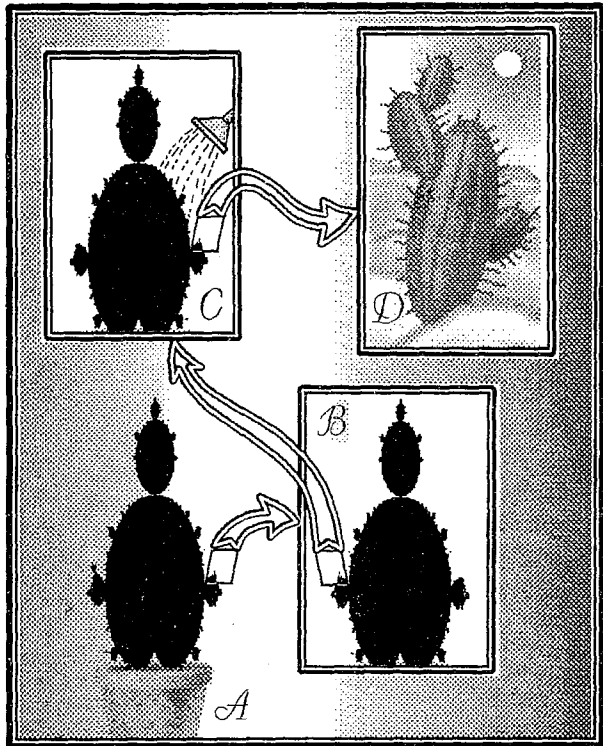


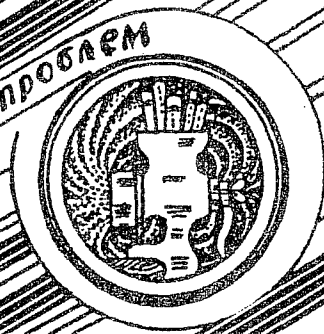
Трикладная Целлюлярная Динамика



4-5
1996



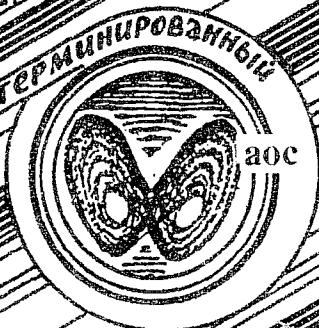
**Бифуркации
в динамических
системах различной природы**



**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



Конференции, семинары, симпозиумы



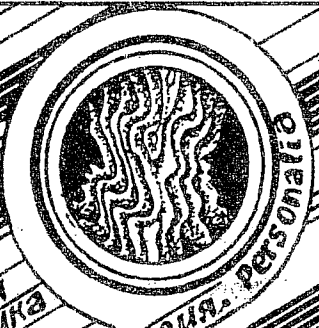
Детерминированный хаос



Автоколебания, самоорганизация



**Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн**



**Нелинейная динамика
в лицах. История персонажа**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет
Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

- В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет
- Ю.А. Дашков*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва
- Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
- В.И. Кринский*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пуцзино
- С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
- П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет
- Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет
- Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород
- Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный
- В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет
- В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет
- В.К. Юлатов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СОДЕРЖАНИЕ**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

- Кузнецов С.П.* Каскад удвоений периода в комплексном кубическом отображении 3
- Кивелева К.Г., Фрайман Л.А.* Бифуркационный анализ нелинейной динамики неавтономной системы маятникового типа 13
- Лебедева Л.В.* О фазовых картинах стандартного отображения тора 21
- Кипчатов А.А., Подин С.В.* Исследование поведения неавтономного релаксационного генератора в пространстве управляющих параметров 30

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е.* Синхронизация ансамблей связанных отображений 40
- Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.* Построение моделей класса решеточных газов для решения задач газодинамики 59
- Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Взрывная неустойчивость в системах типа «два взаимодействующих электронных потока - электромагнитная волна» 65
- Кручинин Л.А., Разенштейн П.С., Сморгонский А.В.* Об одном механизме усиления и развития инфляции 78
- Короновский А.А.* Динамика одномерной цепочки логистических отображений с однонаправленной пороговой связью 92

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Прохоров М.Д.* Виды колебаний диссипативно связанных систем с удвоением периода при сильной связи 99
- Сонечкин Д.М., Даценко Н.М., Иващенко Н.Н.* Новый способ экстраполяции хаотических временных рядов посредством вейвлетов с приложением к динамике климата 108

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

- Короновский А.А.* О механизмах установления рыночной цены 122

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В.* Вакуумная микроэлектроника - время ожиданий 130

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Пойзнер Б.Н.* О «субъекте» самоорганизации 149

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

- Фракталы в прикладной физике 159

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

- Научная конференция «Проблемы фундаментальной физики» 7-12.10.96, Саратов, Россия 161

CONTENTS

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Period-doubling for complex cubic map. <i>S.P. Kuznetsov</i>	3
The bifurcation analysis of nonlinear dynamics in nonautonomous pendulum system. <i>K.G. Kiveleva, L.A. Fraiman</i>	13
Phase pictures of standard map of torus. <i>L.V. Lebedeva</i>	21
Investigation of non-autonomous relaxation oscillator behaviour in the drive parameters space. <i>A.A. Kipchatov, S.V. Podin</i>	30

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Synchronization in ensembles of coupled maps. <i>A.S. Dmitriev, S.O. Starkov, M.E. Shirokov</i>	40
Lattice gas models for gasdynamics problems. <i>G.G. Malinetskii, M.E. Stepanov</i>	59
Explosive instability in systems «two interacting electron beams - electromagnetic wave». <i>N.M. Ryskin, D.I. Trubetskov</i>	65
One mechanism the inflation. <i>L.A. Kruchinin, P.S. Rasenstein, A.V. Smorgonsky</i>	78
The dynamics of the one-dimensional chain of logistic maps with the unidirectional threshold coupling. <i>A.A. Koronovskiy</i>	92

DETERMINISTIC CHAOS

Oscillation types of dissipatively coupled period doubling systems at strong-coupling. <i>M.D. Prokhorov</i>	99
A new method of chaotic time series extrapolation by means of wavelets with an application to climate dynamics. <i>D.M. Sonechkin, N.M. Datsenko, N.N. Ivashchenko</i>	108

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

About the mechanisms of the market prices fixing. <i>A.A. Koronovskiy</i>	122
Vacuum microelectronics - burden of expectations. <i>D.I. Trubetskov, A.G. Roznev, D.V. Sokolov</i>	130

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

On «subject» of self-organization. <i>B.N. Poizner</i>	149
--	-----

BOOK REVIEW

Fractals in applied physics.	159
--------------------------------------	-----

CONFERENCES. MEETING. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS

Scientific Conference «Problems of Fundamental Physics» 7-12.10.96, Saratov, Russia.	161
--	-----



КАСКАД УДВОЕНИЙ ПЕРИОДА В КОМПЛЕКСНОМ КУБИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

С.П. Кузнецов

Установлены свойства скейлинга в динамике комплексного аналитического отображения $z \rightarrow c - z^3$ при удвоениях периода, наблюдаемых вдоль определенных траекторий в плоскости комплексного управляющего параметра c . Развит ренормгрупповой анализ, численно получено комплексное решение уравнения Фейгенбаума - Цвигановича.

Одно из интересных направлений нелинейной динамики связано с исследованием итераций аналитических функций (отображений) комплексного переменного [1-3]. Основополагающие работы, относящиеся к началу XX века, принадлежат математикам Фату и Жулиа (см.[3]). Современный интерес к проблеме мотивирован не только чистой математикой, но и физическими приложениями. Один из изящных примеров относится к статистической физике и возникает при рассмотрении расположения комплексных нулей статсуммы, которые по Ли и Янгу [4,5] ответственны за фазовые переходы. Оказывается, что для некоторых точно решаемых моделей (типа иерархических решеток) итерации аналитических функций, отвечающих ренормгрупповому преобразованию Мигдала - Каданова, описывают изменение расположения нулей статсуммы при последовательном увеличении размера системы и переходе к термодинамическому пределу [2,6].

Как известно, для простейшего квадратичного отображения

$$z \rightarrow c - z^2 \tag{1}$$

топография областей различного динамического поведения на плоскости комплексного управляющего параметра c представляется «кактусом Мандельброта» (рис. 1, а), который обладает множеством замечательных свойств самоподобия [1,2,7-9]. Двигаясь вдоль действительной оси параметра c , можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода. При выборе пути в комплексной плоскости так, чтобы он определенным образом проходил через лепестки кактуса, можно обнаружить другие варианты усложнения периодических движений, в частности, каскады бифуркаций утроения или учетверения периода [7-9].

Удвоения периода в отображении (1) подчиняются универсальным количественным закономерностям скейлинга, которые являются общими для широкого класса нелинейных систем и связаны со свойствами неподвижной точки определенного функционального уравнения - уравнения ренормгруппы (РГ) Фейгенбаума - Цвигановича [10,11]

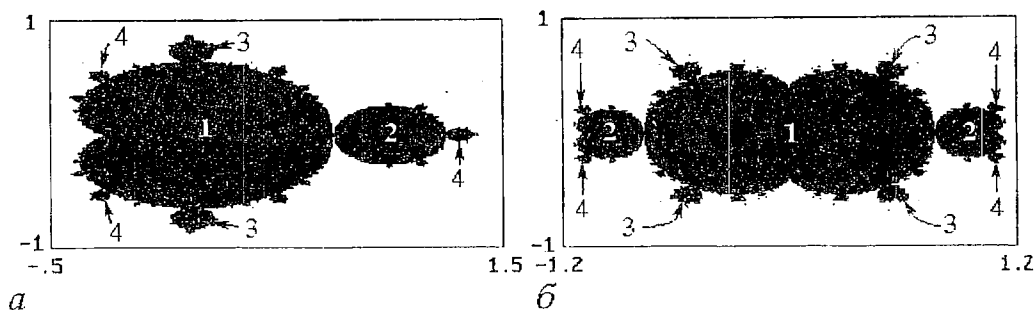


Рис. 1. Плоскость комплексного параметра c для комплексных отображений $z \rightarrow c - z^2$ (а) и $z \rightarrow c - z^3$ (б). Светлые области соответствуют уходу на бесконечность, темные - асимптотически периодическому поведению итераций. Указан период для некоторых областей

$$g(x) = ag(g(x/a)), \quad (2)$$

где $a = a_F = -2.5029\dots$ - универсальная масштабная константа. Численно функция $g(x)$ найдена с высокой точностью (в виде ряда с вещественными коэффициентами) [11,12]¹. Аналогичный по своему содержанию подход к анализу утроений и учетверений периода, а также более сложных каскадов бифуркаций, развит в [7-9]. При этом приходится иметь дело с комплексными решениями несколько более сложных функциональных уравнений, комплексными оказываются также и масштабные константы.

По-видимому, до сих пор не обсуждался вопрос о возможности скейлингового поведения, связанного с удвоениями периода, которое было бы специфическим для комплексных отображений и характеризовалось комплексными значениями масштабных констант.

Здесь рассматривается пример такого поведения, обнаруживающийся в кубическом отображении

$$z \rightarrow c - z^3. \quad (3)$$

1. Каскад удвоений периода и критическое точки в пространстве параметров кубического отображения

На рис.1,б показана топография плоскости комплексного параметра c для отображения (3), которую можно сравнить с кактусом Мандельброта на рис.1, а (см. также [14]). Очевидная симметрия «кубического кактуса» связана с тем, что замены вида $z \rightarrow -z$, $c \rightarrow -c$ и $z \rightarrow z^*$, $c \rightarrow c^*$ оставляют отображение (3) инвариантным.

Каждый лепесток кубического кактуса представляет собой область периодической динамики для отображения (3). Заметим, что от каждого определенного лепестка отходят вторичные лепестки, среди которых два отвечают периоду удвоенному по сравнению с родительским лепестком. Таким образом, имеется возможность выбрать траекторию движения в плоскости комплексного параметра так, чтобы реализовался каскад удвоений периода. При этом есть два варианта для выбора дальнейшего пути движения из каждого очередного лепестка. На рис. 2 схематически показаны два пути в плоскости c , вдоль которых имеет место каскад удвоений периода.

Примерно в середине каждого лепестка кактуса располагается точка, в которой отображение имеет сверхустойчивый цикл определенного периода (цикл, начинающийся из точки $z=0$). В табл. 1 приводятся две последовательности значений c для сверхустойчивых циклов. Первая последовательность получается при выборе левого лепестка на каждом переходе к циклу удвоенного периода и

¹ Аналитические свойства $g(x)$ как функции комплексного переменного обсуждались в [12, 13].

Две последовательности сверхустойчивых циклов периода $N = 2^k$ для комплексного кубического отображения

$N=2^k$	c	c
4	$1.0935134505 + .2099245229i$	$1.0935134505 + .2099245229i$
8	$1.0719544056 + .2452491860i$	$1.1371167953 + .2038569549i$
16	$1.0645654879 + .2459339453i$	$1.1407504837 + .1968853895i$
32	$1.0636742980 + .2449382053i$	$1.1401510274 + .1956091078i$
64	$1.0637227374 + .2447021821i$	$1.1399016939 + .1955590066i$
128	$1.0637621252 + .2446838567i$	$1.1398676472 + .1955897256i$
256	$1.0637690088 + .2446875937i$	$1.1398684420 + .1955979557i$
512	$1.0637692066 + .2446889921i$	$1.1398697193 + .1955987243i$

соответствует траектории A на рис. 2, а вторая - при выборе каждый раз правого лепестка, что отвечает траектории B. Можно видеть хорошую сходимость обеих последовательностей к определенным предельным точкам в комплексной плоскости c . Эти критические точки располагаются при

$$c_1 = 1.06376897706780 + 0.244689155113163i, \quad (4)$$

и

$$c_2 = 1.13986997242234 + 0.195598568427164i. \quad (5)$$

В силу симметрии «кубического кактуса» координаты еще шести критических точек можно получить, изменив знак действительной или мнимой части в (4) и (5).

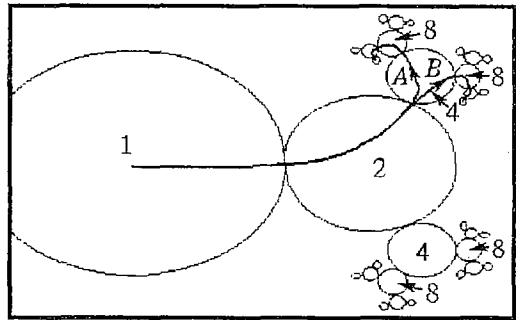


Рис. 2. Траектории A и B на плоскости комплексного параметра кубического отображения, вдоль которых наблюдается каскад удвоений периода и которые приводят в критические точки (4) и (5), соответственно. Цифрами обозначены периоды циклов. Изображение схематическое, масштаб не выдержан

2. Ренормгрупповой анализ

Следуя логике теории Фейгенбаума [10,11], для описания свойств универсальности и скейлинга вблизи критических точек рассмотрим последовательность отображений $Z \rightarrow f_k(Z)$, которые описывают эволюцию перенормированной комплексной переменной Z за 2^k итераций исходного отображения. Перенормировка Z производится таким образом, чтобы для каждого k отображение в начале координат было нормировано на единицу: $f_k(0)=1$. Отображения $f_k(Z)$ удовлетворяют рекуррентному функциональному уравнению

$$f_{k+1}(Z) = a_k f_k(f_k(Z/a_k)), \quad (6)$$

где $a_k = 1/f_k'(f_k(0))$. Предположим, что мы взяли отображение (3) в критической точке (4) в качестве начального условия для рекуррентной процедуры (6). Итерации можно реализовать численно; при этом оказывается, что уже для $k > 2$ последовательные отображения $f_k(Z)$ практически не меняются. Разумно

предположить, что имеет место их сходимость при $k \rightarrow \infty$ к определенному пределу - универсальной функции $g(Z)$. Эта функция обязана быть неподвижной точкой рекуррентного функционального уравнения (6), то есть комплексным решением уравнения Фейгенбаума - Цвитановича

$$g(Z) = ag(g(Z/a)). \quad (7)$$

Чтобы найти функцию $g(Z)$ численно с достаточно высокой точностью, можно аппроксимировать ее конечным полиномом с неизвестными коэффициентами. Тогда уравнение (7) сводится к системе конечного числа нелинейных алгебраических уравнений. Взяв любое отображение f_k в качестве начальной аппроксимации, можно получить решение численно с помощью многомерного метода Ньютона. Результатом таких вычислений является следующее представление в виде ряда по степеням Z^3 :

$$\begin{aligned} g(Z) = & 1 + (-.9722427 - .7451928i)Z^3 + (-.1328756 + .2203001i)Z^6 + \\ & + (.0364270 + .00180616i)Z^9 + (-.00277464 - .00439645i)Z^{12} + \\ & + (.00005255 + .00105290i)Z^{15} + (.00036192 - .00016270i)Z^{18} + \\ & + (-.00005166 - .00010119i)Z^{21} + (-.00002396 + .00001406i)Z^{24} + \\ & + (.00000365 + .00000472i)Z^{27} + (.00000066 - .0000009i)Z^{30} + \\ & + (-.0000002 - .0000000i)Z^{33}, \end{aligned} \quad (8)$$

а соответствующее значение комплексной константы перенормировки равно

$$a = 1/g(g(0)) = 1/g(1) = -0.251811054 + 1.864695322i. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь возмущение неподвижной точки $g(Z)$, возникающее при вариации комплексного управляющего параметра, выводящей отображение из критической точки. Такое возмущение, $h(Z) = f(Z) - g(Z)$, оставляет отображение в классе функций, представимых в виде ряда по степеням Z^3 . РГ уравнение (6), линеаризованное в неподвижной точке $g(Z)$, приводит к задаче на собственные функции и собственные значения, которое совпадает по форме с известным уравнением теории Фейгенбаума [10,11]

$$\delta h(Z) = a[g'(g(Z/a))h(Z/a) + h(g(Z/a))], \quad (10)$$

но должно рассматриваться в комплексной области, и с учетом новой функции $g(Z)$. Для возмущений интересующего класса, численное решение (10) выявляет единственное существенное собственное число, превышающее 1 по абсолютной величине:

$$\delta = 3.30308246 - 4.45556685i. \quad (11)$$

Как оказывается, точке (5) соответствует решение уравнения РГ, которое отличается от (8) только знаком мнимой части у всех коэффициентов ряда, а масштабные константы a и δ имеют значения комплексно сопряженные по отношению к (9) и (11).

3. Критическая динамика и ее фрактальные свойства

Рассмотрим динамику отображения (3) точно в критической точке каскада удвоений периода. Для определенности будем всегда иметь в виду точку (4). Как видно из предыдущего раздела, в критической точке динамика за большое число итераций описывается в терминах перенормированной динамической переменной функцией $g(Z)$, поэтому полезно рассмотреть отображение $Z \rightarrow g(Z)$.

Циклы периода $N=2^k$ и их мультипликаторы в критической точке (4)

k	$z_0^{(k)}$	$z_0^{(k-1)}/z_0^{(k)}$	$\mu_k = \partial z_N^{(k)} / \partial z_0$
1	-.0108527-.3831089i	-.305171+1.861106i	-1.463159-.445950i
2	-.1998675+.0327502i	-.252996+1.875359i	-1.467847-.458358i
3	.0314488+.1030185i	-.250970+1.863498i	-1.468649-.456388i
4	.0520148-.0238855i	-.251780+1.864942i	-1.468664-.456721i
5	-.0162805-.0256974i	-.251812+1.864592i	-1.468639-.456593i
6	-.0123761+.0104020i	-.251814+1.864723i	-1.468641-.456630i
7	.0063588+.0057784i	-.251811+1.864688i	-1.468640-.456620i
8	.0025911-.0037600i	-.251811+1.864697i	-1.468641-.456623i
9	-.0021646-.0010972i	-.251811+1.864695i	-1.468640-.456622i

Как можно проверить, отображение $Z \rightarrow g(Z)$ имеет неподвижную точку $Z_* = 0.6597019 - 0.0809898i$. Но тогда из уравнения (7) следует, что точка Z_*/a принадлежит циклу периода 2, точка Z_*/a^2 циклу периода 4 и т.д. Таким образом, существуют циклы сколь угодно большого периода 2^k . Все они неустойчивы и характеризуются одним и тем же комплексным значением мультипликатора

$$\mu_c = g'(Z_*) = -1.468640455 - 0.456622306i. \quad (12)$$

Такими же свойствами обладают циклы исходного отображения (3) в асимптотике больших периодов. В табл. 2 представлены численные данные для циклов периода 2^k в критической точке (4). Заметим, что отношение последовательных значений z , отвечающих ближайшим к началу координат точкам периодических орбит, сходится к константе a , а мультипликаторы - к значению (12).

Рассмотрим теперь непериодическую орбиту, порождаемую кубическим отображением при старте из $z=0$ (рис. 3). Эта критическая орбита представляет собой фрактальное множество на плоскости z и выступает в качестве аналога известного аттрактора Фейгенбаума, характерного для точки накопления обычных удвоений периода. Это множество можно мыслить как предельный объект, который получается из циклов периода 2^k при $k \rightarrow \infty$.

Вблизи начала координат присущий критической орбите локальный скейлинг состоит в том, что это множество воспроизводит свою

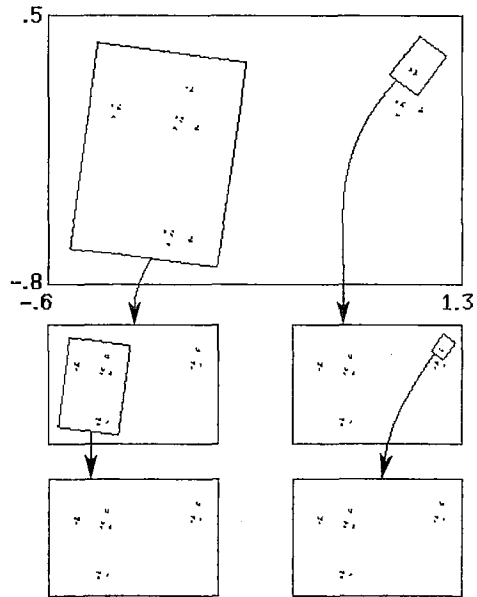


Рис. 3. Критическая орбита кубического отображения и ее скейлинговые свойства на плоскости комплексной переменной z . Вблизи начала координат картина воспроизводится при пересчете на комплексный масштабный фактор a , а вблизи точки $z=c$ - на фактор a^3 . Значение параметра c соответствует критической точке (4)

структуру бесконечное число раз в малых масштабах при пересчете масштаба и повороте, соответствующих умножению динамической переменной z на комплексный фактор a . Вблизи точки $z=c$ критическая орбита также демонстрирует скейлинг, но с фактором a^3 (см. вставки на рис. 3).

Глобальную характеристику скейлинговых свойств критической орбиты можно получить, если ввести по аналогии с Фейгенбаумом [15] σ -функцию

$$\sigma(t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ m/N = t}} \frac{z_m - z_{m+N/2}}{z_m - z_{m+N/4}}, \quad N=2^k. \quad (13)$$

Производя расчеты для возрастающих значений k , можно наблюдать достаточно быструю сходимость. Получающаяся в результате комплекснозначная функция действительного аргумента $\sigma(t)$ представлена графически на рис. 4. Она имеет фрактальную структуру и содержит разрывы во всех бинарных рациональных точках $m/2^n$, так же как и σ -функция Фейгенбаума [15].

Заметим, что $\sigma(+0)=1/a^3$, $\sigma(1/2+0)=1/a$, что соответствует частным случаям скейлинга, проиллюстрированным на рис. 3. Используя только два этих масштабных фактора, можно построить приближенную модель, описывающую фрактальные свойства критической орбиты. Пусть z_i - искомая последовательность значений динамической переменной, причем $z_0=0$. Положим для четных членов

$$z_{2i} = z_i / a, \quad (14)$$

а для нечетных

$$z_{2i+1} = c - z_{2i}^3 = c - z_i^3 / a^3 = c - c/a^3 + z_{i+1}^3 / a^3. \quad (15)$$

Обозначая $w = z/c$, $\alpha = 1/a$, $\beta = 1/a^3$, перепишем (14) и (15) в виде

$$w_{2i-1} = (1-\beta) + \beta w_i, \quad w_{2i} = \alpha w_i. \quad (16)$$

С помощью этих соотношений всю последовательность w_i (а значит, и z_i) можно найти по ее первым двум членам $w_0=0$ и $w_1=1$.

Соотношение (16) имеет на самом деле более общее значение и позволяет при различном выборе параметров α и β получить (приблизительно) фрактальные сигналы, генерируемые в различных ситуациях на пороге возникновения хаоса через удвоения периода (см. [16,17]). Если в качестве α и β подставить действительные величины $\alpha = 1/a_F \approx -0.4$, $\beta = 1/a_F^2 \approx 0.16$, то (16) передает поведение последовательности, порождаемой логистическим отображением $x \rightarrow 1 - \lambda x^2$ в точке накопления бифуркаций удвоения периода $\lambda = \lambda_c = 1.401155\dots$. Это соответствует модели аттрактора Фейгенбаума в виде двухмасштабного канторова множества [18,19]. При $\alpha = -1$, $\beta = 0$ из (16) получаем $0, 1, -1, 1, 1, -1, 1, \dots$. С точностью до обозначений, это известная символическая последовательность, которая

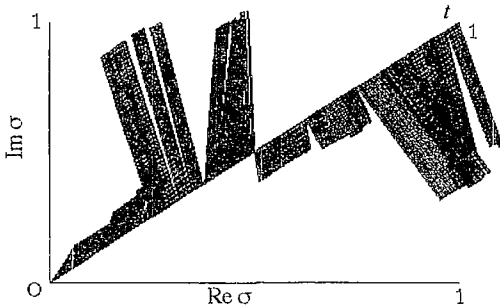


Рис. 4. Комплекснозначная функция $\sigma(t)$, описывающая глобальные свойства скейлинга критической орбиты кубического отображения

описывает последовательность знаков переменной x в логистическом отображении в точке накопления бифуркаций удвоений периода (эта последовательность связана с теоретико-числовой последовательностью Морса - Туэ [19]). Наконец, можно получить аппроксимацию для фрактальных сигналов, генерируемых отображением $w \rightarrow 1 - \lambda |w|^\tau$, если выбрать соответствующие, зависящие от τ , значения параметров $\alpha = 1/a(\tau)$ и $\beta = 1/[a(\tau)]^\tau$.

Вернемся к комплексному кубическому отображению. Как мы теперь видим, фрактальный сигнал,

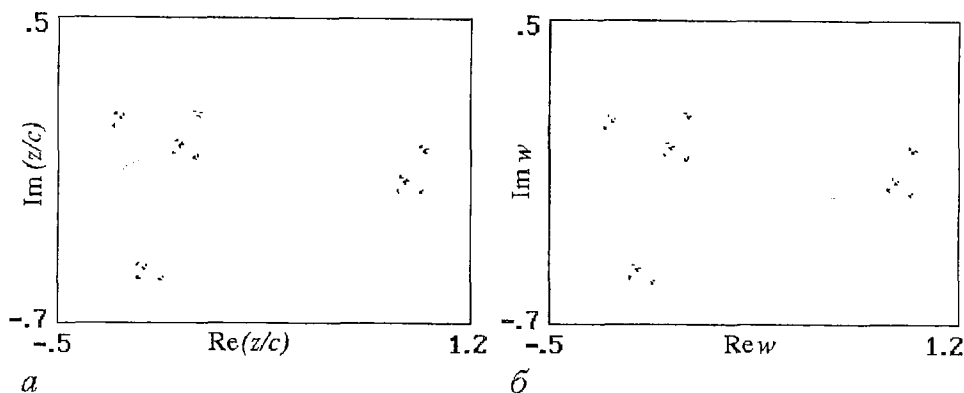


Рис. 5. Сопоставление критической орбиты кубического отображения на комплексной плоскости z/c (а) и ее приближенного описания посредством комплексного фрактального сигнала (б)

порождаемый критической орбитой, может рассматриваться как частный представитель широкого класса фрактальных сигналов в рамках комплексного обобщения формулы (16) при определенном выборе α и β . Это соответствует аппроксимации критической орбиты кубического отображения множеством, которое представляет собой комплексный аналог двухмасштабного канторова множества (рис. 5).

Оценим фрактальную размерность критической орбиты. Если на некотором уровне построения кантороподобной структуры множество допускает покрытие N кругами радиуса r_1, \dots, r_N , то на следующем уровне потребуется $2N$ кругов радиуса $|\alpha|r_1, |\beta|r_1, \dots, |\alpha|r_N, |\beta|r_N$. Для того, чтобы фигурирующая в определении размерности сумма $\sum r_i^D$ оставалась конечной при $N \rightarrow \infty$, необходимо выполнение условия

$$|\alpha|^D + |\beta|^D = 1,$$

откуда с учетом конкретных α и β находим $D \cong 0.60469$. Для более точной численной оценки можно использовать непосредственно последовательность z_i , порождаемую кубическим отображением. Определим для данного n сумму

$$\Gamma_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} |z_i - z_{i+2^n}|^D$$

и подберем D так, чтобы $\Gamma_n(D) = \Gamma_{n+1}(D)$. Оценивая предел D при

$n \rightarrow \infty$ получаем $D = 0.63045$.

На рис. 6 показан спектр Фурье, порождаемый кубическим отображением в критической точке. Качественно он похож на обычный фейгенбаумовский спектр на пороге перехода к хаосу через удвоения периода и содержит множество субгармоник на частотах кратных 2^{-k} . Отличие состоит в том, что перепад мощности между субгармониками различного уровня составляет 11.2 дБ вместо классического значения 13.4 дБ.

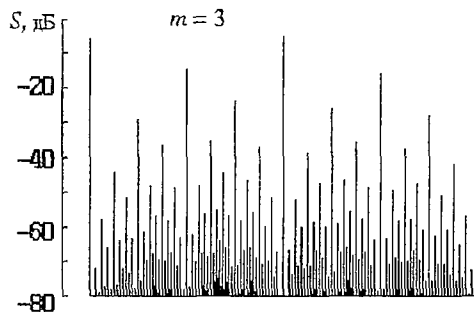


Рис. 6. Спектр Фурье, генерируемый кубическим отображением в критической точке (4)

4. Скейлинговые свойства пространства параметров вблизи критической точки

Как следует из РГ анализа в разделе 2, перенормированный оператор эволюции за 2^k итераций в линейном приближении по возмущению параметра Δs , выводящему кубическое отображение из критической точки, дается выражением



Рис. 7. Скейлинговые свойства лепестков «кактуса» на плоскости комплексного параметра c кубического отображения (3). Критическая точка (4) располагается точно в центре приведенных картинок. При переходе к каждой последующей картинке комплексная координата Δc пересчитывается на фактор δ (формула (11))

$$f_k(Z) = g(Z) + \text{const} \cdot \Delta c \cdot \delta^k \cdot h(Z),$$

где $h(Z)$ - собственная функция, удовлетворяющая уравнению (10) с собственным числом (11). Следовательно, асимптотически при $\Delta c \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ функции $f_k(Z)$ принадлежат одномерному (в смысле одной комплексной переменной) неустойчивому многообразию: $f_k(Z) = G(Z, \delta^k \Delta c)$, где $G(Z, 0) = g(Z)$. Ясно, что асимптотическая форма оператора эволюции инвариантна по отношению к замене $\Delta c \rightarrow \Delta c/\delta$, $k \rightarrow k+1$. Иными словами, при значении параметра $c = c_c + \Delta c/\delta$ вблизи критической точки c_c мы ожидаем увидеть динамику, подобную реализующейся при $c = c_c + \Delta c$, но с удвоенным временным масштабом. Это свойство самоподобия иллюстрируется на рис. 7. Лепестки кактуса, соответствующие удвоенным значениям периода, воспроизводят те же формы при пересчете масштаба и повороте картинку, отвечающих комплексному фактору δ .

Заключение

В работе обнаружен новый класс универсальности, ассоциирующийся с удвоениями периода в комплексном кубическом отображении, и получено численно решение в виде комплексной неподвижной точки функционального уравнения Фейгенбаума - Цвитановича. Аналогичный подход может быть развит для комплексных отображений более высокой степени. Другое обобщение может основываться на учете полного множества траекторий в плоскости комплексного параметра, которые приводят к удвоениям периода и образуют для кубического отображения бинарное дерево. По своему содержанию, этот подход будет аналогичен теории удвоений периода, развитой для бимодальных отображений действительной переменной [22].

В заключение я хотел бы отметить возможное значение предпринятого исследования для общей проблемы классификации типов критического поведения при переходе к хаосу через удвоения периода в одномерных отображениях. Как известно, при многопараметрическом анализе удвоений периода приходится рассматривать такие ситуации, когда отображение $f(x)$ (или его итерация $f(f(\dots f(x)\dots))$) имеет экстремум с показателем степени $\tau = 2, 4, 6, 8, \dots$, причем каждому из этих случаев отвечает свой класс универсальности, свои масштабные константы, спектры, σ -функции и т.п. [20-24]. По аналогии с теорией бифуркаций и теорией катастроф, кажется естественным задуматься над проблемой классификации этих типов универсального поведения. При этом сразу обнаруживается, что при нечетных τ , действительное отображение $x \rightarrow 1 - \lambda x^\tau$ имеет не экстремум, а точку перегиба, так что каскад удвоений периода не наблюдается. В связи с этим предполагаемая классификация неизбежно будет неполна. Как следует из результатов настоящей статьи, эта неполнота исчезает при переходе в комплексную область.

Автор благодарен профессору Предрагу Цвитановичу (Институт Нильса Бора, Копенгаген) и профессору Бодил Браннер (Датский Технический университет) за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-02-05818).

Библиографический список

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. S. F.: Freeman, 1982.
2. Peitgen H.-O., Richter P.H. The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1986.
3. Blanchard P. // Bull.Amer.Math.Soc.1984. Vol. 11. P. 85.
4. Yang C.N., Lee T.D. // Phys.Rev. 1952. Vol. 87. P. 410.
5. Lee T.D., Yang C.N. // Phys.Rev. 1952. Vol. 87. P. 419.
6. Derrida B., De Seze L., Itzykson C. // J.Stat.Phys. 1983. Vol.33. P. 559.
7. Гольдберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М. // УМН. 1983. Т. 38, № 1. С. 159.
8. Cvitanovic P., Myrheim J. // Phys.Lett.1983. Vol. 94A.,P. 329.
9. Cvitanovic P., Myrheim J. // Commun.Math.Phys. 1989. Vol. 121. P. 225.
10. Feigenbaum M.J. // J.Stat.Phys. 1978. Vol. 19. P. 25.
11. Feigenbaum M.J.// J.Stat.Phys. 1979. Vol. 21. P. 669.
12. Lanford O.E. // Bull.Amer.Math.Soc. 1982. Vol. 6. P. 427.
13. Epstein H., Lascoux J. // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 81. P. 437.
14. Devaney R.L. // An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. 2nd Edition, Addison-Wesley, 1989.
15. Feigenbaum M.J. // Commun.Math.Phys.1980. Vol. 77. P. 65.
16. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. // Изв.вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. С. 661.
17. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. // Chaos, Solitons and Fractals. 1991. Vol. 1. P. 355.
18. Halsey T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I, Shraiman B. // Phys.Rev. 1986. Vol. A33. P. 1141.
19. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. N,-Y.: Freeman, 1991.
20. Chang S.J., Wortis M., Wright J. // Phys.Rev.1981. Vol. A24. P. 2669.
21. Fraser S., Kapral R. // Phys.Rev.1984. Vol. A30. P. 1017.
22. MacKay R.S., Van Zeijts J.B. // Nonlinearity. 1988. Vol.1. P. 253.
23. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., and Chua L.O. // Int.J. Bifurc.& Chaos. 1993. Vol. 3. P. 943.
24. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. // Phys.Lett. 1994. Vol. A189. P. 367.

Институт радиотехники
и электроники РАН
Саратовский филиал

Поступила в редакцию 18.10.1996

PERIOD-DOUBLING FOR COMPLEX CUBIC MAP

S.P.Kuznetsov

Scaling properties are reported for period-doubling cascade in complex cubic map $z \rightarrow c - z^3$. Renormalization group analysis is developed and the associated complex solution of the Feigenbaum - Cvitanovic equation is obtained numerically.



Кузнецов Сергей Петрович родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал свыше 100 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соавтор 2 монографий. В качестве приглашенного профессора в 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.



Редакционная коллегия обращается к заинтересованным читателям нашего журнала с предложением принять участие в формировании содержания *специального выпуска «Нелинейная динамика в образовании»*. Предполагается публикация статей об идеологии преподавания нелинейной динамики, программы уникальных курсов и спецкурсов, подборок задач или отдельных задач и других материалов, которые представляются интересными и соответствующими теме.

срок присылки до 1 апреля 1997 года.

Предъявленные материалы должны быть оформлены согласно правилам оформления рукописей для нашего журнала.

Наш адрес: 410026 Саратов, Астраханская, 83, СГУ,
редакция журнала «Изв. вузов. ПНД».

Оперативная связь по телефону: (845-2)51-42-98
по электронной почте: and@college.saratov.su

Редактор выпуска
чл.-корр. РАН, профессор *Д.И. Трубецков*





БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ МАЯТНИКОВОГО ТИПА

К.Г. Кивелева, Л.А. Фрайман

Качественно-численным методом с использованием компьютерного моделирования проведен бифуркационный анализ нелинейной динамики неавтономной системы маятникового типа, имеющей широкий спектр приложений. Построены бифуркационные диаграммы, выделены области с хаотическим поведением различного типа, изучен случай возникновения в системе двух устойчивых периодических движений колебательного типа. Приводится физическая интерпретация полученных результатов применительно к системе с джозефсоновским контактом.

Эта статья является продолжением опубликованной в [1] работы по качественно-численному исследованию системы

$$\dot{\varphi} = \gamma, \tag{1}$$

$$\dot{y} = \gamma - (\lambda + a \cos \varphi)y - \sin \varphi + \mu \sin \omega t,$$

имеющей широкий спектр приложений в качестве математической модели ряда механических [2] и радиотехнических систем. В частности, в случае $a \geq 0$ она является математической моделью системы со сверхпроводящим джозефсоновским контактом во внешнем поле [3]. В [1] был проведен бифуркационный анализ системы (1) в плоскости параметров (γ, λ) : построены бифуркационные диаграммы, изучены области существования и бифуркации колебательных движений и их инвариантных многообразий, порождаемых состояниями равновесия автономной системы ($\mu=0$), определены области существования вращательных периодических движений с различными характеристиками вращения. Проведена интерпретация для физических приложений.

В настоящей работе система исследуется в плоскости (μ, γ) . Поскольку основная характеристика джозефсоновского контакта - вольтамперная характеристика (ВАХ) - определяется числом вращения периодических движений системы (1) [1,3], то изучение бифуркаций периодических движений с различным числом вращения в этой плоскости дает возможность, во-первых, установить теоретически размеры ступеней ВАХ (это будут размеры по γ при $\mu=\text{const}$ областей существования устойчивых периодических движений с различным числом вращения) и, во-вторых, описать характер бифуркаций, определяющих переход с одной ступени ВАХ на другую.

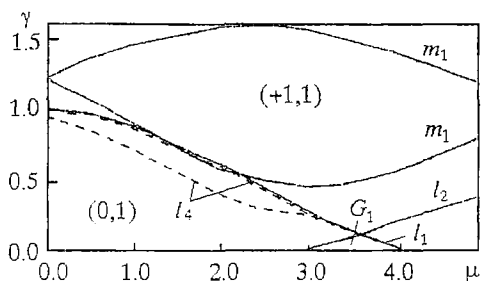


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма при $\omega=1$, $\lambda=1$, $a=0$. Кривые соответствуют: l_1, l_2, m_1 - бифуркации седло-узловой неподвижной точки (0,1)-типа (l_1 и l_2) и (1,1)-типа (m_1); l_4 - касанию верхних сепаратрисных инвариантных кривых неподвижной точки (0,1)-типа

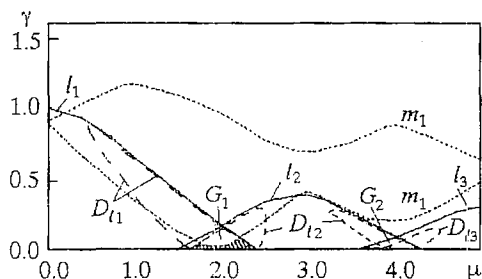


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма при $\omega=0.68$, $\lambda=0.8$, $a=0$. Кривые соответствуют: l_1, l_2, l_3, m_1 - бифуркации седло-узловой неподвижной точки (0,1)-типа (l_1, l_2, l_3) и (1,1)-типа (m_1); D_{11}, D_{12}, D_{13} - первому удвоению периода устойчивых периодических движений колебательного типа

Кроме этих задач, особый интерес представляет исследование по построенным бифуркационным диаграммам областей одновременного существования двух устойчивых и двух седловых колебательных движений. Наличие двух устойчивых колебательных движений соответствует для систем со сверхпроводящими контактами различным квантам потока, а для механических систем - существованию двух стационарных режимов с различными амплитудно-частотными характеристиками. Существование двух устойчивых периодических движений в системе (1) при небольших значениях параметра μ было замечено в [4] с помощью метода гармонического баланса. В [5] дано качественно-численное обоснование возможности существования двух устойчивых предельных множеств колебательного типа. В данной работе качественно-численными методами установлены границы областей одновременного существования двух устойчивых колебательных движений при немалых значениях параметра амплитуды внешнего воздействия μ ($0 < \mu < 5$).

На рис. 1 - 3 представлены основные бифуркационные диаграммы, полученные на основе качественно-численного метода [6] по алгоритмам и программам исследования отображения Пуанкаре, порождаемого траекториями системы на периоде $2\pi/\omega$ (см. ссылки [7-11] в работе [1]).

Кривые l_1, l_2, l_3 ограничивают сверху области существования периодических

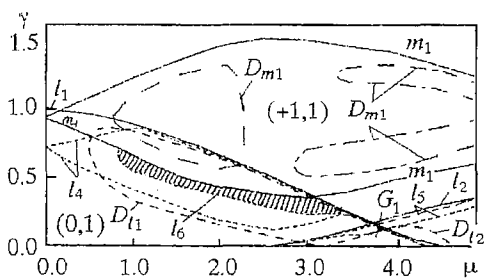


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма при $\omega=1$, $\lambda=1$, $a=-1$. Кривые соответствуют: l_1, l_2, m_1 - бифуркации седло-узловой неподвижной точки (0,1)-типа (l_1 и l_2) и (1,1)-типа (m_1); l_4, l_5 - касанию верхних сепаратрисных инвариантных кривых неподвижной точки (0,1)-типа; D_{11}, D_{12}, D_{m1} - первому удвоению периода устойчивых периодических движений колебательного (D_{11} и D_{12}) и вращательного (D_{m1}) типов

колебательных движений (0,1)-типа. На кривой l_1 происходит седло-узловая бифуркация колебательных движений, порождаемых состояниями равновесия системы при $\mu=0$, на кривых l_2, l_3 - седло-узловая бифуркация колебательных движений, возникающих с ростом амплитуды неавтономности из-за уплотнения векторного поля. Пересечения кривых l_1 и l_2, l_2 и l_3 выделяют области (G_1 и G_2 , соответственно) существования двух устойчивых и двух седловых колебательных движений: $G_1(3.00 < \mu < 4.05)$ (см.рис.1); $G_1(1.52 < \mu < 2.42)$ и $G_2(3.62 < \mu < 4.28)$ (см.рис.2); $G_1(2.52 < \mu < 4.6)$ (см. рис. 3). Такое взаиморасположение областей существования колебательных движений дает возможность переходить из режима колебаний в режим биений и

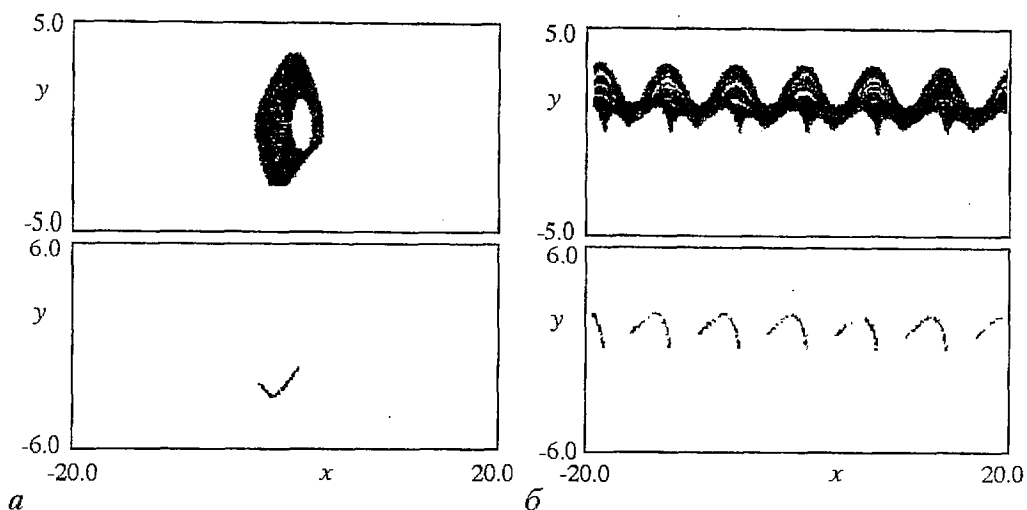


Рис. 4. Проекция предельной траектории на плоскость $t=0$ (вверху) и соответствующее ей отображение Пуанкаре (внизу) при значении параметров: *а* - $\omega=1, \gamma=0.2, \lambda=1, \mu=2.6, a=-1$ (колебательный аттрактор); *б* - $\omega=1, \gamma=1, \lambda=1, \mu=1, a=-1$ (вращательный аттрактор)

возвращаться в колебательный режим с ростом амплитуды внешнего воздействия (например, см. сечение при $\gamma=0.25$ на рис. 2). В областях с двумя устойчивыми колебательными движениями в зависимости от начальных условий в системе реализуется то или иное устойчивое предельное множество, амплитуды их при $\gamma \neq 0$ различны.

Между кривыми m_1 расположена область существования вращательных периодических движений (1,1)-типа. Пересечения кривых l_1 и m_1, l_2 и m_1 определяют области, в которых существуют и колебательные (0,1) и вращательные (1,1)-типа периодические движения.

Определены границы областей первого удвоения периода как колебательных

- кривые D_{ii} ($i=\overline{1,3}$), так и вращательных - кривые D_{m1} периодических движений. Исследование каскада удвоений периода колебательных и вращательных движений позволило получить приведенные на рис. 4 фазовые портреты, представленные в виде проекций периодических движений на плоскость $t=0$. Они иллюстрируют наличие в системе (1) сложных колебательных и вращательных аттракторов. В областях существования двух устойчивых колебательных движений установлено, что каждое из этих периодических движений может претерпевать последовательность бифуркаций удвоения периода и необязательно одновременно, при этом могут образоваться один или два сложных колебательных аттрактора, разделяемых сепаратрисными поверхностями обоих седловых колебательных движений. Однотипное поведение обоих колебательных движений реализуется в силу симметрии по γ только на оси μ : оба устойчивые движения могут быть либо простыми, либо пройти одинаковое число удвоений периода, образуя сложные структуры колебательного типа. В области G_1 при $\gamma=0$ в интервале $1.72 \leq \mu \leq 1.7434$ (см. рис. 2) в результате их взаимодействия с гомо- и гетероклиническими пересечениями сепаратрисных инвариантных многообразий обоих седловых периодических движений возникает сложный объединенный колебательный аттрактор. Динамика взаиморасположения и вида предельных множеств с изменением параметра μ приведена на рис. 5 и 6.

Кривые l_4 и l_5 заключают области существования гомоклинической структуры, порождаемой пересечениями верхних сепаратрисных инвариантных кривых седловых неподвижных точек. В них выделены области со сложной

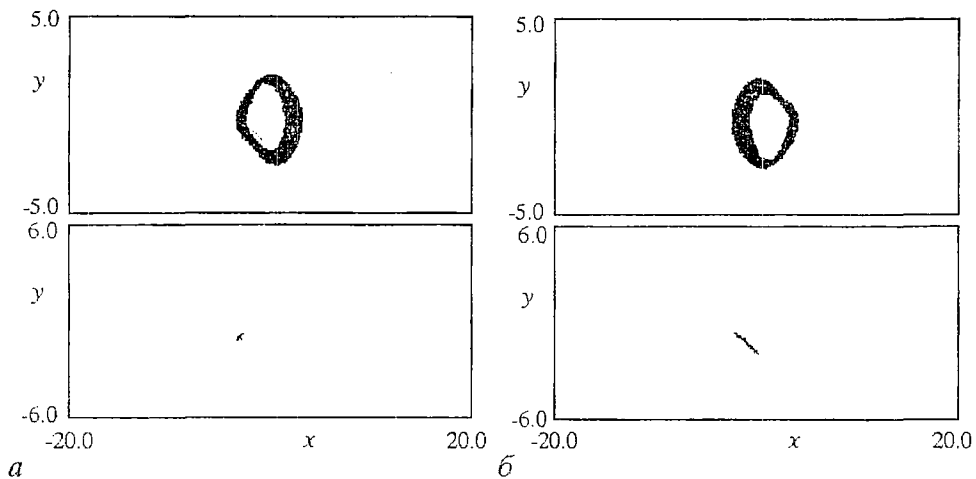


Рис. 5. Одновременное существование двух колебательных аттракторов. Проекция предельной траектории на плоскость $t=0$ (вверху) и соответствующее ей отображение Пуанкаре (внизу) при значении параметров $\omega=0.68, \gamma=0., \lambda=0.8, \mu=1.7, a=0$ с разных начальных условий: *a* - $x_0=-3.14, y_0=0$; *б* - $x_0=1.956, y_0=0$

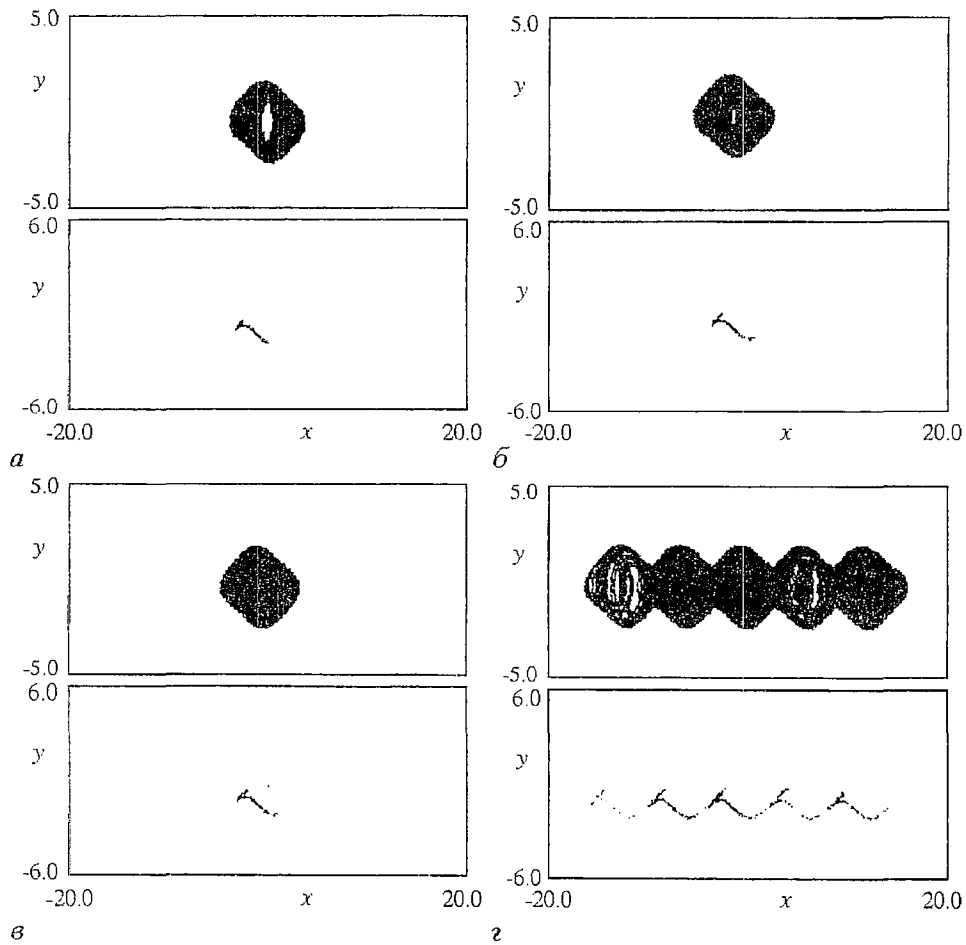


Рис. 6. Эволюция объединенного колебательного аттрактора. Проекция предельной траектории на плоскость $t=0$ (вверху) и соответствующее ей отображение Пуанкаре (внизу) с одинаковых начальных условий $x_0=-0.085, y_0=0.091$ при значении параметров $\omega=0.68, \gamma=0., \lambda=0.8, a=0$ и различных значений параметра μ : *a* - $\mu=1.72$; *б* - $\mu=1.74$; *в* - $\mu=1.743$; *г* - $\mu=1.7434$

динамикой, связанной с существованием притягивающей гомоклинической структуры, обусловленной наличием пересечения верхних и боковых сепаратрисных инвариантных кривых и устойчивого сложного колебательного движения большого периода, возникающего в результате каскада удвоений. Поведение траекторий в этих областях характеризуется наличием не только колебательной, но и вращательной компоненты, хотя сами области могут быть расположены вне областей существования вращательных движений (1,1)-типа. На рис.3 такая область выделена штриховкой, ее верхней границей является кривая m_1 , а нижней - кривая l_6 . Аналогичная область найдена и в области существования двух устойчивых колебательных движений, на рис. 2 она расположена под кривой m_1 между кривыми l_1 и l_2 и выделена штриховкой.

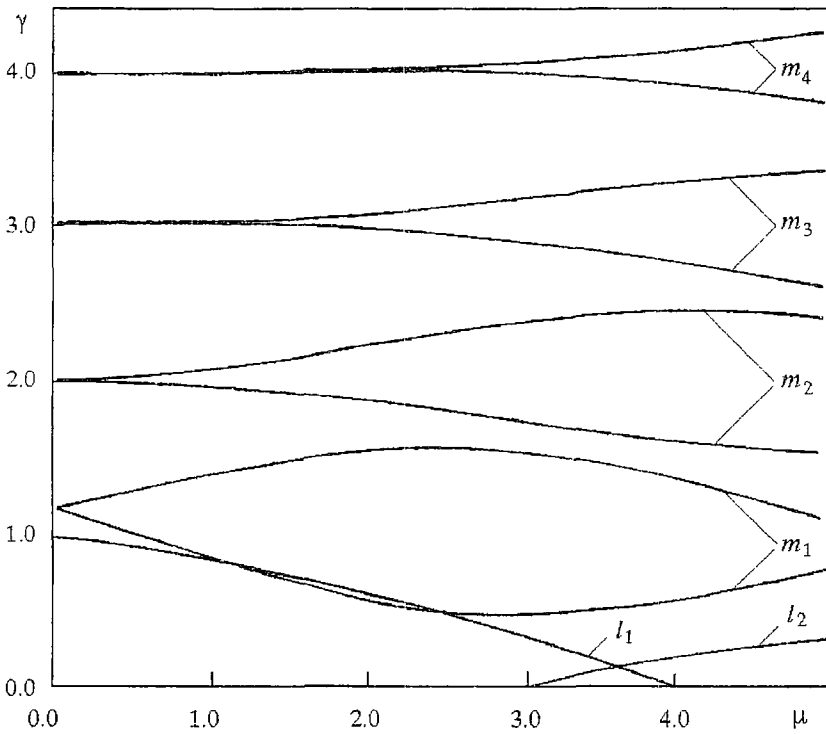
Для исследования ВАХ джозефсоновского контакта во внешнем поле построены приведенные на рис.7, а и 8, а бифуркационные диаграммы для тех же значений параметров, что и на рис. 1 и 2, но дополненные границами m_2 , m_3 , m_4 областей существования вращательных периодических движений с периодами, кратными 2, 3, 4, соответственно. Поскольку периодические решения различной кратности определяют ступени ВАХ, эти бифуркационные диаграммы дают возможность получить качественный вид ВАХ для различных значений амплитуды в интервале $0.01 \leq \mu \leq 5.0$. Все качественно различные случаи ВАХ представлены на рис.7, б и 8, б. Здесь использовано обозначение переменной компоненты тока символом « i », принятое в системе с джозефсоновским контактом, который идентичен символу « γ » в уравнениях (1), использующийся применительно к описанию динамики систем фазовой синхронизации, где γ означает начальную расстройку. Построенные ВАХ имеют максимально возможные размеры ступеней, которые могут реализовываться в эксперименте. Анализ рисунков показывает, что при достаточно больших значениях λ и ω структура ВАХ является наиболее простой, безгистерезисной. С уменьшением этих параметров поведение ВАХ усложняется, так как области различных резонансов перекрываются, то есть в системе может одновременно существовать несколько режимов с различными характеристиками вращения, что приводит к наличию гистерезисов (на рис. 8 при $\mu=1,2,3$). Проведенное исследование стационарных движений и их бифуркаций показало, что ВАХ, например, при $\mu=2$ практически не может иметь нулевой ступени, причем не только за счет того, что близко к оси μ опускается граница области существования резонанса (1,1), но и в связи с тем, что при малых γ в этом случае система имеет притягивающую гомоклиническую структуру вращательно-колебательного типа, порождаемую пересечениями верхних и боковых сепаратрисных инвариантных кривых периодических движений колебательного типа, вследствие чего предельное множество имеет ненулевую характеристику вращения и нестабильный сложный характер.

Таким образом, проведенный бифуркационный анализ позволил получить следующие результаты исследования нелинейной динамики изучаемой системы, не установленные в [1].

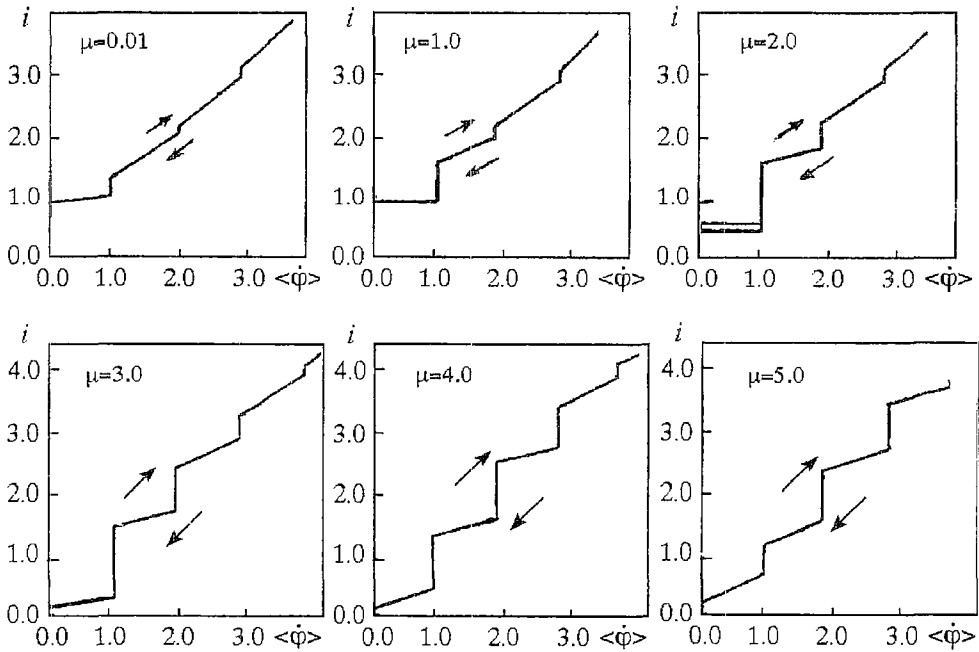
1. Изучен характер и построены бифуркационные границы областей одновременного существования двух устойчивых (определяющих в прикладных задачах два однотипных стационара с различными характеристиками) и двух седловых периодических движений колебательного типа.

2. Установлено, что при $\gamma=0$ в этих областях могут существовать объединенные сложные колебательные аттракторы, возникающие в результате последовательности бифуркаций удвоения периода двух устойчивых периодических движений и наличия гомо- и гетероклинических структур, образуемых инвариантными многообразиями двух седловых периодических движений колебательного типа.

3. Обнаружены значения параметра γ , при которых в отсутствие вращательных резонансов не реализуется нулевая ступень ВАХ из-за наличия

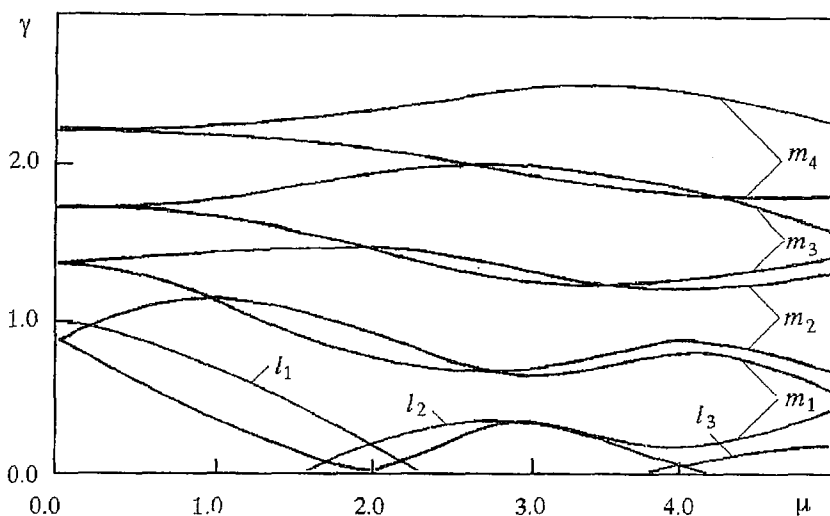


a

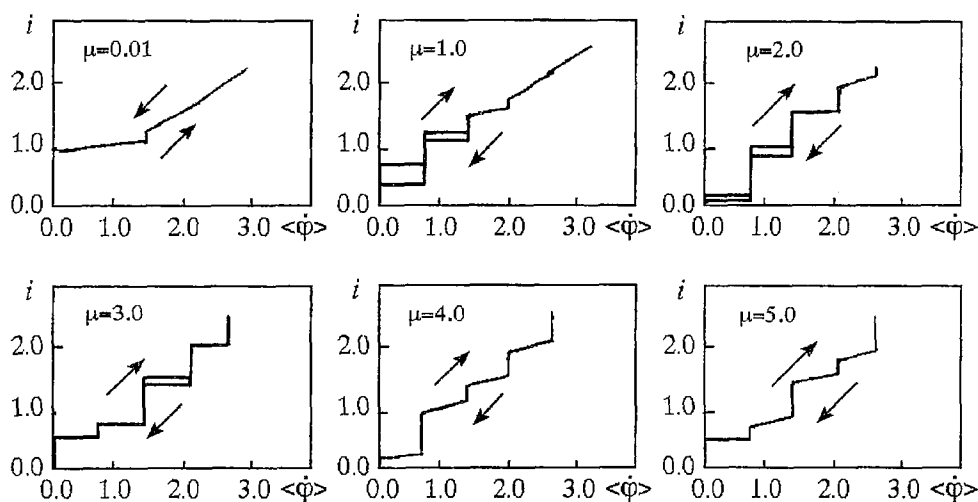


б

Рис. 7. Бифуркационная диаграмма (а) и графики ВАХ (б) при $\omega=1, \lambda=1, a=0$: а - кривые соответствуют бифуркациям седло-узловых неподвижных точек (l_1, l_2 - (0,1)-типа и m_1, m_2, m_3, m_4 - (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) - типа, соответственно); б - графики ВАХ при различных значениях параметра μ



a



б

Рис. 8. Бифуркационная диаграмма (а) и графики ВАХ (б) при $\omega=0.68$, $\lambda=0.8$, $a=0$: а - кривые соответствуют бифуркациям седло-узловых неподвижных точек (l_1, l_2, l_3 - (0,1)-типа и m_1, m_2, m_3, m_4 - (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) - типа, соответственно); б - графики ВАХ при различных значениях параметра μ

притягивающей гомоклинической структуры колебательно-вращательного типа, образованной седловым периодическим движением колебательного типа.

Авторы признательны В.Н.Белых за полезные обсуждения в ходе исследований и замечания по работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 93- 13- 16253).

Библиографический список

1. Кивелева К.Г., Фрайман Л.А. Бифуркационный анализ неавтономного маятниковое уравнения из теории систем фазовой синхронизации //Иzv.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, № 2. С.27.

2. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд.ИЛ, 1952.

3. Лихарев К.К., Ульрих Б.Г. Системы с джозефсоновскими контактами. М.: МГУ, 1978.

4. Несвижский О.В. Вынужденные колебания в системе ФАПЧ // Радиотехника. 1965. Т.20, № 7.

5. Белюстина Л.Н. Исследование некоторых нелинейных неавтономных систем второго порядка качественно-численными методами // Теория устойчивости и ее приложения: Сб.науч.ст. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1979. С.339.

6. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.

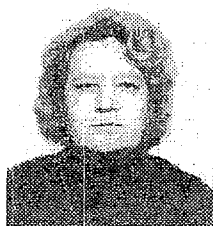
*НИИ прикладной математики
и кибернетики*

*Поступила в редакцию 31.05.95
после переработки 17.06.96*

THE BIFURCATION ANALYSIS OF NONLINEAR DYNAMICS IN NONAUTONOMOUS PENDULUM SYSTEM

K.G. Kiveleva, L.A. Fraiman

The bifurcation analysis of nonlinear dynamics in nonautonomous pendulum systems with extensive spectrum of applications is carried out. The bifurcation diagrams are presented, the regions with chaotic motions of different types are determined, the case of appearance of two stable oscillating periodic solutions is studied. The achieved results are interpreted applying to Josephson junction systems.



Кивелева Клара Георгиевна - окончила Горьковский педагогический институт (1960). Работает в НИИ прикладной математики и кибернетики с 1965 года, научный сотрудник. Область научных интересов - моделирование нелинейных динамических систем из теории синхронизации. Опубликовала в соавторстве 15 научных статей в журналах, межвузовских и республиканских сборниках. Соавтор двух коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации».



Фрайман Людмила Алексеевна - окончила Горьковский государственный университет (1969). После окончания университета работает в НИИ прикладной математики и кибернетики, старший научный сотрудник. Область научных интересов - динамические системы, численные методы исследования. Опубликовала в соавторстве 13 научных статей в журналах, межвузовских и республиканских сборниках. Соавтор двух коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации».



О ФАЗОВЫХ КАРТИНАХ СТАНДАРТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ТОРА

Л.В. Лебедева

Стандартное отображение тора, описывающее работу ряда физических систем, является сложным и интересным математическим объектом. Для него характерны многие процессы (смена регулярного поведения хаотическим, наличие последовательности бифуркаций удвоения периода и последовательности бифуркаций рождения гетероклинических структур и т.п.), вызывающие сегодня повышенный интерес ученых. В настоящей работе представлены серии фазовых картин стандартного отображения тора, в которых демонстрируются: структура счетного множества циклов различного типа неподвижных точек, параметрическая зависимость структуры множества фазовых траекторий, скорость заполнения фазового тора сепаратрисной инвариантной кривой гиперболической неподвижной точки.

Введение

Рассмотрим свойства отображения F

$$\bar{x} = x + y - a \sin x \pmod{2\pi},$$

$$\bar{y} = y - a \sin x \pmod{2\pi}$$

как динамической системы. F есть широко известное отображение тора, называемое в литературе [1,2] отображением Б.В.Чирикова,

$$T = (x, y / -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi),$$

используемое как модель возникновения стохастичности, например, для неавтономной гамильтоновой системы второго порядка. Им занимались [1-17] в связи с изучением механизма перехода к хаотическим движениям и с возникающими при этом проблемами устойчивости и разрушения инвариантных кривых, ширины стохастического слоя, взаимодействием резонансов. Рассматриваемое отображение характеризуют многие процессы, типичные для динамических систем: смена регулярного поведения хаотическим, последовательность бифуркаций удвоения периода, последовательность бифуркаций рождения гетероклинических структур и т. п. Численное моделирование позволяет продемонстрировать изменение динамического поведения системы с увеличением параметра a , показать механизм перехода от регулярного движения к хаотическому.

Ниже представлены результаты изучения структуры счетного множества циклов различного типа неподвижных точек, параметрической зависимости структуры множества фазовых траекторий, скорости заполнения фазового тора сепаратрисной инвариантной кривой гиперболической неподвижной точки.

Предварительный анализ

Известно, что поведение динамической системы, описанной системой разностных уравнений, в первую очередь определяется наличием неподвижных точек, типом их устойчивости, взаимным расположением инвариантных кривых [4,5, 18-21].

Множество точек $t = t(x,y)$ с координатами x, y , удовлетворяющих условию: $t_0, t_1 = F(t_0), t_2 = F(t_1) = F^2(t_0), \dots$, назовем траекторией отображения F . Неподвижной точкой типа q/p отображения F будем называть точку t_0 такую, что $F^p(x_0, y_0) = (x_0 + 2\pi q, y_0) = t'_0$, но для всех $0 < i < p, 0 < j < q$ это равенство не выполняется.

Будем говорить, что точки $t_0, t_1 = F(t_0), \dots, t_p = F^p(t_0) = t'_0$ образуют q/p - цикл, если t_0 есть неподвижная точка типа q/p .

Как известно, при $a=0$ [22] любая окружность $S_y, (y=c=\text{const}) \in T$ является инвариантом отображения F . При этом каждая точка окружности S_0 является неподвижной точкой типа $0/1$. Окружности $S_c, c \in (0, 2\pi)$ заполнены траекториями: периодическими при $\mu = c/2\pi = q/p$ - рациональном, квазипериодическими, если число вращения μ иррационально. Структура множества фазовых траекторий в данном случае очевидна.

Согласно теории КАМ [22] при малых положительных значениях параметра a в лиувилевом отображении F инвариантные кривые с рациональными числами вращения разрушаются, одновременно возникает конечное число гиперболических и эллиптических q/p -циклов таких, что гиперболические инвариантные кривые образуют гомоклинические структуры, а инвариантные кривые с иррациональными числами вращения остаются инвариантами, разделяя фазовое пространство на «невзаимодействующие слои».

Известно [22, 2], что при любом значении параметра отображение F имеет как минимум два q/p -цикла ($q=1,2, p=1,2,3, \dots$) с некоторой плотностью распределения точек этих циклов по всему тору. Иначе говоря, при любом значении параметра отображение имеет счетное множество различных q/p -циклов. Вычисления показывают, что неподвижные точки одного из q/p -циклов (обозначим его через $U_{q/p}$) имеют гиперболический характер устойчивости. Неподвижные точки второго из q/p -циклов (обозначим его через $S_{q/p}$) при $0 < a < a^*_{q/p}$ являются эллиптическими, а при $a > a^*_{q/p}$ имеют гиперболический характер устойчивости, где $a^*_{q/p}$ - некоторое бифуркационное значение параметра a , свое для каждого из q/p -циклов. Известно [22,2], что существует некое критическое значение a^* параметра, которое делит область значений параметра a на две подобласти, характер поведения фазовых траекторий отображения F в которых принципиально различен. В области $a < a^*$ движение в фазовом пространстве отображения является ограниченным: изменения переменной y вдоль любой фазовой траектории ограничены некоторой окрестностью начального значения. При $a > a^*$ в системе имеет место «полное перемешивание» [22,2] - наступает вращение по координате y .

Счетное множество q/p -циклов

Свойства этого множества описываются следующими утверждениями.

Теорема 1. При любом значении параметра отображение F^* : $\bar{x} = x + y$,

$\bar{y} = y - a \sin x$, являющееся «поднятием» отображения F [26], имеет неподвижные точки $O_{q/p,1}(0, y_{q/p}^*)$ и $O_{q/p,2}(\pi, y_{q/p}^*)$ типа q/p , для любого $p \in (1, 2, \dots)$ и $q \in (\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots)$.

Для доказательства теоремы использованы метод математической индукции, лемма 1 и ее следствия.

Лемма 1. Если $x_0 = 0$, $x_p = 2\pi q$, $y_p = y_0$, то для всех $k = \overline{0, p}$ справедливы равенства $(y_{p-(k-1)} = y_k, x_{p-k} = 2\pi q - x_k)$.

Следствие 1. Для любого $p > 1$ справедливо: $y_{1/p}^* \in (0, 2\pi)$, $y_{1/(p+1)}^* < y_{1/p}^*$, $y_{q/p}^* \in (0, 2\pi q]$.

Следствие 2. При $0 < a < 4$ отображение F имеет две неподвижные точки типа $q/1$ (для любого целого значения q): гиперболическую (седловую) $O_{q/2}(\pi, 2\pi q)$ и эллиптическую $O_{q/1}(0, 2\pi q)$. При $a = 4$ в результате бифуркации удвоения точка $O_{q/1}$ теряет свою устойчивость, становясь обратным «седлом», и в ее окрестности «мягко» рождается [20] пара $O'_{q/2}, O''_{q/2}$ эллиптических неподвижных точек типа $q/2$, координаты которых есть решения системы: $(y = 2x - 2\pi k, y = 0.5a \sin x, k = 0, 1, \dots)$.

На рис. 1 представлено фазовое пространство отображения F при $a = 1.0$. На рисунке указаны неподвижные точки (координаты которых определены с помощью ЭВМ) типа $q/p = 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 0/1, 1/1, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7$,

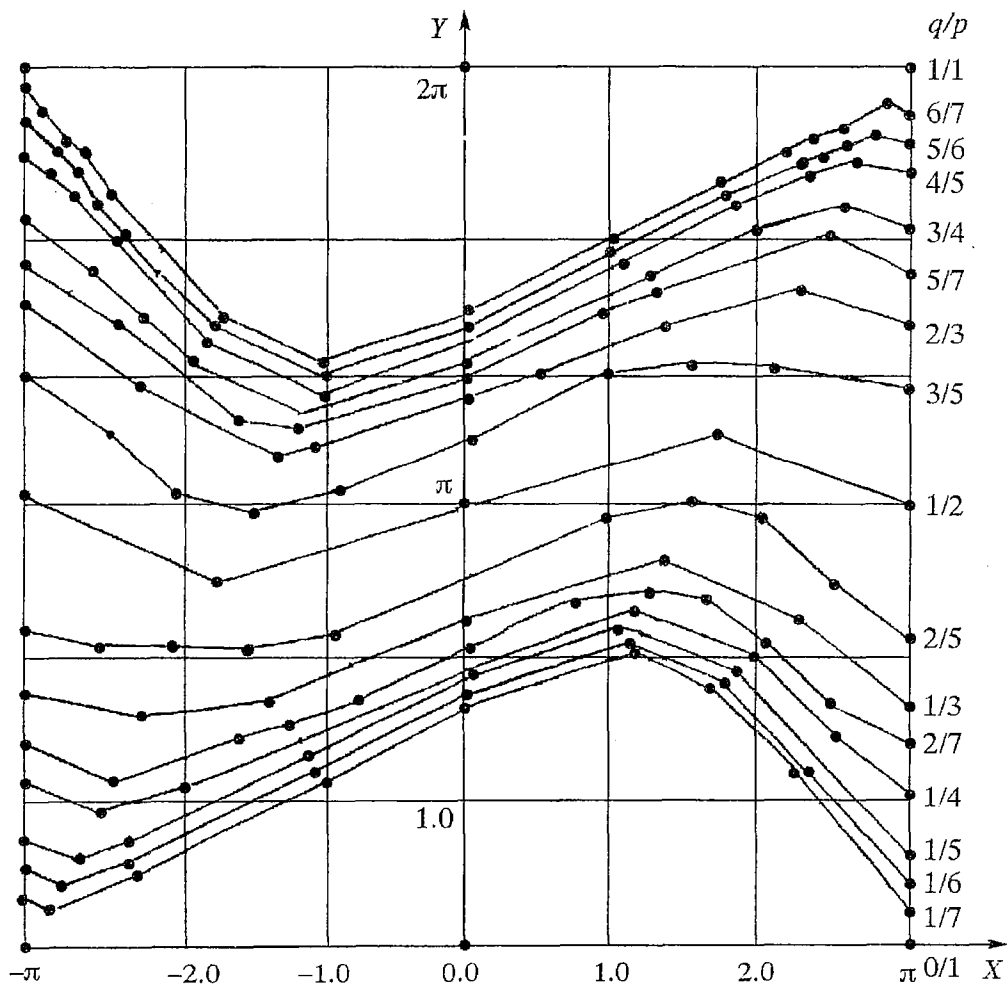


Рис. 1

5/6, 2/5, 3/5, 4/5, 3/4, 2/3 (неподвижные точки одного типа соединены отрезками прямых). Найдено по два цикла каждого из указанных типов: $S_{q/p}$ и $U_{q/p}$.

Рассмотрим подробнее изменения структуры предельного множества с изменением параметра.

Параметрическая зависимость структуры множества фазовых траекторий

Чтобы выяснить, как выглядит множество фазовых траекторий при $a < a^*$ в области финитных движений, построим фазовую картину при $a = 0.1$ (рис. 2).

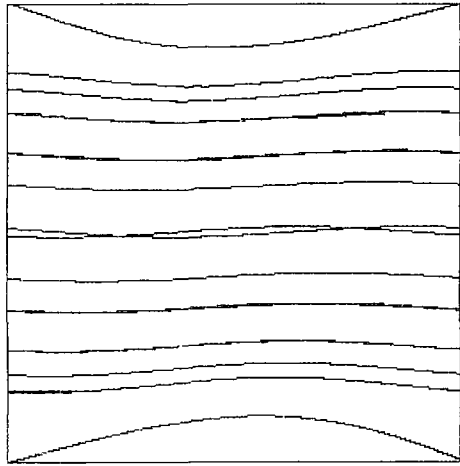


Рис. 2

При малых значениях параметра a устойчивые и неустойчивые инвариантные кривые гиперболических циклов $U_{q/p}$ пересекаются почти с касанием, создавая некоторые инвариантные области с центрами в точках $S_{q/p}$ -цикла, и фазовая картина похожа на фазовую картину непрерывной системы.

С помощью методов качественной теории оценим изменения взаимного расположения сепаратрисных кривых в зависимости от значений параметра a .

Об изменении векторного поля отображения F с увеличением параметра a говорит

Лемма 2. При $y > 0$ ($y < 0$) в области $-\pi \leq x \leq 0$ с увеличением параметра a поле поворачивается по (против) часовой стрелке; в области

$0 < x < \pi$ при $y > 0$ ($y < 0$) с увеличением параметра a поле поворачивается против (по) часовой стрелки.

Следствие 1. Если при $a = a^*$ есть гетероклиническая структура «седла» $O_{0/2}$, то она есть при любом $a > a^*$.

Следствие 2. Если при $a = a^*$ нет гетероклинической структуры «седла» $O_{0/2}$, то ее нет ни при каком $a > a^*$.

Таким образом, увеличение параметра ведет к увеличению углов пересечения сепаратрисных кривых, и картина становится стандартной для дискретной системы с гомоклинической структурой. При этом ширина так называемого сепаратрисного слоя увеличивается, то есть образуется заметная область вблизи неподвижной точки цикла $U_{q/p}$, в которую «часто» попадают траектории отображения F . Этот процесс и параллельно протекающий процесс разрушения инвариантных кривых $S_{q/p}$ с иррациональным числом вращения μ [22], разделяющих области «влияния» циклов с разными числами q/p , приводит к тому, что возникает пересечение сепаратрисных кривых неподвижных точек циклов $U_{q/p}$ с разными числами q/p , то есть инвариантные области начинают сообщаться (перекрываются резонансы) через рождающиеся гетероклинические траектории [19] (рис. 3, $a=1.0$).

Последовательность накапливающихся бифуркаций рождения гетероклинических траекторий, в результате которых число перекрывающихся резонансов увеличивается, приводит к вращению по координате y : траектории из окрестности S_0 быстро достигают $S_{2\pi}$ - «верхней границы тора» (рис. 4, $a=1.57$). Наступает «полное перемешивание».

Более подробное изучение последовательности рождения гетероклинических структур показывает, что при $a=0.85$ нет непосредственного пересечения

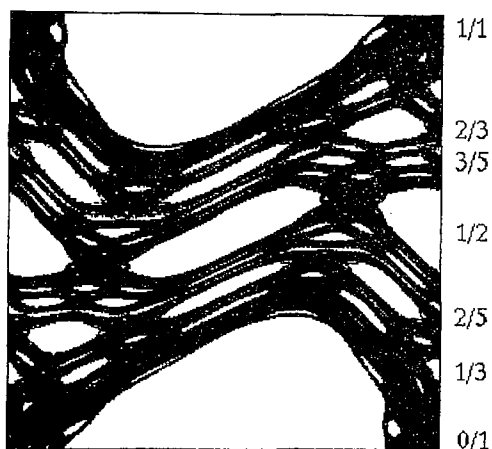


Рис. 3

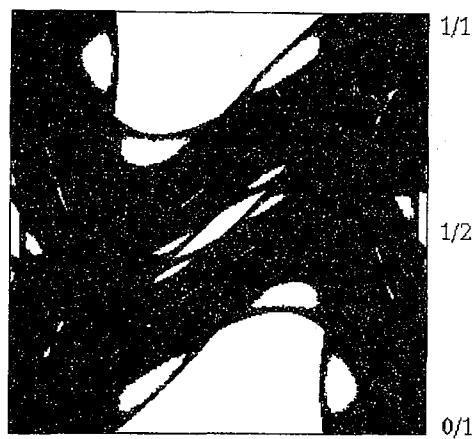


Рис. 4

сепаратрисных кривых неподвижных точек следующих типов: $0/1$ и $1/5$, $1/5$ и $1/4$, $1/4$ и $1/3$, $1/3$ и $2/5$, $2/5$ и $1/2$, $1/2$ и $3/5$, $3/5$ и $2/3$, $2/3$ и $3/4$, $3/4$ и $4/5$, $4/5$ и $1/1$. При $a = 0.95$ уже существует гетероклиническая структура, образовавшаяся при пересечении сепаратрисных кривых неподвижных точек циклов $U_{1/5}$ и $U_{0/1}$, $U_{4/5}$ и $U_{1/1}$. Если исключить из рассмотрения $q/5$ -циклы, то оказывается, что оставшиеся (из рассматриваемых) циклы «не порождают» гетероклинических структур. При $a=1.1$ имеют место гетероклинические структуры, образованные сепаратрисными инвариантами кривыми неподвижных точек типов $0/1$ и $1/4$, $1/4$ и $1/3$, при $a=1.2$ - $0/1$ и $1/3$, $1/3$ и $1/2$ - типов, при $a=1.75$ - $0/1$ и $1/2$ - типов, при $a=2.45$ - $0/1$ и $1/1$ - типов.

Логично предположить, что уменьшение параметра от значения 0.95 до 0.00 приводит к исчезновению сначала гетероклинической структуры, возникшей при пересечении инвариантных кривых неподвижных точек циклов $U_{1/5}$ и $U_{0/1}$, затем $U_{1/6}$ и $U_{0/1}$, затем $U_{1/7}$ и $U_{0/1}, \dots$. И, наконец, существует некое критическое значение параметра a , лежащее в интервале $(0.0, 0.85)$, при котором исчезает последняя гетероклиническая структура.

Критическое значение параметра

Представленные выше результаты говорят о том, что при малых значениях параметра a фазовое пространство отображения F представляет из себя объединение невзаимодействующих слоев, а при $a=3.14$ в системе имеет место «полное перемешивание». Отображение F не имеет границы глобального хаоса, но имеет критическое значение параметра a , которое разделяет финитное и инфинитное движения [22]. При каком же значении параметра траектория, начинающаяся в окрестности S_0 , достигает верхней границы тора $S_{2\pi}$ за конечное число итераций?

В результате многочисленных исследований было определено [22,11] критическое значение параметра ($a=0.971635\dots$), при котором в системе возникает взаимодействие всех резонансов (численный результат Грина [11]). Аналитическими средствами было получено [11], что главные резонансы ($q/p=0/1$ и $q/p=1/1$) взаимодействуют при $a=\pi^2/4$; при учете полуполого резонанса ($q/p=1/2$) по методу перекрытия резонансов получено критическое значение $a=1.46$, а с учетом ширины стохастического слоя - $a=1.2$.

С помощью методов качественной теории динамических систем доказана [23-25].

Теорема 2. При $a=2.46$ существует гетероклиническая структура, образованная неустойчивой сепаратрисной инвариантной кривой неподвижной

точки $O'(-\pi, 0)$ типа $0/1$ и устойчивой сепаратрисной инвариантной кривой неподвижной точки $O''(2\pi, 0)$ типа $1/1$.

Таким образом, учитывая лемму 2, можем утверждать, что при $a \geq 2.46$ существует гетероклиническая структура, образованная инвариантными кривыми неподвижных точек типа $0/1$ и $1/1$, то есть при $a \geq 2.46$ имеет место «взаимодействие главных резонансов».

Рассмотрим еще два вопроса, связанных с поведением особых траекторий.

Скорость заполнения фазового тора одной траекторией отображения

С какой скоростью вдоль отдельных траекторий возрастает средняя величина переменной y при различных значениях параметра a ? Для оценки этой скорости определим, как быстро неустойчивая сепаратрисная инвариантная кривая L гиперболической неподвижной точки $O'(-\pi, 0)$ заполняет весь тор?

При малых a , очевидно, скорость равна нулю. При $a=3.14$ достаточно пяти итераций начального отрезка кривой L для достижения верхней границы $S_{2\pi}$ тора.

Пусть $a=1.0$. На рис.5 изображены гомоклинические структуры циклов $U_{0/1}$, $U_{1/4}$, $U_{1/3}$, $U_{2/5}$, $U_{3/7}$, $U_{1/2}$, $U_{4/7}$, $U_{3/5}$, $U_{2/3}$, $U_{3/4}$, $U_{1/1}$ (построены инвариантные кривые гиперболических неподвижных точек $O_{0/1}$ q/p -цикла $U_{q/p}$ до прихода этих кривых в окрестность ближайшей неподвижной точки того же цикла $U_{q/p}$). На рисунке (справа) помечен тип q/p неподвижных точек соответствующего цикла. Область фазового пространства, ограниченную сепаратрисными кривыми неподвижных точек $O_{q/p}$ цикла $U_{q/p}$ и содержащую внутри себя неподвижные точки цикла $S_{q/p}$, будем называть областью $V_{q/p}$. Область, расположенную между V_{q_1/p_1} и V_{q_2/p_2} , будем обозначать через $V_{q_1/p_1 - q_2/p_2}$.

На последующих рисунках изображено, как сепаратрисная кривая L заполняет фазовый тор по мере роста количества k итераций начального отрезка сепаратрисы. Области фазового тора, лежащие между $V_{1/3}$ и $V_{1/4}$, включая последнюю, достаточно быстро заполняются точками кривой L . За 100 итераций (рис.6) заполняется область, лежащая ниже $V_{1/4}$ (это область, содержащая области $V_{1/10}$, $V_{1/9}$, $V_{1/8}$, $V_{1/7}$, $V_{1/6}$ и др., не помеченные на рисунке). В течение следующих 150 итераций кривая L заполняет часть области $V_{0/1}$ (четко вырисовывая «ожерелье из 10 звеньев») и, «покрывая» гомоклиническую структуру цикла $V_{1/4}$ и превращая ее в стохастический слой, «выходит» в область $V_{1/4-1/3}$, расположенную выше $V_{1/4}$, но

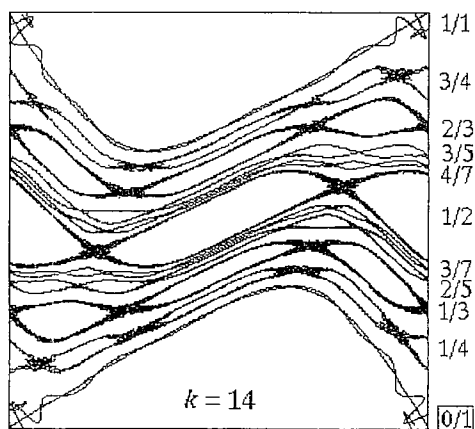


Рис. 5

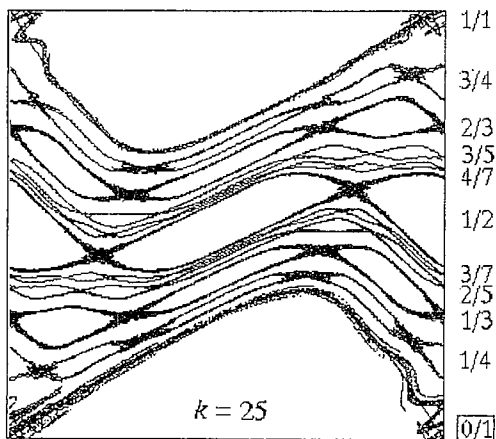


Рис. 6

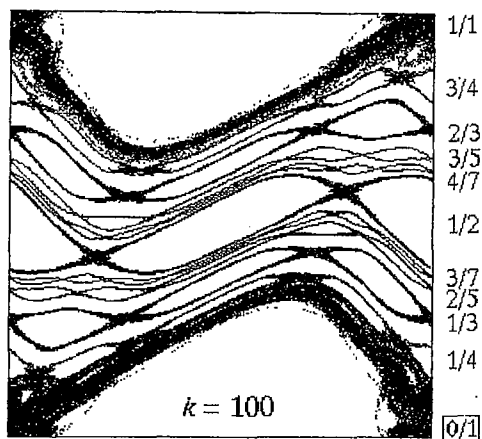


Рис. 7

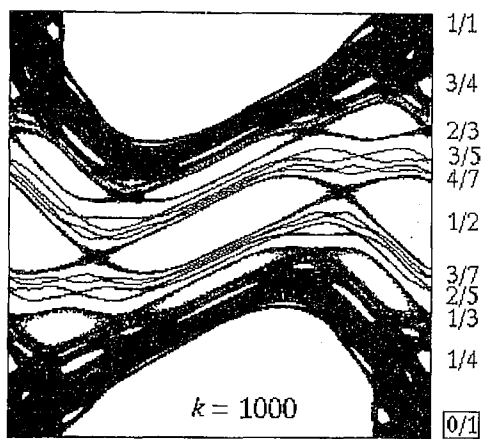


Рис. 8

ниже $V_{2/7}$, и содержащую внутри себя область $V_{2/7}$ и др., не помеченные на рис.7.

Для того, чтобы выйти в область $V_{1/3-1/5}$, расположенную между $V_{1/3}$ и $V_{1/5}$, потребовалось 1000 итераций, из них 550 «ушло» на заполнение области $V_{1/4-1/3}$ и 250 итераций на «переход» через гомоклиническую структуру цикла $V_{1/3}$ (рис. 7, 8). Полосу, разделяющую области $V_{2/5}$ и $V_{3/7}$, кривая L пересекла только после 42000 итераций (рис. 9). Даже после 58000 итераций остается полоса $V_{3/5-4/7}$, через которую кривая L «не смогла пройти» (рис.10).

Для заполнения всего тора требуется порядка 100000 итераций.

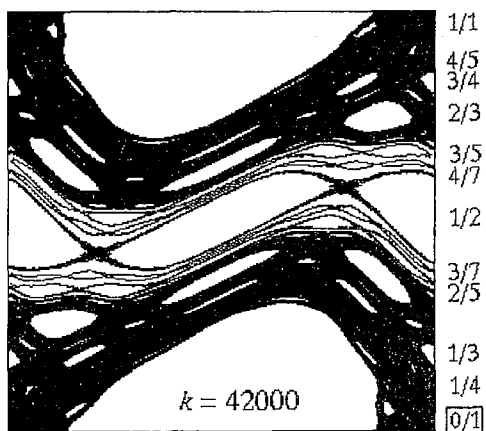


Рис. 9

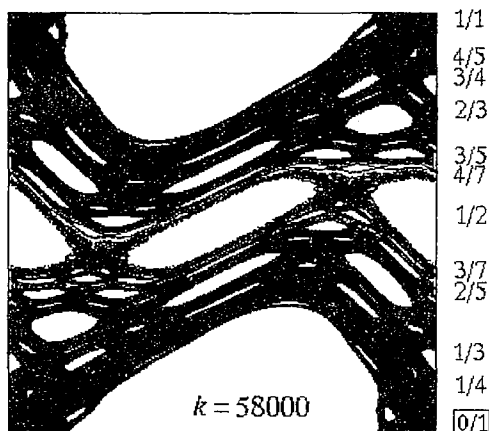


Рис. 10

Выводы

Поведение системы, регулярное при малых a , в результате последовательностей бифуркаций разрушения инвариантных кривых, рождения гетероклинических структур, удвоения периода циклов эллиптических неподвижных точек становится хаотическим. Приведенные серии фазовых картин демонстрируют эти процессы. Интересно отметить, что основным элементом фазовых картин, представленных в настоящей работе, являются неподвижные точки и сепаратрисные инвариантные кривые. В этом принципиальное отличие их от фазовых картин, представленных в работах Б.В.Чирикова. Тем не менее, качественно фазовые картины выглядят одинаково. Это подтверждает устойчивость динамических процессов, описываемых отображением F .

Работа выполнена под руководством В.Н.Белых, и автор очень благодарен ему за внимательное отношение к этому труду.

Библиографический список

1. *Чириков Б.В.* Нелинейные резонансы: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1977. 305 с.
2. *Чириков Б.В.* Взаимодействие нелинейных резонансов: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1978, 305с.
3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания динамических систем. М.: Наука, 1984.
4. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафонов А.В., Солодов В.В.* Динамические системы с гиперболическим поведением // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 66 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1993.
5. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1985. С. 5-218.
6. *Бунимович Л.А., Песин Я.Б., Синай Я.Г., Якобсон М.В.* Эргодическая теория гладких динамических систем // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.2 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1985. С. 113.
7. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
8. *Дмитриев А.С.* Динамический хаос в кольцевых автоколебательных системах с нелинейным фильтром // Изв.вузов. Радиотехника. 1985. Т. 28, № 4. С.429.
9. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
10. *Каток А.Б., Синай Я.Г., Степин А.А.* Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой // Математический анализ. Т.13 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1975. С.129.
11. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир. 528 с.
12. *Andreyev Yu.V., Dmitriev A.S., Chua L.O., Wu C.W.* Associative and Random Access Memory Using One-Dimensional Maps // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol.2, № 3.
13. *Aubry S., Le Daeron P.Y.* The discrete Frenkel - Kontorova model and its extensions // Physica 8D. 1983. P. 381.
14. *Charles F.F.* Karney Long-time correlations in the stochastic regime // Physica 8D. 1983. P. 360.
15. *Chirikov B.V.* // Phys. Reports. 1979. Vol. 52. P.265.
16. *Ketoja J.A., Mackay R.S.* Fractal boundary for the existence of invariant circles // Physica D 35. 1989. P. 318.
17. *Mather J.N.* Non-existence of invariant circles // Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1984. Vol. 4. P. 301.
18. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З.* Гладкие динамические системы//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1985.
19. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
20. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.5 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1985. С. 5.
21. *Афраймович В.С., Гаврилов Н.К., Лукьянов В.И., Шильников Л.П.* Основные бифуркации динамических систем: Учебное пособие. Горький: ГГУ, 1985.

22. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941.
23. Лебедева Л.В. Качественное поведение траекторий и бифуркации дискретных фазовых картин: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород: ННГУ, 1993.
24. Лебедева Л.В. Качественное поведение траекторий и бифуркации дискретных фазовых картин: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород: ННГУ, 1993.
25. Лебедева Л.В. Стандартное отображение тора в фазовых картинах: Сб. тез. Всесоюз. конф. «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород, 1993.
26. Нитецки Э. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975, 304 с.

НИИ прикладной математики
и кибернетики Н.Новгород

Поступила в редакцию 5.06.95
после переработки 17.09.96

PHASE PICTURES OF STANDARD MAP OF TORUS

L.V. Lebedeva

The standard torus map which defines the dynamics of a number of physical systems is a very complex mathematical object. The ways of transition from regular behaviour to chaos, existence of period doubling bifurcations and bifurcations of heteroclinic structures are the characteristic features of the dynamics of this map rousing the great interest of scientists at present.

This paper contains series of phase pictures of standard map of torus with the following: the structure of countability set of different cycles of fixed points, the parametric dependence of structure of phase trajectory set, the velocity of completing of phase torus with separatrix of hyperbolic fixed point.



Лебедева Лариса Владимировна родилась в 1951 году в г. Усолье-Сибирское Иркутской области, окончила Горьковский государственный университет (1974). Работает в Нижегородском научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики. Защитила кандидатскую диссертацию по специальности «дифференциальные уравнения» (1993). Область научных интересов - качественная теория динамических систем, компьютерное моделирование, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор ряда работ по указанным выше направлениям.



ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО РЕЛАКСАЦИОННОГО ГЕНЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

А.А. Кипчатов, С.В. Подиш

В статье представлены результаты экспериментального исследования кусочно-линейной модели релаксационного генератора под внешним гармоническим воздействием. Построена численная модель в виде отображения, которое в одном из частных случаев сводится к классическому отображению окружности на себя. Для натурной и численной моделей построены карты режимов в координатах «амплитуда - частота внешнего воздействия». Показано, что численная модель с высокой степенью соответствия отражает особенности поведения неавтономного релаксационного генератора в пространстве параметров.

Введение

Путь к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний достаточно хорошо описан и часто наблюдается в экспериментальных и модельных системах самой различной природы. Однако проявление этого сценария в чистом виде, как ни странно, свойственно лишь немногим из этих систем. Известные радиотехнические системы и численные модели, демонстрирующие разрушение квазипериодики, обладают рядом свойств, затрудняющих (или делающих невозможным) их использование в качестве объектов для изучения отдельно взятого явления нелинейной динамики - разрушения квазипериодических колебаний. Эти свойства можно объединить в несколько групп.

1. Трудности численного моделирования многих радиотехнических систем, таких как генератор Ван-дер-Поля [1], генератор на неоновой лампочке [2] или генераторы с рп-переходами [3], приводящие к отсутствию адекватных численных моделей, обеспечивающих достаточную степень соответствия результатов натурного и численного экспериментов. Эти трудности связаны чаще всего с тем, что в таких системах существенную роль играют сложные инерционные процессы в активных элементах, которые сложно с достаточной точностью описать математически. Точность описания процессов (и, соответственно, адекватность результатов численного и натурного моделирования) вступает в противоречие с простотой математической модели.

2. Отсутствие простых и в достаточной степени адекватных экспериментальных реализаций классических математических моделей, и, в частности, такой простой эталонной системы, как отображение окружности на себя.

3. Обилие нелинейных эффектов или существенная неоднозначность поведения в пространстве управляющих параметров (например, генератор типа «свернутый тор» [4]).

В настоящей работе исследуется простая система, демонстрирующая чистый сценарий хаотизации через разрушение квазипериодических колебаний в широком диапазоне изменения управляющих параметров. Это оптимально спроектированный релаксационный генератор под внешним гармоническим воздействием, который легко реализуется в радиотехническом эксперименте и при соблюдении ряда требований допускает адекватное численное моделирование одномерным точечным отображением (что существенно расширяет возможности численного эксперимента по сравнению с потоковыми системами). Кроме того, в одном из частных случаев численной моделью неавтономного релаксационного генератора является отображение окружности на себя.

1. Радиотехническая модель неавтономного релаксационного генератора

Основным требованием к натурной модели генератора было обеспечение возможности адекватного численного моделирования, так как при исследовании подобных систем наиболее эффективным оказывается сочетание методов натурального и численного эксперимента. Наиболее очевидным решением представляется построение радиотехнической модели, по возможности точно повторяющей принцип действия простейшего релаксационного генератора, который представляет собой последовательность циклов заряда и разряда конденсатора.

На рис. 1 приведена блок-схема натурной модели. Схема управления

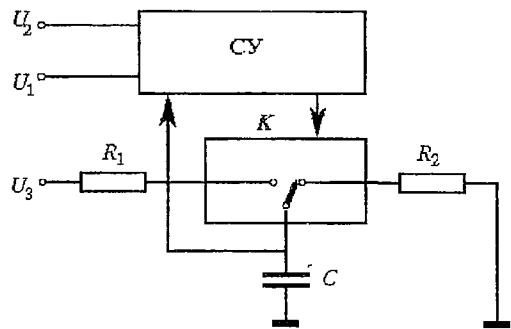


Рис. 1. Структурная схема радиотехнической модели неавтономного релаксационного генератора

(СУ) отслеживает напряжение на конденсаторе U_C , сравнивает его с пороговыми напряжениями U_1 и U_2 и управляет переключениями ключа K . Ключ может замыкать либо цепь заряда конденсатора C от источника постоянного напряжения U_3 через резистор R_1 , либо цепь разряда конденсатора через резистор R_2 . В момент, когда напряжение на конденсаторе U_C достигает верхнего порога U_2 , схема переключается из режима заряда в режим разряда; при достижении нижнего порога U_1 происходит обратное переключение ключа K .

В соответствии с выбранным способом введения внешнего воздействия, в неавтономном режиме напряжение верхнего порога U_2 зависит от времени; оно представляет собой сумму постоянного напряжения, соответствующего верхнему порогу в автономном режиме и сигнала от внешнего источника. Кривые зависимости напряжения на конденсаторе от времени $U_C(t)$ для различных сочетаний параметров схемы приведены на рис. 2. Гармонический сигнал внешнего

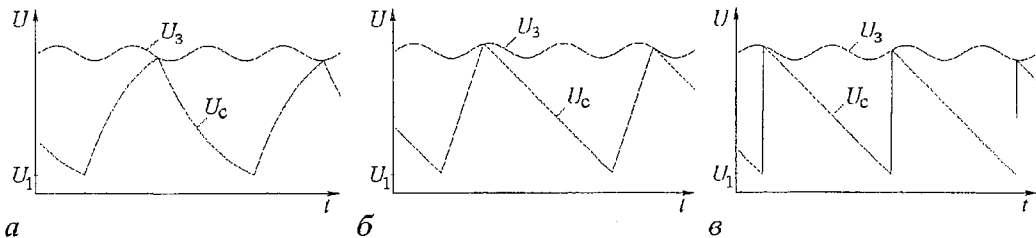


Рис. 2. Временные реализации релаксационных колебаний и сигнала внешнего воздействия при различных значениях параметров модели

воздействия, таким образом, влияет на момент переключения схемы из режима заряда в режим разряда, не искажая экспоненциальной (в общем случае) формы кривой $U_C(t)$ в промежутках между переключениями.

Возможность построения адекватной численной модели обеспечивается выполнением следующих условий.

1. Время переключения схемы из одного режима в другой должно быть на 2...3 порядка меньше периода колебаний в автономном режиме.

2. Сопротивление электронного ключа K в открытом (закрытом) состоянии должно быть на 2-3 порядка меньше (больше) сопротивлений резисторов R_1, R_2 .

Последнее условие исключает возможное влияние нелинейного характера сопротивления ключа на динамику системы. Выполнение этих условий обеспечивается соответствующим выбором параметров используемых микросхем и элементов цепей заряда и разряда.

2. Результаты натурального эксперимента

Радиотехническая модель неавтономного релаксационного генератора была исследована в неавтономном режиме стандартным набором средств экспериментального бифуркационного анализа [5-7]. Результаты натурального эксперимента представлены в виде набора карт режимов, или двухпараметрических бифуркационных диаграмм в координатах амплитуда внешнего воздействия - частота внешнего воздействия. Карта режимов, представленная на рис. 3, получена для одного из возможных сочетаний значений сопротивлений резисторов R_1, R_2 и напряжения заряда U_3 . Перечисленные параметры, а также значения пороговых напряжений определяют форму релаксационных колебаний, то есть форму кривой зависимости напряжения на емкости от времени $U_C(t)$ в автономном режиме. Серым цветом обозначены области существования хаотических режимов.

Карта режимов содержит последовательность перекрывающихся язычков

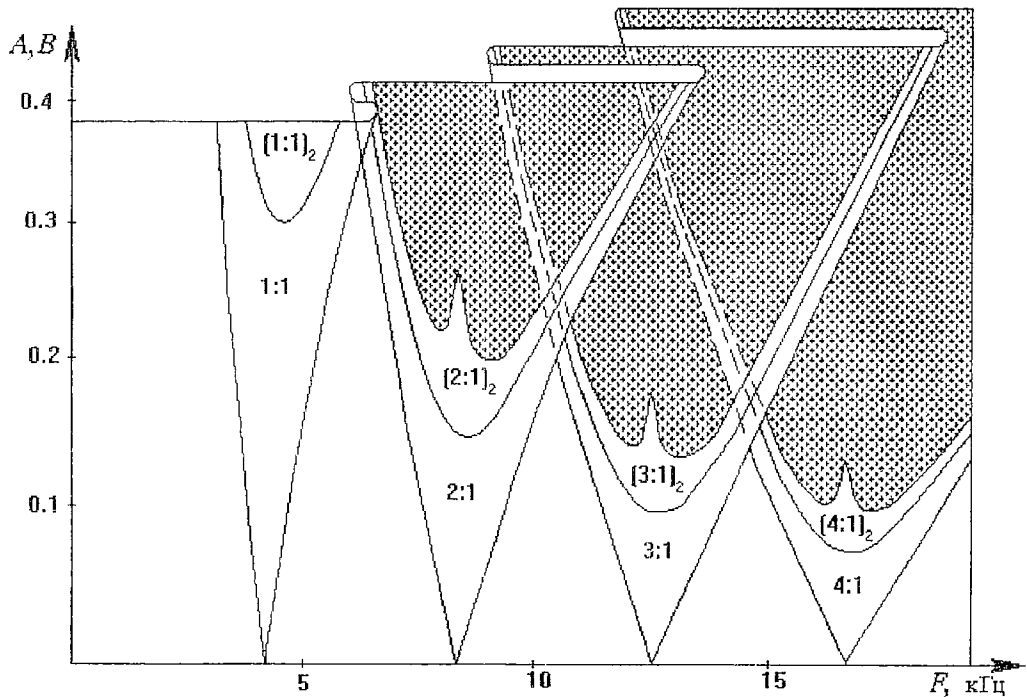


Рис. 3. Экспериментальная карта динамических режимов неавтономного релаксационного генератора

синхронизации порядка $m:1$ (за время одного периода колебаний системы происходит m периодов колебаний сигнала внешнего воздействия), имеющих одинаковую структуру. Внутри каждого языка синхронизации имеется область хаоса, переход к которому происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода.

На плоскости управляющих параметров можно выделить области перекрытия языков синхронизации разного порядка. Внутри областей перекрытия существуют зоны мультистабильности, в которых при одном сочетании управляющих параметров могут существовать несколько разных режимов колебаний в зависимости от начальных условий, или пути достижения режима в пространстве управляющих параметров. Разным режимам колебаний можно поставить в соответствие разные поверхности (листы) карты режимов, лежащие одна над другой. На карте режимов неавтономного релаксационного генератора можно явно выделить зоны бистабильности при «перекрытии» семейств периодических режимов удвоения периода и возникновения фейгенбаумовского хаоса, наблюдаемых на краях соседних листов $m:1$ и $(m+1):1$ близко к острию клювов. С достаточной достоверностью там же идентифицируются бистабильность семейства периодических режимов одного листа и развитого хаоса другого листа. Но наличие бистабильности между двумя режимами развитого хаоса, принадлежащего различным листам, определить не удастся. Это происходит из-за «слипания» листов, то есть из-за сближения бассейнов притяжения двух аттракторов и возникновения нового хаотического режима. Экспериментальные методы оказываются недостаточными для выявления границы «слипания» и тем более недостаточными для определения динамической предопределенности этого «слипания» или возникновения его за счет неизбежной шумовой модуляции колебаний, приводящей к дрожанию границ бассейнов притяжения и их перекрытию.

На представленных картах режимов наблюдаются структуры типа crossroad area, известные, в частности, для некоторых численных моделей [8,9]. В натурном эксперименте детальное исследование этих структур представляет определенные трудности, но характерная форма линий второго удвоения периода однозначно указывает на их существование.

Следует отметить, что для релаксационных колебаний различной формы структура карты режимов может быть существенно различной. Изменение соответствующих параметров схемы натурной модели приводит к смещению границ областей или даже полному исчезновению хаотических областей при сохранении качественного вида карты режимов - семейства клювов синхронизации (такие изменения легко анализируются экспериментальными методами). Однако исследование тонкой структуры карты режимов в натурном эксперименте требует высокой помехозащищенности установки и высокой точности перестройки по параметрам. Поэтому изменения в тонкой структуре карты (например, наблюдавшееся в численном эксперименте изменение сценария перехода к хаосу) не могут быть с достаточной точностью исследованы средствами натурального эксперимента.

По этой же причине на представленных картах режимов отсутствует ряд более мелких деталей, таких как окна периодичности в областях хаоса или бесконечная последовательность языков синхронизации, образующих дерево Фэри. Соответствующие режимы в натурном эксперименте наблюдались, но для точного исследования границ областей возможности натурального эксперимента оказались недостаточными.

3. Численное моделирование неавтономного релаксационного генератора

Традиционный путь численного моделирования поведения радиотехнических генераторов основан на получении системы дифференциальных уравнений из

уравнений Кирхгофа. Однако релаксационные генераторы, имеющие участки быстрого и медленного движения, требуют особой осторожности при написании их моделей в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так как при их интегрировании возникают труднопреодолимые проблемы точности и устойчивости. Менее распространенный, но весьма продуктивный путь моделирования динамики радиотехнических генераторов - получение моделей в виде отображений. Этот путь не имеет формальных рецептов по его преодолению, но очень привлекателен из-за простоты анализа отображений (см., например, [10]). Более того, непосредственно для моделирования релаксационных процессов точечные отображения уже использовались [11,12]. Физические процессы, протекающие в рассматриваемом релаксационном генераторе с выбранным способом введения внешнего воздействия, допускают простое математическое описание в виде построения зависимости моментов переключения заряд-разряд от фазы внешнего воздействия, так как между переключениями динамика генератора проста и описывается экспоненциальными функциями. Другими словами, численная модель может быть построена в виде одномерного точечного отображения вида $F(\varphi_{n+1}, \varphi_n) = 0$, где φ_n - фаза сигнала внешнего воздействия в момент переключения схемы из режима заряда в режим разряда, когда напряжение на конденсаторе достигает верхнего порога. В общем случае, как нетрудно убедиться, искомое отображение не может быть выражено в явном виде. Для нахождения очередного значения переменной φ_{n+1} требуется решить итерационным методом следующее трансцендентное уравнение:

$$\theta_{n+1} = (\theta_n + F[\ln[(1 + A \sin 2\pi\theta_n)/U_1] + \tau_2 \ln[(U_3 - U_1)/(U_3 - (1 + A \sin 2\pi\theta_{n+1}))]]) \pmod{1}, \quad (1)$$

где $\theta_n = \varphi_n / 2\pi$ - нормированная фаза внешнего воздействия в момент переключения схемы из режима заряда в режим разряда. Из всех корней уравнения (1) выбирается тот, для которого выражение $\sin 2\pi\theta_{n+1}$ принимает минимальное значение. Параметры A и F пропорциональны соответственно амплитуде и частоте внешнего воздействия в радиотехнической модели; U_1 - напряжение нижнего порога, U_3 - напряжение заряда; $\tau_2 = R_2 C$ - постоянная времени цепочки заряда. В целях минимизации числа параметров значения постоянной времени цепочки разряда τ_1 и постоянной составляющей напряжения верхнего порога приняты равными 1.

Чтобы найти из уравнения (1) очередное значение θ_{n+1} , необходимо использовать итерационные методы. Объем вычислений существенно увеличивается по сравнению со случаем, когда отображение можно записать в явном виде $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n)$. Однако если параметры схемы натурной модели выбрать так, чтобы время заряда конденсатора было пренебрежимо мало по сравнению с временем разряда ($\tau_2 \rightarrow 0$, $U_3 \rightarrow \infty$), то есть кривая заряда представляла собой отрезок вертикальной прямой, то отображение допускает запись в явном виде. Наибольший интерес представляет случай, когда кривая разряда линейна (см. рис. 2, в). Промежуток времени между переключениями совпадает с временем разряда, которое, в свою очередь, пропорционально значению напряжения верхнего порога в момент переключения схемы из режима заряда в режим разряда. Отображение будет иметь следующий вид:

$$\theta_{n+1} = [\theta_n + F(1 + A \sin 2\pi\theta_n)] \pmod{1}. \quad (2)$$

Найденное отображение является модифицированным отображением окружности на себя, параметры A и F которого выбраны так, что они пропорциональны соответственно амплитуде и частоте внешнего воздействия.

Наличие модели в виде отображения позволяет легко реализовать компьютерную процедуру автоматической идентификации периодических колебаний, устанавливающихся в системе, из условия $|\theta_{n+i} - \theta_n| < \epsilon$, где ϵ - заданная

точность. При этом время анализа минимально и определяется длительностью переходного процесса и величиной периода. Поэтому можно эффективно исследовать поведение системы в пространстве двух управляющих параметров, последовательно сканируя интересующую область изменения параметров и находя точки смены одного периодического режима другим. Результатом является картина бифуркационных линий периодических колебаний на плоскости параметров. Хаотические и квазипериодические колебания при таком анализе неразличимы, однако закономерности известных сценариев перехода к хаосу, как правило, позволяют легко классифицировать и эти области. Точность разрешения этого метода связана с величиной ϵ и длительностью переходного процесса, который игнорируется при анализе после очередного шага по параметру. Время построения карты размером 400 на 400 ячеек с разрешением по периоду до 16 и длительности переходного процесса 500 итераций составляет около 35 минут при использовании IBM PC 486DX2-66. Особенностью реализованной программной среды является возможность ручного изменения управляющих параметров манипулятором «мышь» при автоматическом анализе периода реализующихся колебаний и отображении результатов этого анализа в реальном времени в виде цветной точки в соответствующем управляющим параметрам месте экрана дисплея. Наследование начальных условий при вариации параметров и высокая скорость анализа состояния системы позволяет так же эффективно, как и в радиотехническом эксперименте, исследовать неоднозначные мультистабильные режимы, мгновенно и легко находя границы областей, двигаясь по карте в любом направлении. Более того, для анализа всей доступной для анализа информации в описываемой программной среде реализованы режимы построения временных реализаций, диаграмм Ламерея и проекций фазового портрета в любой выбранной точке карты, а также построения однопараметрических бифуркационных диаграмм вдоль любых заданных «мышью» направлений.

Для полученного отображения по результатам численного эксперимента была построена карта режимов в координатах (A, F) ; она представлена на рис.4 и

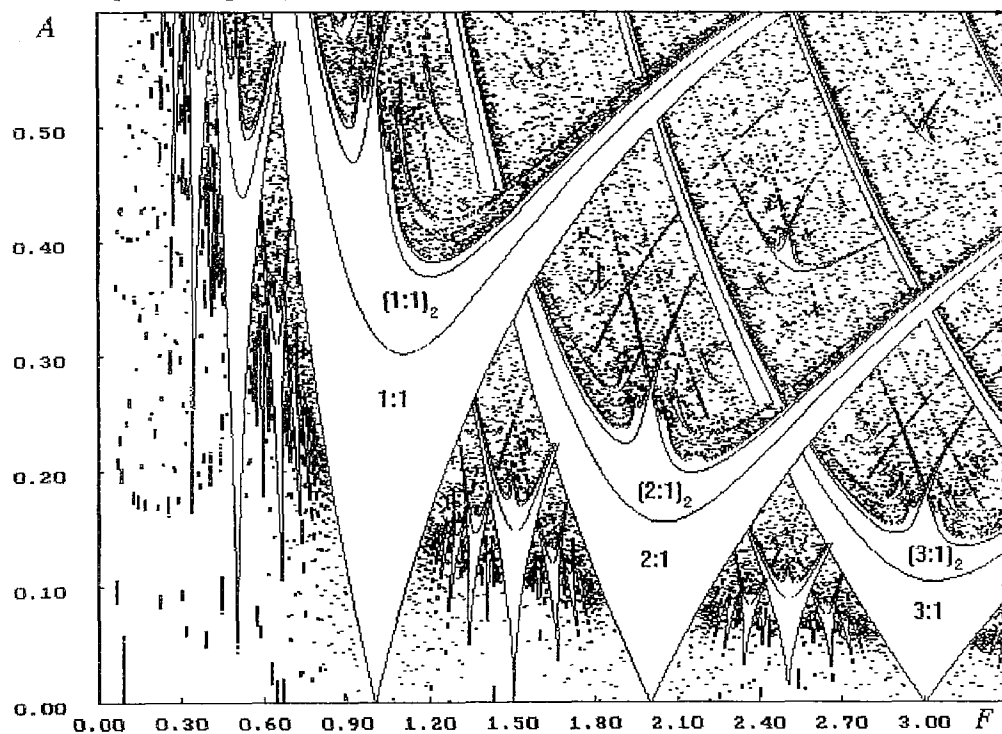


Рис. 4. Карта динамических режимов, полученная в результате компьютерного исследования отображения (2)

представляет собой несколько деформированный вариант карты режимов, известной для отображения окружности на себя, записанного в классической форме. Нетрудно видеть, что карты режимов, полученные методами натурального и численного эксперимента, в общих чертах совпадают. Численная карта режимов содержит ряд дополнительных деталей (субгармонические языки синхронизации, дерево Фэри, окна периодичности в областях хаоса), которые отсутствуют на экспериментальных картах режимов в силу причин, сформулированных выше, хотя соответствующие режимы в натурном эксперименте наблюдались. Принципиальных различий в структуре экспериментальной и численной карт режимов не обнаружено.

Исследование неавтономных релаксационных колебаний в самом общем случае, когда форма напряжения на конденсаторе в промежутках между переключениями имеет экспоненциальный характер (см. рис. 2, а), существенно осложняется еще и тем, что в этом случае система обладает большим числом параметров. Кроме амплитуды и частоты внешнего воздействия, есть еще несколько параметров схемы, от которых зависит форма релаксационных колебаний. Общее количество независимых параметров, включая параметры сигнала внешнего воздействия, равно пяти.

Однако существует и более простой частный случай с меньшим числом параметров, который тем не менее позволяет выйти за рамки динамики отображения окружности на себя. Если напряжение на конденсаторе возрастает и убывает линейно (см. рис. 2, б), то, как нетрудно убедиться, кроме амплитуды и частоты внешнего воздействия, есть всего один дополнительный параметр - отношение времени заряда конденсатора к времени разряда в автономном режиме $p = \tau_c / \tau_d$. Наличие одного, а не трех дополнительных параметров существенно упрощает задачу исследования динамики системы, несмотря на то, что в этом случае система также описывается неявным отображением

$$\theta_{n+1} = (\theta_n + 2\pi F[(1 + A \sin 2\pi \theta_n) + p(1 + A \sin 2\pi \theta_{n+1})]) \pmod{1}. \quad (3)$$

Для отображения (3) были построены и исследованы карты режимов, соответствующие разным значениям параметра p . Кроме изменений глобальной структуры карты режимов, которые наблюдались и при исследовании натурной модели, отмечены также некоторые принципиальные изменения в тонкой структуре карты. Речь идет об изменениях сценария перехода к хаосу, наблюдавшихся в некоторых областях плоскости параметров.

На рис. 5, а изображена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая сценарий хаотизации в классическом отображении окружности на себя. Диаграмма построена при движении вдоль отрезка прямой на плоскости параметров. После бесконечной цепочки бифуркаций удвоения периода наблюдается переход к хаосу (точка А); затем в точке В начинается переход к другому хаотическому аттрактору через перемежаемость. На диаграмме Ламерея

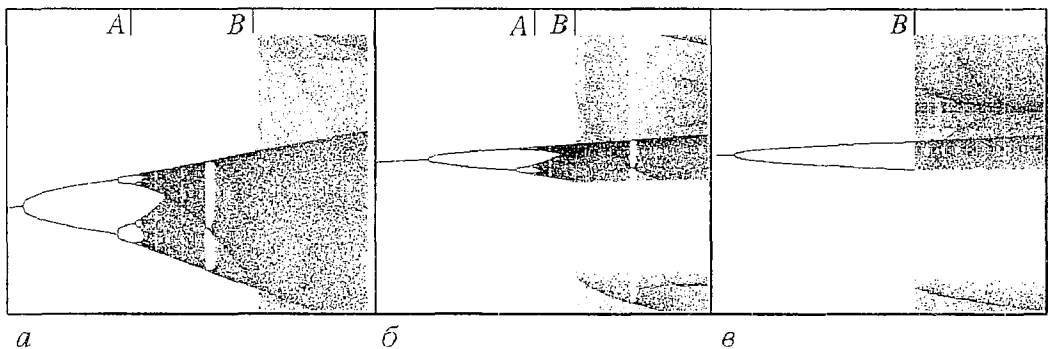


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие различие механизмов хаотизации в различных областях пространства параметров

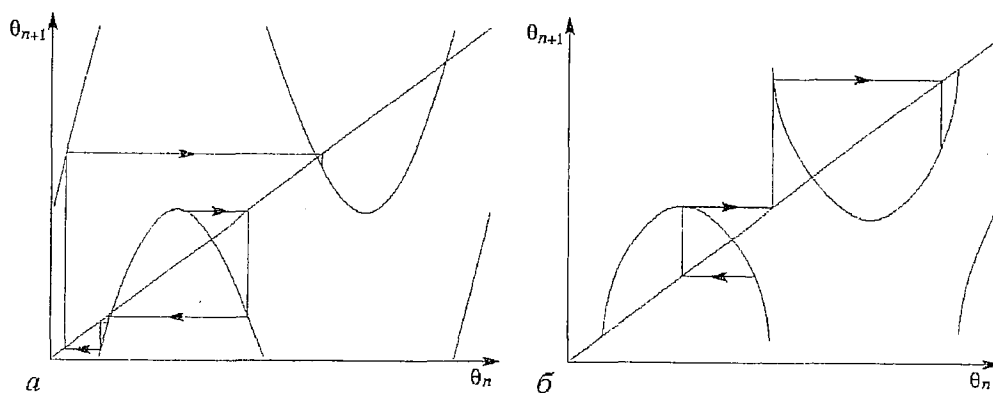


Рис. 6. Различные варианты выхода точки с параболического участка диаграммы Ламерея для отображения (1)

(рис. 6, а) становится возможным выход траектории за пределы параболического участка и переход от «фейгенбаумовского» хаоса к хаотическому аттрактору другого рода. Для случая $p=0$, когда динамика неавтономного релаксационного генератора описывается классическим отображением окружности на себя, взаимное положение точек A и B остается неизменным; бифуркация перехода к хаосу предшествует бифуркации перехода к другому хаотическому аттрактору через перемежаемость. Если же напряжение на конденсаторе возрастает в течение конечного промежутка времени, малого по сравнению с периодом колебаний в автономном режиме (что соответствует малым положительным значениям параметра p), точка B сдвигается влево, приближаясь к точке A (рис. 5, б). Если проследить за эволюцией диаграммы Ламерея, то можно заметить, что при переходе через точку B также становится возможным выход траектории за пределы параболического участка, но несколько другим способом (рис. 6, б). При дальнейшем увеличении p взаимное положение точек A и B может измениться (рис. 5, в) и после конечного числа бифуркаций удвоения периода происходит переход к хаотическому аттрактору через перемежаемость.

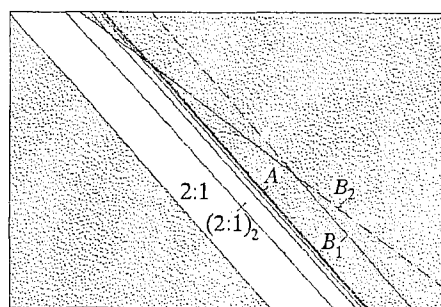


Рис. 7. Фрагмент плоскости параметров для отображения (1)

Следует отметить, что в разных областях карты режимов, построенной для определенного значения параметра p , могут реализовываться разные сценарии хаотизации. На одной и той же карте режимов могут сосуществовать классический сценарий Фейгенбаума и переход к хаосу через перемежаемость после первого удвоения периода. Механизм плавного перехода от одного сценария к другому иллюстрируется рис.7, который представляет собой увеличенный фрагмент численной карты режимов, полученной для $p=0.2$. Серым цветом на рис.7 обозначена область хаотического режима. Линия A , также как и на рис. 5, соответствует бифуркации перехода к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Линии B_1 и B_2 также соответствуют точке B на рис. 5, но различаются механизмами перехода к другому хаотическому аттрактору (способом выхода точки с параболического участка диаграммы Ламерея, как показано на рис. 6, а и б,б, соответственно).

Выводы

Неавтономный релаксационный генератор в том виде, в котором он реализован, является простой системой, допускающей простое и адекватное

численное моделирование; вместе с тем динамика неавтономного релаксационного генератора в пространстве управляющих параметров достаточно сложна. С другой стороны, важный результат заключается также и в том, что найдена простая радиотехническая реализация классической математической модели - отображения окружности на себя.

Предложенная радиотехническая реализация простейшего неавтономного релаксационного генератора позволяет легко исследовать закономерности перехода к хаотическим колебаниям через разрушение квазипериодических режимов. Возможность адекватного численного и натурального исследования сложных колебательных процессов и совпадение результатов этих исследований, не только качественное, но и в некотором смысле количественное, говорит о том, что радиотехническая модель не содержит неконтролируемых процессов или неучтенных нелинейных и инерционных явлений. Наличие дополняющих друг друга математической и экспериментальной моделей позволяет весьма эффективно выявлять закономерности поведения системы в пространстве ее управляющих параметров и исследовать тонкие закономерности в сложных многолистных картах режимов, характерных для сценария разрушения квазипериодических торов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-02-06262).

Библиографический список

1. Parlitz V., Lauterborn W. Period-doubling cascades and devil's staircases of the driven Van der Pol oscillator // *Phys. rev. A.* 1987. Vol. 36, № 3. P. 1428.
2. Kennedy M., Chua L.O. Van der Pol and chaos // *IEEE Trans. on Circ. and Syst.* 1986. Vol. CAS-33, № 10. P. 974.
3. Tanaka S., Matsumoto T., Chua L.O. Bifurcation scenario in a driven R-L diode circuit // *Physica D.* 1983. Vol. 8, № 3. P. 302.
4. Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R. Chaos via torus breakdown // *IEEE Trans. on Circ. and Syst.* 1987. Vol. CAS-34, № 3. P. 240.
5. Кипчатов А.А. Особенности сложной динамики неавтономного нелинейного контура // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1990. Т.33, № 2. С. 182.
6. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А. Хаос и периодичность в генераторе на туннельном диоде // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1990. Т.33, № 4. С. 431.
7. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Т.1, № 1-2. С. 93.
8. Carcasses J.P., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C. «Crossroad area - spring area» transition: (1) Parameter plane representation // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* Vol. 1, № 1. P. 183.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика двумерных отображений. Часть 2: Двухпараметрический переход к хаосу // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Т.1, № 3-4. С.17.
10. Bezruchko V.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Multiparameter model of a dissipative nonlinear oscillator in the form of one-dimensional map // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1995. Vol. 5, № 11. P. 2095.
11. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248с.
12. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 359 с.

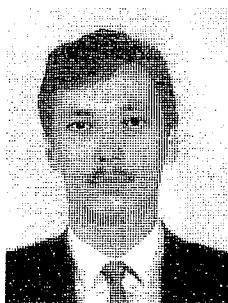
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 29.01.96
после переработки 21.10.96

INVESTIGATION OF NON-AUTONOMOUS RELAXATION OSCILLATOR BEHAVIOUR IN THE DRIVE PARAMETERS SPACE

A.A. Kipchatov, S.V. Podin

Results of the experimental investigations of piece-wise model of the relaxation oscillator, driven by harmonic signal, are presented in this article. A numerical model in the form of one-dimensional map was also constructed. In some special cases, this model can be reduced to the classical circle map. A parameter plane «drive amplitude - drive frequency» was plotted for both radiotechnical system and computative model. It is shown that the multiparameter behaviour of the non-autonomous relaxation oscillator is well represented by developed numerical model.



Кипчатов Алексей Александрович - родился в 1958 году, окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики и нелинейной динамики (1996). Заведующий научным сектором Колледжа прикладных наук Саратовского госуниверситета, доцент кафедры электроники и волновых процессов. Научные интересы - анализ сложного поведения нелинейных систем в пространстве параметров, оценка количественных характеристик сложности по временным реализациям различных процессов, трансформация характеристик хаотических колебаний в инерционных цепях и средах. Автор ряда статей по этим направлениям.



Подин Станислав Васильевич - родился в 1972 году, окончил Саратовский государственный университет (1994). Ассистент кафедры электроники и волновых процессов, преподаватель информатики на первой ступени Колледжа прикладных наук. Научные интересы - численное моделирование нелинейных систем, анализ многопараметрической динамики систем. Автор нескольких публикаций.



СИНХРОНИЗАЦИЯ АНСАМБЛЕЙ СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.С. Дмитриев, С.О. Старков, М.Е. Широков

С единых позиций рассматриваются условия синхронизации в различных ансамблях взаимодействующих отображений с хаосом, а также при воздействии на эти ансамбли внешнего сигнала. Приводятся результаты численного моделирования процессов установления и разрушения синхронных режимов.

Введение

Последние годы понятие динамического хаоса - сложного нерегулярного поведения детерминированных динамических систем - из области теоретических исследований активно перемещается в область решения прикладных проблем. Большие надежды связываются с потенциальными возможностями применения идей хаотической динамики в развитии новых информационных технологий. Ожидается, что использование нетрадиционных алгоритмов кодирования, сжатия, распознавания и передачи информации с использованием динамического хаоса может привести к значительному повышению качества систем передачи и обработки информации. Проводимые в этом направлении исследования позволяют также по-новому взглянуть на принципы организации информационных процессов в биологических системах [1-4].

Большой интерес с точки зрения информационных приложений представляет задача исследования поведения различных ансамблей взаимодействующих хаотических автоколебательных систем (рис. 1).

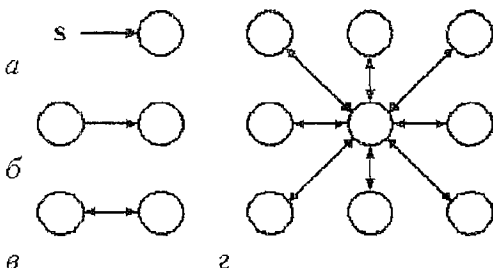


Рис. 1. Виды взаимодействия динамических систем: *а* - воздействие внешнего сигнала на динамическую систему; *б* - однонаправленное; *в* - взаимное взаимодействие двух динамических систем; *г* - взаимная связь одной системы с любым числом других систем

Работы в области изучения взаимного влияния динамических хаотических систем ведутся с начала 80-х годов [5,6]. В [5] рассмотрены ансамбли из симметрично связанных одинаковых динамических систем с непрерывным временем, введено понятие хаотической синхронизации и получено аналитическое условие ее реализации в таких ансамблях. В [6] экспериментально обнаружено явление взаимной хаотической синхронизации двух динамических систем с непрерывным временем как при одинаковых, так и при слегка отличающихся друг от друга

параметрах этих систем, дано определение хаотической синхронизации для этого случая. Вопросам экспериментального и аналитического изучения хаотической синхронизации посвящены также работы [7-12].

С середины 80-х годов появилось большое число публикаций, в которых исследовалась динамика различных цепочек и решеток одномерных отображений [13-19]. Такие ансамбли отображений рассматривались как сложные динамические системы, демонстрирующие пространственно-временной хаос. Было показано, что в подобного рода ансамблях могут существовать различные пространственно упорядоченные режимы. Например, в [16-18] изучена динамика однонаправленной бесконечной цепочки связанных одномерных отображений, как простой модели развития турбулентности, и исследованы условия устойчивости пространственно однородного решения (режима синхронизации).

Следует отметить, что во всех указанных работах рассматривались ансамбли отображений с пространственно однородной структурой связей. Это вполне оправдано целями проводимых исследований (моделирование физических процессов), однако в задачах обработки и передачи информации возникает необходимость исследования взаимодействия хаотических систем с произвольными, вообще говоря, несимметричными связями. Ясно, что в общей постановке такая задача слишком сложна для получения сколько-нибудь осмысленных результатов (кроме прямого компьютерного моделирования).

В статье показывается, что если ограничиться рассмотрением синхронных хаотических режимов в ансамблях определенным образом связанных отображений, то задача существенно упрощается и поведение системы определяется всего двумя «параметрами порядка», один из которых - максимальный ляпуновский показатель синхронизируемой траектории в отдельном отображении, а второй определяется через матрицу связи этих отображений. Таким образом, с единых позиций могут быть рассмотрены условия синхронизации в самых различных системах взаимодействующих отображений с хаосом (см. рис. 1), а также синхронизация таких систем под воздействием общего внешнего сигнала (например, в виде пейсмейкера в биологической интерпретации или внешнего хаотического поля - в физической трактовке).

Структура статьи следующая. В разделе 1 рассматривается задача синхронизации отображения при однонаправленном воздействии. В разделе 2 аналитически исследуются условия хаотической синхронизации в ансамблях, состоящих из произвольного числа связанных отображений. Раздел 3 посвящен численному моделированию динамики ансамблей связанных отображений, в которых в качестве парциальных использованы одномерное логистическое отображение и двумерное отображение Хенона. Наряду с другими, здесь исследуются два вопроса, имеющих принципиальное значение для систем обработки и передачи информации: *условия вхождения в режим синхронизации и синхронизация внешними сигналами неустойчивых циклов, входящих в структуру странного аттрактора автономного режима*. В Приложении описан программный комплекс, предназначенный для моделирования динамики ансамблей связанных отображений.

1. Синхронизация отображений при однонаправленном воздействии

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, описываемую одномерным отображением $F: R^1 \rightarrow R^1$,

$$x(k+1) = F(x(k)). \quad (1)$$

Для удобства дальнейшего изложения представим ее в виде блок-схемы с цепью обратной связи, единичным запаздыванием и нелинейным преобразованием (рис. 2).

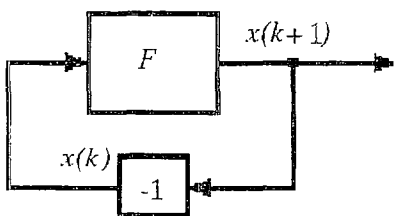


Рис. 2. Блок-схема автоколебательной системы, описываемой одномерным отображением

Простейшим случаем взаимодействия двух одинаковых систем (1) является однонаправленное воздействие одной системы на другую. Рассмотрим воздействие, при котором на вход второй системы подается взвешенная сумма $\alpha x(k) + \beta y(k)$ сигнала $x(k)$ первой системы и собственного выходного сигнала $y(k)$, где α и β - соответствующие весовые (необязательно положительные) коэффициенты (рис. 3).

Поведение взаимодействующих отображений в этом случае описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k)), \\ y(k+1) = F(\alpha x(k) + \beta y(k)). \end{cases} \quad (2)$$

Если выполнено условие

$$\alpha + \beta = 1, \quad (3)$$

то систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k)), \\ y(k+1) = F(y(k) + \alpha(x(k) - y(k))), \end{cases} \quad (2')$$

из которого видно, что в (2) существует траектория

$$x(k) \equiv y(k), \quad (4)$$

соответствующая траектории $x(k)$ автономной системы (1). В случае устойчивости условия (4) по отношению к малым возмущениям $x(k)$ и $y(k)$ будем говорить, что вторая система синхронизована с первой.

Условие устойчивости траектории (4) по отношению к малым возмущениям зависит только от значения параметра α и величины ляпуновского показателя λ траектории $x(k)$ автономной системы (1) [20]

$$|1 - \alpha| < \exp|\lambda|. \quad (5)$$

Таким образом, если величина параметра связи α удовлетворяет неравенству (5), то в системе (2) существует устойчивый режим (4), то есть режим синхронизации.

Отметим следующую особенность неравенства (5). Если траектория $x(k)$ сама является устойчивой, то есть $\lambda < 0$, то значение $\alpha = 0$ удовлетворяет неравенству (5). Если же траектория $x(k)$ является неустойчивой ($\lambda > 0$), то значение $\alpha = 0$ уже

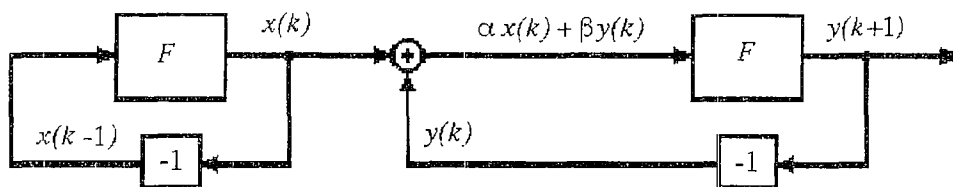


Рис. 3. Блок-схема, иллюстрирующая однонаправленное воздействие одного отображения на другое, α и β - параметры связи («весовые» коэффициенты)

не удовлетворяет неравенству (5). Этот результат имеет следующую физическую интерпретацию.

Синхронизацию в результате воздействия первой системы на вторую при $\alpha \in [0,1]$ можно трактовать как «навязывание» этой системе одной из ее собственных траекторий. Ясно, что если эта траектория является устойчивой, то она реализуема во второй системе и при отсутствии «навязывания». Таким образом, режим синхронизации существует при любом, сколь угодно малом положительном значении α . Это соответствует хорошо известному свойству синхронизации динамических систем с регулярным поведением при сколь угодно малых связях между ними [21]. Однако, если рассматриваемая траектория является неустойчивой, то для ее реализуемости необходим некоторый уровень «навязывания» для компенсации эффекта «разбегания» сколь угодно близких решений в окрестности этой траектории, то есть возникает порог синхронизации, значение которого определяется ляпуновским показателем траектории системы. Этот порог существует и при синхронизации хаотических систем с непрерывным временем [5,6].

Рассмотренную выше возможность синхронизации динамики одномерного отображения внешним сигналом можно обобщить на случай n -мерного отображения $F(\mathbf{x})=(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ [20]. При этом под λ в (5) следует понимать максимальный ляпуновский показатель траектории $\mathbf{x}(k)$, определяемый формулой [22]:

$$\lambda = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (\ln \|\prod_{k=0}^{N-1} F'(\mathbf{x}(k))\|_n^{1/N}), \quad (6)$$

где $F' = \|\partial f_i / \partial x_j\|$ - матрица Якоби отображения F , $\|\dots\|_n$ - любая норма n -мерной матрицы.

2. Синхронизация ансамблей связанных отображений

Пусть имеется ансамбль из m связанных отображений типа (1), описываемый уравнениями

$$x_i(k+1) = F(\alpha_{ii}x_i(k) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}x_j(k)) = F(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij}x_j), \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где $\alpha_{ij}(i \neq j)$ - коэффициент воздействия i -го отображения на j -ое, α_{ii} - коэффициент обратной связи в i -ой системе. Матрицу $A = \|\alpha_{ij}\|$ будем называть матрицей связи ансамбля (7). Режимом синхронизации в системе связанных отображений (7) будем называть траекторию ансамбля, удовлетворяющую условию

$$x_i(k) \equiv x_1(k), \quad i = \overline{2, m}, \quad (8)$$

и устойчивую по отношению к малым возмущениям. Если матрица связи удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} = C, \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

то систему (7) можно переписать в виде

$$x_i(k+1) = F(Cx_1(k) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}(x_j(k) - x_1(k))), \quad i = \overline{1, m}, \quad (7')$$

из которого видно, что в ней независимо от вида отображения F существует траектория (8), причем последовательность $x_1(k)$ есть траектория отображения: $x(k+1) = F(Cx(k))$ при $x(0) = x_1(0)$. Заметим, что если, например, F - логистическое отображение, то изменение величины C эквивалентно изменению параметра этого

отображение, то изменение величины C эквивалентно изменению параметра этого отображения.

Рассмотрим случай $C=1$, при котором $x_1(k)$ в (8) есть траектория «парциальной» системы (1): $x_1(k)=F^k(x_1(0))$, $k=1,2,\dots$. Внесем в начальный момент времени $k=0$ произвольное возмущение в траекторию (8): $\bar{x}_i(0)=x_i(0)+\zeta_i$, $i=\overline{1,m}$. Если при некотором $\delta>0$ существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |x_i(N) - \bar{x}_i(N)| = 0 \quad \forall \zeta_i: |\zeta_i| < \delta, \quad i = \overline{2,m}, \quad (10)$$

то режим (8) в системе (7) устойчив по отношению к малым возмущениям.

Исследуем условия устойчивости режима (8), предполагая существование ляпуновского показателя λ траектории $x(k)$ в отображении (1). Рассмотрим ансамбль (7) как отображение пространства R^m в себя. В каждой точке траектории (8) матрица Якоби этого отображения равна

$$J(x(k)) = F'(x(k))A. \quad (11)$$

Для любой квадратной ($n \times n$) матрицы Q справедливо соотношение [23]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|Q^N\|_n^{1/N} = \rho(Q), \quad (12)$$

где $\rho(Q)$ - спектральный радиус матрицы Q (максимальный модуль ее собственных значений).

Равенство (11) позволяет определить максимальный ляпуновский показатель λ^* траектории (8) в системе (7), используя формулу (6),

$$\lambda^* = \lim_{N \rightarrow \infty} (\ln \|\prod_{k=0}^{N-1} J(x(k))\|_m^{1/N}) = \ln[\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \prod_{k=0}^{N-1} |F'(x(k))| \|A\|_m^{1/N} \rangle] = \ln(\rho(A)) + \lambda, \quad (13)$$

где $\rho(A)$ - спектральный радиус матрицы связи A . Поскольку матрица связи A удовлетворяет условию (9) при $C=1$, она всегда имеет собственное значение, равное единице. Поэтому $\rho(A) \geq 1$ и, следовательно,

$$\lambda^* \geq \lambda. \quad (14)$$

Неравенство (14) показывает, что «степень устойчивости» траектории (8) в системе (7) при любой матрице связи A не больше, чем у парциальной траектории в системе (1).

Рассмотрим структуру m -мерного оператора A^{\sim} , определяемого матрицей связи A . Как уже указывалось, оператор A^{\sim} имеет собственное значение $\mu_1=1$, которому соответствует собственный вектор $v_1^T = (1 \dots 1)$. Рассмотрим «новый» базис, в котором первый базисный вектор равен v_1 , а остальные остаются теми же, как и в «исходном» базисе. Матрица перехода S к этому базису и обратная ей имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

В «новом» базисе оператор A^{\sim} определяется матрицей

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \beta_{11} & \dots & \beta_{1(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \beta_{(m-1)1} & \dots & \beta_{(m-1)(m-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a} \\ \Theta & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{B} = \|\beta_{ij}\|, \beta_{ij} = \alpha_{(i+1)(j+1)} - \alpha_{1(j+1)}, i, j = \overline{1, m-1}, \mathbf{a} = \|\alpha_{1j}\|, j = \overline{2, m}.$$

Поскольку в силу (11) оператор $J(x(k))$, определяемый матрицей Якоби $J(x(k))$ отображения (7) в исходном базисе, отличается от оператора A^{-1} скалярным множителем $F'(x(k))$, то из (16) следует, что в новом базисе этому оператору соответствует матрица

$$G'(x(k)) = \begin{pmatrix} F'(x(k)) & F'(x(k))\mathbf{a} \\ \Theta & F'(x(k))\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Одномерное подпространство V_1 , порожденное собственным вектором v_1 , соответствует траектории (8) в том смысле, что любая такая траектория лежит в этом подпространстве, и, наоборот, любая последовательность точек из V_1 является траекторией типа (8). Следовательно, нарушение пространственной однородности характеризуется проекцией \mathbf{r}_2 произвольного возмущения \mathbf{r} на дополнительное к V_1 подпространство V_2 (рис. 4). Из представления (17) следует, что динамика проекций любого вектора подпространства V_2 под действием оператора $J(x(k))$ определяется оператором $H(x(k))$ с матрицей $\mathbf{H}(x(k)) = F'(x(k))\mathbf{B}$ размера $(m-1) \times (m-1)$. Таким образом, если последовательность соответствующих операторов $H(x(k))$ является асимптотически сжимающей, то есть при достаточно большом N

$$\|\prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{H}(x(k))\|_{m-1}^{1/N} \leq \delta < 1, \quad (18)$$

то любой вектор из фазового пространства системы (7) под действием последовательности операторов $H(x(k))$ будет асимптотически «ложиться» на подпространство V_1 . Это равносильно равенству (10) для линеаризованной системы (7).

Учитывая определение (6) максимального ляпуновского показателя λ и равенство (12), получаем, что существует

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \|\prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{H}(x(k))\|_{m-1}^{1/N} \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \|\prod_{k=0}^{N-1} F'(x(k))\mathbf{B}\|_{m-1}^{1/N} \rangle = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \|\prod_{k=0}^{N-1} F'(x(k))\|_{m-1}^{1/N} \|\mathbf{B}\|_{m-1}^{1/N} \rangle = \exp(\lambda)\rho(\mathbf{B}), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\rho(\mathbf{B})$ - спектральный радиус матрицы \mathbf{B} .

Таким образом, из (18) и (19) заключаем, что необходимое и достаточное условие устойчивости по линейному приближению режима синхронизации (8) в системе (7) имеет вид

$$\rho(\mathbf{B}) < \exp(-\lambda). \quad (20)$$

Матрицу \mathbf{B} будем называть матрицей возмущений режима синхронизации. Из представления (16) непосредственно следует, что набор собственных значений (спектр) матрицы \mathbf{B} совпадает со спектром матрицы связи A , из которого удалено одно собственное значение, равное 1 (кратные собственные значения считаются различными). Поэтому неравенство (20) можно переписать в виде

$$\rho_{-1}(A) < \exp(-\lambda). \quad (21)$$

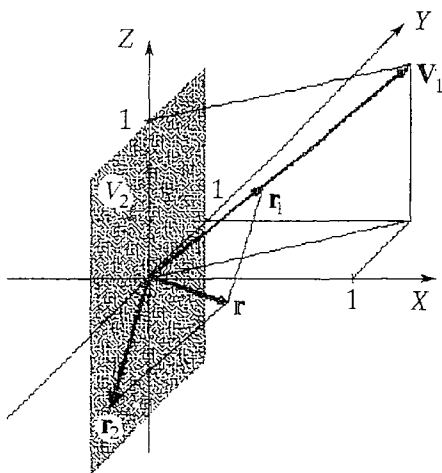


Рис. 4. К определению устойчивости пространственно-однородной траектории при $m=3$

новскому показателю λ траектории $x(k)$ в отображении F . Этот ляпуновский показатель соответствует возмущениям, которые не выводят траекторию системы (7) из режима синхронизации.

Рассмотренный способ связи одномерных отображений можно обобщить на отображения F действительного или комплексного n -мерного пространства в себя, причем в случае комплексных отображений матрица связи также может быть комплексной. Используя описанный выше подход* можно показать, что условия (20), (21) устойчивости режима синхронизации (по линейному приближению) имеют место и в этом случае, если под λ понимать максимальный ляпуновский показатель траектории $x(k)$, определяемый формулой (6).

3. Условия устойчивости и реализуемость режима синхронизации в некоторых структурах связанных отображений

Рассмотрим на основании общих результатов предыдущего раздела условия возникновения режима синхронизации в нескольких типичных структурах. Для исследования реализуемости режима синхронизации в этих структурах были проведены численные эксперименты. В качестве отображения F использовались одно- и двумерные отображения с хаотической динамикой.

3.1. Синхронизация двух отображений при несимметричной взаимной связи между ними. Простейшей структурой является система из двух связанных отображений

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k) + \alpha(y(k) - x(k))), \\ y(k+1) = F(y(k) + \beta(x(k) - y(k))). \end{cases} \quad (22)$$

В отличие от однонаправленного воздействия одного отображения на другое, здесь имеет место взаимное влияние отображений, которое носит асимметричный характер: значения коэффициентов α и β в общем случае не одинаковы.

Матрица связи такой системы имеет вида $A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, а матрица возмущений

где $\rho_{-1}(A)$ - радиус спектра матрицы связи A , из которого удалено одно (с учетом кратности) собственное значение, равное 1. Неравенство (21) показывает, что условия устойчивости режима синхронизации однозначно определяются максимальным ляпуновским показателем λ «парциальной» динамики связанных отображений и спектральными характеристиками матрицы связи. В интересующем нас случае хаотической парциальной динамики $\lambda > 0$. Из (21) следует, что синхронизация в этом случае возможна только при $\rho_{-1}(A) < 1$ и, следовательно, $\rho(A) = 1$. Учитывая равенство (13) заключаем, что максимальный ляпуновский показатель λ^* траектории (8) в системе (7) при этом всегда равен максимальному ляпуновскому показателю λ траектории $x(k)$ в отображении F .

* Данный подход можно использовать для анализа устойчивости режима синхронизации ансамблей из любого числа динамически связанных неавтономных отображений любой размерности, что важно для приложений в задачах передачи информации.

есть просто число: $V = \{1 - (\alpha + \beta)\}$. Следовательно, $\rho(V) = |1 - (\alpha + \beta)|$, и, используя (20), получаем необходимые и достаточные условия устойчивости по линейному приближению синфазного режима в системе (22) в виде неравенства

$$|1 - (\alpha + \beta)| < \exp(-\lambda). \quad (23)$$

Разрешая это неравенство относительно величины $(\alpha + \beta)$, получаем необходимое и достаточное условие синхронизации двух связанных отображений (22):

$$1 - \exp(-\lambda) = \gamma^- < (\alpha + \beta) < \gamma^+ = 1 + \exp(-\lambda). \quad (24)$$

Условие (22) определяет в пространстве параметров связи (α, β) существующую при любом конечном λ область устойчивости режима синхронизации двух взаимосвязанных отображений. Она изображена на рис. 5 в виде заштрихованной полосы. Если $\lambda < 0$, то точка $(0, 0)$ принадлежит области устойчивости, а при $\lambda > 0$ точка $(0, 0)$ остается вне этой области. С физической точки зрения это соответствует уже упомянутому в разделе 1 свойству о нулевом пороге связи для синхронизации динамических систем с регулярным поведением и ненулевым пороге связи при синхронизации динамических систем с хаосом.

Для исследования реализуемости режима синхронизации двух связанных отображений были проведены численные эксперименты, в которых в качестве отображения F использовалось отображение Хенона

$$x(k+1) = 1 - ax(k)^2 + y(k), \quad y(k+1) = bx(k), \quad (25)$$

при значениях параметров $a=1.4$, $b=0.3$. При данных значениях параметров в отображении Хенона реализуется хаотический режим с максимальным ляпуновским показателем $\lambda \approx 0.42$ (см., например, [24]). В соответствии с (24) нижний γ^- и верхний γ^+ пороги синхронизации приблизительно равны 0.34 и 1.66, соответственно. В численных экспериментах, проведенных при значениях параметров связи (α, β) внутри заштрихованной полосы на рис. 5 в системе (22), при старте со «случайных» начальных условий достаточно быстро устанавливается режим синхронизации (8). При выходе точки (α, β) из заштрихованной области происходит срыв режима синхронизации, причем теоретическая граница области устойчивости совпадает с данными численных экспериментов по синхронизации с точностью до второго знака после запятой.

На рис. 6 показано поведение модуля разности переменных связанных отображений Хенона (SE-«synchronization error», k - номер итерации) при старте со случайных начальных условий и значениях параметров связи $\alpha=0.1$, $\beta=0.25$ таких, что $\gamma^- < \alpha + \beta < \gamma^+$. После установления режима синхронизации параметр β уменьшается до величины $\beta=0.2$, что выводит точку (α, β) из заштрихованной области на рис. 5 ($\beta = \gamma^- - \alpha \approx 0.24$) и, следовательно, приводит к потере устойчивости режима синхронизации.

Численно исследована скорость установления режима хаотической синхронизации в зависимости от начальных условий. На рис. 7 показано пространство начальных условий первого из связанных отображений в двух разных масштабах. Начальные

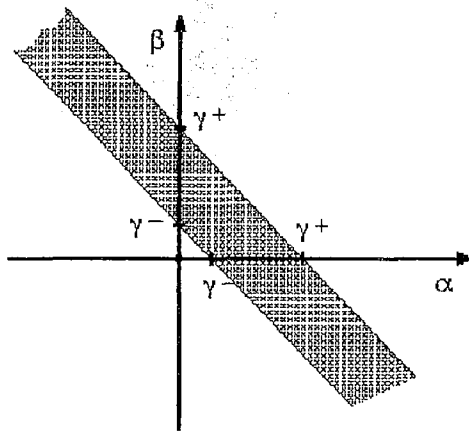


Рис. 5. Вид зоны устойчивости режима синхронизации в пространстве (α, β) параметров связи

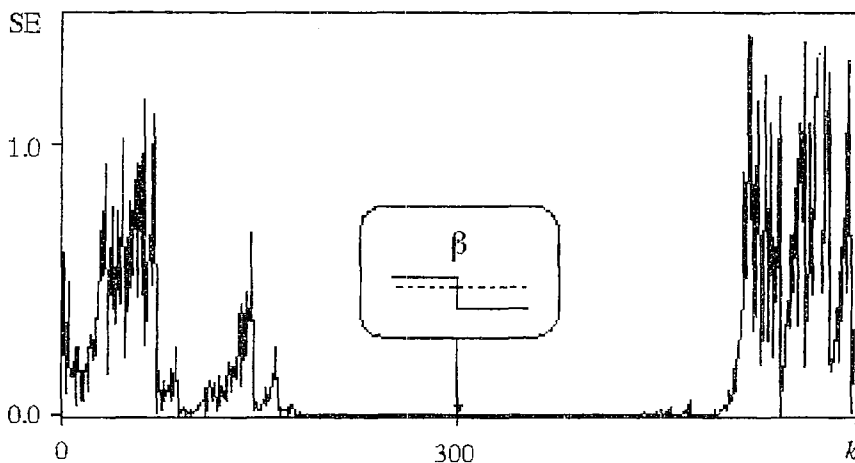


Рис. 6. Поведение величины $SE=|x_2 - x_1|$ для двух связанных отображений Хенона при старте со «случайных» начальных условий. В момент $k=300$ параметр β меняется от 0.25 до 0.20

условия во втором отображении были фиксированы ($x=0, y=0$). Если вхождение в режим синхронизации (с заданной точностью) происходило быстрее, чем за 50 итераций, то соответствующая точка отмечалась белым цветом, а если медленнее - то черным. Из рис. 7 видно, что зоны с разной скоростью сходимости имеют сложную (возможно, фрактальную) структуру.

Проведенные численные исследования свидетельствуют о том, что явление хаотической синхронизации может быть использовано для оценки максимальных ляпуновских показателей динамических систем с дискретным временем путем численного измерения границ зоны устойчивости режима синхронизации в пространстве параметров связи.

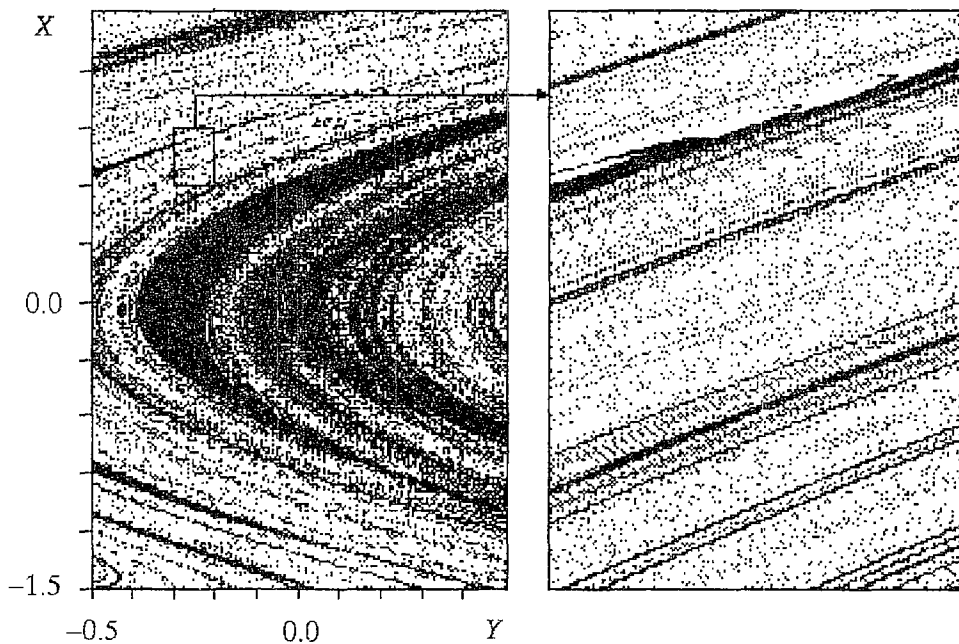


Рис. 7. Пространство начальных условий одного из связанных отображений Хенона в двух различных масштабах

3.2. Синхронизация трех отображений при «круговой» связи. Рассмотрим условия синхронизации трех отображений (рис. 8). Матрица связи системы отображений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1-\gamma & 0 & \gamma \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Непосредственным вычислением можно показать, что кроме собственного значения, равного 1, матрица (26) имеет два собственных значения вида

$$\mu_{1,2} = 1 - \varepsilon/2 \pm 1/2 (\varepsilon^2 - 4\eta)^{1/2},$$

где $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma$, $\eta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$. Если $\varepsilon^2 - 4\eta < 0$, то матрица связи имеет два комплексно-сопряженных собственных значения, модули которых равны

$$|\mu_{1,2}| = [(1 - \varepsilon/2)^2 + 1/4 (4\eta - \varepsilon^2)]^{1/2} = (1 - \varepsilon + \eta)^{1/2}. \quad (27)$$

Если $\varepsilon^2 - 4\eta \geq 0$, то собственные значения матрицы связи вещественны.

Рассмотрим в качестве примеров два случая связи.

а. В случае симметричной круговой связи ($\alpha = \beta = \gamma$), учитывая (27), получаем

$$\beta = \gamma = \alpha, \quad \varepsilon = 3\alpha, \quad \eta = 3\alpha^2,$$

$$\mu_{1,2} = 1 - 3/2\alpha \pm i(3^{1/2}/2)\alpha,$$

$$|\mu_{1,2}| = (1 - 3\alpha + 3\alpha^2)^{1/2}.$$

Условие устойчивости режима синхронизации в данном случае имеет вид

$$(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)^{1/2} < \exp(-\lambda), \quad (28)$$

где λ - максимальный ляпуновский показатель.

На рис. 9 показан график функции $f(\alpha) = (1 - 3\alpha + 3\alpha^2)^{1/2}$ и условно изображена зона устойчивости режима синхронизации, определяемая неравенством (28). Заметим, что если $\lambda > \ln 2$, то синхронизация в рассматриваемой структуре связанных отображений невозможна при любом коэффициенте связи α .

б. Интересный результат получается в случае, когда

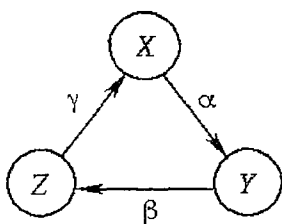


Рис. 8. Структура ансамбля из трех отображений с «круговой» связью

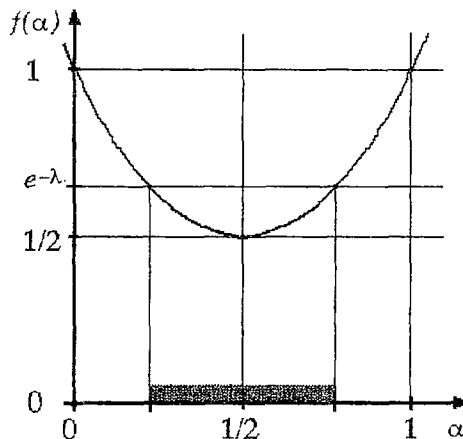


Рис. 9. К определению условий синхронизации ансамбля из трех отображений с «круговой» симметричной связью

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha, \quad \gamma = 4\alpha, \quad \varepsilon = 6\alpha, \quad \eta = 9\alpha^2, \\ \varepsilon^2 - 4\eta &= 0, \\ \mu_1 = \mu_2 &= 1 - 3\alpha.\end{aligned}$$

Действительно, условие устойчивости режима синхронизации имеет вид

$$[1 - \exp(-\lambda)]/3 = \gamma^- < \alpha < \gamma^+ = [1 + \exp(-\lambda)]/3. \quad (29)$$

Из (24) следует, что два одинаковых отображения при однонаправленной связи синхронизируются при

$$\alpha > 1 - \exp(-\lambda).$$

С другой стороны, из условия (29) следует, что если дополнительно связать системы Y и Z однонаправленной связью с коэффициентом 4α , то порог синхронизации систем X и Y падает в три раза до величины $[1 - \exp(-\lambda)]/3$.

Таким образом, если $[1 - \exp(-\lambda)]/3 < \alpha < [1 + \exp(-\lambda)]$, то разрыв связи между системами Y и Z приводит к рассинхронизации всех трех отображений.

3.3. Синхронизация ансамбля m отображений при симметричной связи.

Рассмотрим условия синхронизации m отображений в случае, когда все отображения связаны друг с другом с одним и тем же коэффициентом α (симметричная связь). Матрица связи при этом имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 - (m-1)\alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 1 - (m-1)\alpha & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \dots & 1 - (m-1)\alpha \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Можно показать, что помимо простого собственного значения, равного 1, матрица (30) имеет собственное значение $(1 - m\alpha)$ кратности $(m-1)$. Из неравенства (21) следует, что в данном случае условие существования режима синхронизации (8) имеет вид

$$[1 - \exp(-\lambda)]/m = \gamma^-_m < \alpha < \gamma^+_m = [1 + \exp(-\lambda)]/m, \quad (31)$$

где λ - максимальный ляпуновский показатель «парциальной» динамики отдельного отображения. С увеличением числа m связанных отображений нижний γ^- и верхний γ^+ пороги устойчивости режима синхронизации убывают, как $1/m$.

Численные эксперименты проводились для системы из 100 связанных логистических отображений

$$x(k) = \mu x(k)[1 - x(k)], \quad \mu = 4. \quad (32)$$

При $\mu=4$ траектория логистического отображения (32) имеет ляпуновский показатель $\lambda = \ln 2$ [24], и из (31) следует, что $\gamma^-_{100} = 0.005$ и $\gamma^+_{100} = 0.015$. В компьютерных экспериментах при значении $\alpha \in (\gamma^-_{100}, \gamma^+_{100})$ в объединенной системе при «случайных» начальных условиях в каждой из «парциальных» систем всегда устанавливался режим синхронизации. При выходе параметра связи α за пределы интервала $(\gamma^-_{100}, \gamma^+_{100})$ наблюдался срыв режима синхронизации, причем значения порогов «отслеживались» с точностью до 10^{-4} .

На рис. 10 приведена графическая иллюстрация динамики объединенной системы и показано поведение величины $SE = \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i}^m |x_i - x_j| / [m(m-1)]$ - «ошибки синхронизации» - при старте со «случайных» начальных условий и коэффициенте

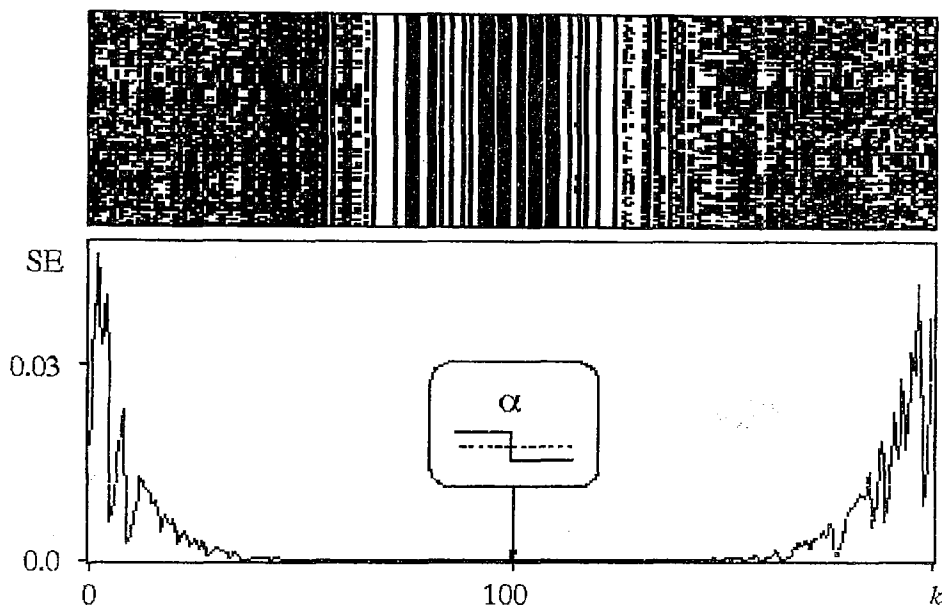


Рис. 10. Процесс синхронизации при $\alpha=0.0055$ и рассинхронизации при $\alpha=0.0045$ в системе из 100 симметрично связанных логистических отображений. На верхней части рисунка цвет каждого квадратика определяется переменной состояния каждого из связанных отображений

связи $\alpha=0.0055 > \gamma^{-100}$. После установления режима синхронизации коэффициент связи был уменьшен до значения $\alpha=0.0045 < \gamma^{-100}$, что привело к полной рассинхронизации системы.

3.4. Синхронизация ансамбля отображений при блочно-симметричной связи. Наряду с ансамблями симметрично связанных отображений интересно рассмотреть динамику систем, состоящих из двух и более подсистем, внутренние связи между элементами которых являются симметричными, но не равными связям (внешним) между элементами разных подсистем (блочно-симметричная связь). В таких системах помимо режима (полной) синхронизации возможен режим частичной синхронизации, при котором синхронизирована только динамика элементов каждой подсистемы. При частичной синхронизации из-за наличия ненулевых внешних связей динамика отдельного отображения в ансамбле уже, вообще говоря, не совпадает с парциальной динамикой этого отображения в автономном режиме и явно зависит от величины этих связей. Это обстоятельство не позволяет в общем случае аналитически определить условие возникновения режима частичной синхронизации.

В качестве примера рассмотрим динамику системы из двух подсистем, состоящих соответственно из 150 и 50 логистических отображений (32). Внутренние связи между отображениями в каждой из подсистем будем считать равными α , а связи между отображениями разных подсистем - равными β . Структура такого ансамбля условно изображена на рис.11. Если внешние связи отсутствуют ($\beta=0$), то каждая из подсистем является автономной, и условия синхронизации в этих подсистемах определяются неравенством (31) при $m=150$ и $m=50$, соответственно. Если внешние связи равны внутренним связям ($\alpha=\beta$), то объединенная система является системой с симметричными связями, и, следовательно, условия синхронизации (полной) в этой системе

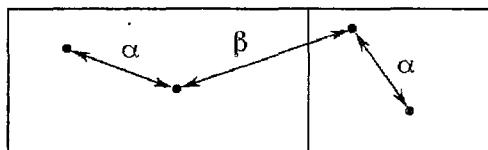


Рис. 11. Структура системы, состоящей из двух подсистем

определяются неравенством (31) при $m=200$. Таким образом, если зафиксировать внутренние связи так, чтобы (31) было выполнено при $m=200$, а внешние связи β изменять от 0 до α , то в зависимости от того, выполнено или не выполнено при этом α неравенство (31) при $m=150$ или $m=50$, динамика объединенной системы будет меняться от полной или частичной рассинхронизации до полной синхронизации. При численном моделировании было выбрано два значения внутренней связи, удовлетворяющие (31) при $m=200$.

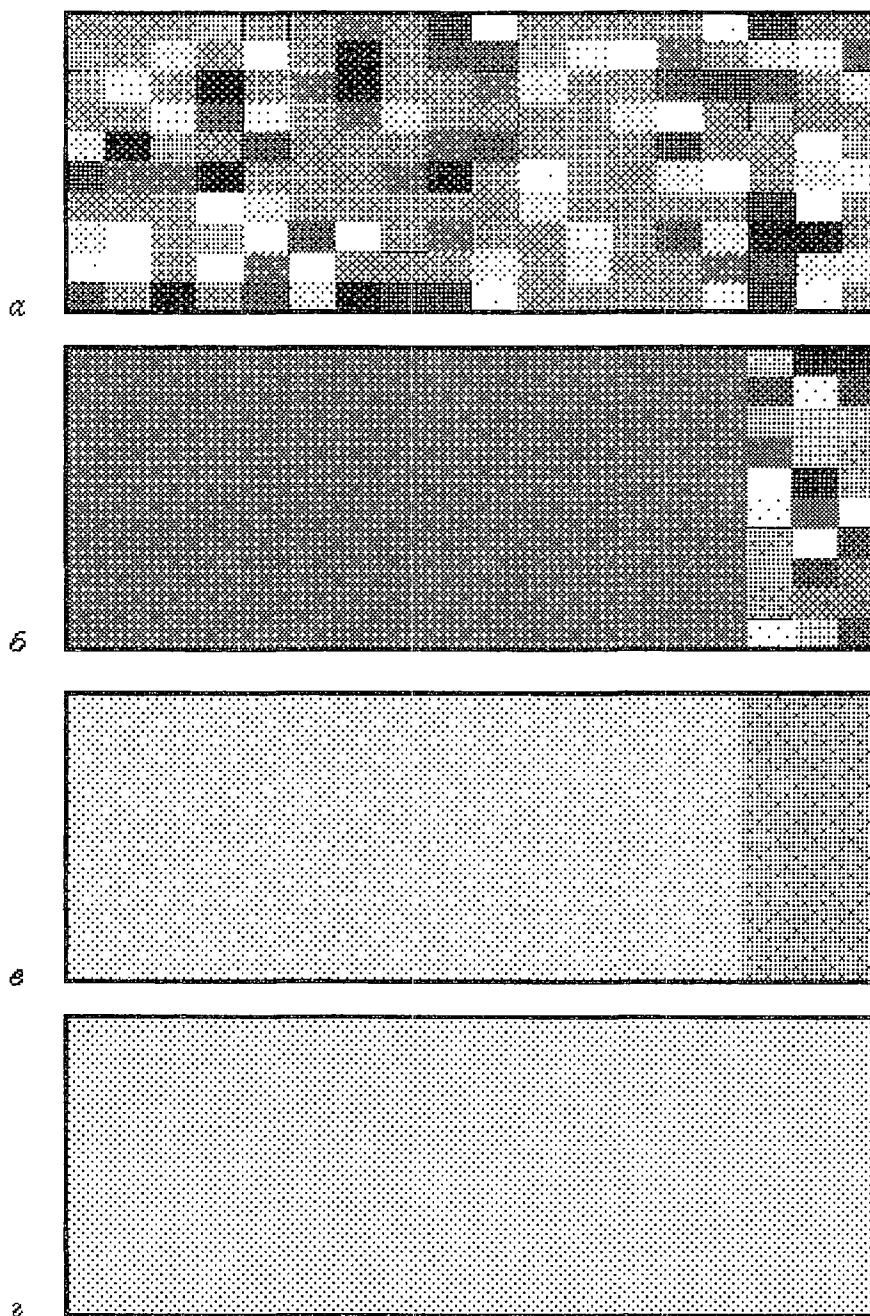


Рис. 12. Динамические режимы ансамбля с блочно-симметричной связью при $\alpha=0.003$: *a* - $\beta=0$, режим полной рассинхронизации; *б* - $\beta=0.001$, режим частичной рассинхронизации; *в* - $\beta=0.002$, режим внутривблочной синхронизации; *г* - $\beta=0.003$, режим полной синхронизации

Первое значение $\alpha_1=0.003$ меньше критического значения γ - как при $m=50$, так и при $m=150$. Поэтому при отсутствии связи между подсистемами ($\beta=0$) в объединенной системе наблюдается режим полной рассинхронизации. При увеличении параметра β от 0 до $\alpha_1=0.003$ наблюдались режимы: полной рассинхронизации (рис. 12, а), частичной рассинхронизации (рис. 12, б), внутриблочной синхронизации (рис. 12, в) и полной синхронизации (рис. 12, г).

Второе значение внутренней связи $\alpha_1=0.005$ удовлетворяет (31) при $m=150$, но не удовлетворяет этому неравенству при $m=50$. Поэтому при отсутствии внешних связей в первой подсистеме может наблюдаться режим синхронизации, а во второй - нет. При увеличении параметра β от 0 до $\alpha_1=0.005$ наблюдалась смена режима частичной рассинхронизации (рис. 13, а) на внутриблочную (рис. 13, б) и полную (рис. 13, в) синхронизацию.

Таким образом, выбор параметров внешних и внутренних связей α и β позволяет реализовать различные типы сложных коллективных колебаний в различных частях ансамбля, а также, при соответствующем изменении этих параметров, организовать локальные возмущения синфазных хаотических режимов.

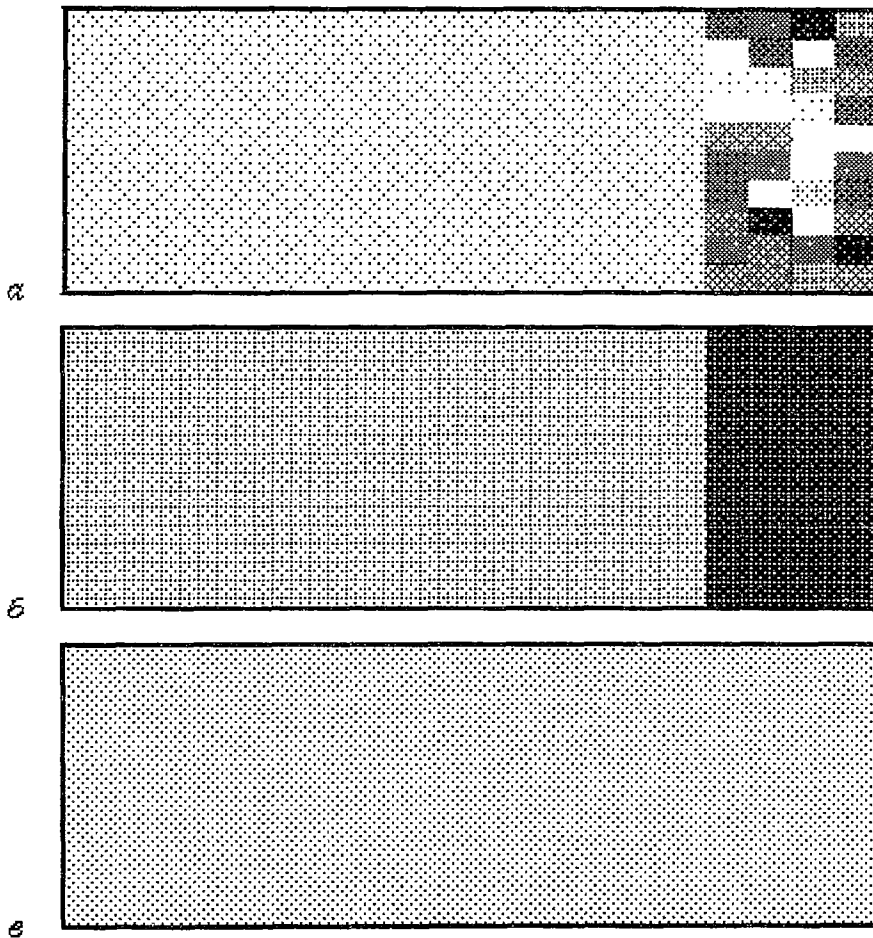


Рис. 13. Динамические режимы ансамбля с блочно-симметричной связью при $\alpha=0.005$: а - $\beta=0$, режим частичной рассинхронизации в одном из блоков, б - $\beta=0.001$, режим внутриблочной синхронизации, в - $\beta=0.005$, режим полной синхронизации

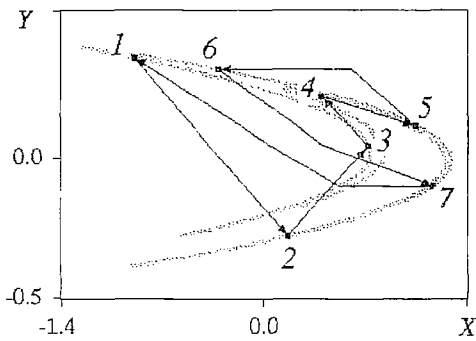


Рис. 14. Один из четырех циклов периода 7, «принадлежащих» аттрактору отображения Хенона при $\alpha=1.4$ и $\beta=0.3$

3.5. Синхронизация неустойчивых циклов хаотических отображений. Известно [25-28], что странный аттрактор диссипативной динамической системы «состоит» из счетного числа неустойчивых циклов и «переходов» между ними. Как показано в [27,28], набор этих циклов и их мультипликаторы вполне характеризуют странный аттрактор, то есть позволяют вычислять его размерности, энтропию и т.д. Существует методика определения форм циклов и их мультипликаторов по экспериментальным данным [25].

Если известна форма некоторого неустойчивого цикла отображения F , то, используя результаты раздела 1, можно

стабилизировать данный цикл односторонним воздействием на это отображение периодической последовательностью, состоящей из точек этого цикла. Из неравенства (5) непосредственно следует, что условия синхронизации данного цикла однозначно определяются максимальным по модулю мультипликатором этого цикла при помощи неравенства

$$|1 - \alpha| < |\mu|^{-1/n}, \quad n - \text{период цикла.} \quad (33)$$

Например, в наборе неустойчивых циклов аттрактора отображения Хенона (25) при $\alpha=1.4$ и $\beta=0.3$ есть четыре цикла периода 7 [29], один из которых изображен на рис. 14. Мультипликаторы этого цикла равны $\mu_1=-1.8 \cdot 10^{-1}$, $\mu_2=1.2 \cdot 10^{-5}$. Следовательно, если воздействовать на отображение Хенона периодической последовательностью, состоящей из точек данного цикла, то его синхронизация возможна, в соответствии с (33), при $\alpha \in (0.338\dots, 1.662\dots)$.

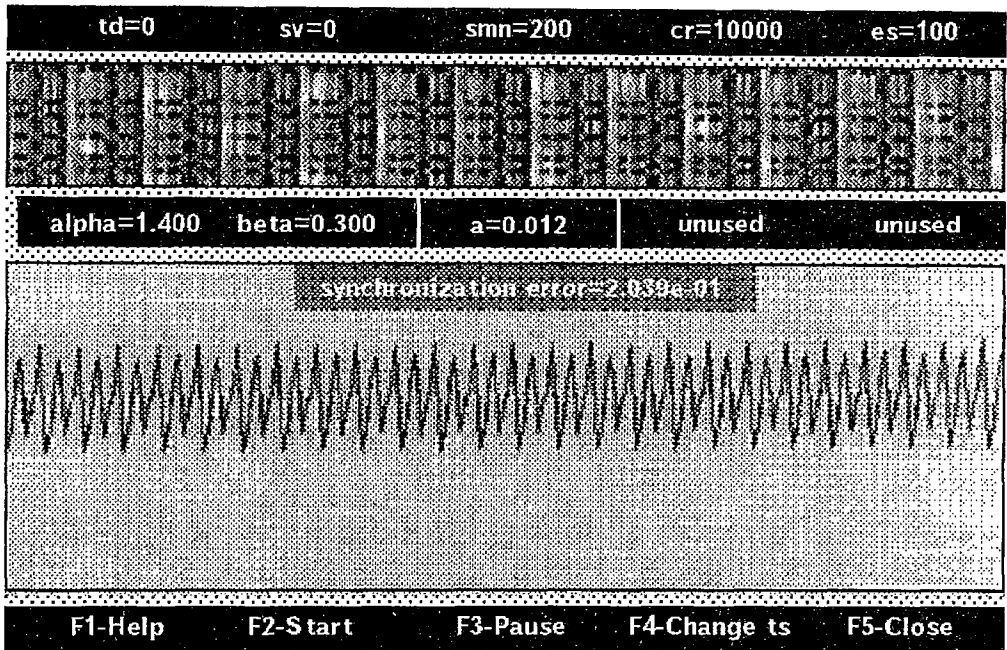
Отметим, что численно измеряя порог синхронизации любого цикла, можно, используя (33), оценить степень неустойчивости или устойчивости этого цикла.

Заключение

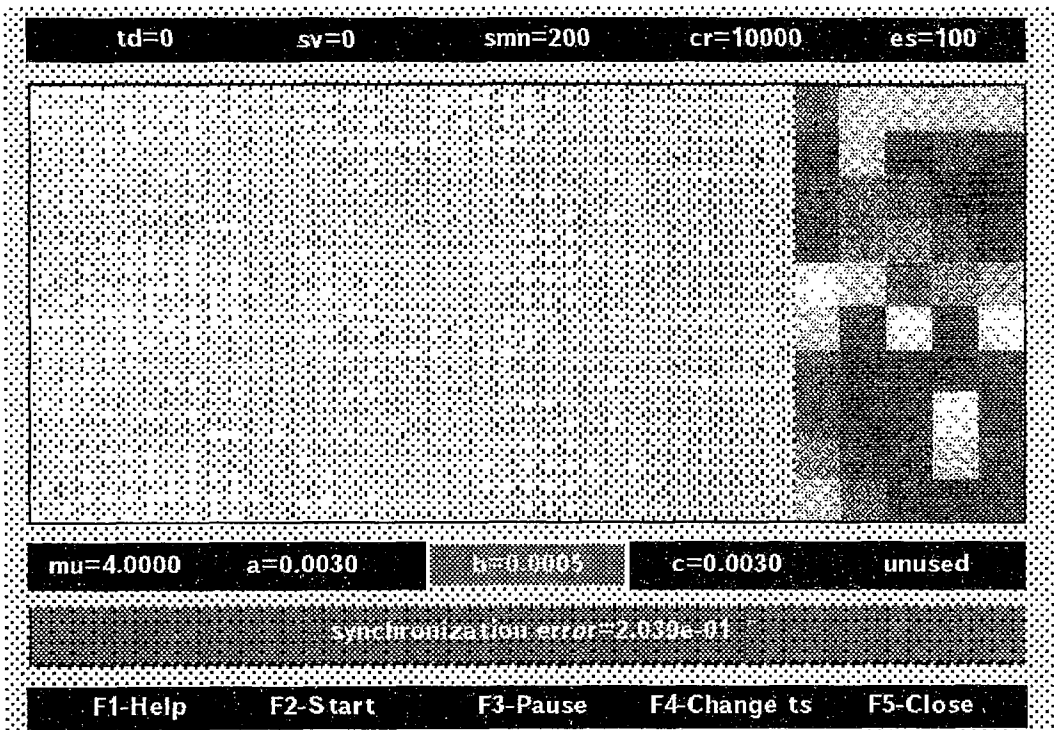
В статье рассмотрено явление хаотической синхронизации в ансамблях связанных многомерных отображений. Получены общие условия устойчивости режима синхронизации. В соответствии с этими условиями устойчивость режима синхронизации определяется максимальным ляпуновским показателем парциальной динамики отдельного отображения и спектральными характеристиками матрицы связи отображений в ансамбле. За рамками настоящей работы осталось рассмотрение более тонких эффектов, связанных с влиянием «нетипичных» траекторий аттрактора на процессы синхронизации. Эти вопросы предполагается подробно исследовать в последующих публикациях.

Для исследования физической реализуемости режима синхронизации в рассматриваемых структурах было проведено численное моделирование динамики систем связанных логистических отображений и отображений Хенона. Показано, что вхождение в режим синхронизации происходит в таких системах при произвольных начальных условиях в парциальных системах.

Полученные результаты могут быть использованы в задачах обработки сигналов, в частности, при построении синхронизаторов [20, 30], при создании систем передачи информации с хаотической несущей, при построении систем обработки информации, записанной на циклы отображений [4], для экспериментального или численного измерения максимальных ляпуновских показателей динамических систем, а также для качественного моделирования динамики сложных систем разной природы, состоящих из большого числа взаимодействующих подсистем.



a



b

Рис. 15. Общий вид экрана при работе в первом (*a*) и втором (*б*) рабочих режимах; *a* - показана временная динамика ансамбля из 20 симметрично связанных отображений Хенона при помощи цветовой индикации мгновенных состояний этих отображений в верхнем окне и вывода величины SE - в нижнем; *б* - общий вид экрана при работе во втором рабочем режиме. Показано мгновенное состояние ансамбля из 200 блочно-симметрично связанных логистических отображений при помощи цветовой индикации

Приложение

Для численного моделирования динамики ансамблей из связанных отображений был разработан программный комплекс «SynchronChaos». Комплекс состоит из статического модуля и динамически присоединяемых подпрограмм, задающих вид парциального отображения и структуру матрицы связи, и функционирует в двух рабочих режимах.

Первый режим предназначен для анализа поведения системы связанных отображений во времени. В этом режиме создается два окна, в каждом из которых по оси абсцисс «отложено» дискретное время (номер итерации). В первом окне состояние каждого из связанных отображений в текущий момент времени изображается одним из 16 цветов, причем параметр цветового разрешения (cr) задается пользователем. Во втором окне показано поведение во времени величины $SE = [\sum_{i,j \in SM} (x_i - x_j)^2]^{1/2} / [smn(1-smn)]$ - «ошибки синхронизации», где SM - множество индексов выделенных отображений, smn - число таких отображений (рис. 15, а).

Второй режим предназначен для графической иллюстрации мгновенных состояний ансамбля связанных отображений. В этом режиме создается одно окно, в котором каждый квадратик соответствует одному отображению, и цвет этого квадратика определяется значением переменной состояния данного отображения аналогично тому, как это делается в первом режиме (рис. 15, б).

В обоих рабочих режимах имеется возможность динамически изменять значения различных параметров системы, парциального отображения и матрицы связи при помощи ячеек параметров.

Библиографический список

1. Skarda C.A., Freeman W.J. How brain make chaos in order to make sense of the world // Behavioral and Brain Science. 1987. Vol. 10. P. 161.
2. Хакен Г. Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1990.
3. Николис Дж. Динамика иерархических систем. М.: Мир, 1989.
4. Дмитриев А.С. Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // РЭ. 1993. Т. 38, № 1. С.1.
5. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Prog.Theor.Phys. 1983. Vol. 69, № 1. P. 32.
6. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 9. С. 1050.
7. Pikovsky A.S. // Z. Phys. 1984. 55B. P. 149.
8. Пиковский А.С. Взаимодействие странных аттракторов. Препринт № 79. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С.21
9. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Квазиоднородные стохастические движения и их разрушения в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т 31, № 5. С. 627.
10. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
11. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // РЭ. 1991. Т. 36, № 2. С. 338.
12. Алексеев А.А., Шалфеев В.Д. Стохастическая синхронизация в ансамбле автоколебательных систем с обратной связью // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, вып. 21.
13. Kaneko K. Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices // Physica 23D. 1986. P. 436.
14. Kaneko K. Pattern dynamics in spatio-temporal chaos // Physica 34D. 1989. P. 60.

15. Kaneko K. Spatio-temporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // *Physica* 37D. 1986. P. 1.
16. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // *Письма в ЖЭТФ*. 1984. Т. 39, № 12. С. 561.
17. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркация развития хаоса в цепочке связанных генераторов // *ДАН СССР*. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.
18. Арансон И.С., Афраймович В.С., Рабинович М.И. Устойчивость пространственно-однородного состояния в цепочке отображений. Препринт № 203. Горький: ИПФ АН СССР, 1988. С. 18.
19. *Afraimovich V.S., Chow S.N.* Criteria of spatial chaos in lattice dynamical systems // *Georgia Institute of Technology CDSNS93-142*.
20. Дмитриев А.С., Широков М.Е. Синхронизаторы хаотических сигналов // *РЭ*. 1995. Т. 40, № 11. С. 1667.
21. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
22. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Ergodic theory and strange attractors // *Rev. Mod. Phys.* 1985. Vol. 57. P. 617.
23. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
24. Шустер Г. Детерминированный хаос М.: Мир, 1988.
25. *Auerbach D., Cvitanovic P., Eckmann J.-P., Gunarathe G.H., Procaccia I.* Exploring chaotic motions through periodic orbit // *Phys.Rev.Lett.* 1987. Vol. 58, № 23. P. 2387.
26. *Cvitanovic P.* Invariant measurements of strange sets in terms of cycles // *Phys.Rev.Lett.* 1988. Vol. 61, № 24. P. 2729.
27. *Artuso R., Aurell E., Cvitanovich P.* Recycling of strange sets: I Cycle expansions // *Nonlinearity*. 1990. № 3. P. 325.
28. *Artuso R., Aurell E., Cvitanovich P.* Recycling of strange sets: II Applications // *Nonlinearity*. 1990. № 3. P. 361.
29. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Структура периодических орбит хаотической автоколебательной системы, описываемой разностными уравнениями 2-го порядка // *РЭ*. 1994. Т. 39, № 9, С. 1392.
30. Дмитриев А.С., Широков М.Е. Динамика синхронизатора для хаотических сигналов с непрерывным временем // *РЭ*. 1995. Т. 40, № 11. С. 1660.

Институт радиотехники и
электроники РАН

Поступила в редакцию 8.01.96
после переработки 20.06.96

SYNCHRONIZATION IN ENSEMBLES OF COUPLED MAPS

A.S. Dmitriev, S.O. Starkov, M.E. Shirokov

Ensembles of coupled maps are considered. The conditions of synchronization in such ensembles are investigated. It is shown that for this type of coupling these conditions are defined by the value of the first Lyapunov exponent of the partial dynamics in each (isolated) map and by the spectral characteristics of the coupling matrix. The obtained results are applied to concrete ensembles of coupled maps. Computer simulations of the dynamics of such ensembles with logistic maps and Henon maps as partial systems are described. Some applications of obtained results are outlined.



Дмитриев Александр Сергеевич - родился в 1948 году. Окончил Московский физико-технический институт (1971). Кандидат физико-математических наук (1974), доктор физико-математических наук (1988), профессор. Ведущий научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - теория динамического хаоса, информационные технологии на основе хаотической динамики. Автор более 100 научных трудов, в том числе 2 монографий.



Старков Сергей Олегович - родился в 1956 году. Окончил факультет радиотехники и кибернетики МФТИ (1976). Кандидат физико-математических наук (1986). В настоящее время старший научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - динамический хаос в радиофизических системах, информационные технологии на основе хаотической динамики, прикладные аспекты теории динамического хаоса. Опубликовал более 60 научных работ.



Широв Максим Евгеньевич - родился в 1968 году. Окончил МФТИ (1992), кандидат физико-математических наук (1996). Область научных интересов - хаотическая динамика и ее использование в информационных технологиях. Автор 10 научных работ.



ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ КЛАССА РЕШЕТОЧНЫХ ГАЗОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ

Г.Г. Малинецкий, М.Е. Степанцов

В последнее время много внимания уделяется разработке методов численного моделирования, не связанных с построением разностных схем. Одним из перспективных направлений в этой области, несомненно, является применение клеточных автоматов, в частности, для решения задач газодинамики.

В данной работе предлагается общий способ построения моделей типа решеточных газов для любых изотермических газодинамических процессов и приводится пример такого построения, а также рассматривается клеточный автомат, описывающий неизотермические процессы в газе или жидкости.

1. Клеточные автоматы

В настоящее время все активнее идет поиск нетрадиционных подходов к построению математических моделей и решению связанных с ними задач. К числу таких подходов, несомненно, относятся клеточные автоматы (КА) - системы, в которых время и пространство дискретны и все величины принимают значения из конечного (обычно небольшого) набора значений.

При рассмотрении таких систем используется следующая терминология: узел пространственной решетки (чаще всего ортогональной или двумерной гексагональной) называется «клеткой». Ближайшие к нему узлы называются «соседями», причем возможен различный выбор соседей, который определяет различные автоматы. То, что в узле решетки величины принимают некоторый набор значений, называется «данная клетка находится в состоянии с такими значениями величин». И, наконец, законы изменения состояния клеток в зависимости от состояния их соседей (одинаковые во всех клетках) носят название «правил клеточного автомата».

Важным свойством клеточных автоматов является локальность - динамика изменения значений величин в узле решетки зависит лишь от состояния ближайших узлов. Это позволяет значительно повысить скорость расчетов таких моделей на специализированных машинах клеточных автоматов, обладающих высокой параллельностью [1].

Примером КА может служить игра «Жизнь» [1,2]. Этот КА определен на ортогональной решетке на плоскости. Каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: 0 - клетка «мертва» и 1 - «жива». Восемь клеток, окружающих данную, называются ее соседями. Законы, определяющие динамику этого КА, следующие:

- 1) если у живой клетки меньше двух живых соседей, она становится мертвой - «смерть от одиночества»;
- 2) если у живой клетки больше трех живых соседей, она становится мертвой - «смерть от перенаселения»;
- 3) если у мертвой клетки ровно три живых соседа, она становится живой - «рождение».

Эти простейшие правила приводят, однако, к сложному поведению КА. Из случайного начального распределения живых и мертвых клеток возникают различные устойчивые комбинации, причем иногда довольно причудливые.

С помощью этого КА можно имитировать сколь угодно сложные процессы. Было доказано [3], что этот КА эквивалентен универсальной вычислительной машине Тьюринга. Интересно также то, что игра «Жизнь» представляет собой мир, где будущее детерминировано, но «узнать» его (то есть определить состояние автомата на некотором шаге) можно лишь «дожив» до него (проделав все промежуточные шаги) - иного алгоритма не существует.

2. Решеточные газы в задачах газодинамики

Одним из классов клеточных автоматов являются решеточные газы - крайне упрощенные модели, тем не менее хорошо описывающие сложные газодинамические процессы. До настоящего времени было предложено несколько очень удачных моделей такого рода.

Одной из первых удачных попыток такого рода был НРР-газ [4], названный по первым буквам фамилий своих создателей - J. Hardy, Y. Pomeau и O. de Pazzis. Этот автомат задан на ортогональной решетке (2- или 3-мерной). Возможные состояния клетки соответствуют наличию в ней частиц, движущихся параллельно осям координат. На каждом шаге частицы смещаются на одну клетку в направлении своего движения. Столкновения происходят при наличии в одной клетке частиц с противоположно направленными скоростями. Правила столкновений изображены на рис. 1,а. Несмотря на имеющуюся явную анизотропию правил, задающих автомат (скорости частиц строго параллельны осям координат), макроскопическая картина поведения автомата является изотропной.

Двумерный вариант этого автомата имеет один недостаток: полученные для него макроскопические уравнения отличаются от уравнений Навье - Стокса. Этого недостатка лишен автомат ФНР-газ [5]. Его поле представляет собой не прямоугольную решетку на плоскости, а гексагональную. При этом правила столкновений видоизменяются (рис. 1,б). Оба автомата моделируют изотермические процессы в идеальном газе.

Представляет интерес исследовать возможность моделирования газов, в которых в отличие от этих базовых моделей существовало взаимодействие между частицами, происходили процессы с изменением температуры, существовали частицы различной массы, присутствовали внешние силовые поля. Авторы предложили в [6] модификацию НРР-газа, позволяющую моделировать процессы в газе, идущие с изменением температуры. Для этого в модели наряду с частицами,

перемещающимися на каждом временном шаге - «быстрыми», рассматриваются также, которые сдвигаются только на шагах с номером, кратным некоторому заданному числу K - «медленные». В этом случае температуру системы можно задать следующим образом:

$$T = \rho_1 T_1 + \rho_2 T_2,$$

где $\rho_{1,2}$ - плотности быстрых и медлен-

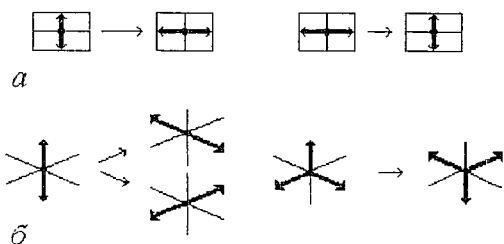


Рис. 1

ных частиц, а $T_{1,2}$ - температура газа, состоящего из частиц одного сорта.

Этот решеточный газ был успешно опробован на ряде модельных задач. В частности, при моделировании изохорного нагревания идеального газа была получена соответствующая уравнению Менделеева - Клапейрона [7] линейная зависимость (рис. 2)

$$p = \alpha T \text{ при } V = \text{const.}$$

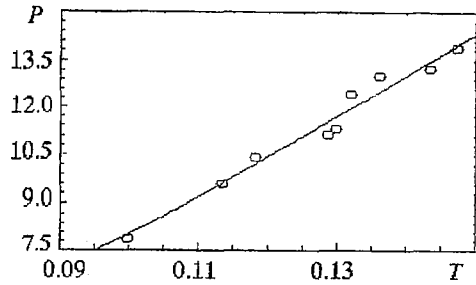


Рис. 2

Возможность введения взаимодействия между частицами в модели FHP рассмотрели Appert и Zalesky в [8,9].

И в том, и в другом случае модель на основе клеточного автомата строилась эвристически: правила этого автомата формулировались, исходя из соображений некоторой аналогии с моделируемыми явлениями, после чего проверялась и доказывалась адекватность модели. Представляется важным создать некий общий алгоритм построения решеточных газов.

3. Алгоритм и пример построения решеточного газа

Динамические процессы в газе определяются видом тензора переноса импульса, поскольку уравнение динамики имеет вид

$$\partial(\rho v_i)/\partial t = -\partial \Pi_{ik}/\partial x_k.$$

Поэтому перед нами стоит следующая задача: нам дан вид тензора переноса импульса, и мы должны, исходя из него, найти правила, задающие интересующую нас модель.

Параметрами модели, принадлежащей классу решеточных газов, будут набор сортов частиц v , масса m_v и скорость u_v , присущие каждому сорту. Так как каждая частица сорта v обладает импульсом $m_v u_v$, то

$$\partial(\rho v)/\partial t = \sum_v \partial f_v / \partial t m_v u_v.$$

Рассмотрим для определенности решеточный газ на ортогональной решетке. В нем скорости частиц направлены строго вдоль координатных осей. Пусть v_i - сорта частиц со скоростями параллельными оси x_i , N_v - число частиц сорта v в объеме V .

$$\partial(\rho v_i)/\partial t = \sum_{v_i} \partial f_{v_i} / \partial t m_{v_i} u_{v_i},$$

$$\partial f_{v_i} / \partial t = \lim_{V \rightarrow 0} \partial N_{v_i} / \partial t,$$

$$\partial N_{v_i} / \partial t = \sum_{v'} P_{v'v_i} N_{v'} - N_{v_i} \sum_{v'} P_{v_i v'} - \oint f_{v_i} v_{v_i} d\sigma,$$

где P_{ij} - вероятности превращения частицы сорта i в сорт j . Но так как v_v всегда параллельна оси x_i , то $v_v = v_{v_i}$ и $\text{div} v_{v_i} = 0$.

$$\partial f_{v_i} / \partial t = \sum_{v'} P_{v'v_i} f_{v'} - f_{v_i} \sum_{v'} P_{v_i v'} - \lim_{V \rightarrow 0} (1/V) \int_V \text{div}(f_{v_i} v_{v_i}) dV.$$

Учитывая, что

$$\text{div}(f_{v_i} v_{v_i}) = (v_{v_i} \text{grad}) f_{v_i},$$

получаем

$$\partial f_{v_i} / \partial t = \sum_{v'} P_{v'v_i} f_{v'} - f_{v_i} \sum_{v'} P_{v_i v'} - (v_{v_i} \text{grad}) f_{v_i}$$

и
$$\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t = \sum_v m_v \mathbf{u}_v (\sum_{v'} P_{v'v} f_{v'} - f_v \sum_{v''} P_{vv''}) - (\mathbf{v} \text{grad}) \rho.$$

Мы получили уравнение Эйлера

$$\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t = - (\mathbf{v} \text{grad}) \rho + \Delta$$

с некоторой добавкой

$$\Delta = \sum_v m_v \mathbf{u}_v (\sum_{v'} P_{v'v} f_{v'} - f_v \sum_{v''} P_{vv''}), \quad (*)$$

возникающей за счет превращения частиц одного сорта в другой, и представляющей собой изменение импульса в единице объема в результате этого процесса. Заметим, что частным случаем такого превращения являются столкновения частиц (нужно помнить, что частицы, движущиеся в разных направлениях, считаются относящимися к разным сортам), приводящие в модели НРР-газа к уравнению Навье - Стокса [4].

В каждом конкретном случае, выбрав количество и характеристики сортов частиц в модели, мы получим уравнение (*) для P_{ij} . Если его удастся решить, задача построения модели выполнена. Надо отметить, что полученное выражение (*) является весьма общим, и к решению конкретной задачи можно подойти, не рассматривая его в явном виде.

Пусть перед нами стоит задача моделирования процессов в идеальном газе в поле тяжести. Тогда уравнение динамики имеет вид

$$\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t + (\mathbf{v} \text{grad}) \rho = \rho \mathbf{g}.$$

Любой объем газа здесь получает дополнительное приращение импульса

$$\Delta = \rho \mathbf{g}.$$

В решеточном газе это можно реализовать, дав возможность частицам, движущимся против направления \mathbf{g} , превращаться в частицы, движущиеся по направлению \mathbf{g} . Тогда

$$\Delta = \lim_{V \rightarrow 0} 2NPm\mathbf{u}/V,$$

где N - число частиц в объеме V ; P - задаваемая нами вероятность изменения направления движения частицы.

$$\Delta = 2\rho P\mathbf{u}.$$

Итак, для моделирования газа в гравитационном поле необходимо в базовом решеточном газе на каждом шаге менять направление скорости частиц,

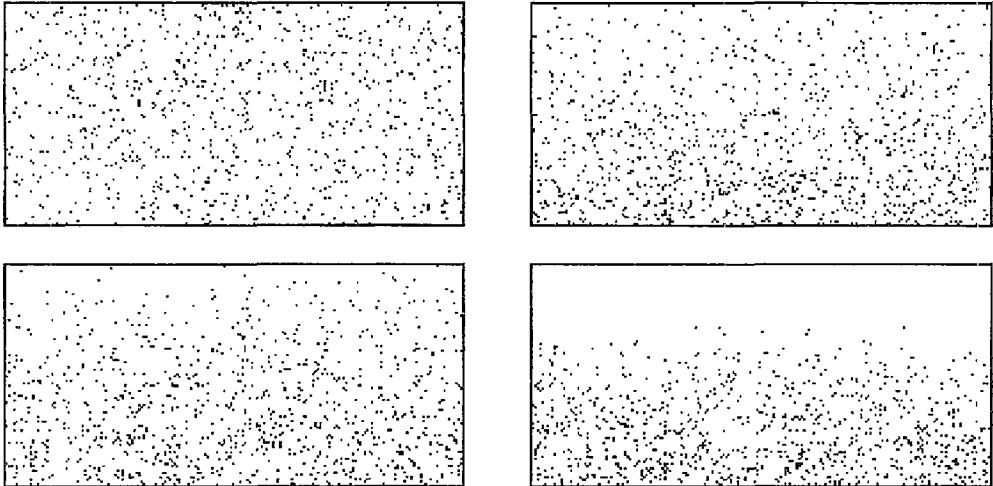


Рис. 3

движущихся вертикально вверх, на противоположное с вероятностью

$$P = g/2u.$$

Такой клеточный автомат был построен, и с его помощью был смоделирован газ, находящийся в однородном гравитационном поле в замкнутом объеме в масштабах, где изменение плотности с высотой становится заметным.

На рис. 3 показан процесс уплотнения нижних и разрежения верхних слоев первоначально однородного газа. На рис. 4 показана зависимость плотности газа от высоты в начале численного эксперимента (однородный газ), в процессе достижения равновесия и после его достижения. В последнем случае зависимость является экспоненциально убывающей.

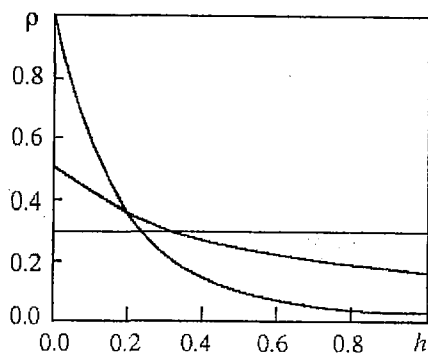


Рис. 4

Заключение

Идея моделирования непрерывного воздействия на систему множеством дискретных воздействий, осуществляемых с некоторой вероятностью, высказанная, в частности, в [8], в данной работе была успешно применена. Полученные результаты позволяют надеяться на более широкое применение решеточных газов для решения тех задач, где традиционные методы плохо или вообще неприменимы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Код проекта 96-01-01161.

Библиографический список

1. Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. М: Мир, 1991.
2. Gardner M. // Sc. Am. 1970. Vol.223, № 4. P.120.
3. Berlekamp E., Conway J., Guy R. Winning ways for your mathematical plays. Academic Press, 1982.
4. Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O. // J. Math. Phys. 1978. Vol.19, № 3. P.293.
5. Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y. // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol.56. P.1505.
6. Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е. // Ж.физ.химии 1995. Т. 69, № 8. С.1528.
7. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика (В 2-х ч.). М: МГУ, 1991.
8. Appert C., Zaleski S. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64. P.1.
9. Appert C., Zaleski S. // Physica D. 1991. Vol.47, № 1,2. P.85.

Институт прикладной математики
им М.В.Келдыша РАН
Московский государственный университет

Поступила в редакцию 28.06.96

LATTICE GAS MODELS FOR GASDYNAMICS PROBLEMS

G.G. Malinetskii, M.E. Stepantsov

In this paper we propose a general method of lattice gas models construction for any isothermal gasdynamical process. There is also given an example of a cellular automaton simulating a non-isothermal process in gas.



Малинецкий Георгий Геннадьевич родился в 1956 году в Уфе, окончил физический факультет МГУ (1979), защитил кандидатскую диссертацию на тему «Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных средах» (1982) и докторскую диссертацию на тему «Диффузионный хаос и новые типы упорядоченности в нелинейных средах» (1990) в Институте прикладной математики. В настоящее время работает там же заведующим сектором нелинейной динамики. Автор большого количества статей в области исследования хаоса и нелинейных явлений, а также учебника «Структуры, хаос, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику».



Степанцов Михаил Евгеньевич родился в 1972 году в Куйбышеве. Окончил физический факультет МГУ (1995). В настоящее время является аспирантом кафедры математики физического факультета МГУ. Автор 2 статей, посвященных применению клеточных автоматов для моделирования нелинейных явлений.



ВЗРЫВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СИСТЕМАХ ТИПА «ДВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКА - ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА»

Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков

Исследуется взрывная неустойчивость при взаимодействии двух электронных потоков с электромагнитной волной. Рассмотрены конфигурации как с попутными, так и со встречными потоками. Получены уравнения трехволнового взаимодействия, описывающие динамику медленно меняющихся амплитуд. Проведено численное решение трехволновых уравнений с соответствующими граничными условиями, позволяющее выявить особенности физических процессов при развитии неустойчивости и определить влияние различных факторов на пусковые условия генерации.

Введение

Важный раздел теории волновых процессов составляет изучение явлений, обусловленных резонансным взаимодействием нелинейных волновых пакетов (см., например, [1-3]). В первую очередь к ним относятся взаимодействия трех волн, частоты и волновые векторы которых удовлетворяют условиям трехволнового резонанса

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad (1)$$

или, как говорят, образуют резонансную триаду [2,3].

Среди подобных процессов особый интерес представляет взрывная неустойчивость (ВН), реализующаяся в случае, когда либо высокочастотная (ω_3), либо обе низкочастотные ($\omega_{1,2}$) волны обладают отрицательной энергией. Она выразится в одновременном росте амплитуд всех взаимодействующих волн и их обращении в бесконечность за конечный промежуток времени [1,2]. Разумеется, на практике всегда существуют механизмы, ограничивающие рост амплитуд, но для их учета, как правило, необходимо выйти за рамки чисто волновых представлений.

Взрывная неустойчивость в системах, содержащих электронные потоки (ЭП), давно привлекает интерес исследователей, так как может привести к созданию нового типа генераторов высокочастотных колебаний. Ранее теоретически и экспериментально исследовалась ВН в электронном потоке, взаимодействующем с полем резонатора, образованного закороченным на концах отрезком спиральной замедляющей системы [4,5], а также в различных пучково-плазменных системах (см. [6]). В недавней работе [7] было указано на

возможность реализации ВН в лампе обратной волны (ЛОВ) с плазменным заполнением.

Во всех этих системах приводящий к взрыву процесс заключался в распаде медленной волны пространственного заряда (ВПЗ), являющейся волной с отрицательной энергией, на две волны с положительной энергией, которыми являются электромагнитные и различные плазменные волны. В нашей работе [8] был предложен другой способ осуществления ВН, основанный на распаде электромагнитной волны (ЭМВ) на две медленных ВПЗ при взаимодействии двух попутных ЭП с обратной ЭМВ. Такое взаимодействие обладает рядом привлекательных свойств. В настоящей работе изложены результаты исследования взрывной неустойчивости в некоторых системах типа «два взаимодействующих электронных потока - электромагнитная волна».

1. Основные уравнения. Резонансные соотношения

Рассмотрим взаимодействие двух попутных ЭП с обратной ЭМВ. В качестве исходных примем следующую систему гидродинамических уравнений [8]:

$$\partial v_n / \partial t + v_n \partial v_n / \partial x = \partial \phi / \partial x - E, \quad (2)$$

$$\partial \rho_n / \partial t + \partial (\rho_n v_n) / \partial x = 0, \quad (3)$$

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 - k_{\perp}^2 \phi = \rho_1 + \rho_2 - 1 - \delta, \quad (4)$$

$n=1,2$ - номер ЭП. Здесь (2) - уравнения движения, (3) - уравнения непрерывности, (4) - уравнение Пуассона, при выводе которого считалось, что силы кулоновского отталкивания между различными сечениями ЭП спадают с расстоянием пропорционально $\exp(-k_{\perp} x)$, а статический пространственный заряд полностью скомпенсирован неподвижным ионным фоном. В уравнениях (2)-(4) все величины являются безразмерными: скорости v_n нормируются на невозмущенную скорость первого потока v_{01} , плотности заряда ρ_n - на ρ_{01} , потенциал ϕ - на $m v_{01}^2 / e$, напряженность поля ЭМВ E - на $m v_{01} \omega_{p1} / e$, время t - на ω_{p1}^{-1} , координата x - на v_{01} / ω_{p1} , где $\omega_{p1} = (\epsilon \rho_{01} / \epsilon_0 m)^{1/2}$ - плазменная частота первого ЭП, $\delta = \rho_{02} / \rho_{01}$.

Рассмотрим замедляющую систему (ЗС), имеющую дисперсионную характеристику, подобную изображенной на рис.1 (кривая 3). Дисперсией такого типа обладают различные ЗС, в частности, гофрированный волновод, диафрагмированный волновод, цепочка связанных резонаторов [9]. Для простоты будем считать, что частоты $\omega_{1,2}$ лежат вне полосы пропускания ЗС. Уравнение возбуждения обратной пространственной гармоники на частоте ω_3 (см., например, [10]), обобщенное на случай двух потоков, запишем в виде

$$\partial E / \partial x + (i \omega_3 / v_p) E = -(\omega_3^2 / v_p^2) C^3 (j_1^{\wedge} + j_2^{\wedge}). \quad (5)$$

Здесь $j_{1,2}^{\wedge}$ - спектральные составляющие плотностей токов на частоте ω_3 , C^3 - параметр усиления Пирса [10] для первого ЭП. Фазовая скорость ЭМВ v_p и сопротивление связи K , входящее в C^3 , также вычисляются на частоте ω_3 . Для простоты мы полагаем K одинаковым для обоих потоков.

Будем считать, что потоки находятся в синхронизме с прямыми гармониками ЗС (см. рис.1), поэтому абсолютная неустойчивость невозможна. Исследуем возможность выполнения резонансных условий (1), для чего используем хорошо известный графический метод (см., например, [2]). Выберем на ветви дисперсионной кривой, соответствующей обратной пространственной гармонике, какую-либо точку и перерисуем дисперсионную диаграмму, перенеся в эту точку начало координат. Тогда точки пересечения «старых» и «новых» (они показаны на рис.1 штриховой линией) кривых дадут значения резонансных частот и волновых векторов.

Из рис.1 видно, что ЭМВ находится в резонансе сразу с четырьмя парами волн. Эти процессы схематически можно изобразить следующим образом:

- ЭМВ → БВПЗ + БВПЗ;
- ЭМВ → МВПЗ + БВПЗ;
- ЭМВ → БВПЗ + МВПЗ;
- ЭМВ → МВПЗ + МВПЗ.

Мы ограничимся рассмотрением последнего из этих процессов, так как только он способен привести к взрывной неустойчивости, и следует ожидать, что по прошествии некоторого времени этот процесс будет доминировать [6].

Следует заметить, что все эти рассуждения справедливы практически для любой точки на ветви, соответствующей обратной гармонике. Это, во-первых, дает основания предполагать, что можно осуществить перестройку частоты генерации во всей полосе пропускания ЗС. Во-вторых, можно надеяться на то, что удастся осуществить генерацию не только одночастотных, но также многочастотных и хаотических сигналов, что является в настоящее время весьма актуальной задачей. Как известно, различие групповых скоростей взаимодействующих волн приводит к тому, что взрывная неустойчивость носит пороговый характер [11]: энергия начального возмущения должна превышать определенное значение. Другими словами, имеет место жесткое возбуждение колебаний. Таким образом, подавая на вход лампы возбуждающий ВЧ импульс, амплитуда которого превосходит пороговую, можно осуществить генерацию на несущей частоте. Подача многочастотного (спектр которого может быть самым различным) или шумового импульса может привести к возбуждению многочастотного или хаотического сигнала. Эти свойства делают рассматриваемый способ генерации весьма привлекательным.

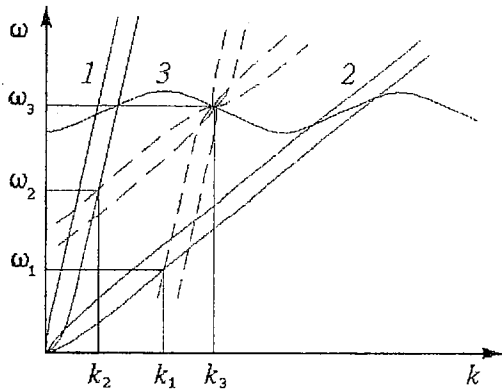


Рис. 1. К определению резонансных триад в системе «два полупрозрачных ЭП - обратная ЭМВ»: 1,2 - дисперсионные характеристики ВПЗ; 3 - дисперсионная характеристика ЭМВ в замедляющей системе

2. Уравнения трехволнового взаимодействия для системы «два попутных потока - обратная электромагнитная волна»

Получим уравнения трехволнового взаимодействия, описывающие динамику медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн. Для решения этой задачи используем метод многомасштабных разложений [3]. Введем вектор неизвестных величин

$$\mathbf{U} = [v_1, v_2, \rho_1, \rho_2, \varphi, E]^T,$$

где T - знак транспонирования, и представим его в виде ряда по степеням малого параметра ϵ

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \epsilon \mathbf{U}_1 + \epsilon^2 \mathbf{U}_2 + \dots,$$

причем $\mathbf{U}_0 = (1, \mu, 1, \delta, 0, 0)^T$, где $\mu = v_{02}/v_{01}$. Без ограничения общности можно считать $\mu > 1$. Вектор \mathbf{U}_1 будем искать в виде

$$\mathbf{U}_1 = \sum_{j=1}^3 \mathbf{u}_j A_j(X, T) \exp i \theta_j + \text{к.с.},$$

где $\theta_j = \omega_j t - k_j x$, причем ω_j и k_j удовлетворяют резонансным условиям (1), а X и T -

«растянутые» координата и время. При этом производные $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ преобразуются следующим образом (см. [3]):

$$\partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial x + \varepsilon \partial/\partial X, \quad \partial/\partial t \rightarrow \partial/\partial t + \varepsilon \partial/\partial T.$$

Тогда, выделяя из уравнений (2) - (5) члены порядка ε , находим:

$$\mathbf{u}_j = [-k_j/(\omega_j - k_j), -k_j/(\omega_j - \mu k_j), -k_j^2/(\omega_j - k_j)^2, -\delta k_j^2/(\omega_j - \mu k_j)^2, 1, 0]^T,$$

для $j=1,2$, причем ω_j и k_j связаны дисперсионным соотношением (ДС) системы «два попутных электронных потока», которое запишем в виде $F_j=0$, где введены обозначения: $F_j=(\omega_j - k_j)^2(\omega_j - \mu k_j)^2 - \Gamma_j G_j$, $G_j=(\omega_j - \mu k_j)^2 + \delta(\omega_j - k_j)^2$, $\Gamma_j=k_j^2/(k_j^2+k_{\perp}^2)$. Для \mathbf{u}_3 получим

$$\mathbf{u}_3 = [ik_3 H_3/(\omega_3 - k_3), ik_3 H_3/(\omega_3 - \mu k_3), ik_3^2 H_3/(\omega_3 - k_3)^2, \\ i\delta k_3^2 H_3/(\omega_3 - \mu k_3)^2, i\Gamma_3 G_3/(k_3 H_3), 1]^T,$$

где $H_j = (\omega_j - k_j)^2(\omega_j - \mu k_j)^2/k_j F_j$, а ω_3 и k_3 связаны ДС системы «два попутных ЭП - обратная ЭМВ»

$$[\omega_3 - v_p k_3] F_3 = -\omega_3^3 C^3 G_3/v_p^2. \quad (6)$$

Выделяя из уравнений (2)-(5) члены порядка ε^2 и требуя уничтожения секулярностей (то есть, членов, пропорциональных $\exp(i\theta_j)$), после не представляющих принципиальной сложности, но достаточно трудоемких вычислений, получаем

$$\partial A_{1,2}/\partial T + v_g^{(1,2)} \partial A_{1,2}/\partial X = \sigma_{1,2} A_3 A_{2,1}^*, \quad (7)$$

$$\partial A_3/\partial T - v_g^{(3)} \partial A_3/\partial X = \sigma_3 A_1 A_2, \quad (8)$$

где $v_g^{(3)}$ - «холодная» групповая скорость ЭМВ на частоте ω_3 (знак «-» перед ней отражает тот факт, что возбуждаемая волна является обратной пространственной гармоникой),

$$v_g^{(j)} = \omega_j/k_j - (\omega_j - \mu k_j)^3(\omega_j - k_j)^3/\{k_j[(\omega_j - \mu k_j)^3 + \delta(\omega_j - k_j)^3]\}, \quad (9)$$

$$\sigma_j = -(\omega_j - \mu k_j)^3(\omega_j - k_j)^3 H_3/\{2k_j^2[(\omega_j - \mu k_j)^3 + \delta(\omega_j - k_j)^3]\}[\Pi_1 \Sigma_1 + \delta \Pi_2 \Sigma_2], \quad (10)$$

$$\sigma_3 = \omega_3^3 C^3/(k_3 v_p F_3) (\omega_3 - \mu k_3)^2 (\omega_3 - k_3)^2 [\Pi_1 \Sigma_1 + \delta \Pi_2 \Sigma_2], \quad (11)$$

$$\Pi_1 = \prod_{i=1}^3 k_i/(\omega_i - k_i), \quad \Pi_2 = \prod_{i=1}^3 k_i/(\omega_i - \mu k_i),$$

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^3 k_i/(\omega_i - k_i), \quad \Sigma_2 = \sum_{i=1}^3 k_i/(\omega_i - \mu k_i).$$

В соотношениях (9), (10) $j=1,2$. При выделении членов порядка ε^2 из уравнения возбуждения (5) была сделана формальная замена

$$i\omega_3/v_p \rightarrow i\omega_3/v_p - \varepsilon/v_g^{(3)} \partial/\partial T.$$

Нетрудно заметить, что если считать при этом $\omega_3=v_p k_3$, то из (5) получилось бы обычное нестационарное уравнение возбуждения для узкополосных сигналов (см., например, [12]). Кроме того, при выводе уравнения (8) полагалось, что точка (ω_3, k_3) на дисперсионной диаграмме лежит далеко от точек синхронизма между ЭМВ и волнами пространственного заряда (см. рис.1), и в левой части можно пренебречь членами, содержащими C^3 , в силу их малости (то есть, групповая скорость волны с частотой ω_3 близка к «холодной» групповой скорости ЭМВ).

Выражения (9) - (11) для коэффициентов в уравнениях трехволнового взаимодействия слишком сложны для анализа. Поэтому предположим, что точки (ω_1, k_1) и (ω_2, k_2) на дисперсионной диаграмме расположены вдалеке от точки синхронизма между медленной ВПЗ в быстром потоке и быстрой - в медленном, так что вместо ДС (5) можно приближенно воспользоваться соотношениями для ВПЗ в невзаимодействующих потоках

$$(\omega_1 - k_1)^2 \approx \Gamma_1, \quad (\omega_2 - k_2)^2 \approx \delta \Gamma_2, \quad (12)$$

а в (11) положим $\omega_3 \approx v_p k_3$. Будем считать, что $(\mu-1) > 1$ (скорости потоков отличаются значительно), $\delta \sim 1$ (плотности зарядов близки), $\omega_j, k_j \gg 1$ (частоты велики по сравнению с плазменными). Тогда можно записать следующие приближенные соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_1 - \mu k_1 &\approx -(\mu-1)k_1, & \omega_2 - k_2 &\approx (\mu-1)k_2, \\ \omega_3 - k_3 &\approx (\mu-1)k_2, & \omega_3 - \mu k_3 &\approx -(\mu-1)k_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь соотношения (9) принимают вид

$$v_g^{(1)} \approx 1 \pm k_1^2 / (k_1^2 + k_2^2)^{3/2}, \quad (14a)$$

$$v_g^{(2)} \approx \mu \pm \delta^{1/2} k_1^2 / (k_2^2 + k_1^2)^{3/2}, \quad (14b)$$

здесь и далее верхние знаки соответствуют быстрым ВПЗ, нижние - медленным. Нетрудно убедиться, что $v_g^{(j)} = d\omega_j / dk_j$, если считать, что ω_j и k_j связаны ДС (12).

С учетом соотношений (13) находим, что

$$G_3 \approx (\mu-1)^2 (k_1^2 + \delta k_2^2), \quad F_3 \approx (\mu-1)^4 k_1^2 k_2^2, \quad H_3 \approx 1/k_3,$$

$$\Pi_1 \approx \pm k_1 k_3 / [(\mu-1)^4 k_2 \Gamma_1^{1/2}], \quad \Pi_2 \approx \pm k_2 k_3 / [(\mu-1)^4 k_1 (\delta \Gamma_2)^{1/2}],$$

$$\Sigma_1 \approx \pm k_1 \Gamma_1^{-1/2}, \quad \Sigma_2 \approx \pm k_2 (\delta \Gamma_2)^{-1/2}.$$

Перейдем от A_3 к новой переменной $A'_3 = A_3 / k_3$. Тогда выражения для коэффициентов σ (10), (11) принимают вид

$$\sigma_1 \approx \mp \{ \Gamma_1^{1/2} k_3 / [2(\mu-1)^2 k_1] \} [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)], \quad (15a)$$

$$\sigma_2 \approx \mp \{ (\delta \Gamma_1)^{1/2} k_1 k_3 \Gamma_2 / [2(\mu-1)^2 k_2^2 \Gamma_1] \} [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)], \quad (15b)$$

$$\sigma_3 \approx \omega_3^2 k_1 C^3 / [(\mu-1)^2 \Gamma_1] [k_1 / k_2 + k_2 \Gamma_1^2 / (k_1^2 \Gamma_2)]. \quad (15v)$$

Отсюда видно, что взрывная неустойчивость реализуется при взаимодействии ЭМВ с двумя медленными ВПЗ (все коэффициенты σ_j имеют одинаковые знаки [2]). Заметим также, что если считать все k_j величинами одного порядка, а $\omega_3^2 k_1 C^3 \sim 1$, то все $\sigma_j \sim 1$.

Уравнение (8), очевидно, теряет справедливость при приближении к границе полосы пропускания, где $v_g^{(3)} \rightarrow 0$, $K \rightarrow \infty$. В этом случае его необходимо модифицировать следующим образом:

$$\partial A_3 / \partial T - (i\omega''_3 / 2) \partial^2 A_3 / \partial X^2 = \sigma'_3 A_1 A_2,$$

где $\omega''_3 = d^2 \omega / dk^2$, вычисляемое из «холодного» ДС замедляющей системы в точке $k=k_0$, соответствующей границе полосы, а σ'_3 определяется из соотношения (15v) заменой в параметре усиления C^3 сопротивления связи K на величину [13]

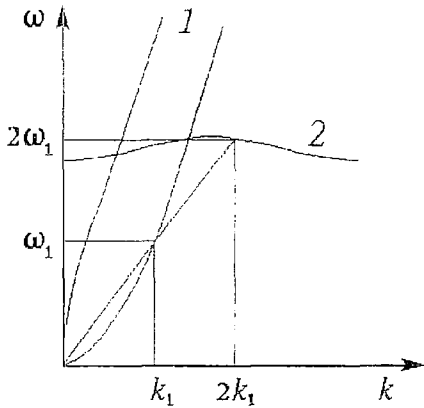


Рис. 2. Дисперсионные характеристики ВПЗ (1) и ЭМВ (2), при которых возможно вырожденное взаимодействие со второй гармоникой

где $v_g^{(1)}$ определяется формулой (14а), а $\sigma_{1,3}$ - формулами

$$\sigma_1 = \mp (4k_1^2 + k_{\perp}^2)(k_1^2 + k_{\perp}^2)^{1/2}/(4k_1^2),$$

$$\sigma_3 = 4\omega_3^2 C^3 (4k_1^2 + k_{\perp}^2)(k_1^2 + k_{\perp}^2)^2/k_1^2.$$

Однако в этом случае реализация многочастотных и стохастических режимов, о которой говорилось выше, невозможна. Другим недостатком является то, что электронный поток может попасть в синхронизм с ЭМВ вблизи границы полосы пропускания, где возможна абсолютная неустойчивость [13].

3. Взрывная неустойчивость в системе со встречными потоками

Рассмотрим систему со встречными электронными потоками. В этом случае нет необходимости в использовании ЗС, так что можно ограничиться взаимодействием с ЭМВ в гладком волноводе (рис. 3). Для простоты будем полагать, что возбуждается только одна TM_{0m} -мода, а электронные потоки являются достаточно тонкими и локализованы вблизи поверхностей, имеющих поперечные координаты $r_{\perp n}$, где $n=1,2$ - номер ЭП, так что $\rho_n(x, r_{\perp}) = \rho_n(x) \delta(r_{\perp} - r_{\perp n})$. Тогда вместо уравнений (2) следует записать

$$\partial v_n / \partial t + v_n \partial v_n / \partial x = [\partial \phi / \partial x - E] \Psi_n,$$

где $\Psi_n = \Psi(r_{\perp n})$, $\Psi(r_{\perp})$ - соответствующая мембранная функция, являющаяся решением уравнения $\nabla_{\perp}^2 \Psi + k_{\perp}^2 \Psi = 0$. Уравнения непрерывности (3), очевидно, останутся неизменными, а вместо уравнения Пуассона (4) будем иметь (для более наглядного сравнения с результатами раздела 2 мы используем калибровку Кулона, разделяющую потенциальную и вихревую части электромагнитного поля)

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 - k_{\perp}^2 \phi = \alpha_1 [\rho_1 - 1] + \alpha_2 [\rho_2 - \delta],$$

где

$$\alpha_n = S_n \Psi_n / \int \Psi(r_{\perp}) \Psi^*(r_{\perp}) dr_{\perp},$$

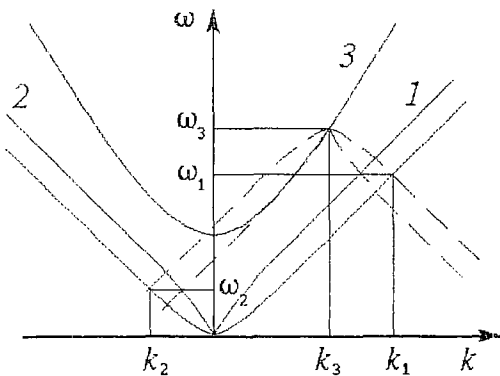


Рис. 3. Определение резонансных триад в системе со встречными потоками: 1, 2 - дисперсионные характеристики ВПЗ; 3 - дисперсионная характеристика волноводной моды

$$R = \lim_{k \rightarrow k_0} \{K[\omega(k)](k - k_0)/k_0\}.$$

Взрывную неустойчивость можно реализовать и при взаимодействии ЭМВ с одним потоком (рис. 2), если использовать вырожденный трехволновой резонанс (взаимодействие со второй гармоникой):

$$\omega_3 = 2\omega_1, \quad k_3 = 2k_1.$$

Полагая в выражениях (7)-(11), $\mu=1$, $\delta=0$, находим

$$\partial A_1 / \partial T + v_g^{(1)} \partial A_1 / \partial X = \sigma_1 A_3 A^*_{-1},$$

$$\partial A_3 / \partial T - v_g^{(3)} \partial A_3 / \partial X = \sigma_3 A_1^2,$$

а S_n - площадь поперечного сечения n -ного потока. Кроме этого следует записать уравнение для продольной компоненты вихревой части поля E , которое в данных обозначениях имеет вид

$$\partial^2 E / \partial t^2 - c^2 \partial^2 E / \partial x^2 + k_{\perp}^2 c^2 E = \partial^3 \varphi / \partial t^2 \partial x + \alpha_1 \partial j_1 / \partial t + \alpha_2 \partial j_2 / \partial t,$$

где c - скорость света.

Поскольку процедура получения трехволновых уравнений полностью аналогична описанной в разделе 2, приведем лишь наиболее важные промежуточные результаты. Решая линеаризованную задачу, находим, что

$$\mathbf{u}_j = [ik_j H_j \Psi_1 / (\omega_j - k_j), ik_j H_j \Psi_2 / (\omega_j + \mu k_j), ik_j^2 H_j \Psi_1 / (\omega_j - k_j)^2, \\ i \delta k_j^2 H_j \Psi_2 / (\omega_j + \mu k_j)^2, 1, ik_j F_j / (\Gamma_j G_j)] T,$$

где сохранены обозначения предыдущего раздела, с той лишь разницей, что

$$G_j = \beta_1 (\omega_j + \mu k_j)^2 + \delta \beta_2 (\omega_j - k_j)^2,$$

где $\beta_n = \alpha_n \Psi_n$, и изменяется знак при коэффициенте μ , так как потоки - встречные. При этом ω_j и k_j связаны ДС

$$\Omega_j^2 F_j = \omega_j^2 k_{\perp}^2 G_j / (k_j^2 + k_{\perp}^2), \quad (16)$$

где $\Omega_j^2 = \omega_j^2 - (k_j^2 + k_{\perp}^2) c^2$. Предполагаем, что выполняются неравенства $2\beta_n / k_{\perp}^2 < 1$, так что абсолютная неустойчивость, вызванная взаимодействием встречных электронных потоков, невозможна (см. [14]). Диапазон перестройки частоты в данном случае будет определяться, очевидно, возможностью подавления других волноводных мод. Мы не будем здесь исследовать этот достаточно сложный самостоятельный вопрос, поскольку для этого необходимо задаться конкретными конфигурациями волновода и потоков.

Требование уничтожения секулярных членов в порядке ε^2 приводит к уравнениям трехволнового взаимодействия (7), (8). Полагая, аналогично предыдущему случаю, что вместо ДС (16) можно приближенно использовать соотношения

$$(\omega_1 - k_1)^2 \approx \beta_1 \Gamma_1, \quad (\omega_2 + \mu k_2)^2 \approx \delta \beta_2 \Gamma_2, \quad (17)$$

$$\omega_3^2 \approx (k_3^2 + k_{\perp}^2) c^2, \quad (18)$$

и переходя по аналогии с разделом 2 к новой переменной $A'_3 = iF_3 A_3 / \Gamma_3 G_3$, получаем следующие упрощенные выражения для коэффициентов:

$$v_g^{(1)} \approx 1 \pm \beta_1^{1/2} k_{\perp}^2 / (k_1^2 + k_{\perp}^2)^{3/2}, \quad (19a)$$

$$v_g^{(2)} \approx -\mu \pm (\delta \beta_2)^{1/2} k_{\perp}^2 / (k_2^2 + k_{\perp}^2)^{3/2}, \quad (19б)$$

$$v_g^{(3)} \approx k_3 c^2 / \omega_3. \quad (19в)$$

$$\sigma_1 \approx \mp \{ (\beta_1 \Gamma_1)^{1/2} k_3 / [2(\mu+1)^2 k_1] \} [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)], \quad (20a)$$

$$\sigma_2 \approx \mp \{ (\delta \beta_1 \Gamma_1)^{1/2} k_1 k_3 \Gamma_2 / [2(\mu+1)^2 k_2^2 \Gamma_1] \} [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)], \quad (20б)$$

$$\sigma_3 \approx \omega_3^2 k_1 k_{\perp}^2 \Gamma_3 / [2(\mu+1)^2 k_3^2 \Gamma_1] [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)]. \quad (20в)$$

Как и в предыдущем случае $v_g^{(j)} = d\omega_j / dk_j$, если считать, что ω_j и k_j связаны ДС (17), (18). Мы полагаем, что ЭМВ распространяется в одном направлении с первым потоком (очевидно, что это предположение не является принципиальным и не ограничивает общность полученных результатов).

Соотношение (18) можно переписать в виде $\omega_3 \approx k_3 v_p$, где $v_p = c(k_3^2 + k_{\perp}^2)^{1/2}/k_3$. Теперь дисперсионное соотношение (16) для $j=3$ примет вид

$$(\omega_3 - v_p k_3) F_3 = \omega_3^2 k_{\perp}^2 G_3 / 2k_3 v_p (k_3^2 + k_{\perp}^2). \quad (21)$$

Если ввести параметр усиления по формуле $C^3 = k_{\perp}^2 G_3 / 2\omega_3 k_3^3$, то нетрудно заметить, что выражения (15) и (20) будут полностью тождественны, а (6) и (21) тождественны за исключением знака правой части. Это отражает тот факт, что в одном случае резонанс осуществляется с обратной пространственной гармоникой, а в другом - с прямой. Напомним, что дисперсионные уравнения ЛБВ и ЛОВ отличаются именно знаком правой части [10].

4. Численное исследование трехволновых уравнений

Уравнения трехволнового взаимодействия (7), (8) представляют собой одну из эталонных систем теории нелинейных волн, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния, и в принципе могут быть решены аналитически [2,15]. Однако полная интегрируемость этой системы показана лишь для задачи с нулевыми граничными условиями на бесконечности. В нашем случае принципиальную роль играет ограниченность системы, причем, в силу основных особенностей взаимодействия, граничные условия для различных волн должны ставиться на разных границах. Поэтому необходимо прибегнуть к численному решению трехволновых уравнений.

Введем новые безразмерные переменные

$$\xi = X/L, \quad \tau = T/L, \quad A'_j = A_j L / (\sigma_k \sigma_n)^{1/2},$$

где L - длина пространства взаимодействия, $j \neq n \neq k$, и разделим в уравнениях (7), (8) вещественную и мнимую части, полагая $A'_j = a_j \exp(i\psi_j)$, a_j и ψ_j вещественны. Тогда получаем

$$\partial a_{1,2} / \partial \tau + v_g^{(1,2)} \partial a_{1,2} / \partial \xi = a_3 a_{2,1}^* \cos \psi_0, \quad (22a)$$

$$\partial a_3 / \partial \tau + v_g^{(3)} \partial a_3 / \partial \xi = a_1 a_2 \cos \psi_0, \quad (22b)$$

$$\partial \psi_{1,2} / \partial \tau + v_g^{(1,2)} \partial \psi_{1,2} / \partial \xi = a_3 a_{2,1}^* \sin \psi_0 / a_{1,2}, \quad (22в)$$

$$\partial \psi_3 / \partial \tau + v_g^{(3)} \partial \psi_3 / \partial \xi = a_1 a_2 \sin \psi_0 / a_3, \quad (22г)$$

где $\psi_0 = \psi_3 - \psi_1 - \psi_2$. Все уравнения в этой системе записаны со знаком «+» перед членами, содержащими $v_g^{(j)}$, чтобы она была одновременно пригодна как для попутных, так и для встречных потоков. Направление распространения волн будет учитываться знаком соответствующей групповой скорости.

Рассмотрим вначале систему «два попутных ЭП - обратная ЭМВ». Очевидно, что групповые скорости ВПЗ должны быть близки к скоростям соответствующих потоков: $v_g^{(1)} \approx 1$, $v_g^{(2)} \approx \mu$. Исходя из предположений, сделанных в разделе 1, выберем $\mu=2$, а также положим $v_g^{(3)} = -1$.

Иследуем возбуждение колебаний при подаче на вход ЗС (в точке $\xi=1$) импульса электромагнитного поля. Тогда систему (29) следует дополнить начальными и граничными условиями

$$a_3(\tau=0, \xi) = a_0, \quad a_{1,2}(\tau=0, \xi) \ll a_0, \quad (23)$$

$$a_3(\tau, \xi=1) = a_0, \quad a_{1,2}(\tau, \xi=0) = 0, \quad (24a)$$

$$\psi_j(\tau=0, \xi) = 0. \quad (24б)$$

Типичные результаты численного моделирования, иллюстрирующие динамику амплитуд при развитии взрыва, представлены на рис. 4.

Следует, однако, заметить, что начальные фазы волн выбраны такими, что $\psi_0(\tau=0)=0$. Используя пространственно-однородный вариант уравнений (22), нетрудно показать, что это значение является оптимальным для развития неустойчивости. Как изменится поведение системы при произвольном выборе ψ_j ? Результаты моделирования показывают, что время взрыва τ^* определяется начальным значением ψ_0 . Довольно быстро наступает синхронизация фаз (рис. 5), то есть $\psi_0 \rightarrow 2\pi n$, $n=0,1,2,\dots$, в зависимости от того, каковы были начальные фазы каждой из волн. По сути дела, τ^* определяется тем временем, которое требуется системе для синхронизации фаз. На рис. 6 приведена зависимость τ^* от ψ_0 . Видно, что τ^* резко увеличивается при наихудшем для синхронизации условии $\psi_0=\pi$.

Зависимость времени взрыва от амплитуды начального возмущения при начальных условиях (23) и граничных условиях (24) приведена на рис. 7 (кривая 1). Значение τ^* при данном a_0 , очевидно, дает оценку минимальной длительности импульса, которая необходима для возбуждения. Видно, что существует пороговое значение a_0 , при котором $\tau^* \rightarrow \infty$. Если расстройка скоростей потоков увеличивается, то увеличивается и пороговая амплитуда (кривая 3).

При обсуждении резонансных условий в разделе 1 отмечено, что ЭМВ участвует сразу в четырех процессах взаимодействия, то есть имеет место так называемый мультитриадный резонанс [16]. Можно с уверенностью сказать, что вдалеке от порога неустойчивости процессы, не приводящие к взрыву, не будут оказывать существенного влияния. Однако, вблизи порога их необходимо учитывать. Анализируя пространственно-однородный вариант трехволновых уравнений, можно показать, что при начальных условиях (23) процессы, в которых ЭМВ распадается на быструю и медленную волны, не будут иметь место (этот вывод подтверждается и результатами численного моделирования). Поэтому необходимо учитывать только процесс вида

$$\text{ЭМВ} \rightarrow \text{БВПЗ} + \text{БВПЗ}.$$

В этом случае к уравнениям (22) добавятся еще два для амплитуд и фаз быстрых ВПЗ

$$\begin{aligned} \partial a_{4,5}/\partial \tau + v_g^{(4,5)} \partial a_{4,5}/\partial \xi &= -a_3 a_{5,4}^* \cos \phi_0, \\ \partial \psi_{4,5}/\partial \tau + v_g^{(4,5)} \partial \psi_{4,5}/\partial \xi &= -a_3 a_{5,4}^* \sin \phi_0 / a_{4,5}, \end{aligned}$$

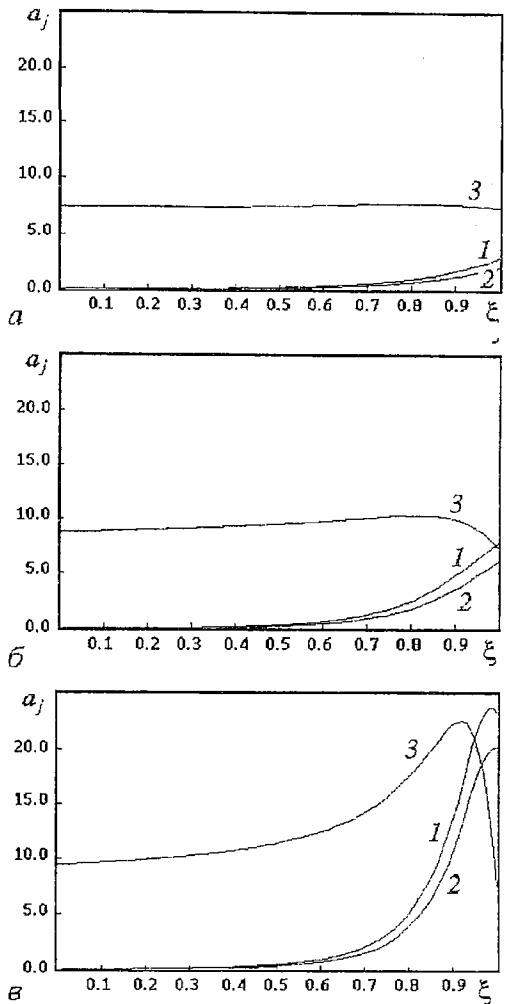


Рис. 4. Динамика амплитуд волн при развитии взрыва в системе с попутными ЭП при $a_0=7.5$, $v_g^{(1)}=1.0$, $v_g^{(2)}=2.0$, $v_g^{(3)}=-1.0$, $\tau=1.0$ (а), 3.5 (б), 3.88 (в): 1 - a_1 ; 2 - a_2 ; 3 - a_3

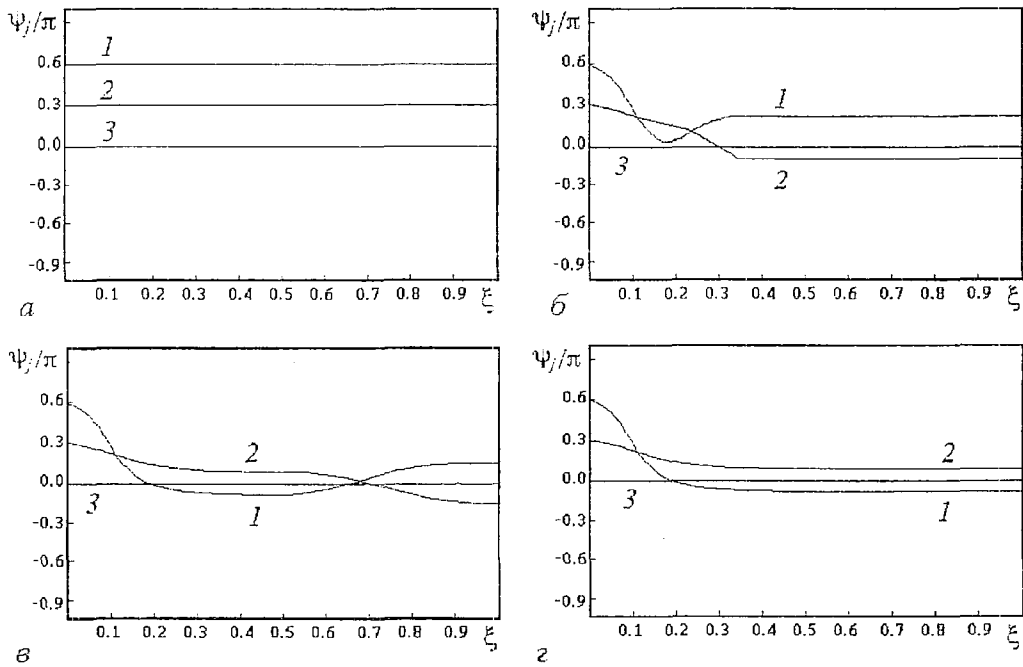


Рис. 5. Синхронизация фаз при взрывной неустойчивости (a_0 и $v_g^{(j)}$) - те же, что и на рис.4, $\tau=0.00$ (а); 0.17 (б); 0.47 (в); 0.90 (г): 1 - ψ_1 ; 2 - ψ_2 ; 3 - ψ_3

где $\phi_0 = \psi_3 - \psi_4 - \psi_5$, а уравнения (22б) и (22г) примут вид

$$\partial a_3 / \partial \tau + v_g^{(3)} \partial a_3 / \partial \xi = a_1 a_2 \cos \psi_0 + a_4 a_5 \cos \phi_0,$$

$$\partial \psi_3 / \partial \tau + v_g^{(3)} \partial \psi_3 / \partial \xi = (a_1 a_2 \sin \psi_0 + a_4 a_5 \sin \phi_0) / a_3.$$

Групповые скорости $v_g^{(4,5)}$ примем равными $v_g^{(1,2)}$, так как они близки к соответствующим скоростям потоков.

Вопрос о выборе начальных фаз остается открытым. Поэтому ограничимся исследованием случая $\psi_0(\tau=0)=0$, $\phi_0(\tau=0)=\pi$, что является оптимальным условием как для взрывной, так и для распадной неустойчивости. Зависимость τ^* от a_0 для

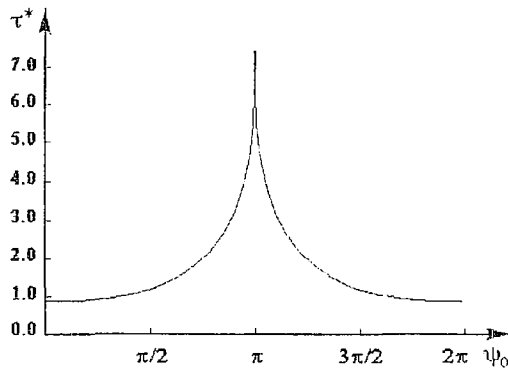


Рис. 6. Зависимость времени взрыва от $\psi_0(T=0)$ (a_0 и $v_g^{(j)}$) - те же, что и на рис.4)

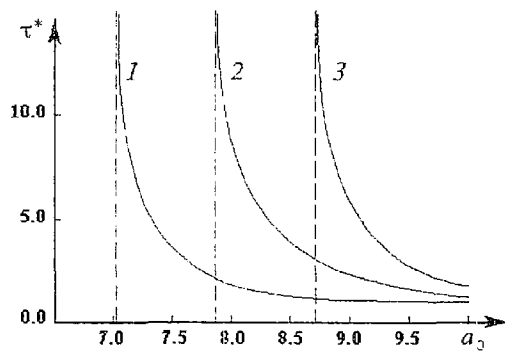


Рис. 7. Зависимость времени взрыва от амплитуды начального возмущения в системе с попутными ЭП: 1 - $v_g^{(1)}=1.0$, $v_g^{(2)}=2.0$, $v_g^{(3)}=-1.0$; 2 - $v_g^{(j)}$ - те же и учитывается влияние распадной неустойчивости; 3 - $v_g^{(1,3)}$ - те же, $v_g^{(2)}=3.0$

этого случая приведена на рис. 7 (кривая 2). Видно, что пороговое значение амплитуды несколько увеличивается, но подавления неустойчивости не происходит.

Исследование взрывной неустойчивости в системе со встречными потоками приводит к аналогичным результатам. Для простоты ограничимся случаем идентичных потоков, выбирая $v_g^{(1)}=1$, $v_g^{(2)}=-1$. Поскольку ЭМВ является незамедленной ТМ-волной в гладком волноводе, то $v_g^{(3)}$ должна быть порядка c (в общем случае, когда ω_3 не близка к частоте отсечки). В соответствии с результатами раздела 3, выберем $v_g^{(3)}=3$, чтобы в первом приближении можно было пренебречь релятивистскими эффектами. Вместо граничных условий (24а) необходимо выбрать следующие:

$$a_3(\tau, \xi=0) = a_0, \quad a_1(\tau, \xi=0) = 0,$$

$$a_2(\tau, \xi=1) = 0.$$

На рис. 8 показана динамика амплитуд взаимодействующих волн при развитии взрыва. Отметим, что порог неустойчивости в данном случае оказывается несколько ниже, что объясняется, очевидно, более благоприятным пространственным распределением амплитуд.

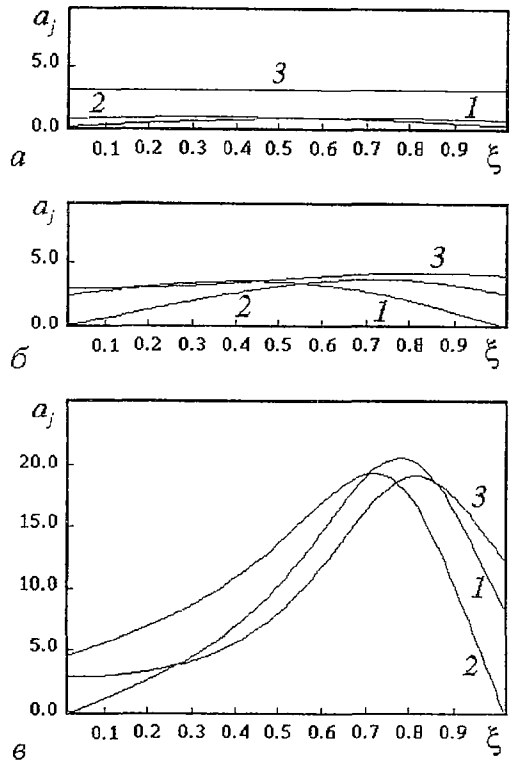


Рис. 8. Динамика амплитуд волн при развитии взрыва в системе со встречными ЭП при $a_0=3.0$, $v_g^{(1)}=1.0$, $v_g^{(2)}=-1.0$, $v_g^{(3)}=3.0$, $\tau=3.00$ (а); 3.75 (б); 4.05 (в): 1 - a_1 ; 2 - a_2 ; 3 - a_3

Заключение

В настоящей работе показана принципиальная возможность осуществления взрывной неустойчивости при взаимодействии двух электронных потоков с электромагнитной волной. Рассмотрены конфигурации с попутными и встречными потоками, и получены уравнения трехволнового взаимодействия, описывающие динамику медленно меняющихся амплитуд. Численное решение трехволновых уравнений с соответствующими граничными условиями показало, что из-за различия групповых скоростей взаимодействующих волн взрывная неустойчивость носит пороговый характер, то есть имеет место жесткое возбуждение колебаний. Проведенные исследования позволили выявить особенности физических процессов при развитии неустойчивости и определить влияние различных факторов на пусковые условия генерации.

Численное моделирование на основе трехволновых уравнений позволяет ответить на ряд важных вопросов: оценить порог неустойчивости, время взрыва, исследовать влияние распадной неустойчивости. Вместе с тем, необходимо заметить, что оно носит скорее качественный характер. По сути дела это моделирование позволяет исследовать лишь пусковой режим генератора, что аналогично построению линейной теории традиционных приборов (несмотря на то, что уравнения являются нелинейными, поскольку взрывная неустойчивость - принципиально нелинейный процесс). При помощи высших приближений метода

многомасштабных разложений можно ввести в трехволновые уравнения члены, отвечающие за насыщение, например, высшие нелинейности. Однако, в данном случае очевидно, что механизмом, приводящим к насыщению, как и в приборах О-типа, будет обгон, приводящий к разгрузировке сгустков. Подобный режим принципиально невозможно описать при помощи волновых уравнений. Исследовать его можно лишь при помощи традиционных для вакуумной электроники СВЧ методов крупных частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-16753) и Программы Госкомвуза РФ по фундаментальным исследованиям в области электроники и радиотехники.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
3. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
4. Буц В.А., Измайлов А.Н. Взрывная неустойчивость в системах с электронным пучком // ЖТФ. 1976. Т.46, вып. 11. С. 2451.
5. Буц В.А., Измайлов А.Н. Генерирование ВЧ-колебаний на основе взрывной неустойчивости // ЖТФ. 1978. Т.48, вып. 7. С. 1366.
6. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
7. Liu C.S., Tripath V.K. Explosive instability in a backward wave oscillator // IEEE Trans. Plasma Sci. 1993. Vol. PS-21, № 1. P. 191.
8. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Взрывная неустойчивость при взаимодействии двухскоростного электронного потока с обратной электромагнитной волной // Письма в ЖТФ. 1995. Т.21, вып. 12. С. 26.
9. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ. М.: Высш. шк., 1990.
10. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
11. Рабинович М.И., Реутов В.П., Цветков А.А. О слиянии волновых импульсов и пучков при взрывной неустойчивости // ЖЭТФ. 1974. Т.67, № 2. С. 525.
12. Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Две лекции по нестационарной теории взаимодействия электронных пучков с электромагнитными волнами // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (4-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн.5. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. С. 88.
13. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. О характере неустойчивости в ЛБВ вблизи границы полосы пропускания // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т.23, № 9. С. 1104.
14. Руткевич Б.Н., Руткевич П.Б. Развитие неустойчивости диспергирующих волн в двухпоточковой плазме // Физика плазмы. 1980. Т.6, № 3. С. 538.
15. Захаров В.Е., Манаков С.В. Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1975. Т.69, № 5. С. 1654.
16. Ablowitz M.J., Haberman R. Resonantly coupled nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. 1975. Vol.16, № 11. P. 2301.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 10.04.96

EXPLOSIVE INSTABILITY IN SYSTEMS «TWO INTERACTING ELECTRON BEAMS - ELECTROMAGNETIC WAVE»

N.M. Ryskin, D.I. Trubetskov

Explosive instability in two electron beams - electromagnetic wave interaction is studied. Both cases of copropagating and contrapropagating beams are considered. The equations of three wave interaction are derived which describe the dynamics of slowly varying amplitudes. Numerical simulation of these equations with proper boundary conditions reveals the main features of the instability and shows the influence of different quantities on the starting conditions of oscillations.



Трубцов Дмитрий Иванович родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук. Область научных интересов - радиофизика в той ее части, которая связана с взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями и с теорией сверхвысокочастотных электронных приборов; теория колебаний и волн; применение методов нелинейной динамики в различных областях науки; история науки.

Автор и соавтор одиннадцати монографий и учебных пособий по сверхвысокочастотной электронике, теории колебаний и волн и истории электронных ламп сверхвысоких частот, в том числе монографии «Аналитические методы расчета в электронике СВЧ» (М.: Сов. радио, 1970; совместно с В.И. Шевчиком), коллективной монографии «Электроника ламп с обратной волной» (Изд. Сарат. ун-та, 1975), учебного пособия «Введение в теорию колебаний и волн» (первое издание, М.: Наука, 1984; второе - М.: Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем), книги «Формирование радиоэлектроник» (М.: Наука, 1988, раздел «История электронных ламп сверхвысоких частот»). В 1989 году книга «Введение в теорию колебаний и волн» в Нидерландах переведена на английский язык и вышла под названием «Oscillations and waves in linear and nonlinear systems» (The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989). Опубликовал четыре книги лекций по электронике СВЧ и истории электронных ламп и много научных статей по указанным выше направлениям. Зам. главного редактора журнала «Прикладная нелинейная динамика». Член редколлегии журнала «Известия вузов. Радиофизика».



Рыскин Никита Михайлович - родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета (1991). Работает в НИИ механики и физики СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» в СГУ (1996). Область научных интересов - нелинейные волновые явления в распределенных системах, содержащих электронные потоки и электромагнитные поля.



ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ УСИЛЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ИНФЛЯЦИИ

Л. А. Кручинин, П. С. Разенштейн, А. В. Сморгонский

Рассмотрена модель взаимодействия двух предприятий, связанных взаимными поставками, в условиях неизменности производственного процесса. Определены значимые параметры для данной модели и найдены их бифуркационные значения, определяющие момент возникновения тенденции к неограниченному росту цен на продукцию. Исследовано влияние бифуркационного перехода на некоторые экономические показатели работы предприятий.

Вопросы развития инфляции играют важную роль в понимании широкого круга процессов, которые происходят в настоящее время в экономике России. С целью изучить динамику цен, которые могут устанавливать на свою продукцию предприятия, стремящиеся достичь определенной рентабельности своих производств, не будучи при этом стесненными конкуренцией на рынке, ниже рассматривается схема взаимодействия двух предприятий, связанных условиями взаимных поставок.

1. Описание модели и решение системы балансовых уравнений

Два предприятия, называемые далее **A** и **B** (рис. 1), закупают для своего производства исходные материалы по ценам M_a, M_b за физическую единицу и в объемах u_a, u_b необходимых для обеспечения нормальной работы в течение определенного интервала времени (допустим, месяца или квартала). Все затраты на производство продукции (за исключением покупки исходных материалов) составляют у них за этот интервал в денежном выражении T_a и T_b . На свободный рынок они выставляют свою продукцию по ценам и в объемах $P_a, P_b; w_a, w_b$, соответственно. Кроме того, эти предприятия по условиям технологического функционирования связаны взаимными поставками продуктов друг для друга в объемах v_a, v_b и продают друг другу свою продукцию по ценам Q_a, Q_b . Будем предполагать, что технологическая схема неизменна, то есть все физические объемы $u_{a,b}, v_{a,b}, w_{a,b}$ как закупаемых материалов, так и поставляемых продуктов фиксированы. Меняться в модели могут только цены, затраты и связанные с ними величины денежных потоков.

Вводя понятие прибыли $Y_{a,b}$, как разности между полученными за определенный интервал времени доходами и произведенными затратами, можно записать уравнения баланса

$$\begin{cases} (P_a w_a + Q_a v_a) - (M_a u_a + T_a + Q_b v_b) = Y_a, \\ (P_b w_b + Q_b v_b) - (M_b u_b + T_b + Q_a v_a) = Y_b. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь содержимое первых скобок определяет доходы, содержимое вторых скобок - расходы, а $Y_{a,b}$ - прибыль соответствующего предприятия.

В уравнения баланса входят шесть величин (не являющихся свободными параметрами), которые могут меняться во времени: $P_{a,b}$, $Q_{a,b}$, $Y_{a,b}$. Для установления недостающих связей сделаем следующие предположения:

1. Каждое из предприятий стремится поддерживать рентабельность своего производства, записываемую как

$$R_{a,b} = Y_{a,b} / (M_{a,b} u_{a,b} + T_{a,b} + Q_{b,a} v_{b,a}) \quad (2)$$

на определенном уровне. Для последующих расчетов удобно ввести величину

$$r_{a,b} = 1 + R_{a,b}, \quad (3)$$

называемую в дальнейшем показателем рентабельности, который будет предполагаться равным определенной величине и постоянным.

2. Предприятия, несмотря на стабильные связи, рассматривают своего партнера всего лишь как одного из агентов свободного рынка, то есть продают ему свою продукцию по рыночным ценам $Q_{a,b} = P_{a,b}$.

Этих предположений достаточно, чтобы найти равновесные цены обмена, при которых выполняются уравнения баланса и достигается требуемая рентабельность производства $R_{a,b}$. Введем следующие обозначения:

$$x = P_a v_a / v_b, \quad \mu_a = r_a v_a^2 / [v_b (w_a + v_a)], \quad c_a = (M_a u_a + T_a) / v_a, \quad (4)$$

$$k = (\mu_a \mu_b)^{1/2},$$

$$y = P_b v_b / v_a, \quad \mu_b = r_b v_b^2 / [v_a (w_b + v_b)], \quad c_b = (M_b u_b + T_b) / v_b.$$

С учетом сделанных выше предположений и обозначений, уравнения (1) запишутся в виде

$$\begin{cases} x - y \mu_a = c_a \mu_a, \\ -x \mu_b + y = c_b \mu_b. \end{cases} \quad (5)$$

Решения этой системы имеют вид

$$x = (c_a \mu_a + c_b k^2) / (1 - k^2), \quad y = (c_b \mu_b + c_a k^2) / (1 - k^2). \quad (6)$$

Следует обратить внимание на то, что введенные выше переменные x и y пропорциональны ценам, но отличаются от них коэффициентами, которые, в принципе, могут оказаться равными нулю ($v_a, v_b = 0$). Истинные цены при этом принимают вполне конкретные значения: $P_{a,b} = (M_{a,b} u_{a,b} + T_{a,b}) r_{a,b} / w_{a,b}$.

Легко видеть, что при $k < 1$ решения (6) действительно дают некоторые равновесные значения цен, при которых в указанной схеме достигается требуемая рентабельность предприятий.

Ситуация оказывается иной при $k \geq 1$. Равновесные цены при этом либо формально уходят в бесконечность, либо оказываются в области отрицательных значений. Хотя появление отрицательных цен в динамике в принципе возможно¹, однако назвать их равновесными (то есть обеспечивающими сколь угодно долгую работу всей системы) с экономической точки зрения нельзя.

Для более глубокого понимания полученных результатов рассмотрим систему в динамике.

¹ Формально понятие отрицательных цен может возникнуть в условиях взаимных поставок, когда одно предприятие не только поставляет свою продукцию другому, но еще и платит за ожидаемые встречные поставки, в то время как партнер такие поставки не осуществляет и полученные товары не оплачивает или делает это в незначительных объемах. Из общих соображений ясно, что такая ситуация может сохраняться только некоторое непродолжительное время.

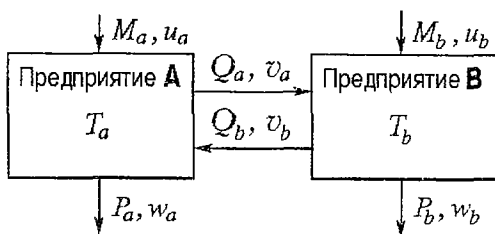


Рис. 1. Схема взаимодействия двух предприятий, связанных взаимными поставками

2. Динамическое поведение системы

Для перехода к динамическим уравнениям предположим, что цены на свою продукцию в течение определенного срока (например, месяца) предприятия поддерживают постоянными. В то же время цены накупаемые со стороны материалы M_a , M_b или внутренние затраты предприятий T_a , T_b могут измениться в течение данного интервала времени и, формируя свои цены на товары на следующий интервал, предприятия будут эти изменения учитывать с тем, чтобы восстановить требуемую рентабельность производства. Поскольку по предположению предприятия рассматривают друг друга как агентов свободного рынка (то есть договоров о взаимном согласовании цен не заключают), то об изменении цен поставок со стороны партнера, изменяющих рентабельность их производства, они узнают лишь при подведении баланса в конце интервала. Следовательно, меры по восстановлению своей рентабельности (то есть изменение цен на отпускаемую продукцию) они производят в течение следующего интервала (месяца). Спустя еще один интервал времени, это вызывает ответную реакцию партнера и т. д. В результате таких рассуждений приходим к следующей системе динамических уравнений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (c_a + y_n)\mu_a, \\ y_{n+1} = (c_b + x_n)\mu_b. \end{cases} \quad (7)$$

Подчеркнем еще раз, что величины $\mu_{a,b}$, определяющие технологию производства на предприятиях, считаются постоянными, а величины $c_{a,b}$, отражающие общие затраты на производство (исключая покупку исходных материалов у партнера) могут на каком-то временном интервале измениться.

Если считать начальные значения цен x_0 , y_0 и параметров $c_{a,b}$ заданными, то решение системы (7) может быть найдено стандартными математическими методами (см. Приложение 1) и будет иметь вид

$$x_n = (c_a\mu_a + c_b k^2)/(1 - k^2) + k^n [x_0 k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_b k^2]/[2k(k-1)] + (-k)^n [x_0 k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_b k^2]/[2k(k+1)]. \quad (8)$$

Аналогичное решение для y_n может быть записано, исходя из соображений симметрии относительно индексов a и b .

Если дополнительно предположить, что в начальный момент времени (до скачка цен) предприятия находились в равновесном состоянии, то решение запишется в более простом виде

$$x_n = (c_a\mu_a + c_b k^2)/(1 - k^2) - k^n \begin{cases} (\Delta c_a\mu_a + \Delta c_b k^2)/(1 - k^2), & n = 2m, \\ k(\Delta c_a\mu_a + \Delta c_b)/(1 - k^2), & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (9)$$

где $c_{a,b}^0 = (M_{a,b}^0\mu_{a,b} + T_a^0)/\nu_{a,b}$ - значения величин $c_{a,b}$ в начальный момент времени, до скачка цен на сырье или изменения собственных затрат, а $\Delta c_{a,b} = c_{a,b} - c_{a,b}^0$ - приращение, полученное величинами $c_{a,b}$ в результате этого скачка. И в том, и в другом случае первое слагаемое полученного решения (8) или (9) является координатой найденного нами ранее состояния равновесия, к которому при $n \rightarrow \infty$ решение стремится при $k < 1$, и от которого решение «убегает» при $k > 1$. Кроме того, можно утверждать, что вне зависимости от выбора начальной точки (будь она даже в области отрицательных цен) при $k < 1$ через некоторое время цены станут положительными, что не всегда выполняется при $k > 1$. Поведение решения системы для различных значений k наглядно изображено на рис. 2.

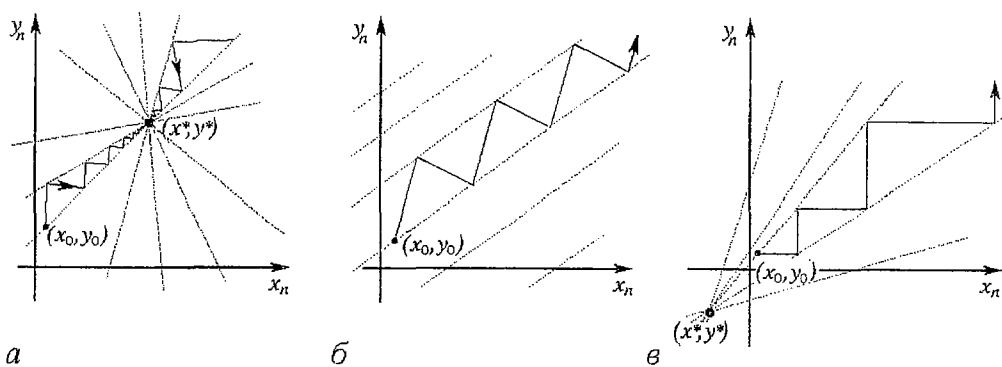


Рис. 2. Фазовая плоскость динамической системы, описываемой уравнениями (7) при: а - $0 < k < 1$; б - $k = 1$; в - $k > 1$

3. Интерпретация полученных результатов

Смысл полученного решения (9) может быть пояснен следующим образом. Предприятия в некоторый определенный момент имели затраты на уровне $c_{a,b}^0$ и отпускали продукцию по ценам

$$x_0 = (c_a^0 \mu_a + c_b^0 k^2) / (1 - k^2), \quad y_0 = (c_b^0 \mu_b + c_a^0 k^2) / (1 - k^2). \quad (10)$$

В случае $k < 1$ и при неизменных величинах $c_{a,b}^0$ предприятия могли работать в этом режиме сколь угодно долго, так как такое их взаимодействие удовлетворяет уравнениям баланса (5) при желательном для каждого из них показателе рентабельности $r_{a,b}$. Далее, в результате произошедшего увеличения цен исходных материалов или увеличения внутренних затрат на производство на величину $\Delta c_{a,b}$, предприятия, стремясь поддержать свою рентабельность на прежнем уровне, начинают менять цены на выходной продукт, беря в расчет цены на продукцию, покупаемую у партнера по данным предыдущего интервала времени. Поскольку каждое из них идет к своей цели независимо, то изменение цены продукции одним из них может быть учтено партнером лишь в следующий период, то есть к новому состоянию равновесия они приближаются шаг за шагом, как бы нащупывая его итерационным путем.

Рассматривая выражение для новых равновесных цен, легко убедиться, что их масштаб определяется не только величиной общих затрат $c_{a,b}$ и их изменениями $\Delta c_{a,b}$, но и сильно зависит от близости параметра k (который можно назвать «параметром связанности») к единице.

При $k \ll 1$ предприятия устанавливают цены пропорционально произведенным затратам и желаемой рентабельности производства. Скачок цен на исходные материалы или на внутренние затраты предприятия «отслеживают» в ценах на выходную продукцию с соответствующими коэффициентами: $\Delta x, \Delta y = (\Delta c_{a,b} \mu_{a,b} + \Delta c_{b,a} k^2) / (1 - k^2) \approx \Delta c_{a,b} \mu_{a,b}$. Если величины $c_{a,b}$ остаются далее постоянными, то предприятия, придя рано или поздно в состояние близкое к состоянию равновесия, перестают повышать цены на свою продукцию (см. рис. 2, а).

Иное положение складывается при k , достаточно близких к 1. Из тех же выражений для равновесных цен видно, что при k , стремящемся к 1, масштаб их неограниченно возрастает. Это значит, что при достаточно больших долях взаимобмена и выдвигении требования о достижении достаточно высокой рентабельности так, что параметр связанности приближается к 1, предприятия для достижения поставленной цели начинают неограниченно повышать цены на свою продукцию. При $k = 1$ решение (9) не является корректным и должно быть заменено (см. Приложение 1) на следующее:

$$x_n = n(c_a \mu_a + c_b)/2 + \begin{cases} x_0, & n = 2m, \\ y_0 \mu_a - (c_b - c_a \mu_a)/2, & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (11)$$

Из этого выражения видно, что никакое значение цен x_0, y_0 не является равновесным, и предприятия в погоне за «недостижимой» рентабельностью повышают цены на выходные продукты, даже если цены на исходные материалы и затраты на само производство не менялись. (Формально состояние равновесия при этом уходит в бесконечность, см. рис. 2, б). В результате, такие предприятия сами становятся источниками инфляции без всяких внешних толчков. Если при этом меняются еще и величины $c_{a,b}$, то меняется наклон прямых, на которые попадают точки решения уравнений (11) на рис. 2, б, но качественный вид процесса безграничного роста цен остается неизменным.

Те же эффекты имеют место и при $k > 1$, то есть предприятия в погоне за желаемым уровнем рентабельности увеличивают цены неограниченно даже при неизменных значениях $c_{a,b}$. Однако здесь эти эффекты сильнее, так как масштабы скачков цен увеличиваются с каждым периодом (см. рис. 2, в). Математически это связано с тем, что прямые, на которых лежат точки решения, расходятся лучами из неустойчивого состояния равновесия, расположенного в этом случае в области отрицательных цен².

Из приведенного анализа следует, что причиной неудержимого роста цен на выходную продукцию является стремление предприятий обеспечить себе высокую рентабельность при том, что значительная часть продукции участвует во взаимном обмене. Поскольку ни одно из предприятий само по себе не является источником денежных средств, а черпают они их со свободного рынка, то приток этих средств для покрытия увеличивающихся издержек может обеспечить только та доля товаров, которая и уходит на свободный рынок. Если эта доля чрезмерно мала (а доля взаимного обмена, соответственно, велика), то предприятия оказываются не в состоянии достичь желаемой рентабельности, реально получая средства лишь в виде слабых потоков со свободного рынка, неся, однако, затраты на производство всех товаров, в том числе, и участвующих во взаимном обмене.

Наиболее опасным (с точки зрения развития инфляции) является тот факт, что в рассмотренной модели предприятия формально продают товары друг другу по ценам свободного рынка, то есть никак не выделяют своего партнера из общего числа других покупателей. Следовательно, если такие связи нерегулярны или происходят не непосредственно между двумя партнерами, а через посредников или по замкнутой цепочке, включающей в себя несколько предприятий, то предприятия, в принципе, могут и не подозревать о наличии в их отношениях взаимных поставок. Тем самым, стремясь к достижению определенного уровня рентабельности для своего производства, они будут неосознанно загонять друг друга в область все более и более высоких цен. В развитых экономиках такому развитию событий препятствует наличие конкурентов, стремящихся привлечь покупателей более низкими ценами. Здесь же этот фактор в расчет не принимался, отражая тем самым сильную монополизацию российских рынков. Именно по этой причине рассмотренный механизм развития инфляции может оказаться существенным для нашей экономики.

При переходе к динамике мы отметили, что в уравнения баланса входят цены, которые определены в различные моменты времени. В силу этого интересно рассмотреть реальное уравнение баланса для предприятий и определить то значение показателя рентабельности $r_{a,b}$, которое предприятия достигают на каждом шаге.

² Возможные причины появления отрицательных цен обсуждались выше. Здесь же подчеркнем, что в рассматриваемой модели возможность появления отрицательных цен формально исключена, поскольку предполагается, что и поставка товаров, и их оплата производятся в течение одного временного интервала. В силу этого область нахождения решения ограничена первым квадрантом. С математической точки зрения, однако, переход состояния равновесия в область отрицательных цен получению корректного решения в области положительных цен не противоречит.

Для предприятия **A** рассогласование, показывающее насколько увеличилась (или уменьшилась) прибыль предприятия в расчете на единицу выпускаемой продукции по сравнению с запланированной, запишется следующим образом:

$$\text{при } k < 1 \quad \Delta x_n = x_n - (c_a + y_n)\mu_a = x_n - x_{n+1} = -k^n \begin{cases} \Delta c_a \mu_a, & n = 2m, \\ k \Delta c_b, & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (12a)$$

$$\text{при } k > 1 \quad \Delta x_n = k^{n-1} \begin{cases} k(x_0 - c_a \mu_a - y_0 \mu_a), \\ -x_0 k^2 - c_b k^2 + y_0 \mu_a, \end{cases} \quad (12b)$$

$$\text{при } k = 1 \quad \Delta x_n = -(c_a \mu_a + c_b)/2. \quad (12в)$$

По аналогии в силу симметрии по индексам a, b записывается рассогласование и для предприятия **B** (далее будем вычислять все соотношения только для одного предприятия, например, **A**). Легко видеть, что при $k < 1$ рассогласование с течением времени уменьшается, при $k = 1$ остается постоянным, а при $k > 1$ увеличивается. Определим теперь отношение реального показателя рентабельности на каждом шаге ($r_{a,b}^*$) к тому, который стремятся достичь предприятия. Как видно из (3), показатель рентабельности представляет собой отношение доходов, полученных от продажи продукции, к её себестоимости. Исходя из этого, а также используя (4) и (5), получим

$$r_a^* = x_n / [(c_a + y_n)\mu_a / r_a] \Rightarrow \gamma = r_a^* / r_a = x_n / x_{n+1} = 1 + \Delta x_n / x_{n+1}. \quad (13)$$

Такая запись позволяет сделать вывод, что при $k \leq 1$ реальный показатель рентабельности с течением времени стремится к запланированному. Если же $k > 1$, то как Δx_n , так и x_n стремятся к бесконечности. Однако, существуют пределы их отношения на подпоследовательностях четных и нечетных временных интервалов, которые определяются следующим образом (см. Приложение 2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_a^* / r_a) = 1 + (k^2 - 1)/k \begin{cases} (x_0 - c_a \mu_a - y_0 \mu_a) / [c_a \mu_a + x_0(k^2 - 1) + c_b k^2], & n = 2m, \\ (-x_0 k^2 - c_b k^2 + y_0 \mu_a) / [c_a \mu_a k^2 + y_0 \mu_a(k^2 - 1) + c_b k^2], & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (14)$$

Поскольку все величины, входящие в формулу (14), за исключением числителей, неотрицательны при $k > 1$, то условие достижения предприятием желаемой рентабельности совпадает с условием неотрицательности числителя. Более того, условия эти для обоих предприятий совпадают с точностью до замены четных и нечетных моментов времени. Для предприятия **A** система неравенств, которой должны удовлетворять начальные условия для достижения им желаемой рентабельности, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 \mu_a > c_a \mu_a, \\ -x_0 \mu_b + y_0 > c_b \mu_b. \end{cases} \quad (15)$$

Прямые, представляющие собой границы выполнения каждого из неравенств в отдельности (рис. 3), пересекаются в найденной нами ранее точке состояния равновесия и делят плоскость начальных условий на 4 области. Интересным является тот факт, что область достижения желаемой рентабельности во все моменты времени (на рисунке она обозначена цифрой 4) полностью лежит в области отрицательных начальных условий. Поскольку начальные условия положительны, а также из того, что выражение (13) достигает своего нижнего предела именно снизу, следует невозможность постоянного достижения желаемой рентабельности любым из предприятий. Более того, можно сказать, что предприятия будут по очереди достигать желаемой рентабельности, начиная с

некоторого момента времени, если точка начальных условий находится выше или ниже прямых 2 или 5, соответственно, и не будут достигать ее никогда, если точка находится между ними.

Следующим встает вопрос об областях безубыточной работы предприятий. Для этого в силу формулы (13) необходимо, чтобы $\gamma_{r_a} = r_a^* > 1$. Условия выполнения этого требования для произвольного случая приведены в Приложении 2. Здесь же мы ограничимся частным случаем, когда предприятия симметричны по всем параметрам, а различаться могут только начальные условия. В этом случае уравнения границ безубыточности выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} y_0 \leq x_0[k(r_a-1) + r_a]/(kr_a) + c_a(r_a - k)/[r_a(k-1)], \\ x_0 \leq y_0[k(r_a-1) + r_a]/(kr_a) + c_a(r_a - k)/[r_a(k-1)]. \end{cases} \quad (16)$$

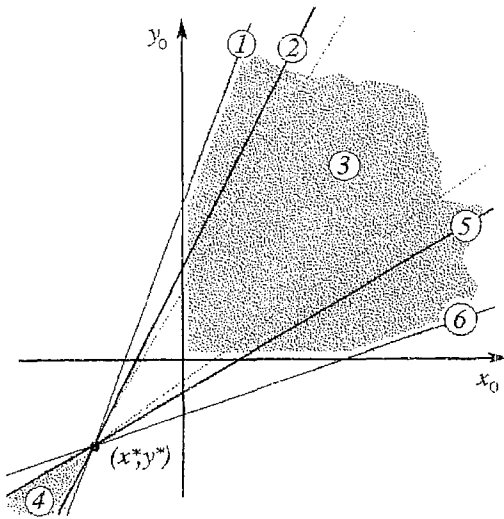


Рис. 3. Разбиение плоскости начальных условий на области для случая $k > 1$: 1 - граница области безубыточной работы предприятия А; 2 - граница области достижения предприятием В желаемой рентабельности; 3 - область безубыточной работы обоих предприятий одновременно; 4 - область достижения обоими предприятиями желаемой рентабельности; 5 - граница области достижения предприятием А желаемой рентабельности; 6 - граница области безубыточной работы предприятия В

в силу непрерывности все сделанные выводы можно распространить хотя бы на некоторую окрестность в пространстве параметров, где симметрия предприятий не соблюдается.

4. Сравнительный анализ для цепочки предприятий

Для выявления роли взаимных поставок целесообразно рассматривать схему рис. 1, модифицированную так, чтобы обратная связь между предприятиями оказалась разорванной, объемы производимой продукции сохранены, а неизменная стоимость части материалов для предприятия А в размере Q_{bv} включена в величину M_{a, u_a} (рис. 4). При этом мы полагаем, что предприятие А теперь закупает всё сырье на свободном рынке факторов, а не у партнера, и увеличение предприятием В цены на свою продукцию не сказывается на рыночной цене сырья для предприятия А. В этом случае можно говорить о «последовательной цепочке» предприятий.

На рис. 3 показано возможное расположение этих прямых, а также один из возможных вариантов их расположения относительно границ области достижения желаемой рентабельности. Факт того, что прямые эти могут располагаться только так, как это показано на рис. 3, доказан в Приложении 2. Полученные таким образом результаты показывают, что существует область безубыточной работы обоих предприятий сразу (на рисунке она заштрихована), и что при различных параметрах модели в области достижения одним предприятием желаемой рентабельности другое может быть как убыточным (для этого случая границы области безубыточной работы предприятий показаны пунктиром), так и прибыльным. Этот факт достаточно важен, поскольку зная это, предприятие может несколько изменить свои параметры так, чтобы если и не достигать желаемой рентабельности, то не быть хотя бы убыточным. В заключение заметим, что рассмотрение частного случая не уменьшает важности полученных результатов, поскольку в

Динамические уравнения в этом случае, с учетом сделанных ранее обозначений, запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} x_{n+1} = c_a \mu_a, \\ y_{n+1} = (c_b + x_n) \mu_b. \end{cases} \quad (17)$$

Из уравнений (9) легко определить скачок цен на выходную продукцию в системе предприятий, связанных взаимными поставками, при изменении входных цен на $\Delta c_{a,b}$: $\Delta x, y =$

$= (\Delta c_{a,b} \mu_{a,b} + \Delta c_{b,a} k^2) / (1 - k^2)$.
 Для рассматриваемого случая последовательной цепочки аналогичные приращения $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{y}$ записываются следующим образом: $\Delta \bar{x} = \Delta c_a \mu_a$, $\Delta \bar{y} = \Delta c_a k^2 + \Delta c_b \mu_b$. Легко найти отношение приращений в этих двух случаях для каждого из предприятий: $\Delta x / \Delta \bar{x} = [1 + \mu_b \Delta c_b / \Delta c_a] / (1 - k^2)$; $\Delta y / \Delta \bar{y} = 1 / (1 - k^2)$. Нетрудно видеть, что при малых k ($k \ll 1$) отношение цен близко к 1, при увеличении k оно возрастает и при $k=1$ уходит в бесконечность. При $k > 1$ полученное выражение не имеет смысла, так как цены в системе предприятий, связанных взаимными поставками, неограниченно возрастают. Заметим, что разрыв хотя бы одной из связей между предприятиями разрывает замкнутую петлю обратной связи между ними. С математической точки зрения это эквивалентно приравниванию нулю одной из величин $\mu_{a,b}$, что в конечном счете приводит к занулению параметра связности k в рамках обозначений, принятых на рис. 1. В результате при размыкании петли обратной связи предприятия сами по себе перестают быть «генераторами» инфляции. Здесь же величина k , в соответствии со схемой, изображенной на рис. 4, имеет несколько иной экономический смысл и поэтому, несмотря на формальное сохранение обозначений, не обращается в нуль при разрыве петли обратной связи.

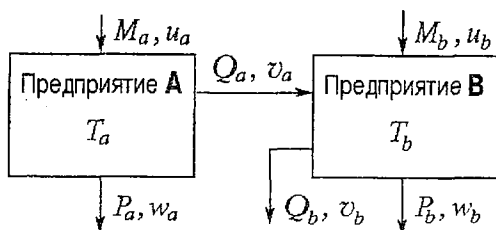


Рис. 4. Схема взаимодействия предприятий с разомкнутой петлей обратной связи

Заключение

Подводя итоги, отметим, что модель связанных между собой взаимными поставками предприятий может быть полезна и для исследования вопросов развития инфляции в экономике страны в целом.

Макроэкономические схемы основного кругооборота продуктов и доходов в относительно замкнутых системах приводятся в ряде классических западных учебников по экономике [1,2] (рис. 5). Существенным отличием российской экономики является значительное отклонение в пропорциях мощностей потоков «расходы на потребление» со стороны домашних хозяйств и «государственные закупки» в пользу последних. При этом следует учесть, что государство отнюдь не всегда выходит на рынок товаров и услуг как равноправный партнер, а зачастую, исходя из определенных приоритетов, финансирует предприятия напрямую. Если еще вспомнить о бартере, взаимных поставках по согласованным ценам и иных не совсем традиционных схемах взаимообменов, столь распространенных в настоящее время в нашей промышленности, то можно с определенной уверенностью утверждать, что продуктовые и (или) эквивалентные им финансовые потоки, замкнутые внутри промышленности (включая и замыкание их через государство), значительно мощнее потока «расходы на потребление», воздействующего на промышленность через свободный рынок. Таким образом, схема российской экономики в макромасштабе весьма напоминает (по крайней мере в качественном плане) рассмотренную выше систему сильно связанных между собой предприятий, выходящих на свободный рынок лишь с небольшой долей своего товара. В силу этого к российской экономике в меру указанной аналогии могут быть, по-видимому, отнесены те основные выводы о развитии инфляции, которые получены

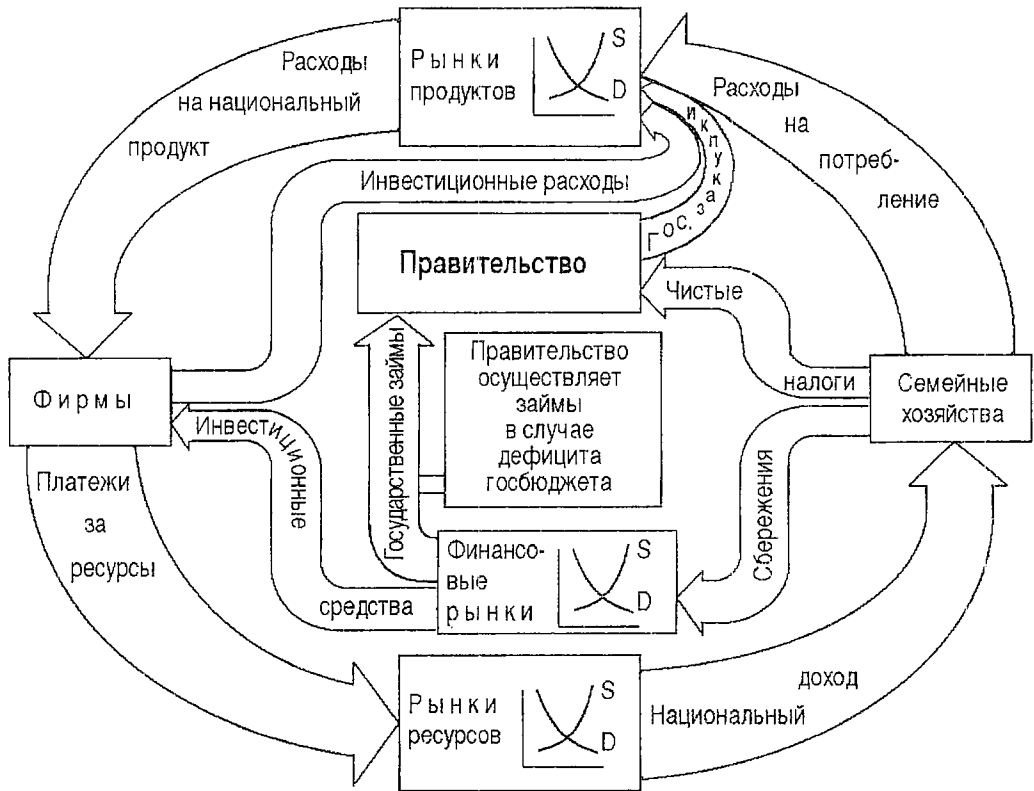


Рис. 5. Модель кругооборота доходов и продуктов с учетом роли государственного сектора [1, с.40]

выше для модели двух связанных предприятий. Для преодоления негативных тенденций по развитию инфляции в экономике России, исходя из такой аналогии, можно рекомендовать более сильную ориентацию предприятий на работу на свободном рынке для конечных потребителей, то есть согласно рис. 5 [1,2], для домашних хозяйств. Такая переориентация становится возможной только при росте потребления (национального дохода), то есть в нынешних условиях, как это ни парадоксально звучит, при росте доли зарплаты в себестоимости продукции. В долгосрочном плане гарантией от развития инфляции является развитие конкуренции (в том числе и со стороны мирового рынка), автоматически ограничивающей «аппетиты» предприятий по повышению цен.

Приложение 1

Для решения системы динамических уравнений (7)

$$\begin{cases} x_{n+1} = (c_a + y_n)\mu_a, \\ y_{n+1} = (c_b + x_n)\mu_b \end{cases} \quad (\text{п1.1})$$

посредством Z-преобразования перейдем в (п1.1) к изображениям:

$$\begin{cases} x^*(z)z = x_0z + [c_az/(z-1) + y^*(z)]\mu_a, \\ y^*(z)z = y_0z + [c_bz/(z-1) + x^*(z)]\mu_b. \end{cases} \quad (\text{п1.2})$$

Разрешим (п1.2) относительно x^* и y^* :

$$x^*(z)z = x_0z + \{c_az/(z-1) + [y_0z + (c_bz/(z-1) + x^*(z))\mu_b]z^{-1}\}\mu_a,$$

домножим на z и раскроем скобки

$$x^*(z)z^2 = x_0z^2 + c_a\mu_a z^2/(z-1) + y_0z\mu_a + c_bz\mu_a\mu_b/(z-1) + x^*(z)\mu_b\mu_a.$$

Выразим x^* и приведем полученное выражение к общему знаменателю

$$\begin{aligned} x^*(z)(z^2 - k^2) &= z[x_0z(z-1) + c_a\mu_a z + y_0\mu_a(z-1) + c_bk^2]/(z-1), \\ x^*(z) &= z[x_0z(z-1) + c_a\mu_a z + y_0\mu_a(z-1) + c_bk^2]/[(z-1)(z^2 - k^2)]. \end{aligned} \quad (\text{п1.3})$$

Разложим полученные выражения на множители по z :

$$\begin{aligned} x^*(z) &= [z/(z-1)](c_a\mu_a z + c_bk^2)/(1-k^2) + \\ &+ [z/(z-k)][x_0k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_bk^2]/[2k(k-1)] + \\ &+ [z/(z+k)][x_0k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_bk^2]/[2k(k+1)] \end{aligned} \quad (\text{п1.4})$$

и перейдем к оригиналу в (п1.4)

$$\begin{aligned} x_n &= (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) + k^n[x_0k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_bk^2]/[2k(k-1)] + \\ &+ (-k)^n[x_0k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_bk^2]/[2k(k+1)]. \end{aligned} \quad (\text{п1.5})$$

Полученное решение описывает систему при $k \neq 1$. Первое слагаемое в (п1.5) - координата состояния равновесия системы, которое будет устойчивым при $k < 1$ и неустойчивым при $k > 1$. Обозначим его через x^* . Предположим, что в начальный момент времени система находилась в состоянии равновесия, которое определяется по формулам: $x_0 = (c_a^0\mu_a + c_b^0k^2)/(1-k^2)$, $y_0 = (c_b^0\mu_b + c_a^0k^2)/(1-k^2)$.

Подставим эти значения в (п1.5) и приведем вторые два слагаемых к общему знаменателю.

$$\begin{aligned} x_n &= (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) + k^n\{[x_0k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_bk^2](k+1) + \\ &+ (-1)^n[x_0k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_bk^2](k-1)\}/[2k(k-1)(k+1)] = \\ &= (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) + k^n \begin{cases} [x_0k(k-1) + c_a\mu_a k + c_bk^2]/[k(k^2-1)], & n = 2m \\ [c_a\mu_a k^2 + y_0\mu_a(k^2-1) + c_bk^2]/[2k(k^2-1)], & n = 2m + 1 \end{cases} = \\ &= (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) + k^n \begin{cases} [-c_a^0\mu_a - c_b^0k^2 + c_a\mu_a + c_bk^2]/(k^2-1), & n = 2m \\ [c_a\mu_a k^2 + (c_b^0\mu_b + c_a^0k^2)\mu_a + c_bk^2]/[k(k^2-1)], & n = 2m + 1 \end{cases} = \\ &= x_n = (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) - k^n \begin{cases} [\Delta c_a\mu_a + \Delta c_bk^2]/(1-k^2), & n = 2m, \\ k[\Delta c_a\mu_a + \Delta c_b]/(1-k^2), & n = 2m + 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{п1.6})$$

где $c_a^0 = (M_a^0\mu_a + T_a^0)/v_a$, $c_b^0 = (M_b^0\mu_b + T_b^0)/v_b$, $c_a = \Delta c_a + c_a^0$, $c_b = \Delta c_b + c_b^0$.

Из соображений симметрии

$$y_n = (c_b\mu_b + c_a k^2)/(1-k^2) + k^n \begin{cases} [\Delta c_b\mu_b + \Delta c_a k^2]/(1-k^2), & n = 2m, \\ k[\Delta c_b\mu_b + \Delta c_a]/(1-k^2), & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (\text{п1.6.1})$$

Рассмотрим случай $k=1$. Из (п1.3) имеем

$$x^*(z) = z[x_0z(z-1) + c_a\mu_a z + y_0\mu_a(z-1) + c_b]/[(z-1)^2(z+1)].$$

Представим $x^*(z)$ в виде

$$x^*(z) = a_1 z / (z + 1) + a_2 z / (z - 1) + a_3 z / (z - 1)^2. \quad (\text{п1.7})$$

Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, получаем

$$a_3 = (c_a \mu_a + c_b) / 2,$$

$$a_1 = (x_0 - y_0 \mu_a) / 2 + (c_b - c_a \mu_a) / 4,$$

$$a_2 = (x_0 + y_0 \mu_a) / 2 - (c_b - c_a \mu_a) / 4.$$

Отсюда решение запишется в виде

$$x_n = n(c_a \mu_a + c_b) / 2 + \begin{cases} x_0, & n = 2m, \\ y_0 \mu_a - (c_b - c_a \mu_a) / 2, & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (\text{п1.8})$$

Из соображений симметрии можно записать решение для y_n

$$y_n = n(c_b \mu_b + c_a) / 2 + \begin{cases} y_0, & n = 2m, \\ x_0 \mu_b - (c_a - c_b \mu_b) / 2, & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (\text{п1.8.1})$$

Рассмотрим теперь случай $k > 1$. Поскольку при этом координаты состояния равновесия отрицательные, имеет смысл рассмотреть случай, когда начальные условия (x_0, y_0) - произвольные положительные числа. Преобразуем выражение (п1.5) к более удобному виду. Для этого вынесем k^n за скобку и приведем подобные слагаемые отдельно для четной и нечетной подпоследовательностей временных интервалов:

$$\begin{aligned} x_n &= (c_a \mu_a + c_b k^2) / (1 - k^2) + k^n \{ [x_0 k(k-1) + c_a \mu_a k + y_0 \mu_a (k-1) + c_b k^2] / [2k(k-1)] + \\ &\quad + (-1)^n [x_0 k(k+1) - c_a \mu_a k - y_0 \mu_a (k+1) + c_b k^2] / [2k(k+1)] \} = \\ &= (c_a \mu_a + c_b k^2) / (1 - k^2) + k^n \{ [x_0 k(k-1) + c_a \mu_a k + y_0 \mu_a (k-1) + c_b k^2] (k+1) + \\ &\quad + (-1)^n [x_0 k(k+1) - c_a \mu_a k - y_0 \mu_a (k+1) + c_b k^2] (k-1) \} / [2k(k-1)(k+1)] = \\ &= [1 / (1 - k^2)] \left[-c_a \mu_a - c_b k^2 + k^{n-1} \begin{cases} x_0 k(k^2 - 1) + c_a \mu_a k + c_b k^3, & n = 2m \\ y_0 \mu_a (k^2 - 1) + c_a \mu_a k^2 + c_b k^2, & n = 2m + 1 \end{cases} \right]. \end{aligned} \quad (\text{п1.9})$$

Из соображений симметрии запишем решение для второго предприятия:

$$y_n = [1 / (1 - k^2)] \left[-c_b \mu_b - c_a k^2 + k^{n-1} \begin{cases} y_0 k(k^2 - 1) + c_b \mu_b k + c_a k^3, & n = 2m \\ x_0 \mu_b (k^2 - 1) + c_b \mu_b k^2 + c_a k^2, & n = 2m + 1 \end{cases} \right].$$

Приложение 2

Нахождение и анализ реальной рентабельности предприятий

Из формулы (п1.9) Приложения 1 легко вычисляется величина

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= [1 / (1 - k^2)] k^{n-1} \begin{cases} k(k^2 - 1)(x_0 - y_0 \mu_a - c_a \mu_a), & n = 2m \\ (k^2 - 1)(y_0 \mu_a - x_0 k^2 - c_b k^2), & n = 2m + 1 \end{cases} = \\ &= k^{n-1} \begin{cases} k(x_0 - y_0 \mu_a - c_a \mu_a), & n = 2m, \\ y_0 \mu_a - x_0 k^2 - c_b k^2, & n = 2m + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{п2.1})$$

Найдем предел отношения реального и предполагаемого показателей рентабельности $\gamma = r_a^*/r_a = x_n/x_{n+1} = 1 + \Delta x_n/x_{n+1}$ при $k > 1$

$$1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x_n/x_{n+1}) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k^2 - 1)k^{n-1} \begin{cases} k(x_0 - c_a \mu_a - y_0 \mu_a) \\ -x_0 k^2 - c_b k^2 + y_0 \mu_a \end{cases}}{-c_a \mu_a - c_b k^2 + k^n \begin{cases} c_a \mu_a k + x_0 k(k^2 - 1) + c_b k^3 \\ c_a \mu_a k^2 + y_0 \mu_a(k^2 - 1) + c_b k^2 \end{cases}} =$$

$$= 1 + (k^2 - 1)/k \begin{cases} (x_0 - c_a \mu_a - y_0 \mu_a)/[c_a \mu_a + x_0(k^2 - 1) + c_b k^2], & n = 2m, \\ (-x_0 k^2 - c_b k^2 + y_0 \mu_a)/[c_a \mu_a k^2 + y_0 \mu_a(k^2 - 1) + c_b k^2], & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (\text{п2.2})$$

В таком случае условие достижения в пределе желаемой рентабельности будет совпадать с условиями неотрицательности числителей и выглядеть в четные и нечетные моменты времени для предприятий **A** и **B**, соответственно, следующим образом:

$$\begin{cases} x_0 - c_a \mu_a - y_0 \mu_a > 0, \\ -x_0 k^2 - c_b k^2 + y_0 \mu_a > 0, \end{cases} \quad (\text{п2.3a})$$

$$\begin{cases} y_0 - c_b \mu_b - x_0 \mu_b > 0, \\ -y_0 k^2 - c_a k^2 + x_0 \mu_b > 0. \end{cases} \quad (\text{п2.3б})$$

Разделим второе неравенство из (п2.3a) на μ_a , а второе неравенство из (п2.3б) на μ_b . Нетрудно видеть, что если теперь в (п2.3б) поменять неравенства местами, то она полностью совпадет с (п2.3a). Это означает, что для обоих предприятий границы одни и те же и лишь меняются местами в четные и нечетные моменты времени. Точки пересечения уравнений границ с осями координат равны соответственно $c_a \mu_a$ и $c_b \mu_b$ и заведомо положительны. Если добавить к этому факт пересечения этих прямых в 3-ем квадранте, то становится очевидно, что прямые не могут быть расположены друг относительно друга иначе, чем показано на рис. 3.

Рассмотрим вопрос об области безубыточности предприятий. Она определяется следующим соотношением: $\gamma r_a = r_a^* > 1$. Распишем это условие подробнее, используя (п2.2)

$$\left[1 + (k^2 - 1)/k \begin{cases} (x_0 - c_a \mu_a - y_0 \mu_a)/[c_a \mu_a + x_0(k^2 - 1) + c_b k^2] \\ (-x_0 k^2 - c_b k^2 + y_0 \mu_a)/[c_a \mu_a k^2 + y_0 \mu_a(k^2 - 1) + c_b k^2] \end{cases} \right] r_a \geq 1.$$

Раскроем скобки и приведем к общему знаменателю

$$\begin{cases} \frac{k(c_a \mu_a + x_0(k^2 - 1) + c_b k^2) + (k^2 - 1)(x_0 - c_a \mu_a - y_0 \mu_a)}{k(c_a \mu_a + x_0(k^2 - 1) + c_b k^2)} & r_a \geq 1 \\ \frac{k(c_a \mu_a k^2 + y_0 \mu_a(k^2 - 1) + c_b k^2) + (k^2 - 1)(-x_0 k^2 - c_b k^2 + y_0 \mu_a)}{k(c_a \mu_a k^2 + y_0 \mu_a(k^2 - 1) + c_b k^2)} & r_a \geq 1. \end{cases} \quad (\text{п2.4})$$

Записав аналогичную систему неравенств, исходя из симметрии для предприятия **B**, мы получим систему из четырех неравенств с большим количеством параметров, анализ которой в общем виде представляется достаточно сложным. По этой причине рассмотрим частный случай, когда предприятия «одинаковы», то есть $c_a = c_b$, $\mu_a = \mu_b = k$. В этом случае (п2.4) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} [k(c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2) + (k^2-1)(x_0 - c_a k - y_0 k)] / [k(c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2)] r_a \geq 1 \\ [k(c_a k^3 + y_0 k(k^2-1) + c_a k^2) + (k^2-1)(-x_0 k^2 - c_a k^2 + y_0 k)] / [k(c_a k^3 + y_0 k(k^2-1) + c_a k^2)] r_a \geq 1. \end{cases}$$

Очевидно, с точностью до замены x_0 на y_0 , полученные неравенства совпадают. Это означает, что каждая из двух границ, расположенных, кстати, симметрично относительно прямой $x_0=y_0$, будет являться границей безубыточности поочередно то одного, то другого предприятия. Преобразуем одно из полученных неравенств. Домножим на знаменатель и приведем подобные члены

$$\begin{aligned} [k(c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2) + (k^2-1)(x_0 - c_a k - y_0 k)] r_a &\geq k(c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2) = \\ &= [c_a k(k+1) + x_0(k^2-1)(k+1) - y_0 k(k^2-1)] r_a - k[c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Выразим y_0 как функцию от x_0 и представим ее по степеням x_0

$$y_0 \leq \{ [c_a k(k+1) + x_0(k^2-1)(k+1)] r_a - k[c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2] \} / [k(k^2-1) r_a],$$

$$y_0 \leq \{ x_0(k^2-1)[k(r_a-1) + r_a] + c_a k(k+1)(r_a - k) \} / [k(k^2-1) r_a],$$

$$y_0 \leq x_0 [k(r_a-1) + r_a] / (k r_a) + [c_a(r_a - k)] / [(k-1) r_a]. \quad (\text{п2.5})$$

Из принятых соотношений параметров следует, что $k=\varphi r_a$, $\varphi < 1$; $r_a > 1$; $k > 1$. На основе этого проведем анализ коэффициентов при линейной и постоянной части в (п2.5):

$$[k(r_a-1) + r_a] / (k r_a) = [\varphi(r_a-1) + 1] / (\varphi r_a) = 1 + (1-\varphi) / (\varphi^2 r_a) > 1, \quad c_a(r_a - k) / [(k-1) r_a] > 0.$$

Легко также найти пересечение границ безубыточности, воспользовавшись тем, что в силу симметрии должно выполняться условие

$$x_0 = y_0 = c_a(r_a - k) k r_a / [(k-1) r_a(r_a - k)] = c_a k / (k-1). \quad (\text{п2.6})$$

С учетом сделанного предположения относительно «равенства» предприятий, система неравенств (п2.3а) запишется в более простом виде

$$y_0 \leq x_0 / k - c_a, \quad (\text{п2.7})$$

а координаты пересечения границ достижения желаемой рентабельности совпадут с (п2.6). Таким образом, все построенные прямые пересекутся в одной точке.

Рассмотрим вопрос о соотношении между углами наклона прямых, являющихся границами областей достижения желаемой рентабельности и безубыточности, а по сути о пересечении областей безубыточной работы обоих предприятий и достижения желаемой рентабельности хотя бы одним из них, или отсутствии такового. Для этого выясним вопрос о соотношении между величиной k и $[k(r_a-1) + r_a] / (k r_a)$. Используя условия $k=\varphi r_a$, $\varphi < 1$ запишем

$$[r_a \varphi (r_a - 1) + r_a] / (r_a^2 \varphi) < r_a \varphi, \quad r_a^2 \varphi^2 - (r_a - 1) \varphi - 1 < 0.$$

При $r_a \rightarrow \infty \Rightarrow [r_a \varphi (r_a - 1) + r_a] / (r_a^2 \varphi) < r_a \varphi$, значит пересечение пусто. При $r_a \varphi \rightarrow 1 + 0$ и $\varphi < 1$ имеем: $r_a^2 \varphi^2 - r_a \varphi + \varphi - 1 < 0 \Rightarrow [r_a \varphi (r_a - 1) + r_a] / (r_a^2 \varphi) > r_a \varphi$. Следовательно, даже при некоторых достаточно близких, но больших чем $1/\varphi$ значениях r_a , пересечение областей будет не пусто. Таким образом доказано существование различных вариантов взаимного расположения указанных областей.

Библиографический список

1. Долан Э. Дж., Линдсей Д. Макроэкономика. СПб., 1994.
2. Самуэльсон П. Экономика. М.: Прогресс, 1964.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 22.11.95

ONE MECHANISM OF THE INFLATION

L.A. Kruchinin, P.S. Rasenstein, A.V. Smorgonsky

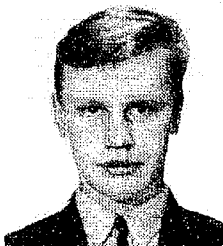
The model of two enterprises, coupled through mutual delivery of goods is investigated. The significant parameters of this model and their bifurcations values which determine the appearance of the tendency of the infinite growth of prices are found. The influence of bifurcation transition on some economical indices of working enterprises is studied.



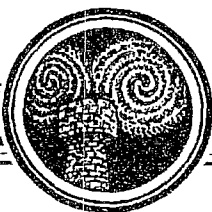
Сморгонский Андрей Владимирович родился в 1946 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1968). После окончания ГГУ работал в Научно-исследовательском радиофизическом институте и Институте прикладной физики АН. Защитил кандидатскую (1975), докторскую (1994) диссертации по релятивистской высокочастотной электронике. Последние годы занимается моделями экономики и в более широком смысле - экономической динамики. Автор многочисленных статей по указанным выше направлениям исследований. Лауреат премии Ленинского комсомола (1980).



Разенштейн Петр Сергеевич родился в 1950 году в ЕАО РСФСР, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1974). После окончания ГГУ работал в Научно-исследовательском радиофизическом институте и Институте прикладной физики АН. Является автором ряда научных статей и изобретений в области лазерной физики, флуктуаций в лазерах, когерентной и нелинейной оптики. В последние годы занимается исследованиями в области экономики в «ЭПИцентре-НН».



Кручинин Леонид Анатольевич родился в 1973 году в Горьком, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета (1995). В настоящее время работает в «ЭПИцентре-НН».



О МЕХАНИЗМАХ УСТАНОВЛЕНИЯ РЫНОЧНОЙ ЦЕНЫ

А.А. Короновский

В настоящей работе исследуются нелинейные динамические процессы установления рыночной цены на однородные товары. Рассмотрены два предельных случая: превышение предложения над спросом и спроса над предложением. Показано, что, несмотря на различие механизмов ценообразования, в обоих случаях, «в первом приближении» можно считать, что на однородные товары с течением времени устанавливается единая цена.

Во многих учебниках по экономической теории (см., например, [1-3]) и работах, посвященных анализу и моделированию динамики рынка (см. также [4-7]), полагается, что на однородные товары устанавливается одинаковая цена. (Эта цена зависит от большого числа самых различных факторов: издержек на производство, хранение, транспортировку, реализацию товаров, от конкуренции производителей и продавцов, качества товара, соотношения спроса и предложения, покупательной способности населения и т.д. и т.п.) Конечно, на самом деле это не совсем соответствует действительности, на что обращается внимание в работе [8]. Но даже, если «в первом приближении» на однородный товар действительно устанавливается одинаковая цена, то механизм установления этой единой цены не только не описывается, но даже и не рассматривается, это считается как бы само собой разумеющимся.

В настоящей работе делается попытка, пользуясь строгим математическим аппаратом, раскрыть механизм установления цены на этапе сбыта товара, при сделанных предположениях о том, что все продавцы изначально поставлены в равные условия. Ключевыми моментами в понимании сути происходящих процессов являются стремление продавцов получить максимальную прибыль за рассматриваемый интервал времени и желание покупателей приобрести необходимый товар по минимально возможной цене.

1. Превышение предложения над спросом

Будем считать, что продавцы делают оптовые закупки товара у производителя-монополиста (или экспортера) по одинаковым ценам и затем продают закупленный товар уже в розницу, по более высоким ценам, населению. Будем рассматривать товар, на который существует постоянный, не меняющийся

со временем, спрос населения¹. Кроме того, будем полагать, что в любой момент времени запасы товаров у продавцов значительны и постоянно пополняются (иными словами, к услугам покупателей «изобилие» данного вида товара и в любое время запасы продукта на рынке больше, чем потребность в нем населения). Вполне естественно предположить, что продавец, закупив оптом товар, реализует его по ценам, которые он устанавливает сам, исходя из своих затрат (затраты на закупку товара, перевозку, хранение, уплату налогов и т.п.) и желаемой величины прибыли. Далее, предположим, что величина a - минимальная цена, по которой продавец еще может реализовать товар, чтобы окупить все свои затраты (включая, разумеется, и свое затраченное время). Вполне понятно, что продажная цена X , по которой реализуется товар населению, может не совпадать с минимально возможной ценой a , ибо в этом случае, при $X > a$, за каждую проданную единицу товара продавец будет получать дополнительную прибыль.

Проведем нормировку величины X : в дальнейшем будем рассматривать безразмерную цену $x = X/a$, характеризующую, насколько продажная цена X превышает минимально возможную продажную цену a . Число продавцов, реализующих свой товар по цене x в момент времени t , мы будем описывать зависимостью $N(x, t)$. Будем полагать, что число продавцов достаточно велико (и постоянно) и поэтому можно считать, что продавцы «непрерывно» распределены по величине x , то есть, $N(x, t) = N_0 p(x, t) dx$, где $p(x, t)$ - фактически плотность распределения вероятностей того, что выбранный нами наугад продавец реализует свой товар по цене, попадающий в интервал цен от x до $x + dx$, N_0 - общее число продавцов, торгующих рассматриваемым видом товара². Понятно, что в этом случае должно выполняться условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx = 1.$$

А что же покупатели? Предположим, что за рассматриваемый интервал времени совершается M_0 покупок. Какова же вероятность того, что покупатель приобретет необходимый ему товар за цену, лежащую в интервале $[x, x + dx]$? Конечно, это определяется в первую очередь тем, сколько продавцов реализуют свой товар по этой цене. Полагая, что все продавцы находятся в равных условиях и обращение к любому продавцу равновозможно, вероятность того, что покупатель обратится к продавцу, реализующему свой товар по цене, лежащей в интервале $[x, x + dx]$, равна $p(x, t) dx$. Однако, далеко не каждый покупатель приобретает необходимый ему товар у первого же продавца, к которому он обратился. Очень часто покупатель опрашивает нескольких продавцов и приобретает товар по наименьшей цене из тех, которые ему были предложены. Будем исходить из того, что каждый покупатель в среднем опрашивает n продавцов. Вероятность же того, что при опросе n продавцов покупатель найдет товар, реализуемый по цене, лежащей в интервале $[x, x + dx]$, которая является наименьшей из всех, предложенных ему продавцами, равна $p_n(x, t) dx$, где $p_n(x, t)$ - плотность распределения вероятностей того, что при опросе n продавцов минимальная продажная цена, которая будет найдена покупателем, попадет в интервал $[x, x + dx]$. Можно показать (см. приложение), что

$$p_n(x, t) = np(x, t)[1 - F(x, t)]^{n-1},$$

где $F(x, t)$ - функция распределения величины x ,

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^x p(y, t) dy.$$

Понятно, что число продавцов, реализующих свой товар по цене, лежащей в интервале $[x, x + dx]$, равно $N_0 p(x, t) dx$, а число покупателей, покупающих товар по

¹ К таким видам товара относятся, например, по нашему мнению, продукты питания или сигареты, во всяком случае, «в первом приближении».

² В дальнейшем мы будем полагать, что число продавцов, торгующих рассматриваемым видом товара, постоянно и не меняется с течением времени.

этой же цене (после опроса n продавцов) составляет $M_0 p_n(x, t) dx$. Полагая, что каждый из покупателей приобретает в среднем k единиц товара, получим, что за рассматриваемый интервал времени, продавец, реализующий свой товар по цене, лежащей в интервале $[x, x+dx)$, продает $kM_0 p_n(x, t)/[N_0 p(x, t)]$ единиц товара. Тогда величина прибыли, получаемой продавцом, будет составлять

$$g(x, t) = ak \{M_0 p_n(x, t)/[N_0 p(x, t)]\} (x-1) = akn(M_0/N_0) [1 - F(x, t)]^{n-1} (x-1).$$

Понятно, что продавец заинтересован в том, чтобы за рассматриваемый период времени получить как можно большую величину прибыли. Заметим, что, если бы продавец реализовывал свой товар не по цене x , а по цене $x+dx$, то он получал бы прибыль не $g(x, t)$, а $g(x+dx, t)$ и его выигрыш в получении прибыли на единицу изменения цены составил бы

$$[g(x+dx, t) - g(x, t)]/dx \rightarrow g'_x(x, t).$$

Понятно, что чем больше величина прироста прибыли на единицу изменения цены, тем больше у продавца стимул для изменения цены, по которой он реализует свой товар. Для простоты будем полагать, что скорость изменения продавцом продажной цены, по которой он реализует товар в единицу времени, пропорциональна величине прироста прибыли на единицу изменения цены, то есть,

$$\dot{x} = v(x, t) = \mu g'_x(x, t). \quad (1)$$

Из-за того, что продавцы, стремясь получить максимально возможную прибыль, изменяют цены на товар, разумеется, изменяется и распределение $p(x, t)$ (а, соответственно, и $p_n(x, t)$, $g(x, t)$, $v(x, t)$). Уравнением, которым определяется динамика $p(x, t)$, является уравнение непрерывности

$$p_t' = -(vp)_x', \quad (2)$$

которое, фактически, является законом сохранения³ общего числа продавцов на рынке. Учитывая, что $p(x, t) = F'_x(x, t)$ и используя формулы (1), (2), можно записать, что

$$F_t'(x, t) = -bn F_x'(x, t) \cdot \{(1 - F(x, t))^{n-1} (x-1)\}'_x, \quad (3)$$

где $b = \mu(M_0/N_0)ak$. Если считать, что продавцы реализуют товары по ценам, лежащим в интервале $[0, l]$, то $F(0)=0$, $F(l)=1$, ($p(x, t) = \partial F(x, t)/\partial x$), и динамика изменения функций $F(x, t)$ и $p(x, t)$ с течением времени однозначно определяется первоначальным распределением продавцов $F(x, 0) = F^0(x)$ ($F^0(0)=0$, $F^0(l)=1$).

На рис. 1-3 показано распределение продавцов по ценам в начальный

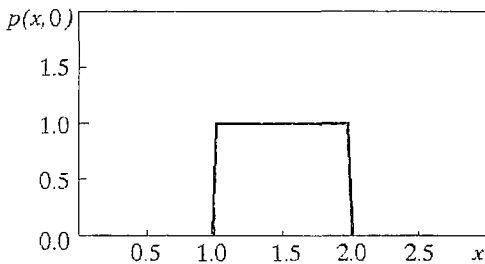


Рис. 1. Начальное распределение цен. Для простоты мы полагаем, что первоначально вероятность того, что продавец запрашивает цену, лежащую в интервале $[x, x+dx)$, одинакова для всех x из интервала $[1, 2]$

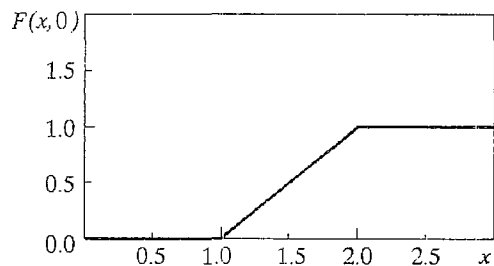


Рис. 2. Вид функции $F(x, 0) = F^0(x)$

³ О том, что уравнение непрерывности обеспечивает сохранение движущегося вещества, см., например, [9].

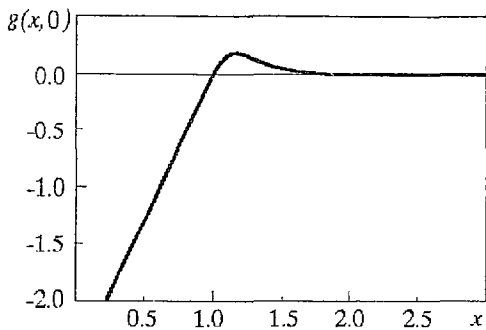


Рис. 3. Величина прибыли, получаемой продавцом, в зависимости от цены x , по которой он реализует свой товар, в начальный момент времени. Отрицательная величина прибыли (для $x < 1$) свидетельствует о том, что продавец несет убытки, не возмещая своих издержек

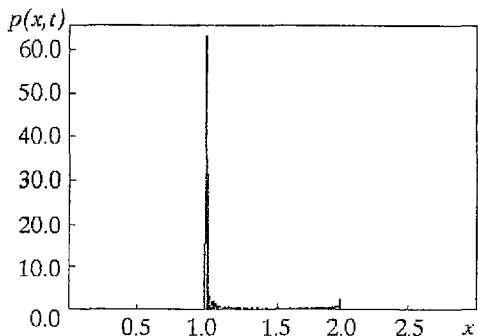


Рис. 4. Распределение цен в момент времени $t=50.0$. Отчетливо видно, что подавляющее большинство продавцов вынуждено продавать товары по цене $x=1.0$ ($n=5$, $b=0.05$)

момент времени (для простоты мы полагали, что продавцы «равномерно» распределены по ценам) и, соответственно, вид функций $F(x,0)=F^0(x)$ и $g(x,0)$. Рис. 4-6 показывают те же функции в момент времени $t=50$. Как показывают результаты численного моделирования уравнения (2)⁴, распределение $p(x,t)$ асимптотически стремится (при $t \rightarrow +\infty$) к виду $\delta(x-1)$. Таким образом, в случае, если предложение многократно превышает спрос (а именно этот случай мы здесь рассмотрели), на однородные товары устанавливается (с течением времени, при прочих равных условиях) одинаковая цена. Следует обратить внимание, что в случае δ -распределения продавцы не получают никакой прибыли (что приводит, в общем-то, к оттоку продавцов, торгующих этим видом товара, с рынка и их переориентации на другие виды товаров, что в этой модели не рассматривается), а лишь компенсируют свои издержки. Интересно то обстоятельство, что продавцы изменяют цены, по которым они реализуют товар, с целью увеличить свою прибыль, но их совместные действия приводят как раз к противоположному результату!

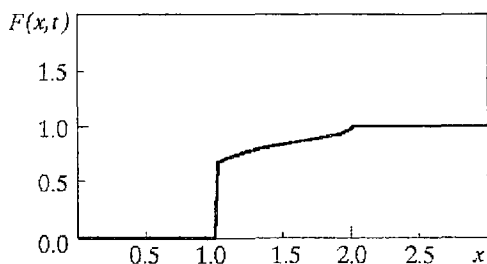


Рис. 5. Вид функции $F(x,t)$ в момент времени $t=50.0$

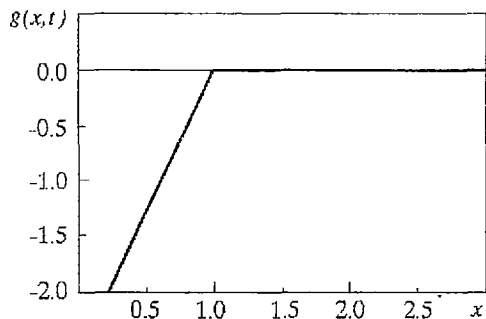


Рис. 6. Величина прибыли, получаемой продавцом, в зависимости от цены x , по которой он реализует свой товар, в момент времени $t=50.0$

2. Превышение спроса над предложением

До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда предложение превышает спрос. Рассмотрим теперь противоположную ситуацию, когда спрос многократно

⁴ Моделирование уравнения (2) осуществлялось методом, аналогичным методу «крупных частиц» в радиофизике, а именно, распределение продавцов по ценам $p(x,t)$ моделировалось конечным, но достаточно большим числом «продавцов-частиц»; каждой такой «частице» соответствовала своя цена x , изменяющаяся с течением времени согласно (1).

превосходит предложение (то есть, $N_0 \ll M_0$). Пусть, опять-таки, $p(x, t)$ характеризует распределение продавцов по ценам в момент времени t . В этом случае кардинальным образом изменяется стратегия поиска товара покупателями: если в рассмотренной выше ситуации покупатели могли позволить себе провести n опросов продавцов и приобрести товар по минимальной найденной цене, то теперь, в условиях дефицита, в условиях нехватки товара, покупатели будут приобретать товар сразу же, как только найдут его на рынке, если только цена на него не будет слишком высока. Пусть функция $z(y)$ характеризует число покупателей, для которых цена на рассматриваемый вид товара, лежащая в интервале $[y, y+dy)$ является предельной, то есть, это та максимальная цена, которую они еще могут позволить себе уплатить за товар. Понятно, что вид функции $z(y)$ тесным образом связан с уровнем дохода покупателей. Тогда, за единицу времени, покупатели на рынке найдут $kN_0 p(x, t) dx$ единиц товара, цена на который лежит в интервале $[x, x+dx)$, но вот приобретут товар только те покупатели, для которых цена x еще не является предельной, то есть те, для которых $x \leq y$. Если считать, что все покупатели находятся в равных условиях, то за единицу времени $kN_0 p(x, t) z(y) dx dy$ покупателей, чья предельная цена лежит в интервале $[y, y+dy)$, найдут товар по цене, попадающей в интервал $[x, x+dx)$.

Тогда за рассматриваемый период времени будет приобретено $kN_0 p(x, t) [1 - Z(x)] dx$ единиц товара ($Z(x) = \int_{-\infty}^x z(y) dy$), и, соответственно, прибыль продавцов, реализующих свой товар по цене x , составит

$$g(x, t) = ka[1 - Z(x)](x - 1). \quad (4)$$

Если исходить из предположения, что запасы товаров пополняются непрерывно и общий объем товаров на рынке не изменяется⁵, а величина спроса постоянна, то, проводя рассуждения, аналогичные проделанным выше, мы вновь придем к уравнению (2), где $g(x, t)$ будет определяться теперь по формуле (4).

Рис. 7 иллюстрирует эволюцию начального равномерного распределения цен в случае, если

$$Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 1.5, \\ x - 1.5, & 1.5 \leq x < 2.5, \\ 1, & x \geq 2.5. \end{cases}$$

Рис. 8 соответствует той же ситуации, с тем только отличием, что все распределение цен изначально лежит ниже «критического уровня»:

$$Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ x - 2, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Видно, что в этом случае начальное распределение эволюционирует как бегущая волна до тех пор, пока уровень цен не достигнет отметки, при которой начинает сказываться ограниченность покупательной способности населения.

Таким образом, мы рассмотрели механизмы установления рыночной цены в двух предельных случаях. Как видно из настоящей работы, «в первом приближении» действительно можно считать, что на однородные товары устанавливается единая цена (что и делается в различных работах, правда, без должного на то обоснования), хотя механизмы установления этой цены в разных случаях различны. Мы сознательно не рассматривали «обратные связи», характерные для рынка, такие как процессы изменения числа продавцов на рынке, увеличения (или уменьшения) предложения товара в соответствии с

⁵ Такое предположение, конечно, довольно нерелистично, но оно позволяет существенно упростить дальнейшие выкладки.

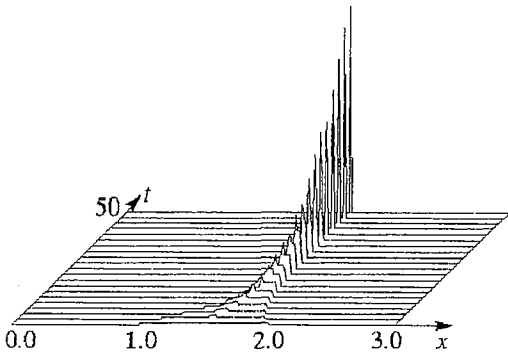


Рис. 7. Эволюция начального распределения цен в случае, если спрос многократно превышает предложение ($n=5, \alpha\mu k=0.5$)

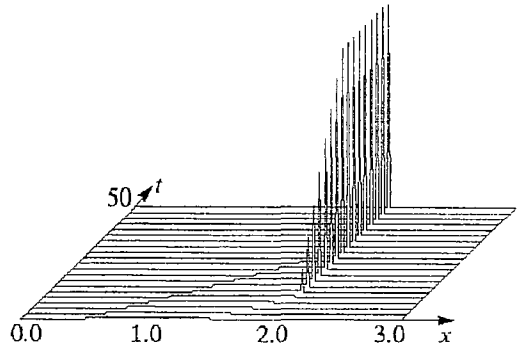


Рис. 8. Эволюция начального распределения цен, лежащего ниже «критического уровня» в случае, если спрос многократно превышает предложение. Отчетливо видно, что решение в виде бегущей волны эволюционирует в δ -распределение ($n=5, \alpha\mu k=0.5$)

устанавливаемымся распределением цен и т.п., так как, во-первых, процесс ценообразования является более динамичным и более быстро протекающим, нежели все остальные процессы, которые в значительной мере определяются им, а во-вторых, рассмотрение экономических процессов с учетом вышеупомянутых «обратных связей» представляет собой достаточно обширное и самостоятельное научное исследование.

Приложение

Будем полагать, что «плотность распределения продавцов» по ценам x (в момент времени t) $p(x,t)$ определена на всем множестве действительных чисел $(-\infty, +\infty)$ ⁶. Тогда вероятность того, что при обращении к продавцу в момент времени t покупатель найдет товар по цене, лежащей в интервале $[x, x+dx)$, равна $p(x,t)dx$, а вероятность того, что цена на товар окажется больше, чем x , будет $\int_x^{+\infty} p(x,t)dx = 1 - F(x,t)$. Что же означает тот факт, что при n опросах продавцов покупатель нашел минимальную цену, лежащую в интервале $[x, x+dx)$? Это значит, что либо покупатель нашел товар по искомой цене лишь в одном случае из n (существует n вариантов подобных ситуаций), а при остальных опросах цена оказалась больше x , либо в двух случаях из n (C_2^n вариантов) ему «повезло», а в остальных случаях цена была больше, чем x , ..., либо в m случаях из n (C_m^n вариантов) цена товара «попала» в интервал $[x, x+dx)$, а во всех остальных случаях она превышала x , ..., либо во всех n случаях (всего один вариант) цена оказалась равной искомой. Заметим, что все эти события несовместны. Тогда вероятность P объединения всех вышеописанных событий, то есть вероятность того, что за n опросов продавцов покупатель найдет минимальную цену, «попадающую» в интервал $[x, x+dx)$, равна сумме вероятностей каждого из этих событий. Вероятность же того, что при n опросах продавцов покупатель m раз найдет искомую цену, есть $C_m^n [p(x,t)dx]^m [1 - F(x,t)]^{n-m}$ (см, например, [10]). Тогда

$$\begin{aligned} P &= p_n(x,t)dx = \sum_{m=1}^n C_m^n [p(x,t)dx]^m [1 - F(x,t)]^{n-m} = \\ &= \sum_{m=0}^n C_m^n [p(x,t)dx]^m [1 - F(x,t)]^{n-m} - [1 - F(x,t)]^n = \\ &= [1 - F(x,t) + p(x,t)dx]^n - [1 - F(x,t)]^n = [1 - F(x-dx,t)]^n - [1 - F(x,t)]^n. \end{aligned}$$

⁶ Хотя, конечно же, представить себе, чтобы товар реализовывался по «отрицательным» ценам весьма затруднительно, тем не менее, мы сознательно не исключаем из рассмотрения отрицательные числа, для того, чтобы все наши выкладки были проведены в наиболее общем виде.

Обозначая $W(x,t)=[1-F(x,t)]^n$, получим, что

$$P = p_n(x,t)dx = W(x-dx) - W(x).$$

Тогда $p_n(x,t) = -W'(x,t) = np(x)[1-F(x,t)]^{n-1}$. Можно показать, что $p_n(x)$ удовлетворяет условию нормировки, то есть, $\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x,t)dx = 1$. Действительно, обозначив

$$I(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)[1-F(x,t)]^n dx,$$

учитывая, что $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, вычисляя этот интеграл по частям, получим рекуррентное соотношение $I(n) = [n/(n+1)]I(n-1)$. Нетрудно видеть, что $I(0)=1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x,t)dx = nI(n-1) = n[(n-1)/n]I(n-2) = (n-1)I(n-2) = \dots = I(0) = 1.$$

Библиографический список

1. Самуэльсон П. Экономика. М.: МГП «АЛГОН», ВНИИСИ, 1992. Т.1,2.
2. Макконнел Кэмпбелл Р., Брю Стенли. Экономикс: принципы, проблемы и политика // Т. 1, 2.
3. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. М.: Дело ЛТД, 1993.
4. Аллен Р.Дж. Математическая экономия. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
5. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 182.
6. Крутов А.П., Романко А.В. Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.
7. Оленев Н.Н., Поспелов И.Г. Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.
8. Стинглер Дж. Дж. Экономическая теория информации // Экономика и математические методы. 1994. Т. 30, N 1.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика // М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1963. Ч. 1.
10. Боровков А.А. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972.

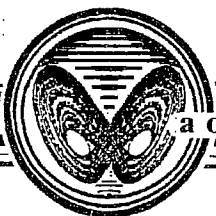
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 1.12.95
после переработки 24.06.96

ABOUT THE MECHANISMS OF THE MARKET PRICES FIXING

A.A. Koronovskiy

This work deals with the nonlinear dynamic processes of the market prices fixing for the identical goods. Two opposite cases are investigated: the excess of the supply over the demand and the excess of the demand over the supply. It has been shown that in spite of the difference of the prices fixing mechanisms in both cases we can consider that the unified price is fixed for the identical goods during some period of time.



ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА ПРИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

М.Д. Прохоров

Рассмотрены колебательные состояния двух симметрично связанных идентичных систем, демонстрирующих удвоение периода. Для случая диссипативной связи показано, что несинфазные режимы колебаний существуют не только в области слабой связи (при $k \sim 0$), но и в области очень сильной связи ($k \sim 1$). При этом области несинфазных режимов в пространстве параметров системы симметричны относительно $k=0.5$. Однако, несмотря на симметрию, несинфазные режимы в области слабой и сильной связи существенно различны.

Введение

Система двух симметрично связанных идентичных объектов, каждый из которых демонстрирует при изменении управляющего параметра переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, является одним из базовых объектов нелинейной динамики, широко представленных в физике, химии и биологии. Наиболее детальные исследования поведения связанных систем с удвоением периода проводились на точечных отображениях [1-7]. Такие системы могут демонстрировать множество различных периодических, квазипериодических и хаотических режимов колебаний. Так, для системы двух диссипативно [1] связанных отображений вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + k[f(y_n) - f(x_n)], \\y_{n+1} &= f(y_n) + k[f(x_n) - f(y_n)],\end{aligned}\tag{1}$$

где x, y - динамические переменные, k - коэффициент связи, а $f(x_n)$ и $f(y_n)$ - функции, описывающие поведение изолированных подсистем, в случаях функций с одним или несколькими квадратичными экстремумами показаны пути эволюции всех возможных колебательных режимов, выделены области их существования в пространстве параметров, исследованы бассейны притяжения аттракторов мультистабильных состояний [8-10]. При этом изучение динамики модельных и экспериментальных систем проводилось при достаточно слабой связи подсистем $0 \leq k \leq 0.5$. В настоящей работе рассмотрено поведение системы (1) при $f(x_n) = \lambda - x_n^2$, $f(y_n) = \lambda - y_n^2$ в более широкой области изменения k ($0 \leq k \leq 1$) и проведено сопоставление результатов для случаев $k < 0.5$ и $k > 0.5$.

Виды колебаний связанной системы

Исследуемая система

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2) \end{aligned} \quad (2)$$

при $k=0$ распадается на две идентичные подсистемы:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2, \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2, \end{aligned} \quad (3)$$

колебания которых одинаковы, но в связи с дискретной симметрией отображений по отношению к временному сдвигу могут быть сдвинуты друг относительно друга в зависимости от начальных условий на $n=1,2, \dots$. В результате, каждый режим периода N может быть реализован в (3) N способами, отличающимися сдвигом колебаний подсистем во времени на величину $m=0,1,2, \dots, N-1$, где m - шаг итерации. Для обозначения периодических режимов будем использовать запись N^m . Случай $m=0$ соответствует синфазному режиму, его фазовый портрет на плоскости (x_n, y_n) располагается на биссектрисе $x=y$. Остальные $N-1$ режимов периода N - несинфазные ($m \neq 0$).

На рис. 1, 2 для случая нулевой связи приведены примеры аттракторов периода 2 и 4, соответственно, и их бассейны притяжения. На всех рисунках, включая последующие, x_n и y_n указаны в интервалах от -0.6 до 1.5 . Область начальных условий на плоскости (x_0, y_0) , стартуя из которой, система имеет решение на бесконечности, отмечена на всех рисунках одинаковой штриховкой. Правые части уравнений системы (2) содержат только квадраты переменных x и y , поэтому бассейны притяжения колебательных состояний системы (2) симметричны относительно линий $x_0=0, y_0=0$, где x_0, y_0 - начальные условия системы (2).

В установившемся состоянии периода 2 при итерациях системы имеет место цепочка отображений

$$(x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow \dots \quad (4)$$

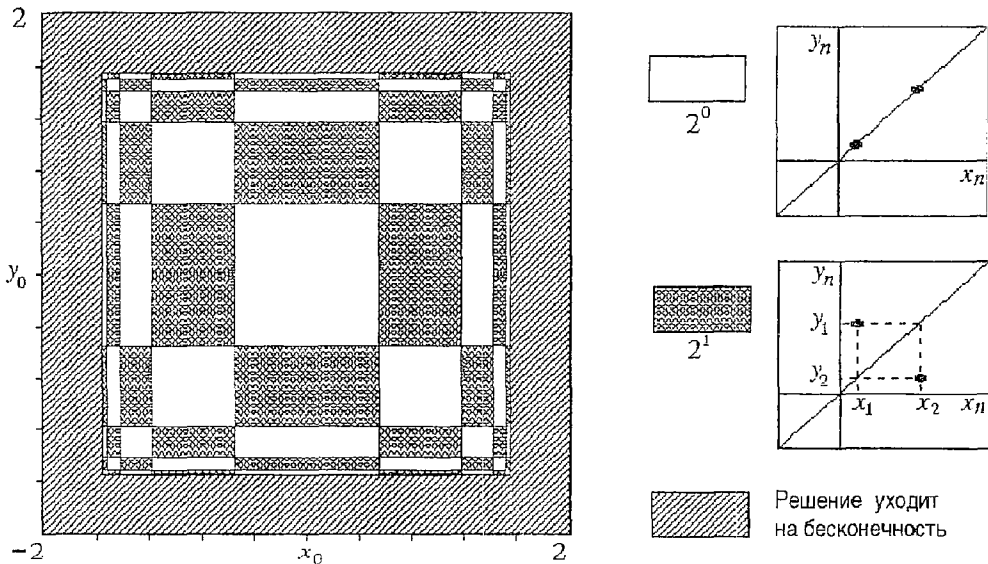


Рис. 1. Фазовые портреты и бассейны притяжения видов колебаний системы (2) при $\lambda=0.85, k=0$

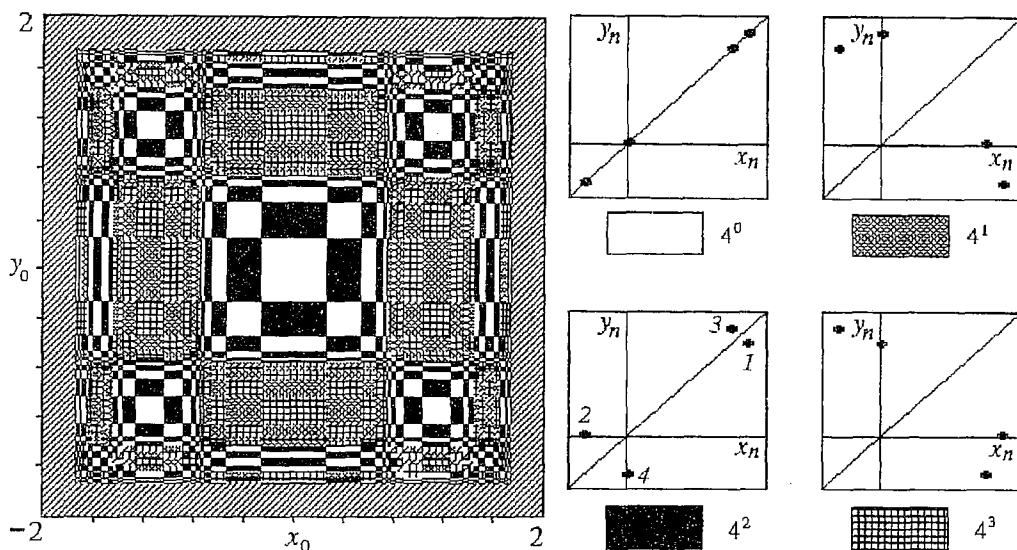


Рис. 2. Фазовые портреты и бассейны притяжения видов колебаний системы (2) при $\lambda=1.33, k=0$
 Для несинфазного режима 2^1 (см. рис.1) известно, что $x_2=y_1$ и $y_2=x_1$, и, следовательно

$$(x_1, y_1) \rightarrow (y_1, x_1) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow \dots \quad (5)$$

В другом предельном случае $k=1$ система (2) примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - y_n^2, \\ y_{n+1} &= \lambda - x_n^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для синфазных режимов $x_n=y_n$, поэтому для них системы (3) и (6) полностью идентичны, то есть связь не влияет на синфазные режимы (выражения, стоящие в скобках, в системе (2) обращаются в ноль).

Легко заметить, что (3) переходит в (6) при замене x_{n+1} на y_{n+1} и y_{n+1} на x_{n+1} . Следовательно, итерации системы (6) эквивалентны итерациям системы (3), при которых на каждом шаге x и y меняются местами. Так, для значений λ , при которых в несвязанных подсистемах существуют режимы периода 2, при $k=1$ синфазный цикл 2^0 остается прежним ($x_i=y_i, i=1,2$ и можно менять местами x_i и y_i , см. (4)), а вместо несинфазного 2^1 (см. (5)) в зависимости от начальных условий получаем или $(x_1, y_1) \rightarrow (x_1, y_1)$, или $(y_1, x_1) \rightarrow (y_1, x_1)$. Обозначим последние два вида колебаний как 1^I и 1^{II} . В этих режимах в системе существуют колебания периода 1, но величина колебаний в подсистемах разная, ($x_1 \neq y_1$).^{*} Таким образом, при рассмотренных значениях параметров в фазовом пространстве имеются два цикла периода 1 и один цикл периода 2, бассейны притяжения которых делят плоскость начальных условий в соответствии с рис.3. Структура этого рисунка аналогична таковой рис. 1, но бассейн притяжения цикла 2^1 , существующего при $k=0$, оказывается поделенным между циклами 1^I и 1^{II} .

Этот принцип деления бассейнов сохраняется и при отличных от 0 и 1 значениях коэффициентов связи, если их сумма равна единице. В силу симметрии цикла 2^1 относительно замены x на y и y на x для него справедливо (5) и при ненулевой связи. В то же время, для произвольного k нетрудно показать, что замена k на $1-k$ в системе (2) приводит к замене x_{n+1} на y_{n+1} и y_{n+1} на x_{n+1} , что

^{*} Существование в связанной системе двух несинфазных режимов периода 1 может быть продемонстрировано иначе (см. приложение 1).

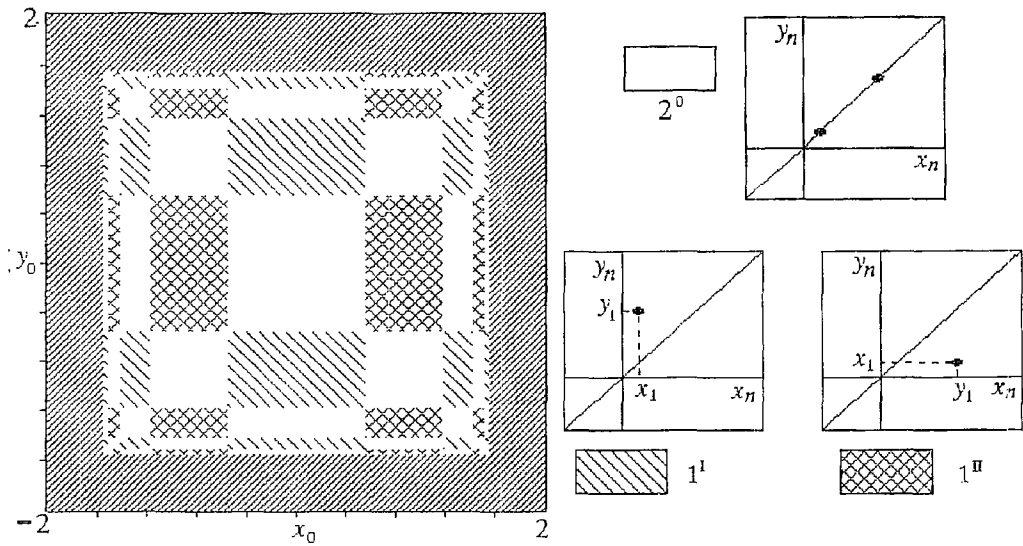


Рис. 3. Фазовые портреты и бассейны притяжения видов колебаний системы (2) при $\lambda=0.85$, $k=1$

эквивалентно симметричному отражению точки (x_{n+1}, y_{n+1}) относительно линии $x=y$. Следовательно, имея при некоторых k цикл 2^1 , при связи $1-k$ будем всегда иметь два цикла периода 1: 1^I и 1^{II} , которые делят между собой его бассейн притяжения (рис. 4).

Выделенные особенности сохраняются и при других значениях параметра нелинейности λ . Например, при λ , соответствующих существованию в изолированных подсистемах циклов периода 4, при $k=1$, как и в случае $k=0$ (см. рис. 2), существуют четыре цикла периода 4, но вид всех трех несинфазных циклов иной (рис. 5). Несимметричные циклы 4^I и 4^{III} , так же как 4^1 и 4^3 , образуют зеркально симметричную пару: замена x_n на y_n и наоборот переводит их друг в друга. Что касается симметричного цикла 4^{II} , то его фазовый портрет совпадает с фазовым портретом цикла 4^2 , но порядок следования элементов цикла другой.

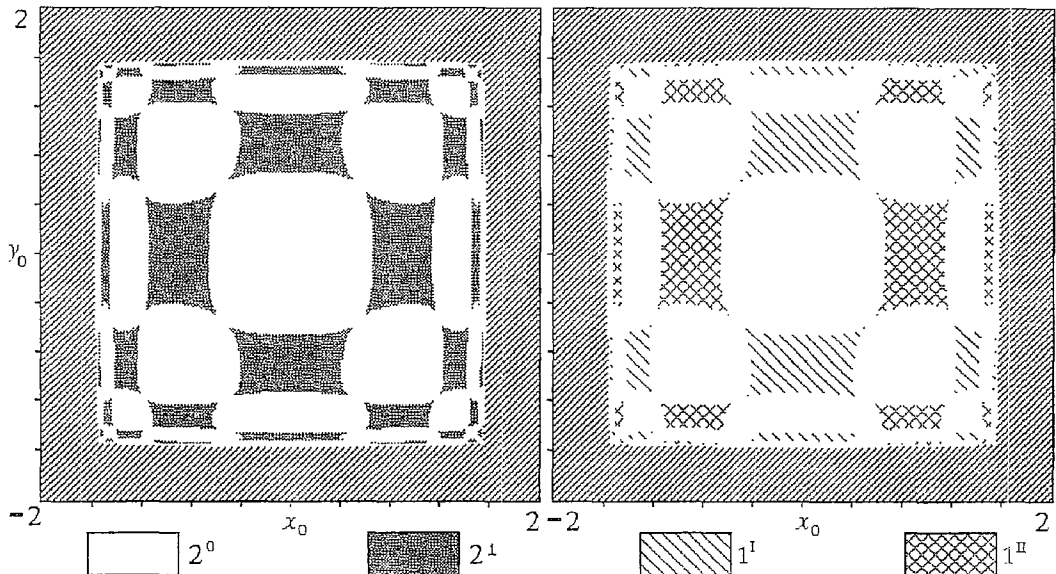


Рис. 4. Бассейны притяжения колебательных режимов системы (2) при $\lambda=0.85$ для случаев $k=0.025$ (слева) и $k=0.975$ (справа)

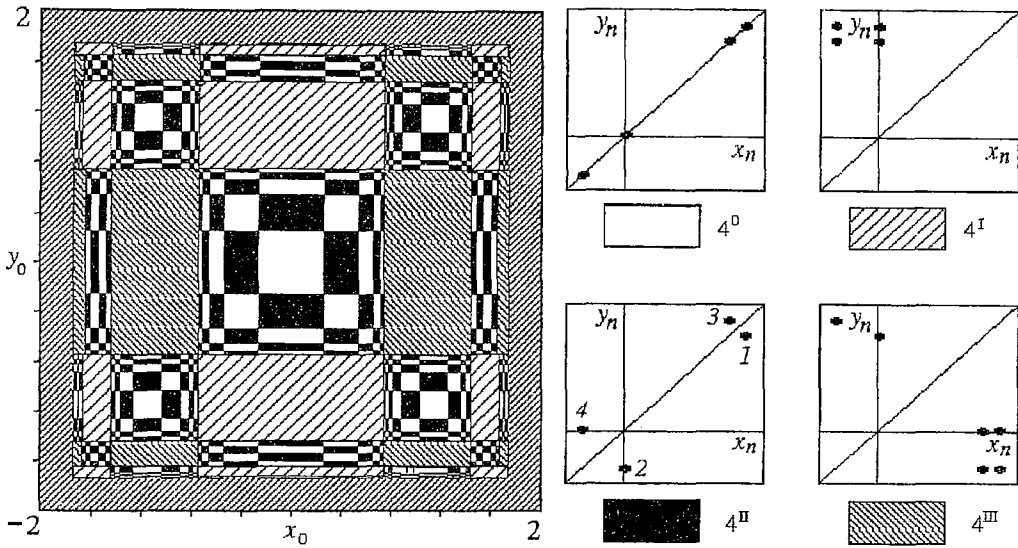


Рис. 5. Фазовые портреты и бассейны притяжения видов колебаний системы (2) при $\lambda=1.33, k=1$

При произвольных значениях связи подсистем справедливо, что если при некоторых k существуют зеркально симметричные 4^I и 4^3 , то при $1-k$ существуют зеркально симметричные 4^I и 4^3 , а симметричный 4^2 переходит при замене k на $1-k$ в симметричный 4^2 .

Аналогичная картина имеет место для всех циклов периода $2^n, n=2,3, \dots$, то есть при замене k на $1-k$ несинфазные симметричные циклы остаются, но порядок следования элементов меняется, а вместо зеркально симметричных пар циклов появляются новые пары зеркально симметричных циклов. В фазовых портретах при такой замене происходят следующие изменения: половина элементов (на каждом нечетном шаге итерации) остается на месте, а другая половина (на четных шагах) симметрично отражается относительно биссектрисы $x=y$, и наоборот.

Конфигурация бифуркационных множеств связанной системы

На рис. 6 показана плоскость параметров (k, λ) системы (2). Области устойчивости синфазных циклов ограничены горизонтальными линиями, соответствующими линиям бифуркаций удвоения периода. Остальные линии ограничивают области устойчивости несинфазных циклов.

Исследование эволюции различных видов колебаний и описание бифуркационных переходов для случая $k < 0.5$ приведено в работе [8]. В настоящей работе подобная задача для случая $k > 0.5$ не ставилась и рис.6 следует рассматривать лишь как иллюстрацию областей устойчивости синфазных и несинфазных циклов периода 1, 2 и 4. Как видно из рисунка, бифуркационные линии симметричны относительно $k=0.5$, то есть относительно замены k на $1-k$. Однако, хотя картина и симметрична, бифуркационные линии в области малой и большой связи относятся к разным циклам.

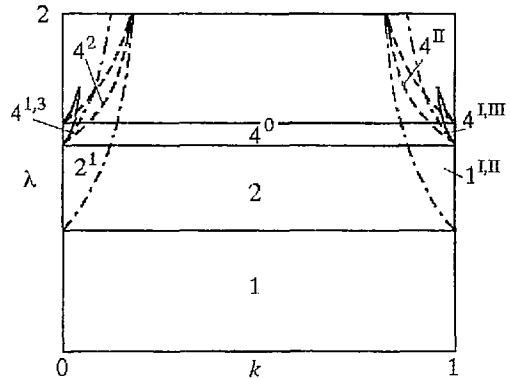


Рис. 6. Плоскость параметров (k, λ) системы (2). Штриховыми линиями ограничены области устойчивости режимов 4^2 и 4^II , а штрихпунктирными режимов $2^I, 1^I$ и 1^II

Объяснение полученным результатам можно дать и на языке мультипликаторов. Обозначая мультипликаторы несинфазного цикла 2^1 через $\mu_{1,2(2^1)}$, а несинфазных циклов 1^I и 1^{II} через $\mu_{1,2(1,I,II)}$, можно показать (см. приложение 2), что

$$\mu_{1,2(2^1)}(\lambda, k) = \mu_{2,1(1,I,II)}^2(\lambda, 1-k).$$

Следовательно, если $|\mu_{1,2(2^1)}(\lambda, k)| < 1$ (несинфазный цикл 2^1 устойчив), то и $|\mu_{2,1(1,I,II)}(\lambda, 1-k)| < 1$ (несинфазные циклы периода 1 тоже устойчивы).

Закономерности, обнаруженные при исследовании дискретной модели (2) в области слабой связи, были найдены в реальной осцилляторной системе с непрерывным временем [8]. Физический эксперимент проводился на системе нелинейных электрических маятников (резистивно связанных колебательных контурах с варакторными диодами). Было показано, что виды колебаний и конфигурации бифуркационных линий модели качественно соответствуют обнаруженным в эксперименте. Это дает основания полагать, что полученные закономерности соответствуют и системам с непрерывным временем. Однако, в области очень сильной симметричной связи физический эксперимент на колебательных контурах оказывается трудно реализуемым.

Заключение

Итак, на примере точечных отображений в работе рассмотрены колебательные состояния симметрично связанных систем с удвоением периода. Показаны особенности поведения системы при сильной связи ее элементов и продемонстрированы закономерности изменения несинфазных режимов колебаний при замене значения k коэффициента связи на $1-k$, то есть при переходе от слабой связи к сильной и наоборот.

Результаты, полученные для системы связанных логистических отображений (2) являются общими для более широкого класса систем (1), при условии идентичности функций $f(x_n)$ и $f(y_n)$, демонстрирующих удвоение периода.

Выражаю признательность Б.П. Безручко и В.В. Астахову за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96-02-16753, а также при поддержке INTAS, грант 93-2492-ext., в рамках программы Международного центра фундаментальной физики в Москве.

Приложение 1

Введем вместо x_n и y_n новые переменные $u_n = (x_n - y_n)/2$, $v_n = (x_n + y_n)/2$. В этих новых переменных система (2) запишется в следующем виде:

$$u_{n+1} = 2(2k-1)u_n v_n, \tag{П.1.1}$$

$$v_{n+1} = \lambda - v_n^2 - u_n^2.$$

Для цикла периода 1 $u_{n+1} = u_n = u$, $v_{n+1} = v_n = v$ и из (П.1.1) получаем

$$u(1 - 2(2k-1)v) = 0, \tag{П.1.2}$$

$$v^2 + v + u^2 - \lambda = 0.$$

Первое уравнение в (П.1.2) имеет два решения: $u=0$ и $v = 1/[2(2k-1)]$. Случай $u=0$ соответствует синфазному режиму ($x_n = y_n$), при этом из второго уравнения: $v_{1,2} =$

$= [-1 \pm (1+4\lambda)^{1/2}] / 2$. Другое решение соответствует несинфазному режиму. Подставив v во второе уравнение (П.1.2), получим: $u_{1,2} = \pm \{ \lambda - (4k-1) / [4(2k-1)^2] \}^{1/2}$. При $k=1$ $u_{1,2} = \pm (\lambda - 3/4)^{1/2}$ и принимает действительные значения при $\lambda \geq 3/4$.

Для исследования циклов на устойчивость найдем их мультипликаторы. Мультипликаторы цикла периода N являются собственными значениями матрицы монодромии цикла и определяются из уравнения

$$\mu^2 - \mu S + J = 0,$$

где S - след, а J - детерминант матрицы монодромии M , имеющей вид: $M = M_{N-1} M_{N-2} \dots M_0$ [1]. В случае цикла периода 1 для системы (П.1.1) получаем:

$$M = \begin{pmatrix} 2(2k-1)v & 2(2k-1)u \\ -2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Обозначив мультипликаторы цикла периода 1 через $\mu_{1,2(1)}$, получим

$$\mu_{1,2(1)} = 2v(k-1) \pm 2[k^2v^2 + u^2(1-2k)]^{1/2}. \quad (\text{П.1.3})$$

Для синфазного цикла 1^0 $u=0$ и $\mu_{1(1^0)} = -2v$, $\mu_{2(1^0)} = 2v(2k-1)$. Таким образом, в интервале положительных λ $v_1 = [-1 - (1+4\lambda)^{1/2}] / 2$ соответствует всегда неустойчивой неподвижной точке, а $v_2 = [-1 + (1+4\lambda)^{1/2}] / 2$ - устойчивой при $\lambda < 3/4$ неподвижной точке (оба мультипликатора при этом по модулю меньше единицы).

Подставляя в (П.1.3) значения v и $u_{1,2}$, соответствующие несинфазному режиму, и обозначая мультипликаторы в точке (v, u_1) через $\mu_{1,2(1a)}$, а в точке (v, u_2) через $\mu_{1,2(1b)}$, получим

$$\mu_{1,2(1a)} = \mu_{1,2(1b)} = (k-1) / (2k-1) \pm \{ [(k-1) / (2k-1)]^2 + 4[k - \lambda(2k-1)^2] / (2k-1) \}^{1/2}. \quad (\text{П.1.4})$$

То есть существуют два несинфазных, симметричных относительно замены u на $-u$ (или x на y и y на x) цикла периода 1, мультипликаторы которых всегда равны. Эти циклы устойчивы в широкой области параметров (рис.7). Например, при $k=1$ $\mu_{1,2(1a,b)} = \pm 2(1-\lambda)^{1/2}$ и циклы 1^a и 1^b устойчивы при $3/4 < \lambda < 5/4$, то есть при тех же значениях λ , что и циклы периода 2 в несвязанной системе.

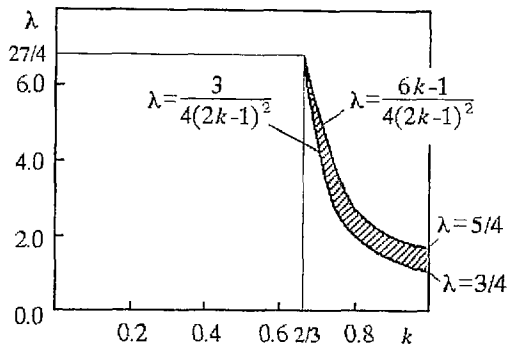


Рис. 7. Область устойчивости несинфазных циклов 1^a и 1^b в интервале значений k от 0 до 1. В заштрихованной области мультипликаторы рассматриваемых циклов по модулю меньше единицы. Границы области устойчивости получены в явном виде из (П.1.4)

Приложение 2

Матрица монодромии цикла периода 2 системы (2) имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 2x_1(k-1) & -2ky_1 \\ -2kx_1 & 2y_1(k-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2(k-1) & -2ky_2 \\ -2kx_2 & 2y_2(k-1) \end{pmatrix},$$

где x_1 , x_2 и y_1 , y_2 - элементы циклов в подсистемах x и y , соответственно. Несинфазный цикл 2^1 является симметричным, и для него: $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$. С учетом этого

$$\mu_{1,2(2i)} = 2k^2(x_1 + y_1)^2 + 4x_1y_1(1-2k) \pm 2k(x_1 + y_1)[k^2(x_1 + y_1)^2 + 4x_1y_1(1-2k)]^{1/2}. \quad (\text{П.2.1})$$

Выразим теперь значения мультипликаторов $\mu_{1,2(2i)}$ только через λ и k . Для этого запишем систему (2) для симметричного несинфазного цикла 2^1

$$x_1 = \lambda - y_1^2 + k(y_1^2 - x_1^2),$$

$$y_1 = \lambda - x_1^2 + k(x_1^2 - y_1^2).$$

Вычитая эти уравнения, получаем: $x_1 + y_1 = 1/(1-2k)$, а складывая: $x_1y_1 = (1-k)/(1-2k)^2 - \lambda$. Подставляя эти выражения в (П.2.1), имеем

$$\begin{aligned} \mu_{1,2(2i)} = & 2k^2/(1-2k)^2 + 4[1-k-\lambda(1-2k)^2]/(1-2k) \pm \\ & \pm 2k/(1-2k)\{[k/(1-2k)]^2 + 4[1-k-\lambda(1-2k)^2]/(1-2k)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.2})$$

Возводя (П.1.4) в квадрат, окончательно получаем:

$$\mu_{1,2(2i)}(\lambda, k) = \mu_{2,1(1,i)}^2(\lambda, 1-k). \quad (\text{П.2.3})$$

В частном случае, при $k = 0$ из (П.2.2): $\mu_{1,2(2i)} = 4(1-\lambda)$, а при $k = 1$ $\mu_{1,2(1,i)} = \pm 2(1-\lambda)^{1/2}$, то есть выполняется (П.2.3).

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 8. С.991.
2. Buskirk R., Jeffries C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1985. Vol.31, № 5. P.3332.
3. Gu Y., Tung M., Yuan J.M., Feng D.H., Narducci L.M. Crises and hysteresis in coupled logistic maps // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol.52, № 9. P.701.
4. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Синхронизация ансамблей диссипативно связанных отображений. Препринт № 9 (609) / Институт радиотехники и электроники РАН. М., 1995. 38 с.
5. Sato K., Aihara T. Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system // J. Phys. Soc. of Japan. 1990. Vol.59, № 4. P.1184.
6. Reick C., Mosekilde E. Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol.52, № 2. P.1418.
7. Crutchfield J.P., Kaneko K. Directions in chaos. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1987. Vol.1. P.272.
8. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т.60, вып.10. С.19.
9. Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Е.В. Эволюция бассейнов притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // Письма в ЖТФ. 1995. Т.21, вып.8. С.12.
10. Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. Особенности устройства пространства параметров двух связанных неавтономных неизохронных осцилляторов // Письма в ЖТФ. 1996. Т.22, вып.6. С.61.

Институт радиотехники и
электроники РАН, СФ

Поступила в редакцию 18.04.96
после переработки 23.09.96

OSCILLATION TYPES OF DISSIPATIVELY COUPLED PERIOD DOUBLING SYSTEMS AT STRONG COUPLING

M.D. Prokhorov

Oscillation types of two symmetrically coupled identical systems demonstrating period doubling are considered. For the case of dissipative coupling it is shown that out-of-phase oscillation regimes exist not only at weak coupling between subsystems ($k \sim 0$), but also at very strong coupling ($k \sim 1$). In the system parameter space the regions of out-of-phase regimes are symmetrical about $k=0.5$. However, in spite of symmetry the out-of-phase regimes at weak and strong coupling are essentially different.



Прохоров Михаил Дмитриевич родился в 1968 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1992). Работает младшим научным сотрудником в Саратовском филиале института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - нелинейная динамика, экспериментальное и численное моделирование сложных систем. Имеет 11 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



НОВЫЙ СПОСОБ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПОСРЕДСТВОМ ВЕЙВЛЕТОВ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ДИНАМИКЕ КЛИМАТА

Д.М. Сонечкин, Н.М. Даценко, Н.Н. Иващенко

Указывается, что одной из главных причин неудач экстраполяции временных рядов, наблюдаемых в различных областях естествознания, наряду с их хаотичностью, является общая их нестационарность. Это затрудняет построение адекватных математических моделей этих рядов, и, как следствие, делает модели неэффективными для практических прогнозов. Характерной областью является исследование динамики современного климата, где несмотря на применение супер-ЭВМ усилия очень большого числа исследователей пока не увенчались существенными успехами. На основе идей хаотической динамики и с использованием сравнительно нового аппарата вейвлетного анализа предлагается новый способ экстраполяции временных рядов с разделением их колебательной и нестационарной компонент. Применение разработанного способа к экстраполяции глобальной температуры воздуха приводит к заключению о возможной приостановке глобального потепления климата к концу 20-го века.

Введение

Бурный прогресс теории динамических систем за последние 20 лет уже начал приносить плоды в виде лучшего понимания самоорганизации в природе. Но в проблеме предсказуемости хаоса, которая явилась [1] одной из отправных точек этого прогресса, больших успехов еще нет. В естественно-научных приложениях, где неизвестны эволюционные уравнения (как в биологии, медицине и т.п.) или где они, хотя и известны, но крайне громоздки (как в метеорологии), для прогнозов продолжают широко использовать линейные модели временных рядов типа авторегрессии-скользящего среднего и др. Все они, будучи рассматриваемы как модели соответствующей динамической системы, имеют аттрактором неподвижную точку или цикл. На самом же деле обычно можно предполагать, что рассматриваемая динамика хаотична. Так, климатического аттрактора в виде точки или цикла в фазовом пространстве гипотетической атмосферной модели, вероятно, вообще не существует. Климат есть статистическое среднее многих хаотических «реализаций» погоды.

Нелинейные прогностические модели, по идее более подходящие для долгосрочных предсказаний хаотической динамики, применяются гораздо реже из-за много большего числа их параметров, подлежащих оценке по всегда очень ограниченному ряду доступных архивных данных. Это «проклятие размерности», как уже давно было продемонстрировано Лоренцем [2], делает эмпирические нелинейные прогностические модели неэффективными.

Если размерность хаотического аттрактора мала, то все же можно сконструировать нелинейную модель по ряду данных, много большему, чем эта размерность (как минимум [3], порядка 2^D , где D - размерность аттрактора, хотя ряд авторов указывает на необходимость много большего ряда). Для этого надо применить способ, который в метеорологии издавна называют «прогнозом по аналогии». Примеры этого в теории динамических систем сейчас уже довольно многочисленны [4-13]. Современное же оформление такого способа прогноза в самой метеорологии было осуществлено [14] одновременно с только что упомянутыми теоретико-динамическими работами. Целью был прогноз температуры воздуха, осредненной по периоду времени от месяца до полугода, для территории бывшего СССР и Западной Европы. Синоптики Гидрометцентра СССР, официально испытывавшие некоторые из этих прогнозов, признали, что они не уступают по качеству их собственным субъективным прогнозам, а численный прогноз по полугодиям был даже рекомендован для оперативного использования. Надо отметить, что все ранее испытывавшиеся в Гидрометцентре СССР численные долгосрочные прогнозы явно уступали предсказаниям синоптиков. К сожалению, в абсолютном смысле все прогнозы (и синоптиков, и разработанные в [14]) содержат лишь следы истины.

Причин, как оказалось, две. Во-первых, реальное число степеней свободы атмосферных процессов очень велико, ибо атмосферный хаос является пространственно-временным. Архивы данных поэтому мало представительны. Они содержат лишь малую долю тех погодных ситуаций, которые, в принципе, могут наблюдаться. Всякая вновь наблюденная ситуация оказывается в чем-то совершенно оригинальной. Хорошего аналога из прошлого для нее не подберешь. Приходится использовать аналогии, лишь в самых общих чертах сходные с текущим состоянием атмосферы. Число таких черт в [14] определялось по так называемой грубозернистой размерности атмосферного аттрактора, оцененной как равная шести. Но даже при отборе в шестимерном пространстве группа лучших аналогов обычно не образовывала симплекс - выпуклую оболочку вокруг точки текущего состояния атмосферы. Как результат, прогноз «по аналогии» оказывался не интерполяцией, а экстраполяцией в фазовом пространстве. Ясно, что такой прогноз не может быть очень надежен.

Вторая причина, усугубляющая дело, заключается в том, что динамика атмосферы нестационарна даже в масштабах столетия и более. Нестационарность - общее свойство динамических систем окружающего нас мира. Например, человек стареет, и его биомедицинские показатели подвержены систематическому дрейфу. Дрейф климата приводит к тому, что архивные метеорологические данные тоже «стареют». Даже подобрав из прошлого хороший аналог, нельзя быть уверенным, что последующее за ним изменение погоды может быть похоже на сейчас предстоящее, ибо нестационарность приводит к изменению аттракторного множества в целом. Очень важно поэтому разделить в рассматриваемом временном ряде собственно хаотические колебания и тренд. Хорошим подспорьем для этого является, как оказалось, вейвлетное преобразование ряда.

Вейвлетное преобразование - новое средство анализа нестационарных хаотических временных рядов

Попытки распространить приемы анализа Фурье, корреляций и регрессий на нестационарные случайные процессы предпринимались давно. Например, можно упомянуть разные варианты «текущего» (windowed) анализа Фурье, но существенный прогресс был достигнут только недавно, после разработки так называемого вейвлетного преобразования (ВП) (wavelet transform). Сейчас это уже довольно развитая техника [15], получившая популярность в самых разных естественно-научных приложениях. Авторы уже писали о ВП в настоящем журнале [16], поэтому будем считать его известным читателям. Привлечем внимание лишь к той разновидности ВП, которая называется многомасштабным

анализом [17]. При многомасштабном анализе рассматриваемый временной ряд, предполагаемый существующим на всей бесконечной временной оси, представляется в виде

$$T(t) = 2^{-M/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^M f(2^{-M}t - n) + \sum_{m=0}^M 2^{-m/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^m g(2^{-m}t - n) \quad (1)$$

разложения на две группы членов. Одну группу составляют проекции (S_n^m) ряда на ортонормированное семейство вейвлетных функций $2^{-m/2}g(2^{-m}t - n)$, ($a=2^m$ - масштаб вейвлетных функций (ВФ)), получаемых путем всевозможных целочисленных сдвигов и перемасштабирований, из единственной функции, локализованной на временной оси вблизи нуля своего аргумента (или даже функции с конечным носителем, как вейвлеты Добеши [18]). В целом все ВФ образуют базис в R функций из $L^2(R)$.

Из-за равенства нулю среднего значения ВФ вейвлетные коэффициенты составляют статистически стационарные осцилляторные временные ряды с нулевыми средними значениями и дисперсиями, зависящими от масштаба

$$\text{var}(S_n^m) = \text{const}(2^m)^{2H+1}, \quad (2)$$

где H - параметр Херста [19] характеризует временную коррелированность приращений временного ряда на соседних интервалах ($H>0.5$ - положительная, $H=0.5$ - нулевая, $H<0.5$ - отрицательная коррелированность).

Вторую группу составляют проекции (C_n^M) ряда на семейство так называемых «отцовских» функций (ОФ) $2^{-M/2}f(2^{-M}t - n)$, также получаемое всевозможными сдвигами из единственной функции. Термин «отцовская» возник потому, что между ВФ и ОФ существует связь вида

$$g(2^{-m}t - n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(2^{-m-1}t - \tau) f(2^{-m}p - \tau) d\tau \right\} f(2^{-m}p - n), \quad (3)$$

$$f(2^{-m-1}t - n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1/2} f(\tau/2) f(\tau - p - 2t) d\tau \right\} f(2^{-m}p - n).$$

Коэффициенты C_n^M характеризуют все нестационарности исходного ряда (низкочастотные тренды, не принадлежащие к $L^2(R)$).

При практическом вычислении коэффициентов ряда (1) трудность возникает из-за конечности любого располагаемого ряда данных. Посвященные этому публикации [20,21] малодоступны отечественному читателю. Опишем кратко имеющиеся здесь возможности.

Пренебрежение конечностью ряда, то есть неявное продолжение ряда нулями в плюс и минус бесконечность, делает любые тренды функциями с конечной энергией, локализованными в пределах располагаемой части ряда. Эта энергия перераспределяется по проекциям на все ВФ, искажая все коэффициенты разложения в ряд (1). Если замкнуть располагаемый ряд в кольцо, как иногда делают при анализе Фурье, результат будет тот же. Надо учесть, что конечность ряда сказывается на результатах ВП только в крайних частях располагаемого ряда, тем более широких, чем большего масштаба ВФ рассматривается. Существует такой большой масштаб M_{MAX} , при котором искаженные края смыкаются, делая реконструкцию ряда по формуле (1) при заданных вейвлетных коэффициентах и, следовательно, обнаружение трендов невозможным. Поэтому масштаб M в (1) надо брать существенно меньше M_{MAX} , а к числу трендов относить также те функции из $L^2(R)$, периоды осцилляций которых порядка M и более. Диапазон анализируемых осцилляторных компонент при этом может оказаться чрезмерно узок, да и для рассматриваемой ниже задачи экстраполяции рассматриваемого ряда в будущее важно реконструировать ряд по (1) вплоть до его располагаемого конечного значения.

Выходом из положения, как показали наши опыты и опыты других исследователей [22], является так называемая буферизация, то есть искусственное удлинение располагаемого ряда суррогатными данными. Так как крайние

искажения наиболее существенны в крупных масштабах, ясно, что суррогатные данные могут не включать в себя высокочастотных осцилляций, а быть довольно гладкими функциями времени или даже константами. Последнее обосновывается тем, что результат ВП нечувствителен к дополнению располагаемого ряда постоянной добавкой. Поэтому вычитание из данных ряда его выборочного среднего уменьшает краевые эффекты. Если ограничить максимальный масштаб M анализируемых осцилляций так, чтобы искаженные края не смыкались, то выборочные средние можно подсчитывать отдельно для некоторой начальной и некоторой конечной части ряда, а уже затем выполнять ВП дважды с учетом обоих средних. Итоговые наборы коэффициентов реконструирующего ряда (1) надо тогда составлять для начальной части располагаемого ряда из результатов первого, а для конечной части - второго ВП. Это обеспечивает сравнительно малую чувствительность итога к краевым эффектам.

Многомасштабный анализ временных рядов глобальной температуры воздуха

Исходные данные о глобальной среднегодовой температуре воздуха за 1854-1990 гг. (первый ряд) и такие же данные, скорректированные на влияние известного процесса Эль-Ниньо, за 1867-1990 гг. (второй ряд) были заимствованы из наиболее авторитетного источника [23]. Для их анализа была использована ВФ «мексиканская шляпа»,

$$g(t) = 2/3^{1/2} \pi^{-1/4} (1 - t^2) \exp(-t^2/2) \quad (4)$$

из-за сравнительной легкости вычисления с ее помощью ВП по коротким рядам дискретно заданных данных. Строго говоря, «мексиканская шляпа» не порождает ортонормированного базиса, а только некоторое приближение к нему, при котором реконструируемый ряд (1) лишь приближенно воспроизводит энергию анализируемых осцилляторных компонент исходного ряда. Подобное ВП называется «рамочным» (frame [18,20]) и вполне приемлемо для приложений.

На рис. 1 дан пример трехмерной (непрерывной) картины ВП первого

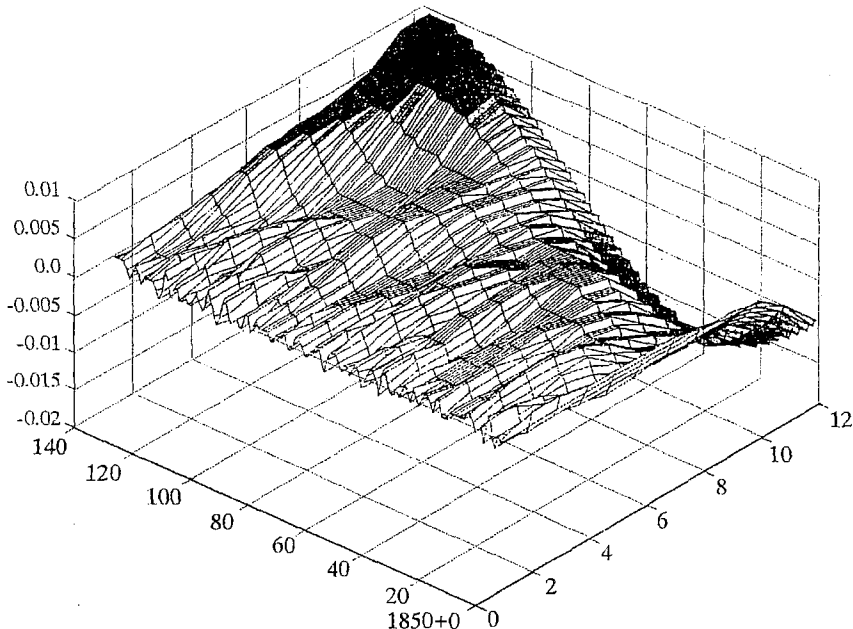


Рис. 1. Трехмерная картина вейвлетного преобразования временного ряда (1854-1990) глобальной температуры воздуха в координатах: время, логарифм масштаба, величина вейвлетного преобразования (по данным [23])

вышеуказанного ряда данных (второй дает очень сходную картину) в координатах: (время, логарифм масштаба, величина ВП), полученную путем гладкой интерполяции рамочного ВП, рассчитанного для 12-ти масштабов, начиная с первого масштаба $a=1$ год ($m=0$), до двенадцатого масштаба a около 50 лет ($m=11/2$). Поскольку эффективная ширина «мексиканской шляпы» примерно в пять раз больше единицы масштаба, представленная картина характеризует вариации глобальной температуры в интервалах от 5 до примерно 250 лет. Общая длина ряда всего 137 лет, поэтому на представленную картину, начиная примерно с масштаба a около 15 лет ($m=4$), сильно влияют краевые эффекты. Можно принять этот масштаб за максимальный масштаб анализируемых статистически стационарных осцилляций температуры воздуха, ибо на рис. 1 для масштабов, меньших чем этот, не заметно никакого систематического изменения величины ВП со временем, в отличие от более крупных масштабов, где такое изменение вполне очевидно. Эти последние изменения величины ВП ниже будут отнесены к трендам, хотя не исключено и даже более чем вероятно, что в них тоже есть вклад стационарных компонент хода температуры.

Трехмерная картина хороша для общего представления ВП рассматриваемого ряда. Количественный анализ удобнее вести при двумерном представлении, как на рис. 2, в координатах: (время, логарифм масштаба). Сам ряд показан в верхней части рисунка. На этом рисунке хорошо видна структура ветвлений областей положительных и отрицательных величин ВП при уменьшении масштаба (снизу вверх), являющаяся характерным признаком многомасштабного статистически стационарного процесса.

Для иллюстрации этого рассмотрим картину ВП (рис. 3) суррогатного временного ряда, полученного путем случайной перестановки лет в ряду глобальной температуры (рис. 2). Сравнивая эти рисунки, видим, что картина ветвлений для суррогатного (классически случайного) ряда в целом такая же, как и для исходного натурального ряда, о котором можно предполагать, что он порожден хаотической динамической системой общей циркуляции атмосферы. Это общее впечатление подкрепляется количественной оценкой скорости ветвлений при уменьшении масштаба ВП, представленной для обоих рядов на рис. 4. Число максимумов величины ВП, как функция масштаба, оказывается почти одинаковым

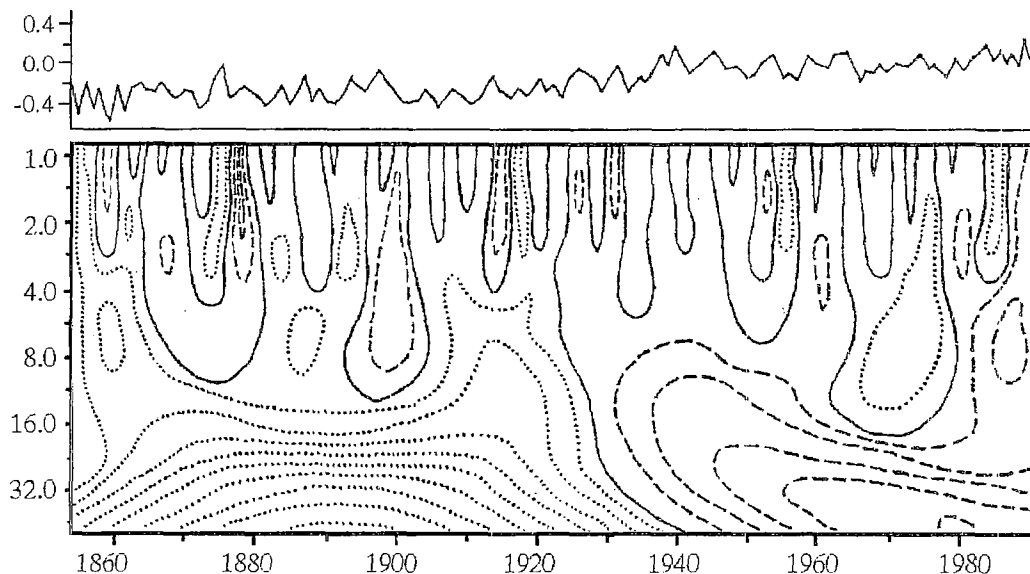


Рис. 2. Двумерная картина вейвлетного преобразования того же ряда, что и на рис.1, в координатах: время, логарифм масштаба. Величина вейвлетного преобразования представлена полем изолиний (положительные значения - штриховые линии, отрицательные - пунктир, нулевая изолиния - сплошная линия). Преобразуемый ряд показан сверху рисунка

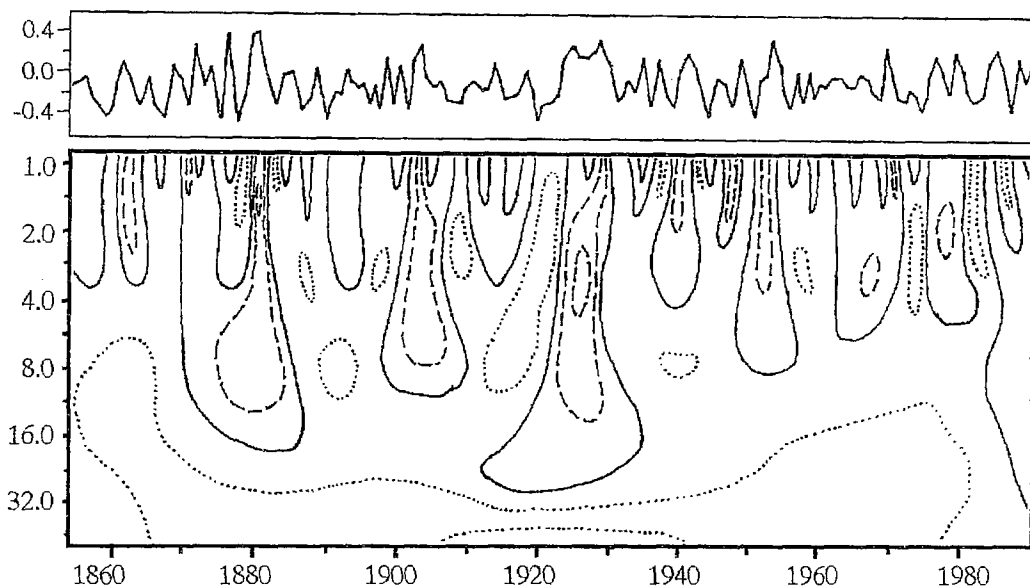


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для суррогатного ряда, полученного путем случайной перестановки членов ряда глобальной температуры воздуха

у обоих рядов для всех масштабов менее $m=4$. Отсюда оценка величины параметра Херста, вычисленная по формуле

$$\log_2 N(a) = -1/2 H \log_2 a, \quad (5)$$

являющейся следствием общей формулы (2) сохранения скейлинга при ВП, приводит у обоих рядов к практически одинаковому результату чуть более 0.5. Таким образом, натуральный ряд, если исключить в нем из рассмотрения вариации температуры длительностью более 50 лет (масштабы ВП более 10 лет), является случайным, типа белого шума процессом, как и суррогатный ряд с таким же, как у натурального, распределением вероятности величины температуры.

Различие между натуральным и суррогатным рядом существует только начиная с масштаба $m=4$ ($a=16$ на рис. 2 и 3). У суррогатного ряда ветвления начинаются с самого крупного масштаба, причем сначала они происходят аномально медленно, если за норму принять скорость ветвлений в более мелких масштабах. Угол наклона соответствующего графика, аппроксимирующего эту зависимость на рис. 4, для них меньше. Значит, оцененная на этом участке величина параметра Херста должна быть больше 0.5, то есть крупномасштабные вариации у суррогатного ряда кажутся положительно коррелированными во времени. Как возможную причину этого эффекта можно назвать остаточные краевые эффекты. У натурального ряда, наоборот, в самых крупных масштабах есть только один максимум, то есть ветвления начинаются только с

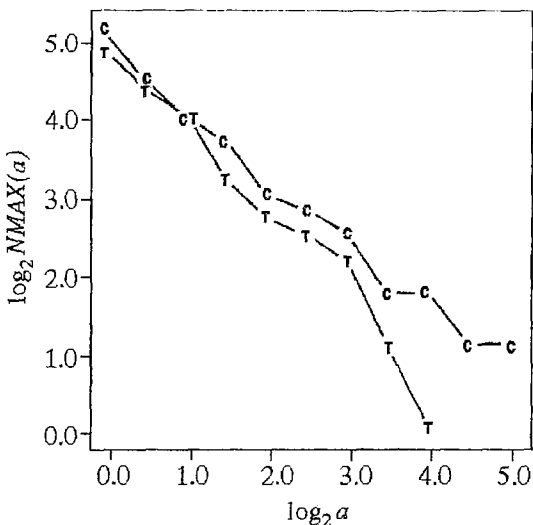


Рис. 4. Зависимость числа максимумов в двумерной картине ветвляющегося преобразования в двойных логарифмических координатах от величины масштаба; т- для натурального ряда температуры, с - для суррогатного ряда

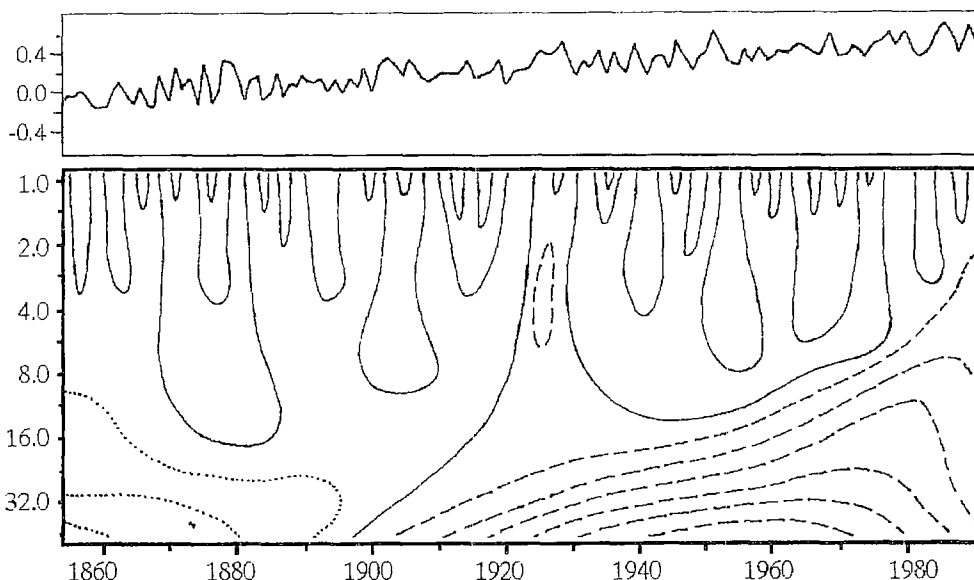


Рис. 5. То же, что и на рис. 2 и 3, но для нового суррогатного ряда, полученного путем деления пополам значений первого суррогатного ряда и последующего добавления линейного тренда с инкрементом 0.04 градуса за 10 лет, начинающегося с начала ряда

масштаба $m=4$. Картину ВП в нижней части рис. 2 поэтому хочется интерпретировать как характерную для тренда.

Окончательно в этом убеждает результат ВП того же самого суррогатного ряда, что и на рис. 3, но дополнительно отягощенного линейным трендом с инкрементом 0.04 градуса за 10 лет, что за 137 лет дает прирост температуры на 0.55 градуса, как и кажущийся прирост у натурального ряда. Для того, чтобы общая изменчивость этого нового суррогатного ряда осталась равной натуральной изменчивости температуры воздуха, все значения ряда на рис. 3 предварительно уменьшались в два раза по модулю и уже затем складывались с суррогатным трендом.

Новая картина ВП, представленная на рис. 5 в масштабах менее $m=4$ ($a=16$), оказалась совершенно одинаковой с картиной на рис. 3, только абсолютные величины величины ВП, как следствие только что упомянутого пересчета случайных компонент ряда, заметно уменьшились. В более же крупных масштабах можно видеть картину монотонного роста величины ВП от существенно отрицательной в начале ряда к существенно положительной в его конце, что отражает наличие суррогатного тренда. Таким образом, ВП действительно позволяет обнаружить наличие тренда по резкому переходу от области ветвлений в относительно малых масштабах к области монотонного изменения величины ВП со временем в более крупных масштабах.

Чтобы не только обнаружить, но и количественно оценить тренд, достаточно выполнить обратное ВП, то есть просуммировать ряд (1) по группе ВФ вплоть до $M=4$. Вычитая затем реконструированный таким образом ряд из исходного, получаем остаточный ряд, который является суммой тренда и тех высокочастотных компонент исходного ряда, которые не описываются даже самыми мелкомасштабными ВФ, соответствующими масштабу $m=0$. Результаты этих операций представлены на рис. 6 для суррогатного ряда с трендом из рис. 5 и на рис. 7 для второго из рассматриваемых натуральных рядов.

Наличие линейного тренда на рис. 6 очевидно даже на глаз. Правда, в самой левой части крутизна графика уменьшается. Причиной тому является неполностью устраненный краевой эффект: достраивая ряд в предшествующие начальному моменты времени, мы не принимали суррогатный тренд во внимание и считали температуру постоянной, то есть суррогатный тренд как бы начинался в начальной точке ряда. Естественно, это проявилось при ВП и его обращении.

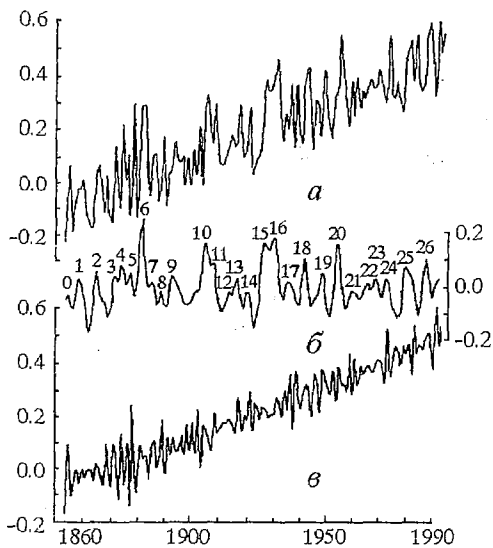


Рис. 6. Исходный суррогатный ряд (1854-1990) (а). Его статистически стационарная осцилляционная часть, полученная путем обратного вейвлетного преобразования в диапазоне масштабов от $m=0$ до $m=4$ (б); цифрами перенумерованы последовательные максимумы этого ряда. Остаток вычитания из исходного ряда осцилляционных компонент, включающий в себя тренд исходного ряда и его наиболее высокочастотные осцилляции (в)

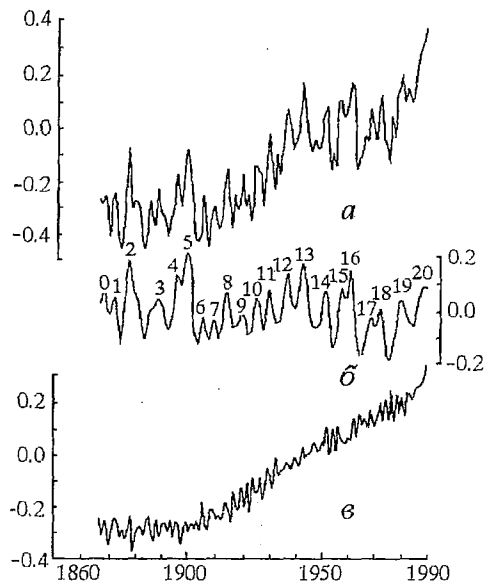


Рис. 7. Исходный временной ряд глобальной температуры воздуха (1867-1990), скорректированный на явление Эль-Ниньо (а). Его статистически стационарная осцилляционная часть, полученная путем обратного вейвлетного преобразования в диапазоне масштабов от $m=0$ до $m=4$ (б); цифрами перенумерованы последовательные максимумы этого ряда. Остаток, полученный путем вычитания из первого ряда второго и включающий в себя тренд глобальной температуры и ее высокочастотные осцилляции (в)

Только кажущееся начало тренда сместилось на более поздний момент времени (на 10-15 лет, судя по рисунку). Расчет инкремента тренда по рис. 6 методом наименьших квадратов приводит к величине 0.040 градуса за 10 лет, в точности совпадающей с заданной.

Картина тренда натурального ряда на рис. 7 похожая. Примерно до 1900 г. остаточный ряд кажется осциллирующим около некоторого среднего значения, близкого к -0.32. С начала же 20-го века появляется линейный тренд с инкрементом 0.056 градуса за 10 лет.

Отметим, что метеорологи предпринимали многочисленные попытки выявить тренд современного глобального потепления, который, на первый взгляд, кажется вполне очевидным в ряде глобальной температуры воздуха. Для этого они использовали самые различные приемы, начиная с субъективного определения момента начала тренда с последующей оценкой инкремента линейного роста температуры методом наименьших квадратов, до самых различных способов предварительного сглаживания ряда и аппроксимации того, что получается полиномом низкого порядка. В результате единого мнения о характере тренда получить не удалось, и все такого рода простые приемы статистической обработки имеющихся рядов температуры воздуха признаны неудовлетворительными (см., например, обзор Снейерса [24]). Как один из главных дефектов применения таких простых методик для выделения тренда можно указать то, что получившийся у метеорологов после исключения тренда осцилляционный ряд на практике всегда оказывался коррелированным. Это - существенное препятствие для оценки значимости самого выделенного тренда. Как было показано в ряде метеорологических работ (см., например, [25] и др.), статистически неотличимой от модели рассматриваемого ряда, как суммы тренда и случайных осцилляций,

оказывается в этих условиях модель авторегрессии второго или более высокого порядка, в которой тренда вообще нет. Можно поэтому сказать, что использование скользящего осреднения для выявления трендоподобной компоненты анализируемого ряда всегда приводит к заключению о недостаточной длине ряда. В этом принципиальное различие использования временной фильтрации ряда и его ВП для обнаружения тренда. С помощью ВП в анализируемом ряду выявляются относительно высокочастотные компоненты (статистически стационарные осцилляции), для чего конечность ряда не столь существенна. Тренд же получается как остаток после вычитания этих компонент из исходного ряда.

Рассмотрение вопроса о природе выявленного нами тренда не входит здесь в нашу задачу. Упомянем только, что, если приписать его парниковому эффекту, то, поскольку рост концентрации парниковых газов в атмосфере пока продолжается, можно думать, что и тренд сохранится по крайней мере до начала 21-го века. Тогда, чтобы оценить перспективы глобального потепления, надо еще проэкстраполировать осцилляционную компоненту ряда. Именно она, судя по величине ее размаха в 0.40 градуса (см. рис. 7), а не тренд, будет определять изменения глобальной температуры ближайших одного-двух десятилетий.

Нелинейная экстраполяция глобальной температуры воздуха

Поскольку осцилляционная компонента ряда глобальной температуры воздуха, выделенная с помощью ВП, по построению является статистически стационарным случайным процессом, для ее экстраполяции можно использовать традиционную авторегрессию. Однако, учитывая, что временная корреляционная функция этого процесса чрезвычайно быстро затухает со временем (напомним: судя по величине параметра Херста, это - процесс близкий по свойствам к белому шуму), авторегрессия первого порядка здесь малоэффективна. Можно учесть, что обратное ВП в ограниченном диапазоне масштабов, которое было использовано для формирования осцилляционной компоненты рассматриваемого ряда, порождает сигнал, локализованный в конечном диапазоне частот. Поэтому для экстраполяции может быть использована авторегрессия высокого порядка, как это с определенным успехом продемонстрировано в работе [26], где, правда, вместо ВП для анализа ряда применялся так называемый сингулярный анализ, являющийся фактически одним из вариантов текущего анализа Фурье.

Ниже излагается иной способ экстраполяции хаотически осциллирующего ряда, восходящий к анализу детерминированного хаоса с малым числом степеней свободы.

Рассмотрим последовательность экстремумов (отдельно максимумов и минимумов) интересующего нас ряда (см. рис. 7, где максимумы перенумерованы) и построим для нее отображение первого возвращения по следующему правилу. Найдем самый первый по времени максимум (обозначен цифрой 0 на рис. 7) $\max(0)=0.07$ и следующий за ним $\max(1)=0.05$. Используя их как абсциссу и ординату, нанесем на график отображения (рис. 8) самую первую точку. Затем, используя значение второго из них как абсциссу, за ординату примем значение следующего максимума и нанесем на график вторую точку и т.д. Полученную последовательность точек (так называемую «лестницу Ламерея») можно рассматривать как отображение первого возвращения некоторой динамической системы, определяющей временную динамику статистически стационарной части эволюции глобального климата. Она построена по единственной фазовой координате этой динамической системы - глобальной температуре воздуха.

Такие отображения хорошо известны в приложениях теории динамических систем, начиная с отображения максимума одной из трех координат знаменитой трехмодовой модели Лоренца [1]. В отличие от последней, где получается практически однозначное отображение типа так называемого отображения «тента», отображение на рис. 8 (для удобства рассмотрения на нем последовательные точки соединены гладкими дугами), к сожалению, не является

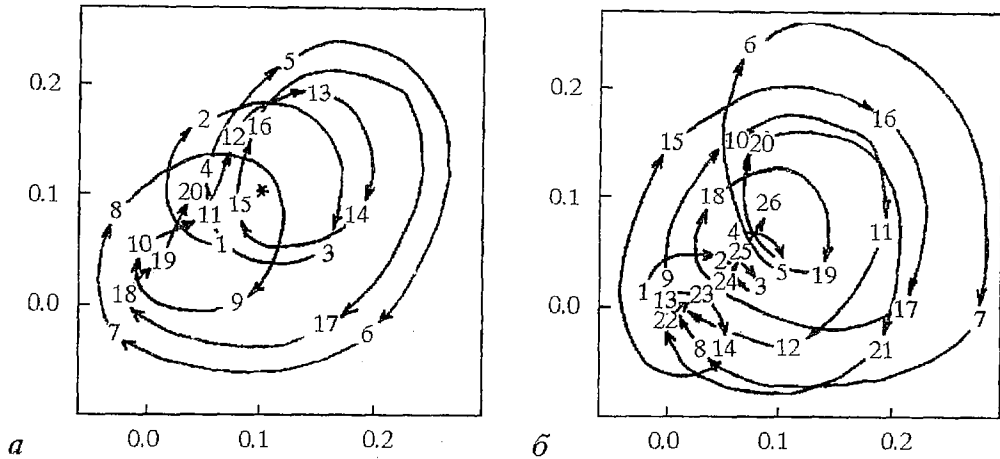


Рис. 8. Отображения первого возвращения для последовательностей максимумов осцилляторной части ряда глобальной температуры воздуха, скорректированного на явление Эль-Ниньо для периода 1867-1990, (а) и суррогатного ряда случайно переставленных членов этого ряда, деленных пополам, и с добавленным линейным трендом (б). Звездочкой показан общий центр вращения у первого из отображений

однозначным. Оно может рассматриваться как отображение кольца в себя: движение от точки к точке есть вращение по часовой стрелке вокруг некоторой точки - общего центра вращения, обозначенной на рис. 8, а звездочкой.

Прежде чем рассматривать это отображение для натурального ряда, посмотрим, как оно выглядит для суррогатного ряда из рис. 5 и б. Последнее показано на рис. 8, б и отличается от отображения для натурального ряда на рис. 8, а отсутствием общего центра вращения. Как показали наши эксперименты, такое отличие является устойчивым свойством, позволяющим различать классически случайные ряды от рядов детерминированного хаоса, возникающего в результате бифуркаций торов.

Отображение кольца в себя обычно описывается следующей парой разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \theta_t &= \theta_{t-1} + \Omega - (k/2\pi)\sin(2\pi\theta_{t-1}) = br_{t-1}, \\ r_t &= br_{t-1} - (k/2\pi)\sin(2\pi\theta_{t-1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где θ_t , r_t - полярные координаты точек на рис. 8 относительно центра вращения. Коэффициенты Ω , k и b можно оценить по имеющимся точкам, например, методом наименьших квадратов с естественным дополнительным ограничением, вытекающим из способа построения отображения (абсцисса последующей точки равна ординате предыдущей)

$$r_t \cos(2\pi\theta_t) = r_{t-1} \sin(2\pi\theta_{t-1}), \quad (7)$$

и при условии, что центр вращения выбран на биссектрисе первого-третьего координатного угла.

Поскольку построенное отображение содержит всего 20 точек, такая оценка коэффициентов вряд ли будет хороша для моделирования и долгосрочной (на много шагов вперед) экстраполяции. Но для расчета амплитуды и фазы отображения на один-два шага вперед этих данных может хватить. Апостериорные расчеты по уже имеющимся точкам показали, что при этом лучше зафиксировать параметр нелинейности на величине, близкой к критической для отображения кольца в себя, то есть равной единице, и затем рассчитывать методом наименьших квадратов величины числа вращения и параметра вязкости. Возникающее при этом движение, конечно, не будет хаотическим, но для

экстраполяции на один-два шага это не имеет практического значения. Практический расчет прогнозов на один шаг вперед для всех уже наблюдаемых максимумов показал, однако, что средняя квадратическая ошибка при этом составляет 0.80, что несколько больше ошибки «климатического» прогноза, когда величина следующего максимума во всех случаях полагается равной ее среднему значению 0.78. Разумеется, это не означает, что прогностический расчет описанным способом совсем неинформативен. Он все же лучше, чем случайное гадание, когда средняя квадратическая ошибка превосходит единицу. Для других наборов данных этот способ, возможно, будет вполне хорош.

Тем не менее, в данном случае более практичным оказался другой возможный способ экстраполяции, состоящий, как известно [4-13] для детерминированного хаоса, в «локальной» аппроксимации отображения, когда около последней известной точки отображения (точка 20 на рис.8), соответствующей последнему наблюдаемому в 1989 году максимуму, строится выпуклая оболочка - симплекс из наиболее близких соседних точек. Метеорологи обычно называют такие точки аналогами. В отличие от упомянутых в начале данной статьи прогнозов погоды по аналогии, здесь аналоги ищутся в двумерном пространстве, и найти выпуклую оболочку для большинства текущих точек не составляет труда. Так, для точки 20 лучшими аналогами являются точки 4,8 и 11. Точка будущего (21-го) максимума тем или иным способом (но так, чтобы ее абсцисса была равна ординате 20-ой точки) должна быть выбрана внутри симплекса точек 5,9 и 12. Так, мы ожидаем величину следующего максимума равной 0.18. Остается еще определить, когда он будет. Для этого достаточно рассмотреть последовательность временных интервалов между очередными максимумами и построить для нее тем же способом отображение первого возвращения. Не приводя его, укажем, что 21-ый максимум ожидается в 1995 г. К этому году тренд увеличит температуру почти на 0.04 и, учитывая, что в 1989 г. величина максимума была 0.20, окончательно получаем рост температуры в 1995 г. всего на 0.02. Следующий 22-ой максимум оценить уже труднее. Ориентировочно он будет около 2000 г. и небольшой по величине. Таким образом, приведенные оценки указывают на то, что глобальное потепление до конца 20-го века, по крайней мере, приостановится.

Насколько надежно такое предсказание, можно оценить, подсчитав среднюю квадратическую ошибку соответствующих предсказаний для всех ранее наблюдаемых максимумов, начиная со 2-го по 19-ый. При этом надо отметить, что для некоторых максимумов, расположенных на внешней стороне кольца точек, найти выпуклую оболочку было нельзя. Например, такими являются точки 2, 5, 6, 7, 8 и 14. Поэтому прогноз для них составлялся по одному ближайшему аналогу. Средняя квадратическая ошибка прогноза оказалась равна 0.66. Это лучше, чем для вышеописанного способа с использованием уравнений (6), (7), и даже чуть лучше, чем при «климатическом» прогнозе. Таким образом, прогноз по аналогии для рассматриваемых данных явно лучше случайного и примерно эквивалентен в среднеквадратическом смысле климатическому прогнозу. Это - очень хороший результат. Например, все нынешние практические долгосрочные прогнозы погоды в среднеквадратическом смысле сильно уступают климатическому прогнозу и лишь немного лучше чисто случайных.

Заключение

Предложенная техника разделения наблюдаемых хаотических временных рядов на статистически стационарную часть и тренд с последующей их отдельной экстраполяцией представляется, по мнению авторов, перспективной для решения задач диагностического описания и предсказания будущего поведения хаоса различной природы. Она допускает обобщение на случай многомерных рядов, чему авторы надеются посвятить отдельную публикацию.

Данная работа была выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-05-16341).

Библиографический список

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, № 2. P. 130.
2. Lorenz E.N. On the prevalence of aperiodicity in simple systems // Lecture Notes Mathematics. 1979. Vol. 755. P. 53.
3. Schertzer D., Lovejoy S. Nonlinear variability in geophysics 3. Scaling and multifractal processes // Lecture Notes, 10-17 Sept. 1993, Institut d'Etudes de Cargese, 1993, 292 p.
4. Abarbanel H.D.I., Brown R., Kadtko J.B. Prediction in chaotic nonlinear systems: methods for time series with broadband Fourier spectra // Physical Review A. 1990. Vol. 41, № 4. P. 1782.
5. Broomhead D.S., Lowe D. Multivariable functional interpolation and adaptive networks // Journal Complex Systems. 1988. Vol. 2. P. 321.
6. Casdagli M. Nonlinear prediction of chaotic time series // Physica D. 1989. Vol. 35. P. 335.
7. Crutchfield J., McNamara B.S. Equations of motion from a data series // Journal Complex Systems. 1987. Vol. 1. P.417.
8. Elsner J.B., Tsonis A.A. Empirically derived climate predictability over the extratropical northern hemisphere // Nonlinear Processes in Geophysics. 1994. Vol. 1. P.41.
9. Farmer D., Sidorowich J.J. Predicting chaotic time series // Physical Review Letters. 1987. Vol. 59, № 8. P. 845.
10. Smith L. Quantifying chaos with predictive flows and maps: locating unstable periodic orbits // Measures of Complexity and Chaos / Eds. N.B. Abraham et al. N.Y.: Plenum Press, 1990. 359 p.
11. Sugihara G., May R.M. Nonlinear forecasting as a way distinguishing chaos from measurement error in time series // Nature. 1990. Vol. 344. P. 734.
12. Tsonis A.A., Triantafyllos G.N., Elsner J.B. Searching for determinism in observed data: a review of the issue involved // Nonlinear Processes in Geophysics. 1994. Vol. 1. P.12.
13. Wales D.J. Calculating the rate of loss of information from chaotic time series by forecasting // Nature. 1991. Vol. 350. P. 485.
14. Виноградская А.А., Зимин Н.Е., Сонечкин Д.М. Предельные возможности долгосрочного прогноза погоды по архивным данным // Метеорология и гидрология. 1990. № 10. С. 5.
15. Chui C.K. An introduction to wavelets // Boston, Academic Press, 1992, p. 266.
16. Даценко Н.М., Сонечкин Д.М. Вейвлетный анализ временных рядов и динамика атмосферы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1/2. С. 9.
17. Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1989. Vol. 11, № 7. P. 674.
18. Daubechies I. Orthogonal bases of compactly supported wavelets // Communications Pure and Applied Mathematics. 1988. Vol. XVI, № 7. P. 909.
19. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications // SIAM Review. 1968. Vol. 10, № 1. P. 422.
20. Meyer Y. Wavelets. Algorithms and Applications // Philadelphia: SIAM Pub., 1993. 133 p.
21. Hemker P.W., Plantevin F. Wavelet bases adapted to inhomogeneous cases // Wavelets: an Elementary Threatment of Theory and Applications / Ed. T.H. Koornwinder. Singapore: World Scientific Press, 1993. 107 p.
22. Meyer S.D., Kelly B.G., O'Brien J.J. An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: with application to the dispersion of Yanai waves // Monthly Weather Review. 1993. Vol. 121, № 8. P. 2858.
23. TRENDS'91 - Highlights // A Compendium of Data on Global Change, CDIAC, Oak Ridge National Laboratory, 1992. 665 p.
24. Sneyers, R. Use and misuse of statistical methods for the detection of climate

change // Report on the informal planning meeting on statistical procedures for climate change detection. Toronto, 25 June 1992, WMO, WCDMP-20. P. j76-j81.

25. Woodward W.A., Gray H.L. Global warming and the problem of testing for trend in time series data // J. Climate. Vol. 6, № 5. P. 953-962.

26. Plaut G., Ghil M., Vautard R. Interannual and interdecadal variability in 335 years of Central England temperatures // Science. 1995. Vol. 268. P. 110.

Гидрометцентр России

Поступила в редакцию 31.07.95
после переработки 20.08.96

NEW METHOD OF CHAOTIC TIME SERIES EXTRAPOLATION BY MEANS OF WAVELETS WITH AN APPLICATION TO CLIMATE DYNAMICS

D.M. Sonechkin, N.M. Datsenko, N.N. Ivachtchenko

Basing on the so-called frame of the wavelet transform one can split any chaotic time series of interest to statistically stationary oscillations and a trend-like component. Such splitting seems to be useful in order to continue the time series into future because extrapolation of the trend-like component usually is a trivial procedure. As far as the oscillations are concerned, those can be predicted with some success by means of a special mapping of their running extreme (a maximum and a minimum) onto the corresponding next ones.

Both procedures (splitting and mapping) are illustrated on an example of the current climate change problem. As a result of these procedures using, the conclusion has been obtained that the current global warming probably will be checked during the next several years.



Сонечкин Дмитрий Михайлович родился в 1937 году в Москве, окончил кафедру метеорологии и климатологии географического факультета МГУ (1959) и был направлен на работу в Центральный институт прогнозов Главного управления гидрометслужбы СССР в качестве оперативного синоптика. С начала 60-х годов участвовал в работах по созданию системы метеорологических наблюдений со спутников «Метеор», опубликовав по этой тематике более 30 научных статей, в том числе монографию «Метеорологическое дешифрирование космических снимков Земли (количественные методы)», Л.: Гидрометеиздат, 1979. Защитил кандидатскую диссертацию. В середине 70-х годов в Гидрометцентре СССР (ныне Гидрометцентре России) начал заниматься проблемой долгосрочного прогноза погоды с использованием понятий и методов современной теории нелинейных динамических систем. Первый этап этих исследований подытожен им в монографии «Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы», Л.: Гидрометеиздат, 1984. Последующие исследования привели к созданию принципиально новой гидродинамической модели общей циркуляции атмосферы, способной, как показали эксперименты на реальных данных, преодолевать недельный предел предсказуемости при прогнозе погоды, теоретическое объяснение которого было дано в пионерских работах Эдварда Лоренца, и который остается непреодолимым для традиционных моделей общей циркуляции атмосферы, даже реализованных на супер-ЭВМ. Другим следствием работ по применению хаотической динамики к метеорологии явилось создание нового подхода к анализу современных изменений климата. Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности геофизика (1991), профессор (1992).

Даценко Нина Михайловна после окончания кафедры метеорологии и климатологии географического факультета МГУ работала в различных учреждениях Гидрометслужбы, а в 1976 году перешла на работу в Гидрометцентр СССР, где в лаборатории динамико-стохастических методов долгосрочных прогнозов погоды защитила под руководством Сонечкина диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности геофизика, по проблеме учета взаимодействия атмосферы с океаном при долгосрочном прогнозе погоды. В последние годы ее научные интересы связаны с применением идей хаотической динамики, в частности скейлингового и вейвлетного анализа, к проблеме исследования современных изменений климата.



Иващенко Надежда Назаровна после окончания Московского института электронного машиностроения занималась экспериментальной работой по полупроводниковой электронике, а позднее вопросами автоматизации проектирования химических производств. С начала 90-х годов работает в Гидрометцентре России как инженер-программист.



ДИНАМИКА ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОТБРАЖЕНИЙ С ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ПОРОГОВОЙ СВЯЗЬЮ

А.А. Короновский

В настоящей работе рассматривается поведение одномерной (полубесконечной или замкнутой в кольцо) цепочки из логистических отображений, связанных друг с другом однонаправленной пороговой связью. Этот тип связи является принципиально новым и его влияние на процессы, происходящие в цепочке, приводит к качественно новому типу динамики, несвойственному цепочкам логистических отображений с «традиционными» типами связей. Показано, что внесенное в цепочку внешнее возмущение, в зависимости от параметров цепочки, может затухать, нарастать, распространяться по цепочке без изменений, а также эволюционировать к устойчивой пространственно-временной структуре - уединенному импульсу. Уединенный импульс не является «стационарным», так как его профиль изменяется с течением дискретного времени либо периодическим, либо хаотическим образом.

Системы с дискретным временем весьма широко изучены физиками и математиками [1,2]. Внимание к системам с дискретным временем определяется, во-первых, их относительной простотой и возможностью их довольно быстрого исследования в широком диапазоне изменения значений управляющих параметров, во-вторых, именно на языке систем с дискретным временем возможно наиболее понятное и «прозрачное» объяснение природы хаотической динамики, сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим [3,4]. Кроме того, на основе отображений, в том числе и на основе логистического отображения, строятся широкие классы связанных отображений, цепочек и решеток отображений, моделирующих распределенные системы и играющих важную роль в понимании динамики подобных систем [5]: подробно исследованы простые системы одномерных отображений, такие как два связанных фейгенбаумовских отображения с однонаправленной [6,7] и взаимной [8,9] связью, а также изучена динамика более сложных систем (одномерных [10,11] и двумерных [12] решеток, и даже сети глобально связанных отображений [13]).

В рамках настоящей работы мы будем рассматривать цепочку (полубесконечную или замкнутую в кольцо) логистических отображений с принципиально новым типом связи, которую мы называем однонаправленной пороговой связью. Динамика подобной цепочки описывается отображениями вида

$$x_{ij+1} = x_{ij} \{ a - x_{ij} \pm s \operatorname{th}[k(x_{i-1j} - x_s)] \},$$

где i - пространственная координата элемента цепочки, а j - момент дискретного времени. В случае, если цепочка состоит из N элементов и замкнута в кольцо, то имеет место соотношение

$$x_{1j+1} = x_{1j} \{ a - x_{1j} \pm s \operatorname{th}[k(x_{Nj} - x_s)] \}.$$

Поскольку связь является принципиально новой, следует ожидать, что поведение рассматриваемой цепочки будет отличаться от поведения цепочек логистических отображений с «традиционными» типами связей (например, с диссипативной связью), которые широко исследуются в настоящее время в литературе (см., например, [14]). Выбор параметров a и s осуществляется таким образом, чтобы в отсутствие связи поведение каждого элемента цепочки не демонстрировало никакой сложной динамики. При наличии связи, поведению каждого элемента цепочки соответствует притягивающая точка $x_{ij+1}^* = a - 1 \pm s \operatorname{th}[k(x_{i-1j} - x_s)]$ (при $k \rightarrow \infty$ $x_{ij}^* = a - 1 \pm s$), если значение в соседнем $(i-1)$ элементе меньше некоторого порога x_s . При превышении значением x_{i-1j} этого порога, поведению i -го элемента соответствует притягивающая точка $x_{ij+1}^* = a - 1 \mp s \operatorname{th}[k(x_{i-1j} - x_s)]$ (при $k \rightarrow \infty$ $x_{ij}^* = a - 1 \mp s$). Внимание к этому типу связи объясняется тем, что он является аналогом кооперативного и антагонистического влияния¹ и результаты исследования систем с подобным типом связи могут быть применены к описанию процессов в сложных социально-экономических системах. Далее мы будем рассматривать цепочку, описываемую отображениями вида

$$x_{ij+1} = x_{ij} \{ a - x_{ij} + s \operatorname{th}[k(x_{i-1j} - x_s)] \},$$

что является аналогом цепочки элементов, каждый из которых оказывает на соседний справа элемент кооперативное воздействие. Каждый элемент может рассматриваться как состояние некоторой отрасли хозяйства (например, объем производства в этой отрасли), а вся цепочка элементов может быть интерпретирована (конечно же, качественно), как состояние нескольких отраслей промышленности, каждая из которых оказывает кооперативное влияние на «соседнюю» отрасль, которая использует продукцию, производимую этой отраслью: например, добывающая промышленность \Rightarrow металлургическая \Rightarrow сталелитейная \Rightarrow и так далее. Понятно, что подобное рассмотрение является качественным: мы считаем существенными связи только между «соседними» отраслями и пренебрегаем всеми остальными связями.

Вполне понятно, что если данную полубесконечную цепочку предоставить самой себе, то после переходного процесса в ней установится одно из двух состояний равновесия, в зависимости от значения первого элемента: $x_{ij}^0 > x_s$ если $x_{1j} > x_s$ и $x_{ij}^0 < x_s$ если $x_{1j} < x_s$. Фактически, подобная цепочка представляет собой

¹ В последнее время для моделирования широкого круга явлений получил известность подход [15, 16], предложенный профессором Штуттгартского университета В.Вайдлихом, сущность которого заключается в следующем: для описания рассматриваемой системы вводятся макропеременные, которые характеризуют ее состояние. Эти макропеременные соответствуют наиболее существенным факторам модели и могут оказывать друг на друга кооперативное или антагонистическое взаимовлияние. Вайдлих называет макропеременную x кооперативной по отношению к переменной y (то есть переменная x оказывает на макропеременную y кооперативное воздействие), если x стремится увеличить значение y при больших собственных значениях и уменьшить при малых. Иными словами, кооперативная макропеременная стремится сравнять значение другой переменной, на которую она действует, со своим собственным значением. В случае, когда переменная x подавляет переменную y , если значение x велико, и усиливает, когда x мало (то есть, переменная x стремится противопоставить величину переменной y своей собственной величине), Вайдлих называет переменную x антагонистической по отношению к y .

В своих работах Вайдлих для описания самых различных социальных процессов использует только две макропеременные, что, конечно же, ведет к сильной идеализации: фактически, при описании явлений, происходящих в обществе, учитываются лишь два самых существенных, по мнению автора, фактора, и, в ряде случаев, этого оказывается недостаточно.

В [17] сделана попытка модифицировать предложенную Вайдлихом методику: число переменных (и, соответственно, уравнений) увеличено до трех и несколько по-другому введена связь между макропеременными, что привело к усложнению поведения системы и появлению хаотической динамики. Тем не менее, и в данном случае рассматриваемая модель остается сильно идеализированной. Для более адекватного описания различных социальных систем, включающих в себя много подсистем, необходимо большое число переменных, тем или иным образом связанных друг с другом.

последовательное однонаправленное соединение бистабильных элементов, у которых переход из одного состояния в другое осуществляется за конечный промежуток времени (в данном случае имеется в виду дискретное время). Понятно также, что если на вход подобной цепочки подать какое-либо внешнее воздействие (так как цепочка состоит из бистабильных элементов, то имеет смысл рассматривать в дальнейшем прямоугольный импульс определенной длительности), то от входа цепочки начнет распространяться возмущение, обусловленное этим внешним воздействием. Как будет эволюционировать внесенное в полубесконечную однонаправленную цепочку внешнее возмущение при $t \rightarrow \infty$? Изначально мы можем предположить три сценария развития событий: во - первых, внешнее воздействие в виде прямоугольного импульса может начать распространяться почти без искажений с постоянной скоростью в направлении, обусловленном связью (однонаправленной) предыдущего элемента с последующим. (В некотором смысле подобная ситуация аналогична процессам, происходящим в линейных средах без дисперсии и диссипации, хотя в данном случае мы ведем речь только о прямоугольных импульсах.) В этом случае длительность распространяющегося по цепочке импульса (под длительностью распространяющегося импульса мы в настоящей работе понимаем интервал дискретного времени, в течение которого выбранный нами любой элемент цепочки находится в «возбужденном» состоянии, то есть когда $x_{ij} > x_s$, при условии, что при $t=0$ (до внесения в цепочку внешнего возбуждения) в стационарном состоянии $x_{ij} < x_s$) полностью определяется длительностью внесенного возмущения, а амплитуда определяется параметрами цепочки a и s . Подобная ситуация возможна, если передний и задний фронты импульса распространяются с одинаковой скоростью, что, в свою очередь, определяется временем, необходимым для перехода любого элемента цепочки из одного состояния в другое и, в конечном счете, параметрами среды. В случае, если наша система замкнута в кольцо, то внесенный импульс будет циркулировать по цепочке неограниченно долго, при условии, что длина цепочки больше, чем длительность внесенного возмущения, умноженного на скорость распространения импульса: в противном случае все элементы цепочки окажутся в «возмущенном» состоянии.

Во-вторых, может случиться так, что передний фронт импульса распространяется с большей скоростью, чем задний (иными словами, время перехода элемента цепочки из «невозмущенного» состояния в «возмущенное» меньше, чем наоборот); тогда передний фронт импульса «убегает» от заднего и по цепочке распространяется прямоугольный расширяющийся импульс. Если говорить об аналогиях, то ситуация напоминает процесс, происходящий в средах с конвективной неустойчивостью, когда нарастающее возмущение «убегает» из точки рассмотрения, с той лишь разницей, что в подобных средах возмущение нарастает по амплитуде, а в рассматриваемой дискретной однонаправленной цепочке амплитуда возмущения остается неизменной (она определяется параметрами цепочки), а нарастает длительность импульса. Понятно, что в цепочке элементов, замкнутой в кольцо, по истечении некоторого интервала времени передний фронт импульса догоняет свой задний фронт и все элементы оказываются в «возбужденном» состоянии.

Наконец, передний фронт импульса может распространяться медленнее, чем задний, и тогда длительность распространяющегося импульса будет непрерывно уменьшаться до тех пор, пока задний фронт импульса не достигнет переднего фронта, что приведет к схлопыванию импульса. В очередной раз прибегая к аналогии, заметим, что подобная ситуация напоминает процессы в средах с диссипацией, с отличием в том, что в рассматриваемой нами цепочке монотонно убывает длительность распространяющегося импульса при неизменной амплитуде (диктуемой параметрами цепочки), в то время как в диссипативных средах без дисперсии все происходит наоборот: при неизменной длительности импульса монотонно до нуля убывает его амплитуда. Очевидно, что тоже самое происходит и в цепочке, замкнутой в кольцо.

Как следует из проведенного нами исследования, в цепочке (которая, фактически, может рассматриваться как дискретная модель некоторой среды) в зависимости от параметров возможны все три сценария развития событий: рис. 1, *а* иллюстрирует распространение импульса постоянной длительности с постоянной скоростью, рис. 1, *б* показывает уширяющийся импульс, а на рис. 1, *в* показано распространение сжимающегося импульса и его схлопывание. Случай, представленный на рис. 1, *а* поясняется рис. 2, который показывает зависимость скорости распространения прямоугольного импульса V_i и его длительности T_i в элементе цепочки с номером $n=750$ в зависимости от длительности внешнего воздействия T . Как видно из рис. 2, *а*, скорость распространения импульса V_i не зависит от длительности внешнего возмущения T , а длительность импульса T_i (см. рис. 2, *б*), пришедшего в точку с пространственной координатой n (номер элемента, фактически, является пространственной координатой) линейно связана с длительностью внешнего воздействия T .

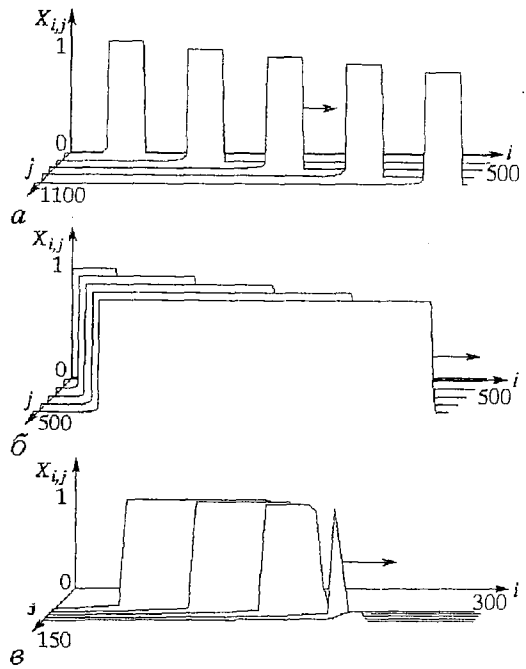


Рис. 1. Распространение внесенного внешнего импульса по одномерной полубесконечной цепочке с однонаправленной пороговой связью при фиксированных параметрах $a=1.5$, $s=0.45$, $k \rightarrow \infty$ и x_s , равном: *а* - 0.095; *б* - 0.08; *в* - 0.22

Однако, существует еще один возможный сценарий распространения внесенного в цепочку возмущения, который реализуется при значениях параметров $a=1.5$, $s=0.45$, $k \rightarrow \infty$, $0.096 < x_s < 0.215$. Задний фронт прямоугольного импульса распространяется быстрее, чем передний, однако, когда задний фронт «настигает» передний, окончательного «схлопывания» импульса не происходит и далее по цепочке распространяется уединенный импульс (рис. 3, *а*). Этот импульс является устойчивым в том смысле, что любое начальное возмущение, внесенное в цепочку, через определенный интервал времени (определяемый длительностью начального возмущения) превращается в этот уединенный импульс. Для того, чтобы в однонаправленной цепочке рассматриваемых элементов возбудить уединенный импульс, необходимо и достаточно внести в нее внешнее возмущение (вообще говоря, произвольного вида) с амплитудой большей, чем x_s , и длительностью, большей, чем длительность уединенного импульса, которая определяется параметрами среды. Заметим, что уединенный импульс нельзя назвать «стационарным» (по аналогии со стационарными волнами в непрерывных средах, см., например, [18]), так как его профили в различные моменты дискретного времени различны. На рис. 3, *б*-г показаны

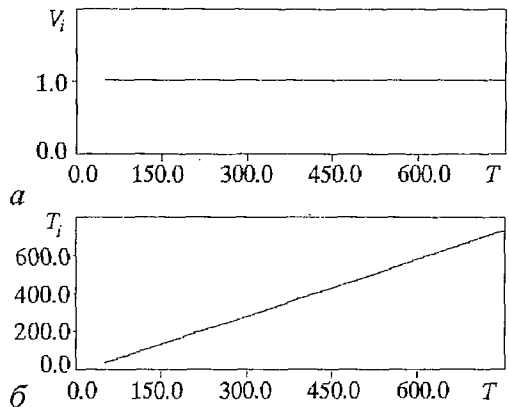
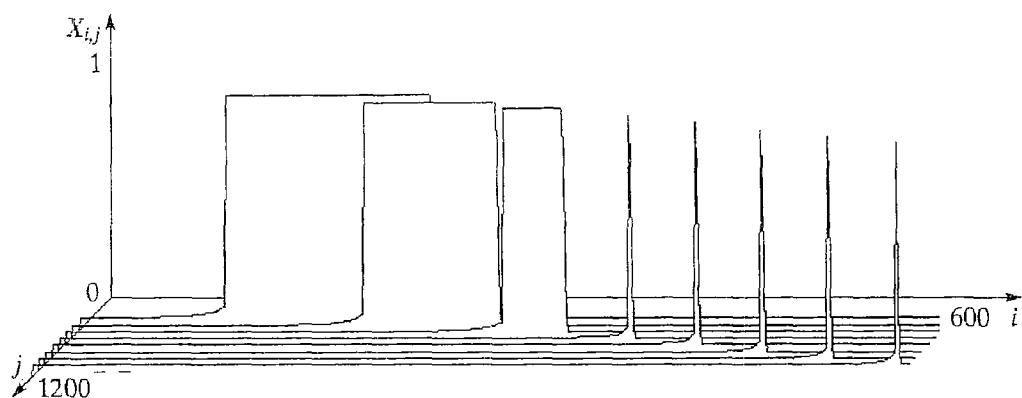


Рис. 2. Зависимость скорости распространения прямоугольного импульса V_i и его длительности T_i в элементе цепочки с номером $n=750$ в зависимости от длительности внешнего воздействия T при $a=1.5$, $s=0.45$, $x_s=0.095$



a

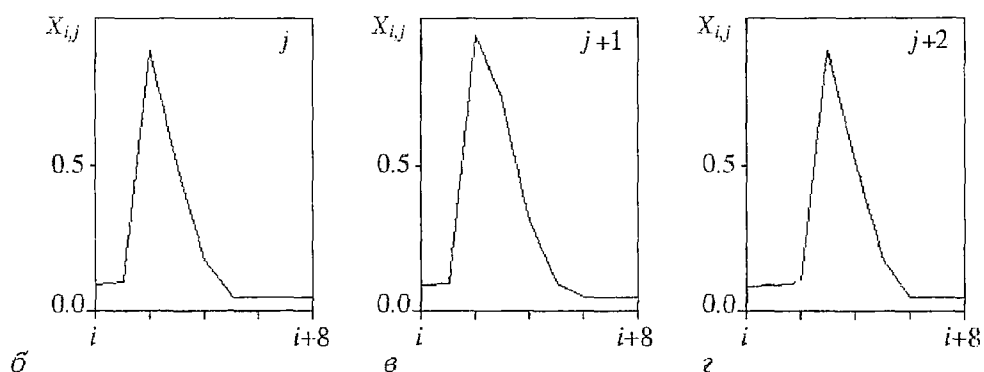


Рис. 3. Уединенный импульс (a), профили уединенного импульса в моменты дискретного времени j (б), $j+1$ (в), $j+2$ (г)

профили уединенного импульса, распространяющегося по цепочке в три последовательных момента дискретного времени для значения $x_s=0.1$. Из этих рисунков видно, что в данном случае уединенный импульс является устойчивой пространственной структурой, периодически изменяющейся в дискретном времени с периодом 2. Похожая ситуация имеет место в клеточных автоматах (см., например, об игре «жизнь» [19]). Заметим, однако, что профиль уединенного импульса может изменяться как сложнопериодическим, так и хаотическим образом. На рис. 4 приведены гистограммы для характерных точек профиля импульса для различных значений параметров. Рис. 4,а показывает гистограмму для «вершины» уединенного импульса, а рис. 4,б - гистограмму для точки уединенного импульса, отстоящей от «вершины» импульса на две пространственные единицы. На рис. 4, в, г показаны гистограммы для этих же двух точек при другом значении параметра x_s , а на рис. 4,д приведена гистограмма для «вершины» уединенного импульса. Как видно из этого рисунка, в данном случае профиль уединенной волны является устойчивой структурой с хаотической динамикой, распространяющейся по рассматриваемой цепочке.

Если мы интерпретируем цепочку логистических отображений, замкнутую в кольцо и изначально находящуюся в состоянии $x_{ij} < x_s$, как последовательную цепочку отраслей хозяйства, в которых наблюдается экономический спад, а внесенное внешнее воздействие - как инвестиции (например, государственные) в одну из отраслей, то возможно следующее развитие событий: инвестиции вызывают увеличение объема производства в этой отрасли промышленности, что ведет к увеличению объема производства и в той отрасли промышленности, которая использует продукцию первой отрасли. В результате (в зависимости от параметров) во всех отраслях либо наблюдается экономический подъем, либо

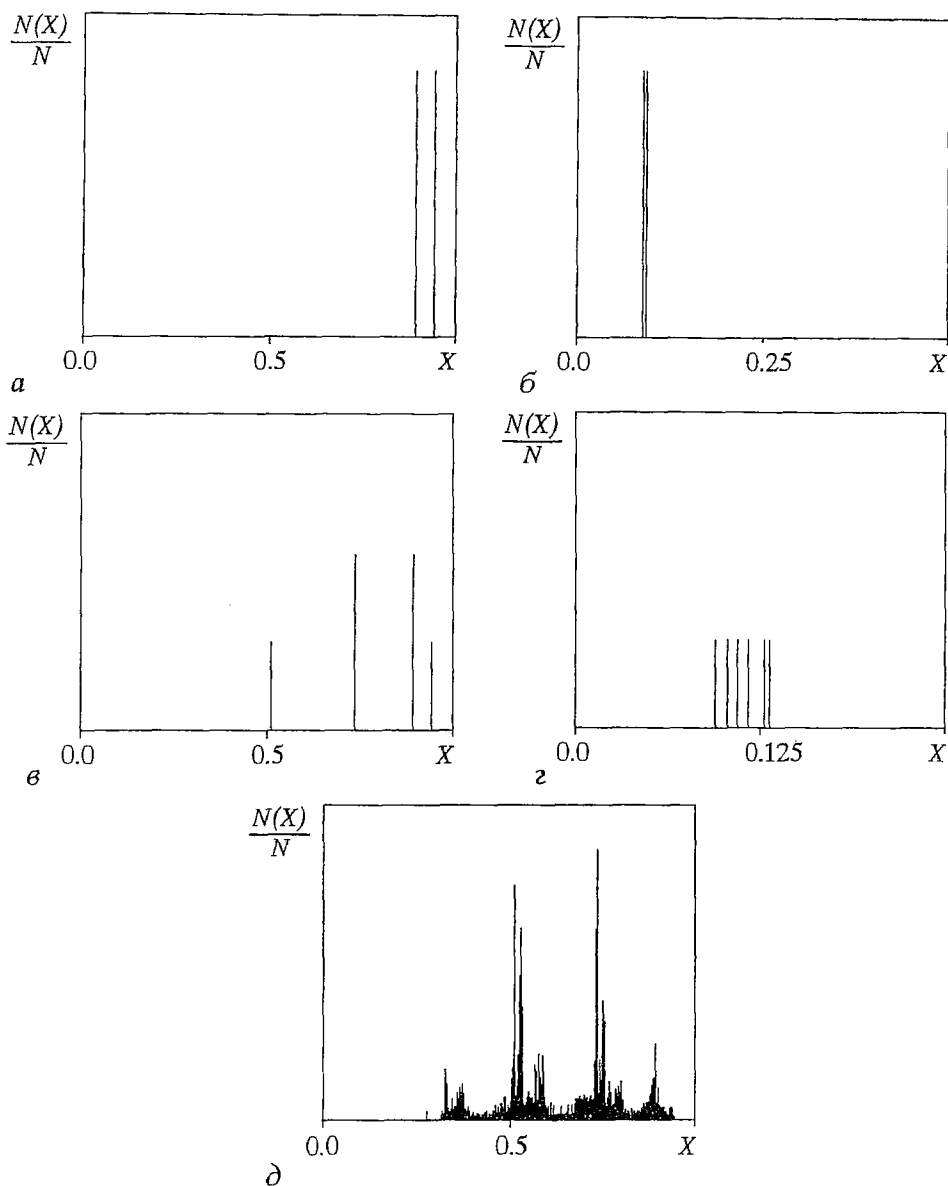


Рис. 4. Гистограммы для отдельных точек уединенного импульса при значениях параметров $a=1.5, s=0.45$; а, б - $k \rightarrow \infty, x_s=0.1$; в, г - $k \rightarrow \infty, x_s=0.15$; д - $k=100, x_s=0.19$

происходят колебания «спад-подъем», либо все инвестиции «уходят в песок» и после некоторого переходного процесса во всех рассматриваемых отраслях объем производства устанавливается на первоначально низком уровне.

Таким образом, предложенная в работе цепочка логистических отображений с однонаправленной пороговой связью может являться качественной моделью, описывающей динамику социально-экономических процессов. Стоит отметить, что использование систем с дискретным временем не только в физических задачах [14], но и в задачах самой различной природы: (экологических [20], биологических [21], экономических [22] и социальных) приобретает в настоящее время все большее распространение.

В заключение автор выражает признательность Д.И. Трубецкову за постоянное внимание и поддержку, а также В.И. Пономаренко за ряд ценных советов, использованных автором при написании настоящей работы.

Библиографический список

1. *Kaneko K.* Theory and applications of coupled map lattices. Chichester: John Wiley and Sons. Ltd., 1993. 191 p.
2. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть I: Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 1,2. С. 15.
4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3,4. С. 17.
5. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т.34, № 10,11,12.
6. *Кузнецов С.П.* Динамика двух однонаправленно связанных систем Фейгенбаума у порога гиперхаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33, № 7. С.788.
7. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критические явления в однонаправленно связанных системах Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т.34, № 4. С. 357.
8. *Кузнецов С.П.* Масштабно-инвариантная структура пространства параметров связанных систем Фейгенбаума // ЖТФ. 1985. Т. 55, № 9. С. 1830.
9. *Астахов В.В., Безручко Б.П. и др.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60.
10. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // Письма в ЖТФ. 1983. Т.9, вып. 2. С. 94.
11. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Пространственные структуры в диссипативных средах у порога возникновения хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 2. С. 142.
12. *Kaneko K.* // Physica. 1989. Vol. D37. P. 60.
13. *Kaneko K.* // Physica. 1990. Vol. 41D.
14. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность и хаос в замкнутой цепочке элементов с удвоением периода (физический и численный эксперимент) // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар: Межвуз. сб. науч. тр. Кн. 2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 51.
15. *Weidlich W.* Stability and cyclicity in social systems // Behavioral Science. 1988. Vol. 33. P. 241.
16. *Weidlich W.* Physics and social science - the approach of synergetics // Phys. Repts. 1991. Vol. 204, № 1. P. 1.
17. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995.
18. *Скотт Э.* Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
19. *Гарднер М.* Крестики - нолики. М.: Мир, 1988.
20. *Смит Дж.М.* Модели в экологии. М.: Мир, 1976.
21. *Kamuro S., Takashi A.* Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system // Journal of the Physical society of Japan. 1990. Vol.59, № 4. P. 1184.
22. *Аллен Дж.Р.* Математическая экономия. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 1.07.96
после переработки 22.10.96

THE DYNAMICS OF THE ONE-DIMENSIONAL CHAIN OF LOGISTIC MAPS WITH THE UNIDIRECTIONAL THRESHOLD COUPLING

A.A. Koronovskiy

This article deals with the behaviour of the one-dimensional (semi-infinite or ring-shaped) chain of logistic maps connected with each other by the unidirectional threshold coupling. This type of coupling is radically new and its influence upon the chain processes results in the new type of dynamics that is unusual for chains of logistic maps with traditional types of coupling. It has been shown that the inserted exterior perturbation depending on chain parameters can damp, increase, spread without modifications along the chain and evolve to a stable space-time structure, namely, the solitary impulse. This one is not «stationary» for its profile is changed either periodically or chaotically during discrete time.



Короновский Алексей Александрович - родился в 1972 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышла монография в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым «Нелинейная динамика в действии» (1996). Автор 2 статей в центральной печати.



ВАКУУМНАЯ МИКРОЭЛЕКТРОНИКА - БРЕМЯ ОЖИДАНИЙ

Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев, Д.В. Соколов

Статья представляет собой популярное введение в новое направление современной электроники - в вакуумную микроэлектронику. Содержит исторический обзор, краткое изложение теории автоэлектронной эмиссии, описание технологии изготовления матричных автоэмиссионных катодов Спиндта и обсуждение использования приборов вакуумной микроэлектроники для усиления и генерации СВЧ сигналов.

Вместо введения: о трудности определений

Леонид Исаакович Манделъштам сравнивал определения с колочей проволокой. В своих знаменитых лекциях [1] он писал: «Планк как-то сказал, что правильная классификация - это уже высокий вид познания. Это несомненно: ведь правильно классифицировать - это значит давать довольно полные определения». Перефразируя Манделъштама, заметим: Совсем не легко дать определение того, что составляет предмет «вакуумной микроэлектроники». И все же начнем с определения, загородившись авторитетом А.Броди и Ч.Спиндта - признанных специалистов в этой новой области знаний. В вольном переводе определение из монографического обзора [2] звучит следующим образом.

Термин «вакуумная микроэлектроника» используется для описания приборов или компонент, имеющих микронные геометрические размеры (с нанометрическими допусками на эти размеры), принцип действия которых основан на движении свободных электронов в вакууме согласно законам классической физики. Выделяются три ключевых аспекта вакуумной микроэлектроники:

1) необходимо «вырвать» электроны из металла (или полупроводника), в котором они находятся, и инжектировать в вакуум в достаточном количестве и с малым разбросом по энергиям для последующего использования в конструируемом приборе;

2) необходимо изготовить структуры нужных размеров и допусков, включая напыление тонких слоев материалов с такими физическими свойствами, какие пригодны для приборов;

3) необходимо разработать прибор так, чтобы он был устойчив по отношению к нежелательным разрядам в вакууме и к изменениям окружающей среды.

Написанное выше трудно назвать определением. Скорее очерчен некоторый круг вопросов, которым занимается новая наука. Вакуумная микроэлектроника действительно нова и молода. По-видимому, официальной датой ее рождения следует считать 1988 год, когда в Вильямсбурге (США) состоялась Первая международная конференция по вакуумной микроэлектронике. Начиная с этого времени число публикаций в этой области растет экспоненциально (а может быть и быстрее - по законам взрывной неустойчивости). С 1988 года международные конференции проходят каждый год в разных странах мира.

**1. Немного истории по Айвору Броди:
четыре пути к вакуумной микроэлектронике.
Кен Шоулдерс - пророк в вакуумной микроэлектронике**

Конечно, историю науки пишут сами люди науки. Поэтому никак не избежать субъективного подхода к изложению даже одних и тех же фактов, к подбору важных событий, к оценке значимости того или иного специалиста, той или иной работы для развития научного направления. Важно и из какой страны мы смотрим на развитие этого научного направления: ведь есть пророки в своем отечестве, о которых не знают в отечествах других.

Основной доклад на Первой международной конференции по вакуумной микроэлектронике сделал Айвор Броди - один из основоположников этого направления. По мнению Броди вакуумная микроэлектроника приобрела огромное значение благодаря двум факторам общего характера: 1) возросли требования, которым уже не могут удовлетворить твердотельные приборы, даже после огромных исследовательских затрат, и, кроме того, 2) пришли к выводу, что отнюдь не будет непрактичным делать вакуумные лампы микронных и субмикронных размеров. Как заявил Броди: «Я уверен, что в будущем эта конференция будет играть историческую роль в эволюции электронных приборов, и что она будет первой из множества будущих таких конференций». Прошедшие годы показывают, что он был прав.

Как же по Айвору Броди развивалась вакуумная микроэлектроника? Он выделяет четыре основных пути ее развития, приведших к сегодняшнему состоянию (см. схему на рис. 1). Броди видит истоки в первых исследованиях вакуумного пробоя. В начале 20-х годов нашего столетия пробой заявил о себе в периодических срывах трансатлантических радиопередач, осуществляемых с помощью высокоомощных ламп Маркони. Госслинг, работавший у Маркони, исследовал этот эффект и в 1926 году опубликовал работу, в которой высказал гипотезу, что пробой вызывается электронами с выпуклостей на вольфрамовом стержневом катоде. Эти выпуклые неоднородности взрывались, вызывая пробой. Как пишет Броди, обсуждение этих результатов с профессором Фаулером из Кембриджского университета привело к Нордгейму, получившему средства на исследования, и в конечном счете, к уравнению Фаулера - Нордгейма, о котором речь пойдет позднее. Открытие того, что электроны могут вылетать с холодных катодов под действием электрических полей с высокой напряженностью, вызвало



Рис. 1. Схема, иллюстрирующая тезис А.Броди о четырех путях развития вакуумной микроэлектроники

множество проектов приборов, (см., например, [10]), но прошло более сорока лет прежде, чем что-то получилось. Вот, что препятствовало в тот период созданию приборов с автоэмиссионными катодами:

- 1) на электродах требовались напряжения от 2 кВ до 20 кВ;
- 2) электронная эмиссия была нестабильной и поток характеризовался высоким уровнем шумов;
- 3) требовалось давление менее 10^{-14} мм рт.ст. для приемлемого срока службы;
- 4) трудно было создать решетки из катодов для обеспечения высоких значений полного тока и высоких значений средней плотности тока с ограниченной поверхности;
- 5) трудно было обеспечить решетки с одинаковым фактором β - коэффициентом преобразования поля от острия к острию ($E = \beta V$, V - вытягивающее напряжение, E - напряженность поля у поверхности катода);

б) отсутствие эффектов пространственного заряда и радиальные эффекты при автоэмиссии потребовали переосмысливания конфигурации приборов.

В нашей статье будет кратко изложено, как преодолевались подобные препятствия. Причем, надо заметить, что исследователи пользовались не тем, что дает природа, а «обманывали» ее, научившись изготавливать идентичные конусные катоды высотой около 1 мкм и радиусом острия в несколько сот ангстрем, с расстоянием от острия до электрода в несколько тысяч ангстрем.

Броди подчеркивает, что пророком в вакуумной микроэлектронике был Кен Шоулдерс из Станфордского исследовательского института, который в 1961 году опубликовал выдающуюся работу [3], быстро поднявшую теорию и эксперимент в вакуумной микроэлектронике на очень высокий уровень. В обзоре [2] приведен перечень важных результатов в вакуумной микроэлектронике под названием «Значительные события для вакуумной микроэлектроники». Начинается перечень с имени Шоулдерса. Ниже приведены несколько первых строк из перечня.

1958	Первые планы изготовления приборов с линейными размерами порядка 0.1 мм	Бак и Шоулдерс
1961	Разработаны основы вакуумной микроэлектроники. Предложены вертикальные и горизонтальные микротриоды, использующие источники с полевой эмиссией; исследовано использование электроннопучковой технологии.	Шоулдерс
1968	Первое сообщение об изготовлении и работе микрокатодов с полевой эмиссией, использующих тонкопленочную технологию и молибденовые острия (катода Спиндта).	Спиндт

Можно с уверенностью сказать, что последнее открытие стало революционизирующим для вакуумной микроэлектроники. Но вернемся в 1961 год. На русском языке широко известна работа Шоулдерса «Комплексные системы на микроминиатюрных электровакуумных приборах» [4]. Для наших целей достаточно воспроизвести один небольшой фрагмент этой статьи.

«В ходе исследовательской фазы работы над компонентами были изготовлены триоды микронных размеров с автоэлектронным катодом. Эти приборы характеризуются большим коэффициентом усиления по мощности и плотностью анодного тока порядка нескольких миллионов А/см² при расчетном времени переключения менее 10^{-12} с. На рис. 2 изображен активный элемент с автоэлектронным катодом. Такой элемент имеет многослойную пленочную структуру, а ее коэффициент усиления по напряжению лежит в пределах от 0.5 до

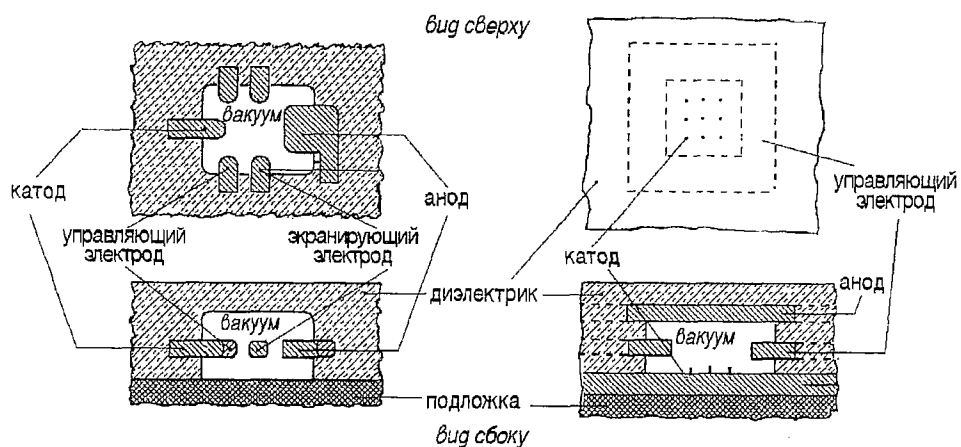


Рис. 2. Триод Шоулдерса с автоэлектронным катодом

нескольких сотен в зависимости от формы прибора. Оптимальное рабочее напряжение для этих приборов находится вблизи 50 В при минимуме 20 В и максимуме 100 В. При токе 0.1 мА плотность тока на аноде получается порядка 10^4 А/см². При работе верхний предел по плотности тока достигал 10^8 А/см². Расчетная величина времени переключения при 0.1 мА равна 10^{-10} с. Ток прибора в состоянии покоя равен около 10^{-14} А. Такая низкая величина тока покоя очень важна при построении на основе таких приборов больших матриц».

В это же время разрабатывался и иной подход к уменьшению габаритов приборов - микроминиатюризация обычных электровакуумных приборов с термоэлектронными катодами. В нашей стране в области миниатюризации СВЧ вакуумных приборов несомненным лидером является М.Б.Голант. Наиболее полно полученные им результаты отражены в монографии [5] и книге [6].

Второй путь к вакуумной микроэлектронике связан с удивительным совершенствованием технологии за последние 20 лет: «... Один микрон сейчас также обычен, как десять микрон десять лет назад, а четверть микрона, вполне возможно, будет обычной в ближайшем будущем» - предсказывает А.Броди.

И более того, оказалось, что оборудование и технологии, разработанные для интегральных схем (производство жидкого кремния, нанесение тонких пленок, химическое и плазменное травление, оптическая, электронно-пучковая, ионно-пучковая и рентгеновская литография и др.) пригодны для изготовления вакуумных микроэлектронных приборов.

Третий путь - микроскопия. Развитие технологии вакуумных ламп привело к созданию электронного микроскопа [7]. Причем, любопытно, что появление сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) было решающим для полного понимания не только технологии изготовления, но и работы приборов. Броди пишет: «Без него мы не смогли бы увидеть, что происходит». Именно СЭМ привел к электронно-пучковой литографии. Очевидно, что для создания приборов все меньших и меньших размеров потребуются микроскопы с атомным разрешением. По мнению Броди, сканирующий туннельный микроскоп [8] окажется для подобных целей наиболее подходящим, поскольку он дает наименьшие искажения наблюдаемого объекта.

Наконец, четвертый путь - изучение живых клеток. Клетки - «машины» микронных размеров со сложными и разнообразными химическими и физическими функциями, осуществляемыми на молекулярном уровне. В этой области идет непрерывное обновление представлений. Недавно было установлено, что билипидные слои, которые образуют стенки клетки и способны контролировать происходящее внутри и вне клетки, являются двойными слоями из пленок Лэнгмюра - Блоджетт [9]. Под лэнгмюровскими пленками чаще всего понимают мономолекулярные слои поверхностно-активных органических веществ,

находящихся на границе раздела жидкой (как правило, это вода) и газообразной (воздух) фаз. Если же эти монослои переносить на твердую подложку, то получится твердая мономолекулярная или мультимолекулярная пленка, называемая пленкой Лэнгмюра - Блоджетт. Наиболее известный пример - растекание масла по поверхности воды. Подобные пленки сейчас активно изучаются применительно к микроэлектронным приборам. Предложено также использовать копирующие свойства некоторых полимеров для создания молекулярной литографии. Броди считает, что многое из полученного в молекулярной инженерии оказало серьезное влияние на идеологию создания сверхмалых вакуумных приборов. Заключает свой доклад Броди следующим любопытным текстом: «...пора рассматривать вакуум как материал со специфическими свойствами, который может иметь субмикронные размеры и почти атомные допуски. Для электронных приборов главная трудность состоит в том, чтобы в этом материале электроны оказались в достаточных количествах и с разбросом по энергиям, сравнимым с разбросом электронов в зоне проводимости полупроводника». Броди видит основной путь преодоления всех трудностей для вакуумной микроэлектроники в использовании автоэлектронной эмиссии.

Мы воспользовались готовой историей вакуумной микроэлектроники - историей по Айвору Броди. По-видимому, с других позиций она выглядит иначе. В частности, более подробное обсуждение вакуумной ветви дано в нашей работе [10] и весьма полном обзоре [11].

«Обратно в будущее» - под таким символическим девизом прошла первая конференция в Вильямсбурге. По своей сути он сохранился и на последующих конференциях, хотя восторженность уступила место сдержанному оптимизму. Организаторы конференции подчеркивают, что, по их мнению, открылась новая эра миниатюрных вакуумных электронных приборов и вакуумных интегральных схем с автоэлектронной эмиссией (в некоторых случаях речь идет о микровакуумных приборах и интегральных схемах на основе термоэмиссионных катодов).

Эти новые приборы обладают сверхвысоким быстродействием (субпикосекундным), высокой устойчивостью к радиации, слабой чувствительностью к температуре и весьма большим КПД. Приборы вакуумной микроэлектроники могут быть использованы как усилители и генераторы миллиметрового диапазона длин волн, в системах непосредственного телевизионного вещания со спутников с использованием тридцатисантиметровых антенн и менее, в РЛС, телефонных системах сотовой связи и т.п. Особо перспективным представляется использование этих приборов для создания нового поколения сверхбыстрых компьютеров. В этом случае элемент памяти может быть создан на двух лампах по схеме триггера. При токе с одного острия 10^{-5} А мощность, рассеиваемая парой микротриодов при напряжении на аноде 20 В, будет $2 \cdot 10^{-4}$ Вт. При плотной упаковке на одном см^2 площади можно разместить около 10^6 элементов памяти, для которых мощность рассеяния составляет 20 Вт/ см^2 , так что в качестве основной выступает здесь проблема теплоотвода. В 1988 году на квадратном сантиметре размещали 10^4 микротриодов, так что мощность рассеяния составляла уже 2 Вт.

Интересным бытовым применением вакуумной микроэлектроники является разработка плоских панельных дисплеев, обеспечивающих изображение высокого качества и высокой яркости (в том числе и для цветного телевидения). В частности, на конференции в Вильямсбурге в докладе Холланда и Спиндта было сообщено о разработке вакуумного флуоресцентного экрана с холодным катодом Спиндта. В тонком вакуумно-флуоресцентном цветном дисплее использовалась матрично адресуемая группа автоэмиссионных острий для каждого цветного элемента индикатора. Электроны с острий фокусировались на близко расположенном люминофоре цветного элемента (разрешающая способность индикатора - около 40 линий/см, сторона панели - 8.3 см, толщина - 4мм). На конференциях обсуждалась также и возможность создания телевизионных экранов больших размеров, сверхвысокоярких и многолучевых электронных ламп и

трубок. Много внимания уделялось созданию электронных пушек с автоэмиссионными катодами и ионных источников, вопросам сканирующей туннельной микроскопии и др.

Перспективы кажутся фантастическими и заманчивыми, а диапазон исследований непрерывно расширяется.

Три последних строчки в перечне значительных событий из [2] выглядят так.

1989	Получена полевая эмиссия при приложенном напряжении меньше 10В	Махов В.И.
1990	Получены острия с радиусом субнанометровых размеров из кремния	Маркус и др.
1990	Доложено о первом полностью действующем плоском катодолуминисцентном дисплее	Джис и др.

Обсудим далее физику, принцип действия и особенности конструкции некоторых приборов вакуумной микроэлектроники.

2. Автоэлектронная эмиссия - главное в вакуумной микроэлектронике. Закон Фаулера - Нордгейма

Автоэлектронная эмиссия - физическое явление, состоящее в том, что электроны покидают твердое тело, в котором они находятся в качестве свободных носителей заряда (это может быть металл или полупроводник), под действием сильного электрического поля, приложенного к поверхности. В случае автоэлектронной эмиссии электроны преодолевают потенциальный барьер на поверхности тела не за счет кинетической энергии теплового движения, а путем специфического квантового явления - туннельного эффекта (см., например, [12]).

В простейшем случае туннельный эффект заключается в том, что микроскопическая частица, первоначально находившаяся по одну сторону потенциального барьера (то есть области пространства, для которой полная энергия частицы \mathcal{E} превышает ее потенциальную энергию $U(x)$), может с конечной вероятностью быть обнаружена по другую сторону барьера.

Туннельный эффект является чисто квантовым феноменом и для него отсутствует аналог в классической механике. Согласно Ньютоновской механике частица с массой m не может находиться внутри потенциального барьера, поскольку из уравнения для полной энергии

$$\mathcal{E} = p^2/(2m) + U(x) \quad (1)$$

следует, что соотношение $\mathcal{E} < U(x)$ выполняется только для минимальных значений импульса p . Объяснение туннельного эффекта в конечном счете связано с соотношением неопределенности Гейзенберга, согласно которому квантовая частица не может находиться в состоянии с одновременно точно определенными координатой x и импульсом p . Неопределенности Δx и Δp всегда удовлетворяют соотношению

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \quad (2)$$

где $\hbar = 1.05459 \cdot 10^{-27}$ эрг·с - постоянная Планка¹. Согласно этому принципу, слагаемые в правой части уравнения (1) не имеют одновременно определенных значений и могут отличаться от своих средних. Поэтому имеется конечная вероятность обнаружить квантовую частицу в запрещенной с точки зрения классической механики области. Заметим, что неким аналогом туннельного эффекта в волновой оптике может служить «просачивание» световой волны внутрь отражающей среды в условиях полного внутреннего отражения.

¹ В более общем случае соотношение неопределенностей связывает погрешности измерения любых двух канонически сопряженных величин A и B , для которых должно выполняться $\Delta A \Delta B \geq \hbar$.

Туннельный эффект был одним из первых квантовых явлений, предсказанных после создания в 1926 году Э. Шредингером волновой механики. По всей видимости, первыми указали на его существование Л.И.Мандельштам и М.А. Леонтович, которые исследовали решение уравнения Шредингера для модельного потенциала ангармонического осциллятора вида $U(x)=kx^2/2$ при $|x|<a$ и $U(x)=0$ при $|x|>a$. Они показали, что волновая функция, описывающая свободное движение частицы слева от потенциального барьера (при $x < -a$), имеет конечное по величине значение и справа от потенциального барьера (при $x > a$). При этом, когда энергия частицы близка к значениям дискретных уровней энергии внутри потенциальной ямы, амплитуда волновой функции справа от нее резко возрастает. Это явление на современном языке носит название резонансного прохождения через потенциальный барьер.

В 1928 году Г. Гамов с помощью туннельного эффекта объяснил явление α -радиоактивности тяжелых ядер, и в том же году Фаулер и Нордгейм [13] построили теорию холодной эмиссии с поверхности металлов. Туннельный эффект лежит в основе объяснения таких явлений, как слияние легких ядер при термоядерных реакциях, работы сверхпроводящего перехода Джозефсона и туннельного диода. Нас в наибольшей степени интересует объяснение автоэлектронной эмиссии, данное Фаулером и Нордгеймом.

На рис. 3 приведен график потенциальной энергии электрона вблизи границы металл - вакуум при отсутствии внешнего поля и при наличии слабого и сильного внешних полей в зависимости от расстояния от поверхности металла. По мере увеличения внешнего приложенного поля понижается высота потенциального барьера над уровнем Ферми² и уменьшается его ширина. Следовательно, увеличивается вероятность проникновения через барьер электронов, подлетающих к нему со стороны металла. Иными словами, увеличивается число электронов, проходящих через барьер, то есть ток автоэмиссии. Подчеркнем, что в случае автоэмиссии с поверхности металла

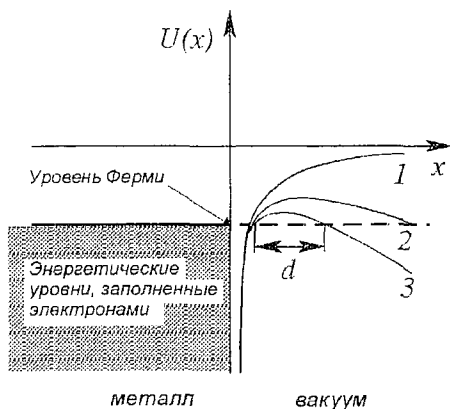


Рис. 3. Поверхностный потенциальный барьер на границе раздела металл - вакуум. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют случаям отсутствия внешнего поля, слабому полю и сильному полю; d - ширина барьера

электрическое поле не проникает вглубь него и не влияет на движение электронов в металле. Роль внешнего поля сводится только к изменению формы потенциального барьера, уменьшению его высоты и ширины.

Характеристикой одномерного туннельного эффекта³ является, так называемый коэффициент прозрачности D потенциального барьера. Он равен отношению потока прошедших через барьер частиц к падающему на барьер потоку. В частности, для прямоугольного барьера высотой U_0 и с конечной протяженностью a

$$D = D_0 \exp[(-2/\hbar)(2m(U_0 - \mathcal{E})a)^{1/2}]. \quad (3)$$

Вероятность прохождения не слишком мала, если показатель экспоненты не превышает по модулю единицы. Оценим

² При $T=0$ К все электроны в твердом теле стремятся занять наиболее низкие энергетические состояния. По принципу Паули на каждом уровне может находиться не более двух электронов с противоположно направленными спинами. Поэтому все состояния с энергией меньшей определенного значения заняты, а остальные - свободны. Это значение носит название энергии Ферми (уровня Ферми) и зависит от плотности электронов.

³ Заметим, что в широком понимании туннельный эффект означает возможность перехода системы микрочастиц из одного состояния в другое, если промежуточные состояния системы в классическом случае не могут осуществляться.

D , подставив в формулу (3) величины ядерных масштабов. Пусть $a \sim 10^{-13}$ см, $m \sim 10^{-23}$ г (масса нуклона), $U_0 - \phi \sim 10$ МэВ = 10^{-5} эрг. Тогда $D \sim e^{-1}$. Частица в этом случае с заметной вероятностью пройдет через барьер, высота которого превышает ее энергию на 5-10 МэВ. Если $a \sim 1$ см, то $D \sim 10^{-13}$, то есть вероятность проникновения частицы через барьер ничтожно мала. В области макроскопических масштабов туннельный эффект отсутствует.

Классическая теория эмиссии электронов с поверхности металла основана на предположении, что электроны в зоне проводимости ведут себя как свободные частицы, чье движение в объеме металла ограничено только силами двойного электрического слоя на границе металл - вакуум. Существование этого слоя приводит к скачку потенциальной энергии, в результате чего электрон отражается от границы, если его энергия недостаточна для преодоления барьера. При наличии внешнего электрического поля с напряженностью F потенциальный барьер снижается по величине, приобретает конечную ширину, и становится возможным туннелирование электронов. Потенциальная энергия электрона описывается формулой

$$U(x) = \begin{cases} U_0 - eFx - e^2/(4x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

В формуле (4) $(-eFx)$ - вклад внешнего приложенного поля, $-e^2/(4x)$ - вклад силы изображения, e - заряд электрона. Современные исследования показывают, что формула (4) справедлива при $x > 3$ Å [14]. Форма потенциального барьера при $x < 3$ Å зависит от конкретной поверхности металла.

В рамках этой модели плотность тока автоэмиссии выражается зависимостью

$$J = AF^2 \exp(-B\phi^{3/2}/F), \quad (5)$$

где ϕ - работа выхода, измеряемая в электронвольтах, F измеряется в В/мкм, а J - в А/мкм²; функции A и B зависят от геометрии системы и работы выхода. Это и есть знаменитая формула Фаулера - Нордгейма, которая является основной в теории автоэлектронной эмиссии. Экспериментальная проверка формулы Фаулера - Нордгейма показала, что она правильно количественно описывает зависимость тока автоэмиссии от напряженности поля, температуры, работы выхода.

Если построить график зависимости $\lg(J/F^2)$ от $1/F$, то получится прямая линия (рис. 4 [14]), которая носит название графика Фаулера - Нордгейма. Наклон линии позволяет определить значение работы выхода из соответствующей кристаллографической плоскости металла, однако это требует тщательного измерения напряженности поля на эмитирующей поверхности. Такие измерения, как правило, весьма затруднительны, поскольку эта поверхность имеет форму острия или лезвия. Поясним последнее.

Для получения автоэмиссионного тока на поверхности катода требуется создать напряженность поля 3-5·10⁷ В/см. Для типичного значения работы выхода $\phi=4.5$ эВ при этом достигается

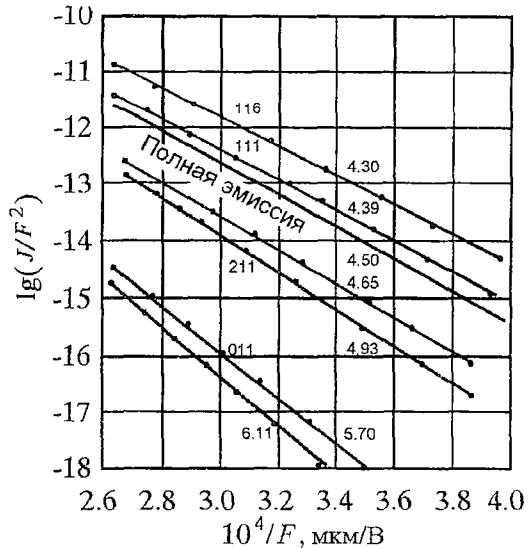


Рис. 4. Экспериментальные зависимости Фаулера - Нордгейма для различных кристаллографических плоскостей вольфрама. Числа около линий означают измеренные по этим данным значения работы выхода

плотность тока порядка 10^7 А/см². Предельные значения плотности тока могут достигать 10^{10} А/см². Очевидно, что такие значительные поля невозможно создать, если размер области однородного поля будет превышать несколько квадратных микрон из-за пробоя, который произойдет даже при очень высоком вакууме. Поэтому автоэлектронная эмиссия реализуется только на катодах, имеющих острейшую или лезвийную форму.

Подобные катоды весьма привлекательны: они обладают чрезвычайно большой плотностью тока, не требуют подогрева, практически безинерционны. Для применения устройств с автоэлектронной эмиссией в качестве элементов радиотехнических схем весьма важно, что вольт-амперная характеристика автокатаода сильно нелинейна.

3. Катод Спиндта. Матрицы автоэмиссионных катодов. Триоды возвращаются?

Мы уже указывали, что научный мир узнал об успехах и перспективах вакуумной микроэлектроники сравнительно недавно - после Первой международной конференции 1988 г. Однако, пути к преодолению тех трудностей, которые препятствовали практическому использованию автоэмиссионных процессов, были намечены еще в начале 70-х гг., когда Ч.Спиндтом и его сотрудниками была разработана технология изготовления матричного автоэмиссионного катода и проведено всестороннее исследование его свойств (первое сообщение о катоде Спиндта относится к 1973 г., подробная статья вышла в 1976 г. [15]). Без преувеличения можно сказать, что вся вакуумная микроэлектроника вышла из этой работы, и без ссылки на нее не обходится добрая половина докладов, представленных на международных конференциях по вакуумной микроэлектронике.

Остановимся подробнее на результатах работы [15]. Тонкопленочный катод с полевой эмиссией представляет собой сэндвич: проводник-изолятор-проводник (рис. 5). Верхний проводник или сетка имеет круглое отверстие от 1 до 3 мкм в диаметре, сквозь которое протравлено отверстие до нижнего проводника. На подложке находится конусообразный эмиттер, его вершина располагается в отверстии сеточной пленки. Размеры для одного из изготовленных катодов приведены на рисунке. Высота конуса, радиусы острия и отверстия в сетке могут меняться при изменении параметров технологического процесса.

Технология изготовления катодов Спиндта заслуживает особого внимания. Она состоит из нескольких этапов.

- Получение стандартной высокопроводящей подложки из кремния. Эта подложка покрывается затем оксидной пленкой кремния требуемой толщины (1.5 мкм) с помощью техники окисления.

- Методом электронно-лучевого напыления на окисел наносится тонкая пленка молибдена толщиной 0.4 мкм.

- Эта структура покрывается полиметил-метакрилатом (ПММ) - высокополимерным соединением, которое представляет собой электронночувствительное сопротивление. Толщина пленки ПММ примерно 1 мкм.

- Поверхность ПММ экспонируется в вакууме сфокусированными электронными пучками, формируя на ней пятна нужного диаметра и

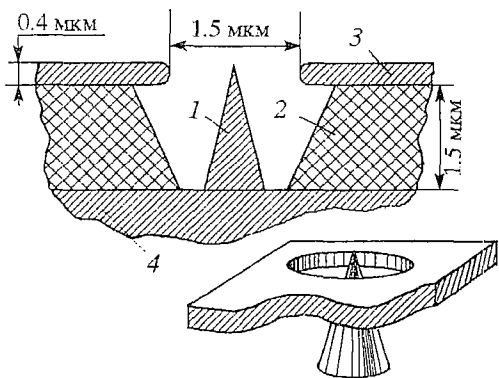


Рис. 5. Схематическое изображение тонкопленочного автоэмиссионного катода Спиндта: 1 - молибденовый корпус; 2 - изолирующий слой из двуоксида кремния; 3 - молибденовая управляющая пленка; 4 - кремниевая подложка

необходимой конфигурации. Пятна обычно имели диаметр около 1 мкм и располагались в узлах квадратной решетки с шагом 25.4 мкм или 12.7 мкм.

- Экспонированные участки растворяются в изопропиловом спирте, а затем происходит травление лежащего ниже этих участков слоя молибдена до диэлектрика.

- Удаляются остатки ПММ и слой диэлектрика травится плавиковой кислотой до кремниевой подложки. В результате образуется структура, показанная на рис. 6, а. Пленка молибдена слегка нависает над отверстием в диэлектрике, так как кислота не действует на молибден.

- Методом вакуумного напыления на молибден наносится пленка алюминия. При этом образец непрерывно вращается вокруг вертикальной оси и напыление происходит под большим углом к ней. Это делается, чтобы предотвратить попадание алюминия в отверстия в сетке. Размер отверстия уменьшается до необходимой величины (рис. 6, б).

- Через частично закрытое отверстия производится напыление молибдена, при этом внутри отверстия вырастает конус необходимого размера и высоты. Вершина конуса формируется, когда отверстие полностью закрывается. Эта стадия процесса показана на рис. 6, в.

- Вспомогательный слой алюминия растворяется, находящаяся на нем молибденовая пленка удаляется (рис. 6, г). После термической тренировки в вакууме катод готов к применению.

Используя такую технологию, были изготовлены катоды с 1, 100 и 5000 эмиттерами. Решетка со 100 эмиттерами имела вид матрицы 10×10 с шагом 25.4 мкм, так что полная область эмиссии представляла собой квадрат со стороной 0.25 мм. Решетка с 5000 эмиттерами заполняла круглую область диаметром 1 мм с расстоянием между конусами 12.7 мкм; таким образом плотность упаковки эмиттеров достигала $6.4 \cdot 10^5 \text{ см}^{-2}$.

Область рабочих напряжений для катодов составляла от 100 до 300 В. Они работали при давлении 10^{-9} мм рт.ст., которое обеспечивалось непрерывной откачкой. Ток эмиссии с одного острья находился в пределах от 50 до 150 мкА. Полный ток с 100-острийного катода достигал 5 мА, что соответствует средней плотности тока с катода 8 А/см^2 . Для катода с 5000 острий в импульсном режиме

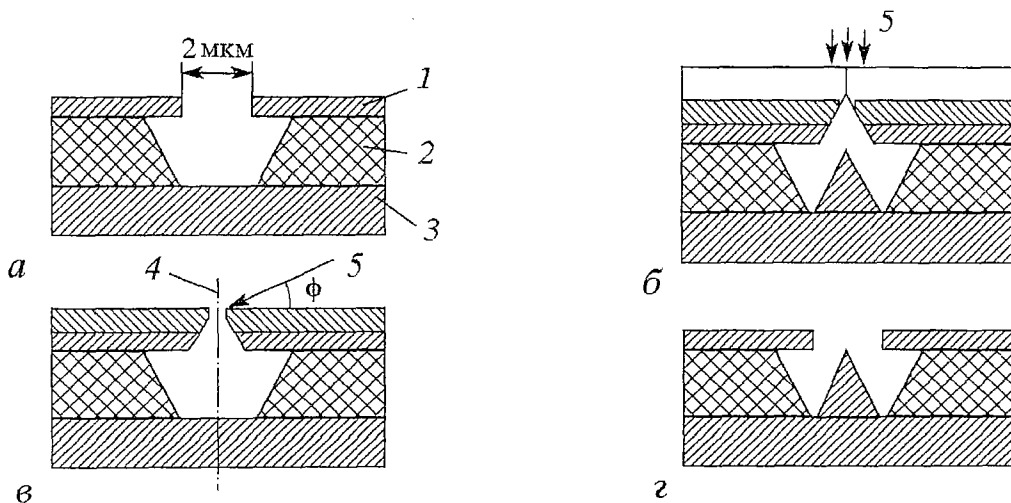


Рис. 6. Технология изготовления тонкопленочного катода [15]: а - исходная структура для формирования конуса; б - формирование изолирующего слоя; в - формирование конуса напылением; г - удаление изолирующего слоя. 1 - металлическая пленка; 2 - диэлектрик; 3 - кремниевая подложка; 4 - ось вращения; 5 - направление напыления

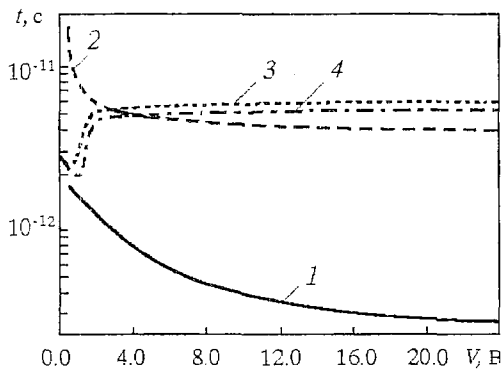


Рис. 7. Зависимость времени пролета электронов от напряжения для вакуума (1); фосфида индия (2); арсенида галлия (3) и кремния (4)

радиочастот. Известно, что быстродействие твердотельных устройств ограничено подвижностью электронов в зоне проводимости. В этом смысле преимущества вакуумного микротриода очевидны. На рис. 7 приведены зависимости времени пролета от приложенного напряжения для кремния, арсенида галлия, фосфида индия и вакуума. Из графиков следует, что предельная частота вакуумных приборов может быть повышена, по крайней мере, на порядок по сравнению с твердотельными. Кроме того, одним из возможных преимуществ вакуумных микротриодов является их радиационная и термическая стойкость. Именно эти обстоятельства привели, видимо, к появлению статей с утвердительными заголовками «Триоды возвращаются». К сожалению, вакуумный микротриод имеет «врожденные» недостатки, причины которых связаны с его конструктивными особенностями. И главный из них — малый коэффициент усиления. Увеличить коэффициент усиления можно было бы за счет опускания вершины эмиттера ниже уровня управляющего электрода (см., например, [17]), однако при этом резко уменьшается анодный ток. Разумный компромисс достигается, когда вершина эмиттера лежит вблизи плоскости нижней кромки управляющего электрода.

Наряду с автоэмиссионными катодами в виде металлических острий, полученных в результате напыления, многие научные группы занимаются разработкой технологий изготовления и изучением эмиссионных свойств катодов из полупроводниковых материалов, таких как кремний. Анализ требований, предъявляемых к современным источникам автоэмиссии, проведенный Г. Греем (Н. Gray — один из авторитетных в вакуумной микроэлектронике исследователей), показал, что они должны обеспечивать:

- высокую крутизну, плотность тока и низкую межэлектродную емкость катодов для возможности их применения в СВЧ и миллиметровом диапазонах;
- высокую плотность тока для использования в электронно-лучевых трубках;
- высокую яркость и малый размер источника для использования в сканирующих электронных микроскопах и установках для электронно-лучевой литографии;

⁴ Разумеется, эти результаты уже не уникальны. Так, на 6-й Международной конференции (США) сообщалось о создании решетчатых катодов с расстоянием между эмиттерами 0.32 мкм, радиусом острия около 25 Å и диаметром отверстия в управляющем электроде 0.16 мкм. Маска для травления отверстий в структуре металл — изолятор с диаметром 0.16 мкм создавалась с использованием методов лазерной голографии. Были изготовлены катоды с 9000 эмиттерами, расположенными в решетке размером 30×30 мкм и с 800 эмиттерами, расположенными в решетке размером 9×9 мкм. Рабочее напряжение на управляющем электроде около 30 В, на аноде — 200 В. Расстояние между управляющим электродом и удаленным анодом — примерно 100 мкм. Катод с 800 эмиттерами в рабочем режиме дает ток около 0.1 мА, что соответствует средней плотности тока 120 А/см² [16].

был получен ток до 100 мА (плотность тока достигала 12 А/см²)⁴.

Из вышеизложенного ясно, что матричный автоэмиссионный катод есть не что иное, как вакуумная трех-электродная лампа микронных размеров, то есть триод. Конусообразный эмиттер выполняет роль катода, управляющие электроды — роль сетки, кроме того, существует удаленный анод, который выступает в качестве коллектора электронов. В начале развития вакуумной микроэлектроники появились надежды, что малые размеры устройства позволят использовать его в качестве элемента радиотехнических схем на СВЧ частотах, подобно тому, как обычный вакуумный триод работает в диапазоне

низкую стоимость, большие размеры экрана и однородность эмиссии для плоских дисплеев.

Решетки автоэмиссионных катодов, изготовленные из монокристалла кремния удовлетворяют всем этим требованиям. Кремний является очень удобным материалом для изготовления автокатодов. Он имеет работу выхода 4.2 эВ, сравнимую с работой выхода электронов из металлов, его механические, электрические и химические свойства хорошо изучены, технология работы с кремнием тщательно отработана при разработке сверхбольших интегральных схем, устройства на кремниевых полевых эмиттерах могут быть легко интегрированы в микросхемы, содержащие традиционные МОП-элементы и биполярные транзисторы. Кроме того, разработаны методы изготовления острий из кремния с радиусом кривизны атомарных размеров (менее 10 Å), что позволяет существенно понизить рабочее напряжение. Изготовлены решетки острий размером 10×10 и 80×80 с расстоянием между остриями 4 мкм (плотность упаковки $6.25 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2}$) и диаметром отверстий в управляющем электроде 2 и 3 мкм. Для отверстий с диаметром 2 мкм ток эмиссии 1 мА достигался при напряжении 66 В на управляющем электроде. Максимальный ток, снимаемый с одного острия, мог достигать 50 мкА.

Пожалуй, самое замечательное свойство кремниевых катодов в том, что форма образующего острия, радиус кривизны его вершины и высота практически идентичны для всех элементов решетки. Однако, по сравнению с металлическими, кремниевые катоды имеют более низкую плотность тока, что связано с физической природой механизма проводимости в полупроводниках. Возможным способом преодоления этого ограничения является использование кремниевых эмиттеров, покрытых тонким слоем металла, в качестве которого могут выступать вольфрам, титан, тантал, платина, палладий и золото.

Отличительной особенностью описанных выше автоэмиссионных катодов является вертикально расположенное острие. Между тем, еще в середине 60-х годов была высказана и практически реализована идея микровакуумных автоэмиссионных диода и триода, в которых эмиссия происходила с края тонкой металлической пленки, напыленной на диэлектрическую подложку [18] (рис. 8). Толщина эмитирующей кромки составляла 100-200 Å, расстояние анод-катод - 6-8 мкм, расстояние катод-управляющий электрод - около 0.5 мкм. При напряжении на аноде 300 В ток менялся от $1 \cdot 10^{-3}$ до 3 мкА при изменении потенциала управляющего электрода от 175 до 250 В. Основные трудности в работе с такими приборами были связаны с получением атомарно-гладкой поверхности эмитирующей кромки для обеспечения равномерной эмиссии, а также нестабильность эмиссии во времени.

В настоящее время автоэмиссионные триоды (транзисторы) с горизонтальной геометрией рассматриваются как основные кандидаты для работы на сверхвысоких частотах благодаря присущей их конструкции низкой емкости между эмиттером и управляющим электродом. Для увеличения напряженности поля вблизи катода эмитирующий электрод выполняется в виде гребенки с зубцами прямоугольной или треугольной формы. Создан также и микровакуумный аналог тетрода: был введен дополнительный четвертый электрод между управляющим электродом и анодом, что позволило получить практически линейную

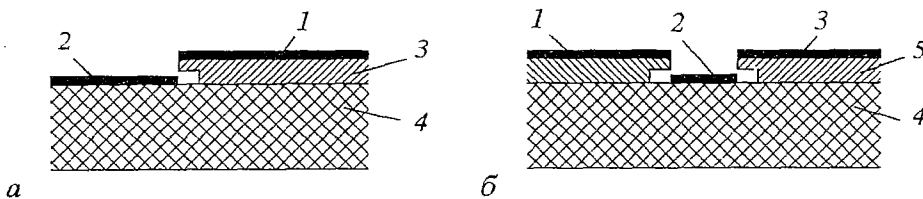


Рис. 8. Микровакуумные устройства с горизонтальной геометрией: а - диод: 1 - катод, 2 - анод, 3 - пленка, задающая рельеф, 4 - диэлектрическая подложка; - триод: 1 - катод, 2 - управляющий электрод, 3 - анод, 4 - диэлектрическая подложка; 5 - пленка, задающая рельеф

передаточную характеристику прибора, если в качестве входного использовался контрольный электрод.

Следует заметить, что активный поиск новых материалов, подходящих для создания автокатодов, ведется непрерывно. Одним из таких материалов, имеющих уникальные свойства, оказался алмаз. Отрицательное электронное сродство, присущее алмазу, сделало возможным эмиссию электронов при низких напряженностях электрического поля (менее 1 В/мкм). Благодаря устойчивой структуре кристаллической решетки алмаза, возможно создание более стабильных катодов, чем металлические.

Для многих приложений, например, для использования в плоских дисплеях или для создания источников электронов в мощных СВЧ приборах, нет необходимости в том, чтобы катод имел регулярную структуру в виде периодических острий. Поэтому особый интерес вызывает исследование автоэлектронной эмиссии из тонких пленок аморфного алмаза. Такие пленки получают путем испарения графита в вакуумной камере в луче мощного Nd-YAG-лазера. Испаренный графит осаждается на подложку из стекла, кремния или различных металлов, образуя аморфную пленку. В экспериментах получена плотность тока в пределах 0.1-1 мА/мм² при приложенных полях 20-40 В/мкм. Такие плотности тока достаточны для использования в плоских дисплеях. В отдельных случаях регистрировались плотности тока до 100 мА/мм². Оценки работы выхода, произведенные по измеренным эмиссионным характеристикам, показали, что она действительно имеет очень малое значение.

4. Распределенный усилитель с автоэмиссионными катодами - наиболее естественный прибор вакуумной микроэлектроники. Гигатрон

Наиболее популярной схемой вакуумной СВЧ микроэлектроники оказалась схема распределенного усилителя, предложенная еще в 1937 г. (естественно, в ламповом варианте) и подробно описанная в 1948 г. Хотя в свое время эта схема не была широко использована, следует отметить, что она блестяще разрешила на уровне ламповых усилителей проблему сочетания высокого коэффициента усиления с широкой полосой. Усилитель представляет собой набор одинаковых триодов, у которых все сетки и все аноды присоединены, соответственно, к сеточной (входной) и анодной (выходной) длинным линиям из LC цепочек (рис. 9). Волна, возбужденная входным сигналом в сеточной линии, модулирует анодные токи триодов, каждый из которых возбуждает в выходной линии прямую и встречную волны. При идеальном согласовании линий и их идентичности все прямые волны сложатся в фазе, а встречные - взаимно погасят друг друга, так что амплитуда напряжения в выходной линии будет возрастать по длине.

Несмотря на свои неоспоримые достоинства, схема распределенного усилителя практически не была востребована в радиотехнике того времени. Интерес к ней начал возрождаться в 80-ые годы, сначала в полупроводниковой микроэлектронике, (в монолитных интегральных схемах с арсенид - галлиевыми полевыми транзисторами), а затем и в вакуумной микроэлектронике, для которой

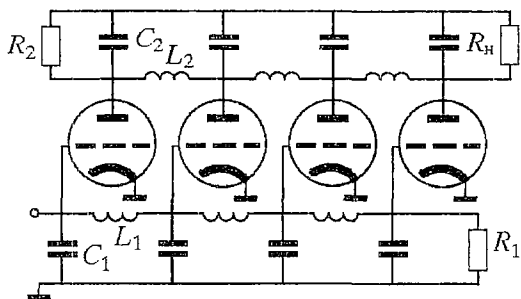


Рис. 9. Схема распределенного усилителя

эта схема оказалась очень органичной, самым естественным образом связанной с ее технологическими особенностями. Если бы эта схема не была известна ранее, она неизбежно бы появилась в микроэлектронном варианте (вернее всего, так оно и было, а о старой идее вспомнили уже потом). Действительно, решетка автоэмиссионных спиндтовских катодов, дополненная сверху анодной пленкой, представляет собой почти готовую конструкционную основу



Рис. 10. Схема микрораспределенного усилителя с решеткой автоэмиссионных катодов

распределенного усилителя, в которой микрополосковая линия, образованная катодной и управляющей пленками, играет роль входной линии, а подобная же линия, образованная управляющей и анодной пленками, является выходной (рис. 10).

Несмотря на простоту подобной схемы, ее реализация оказалась достаточно затрудненной. Причиной этого являются все еще низкие достигнутые значения крутизны микротриодов, и так называемое «электронное затухание» (модулированный анодный ток возбуждает во входной линии ВЧ напряжение, противофазное входному напряжению, что приводит к уменьшению входного напряжения, это эквивалентно появлению во входной линии активной проводимости, численно равной крутизне микротриода).

Представляется перспективным использование матриц автоэммитеров в релятивистской электронике. Здесь интересен проект гигатрона (см., например, [10]) - компактного усилителя с высоким КПД для линейного ускорителя на встречных пучках в диапазоне частот от 10 до 30 ГГц, когда потребуется импульсная управляющая мощность порядка 100 МВт/м. Это типичное устройство с модуляцией эмиссии: сгустки электронов, создаваемые матричным катодом Спиндта, ускоряются при прохождении высоковольтной диодной структуры и возбуждают волноводную выходную структуру.

Можно выделить следующие положительные особенности гигатрона.

1. В гигатроне используется ленточный электронный пучок (рис. 11), что позволяет снизить дефокусирующее действие пространственного заряда и увеличить предельно допустимый ток, для чего нужно просто увеличить ширину пучка.

2. В качестве выходного элемента связи используются устройства с бегущей волной.

3. Наиболее важным элементом конструкции гигатрона является решетка из автоэмиссионных катодов (они способны эмитировать электронный поток с плотностью 100 А/см² в импульсном и 1 А/см² в непрерывных режимах), размещенных в модулирующем волноводе.

При использовании волноводных элементов связи наблюдается запаздывание

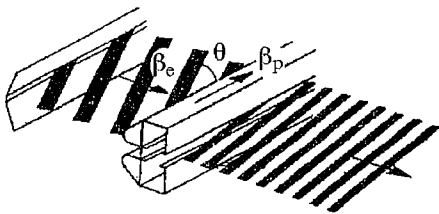


Рис. 11. Ленточный электронный поток, пересекающий элемент связи с бегущей волной

при образовании электронных сгустков вдоль волновода волновод большую реактивную нагрузку; это может привести в широком электронном пучке к тому, что часть пучка ускоряется, а часть тормозится. Чтобы избежать этого, пучок модулируют так, что его фронт образует угол с направлением движения электронов. Поскольку речь идет о релятивистских пучках, существенными оказываются ВЧ поля в волноводе, которые заставляют наклониться фронт пучка на некоторый угол. Вызванные указанными причинами

углы наклона пучка почти одинаковы, поэтому для сохранения постоянной фазы можно наклонить выходной элемент по отношению к оси пучка, а не сам пучок.

Как уже указывалось, в гигатроне для создания электронного пучка с модулированной эмиссией используется решетка из автоэмиссионных катодов, работающих в импульсивном режиме. Эта решетка размещена в модулирующем волноводе, который представляет собой цепочку из связанных резонансных элементов. Такая конструкция нужна потому, что эмиттерная решетка вносит в модулирующий волновод большую реактивную нагрузку. Предполагается, что такой прибор на частоте 18 ГГц будет обеспечивать коэффициент усиления по мощности 27 дБ с ожидаемой выходной мощностью 10 МВт и КПД, равным 74%.

5. Туннельный микроскоп. О некоторых применениях вакуумной микроскопии

Одним из наиболее выдающихся достижений в физике в течение последних пятнадцати лет стало создание в 1981 году сотрудниками исследовательской лаборатории фирмы ИВМ в Цюрихе Гордом Биннингом и Генрихом Рорером уникального физического прибора - сканирующего туннельного микроскопа (СТМ). Это событие оказало столь большое и быстрое воздействие на развитие физики, что уже в 1986 году авторам СТМ была присуждена Нобелевская премия.

Работа СТМ основана на эффекте туннелирования электронов сквозь узкий потенциальный барьер между металлической поверхностью и зондом, которым служит тонкое острие. Энергетическая диаграмма туннельного перехода для системы металл - диэлектрик - металл показана на рис. 12. Толщина диэлектрика определяет ширину потенциального барьера, в то время как его высота и форма определяются величинами работ выхода Φ_1 и Φ_2 и разностью потенциалов V между металлами.

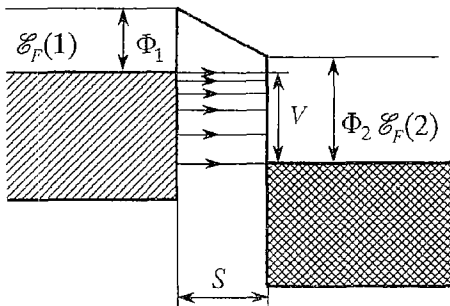


Рис. 12. Энергетическая диаграмма туннельного перехода в системе металл - диэлектрик - металл

В СТМ (рис. 13) один из металлов заменяется металлическим острием, которое закрепляется на x, y, z -позиционере (в месте жесткого соединения трех пьезодвигателей). Острие подводится к образцу с помощью грубого позиционера для получения туннельного тока. Это происходит при расстоянии $S \sim 10 \text{ \AA}$, когда волновые функции ближайших друг к другу атомов острия и образца перекрываются. При разности потенциалов $V \ll \Phi$ плотность туннельного тока определяется формулой

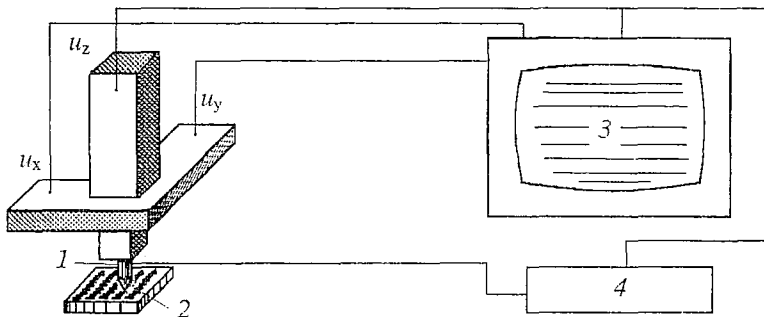


Рис. 13. Устройство сканирующего туннельного микроскопа: 1 - зонд; 2 - изучаемый объект; 3 - дисплей; 4 - система обратной связи

$$j \approx k_0 V \exp(-2k_0 S) / (4\pi^2 S), \quad (6)$$

где S - эффективное туннельное расстояние в \AA , k_0 - постоянная затухания плотности волновых функций в туннельном зазоре ($k_0 = (2m\Phi/\hbar^2)^{1/2}$), где $\Phi \approx (\Phi_1 + \Phi_2)/2$ - высота эффективного барьера. Для типичных величин работы выхода $\Phi \sim 4.5$ эВ, $k_0 \sim 1.1 \text{\AA}^{-1}$. Характерная величина туннельного тока составляет 10^{-9}\AA , при $V \sim 0.01$ В и $S \sim 10 \text{\AA}$. Из соотношения (6) следует, что при изменении расстояния на 1\AA величина туннельного тока изменяется на порядок.

Для сканирования исследуемой поверхности используются прецизионные пьезоэлектрические манипуляторы. Из-за пьезоэффекта изменением напряжения на электродах на 0.1 В можно удлинить стержень на 0.1 нм, то есть на величину поперечника атома. Слой металла на поверхности манипулятора достаточно тонок, чтобы, растягиваясь, не препятствовать этому перемещению.

Конструкция из трех стержней-манипуляторов, соединенных в одной точке перпендикулярно друг другу (см. рис.13), может передвигать зонд, помещенный в месте соединения, во всех пространственных направлениях. Три управляющих напряжения u_x , u_y и u_z - задают координаты смещения зонда x , y и z . Изменяющиеся напряжения u_x и u_y перемещают зонд по поверхности исследуемого предмета, сканируя ее по параллельным строкам, отстоящим друг от друга на заданное расстояние (как луч на телевизионном экране). Напряжение u_z двигает зонд вверх и вниз. Если u_z поддерживать неизменным, то при сканировании поверхность из-за неровностей будет удаляться или приближаться к зонду. Это неудобно для регистрирующей системы - сигнал сильно меняется. Кроме того, при больших неровностях зонд может сталкиваться с ними. Чтобы избежать этого, в прибор вводят обратную связь, которая заставляет зонд двигаться вверх и вниз в соответствии с рельефом поверхности. Обратная связь представляет собой сложную и чувствительную электронную схему, улавливающую изменение туннельного тока и изменяющую напряжение u_z , приложенное к вертикальному манипулятору. Пьезоэлектрический манипулятор перемещает зонд так, чтобы туннельный ток оставался постоянным (скажем, $I = \text{const}$ с точностью, например, 2%). Это возможно лишь при сохранении неизменным расстояния между зондом и поверхностью (поддерживать постоянной величину S можно с точностью 0.01\AA). Этот режим работы называется режимом постоянного тока. Таким образом, обратная связь не дает зонду ни отойти от поверхности, ни столкнуться с ней. В результате острие движется по траектории, повторяющей рельеф сканируемой зондом поверхности. Поскольку напряжение u_z пропорционально высоте места поверхности, над которым в данный момент находится острие, оно служит удобной мерой рельефа. Информация о рельефе поверхности записывается в память ЭВМ и после обработки (фильтрации шумовых и паразитных сигналов) выводится на дисплей в виде «топографической» карты поверхности. Обычно карта полутоновая, то есть на ней высота рельефа обозначается интенсивностью раскраски.

В настоящее время с помощью сканирующих туннельных микроскопов получены детальные изображения поверхностей многих кристаллических и полимерных материалов с атомным разрешением. Сканирующий туннельный микроскоп имеет беспрецедентное увеличение - 10^8 ! Важность СТМ для вакуумной микроэлектроники очевидна: без него не разглядеть то, что создается.⁵

⁵ Поскольку манипуляторы можно перемещать с точностью, соответствующей атомным размерам, острие СТМ можно использовать как инструмент для работы в нанометровом диапазоне. Острием толщиной в один атом можно точно попасть в выбранное место молекулы и разрезать ее на части; можно «подцепить» какой-нибудь атом и перенести его в нужное место. В лаборатории фирмы IBM ученым удалось сделать надписи, выложенные из шпечек атомов. Надпись, символизирующая эмблему фирмы, была составлена из отдельных атомов ксенона на поверхности кристалла Ni. Она собрана острием туннельного микроскопа из хаотически разбросанных на поверхности атомов ксенона, прилипших к Ni. Чтобы из-за теплового движения атомы не разбегались по поверхности, опыт проводился при очень низкой температуре -269° С. Конечно, это - реклама, но и демонстрация возможностей СТМ.

Выше уже указывалось, что катоды с полевой эмиссией могут быть использованы для создания плоских дисплеев, которые могут использоваться и как информационные транспаранты и в качестве телевизионных трубок, и как дисплеи для портативных компьютеров. Цветное изображение на экране, покрытом люминофором (обычно это ZnO) формируется с помощью так называемых пикселов. Каждый пиксел имеет квадратную форму со стороной 250 мкм, так что на одном квадратном миллиметре умещается 16 элементов. Источниками электронов являются решетки полевых эмиттеров лезвийной формы с плотностью около 10^6 эмиттеров/см². На пиксел приходится три управляющих электрода, выполненных в виде полос шириной 40 мкм, по одному на красный, зеленый и голубой цвета. Люминофор соответствующего цвета нанесен на стеклянную пластину над каждым из электродов. Подавая различные напряжения на электроды, можно независимо менять интенсивность основных цветов, создавая полную цветовую гамму.

Пиксельные элементы размещены в прямоугольной матрице, так что катоды в каждой строке образуют единую (горизонтальную) адресную линию, а управляющие электроды - три вертикальные линии на каждый столбец. Таким образом, каждый пиксел может быть адресован индивидуально.

Интерес к дисплеям с полевой эмиссией резко возрос после того, как специалистами из французской исследовательской лаборатории LETI (г.Гренобль) были продемонстрированы действующие монохромные и цветные дисплеи с размером 15 см по диагонали для телевидения и мониторов компьютеров. Основные достоинства, которые обеспечивает микровакуумная технология, - высокая яркость изображения, низкое рабочее напряжение, полноцветность и чистота цвета, малая потребляемая мощность, быстрый отклик (менее 1 мкс).

Еще одной областью использования катодов с полевой эмиссией является создание микросенсоров, которые могут работать как датчики давления, акселерометры, измерители микроперемещений, элементы микрофонов. В микросенсоре коллектор решетки микрокатодов представляет собой упругую проводящую пластину, смещение которой зависит от внешнего давления. Поскольку напряженность поля на острие зависит от расстояния до коллектора, его смещение будет изменять ток эмиссии. Известны экспериментальные данные для микросенсора с полевыми микрокатадами, изготовленными на основе кремниевой технологии. В режиме постоянного тока (при изменении прогиба изменяется напряжение, чтобы не менялся ток) измеренная чувствительность при общем токе 1 мкА составляла 6.6 В/мкм. В режиме постоянного напряжения (при смещении пластины регистрируется изменение тока) при изменении смещения от 0.3 до 2 мкм ток изменялся на два порядка (рабочее напряжение было равно 4000 В).

Вместо заключения. Что еще можно придумать?

Первое, что приходит в голову при попытке ответить на поставленный вопрос, это идея о создании активной нелинейной вакуумной среды с автоэмиссионными вкраплениями⁶.

До создания современных автоэмиссионных катодов подобная идея не представлялась реализуемой. В настоящее время, когда созданы микроминиатюрные активные элементы, есть все основания для разработки по крайней мере теории и проведения аналогового моделирования такой среды. Моделью такой среды может служить цепь с активными вакуумными элементами, в которых ток и поле связаны законом Фаулера - Нордгейма. Подобный способ «создания» сред-моделей широко используется в радиофизике (см., например,

⁶ Один из авторов не раз обсуждал эту идею с Д.И. Биленко (Саратовский университет), а позднее слышал ее от Н.А. Арманда (ИРЭАН, Москва). По-видимому, впервые, правда, в весьма туманной форме ее высказывал все тот же Кэн Шоулдерс в 1965 году [3].

[19]). Простейший вариант активной среды-модели - цепочка (или решетка) из связанных автогенераторов.

Автогенератор на микротриоде можно построить, вводя положительную обратную связь в усилитель (подобно обычному ламповому генератору). Однако, из-за отсутствия насыщения нелинейной характеристики автоколебания в таком генераторе будут бесконечно нарастать, приводя при больших значениях токов к разрушению катода. Чтобы скомпенсировать рост сигнала, нужно в цепь обратной связи ввести диссипативный элемент с нелинейной характеристикой, при которой возможно возникновение стационарных колебаний.

В наших работах [20,21] показано теоретически и в аналоговом радиотехническом эксперименте, что такой автогенератор представляет собой активный нелинейный элемент со сложным поведением, включая режимы хаотических колебаний. Поэтому на его основе можно построить среды-модели, например, цепочки и решетки генераторов. Такие среды можно использовать для обработки изображений и решения других задач, связанных с искусственным интеллектом и обработкой больших объемов информации на принципах нейродинамики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-02-06261а)

Библиографический список

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.:Наука, 1972. 470 с.
2. *Brodie I., Spindt C.A.* Vacuum microelectronics//Advances in electronics and electron physics. Academic Press, 1992. Vol.83. P.2.
3. *Shoulders K.R.* Microelectronics using electron beam activated machining techniques /Ed. F.L.Alt // Advances in Computers. 1961. Vol.2. P.135.
4. *Шоулдерс К.* Комплексные системы на микроминиатюрных электровакуумных приборах// Микроэлектроника и большие системы. М.: Мир, 1967. С.119.
5. *Голант М.Б., Бобровский Ю.Л.* Генераторы СВЧ малой мощности. Вопросы оптимизации параметров. М.: Сов. радио, 1977. 336с.
6. *Голант М.Б., Бобровский Ю.Л.* Минитроны. М.: Сов. радио, 1983. 96с.
7. *Руска Э.* Развитие электронного микроскопа и электронной микроскопии// УФН. 1988. Т.154, вып.2. С.243.
8. *Биннинг Г., Рорер Г.* Сканирующая туннельная микроскопия - от рождения к юности // УФН. 1988. Т.154, вып.2. С.261.
9. *Блинов Л.М.* Ленгмюровские пленки // УФН. 1988. Т.155, вып.3. С.261.
10. *Исаев В.А., Соколов Д.В., Трубецков Д.И.* Электронные СВЧ-приборы с электростатическим управлением и модуляцией эмиссии // РЭ. 1990. Т.35, вып.11. С.2241.
11. *Бондаренко Б.В., Шешин Е.П., Шука А.А.* Приборы и устройства электронной техники на основе автокатодов // Зарубежная электронная техника. 1979, № 2. С.3.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 768с.
13. *Fowler R.H., Nordheim L.W.* Electron emission in intensive fields// Proc.R.Soc. London. A., 1928. Vol.119. P.173.
14. *Модинос А.* Авто-, термо- и вторично-электронная эмиссионная спектроскопия. М.: Наука, 1990. 320с.
15. *Spindt C.A., Brodie I., Humphrey L., Westerberg E.R.* Physical properties of thin-film field emission cathodes with molybdenum cones // Journal of Applied Physics. 1976. (December). Vol.47, № 12. P.5248.
16. *Bozler C.O., Harris C.T., Rabe S., Rathman D., Goodhue W.D., Hollis M.A., Smith U.I.* Arrays of gated field-emitter cones having 0.32 μm tip-to-tip spacings: Sixth

Int. Vacuum Microelectronics Conf. Newport, USA, July 12-15, 1993. Technical Digest. P. 160.

17. Дюжев Н.А., Козлов А.И., Махов В.Н., Серовайский В.М. Быстродействие микроэлектронных триодных структур с автоэлектронными катодами // Микроэлектроника. 1990. Т.19, вып.5. С. 478.

18. Чесноков В.В. Электронные лампы с автоэлектронными катодами // Электронная техника. Сер. Приемно-усилительные лампы. 1968. № 4. С. 3.

19. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984 (первое издание). 432с.; 1992 (второе издание). 456 с.

20. Пономаренко В.И., Трубецков Д.И. Сложная динамика радиотехнической модели - аналога автогенератора на вакуумном микротриоде // Доклады РАН. 1994. Т. 337, № 5. С. 602.

21. Пономаренко В.И., Трубецков Д.И. Сложная динамика автогенератора на вакуумном микротриоде: вычислительный и аналоговый эксперименты на радиотехнической модели // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 6. С. 56.

VACUUM MICROELECTRONICS - BURDEN OF EXPECTATIONS

D.I. Trubetskov, A.G. Roznev, D.V. Sokolov

The article presents a popular introduction into a new branch of modern electronics - vacuum microelectronics. It contains historical review, brief theory of electron field emission, description of technologies for thin-film cathode arrays and discussion of vacuum microelectronics devices application for microwave amplification and generation.



Рожнев Андрей Георгиевич родился в Саратове в 1959 году. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1981). Старший научный сотрудник НИИ механики и физики при СГУ. Преподаст в Колледже прикладных наук при СГУ. Автор более 40 публикаций. В соавторстве с Д.И. Трубецковым и Д.В. Соколовым опубликовал книгу «Лекции по вакуумной СВЧ микроэлектронике». Область научных интересов - электроника СВЧ, теория волн, численные методы электродинамики, вакуумная микроэлектроника.



Соколов Дмитрий Валерьевич родился в 1940 году, окончил физический факультет Саратовского университета (1963). Старший научный сотрудник НИИ механики и физики при СГУ, кандидат физико-математических наук (1986). Область научных интересов - электроника СВЧ и вакуумная СВЧ микроэлектроника, нелинейная динамика электронных потоков. Имеет около 50 публикаций, соавтор учебного пособия «Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике» (1996). Полупрофессиональное хобби - оформление журнала ПНД.



О «СУБЪЕКТЕ» САМООРГАНИЗАЦИИ

Б.Н. Пойзнер

Явление самоорганизации рассматривается в контексте современных теорий биологической и социокультурной эволюции. Чтобы наглядно описать возникновение «порядка из хаоса» в системе, испытавшей бифуркацию, используется понятие репликатора (Р) - единицы самовоспроизводящейся информации. Содержание понятия Р конкретизировано применительно к динамике лазера и других автоколебательных систем. Р интерпретируется как «субъект» самоорганизации в открытых системах различной природы. Указаны проблемы, к изучению которых применима эта интерпретация Р.

Д.И. Т. и П.С.Л. - сердечно

Is fecit cui prodest - сделал тот, кому выгодно, - гласит древняя юридическая аксиома. А кто (что) делает самоорганизацию? Кому она выгодна? Иначе говоря, каков «субъект» самоорганизации?

Представляется, что ответы на подобные вопросы небесполезны в ходе преподавания нелинейной динамики. Попытка ответить на них расширяет контекст обсуждения феномена самоорганизации. Уточнение представлений о «субъекте» самоорганизации способно помочь в просветительской полемике с энтузиастами паранаучного знания и с популяризаторами синергетики, вольно или невольно мистифицирующими ее механизмы. Следуя учебнику [1], назовем самоорганизацией установление в диссипативной неравновесной среде эволюционирующих во времени пространственных структур, параметры которых определяются свойствами самой среды и слабо зависят от пространственного строения источника неравновесности, от начальных и граничных условий. Многообразные иллюстрации к этому определению содержит обзор [2].

Дефиниция понятия самоорганизации указывает на эволюционный характер ее. Поэтому естественно обратиться к современным теориям эволюции. Среди них привлекают своей общностью учение английского зоолога Р.Докинза (1976) об «эгоистичном» гене и концепция профессора биологии из МГУ Б.М. Медникова (1976), обосновывающая единство законов эволюционирования генетических программ организмов и языков, на которых говорит человечество. Согласно Докинзу, в основе эволюции лежит репликатор - самовоспроизводящаяся единица информации. Функция репликатора - создавать свои более или менее точные копии (реплики), конкурируя с другими репликаторами. В биологии репликатором оказывается ген. Ему, а не особи, популяции или виду «служит» эволюция. Организм же всего лишь средство выживания и передачи генов [3].

Строя параллель между эволюцией живой природы и эволюцией культуры, Докинз вводит - по аналогии с геном - понятие мема. Мем (от англ. *memory* - память) - некая минимальная часть культуры (буква, слово, афоризм, книга,

модный фасон, математическое уравнение, суд и т.п.), которая способна существовать самостоятельно и участвовать в культуронаследовании. В отечественной социальной культурологии в подобных случаях часто пользуются термином культурный образец [4]. Физик назвал бы мем квантом культуры; семиотик же - мимом, чтобы подчеркнуть неотделимость от него акта социального подражания, мимезиса, обеспечивающего восприятие культурных образцов. Разумно ли в данном контексте противопоставить подражанию творчество? Вряд ли. Вот наблюдение (над другими и над собой) И. Бродского: «Подлинный поэт не бежит влияния и преемственности, но зачастую лелеет их и всячески подчеркивает». А вот его диагноз: «Боязнь влияния, боязнь зависимости - это боязнь - и болезнь - дикаря, но не культуры, которая вся - преемственность, вся - эхо» («Независимая газета» от 10.02.95). И Докинз, и Медников наделяют мем свойствами гена, обладающего наследственностью, изменчивостью, способностью подвергаться отбору [5].

В процессе отбора репликаторов определяющая роль принадлежит случаю. Отбора куда? Отвечая на этот вопрос, надо напомнить, что мемы данного типа (скажем, сочинения в жанре методических заметок) принято ранжировать по степени их распространенности, то есть используемости в человеческой деятельности. В зависимости от ранга можно говорить о повсеместных мемах (таковы, например, правила арифметики), о мемах с частичным распространением в данном сообществе и об единичных мемах, обладающих минимально возможным рангом (методические заметки, которыми никто, кроме их автора, не пользуется). Переход единичного мема на уровень группового, а тем более - на уровень повсеместного распространения осуществляется в обстановке конкуренции мемов [3-6].

Соревнующиеся культурные образцы мышления и/или поведения претендуют на разрешение некоторой проблемы, на удовлетворение какой-то, возможно, еще не осознанной сообществом, социокультурной потребности. Поэтому повышение ранга мема носит вполне вероятностный характер. А поскольку сегодня одним из самых продуктивных поставщиков новых мемов служат научные исследования, то весьма убедителен вывод Ю.Неемана о том, что эти исследования выполняют функцию рандомизирующего (то есть порождающего случайности), «мутационного» механизма для эволюции нашей цивилизации. В свою очередь, в научных исследованиях особое место занимает случай, поскольку в основе большинства открытий лежит везение, выпадающее исследователю в обстановке научной революции по Куну [6], а творческий акт есть этап процесса самоорганизации [7]. Фигуру исследователя - «мемодателя» (то есть культурного героя, трикстера, архетип которого описан К.-Г. Юнгом и В. Н. Топоровым) в данном контексте лучше всего обрисовать словами Ф. А. Хайека: «Большинство шагов в эволюции культуры было сделано индивидами, которые порывали с традиционными правилами и вводили в обиход новые формы поведения. Они делали это не потому, что понимали преимущества нового. На самом деле новые формы закреплялись лишь в том случае, если принявшие их группы преуспевали и росли, опережая прочие». Согласно Хайеку, цивилизация оказывается возможной в основном благодаря подчинению врожденных животных инстинктов нерациональным обычаям, то есть мемам, в результате чего складываются упорядоченные человеческие группы все больших размеров [8].

Как известно, на фазовой траектории открытой нелинейной динамической системы - по мере роста ее сложности и изменения ее параметров (в первую очередь - степени нелинейности) - могут возникать развилки, или бифуркации. Вдали от развилки, когда в системе устойчиво господствует определенный динамический режим, установившийся «порядок», активность многочисленных единичных и даже групповых репликаторов не влияет на траекторию движения системы в фазовом пространстве [1,2,7,9,10]. Но в точке бифуркации наличие этих «не признанных системой» репликаторов становится принципиально важным, поскольку от их активности зависит будущее системы. Репликатор из их числа, доминирующий в момент бифуркации, определяет своим действием, по какой из ветвей после развилки двинется система. Так возникает в ней, если употребить

крылатые слова И. Пригожина, новый **порядок**, обусловленный «своевременной» активностью репликатора (опередившего в точке бифуркации своих конкурентов и в итоге обретшего ранг повсеместного), **из хаоса** действий множества групповых и единичных репликаторов, соревнующихся за возможность установить «свой» порядок в системе.

В человеческом сознании подобный сюжет (стремительная смена статуса) зафиксирован очень давно - в словах Библии о последних, становящихся первыми. По существу таков и механизм вхождения в моду самых различных культурных образцов, почти мгновенно вызывающих рокировку центра и периферии модного. Культурологическое и социопсихологическое обоснование этого механизма содержит разработанная Б.Гройсом в конце 1980-х гг. концепция «инновативного обмена» [11].

По-видимому, первыми, кто осознал роль случайности в отборе репликаторов, были теоретики русского художественного авангарда 1910-20-х гг.: Ю.Н.Тынянов [12], В.Б.Шкловский [13], К.С.Малевич [14-15]. В статье «О литературной эволюции» Тынянов ввел понятие «конструктивного принципа», позволяющего организовать литературный материал в новых исторических условиях. Конструктивный принцип «вырисовывается на основе «случайных» результатов и «случайных» выпадов, ошибок», а затем закрепляется, сменяя старый, уже успевший «автоматизоваться» конструктивный принцип [12]. Историю европейской художественной культуры последней трети XIX - первой четверти XX вв. Малевич представил как последовательность... нет, не бифуркаций, а изменений живописных систем: импрессионизма, сезаннизма, футуризма, кубизма и супрематизма. Функцию репликатора в теории Малевича выполняет «прибавочный элемент в живописи», посредством которого «художник выражает или формирует то или иное ощущение» [14]. Благодаря появлению очередного прибавочного элемента происходит перестройка живописной системы в новую [15].

Репликатеры разного содержания не только конкурируют, но и коррелируют, увеличивая действенность друг друга. «Футуризм, вспоминал Малевич, - больше всего выражался в поведении, в отношении к данному состоянию общества. Поэтому наш футуризм проявил себя гораздо больше в выступлениях, чем в произведениях» [16]. Здесь Малевич - мимоходом - раскрывает сущность авангардного искусства как культурного образца. Сегодня подобный взгляд разделяют авторитетные специалисты. Так, по мнению М. И. Шапира, отличительный признак состоит в том, что для авангардиста «текстом становится **поведение** - самого автора или его *chef-d'oeuvre*» [17]. И. П. Смирнов оперирует термином «садоавангард», чтобы подчеркнуть: это искусство провокативное, подчиняющее себе зрителей или читателей, а потому охотно присоединяющееся к идеологии и политике насилия ([18], см. также [11,19]).

Итак, активность некоторого репликатора в точке бифуркации приводит, во-первых, к «выбору» динамической системой одной из двух (или более) ветвей после развилки, то есть своего будущего [10]. Во-вторых, в силу свойства репликатора самовоспроизводиться и вследствие неравновесности среды - к упорядочению, к реструктурированию того «пространства», где осуществляется процесс самоорганизации, инициированный репликатором.

А нельзя ли привести пример репликатора в физической системе, например, в лазере? Выбор лазера оправдан тем, что в конце 1960-х гг. Г.Хакен, В. Вайдлих и их коллеги разработали квантово-электродинамическую модель динамики лазерного излучения. Анализа на ее основе статистических характеристик излучения вблизи порога лазерной генерации [20] оказалось Хакену достаточным, чтобы выдвинуть междисциплинарную концепцию самоорганизации, или синергетики, как он предложил говорить. (Универсальность синергетического подхода к социальным и экономическим процессам убедительно демонстрируют: обзор [21] Вайдлиха, учебник [22], использующий, в частности, модели Вайдлиха, работы [7,9,10].) Этот эпизод творческой биографии Хакена - аргумент в пользу

эволюционной доктрины Ю. Неемана, отводящей везению важное место в научной деятельности [6]. Особая пикантность сюжета видится в том, что он запечатлел исток процесса самоорганизации общественного сознания, чье содержание составляет сам процесс самоорганизации. Иначе говоря, это пример структурирования мышления новым мемом, несущим идею самоорганизации (как процесса установления структур [1]). Или - каламбурно коротко: самоорганизация сознания самоорганизации.

Обращение к обстоятельствам возникновения хакеновской версии синергетики дает повод осознать, насколько репликаторы автоматизируют нашу культурную активность, делая ее почти незаметной, не требующей рефлексии. Сегодня термин «самоорганизация» употребляется весьма широко и порою уже не к месту. Вряд ли можно себе представить, что ожидало бы естествознание, если бы такой повсеместный культурный образец мышления, как «самоорганизация», исчез из архива культуры. По ассоциации здесь вспоминается рассказ Д.Хармса «Сонет» из цикла «Случаи» [23]. Рассказчик «вдруг позабыл, что идет раньше - 7 или 8». Его соседи также вдруг обнаружили, «что не могут вспомнить порядок счета». Поэтому «все пошли в коммерческий магазин... и спросили кассиршу». Но, по ее словам, «семь идет после восьми в том случае, когда восемь идет после семи». В поисках утраченного репликатора рассказчик и его спутники пришли «в Летний сад и стали там считать деревья. Но дойдя в счете до 6-ти, остановились и стали спорить: по мнению одних дальше следовало 7, а по мнению других - 8».

Ситуация разноречия, диссенсуса, а не консенсуса, завершающая миниатюру Хармса, вполне естественна в постнеклассической науке наших дней (одной из познавательных моделей которой служит самоорганизующаяся система [24]) с ее методологическим плюрализмом и даже анархизмом (см., например, [9,10]), однако это уже другая тема, и следует вернуться к лазеру. Будем опираться на ставшее классическим хакеновское разъяснение того обстоятельства, что «переход от излучения лампы к излучению лазера представляет собой яркий пример самоорганизации» [25].

Начальным этапом процессов в лазере служит появление спонтанного излучения. Особенностью его является максимальное разнообразие характеристик квантов света (фотонов), образующих спонтанное излучение, представляющее в этом смысле оптический шум. Однако абсолютное большинство этих квантов света присутствует в лазере весьма непродолжительное время и покидает его практически без самовоспроизводства своих характеристик. Меньшинство же квантов, оказавшись в сфере действия усиления и положительной обратной связи, порождает так называемое вынужденное излучение, самовоспроизводя свои характеристики в нем. В свою очередь, вынужденное излучение в ходе самовоспроизводства характеристик образующих его фотонов существенно повышает свою интенсивность, приобретая новый статус - оптического сигнала, отличающегося от шума высоким качеством энергии (когерентностью). Вынужденное излучение присутствует в лазере постоянно, устойчиво самовоспроизводя узкий набор характеристик фотонов. Изменение режима функционирования лазера как системы (некий аналог смены социокультурной парадигмы [7,9,10,21]) вызывает смену характеристик квантов света, поскольку теперь они «наследуют» - благодаря свойству самовоспроизводиться - характеристики других первичных квантов из состава спонтанного излучения, возникающего вновь и вновь в лазере [26].

Нетрудно видеть, что фотон в лазере обладает всеми свойствами репликатора. Такое утверждение представляется важным в методическом плане, поскольку оно конкретизирует известное положение Хакена о лазере как прототипе в синергетике [25]. Кроме того, существенно то обстоятельство, что репликатор есть некая информационная целостность, способная себя воспроизводить. Поэтому оперирование понятием репликатора естественно сближает два подхода к эволюции сложных систем: самоорганизационный и теоретико-информационный. Родство и взаимную дополнительность этих подходов демонстрируют как исследования, развернутые на территории

синергетики (см., например, [27,28]), так и работы, исходящие из установок современной теории информации (см. [9] и библиографию в [9, 27]).

Лазер относится к классу преобразователей энергии, называемых обычно автоколебательными системами. Имея это в виду, можно считать справедливым и более общий вывод: в автогенераторах электромагнитных и акустических колебаний (волн) в процессе становления режима генерирования репликаторами служат флуктуации электромагнитного либо акустического поля. В физике колебаний известны также источники упорядоченных сигналов чисто природного происхождения. Таковы, например, квазары - квазизвездные излучатели электромагнитных импульсов. Сформулированный выше вывод распространяется и на природные автоколебательные системы.

Чем же отличаются процессы самоорганизации, «субъектами» которых являются гены, мемы и др. репликаторы? На наш взгляд, различие - в функциях распределения вероятности. Известно, что почти все стационарные распределения, характеризующие явления в природе и в технических устройствах, - гауссовы, а описывающие социокультурные феномены имеют (в подавляющем большинстве) форму распределения Ципфа [29]. С. Д. Хайтун объясняет эту разницу, обращаясь к вариационному энтропийному принципу и оперируя мерой усилий $E(x)$, необходимых для перевода элемента системы в новое состояние x . Для природных явлений $E(x)$ обычно принимает вид степенной функции. Например, параболической ($E(x)$ - кинетическая энергия), что приводит к максвелловскому распределению молекул по скорости. Или линейной ($E(x)$ - потенциальная энергия), что дает больцмановское распределение частиц по высоте.

А распределение Ципфа вытекает из вариационного энтропийного принципа, если $E(x)$ пропорциональна $\ln x$. (Скажем, для ципфова распределения авторов по числу методических заметок мера $E(x)$ имеет смысл усилий, требующихся от одного автора для сочинения x текстов, то есть создания x мемов.) Но почему именно $\ln x$? Оказывается, эта зависимость имеет некоторое эмпирическое основание. Хайтун (ссылаясь на А. И. Яблонского) указывает на сходство функции $\ln x$ и психологи-ческого закона Хика-Хаймена для среднего времени реакции человека в задачах выбора (которое, видимо, примерно пропорционально мере его усилий $E(x)$).

«Ципфовость» стационарных социокультурных распределений интересна во многом. Как показал С. Ф. Тимашев, взаимосвязь распределения Ципфа и фликкер-шума в природных и технических объектах свидетельствует о действии общего закона эволюции сложных систем. Следовательно, в принципе возможно применение методов анализа релаксации нелинейных локальных возбуждений [30] к динамике мемов. Исходя из принципа Циглера («из возможных путей эволюции объективной системы реализуется путь, отвечающий максимальному производству частотной энтропии»), Хайтун заключает, что распределения ципфовой совокупности стационарных распределений человеческой деятельности имеют большую частотную энтропию, чем распределения гауссовой совокупности стационарных природных распределений. А стационарные распределения научной деятельности имеют в целом максимальные значения частотной энтропии [29].

Это обстоятельство означает возможность количественной оценки и различения двух процессов: формирования репликаторов (скажем, «изготовления» культурных образцов для решения проблемы) и их функционирования, например, рутинного воспроизводства мемов, в частности, при обучении. В свете этой возможности перспективно обратиться к языковой личности, поддерживающей ту или иную степень нормативности речи. Тем более, что одна из методологических программ в русистике предусматривает исследования свойств языковой способности носителя языка и ее эволюции [31]. Нахождение (по эмпирическим данным) параметров распределения Ципфа, отражающих «искажения», порождаемые носителем языка, раскрыло бы особенности репликаторов, обеспечивающих коммуникацию всех со всеми.

Вывод Хайтуна (дополнительно аргументированный его статьей в сб. «Концепция самоорганизации в исторической перспективе», 1994) можно

переформулировать так: материя, эволюционируя в направлении роста частотной энтропии, перешла от генов, фотонов и других репликаторов к более сложным «субъектам» самоорганизации - мемам. Специфику их удачно передает тезис Хайека: «Культура есть явление не искусственное, но и не естественное; она не передается по наследству, но и не планируется рационально» [8].

Сравнительно неизменному «субъекту» самоорганизации противоположен «объект» ее, претерпевающий процесс (ре)структурирования, то есть смены порядка. С учетом положений в [1-3,5,7-10,21,24,27,28,30,32] «объект» самоорганизации можно определить как открытую (проточную) систему, которая - благодаря нелинейности, цели обратной связи для одного или нескольких видов информации, стохастичности, неравновесности, неустойчивости - изменяет (под действием репликатора) свойства и/или функции, отношения, динамику, строение, субстрат, но сохраняется как самодовлеющая целостность.

Понятие «субъект» самоорганизации предлагается использовать, во-первых, для уточнения проблемы моделирования динамики систем с собственным поведением [32], дополнив содержание интегрированного признака «поведение» понятием репликатора.

Во-вторых, при изучении взаимодействия наук. Пример: история структурализма в языкознании. Как показывает П.Серио, лидеры Пражского лингвистического кружка Р.О.Якобсон и князь Н.С.Трубецкой, выдвигая концепции развития языка, привлекли биологическую метафору. Моделью описания им послужили положения русского антидарвиниста Л.С.Берга, поставившего под сомнение роль случайности в эволюции и считавшего главным свойством живого целесообразность. Берг опирался на труды Н.Я.Данилевского (1822 - 1885), философа истории (и натуралиста-ихтиолога), своєю книгой «Россия и Европа» предвосхитившего культурологические идеи О.Шпенглера. Сам же Данилевский был учеником естествоиспытателя К. фон Бэра (1792 - 1876), исходившего в своих воззрениях на эволюцию из натурфилософского учения Фр.Шеллинга, согласно которому развитие природы есть осуществление предопределенных целей. Полагая возможным исследование эволюции языков подобно тому, как исследуется эволюция организмов, Якобсон (1927) подчеркивал, что последняя «совершается в виде скачков, пароксизмов, резких мутаций; число наследуемых вариаций ограничено и они следуют определенным направлениям» (цит. по [33]). Приводимые Серио факты иллюстрируют процесс двустороннего обмена несколькими культурными образцами мышления между гуманитарией и естествознанием, что вызывало самоорганизацию научных школ и направлений. Но историко-научный сюжет Серио выглядит незаконченным. Завершить его мог бы анализ эволюции моделей эволюции в свете лингвистико-биологической аналогии [5], установленной Медниковым.

В-третьих, для социологии искусства и психологии восприятия его. Прецедент, созданный работой И.А.Евина [34], убеждает в перспективности перевода искусствоведческих построений на язык теории самоорганизации. Такой перевод начался стихийно (в ходе анализа художественных артефактов, изготавливаемых с помощью компьютера), и без него едва ли возможна всесторонняя эстетическая оценка симулякров (фр.*simulacre* - подобие, видимость), как называют визуальную электронную продукцию. «Клише становится полноправным элементом творчества, ... и оказывает вполне творческое воздействие - то есть волнует», - защищает штамп в искусстве современный критик П.Л.Вайль [35]. Каковы же закономерности присутствия мемов этого типа в структуре кича, то есть произведений культурного «ширпотребя»? Систематизация репликаторов, принятая в поисках ответа, могла бы открыть механизмы самоорганизации «дурного» вкуса, а, возможно, и пути воспитания вкуса индивидуального.

В-четвертых, для описания функционирования систем, связанных в единую макросистему. Скажем, в рамках изучения биологических производных процессов [36], динамики социоприродных систем [2,10], социальных и экономических тенденций [21,22], художественной деятельности и сопереживания

[7,37] можно предположить: кооперацию «субъектов» самоорганизации, идущей в различных сферах; наличие «гибридного» (разнородного по содержанию) репликатора, инициирующего несколько процессов самоорганизации, и т.п.

Изложенный материал позволяет сделать следующие **выводы**:

1. Эволюция мемов и генов имеет содержательную параллель среди процессов самоорганизации в широком классе физических систем - автогенераторов пространственно-временных структур, какими являются волны (в частном случае - колебания).

2. Понятие репликатора обладает высокой степенью универсальности, поскольку применимо для описания и исследования не только биологических и социокультурных, но также технических и природных открытых нелинейных динамических систем.

3. Репликатор, подвергшийся в точке бифуркации случайному отбору из множества других репликаторов, оказывается «субъектом» самоорганизации, в ходе которой устойчиво воспроизводятся его индивидуальные характеристики.

4. Понятие «субъект» самоорганизации применимо в историко-культурных исследованиях механизмов взаимовлияния различных областей знания.

5. Существует возможность количественно характеризовать процессы формирования и репродуцирования культурных образцов.

6. Имеет смысл изучать динамику социокультурных процессов методами, разработанными в теории фликкер-шума.

7. Понятием «субъект» самоорганизации целесообразно оперировать: в теории бихевиоральных систем, этологии, семиотике культуры, этнографии, редепгивной эстетике и нейроэстетике, искусствознании, науковедении, педагогической антропологии и философии образования, эволюционной экономике.

8. Обращение к этому понятию создает методологическую позицию, позволяющую корректно аргументировать «вездесущность» самоорганизации.

С этой позиции стоило бы рассмотреть сакраментальные темы полидисциплинарных исследований. Если в качестве таковой выбрать феномен человеческой любви и сексуальности, то первым объектом внимания оказываются культурные образцы эротической активности. Благодаря им структурируется крайне неравновесное и нелинейное либидо (лат. *libido* - влечение, желание). Его питает, согласно известной доктрине З.Фрейда, половая энергия, поставляемая подсознанием. Банальной ассоциацией здесь будет все тот же лазер. Но он пригоден лишь для производства света. Стихия же инстинктуальных импульсов способна преобразоваться и в идеальные объекты (например, в статью [38], выявляющую эротический акт как лейтмотив творчества Бродского), и в публичное или интимное поведение, упорядоченное многочисленными репликаторами (сравнение которых в историческом, этнокультурном, социопсихологическом планах на основе работ [18, 39-52] доверяется заинтересованному читателю), и в магические действия [37,41,42,44-47,52-54].

Проблемы конца, упомянутой на прощание в [22], тоже стоило бы коснуться, то есть задуматься о смерти как агенте самоорганизации. Если смотреть «слишком предвзято» (*too curiously*, как выражается Горацио в сцене с Гамлетом на кладбище) и через призму нелинейной динамики, то формально смерть - исчезновение градиентов в среде, когда очередная $f(x,y,z,t) = 0$ при $t > T_{\text{mort}}$. В этом интервале значений t живучесть иного мема контрастирует порой с брэнностью гена. Что и отметил философ-феноменолог Г. Шпет (за 11 лет до расстрела в Томске в 1937): «Сама смерть, раз она фигурирует в качестве аргумента, имеет разное значение применительно к антропологическому индивиду и социальному субъекту: физическая смерть первого еще не означает смерти его как социального субъекта. Последний живет, пока не исчезло какое бы то ни было свидетельство его творчества» (цит. по [55]).

За время, отведенное индивиду ($0 < t < T_{\text{mort}}$), он обычно успевает воспринять культурный образец смерти. Этот - из числа древнейших образцов, устойчиво

структурирующих наше сознание. Так, в древнегреческом мифе говорится, что ненавистного всем Бога смерти Танатоса родила (от Кроноса, титана-отцеубийцы) Ночь (Никта), сама бывшая порождением первозданного Хаоса. Все верования и философские системы наставляют в искусстве умирания, предлагая идеалы правильной смерти, венчающей дело жизни, - *finis coronat opus*. Многовековые хроники Харона [56-58] запечатлели динамичность, вариативность, соперничество целого комплекса мемов: отношения к своему или чужому уходу и приготовления к нему, погребения и почитания усопших и т. п.

Наши авангардисты в политике и искусстве, произведя отмену этих норм на деле (что повлекло массовую и нетрадиционную, то есть подчеркнуто десакрализованную, гибель) оказались суперархастами, вернувшимися к бальзамированию мумий, сооружению мавзолеев, возжиганию священного огня. Некрофилия как культурный образец, воспроизводимый тоталитарным обществом, диагностирована и описана Э. Фроммом, Б. М. Парамоновым, А.Игнатовым, К. Г. Исуповым и др. (см. также [11,18,19,57-59]). Пафос принуждения, сделавшегося при новом строе парадигмой отношений в социуме, тонко передан В. Маяковским в его политпоэме, где кончина вождя названа величайшим коммунистом-организатором. Показательно, что поэтом выбраны категории, относящиеся к бюрократической пирамиде, субординации, управлению извне. Поэтому ближайшей к Танатосу ассоциацией оказывается парторг, то есть репликатор, для которого опасна любая не санкционированная им *selforganization*. Например (вот уж избитый образец), чье-то свободное существование. Если социальные обстоятельства делают его абсолютно неустойчивым, то спасительным становится следовать особому императиву. Его суть лапидарно выразил поэт А. Введенский, друг Хармса, в финале «Элегии» (<1940>): «на смерть, на смерть держи равнение...». Нет, не призыв к самоубийству здесь слышится, но завещание. Возвышая читателя, автор ориентирует его на один из символов, задающих макроструктуру нашего бытия. А оно сплетено из процессов самоорганизации, ведомых генами и мемами. Их динамика объясняет природу человеческой изменчивости и неизменной страсти к созданию репликаторов. Страсть эту (перефразируя слова Тынянова о стихах Г. Маслова [12]) оправдаем так: перед людьми культурные образцы имеют то преимущество, что они оживают, - и не однажды.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992.
2. Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. of Mod. Phys. 1993. Vol. 65, № 3. Pt.II. P. 851.
3. Докинз Р. Эгоистичный ген. М.: Мир, 1993.
4. Розов Н.С. Структура цивилизации и тенденции мирового развития. Новосибирск, 1992.
5. Медников Б.М. Введение в вурдалакологию // Химия и жизнь. 1995. № 7. С. 26.
6. Неeman Ю. Счастливый случай, наука и общество. Эволюционный подход // Путь. 1993. № 4. С. 70.
7. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М.: Наука, 1994.
8. Хайек Ф. А. Общество свободных. Лондон: ОРІ, 1990.
9. Мелик-Гайказян И.В. Информация и самоорганизация. Томск: Изд-во ТПУ, 1995.
10. Ласло Э. Век бифуркации /Пер. Ю.А.Данилова // Путь. 1995. № 7. С. 3.
11. Гройс Б. Утопия и обмен. М.: Знак, 1993.
12. Тынянов Ю.Н. Поэтика. История литературы. Кино. М.: Наука, 1977.
13. Шкловский В.Б. Гамбургский счет. М.: Художественная литература, 1989.

14. Малевич К.С. Форма, цвет и ощущение // Собр. соч. в 5-и т. Т. 1. М., 1995. С. 311.
15. Малевич К.С. О теории прибавочного элемента в живописи / Публикация Е.Ф.Ковтуна //Творчество. 1988. № 11. С. 33.
16. Харджиев Н.И. Последняя глава неоконченной автобиографии Малевича // Russian Literature. 1996. Vol. 39, №3. P. 303.
17. Шапир М.И. Эстетический опыт XX века: авангард и постмодернизм // Philologica. 1995. Т. 2, № 3/4. С. 135.
18. Смирнов И.П. Психодиахронология: Психоистория русской литературы от романтизма до наших дней. М.: Новое лит. обозрение, 1994.
19. Паперный В. Культура «Два». М.: Новое лит. обозрение, 1996.
20. Хакен Г., Вайдлих В. Квантовая теория лазера // Квантовые флуктуации излучения лазера /Ф.Ареки и др. М., 1974. С. 143.
21. Weidlich W. Physics and Social science - the approach of synergetics // Phys. Reports. 1991. Vol. 204, № 1. P.1.
22. Короновский А. А., Трубецков Д. И. Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995.
23. Хармс Д. Горло бредит бритвою: Случай, рассказы, дневниковые записи // Глагол. 1991. № 4. С.22.
24. Карпинская Р.С., Лисеев И.К., Огурцов А.П. Философия природы: коэволюционная стратегия. М.: Интерпракс, 1995.
25. Хакен Г. Лазерная светодинамика. М.: Мир, 1988.
26. Пойзнер Б.Н. Физические процессы в лазерах: механизмы и модели. Учебное пособие. Томск: Изд-во ТГУ, 1994.
27. Климонтович Ю.Л. Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессах самоорганизации // УФН. 1989. Т. 158. С. 59.
28. Хакен Г. Информация и самоорганизация. М.: Мир, 1991.
29. Хайтун С.Д. Наукометрия: состояние и перспективы. М.: Наука, 1983.
30. Тимашев С.Ф. Проявление макрофлуктуаций в динамике нелинейных систем // Ж. физ. химии. 1995. Т. 69, № 8. С.1349.
31. Караулов Ю.Н. Русистика в России: основные направления и состояние исследований// Russian Linguistics. 1996. Vol. 20. P. 89.
32. Разумовский О.С. Бихевиоральные системы. Новосибирск: Наука, 1993.
33. Серно П. Лингвистика и биология. У истоков структурализма: биологическая дискуссия в России //Язык и наука конца 20 века: Сб. статей. М., 1995. С. 321.
34. Евин И.А. Синергетика искусства. М., 1993.
35. Вайль П. Похвальное слово штампу, или Родная кровь // Иностранная литература. 1996. № 1. С. 232.
36. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1993.
37. Красота и мозг. Биологические аспекты эстетики /Под ред. И. Ренчлера и др. М.: Мир, 1995.
38. Pil'shnikov I.A. Coitus as a Cross-Genre Motif in Brodsky's Poetry //Russian Literature. 1995. Vol.37, № 2-3. P. 339.
39. Аккерман Д. Любовь в истории; Ларю Дж. Секс в Библии. М.: КРОН-ПРЕСС, 1995.
40. Фукс Э. Иллюстрированная история нравов. В 3-х т. М.: Республика, 1993-1994.
41. Тэннэхилл Р. Секс в истории. М.: КРОН-ПРЕСС, 1995.
42. Лев-Старович З. Секс в культурах мира. М.: Мысль, 1991.
43. Фукс Э. Иллюстрированная история эротического искусства. М.: Республика, 1995.
44. Лихт Г. Сексуальная жизнь в Древней Греции. М.: КРОН-ПРЕСС, 1995.
45. Китайский эрос: Научно-художеств. сб. / Сост. А.И.Кобзев. М.: СП «Квадрат», 1993.

46. Дуглас М., Слингер П. Тайны пола: Тантра. Минск: А/О «Гудил», 1993.
47. Русский эротический фольклор. Песни. Обряды и обрядовый фольклор. Народный театр. Заговоры. Загадки. Частушки / Сост. А.Л.Топорков. М.: Ладомир, 1995.
48. Горичева Т. Дочери Иова. Христианство и феминизм. СПб.: «Алга-Фонд», «Ступени», 1992.
49. Русская женщина и Православие / Сост. и ред. Т. Горичевой. СПб.: «Ступени», 1996.
50. Эткинд А.М. Содом и Психея: Очерки интеллектуальной истории Серебряного века. М.: ИЦ-Гарант, 1996.
51. Богомолов Н.А. «Мы - два грозой зажженные ствола» // Антимир русской культуры: язык, фольклор, литература / Сост. Н. А. Богомолов. М., 1996. С. 297.
52. Уайли Дж. В поисках фаллоса. Приап и инфляция Мужского. СПб.: Б. С. К., 1996.
53. Толстая С.М. Магия обмана и чуда в народной культуре // Истина и истинность в культуре и языке. М., 1995. С. 109.
54. Мудрость древних и тайные общества / Пер. с англ. под ред. А. Жеребцова. Смоленск: Русич, 1995.
55. Шпет в Сибири: ссылка и гибель / Под ред. Н. В. Серебренникова. Томск: Водолей, 1995.
56. Арьес Ф. Человек перед лицом смерти. М.: Прогресс, 1992.
57. Лаврин А.П. Хроники Харона. М.: Моск. рабочий, 1993.
58. Смерть как феномен культуры: Межвуз. сб. научн. тр. Сыктывкар, 1994.
59. Ланин Б.А. Страх и псевдокарнавал в русской антиутопии // Культурное наследие российской эмиграции: 1917-1940. В 2-х кн. Кн. 2. М., 1994. С. 88.

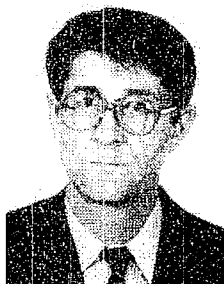
Томский государственный
университет

Поступила в редакцию 6.03.96
после переработки 20.08.96

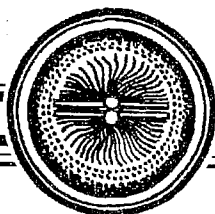
ON «SUBJECT» OF SELF-ORGANIZATION

B.N. Poizner

A self-organization phenomenon is considered in context of the modern biological and sociocultural evolution theories. In order to describe clearly the origin of «order from chaos» in the system undergoing a bifurcation the concept of replicator (R) - the unit of self-reproducing information is used. The content of R-concept is concretized to dynamics of laser and other oscillators. The R is interpreted as a «subject» of selforganization in the open systems. Some problems to which this interpretation of R is applicable are listed.



Поизнер Борис Николаевич - родился в Томске (1941), окончил Томский университет (1963). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТГУ (1970) в области теории колебаний и волн, доцент ТГУ. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Соавтор учебных пособий «Лабораторный практикум по физике лазеров», «Импульсные лазеры на плотных газах» и др. Опубликовал статьи по указанной тематике и по ряду гуманитарных проблем. Инициатор издания и редактор библиографических указателей, посвященных научному творчеству, применению компьютера в образовании, литературе и философии русской эмиграции, университетскому образованию, синергетике и сопредельным наукам. Член Комиссии по творческому наследию Густава Шпета. Председатель Вольного гуманитарного семинара Томска.



Изв.вузов «ПНД», т.4, № 4,5, 1996

ФРАКТАЛЫ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Под общей редакцией *А.Е. Дубинова*

© Российский федеральный ядерный центр - ВНИИЭФ, 1995

215 с.,ил.

ISBN 5-85165-064-8

Сборник научных трудов ведущих специалистов Всероссийского научно-исследовательского института экспериментальной физики (ВНИИЭФ) содержит оригинальные теоретические и экспериментальные работы из различных областей прикладной физики: динамики разрушения, кинетики процессов роста, теории турбулентности, физики плазмы. Несмотря на кажущееся разнообразие рассмотренных в них проблем, их объединяет общий подход, основанный на сравнительно новых идеях фрактальной геометрии, описывающей объекты с размерностью дробного порядка.

Сборник предназначен для широкого круга научных работников, студентов и аспирантов.

Предисловие

Как зарождается хаос и как происходит формирование высокоорганизованной структуры материи - фундаментальные вопросы естествознания. Новые горизонты этой проблемы открылись с началом проникновения идей фрактальной геометрии в различные разделы физики. Уже с первых шагов развития науки о фракталах начался стремительный прорыв в понимании сложных явлений природы, ранее не поддававшихся математическому описанию. Среди них следует отметить - явление турбулентности, образование кластеров, рост трещин при нагружении.

В науке часто бывает так, что многие фундаментальные идеи одновременно и независимо друг от друга высказывались несколькими авторами. Наиболее показательным в этой связи оказался период, когда Бенуа Мандельброт опубликовал на английском языке свою первую работу о фракталах (1977). Одновременно выходит в свет монография П. де Жена, будущего Нобелевского лауреата, где впервые используются идеи скейлинга в описании кинетики роста и динамики полимолекулярных образований. Приблизительно в это же время находит признание метод ренорм-группы при описании кинетических явлений (фазовых переходов) К.Вильсона (Нобелевская премия, 1982). В 1978 году М.Фейгенбаум сообщает о своем открытии универсального характера поведения динамических систем при переходе к хаосу, где самоподобие играет основную роль. Однако первым, кто понял общность всех этих явлений, был все же Мандельброт.

За всем этим стоит математический аппарат, разработанный к концу 1920-х годов такими известными математиками, как Хаусдорф, Безикович, Урысон. В настоящее время поток научных публикаций, связанных с фракталами, растет лавинообразно. За рубежом стали выходить научные журналы, в которых рубрика «Фракталы и их применение» входит в основную тематику.

В Российском федеральном ядерном центре - ВНИИЭФ отдельными группами исследователей также ведутся работы, связанные с применением фрактальной геометрии к различным областям физики. Оригинальные результаты этих работ, большей частью не публиковавшиеся ранее, стали основой содержания сборника.

Сборник предназначен для широкого круга научных работников, студентов и аспирантов. Для тех, кто с понятием фракталов встречается впервые, ниже приведен список литературы, в которой можно найти необходимые начальные сведения.

1. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. Т.1,2. М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1951.
2. П. де Жен. Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.:Наука, 1991.
4. Гофолли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. М.:Мир, 1991.
5. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991
6. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.:Наука, 1991.

Дубинов А.Е.

Содержание

Предисловие	3
1. А.Е. Дубинов, В.Д.Селемир. Обобщенные волновые уравнения для описания динамики электромагнитных волн в стационарных фрактальных средах	5
2. Э.Э. Лин. Качественные диффузионные модели взрывного образования кластеров с квантовыми свойствами.	20
3. В.Е. Ватрунин, А.Е. Дубинов, В.Д. Селемир, Н.В. Степанов. Анализ сложности СВЧ приборов с виртуальным катодом как динамических объектов	47
4. Б.Л. Глушак, И.Р. Трунин, С.А. Новиков, А.И. Рузанов. Численное моделирование откольного разрушения металлов	59
5. Е.К. Бонюшкин, Н.И. Завада, Л.А. Платонова, Н.И. Сельченкова, А.Я. Учаев. Фрактальная природа процесса динамического разрушения	123
6. Н.Н. Дегтяренко, Г.М. Елисеев. О фрактальности и сплайн-спектре сечений поглощения фотонов в плазме	175



Изв.вузов «ПНД», т.4, № 4,5, 1996

Завершила работу научная конференция **«Проблемы фундаментальной физики»**, проведенная в рамках Программы «Университеты России» экспертным Советом по физике. Конференция проходила в пансионате «Волжские дали» вблизи Саратова с 7 по 12 октября 1996 г. Организаторами конференции стали Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации, Российский фонд фундаментальных исследований, Московский государственный университет, Саратовский государственный университет, ГосУНЦ «Колледж» СГУ.

В конференции принимали участие научные коллективы и ученые Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Сибирского физико-технического института (Томск), Московского института стали и сплавов, Российского университета Дружбы народов, большая группа ученых Саратовского, Нижегородского и Алтайского университетов, Объединенного института ядерных исследований (Дубна), научно-исследовательских институтов Российской академии наук. К сожалению, университеты ближнего зарубежья и Дальнего Востока не смогли командировать в Саратов докладчиков из-за отсутствия финансовых средств.

Научные группы и школы российских университетов представили 80 докладов по различным направлениям фундаментальной физики: акустике, оптике, радиофизике, сверхпроводимости, ядерной и лазерной физике, распространению электромагнитных волн, физике и химии плазмы, дистанционному волновому зондированию природных сред - вот лишь выборочный перечень обсуждаемых аспектов теоретической физики. Материалы конференции изданы отдельным сборником под рубрикой Программа «Университеты России» и включает тезисы докладов, отобранных оргкомитетом для участия в конференции.

Присутствовавшие на конференции представители научных школ российских вузов подтвердили перспективность научных исследований по физике, ведущихся в рамках Программы «Университеты России» и существенную необходимость их продолжения (финансирования). Важность и своевременность конференции, а также заметную роль Саратовского университета в ее организации, отметили в своем обращении заместитель председателя правительства РФ академик РАН В.Е. Фортон и председатель ВАК РФ член-корреспондент РАН ректор МФТИ Н.В. Карлов.

Председатель Оргкомитета
к.ф.-м.н.

А.А. Кинчатов

В Оргкомитете имеются Тезисы докладов конференции

«Проблемы фундаментальной физики»

на русском и английском (отдельные издания) языках.

Справки в редакции: тел. (845-2)51-42-98
E-mail: and@college.saratov.su, and@cas.ssu.runnet.ru



Поздравляем с юбилеем!

Показать Юлиа Александровича Данилова в окружении всех его научно-литературных друзей, которых он переводил, изучал, комментировал, редактировал, о которых он писал книжки и читал лекции, оказалось совершенно невозможно. Из числа желающих поздравить его с 60-летием в тесные рамки журнальной страницы попали только Чебышев, Ньютон, Льюис Керролл, Кеплер, Гамильтон, Галилей, фон Нейман в окаймлении символических женских фигур Математики и Физики, с которыми лично и с детьми которых - Симметрией и Нелинейной Динамикой - Юлий Александрович также поддерживает ученые отношения в соответствии со своими основными должностными обязанностями в качестве с.н.с. Курчатовского научного центра. За пределами картинки теснятся Эйнштейн, Пуанкаре, Кирхгофф, Паули, Пригожин, Вейль, Мартин Гарднер, Тьюринг, Гамов и множество менее известных, но весьма замечательных людей. Обо всех названных и неназванных личностях, о тех научных проблемах, которыми они занимались, и о тех проблемах, которые вызрели из этих проблем, Юлий Александрович может говорить часами за столом, в аудитории, на улице, сообщая массу занимательных, порой пикантных, но всегда поучительных подробностей. Самим фактом своего существования он дезавуирует известный афоризм К. Пруткина о фонтане, поскольку в данном контексте уместнее говорить о щедром источнике занимательной мудрости, к которому с особым удовольствием припадают молодые любопытные и любознательные особы на разнообразных школах, конференциях и симпозиумах.

*Редакционная коллегия
Коллектив редакции и
Колледжа прикладных наук*

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты - р/с № 000609446 в АКБ «Экономбанк» г. Саратова, БИК 046311722, корсчет банка 700161122

Подписка на I-ое полугодие 1997 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498
см. по алфавиту

Сдано в набор 22.10.96. Подписано к печати 10.12.96. Формат 70x108/16
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 14,35 (10,25). Уч.-изд. л. 13,5. Тираж 200 экз. Заказ 41

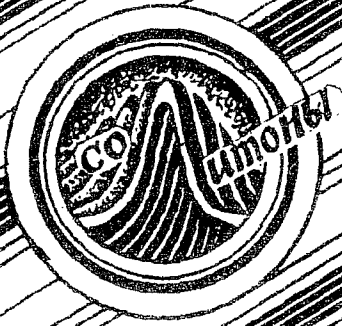
Издательство ГосУНЦ «Колледж»
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446
E-mail:and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

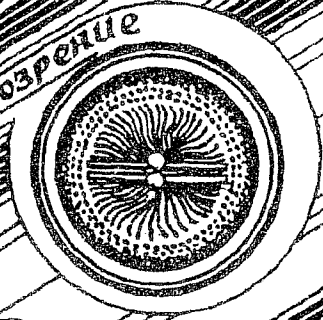
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1996



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



В журнале
преподавателей



Современной
нелинейной
динамики

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАДОКСЫ ЭСХАТОЛОГИЧЕСКОГО МУЗЫКОВЕДЕНИЯ

Намечавшийся на очередной рубеж тысячелетий конец света, по всей видимости, будет снова отложен. На этот раз, как следует из сообщений компетентных источников, в качестве причины отсрочки называется отсутствие записей музыки труб семи ангелов Страшного суда.

Дело в том, что в соответствии с первоначальным планом Творения вся организационно-зрелищная, в том числе, и музыкальная часть будущего Страшного Суда, была закреплена за первым помощником Создателя - Люцифером; однако, после известных событий и самоназначения последнего Главой администрации Адской полости о каком-либо сотрудничестве с ним не могло быть и речи. Все осложнялось тем, что сохранившие лояльность правящему режиму ангелы, никоим образом не могли и помыслить о музыкальном сочинительстве, ибо любая форма творчества (с присущей ему начальной стадией незнания) не соответствовала их служебному статусу абсолютного всеведения. Разрешить эту антиномию можно было бы только на уровне самых высоких сфер, но некоторая самоизоляция Создателя от рутинной работы делала и эту задачу практически невыполнимой. Оставалась одна надежда на тех тварей, которые копошились далеко внизу на самом дне воздушного океана, и на ту способность к творчеству, которую когда-то вдохнул в них Создатель.

Длительное время такая надежда представлялась весьма призрачной, ибо снизу поступали только элементарные комбинации простых колебаний, неспособные удовлетворить мало-мальски изощренный слух. Конечно, образом такого колебания была совершеннейшая фигура - эллипс, смыслом - бесконечность гармонии, а высшим проявлением - небесная мелодия хрустальных сфер во славу абсолютного порядка и вечного равновесия, но все это было до пошлости примитивно и никак не соответствовало стратегическим задачам эпохи смены божественно-исторических формаций. Музыкальный квант эсхатологической музыки всесветной катастрофы должен быть устроен неизмеримо сложнее, ибо это - единение хаоса и организации, разрушения и созидания, это - странный аттрактор, способный одновременно войти в стохастический резонанс и взаимодействие с любым элементом Вселенной в момент ее великого преобразования.

Именно поэтому появление нелинейной динамики (НД) было встречено наверху вздохом облегчения и послужило толчком к незамедлительному созданию соответствующих высоких Ветомств, осуществляющих отбор, контроль и тестовые испытания производимой внизу новой колебательной продукции. Естественно, результаты тестовых испытаний оказались строго засекречены, и мы можем только гадать, связаны ли природные и политические катаклизмы последних десятилетий с теми или иными открытиями в области НД или нет; тем более, что бюрократическая волокита создает довольно длительную временную задержку, маскирующую подобную связь.

Неожиданным побочным эффектом явилась возможность легкого удовлетворения изощренных музыкальных потребностей ангелов, чуть было не атрофированных в предыдущую гармоническую эпоху. Ангелам не нужен инструментальный посредник для пробуждения музыкального чувства; источником самого изысканного наслаждения для них является само созерцание уравнений, мгновенное решение которых не составляет им никакого труда. Таким образом, степень получаемого удовольствия ограничивается только количеством нелинейной подпитки, и хотя этого добра всплывает все больше и больше, наркотическая потребность в нем неизмеримо возрастает. Тот час же появились толпы старьевщиков с залежалым нелинейным хламом 20-30 гг., челноков, сбывающих фиктивные гранты среди ученых слаборазвитых стран в обмен на новые уравнения; как грибы, поднимались подпольные фирмы, производящие самопальные системы совершенно несоместных уравнений или партитуру динамики изменения бифуркационных параметров, вызывающую особо острые наслаждения. Нам крайне неловко останавливаться на всех подробностях этой постыдной музыкальной наркотизации, следствием которой явилась - увы, так хорошо нам знакомая - лавинная криминализация высших сфер.

Вместе с тем, сложившееся status quo, очевидно, предпочтительнее для нас, нежели апокалиптическая определенность слишком уж радикальных перемен. В таком случае, непрерывное развитие НД выступает гарантом стабильности всего человечества, что с необходимостью требует немедленного начала проведения продуманной государственной политики всесторонней поддержки НД, необходимой для обеспечения темпы такого развития.