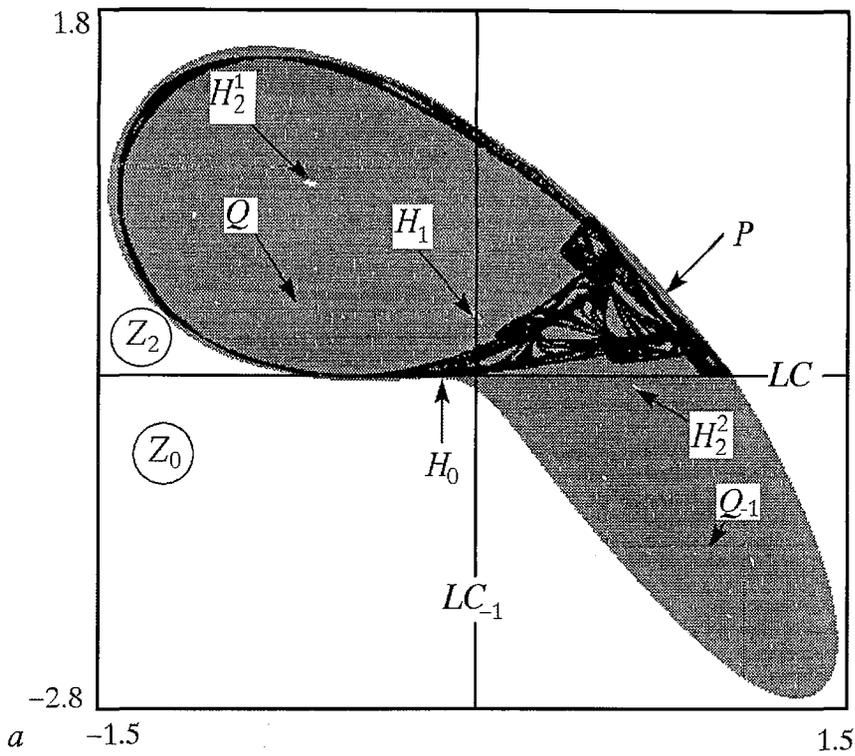


Рис. 13, а. Отображение (7), $a=1$, $b=-0.5952$. Черный цвет соответствует хаотическому аттрактору (d). Ситуация соответствует рис. 5, в [1]

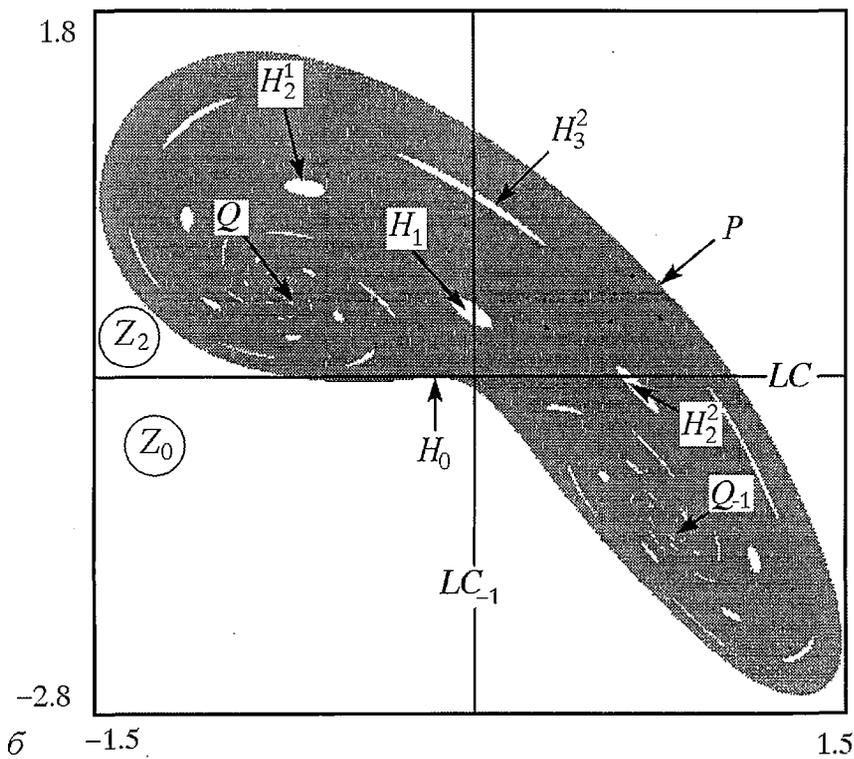


Рис. 13, б. Отображение (7), $a=1$, $b=-0.597$. Новые озера образуются из $H_2^2 \cap LC$ (ситуация рис. 7, в) [1]

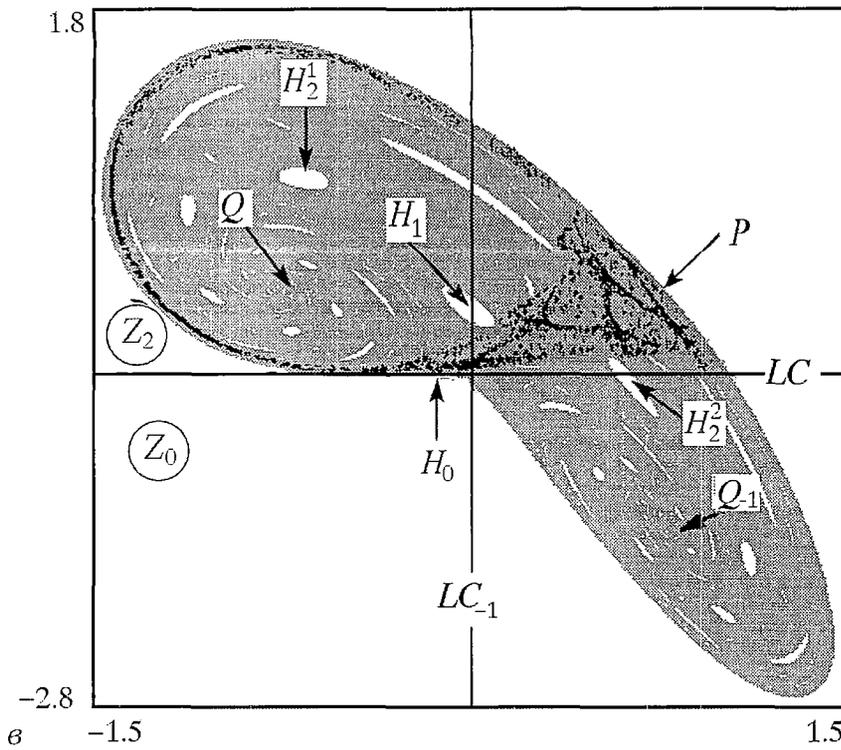


Рис. 13, в. Отображение (7), $a=1$, $b=-0.598$. Новые последовательности озер возникают при переходе озер из Z_0 в Z_2 [1]

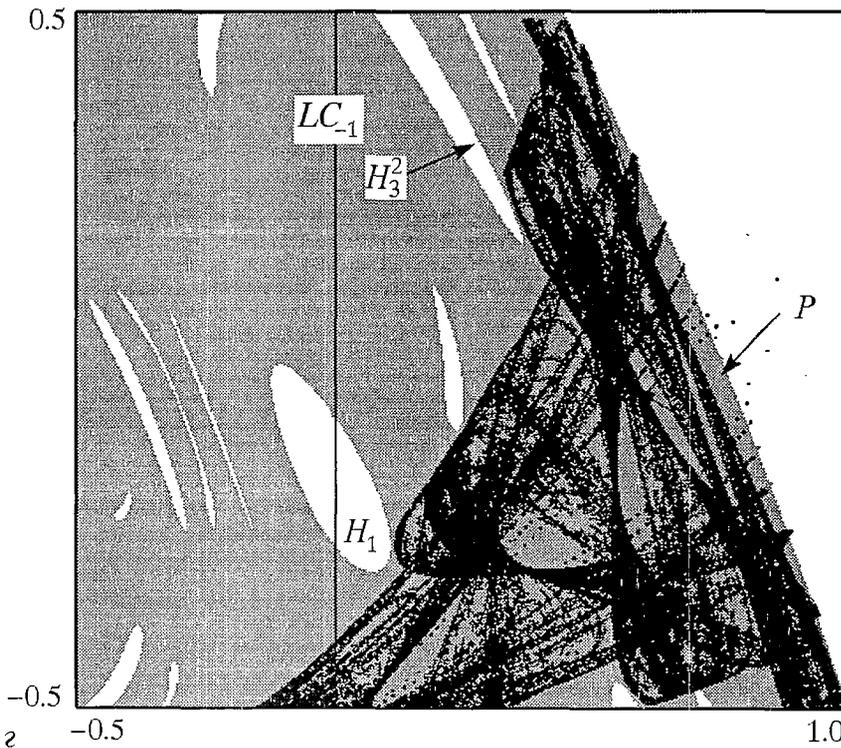


Рис. 13, г. Отображение (7), $a=1$, $b=-0.59873$. Языки хаотического аттрактора имеют бесконечно много точек касания с границей бассейна ∂D (устойчивым многообразием седла P) [1]

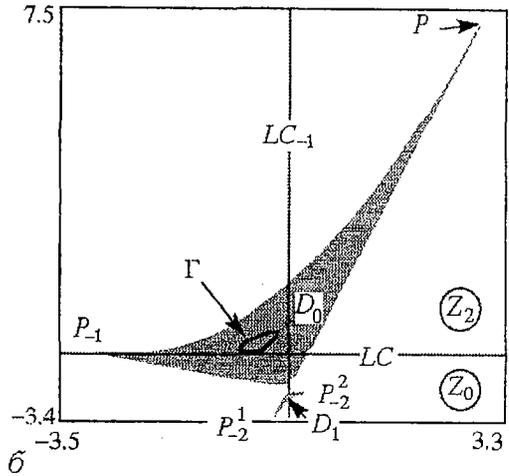
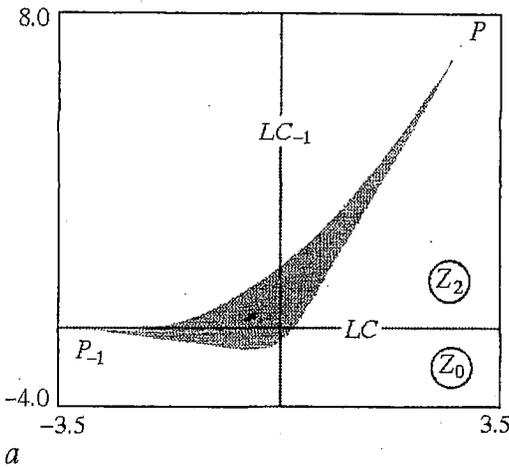


Рис. 14, а. Отображение (7), $a=-1.5, b=-1.5$. Односвязный бассейн ограниченных итерационных последовательностей, $P_{-1} \in Z_0, T^{-1}(P) = P \cup P_{-1}$ [1]

Рис. 14, б. Отображение (7), $a=-1.5, b=-1.59$. Несвязный бассейн, $D=D_0 \cup D_1, P_{-1} \in Z_2$, после бифуркации соответствующей $\Lambda=\Lambda_{1b}$ на рис. 4, б. $T^{-1}(P_{-1})=T_1^{-1}(P_{-1}) \cup T_2^{-1}(P_{-1})=P_{-2}^1 \cup P_{-2}^2$ [1]

Рис. 14, а, б иллюстрируют часть (а) теоремы 3 при прохождении через первую бифуркацию $\Lambda=\Lambda_{1b}$ (см. рис.4), что соответствует касанию между ∂D_0 и LC , при этом $a=c$ (см. рис.4,б). Здесь последовательность $T^{-n}(a)$ вырождена и состоит из одной только точки $a_{-1} \equiv c_{-1}$. Рис. 14, в, г иллюстрируют вторую бифуркацию $\Lambda=\Lambda_{2b}$ (см. рис. 4, г), которая соответствует тангенциальному касанию между ∂D_0 и LC , такому, что $a=b$, и приводит к возникновению нетрансверсального, но нетангенциального касания между ∂D_0 и границей ∂D_1 области D_1 . После бифуркации (см. рис. 4, д или 22, з) бассейн D становится связным. Отображения на рис. 14 получены для $a=-1.5$ при изменении b .

Часть (б) теоремы 3 (см. рис. 5, а, б, в) проиллюстрирована рис.15, а, б, в, з, полученными для значения $b=-0.42$ при изменении a . Бифуркация ($\Lambda=\Lambda_{3b}$, см. рис. 5, б) происходит в момент контакта между ∂D_0 и LC ($a=b$), в ситуации,

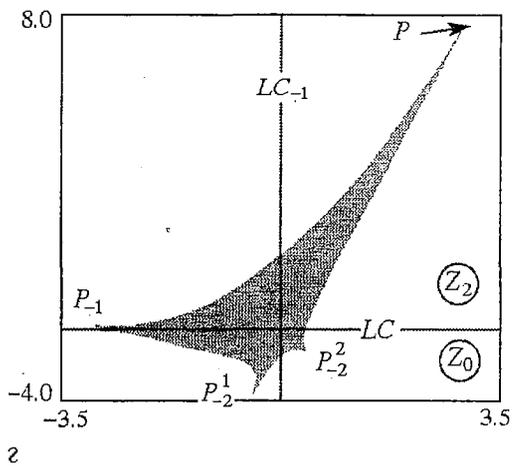
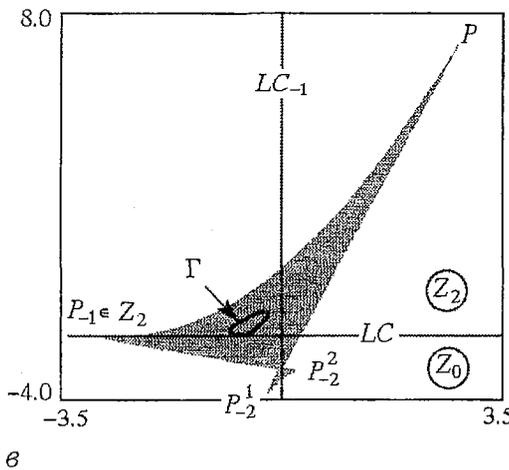


Рис. 14, в. Отображение (7), $a=-1.5, b=-1.601$. Бифуркация, соответствующая $\Lambda=\Lambda_{2b}$ на рис. 4, г. Γ - притягивающая замкнутая инвариантная кривая [1]

Рис. 14, г. Отображение (7), $a=-1.5, b=-1.75$. Бассейн ограниченных итерационных последовательностей становится односвязным после бифуркации на рис. б, в [1]

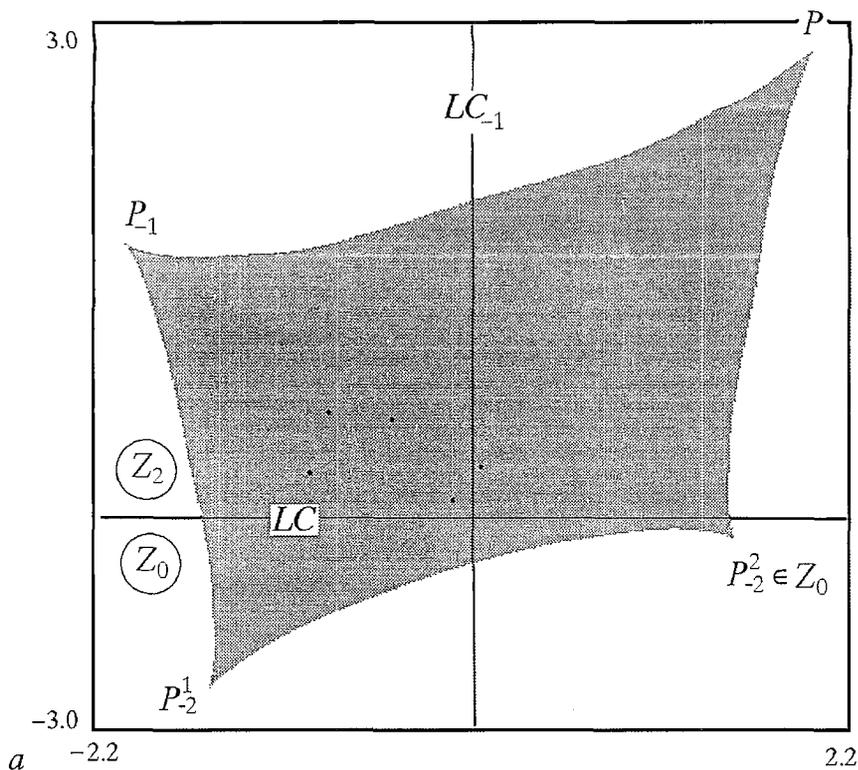


Рис. 15, а. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.2$. Односвязный бассейн ограниченных итерационных последовательностей [1]

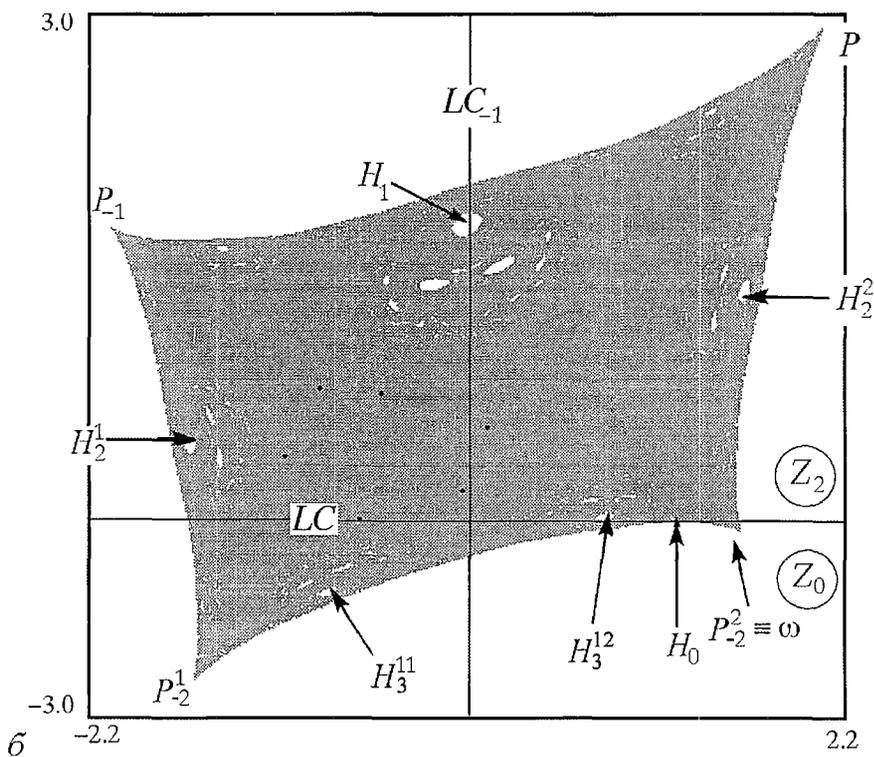


Рис. 15, б. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.30$. Многосвязный бассейн D_0 . $H_1=T^{-1}(H_0)$, $T^{-1}(H_1)=H_2^1 \cup H_2^2$ [1]

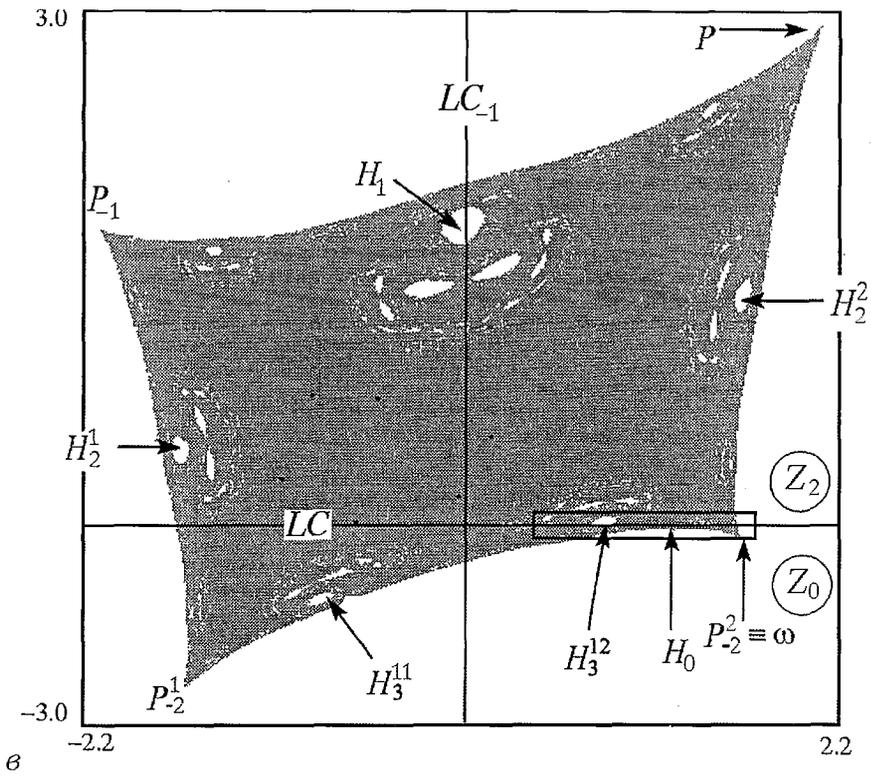


Рис. 15, в. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.31$. Размер озер в D_0 возрастает [1]

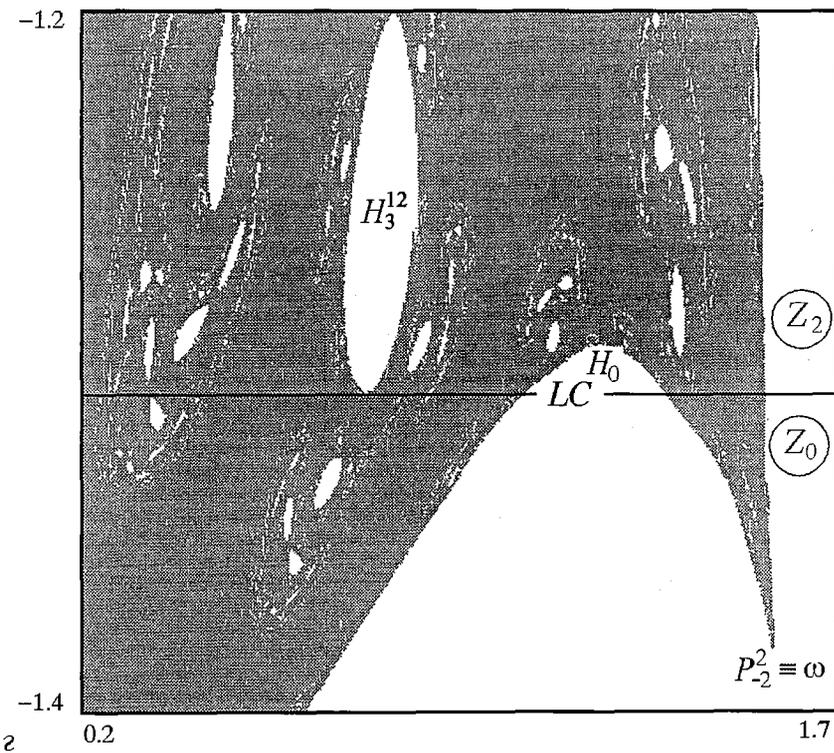


Рис. 15, г. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.31$. Увеличенная часть рис.15,в, выделенная прямоугольником [1]

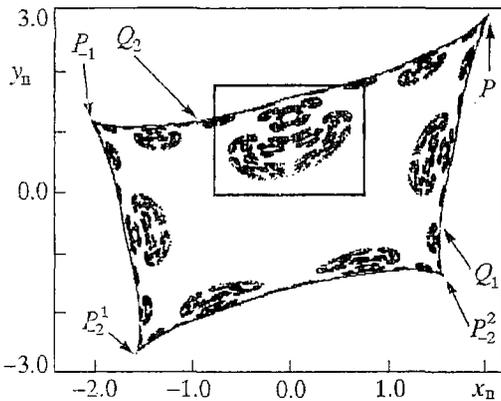


Рис. 16. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.30$. Древоподобная последовательность прообразов цикла периода 2 (Q_1, Q_2). Прообразы принадлежат предельному множеству озер D . Такая последовательность воспроизводит форму непосредственного бассейна D , что подтверждает фрактальную структуру бассейна [1]

что ∂D_0 имеет слабо фрактальную структуру. На рис.16 показаны прообразы ранга $n=1, \dots, 12$ точек P и циклов периода $k=2$, и видно, что это предельное множество ∂D_0 воспроизводит форму ∂D_0 .

Рис.17 демонстрирует образование рейда при прохождении через бифуркацию $\Lambda=\Lambda_{8b}$ (см. рис. 8, а), то есть теперь прообразы ранга два P_{-2}

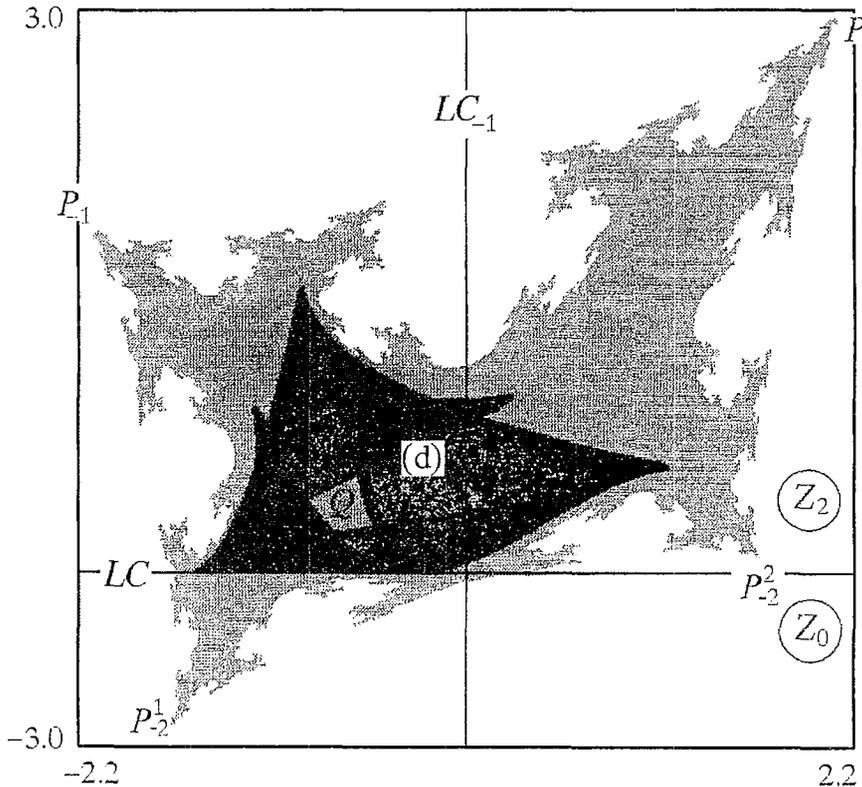


Рис. 17. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.6$. Озера бассейна D открываются в «море» после бифуркации, соответствующей $\Lambda=\Lambda_{8b}$ на рис. 8, а. Внешняя граница D теперь сильно фрактальна. Черная область (d) - хаотический аттрактор [1]

приводящей к возникновению залива H_0 . После бифуркации элементы древоподобной последовательности точек $T^{-n}(a=b)$, $n=1, 2, \dots$ (см.рис. 5, б) становятся зародышами древоподобной последовательности озер $T^{-p}(H_0)=\cup H_p^{i, \dots, r, s}$, $p=1, 2, \dots$

Если ранг этих прообразов стремится к бесконечности, то предельное множество Ω_1 древоподобной последовательности дырок состоит из P , бесконечного множества неустойчивых циклов на ∂D_0 , возникших при бифуркациях удвоения периода из Q_1, Q_2 , и бифуркационной структуры типа ящик-в-ящике (box-within-a-box) [33], существующей для T^2 при $a \neq 0$ (см. раздел 3.2), их точек накопления при стремлении периода циклов к бесконечности, и прообразов любого ранга всех этих точек. Отсюда следует,

неподвижной точки типа «мыс» принадлежат Z_2 , и озера, существовавшие до бифуркации, теперь сообщаются с морем. Здесь граница ∂D_0 имеет сильно фрактальный характер. Этот рисунок также демонстрирует хаотическую область (d) внутри бассейна, который разрушается при прохождении параметра b через бифуркационное значение, соответствующее содержанию теоремы 4 (нетрансверсальное касание ∂D_0 и ∂d). После этой бифуркации (рис.18) остается отталкивающее множество, приводящее к появлению переходных траекторий к бесконечно удаленному аттрактору.

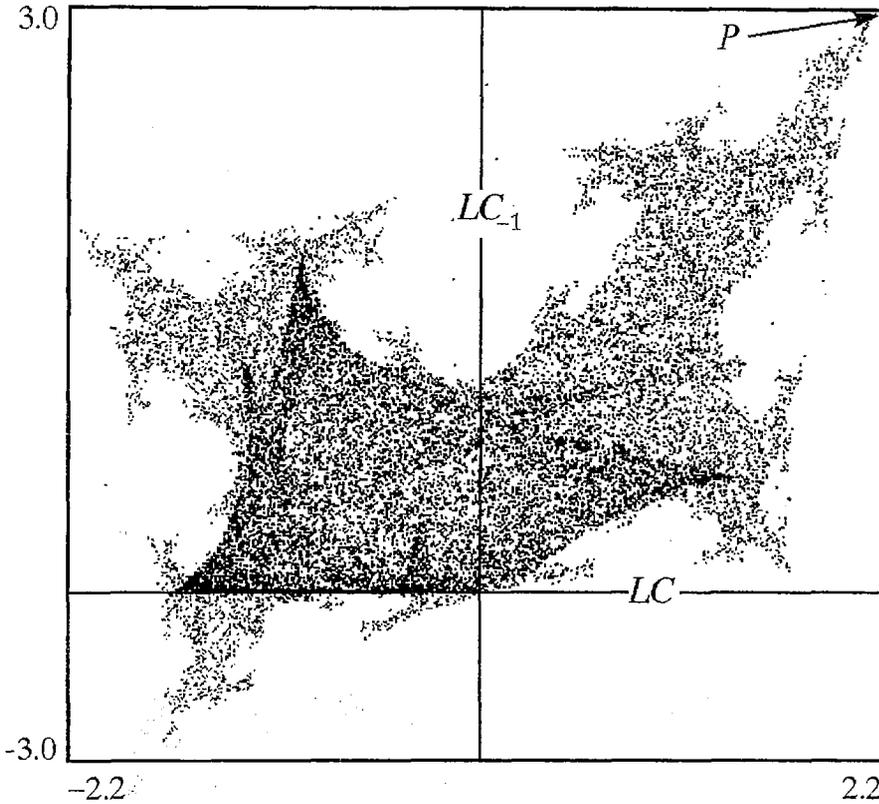


Рис. 18. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.65$. Хаотическая переходная траектория неограниченной итерационной последовательности после прохождения через бифуркационное значение $\Lambda=\Lambda^*$, соответствующее теореме 4 [1]

3.2. Некоторые свойства отображения (8)

Это отображение исключительно богато интересными бифуркациями, некоторые из которых детально описаны в [2]. В частности, при $g=0.1$, $h=0.1013$ и $e \approx 0.43754$, происходит бифуркация части (а) теоремы 3, но в отличие от отображения (7), она приводит теперь к образованию бесконечного количества островов, обладающих предельным множеством Ω_i (см. раздел 1.2). Эти острова принадлежат полному бассейну устойчивой неподвижной точки. При возрастании e имеет место бифуркация части (в) теоремы 3. Затем, при $e_{2b}^1 \approx 0.5806668 < e < 0.61$ происходит каскад бифуркаций $e=e_{2b}^n$, $n=2,3,\dots$, типа $\Lambda=\Lambda_{2b}$, приводящий к объединению (aggregation) возрастающего числа островов с непосредственным бассейном. Это приводит к связанному бассейну при $n \rightarrow \infty$.

4. Объединение озер в кубическом отображении

Это отображение типа $(Z_1 < Z_3 >)$, характеризующееся замкнутой критической кривой LC с двумя точками сборки (LC имеет форму губ, что символизируется знаком «<...>»), которая ограничивает область Z_3 с тремя прообразами первого ранга, окруженную неограниченной областью Z_1 с одним только прообразом первого ранга. LC_{-1} является эллипсом. Отображение T имеет вид

$$x' = y, \quad y' = (y/5 - x/2)(x^2 + y^2 - 6x/5 - \lambda y + 1/2) + x. \quad (9)$$

Впервые это отображение было исследовано в [36] и [3] для $1.1 \leq \lambda \leq 1.3$. При $3.72 \leq \lambda \leq 4.7$, T претерпевает бифуркации теорем 3 и 4 в ситуациях, приводящих к бассейнам, имеющим структуру, отличную от рассмотренных выше.

При $3.72 \leq \lambda \leq 3.73775$ это отображение имеет два конечноудаленных аттрактора: устойчивую неподвижную точку O ($x=y=0$) и хаотическую область (d) , бассейн которой представлен на рис. 19 для $\lambda=3.73$. Белая часть рисунка соответствует неограниченным итерационным последовательностям. Область, окрашенная в темно-серый цвет, относится к (многосвязному) бассейну точки O , дополнительная к ним область - (несвязный) бассейн (d) . При $\lambda = \lambda^* = 3.73775$ происходит бифуркация теоремы 4. При $\lambda > \lambda^*$ бассейн (d) разрушается и остается единственный конечноудаленный аттрактор - O . Остается отталкивающее (repulsive) множество Ω_i (см. раздел 1.2), рождающееся из сингулярных точек области (d) и их прообразов.

Если образуется залив H_0 (рис. 20, $\lambda=4$), его прообразы порождают древовидную последовательность озер, предельными точками которой являются точки множества Ω_i . Тогда его озерная структура фрактальна. Существует интервал параметров, при котором **имеются два залива $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$** ,

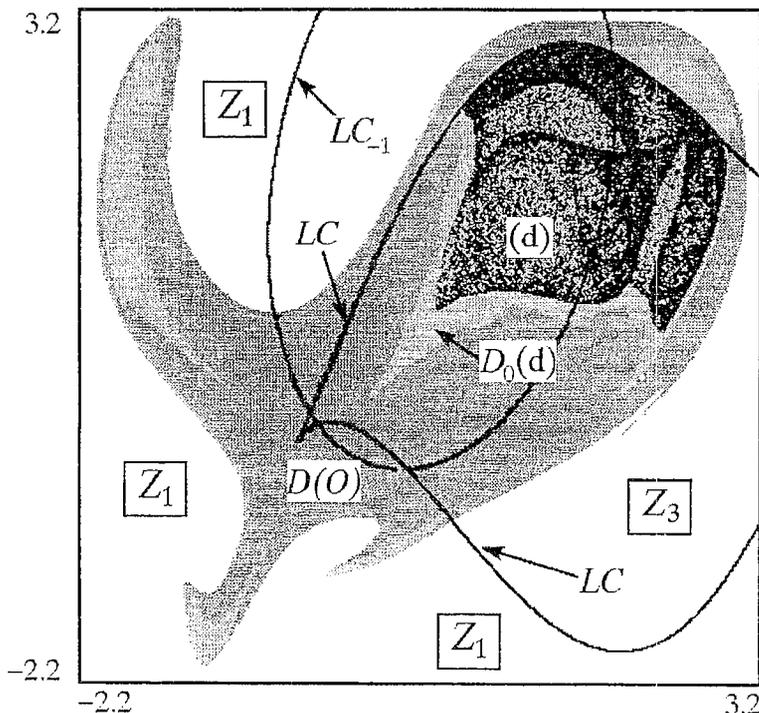


Рис. 19. Отображение (9), $\lambda=3.73$. Многосвязный бассейн $D(O)$ притягивающей неподвижной точки O (темно-серый цвет), и несвязный бассейн $D(d)$ хаотической области (d) (светло-серый)

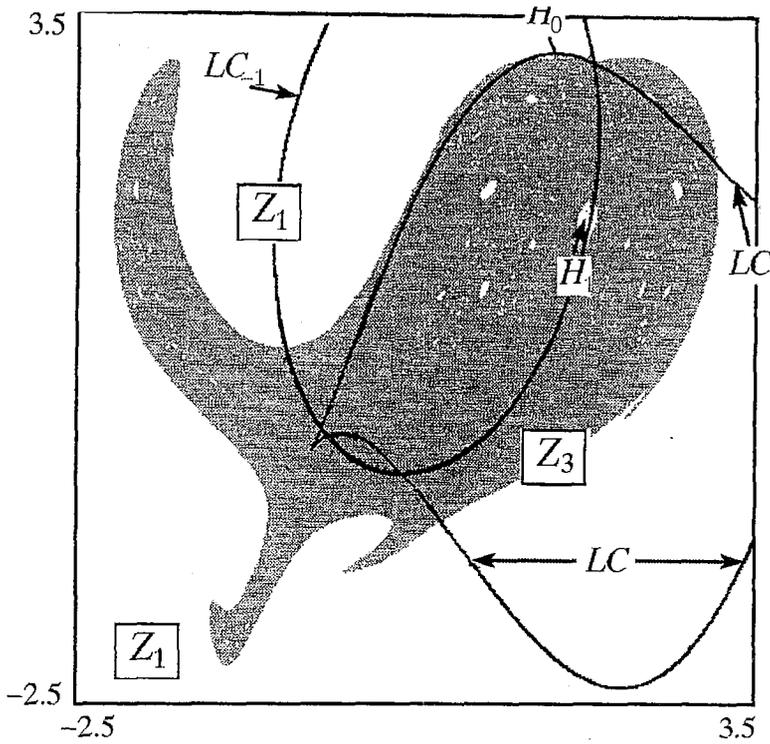


Рис. 20. Отображение (9), $\lambda=4$. Хаотическая область (d) разрушилась в результате бифуркации $\lambda=\lambda^*$ теоремы 4, породив отталкивающее множество Ω_i , которое является предельным для множества озер многосвязного бассейна $D(O)$ (темно-серый)

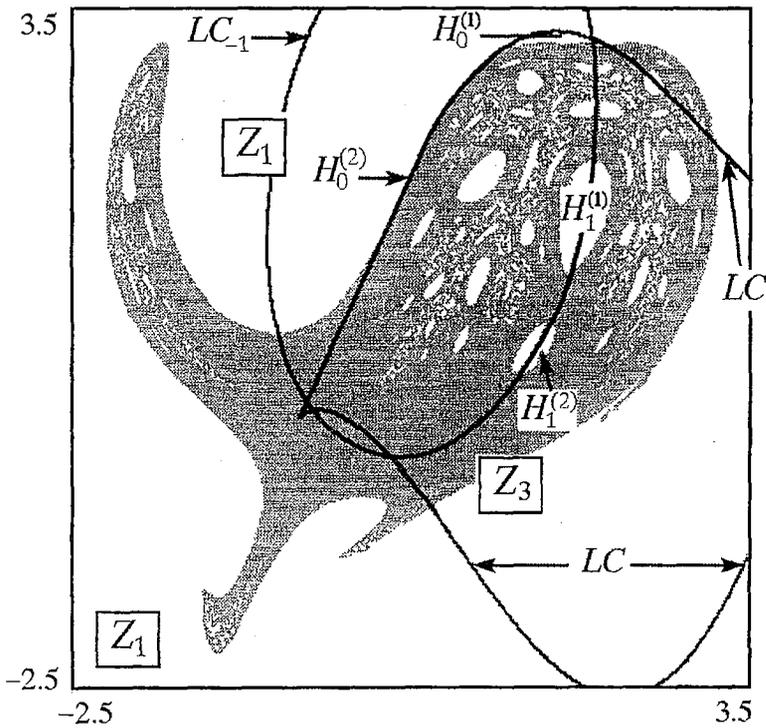


Рис. 21. Отображение (9), $\lambda=4.1$. Новая древовидная последовательность озер образовалась из нового залива $H_0^{(2)}$. $H_0^{(1)}$ соответствует заливу H_0 на рис. 20

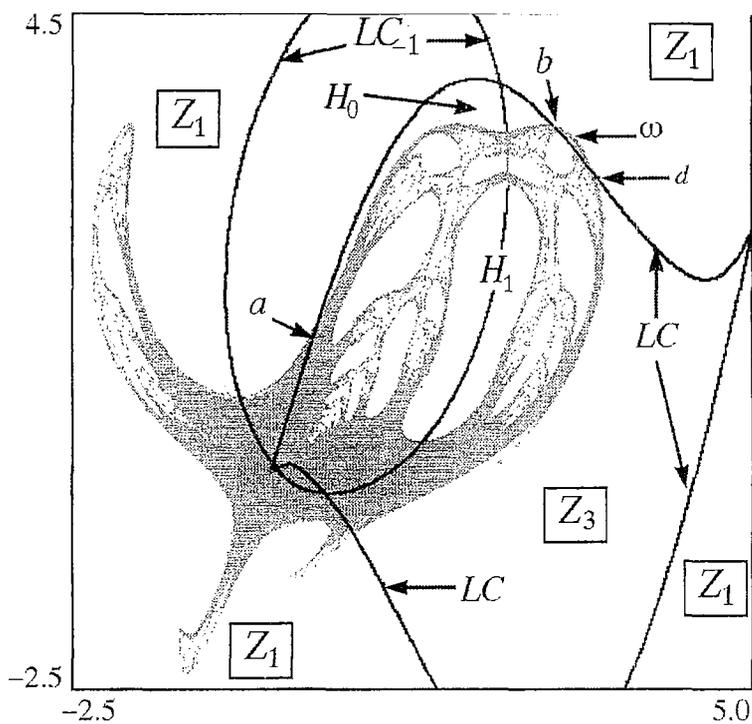


Рис. 22. Отображение (9), $\lambda=4.5$. Два залива $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ слились, приводя к слиянию озер

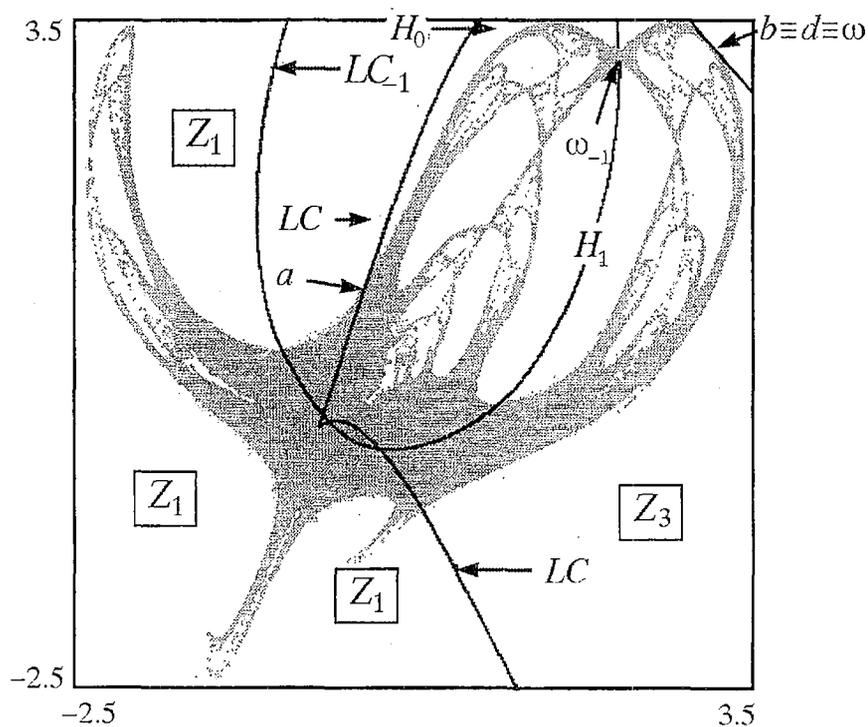


Рис. 23. Отображение (9), $\lambda=4.6985$. Ситуация эквивалентна изображенной на рис.8,a , то есть $\Lambda=\Lambda_{sb}$. При больших значениях λ озера превращаются в рейды и бассейн $D(O)$ становится односвязным

пересекающиеся с LC_{-1} , как показано на рис. 21 ($\lambda=41$). Рис. 22 ($\lambda=4.5$) показывает, что происходит бифуркация типа (г) теоремы 3 (см. рис.5 и 7), приводящая к объединению озер. Рис. 23 соответствует бифуркации типа (д) теоремы 3 (см. рис. 8, а), однако две крайние точки возникающих «рейдов» не являются мысами (сборками), поскольку точка нетрансверсального касания $\omega = \partial D \cap LC$ - не является мысом. После этой бифуркации бассейн аттрактора O становится односвязным.

Заключение

Эта статья, также как и различные работы, упомянутые здесь и более подробно в [1], выявляет фундаментальное значение, которое имеют критические кривые двумерных необратимых отображений (эндоморфизмов) для определения природы бассейнов притяжения и при изучении их бифуркаций. Оказывается, что возможны новые, по сравнению с [1], типы фрактализации границы. Более того, необходимо отметить, что возможны другие типы объединения островов, чем те, что описаны в [2], например, в случае отображения (8) при $h=0.1013$ в интервале значений параметра $0.61 < e < 1.6$. Интервал $1.468 < e < 1.495$ вообще чрезвычайно богат различными сложными объединениями элементов структур и возникновением «озер внутри островов», которые могут быть объяснены с помощью теорем из раздела 1.

С другой точки зрения, интересно отметить, что отображения (8) и (9) приводят к неклассической бифуркации, при которой возникает целая особая кривая, состоящая из неподвижных или периодических точек, и которая существует только при бифуркационном значении параметра (см. [3, с.161-162, 175-177] и [33, с.202-203]). Для отображений (8) и (9) эта бифуркация приводит к внезапному изменению формы бассейна [36,37 и 3, с.252-260,].

Понятие критической кривой обобщается на n -мерные необратимые отображения, $n > 2$, путем введения понятия *критического многообразия* [38]. Критические многообразия имеют столь же фундаментальное значение, что и критические кривые, для определения свойств бассейнов и их бифуркаций.

Библиографический список

1. Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H., Cathala J.C. **1994**, «Basin bifurcations of two-dimensional noninvertible maps. Fractalization of basins», Int.J.of Bif. and Chaos. Vol. 4, № 2. P. 343.
2. Mira C., Rauzy, **1995**, should be published in Int.J.of Bif. and Chaos.
3. Gumowski I., Mira C., **1980**, «Dynamique chaotique», Ed. Cépadués, Toulouse.
4. Mira C., **1964**, «Détermination pratique du domaine de stabilité d'un point d'équilibre d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles», Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 261, groupe 2. P. 5314.
5. Gumowski I., Mira C. **1965**, «Sur un algorithme de détermination du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles», Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 260. P. 6524.
6. Mira C. **1966**, «Sur quelques propriétés de la frontière du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence d'ordre 2, et sur un cas de bifurcation de cette frontière», C.R.A.S. (Comptes Rendus Acad. Sc.), Serie A, 262. P. 951.
7. Mira C., Roubellat J.C., **1969**, «Cas où le domaine de stabilité d'un ensemble limite attractif d'une récurrence du deuxième ordre n'est pas simplement connexe», C.R.A.S. T.268, série A. P. 1657.
8. Bernussou J., Liu Hsu, Mira C., **1976**, «Quelques exemples de solutions stochastiques bornées dans les récurrence autonomes du 2 ordre», Transformations ponctuelles et applications, Colloque CNRS, sept.73 Toulouse, Ed.CNRS Paris 1976.
9. Barugola A., Cathala J.C., Mira C., **1986**, «Annular chaotic areas», Non Linear Analysis TM.A., 10(11), P. 1223.
10. Cathala J.C., **1989**, «On some properties of absorptive areas in 2 order endo-

11. Gumowski I., Mira C., 1977, «Solutions chaotiques bornées d'une récurrence ou transformation ponctuelle du second ordre à inverse non unique», Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 285, série A, P. 477.
12. Gumowski I., Mira C., 1978, «Bifurcation déstabilisant une solution chaotique d'un endomorphisme du 2^e ordre», Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 286, série A, P. 427.
13. Mira C., 1990, «Systèmes asservis non linéaires», Ed.Hermès, Paris.
14. Kawakami H. Kobayashi K., 1979, «Computer experiments on chaotic solutions of $x(t+1)-ax(t+1)-x^2(t)=b$ », Bull. Fac. of Engin., Tokushima University, 16. P. 29.
15. Cathala J.C., 1990, «Multi connected chaotic areas in second order endomorphisms», Int.J.Systems Sci. Vol. 21, № 5. P. 863.
16. Gardini L., 1991, «On the global bifurcation of two-dimensional endomorphisms by use of critical lines», Non Linear Analysis T., M.A., 18, 4, P.361.
17. Barugola A., Cathala J.C., 1992, «An extension of the notion of chaotic area in two-dimensional endomorphisms», ECIT (European conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept.92.
18. Gardini L., 1991, «Global analysis and bifurcations in two-dimensional endomorphisms by use of critical lines», Proceedings of ECIT (European Conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept.91, World Scientific Ed., Singapore. P. 112.
19. Gardini L., 1992, «Homoclinic orbits of saddles in two-dimensional endomorphisms», Proceedings of ECIT (European Conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept.92.
20. Gardini L., 1994, «Homoclinic bifurcations in n-dimensional endomorphisms due to expanding periodic point», Non Linear Analysis T., M.A., (23) 8. P. 1039.
21. Gardini L., Abraham R., Fournier-Prunaret D. and Record R.J., 1994, «A double logistic map», Int.J. of Bif. and Chaos. Vol. 4, № 1. P. 145.
22. Adomaitis R.A., Kevrekidis I.G., 1991, «Noninvertibility and the structure of basins of attraction in a model control system», J.Non.Sci. Vol. 1. P. 95.
23. Frouzakis C.E., Adomaitis R.A., Kevrekidis I.G., Golden M.P., Ydstie B.E., 1992, «The structure of basin boundaries in simple adaptive control system», Proc. NATO Advanced Summer Institute. T.Bountis ed.
24. Adomaitis R.A., Frouzakis C.E., Kevrekidis I.G., 1992, «Global stability analysis of an adaptively-controlled mixing tank experiment», presented at the 1992 American Control Conference, Chicago.
25. Fournier-Prunaret D., Uhl C., Macchi O., Dinar S., 1993, «Chaotic bifurcations in the DPCM transmission system with order two predictor», Proceedings ECCTD 93 (Davos, Swiss Aug.30-Sept.3, 1993), Elsevier. P. 837.
26. Delli Gatti D., Gallegati M., Gardini L., 1993, «Investment confidence, corporate debt and income fluctuations», Jour. of Economic Behaviour and Organisation, should be published.
27. Gardini L., 1993, «On a model of financial crisis. Critical lines as new tools of global analysis», Nonlinear Dynamics in Economics and Social Sciences, Gori. Geronazzo eds., Springer-Verlag, N-Y.
28. Beddington J.R., C.A.Free Lawton H., 1975, «Dynamics complexity in predator-prey models framed in difference equations», Nature 255. P. 58.
29. Guckenheimer J., Oster G.F., Ipaktchi A., 1977, «The dynamics of density depended population models», J.Math.Biology, Vol. 4. P. 101.
30. Roubellat F., 1969, «Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et applications aux systèmes a données échantillonnées», Thèse de Doctorat ès - Sciences Physiques, n.364, Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
31. Mira C., Gardini L., Barugola A., and Cathala J.C., 1996, «Chaotic Dynamics. Two-dimensional endomorphisms (non-invertible maps) problems», Book should be published in «Nonlinear Science», Series A, World Scientific.
32. Mira C., 1980, «Complex dynamics in two-dimensional endomorphisms», Non Linear Analysis T., M.A., Vol. 4, 6. P. 1167.
33. Mira C., 1987, «Chaotic dynamics», World Scientific, Singapour.
34. Gumowski I., Mira C., 1980a, «Recurrences and discrete dynamic systems», Lecture notes in Mathematics, Springer.
35. Mira C., Narayaninsamy T., 1993, «On two behaviours of two-dimensional

35. Mira C., Narayaninsamy T., 1993, «On two behaviours of two-dimensional endomorphisms: role of the critical curves», *Int. J. of Bif. and Chaos*. Vol. 3, № 1. P. 187.
 36. Gumowski I., Mira C., 1969, «Sensitivity problems related to certain bifurcations in nonlinear recurrences relations». *Automatica*, 5. P. 303.

37. Mira C., Babary J.P., Giraud A., 1968, «Indice de Poincare d'une recurrence autonome du deuxieme ordre», *Electronics Letters*. Vol.4, № 5. P. 90.

38. Mira C., 1978, «Systèmes à dynamique complexe et bifurcations boîtes emboîtées», 1 partie, *RAIRO Automatique*. Vol.12, № 1. P. 63, 2 partie. Vol.12, № 2. P. 171.

Работа была представлена на школе - конференции «Дифференциальные уравнения: бифуркации и хаос», Кацевели, Крым, Украина, 3-14 мая, 1994.

GESNLA-LESIA INSA.
 Complexe scientifique de Rangueil
 Toulouse France

Поступила в редакцию 26.12.94
 после переработки 18.07.95

Перевод И.П. Сатаева

SOME RESULTS ON BASINS GENERATED BY TWO-DIMENSIONAL NONINVERTIBLE MAPS

Christian Mira

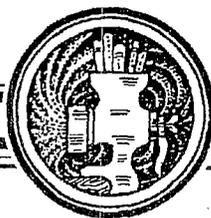
This paper in summarized presentation of some basin properties related to non-invertible maps of the plane, published either in relatively ancient papers written in french language, or in very recent ones. Such properties are obtained by using the method of critical curves, natural extension of the notion of critical point of one-dimensional endomorphisms. More particularly bifurcations leading to a fractalization of the basin boundary are illustrated by examples having a simple form.



Mira Christian - birthday 6 March 1934 Meknes, Marocco. Engineer diploma Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique de Toulouse (June 1957). Doctorat es-sciences Physiques Faculte des Sciences de Toulouse (March 1961). From 1965 Professor of Control Engineering and Nonlinear Dynamics (Institut National des Sciences Appliquees de Toulouse). Research activities: optimization theory (1965-1970); variable structure control (from 1969); nonlinear dynamics (from 1958) in the following fields: complex dynamics and chaotic dynamics (from 1966, at the beginning under the name of «Pulkin phenomenon») and applications to the dynamics of rectifiers with voltage and current feedback (1966-1971 and 1986-1989); dynamics of N -dimensional noninvertible maps models ($N=1,2$ from 1963, $N>2$ sometimes). Author of 206 scientific publications.

Author of the following books:

Optimization in Control theory and practice. Cambridge: University Press, 1968 (with *I. Gumowski*).
 Problèmes posés par l'optimisation. Dunod, 1970 (with *I. Gumowski*).
 Cours de systhmes asservis non liniaires (pour le certificat C3 Automatique), collection Dunod Universiti, 1969.
 Fascicule B de «Exercices pour le certificat C3 Automatique de la Mantrise E.E.A.», collection Dunod Universiti, 1969 (with co-authors).
 Dynamique chaotique. Transformations ponctuelles. Transition ordre-disordre (with *I. Gumowski*). 480 pages. Cipadues Editions, mars 1980, Toulouse.
 Recurrences and discrete dynamic systems - An introduction (with *I. Gumowski*). 250 pages. Lecture notes in mathematics N 809, Springer, 1980.
 Chaotic Dynamics. From the one-dimensional endomorphism to the two-dimensional diffeomorphism. 450 pages. World Scientific, 1987.
 Systhmes asservis non liniaires. Hermhs, 1990, 425 pages.
 C. Mira, L. Gardini, A. Barugola & J.C. Cathala. Chaotic Dynamics in two-dimensional noninvertible maps. World Scientific, in «Series A on Nonlinear Sciences» (Editor L. Chua), 637 pages, July 1996.
 R. Abraham, L. Gardini, C. Mira. Discrete Dynamical Systems in two-dimensions. TELOS, Electronic Library of Science, Springer-Verlag, Santa Clara. (Book/CD-ROM package), 1996.
 Co-editor of the Proceedings of «European Conference on Iteration Theory» (1989, 1991, 1992);
 Member the Editorial Board of International Journal of Bifurcation and Chaos in Engineering and Applied Sciences (Ed. Prof. L.Chua Berkeley).



НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Д.А. Ковригин, А.И. Потапов

В части I развивается теоретико-волновой подход к исследованию задач нелинейной динамики одномерных упругих систем с сильной дисперсией. Излагается методика перехода от исходных нелинейных динамических уравнений в физических переменных к стандартной форме уравнений связанных нормальных волн, которые затем приводятся к эволюционным уравнениям, описывающим многоволновые резонансные взаимодействия, а также эффекты кроссвзаимодействия, самомодуляции и группового синхронизма длинных и коротких волн в зависимости от конкретной постановки задачи.

В части II исследуются эффекты нелинейного взаимодействия нормальных волн в прямолинейном стержне, совершающем плоские продольно-изгибные колебания. Показано, что в такой системе существуют два типа трехволновых резонансных взаимодействий, приводящих к повышению динамических напряжений вследствие распадной неустойчивости высокочастотных мод резонансных триплетов. Рассмотрены процессы формирования трехчастотных солитонов огибающих, самомодуляции изгибной волны и группового синхронизма длинной и короткой волн.

В части III показано, что в упругом кольце, обладающем дискретным спектром собственных частот, простейшими нелинейными динамическими объектами являются изолированные трехволновые резонансные ансамбли - триплеты. В частности, примером эволюции вырожденного триплета является взаимодействие осесимметричных колебаний кольца с двумя изгибными волнами половинной частоты, бегущими в противоположных направлениях. Описаны нелинейные эффекты периодического обмена энергии между модами триплета и возбуждения сопряженных форм изгибных колебаний кольца. Отмечена возможность самомодуляции изгибных волн и их трансформации в стационарные волны, близкие к солитонам огибающих. Приведены оценки коэффициента повышения динамических напряжений при распадной неустойчивости высокочастотных мод резонансного триплета, которые хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

Часть I. Метод связанных нормальных волн

Введение

Рост частоты и ширины спектра возбуждаемых колебаний в упругих телах делает невозможным однозначное разделение динамических процессов на колебания и волны деформации. Это приводит к необходимости изучения виброакустического поля как единого динамического процесса с изменяющейся пространственно-временной структурой [1]. В результате стираются грани между

исследованиями колебаний упругих систем, когда доминирует спектральный подход, и исследованиями волн деформации, где преобладает пространственно-временное описание динамических процессов. С другой стороны, для более полного анализа динамического поведения и расчета напряженно-деформированного состояния упругих систем часто недостаточно линейных теорий, так как линеаризация дифференциальных уравнений и краевых условий в ряде случаев приводит к тому, что существенные явления динамики упругой системы не отражаются даже качественно и исключаются из рассмотрения еще на этапе формулирования задачи. В этих случаях необходимы математические модели более высоких приближений, учитывающие геометрическую и физическую нелинейности упругих тел, взаимодействие полей деформации и температуры, влияние микроструктуры среды на напряженно-деформированное состояние и т.п. [2-4].

В последние годы в механике сплошных сред в результате синтеза нелинейной теории колебаний и нелинейной теории волн сформировалось новое направление - нелинейная волновая динамика [1-6]. В методическом плане оно представляет собой рациональное сочетание наиболее сильных сторон пространственно-временного и спектрального описаний динамических процессов. Нелинейная волновая динамика включает в себя, как составные части, вопросы построения нелинейных математических моделей, описывающих динамическое поведение упругих тел с требуемой степенью точности, выделение универсальных колебательно-волновых закономерностей из многочисленных деталей конкретной физической постановки задачи и выработку «колебательно-волновых» образов на основе адекватных им математических методов решения нелинейных уравнений, а также выявление характерных нелинейных эффектов в конкретных системах и экспериментальную проверку теоретических результатов.

Так как решение нелинейных динамических задач, описываемых уравнениями в частных производных, достаточно сложно даже при условии применения ЭВМ, то значительную роль играют различные соображения физического характера и асимптотические методы. Рассмотрение нелинейных задач, как правило, начинают с обсуждения общей ситуации и стараются выяснить возможности тех или иных упрощений с тем, чтобы свести их к виду, допускающему эффективное исследование методами теории нелинейных колебаний и волн [7-10].

При исследовании нелинейных волн деформации в упругих телах на протяжении последних 10-15 лет основное внимание уделялось изучению уединенных (солитоноподобных) волн и их взаимодействий в средах со слабой дисперсией (продольные и сдвиговые волны в стержнях и пластинах, в упругих средах с микроструктурой и т.п. [3,4,6]). Нелинейные волны деформации в средах с сильной дисперсией и несколькими типами нормальных волн остаются менее изученными. К ним относится широкий круг задач о нелинейном взаимодействии продольных и изгибных волн в стержнях, пластинах и оболочках [1,4,6,11], а также волн в ориентированных средах и средах с микроструктурой [12,13]. В таких системах, как правило, невозможно или затруднено формирование солитонов деформации, но весьма распространенными являются многоволновые резонансные взаимодействия, эффекты самомодуляции квазигармонических волн и образование солитонов огибающих [1,2,11,21,25].

1. Модельные уравнения нелинейной волновой динамики. **Два типа нелинейных задач**

Распространение слабонелинейных волн в упругих средах обычно описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями с частными производными

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{u}_t + \mathbf{C}_0(\partial/\partial x) \mathbf{u} = \mu \mathbf{N}_0(\mathbf{u}, \partial/\partial x), \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(x,t) = \{u_i(x,t)\}$ ($i=1,2,\dots,N$) - вектор искомых физических величин; $\mathbf{M}_0(\partial/\partial x)$ и $\mathbf{C}_0(\partial/\partial x)$ - линейные дифференциальные матричные операторы, характеризующие инерционные и упругие свойства системы; \mathbf{N}_0 - вектор нелинейных величин; x - лагранжева координата; t - время; μ - малый параметр задачи.

Точные решения исходных нелинейных уравнений (1) удается получить в редких случаях. К ним относятся, например, простые и автомоделные волны, полученные путем разделения переменных после соответствующего преобразования подобия. Основным же способом аналитического решения являются приближенные методы, большинство из которых связано с близостью искомого решения к порождающему «невозмущенному» решению [7,8]. Эта близость характеризуется малым параметром μ , содержащимся либо в самих уравнениях (1), либо в граничных или начальных условиях.

Можно выделить два типа нелинейных задач. В задачах первого типа учет нелинейных факторов приводит к малым изменениям «невозмущенного» решения, описываемого известным семейством функций. При их решении используются традиционные методы возмущений, с помощью которых отыскиваются поправки по малому параметру к решению, определенному при $\mu=0$ [7].

Во втором типе задач учет малого нелинейного фактора приводит к появлению новых качественных эффектов, отсутствующих при $\mu=0$. При этом попытки описания новых нелинейных динамических свойств системы с помощью малых добавок к порождающему решению являются некорректными. Адекватное описание нелинейной динамики системы в этих случаях достигается путем замены (перенормировки) переменных, построением уравнений для новых искомых величин и нахождением формул связи между новыми и старыми переменными [1,14,15]. В этих переменных исходная система уравнений преобразуется к некоторой стандартной (модельной) форме. Это позволяет выделить из многочисленных деталей физической постановки ее главную волновую часть и более подробно изучить эволюцию нелинейных волн, их структуру и взаимодействие при минимальных предположениях о виде искомого решения.

2. Метод нормальных волн

Для приведения системы уравнений к стандартной (модельной) форме могут быть использованы различные методы. Здесь будет рассмотрен лишь метод связанных нормальных волн [14, 15], идея которого восходит к методу нормальных колебаний в системах с N степенями свободы. Как известно [9, 10], в линейных системах можно ввести нормальные координаты, такие, что движения по каждой из них (называемые нормальными колебаниями) происходят независимо от движения по остальным координатам. В нелинейных же системах нормальные колебания оказываются связанными между собой и тип их взаимодействия полностью определяется структурой нелинейных слагаемых [10]. Процедура введения нормальных переменных распространяется и на распределенные системы, описываемые дифференциальными уравнениями с частными производными. Такой подход максимально упрощает линейную часть задачи и создает предпосылки для эффективного и единообразного упрощения исходных уравнений.

Вернемся к уравнению (1). Его левая часть описывает суперпозицию линейных нормальных волн $u_i \sim u_0 \exp(\omega t - kx)$, свойства которых полностью определяются дисперсионным уравнением

$$D(\omega, k) = \det \{ \mathbf{C}_0(-ik) - \omega^2 \mathbf{M}_0(-ik) \}. \quad (2)$$

В неограниченных системах частоты ω и волновые числа k связаны, в общем случае, непрерывными зависимостями $\omega_n = \omega_n(k)$ ($n=1,2,\dots,N$), которые выделяют N независимых нормальных мод. В ограниченных системах ω и k образуют дискретный спектр, который определяется из решения дисперсионного уравнения (2) совместно с краевыми условиями задачи.

Уравнения (1) при операторной форме записи ($\partial/\partial x \Rightarrow p$) можно интерпретировать как систему, описывающую движение N квазилинейных связанных осцилляторов. Чтобы избавиться от линейной связи, перейдем от физических переменных u к нормальным координатам $q = \{q_n\}$ с помощью линейного невырожденного преобразования

$$u = \Psi(p)q. \quad (3)$$

В этом случае система (1) сводится к квазинормальной форме

$$q_n + \Omega^2(p)q = \mu \Psi^{-1} M_0^{-1} N_0(\Psi q, p). \quad (4)$$

$\Psi(p)$ - невырожденная квадратная матрица преобразования к нормальным координатам, составленная из компонент правых собственных (поляризованных) векторов $\{\Psi_m\}$ ($m=1,2,\dots,N$), определяемых из характеристического уравнения:

$$[C_0(p) - \omega_m^2 M_0(p)] \Psi_m = 0. \quad (5)$$

$\Omega^2(p) = \Psi^{-1} M_0^{-1} C_0 \Psi$ - диагональная матрица, составленная из собственных значений характеристической системы (5), Ψ^{-1} , M_0^{-1} - обратные матрицы.

Уравнения (4) наиболее удобны при анализе динамических процессов, когда удается разделить пространственную и временную переменные (разложение по стоячим волнам). Часто используют форму записи системы (4) через комплексно-сопряженные переменные Q и Q^* :

$$Q = \Omega(p)q + iE q, \quad Q^* = \Omega(p)q - iE q, \quad (6)$$

(E - единичная матрица), в которых (4) принимает вид уравнений связанных нормальных волн [1, 15]

$$Q_t + i\Omega(p)Q = \mu Y(Q, Q^*), \quad (7)$$

где $Y = i\Omega^{-1} M_0^{-1} N_0(q, q^*)$. Эта форма записи наиболее удобна при анализе динамических явлений с помощью теории нелинейных волн [9, 15].

Таким образом, переход к уравнениям связанных нормальных волн (4) разделяет проблему анализа нелинейной волновой динамики упругой системы на две задачи: выделение нормальных волн $Q(x, t)$ в линейной подсистеме (7) и изучение их нелинейного взаимодействия.

3. Два подхода к описанию нелинейной эволюции нормальных волн

Операторные уравнения (4) и (7) вместе с формулами связи (3) и (6) эквивалентны исходной системе уравнений (1), так как при их выводе не предполагались ни малость нелинейности, ни слабость дисперсии. Малость этих параметров используется только при дальнейшем упрощении уравнений (4), (7). В общем случае (4) и (7) соответствуют нелинейным интегродифференциальным уравнениям весьма сложного вида. В качестве малых параметров могут выступать также малость относительной ширины спектральной полосы волнового процесса, близость искомого решения к стационарной волне и т.п. В теории нелинейных волн для анализа уравнений (4), (7) применяются различные методы, основанные либо на пространственно-временном, либо на спектральном способах описания

волновых процессов. Пространственно-временное описание, как правило, используется при исследованиях нелинейных систем со слабой дисперсией. В этих случаях из-за возбуждения большого числа синхронизированных между собой гармоник форма волны может изменяться от синусоидальной при малой амплитуде до импульсной (солитонной) при большой амплитуде [6, 9].

Спектральное описание волновых процессов [8,9] используется при исследовании систем с сильной дисперсией, когда нелинейность существенно сказывается лишь для группы из небольшого числа нормальных волн, частоты и волновые числа которых удовлетворяют условиям *фазового синхронизма*

$$\sum_{j=1}^J n_j \omega_j = \Delta\omega; \quad \sum_{j=1}^J n_j k_j = 0. \quad (8)$$

Здесь J - число взаимодействующих волн; $\Delta\omega$ - малая частотная расстройка ($\Delta\omega/\omega_j \ll 1$). Такие группы волн называются резонансными волновыми ансамблями. Теоретический анализ показывает, что нелинейные слагаемые, входящие в правую часть уравнений (7), не все равноправны. Среди них есть «резонансные» слагаемые, приводящие к появлению секулярных слагаемых в решении, и «нерезонансные» слагаемые, дающие лишь малые поправки к порождающему решению нелинейной задачи. В принципе от «нерезонансных» нелинейных слагаемых всегда можно избавиться с помощью специальной замены переменных (теорема Пуанкаре-Дюлака) [10,18]. «Резонансные» же слагаемые, выделяемые с помощью условий (8), невозможно уничтожить никакими взаимно однозначными заменами переменных. По этой причине резонансные волновые ансамбли являются динамическими объектами сугубо нелинейной природы.

В прикладных задачах нелинейной динамики часто достаточно изучить лишь основные типы резонансных волновых ансамблей, состоящих из троек или четверок нормальных волн [1,19-21]. Они могут быть как изолированными, представляя собой структурно устойчивые нелинейные динамические объекты [3, 8, 12], так и неизолированными. Последнее приводит к возникновению каскадных процессов переноса энергии колебаний от одних мод колебаний к другим, вверх и вниз по спектру, что может привести к хаотизации движения [17].

4. Трехволновые взаимодействия. Первое приближение

В системах с квадратичной нелинейностью наиболее общими являются трехволновые резонансные взаимодействия. Тройка резонансно взаимодействующих волн называется *резонансным триплетом* или *триадой* [17,19,20]. Условия фазового синхронизма волн в резонансном триплете имеют следующий вид:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega; \quad k_1 + k_2 = k_3. \quad (9)$$

Здесь ω_j, k_j - частоты и волновые числа взаимодействующих нормальных волн, пронумерованные в порядке возрастания частоты; $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$. Соотношения (9) можно условно изобразить в виде диаграммы, наглядно иллюстрирующей процесс распада высокочастотной волны на две (рис. 1,а) или слияния двух волн в одну (рис. 1,б).

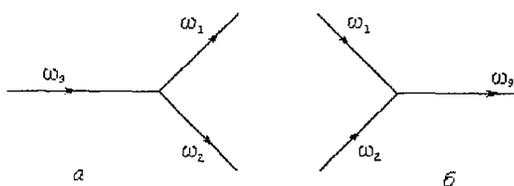


Рис. 1. Процессы распада (а) и слияния (б) волн резонансного триплетта

В непрерывной части спектра колебаний решение эволюционных уравнений (7) ищем в виде интеграла Фурье

$$Q_n(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\chi,\tau,k) \exp i[\omega_n(k)t - kx] dk + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m w_m^{(n)}(x,t), \quad (10)$$

где $A_n(\chi,\tau,k)$ - медленно меняющиеся комплексные амплитуды квазинормальных волн; $\chi = \mu x$, $\tau = \mu t$ - «медленные» переменные; $w_m^{(n)}(x,t)$ - малые поправки к решению. В дискретной части спектра, $k=k_j$, спектральная плотность в последнем выражении в общем случае представляется в виде суммы дельта функций, то есть $A_n(\chi,\tau,k) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{nj}(\chi,\tau) \delta(k - k_j)$. В этом случае решение уравнений (7) является суперпозицией модулированных квазигармонических волн

$$Q_n(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{nj}(\chi,\tau) \exp i[\omega_n(k_j)t - k_j x] + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m w_m^{(n)}(x,t). \quad (11)$$

Однако, из всего набора квазинормальных волн (10) или (11) эффективно будут взаимодействовать лишь те волны, частоты ω_j и волновые числа k_j которых, помимо условий фазового синхронизма (9), удовлетворяют еще и дисперсионному соотношению линеаризованной системы уравнений (7)

$$\det[\omega_j E - \Omega(-ik_j)] = 0. \quad (12)$$

Поэтому в первом нелинейном приближении достаточно рассмотреть эволюцию резонансно взаимодействующих троек квазинормальных волн. Каждая изолированная тройка медленно меняющихся амплитуд $A_j(\chi,\tau) = A_n(\chi,\tau,k_j)$ в первом нелинейном приближении удовлетворяет системе укороченных уравнений (см.[2] и часть III данной работы; крышки над новыми переменными далее опускаются)

$$\partial A_j / \partial \tau + v_j \partial A_j / \partial \chi = -i \alpha \sigma_j \partial U / \partial A_j^*, \quad (13)$$

где $v_j = d\omega_j(k_j)/dk$ - групповые скорости взаимодействующих волн; $\sigma_j = \sigma_j(k_j)$ - нормированные коэффициенты линейной связи с $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3$; $\alpha = \alpha(k_1, k_2, k_3)$ - коэффициент нелинейности. Усредненный потенциал трехволнового взаимодействия имеет следующий вид:

$$U(A_j, A_j^*) = A_1 A_2 A_3^* \exp(-i\Delta\omega t) + A_1^* A_2^* A_3 \exp i\Delta\omega t. \quad (14)$$

Краевые условия для комплексных амплитуд $A_n(\chi,\tau)$ получаются из граничных условий для физических переменных u после подстановки в них выражений (3), (6) и разложения в ряд по параметру μ . Эволюционные уравнения (13) корректно описывают поведение системы на временах $\omega t < 1/\mu$.

Трехволновое резонансное взаимодействие является весьма важным нелинейным эффектом в системах различной физической природы [17,19]. Оно описывает энергообмен между различными модами триплета, подкачку энергии по одной моде и ее последующую перекачку в другую моду, что приводит к возбуждению интенсивных колебаний на таких частотах и по таким направлениям, где непосредственно не действуют внешние силы.

Заметим, что эволюционные уравнения (13) могут быть записаны в форме уравнений Гамильтона [19]

$$i \partial A_n / \partial \tau = \delta H / \delta A_n^*, \quad (15)$$

где гамильтониан системы взаимодействующих волн имеет вид

$$H = \alpha \sigma_n U(A_n, A_n^*) + (i/2) \sum_{j=1}^3 v_j (A_j \partial A_j^* / \partial \chi - A_j^* \partial A_j / \partial \chi), \quad (16)$$

$\delta/\delta A_n = \partial/\partial A_n - \partial/\partial \chi [\partial/\partial (\partial A_n/\partial \chi)]$ - функциональная производная. Гамильтонова структура уравнений (13) указывает на существование законов сохранения. Один из законов сохранения очевиден: $H(A_j, A_j^*) = \text{const}$. Другие могут быть записаны в виде уравнений переноса для интенсивностей нормальных волн $I_n = |A_n|^2$

$$\begin{aligned} \partial(\sigma_2 I_1 - \sigma_1 I_2)/\partial \tau - \partial(v_1 \sigma_2 I_1 - v_2 \sigma_1 I_2)/\partial \chi &= 0, \\ \partial(\sigma_3 I_1 - \sigma_1 I_3)/\partial \tau - \partial(v_1 \sigma_3 I_1 - v_2 \sigma_1 I_3)/\partial \chi &= 0, \\ \partial(\sigma_3 I_2 + \sigma_2 I_3)/\partial \tau - \partial(v_2 \sigma_3 I_2 + v_3 \sigma_2 I_3)/\partial \chi &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В частных случаях пространственно однородного ($\partial/\partial \chi=0$) или установившегося ($\partial/\partial \tau=0$) волнового процесса уравнения (17) сводятся к интегралам движения, известным в форме частотно-энергетических соотношений Мэнли-Роу [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_2 I_1 - \sigma_1 I_2 &= C_1, \\ \sigma_3 I_1 - \sigma_1 I_3 &= C_2, \\ \sigma_3 I_2 + \sigma_2 I_3 &= C_3, \end{aligned} \quad (18)$$

где C_n - постоянные интегрирования. Соотношения (18) содержат информацию о перераспределении энергии между компонентами резонансного триплета. Из них также следует, что полная энергия триплета сохраняется

$$I_1 + I_2 + I_3 = \text{const}, \quad (19)$$

то есть все интегральные кривые эволюционных уравнений (13) при $\partial/\partial \chi=0$ расположены в конфигурационном пространстве (A_1, A_2, A_3) на поверхности равной энергии (18), представляющей собой трехосный эллипсоид (рис. 2). На эллипсоиде имеются три состояния равновесия, отвечающие синусоидальным колебаниям на одной из компонент триплета: два из них типа «центр» ($A_3=0, A_{1,2} \neq 0$) и одно типа «седло» ($A_3 \neq 0, A_{1,2}=0$). Из (18) следует, что, если при $\tau=0$ энергия колебаний была запасена, в основном, в высокочастотной компоненте триплета, то есть $I_3(0) \gg \gg I_{1,2}(0)$, то уменьшение интенсивности первичной волны $I_3(t)$ сопровождается одновременным ростом интенсивностей вторичных волн $I_1(t)$ и $I_2(t)$. На поверхности равной энергии (19) этой ситуации соответствует движение изображающей точки по замкнутой кривой, лежащей вблизи сепаратрисы «седла» (траектория 1). Такой процесс называется *распадной неустойчивостью*. Он сопровождается периодическим обменом энергии между высокочастотной (I_3) и низкочастотными ($I_{1,2}$) волнами триплета.

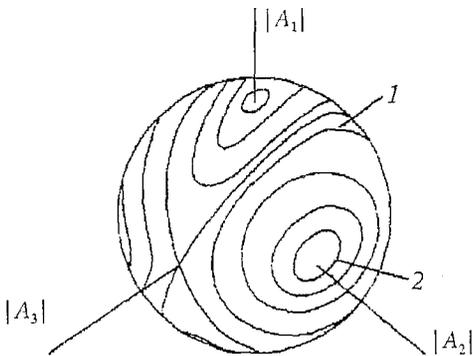


Рис. 2. Поведение фазовых траекторий триплета на поверхности постоянной энергии

Если при $\tau=0$ энергия была запасена в одной из низкочастотных компонент триплета, например, $I_2(0) \gg I_{1,3}(0)$, то изменения интенсивностей волн на частотах ω_2 и ω_3 будут незначительными. На поверхности (19) этому соответствует движение изображающей точки по замкнутой траектории вблизи «центра» (траектория 2). Это означает, что в системе реализуется практически одночастотное колебание с амплитудой $A_2(t) \approx A_2(0)$. Амплитуды других волн триплета останутся малыми по сравнению с $A_1(t)$.

Из интегралов движения (18), (19) следует, что выполнение условий фазового синхронизма (9) является лишь необходимым условием возникновения трехволновых резонансных взаимодействий. Сам же характер волнового процесса существенно зависит от того, в какой компоненте триплета запасена энергия колебаний в начальный момент времени.

В случае пространственно однородных или установившихся процессов уравнения (13) точно интегрируются в эллиптических функциях. Впервые это было показано Н. Бломбергом на примере трехволновых взаимодействий в нелинейной оптике [23]. В общем же виде эволюционные уравнения (13) могут быть проинтегрированы методом обратной задачи рассеяния [24].

5. Трехволновые взаимодействия. Второе приближение

Для вывода эволюционных уравнений второго приближения в выражении (10) необходимо учитывать слагаемые $w_n^{(1)}$, содержащие вторичные волны с комбинационными фазами, отличными от $\Phi_n = \omega_n t - k_n x$ и потребовать ограниченности следующей поправки $w_n^{(2)}$. В этом приближении уравнения трехволнового взаимодействия будут иметь следующую форму [25]:

$$(\partial A_n / \partial \tau + v_n \partial A_n / \partial \chi) - (\mu i v' / 2) \partial^2 A_n / \partial \chi^2 = -i \alpha \sigma_n \partial U / \partial A_n^* + \mu i A_n \sum_{m=1}^3 \alpha_{nm} |A_m|^2, \quad (20)$$

где v' - параметр дисперсии групповой скорости волнового пакета на частоте ω_n ; α_{nm} - матричные коэффициенты нелинейного взаимодействия второго приближения. Уравнения (20) описывают динамику нелинейной системы на временах $1/\mu \leq \omega t \leq 1/\mu^2$.

Отметим, что во втором приближении появились два новых слагаемых более высокого порядка малости. Третье слагаемое в левой части (20) описывает эффекты дисперсионного расплывания волновых пакетов из-за различия групповых скоростей волн в пределах спектральной полосы волнового пакета. Второе слагаемое в правой части (20) описывает взаимное влияние волн триплета на изменения их фазовых скоростей. Диагональные члены $\alpha_{nn} A_n |A_n|^2$ описывают изменения фазовой скорости волны A_n , пропорциональные квадрату ее амплитуды (самовоздействие волны), а недиагональные члены $\alpha_{nm} A_n |A_m|^2$ ($n \neq m$) - изменения фазовых скоростей в результате взаимного (перекрестного) влияния пар волн A_n и A_m (эффект кроссвзаимодействия). Первый из этих эффектов был открыт для нелинейных волн на воде Дж. Стоксом еще в 1847 году [22], а второй был обнаружен лишь через сто с лишним лет для нелинейных волн в плазме (так называемый Люксембург-Горьковский эффект) [26] и, независимо от этого, для нелинейных гравитационных волн на поверхности воды [22].

Влияние эффектов второго порядка на динамику резонансных триплетов при $\partial/\partial \chi = \partial^2/\partial \chi^2 = 0$ исследовалось в работах [17, 27]. Было показано, что соотношения Мэнли-Роу и закон сохранения энергии не нарушаются, но характер обмена энергии между модами триплета становится другим. В полном же виде нелинейные эволюционные уравнения (20) остаются пока еще не исследованными.

6. Четырехволновые взаимодействия

В системах с кубической нелинейностью наиболее общим является резонансное взаимодействие четверок квазигармонических нормальных волн, удовлетворяющих условиям пространственно-временного синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 + \Delta\omega, \quad k_1 + k_2 = k_3 + k_4. \quad (21)$$

Диаграммы, иллюстрирующие процессы распада и слияния четверок волн, приведены на рис. 3. Такие ансамбли получили название *резонансных тетрад*. Эволюционные уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд тетрады A_n ($n=1,2,3,4$) имеют вид

$$(\partial A_n / \partial \tau + v_n \partial A_n / \partial \chi) - (\mu i v' / 2) \partial^2 A_n / \partial \chi^2 = i \mu \gamma \sigma_n \partial U / \partial A_n^* + \mu i A_n \sum_{m=1}^4 \gamma_{nm} |A_m|^2, \quad (22)$$

где γ, γ_{nm} - коэффициенты нелинейной связи нормальных волн. Усредненный потенциал четырехволнового взаимодействия имеет следующий вид:

$$U(A_n, A_n^*) = A_1^* A_2^* A_3 A_4 \exp i \Delta \omega t + A_1 A_2 A_3^* A_4^* \exp (-i \Delta \omega t). \quad (23)$$

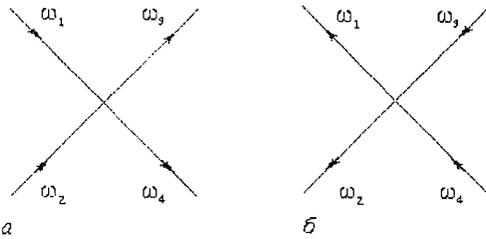


Рис. 3. Диаграммы четырехволновых взаимодействий: *a* - слияние волн, *b* - распад волн в тетраде

Заметим, что уравнения (22) по своей структуре совпадают с уравнениями второго приближения для трехволнового взаимодействия (20) в среде с квадратичной нелинейностью. Отличия заключаются лишь в выражениях для потенциала $U(A_n, A_n^*)$ и значениях коэффициентов нелинейной связи γ и γ_{nm} .

Так как все нелинейные слагаемые, входящие в (22), имеют третий порядок малости, то четырехволновые взаимодействия являются более слабыми по сравнению с трехволновыми. Тем не менее, в системах с кубической нелинейностью они являются весьма распространенным механизмом обмена энергии между различными нормальными волнами [17, 19, 20].

В таких системах имеют место процессы синхронного взаимодействия, аналогичные трехволновым резонансным взаимодействиям волн в системах с квадратичной нелинейностью, если, например, одно из полей является статическим: $\omega_4=0, k_4 \neq 0$. Другими частными примерами четырехволновых взаимодействий являются возбуждение третьей гармоники $\omega + \omega + \omega \Rightarrow 3\omega$, или третьей субгармоники $3\omega \Rightarrow \omega + \omega + \omega$. К четырехволновым синхронным взаимодействиям относится также параметрический резонанс $2\omega_1 \Rightarrow \omega_3 + \omega_4$, соответствующий второй зоне параметрической неустойчивости. При таком взаимодействии энергия основной волны (ω_1, k_1) в результате развития параметрической неустойчивости передается сателлитам с частотами как выше, так и ниже частоты основной волны.

Кроме того, возможны эффекты *несинхронных взаимодействий*. К ним относится, в первую очередь, эффект самовоздействия $\omega_1 - \omega_1 \Rightarrow \omega_1 - \omega_1$, проявляющийся в возникновении нелинейной добавки к фазовой скорости волны (к частоте), пропорциональной квадрату амплитуды волны. Этот эффект описывается диагональными членами последнего слагаемого в правой части (22). В теории же нелинейных колебаний упругих систем этот эффект известен как явление неизохронности колебаний [9, 10, 28].

Другим типом несинхронного взаимодействия является *кросс-взаимодействие*, наблюдаемое при распространении двух волн с различными частотами $\omega_1 \pm \omega_2 \Rightarrow \omega_1 \pm \omega_2$.

Оно описывается недиагональными членами последнего слагаемого в правой части (22) и учитывает изменение фазовых скоростей волн в результате их перекрестного влияния друг на друга. Этот эффект используется, в частности, для измерения нелинейных модулей упругости четвертого порядка [29].

Заключение

Многоволновые нелинейные взаимодействия в одномерных упругих системах с сильной дисперсией адекватно описываются уравнениями связанных нормальных волн различных типов.

В таких системах могут формироваться резонансные волновые ансамбли, простейшие из которых состоят из троек и четверок квазигармонических волн, выделяемых с помощью условий фазового синхронизма (9) и (21).

Для трехволновых взаимодействий характерна неустойчивость высокочастотной компоненты по отношению к малым возмущениям (распадная неустойчивость). Низкочастотные компоненты триплета устойчивы. При четырехволновых взаимодействиях волны сливаются и распадаются парами. В случае совпадения волн, составляющих отдельные пары, могут наблюдаться эффекты самомодуляции и кроссмодуляции.

Эволюционные уравнения, описывающие амплитудно-фазовую модуляцию взаимодействующих волн, содержат минимальное количество характеристических параметров, описывающих нелинейные дисперсионные и диссипативные свойства изучаемых объектов.

Поэтому такие уравнения могут быть использованы в качестве структурных схем для идентификации объектов по экспериментальным данным в обратных задачах нелинейной динамики [30].

Мы признательны А.А. Новикову, совместно с которым была опубликована работа [15] и профессору Ж.А. Можену, любезно предоставившему отписки своих статей [13].

Часть II. Системы со сплошным спектром

Введение

Проблема нелинейного взаимодействия различных типов волн в твердых деформируемых телах сравнительно давно привлекает внимание исследователей [1-4]. Простейшей моделью твердого тела, где возможны подобные эффекты, может служить бесконечный прямолинейный стержень, совершающий плоские продольно-изгибные колебания. Такая система обладает сплошным спектром собственных частот, и к ней в полной мере применима теория нелинейного взаимодействия связанных нормальных волн, развитая в части I. Кроме того, эта задача имеет и самостоятельный интерес, так как она тесно связана с проблемой потери устойчивости длинных прямых стержней [5, 6] и тонких цилиндрических оболочек [6-9] при осевом ударе.

1. Основные уравнения. Условия фазового синхронизма

Нелинейные продольно-изгибные волны в прямом стержне в простейшем случае описываются следующей системой уравнений [11]:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= (\mu/2) \partial_x w_x^2, \\ w_{tt} + \alpha^2 w_{xxxx} &= \mu \partial_x u_x w_x + (\mu^2/2) \partial_x w_x^3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u = u'/u_0$, $w = w'/u_0$ - безразмерные продольные и поперечные смещения точек срединной линии стержня, соответственно (штрихами обозначены физические переменные); $u_0 = \max(u'^2 + w'^2)^{1/2}$; $x = x'/\lambda$, $t = (c/\lambda)t'$ - безразмерные координата и время; $c = (E/\rho)^{1/2}$ - скорость распространения продольной волны; $\mu = u_0/\lambda \ll 1$ - характерная деформация; λ - характерная длина волны (например, минимальная длина волны в изучаемом процессе или длина стержня между опорами); $\alpha = a/\lambda \ll 1$ - параметр, характеризующий малость радиуса инерции стержня по отношению к характерной длине волны (для круглого стержня $a = d/4$, где d - диаметр; для стержня прямоугольного сечения $a = h/12^{1/2}$, где h - толщина).

При исследовании низкочастотных изгибных колебаний стержня часто используют допущение о нерастяжимости срединной линии [6,10] и пренебрегают инерционным слагаемым в уравнении для продольных волн. В этом случае система (1) сводится к одному нелинейному уравнению для изгибных волн. Однако при высоких частотах колебаний растяжимостью срединной линии и наличием инерции продольных деформаций пренебрегать уже нельзя. Учет этого фактора приводит к возникновению нелинейной связи между изгибными и продольными волнами и появлению резонансного взаимодействия между ними [14, 15].

В линейном приближении ($\mu=0$) система (1) обладает двумя дисперсионными ветвями

$$\omega_b = \alpha k^2, \quad \omega_l = k. \quad (2)$$

Одна из них, ω_l , описывает продольные волны, а другая, ω_b , - изгибные. Дисперсионные кривые имеют две «особые» точки: точку группового синхронизма, $\omega_g=1/4\alpha$, $k_g=1/2\alpha$, где скорость продольной волны совпадает с групповой скоростью изгибной волны, и точку фазового синхронизма, $\omega_g=1/\alpha$, $k_g=1/\alpha$, где скорость продольной волны совпадает с фазовой скоростью изгибной волны. Мы будем рассматривать волновые процессы при $|k|<1/\alpha$, так как в противном случае математическая модель (1) теряет физический смысл.

Система уравнений (1) уже имеет стандартную форму (I.4)¹, где переменные u и w образуют компоненты вектора нормальных координат q_1 и q_2 соответственно, а дифференциальные операторы, соответствующие различным дисперсионным ветвям системы, имеют вид: $\Omega_1^2 = -p^2$, $\Omega_2^2 = \alpha^2 p^4$ ($p = \partial/\partial x$). Правые части уравнений (1) описывают нелинейное взаимодействие нормальных волн u и w , и содержат как квадратичные, так и кубические слагаемые.

Уравнения (1) имеют решения в виде бегущих стационарных волн $u=u(\zeta)$ и $w=w(\zeta)$, где $\zeta = x - Vt$, свойства которых подробно проанализированы в работах [10,12²,13]. Здесь же мы остановимся на рассмотрении резонансных взаимодействий троек квазигармонических волн, удовлетворяющих дисперсионному соотношению (2) и условиям фазового синхронизма (I.9). Анализ показывает, что такие тройки волн (триплеты) состоят из одной продольной и двух изгибных волн и могут быть двух типов.

В триплете первого типа (триплет-1) высокочастотной является продольная волна (то есть $\omega_3=k_3$; $\omega_{1,2}=\alpha k_{1,2}^2$). В этом случае действительные решения дисперсионного уравнения (2), удовлетворяющие условиям фазового синхронизма (I.9) при $\Delta\omega=0$, имеют следующий вид [14]:

$$k_{2,1} = 1/2 k_3 \pm (k_3/2\alpha - k_3^2/4)^{1/2}, \quad \omega_{2,1} = 1/2 \omega_3(1 \pm (2\omega_3/\alpha - \omega_3^2)^{1/2}). \quad (3)$$

Эти решения существуют в интервале $|k_3|<1/\alpha$, причем вторичные волны всегда направлены в противоположные стороны, так как $k_1 k_2 < 0$. Графическое изображение триплета-1 на дисперсионной плоскости приведено на рис. 1, а.

В триплете второго типа (триплет-2) высокочастотной является изгибная волна (то есть $\omega_3=\alpha k_3^2$, $\omega_2=k_2$, $\omega_1=\alpha k_1^2$). В этом случае решения системы (2) и (I.9) при $\Delta\omega=0$ имеют вид

$$k_1 = 2k_3 - 1/\alpha, \quad k_2 = 1/\alpha - k_3, \quad (4)$$

$$\omega_1 = 2(\omega_3/\alpha)^{1/2} - 1/\alpha, \quad \omega_2 = \omega_3 - 2(\omega_3/\alpha)^{1/2} + 1/\alpha.$$

¹ Римская цифра означает ссылку на соответствующую часть данной работы.

² В работе [12] изучались плоские волны в тонкой пластине.

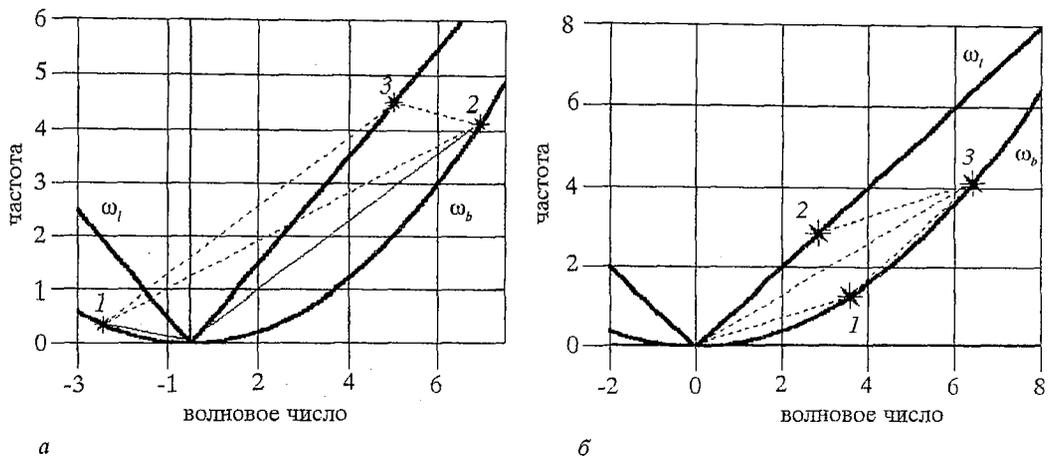


Рис. 1. Резонансные триплеты в прямолинейном стержне: а - триплет первого типа, б - триплет второго типа

Такой триплет существует при $|k_3| > 1/2\alpha$, причем все взаимодействующие волны бегут в одном направлении, так как $k_i k_j > 0$ ($i, j=1, 2, 3$). На рис. 1, б дано графическое изображение триплета-2 на дисперсионной диаграмме.

2. Нелинейная динамика триплета-1

Решение уравнений (1) в случае резонансного взаимодействия волн первого типа записывается в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_3(\chi,\tau) \exp i\Phi_3 + c.c., \\ w(x,t) &= A_1(\chi,\tau) \exp i\Phi_1 + A_2(\chi,\tau) \exp i\Phi_2 + c.c., \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Phi_i = \omega_i t - k_i x$ - быстровращающиеся фазы; A_n - комплексные амплитуды квазигармонических волн, медленно меняющиеся в пространстве $\chi = \mu x$ и времени $\tau = \mu t$, и удовлетворяющие в первом приближении следующим укороченным уравнениям (I.12):

$$\begin{aligned} (\partial/\partial\tau - v_1 \partial/\partial\chi) A_1 &= \beta \omega_1^{-1} A_2^* A_3, \\ (\partial/\partial\tau + v_2 \partial/\partial\chi) A_2 &= \beta \omega_2^{-1} A_1^* A_3, \\ (\partial/\partial\tau + \partial/\partial\chi) A_3 &= \beta \omega_3^{-1} A_1 A_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $v_{1,2} = 2\alpha k_{1,2}$ - групповые скорости изгибных волн; $\beta = k_1 k_2 k_3 / 2$ - коэффициент нелинейного взаимодействия, принимающий отрицательное значение для триплета первого типа.

Анализ частных решений (6) при $\partial/\partial\chi = 0$ дан в работах [14, 15]. Пусть $A_j = a_j(\tau) \exp i\varphi_j(\tau)$, где a_j и φ_j - действительные амплитуды и фазы. Тогда при начальных условиях $a_1(0) = 0$, $a_2(0) = a_{20}$, $a_3(0) = a_{30}$, $\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \pi n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), когда ($a_{30} \gg a_{20}$), динамический процесс носит характер периодического обмена энергии между продольной и изгибными модами триплета («биения») (рис. 2, а)

$$\begin{aligned} a_1(\tau) &= -a_{30} (\omega_3/\omega_1)^{1/2} \operatorname{cn}(\zeta, s), \\ a_2(\tau) &= a_{30}/s (\omega_3/\omega_2)^{1/2} \operatorname{dn}(\zeta, s), \\ a_3(\tau) &= a_{30} \operatorname{sn}(\zeta, s), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\zeta = K(s) + a_{30}\beta\tau/[s(\omega_1\omega_2)^{1/2}]$, $s = a_{30}[\omega_3/(\omega_3 a_{30}^2 + \omega_2 a_{20}^2)]^{1/2}$ - аргумент и модуль

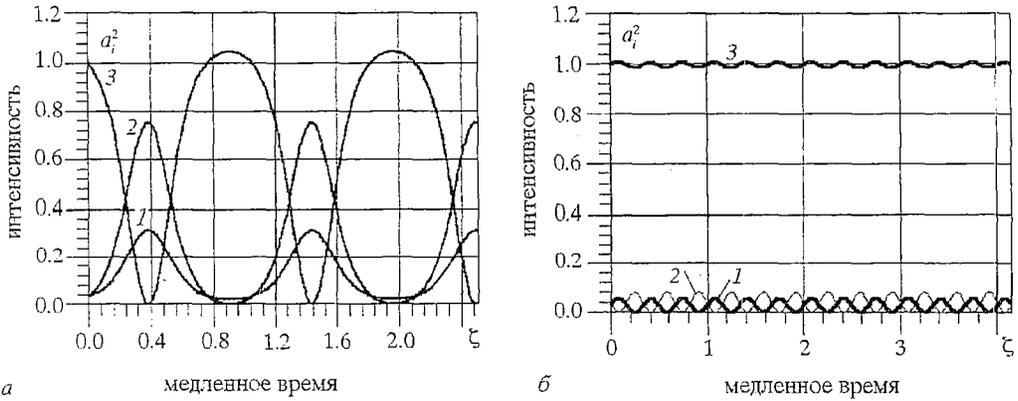


Рис. 2. Эволюция интенсивностей волновых мод триплета: *a* - процесс распадной неустойчивости (в начальный момент времени энергия сосредоточена в высокочастотной моде), *б* - устойчивые колебания (первоначально энергия сосредоточена в низкочастотной моде)

эллиптических функций Якоби, соответственно; $K(s)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Период энергообмена между продольной (первичной) и изгибными (вторичными) волнами равен

$$T = 2sK(s)(\omega_1\omega_2)^{1/2}/(\mu\beta a_{30}). \quad (8)$$

Если мощной является одна из низкочастотных изгибных волн триплета, например ($a_{20} \gg a_{30}$), $a_{10} = 0$, то реализуется практически одночастотное колебание (рис. 2, б)

$$\begin{aligned} a_1(\tau) &\approx -a_{30}(\omega_3/\omega_1)^{1/2}\cos(\Omega\tau + \pi/2), \\ a_2(\tau) &\approx a_{20}[1 - \omega_3 a_{30}^2 / (2\omega_2 a_{20}^2)]^{1/2}\sin^2(\Omega\tau + \pi/2), \\ a_3(\tau) &\approx a_{30}\sin(\Omega\tau + \pi/2), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Omega = \beta a_{20} / (\omega_1 \omega_3)^{1/2}$ - характерная частота амплитудной модуляции квазигармонической изгибной волны.

3. Нелинейная динамика триплета-2

В этом случае высокочастотной (ω_3, k_3) является изгибная волна. Решение уравнений (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_1(\chi, \tau)\exp i\Phi_1 + c.c., \\ w(x,t) &= A_2(\chi, \tau)\exp i\Phi_2 + A_3(\chi, \tau)\exp i\Phi_3 + c.c., \end{aligned} \quad (10)$$

где комплексные амплитуды A_j удовлетворяют укороченным уравнениям

$$\begin{aligned} (\partial/\partial\tau + \partial/\partial\chi)A_1 &= \beta\omega_1^{-1}A_2^*A_3, \\ (\partial/\partial\tau + v_2\partial/\partial\chi)A_2 &= \beta\omega_2^{-1}A_1^*A_3, \\ (\partial/\partial\tau + v_3\partial/\partial\chi)A_3 &= \beta\omega_3^{-1}A_1A_2, \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) по своей структуре аналогичны уравнениям (6) и отличаются лишь тем, что в рассматриваемом случае все взаимодействующие волны бегут в одном направлении. Поэтому коэффициент нелинейного взаимодействия β положителен. Для пространственно однородных процессов уравнения (6) и (11) совпадают, и следовательно, все свойства триплета-1 присущи и триплету-2.

4. Повышение динамических напряжений в стержне

Решения уравнений (6), (11) описывают периодический энергообмен между высокочастотной и низкочастотными модами триплетов. Потеря устойчивости высокочастотной волны, и сопровождающее ее резонансное возбуждение двух низкочастотных волн, может привести к повышению динамических напряжений в стержне.

Определим коэффициент повышения динамических напряжений, как отношение максимальной продольной деформации $\varepsilon = u_x - (z w_{xx} / \lambda) + O(\mu)$, измеряемой в крайних волокнах стержня в случае полного преобразования энергии высокочастотной продольной (или изгибной) волны в энергию двух низкочастотных изгибных (или продольной и изгибной) волн, к первоначальной максимальной продольной деформации

$$\Gamma = \varepsilon(|A_1| \rightarrow \max; |A_2| \rightarrow \max; |A_3| \rightarrow \min) / \varepsilon(|A_1| \rightarrow \min; |A_2| \rightarrow \min; |A_3| \rightarrow \max).$$

При распаде интенсивной продольной волны в триплете-1 коэффициент повышения динамических напряжений равен

$$\Gamma_1 \approx 3^{1/2} [s^{-1} \omega_1^{1/2} + \omega_2^{1/2}] / \omega_3^{1/2}, \quad (12)$$

а при распаде интенсивной изгибной волны в триплете-2

$$\Gamma_2 \approx [\omega_1^{1/2} + 3^{1/2} s^{-1} \omega_2^{1/2}] / (3^{1/2} \omega_3^{1/2}). \quad (13)$$

Очевидно, что численные значения коэффициентов повышения напряжения Γ_1 и Γ_2 всегда больше единицы в силу условий фазового синхронизма. Отсюда следует, что начальное напряжение в крайних волокнах стержня $\sigma = E\varepsilon$ должно быть всегда меньше предела прочности σ^* , деленного на соответствующий коэффициент повышения напряжений. Последнее условие можно рассматривать как ограничение на начальную деформацию стержня

$$E\varepsilon < \sigma^* / \Gamma_{1,2},$$

которое обеспечивает корректное описание нелинейной эволюции волн в пределах упругих деформаций. В таблицах 1 и 2 приводятся максимальные расчетные

Таблица 1

Максимальные значения коэффициента повышения динамических напряжений для триплетов первого типа с различными спектральными масштабами N

N	Γ_1	ω_1	ω_2	ω_3	k_1	k_2	k_3
1	1.874	5.740	5.698	4.24E-2	5.740	6.283	5.42E-1
2	1.886	5.638	5.588	4.93E-2	5.638	6.222	5.84E-1
3	1.900	5.516	5.459	5.78E-2	5.516	6.149	6.32E-1
4	1.916	5.371	5.303	6.86E-2	5.371	6.061	6.89E-1
5	1.936	5.194	5.112	8.26E-2	5.194	5.951	7.56E-1
6	1.961	4.974	4.873	1.00E-1	4.974	5.810	8.36E-1
7	1.991	4.693	4.567	1.25E-1	4.693	5.625	9.32E-1
8	2.031	4.322	4.163	1.58E-1	4.322	5.371	1.048
9	2.085	3.813	3.610	2.03E-1	3.813	5.001	1.187
10	2.160	3.074	2.814	2.59E-1	3.074	4.415	1.341
11	2.275	1.903	1.607	2.96E-1	1.903	3.337	1.433

Таблица 2

Максимальные значения коэффициента повышения динамических напряжений для триплетов второго типа с различными спектральными масштабами N

N	Γ_1	ω_1	ω_2	ω_3	k_1	k_2	k_3
1	1.825	5.698	5.638	6.00E-2	6.283	5.638	6.45E-1
2	1.834	5.588	5.516	7.18E-2	6.222	5.516	7.05E-1
3	1.844	5.459	5.371	8.74E-2	6.149	5.371	7.78E-1
4	1.857	5.303	5.194	1.08E-1	6.061	5.194	8.66E-1
5	1.872	5.112	4.974	1.37E-1	5.951	4.974	9.76E-1
6	1.892	4.873	4.693	1.80E-1	5.810	4.693	1.115
7	1.916	4.567	4.322	2.44E-1	5.625	4.322	1.302
8	1.947	4.163	3.813	3.49E-1	5.371	3.813	1.557
9	1.983	3.610	3.074	5.35E-1	5.001	3.074	1.926
10	1.993	2.814	1.903	9.10E-1	4.415	1.903	2.512

значения коэффициента повышения динамических напряжений для нескольких триплетов обоих типов с различными спектральными масштабами.

Теперь рассмотрим численный пример, иллюстрирующий распад плоской бегущей продольной квазигармонической волны с длиной $\lambda_3 = 0.276$ м на две изгибные волны, распространяющиеся в тонкой упругой пленке толщиной $h=10^{-3}$ м. Длина пленки считается достаточно протяженной, чтобы пренебречь краевым эффектом. Пусть скорость распространения продольных волн $c=5 \cdot 10^3$ м/сек. При этом спектральные параметры триады резонансно возбуждаемых волн будут следующими: $\nu_3=18.083$ кГц; $\lambda_3=0.276$ м ($\Pi_3=5.52 \cdot 10^{-5}$ сек); $\nu_2=10.075$ кГц; $\lambda_2=0.03$ м ($\Pi_2=9.92 \cdot 10^{-5}$ сек); $\nu_1=8.008$ кГц; $\lambda_1=0.033$ м ($\Pi_1=1.24 \cdot 10^{-4}$ сек). Здесь $\nu_i=c\omega_i/2\pi\lambda$ являются размерными собственными частотами волн; λ_j обозначают соответствующие длины волн; $\Pi_i = 2\pi/\omega_i$ - периоды быстрых осцилляций на несущих частотах. Если отождествить характерную длину волны λ с минимальной длиной волны в изучаемом процессе $\lambda_2=0.03$ м, то для того чтобы остаться в пределах упругих деформаций, следует выбрать, например, следующие начальные условия: $a_{30}=3 \cdot 10^{-6}$ м; $a_{20}=3 \cdot 10^{-7}$ м. Потеря устойчивости высокочастотной продольной волны сопровождается периодическим обменом энергии между этой волной и двумя изгибными волнами. Этот период, определяемый выражением (8), равен 0.027 сек, что примерно составляет 200 периодов быстрых осцилляций на минимальной несущей частоте ν_1 . Коэффициент повышения динамических напряжений (13) вследствие усиления изгибных волн равен 2.4454.

5. Пример начально-краевой задачи

Рассмотрим постановку краевой задачи, моделирующую простейшую экспериментальную установку для демонстрации распадной неустойчивости продольных стоячих волн с длиной полуволны λ_3 в тонком стержне, опертom на два шарнира

$$\begin{aligned} w(0,t) = w(l,t) &= 0, \\ w_{,xx}(0,t) = w_{,xx}(l,t) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

расположенные на расстоянии $l = \lambda_3 n_3$, где n_3 - некоторое заданное натуральное число. Такие волны можно возбудить с помощью внешних гармонических сил, действующих на торцах стержня

$$Eu_x(0,t) = Eu_x(l,t) = -\sigma_0 \sin \omega_3 t, \quad (15)$$

где σ_0 - амплитуда внешнего усилия, а частота возбуждения ω_3 пусть совпадает с собственной частотой продольной волны (2) с волновым числом π/λ_3 . Однако изгибные перемещения стержня должны при этом отсутствовать, скажем, на полубесконечном интервале времени $-\infty < t < 0$, например, за счет того, что последние запрещены двусторонними ограничителями поперечного хода. Пусть в момент времени $t = 0$ внешние источники сил отключаются, а ограничители снимаются. При этом неоднородные условия (15) заменяются однородными. Например, условиями отсутствия продольных смещений на краях:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \quad (16)$$

Предположим, что в результате снятия ограничений в стержне возникают малые изгибные возмущения всевозможных частот. В результате ожидаемой распадной неустойчивости продольной волны резонансно возбуждаться будут только две изгибные волны с длинами полуволин $\lambda_1 = l/n_1$ и $\lambda_2 = l/n_2$, где n_1 и n_2 - натуральные числа, зависящие от числа n_3 , поскольку частоты и волновые числа вторичных волн должны удовлетворять, кроме дисперсионных соотношений, условиям фазового синхронизма (I.9). Фазы указанной тройки волн будут строго синхронизированы, если выполняются следующие условия:

$$n_3 = n_2 - n_1, \quad n_3 = \pi(al)(n_1^2 + n_2^2).$$

При заданных значениях n_i эти выражения определяют спектр «резонансных» значений параметра $\alpha = al$, характеризующего отношение толщины стержня к его длине. Этот параметр должен быть малым, поскольку $a \ll \lambda_i$ из-за принятого длинноволнового приближения.

Пусть в стержне возбуждена основная продольная форма колебаний ($n_3=2$) при «резонансном» значении параметра $\alpha=1/10\pi$, что реализуется, например, если толщина стержня с прямоугольным поперечным сечением равна $h=12^{1/2}$ мм, а его длина $l = 10\pi$ мм. Пусть в качестве «затравки» для вторичных волн служат малые флуктуации, возникшие при снятии ограничений. Тогда следует ожидать неустойчивости малых изгибных возмущений на полуволне ($n_1=1$) и трех полуволнах ($n_2=3$). Пусть для простоты начальные условия для системы уравнений (1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= (\sigma_0/k_3) \sin k_3 x, \\ w(x,0) &= a_1 \sin k_1 x, \end{aligned} \quad (17)$$

где $|a_1(0)| \ll |\sigma_0/k_3|$. Тогда система уравнений (1) с краевыми (14), (16) и начальными условиями (17) составляет задачу о свободных колебаниях шарнирно опертого стержня. В первом приближении эта задача имеет решение в форме (7) с тем отличием, что величина коэффициента нелинейности β должна быть вдвое меньше величины, представленной в решении (7). Последнее связано с тем, что в ограниченном стержне пространственно однородный динамический процесс реализуется в виде стоячих волн, которые можно представить как результат суперпозиции трех пар бегущих волн, входящих в состав двух триплетов. Причем амплитуды бегущих волн попарно равны по абсолютной величине. Схема резонансного взаимодействия представлена на рис. 3.

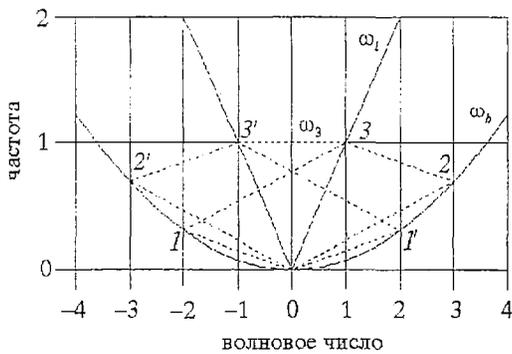


Рис. 3. Схема суперпозиции двух триплетов в начально-краевой задаче

например методами тензометрии, представляется одной из простых тестовых задач, способных подтвердить или опровергнуть развиваемую теорию.

6. Трехчастотные солитоны огибающих

Так как условия синхронизма (I.9) не зависят от групповых скоростей, то волновые пакеты с пространственно локализованными огибающими A_j в общем случае будут двигаться каждый со своей групповой скоростью v_j . Однако при некоторых условиях, благодаря компенсирующему воздействию нелинейности, все три волновых пакета могут двигаться с единой скоростью. К таким связанным состояниям относится специальный класс волновых пакетов, называемых трехчастотными солитонами огибающих [16]. В этом случае все три амплитуды A_j в уравнениях (6), (11) принимают только действительные значения (фазовая модуляция отсутствует)

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{10} \operatorname{sech}(\xi/\xi_s), \\ A_2 &= A_{20} \operatorname{sech}(\xi/\xi_s), \\ A_3 &= A_{30} \operatorname{th}(\xi/\xi_s), \end{aligned} \quad (18)$$

зависящие лишь от одной «бегущей» координаты $\xi = \chi - V_s \tau$. Амплитуды солитонов огибающих A_{j0} , их длительность ξ_s и скорость V_s связаны тремя соотношениями

$$(V_s - v_j) A_{j0}^2 = \xi_s \beta / \omega_j A_{10} A_{20} A_{30} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (19)$$

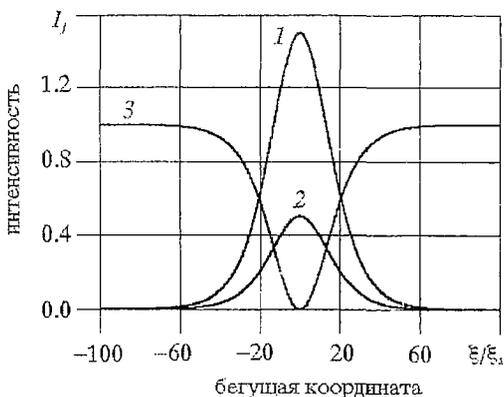


Рис. 4. Профили интенсивностей мод трехчастотного солитона

В приведенном примере существенный интерес представляет задача определения продольных реакций опор $N_x = -E(u_x + w_x^2/2)$, возникающих в точках $x=0$ и $x=l$ при периодической перекачке энергии продольной волны в энергию изгибных волн. В те моменты времени, когда продольная волна доминирует над изгибными волнами ($w_x^2 \ll u_x$), реакция в опорах будет знакопеременной. Когда же преобладают изгибные волны ($u_x \ll w_x^2$), реакция будет отрицательной, что свидетельствует о наличии деформации сжатия по всей длине стержня. Экспериментальное измерение динамических реакций в опорах стержня,

например методами тензометрии, представляется одной из простых тестовых задач, способных подтвердить или опровергнуть развиваемую теорию.

В зависимости от знаков правых частей равенств (19), скорость солитонов огибающих V_s формально может быть либо больше групповых скоростей волновых пакетов v_j , составляющих данный ансамбль, либо меньше их. Однако для физической реализации трехчастотных солитонов необходимо, чтобы скорость V_s не превышала скорости распространения волновой энергии в данной среде, то есть, по-видимому, $V_s < v_j$.

Зависимость интенсивностей трехчастотных солитонов $I_j = A_j^2$ от переменной ξ/ξ_s показана на рис. 4. Из

рисунка видно, что солитоны огибающих на частотах ω_1 и ω_2 являются «светлыми», а солитон на частоте ω_3 - «темным». «Темный» солитон имеет такой же профиль, что и «светлый», только «опрокинутый» относительно уровня A_{30}^2

$$I_3 = A_{30}^2 \text{th}^2(\xi/\xi_s) = A_{30}^2 [1 - A_{30}^2 \text{sech}^2(\xi/\xi_s)]. \quad (20)$$

Скорость связанных солитонов зависит от соотношений между их амплитудами. Поэтому в общем случае трехчастотные солитоны распространяются с различными скоростями и могут сталкиваться друг с другом [17].

7. Резонанс длинных и коротких волн. Солитоны огибающих

Если в стержне возбуждена интенсивная изгибная волна с волновым числом $|k| < 1/2\alpha$, то она может входить в триплеты типа 1 или 2 только в качестве одной из низкочастотных компонент, и будет слабо обмениваться энергией с другими волнами триплета. В первом приближении такая волна будет практически изолированной квазигармонической волной с узким частотным спектром. Для анализа ее дальнейшей эволюции на временах $\mu^{-1} < \omega t < \mu^{-2}$ необходим анализ уравнений второго нелинейного приближения. Так как трехволновое резонансное взаимодействие в этом случае становится малоэффективным, то следует поискать другие нелинейные взаимодействия изгибных и продольных волн. Одним из них является взаимодействие медленно меняющейся амплитудной огибающей изгибной волны с неосцилляторной волной продольной деформации. Решение системы (1) в этом случае ищем в виде

$$u(x,t) = A(\chi,\tau) + \mu u^{(1)}(x,t) + \mu^2 u^{(2)}(x,t) + c.c., \quad (21)$$

$$w(x,t) = B(\chi,\tau) \exp i\Phi + \mu w^{(1)}(x,t) + \mu^2 w^{(2)}(x,t) + c.c.,$$

где $A(\chi,\tau)$ - медленно меняющееся в пространстве и времени продольное возмущение, порождаемое изгибной волной; $B(\chi,\tau)$ - комплексная амплитуда мощной изгибной волны; $\Phi = \omega t - kx$ - фаза изгибной волны. Эволюционные уравнения, описывающие изменения A и B , существенно отличаются от уравнений второго приближения (I.19) для трехволнового взаимодействия и имеют вид [18]

$$\begin{aligned} [\partial_\tau + v\partial_\chi + (i\mu v'/2)\partial_{\chi\chi}]B &= (i\mu/2\omega)B[\gamma|B|^2 + k^2A_\chi], \\ A_{\tau\tau} - A_{\chi\chi} &= k^2\partial_\chi|B|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь v - групповая скорость изгибной волны; $\gamma = 1.5(\omega^2 + k^2)k^4/(\omega^2 - k^2)$ - коэффициент нелинейного самовоздействия. Уравнения (22) являются аналогами одномерных уравнений Захарова-Бенни [19], описывающих взаимодействие коротких капиллярных и длинных гравитационных волн на поверхности жидкости, а также ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме. К аналогичной системе уравнений приводится также задача об электрон-фононном взаимодействии в кристаллах [21] и о коллективных возбуждениях в молекулах белков [22]. Динамика волновых процессов, описываемая уравнениями (22), существенно зависит от соотношения между групповой скоростью изгибной волны и скоростью продольной волны. Для решения уравнений (22), последние необходимо дополнить, например, условием отсутствия деформации на бесконечности, то есть $|A_\chi| \rightarrow 0$, $|B| \rightarrow 0$, когда $|\chi| \rightarrow \infty$.

8. Самомодуляция изгибной волны

Если в первом уравнении системы (22) $v < 1$, то продольное возмущение A содержит две компоненты, одна из которых описывает деформацию, вызванную изгибной волной

$$A_x = k^2 |B|^2 / (v^2 - 1), \quad (23)$$

распространяющуюся с групповой скоростью изгибной волны v , а другая компонента описывает свободные продольные волны, бегущие с единичной скоростью. На достаточно больших временах эти возмущения разделяются, и в той области пространства, где сосредоточен пучок изгибной волны, останется лишь вынужденное продольное возмущение (23). Подставляя (23) в (22), получаем нелинейное уравнение Шредингера, описывающее самовоздействие изгибной волны

$$[\partial_\tau + v \partial_x + (i\mu v'/2) \partial_{xx}] B = i\mu \sigma B |B|^2, \quad (24)$$

где $\sigma = k^4 [3(V_{ph}^2 + 1)(v^2 - 1) + 2(V_{ph}^2 - 1)] / [4\omega(V_{ph}^2 - 1)(v^2 - 1)]$ - коэффициент нелинейности, $V_{ph} = \omega/k$ - фазовая скорость изгибной волны ($|V_{ph}| \leq 0.5$). Слагаемые в круглых скобках описывают волну модуляции, бегущую в среде с групповой скоростью v , второе слагаемое отвечает за дисперсионное расплывание волнового пакета, а третье описывает нелинейное самовоздействие волны и приводит к зависимости ее фазовой скорости от амплитуды.

Параметры нелинейности σ и дисперсии групповой скорости изгибной волны v' , входящие в (24), имеют противоположные знаки

$$\sigma v' < 0. \quad (25)$$

Условие (25) называется критерием модуляционной неустойчивости Лайтхилла [20], из которого следует, что первоначально малые возмущения гармонической изгибной волны с течением времени могут усиливаться. Это приводит к явлению самомодуляции, которое связано с расширением частотного спектра волны при перекачке энергии из центральной области спектра в боковые составляющие.

Результатом развития модуляционной неустойчивости изгибной волны является формирование локализованного в пространстве волнового пакета - солитона огибающей

$$B(\chi, \tau) = B_s \operatorname{sech}((- \sigma / v')^{1/2} B_s [\chi - (v + V_s) \tau]) \exp i \alpha [(v + V_s / 2) \tau - \chi] \exp i \mu \sigma B_s^2 \tau / 2. \quad (26)$$

Здесь $B_s = [2(v - v\alpha - 0.5\mu v' \alpha^2) / \mu \sigma]^{1/2}$ - амплитуда солитона, $V_s = \mu v' \alpha$ - его скорость относительно системы координат, движущейся с групповой скоростью линейного волнового пакета v , ν - частота и α - волновое число, характеризующее фазовую модуляцию солитона огибающей. Отметим, что в отличие от однопараметрического семейства солитонов, описываемых уравнением КдВ, солитон огибающей (26) является двухпараметрическим, так как его скорость и амплитуда независимы, а ширина обратно пропорциональна амплитуде

$$\Delta = (v' - \sigma)^{1/2} / B_s. \quad (27)$$

Другими характерными особенностями решения (21), (26) являются наличие только амплитудной модуляции и различие между скоростями распространения амплитудной огибающей и несущей волны.

Из (23) следует, что волновой пакет изгибной волны (21), (26), пробегая по стержню, вызывает в нем продольное сжатие колоколообразной формы:

$$A_x = -[\alpha^2 B_s^2 / (1 - V_s^2)] \operatorname{sech}^2((- \sigma / v')^{1/2} B_s [\chi - (v + V_s) \tau]). \quad (28)$$

Амплитуда сжатия пропорциональна квадрату амплитуды изгибающей волны B_s , а ширина такая же, как и у солитона огибающей (26).

9. Групповой синхронизм продольных и изгибных волн

Если в системе (22) $v = 1$, то между продольной и изгибающей волнами возникает резонансное взаимодействие. Эта ситуация является предельным случаем трехволнового синхронизма (1.9) для триплета-2, когда изгибные волны с близкими волновыми числами $k_2 = k_g - \Delta k$, $k_3 = k_g + \Delta k$ образуют единый волновой пакет с несущей частотой $\omega_g = \alpha k_g^2$.

Эволюционные уравнения второго приближения, описывающие нелинейное взаимодействие продольной и изгибающей волн при выполнении условия группового синхронизма, получаются из (22), если положить в них $v=1$, $v'=2\alpha$, $\omega = \omega_g = \alpha k_g^2$, $k = k_g = 1/2\alpha$,

$$(\partial_\tau + \partial_\chi + i\mu\alpha\partial_{\chi\chi})B = -i\mu B/(2\alpha) [5|B|^2/(8\alpha^2) - A_\chi], \quad (29)$$

$$A_{\tau\tau} - A_{\chi\chi} = 1/(4\alpha^2) \partial_\chi |B|^2.$$

В отличие от предыдущего случая, система уравнений (29) не сводится к нелинейному уравнению Шредингера, так как выражение (23) становится непригодным при $v=1$. Точные решения системы (29) удается получить лишь в исключительных случаях. Одним из них является решение, описывающее связанные солитоноподобные волны, бегущие с одинаковой скоростью V_s (рис.5),

$$A = -8\alpha^2 \{ [\alpha^2 - (v - \alpha)/(\mu\alpha)]^{1/2} \text{th} [\alpha^2 - (v - \alpha)/(\mu\alpha)]^{1/2} (\chi - V_s \tau) \} / (7 - 5V_s^2), \quad (30)$$

$$B = [\alpha^2 - (v - \alpha)/(\mu\alpha)]^{1/2} [32(1 - V_s^2)/(7 - 5V_s^2)]^{1/2} \alpha \times$$

$$\times \text{sech} [\alpha^2 - (v - \alpha)/(\mu\alpha)]^{1/2} (\chi - V_s \tau) \exp(i v \tau - \alpha \chi),$$

где выражение $v = \alpha + \mu\alpha^2 - \mu(7 - 5V_s^2)/[32\alpha^7(1 - V_s^2)^2]$ играет роль «дисперсионного» соотношения, а интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B|^2 d\chi = N = \text{const} - \text{ограниченная постоянная величина.}$$

Очевидно, что скорость двухкомпонентного солитона (30), являющегося обобщением решений (26) и (27), не может быть выше скорости распространения продольных волн, то есть $|V_s| < 1$.

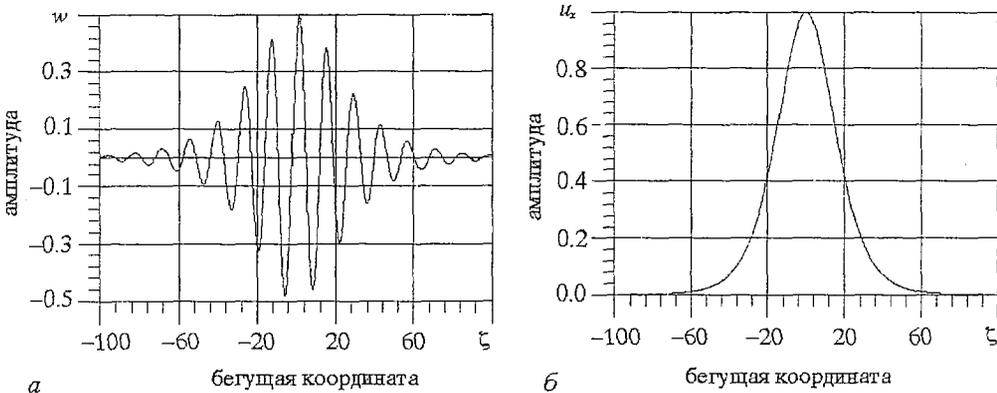


Рис. 5. Связанные компоненты солитона огибающей изгибающей волны (а) и локализованной области продольной деформации (б)

Заключение

В этой статье на простейшем примере системы со сплошным спектром нормальных волн, тонкого прямолинейного стержня, показано, что трехволновые резонансные взаимодействия могут подразделяться на два типа, триплет-1 и триплет-2, в зависимости от того, является ли высокочастотная компонента триплета диспергирующей (изгибной) или недиспергирующей (продольной) волной. Интенсивные недиспергирующие моды являются модуляционно неустойчивыми во всем диапазоне частот. Диспергирующие моды неустойчивы лишь в области длин волн, где их групповая скорость превышает фазовую скорость недиспергирующей моды. В противном случае диспергирующая волна в первом приближении устойчива к малым возмущениям и многоволновые взаимодействия в этом приближении не возникают.

В таких системах могут формироваться трехчастотные солитоны огибающих. Их скорость, по-видимому, не должна превышать наименьшей групповой скорости составляющих волнового ансамбля.

Устойчивая в первом приближении изгибная волна, с волновым числом $|k| < 1/2\alpha$, во втором приближении теряет свою устойчивость и распадается на солитоны огибающих. При этом в системе возникает медленно меняющаяся продольная деформация, пропорциональная квадрату амплитуды первичной волны. При совпадении групповой скорости изгибной волны со скоростью продольной волны в системе наблюдается явление группового синхронизма.

Волновые ансамбли различных типов могут образовывать триплетные «цепочки», где процесс переноса энергии вверх и вниз по спектру приобретает каскадный характер, типичный для многоволновых взаимодействий в системах гидродинамического типа. Внимательный читатель уже мог проследить схему одного из таких каскадов, анализируя спектральный состав триплетов, параметры которых приведены в таблицах 1 и 2. Теория каскадных процессов в твердых телах захватывает новую обширную область исследований [23], которые не могут успешно развиваться без детального изучения динамических свойств таких простейших резонансных волновых ансамблей, какими являются, например, изолированные резонансные триплеты.

Часть III. Системы с дискретным спектром

Введение

В системах с дискретным спектром, в отличие от систем со сплошным спектром (часть II), условия фазового синхронизма не всегда выполнены строго. Точный синхронизм между резонансно взаимодействующими модами реализуется лишь при наложении некоторых дополнительных ограничений, например, на геометрические параметры системы. Если параметры системы «настроены» на фазовый синхронизм, то система становится нелинейным резонатором [1,2]. Ниже рассматривается пример многоволновых взаимодействий в одной из простейших нелинейных распределенных систем с дискретным спектром - тонком кольцевом резонаторе, совершающем плоские колебания в радиальном и окружном направлениях.

Экспериментальные исследования нелинейных колебаний тонких колец [3, 4] и цилиндрических оболочек [5 - 9] показывают, что режимы их динамической неустойчивости носят, как правило, нестационарный характер, когда в общем движении могут участвовать сразу несколько форм собственных колебаний. Это приводит к появлению нелинейных эффектов, таких как периодический обмен энергией, сопровождаемый повышением динамических напряжений упругой системы [4, 10]; возбуждение доминантных (сопряженных) форм колебаний, вызванное неустойчивостью осесимметричных колебаний [11]; самомодуляция бегущих по окружности волн и образование стационарных волн, близких к солитонам огибающих [12]. Ниже приводится краткий теоретический анализ подобных эффектов с позиций теоретико-волнового подхода, развитого в I части.

1. Уравнения нелинейной динамики тонкого кольца

Нелинейные колебания тонкого кольца толщиной h , радиусом R ($h/R \ll 1$), описываются следующей системой уравнений [13]:

$$v_{tt} - V_{\varphi} + \varepsilon^2 W_{\varphi\varphi} = \mu [1/2 \partial(3V^2 + W^2)/\partial\varphi + WV], \quad (1)$$

$$w_{tt} + V + \varepsilon^2 W_{\varphi\varphi} = \mu [\partial(VW)/\partial\varphi - 1/2 \partial(3V^2 + W^2)/\partial\varphi],$$

где $v=v'/u_0$, $w=w'/u_0$ - безразмерные компоненты смещений в окружном и радиальном направлениях соответственно (штрихами обозначены физические переменные); $t=ct'/R$ и φ - безразмерные время и угловая координата; $\varepsilon=h/(12^{1/2}R) \ll 1$ - параметр, характеризующий малость толщины кольца по сравнению с его радиусом; $\mu=u_0/\lambda \ll 1$ - малый параметр, характеризующий относительные смещения точек срединной линии кольца; $V=v_{\varphi}+w$, $W=w_{\varphi}-v$. Система уравнений (1) дополняется условиями замкнутости кольца

$$v(\varphi, t) = v(\varphi+2\pi, t), \quad w(\varphi, t) = w(\varphi+2\pi, t), \quad (2)$$

которые представляют собой условия пространственной периодичности окружных и изгибных колебаний.

2. Нормальные волны

В кольце в отличие от прямого стержня окружные и радиальные смещения связаны уже в линейном приближении. Решение задачи (1), (2) при $\mu=0$ можно представить в виде суперпозиции нормальных мод

$$v(\varphi, t) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{m,n} \exp i\Phi_{m,n} + c.c., \quad (3)$$

$$w(\varphi, t) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{m,n} \exp i\Phi_{m,n} + c.c.,$$

где $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$ - комплексные амплитуды; $\Phi_{m,n} = \omega_{m,n}t + n\varphi$ - фазы бегущих волн. Частоты $\omega_{m,n}$ связаны с волновым числом n с помощью следующего дисперсионного соотношения:

$$\omega_{m,n}^2 = 1/2 (n^2 + 1)(1 + \varepsilon^2 n^2) \pm 1/2 [(n^2 + 1)^2(1 + \varepsilon^2 n^2)^2 - 4n^2\varepsilon^2(n^2 - 1)^2]^{1/2}. \quad (4)$$

В отличие от систем со сплошным спектром, переменная n в выражении (4) принимает лишь целочисленные значения; индекс m определяет номер дисперсионной ветви. Знак плюс в (4) (при $m = 1$) отвечает высокочастотной нормальной моде, которой, в основном, соответствуют волны, описывающие смещение точек срединной линии кольца в окружном направлении. Такие волны мы назовем окружными. Знак минус в (4) (при $m = 2$) отвечает низкочастотной нормальной моде, которой соответствуют, в основном, изгибные волны. Амплитудные коэффициенты связи нормальных волн ($B_{m,n} = -ip_{m,n} A_{m,n}$) даются выражением

$$p_{m,n} = n(1 + \varepsilon^2 n^2) / [(1 + \varepsilon^2)n^2 - \omega_{m,n}^2]. \quad (5)$$

Эти коэффициенты удовлетворяют условию ортогональности $p_{1,n}p_{2,n} = -1$, и указывают на наличие линейной связи между продольными и поперечными смещениями срединной линии кольца. Для колец малой кривизны ($\varepsilon \ll 1$) $p_{1,n} \approx -n$,

$p_{2,n} \approx 1/n$. При низкочастотных длинноволновых изгибных колебаниях колец малой кривизны растяжение срединной линии практически отсутствует, то есть $V = (1 - nr_{2,n})B_{2,n} \exp i\Phi_{2,n} \approx 0$. Это так называемое условие нерастяжимости кольца широко используется в задачах нелинейной динамики тонкостенных конструкций [5,7,14]. Дисперсионное соотношение (4) в этом случае значительно упрощается

$$\omega_{2,n} = \varepsilon n(n^2 - 1)/(n^2 + 1)^{1/2}. \quad (6)$$

В случае же высокочастотных колебаний кольца ($m = 1$), напротив, изгибная деформация практически отсутствует, то есть $|V| \approx n|W|/2$. При этом высокочастотная нормальная мода приближенно описывается следующим дисперсионным соотношением:

$$\omega_{1,n} = (n^2 + 1)^{1/2}, \quad (7)$$

где значению $n = 0$ соответствуют осесимметричные радиальные колебания.

3. Трехволновые взаимодействия

В нелинейном приближении в кольце возникают резонансные взаимодействия между тройками нормальных волн. В этом случае комплексные амплитуды нормальных волн в выражении (3) являются функциями медленного времени $\tau = \mu t$. Частоты $\omega_j = \omega_{m,n}$ и волновые числа $n = n_j$ волн удовлетворяют, кроме дисперсионного соотношения (4), еще и условиям фазового синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega, \quad n_1 + n_2 = n_3, \quad (8)$$

где ω_j пронумерованы в следующем порядке: $\omega_3 \geq \omega_2 \geq \omega_1$; $\Delta\omega \sim \mu \max \omega_j$ - малая частотная расстройка. Совместные решения уравнений (4) и (8) выделяют из всего множества нормальных волн в кольце лишь резонансно взаимодействующие тройки волн (триплеты). На рис. 1 графически изображены возможные варианты таких решений. Из них видно, что в кольце, как и в прямом стержне (часть II), существуют триплеты двух типов. В первом случае высокочастотная окружная волна с частотой ω_3 резонансно взаимодействует с низкочастотными изгибными волнами на частотах ω_1 и ω_2 , бегущими в противоположных направлениях (рис. 1,а). Частным случаем такого триплетта является резонансное взаимодействие осесимметричных радиальных колебаний кольца с изгибными волнами: $n = n_1 = -n_2$, $n_3 = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$ (рис. 1,б). Во втором случае высокочастотная окружная волна (ω_3, n_3) резонансно взаимодействует с одной изгибной (ω_1, n_1) и окружной (ω_2, n_2) волнами (рис. 1,в).

Заметим, что в дисперсионное уравнение (4) в качестве свободного параметра входит относительная толщина кольца ε , поэтому при $\Delta\omega = 0$ и

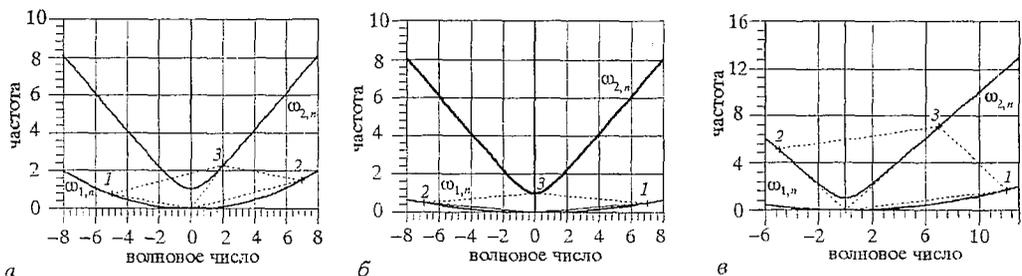


Рис. 1. Резонансные триплеты в кольце при различных критических значениях относительной толщины кольца ε^* : а - 0,0315; б - 0,0105; в - 0,0187

фиксированных значениях волновых чисел n_j уравнения (4) и (8) определяют критические значения относительной толщины кольца $\varepsilon = \varepsilon^*$, при которых возникает тот или иной тип резонансного триплета.

Тройка медленно меняющихся амплитуд резонансно взаимодействующих нормальных волн $A_j^{\wedge}(\tau) = A_{m,n}(\tau)$ в первом нелинейном приближении удовлетворяет системе укороченных уравнений [10,15] (крышки над новыми переменными далее опускаются)

$$dA_j/d\tau = -i\omega_j^{-1}\Psi_j^2\alpha dU/\partial A_j^*, \quad (9)$$

где $U = A_1A_2A_3^*\exp i\Delta\omega\tau + A_1^*A_2^*A_3\exp(-i\Delta\omega\tau)$ - усредненный потенциал трехволнового взаимодействия, $\Psi_j = (1+p_j^2)^{1/2}$. Коэффициент нелинейности равен

$$\alpha = 3\Pi_{l=1}^3(1 - p_l n_l) + \Pi_{l=1}^3(p_l - n_l)\sum_{i=1}^3 e_i(1 - p_i n_i)/(p_i - n_i),$$

где $e_{1,2}=1, e_3=-1$. Система уравнений (9) интегрируема в общем случае [18] в эллиптических функциях. Приведем здесь лишь частное решение, отвечающее начальным условиям $|A_3(0)|=a_{30}, |A_2(0)|=a_{20}$ и $|A_1(0)|=0$ при точном синхронизме ($\Delta\omega=0$),

$$\begin{aligned} A_1(\tau) &= -a_{30}(\omega_3/\omega_1)^{1/2}(\Psi_3/\Psi_1)\text{cn}(\zeta, s), \\ A_2(\tau) &= (a_{30}/s)(\omega_3/\omega_2)^{1/2}(\Psi_3/\Psi_2)\text{dn}(\zeta, s), \\ A_3(\tau) &= a_{30}\text{sn}(\zeta, s), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\zeta = K(s) + a_{30}\alpha\tau/(s\Psi_1\Psi_2(\omega_1\omega_2)^{1/2})$, $s = a_{30}\Psi_3(\omega_3/(\omega_3\Psi_3^2 a_{30}^2 + \omega_2\Psi_2^2 a_{20}^2))^{1/2}$ - аргумент и модуль эллиптических функций Якоби, соответственно; $K(s)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Выражения (10) описывают динамическую перестройку колебаний кольца с одних форм на другие. По своему виду они совпадают с выражениями (П.7). Как и в случае прямого стержня, динамическое поведение кольца существенно зависит от того, где была запасена энергия колебаний в начальный момент времени.

Если первоначально энергия была сосредоточена, в основном, в высокочастотной волне, то есть $|a_{30}| \gg |a_{20}|$, то будет происходить циклический обмен энергии между различными модами триплета с периодом, обратно пропорциональным начальной амплитуде высокочастотной волны

$$T = 4sK(s)\Psi_1\Psi_2(\omega_1\omega_2)^{1/2}/(\mu\alpha a_{30}). \quad (11)$$

При этом перекачка энергии высокочастотной окружной волны в энергию низкочастотных изгибных волн сопровождается ростом динамических напряжений в кольце.

Коэффициент динамических напряжений Γ определяется как отношение максимального значения окружных напряжений $\varepsilon_{\text{фф}} = V - (zW_{\phi}/R) + O(\mu)$ к соответствующему минимальному значению. В крайних волокнах кольца он приближенно равен

$$\Gamma \approx [|\Gamma_1|/(\Psi_1\omega_1^{1/2}) + |\Gamma_2|/(\Psi_2\omega_2^{1/2}s)]\Psi_3\omega_3^{1/2}/|\Gamma_3|, \quad (12)$$

где $\Gamma_j = n_j p_j - 1 + 3^{1/2}\varepsilon n_j(n_j - p_j)$. Численные значения Γ для некоторых типов триплетов приведены в таблице.

Если в начальный момент времени энергия была запасена в низкочастотной волне, $|a_{30}| \ll |a_{20}|$, то заметного энергообмена между различными модами триплета не происходит и реализуется практически одночастотное колебание (ω_2, n_2) с небольшой амплитудной модуляцией

Максимальные значения коэффициентов повышения динамических напряжений для некоторых триплетов с различными спектральными масштабами.

N	ω_1	ω_2	ω_3	n_1	n_2	n_3	ε^*	Γ
1	0.574	0.818	1.414	6	7	1	0.017	2.56
2	0.611	0.802	1.414	7	8	1	0.013	2.53
3	0.622	0.791	1.414	8	9	1	0.01	2.51
4	0.799	1.436	2.235	6	8	2	0.023	2.66
5	0.838	1.396	2.235	7	9	2	0.017	2.61
6	0.869	1.366	2.235	8	10	2	0.014	2.57
7	2.948	4.122	7.07	11	4	7	0.025	2.03
8	0.983	5.098	6.08	11	5	6	0.008	1.63
9	2.963	5.098	8.062	13	5	8	0.018	1.93

$$A_1(\tau) \approx -a_{30}(\omega_3/\omega_1)^{1/2}(\Psi_3/\Psi_1)\cos(\Omega t + \pi/2),$$

$$A_2(\tau) \approx a_{20}(1 - \omega_3\Psi_3 a_{30}^2/2\omega_2\Psi_2 a_{20}^2)\sin^2(\Omega t + \pi/2), \quad (13)$$

$$A_3(\tau) \approx a_{30}\sin(\Omega t + \pi/2),$$

где $\Omega = a_{20}\alpha\tau/[\Psi_1\Psi_3(\omega_1\omega_3)^{1/2}]$. Из последнего выражения следует, что изгибные волны в кольце в первом нелинейном приближении устойчивы по отношению к малым возмущениям. Рост динамических напряжений практически отсутствует.

Для более детального анализа нелинейной эволюции интенсивных низкочастотных изгибных волн в кольце на больших временах $\mu^{-1} < \omega t < \mu^{-2}$ необходимо привлекать уже уравнения второго приближения, учитывающие кубическую нелинейность системы и четырехволновые резонансные взаимодействия (см. раздел I.6). В работе [11] на основе дискретного аналога нелинейного уравнения Шредингера с периодическими граничными условиями (2) показано, что во втором приближении изгибная волна неустойчива относительно низкочастотной модуляции ее амплитуды. Дальнейшее развитие модуляционной неустойчивости приводит к формированию солитоноподобной (кноидальной) огибающей. По-видимому, похожие нелинейные эффекты наблюдались в экспериментах с изгибными волнами в коротких цилиндрических оболочках [12].

4. Неустойчивость осесимметричных колебаний кольца

Рассмотрим одну весьма важную для практических приложений задачу о резонансном взаимодействии осесимметричных радиальных колебаний кольца с изгибными волнами. Такое взаимодействие является вырожденным случаем трехволновых взаимодействий первого типа, когда $n=n_1=-n_2$, $n_3=0$, $\omega_1=\omega_2=\omega_3/2$ (см. рис. 1, б). Из (4) и (8) следует, что между радиальными колебаниями кольца и изгибными волнами на n -й форме имеет место точный синхронизм ($\Delta\omega=0$), если параметр относительной толщины кольца удовлетворяет следующему условию:

$$\varepsilon^* = \{(4(n^2 + 1) - 1)/(4n^2[4(n^2 - 1) - (n^2 + 1)]^2)\}^{1/2}. \quad (14)$$

График зависимости изображен на рис. 2. Из него видно, что в тонком кольце

($\epsilon \ll 1$) могут резонансно возбуждаться изгибные формы колебаний с номером $n \geq 3$, причем при уменьшении толщины кольца номер резонансно возбуждаемой формы колебаний возрастает.

Решение уравнений (1), описывающее вырожденный резонансный триплет, имеет вид

$$\begin{aligned} w(\varphi, t) &= 2a_{30} \{ \text{sn} \xi \sin \omega_3 t + [2/(1+p^2)]^{1/2} [(s^{-1} \text{dn} \xi - \text{cn} \xi) \cos(\omega_3 t/2) \cos n\varphi + \\ &\quad + (s^{-1} \text{dn} \xi + \text{cn} \xi) \sin(\omega_3 t/2) \sin n\varphi] \}, \\ v(\varphi, t) &= 2p [2/(1+p^2)]^{1/2} a_{30} \{ (s^{-1} \text{dn} \xi + \text{cn} \xi) \cos(\omega_3 t/2) \sin n\varphi - \\ &\quad - (s^{-1} \text{dn} \xi - \text{cn} \xi) \sin(\omega_3 t/2) \cos n\varphi \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Амплитудные коэффициенты связи для изгибных волн в последнем выражении равны по абсолютной величине из-за симметрии, $p=p_1=-p_2$, а $\xi=K(s)+2\alpha a_{30}\tau/[s(1+p^2)\omega_3]$. Первое слагаемое в (15) описывает осесимметричные радиальные колебания кольца с частотой ω_3 , второе - стоячую волну, соответствующую n -й собственной форме колебаний. Третье слагаемое описывает другую стоячую волну, соответствующую также n -й форме колебаний, но узлы последней расположены в пучностях предыдущей изгибной формы (такие формы колебаний еще называют сопряженными или доминантными [7]). Амплитуды всех составляющих резонансной триады медленно изменяются в физическом времени с периодом $T \approx 2sK(s)(1+p^2)\omega_3/(\mu\alpha a_{30})$, причем амплитуды сопряженных форм меняются в противофазе. В целом динамический процесс в кольце представляет собой «биения». В моменты времени $\xi/K=1+4m$ ($m=0,1,2,\dots$) доминирует изгибная форма, пропорциональная $\sin n\varphi$, а при $\xi/K=3+4m$ - сопряженная ей изгибная форма, пропорциональная $\cos n\varphi$. Если $\xi/K=2m$, то амплитуды обеих сопряженных форм примерно одинаковы и их суперпозиция образует бегущую волну, пропорциональную $\cos(\omega_3 t/2 - n\varphi)$.

Трансформация осесимметричных колебаний в изгибные волны сопровождается повышением динамических напряжений. Коэффициент динамических напряжений (12) в этом случае равен

$$\Gamma = [6/(1+p^2)]^{1/2} (1+s)\epsilon n(n-p). \quad (16)$$

Его величина для любых значений n близка к $6^{1/2}$, что согласуется с экспериментальными данными [4].

Данные теоретические результаты подтверждаются экспериментальными наблюдениями нелинейных колебаний свободного торца тонкой цилиндрической оболочки [7]. Оболочка размещалась на вибростенде, совершающем колебания в вертикальном направлении. Частота колебаний подбиралась так, чтобы в оболочке параметрическим образом возбуждались стоячие осесимметричные изгибные волны. В этих условиях ее свободный торец можно рассматривать как кольцо, совершающее осесимметричные радиальные колебания. Эксперименты показали, что такие колебания торца являются неустойчивыми и трансформируются в неосесимметричные колебания по n -ой изгибной форме кольца. Колебания торца

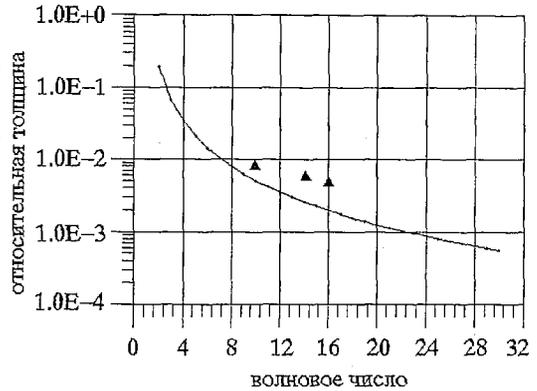


Рис. 2. Зависимость номера резонансно возбуждаемой формы колебаний кольца от его относительной толщины ϵ ; треугольниками обозначены экспериментальные данные [4]

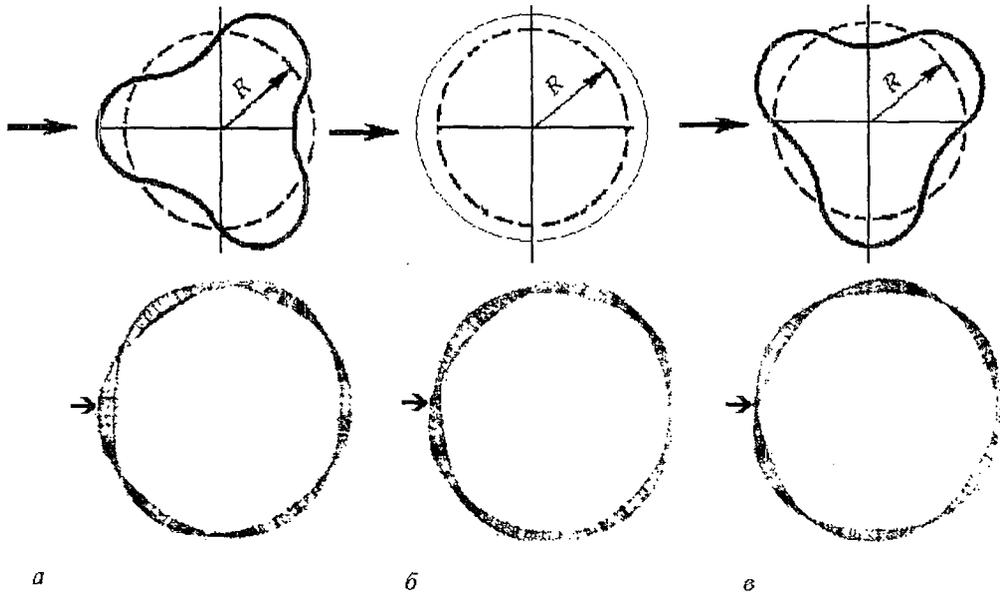


Рис. 3. Динамическая перестройка нелинейных колебаний между сопряженными изгибными формами на свободном торце тонкой цилиндрической оболочки при $n = 3$ [7]

оболочки снимались кинокамерой с выдержкой кадра Δt , много большей периода колебаний, но много меньшей периода «биений», то есть $2\pi/\omega_3 \ll \Delta t \ll T$. На приведенных кинокадрах (рис. 3) отчетливо просматривается перестройка колебаний торца оболочки между сопряженными изгибными формами при $n = 3$. Стрелка на кинокадрах указывает первоначальное положение пучности изгибных колебаний.

Заключение

В кольце, обладающем дискретным спектром, простейшими нелинейными динамическими объектами являются изолированные трехволновые ансамбли - триплеты. В частности, распад осесимметричных колебаний на изгибные волны, бегущие в противоположных направлениях, является примером эволюции вырожденного триплета. Так как изгибные волны в данном случае возбуждаются на половинной частоте, то естественно, что в пионерских работах [4] подобная задача анализировалась с помощью «параметрического» подхода. В рамках этого подхода удалось получить некоторые интересные результаты, в частности, оценить номер резонансно возбуждаемой изгибной волны и вычислить коэффициент динамических напряжений. Однако «параметрический» подход способен описать лишь начальную стадию развития нелинейных динамических процессов в кольце. Адекватный же математический анализ рассматриваемых процессов удастся получить лишь при рассмотрении нелинейной самосогласованной задачи на основе предлагаемого теоретико-волнового подхода к исследованию нелинейных многоволновых взаимодействий в упругих системах [10,17,18].

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда (грант N R9B000).

Библиографический список

Часть I

1. *Потапов А.И.* Нелинейная виброакустика тонкостенных конструкций // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С.110.

- *Линейные и нелинейные волновые процессы в упругих средах с пространственной дисперсией*. Дисс. ... док. физ.-мат. наук. Ленинград: ЛГУ, 1989.
3. *Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К.* Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981. 256 с.
4. *Багдоев А.Г.* Распространение волн в сплошных средах // Ереван: Изд. Арм АН ССР. 1981. 308 С.
5. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газопарожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
6. *Потапов А.И.* Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: ГГУ, 1985. 108 с.
7. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
8. *Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984.
9. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
10. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
11. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев : Наукова думка, 1984. 220 с.
12. *Erofeyev V.I., Potapov A.I.* Nonlinear wave processes in elastic media with inner structure / Ed. V.G.Bar'yaktar // Nonlinear world. Vol. 2, World Scientific. 1990. P.1197.
13. *Pauget J, Maugin G.A.* Nonlinear dynamics of oriented elastic solids. Parts I and II // J. of Elasticity. 1991. Vol. 22. P.135 and 157.
14. *Новиков А.А.* О применении метода связанных нормальных волн к анализу нерезонансных взаимодействий // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т.19, № 2. С.321.
15. *Ковригин Д.А., Новиков А.А., Потапов А.И.* Нелинейные взаимодействия нормальных волн в одномерных упругих системах // Волновые задачи механики. Н.Новгород, 1991. С.115.
16. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
17. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
18. *Арнольд В.И.* Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонансов // Нелинейные волны / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С.116.
19. *Львов В.С.* Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987. 272 с.
20. *Гапонов А.В., Островский Л.А., Рабинович М.И.* Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т.13, № 2. С.163.
21. *Ковригин Д.А., Потапов А.И.* Нелинейные резонансные взаимодействия в тонком кольце // Докл. АН СССР. 1989. Т.305, № 4. С.803.
22. *Филлипс О.* Взаимодействие волн - эволюция идей // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. с.297.
23. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. М.: Мир, 1965. 424 с.
24. *Каур D.J., Reiman A., Bers A.* Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. Interaction in a homogeneous medium // Rev. Modern Phys. 1979. Vol.51, № 2. P. 275.
25. *Ковригин Д.А.* Нелинейные резонансные взаимодействия волн в упругих элементах конструкций. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород: ННГУ, 1992.
26. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 684 с.
27. *Гончаров В.В.* О влиянии нелинейностей высокого порядка на трехволновые процессы // Изв. АН СССР ФАО. 1981. Т.17, № 1. С. 88.
28. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
29. *Шалашов Г.М.* Кроссмодуляция акустических волн на кубической нелинейности твердых тел // Акуст.ж. 1984. Т.30, № 3. С.386.

30. *Kovriguine, D.A.; Potapov A.I.* Identification of large mechanical structures in terms of triad cells // Abs.IUTAM Symposium on Identification of Mechanical Systems. University of Wuppertal. 1993. P.29.

Часть II

1. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // УФН. 1970. Т.102, № 2. С.549.
2. *Jones G.I., Kobett D.R.* Interactions of elastic waves in isotropic solid // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. Vol. 35, № 1. P.5.
3. *Степанов Н.С.* К вопросу о взаимодействии продольных и поперечных упругих волн // Акуст. журн. 1967. Т.13, № 2. С. 270.
4. *Maugin G.A., Cadet F.* Existence of solitary waves in martensite alloys // Int. J. Engn. Sci. 1991. Vol. 29, № 2. P.243.
5. *Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы выпучивания упругих систем // Изв. вузов СССР. 1949. Т.64, № 6. С.779.
6. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
7. *Ginsberg J.M.* Dynamic stability of transverse waves in circular cylindrical shell // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1974. Vol. 41, № 1. P.77.
8. *Goodier J.N., McIvor I.K.* The elastic cylindrical shell under nearly uniform radial impulse // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1964. Vol. 31, № 2. P.259.
9. *Новиков В.В.* О неустойчивости упругих оболочек как проявлению внутреннего резонанса // ПММ. 1988. Т.52, № 6. С.1022.
10. *Потапов А.И.* Нелинейные взаимодействия продольных и изгибных волн в стержне // Межвуз. сб.: Дифф. и интегральные уравнения. Горький: ГГУ, 1983. С.52.
11. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778с.
12. *Шенявский Л.А.* Влияние геометрической нелинейности на волны, распространяющиеся в свободной тонкой пластине // ПММ. 1979. Т.43, № 6. С.1089.
13. *Березовский А.А., Жерновой Ю.В.* Нелинейные продольно-поперечные волны в упругих стержнях. Математ. физика, Киев, 1981. № 30 С.41.
14. *Ерофеев В.И., Потапов А.И.* Трехчастотные резонансные взаимодействия продольных и изгибных волн в стержне // Динамика систем. Устойчивость, автоколебания и стохастичность. Межвуз. сб. Горький: ГГУ, 1984. С.74.
15. *Потапов А.И.* Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: ГГУ, 1985. 108 с.
16. *Сухоруков А.П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 232 с.
17. *Курин В.В.* Образование и взаимодействие трехволновых солитонов. Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31, № 10. С.1201.
18. *Ковригин Д.А.* Нелинейные резонансные взаимодействия волн в упругих элементах конструкций. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород: ННГУ, 1992.
19. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988, 694 с.
20. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
21. *Пушкаргов Д.И.* Дефекты в кристаллах. Метод квазичастиц в квантовой теории дефектов. М.: Наука, 1993. 436 с.
22. *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наук. думка, 1984. 288 с.
23. *Kovriguine D.A.* Modélisation mathématique du transfert l'énergie dans une lattice de triplets résonants. Un exemple de l'évolution non linéaire d'une onde quasi harmonique dans une plaque solide // Proc. Int.Symp. Active control in mechanical engineering. 1993. 'Ecole centrale de Lyon. Vol. 2.

1. *Островский Л.А., Папилова И.А., Сутин А.М.* Параметрическая генерация и усиление акустических волн в кольцевом резонаторе на твердом теле // *ЖТФ*. 1973. Т.43, № 10. С. 2213.
2. *Пуговкин А.В., Щандаров С.М.* Нелинейное взаимодействие упругих волн в акустических резонаторах // *ФТТ*. 1974. Т.16, № 4. С.1761.
3. *Evensen D.A.* Nonlinear flexural vibrations of thin circular ring // *Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E*. 1966. Vol. 33, № 3. P.553.
4. *Lindberg H.E.* Stress amplification in a ring caused by dynamic instability // *Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E*. 1974. Vol. 41, № 2. P.392.
5. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
6. *Гинсберг Дж.* Динамическая устойчивость поперечных колебаний осесимметричных волн в круговой цилиндрической оболочке // *Нестационарные процессы в деформируемых телах*. М.: Мир, 1976. С.63.
7. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наукова думка, 1984. 220 с.
8. *Терровере В.Р.* Динамическое разрушение токонесящей цилиндрической оболочки // *Прикл. мех.* 1984. Т.20, № 6. С.93.
9. *Образцова Е.И., Шклярчук Ф.И.* Нелинейные параметрические колебания цилиндрического бака с жидкостью // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1974. № 4. С.133.
10. *Ковригин Д.А., Потанов А.И.* Нелинейные резонансные взаимодействия в тонком кольце // *Докл. АН СССР*. 1989. Т.305, № 4. С.803.
11. *Ковригин Д.А.* Нелинейные резонансные взаимодействия волн в упругих элементах конструкций. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород: ННГУ, 1992.
12. *Wu J., Wheatley J., Putterman S., Rudnick I.* Observation of envelope solitons in solids // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59, № 24. P.2744.
13. *Потанов А.И.* Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: ГГУ, 1985. 108 с.
14. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит. 1961. 778с.
15. *Ковригин Д.А., Потанов А.И.* О взаимодействиях резонансных триад при нелинейных колебаниях тонкого кольца // *Дифф. и интегр. уравнения*. Горький: ГГУ, 1987. С.91.
16. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. М.: Мир, 1965. 424 с.
17. *Ковригин Д.А., Потанов А.И.* О нелинейных колебаниях тонкого кольца // *Прикл. мех.* 1989. Т.25, № 3. С.76.
18. *Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.* Nonlinear and parametric phenomena in dispersive acoustic systems // *Acoustica*. 1978. Vol. 39, № 5. P. 298.

NONLINEAR WAVE DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL ELASTIC SYSTEMS

D.A. Kovrighine, A.I. Potapov

Part I. Method of coupled normal waves

In present paper the theoretical wave approach is developed for investigation of nonlinear dynamics of one-dimensional elastic systems with a strong dispersion. A technique is proposed to reduce the physical field equations to those for nonlinearity coupled normal waves. Then the equations of coupled normal waves are reduced to the evolution equations, which describe either multiwave resonant interaction or wave self-modulation or group synchronism between short and long waves, depending on a problem formulation.

Part II. Systems with continuous spectrum

Nonlinear interactions of normal waves are investigated in a thin rectilinear bar, which has a planar oscillations. It was shown that two types of three-wave resonant interaction exist there, which lead to increase of dynamic stress in the bar, as a result of break-up instability of high-frequency mode involved in a resonant triad. Conditions of three-frequency envelope solitons formation, self-modulation of bending wavetrains and group synchronism of short and long waves are considered.

Part III. Systems with discrete spectrum

It is shown that in a ring-like systems with own frequency discrete spectrum, the isolated three-wave resonant ensembles, triads, play the role of simplest nonlinear dynamic structures. It is found that the interaction between the axisymmetric radial oscillations and two mid-frequency bending waves, travelling each towards other, is a particular case of degenerated triads. The periodic energy exchange takes place between the interacting triad modes. Break-up of the axisymmetric radial oscillations is accompanied by the resonant excitation of two conjugated dominant shapes of oscillations. A possibility of the self-modulation of bending waves travelling around the ring is remarked as well as their further transformation into stationary envelope soliton-like wavetrains. Stress increase constants are estimated for several illustrative examples. An agreement between obtained results and known experimental data as well as theoretical achievements, having used other investigation tools is reached.



Ковригин Дмитрий Анатольевич родился в Горьком (1962). Окончил механико-математический факультет Горьковского государственного университета (1984). С 1987 года работает в Нижегородском филиале Института машиноведения РАН, старший научный сотрудник. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1993). Область научных интересов - нелинейные волны в механике. Имеет 25 публикаций.



Потапов Александр Иванович родился в г. Горьком (1949). Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1973). Работал в ГГУ на кафедре теории колебаний (1973-1975), а затем на кафедре теоретической механики (1975-1989). С 1989 года заведующий лабораторией Нижегородского филиала института Машиноведения РАН. Защитил в Горьковском университете кандидатскую диссертацию, а в Ленинградском университете - диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «Механика деформируемого твердого тела» (1989). Область научных интересов - нелинейные волны деформации и их взаимодействие, нелинейная механика сред с микроструктурой. Автор более 100 публикаций и четырех учебных пособий по волновым процессам в нелинейных и параметрических системах. В том числе «Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах» (ГГУ, 1985) и «Модулированные волны в линейных средах с дисперсией» (совместно с Л.А. Островским, ГГУ, 1988). Член Европейского общества механиков (EUROMECH).



Изв. вузов «ПНД», т.4, № 2, 1996

ФАРАДЕЙ - МАКСВЕЛЛ - ГЕРЦ - ХЕВИСАЙД ...
О согласованности функциональных
специализаций мозга*

Б.М. Болотовский, М.Л. Левин, М.А. Миллер, Е.В. Суворов

Историко-психологический очерк, написанный по материалам конференции памяти М.Фарадея (Москва, осень 1991 г.). Приводятся некоторые соображения о ментальной совместимости ученых, занятых исследованием какой-либо единой проблемы. Люди с разными типами мышления (образным, логическим или комбинированным) более естественно включаются в эстафетно-преемственные научные последовательности (или действуют независимо), чем объединяются в добровольные научные коллективы. Весьма показательным примером удачной (производительной) последовательности служит цепочка участников построения классической теории макроэлектромagnetизма Фарадей - Максвелл - Герц - Хевисайд.

Памяти И.М. Яглома

0. Предпдисловие

Осенью 91 года в Москве состоялась конференция памяти М.Фарадея. Мы приняли в ней несколько странное участие: было подготовлено два независимых варианта доклада - один зачитан, а другой написан. После конференции написанный текст был распространен среди узкого круга людей, знакомых с нами и с богиней К. Они отнеслись к нему расположительно и советливо, а главное, высказали ряд сомнений и пожеланий. Мы приняли во внимание почти все. Они же рекомендовали нам растиражировать наши «исторические измышления», что мы сейчас и предпринимаем. Этот препринт - первый шаг; за ним, возможно, последует второй - в виде публикации в каких-либо «Вопросах...» или «Трудах...».

Стилевая разница понятна: в штучном и «своем» издании можно держаться любых непринятостей, а в массовом и «чужом» - приходится блюсти тамошний устав.

Архитектоника этих записок отклоняется от статейных стандартов. Сперва мы решаемся высказать какие-то общие взгляды о распределении естествоиспытателей с разными ментальными свойствами (в основном, акцентируя

* © Б.М. Болотовский, М.Л. Левин, М.А. Миллер, Е.В. Суворов. Фарадей - Максвелл - Герц - Хевисайд ... О согласованности функциональных специализаций мозга. Препринт № 327. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 1992. 32 с.

внимание на асимметрии мыслительных функций) в научных коллективах и научных последовательностях, понимая под первыми - одновременно (а часто и одномоментно) работающих людей, а под вторыми - цепочку ученых, преемственно (эстафетно) развивающих одну и ту же проблему (разрабатывающих «идейноносную жилу» - порой и одновременно, и разноместно).

В качестве редкостного примера удачной и очень индивидуально дискретной цепочки мы выбрали последовательность, составленную Фарадеем, Максвеллом, Герцем и Хевисайдом. И тоже сначала позволили себе некоторые общие суждения, а все поясняющие их цитаты собрали в отдельном месте (раздел 6. «Свидетельские показания»). Этому есть три оправдания: во-первых, нам хотелось заново учинить пробежку по всей цепочке, но уже в чисто документальном исполнении; во-вторых, большая часть «показаний» не имеет однозначной текстовой прописки, и наконец, в-третьих, все эти цитаты вкупе читаются как самостоятельное сочинение и даже способны вызвать удивления.

В заключении мы снова возвращаемся к общим взглядам, как бы поощряя читателей на продолжение и развитие.

Нам очень хотелось, чтобы предлагаемый опус соответствовал духу и намерениям покойного друга нашего И.М. Яглома, некогда написавшего увлекательные исторические исследования на тему: «Почему Ньютон и Лейбниц одновременно открыли высшую математику» [1]. И всякий раз, дотягиваясь до какой-либо идеи, мы чувствовали свою близость к И.М.; нам казалось, что мы всего лишь трактуем ход его мыслей расширительно в физику и немного поддразниваем читателя на большее.

Мы признательны В.П. Визгину и Б.В. Булюбашу за подсказки и обсуждения, но еще и С.Д. Миллер, без участия которой ничего бы такого (на эту тему!) не произошло.

1. Пояснение замысла

В 1989 г. мы закончили многолетнюю работу по переводу на русский язык максвелловского «Трактата об электричестве и магнетизме». Как было отмечено в нашем предисловии к работе [2], «Трактат» Максвелла принадлежит к тем выдающимся произведениям цивилизации, которые, подобно «Началам» Ньютона, произвели крупномасштабные изменения в развитии естествознания, и не только в части проникновения в тайны мироздания, но и в отношении совершенствования способов мышления, принципов «понимания понимания», новых подходов к методам познания природы.

Но у «Трактата» есть еще одна заслуга перед историей науки, хорошо известная, но недостаточно, на наш взгляд, прославленная: он являет собой образец эстафетной преемственности идей двух разносвойственных, но равновеликих мыслителей - **Фарадея и Максвелла** [3].

Естественно бы посмотреть на эту «связку» более проникновенно: психологичнее, идеологичнее и даже - в каком-то свете - историчнее. Работа по переводу отменно этому способствовала, позволяя проследить фарадеевское влияние на Максвелла чуть ли не построчечно. И занятие сие инициировало размышления об аналогиях и обобщениях: как и насколько часто образуются такие цепочки? Какова роль психосвойств их участников? В чем разница между одновременными и разновременными соединениями людей? Сколько тут умысла, везения и типичности? Ну, и что это значит для истории?

Как нередко бывает на перекрестках наук и искусств, «однодельцам» не хватает ни знаний, ни умений из соседствующих занятий; поэтому в ряде случаев нам пришлось ограничиться лишь наводками на проблемы, не вторгаясь в профессиональные дотошности.

Но был и еще один довод в пользу краткости и полетной образности изложения. Как недавно замечено литератором Б. Хазановым [4], различаются три типа прозы: одна - прозрачная, выверенная, отжатая, лапидарная (условно он ее

называет французской, хотя русским читателям она известна, например, через Карамзина и Пушкина); другая - замедленная, ветвистая, обстоятельная (условно - немецкая, к ней могут быть отнесены Пруст и Л.Толстой), и наконец, проза «русского» типа - стихийная, хаотизированная, «неаналитическая», как бы нарочно непоследовательная, зато очень психологичная, как у Достоевского¹. И каждому стилю - свое предназначение, приспособляемое к мотивам, содержанию и целям. Встречается, конечно, соединение (суперпозиция) манер, когда именно это способствует (не побоимся употребить тут старинный выразительный глагол) созданию точного представления о предмете описания². Нам очень хотелось придерживаться далее (по хазановской раскидке) «французской» беглости и нетяжеловесности, но это желание по-видимому так и осталось декларативным, ибо побороть в себе «русскоязычные» склонности оказалось не под силу даже четверым, разнонациональным.

2. Поучительность истории ³

История обязана (прежде всего!) последовательно изучать фактически случившееся прошлое. Но кроме чисто повествовательной функции она еще должна производить «взглядовую систематизацию» событий. Это придает ей многоликость и состояние «зависимости от наблюдателя», присущее психике человека и человеческих сообществ. Благодаря этому проступает еще одно назначение, его можно было бы назвать назидательным, занимательным или занимательно-назидательным.

Мы с удивлением следим за шарахающимися от одной случайности к другой поисками «истинной правды Природы» и, пользуясь преимуществами своего пребывания в будущем, вольно или невольно придумываем разного рода спрямления, альтернативные пути развития («виртуальные реальности»). Можно, конечно, относиться к этому как к отвлекающим фантазиям на тему - «а что было бы, если бы», а можно и по-другому: сопоставление «реальной реальности» с «реальностью виртуальной» должно вызывать восхищение перед величием простоты Замысла и незлонамеренной изощренностью («*rafiniert aber nicht boshaft*») осуществления этого Замысла Создателем. А иногда даже кажется, что такое активное «вмешательство» в историю может научить людей делать меньше несуразностей и улучшать «методику жизни», по крайней мере, на участках прогнозируемого развития (вне «скачков парадигм»). Наконец, и в осуществленной истории встречаются двухпутные движения - одновременное отстаивание разных концепций и сценариев построения объединяющих теорий, собирающихся к единому (одному и тому же!) ответу. Именно такая картина рисуется нам в деле создания теории электромагнетизма во второй половине XIX века.

Один путь был аналитический, отталкивающийся от квазистатического приближения с последовательными расширениями и обобщающими продвижениями к быстропеременной динамике [5]. В основном, его приверженцы трудились на европейском континенте - Ампер, Лаплас, Гаусс, Нейман, Вебер..., Гельмгольц Но не без исключений, конечно, таких весомых как, например, «образник» Риман.

Другой путь - аналоговый, модельный - не всегда подсказываемый «здравым смыслом» - как-то естественно приведший к построению общей картины явлений, единой, цельной... полевой. Он больше был свойственен

¹ Этот абзац вставлен весной 92 года во вторую редакцию текста; напомним, первая произошла осенью 91 года.

² Удивительно, что предлагаемая классификация имеет такую же тройственность, что и функциональная разделенность человеческого мозга, хотя взаимосоответствие и не строго по подраздельное, что прояснится чуть позже.

³ Нам удобно и привычно держать в уме только историю науки, пусть даже как аналог чего-то более объемлющего.

представителям британской, островной физики⁴. Здесь тоже много высоких имен, но фактически почти все достижения вобрала в себя (подытожив) «связка» Фарадея и Максвелла. Сейчас нет сомнений в полезности (и результативности!) обеих линий развития, но вторая оказалась быстропроходимее первой и, в конечном счете, победительнее ее.

Есть и другие примеры состязательных сценариев, но лучшего (в смысле наиболее привлекательного для наших демонстраций), пожалуй, не было и не будет: он удачно «лег на эпоху», ибо раньше еще не возникало столь многолюдного ажиотажа поиска, а позже «индивидуумы от науки» уже не могли себе позволить столь высокую степень личной независимости.

3. Психологичность развития

Как-то даже неудобно «переоткрывать» истину, что общество есть совокупность взаимодействующих людей и что оно не однородно, а разбивается на многие подобщества - иногда территориально разнесенные, а иногда совмещенные - как бы вложенные одно в другое. В пределе подобщество можно считать состоящим из одного или нескольких людей, подобранных по какому-то признаку. Поэтому при изучении Всеобщей Истории Идей (истории развития понимания людьми Природы и самих себя) необходимо знать и учитывать особенности мыслительного устройства людей, в этой самой истории участвующих. И многое другое надо учитывать, но далее будем нарочито сосредоточены только на этом.

Важнейшее достижение в понимании природы мышления Человека Разумного (за последние десятилетия, по крайней мере) связано с установлением (точнее - с физиологическим подтверждением - R.Sperry. Nobel Prize. 1981, [7-9]) функциональной асимметрии человеческого мозга. Именно - подтверждением, ибо по «клиническим показаниям» разносторонность умственных проявлений людей была известна бездато давно, по догадкам еще с первоначальных кроманьонских поколений, то есть, по-видимому, когда предки наши стали задумываться над характерами близких своих. Но все эти наблюдения обволакивались художественной словесностью, бывали слабо устремленными и, уж во всяком случае, не поддержанными представлениями о соответствии между поведением и физиологичностью.

Напомним - поляризация мыслительного аппарата человека выражается в том, что правое полушарие мозга специализируется на так называемом образном мышлении, иногда его зовут «параллельным», а в математических занятиях оно проявляется через предпочтение, оказываемое геометрической, пространственной сообразительности. Тогда как левое полушарие осуществляет последовательно логические операции, следит за причинно-следственными (временными) связями, и при математических занятиях проявляется через склонность к алгебраической, аналитической сообразительности. Мы приводим умышленно контрастное описание - фактическая картина не такая уж примитивная. Междуполушарное взаимодействие хорошо налажено (через мозолистое тело и комиссуры), и при необходимости происходят перехваты функций и разные компенсационные чудеса. Кроме того, бывают «переставленные» полушария у левшей (но не у всех). И уж,

⁴ Территориальное разделение - на островную и материковую ветви развития - факт удивительный, заслуживающий всеохватного изучения; наверное, это связано с явлениями психологической самоорганизации («самоохмуризации») народонаселения и преемственности культурных традиций. И ведь речь идет не только о науке! (см., например, книгу Дюгема «Физическая теория, ее цель и строение», изданную на русском языке еще в 1910 году [6]). Правда, сейчас, в конце XX века, благодаря разномасштабному информационному перемешиванию, геопривязки начинают смазываться и, похоже, мы, люди, восторгаясь разумностью и удобствами международных общностей, недопонимаем страстности потерь.

разумеется, нельзя не учитывать загадочных подсознательных процессов⁵.

Далее для поставленных нами целей достаточно знать, что люди по характеру своего мышления сочетают обе эти специализации в разных врожденно-приобретенных (плюс подправленных воспитанием и жизнью) пропорциях: встречаются доминантно-логические, явно выраженные «левополушарники» ($l > r \rightarrow \text{left} > \text{right}$), доминантно-образные, явно выраженные правополушарники ($l < r \rightarrow \text{left} < \text{right}$) и так называемые амбидекстры - двоякоправые ($l - r \rightarrow \text{left} - \text{right}$) с приблизительно сбалансированными свойствами⁶. Определить пропорции каждого индивидуума (да еще при этом отделить вклад врожденный от вкладов приобретенных⁷) можно только с помощью хорошо продуманной системы тестов и корреляции откликов на специально подобранные ситуации. Особую форму такого рода детективного исследования приобретает задача «восстановления» соответствующих свойств исторических личностей прошлых времен, исходя из прямых или косвенных свидетельств. К счастью, чем крупнее деятель (по историческому вкладу в цивилизацию - хотя критерии весьма расплывчаты), чем он знаменитее, тем, как правило, больше от него остается «архивных уликов». Но этого еще мало, - необходимо, чтобы эти улики были четко персонифицированы. Лучше всего выглядят поэты и художники, композиторы и другие «творцы», выражающие себя через долго живущие произведения собственного изготовления. Хуже всего - политические деятели, потому что дворы не только играют королей, но и передают им свои «усредненные» качества. Огорчительно, что и Умные Мира Сего «высокопоставленные ученые мужи» начинают со временем обретать слабость к присвоению идей и манер подвластных им «научных дворов», тем затрудняя грядущую «архивную» идентификацию личности в изолированном от окружения представлении⁸.

Мы не вдаемся здесь во все тонкости «психо-нейро-историзма» ввиду - так нам кажется - запутанности классификаций и клинических диагностик. При этом различие «существенностей» в характерах политиков и ученых настолько

⁵ К сожалению, многие интеллектуалы (то есть «умники» в хорошем смысле этого слова) «думают, не задумываясь», и уж во всяком случае, не считают культурной потребностью даже элементарную осведомленность о функциональных творческих и эксплуатационных возможностях (и невозможностях!) своего мозга. Эти вопросы неуместно разбирать в работе, посвященной уже подготовленному использованию этих знаний в истории науки. Так что ограничимся отсылками к литературе, но, как правило, увы, сильно профессионализированной (а порой даже «эзотеризированной», - доступной только «братьям по клану»). Чисто медицинские взгляды и пересылки собраны в книге [11], общенаучные - в обзорниках [7-10]. Многие публикации (еще с дофрейдовских времен!) касаются природы интуитивного подмышления («чутьевости!»), однако в пределах нашей достигаемости нет резюмирующих монографий на эту тему. Да и вообще все три типа подмышления еще ждут своих растолкователей. Правда, последние годы много внимания уделяется изучению распределения функциональных предназначений различных мозговых областей по глубине (корковые и подкорковые нейронные слои), однако, в основном их роль привязывается к характеру поведения, а не мышления. И мы не беремся судить об этом достаточно квалифицированно.

⁶ Например, у некоторых левшей (по слухам!?) асимметрия полушарий выравнивается, то есть проявляется расположенность к амбидекстри.

⁷ Насколько нам известно, этот вопрос более чем непрост: и логическое и образное мышление развивается в процессе воспитания «ума и чувств»; бывает даже возрастная динамика асимметрии функций мозга, чаще по схеме: ($l < r$) \rightarrow ($l - r$) \rightarrow ($l > r$), реже ($l > r$) \rightarrow ($l < r$). Это, конечно же, должно быть тщательно проанализировано при составлении психо-биографий [12], где всегда интересно отделить генетические (стойкие) признаки (впрочем, неточно - есть не только признаки, а еще и генетические команды развития признаков) от адаптационных. Пожалуй, самыми выразительными иллюстрациями мобилизационных возможностей человека служат переориентации манер письма некоторых художников после односторонних инсультов своих доминантных полушарий (болгарин Злато Бояджиев, нижегородец Михаил Виденский [13]. Такие критические («полундровые») ситуации подсказывают допустимость также и медленных плавных перестроек.

⁸ Заметим все-таки, что имеет право на существование вполне безличностная история науки, где имена открывателей либо отсутствуют, либо фигурируют в качестве обозначенческих символов. Но при таком «подходе» напрочь утрачивается привязка деяний к мозговой специализации деятелей и тускнеет назидательно-занимательное значение прошлого. Ведь даже в групповых мозговых атаках или внутри тайных орденов, спянных по типу Бурбаки, поощрительность к творчеству все равно опирается на человеческие слабости.

очевидно, что разделение на «экспертов», «стратегов», «организаторов», «коммуникаторов», частично уместное для общественных деятелей, вряд ли разумно для людей одиночного самостоятельного думанья.

4. Научные пары, научные коллективы и научные последовательности

В науке, как впрочем и в других «емких» занятиях людей (хотя нам сподручнее держаться только физиков и математиков), участвуют думатели всех свойств, но в разных сочетаниях. И воистину интересно понять, как ведут себя ученые-одиночки, как и в каких случаях они объединяются в коллективы, какими чертами продолжают в учениках, как образуются научные последовательности, то есть преемственные цепочки исследователей, погруженных в раздумья над решением какой-нибудь единой проблемы, и вообще, как происходят встречи подходящих людей с подходящими делами. Наверняка существуют наиболее благоприятные (для тех или иных судеб) обстоятельства. Однако, их поиск и выделение затруднены многочисленными жизненными запутанностями, только в очень «чистых реализациях» проглядываются признаки разумного соответствия людей и дел. Да и понятие «разумности» субъективно шатко. И все-же, казалось бы, на разных стадиях научных изысканий (поиск → догадка → утверждение → сопряжение → систематизация → «закононизация» → «мировоззрентизация») логические и образные уместности должны иметь свои предпочтения, причем не универсальные, а «подпроблемные»⁹.

Продвижение в этих трудно проходимых вопросах увлекательно и преисполнено неожиданностями. Одна из них раскрыта в уже упомянутой выше работе И.М.Яглома [1]. Речь идет о назойливо повторяющейся в истории парности разномыслных исследователей одного и того же дела. Впечатляющим примером служит одновременное и независимое открытие дифференциального и интегрального исчисления И.Ньютоном и Г.Лейбницем. Ньютон по многим своим качествам диагностируется как «правополушарник» ($I < r$) [1], то есть человек с преобладанием образного мышления, а Лейбниц - как «левополушарник» ($I > r$), то есть человек с предпочтительно логическим (педантично рассудительным) мышлением. Как известно, отношения между ними были крайне враждебными, недостойными их высоких интеллектов [16]. Предпринималось немало попыток объяснения этой вражды, но (насколько мы осведомлены) никто до И.М.Яглома не добирался до ее нейрофизиологических истоков, именно истоков, давших потом начало уже последующим распрям (и научным и житейским).

Пример этот значителен, но отнюдь не редкостен. В работе [1] приводится целый ряд аналогичных математических дуплетов; мы воспроизведем их ниже, понимая, конечно, что враждебность взаимных отношений между «напарниками» отнюдь не является непреложным следствием их разномыслия. Вот этот «список Яглома»:

⁹ Заметим, что в пражные времена, когда до физиологической асимметрии мозга еще не догадывались (по-видимому, первое высказывание принадлежало Марку Даке в 1836 году), в ходу были довольно-таки расплывчатые характеристики разномыслящих людей. Например [6], противопоставлялись умы широкне ($I < r$), но неглубокие ($I < r$?), умам глубоким ($I > r$), но нешироким ($I < r$?), что вызывало сложным-ложным ассоциации с истинными мыслительными расположениями.

С известными послаблениями асимметрия распространялась и на макроповедение сообществ, объединенных по профессиональным, территориальным (а порой и национальным) признакам. Так, например, считалось, что разделение по двум лагерям культуры - гуманитарной и естественной - соответствует их «мозговому-ложным перекосам»: правополушарники ($I < r$) более привержены искусствам и искусство-подобным занятиям, а левополушарники ($I > r$) - наукам и научно-подобным делам. В среднем основания для этого существуют, хотя, как будет ясно из приводимых далее примеров, такой примитивизм нефизиологичен. Практически в любом человеческом занятии участвуют думатели всех категорий [14,15]. И в литературе, и в живописи, и в музыке, и в политике, и в предпринимательстве, и в так называемых точных науках, и всюду-всюду можно видеть следы влияния и правых, и левых, и шалавых, с разными удельными весами, разумеется, но и не без неожиданностей в отклонениях от среднего.

l < r	l > r
Фалас	Пифагор
Платон	Аристотель
Кеплер	Галилей
Ньютон	Лейбниц
Гюйгенс	Паскаль
Лобачевский	Бойяи
Риман	Вейерштрасс
Гамильтон	Грасман

Его можно продолжить и распространить в другие профессии. Поразительна двухпуптевость познания! Практически любая задача допускает право- и левополушарные подходы (со всеми теми оговорками и смягчениями, которые мы без устали повторяем!). Вопрос об умственном преобладании одних над другими безответен, а скорее некорректен - рейтинги обеих команд в среднем примерно одинаковы.

Разумеется, парность открытий не есть обязательное явление, но ведь возможное! - вот в чем его «чудо-юдовость». Со временем потомки забывают разнохарактерности мук творчества предков и приходят к убеждению о совместимой полезности (а иногда и необходимости!) обоих подходов, когда-то казавшихся обоюдоострыми.

Следующим шагом должен быть анализ принципов... или чего-то еще, что объединяет разных «научников» около какого-либо общего дела, то есть переход от одиночных действий и вкладов к групповым. Как уже говорилось в разделе 0. Предпредисловие, разумно различать одновременно (и часто одновременно) работающие объединения (мы условно называем их научными коллективами) и разновременные (а часто и разноместно) преемственно действующих людей (мы условной называем их научными последовательностями). Как происходит «подбор кадров» в коллективах и последовательностях, вообще говоря, непостижимо, хотя в некоторых идеализированных случаях можно высветить некоторые важные черты.

Коллективы, пожалуй, формируются с помощью искусственного отбора, а последовательности - с помощью отбора, так сказать, естественного. Значит, состав коллектива может быть определенным образом запрограммирован - иногда руководством, иногда - смыслом, а иногда - загадочной общностью верований. Известно довольно расхожее понятие «коллектива единомышленников», но оно лишь частично отождествляется с однолево- или одноправополушарниками, думаясь, сие лингвистическое объединение формируется не столько по способу думанья, сколько по намерениям (или угождениям?!). Но все же люди с одинаковыми специализациями мозга легче приспособляются друг к другу, ибо обладают более или менее эквивалентными внутренними понятийными языками (!). Сейчас входят в моду попытки составления коллективов с помощью продуманно-придуманных тестирований, как правило, основанных на эталонных (контрольных) прецедентах, но ведь и старые способы - через впечатления и рекомендации - тоже сродни бездушным тестам. В общем же реальный процесс образования любого научного коллектива втягивает в себя такое количество привходящих социальных соображений, что вряд ли просто добраться даже до стадии классификации. (А было бы крайне заманчиво!).

Совсем иначе (в этом отношении) выглядят научные последовательности, где, по крайней мере, можно устанавливать определенные (возможные) схемы включения участников в процесс развития идей. При этом важно понять (или принять?) какие-либо начальные и окончательные фазы рассматриваемого фрагмента развития - например, он может обрываться (условно кончаться, а точнее, переходить в следующую стадию) построением строго логически замкнутого формализма, в котором люди типа (l < r) имеют определенные преимущества (обозначим такую законченность символом L), или «фрагмент» может выходить на создание логически-образной картины данного «уголка познания», где уже лучше выглядят амбидекстры (l-r) или «дружеские» соединения левых и правых

$(l>r) + (l<r)$. Закрепим за таким концом символ LR. В физике и математике двух типов завершения вроде бы достаточно, но в других науках «образностное» описание (R) может оказаться заслуженным, вершинным достижением¹⁰.

Таким образом, допустимы (но не обязательны!) следующие (идеализированные!) схемы научных последовательностей:

1. Парное развитие $(l<r) \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \Rightarrow (L,R);$
 $(l>r) \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \Rightarrow (L,R);$

2. Формально-образное развитие

$$(l>r) \Rightarrow (l\sim r) = (l<>r) \Rightarrow (LR);$$

3. Образно-формальное развитие

$$(l<r) \Rightarrow (l\sim r) \Rightarrow (l<>r) \Rightarrow (l>r) \Rightarrow (l\sim r) \Rightarrow (LR).$$

Первый порядок следовало бы назвать «схемой Яглома», второй хорошо представлен на всем пути истории физики (и математики, конечно!), особенно сейчас, когда многие ветви развития берут свое начало (и раньше бывало!) в разумно-формальном расширении лагранжианов. От чисто математических примеров лучше воздержаться по причине их изобилия!

А вот на третьем варианте мы остановимся подробнее - именно он инициировал наш интерес ко всей проблеме в целом и, главное, он оказался в отменном соответствии с преемственно-последовательной цепочкой (точнее ее околовышинным фрагментом!) создания макроэлектродинамики в прошлом веке. И вообще этот вариант выглядит правдоподобно оптимальным: зарождение взглядов - новых и неожиданных - должно легче удаваться образно мыслящим умам $(l<r)$; затем взгляды необходимо формализовать и привести в систему общепринятых понятий - подходящая работа для левополушарников $(l>r)$; между этими двумя «отрядами экстремистов» неплохо бы иметь посредников, способных понять «правых» и объяснить «левым». К исполнению таких ролей отлично приспособлены прирожденные равнополушарники - амбидекстры $(l\sim r)$ или же люди, научившиеся равнодейственно управлять своими умственными достоинствами, так сказать, благодатренированные амбидекстры $(l<>r)$.

В заключении этого раздела еще раз подстрахуемся против категоричности: понятно, что всякая схема выглядит навязчивовато и возбуждает желание противостоять ей контрпримерами, ибо жизнь витиеватее любых рассуждений о ней, и потому особенно интересны те случаи, когда научная последовательность реализуется персонализированно, а не усредненно по ансамблю исполнителей (но и такое встречается тоже!).

5. Связка: Фарадей, Максвелл и далее

В создании феноменологической (классической, макро) электродинамики принимало участие множество людей на протяжении почти столетия [23]. Выделение отдельных звеньев (фрагментов) в едином эволюционном процессе познания, наверное, если и возможно, то должно быть обусловлено скачкообразным изменением взглядов, так сказать, фазовым переходом в процессе понимания.

Одной из таких зародышевых идей явилась фарадеевская концепция поля. По-видимому, он выстрадал ее из эксперимента, разглядывая распределение

¹⁰ Кстати, качественную теорию чего-либо в физике и математике мы не без основания относим к LR-типу. Заметим, что в приведенных схемах мы различаем истинное индивидуализированное «амбидексторство» $(l<r)$ от спаренного $(l<>r)$, исполняемого либо двумя разномыслящими представителями, либо одним, но способным к переключению своих «состояний»; последнее свойство уникально и почему-то слабо «освоено» изучателями функциональных проявлений мозга.

опилок в окрестности полюса. Причем одиночная «опилка» (овалоид) разворачивается магнитом по законам ньютоновско-кулоновского дальнего действия и не побуждает к еретизму. А вот множественное их распределение как бы само наталкивает на мысль о сплошной заполненности пространства (среды) силами, силовыми трубками с хребтами-спондилоидами [17,18]. И Фарадей сумел увидеть эту картину единым охватом и оживить ее, перенеся в динамику, что и привело к концепции близкого действия, а затем и к догадке о конечной скорости движения возмущений силовых полей. Это была работа Великого Правого ($l < r$), создавшего новое представление о физической сущности.

Но, как известно, оно не вызвало ажиотажного спроса исследователей, особенно континентальных: им было трудно отступить от здравого консерватизма и последовательных (шаг за шагом) обобщений медленно изменяющихся во времени далекодействующих влияний. Да и бесформульный язык Фарадея не взывал к их рациональному разуму. Идея должна вызреть и дожидаться своего понятеля - толмача-переводчика.

Таковым и стал Максвелл, ум которого был функционально разносторонним (ну, может быть с небольшим перекосом вправо!). Во всяком случае, так следует из «клиники его деяний». Максвеллу, конечно, еще и «эпохально повезло»: к его времени и в доступной ему близости был подготовлен математический аппарат, пригодный для работы с пространственно-распределенными величинами - скалярами и векторами. И хотя он сетовал на слабое развитие «геометрии положений», все же в его распоряжении были удивительные теоремы Гаусса и Стокса, подкрепляемые идеями Остроградского, которые как-то очень по-фарадеевски связывали интегральные свойства полей по всему пространству их существования. Этот недоступный Фарадею язык (отчасти благодаря по-иному сложившейся образовательной молодости) легко воспринимался Максвеллом (тоже отчасти из-за иной образовательной молодости). Но язык-то был ведь образный, топологический, «правый», и не зря Максвелл любил говорить, что не сделал ничего иного, как переизложил идеи Фарадея на языке математическом. Не совсем так, но и не совсем не так¹¹.

Другой готовой математикой было кватернионное исчисление, придуманное Гамильтоном (и Тейтом), четкое, формульное, «левое». Для него сейчас, в нашем акселерантном обществе не отработано воображательных образов. Именно этот формализм позволил Максвеллу записать свои именные уравнения в интегральном и дифференциальном виде¹².

Трудно придумать еще один пример, равный этому по научной значимости, где бы столь убедительно соединялось образное и формальное воплощение одной и той же идеи в одной и той же голове. Так что связка Фарадей - Максвелл вполне адекватно (в части электродинамики) может быть представлена символически

$$(l < r) \rightarrow (l \sim r) \rightarrow (LR).$$

Однако, этому фрагменту свойственна двоякая незавершенность. С одной стороны, правильность максвелловских уравнений требовала экспериментальных проверок, а с другой - они сами по себе еще являли собой как бы

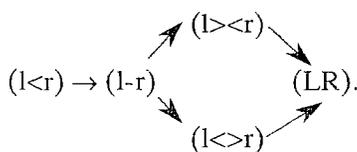
¹¹ Мы несколько спрямляем ход мысли Максвелла, фактически придерживаясь духа «Трактата об электричестве и магнетизме» [2], между тем, как в первооткрывательных статьях [19] господствовали еще механико-модельные образы, а поля записывались в инвариантном, координатном представлении. Об этом подробно рассказано в обзоре [3] и нашем Послесловии к работе [2].

¹² Для более профессионального углубленного знакомства с кватернионным электромагнетизмом читатель может заглянуть, например, в статью [20]. Важно знать принципиальную разницу между каноническим векторным и кватернионным исчислениями - первое удобно благодаря геометрической (пространственной) наглядности ($R!$), а второе строго алгебраично ($L!$). Интересно, что практически вся послемаксвелловская жизнь максвелловской электродинамики происходила в векторном представлении ($R!$), его придерживаются даже левополушарники ($l > r$). Повидимому, большинство физиков все-таки предпочитают (если нет к тому «противопоказаний») образно представлять то, что хотят понять!

«неосвобожденное от строительных лесов здание», да и при том с многочисленными «архитектурными излишествами», поскольку их строитель хотел сохранить в них следы исходных физических предпосылок, в чем он сам сознательно признавался. Удивительно, но факт: математическое «очищение» и опытное подтверждение сделаны одним и тем же человеком - Г.Герцем. По своему научному принадлежанию он был строгим «левым» ($l > r$) - в духе континентальной школы Гельмгольца, но в своих экспериментальных увлеченностях часто выглядел школоотступником - образником ($l < r$), и эта двойственность изумляла его близких. Такое поведение, скорее всего, не обычная прирожденная амбидекстрность, а умение пребывать в каждом из двух состояний ($l > r$) или ($l < r$) в зависимости от целесообразности (мы обозначаем это свойство символом ($l \gg r$)). В результате Герцу удалось изумительными экспериментами доказать верность максвелловских предсказаний и не менее изумительными теоретическими ходами освободить максвелловские уравнения от некоторого косноязычия, перейти от кватернионов к «нормальным» скалярам и векторам, да еще и ввести удачно-удобный потенциал (потенциал Герца), автоматически сводящий «островные» уравнения Максвелла к «континентальному» уравнению Гельмгольца (тем, видимо, частично скрасив свое отступничество от программы учителя!).

В принципе, этот исторический фрагмент создания классической электродинамики можно было бы здесь и замкнуть. Однако, одновременно с Герцем в развитии максвелловских идей принимала участие целая плеяда «островных» физиков, в основном, теоретиков [10]. Среди них мы решаемся выделить только одного - О. Хевисайда [21]. Своеобразие его мышления было сопоставимо с герцевским, но как бы антисимметрично оному. По своей природе он редкостный (мало на кого похожий) правополушарник ($l < r$), умевший топологически красиво манипулировать с электромагнитными полями в самых неожиданных их комбинациях, - так им было открыто будущее «черенковское» излучение методом воображаемого построения источников и полей (плоских волн!) задолго до будущего принципа Бриллюэна [21]. И в то же время при необходимости действуя в режиме «формализатора» ($l > r$), он сумел придать уравнениям Максвелла двойственно-симметричный вид, введя в них удобные (и до сих пор природно загадочные!) магнитные заряды и токи. А посему хевисайдовскую голову уместно характеризовать символом ($l < > r$).

Таким образом, общей «ментальной схеме» преемственной последовательности Фарадей → Максвелл → Герц + Хевисайд может быть придан вид:



Подытоживая, выскажем одно важное соображение. Изо всей многовариантной и даже многострадальной истории создания теории (макро) электродинамики нами вывучена только одна трех- четырехзвенная цепочка. И хотя входящие в нее Великие Умы взаимодействовали с большим числом соисследователей (порой не меньшей величины!), все же каждый из участников работал в значительной степени в одиночку, и потому их подходы и результаты информативно отражали их личные отличия, слаженно распределенные по всей цепочке. И сейчас, из векового отдаления, стершего многие случайные черты (побочности!), может показаться, что тогда к «состязаниям» подключилась отлично подготовленная эстафетная команда, причем (если уж продолжать спортивное сравнение) речь шла о комбинированной эстафете, где на каждом этапе своя дистанция, свой вид преодоления и свои рекордно-лучшие преодолеватели.

6. «Свидетельские показания»

А теперь настало время фактов. В этом параграфе собраны выдержки из «показаний» самих участников эстафеты, а также «судей со стороны». Они подобраны целенаправленно, дабы наилучшим образом освещать догадки и суждения, но за пределами ссылок и цитат осталось много полезного для дела материала, увы, не приведенного здесь из-за нашей недооценки или незнания. Ниже приводятся тексты (нетронутые никакими комментариями!) в таком порядке, который давал бы возможность - даже при оторванном от всего предыдущего чтении - как бы восстанавливать «догадки из намеков» в желательном для нас истолковании.

Паскаль [6, с. 68]. «Есть различные типы здравого ума: одни проявляют свою силу в одной группе вещей, а в других обнаруживают полную несостоятельность, другие - наоборот. Одни из них делают правильные выводы из небольшого числа принципов, и это и есть здравый ум. Другие же делают правильные выводы из положений, включающих много принципов».

«Есть... два типа умов: первые живо и глубоко проникают во все последствия, вытекающие из принципов, и это есть ум, правильно рассуждающий; другие усваивают большое число принципов, не смешивая и не спутывая их, и это есть умы геометрические. Одни характеризуются силой и правильностью суждения, а другие умы - широкие. Может быть одно без другого, может быть ум сильный и узкий или же широкий, но слабый».

Яглом [1, с.124, 114]. «Сила человеческого мозга в значительной степени заключается в согласованной деятельности двух интеллектуальных центров, в одновременной способности к анализу и синтезу. И вся история математики, как и вся история человеческой культуры, может служить подтверждением этого основного тезиса».

«Если Лейбниц, бесспорно, может быть охарактеризован как логик (или алгебраист), то Ньютона с неменьшей степенью определенности можно отнести к категории физиков (геометров), то есть людей, которым в высшей степени свойственно картинное восприятие мира, стимулированное деятельностью правого полушария головного мозга. Типичен в этом отношении предложенный им образ, когда Ньютон сравнивал себя с ребенком, которому удалось найти те или иные красивые раковины, вынесенные на берег океаном (то есть расшифровывать отдельные законы природы), в то время, как весь океан колышется перед его глазами и цепко держит все множество своих тайн, - более правомозговое описание деятельности естествоиспытателя, право же, нелегко дать».

Хокинг [16, с. 152]. «Лейбниц и Ньютон независимо друг от друга развили область математики, называемую дифференциальным исчислением, составляющую основу большей части современной физики. Хотя, как мы теперь знаем, Ньютон открыл это исчисление на несколько лет раньше Лейбница, свою работу он опубликовал значительно позже. Возник грандиозный спор по поводу того, кто был первым. Ученые рьяно защищали обоих соперников. Замечательно, что почти все статьи в защиту Ньютона были написаны им самим и лишь опубликованы под именами его друзей. Спор разгорался, и тут Лейбниц совершил ошибку, обратившись в Королевское общество с просьбой разрешить противоречие. Ньютон, будучи президентом Общества, назначил для разбора дела «незаинтересованную» комиссию, случайно составленную целиком из друзей Ньютона! И это было еще не все: затем Ньютон сам написал отчет комиссии и заставил Общество его опубликовать, официально обвинив Лейбница в плагиате. Все еще не чувствуя себя удовлетворенным, Ньютон анонимно опубликовал сжатый пересказ этого отчета в газете Королевского общества. Говорят, что после смерти Лейбница Ньютон заявил, что он получил большое удовлетворение от того, что ему удалось «разбить сердце Лейбница».

Джон Тиндаль [22, с. 61]. «... Основные исследования Фарадея... связаны между собой невидимой нитью умозаключений... Фарадей был более чем философом - он был пророком, и часто работал по вдохновению, встречая понимание только у тех, кто сочувственно к нему относился».

Редакторы «Трактата» [2, т. II, с. 412, 413]. «Фарадей был, по-видимому, человеком, которому нет и не может быть объяснений, если под таковым и понимать логические доводы. Он соединял в себе дотошность приверженности фактам, подкорковую бдительность к отвлекающим случайностям с симфоническим воображением, позволяющим ему составлять правильное представление о свойствах ответов без решения задач и без умения решать их в общепринятом понимании».

«Такие люди, как Фарадей, принадлежат сами к странным («аномальным») явлениям природы, именно потому и могли столь непринужденно углядывать не менее странные явления Природы вообще...»

Максвелл [2, т. II, п. 528, с. 154]. «Идеи Фарадея были выражены на языке, более пригодном для науки, находящейся в стадии зарождения, ибо язык этот до некоторой степени чужд стилю тех физиков, которые привыкли устанавливать математические формы мышления...»

В отличие от Ампера, Фарадей демонстрирует неудачные эксперименты наряду с удачными и незрелые свои идеи наряду с развитыми; поэтому читатель, каким бы он ни был менее способным по сравнению с Фарадеем в отношении индуктивного мышления, испытывает скорее симпатию, нежели чувство восхищения, и искушение поверить, что при удачном стечении обстоятельств он и сам стал бы первооткрывателем...

Возможно, большую пользу науке принесло то, что Фарадей, хотя и глубоко осознавший фундаментальные свойства пространства, времени и силы, не был профессиональным (professed) математиком. У него не возникло искушения входить во многие интересные исследования в области чистой математики, которые подсказали бы ему его открытия, если бы они были представлены в математической форме, и он не чувствовал потребность втискивать свои результаты в приемлемые - по математическим нормам того времени - формы, то есть выражать их в виде, доступном для нападок со стороны математиков. Благодаря этому он был оставлен в покое и мог делать работу, ему присущую, - находить соответствие между своими идеями и своими фактами, прибегая к языку естественному, а не профессиональному».

Кравец [17]. «Интересно также отметить, кого не цитирует Фарадей. Так как он не знает немецкого языка, то он не читал Ома..., не знаком с Гауссом. Из французов он ни при каких случаях не говорит ни о Лапласе, ни о Лагранже, ни о Коши. Это уже не условия окружения, а личная особенность Фарадея: великие классики Математики и математической физики не оказали на него никакого влияния; математический метод мышления был и остался ему совершенно чуждым».

Фарадей [17]. «... я выказываю свои личные взгляды с сомнениями и тревогой, так как если они окажутся неверными, это только помешает дальнейшему развитию науки об электричестве. Эта теория сопоставилась в моем уме давно, но я решился опубликовать ее, только когда убедился, что она совпадает со всеми известными мне фактами, и дает возможность объединить в одно целое явления, не имеющие на первый взгляд ничего общего. До сих пор я не замечаю никакого несоответствия между теорией и природой».

Максвелл [2, т. II, п. 529]. «Мы привыкли считать, что мир состоит из отдельных частей; поэтому обычно математики начинают с рассмотрения отдельной частицы, постигают ее связь с другой частицей и так далее. Обычно такой подход считают наиболее естественным».

Однако, для того, чтобы вообразить какую-то частицу, требуется прибегнуть к некоторому процессу абстрагирования, ибо все наши восприятия относятся к телам протяженным, и идея целого, существовавшая в нашем сознании на данный момент, возможно, столь же первична, как и представление о любой вещи, обладающей индивидуальными свойствами...

Метод Фарадея, по-видимому, органически связан со вторым подходом. Фарадей никогда не рассматривает тела, между которыми не существует ничего, кроме расстояния, и которые действуют друг на друга лишь в соответствии с некоторой функцией этого расстояния. Он представляет себе все пространство как некое поле силы... Фарадей даже говорит о принадлежащих телу силовых линиях в известном смысле как о частях самого этого тела, так что при его действии на удаленные тела нельзя сказать, что оно действует там, где его нет...»

Редакторы «Трактата» [2, т. II, с. 412]. «... Это какой-то парадоксальный стереотип «непризнания признанного». Человек, уже прославившийся Великим Исследователем Природы, казалось бы, должен хотя бы настораживать людей каждым своим размышлением, намерением, поступком. А они, как замороженные, отмечают их, не вникнув, будто руководствуются какими-то тягостными соображениями типа «он так долго был прав, что когда-то должен быть неправым».

Фарадей [2, п. 1306, с. 222]. «Возможно, что я сделал много ошибок, ибо даже мне самому мои идеи по этому вопросу кажутся лишь тенью умозрения или теми умственными впечатлениями, которые допустимы лишь временно как проводники к мышлению и исследованию. Человек, занимающийся опытным изысканием, знает, как эти впечатления многочисленны и как часто их кажущаяся пригодность и изящество исчезают с прогрессом и развитием истинного и реального познания природы».

Фарадей [18]. «Эти безуспешные изыскания и многие другие, никогда не обнародованные, не могли поколебать моего глубокого убеждения, основанного на философских соображениях».

Дорфман [23, с. 94]. «Характерной особенностью творчества Максвелла является его серьезный подход к выбору тематики. Словно предчувствуя, что судьба уготовила ему короткий срок жизни, он тратил отпущенные годы на решение важных задач науки. В эпоху, когда никто еще всерьез не задумывался о планировании научных исследований, Максвелл фактически наметил себе план, направленный на то, чтобы оказать максимальное воздействие на эволюцию науки и техники».

Максвелл [2, т.1, с.12]. «... прежде, чем начать изучение электричества, я решил не читать никаких математических работ по этому предмету, пока не проштудирую вначале «Экспериментальные исследования по электричеству» Фарадея».

Редакторы «Трактата» [3]. «Будучи по образованию, в общем-то, математиком, Максвелл по своему способу мышления и исследования принадлежал, скорее всего, к «модельным» физикам в тогда еще не задерганном значении этого понятия. По-видимому, все, что было им понимаемо, он мог себе представить».

Максвелл [19, с.11]. «Для успешного развития теории необходимо прежде всего упростить выводы прежних исследований и привести их к форме, наиболее доступной восприятию. Результаты такого упрощения могут быть представлены или в виде чисто математической формулы, или в виде физической гипотезы. ...Мы должны... найти такой метод исследования, который на каждом шагу основывался на ясных физических представлениях, не связывая нас в то же время какой-либо теорией, из которой заимствованы эти представления, благодаря чему мы не будем отвлечены от предмета в погоне за аналитическими тонкостями и не отклонимся от истины из-за излюбленной гипотезы».

Редакторы «Трактата» [3]. «Искренность высказываний, несомненно, возрастает по мере становления человека, ибо познавший успех возвышается над страхом заблуждений. Поэтому с современной точки зрения «Трактат» представляет собой удивительный (а следовательно педагогически поучительный) образец научной искренности. Он вполне может быть уподоблен зданию, у которого хотя строительные леса уже удалены, но еще заметны следы работ. Вполне допустимо, что это послужило причиной того, что не все и не сразу оценили величие вознесенного собора».

«Вслед за Фарадеем Максвелл воспринимал поле как некое «живое» образование, наделенное самостоятельными, уже не зависящими от источников свойствами. Аналогия с гидродинамикой... была почти вынужденной: она приводила к конечной скорости распространения этого самостоятельного поля, и принцип близкодействия даже не требовал какого-то специального постулативного близкодействия».

Максвелл [24, с. 2]. «Каждая наука должна иметь свои фундаментальные идеи, свои типы мысли; с их помощью процесс мышления приводится в полное гармоническое соответствие с природными процессами. И эти идеи не станут совершенными по форме, пока останутся облаченными в образы, свойственные явлениям самой науки, а не будут выражены теми структурами, которые математики привыкли привлекать для решения проблем, содержащих абстрактные величины».

Максвелл [24, с. 4]. «Существует узко профессиональная тенденция обучения, взращенная как среди людей науки, так и среди других профессионалов. Поэтому именно университеты могут преодолеть это стремление людей как бы распределиться по малым мирам, где они выглядят - из-за этой малости - более земными и мирскими. И если мы не сумеем вобрать в себя что-то от духа и настроения людей, придерживающихся особой (отличной от нашей) позиции, мы потеряем преимущества иметь в своем распоряжении людей, у которых разнообразные свойства и умения сосредотачиваются в каждом человеке индивидуально, в одной голове».

Редакторы «Трактата» [2, т. II, с. 419]. «К счастью, Максвелл избежал участи некоторых других первооткрывателей - ему не пришлось бороться за приоритет. Уравнения были неожиданны и не сразу поняты. Многие другие исследователи, занятые аналогичными делами, то есть развивающие свои варианты теории, не восприняли достижения Максвелла как решающие и тем более как завершающие. Одной из причин, наверное, было привлечение образной, фарадеевского толка аргументации... Это отпугивало, по крайней мере, некоторых континентальных физиков. Как ни странно, но такая территориальная поляризация наблюдалась на самом деле: немецкая и французская наука были более привержены рассудочному, аналитическому способу познания, чем британская, тяготеющая к образным, геометрическим методам. И шло это традиционно еще со времен Великого Противостояния дифференциалов Лейбница и флюксий Ньютона. Вообще, написанные Максвеллом уравнения показались «конкурентам» неубедительными и неубедительно обоснованными. И они не приняли их за фундаментальные исходные законы, по существу не нуждающиеся в почленной аргументации и не подлежащие выводу из иерархически более элементарных (такая потребность возникла позже, в процессе создания квантовой теории поля)».

Клейн [25]. «Максвелл не был мастером безупречного, отделанного изложения; его умозаключениям часто недоставало безусловной убедительности... И в физике Максвелл тоже является гением, творящим из непосредственной интуиции».

Пуанкаре [26, с. 21]. «Почему... идеи английского ученого (Максвелла) прививаются у нас с таким трудом? Причина этого несомненно заключается в том, что образование, получаемое большинством французов, развивает в них

склонность к тому, чтобы ценить прежде всего логичность и точность. С этой точки зрения старые теории математической физики вполне нас удовлетворили. Таков был метод всех наших учителей, начиная с Лапласа и Коши. Исходя из точно сформулированных гипотез, они с математической точностью выводили из них все следствия, которые затем сравнивали с опытом. Они как бы стремились придать всем областям физики точность небесной механики. Ум, воспитанный на подобных образцах, предъявляет ко всякой теории чрезвычайно строгие требования».

Герц [27, с. 80]. «Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, будто математические формулы обладают собственным разумом - кажется, что эти формулы умнее нас, умнее даже самого автора, как будто они дают нам больше, чем в свое время было в них заложено».

Хевисайд [21, с. 32]. «... Ни один математический пурист никогда не смог бы выполнить работу, заключенную в максвелловском трактате, он мог бы знать всю необходимую математику и даже более, но это не привело бы к цели, потому что он не смог бы сложить все вместе без физического руководства. Это обстоятельство ни в коей мере его не позорит, но только показывает различие в путях мышления».

Максвелл [24, с. 4]. «Человеческий ум отнюдь не похож на нагретое тело, ведущее себя по законам Фурье, то есть постепенно переходящее в предельное состояние спокойной, ровной однородности, характер которого мы можем заранее предсказать; скорее он подобен дереву, выпускающему ветви, способные принаравливаясь к новым свойствам небес, куда они тянут себя, и корни, способные пробираться сквозь странные, чуждые и неведомые слои грунта, куда они внедряют себя. И для нас, живущих только заботами своей эпохи и усваивающих только характер современных нам идей, невозможно предсказать общую тональность науки будущего, точно так же, как и невозможно предчувствовать отдельные открытия».

Физические изыскания непрерывно раскрывают нам все новые и новые черты естественных процессов, и мы, таким образом, оказываемся вынужденными выискивать новые и новые формы мышления, пригодные для усвоения этих новых черт. Отсюда проистекает важность тщательного изучения таких соотношений между Математикой и Физикой, которые устанавливали бы условия, позволяющие без опасения переносить идеи, извлеченные из одной отрасли физики, в другую, и формировать взгляды, могущие эксплуатироваться в этой другой отрасли».

Максвелл [24, с. 5]. «Я считаю, что пчелы роятся около цветов ради изготовления меда и только; им никогда не приходит в голову, что пыльца, переносимая от цветка к цветку, открывает возможность превосходного расширения цветочной плантации, тем обеспечивая большее скопление пчел на следующий год. А потому нет ничего лучшего для нас, чем увеличивать световой день и тем способствовать перекрестному оплодотворению наук».

Дорфман [23, с. 120]. «Герц первоначально был сторонником традиционных теорий и перешел на позиции теории Максвелла лишь под давлением открытых им самим опытных фактов. Продолжительное время Герц находился под влиянием воззрений Гельмгольца... «Научная осторожность» Гельмгольца (как он сам выражался) и следовавшего за ним Герца несколько задержала признание максвелловской теории».

Григорьян, Вяльцев [27, с. 25]. «В диссертации Герца более всего поражает легкость, с которой он оперирует весьма сложными уравнениями и специальными формулами. Диссертация занимает более 100 страниц, сплошь заполненных формулами. Для выполнения такой работы, тем более в столь короткий срок, надо обладать совершенно недюжинными математическими способностями... Если проследить за проявлениями его талантов во времени, получается «впечатляющая картина»: вначале большие способности к школьным наукам, к ремеслам и

языкам, затем склонность к инженерному делу, после нее необыкновенное экспериментальное мастерство и, наконец, выступление в роли одаренного математика. Воистину природа не часто наделяет людей такими яркими и разнообразными способностями, и прав был Гельмгольц, назвавший Герца «любимцем богов».

Болотовский [21, с. 28]. «Хевисайд не вошел в научное сообщество, как теперь говорят, «не вписался». Его подход к проблемам был нетрадиционным, непривычным... Он выработал свой стиль выбора и рассмотрения научной проблемы... Он создал свой язык и свою систему образов в науке, и они отличались от традиционных... Поэтому иногда труднее было понять, в чем заключается утверждение Хевисайда, чем убедиться в справедливости этого утверждения».

Фицджеральд [21, с. 84]. «Максвелл, как и всякий другой первопроходец, который не живет для того, чтобы разрабатывать открытую им страну, не имел времени для того, чтобы разрабатывать прямые пути доступа в эту страну, или наиболее систематический способ исследования. Это было оставлено на долю Хевисайда. Трактат Максвелла загроможден следами его блестящих путей продвижения, обломками его укрепленных лагерей, следами его битв. Оливер Хевисайд убрал все эти обломки, открыл прямой путь, провел широкую дорогу и возделал значительную область страны».

Фарадей [22, с. 57. «... лектор никоим образом не должен быть «приклеенным» к столу или «привинченным» к полу... (Он) должен быть непринужденным и собранным, бесстрашным и беззаботным, а его мысли и сознание ясны и свободны, когда он размышляет о предмете и излагает его... Все его поведение должно внушать аудитории уважение, и он никогда не должен забывать о присутствии этой аудитории... Я не одобряю (лектора), диктующего (свой предмет..) я не одобряю длинных лекций; один час достаточен для любого лектора, никому нельзя позволять превосходить это время».

Сергей Маковский [28, с. 198].

«Отчизна милая, не ты ли
Отвергнув полуправды ложь,
Держаньем праведных усилий
Две истины в одну сольешь?»

7. Несколько заключительных слов

Затронутая выше общая тема шире и богаче «доставшегося нам» исторического материала. Как ясно из намеков, рассыпанных по всему тексту, нам хотелось уловить значение мыслительных особенностей людей при их соединении в научные коллективы и научные последовательности. Но мы понимаем, что скорее преуспели в замахе на проблему, чем в заметном продвижении к ответу. Различия между коллективами и последовательностями главным образом в характере взаимодействия между людьми. В коллективах взаимодействие сильное: люди работают вместе, соприкасаются жизнями и потому их совместимость (слаженность, срабатываемость, содружественность или просто взаимотерпимость) определяются всей совокупностью (набором) человеческих свойств, среди которых способности ментально-оптимально соответствовать делу и друг другу могут легко затеряться в среде отвлекающих пороков и добродетелей. Не всегда (но засекаемо часто) из-за сильной связанности Сильные (и обычно своенравные) Мира Сего не уживаются внутри одной «ячейки», и происходят разукрупнения или распады на «подъязычки», тем создающие простор для самодержавия каждому Лидеру.

Иначе - в научных эстафетных последовательностях. В них связь между исполнителями однонаправленна (вообще говоря) и тем очищена от многих «психологизмов», особенно, когда она осуществляется бесконтактно - через публикации. Согласованность таких эстафетных цепочек определяется, в основном, способностью (склонностью, предрасположением) к восприятию предшествующих идей, так что Великие Умы (и невеликие, кстати, тоже) могут без ущемления своей личной независимости (или представления о ней) вступать - куда добровольнее, чем в совместных коллективах - в соединения, оптимально подлаженными к особенностям мышления.

Нам думается, свободное объединение таких людей как Фарадей, Максвелл, Герц, Хевисайд «под одной» крышей было бы совершенно немислимо. Однако, в эстафетную цепочку, развернутую во времени, они вошли почти без утеснений и потерь своих уникальностей.

В истории науки аналогичных цепочек не так уж много (но и не мало все-таки). По мере развития информационного единения их участники как бы коллективизируются, усредняются, захватываются чужими (иногда - чуждыми) манерами, и задача выделения индивидуальных качеств усложняется, но не утрачивает интересности и поучительности. Впрочем, эта фраза возвращает нас к началу нашего эссе ¹³.

Послесловие

Пока тянулась подготовка второй редакции этих заметок, на нас обрушилось горе: умер Михаил Львович Левин. И теперь этот препринт станет его первым посмертным деянием. Первым, но не последним. М.Л.Левин оставил после себя столько влияний на людей разных судеб, профессий и склонностей, что еще долго-долго его черты будут просвечивать в свершениях всех, соприкасавшихся с ним ранее, а теперь временно пребывающих по разные стороны бренности и вечности.

Одной из базисных идей представленной статьи - по нашему замыслу - является раскрытие связующей роли людей с удачно сбалансированными приемами мышления. Мы почти не затрагивали общественную роль таких думателей, понимая, однако, ее безусловную важность. Тенденция к разъединению двух культур, условно называемых гуманитарной и естественной (может быть, лучше бы сказать одушевленной и неодушевленной), дестабилизирует даже умственно развитую часть общества (интеллектуальную элиту). И хотя такая «макрополяризованность» отнюдь не обязательно совмещается с «микрополяризованностью» мозговой деятельности отдельных «вкладчиков в цивилизацию» (об этом уже говорилось выше), но все-таки среди гуманитариев преобладают «образники», а среди «технарей» - логики, рассудочники. Иногда даже не от природы, а от профессиональных нацеливаний. Такое впадение в крайности неприемлемо ни для физически изолированных личностей, ни для разумно организованных сообществ. (Впрочем, может быть, слово «разумно» здесь обязывает к чему-то большему, чем мы хотели бы сказать). По-видимому, возможны два-три варианта «коллективизации правых и левых». Один был, вслед за И.М. Ягломом, продемонстрирован выше: «иносвойственные мыслители» спонтанно возникают внутри каждой из культур (образники среди логиков и логики среди образников) и выполняют там ответственные миссии чудотворцев. Другой вариант, к сожалению, иногда воинственный, состоит в попеременном

¹³ Примечание. К моменту второго редактирования нашего текста появилась весьма интересная (и по постановке проблемы и по содержательности) статья А.С.Новикова «О природе повторных открытий» ("Вопросы истории естествознания и техники". 1992, № 1), где отмечается «разнополушарность мышления» Фарадея и Максвелла. Более того, как нам думается, изучение природы одновременных, повторных и последовательно развиваемых открытий, предпринятое А.С. Новиковым и отчасти нами, являет собой показательный самопример действий, поясняющих намерения и цели авторов.

преобладании одной культуры над другой. На каких-то этапах этих необъявленных «межкультурных сражений» гуманитарные подходы уступают свои позиции логическим (часто под прикрытием «математических обоснований»); на других этапах наоборот - логические доводы меркнут и сдаются под стихийным напором иррациональных взглядов, впечатлений, поступков (часто под прикрытием «окультурных обоснований»), и так далее. Но есть и третья возможность, на наш взгляд, наиболее адекватная природной сущности бытия. Она реализуется благодаря присутствию в человеческом обществе людей особого дара, особого склада ума, подкрепленного вдобавок обходоравной образованностью. Такие люди редки и часто бывают не столько *от*, сколько *для* мира сего, ибо они - центры притяжения разномыслителей и разноумельцев.

Именно такими «полномочиями свыше» был облачен наш друг и учитель Михаил Львович Левин. Он совмещал в себе гармонично согласованного образника и логику, умел переключаться в любое состояние - в зависимости от внешних условий или внутренних побуждений. Его окружение, насчитывающее до 10^3 активных взаимодействий (цифра сама по себе значительная для людей, не занятых управлением или правлением), состояла из людей почти всех человеческих влечений: политики, историки, художники, литераторы, киношники, юристы, медики, ученые всяких принадлежаний... и, уж конечно, математики и физики. И для всех он был необходимостью: кому-то спарринг-партнером, кому-то поставщиком или экспертом идей, кому-то внимательным понимающим (отнюдь без обязательной согласности!), а кому-то... просто духовным пастором...

Мы надеемся рассказать о нем более подробно где-то в другом месте.** Здесь же, придерживаясь главной направленности статьи, мы ограничиваемся такими вот поминальными словами:

М.Л.Левин, будучи по своей специальности физиком-теоретиком, благодаря редкостному сочетанию логического и образного мышления, щедро расточаемого по неперечислимому множеству познаний и любопытств, претворил себя в человека-явление, в интеллектуальный феномен особого предназначения - «связного» разнополюсных культур. Ибо его искрометный ум удачно соединился с общительным, расположительным, добронаправленным характером, не препятствующим, однако, обладанию незыблемыми нравственными принципами, определяющими пределы возможных взаимодействий с людьми, коим выпала судьба жить с ним в одном пространстве и времени.

Да будет он продлен в памяти нашей и наших делах!

Литература

1. И.М. Яглом. Почему высшую математику открыли одновременно Ньютон и Лейбниц? (Размышления о математическом мышлении и путях познания мира). М.: Знание, Число и Мысль, 1983, № 6.
2. Д.К. Максвелл. Трактат об электричестве и магнетизме / Пер.под ред. М.Л.Левина, М.А.Миллера, Е.В.Суворова. М.: Наука, 1989.
3. М.Л. Левин, М.А. Миллер. Максвелловский трактат об электричестве и магнетизме // УФН. 1981. Т.135, в.3.
4. Б. Хазанов. Тоска по многословию // Лит. газета. 1992. № 10 (5387).
5. Б.В. Булюбаш. Электродинамика дальностей // Физика XIX века в социальном и общенаучном контексте. М.: Наука (в печати).
6. Пьер Дюгем. Физическая теория, ее цель и строение / Пер.с франц. Г.А.Котляра. СПб: Образование, 1910.
7. Мозг / Пер. под ред. В.П.Симонова. М.: Мир, 1984.
8. Ф. Блум, А. Лейзерсон, Л.Хофстедтер. Мозг, разум, поведение. М.: Мир, 1988.

** см. Анонс на с. 123.

9. Дж. Эдельмен, В. Маунтклас. Разумный мозг / Пер.под ред. Н.Ю. Алексеенко и Е.Н.Соколова. М.: Медицина, 1988.
10. Д. Норман. Память и научение / Пер.под ред. П.В. Симонова. М.: Мир, 1985.
11. Н.Н. Брагина, Т.А. Доброхотова. Функциональные асимметрии человека. Второе издание. М.: Медицина. 1988.
12. Г.Ю. Мошкова, А.В. Юевич. Психобиография - новое направление в изучении науки // Вопросы истории естествознания и техники. М.: Наука, 1989, №3. С. 67.
13. М.А. Миллер. Размышления о размышлениях // Препринт ИПФ РАН № 287, допечатка 1992 г.
14. Вяч. Вс. Иванов. Чет и нечет (асимметрия мозга и знаковых систем). М.: Сов.радио, 1978.
15. Е.Л. Фейнберг. Кибернетика, Логика, Искусство. Сер. Кибернетика. М.: Радио и связь, 1981. Второе издание: Е.Л.Фейнберг. Две культуры. М.: Наука, 1992.
16. С. Хокинг. От большого взрыва до черных дыр (краткая история времени) / Пер. под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1990.
17. М. Фарадей. Экспериментальные исследования по электричеству / Под ред. Т.П.Кравца. АН СССР, 1947-1959.
18. М. Фарадей. Избранные работы по электричеству / Под ред. З.А.Цейтлина. М.-Л.: ГОНТИ, 1939.
19. Д.К. Максвелл. Избранные сочинения по теории эм поля / Под ред. П.С.Кудрявцева. М.: Гостехиздат, 1950.
20. A.Singh. Quaternionic Form of Linear Equation for the Gravitational Field with Heavisidian Monopoles // Lettere al Nuovo Cimento. 1981. Vol. 32, № 1, 5 Settembre.
21. Б.М. Болотовский. Оливер Хевисайд, 1850-1925 / Под ред.акад. В.Л.Гинзбурга. М.: Наука, 1985.
22. Д. Мак-Дональд. Фарадей, Максвелл и Кельвин / Перевод А.В.Давыдова и В.А.Кузьмичевой. М.: Атомиздат, 1967.
23. Я.Г. Дорфман. Всемирная история физики (с начала XIX до середины XX века). М.: Наука, 1979.
24. J.K. Maxwell. The Sesquicentennial Symposium / Ed. M.S.Berger. North-Holland. 1984.
25. Ф. Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989.
26. Из предыстории радио: сборник оригинальных статей и материалов // Сост. С.М.Рытов под ред. Л.И.Мандельштама. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948. Вып.1.
27. А.Т. Григорьев, А.Н.Вяльцев. Генрих Герц. М.: Наука, 1968.
28. С. Маковский. // Ковчег (поэзия первой эмиграции) / Сост. В. Крейд. М.: Полит.литерат., 1991.

*Поступил в редакцию ИПФ РАН
3 ноября 1992 г.*

**FARADAY - MAXWELL - HERTZ - HEAVISIDE...
ON THE COORDINATION OF THE FUNCTIONAL
SPECIALIZATION OF CEREBRUM**

V.M.Bolotovskiy, M.L.Levin, M.A.Miller, E.V.Suvorov

This is a historical-psychological sketch based on the material of the Conference dedicated to M.Faraday's memory (Moscow, autumn 1991). Some consideration on the mental compatability of scientists occupied with the study of some common problem is

given. People with different types of thinking (figurative, logical or combined) form relay-race scientific successions more naturally (or act independently) than join voluntary scientific associations. A rather vivid example of a successful (productive) succession is the chain Faraday - Maxwell - Hertz - Heaviside who are the participants of the classic macroelectromagnetic theory development.



Болотовский Борис Михайлович - родился в Москве 20.09.1928 года. Отец и мать - школьные учителя. Во время Отечественной войны был эвакуирован из Москвы в Пензенскую область, где прожил год, затем вернулся в Москву. В 1945 году поступил на физический факультет Московского университета. Закончил университет в конце 1950 года и был направлен на работу в Физический институт им. П.Н. Лебедева Академии наук. Там и работает поныне в должности ведущего научного сотрудника. Защитил кандидатскую диссертацию по торможению заряженных частиц в диэлектрике и плазме (1955) и докторскую диссертацию на тему «Излучение равномерно движущихся зарядов» (1965). Опубликовал около 150 статей в научных журналах, написал две книги «Излучение Вавилова - Черенкова» и «Оливер Хевисайд». Перевел несколько книг с английского. Вместе с М.Левиным и М. Миллером участвовал в переводе на русский язык классической двухтомной книги Максвелла «Трактат об электричестве и магнетизме».

Область научных интересов - классическая электродинамика.



Автобиография. Я, Левин Михаил Львович, родился в 1921 г. в г. Саратове, в семье научного работника. В 1926 г. переехал в Москву. В 1938 г. после окончания средней школы поступил на физический факультет Московского университета, который и окончил в 1944 г.

В 1943-44 гг. я одновременно с учебой в МГУ работал в качестве научного сотрудника сперва в теоретической лаборатории завода 465 НКЭП, а затем в той же лаборатории (руководитель - М.А.Леонтович), переведенной в НИИ-108 НКЭП. В июле 1944 г. был арестован органами тогдашнего НКГБ. Приговорен постановлением ОСО от 3 марта 1945 г. к 3-м годам по ст. 58-10.11 УК. В августе 1945 г. освобожден по амнистии. До этого три месяца работал в так называемой «Кучинской шараге» (точного названия не знаю), где начальником был полковник Ф.Ф. Железов. В сентябре 1945 г. начал работать на радиофизическом факультете Горьковского университета. В ноябре 1946 г. защитил кандидатскую диссертацию, после чего, занимая

штатную должность ассистента, исполнял обязанности доцента кафедры теоретической физики.

В 1948 г. по «аллилуевскому делу» была арестована моя мать - Р.С. Левина, член-корр. АН СССР. Это усугубило злыбкость моего положения, а в июне 1950 г. я был уволен, не получив на руки характеристику с места работы. Поэтому 1950-51 учебный год провел в Горьком «тунейдцем», зарабатывая на жизнь анонимными переводами научных книг.

С сентября 1951 г. по август 1955 г. работал в Тюменском пединституте, сперва ст. преподавателем, затем и.о. доцента. Осенью 1954 г. смог защитить докторскую диссертацию, написанную еще в 1948 г. В сентябре 1955 г. после избрания по конкурсу занял должность профессора кафедры теоретической физики Ивановского пединститута. В мае 1956 г. Военная Коллегия Верховного Суда СССР отменила постановление ОСО из-за отсутствия состава преступления. Моя мать была полностью реабилитирована еще раньше, в 1955 г.

С сентября 1956 г. работаю в Радиотехническом институте АН СССР. В 1960 г. избран на должность нач. лаборатории, которая в 1977 г. переведена в Московский Радиотехнический институт АН СССР. С декабря 1989 г. нач. теоретического отдела института. Кроме того, начиная с осени 1957 г. являюсь по совместительству профессором кафедры радиофизики МФТИ.

Моя жена - Наталья Михайловна Леонтович, математик, сейчас на пенсии. Дочь - Татьяна, научный сотрудник Гос. Третьяковской галереи. Сын - Андрей, научн. сотрудник Института океанологии АН СССР. Сын - Петр, студент МФТИ.

8 июня 1990 г.

Левин



Миллер Михаил Адольфович - родился в 1924 году на улице Старая Канава города Сормова Нижегородского края. Во время войны (1942) служил в рядах Красной Армии. Закончил радиофизический факультет Горьковского университета (1949). Некоторое время работал в Горьковском филиале Арзамаса-16, затем поступил в аспирантуру Горьковского университета к профессору М.Т. Греховой. Защитил кандидатскую диссертацию по поверхностным волнам (1953), затем докторскую диссертацию по взаимодействию заряженных частиц с высокочастотными полями (1960). В настоящее время работает главным научным сотрудником Института прикладной физики РАН и по совместительству профессором Нижегородского университета. Научные интересы: электродинамика, физика плазмы и науковедение. Любимая геометрическая фигура - тор.



Суворов Евгений Васильевич - родился в 1943 году в Ульяновске. Окончил Радиофизический факультет Горьковского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского (1965). Кандидатскую и докторскую диссертации защитил по специальности физика и химия плазмы. Заведующий отделом Института прикладной физики РАН, по совместительству - профессор кафедры «Высшая школа общей прикладной физики» Нижегородского госуниверситета. Круг научных интересов - взаимодействие мощного излучения с плазмой, ЭЦ нагрев и безындукционная генерация тока в установках УТС, плазменная диагностика, электродинамика.



**В издательстве Института прикладной физики РАН и при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
вышел в свет сборник**

Михаил Львович Левин. **Жизнь, воспоминания, творчество.** Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 1995, 464 с.

Сборник посвящен памяти М.Л.Левина, одного из основателей горьковской (нижегородской) радиофизической школы. М.Л.Левин начинал свою педагогическую деятельность в Горьковском университете на радиофизическом факультете, 50-летие которого отмечалось в 1995 г. В книге несколько разделов. В первом - краткое описание жизни М.Л.Левина; здесь же приводятся документы, относящиеся к драматической части жизни его и родителей (аресты, освобождения, реабилитации). Второй раздел - воспоминания друзей и близких, которые воссоздают образ этого необыкновенного человека, щедро делившегося своими знаниями, мыслями и чувствами. Краткий обзор чисто научных достижений занимает сравнительно небольшую часть; он предназначен в основном для физиков, но кое-что полезное для себя может найти любой читатель. Четвертый раздел полностью посвящен литературному творчеству М.Л. Левина (стихи, проза, публицистика). Здесь, в частности, помещены его воспоминания о М.А. Леонтовиче, А.Д. Сахарове, Б.Л. Пастернаке, разрозненно публиковавшиеся ранее в других изданиях и получившие высокую оценку. В целом сборник полифоничен и несомненно будет полезен читателям разных поколений независимо от их профессий

Составители: Н.М. Леонтович, М.А. Миллер
Ответственные редакторы: А.Г. Литвак, М.А. Миллер
Рецензент: А.В. Гапонов-Грехов
Редакционная коллегия: Ю.Н. Беляев, С.Д. Жерносек, Н.Н. Кралина,
Г.В. Пермитин





Изв.вузов «ПНД», т.4, № 2, 1996

Завершила работу Международная научная конференция **«Нелинейная динамика и хаос: приложения в физике, биологии и медицине»**. Конференция проходила в Саратове, в отеле «Словакия» в период с 7 по 14 июля 1996 г. Спонсоры конференции: РФФИ, Госкомвуз РФ, German Physical Society with WE-Heraeus-Foundation; Office of Naval Research, European Office; SPIE.

Проведение научного мероприятия такого высокого ранга в Саратове явилось большим событием не только для нашего города, но и для России. В конференции приняли участие более 140 ученых из 15 стран мира. С докладом выступили более 50 участников, являющихся руководителями или представителями известнейших научных школ. В частности, немецкая делегация из 10 участников представляла две из ведущих научных школ Германии - Гумбольдский университет Берлина и группу нелинейной динамики университета города Потсдам; группа ученых из США в составе 8 участников представила интереснейшие доклады по стохастическому резонансу, медико-биологическим аспектам нелинейной динамики и математическому моделированию. Работы в этих направлениях проводятся известными научными коллективами в городах Сан-Диего, Атланте, Лос-Анжелесе, Чикаго и др. Был заслушан ряд докладов представителей Англии, Франции, Италии, Японии, Кореи, Швейцарии, Дании и других стран. В конференции приняли также участие представители известных научных школ России и стран СНГ. Были представлены: Московский университет, Нижегородский университет, ряд академических институтов РАН Москвы и Санкт-Петербурга, Институт математики Академии наук Украины и др. Большинство участников представили свои доклады на стендовой сессии. Таких докладов было более 75.

Основная задача, которую ставил перед собой Оргкомитет состояла в том, чтобы предоставить молодым ученым Саратовского университета, Медицинского и Технического университетов и представителям академической науки Саратова возможность прямого контакта с первыми лицами в современной нелинейной динамике. Их имена широко известны по научной печати, но пользу личного общения преувеличить невозможно. В конференции приняли участие более 40 молодых ученых Саратова и с этой точки зрения Оргкомитет выполнил свою задачу.

В рамках конференции один день работал специальный семинар **«Нелинейная динамика и структуры в биологии и медицине: оптические и лазерные технологии»** под руководством профессора СГУ В.В. Тучина.

Перечислить даже основные научные направления, результаты которых обсуждались в докладах и дискуссиях конференции, нет никакой возможности. Желаящих получить подробную информацию о содержании научной программы конференции мы отсылаем к книге тезисов докладов, которая издана к началу конференции Государственным учебно-научным центром «Колледж».

Оргкомитет благодарит за оказанную помощь и техническое содействие в проведении конференции следующие организации: Обком профсоюзов рабочих местной промышленности и коммунально-бытовых предприятий; Концерн «Волганефть»; ЦНИИИА; МП «Ника-СВЧ»; АОЗТ «Саратовская система сотовой связи»; Инвестиционная компания «Синяя птица»; Саратовское отделение Сбербанка России.

Председатель Оргкомитета
засл. деятель науки РФ,
профессор СГУ,
зав. кафедрой радиофизики

В.С.Анищенко

В Оргкомитете имеются
Тезисы докладов конференции
«Nonlinear Dynamics and Chaos: applications in Physics, Biology and Medicine».
Saratov, Russia, July 8-14, 1996,

а также Труды международной конференции
«Criteria of Selforganization in Physical, Chemical and Biological Systems».
Moscow - Suzdal, June 12-18, 1995.

Справки в редакции,
телефон 845-2-51-42-98
E-mail: and@ccollege.saratov.su



**В издательстве
ГосУНЦ «Колледж»
вышла в свет книга**

Д.И. Трубецков,
А.Г. Рожнев, Д.В. Соколов

ЛЕКЦИИ ПО СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВАКУУМНОЙ МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ

стоимость без почтовых расходов
20 тыс. руб.

Для получения книги наложенным платежом
необходимо направить заявку, указав
адрес, телефон, количество экземпляров,
по адресу:
410601, Саратов,
Главпочтамт, а/я 3150
Лёвиной Н.Н.

E-mail: and@ccollege.saratov.su
телефон редакции (845-2) 51 42 98

Оглавление

Лекция 1. О трудности определений. Пульсирующий характер развития науки и сверхвысокочастотная вакуумная микроэлектроника. Немного истории по Айвору Броди: четыре пути к вакуумной микроэлектронике. Кен Шоулдерс - пророк в вакуумной микроэлектронике. «Обратно в будущее»

Лекция 2. Детали первого пути - вакуумные приборы сверхвысоких частот с электростатическим управлением и модуляцией эмиссии. Лампа Гаева и другие. Клистрод - лампа для телевидения и «звездных войн». Фемитрон - первый СВЧ прибор с автоэлектронной эмиссией: особенности, элементарная теория, экспериментальные результаты. Генератор с тормозящим полем с автоэмиссионным катодом.

Лекция 3. Автоэлектронная эмиссия - главное в вакуумной микроэлектронике. Качественное описание. Некоторые напоминания из квантовой механики. Отражение и прохождение через потенциальный барьер. Барьеры прямоугольной и треугольной формы. Туннелирование через потенциальный барьер на поверхности металла. Элементарная теория автоэлектронной эмиссии. Закон Фаулера - Нордгейма. Энергетический спектр эмиттированных электронов.

Лекция 4. Современные представления об автоэлектронной эмиссии. Тонкопленочные автоэмиссионные катоды - технология и особенности протекания эмиссионных процессов. Решетки автоэмиссионных катодов из кремния, их преимущества и недостатки. Микровакуумные устройства с горизонтальной геометрией. Алмаз - новый материал для автоэмиссионных катодов.

Лекция 5. Триод возвращается? Взрывная электронная эмиссия. Вакуумная микроэлектроника и релятивистская СВЧ-электроника. Тепловая устойчивость эмиттирующего острия. Влияние пространственного заряда на автоэлектронную эмиссию. Электрическая прочность. Предельные характеристики и размеры автоэмиссионного катода. Автоэмиссия в СВЧ поле. Время туннелирования электрона. Устранение ионной бомбардировки катода в СВЧ поле. Какой вакуум необходим для вакуумных микротриодов. Параметры микротриода как элемента усилительной схемы

Лекция 6. Распределенный усилитель - самая популярная конструкция вакуумной сверхвысокочастотной микроэлектроники. Общие соображения о схеме распределенного усиления. Микроэлектронная конструкция с решеткой автоэмиссионных катодов - рабочие уравнения. Параметры и характеристики распределенного усилителя. Распределенный умножитель частоты и генератор. Клистрон бегущей волны с решеткой автоэммиттеров. Устройства со «средним» углом пролета.

Лекция 7. Микроэлектронные колебательные и волноведущие структуры сверхвысоких частот. Миниатюрные системы с сосредоточенными параметрами. Сильнозамедляющие системы. Колебательные системы большого размера.

Лекция 8. Как идеи и методы «классической» СВЧ электроники используются при создании микроэлектронных сверхвысокочастотных устройств. Вакуумная микроэлектроника и электроника СВЧ: возврат к истокам. Микроэлектронные СВЧ приборы с длинными пучками. Устройства вакуумной СВЧ микроэлектроники со скрещенными полями. Лампа с поперечным взаимодействием - прошлое и будущее распределенного усилителя?

Лекция 9. Мощные СВЧ приборы с модуляцией эмиссии. Тетроды с резонаторами бегущей волны - триротрон и титротрон. Мартротрон и теория СВЧ диода с автоэмиссионным катодом. Гигатрон. Лазертроны. Клистрод с автоэмиссионным катодом.

Лекция 10. Третий путь развития вакуумной микроэлектроники - микроскопия. Туннельный микроскоп. О некоторых применениях вакуумной микроэлектроники.

Лекция 11. Микроминиатюризация по Голанту - самостоятельный путь в вакуумной микроэлектронике. Физические основы миниатюризации. Минитроны. Многозаконный монотрон. Лампы обратной волны. Физика влияния разброса по скоростям в электронном потоке на пусковой режим лампы обратной волны.

Лекция 12. Что еще можно придумать? Об активных нелинейных вакуумных средах с автоэмиссионными включениями. Автогенератор с вакуумным микротриодом: описание моделей, вычислительный эксперимент и моделирование на радиотехническом аналоге.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал - макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете.

Банковские реквизиты - р/с № 000609446 в КБ «Экономбанк»
г. Саратова, МФО 251279, корсчет банка 700161122, РКЦ, МФО 251008

Подписка на I-ое полугодие 1997 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498
см. по алфавиту

Сдано в набор 5.05.96. Подписано к печати 21.07.96. Формат 70x108/16
Бумага финская. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 11,0 (7,9). Уч.-изд. л. 13,0. Тираж 200 экз. Заказ 22

Издательство ГосУНЦ «Колледж»
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446
E-mail:and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

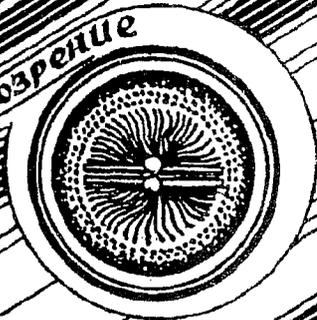
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1996



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей



Современной нелинейной динамики

ВСЕМИРНАЯ ИСТОРИЯ И ПНД

Взгляд через призму
изобразительного искусства

НАРОДНЫЕ КАРТИНКИ ... - XX вв.

Рис.1. Русский лубок. Россия. 20-е гг. XIX в.
Рис.2. La' El-Nino посхе или Ночь перед
Рождеством Бразилия. 20-е гг. XX в.
Рис.3. Великий Морж эскимосов, обложка с. 1.
Гренландия. 20-е гг. ... в.

Представленные на обложках народные картинки самых разных стран и времен выбраны не случайно: сравните рис. 1 с рис. 23 на с. 68, рис. 2 с рис. 26 на с. 33, а рис. 3 - с рис. 21 на с. 67. Сопоставление этих картинок с рисунками из статей наших весьма уважаемых авторов проведено не для укоризны и тем более не для обличения их в мелком плагиате. Все дело гораздо глубже и значительнее. Оказалось, что наша совсем еще юная по всем историческим канонам отрасль знания помимо эталонных уравнений, присущих любой междисциплинарной науке, весьма успешно оперирует также и обширным набором неких эталонных универсальных образов-символов (в данном конкретном случае это - деревья, птицы, звери), которые века и тысячелетия бытуют в народной среде*. Сюда же можно добавить еще узлы, седла, подковы, паутины, ямы, пекарей, языки, клювы, бильярд, моря, острова, ну и, конечно, бассейны - ибо задача о «вливаеся и выливается» уже давно стала фольклорной. Недостаток места удерживает нас от детального обсуждения этой проблемы. Отметим только, что народное искусство, словно чувствительный томограф, позволило зримо опутить те нити и корни, которыми, как оказалось, прорастает ПНД в беспамятную глубину человеческой праистории**. С ощущением значительности этой вдруг открывшейся нам новой реальности мы дерзнем предложить именовать впредь нашу науку - Просто Народная Динамика!

* Возможно, это образное начало связано с определенной «правополушарностью» всей ПНД (см. об этом научное эссе Болотовского, Левина и др. на с. 103).

** Не здесь ли причина, казалось бы, столь неожиданного взлета ПНД?!

