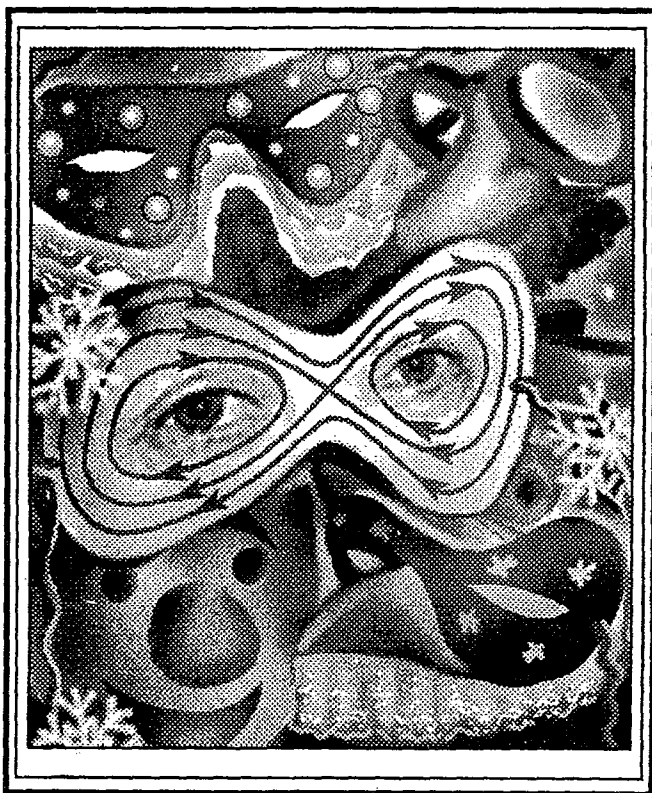


ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

# Трикладная Делнейная Динамика

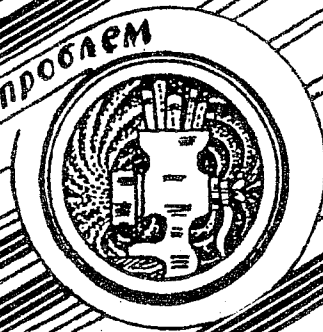


6  
1996

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



**Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы**



**Обзоры актуальных проблем  
нелинейной  
динамики**



**Конференции, семинары, симпозиумы,**



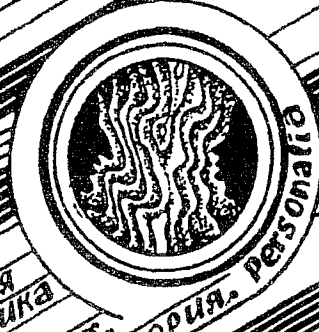
**детерминированный**



**Авто-  
волны,  
самоорганизация**



**Прикладные задачи  
нелинейной  
теории  
колебаний  
и волн**



**нелинейная  
динамика  
в  
лицах.  
История. Personalio**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет

*Ю.А. Данилов*, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

*Б.А. Калинин*, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*В.И. Кринский*, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пушино

*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет

*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет

*Л.А. Островский*, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет

*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

*В.К. Юлатов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

**ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ**

- Горонов В.Ю., Дербов В.Л., Приютова О.М.* Геометрические фазы в динамике нелинейных оптических систем . . . . . 3
- Мельников Л.А., Колюхов А.И., Рябинина М.В.* Динамика поперечной поляризационной структуры поля в лазерах . . . . . 33

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

- Бочков Г.Н., Горохов К.В., Дубков А.А., Желтов С.Н., Марков Г.А.* Полиспектральные методы анализа, синтеза и передачи информации . . 54
- Синицкий Л.А., Цвигун О.А.* О квазипериодических решениях в диссипативных динамических системах третьего порядка . . . . . 66
- Меглинский И.В., Боас Д.А., Йод А.Г., Чанс Б., Тучин В.В.* Развитие метода корреляции флуктуаций интенсивности лазерного излучения для неинвазивного мониторинга и измерения параметров кровотока . . . . . 72

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

- Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б., Фельдштейн И.В.* Новый подход к оценке коэффициента переноса . . . . . 82
- Жогаля С. П., Жогаля С. И.* Об интегрируемости уравнений Колмогорова - Фоккера - Планка для неавтономных квазилинейных систем с параметрическим случайным воздействием . . . . . 92
- Чуканов С.Н.* О формализации взаимодействия гладких нелинейных динамических систем . . . . . 100

**КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ**

- Пойзнер Б.Н.* Информация и самоорганизация - ключи к тайне эволюции? . . . 107

## CONTENTS

### REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

- Geometric phases in the dynamics of nonlinear optical systems. *V.Yu. Toronov, V. L. Derbov, O.M. Priyutova* . . . . . 3
- Transverse polarisation dynamics of field structure in lasers. *L.A. Melnikov, A.I. Konukhov, M.V. Ryabinina* . . . . . 33

### APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

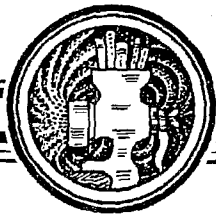
- Polyspectral methods of analysis, synthesis and transmission of information. *G.N.Bochkov, K.V.Gorokhov, A.A.Dubkov, S.N.Zheltoy, G.A.Markov* . . . . . 54
- On quasi-periodic solutions in dissipative dynamical systems of the third order. *L.A. Sinitsky, O.A. Tsvigun* . . . . . 66
- Development of correlation of laser radiation intensity fluctuations techniques for non-invasive monitoring and measuring of blood flow changes. *I.V. Meglinsky, D.A.Boas, A.G. Yodh, B. Chance, V.V. Tuchin* . . . . . 72

### METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

- New approach to transition coefficient estimation. *G.G. Malinetskii, A.B. Potapov, I.V. Feldstein* . . . . . 82
- On integration of Kolmogorov - Fokker - Planck equations for non-autonomous quasilinear systems having parametric random effect. *S.P. Zhogal, S.I. Zhogal* . . . . . 92
- Formalization method of interaction of smooth nonlinear dynamic systems. *S.N. Chukanov* . . . . . 100

### BOOKS REVIEW

- Information and self-organization - keys to the mystery of evolution? *B.N. Poizner* . 107



## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАЗЫ В ДИНАМИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*В. Ю. Торонов, В. Л. Дербов, О. М. Приютова*

На доступном для широкого круга специалистов по нелинейной динамике уровне изложены основы теории геометрических фаз для динамических систем общего вида и некоторые результаты исследований геометрических фаз в полуклассических и квантовых моделях лазерной физики и нелинейной оптики.

### Введение

Проблема геометрической фазы (ГФ) как сфера исследовательской деятельности возникла благодаря работе М. Берри [1], в которой он с неожиданной новизной осветил, казалось бы, давно решенную задачу об адиабатической эволюции квантовой системы. Действительно, еще на заре квантовой механики было известно, что при достаточно медленном изменении окружения, например внешнего поля, система, первоначально находившаяся в некотором стационарном состоянии, продолжает находиться в нем и далее, эволюционируя так, что соответствующая волновая функция и энергия зависят от времени через набор параметров  $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)$ . Берри обратил внимание на эволюцию фазы волновой функции такой системы. Действуя в соответствии с предписанием адиабатической теоремы [2], он стал искать решение уравнения Шредингера в виде  $|\psi(t)\rangle = |\chi(p(t))\rangle \exp(i\alpha(t))$ , где  $|\chi(p)\rangle$  - собственный вектор гамильтониана  $H(p)$ , отвечающий значению энергии  $E(p)$ . Подставляя  $|\psi(t)\rangle$  в уравнение Шредингера, можно получить

$$\alpha(t) = \int_0^t E dt + i \int_C \sum_k \langle \chi | \partial_{p_k} | \chi \rangle dp_k. \quad (1)$$

Первый член в (1), получивший название динамической фазы, ассоциируется с тривиальной зависимостью фазы собственного состояния гамильтониана от энергии. Абсолютно неожиданными оказались свойства второго слагаемого. Действительно, оно представляет собой интеграл по траектории  $C$  в пространстве параметров и не зависит явно от времени, но зато зависит от геометрии контура  $C$ . В отличие от динамической фазы, значение этой величины никак не реагирует на изменение скорости движения по контуру параметров, но чувствительно к его деформациям. Например, если контур  $C$  замкнутый, то движениям по контуру в противоположных направлениях, то есть различным ориентациям контура,

отвечают равные по величине и противоположные по знакам значения этого слагаемого. Из-за чувствительности второго слагаемого к геометрии траектории Берри назвал его геометрической фазой (ГФ).

Вскоре после открытия Берри ГФ были реализованы в эксперименте с поляризованным пучком медленных нейтронов [3]. Нейтроны пропускались через магнитное поле, ориентация вектора напряженности которого менялась вдоль траектории движения частиц. В качестве набора адиабатически меняющихся параметров выступали компоненты вектора напряженности магнитного поля. Непосредственно сравнивались компоненты макроскопического вектора поляризации пучка на входе и выходе устройства с управляемой конфигурацией магнитного поля. По этим данным определялась разность ГФ для собственных функций гамильтониана, отвечающих двум противоположным по знаку проекциям спина нейтронов на заданную ось. Меняя скорость движения частиц и конфигурацию поля, можно было экспериментально изучать свойства ГФ, о которых говорилось выше. Интересным и красивым свойством данной системы является то, что ГФ, приобретенная волновой функцией за время пролета нейтрона через магнитное поле, оказывается равной половине телесного угла, охваченного вращающимся вектором магнитного поля, взятой с обратным знаком.

В дальнейшем ГФ наблюдались и в других «квантовых» экспериментах: в опытах с атомами и молекулами во внешних полях [4], в ядерном магнитном резонансе [5]. Получили новую интерпретацию в терминах ГФ и некоторые известные ранее эффекты, например, эффект Ааронова - Бома [1] и квантовый эффект Холла [6]. Однако, массовый интерес к ГФ, отражаемый потоком публикаций, хлынувших после работы Берри, обусловлен тем, что круг явлений, связанных с ГФ, оказался гораздо шире, чем тот, к которому задача об адиабатической квантовой эволюции имеет непосредственное отношение. Например, выяснилось, что очень похожими на пучки нейтронов свойствами (в смысле ГФ) обладает классический поляризованный свет. Именно, известно что всякому поляризационному состоянию поперечной волны можно поставить в соответствие точку на единичной двумерной сфере, так что, например, полюсам соответствуют состояния круговой поляризации, экватору - линейной, остальным точкам - некоторые состояния эллиптической поляризации с различными параметрами эллипса [7] (подробнее об этом см. ниже). С помощью специальных оптических элементов, таких как, например, двулучепреломляющие и поляризующие пластинки, можно изменять состояние поляризации. Таким изменениям соответствуют перемещения изображающей точки по сфере вдоль дуг большого круга, соединяющих начальную и конечную точку. Как выяснилось [8], при циклическом изменении состояния поляризации у световой волны возникает ГФ, равная взятой с обратным знаком половине телесного угла  $\Omega$ , охваченного на сфере контуром, соответствующим эволюции поляризационного состояния.

Как динамический хаос несколько лет назад, так и ГФ сегодня находят в системах, перечень которых стремится к бесконечности. Аналогия с динамическим хаосом не случайна. Действительно, концепция ГФ является объединяющей для множества, казалось бы, еще более разнородных систем, чем те, которые объединяет концепция странного аттрактора. В соответствии с мультидисциплинарностью темы ГФ, к настоящему времени уже имеется ряд посвященных ей тематических сборников [9,10] и обзоров [11-13]. Однако, ни один из них специально не освещает проблему ГФ ни в нелинейных оптических системах, ни в нелинейной динамике вообще (за исключением очень краткого обзора [13], в котором излагаются лишь некоторые формально-математические аспекты ГФ в моделях нелинейной оптики). Между тем, эволюционность - главное обстоятельство, сопровождающее появление ГФ, - наиболее существенно и интересно проявляется именно в нелинейных системах. С другой стороны, понятие фазы ассоциируется с колебательными процессами, характерными, в частности, для нелинейных систем радиофизики, электроники, оптики. Среди них выделяются такие традиционные объекты исследования нелинейной динамики, как лазеры и другие нелинейные оптические системы.

В данной работе сделана попытка с единых позиций изложить физические принципы и результаты, относящиеся к ГФ в полуклассических и квантовых системах нелинейной оптики. Для этого в 1-м разделе вводятся основные понятия, характеризующие ГФ в динамических системах общего вида. 2-й раздел посвящен введению в проблематику ГФ для нелинейных оптических систем на примере полуклассических моделей лазеров. Некоторые результаты исследования проявлений ГФ в динамике лазеров изложены в 3-м и 4-м разделах. В 5-м разделе рассмотрена проблема ГФ у сжатых состояний света.

Авторы стремились по возможности учесть интересы людей, занимающихся нелинейной динамикой, но не обязательно являющихся специалистами в области ГФ, лазерной физики или квантовой оптики.

## 1. Геометрические фазы в квантовых и классических динамических системах

Чтобы выяснить природу аналогии между различными системами, в которых можно наблюдать ГФ, следуя работам [14-17], рассмотрим динамическую систему, состояние которой описывается некоторым комплексным вектором  $|\psi\rangle$ . Это может быть квантовая система, волновое поле, система осцилляторов и т.п. Вектор  $|\psi\rangle$  может быть представлен конечным набором комплексных чисел, как в случае спиноров, или бесконечным, как в случае волнового поля. Значения физических величин, измеряемых на опыте, для систем рассматриваемого типа обычно выражаются через  $|\psi\rangle$  с помощью операции скалярного произведения  $\langle\psi|\chi\rangle$ , определенной в пространстве состояний  $\mathcal{N}$ . Например, для конечномерных векторов  $|\psi\rangle=(\psi_1,\dots,\psi_n)$  и  $|\chi\rangle=(\chi_1,\dots,\chi_n)$   $\langle\psi|\chi\rangle=\psi_1^*\chi_1+\dots+\psi_n^*\chi_n$ . В случае волнового поля, когда  $|\psi\rangle=\psi(\mathbf{r},t)$ , - функция координат и времени,  $\langle\psi|\chi\rangle=\int\psi^*\chi d^3r$ . Примерами выражений физических величин с помощью скалярного произведения являются энергия квантовой системы  $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$  ( $\hat{H}$  - оператор Гамильтона),  $\langle\psi|\psi\rangle$  - измеряемая с помощью идеального широкоапертурного фотоприемника интегральная мощность светового пучка с квазиплоским фронтом и поперечным распределением поля  $\psi(\mathbf{r})$ .

Пусть динамика системы описывается эволюционным уравнением вида

$$i\partial_t|\psi\rangle=\hat{U}|\psi\rangle, \quad (2)$$

где  $\hat{U}$  - некоторый оператор, который, возможно, зависит от  $|\psi\rangle$ . Такой вид имеют многие уравнения как линейной, так и нелинейной математической физики, например, уравнение Шредингера, нелинейное уравнение Шредингера, обобщенное уравнение Гинзбурга - Ландау. Все эти уравнения инвариантны относительно замены  $|\psi\rangle\rightarrow|\psi\rangle\exp(i\alpha)$  ( $\alpha=\text{const}$ ), что отражает свойство однородности времени. Одним из следствий этого свойства является то, что векторы состояний, различающиеся только фазовыми множителями, описывают состояния системы с одними и теми же значениями физических величин. Поэтому дополнительно к пространству векторов состояний  $\mathcal{N}$  можно ввести так называемое пространство лучей  $\mathcal{P}$ , которое получается из  $\mathcal{N}$  объединением всех его точек, различающихся только фазой вектора состояния. Название «пространство лучей» ассоциируется с математической процедурой проективного отображения

$$\Pi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}, \quad (3)$$

«генерирующего» точку пространства  $\mathcal{P}$  из «луча» - множества точек в  $\mathcal{N}$ , различающихся только фазой.

В отличие от пространства  $\mathcal{N}$ , каждой точке пространства  $\mathcal{P}$  соответствует только одно физическое состояние. Поэтому пространство  $\mathcal{P}$  иначе называют пространством физических состояний. В квантовой механике представлению состояния системы в  $\mathcal{P}$ -пространстве отвечает представление матрицы плотности.

Из сказанного не следует, однако, что степень свободы, связанная с фазой вектора состояния, лишь математическое украшение. Хотя абсолютная фаза и не имеет физического смысла, разность фаз состояний - физически измеримая величина. Примером является разность фаз двух волновых фронтов лазерного пучка, измеримая по интенсивности суммарного сигнала. В квантовой механике известно явление интерференции вырожденных атомных состояний [18]. Предположим что мы можем контролировать физическую величину

$$h(t) = \text{Re}[\langle \psi | \dot{\psi} \rangle^{-1} \langle \psi | \hat{U} | \psi \rangle]. \quad (4)$$

Например, для квантовой системы это значение энергии. Вместо  $|\psi\rangle$  можно использовать новый вектор состояния

$$|\phi\rangle = |\psi\rangle \exp(i \int_0^t h(\tau) d\tau). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим

$$i \partial_t |\phi\rangle = (\hat{U} - h) |\phi\rangle. \quad (6)$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на  $|\phi\rangle$ , получим

$$\text{Im}(\langle \phi | \partial_t |\phi\rangle) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) выражает закон, которому подчиняется эволюция вектора состояния. Заметим, что в уравнении (7) не содержится «следов» оператора  $\hat{U}$  или каких-либо иных признаков динамической системы, его породившей.

Предположим, что за некоторое время эволюции  $t_0$  система вернулась в состояние  $|\phi(t)\rangle$ , отличающееся от исходного  $|\phi(0)\rangle$  фазой  $\gamma$ . Рассмотрим контур  $\Gamma T$  в  $\mathcal{N}$ , образованный траекторией  $T$  эволюции вектора  $|\phi(t)\rangle$  ( $0 < t < t_0$ ) и замыкающей кривой  $\Gamma$ :  $|\phi(t_0)\rangle \exp(i\beta(s))$ , где функция  $\beta(s)$  непрерывно меняется от 0 до  $\gamma$ , когда параметр  $s$  пробегает некоторый интервал на вещественной оси. Рассмотрим величину

$$- \oint_{\Gamma T} \text{Im}[\langle \phi | \dot{\phi} \rangle^{-1} \langle \phi | \partial_s |\phi\rangle] ds. \quad (8)$$

Ее легко вычислить, если учесть, что подынтегральная функция равна нулю на траектории  $T$  согласно (7), а  $\int_{\Gamma} = \gamma$ . Таким образом, значение разности фаз начального и конечного состояний определяется значением (8). При этом выражение (8) - чисто геометрическое в том смысле, что оно не содержит времени и зависит только от геометрии контура в  $\mathcal{N}$ . Кроме того, легко проверить, что значение этой величины инвариантно относительно калибровочного преобразования  $|\phi(s)\rangle \rightarrow |\phi(s)\rangle \exp(i\eta(s))$ , где  $\eta(s)$  - непрерывная функция параметра  $s$ . Варьирование  $\eta(s)$  деформирует траекторию в  $\mathcal{N}$ , но не меняет ее проекцию в  $\mathcal{P}$ . Поэтому интеграл в (8) можно рассматривать и как интеграл по кривой в пространстве лучей, причем при циклической эволюции эта кривая замкнута. Заметим, что согласно теореме Стокса [19], криволинейный интеграл в (8) можно преобразовать в интеграл по поверхности, охваченной контуром  $\Gamma T$ .

В качестве примера рассмотрим системы с двумерным комплексным вектором состояния  $|\psi\rangle = (x_1, x_2)$ . К таковым относятся квантовые частицы со спином  $1/2$  (в частности, нейтроны) и поляризованный свет. Чисто алгебраическим является тот факт, что всякую пару комплексных чисел можно представить в виде



$$x_1 = (2\rho)^{1/2} \cos(\theta/2) \exp[i(\Theta)], \quad x_2 = (2\rho)^{1/2} \sin(\theta/2) \exp[i(\Theta + \varphi)], \quad (9)$$

где  $\rho = (|x_1|^2 + |x_2|^2)/2$ ,  $\Theta$  - абсолютная фаза вектора  $|\psi\rangle$ . Если рассматривать  $\rho$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  как радиус, полярный и азимутальный углы некоторой сферической системы координат, то с точностью до абсолютной фазы состояние системы можно отождествить с точкой в трехмерном пространстве, которое в данном случае и есть пространство лучей. Заметим, что так как  $\operatorname{tg}(\theta/2) = x_2/x_1$ , а  $x_1^* x_2 = |x_1||x_2| \exp(i\varphi)$ , полярный угол  $\theta$  характеризует отношение модулей чисел  $x_1$  и  $x_2$ , а азимутальный угол  $\varphi$  - разность их фаз. Вычисляя по формуле (8) ГФ, соответствующую некоторой циклической эволюции рассматриваемой системы, можно получить

$$\gamma = -\oint_{\Gamma} \sin^2(\theta/2) d\varphi. \quad (10)$$

В этом выражении нетрудно узнать взятую с обратным знаком половину телесного угла, охваченного траекторией системы в пространстве лучей. Напомним, что величина телесного угла есть площадь соответствующей «меньшей» области на единичной сфере, взятая со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от направления обхода.

Формула (10) объясняет тот факт, что в экспериментах по циклическому преобразованию состояния поляризации света ГФ оказывается равной  $-\Omega/2$ . В случае же нейтронов, медленно пролетающих через геликоидальное магнитное поле, параметры  $\theta$  и  $\varphi$ , определяющие их спиновое состояние, взаимно однозначно и непрерывно связаны с направлением магнитного поля [3], которое тоже может быть задано точкой на двумерной сфере. Так как пространство физических состояний  $\mathcal{P}$  и пространство параметров (направлений поля) в данном случае эквивалентны (связаны взаимно однозначным и непрерывным отображением), ГФ также оказывается равной половине телесного угла, охваченного вектором напряженности магнитного поля, взятой со знаком «минус».

Таким образом, способность физической системы демонстрировать ГФ связана не с ее динамическими свойствами, а с геометрией ее пространства состояний. Дифференциально-геометрические аспекты ГФ, впервые продемонстрированные Саймоном [6], впоследствии обсуждались в многочисленных работах математического характера (см., например, обзор [11]), детальное рассмотрение которых выходит за рамки данной работы. Отметим лишь, что на языке геометрии уравнение (7) выражает условие «горизонтальности» эволюции вектора состояния, то есть трансверсальности вектора скорости  $d_t|\psi\rangle$  к направлению вдоль луча, считающегося «вертикальным». Возникновение ГФ, то есть «вертикального» смещения в результате «горизонтальной» эволюции вдоль кривой в  $\mathcal{N}$ , которой в  $\mathcal{P}$  соответствует замкнутая кривая, обусловлено тем, что хотя пространства векторов состояний  $\mathcal{N}$  и физических состояний  $\mathcal{P}$  и связаны операцией проектирования (3), пространство  $\mathcal{N}$  не может быть получено из  $\mathcal{P}$  прямым произведением его на луч.

Следует осознавать, что геометрические особенности математических моделей рассматриваемых систем, такие как наличие пространств  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{P}$  и нетривиальность топологической связи между ними, отражают их физические свойства, а именно - наличие фазы как особой физической характеристики системы. Именно осознание «геометрической» сущности фазы Берри привело авторов работ [15-17] к пониманию возможности их реализации в нелинейных, в том числе и диссипативных [16,17], динамических системах. Действительно, описанными свойствами обладают многие системы нелинейной оптики, электроники СВЧ и т.д. При этом в отличие от пассивных систем, в которых динамика вектора состояния определяется изменением внешнего окружения, в нелинейных системах возможны динамические режимы, обусловленные «внутренними» свойствами этих систем. Поэтому особенности поведения ГФ в

таких режимах отражают геометрию соответствующих множеств в фазовом пространстве.

Однако, для нелинейной системы обсуждавшийся до сих пор случай циклической эволюции является лишь одним из возможных, наряду с квазипериодическим и хаотическим видами установившихся движений. Поэтому введенное выше для случая циклической эволюции понятие ГФ и формула для ее вычисления требует обобщения. Прежде всего, необходимо обобщить понятие разности фаз двух векторов состояний для произвольных состояний, то есть различающихся не только фазой, но и другими параметрами. Впервые оно было введено Панчатаном ([20], см. также в [10]) для состояний классического поляризованного света, а затем обобщено на случай систем общего вида (2) в [21]. В общем случае разность фаз векторов состояний  $|\phi_1\rangle$  и  $|\phi_2\rangle$  определяется фазой комплексного числа  $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$ . Мотивировка этого определения такова: два состояния  $|\phi_1\rangle$  и  $|\phi_2\rangle$  «синфазны», если физическая величина  $\langle\phi_1+\phi_2|\phi_1+\phi_2\rangle$  максимальна по всем возможным значениям фаз векторов  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , что достигается при  $\arg(\langle\phi_1|\phi_2\rangle)=0$ . Далее, в работе [21] было показано, что в случае, когда эволюция вектора состояния подчиняется закону (7), разность фаз двух векторов состояний, относящихся к различным моментам времени и различным физическим состояниям (как фаза числа  $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$ ), может быть определена по той же формуле (8), где под кривой  $\Gamma$ , замыкающей контур, следует понимать кривую в  $\mathcal{N}$ , проецируемую отображением (3) на геодезическую в  $\mathcal{P}$ . Отметим еще раз, что этот же интеграл может быть рассмотрен как интеграл в  $\mathcal{P}$ . В частном случае системы, характеризуемой двумерным вектором состояния, геодезическая - это просто прямая, соединяющая начальную и конечную точку в трехмерном пространстве. При вычислении ГФ по площади радиальной проекции контура в  $\mathcal{P}$  на единичную сферу (что удобно из-за наглядности метода) следует иметь в виду, что прямая проецируется на дугу большого круга.

## 2. Геометрические свойства полуклассических моделей лазеров

В полуклассической теории [23,24] поле излучения лазера считается классическим и описывается напряженностью электрического поля  $\mathcal{E}$  (влияние магнитного поля на процессы в лазере обычно пренебрежимо мало), являющейся функцией координат и времени. Так как для работы лазера дискретность уровней энергии активной среды является существенной, состояние активной среды описывается квантовомеханически с помощью матрицы плотности. Через матрицу плотности выражается дипольный момент единицы объема вещества, который входит в волновое уравнение для  $\mathcal{E}$ .

Для динамики лазеров характерным является наличие двух резко различающихся временных и пространственных масштабов: высокочастотного и низкочастотного. Высокочастотный (оптический) определяется частотой рабочего перехода  $\omega_0$  и соответствующей ей длиной волны. Низкочастотный (от 10 до 100 МГц) соответствует процессам перекачки энергии из излучения в активную среду и обратно. В экспериментальных исследованиях динамики лазерного излучения в качестве регистрирующих приборов используются квадратичные по полю фотоприемники с конечным временным и пространственным разрешением. Это означает, что наблюдаемой величиной является

$$I(t) = \int_S \vec{\mathcal{E}}^2 dS, \quad (11)$$

где интегрирование ведется по фоточувствительной поверхности приемника, а черта над подынтегральным выражением означает усреднение по времени. Это

усреднение производится на некотором характерном для приемника интервале времени, которое обычно значительно превышает период высокочастотных (оптических) колебаний, но мало по сравнению с характерным временным масштабом изменения огибающей. Иначе говоря, высокочастотный масштаб является недоступным для данного типа регистрирующих приборов. Это обстоятельство побуждает к выводу уравнений, описывающих динамику лазера непосредственно в терминах наблюдаемых пространственно-временных изменений, что достигается введением «медленных» комплексных амплитуд поля  $E(t)$  и дипольного момента  $P(t)$

$$(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = (E, P) \exp(i\omega_0 t - ikz) + \text{к.с.} \quad (12)$$

Физически комплексность  $E$  и  $P$  выражает тот факт, что не только амплитуда колебаний поля и дипольного момента, но и их частота могут медленно меняться во времени и в пространстве. При этом абсолютные фазы амплитуд поля и дипольного момента наблюдаемыми не являются. Действительно, используя (12), получим

$$\mathcal{E}^2 = 2|E|^2 + E^2 \exp(2i\omega_0 t - 2ikz) + \text{к.с.}$$

Усреднение по времени в (11) обращает в ноль быстро осциллирующее слагаемое с  $\exp(2i\omega_0 t - 2ikz)$ , так что наблюдаемой является величина  $|E|^2$ , нечувствительная к фазе. Однако разность фаз  $\alpha$  двух комплексных амплитуд  $E_1$  и  $E_2$ , соответствующих двум сигналам, может быть оценена по интенсивности суммарного сигнала

$$I_{1,2} = \int_S (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 dS = \int_S |E_1 + E_2|^2 dS = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \cos \alpha. \quad (13)$$

Подставляя (12) в волновое уравнение и уравнения для элементов матрицы плотности, можно получить так называемые уравнения Максвелла - Блоха [24] для медленных амплитуд  $E$  и  $P$  и разности заселенностей рабочих уровней  $N$

$$i\partial E/\partial t = (\omega_0/2 - i2\pi\sigma)E + [c^2/(2\omega_0)]\nabla^2 E + 2\pi\omega_0 P, \quad (14)$$

$$i\partial P/\partial t = (\Delta_\omega - i\tau^{-1})P - (|\mu|^2/h)ED, \quad (15)$$

$$\partial D/\partial t = (D_0 - D)/T + (2i/h)(E^*P - EP^*), \quad (16)$$

где  $\tau$ ,  $T$  и  $\mu$  - спектроскопические константы,  $\sigma$  - скорость затухания поля в резонаторе,  $D_0$  - ненасыщенная инверсия, создаваемая внешним источником энергии в отсутствие поля,  $\Delta_\omega$  - разность частот резонатора и рабочего перехода. Уравнения (14)-(16) инвариантны относительно преобразования

$$(E, P) \rightarrow (E, P) \exp(i\alpha) \quad (17)$$

в соответствии с ненаблюдаемостью абсолютных фаз  $E$  и  $P$ .

Фазовое пространство лазера представляет собой бесконечномерное пространство, каждая точка которого соответствует определенной «мгновенной» комбинации трех функций пространственных координат:  $E$ ,  $P$  и  $D$ . Если же ограничиться подпространством  $\mathcal{N}$  этого пространства, определяемого всевозможными комбинациями двух функций  $E$  и  $P$ , то можно видеть, что это подпространство обладает всеми описанными в разделе 1 свойствами, необходимыми для возможности реализации ГФ.

Заметим, что система уравнений (14), (15) имеет вид (2), где вектор состояния  $|\psi\rangle$  определяется парой функций  $E$  и  $P$ . Для того, чтобы использовать описанные в разделе 1 формальные выражения для ГФ в лазере, необходимо определить скалярное произведение в пространстве  $\mathcal{N}$ . Естественной формой такого определения является

$$\langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle = \int_V [E_\alpha^*(\mathbf{r})E_\beta(\mathbf{r}) + P_\alpha^*(\mathbf{r})P_\beta(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}. \quad (18)$$

Это определение находится в соответствии с выражениями для энергии электромагнитных колебаний в среде ( $W \sim \langle \psi | \psi \rangle$ ) и других интегральных характеристик поля. Вектор состояния можно «подчинить» уравнению (7) с помощью преобразования (5), где  $h$  определяется согласно (4). Тогда разность фаз векторов состояния  $|\psi(t_1)\rangle$  и  $|\psi(t_2)\rangle$  является чисто геометрической и может быть вычислена по формуле (8).

Итак, свойства фазового пространства лазера позволяют поставить вопрос о возможности реализации ГФ. Физическими предпосылками для этого являются наличие у поля и дипольного момента медленных амплитуды и фазы, и ненаблюдаемость оптических осцилляций этих переменных.

Экспериментальные методы анализа фазовой динамики поля в лазере основаны на наблюдении смешанного сигнала от двух полей, который, в соответствии с формулой (13), чувствителен к разности фаз. При этом смешиваются либо сигналы от исследуемого лазера, относящиеся к различным моментам времени и разделенные с помощью системы задержки (гомодинирование), либо сигнал от исследуемого лазера и монохроматический сигнал от дополнительного источника (гетеродинирование). Гетеродинирование позволяет отслеживать эволюцию фазы поля во времени в системе отсчета, связанной с линейно растущей фазой опорного монохроматического сигнала [25]. При этом изменению частоты несущего сигнала на величину  $\delta\omega$  соответствует «калибровочное» преобразование амплитуд поля и дипольного момента

$$(E, P) \rightarrow (E, P) \exp(i\delta\omega t). \quad (19)$$

Прежде чем перейти к вопросу о проявлениях ГФ в свойствах излучения лазеров, рассмотрим применение введенных выше понятий для некоторых стандартных ситуаций, когда общая система уравнений Максвелла - Блоха (14)-(16) сводится к уравнениям другого вида.

Для моделирования динамики лазеров часто используется разложение функций  $E$ ,  $P$  и  $D$  по системе ортогональных функций  $\chi_n(\mathbf{r})$ , отвечающих модам пустого резонатора

$$\{E, P, D\} = \sum_n \{E_n(t), P_n(t), D_n(t)\} \chi_n(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Получающаяся при этом система дифференциальных уравнений для  $E_n(t)$  и  $P_n(t)$  по-прежнему имеет вид (2), где вектор состояния  $|\psi\rangle$  представлен совокупностью комплексных чисел  $E_n, P_n$ . В соответствии с этим подстановка (20) в (18) дает выражение для скалярного произведения

$$\langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle = \sum_n E_{n\alpha}^* E_{n\beta} + P_{n\alpha}^* P_{n\beta}. \quad (21)$$

Часто встречается ситуация, когда характерное время релаксации дипольного момента  $\tau$  в (15) мало по сравнению с характерным временем изменения амплитуды поля. В этом случае в (15) можно пренебречь производной по времени и выразить  $P$  как функцию  $E$  и  $D$ . В этом случае вектором состояния является сама функция  $E(\mathbf{r}, t)$  аналогично квантовомеханической волновой функции в координатном представлении. При этом скалярное произведение может быть определено по аналогии с (18) или с (21), если используется модовое представление.

### 3. Геометрические фазы в кольцевом лазере с одной бегущей волной

Одной из простейших моделей, описывающих режимы пульсаций излучения в лазере, является система полуклассических уравнений для одномодового

кольцевого лазера с однородно уширенной линией усиления в режиме Однонаправленной генерации [25-28]. Такой режим может быть осуществлен введением в резонатор лазера селектирующего элемента, «прозрачного» для волны, бегущей в одном направлении, и подавляющего генерацию встречной волны. Уравнения динамики данного лазера могут быть получены из системы (14)-(16). Эти уравнения с точностью до линейной замены переменных эквивалентны уравнениям комплексной модели Лоренца (КМЛ) [29], которые имеют вид

$$dx/dt = -k(x - y), \quad (22)$$

$$dy/dt = -(1 - i\delta)y + (r - z)x, \quad (23)$$

$$dz/dt = -bz + 1/2(x^*y + xy^*). \quad (24)$$

Здесь комплексные переменные  $x$  и  $y$  - безразмерные амплитуды поля и дипольного момента, вещественная переменная  $z$  соответствует разности заселенностей (инверсии), параметры  $k$  и  $b$  - соответственно, скорости релаксации поля и разности заселенностей, выраженные в единицах скорости релаксации дипольного момента,  $\delta$  - отстройка, то есть разность частот резонаторной моды и частоты перехода между рабочими атомными уровнями,  $r$  - безразмерная мощность накачки. КМЛ относится к числу весьма популярных в нелинейной динамике моделей (см., например, работу [27] и обширную библиографию к ней).

Согласно (5),

$$h(t) = [\delta|y|^2 - (i/2)(k + z - r)(x^*y - xy^*)](|x|^2 + |y|^2)^{-1}. \quad (25)$$

Исключая динамическую фазу, получим вектор состояния, эволюция которого удовлетворяет уравнению (7),

$$|\phi(t)\rangle = \exp(-i\int_0^t h(\tau)d\tau) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Динамика  $X(t)$  и  $Y(t)$  описывается системой уравнений

$$dX/dt = -(k - ih)X + kY, \quad (27)$$

$$dY/dt = -(1 - i\delta - ih)Y + (r - z)X, \quad (28)$$

$$dz/dt = -bz + 1/2(X^*Y + XY^*). \quad (29)$$

Поскольку в данном случае вектор состояния двумерный, то, как показано в разделе 1, разность фаз  $\gamma = \arg(\langle\phi(t_1)|\phi(t_2)\rangle)$  равна величине телесного угла в пространстве лучей, охватываемого контуром, составленным из куска траектории между точками, соответствующими моментам времени  $t_1$  и  $t_2$ , и отрезка прямой, соединяющего эти точки (или площади на единичной сфере, охватываемой радиальной проекцией контура). В соответствии с (9), декартовы координаты в пространстве лучей суть

$$\zeta_1 = (x^*y + xy^*)/2, \quad \zeta_2 = -i(x^*y - xy^*)/2, \quad \zeta_3 = (|x|^2 - |y|^2)/2. \quad (30)$$

С помощью системы уравнений (22)-(24) можно получить уравнения движения в этих координатах

$$d\zeta_1/dt = -(k+1)\zeta_1 - \delta\zeta_2 - (k - r + z)\zeta_3 + (k+r - z)R, \quad (31)$$

$$d\zeta_2/dt = -(k+1)\zeta_2 + \delta\zeta_1, \quad (32)$$

$$d\zeta_3/dt = -(k+1)\zeta_3 + (k - r + z)\zeta_1 - (k-1)R, \quad (33)$$

$$dz/dt = -bz + \zeta_2, \quad (34)$$

где  $R=(\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2)^{1/2}=(|x|^2+|y|^2)/2$ . Решение системы уравнений (22)-(24), описывающее режим генерации излучения с постоянной во времени интенсивностью, имеет вид

$$x(t) = a \exp(i\omega t), \quad (35)$$

$$y(t) = (1+i\omega/k)a \exp(i\omega t), \quad (36)$$

$$z(t) = |a|^2/b, \quad (37)$$

где

$$|a|^2 = b(r - r_c), \quad (38)$$

$$\omega = k\delta/(k+1), \quad (39)$$

$$r_c = 1 + \delta^2/(k+1)^2. \quad (40)$$

Ему соответствует неподвижная точка в  $\mathcal{P}$ . Поскольку в этом случае траектория в  $\mathcal{P}$  не охватывает какого-либо телесного угла, нет и ГФ. Это согласуется с тем, что для рассматриваемого решения динамическая частота, определяемая выражением (25), совпадает с частотой  $\omega$  в (39), что можно проверить подстановкой  $x$ ,  $y$  и  $z$  из (35)-(37) в (25).

На рис. 1, а показан фазовый портрет циклического (периодического в  $\mathcal{P}$ )

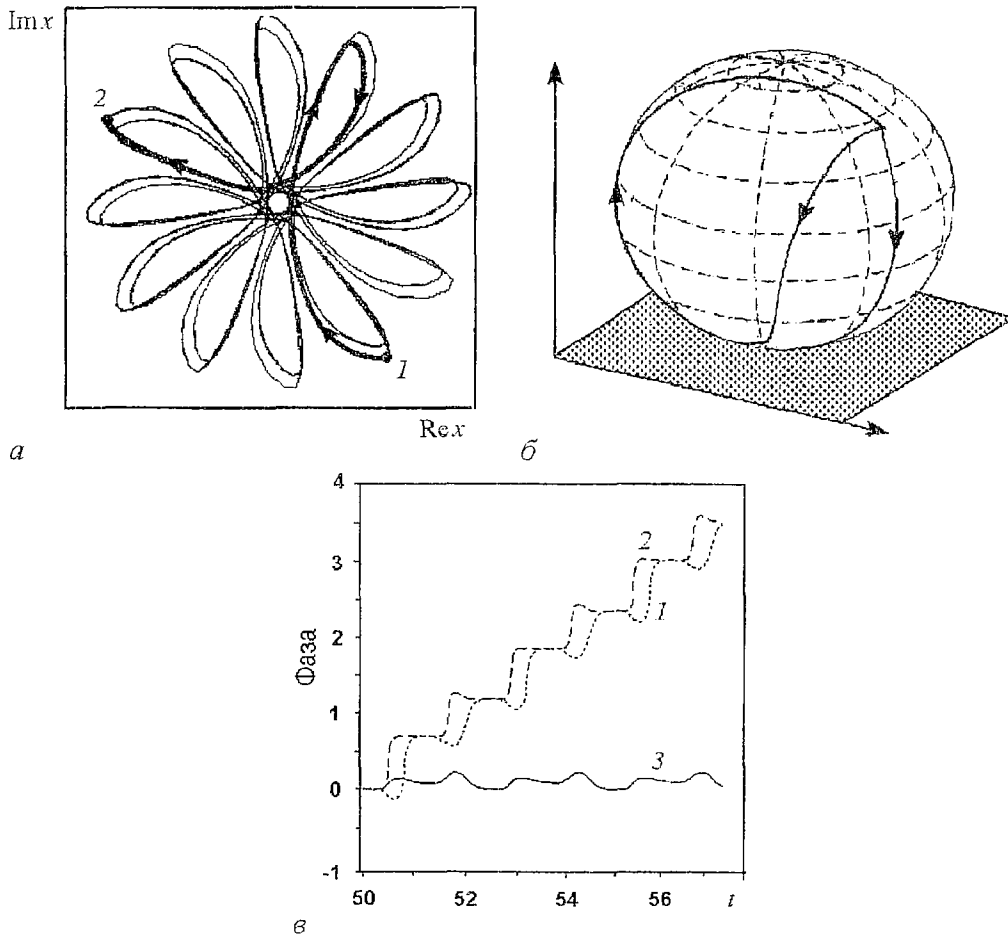


Рис. 1. Периодическое в  $\mathcal{P}$  решение системы (27)-(29), полученное численно при  $k=3$ ,  $b=0.1$ ,  $r_1=30$ ,  $r_2=0$ ,  $\delta=1$ : а - фазовый портрет в комплексной плоскости  $X$ ; б - проекция траектории в  $\mathcal{P}$  на единичную сферу; в - эволюция фаз: фазы Панчаратнама (1), фазы переменной  $X$  (2) и динамической фазы (3)

решения системы уравнений (27)-(29) на плоскости комплексной амплитуды поля  $X$ . Толстая линия, соединяющая точки 1 и 2, показывает путь, пройденный изображающей точкой за один произвольно выбранный период движения в  $\mathcal{P}$ . Разность фаз между начальным и конечным положениями изображающей точки на  $X$ -плоскости равна площади, охватываемой проекцией цикла в  $\mathcal{P}$  на единичную сферу (рис. 1,б). Следует иметь в виду, что при вычислении набегу ГФ за период учитываются площади на единичной сфере, соответствующие как внешней, так и внутренней петлям цикла удвоенного периода, показанного на рис. 1, б. На рис. 1, в показаны временные реализации ГФ  $\gamma$  (кривая 1) и фазы  $\Theta$  переменной  $X$  (кривая 2), измеренных в единицах  $\pi$ . Можно видеть, что обе фазы имеют равные набегу за период  $\mathcal{P}$ -цикла, хотя их набегу за произвольные интервалы времени могут различаться. Такое поведение фаз поля и дипольного момента согласуется с тем, что полюсы единичной сферы в  $\mathcal{P}$  лежат вне области, охватываемой радиальными проекциями траекторий КМЛ, так что при полном обходе вдоль цикла набегу разности фаз  $X$  и  $Y$ , соответствующий смещению в азимутальном направлении по сфере, равен нулю.

В случае хаотического режима (рис. 2) физический смысл имеют только средние набегу фаз  $\gamma(t)$  и  $\Theta(t)$  за единицу времени, то есть средние (по времени)

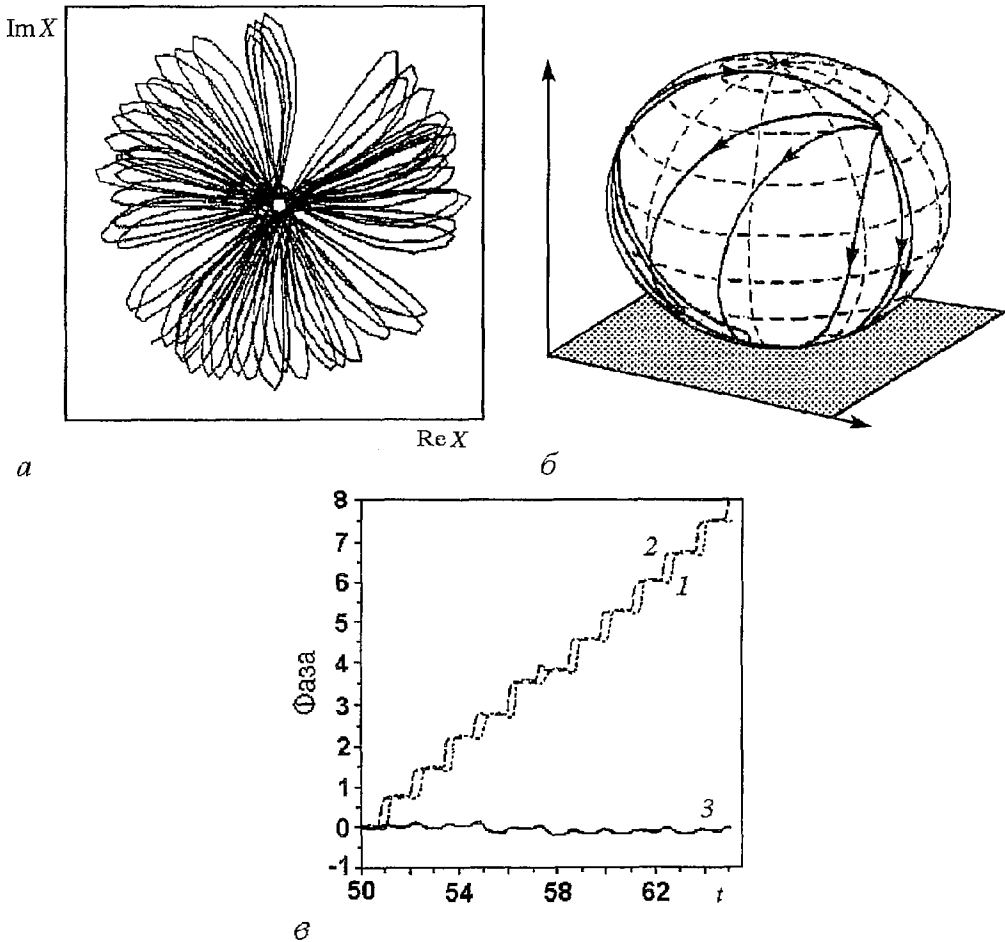


Рис. 2. Хаотическое в  $\mathcal{P}$  решение системы (27)-(29), полученное при  $k=3$ ,  $b=1$ ,  $r_1=30$ ,  $r_2=0$ ,  $\delta=1$ : а - фазовый портрет в комплексной плоскости  $X$ ; б - проекция траектории в  $\mathcal{P}$  на единичную сферу; в - эволюция фаз: фазы Панчаратнама (1), фазы переменной  $X$  (2) и динамической фазы (3)

наклоны  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\Theta}$  кривых зависимостей фаз от времени. В работе [17] было показано, что средние наклоны кривых  $\gamma(t)$  и  $\Theta(t)$  равны для любого ограниченного решения системы (27)-(29). Поэтому по измеренному среднему наклону фазы поля в принципе можно определить наклон для ГФ.

Однако, проблема наблюдения ГФ состоит в том, чтобы выбрать частоту опорного сигнала [25] таким образом, чтобы исключить фазовый наклон  $\dot{h}(t)$ , соответствующий динамической фазе. Эту проблему можно обойти, используя для наблюдения ГФ кольцевой лазер со встречными волнами (см. раздел 4). Для однонаправленного режима в работе [17] было предложено феноменологическое правило исключения динамической фазы, основанное на следующем наблюдении. На рис. 1, в и 2, в кривые 3 показывают эволюцию динамической фазы в системе отсчета, связанной с фазой гармонического сигнала на частоте стационарной генерации  $\omega$ , определяемой по (39). На обоих рисунках наклоны этих кривых очень малы, то есть средний набег динамической фазы для любого режима остается близким к стационарному. Это обстоятельство находится в соответствии с выводом, сделанным в работах [30,31], что дополнительный фазовый наклон, возникающий при рождении предельного цикла из неподвижной точки, соответствующей стационарной генерации лазера в  $\mathcal{P}$ , может быть интерпретирован как проявление ГФ. Несмотря на это, выяснение физического смысла динамической фазы для лазера остается пока нерешенной задачей.

Однако, в динамике одномодового лазера с однонаправленной генерацией было обнаружено явление, которое может быть непосредственно связано с геометрической фазой. Именно, авторы работы [28], анализируя численно циклические решения системы уравнений (22)-(24), обнаружили, что, когда частота моды резонатора меняется вблизи резонанса с частотой атомной спектральной линии, кривая зависимости частоты максимального пика в спектре мощности поля от отстройки  $\delta$  испытывает скачок в точке резонанса  $\delta=0$ . В этой же работе было показано, что частота, соответствующая максимальному пику в спектре мощности поля, совпадает со средним наклоном (полной) фазы поля. Таким образом, кривая зависимости среднего наклона фазы от  $\delta$  тоже имеет скачок при  $\delta=0$ . При этом «высота» скачка не зависит от частоты опорного сигнала, используемого при наблюдении эволюции фазы. Следуя работе [32] покажем, что этот доступный наблюдению скачок имеет «геометрическое» происхождение. Для этого остановимся на некоторых свойствах устойчивых решений системы уравнений (31)-(34). На рис. 3 и 4 показаны фазовые портреты

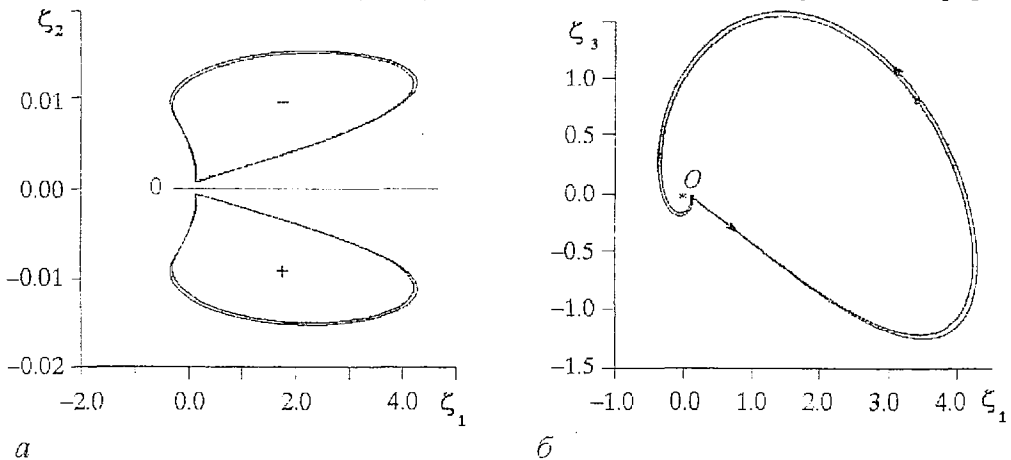


Рис. 3. Фазовые портреты циклического аттрактора в  $\mathcal{P}$ -пространстве, полученные при  $k=3$ ,  $b=0.1$ ,  $r=15$ : а - на плоскости  $(\zeta_1, \zeta_2)$  для  $\delta=\pm 0.01$  и  $\delta=0$  соответственно; б - на плоскости  $(\zeta_1, \zeta_3)$  для  $\delta=0$ ;  $O$  - начало координат



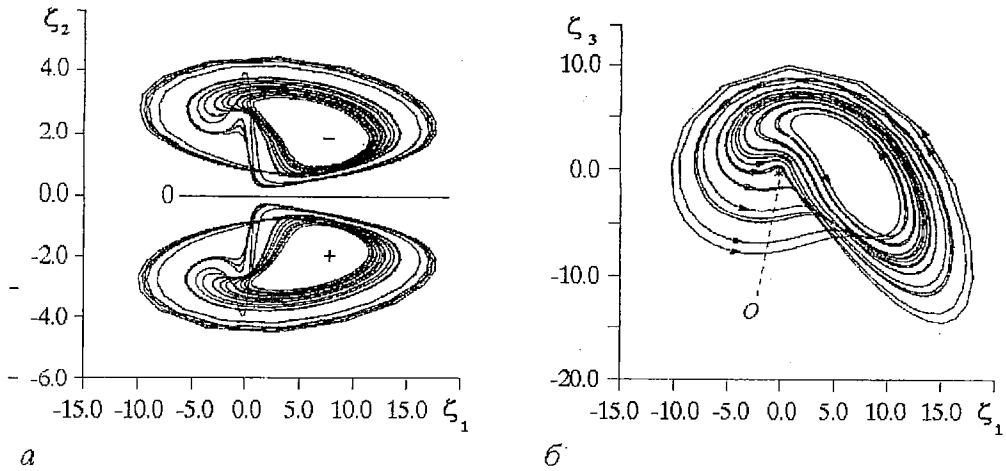


Рис. 4. Фазовые портреты хаотического аттрактора в  $\mathcal{P}$ -пространстве, полученные при  $k=3$ ,  $b=1$ ,  $r=30$ : *a* - на плоскости  $(\zeta_1, \zeta_2)$  для  $\delta=\pm 0.01$  и  $\delta=0$  соответственно; *б* - на плоскости  $(\zeta_1, \zeta_3)$  для  $\delta=0$

циклического (рис. 3) и хаотического (рис. 4) аттракторов в пространстве лучей  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  для различных значений  $\delta$ . На этих рисунках можно обнаружить следующие общие для всех режимов свойства.

**а.** Для положительных  $\delta$  аттракторы полностью лежат в области отрицательных значений координаты  $\zeta_2$ , то есть расположены внутри некоторого конуса с вершиной в начале координат и осью вращения, направленной противоположно оси  $\zeta_2$ .

**б.** Фазовый портрет аттрактора для некоторого значения  $\delta$  является зеркальным отражением в плоскости  $\zeta_2=0$  портрета аттрактора при значении отстройки равном  $-\delta$ .

**в.** Для  $\delta=0$  аттракторы лежат в плоскости  $\zeta_2=0$ , причем они охватывают начало координат таким образом, что траектория совершает оборот вокруг начала координат против часовой стрелки, если смотреть на аттрактор со стороны отрицательной полуоси  $\zeta_2$ .

**г.** Для любого фиксированного набора значений параметров  $k$ ,  $b$  и  $r$  существует область значений параметра  $\delta$  от  $-\tilde{\delta}$  до  $+\tilde{\delta}$ , в которой данный аттрактор непрерывно деформируется при непрерывном изменении  $\delta$ ; в пределе  $\delta \rightarrow 0$  угол между образующей конуса, ограничивающего аттрактор, и плоскостью  $\zeta_2=0$  стремится к нулю.

Не останавливаясь на доказательстве этих утверждений (см. [27]), перейдем к объяснению резонансного скачка кривой среднего фазового наклона. То, что это явление связано с ГФ, можно видеть из формулы (25). Действительно, согласно (25) и свойству **в**, для всякого режима набег динамической фазы тождественно равен нулю при резонансе ( $\delta=0$ ). Кроме того, из свойства **г** следует, что средний наклон динамической фазы, определяемый временным средним от правой части формулы (13), непрерывно зависит от параметра отстройки  $\delta$  в некоторой окрестности резонанса.

Чтобы понять механизм явления, рассмотрим изменение наклона ГФ  $\bar{\gamma}$  при изменении параметра  $\delta$  в окрестности  $\delta=0$ . Свойство **а** гарантирует, что для любого  $\delta \neq 0$  значение  $\bar{\gamma}$  определено однозначно, поскольку оно означает, что

величина телесного угла, охватываемого контуром ГТ в (10) имеет определенное значение в любой момент времени. Далее, согласно б и д,  $\bar{\gamma}$  является нечетной функцией  $\delta$ , непрерывной при  $\delta \neq 0$ . Наконец, из в и д следует, что в пределе  $\delta \rightarrow +0$   $\bar{\gamma}$  стремится к значению  $-\pi/T$  (где  $T$  - среднее время обхода изображающей точки вокруг начала координат), так как телесный угол, охватываемый за период, стремится к  $-2\pi$ . Таким образом, кривая  $\bar{\gamma}(\delta)$  совершает скачок на  $2\pi/T$  в момент, когда отстройка проходит через резонансное значение. Примечательно, что геометрическое рассмотрение поведения фазового наклона позволяет предсказать «высоту» скачка. Для циклического режима она оказывается равной фундаментальной частоте пульсаций интенсивности излучения. В случае же хаотического режима, соответствующего аттрактору Лоренца [29], «высота» скачка равна средней частоте переключений с одной ветви аттрактора на другую, симметричную ей относительно начала координат плоскости  $(\text{Re}(x), \text{Re}(y))$ , ветвь. Подчеркнем, что хотя скачок кривой среднего наклона фазы не вызван какой-либо негладкой перестройкой формы аттрактора, тем не менее в данном случае имеет место бифуркация, так как в момент резонанса происходит топологическая перестройка аттрактора, выражающаяся в смене его ориентации.

Как было показано в разделе 1, единственным условием, необходимым для возникновения ГФ в системе с двумерным комплексным вектором состояния является то, чтобы соответствующий вектор в пространстве лучей охватывал в ходе эволюции некоторый ненулевой телесный угол. В работе [17] было показано, что такая ситуация может быть реализована и в одномодовом кольцевом лазере, работающем в режиме однонаправленной генерации с постоянной во времени интенсивностью, когда параметры лазера адиабатически и циклически изменяются в пределах области устойчивости стационарного режима. В принципе, возникающая при этом фаза Берри может быть измерена интерференционным методом аналогично тому, как это было сделано в экспериментах с поляризованным пучком нейтронов [3] и классическим поляризованным светом [8]. Однако, согласно оценке [17], значения набегающей при этом ГФ оказываются слишком малы для ее измерения. Более перспективным с точки зрения возможности экспериментальной реализации ГФ представляется одномодовый кольцевой лазер с двумя встречными волнами [22].

#### 4. Фазовая динамика в кольцевом лазере со встречными волнами

Поскольку две медленные амплитуды встречных волн в кольцевом лазере образуют минимальный набор комплексных переменных, необходимых для реализации ГФ, ограничимся рассмотрением случая динамической модели лазера с малыми временами релаксации дипольного момента и инверсии, когда последние можно «исключить» из полуклассических уравнений, считая их адиабатически зависящими от времени через амплитуды поля [23]. В этом случае и при не слишком больших превышениях усиления над порогом генерации уравнения движения системы имеют вид [23,33,34].

$$idE_{\pm}/dt = [in_{\pm} + \zeta_{\pm} - i\alpha |E_{\pm}|^2 - i\beta |E_{\mp}|^2]E_{\pm} + g_{\pm} E_{\mp}, \quad (41)$$

где  $n_{\pm}$  - коэффициенты усиления встречных волн,  $\alpha$  и  $\beta$  - комплексные коэффициенты само- и взаимного насыщения встречных волн,  $\zeta_{\pm}$  - отстройки собственных частот волн в пустом резонаторе от частоты спектральной линии среды. Различие значений  $\zeta_{+}$  и  $\zeta_{-}$  возникает в случае вращения резонатора, что, кстати, используется в навигационной технике.

Динамическая связь между фазами встречных волн, описываемая комплексными параметрами  $g_{\pm}$ , возникает благодаря обратному рассеянию, отражению или локализованным источникам потерь. Масштабированием переменных можно выбрать  $g_{\pm} = \exp(\pm\chi)$ .

В работах [35-39] изучалась более сложная модель кольцевого лазера, в которой учитывается инерционность динамики активной среды по отношению к эволюции поля излучения. Помимо амплитуд встречных волн, эта модель в качестве динамических переменных содержит амплитуды двух низших пространственных гармоник инверсии заселенностей, что отражает возможность пространственной модуляции инверсии. Эта модуляция обеспечивает дополнительный механизм фазовой связи встречных волн. Однако, фазовое подпространство этой модели, относящееся к  $E_{\pm}$ , устроено так же, как фазовое пространство модели (41).

Отметим близость в описании лазера со встречными волнами и такими системами, как спин  $1/2$  и поляризованный свет. Во всех этих случаях состоянию системы можно поставить в соответствие точку на единичной двумерной сфере. Действительно, декартовы координаты в пространстве лучей системы (41) можно ввести аналогично (30)

$$u = (|E_+|^2 - |E_-|^2)/2, \quad v = (E_+^* E_- + E_+ E_-^*)/2, \quad w = -i(E_+^* E_- - E_+ E_-^*)/2. \quad (42)$$

Поставим в соответствие состоянию системы точку, прокальваемую на единичной сфере вектором с координатами  $(v, w, u)$ . «Широта» точки на сфере характеризует соотношение амплитуд встречных волн. Так, полюсы сферы соответствуют режимам однонаправленной генерации, а точки на экваторе - режиму генерации встречных волн с равными амплитудами, образующими стоячую волну. Движение в азимутальном направлении по сфере соответствует изменению разности фаз волн.

Отметим, что системы, состояние которых изображается двумя комплексными величинами, не обязательно параметризуются на сфере. Ниже будут рассмотрены примеры, в которых при эволюции сохраняется не сумма, а разность квадратов модулей этих величин. Такие состояния изображаются точкой на гиперboloиде.

Наряду с уравнениями для лазера с одной бегущей волной (22)-(24), модель лазера со встречными волнами относится к числу наиболее популярных в лазерной физике. В работах [33-35] в модели (41) было обнаружено существование циклических режимов пульсаций, для которых фазы встречных волн бегут с различной скоростью, что приводит к расщеплению частот волн. Это явление было отнесено к числу «типичных нелинейных лазерных эффектов», хотя в работе [34] отмечались топологические различия соответствующих аттракторов. И действительно, расщепление частот допускает геометрическое толкование.

С точностью до динамической фазы, которая дает одинаковый вклад в набег фаз встречных волн, связь между движением изображающих точек системы в пространствах  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{N}$  определяется законом параллельного переноса (7), который имеет чисто геометрический смысл. Для перенормированного согласно (5) вектора состояния рассматриваемой системы  $|\phi\rangle = (|E_+| \exp(i\varphi_+(t)), |E_-| \exp(i\varphi_-(t)))$ , где  $\varphi_{\pm}$  - «геометрические» фазы встречных волн, закон параллельного переноса (7) можно записать в виде

$$\dot{\varphi}_+ = -( |E_-|^2 / |E_+|^2 ) \dot{\varphi}_-. \quad (43)$$

Отсюда видно, что фазы  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  всегда бегут в противоположных направлениях, причем фаза волны, имеющей меньшую амплитуду, бежит быстрее. Эти закономерности находятся в соответствии с тем, что для таких циклов в  $\mathcal{P}$ , радиальные проекции которых на единичную сферу охватывают один из полюсов, за период набегает разность фаз  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$ , равная  $+2\pi$  или  $-2\pi$  в зависимости от направления движения, а для циклов, не охватывающих один из полюсов, набег разности фаз за период равен нулю. Таким образом, наличие или отсутствие набег разности фаз встречных волн (а значит и расщепления частот) в данном циклическом режиме работы лазера связано с поведением «геометрических», то

есть нединамических компонент фаз, и определяется топологией соответствующего ему предельного цикла в пространстве лучей.

Интересно рассмотреть поведение ГФ вектора состояния для режимов, которым на единичной сфере в пространстве лучей соответствуют циклы, охватывающие один из полюсов. Для простоты рассмотрим однопетлевой цикл, целиком лежащий в северном или южном полушарии сферы. Выберем в качестве начальной точку пересечения цикла с нулевым меридианом, так что направления векторов  $E_+$  и  $E_-$  на комплексной плоскости совпадают. В соответствии с (43), если отбросить динамическую фазу, при движении по циклу фазы  $E_+$  и  $E_-$  бегут в противоположных направлениях с различными скоростями, так что при полном обходе цикла в  $\mathcal{P}$  векторы  $E_+$  и  $E_-$  на комплексной плоскости встретятся, имея уже другое направление, смещенное относительно начального на угол равный набегу фазы волны, имеющей большую амплитуду. Таким образом, набег ГФ равен набегу фазы волны, имеющей большую амплитуду, причем в соответствии с формулой (10) он равен половине площади области  $S$ , охватываемой циклом на единичной сфере. Для обратной волны набег фазы равен  $S/2+2\pi$ . Особым является случай  $S=2\pi$ , который может иметь место, если рассматриваемый цикл совпадает с экватором сферы или несколько раз пересекает его. В этом случае фазы  $E_+$  и  $E_-$  имеют равные набег за период, и ГФ неопределена.

По-видимому, к числу эффектов, связанных с проявлением ГФ, относится и обнаруженное в работе [39] явление динамического переключения направления генерации, сопровождающееся переключениями частот встречных волн (этот интересный вопрос еще не исследован). Вообще, кольцевой лазер со встречными волнами является удобной системой для экспериментального изучения описанных закономерностей фазовой динамики. Отметим, что коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в (41) зависят от отстроек  $\zeta_{\pm}$ , причем для невращающегося лазера и в случае точной настройки резонатора на частоту спектральной линии активной среды  $\zeta_{\pm}$  и мнимые части коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  обращаются в ноль. В этом случае согласно (4) скорость изменения динамической фазы тождественно равна нулю, так что, используя в качестве опорного монохроматический сигнал на частоте спектральной линии, можно в чистом виде выделить геометрическую фазу, набегавшую в том или ином режиме лазера. При этом одновременно можно было бы экспериментально построить траектории системы в пространстве лучей, измеряя интенсивности и разность фаз встречных волн.

Данный тип лазеров позволяет реализовать и адиабатические ГФ с помощью циклической перестройки управляющих параметров в пределах области устойчивости режима генерации волн с постоянными во времени интенсивностями [34]. Такому режиму соответствуют стационарные решения системы уравнений, описывающей движение изображающей точки в пространстве лучей, которую можно получить, дифференцируя (42) и используя (41). Эти уравнения имеют вид

$$\dot{u} = \Lambda u + \Delta \rho - 4\alpha u \rho, \quad (44)$$

$$\dot{q} = [\Lambda - 2(\alpha+\beta)\rho]q + 2\rho \exp(-i\chi), \quad (45)$$

где  $q = v + iw$ ,  $\Lambda = \eta_+ + \eta_-$ ,  $\Delta = \eta_+ - \eta_-$ ,  $\rho = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} = (|E_+|^2 + |E_-|^2)/2$ . Рассмотрим стационарные решения системы уравнений (44), (45), для которых

$$u = \rho \cos\theta = \Delta\rho / (4\alpha\rho - \Lambda), \quad (46)$$

$$q = |q| \exp(i\varphi) = 2\rho [\Lambda - 2(\alpha+\beta)\rho]^{-1} \exp(-i\chi), \quad (47)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  - полярный и азимутальный углы в сферической системе координат в  $\mathcal{P}$  - пространстве системы. Из выражения (46) можно видеть, что полярным углом  $\theta$

можно управлять, изменяя параметр  $\Delta$ . Последнее можно осуществить, увеличивая потери для одной моды и уменьшая их для другой. Как видно из (47), азимутальная координата изображающей точки на сфере определяется параметром  $\chi$ , который может меняться в широких пределах с помощью изменения положения источников потерь и внешних зеркал [23]. То, что разность фаз мод зависит от положения источника локализованных потерь и внешнего зеркала, можно легко понять, учитывая, что незатухающими являются колебания тех стоячих волн, узлы которых расположены на источниках потерь (внешнем зеркале). Изменяя положение источников, можно тем самым менять положение узлов, что эквивалентно изменению разности фаз бегущих волн, образующих стоячую волну.

Этого же эффекта можно достичь с помощью перемещаемого внешнего зеркала [33,40], которое связывает фазы волн как эффективный источник потерь, помещенный внутрь резонатора (рис. 5). Так как зеркало осуществляет перекачку энергии из одной волны в другую, то, меняя коэффициент отражения зеркала, можно управлять соотношением амплитуд мод. Поскольку перемещение зеркала на половину длины волны соответствует полному обходу параллели на единичной сфере, оно вызывает набег  $\Gamma\Phi$ , равный набегу фазы сильной волны и равный половине площади меньшей части сферы, отсекаемой параллелью. При этом знак  $\Gamma\Phi$  зависит от направления движения зеркала. Равномерное перемещение зеркала должно вызывать несимметричные сдвиги частот сильной и слабой волн, зависящие как от направления и скорости движения зеркала  $V$ , так и от отношения квадратов амплитуд волн  $\vartheta = |E_+|^2/|E_-|^2$ . Действительно, пусть зеркало медленно и равномерно со скоростью  $V$  движется навстречу слабой волне, причем положительное направление отсчета координаты  $z$  вдоль резонатора совпадает с направлением распространения сильной волны, то есть сильной волне в принятых обозначениях соответствует знак + (см. рис.1). Для определенности поставим в соответствие волне, бегущей в положительном направлении, северный полюс единичной сферы в  $\mathcal{P}$ . Тогда  $z$  меняется во времени по закону  $z=Vt$ , и, в соответствии с (47), изображающая точка на сфере движется с запада на восток по параллели, лежащей в северном полушарии. Этой параллели соответствует фиксированное значение  $\theta$ , которое связано с отношением квадратов амплитуд волн  $\vartheta$  соотношением  $\cos\theta = u/\rho = (\vartheta - 1)/(\vartheta + 1)$ . В момент времени  $T = \lambda/V$ , когда зеркало смещается на длину волны, изображающая точка завершает полный оборот. При этом площадь, охваченная контуром на сфере, равна  $2\pi(1 - \cos\theta) = 4\pi/(\vartheta + 1)$ , чему соответствует набег  $\Gamma\Phi \gamma = 2\pi/(\vartheta + 1)$ . Так как набег  $\Gamma\Phi$  равен набегу фазы сильной волны, движение зеркала вызывает сдвиг частоты сильной волны  $\nu_+ = \gamma/T$ . Подставляя сюда  $\gamma$  и  $T$ , получим относительное изменение частоты сильной волны

$$\nu_+/\nu = 1/(1+\vartheta)(V/c). \quad (48)$$

Выражение для относительного изменения частоты слабой волны можно получить, используя (43), откуда следует

$$\nu_-/\nu = -\vartheta\nu_+ = -\vartheta/(1+\vartheta)(V/c). \quad (49)$$

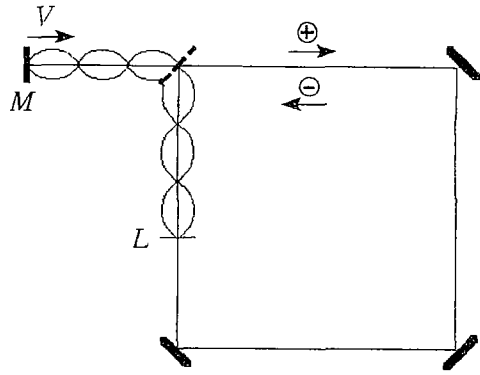


Рис. 5. Кольцевой резонатор с внешним зеркалом. Роль зеркала  $M$  аналогична роли источника потерь  $L$ , помещенного внутрь резонатора

Разность частот волн от  $\vartheta$  не зависит и определяется только скоростью движения зеркала:  $\nu_+ - \nu_- = kV$ . Поэтому возникающая при движении внешнего зеркала разность частот встречных волн лазера полностью соответствует сдвигу частоты в эффекте Доплера при отражении свободной волны от движущегося зеркала. Кардинальное отличие рассматриваемого эффекта от эффекта Доплера в свободном пространстве состоит в зависимости сдвигов частот встречных волн относительно их значений при неподвижном зеркале от соотношения квадратов амплитуд волн.

## 5. Геометрические фазы сжатых состояний света

Потребность в уточнении лазерных моделей и, прежде всего, в корректном учете флуктуаций приводит к необходимости отказа от полуклассического приближения, в котором поле световой волны описывается классическим образом (см., например, [24]). Простейшая схема перехода к квантовому описанию поля состоит в замене классических амплитуд операторами. Так, например, для одной стоячей волны свободного электромагнитного поля оператор напряженности электрического поля в представлении Гайзенберга можно записать в виде

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 1/2 \hat{\epsilon}(\mathbf{r}) [a \exp(-i\omega t) + a^+ \exp(i\omega t)], \quad (50)$$

где  $a$ ,  $a^+$  - операторы рождения и уничтожения фотона,  $\hat{\epsilon}$  - функция пространственной моды поля. В отличие от классических амплитуд, операторы  $a$  и  $a^+$  не коммутируют друг с другом, а удовлетворяют коммутационному соотношению  $[a, a^+] = a a^+ - a^+ a = 1$ . Главным следствием математического факта некоммутативности операторов являются соотношения неопределенностей, физический смысл которых состоит в существовании у динамических переменных фундаментальных флуктуаций, которые связаны с квантовой природой объекта (в данном случае электромагнитного поля) и не могут быть устранены путем стабилизации системы, исключения внешних шумовых воздействий и т. п. (см. [41]). Поэтому, в отличие от предыдущего раздела, мы принципиально вынуждены вводить в рассмотрение величины, характеризующие некоторым статистическим взбросом измеряемых на опыте значений. Для удобства дальнейшего изложения запишем соотношение неопределенностей не для самих операторов  $a$  и  $a^+$ , а для их комбинаций - так называемых квадратурных компонент, аналогичных координате и импульсу гармонического осциллятора

$$X = (a^+ + a)/2; \quad Y = i(a^+ - a)/2, \quad (51)$$

через которые оператор напряженности поля выражается как

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \hat{\epsilon}(\mathbf{r}) (X \cos \omega t + Y \sin \omega t). \quad (52)$$

Для этих величин коммутационное соотношение  $[X, Y] = i/2$  порождает соотношение неопределенностей

$$\delta X \delta Y \geq 1/4, \quad (53)$$

где  $\delta X = \{[(X - \langle X \rangle)^2]\}^{1/2}$  - неопределенность величины  $X$ ,  $\langle \dots \rangle$  - квантовое среднее. Последнее существенно зависит от состояния, в котором оказывается квантовая система в результате своей эволюции.

Соотношение (53), выполняющееся в любом квантовом состоянии, означает, что квантовый шум принципиально нельзя уничтожить. Однако, его можно минимизировать, выбрав состояние таким образом, чтобы в (53) выполнялось точное равенство. Состояния, обладающие этим свойством, называются когерентными состояниями (см., например, [42]); нетрудно показать,

что они являются собственными состояниями оператора уничтожения

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Такие состояния света могут быть реализованы при его генерации газовым лазером с идеальной амплитудной стабилизацией, работающим существенно выше порога [43]. В обычных когерентных состояниях дисперсии квадратурных компонент равны:  $\delta X = \delta Y = 1/2$  [42]. Дальнейшее уменьшение шума в одной из квадратурных компонент поля возможно только за счет его увеличения в другой. Состояния с  $\delta X < 1/2$  или  $\delta Y < 1/2$  называются сжатыми состояниями.

Сжатые состояния света в последнее время являются объектом интенсивных исследований (см., например, обзоры [43-47]), что вполне объяснимо как с теоретической (углубление представлений о взаимодействии объекта с измерительным прибором), так и с прикладной (поиск методов снижения фундаментальных шумов в оптических устройствах для обработки и передачи информации) точек зрения. Предмет данной части нашего обзора - ГФ сжатых состояний. Этот вопрос является частью более общей проблемы ГФ в квантовой оптике. Выбор именно сжатых состояний для рассмотрения вместе с полуклассическими нелинейными моделями лазерной физики связан с двумя причинами. Во-первых, сжатые состояния света возникают в результате существенно нелинейных процессов распространения и взаимодействия лазерных пучков в среде. Описание этих процессов традиционно проводится с помощью классических уравнений для медленных амплитуд связанных волн [44], а переход к квантовому описанию происходит путем замены амплитуд полей соответствующими операторами. Сам процесс сжатия может быть реализован и по отношению к классическим флуктуациям поля [43,44], причем формальные различия квантового и классического описания в простейших случаях минимальны. Во-вторых, сжатый свет является, по-видимому, наиболее физически значимым примером системы, состояние которой хотя и характеризуется (как и в примерах, рассмотренных выше) парой комплексных параметров, однако отображается не на сфере Пуанкаре, а на единичном гиперboloиде. Изображая движение системы в пространстве трех вещественных координат, получаем в этом случае вместо последовательности вращений последовательность преобразований Лоренца. Эволюции, реализующие группу Лоренца, могут встретиться и в других системах [48]. В этой связи сжатые состояния могут послужить по отношению к моделям лазерной физики и нелинейной динамики таким же источником плодотворных аналогий, каким оказались классические состояния поляризованного света.

Рассмотрим вначале описание процесса сжатия. Предметом нашего внимания являются дисперсии квадратур поля, вычисляемые как квантовые средние значения. Эволюция квантовых средних может быть описана либо как эволюция операторов, которые затем усредняются по фиксированному начальному состоянию (картина Гайзенберга), либо как эволюция самих векторов состояния при неизменных операторах (картина Шредингера). Пользуясь картиной Гайзенберга, представим себе, что в результате некоторого физического процесса оператор напряженности электрического поля световой волны, в начальный момент заданный соотношением (50), приобрел вид

$$E'(t, \mathbf{r}) = 1/2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) [b \exp(-i\omega t) + b^* \exp(i\omega t)], \quad (54)$$

где

$$b = \mu a + \nu a^*, \quad b^* = \mu^* a^* + \nu^* a. \quad (55)$$

Чтобы новые операторы  $b$ ,  $b^*$  удовлетворяли тому же коммутационному соотношению  $[b, b^*] = 1$ , что и  $a$ ,  $a^*$  (нетрудно видеть, что при этом условии они сохраняют смысл операторов уничтожения и рождения), необходимо

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1. \quad (56)$$

Предполагается, что физический процесс, ответственный за эволюцию операторов, обеспечивает выполнение этого соотношения. Примеры таких процессов будут приведены ниже.

В результате эволюции операторы квадратур преобразуются к виду

$$X' = (b^{++} + b)/2, \quad Y' = i(b^{+-} - b)/2. \quad (57)$$

Если поле первоначально находилось в когерентном состоянии  $\alpha$  с  $\delta X = \delta Y = 1/2$ , нетрудно показать, что в конечном состоянии

$$\delta X' = 1/2|\mu - \nu|, \quad \delta Y' = 1/2|\mu + \nu|. \quad (58)$$

Тот же результат можно получить в картине Шредингера, вычисляя дисперсии исходных  $X, Y$  как квантовые средние от квадратичных отклонений этих величин в собственных состояниях  $|\beta\rangle_{\mu, \nu}$  оператора  $b$ , которые, следовательно, являются сжатыми состояниями [45]. Минимум произведения неопределенностей достигается, когда  $\mu, \nu \rightarrow \infty$  и отношение  $\mu/\nu$  вещественно. В этом случае сжатое состояние стремится к исходному когерентному состоянию. Если  $\mu/\nu \rightarrow 1$ , сжатое состояние становится собственным для  $X$ , если  $\mu/\nu \rightarrow -1$  - собственным для  $Y$ .

В качестве примера реального физического процесса, приводящего к возникновению сжатого света, рассмотрим нелинейный процесс вырожденной параметрической генерации, при которой под действием мощной накачки с частотой  $2\omega$  в среде происходит усиление сигнальной волны на частоте  $\omega$ . При классическом рассмотрении в приближении плоских волн из волнового уравнения общего вида можно получить нелинейную систему связанных уравнений для комплексных амплитуд сигнальной волны  $A$  и накачки  $A_p$ , медленно меняющихся во времени [44]

$$\dot{A} = \gamma A^* A_p - A\delta, \quad \dot{A}_p = -\gamma A^2 - A_p \delta_p + f, \quad (59)$$

где  $\gamma$  - коэффициент нелинейной связи волн, а действительные и положительные  $\delta, \delta_p$  и  $f$  характеризуют потери в резонаторе и подкачку излучения извне. Простейшее решение (59) легко получается для начального этапа усиления, пока поле сигнальной волны мало и его влиянием на накачку можно пренебречь. Тогда при  $\delta, \delta_p = 0, f = 0$  первое из уравнений (59) можно решать отдельно, считая амплитуду накачки постоянной. При вырожденном параметрическом усилении в режиме стационарных бегущих волн справедливы аналогичные соображения с заменой времени на продольную координату  $z$  [44], которая в этом случае играет роль эволюционной переменной. Переходя от классических амплитуд к операторам, получаем уравнения, связывающие  $a$  и  $a^+$

$$da/dz = \beta a^+, \quad da^+/dz = \beta^* a, \quad (60)$$

где  $\beta \equiv \Gamma e^{i\varphi}$  - произведение коэффициента нелинейной связи на амплитуду накачки. Решение этих уравнений

$$a(z) = a(0) \operatorname{ch} \Gamma z + a^+(0) \operatorname{sh} \Gamma z e^{i\varphi}, \quad (61)$$

очевидно, описывает преобразование типа (55), причем выполнение (56) вытекает непосредственно из уравнений движения.

Поискам источников поля излучения в сжатом состоянии посвящено много теоретических и ряд экспериментальных работ. Показано, что для получения сжатых состояний различных типов можно использовать практически весь спектр нелинейных оптических явлений: двухфотонную генерацию, параметрическое усиление [49,50], генерацию гармоник [51], параметрическую генерацию в резонаторе [52], лазерную генерацию на свободных электронах [53-55],



комбинационное и гиперкомбинационное рассеяние [56], четырехволновое смешение [57-62], фазовую самомодуляцию [63]. Во всех этих явлениях преобразования операторов поля типа (55) с условиями типа (56) вытекают непосредственно из уравнений движения.

Для обсуждения вопроса о проявлениях ГФ, связанных со сжатым светом, необходимо напомнить основные факты, касающиеся математического описания сжатых состояний.

Ввиду (56) комплексные параметры, определяющие сжатое состояние, можно представить в виде

$$\mu = \text{ch}(\tau/2) \exp(i\Phi), \quad \nu = -\text{sh}(\tau/2) \exp(i\varphi) \exp(i\Phi), \quad (62)$$

где  $\exp(i\Phi)$  - общий фазовый множитель, не влияющий на сжатие, как хорошо видно из примеров, рассмотренных выше. Для изображения физически различных состояний сжатия можно ввести вектор с тремя вещественными координатами в трехмерном евклидовом пространстве

$$\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_2) = (\text{ch}\tau, \text{sh}\tau \cos\varphi, \text{sh}\tau \sin\varphi). \quad (63)$$

Конец вектора  $\mathbf{n}$  лежит на единичном гиперboloиде вращения

$$\mathbf{n}^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 = 1, \quad (64)$$

причем для однозначности отображения достаточно одной половины гиперboloида, например, с  $n_0 > 0$ . Переменные  $\tau$  и  $\varphi$  имеют очевидный геометрический смысл:  $\varphi$  есть азимутальный угол, а  $\tau$  есть удвоенная площадь гиперболического треугольника, образованного вектором  $\mathbf{n}$ , осью  $Ox_0$  и соответствующим сечением верхней половины гиперboloида.

Изменение операторов поля при сжатии (55) можно представить как результат унитарного преобразования [45]

$$b = S(\xi) a S^+(\xi), \quad (65)$$

где

$$S(\xi) = \exp(\xi K_+ - \xi^* K_-), \quad (66)$$

$\xi = \tau/2 \exp(-i\varphi)$ , а операторы  $K_{\pm}$  для простейшего случая одной оптической моды могут быть выражены через операторы рождения и уничтожения как

$$K_+ = (a^+ a^+)/2, \quad K_- = (a a)/2. \quad (67)$$

Можно непосредственно убедиться, используя определения (66), (67) и известные свойства операторных экспонент (см., например, [64]), что из (65) действительно вытекает преобразование (55) с коэффициентами (62). Из  $[a, a^+] = 1$  следует, что операторы  $K_{\pm}$  и

$$K_0 = (a^+ a + a a^+)/4 \quad (68)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_-, K_+] = 2K_0, \quad (69)$$

а оператор  $\mathcal{K}_2 \equiv K_0^2 - K_1^2 - K_2^2$  ( $K_{\pm} = K_1 \pm iK_2$ ) коммутирует с  $K_0, K_{\pm}$ .

Рассмотрим процесс преобразования поля как процесс эволюции. Преобразованию операторов (65) в картине Гайзенберга соответствует в картине Шредингера преобразование исходного состояния (волновой функции) поля  $|\psi_0\rangle$  в сжатое состояние

$$|\mathbf{n}\rangle \equiv |\xi\rangle = S(\xi) |\psi_0\rangle, \quad (70)$$

$S(\xi)$  называется оператором сжатия. Его можно рассматривать как оператор

эволюции, определяемый некоторым гамильтонианом  $H$ :  $S = \exp(-i/\hbar Ht)$ , тогда из основного или любого когерентного состояния, взятого в качестве начального, может получиться сжатое состояние при условии, что  $H$  содержит квадратичные слагаемые, пропорциональные  $aa$ ,  $a+a^+$  [45]. Таким гамильтонианом, в частности, описывается процесс вырожденной параметрической генерации [44,45,65].

Процесс сжатия, таким образом, можно рассматривать, с одной стороны, как преобразование операторов поля, и, с другой стороны, как изменение вектора состояния поля. Последний оказывается зависящим от классических параметров, которые можно связать с координатами точки на единичном гиперboloиде. Пусть оптическая система, через которую проходит свет, изменяет эти параметры так, что изображающая точка совершает обход замкнутого контура на единичном гиперboloиде. В соответствии с теорией [1,21] естественно ожидать у таких состояний появления геометрической фазы, которую можно вычислить непосредственно через производную от вектора состояния вдоль контура эволюции. Такой подход был реализован в [65] для сжатых состояний несколько более общего вида, по отношению к которым рассмотренные нами состояния представляют собой частный случай. Такой же подход использовался в работах [66-68] для вычисления геометрических фаз другого класса обобщенных когерентных состояний (ОКС) - поляризационных ОКС, введенных и изученных в [69-71].

Для вычисления геометрических фаз сжатых состояний, следуя [65], прежде всего конкретизируем исходное состояние  $|\psi_0\rangle$ . Рассмотрим состояния, являющиеся собственными для полного набора коммутирующих наблюдаемых  $K_2, K_0$ .

$$K_0|k,\mu\rangle = \mu|k,\mu\rangle, \quad K_2|k,\mu\rangle = k(k-1)|k,\mu\rangle. \quad (71)$$

В качестве начального состояния выберем  $|k,k\rangle$ , что порождает обобщенные когерентные состояния, минимизирующие произведение неопределенностей, и в этом смысле «наиболее близкие к классическим» [42]. Рассмотрим сжатое состояние  $|\xi\rangle = S(\xi)|k,k\rangle$  с параметром  $\xi(t)$ , циклически зависящим от времени,  $\xi(0) = \xi(T)$ . По определению фаза Берри равна

$$\gamma(C) = i \oint_C \langle \xi | d/dt | \xi \rangle dt. \quad (72)$$

Явное вычисление этого интеграла с использованием свойств операторных экспонент и собственных функций  $|k,k\rangle$  [65] приводит в конце концов к следующему результату:

$$\gamma(C) = -2k \int_0^T \text{sh}^2(\tau/2) \dot{\varphi} dt = -kQ, \quad (73)$$

где  $T$  - время обхода замкнутого контура  $C$ . Величина  $Q$  представляет собой площадь части поверхности единичного гиперboloида, ограниченной контуром  $C$ , который описывает изображающий вектор  $\mathbf{n}$  в процессе циклической эволюции. Это аналог телесного угла, с которым связана ГФ состояний, параметризуемых на сфере [8,72,73], в частности, поляризационных ОКС [69]. Для конкретного вида гамильтониана, обеспечивающего эволюцию сжатого состояния, в простейших случаях удалось связать параметры контура  $C$  с физическими параметрами процесса сжатия, например, с частотой и интенсивностью накачки при вырожденной параметрической генерации [65].

В этих рассуждениях безразлично, в силу каких причин параметры, входящие в вектор состояния, меняются именно так, а не иначе. Этим еще раз подчеркивается тот факт, что возникающая фаза является именно геометрической, то есть не связана с физической причиной изменения состояния системы, а отражает лишь свойства самого пространства этих состояний. Джордан [74] рассмотрел циклическую эволюцию системы как результат

последовательного действия операторов бесконечно малого сжатия на исходное состояние, являющееся собственным состоянием оператора  $K_0$ . Было показано, что в результате последовательности малых сжатий, возвращающей систему в исходное состояние, возникает добавочная фаза, в точности равная формально вычисленной фазе Берри.

Вычисленная ГФ квантовых состояний поля содержит множитель  $k$ , являющийся собственным значением оператора  $K_0$ . В рассмотренном выше случае этот оператор имеет простой физический смысл:  $K_0=(a+a^\dagger)/2$ , где  $a$ -оператор числа фотонов с собственным значением  $N$ . В частности, для вакуума  $N=0$  и  $k=1/4$ . Присутствие множителя  $k$  в фазе, таким образом, означает ее пропорциональность числу фотонов, то есть интенсивности рассматриваемой волны. Очевидно, что состояние сжатия, как и состояние поляризации света, не зависят от его интенсивности. На зависимость ГФ многофотонных состояний, вычисленной при помощи стандартного определения, от числа фотонов обратил внимание Клышко [12,75], сделавший вывод о некорректности применения данного определения к векторам многофотонных состояний квантового света. С другой стороны, если рассматривать фазовый множитель, приобретаемый не вектором состояния, а оператором  $a$ , связанным с амплитудой электрического поля, как, например, сделали Чао и Джордан [76], то «лишний» множитель  $k$  у фазы не появляется, и остается лишь фактор, связанный с площадью на гиперboloиде, который авторы [76] называют «существенной» частью ГФ. Согласно [76], последовательность операторов сжатия, обеспечивающая возврат изображающей точки в исходное состояние  $(0,0,1)$ , сводится к действию оператора  $\exp(-i\phi K_0)$ , где фаза  $\phi$  при дальнейшем расчете оказывается связанной с площадью на гиперboloиде. В результате

$$\exp(-i\phi K_0)|n\rangle = \exp[i(\phi/2)(n+1/2)]|n\rangle, \quad (74)$$

но при этом

$$\exp(-i\phi K_0)a\exp(-i\phi K_0) = \exp[i(\phi/2)]a.$$

Вопрос о соотношении фаз, приобретаемых вектором состояния и операторами поля, возникал и в наших предыдущих работах [66-68] при сравнении ГФ поляризационных ОКС [69-71] с известными в классической поляризационной оптике теоретическими и экспериментальными результатами [8,72,73]. Агарвал и Саймон [77] показали, что при обычном измерении интенсивности суммы двух волн на выходе интерферометра регистрируется не разность фаз векторов состояния поля, а разность фаз, приобретаемых в разных плечах интерферометра операторами амплитуды поля. Как заключают авторы [77] на основании ряда рассмотренных примеров, фаза оператора поля может быть отождествлена с классическим углом Ханни [78]. Связь этого угла с фазой Берри соответствующих квантовых состояний [78-80] получается в результате разложения фазы Берри по степеням  $\hbar$  в квазиклассическом пределе. Если отбросить члены порядка  $\hbar^2$  и выше, угол Ханни  $h_j$ , соответствующий  $j$ -й классической степени свободы, получается равным

$$h_j = -\partial\gamma_{nj}/\partial n_j, \quad (75)$$

где  $\gamma_{nj}$  - геометрическая фаза состояния с набором квантовых чисел  $\{n_j\}$ , связанных условием Бора - Зоммерфельда  $I_j=(n_j+\mu_j)\hbar$  с соответствующими классическими переменными действия [80]. Для состояний с определенным числом частиц, например, рассмотренных выше  $|n\rangle$ ,  $I_j$  является классическим интегралом движения, равным как раз «лишнему» множителю  $k$ .

Обсудим возможность экспериментального наблюдения ГФ, обусловленной сжатием. С этой целью Чао и Джордан [76] предложили схему микроволнового интерферометра, в каждом плече которого находится по два вырожденных параметрических усилителя. В каждом плече реализуется перевод излучения из

одного и того же начального состояния, изображаемого точкой  $(0,0,1)$  на единичном гиперboloиде, в одно и то же конечное состояние, изображаемое точкой  $-\text{sh}(r)$ ,  $\text{sh}(r)$ ,  $\text{ch}(r)\text{ch}(s)$ , но по разным путям, в результате чего операторы поля приобретают разность фаз, которая может быть зарегистрирована по сдвигу интерференционных полос. Указанные пути образуют на единичном гиперboloиде замкнутый контур, проекция которого на плоскость  $(n_1, n_2)$  представляет собой прямоугольник. В этом случае, как замечено в [76], рассчитанная фаза оказывается не равной площади, вырезаемой контуром эволюции на гиперboloиде. Этому, на первый взгляд, довольно неожиданному результату авторы [76] не дают четкого объяснения. Причина же заключается в следующем. При прохождении света через дискретные оптические элементы, когда состояние меняется скачком, «правильный» контур для расчета ГФ должен состоять из отрезков геодезических линий, соединяющих дискретные точки, изображающие промежуточные состояния. Это «правило геодезических» хорошо известно для параметризуемых на сфере Пуанкаре задач поляризационной оптики [8,72,73] и обсуждалось нами в предыдущем разделе. Очевидно, части контура, проекция которых на плоскость  $(n_1, n_2)$  являются отрезками прямых, не пересекающих ось симметрии гиперboloида, не являются геодезическими, на что, в частности, указано в [48]. При правильном построении контура из отрезков геодезических противоречие устраняется. Несмотря на принципиальную простоту предложенный Чао и Джорданом эксперимент довольно сложен технически и пока не реализован на практике.

Имея в виду поиск возможных приложений теории ГФ в динамике систем, описываемых классическим образом, мы должны уделить особое внимание классическому аналогу эксперимента Чао и Джордана, который, в отличие от своего квантового прототипа, был успешно реализован в уже упоминавшейся выше работе Китано и Ябузаки [48] с помощью простой поляризационной установки. Предварительно отметим, что для геометрических свойств пространства состояний системы важны именно соотношения (69) (в терминах теории симметрии ими определяются генераторы группы двумерных преобразований Лоренца  $SU(1,1)$  [42,81]), а не явный вид операторов  $K_{0,\pm}$ , который может и отличаться от (67), (68). Например, если рассмотреть сжатие при невырожденном параметрическом взаимодействии двух мод [44,65] эти операторы будут содержать билинейные комбинации операторов рождения и уничтожения, относящихся к разным модам. Китано и Ябузаки [48] показали теоретически, что действие линейного поляризатора (поляроида) на классический естественный или частично поляризованный свет описывается как сжатие. Аналог параметра сжатия  $\tau$  при этом определяется дихроизмом поляризатора, то есть отношением коэффициентов пропускания для волн, поляризованных вдоль и поперек его главной оси.  $K_\alpha$  были выбраны пропорциональными матрицам Паули

$$K_1 = i\sigma_z/2, \quad K_2 = i\sigma_y/2, \quad K_0 = \sigma_x/2, \quad (76)$$

тогда оператор  $S(\xi)$  представляет матрицу преобразования пары поперечных компонент классического электрического поля световой волны (матрицу Джонса) при прохождении через систему линейных поляризаторов и вращателей, вызывающих поворот плоскости поляризации. В результате теория поляризационных преобразований классического света оказывается формально аналогичной квантовой теории сжатия. Единственным серьезным отличием, которое, впрочем, оказывается несущественным для ГФ, является неэрмитовость операторов (76) и, следовательно, неунитарность оператора  $S(\xi)$ . Авторы [48] используют установленную аналогию для физического моделирования эксперимента по схеме, предложенной в [76]. Последовательность четырех линейных поляризаторов, ось каждого из которых повернута на угол  $\pi/4$  относительно оси предыдущего, а параметры сжатия плавно регулируются, описывается оператором

$$T = \exp(irK_2) \exp(isK_1) \exp(-isK_2) \exp(-irK_1), \quad (77)$$

который при  $\text{thr}=\text{shs}$  задает циклическую эволюцию и сводится к виду  $T = \exp(-i\phi K_0)$ , где  $\phi$  - набег фазы поля. Таким образом, четыре поляризатора оказываются эквивалентными одному вращателю, поворачивающему плоскость поляризации на угол  $\phi/2$ . Этот угол измерялся экспериментально, а затем сравнивался с результатом расчета  $\phi$  как суммы геометрической и динамической фаз. Результаты находятся в хорошем согласии.

Классическая модель [48] служит хорошим примером аналогии и позволяет надеяться на обнаружение в нелинейной динамике других систем как классических, так и квантовых, демонстрирующих ГФ при эволюции, описываемой последовательностью преобразований Лоренца.

### Заключение

Проблема ГФ по своей сути в какой-то мере отражает общее современное состояние фундаментальной физики, для которой характерно тесное сращивание концепций как непосредственно основанных на экспериментальных фактах, так и порожденных попытками осмысления этих фактов, и включения их в единую формально-логическую схему. Собственно говоря, само понятие фазы является в какой-то мере «вторичным», основанным на модельных представлениях о системе. Возможность получения прикладных результатов от применения концепции ГФ демонстрируют описанные в 3-м и 4-м разделах эффекты, связанные с проявлением ГФ в динамике лазеров. Заметим, что «радиус действия» теории ГФ не ограничен задачами шредингеровской квантовой механики, лазерной физики или электроники, где комплексные векторы или функции пространственных переменных являются привычными средствами описания состояния системы. Фактически, он совпадает с «радиусом действия» методов комплексной математики, являющихся мощным универсальным средством исследования динамических систем [83]. Например, в классической механике это симплектические методы [83], основой которых является парность канонических переменных  $\{p_k, q_k\}$ , приводящая к четной размерности фазового пространства. При этом используются комплексные переменные  $a_k = p_k + iq_k$ , для которых, как показано в разделе 1, можно определить ГФ.

Исследование ГФ в нелинейных динамических системах только начинается и, на взгляд авторов, представляет особый интерес, так как только нелинейные системы способны «жить своей собственной жизнью», в отличие от линейных, в которых динамика возникает лишь под действием внешнего окружения. Естественно, что на этом пути стоит немало нерешенных проблем. Одна из основных - это возможность выделения ГФ в чистом виде, то есть устранение динамической фазы. Если понимать эту процедуру как приведение динамической системы к виду, удовлетворяющему закону параллельного переноса (5), то проблема сводится к выяснению физического смысла этого закона для произвольной динамической системы. В то же время следует отметить, что наблюдение ГФ может быть и косвенным, как, например, по резонансному скачку среднего наклона фазы при однонаправленной генерации или по зависящим от амплитуд сдвигам частот встречных волн в кольцевом лазере. Среди интересных проблем собственно лазерной динамики выделим задачу поиска проявлений ГФ в свойствах эволюционирующих пространственных распределений лазерных полей.

Авторы благодарны В.П.Карасеву за сотрудничество и помощь, а также А.В.Масалову и А.В.Горохову за стимулирующие дискуссии и ценные замечания.

*Данная работа выполнена при финансовой поддержке Госкомвуза РФ (грант 95-0-2.1-59).*

## Библиографический список

1. *Berry M.V.* Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // *Proc. Roy. Soc. A. London.* 1984. Vol.392. P.45.
2. *Born M. and Fock V.* Beweis des Adiabatenatzes // *Zs. Phys.* 1928. Bd 51. S. 165.
3. *Bitter T., Dubbers D.* Manifestation of Berry's topological phase on neutron spin rotation // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol.59. P.251.
4. *Zwanziger J.V., Rucker S.P., and Chingas G.C.* Measuring the geometric component of the transition probability in a two-level system // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol.43. P.3232.
5. *Suter D., Muller K.T., and Pines A.* Study of the Aharonov-Anandan Quantum Phase by NMR interferometry // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol.60. P.1218.
6. *Simon B.* Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's Phase // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 51. P.2167.
7. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970.
8. *Bhandari R., Samuel J.* Observation of Topological Phase by use of a laser interferometer // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol.60. P. 1211; *Bhandari R.* Evolution of light beams in polarization and direction // *Physica B.* 1991. Vol. 175. P.111.
9. *Markovski B.L. and Vinitzky S.I.* eds Topological Phases in Quantum Theory. Singapore: World Scientific, 1989.
10. *Shapere A. and Wilczek F.* eds Geometric Phases in Physics. Singapore: World Scientific, 1989.
11. *Виницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П.* Топологические фазы в квантовой механике и поляризационной оптике // *УФН.* 1990. Т.160, вып. 6. С.1.
12. *Кльшико Д.Н.* Геометрическая фаза Берри в колебательных процессах // *УФН.* 1993. Т.163, № 11. С.1.
13. *Ning C.Z. and Haken H.* The geometric phase in nonlinear dissipative systems // *Mod. Phys. Lett. B.* 1992. Vol.6. P.1541.
14. *Aharonov Y. and Anandan J.* Phase change during a cyclic quantum evolution // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol.58. P.1593.
15. *Garrison J.C. and Chiao R.Y.* Geometrical phase from global gauge invariance of nonlinear classical field theories // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol.60. P.165.
16. *Ning S.Z. and Haken H.* Geometrical phase and amplitude accumulations in dissipative systems with cyclic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol.68. P.2109.
17. *Toronov V.Yu. and Derbov V.L.* Geometric phases in lasers and liquid flows // *Phys. Rev. A.* 1994. Vol.49. P.1392.
18. *Чайка М.П.* Интерференция вырожденных атомных состояний. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 192 с.
19. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко Л.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1984.
20. *Pancharatnam S.* // *Proc. Ind. Acad. Sci. A.* 1956. Vol.44. P.247.
21. *Samuel J. and Bhandari R.* General setting for Berry's phase // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 60. P.2339.
22. *Торонов В.Ю., Дербов В.Л.* Геометрические фазы в кольцевом лазере // в печати.
23. *Sargent M. III, Scully M.O., and Lamb W.E.* // *Laser Physics.* London: Addison-Wesley, 1974.
24. *Haken H.* Laser Theory, Encyclopedia of Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1970. Vol. XXV/2c.
25. *Weiss C.O., Abraham N.B. and Hubner U.* Homoclinic and heteroclinic chaos in a single-mode laser // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61. P.1587.
26. *Ning C.Z. and Haken H.* Detuned lasers and the complex Lorenz equations: subcritical and supercritical Hopf bifurcations // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.41. P.3826.
27. *Владимиров А.Г., Торонов В.Ю., Дербов В.Л.* О комплексной модели Лоренца // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т. 3, № 6. С. 51.

28. Roldan E., de Valcarcel G.J., Vilaseca R., and Mandel P. Single-mode laser phase dynamics // Phys. Rev. A. 1993. Vol.48. P.591.
29. Fowler A.C., Gibbon J.D. and McGuinness M.J. The complex Lorenz equations // Physica D. 1982. Vol.4. P.139.; Gibbon J.D. and McGuinness M.J. The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers // Physica D. 1982. Vol.5. P.108
30. Ning C.Z. and Haken H. Quaziperiodicity involving twin oscillations in the complex Lorenz equations describing a detuned laser // Z. Phys. B. 1990. Vol.81. P.457.
31. Vilaseca R., de Valcarcel G.J., and Roldan E. Physical interpretation of laser phase dynamics // Phys. Rev. A. 1990. Vol.41. P.5269.
32. Toronov V.Yu. and Derbov V.L. Geometric phase effects in laser dynamics // Phys. Rev. A. 1994. Vol.50. P.878.
33. Chyba T.H. Phase-jump instability in the bidirectional ring laser with backscattering // Phys. Rev. A. 1989. Vol.40. P.6327.
34. Skryabin D.V., Vladimirov A.D. and Radin A.M. Spontaneous phase symmetry breaking due to cavity detuning in a class-A bidirectional ring laser // Opt. Commun. 1995. Vol.116. P.109.
35. Etrich C., Mandel P., Neelen R.C., Spreuw R.J.C., and Woerdman J.P. Dynamics of a ring-laser gyroscope with backscattering // Phys. Rev. A. 1992. Vol.46. P.525.
36. Hoffer L.M. and Abraham N.B. Analysis of a coherent model for a homogeneously broadened bidirectional ring laser // Optics. Comm. 1990. Vol.74. P.261.
37. Abraham N.B., Weiss C.O. Dynamical Frequency Shifts and Intensity Pulsations in an FIR Bidirectional Ring Laser // Opt. Comm. 1988. Vol.66. P.437.
38. Khandokhin P.A. and Khanin Ya.I. Instabilities in a solid-state ring laser // J. Opt. Soc. Am. B. 1985. Vol.2, № 1. P.226.
39. Корюкин И.В., Хандохин П.А., Ханин Я.И. Частотная динамика двунаправленного кольцевого лазера с невзаимным резонатором // Квантовая электроника. 1990. Т.17, № 8. С.978.
40. Климонтович Ю.Л., Курятов В.Н., Ланда П.С. О синхронизации волн в газовом лазере с кольцевым резонатором // ЖЭТФ. 1966. Т.51, вып.1(7). С.3.
41. Мессиа А. Квантовая механика, Т.2. М.: Наука, 1979, 584 с.
42. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
43. Тайи М.К., Салэ Б.Э.А. Сжатые состояния света // Quan. Opt. 1989. Vol.1. P.153; УФН. 1991. Т.161, № 4. С.101.
44. Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С. Фазовая бистабильность и мультистабильность в сосредоточенных и распределенных системах: классический и квантовый аспекты // Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А.Ахманова и М.А.Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 83.
45. Смирнов Д.Ф., Трошин А.С. Новые явления в квантовой оптике: антигруппировка и субпуассоновская статистика фотонов, сжатые состояния // УФН. 1987. Т.153, вып.2. С.223.
46. Быков В.П. Сжатый свет и неклассические движения в механике // УФН. 1993. Т.163, № 9. С. 89.
47. Клышко Д.Н., Масалов А.В. Фотонный шум: наблюдение, подавление, интерпретация // УФН. 1995. Т.165, № 11. С.1249.
48. Kitano M. and Yabuzaki T. Observation of Lorentz-group Berry phases in polarization optics // Phys. Lett. 1989. Vol.142, № 6,7. P.321.
49. Голубев Ю.М. Статистика электромагнитного поля, параметрически взаимодействующего со средой // Оптика и спектроскопия. 1979. Т.46, вып. 2. С.398.
50. Wodkiewicz K., Zubairy M.S. Effect of laser fluctuations on squeezed states in a degenerate parametric amplifier // Phys. Rev. A. 1983. Vol.27. P.2003.
51. Горбачев В.Н., Занадворов П.Н. Квантовая статистика процесса генерации второй гармоники // Оптика и спектроскопия. 1980. Т. 49. С.600.
52. Milburn G. and Walls D.F. Production of squeezed states in a degenerate parametric amplifier // Opt. Comm. 1981. Vol.39, № 6. P.401.

53. *Becker W., Scully M.O. and Zubairy M.S.* Generation of a Squeezed Coherent States via a Free-Electron Laser // *Phys. Rev. Lett.* Vol.48, № 7. P.475.
54. *Sibilia G., Bertolotti M., Peurinov'a V., Peurina J., Lukus A.* Photon antibunching effect and statistical properties of single-mode emission in free-electron lasers // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 28, № 1. P.328.
55. *Rai Suranjana and Chopra S.* Photon statistics and squeezing properties of a free-electron laser // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol.30, № 4. P.2104.
56. *Tänzler W., and Schütte F.J.* Antibunching in multiphoton processes // *Opt. Comm.* 1981. Vol. 37, № 6. P.447.
57. *Slusher R.E., Yurke B. and Valley J.R.* Experimental Study of Squeezed States Using Four-Wave Mixing in a Cavity Configuration// *J. Opt. Soc. Am. Ser.B.* 1984. Vol.1, № 3. P.525.
58. *Reid M.D., Walls D.F.* Generation of squeezed states via degenerate four-wave mixing // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol.31. № 3. P.1622.
59. *Slusher R.E., Yurke B., Grandgier P., La Porta A., Walls D.F., Reid M.* Squeezed-light generation by four-wave mixing near an atomic resonance // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1987. Vol.4, № 10. P.1453.
60. *Milburg G.J., Walls D.F., Levenson M.D.* Quantum phase fluctuations and squeezing in degenerate four-wave mixing // *J. Opt. Soc. Am. Ser. B.* 1984. Vol.1, № 3. P.390.
61. *Levenson M.D., Shelby R.M., Aspect A., Reid M., and Walls D.F.* Generation and detection of squeezed states of light by nongenerate four-wave mixing in an optic fiber // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol.32, № 3. P.1550.
62. *Slusher R.E., Hollberg L.W., Yurke B., Mertz J.C., Valley J.F.* Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave-Mixing in an Optical Cavity // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol.55, № 22. P. 2409.
63. *Королькова Н.В., Чиркин А.С.* Источник неклассического излучения с неклассическими свойствами // *Квантовая электроника.* 1994. Т.21, № 12. С.1109; Удвоение частоты когерентного излучения в средах с квадратичной и кубичной оптическими нелинейностями; приближение заданного числа фотонов // *Оптика и спектроскопия.* 1993. Т.74, вып.5. С. 908.
64. *Люиселл У.* Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972. 398 с.
65. *Дамаскинский Е.В.* Вычисление фазы Берри в сжатых состояниях // *Записки научных семинаров ЛОМИ. Сер. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.* 1989. Т.169, № 8. С.51.
66. *Karassiov V.P., Derbov V.L. and Vinitisky S.I.* Polarization coherent states in quantum optics: quasiprobability functions and geometric phases // *Proc. SPIE.* 1993. Vol.2098. P.164.
67. *Karassiov V.P., Derbov V.L., Priyutova O.M., Vinitisky S.I.* Geometric Phases of the Generalized Polarization Coherent States in Quantum Optics. VII International Conference on Symmetry methods in physics. Abstracts. Dubna, 1995. P.27.
68. *Karassiov V.P.* Polarization structure of quantum light: a new insight. 2: Generalized coherent states, squeezing and geometric phases. E-prnt Arcvе QUANT PH/9503011, 1995.
69. *Karassiov V.P.* Polarization structure of quantum light: a new insight. 1: General outlook // *J.Phys. A.* 1993. Vol.26. P.4345.
70. *Карасев В.П., Масалов А.В.* Состояния неполяризованного света в квантовой оптике // *Оптика и спектроскопия.* 1993. Т.74, вып.5. С. 928.
71. *Karassiov V.P.* Polarization squeezing and new states of light in quantum optics // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol.190. P.387.
72. *Berry M.* // *J. Mod. Opt.* 1987. V.34. P.1401.
73. *Chyba T.H., Wang L.J., Mandel L., and Simon R.* // *Opt.Lett.* 1988. Vol. 13. P.562.
74. *Jordan T.F.* Berry phase and unitary transformation // *J.Math.Phys.* 1988. Vol.29, № 9. P.2042.
75. *Klyshko D.N.* Berry phase in multiphoton experiments // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol.140, № 1,2. P.19; si ibid. 1992. Vol.163. P.349.



76. Chiao R.Y., Jordan T.F. Lorentz-group Berry phases in squeezed light // Phys. Lett. A. 1988. Vol.132, № 2,3. P.77.
77. Agarwal G.S., Simon R. // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42, № 11. P. 6924.
78. Hannay J. // J. Phys. A: Math. Gen. 1985. V.18. P.221; sl Berry M.V. // J. Phys. A: Math. Gen. 1985. V.18. P.15.
79. Maamache M., Provost J.-P. and Vallée // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. Vol. 24. P.685.
80. Giavarini G., Gozzi E., Rohrllich D. and Thacker W.D. // Phys. Rev. D. 1989. Vol. 39, № 10. P.3007.
81. Желобенко Д.П., Штерн А.И. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
82. Ott E., Grebogi C., and Yorke J.A. Controlling Chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64, № 11. P.1196.
83. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, М.: Наука, 1974; Теория катастроф, М.: Наука, 1990.
- Abraham R., Marsden J.E. Foundations of mechanics, 2nd ed., Reading, MA: Benjamin, 1978

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 14.06.96  
после переработки 2.12.96

## GEOMETRIC PHASES IN THE DYNAMICS OF NONLINEAR OPTICAL SYSTEMS

V.Yu. Toronov, V. L. Derbov, O.M. Priyutova

Fundamentals of geometric phase theory in general-type dynamical systems and some particular results on geometric phases in semiclassical and quantum models of laser physics and nonlinear optics are reviewed. The emphasis is made on the physical meaning rather than on formal mathematical background to make the presentation clear for a wide circle of researchers in the field of nonlinear dynamics.



*Торонов Владислав Юрьевич* - 1963 года рождения, окончил Московский инженерно-физический институт (1986). Защитил кандидатскую диссертацию по исследованию конечномерных моделей динамики лазеров (1992). Доцент физического факультета Саратовского государственного университета. Круг интересов - самоорганизация, хаос, квантовая динамика, геометрические свойства динамических систем.



*Дербов Владимир Леонардович* - 1949 года рождения, окончил физический факультет СГУ (1972). После окончания аспирантуры работал в НИИ механики и физики при СГУ. Защитил кандидатскую диссертацию по теории взаимодействия интенсивных лазерных полей с многоуровневыми релаксирующими системами. С 1983 года - доцент кафедры теоретической физики, а с 1985 года по настоящее время - доцент кафедры оптики СГУ. Автор более 70 теоретических работ в области нелинейной лазерной спектроскопии молекул, нелинейной динамики распространения лазерных пучков и импульсов. В последние годы интенсивно исследует проблему геометрических фаз в лазерных и оптических динамических системах.



*Приотова Ольга Михайловна* - родилась в 1970 году. Окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского в 1992 году. После окончания аспирантуры (1996) работает научным сотрудником Института проблем точной механики и управления РАН. Область научных интересов - нелинейная оптика, дифференциальная геометрия. Имеет 10 научных публикаций.



Редакционная коллегия обращается к заинтересованным читателям нашего журнала с предложением принять участие в формировании содержания *специального выпуска «Нелинейная динамика в образовании»*. Предполагается публикация статей об идеологии преподавания нелинейной динамики, программы уникальных курсов и спецкурсов, подборок задач или отдельных задач и других материалов, которые представляются интересными и соответствующими теме.

**Срок присылки до 1 июня 1997 года.**

Предъявленные материалы должны быть оформлены согласно правилам оформления рукописей для нашего журнала.

Наш адрес: 410026 Саратов, Астраханская, 83, СГУ,  
редакция журнала «Изв. вузов. ПНД».

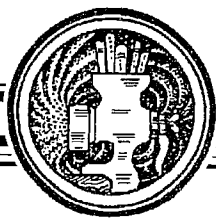
Оперативная связь по телефону: (845-2)51-42-98

по электронной почте: and@college.saratov.su

Редактор выпуска  
чл.-корр. РАН, профессор

*Д.И. Трубецков*





## ДИНАМИКА ПОПЕРЕЧНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ В ЛАЗЕРАХ

*Л.А. Мельников, А.И. Конюхов, М.В. Рябина*

Представлен краткий обзор работ по изучению поперечной и поперечно поляризованной структуры поля излучения в лазерах. Представлены теоретические и расчетные модели, используемые для исследования динамики поперечной поляризованной структуры в лазерах с резонаторами с вращением изображения и учитывающие структуру магнитных подуровней рабочего перехода. Для лазера класса А с поляризационно-изотропным резонатором и неограниченным числом поперечных мод методами численного моделирования проведено исследование динамики поля, режимов генерации, влияния спонтанной эмиссии на генерируемые структуры.

### Введение

Нелинейные динамические явления в лазерах являются объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований в течении примерно 15 лет [1-4]. За последнее время основное внимание исследователей сместилось с чисто временных явлений к пространственным и пространственно-временным. В широком смысле под пространственными эффектами понимаются проявления неоднородностей светового поля в резонаторе, определяющиеся модовой структурой и нелинейными эффектами вследствие наличия активной среды. При этом существенны продольные и поперечные неоднородности поля и активной среды. Продольные неоднородности имеют два существенно различных масштаба. Один из них связан с длиной волны (такие неоднородности определяют взаимодействие продольных мод), другой определяется релеевской длиной резонатора (расположением зеркал и их кривизной).

В более узком смысле под пространственными эффектами подразумеваются явления, происходящие в плоскости поперечной к направлению распространения лазерного пучка (поперечные нелинейно-оптические явления [4]). В данной работе будем использовать последнее определение пространственных эффектов.

Интерес к исследованию пространственных эффектов связан с тем, что формирование пространственных структур в оптике происходит во многом аналогично формированию структур в гидродинамике, нелинейных химических реакциях, биологии, причем соответствующие уравнения (типа Гинзбурга - Ландау, Курамото - Сивашинского, Ньюэла - Уайтхеда, нелинейного уравнения Шредингера) могут быть получены из уравнений лазерной динамики при тех или иных упрощающих предположениях [4-15].

В настоящей статье (раздел 1) представлен краткий обзор работ по исследованию динамики поперечных структур с фиксированной поляризацией в каждой точке поперечного профиля и динамики поперечных поляризованных структур. Последний вопрос в настоящее время является «горячей точкой» в нелинейной динамике лазеров. В подборе литературы мы ограничивались в основном работами, в которых исследуются режимы работы лазеров с большим числом генерируемых поперечных мод. Это определялось как личными вкусами и научными интересами авторов, так и невозможностью в ограниченных рамках представить все богатство различных динамических режимов, наблюдающихся в оптических системах, несмотря на наметившуюся унификацию динамических явлений в различных оптических системах. Соответственно, представленный в работе список литературы не претендует на исчерпывающую полноту. Кроме того, вне рамок обзора остались работы, выполненные в основном в 60-80-х годах и посвященные исследованию динамики волн различной поляризации (устойчивости и условий стационарной генерации) в приближении плоских волн, в которых теоретические расчеты выполнялись либо в приближении теории третьего порядка по полю, либо использовались стационарные решения уравнений для компонент матрицы плотности активной среды [16-21]. Эти работы стимулировались разработкой различных схем кольцевых лазерных гироскопов, использующих различные поляризации встречных или попутных волн.

В большинстве работ по поляризационной динамике лазеров характеристики выходного пучка исследуются в одной точке поперечной плоскости, например, в центре пучка. На периферии выходного пучка поляризация света будет такой же, как и в центре, если в лазере генерируется одна поперечная мода. При увеличении количества генерируемых поперечных мод в лазере формируются более сложные поляризационные структуры.

В данной работе представлена математическая модель лазера без ограничения на количество поперечных мод. Их число определяется только возможностями компьютера. Рассмотрены лазерные резонаторы с вращением изображения. На основе численного моделирования, с учетом спонтанной эмиссии, исследованы стационарные и динамические режимы генерации однонаправленного кольцевого лазера с аксиальным магнитным полем, наложенным на активную среду.

## **1. Поперечные и поперечно - поляризационные структуры в лазерах (обзор)**

Поперечный профиль поля в лазерном резонаторе определяется числом и амплитудами участвующих в процессе генерации поперечных мод. Параметром, определяющим число мод, является число Френеля резонатора [22]  $N = a^2 / (d\lambda)$  ( $a$  - радиус апертуры лазера,  $d$  - периметр резонатора,  $\lambda$  - длина волны излучения). Появление новых лазерных систем таких, как полупроводниковые лазеры с вертикальным резонатором (VCSEL), излучение в которых происходит с достаточно большой по площади поверхности, а также лазеров с большим усилением, позволило перейти к режимам работы с большими числами Френеля, что также стимулировало интерес к исследованиям поперечной динамики. При проведении численных экспериментов для моделирования поперечной динамики в лазерах необходимо применять довольно сложные методы, требующие большого объема вычислений. Появление компьютерных систем с достаточными вычислительными мощностями также во многом стимулировало постановку новых задач в поперечной нелинейной оптике.

Режимы работы лазерных систем, в которых существенным является поперечная структура поля излучения, можно разделить на два класса.

Первый класс характеризуется режимом генерации малого числа поперечных мод (в наиболее простом случае присутствует только основная мода), который обеспечивается, например, диафрагмированием резонатора. В

присутствии активной среды вследствие нелинейности возможно возбуждение остальных мод, которое проявляется как линейная и нелинейная деформация поля излучения, при которой геометрические параметры поля изменяются. Это изменение оказывается, как правило, малым, однако может быть зарегистрировано по сдвигам частоты излучения квантовых стандартов частоты [23-27], дифракционному расщеплению частот в кольцевых лазерах [28], асимметрии светового пучка вследствие самовоздействия в активной среде [29,30], изменению характеристик устойчивости резонатора в присутствии активной среды [27]. В настоящее время имеет большое практическое значение использование слабой поперечной деформации поля светового импульса в среде с керровской нелинейностью для генерации импульсов фемтосекундной длительности при самостартующей синхронизации продольных мод в твердотельных лазерах [31-36].

Второй класс составляют режимы с существенно большим числом мод. При этом в поперечной плоскости светового пучка могут возникать стационарные или динамические более или менее сложные структуры, характеризующиеся наличием особых точек (дефектов) [5,8]. При очень большом числе мод возможно возникновение оптической турбулентности [37]. С точки зрения теории, такие режимы наиболее интересны, так как они, во-первых, наиболее близки к режимам в других физических распределенных системах, во-вторых, представляют собой «вызов» теоретикам, так как их анализ требует разработки новых численных методов, а зачастую и новых понятий, и в некотором смысле эти системы являются «полигоном» для отработки инструмента и упражнений теоретиков. В практической области, как отмечено в [4], интерес к существенно многомодовым системам определяется перспективами их использования в параллельной оптической обработке информации [38-43], возможностью наблюдения квантовых эффектов в поперечных структурах при комнатных температурах, перспективами бесшумовой передачи изображений [44-48] и квантовой криптографии [49].

Большинство работ по исследованию поперечной динамики в теории и эксперименте используют скалярную модель, в которой поляризация волны предполагается заданной и неизменной (как правило, линейной). Однако в последнее время появились работы, в которых исследуются поперечные эффекты в лазерах с более сложной поляризационной структурой, когда поляризация волны изменяется в зависимости от координаты в поперечной плоскости [50-56].

Учет поляризации световой волны в особенности необходим для лазеров с поляризационно-изотропными резонаторами в противоположность поляризационно-селективным резонаторам газовых лазеров с окнами Брюстера в активном элементе. Это относится к волоконным [54] и полупроводниковым лазерам с вертикальным резонатором (VCSEL лазеры) [53].

Излучение VCSEL-лазера, как правило, линейно поляризовано и ориентировано вдоль оси кристалла. Двухлучепреломление в кристалле приводит к разности частот полей, линейно поляризованных в ортогональных плоскостях. При изменении тока инжекции наблюдается переключение с одного линейно поляризованного типа колебаний на другой. Близко к порогу генерации изменение поляризационного состояния происходит без изменения формы профиля интенсивности выходного излучения в поперечной плоскости. При большей силе тока инжекции, переход от одной поляризации к другой происходит с изменением типа поперечных структур, либо с увеличением порядкового номера генерируемой моды.

Условия стабильности поляризационных состояний излучения VCSEL-лазера анализируются в работе [53]. Некоторые качественные результаты получены в предположении, что лазер генерирует основную моду. Исследуется также изменение поляризации излучения вследствие конкуренции двух различных мод более высокого порядка,  $TEM_{10}$  и  $TEM_{01}$ .

Другой тип лазеров, в котором интенсивно исследуется динамика векторного электрического поля, представляют собой газовые лазеры со слабой анизотропией

резонатора. Здесь в основном исследуются динамические режимы с одной или несколькими поперечными модами.

В работе [51] представлены результаты экспериментальных и теоретических исследований одномодового газового He-Ne лазера с модуляцией усиления и слабо анизотропным резонатором. В эксперименте окна газоразрядной трубки были наклонены под углом  $5^\circ$  к оси капилляра, что обеспечивало небольшую анизотропию потерь.

Исследование такого лазера показало наличие двух типов поведения интенсивностей лазерного излучения, поляризованного в ортогональных плоскостях: хаотическое переключение лазера с одной поляризации на другую и хаотические осцилляции. В обоих случаях полная мощность осциллирует регулярно.

При небольшой величине амплитуды низкочастотной модуляции усиления интенсивности волн, поляризованных в ортогональных плоскостях, изменяются по гармоническому закону. Нарастание амплитуды (частоты) модуляции приводит к качественному изменению поляризационной динамики: появляются хаотические переключения с одного состояния на другое. Вторым эффектом (хаотические осцилляции интенсивностей в ортогональных плоскостях) наблюдается при тех же самых условиях при наличии поперечного магнитного поля, наложенного на активную среду, и при отстройке частоты генерации от центра линии перехода. В теоретической модели в первом случае спонтанный шум учитывался только в начальных условиях, а во втором случае - в течении всего периода модуляции, что приводит к хаотическому блужданию траектории в фазовом пространстве.

Такие явления, как скачкообразное изменение интенсивностей ортогонально поляризованных волн, поляризационный гистерезис, спонтанные пульсации двух ортогональных волн и автостабилизация одной из них также наблюдались в кольцевом He-Ne лазере [56]. В экспериментах использовался трехзеркальный кольцевой лазер со слабой анизотропией резонатора. В контуре усиления содержится одна продольная мода. Также как и в вышеописанной работе [51], здесь исследовалось поведение интенсивностей двух волн, поляризованных в ортогональных плоскостях. И хотя резонатор лазера не линейный, а кольцевой, наблюдаемые динамические режимы очень похожи на поляризационную динамику лазера с линейным резонатором.

В работе [55] представлены результаты численных расчетов для другого типа газового лазера с линейным резонатором и рабочим переходом  $j_2=1 \rightarrow j_1=2$  ( $j_{1,2}$  - полный момент атома, соответствующий уровням 1 и 2). Основное отличие этой работы от вышеописанных состоит в том, что авторы исследуют световую волну с эллиптической поляризацией. На основе теории возмущений были получены уравнения для интенсивности световой волны, эксцентриситета и ориентации эллипса поляризации.

В численном моделировании было получено, что изменение анизотропии резонатора и отстройки частоты генерации от центра линии перехода переводит лазер в одно из трех состояний: 1) стационарного линейно поляризованного излучения; 2) режим осцилляций, когда ориентация и эксцентриситет эллипса поляризации периодически изменяются по знаку и величине, при этом интенсивность также осциллирует; 3) поляризационной бистабильности, когда возможно стационарное существование одного из двух состояний с различной ориентацией эллипса поляризации. Развитие генерации из шума в одно из двух стабильных состояний определяется процессами спонтанной эмиссии и не может быть предсказано для каждого конкретного случая.

Динамика выходного излучения газовых лазеров может сильно изменяться в присутствии магнитного поля, либо при сильной анизотропии резонатора. Теоретический анализ динамики лазера с однородно уширенным переходом

$j=0 \rightarrow j=1$  выполнен в статье [52]. В этой работе изучался лазер с когерентной оптической накачкой линейно поляризованным лазерным полем. Когерентная оптическая накачка имеет две важные особенности: во-первых, присутствие линейно поляризованного пучка накачки разрушает пространственную изотропию по отношению к вращению вокруг оси резонатора, что приводит к анизотропии усиления; во-вторых, также могут существовать двухфотонные (рамановские) процессы. Исходя из этих двух факторов, можно ожидать, что поведение лазера будет сильно отличаться от поведения лазера с некогерентной накачкой.

В статье приведены результаты расчетов для двух типов лазерного резонатора: 1) с сильно анизотропным резонатором, создающим фиксированную линейную поляризацию лазерного поля под любым углом по отношению к поляризации луча накачки; 2) с изотропным резонатором и аксиальным магнитным полем.

В первом случае показано, что при изменении угла между плоскостями колебаний луча накачки и выходного излучения стационарные состояния плавно, монотонно изменяются, а динамические - испытывают сложную последовательность бифуркаций. Во втором случае выходной пучок всегда линейно поляризован. При этом вектор светового поля свободно эволюционирует. При некоторых параметрах в данной системе наблюдалось хаотическое изменение плоскости поляризации и интенсивности лазерного излучения.

Вышелеперчисленные результаты показывают, что к настоящему времени отсутствуют работы, в которых решается задача об исследовании полной пространственно-временной динамики поляризованных полей в лазере с произвольно большим числом поперечных мод при произвольной анизотропии резонатора. В следующих разделах статьи представлена модель, позволяющая решать такую задачу.

## **2. Поперечно-поляризационная динамика кольцевого лазера с вращением изображения и аксиальным магнитным полем**

Динамика электрического поля в лазере определяется изменением поля за один проход по резонатору. В данной статье рассматривается кольцевой лазер с вращением изображения. Преобразование светового пучка в резонаторе такого лазера включает в себя следующие этапы:

1. Поворот изображения.
2. Преобразование пучка на зеркалах.
3. Дифракция в свободном пространстве.
4. Усиление света в активной среде.

Ниже подробно рассмотрен каждый этап.

### **2.1. Моды в незаполненном кольцевом резонаторе с вращением изображения**

Рассмотрим неплоский контур, образующий резонатор кольцевого типа (рис.1). В данном типе резонатора, называемом также резонатором с вращением изображения [58,59], форма контура задает вращение локальной координатной системы, определяемой плоскостями падения осеобразующего светового луча на зеркала. Вращение изображения тесно связано с поворотом плоскости поляризации плоской электромагнитной волны, распространяющейся в таком контуре [58,60,64]. Для расчета характеристик поля в этом резонаторе воспользуемся методом, представленном в работе [59], распространенном на высшие моды. Пусть координаты  $n$ -ой вершины осевого контура заданы вектором  $\mathbf{r}_n$  в лабораторной системе координат. Тогда единичный вектор вдоль луча  $\mathbf{z}_n$ ,

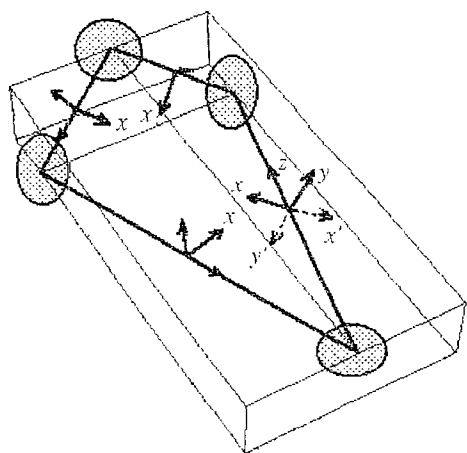


Рис. 1. Неплоский кольцевой резонатор

вектор нормали к плоскости зеркала  $\mathbf{N}_n$ , а также единичные вектора локальных координатных осей  $x_n, y_n$  в  $n$ -ом плече резонатора можно определить из соотношений

$$\mathbf{z}_n = (\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n) / |\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n|,$$

$$\mathbf{N}_n = (\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n+1}) / |\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n+1}|,$$

$$y_{n-1} = [\mathbf{z}_{n-1} \times \mathbf{z}_n] / |\mathbf{z}_{n-1} \times \mathbf{z}_n|, \quad x_{n-1} = [\mathbf{y}_{n-1} \times \mathbf{z}_{n-1}].$$

При отражении луча от зеркала система координат преобразуется по правилу

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_{n-1} - 2\mathbf{N}_n(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{N}_n),$$

$$y_n' = y_{n-1}, \quad x_n' = -x_{n-1} + 2\mathbf{N}_n(x_{n-1}, \mathbf{N}_n),$$

где круглые скобки означают скалярное произведение. Очевидно, что вследствие неплоскостности контура существует поворот осей вокруг направления  $\mathbf{z}_n$  на угол  $\theta_n$ , заданный выражениями

$$\cos \theta_n = (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n') = (\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n') = (\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n), \quad \sin \theta_n = [\mathbf{y}_{n-1} \times \mathbf{y}_n].$$

Преобразование вектора напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны при отражении задано следующими выражениями:

$$\mathbf{E}_{n-1} = E_x x_{n-1} + E_y y_{n-1},$$

$$\mathbf{E}_n = (r_{\parallel} E_x \cos \theta_n - r_{\perp} E_y \sin \theta_n) \mathbf{x}_n + (r_{\parallel} E_x \sin \theta_n + r_{\perp} E_y \cos \theta_n) \mathbf{y}_n,$$

где  $r_{\parallel, \perp}$  - комплексные френелевские коэффициенты отражения по амплитуде  $n$ -ого зеркала. Для определения полного угла поворота  $\theta$  за обход резонатора следует просуммировать повороты при каждом отражении.

Пусть число зеркал - четное, тогда преобразование поля независимо от поперечной зависимости  $E_x(x, y)$  и  $E_y(x, y)$  может быть выражено с помощью матрицы Джонса

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}^{N+1} = \begin{bmatrix} r_x \cos \theta & r_y \sin \theta \\ r_y \sin \theta & r_x \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}^N,$$

где  $r_x, r_y$  - амплитудные эффективные коэффициенты отражения. Собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы Джонса резонатора определяют собственные поляризации волн

$$\lambda_{1,2} = (r_x + r_y) / 2 \cos \theta \pm \{ [1/2 (r_x + r_y) \cos \theta]^2 - r_x r_y \}^{1/2}.$$

При  $|r_x|, |r_y| = 1$  получим  $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$  с собственными векторами  $\mathbf{e}_+ = -(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) / 2^{1/2}$ ,  $\mathbf{e}_- = (\mathbf{x} - i\mathbf{y}) / 2^{1/2}$ , соответствующими правой и левой круговым поляризациям. При неидеальных зеркалах (с различными фазами для  $s$  и  $p$ -компонент отраженной волны) получим эллиптические поляризации.

**2.1.1. Встречные волны.** Если изменить направление обхода резонатора, то направление локальных осей координат также изменится, в частности, направление осей  $z$  и  $x$  изменяется на противоположное в то время, как направление оси  $y$  сохраняется. Нетрудно понять, что знак поворота осей также изменяется на противоположный. Вместе с этим изменяет знак волновой вектор и направление вращения вектора поля. Набег фазы  $\phi$  плоской волны для



противоположных направлений распространения оказывается одинаковым для встречных волн с противоположным направлением вращения вектора поля (по отношению к лабораторной системе координат). Обозначая направление вращения и распространения индексами «+ -» (первый индекс относится к направлению вращения, второй - к направлению распространения), запишем

$$\varphi_{++} = \varphi_{-} = KL - \theta, \quad \varphi_{+-} = \varphi_{+} = KL + \theta,$$

где  $\varphi_{\pm,\pm}$  - набег фазы при обходе резонатора,  $K$  - волновое число,  $L$  - периметр резонатора.

В дальнейшем для простоты будем рассматривать лишь случай однонаправленной многомодовой генерации.

**2.1.2. Преобразование светового пучка на зеркалах и в свободном пространстве.** В параксиальном приближении поляризация в пучке соответствует поляризации плоской волны, так как продольные компоненты поля по отношению к поперечным имеют порядок  $(KR)^{-1} \ll 1$ ,  $(Kw)^{-2} \ll 1$ , где  $R$  - радиус кривизны,  $w$  - радиус пучка. Преобразование любой из поперечных компонент электрического поля при отражении пучка от сферического зеркала может быть получено из интеграла Гюйгенса - Френеля [22,61] и может быть сведено к: 1) изменению направления оси  $x$  на противоположное ( $x \rightarrow -x$ ); 2) умножению на  $\exp[iK(x^2/(2R_x) + y^2/(2R_y))]$ , где  $R_x = R \cos \phi$  - радиус кривизны в меридиональной плоскости зеркала,  $R_y = R / \cos \phi$  - радиус кривизны в саггитальной плоскости,  $R$  - радиус кривизны зеркала,  $\phi$  - угол падения на зеркало. Выражения для полей могут быть записаны в виде разложения по модам Лагерра - Гаусса:

$$E_{x,y} = \sum_{m,n} (A_{mn}^{x,y}) \Psi_{mn}(r, \varphi),$$

$$\Psi_{mn}(r, \varphi) = L_n^{lm}(\eta(z)r^2) (\eta r^2)^{lm/2} \exp(-P(z)r^2/2 + im\varphi), \quad (1)$$

$$\langle \Psi_{mn} \Psi_{m'n'} \rangle = 2\pi N_{mn} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad N_{nm} = (n+m)!/n!,$$

где  $m, n$  - азимутальные и радиальные индексы, соответственно;  $L_n^m$  - полином Лагерра;  $P(z) = \eta(z) + i\xi(z)$  - комплексный параметр пучка. Амплитуды мод определяются интегральным преобразованием

$$A_n^m = 1/(2\pi N_{mn}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr E(z, \mathbf{r}, t) \Psi_{mn}^*(r, \varphi). \quad (2)$$

Явные выражения для амплитуд мод и параметров пучка в произвольной точке  $z$  имеют вид

$$A_n^m(z, t - z/c) = A_n^m(0, t) [1 + izP(0)]^{-1} \exp(i\varphi_{mn}),$$

$$P(z) = P(0) [1 + izP(0)]^{-1}, \quad (3)$$

$$\varphi_{mn} = -(2n+m+1) \tan^{-1}(\eta(0)z / (1 - \xi(0)z)),$$

где  $A_n^m(0, t)$  и  $P(0)$  - амплитуды и параметр пучка в точке  $z=0$ .

В отсутствие астигматизма преобразование поля на зеркале может быть записано в виде

$$P(2) = P(1) + iF, \quad A_n^m(2, t) = A_n^m(1, t) r_m^{1/2}, \quad (4)$$

где цифры 1, 2 означают входную и выходную плоскости зеркала;  $F = 2/R$  - оптическая сила зеркала;  $r_m$  - коэффициент отражения по мощности. Ограничение светового пучка диафрагмой с гауссовым пропусканием выражается следующим преобразованием:

$$\psi(2, \mathbf{r}, t) = [T(\mathbf{r})]^{1/2} \psi(1, \mathbf{r}, t), \quad T(\mathbf{r}) = \exp(-\eta_d r^2),$$

где  $T(\mathbf{r})$  - коэффициент пропускания по мощности;  $\eta_d = 1/w_d^2$ ;  $w_d$  - параметр диафрагмы. В терминах амплитуд мод это означает, что на диафрагме происходит изменение параметра пучка  $P$  и перемешивание мод различных индексов

$$P(2) = P(1) + \eta_d, \quad (5)$$

$$A_n^m(2, t) = \sum_{n'} A_n^{m'}(1, t) T_{nn'}(\eta(1)/\eta(2)),$$

где матрица  $T_{nn'}$  определена как

$$T_{nn'}(x) = N_{nn'}^{-1} (-1)^n (|m| + n')! / [n!(n')!] (-n')_n (1-x)^{n-n'} x^{n-|m|-1},$$

где  $(-n')_n = (-n')(-n'+1)\dots(-n'+n-1)$ ;  $(-n')_0 = 1$ .

Для астигматической диафрагмы  $T(\mathbf{r}) = \exp[-(x/w_{dx})^2 - (y/w_{dy})^2]$ . Это приводит к перемешиванию мод не только различных радиальных индексов, но и различных угловых с  $m - m' = 2k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Тот же эффект будет и при учете астигматизма зеркал. Аналитические выражения для матрицы преобразования амплитуд достаточно громоздки и при численном моделировании удобнее использовать явное преобразование для поля на астигматическом элементе, а затем определять амплитуды мод согласно (2).

Для упрощения будем рассматривать случай отсутствия астигматизма. Тогда в базисе мод Гаусса - Лагерра преобразование параметра пучка за обход выражается хорошо известным законом  $ABCD$  [22]

$$P(z+L) = P(z), \quad P(z+L) = [A(z)P(z) + B(z)] / [C(z)P(z) + D(z)], \quad (6)$$

где  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  - матрица обхода резонатора, являющаяся произведением матриц:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ il & 1 \end{pmatrix}$  - матрица, соответствующая участку свободного пространства длиной  $l$ ;  $\begin{pmatrix} 1 & iF \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  - матрица зеркала с оптической силой  $F$ ;  $\begin{pmatrix} 1 & \eta_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  - матрица диафрагмы. Их следует взять в порядке, определяемом расположением элементов резонатора.

Определяя мультипликатор  $\mu = dP(z+L)/dP(z) = -(CP(z)+D)^{-2}$  можно получить период биений поперечных мод (с точностью до целого кратного  $T$ )  $T_B = \pi / \arg(\mu)$  и условие устойчивости незаполненного резонатора  $|\mu| \leq 1$ .

## 2.2. Уравнения для активной среды

Предположим, что рабочий переход  $a \leftrightarrow b$ , где  $a$  и  $b$  обозначают верхний и нижний уровни, характеризуется квантовыми числами угловых моментов  $j_a$  и  $j_b$ . Для учета поляризации светового поля необходимо учесть магнитную структуру уровней (пространственное квантование), характеризующееся квантовыми числами зеемановских подуровней  $a' = -j_a, -j_a+1, \dots, j_a-1, j_a$ ;  $b' = -j_b, -j_b+1, \dots, j_b-1, j_b$ . Для общности будем считать, что на среду наложено постоянное аксиальное магнитное поле с напряженностью  $\mathbf{H}$ . Его влияние на переход, как хорошо известно, приводит к расщеплению уровней на величину  $\mu_B g_{a,b} H$ , где  $\mu_B$  - магнетон Бора (примерно равный 1.4 МГц/эрстед);  $g_{a,b}$  - факторы Ланде уровней. Их значения зависят от схемы сложения моментов и, как правило, требуют экспериментального измерения. Для простоты можно считать, что факторы Ланде для обеих уровней одинаковы. Их разность может быть легко учтена, однако выражения при этом получаются достаточно громоздкими.

Уравнения для компонент матрицы плотности  $\rho^{\wedge}$  могут быть записаны в базисе зеемановских подуровней  $\rho_{\alpha'\beta'} = \langle n_{\alpha} j_{\alpha}, \alpha' | \rho^{\wedge} | n_{\beta} j_{\beta}, \beta' \rangle$ ;  $\alpha' = a', b'$ ;  $\beta' = a', b'$ . Однако более удобно использование другого представления, использующего разложение элементов матрицы плотности по неприводимым тензорным операторам группы

вращений [66,16]. Это представление позволяет более просто учесть релаксацию в рамках модели релаксационных констант [62]. В базисе тензорных операторов уравнения для компонент имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_q^\kappa + (\gamma_a^{(\kappa)} - iq\Omega)a_q^\kappa &= \delta_{\kappa 0}\lambda_a(2j_a+1)^{1/2} + \\ &+ i/\hbar \sum_{\kappa'=|j_a-j_b|}^{j_a+j_b} \sum_{q'=-\kappa}^{\kappa} \sum_{q_1=\pm 1,0} E_{-q_1} A_{qq'q_1}^{\kappa\kappa'} [d\Psi_{q,\kappa'} + (-1)^{\kappa+\kappa'+q'} (d\Psi_{-q,\kappa'})^*], \\ \dot{b}_q^\kappa + (\gamma_b^{(\kappa)} - iq\Omega)b_q^\kappa &= \delta_{\kappa 0}\lambda_b(2j_b+1)^{1/2} + \\ &+ i/\hbar \sum_{\kappa'=|j_a-j_b|}^{j_a+j_b} \sum_{q'=-\kappa}^{\kappa} \sum_{q_1=\pm 1,0} E_{-q_1} B_{qq'q_1}^{\kappa\kappa'} (-1)^{\kappa+\kappa'} [d\Psi_{q,\kappa'} + (-1)^{\kappa+\kappa'+q'} (d\Psi_{-q,\kappa'})^*], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_q^\kappa + (\gamma^{(\kappa)} - i(\omega+q\Omega))\Psi_q^\kappa &= (i/\hbar)d^* [\sum_{\kappa'=0}^{2j_a} \sum_{q'=-\kappa}^{\kappa} \sum_{q_1=\pm 1,0} E_{-q_1} S_{qq'q_1}^{\kappa\kappa'} a_{q,\kappa'} + \\ &+ \sum_{\kappa'=0}^{2j_b} \sum_{q'=-\kappa}^{\kappa} \sum_{q_1=\pm 1,0} (-1)^{\kappa+\kappa'} E_{-q_1} R_{qq'q_1}^{\kappa\kappa'} b_{-q,\kappa'}], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{qq'q_1}^{\kappa\kappa'} &= (-1)^{q'+2j_b}(2\kappa'+1) \begin{pmatrix} \kappa' & 1 & \kappa \\ -q' & q_1 & q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa' & 1 & \kappa \\ j_a & j_a & j_b \end{Bmatrix}, \\ S_{qq'q_1}^{\kappa\kappa'} &= (-1)^{q'+2j_b}(2\kappa'+1) \begin{pmatrix} \kappa' & 1 & \kappa \\ q' & q_1 & q \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa' & 1 & \kappa \\ j_b & j_a & j_a \end{Bmatrix}, \\ B &= A(j_a \leftrightarrow j_b), \quad R = S(j_a \leftrightarrow j_b), \end{aligned}$$

( $\dots$ ) - 3j-символ, ( $\{\dots\}$ ) - 6j-символ [65].

Здесь  $q = -\kappa, \dots, \kappa$ ;  $\kappa = 0, \dots, 2j_{a,b}$  для  $a_q^\kappa$  и  $b_q^\kappa$ , соответственно, и  $\kappa = |j_a - j_b|, \dots, j_a + j_b$  для  $\Psi_q^\kappa$ ;  $\gamma^\kappa$  - скорость релаксации соответствующего объекта;  $\Omega$  - зеемановское расщепление;  $d$  - приведенный матричный элемент дипольного момента перехода  $a \leftrightarrow b$ ;  $\lambda_{a,b}$  - скорости накачки уровней;  $E_q = E_q(\mathbf{r}, z, t)$  - круговые компоненты вектора электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{k}E_0 - E_+( \mathbf{i} - \mathbf{j} )/2^{1/2} + E_-( \mathbf{i} + \mathbf{j} )/2^{1/2} = \sum_{q=\pm 1,0} (-1)^q E_q \mathbf{e}_{-q}, \quad (8)$$

где  $E_+ = -(E_x + iE_y)/2^{1/2}$ ,  $E_- = (E_x - iE_y)/2^{1/2}$ ,  $E_0 = E_z$ .

Если в положительном направлении оси  $z$  распространяются волны, поляризованные по правому и левому кругу, с комплексными амплитудами  $\mathcal{E}_q(x, y, t)$  и частотами  $\nu_q$  ( $q = \pm 1$ ), то

$$E_q = -q/2^{1/2} \{ \mathcal{E}_q \exp[i(\nu_q t - K_q z)] + \mathcal{E}_{-q}^* \exp[-i(\nu_{-q} t - K_{-q} z)] \}.$$

Физический смысл объектов:  $a_0^0$ ,  $b_0^0$  - заселенности уровней;  $a_q^1$ ,  $b_q^1$  - круговые компоненты вектора магнитного момента состояния  $a$  и  $b$ ;  $\Psi_q^1$  - круговые компоненты дипольного момента перехода;  $a_q^2$ ,  $b_q^2$ ,  $\Psi_q^2$  - компоненты тензора квадрупольного момента уровней и перехода и т.п.

Поляризация среды  $\mathcal{P}$  определяется своими круговыми компонентами и компонентами  $\Psi_q^1$  тензора

$$\mathcal{P} = \sum_{q=-1,0,1} (-1)^q \mathbf{e}_{-q} \mathcal{P}_q,$$

$$\mathcal{P}_q = (-1)^{j_a - j_b} [(-1)^q (d\Psi_q^1) + (d\Psi_{-q}^1)^*].$$

Параксиальное волновое уравнение в круговых компонентах получается в виде

$$2iK_q[\partial \bar{\epsilon}_q / \partial z + (1/c) \partial \bar{\epsilon}_q / \partial t] + \nabla_{\perp}^2 \bar{\epsilon}_q = -2^{1/2} q \langle \mathcal{P}_q \exp[-i(v_q t - K_q z)] \rangle_t,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени (по периоду световых колебаний).

Рассмотрим случай, характерный для лазеров класса А, когда скорости релаксации заселенностей и недиагональных элементов матрицы плотности существенно превышают частоты биений продольных и поперечных мод. В этом случае достаточно найти стационарное решение уравнений для компонент матрицы плотности. Так как  $3j$ -символы играют роль  $\delta$ -символов Кронекера:  $\delta_{q+q_1-q}$ , то при круговых поляризациях полей ( $q_1 = \pm 1$ ) отличными от нуля будут элементы  $a_{0,\pm 2q,\dots}^k$ ,  $b_{0,\pm 2q,\dots}^k$ ,  $\psi_{\pm q,\pm 3q,\dots}^k$ ,  $q=1, \dots$  и т.д. Очевидно, что наибольший вклад дадут элементы  $a_0^k$ ,  $b_0^k$ ,  $\psi_{\pm 1}^k$ , так как только в уравнениях для этих элементов в правых частях есть накачка; остальные члены дадут поправки [63]. Кроме того, следует учесть, что  $\psi^k \propto \exp[i(\omega + q\Omega)t]$ . Это позволяет в приближении «волн вращающейся поляризации» выделить только резонансные слагаемые, пренебрегая членами, содержащими вторую гармонику оптической частоты. В данном приближении решение записывается в виде

$$\langle \mathcal{P}_q \exp[-i(v_q t - K_q z)] \rangle_t = iKg/2\bar{\epsilon}_q D_q [1 + (\alpha^{(+)} - \alpha^{(-)})S_{-q}] / \{1 + \alpha^{(+)}[S_q + S_{-q}] + [(\alpha^{(+)} - \alpha^{(-)})^2] S_q S_{-q}\}, \quad (9)$$

где

$$D_q = \gamma[\gamma + i(\omega - v_q + q\Omega)], \quad S_q = \sum_n |\bar{\epsilon}_q|^2 \mathcal{L}_q, \quad \mathcal{L}_q = \text{Re}[D_q],$$

$$\alpha^{(\pm)} = -3\gamma_a \gamma_b / (\gamma_a + \gamma_b) [\sum_k (\pm)^k S_{10-1}^{1k} A_{011}^{k1} / \gamma_a + \sum_k (\pm)^k R_{10-1}^{1k} B_{011}^{k1} / \gamma_b],$$

$g$  - усиление по мощности на единице длины.

### 3. Модель лазера и алгоритм для численных расчетов

В расчетах использовалась схема однонаправленного кольцевого лазера с аксиальным магнитным полем (рис. 2). Здесь линза и диафрагма не имеют астигматизма, активная среда тонкая. Такой резонатор эквивалентен линейному плоско-сферическому резонатору с активной средой вблизи плоского зеркала. Резонатор - поляризационно изотропный: угол вращения плоскости поляризации  $\theta$  равен 0 либо  $2\pi$ . В таком лазере поляризационную динамику определяет наличие магнитного поля. Полагаем, что контур усиления содержит большое число продольных мод. При их синхронизации излучение лазера представляет собой последовательность импульсов. Будем считать, что форма импульсов и

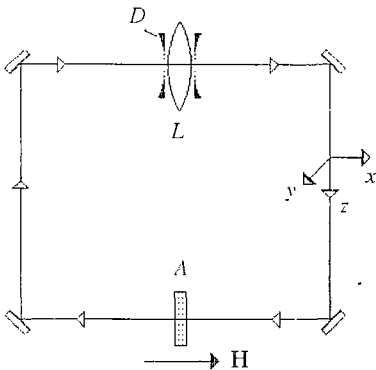


Рис. 2. Схема кольцевого резонатора:  $D$  - гауссова диафрагма;  $L$  - линза;  $A$  - тонкая активная среда;  $\mathbf{H}$  - аксиальное магнитное поле; стрелками показано направление обхода резонатора

длительность постоянны от прохода к проходу, в то время как амплитуда этих импульсов разная в различных точках поперечной плоскости (режим поперечно-синхронных импульсов) [57]. Переходя в систему отсчета, связанную с импульсом ( $t \rightarrow t - z/c$ ) получим уравнение для круговых компонент поля

$$2iK_q \partial \bar{\epsilon}_q / \partial z + \nabla_{\perp}^2 \bar{\epsilon}_q = -2^{1/2} q \langle \mathcal{P}_q \exp(v_q t - K_q z) \rangle_t, \quad (10)$$

Производную по времени из параксиального уравнения можно также исключить, если контур усиления содержит одну продольную моду. В этом случае комплексная огибающая поля не

зависит явно от времени. В свободном пространстве ( $\rho_q=0$ ) параксиальное уравнение имеет точное решение в виде набора мод Лагерра - Гаусса (1). Используя преобразование (3) для амплитуд мод можно найти поле  $\vec{E}(r, \varphi, z)_q$  в произвольной точке  $z$ . Преобразование поля на линзе и диафрагме также записывалось через амплитуды поперечных мод (4), (5). Изменение круговых компонент поля вследствие взаимодействия с тонким слоем активной среды ( $\nabla_{\perp}^2 \vec{E}_q=0$ ) находилось из уравнения (10) методом Эйлера. В поперечной плоскости была задана сетка  $(r_i, \varphi_j)$  ( $i=1,15; j=1,20$ ). В каждой из узловых точек вычислялись компоненты поля  $\vec{E}_q$ . Переход от комплексного поля к амплитудам мод осуществлялся интегрированием по поперечной плоскости (2). Интегрирование проводилось с помощью квадратурных формул Гаусса, поэтому в качестве точек  $r_i$  удобно взять нули полинома Лагерра  $L_{15}^0$ . Выбор сетки из 300 точек позволял вычислять 209 амплитуд мод  $|m| \leq 9, n \leq 10$ . Для моделирования эффекта спонтанной эмиссии в каждом из узлов сетки к амплитуде поля добавлялось малое случайное комплексное число. Начальное поле при вычислениях также представляло собой шум. После нескольких сотен проходов по резонатору в лазере устанавливается какой-либо режим генерации, после чего пространственные и временные зависимости записывались и анализировались.

#### 4. Численные результаты

Режимы генерации лазера, наблюдаемые в численных экспериментах, условно разделены на два типа: стационарные режимы, когда полная мощность и поперечный профиль пучка не меняются во времени; динамические режимы с изменением полной мощности и (или) поперечного профиля  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  компонент.

##### 4.1. Стационарные режимы

При малом усилении (вблизи порога генерации) наблюдались стационарные режимы генерации. Распределение интенсивностей циркулярно поляризованных компонент поля в поперечной плоскости имело форму гауссовых функций, что соответствовало генерации в основном фундаментальной моды резонатора. На рис. 3 показано изменение интенсивностей право- и левополяризованных волн

$$I_q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} I_q(r, \varphi) r dr, \quad q = \pm$$

в зависимости от расстройки между частотой генерации и частотой перехода  $\delta = (\omega - \nu)/\gamma$ . Стационарные режимы рассчитывались при следующих значениях параметров: усиление на проход в резонаторе  $gl=1$  ( $l$  - толщина активного элемента), магнитное расщепление зеемановских подуровней  $\mu = \Omega/\gamma = 0.2$ , безразмерная оптическая сила линзы  $F = L/f = 2$  (здесь  $L$  - периметр резонатора,  $f$  - фокусное расстояние линзы). Для каждого из рассчитанных режимов начальное поле представляло собой спонтанный шум. Расстояние между максимумами функций  $I_+(\delta)$  и  $I_-(\delta)$  зависит от напряженности магнитного поля. Для ненулевых  $I_+$  и  $I_-$  значений магнитного поля существует и резонансная частота перехода  $\delta = (\omega - \nu)/\gamma$

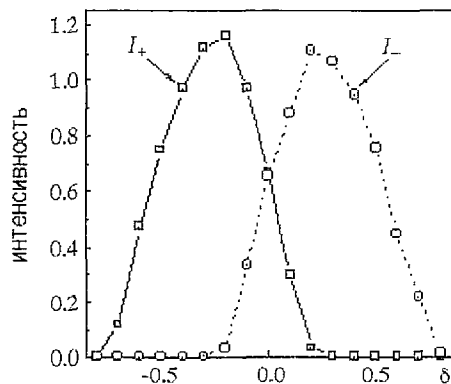


Рис. 3. Зависимость интегральных интенсивностей циркулярно поляризованных компонент от расстройки между частотой генерации и резонансной частотой перехода  $\delta = (\omega - \nu)/\gamma$

небольшая асимметрия компонент. Из рисунка видно, что максимальное значение интенсивности правополяризованной компоненты отличается от максимального значения левополяризованной. Это различие нарастает с увеличением усиления. Было установлено, что асимметрия обусловлена возникновением «линзы» для волн с частотой, отличной от частоты линии перехода [25]. В нашем случае сдвиг частоты для волн различной поляризации в противоположные стороны возникает вследствие эффекта Зеемана.

#### 4.2. Динамические режимы

При увеличении усиления наблюдается «второй порог» - поперечный профиль пучка изменяется во времени, хотя полная мощность выходного излучения постоянна (рис. 4). На этом рисунке показано изменение поперечного

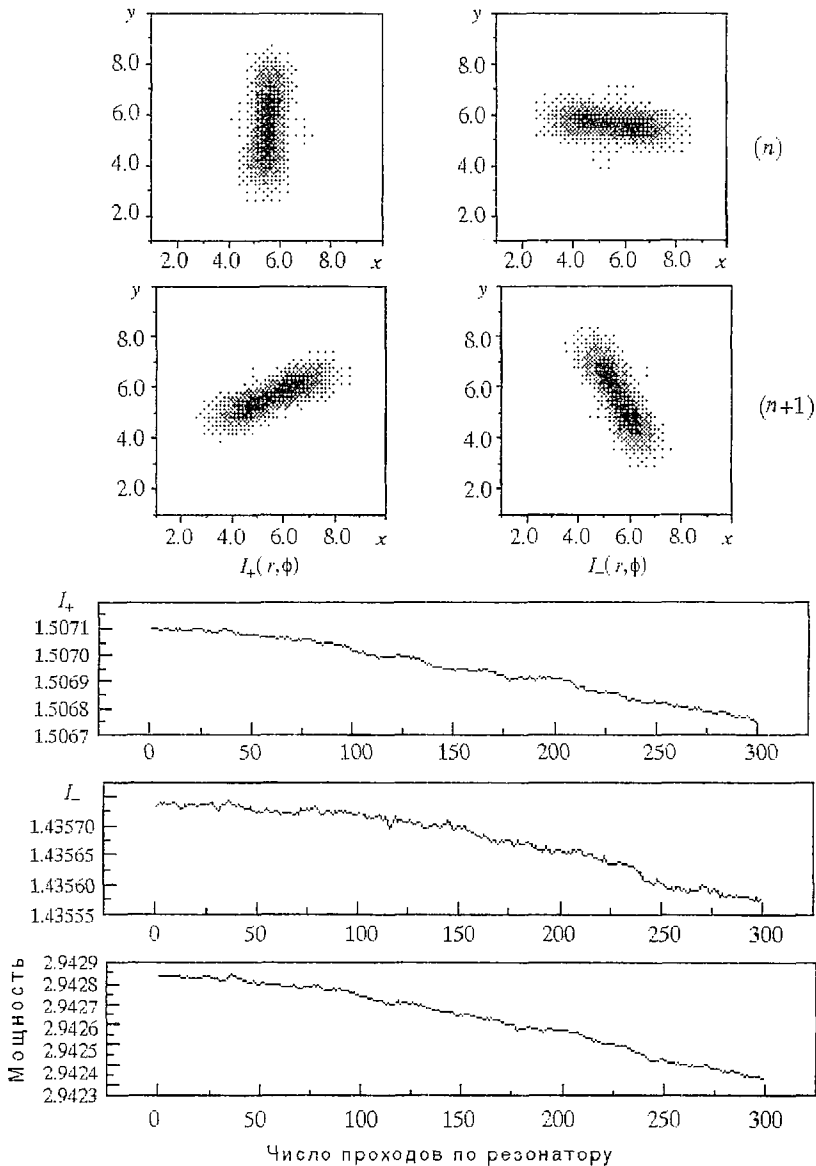


Рис. 4. Вращение поперечного профиля пучка от прохода к проходу по резонатору при стационарной выходной мощности  $gl=1.1$ ,  $\mu=0.2$ ,  $\delta=0$ ,  $F=2$ ,  $I_{\pm}(r,\varphi)=|\mathcal{E}_{\pm}(r,\varphi)|^2$

профиля циркулярно поляризованных компонент от прохода к проходу по резонатору. Верхние два рисунка -  $n$ -ый проход, ниже -  $(n+1)$ -ый. На  $(n+2)$ -ом проходе распределение интенсивности в поперечной плоскости такое же, как и на  $n$ -ом проходе. Появление таких осцилляций можно связать с биениями высших поперечных мод, возникающих при увеличении нелинейности. Структуры, показанные на рисунке устойчивы: изменяя отстройку резонатора и величину магнитного поля, мы наблюдали формирование того же типа поперечных структур. В нижней части рисунка показано поведение интегральных

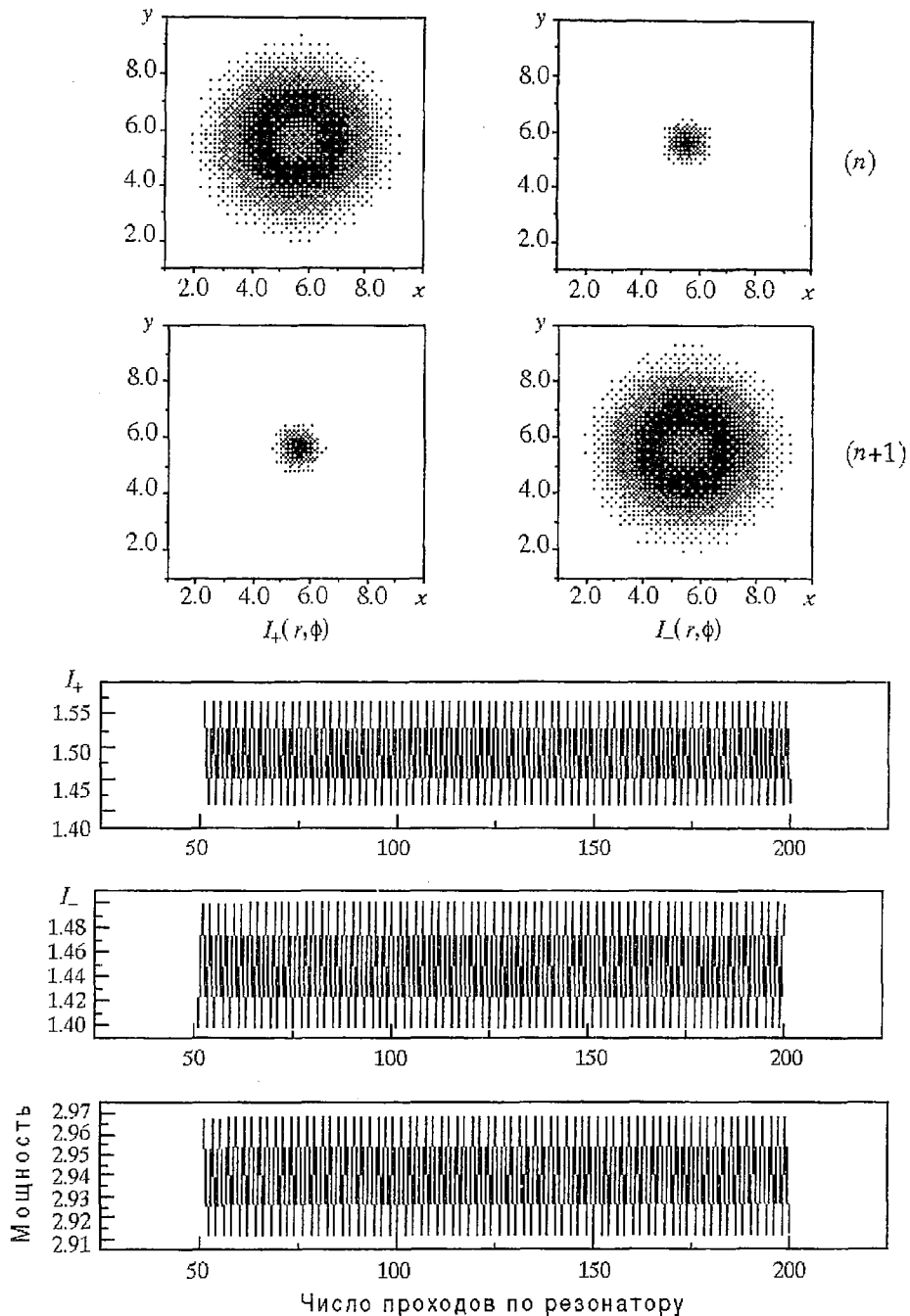


Рис. 5. Динамический режим, рассчитанный без учета влияния спонтанного шума при тех же параметрах, что и режим, показанный на рис. 4

интенсивностей циркулярно поляризованных компонент  $I_+$ ,  $I_-$  и полной мощности пучка  $I=I_+ + I_-$ . Как видно, полная мощность практически стационарна во времени. Ее небольшое изменение обусловлено наличием спонтанного шума. Такое поведение лазера возможно в том случае, если изменяются только фазы комплексных мод, а их амплитуды постоянны.

Для того, чтобы продемонстрировать влияние шума на формирование пространственно-временных структур, был рассчитан режим генерации лазера без учета спонтанной эмиссии. Этот режим рассчитывался при тех же параметрах, что и показанный на рис. 4. Оба режима стартовали с одинакового шумового распределения поля, но в режиме, показанном на рис. 5, шум выключается при  $g_l=0.9$  (начало генерации). Из рис. 4 и 5 видно, что выходное излучение имеет разное распределение поля в поперечной плоскости. В отсутствие шума интерференция поперечных мод проявляется как осцилляции поперечного профиля компонент  $\mathcal{E}_+$ ,  $\mathcal{E}_-$  и выходной мощности с частотой биений поперечных мод.

Таким образом наличие спонтанного шума в математической модели приводит к качественному изменению режима генерации лазера.

Поперечный профиль интенсивностей круговых компонент и линейно поляризованного поля вдоль оси  $x$  показан на рис. 6. Порог генерации так же, как и

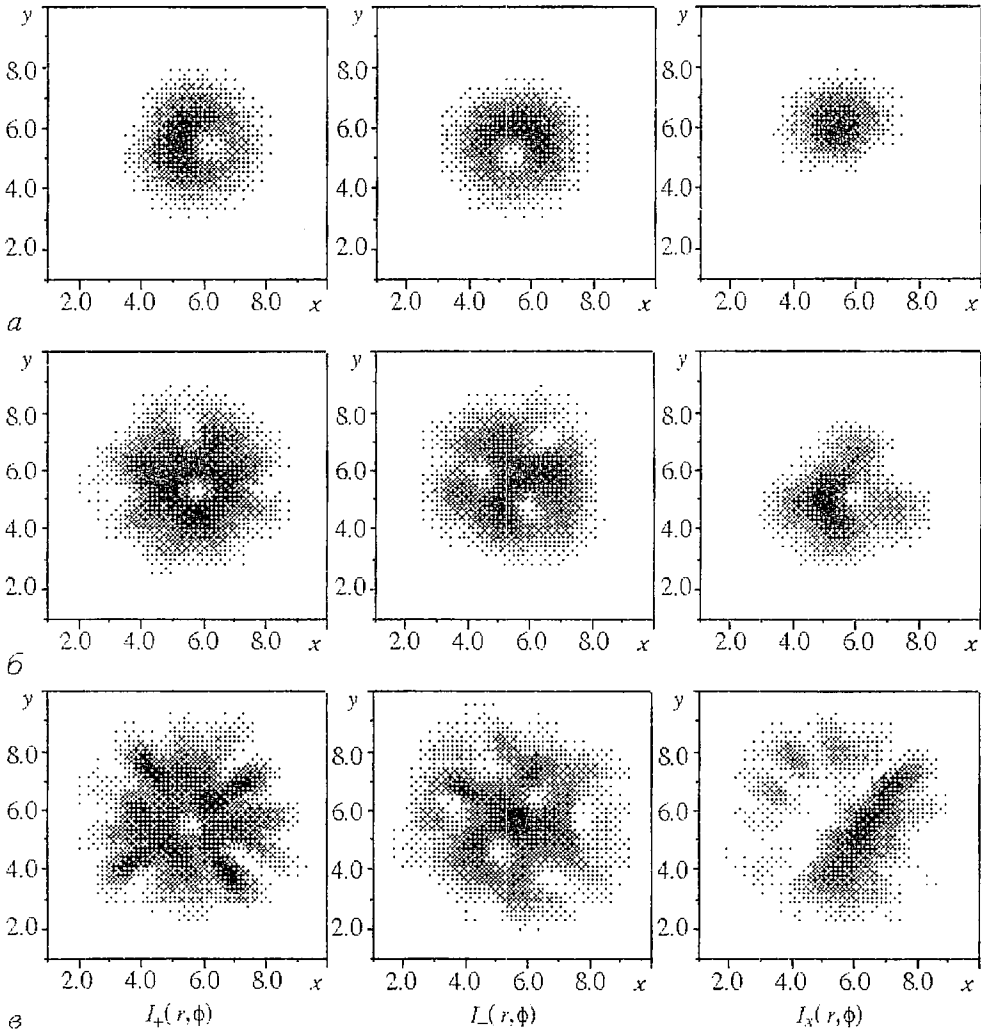


Рис. 6. Изменение поперечного профиля интенсивностей круговых компонент и линейно поляризованного поля вдоль оси  $x$  при увеличении усиления.  $I_{\pm}(r, \phi) = |\mathcal{E}_{\pm}(r, \phi)|^2$ ,  $\mu=0.2$ ,  $\delta=0$ ,  $F=3$ :  
 $a - g_l=1.15$ ;  $b - g_l=1.4$ ;  $c - g_l=1.7$



для  $F=2$ , соответствует  $gl=0.9$ . При  $gl=1.15$  и  $gl=1.4$  (см. рис. 6, а, б) полная мощность излучения осциллирует с частотой межмодовых биений поперечных мод, поперечный профиль пучка соответствует вращению картины поля с той же частотой. Для  $gl=1.15$  набор мод одинаков для  $\xi_+$ ,  $\xi_-$  компонент: максимальную интенсивность имеют моды  $(A_0^{-1})_q$  и существуют также моды  $(A_0^3)_q$ ,  $(A_3^{-1})_q$ . Для каждой из  $q$ -компонент моды имеют разные набег фазы при одинаковых интенсивностях, поэтому в поперечной плоскости распределение интенсивности для право- и левополяризованной волны отличается лишь поворотом. При нарастании усиления появляется различие в модовом составе для  $\xi_+$  и  $\xi_-$  волн, что приводит к различным поперечным профилям двух волн (см. рис. 6, б, в). За счет расширения области, где усиление больше потерь, в генерацию вовлекаются моды высоких порядков. Вследствие этого поперечный профиль пучка становится более сложным. Дальнейшее увеличение усиления приводит к тому, что на межмодовые биения накладывается медленная огибающая, как это показано на рис.7 для

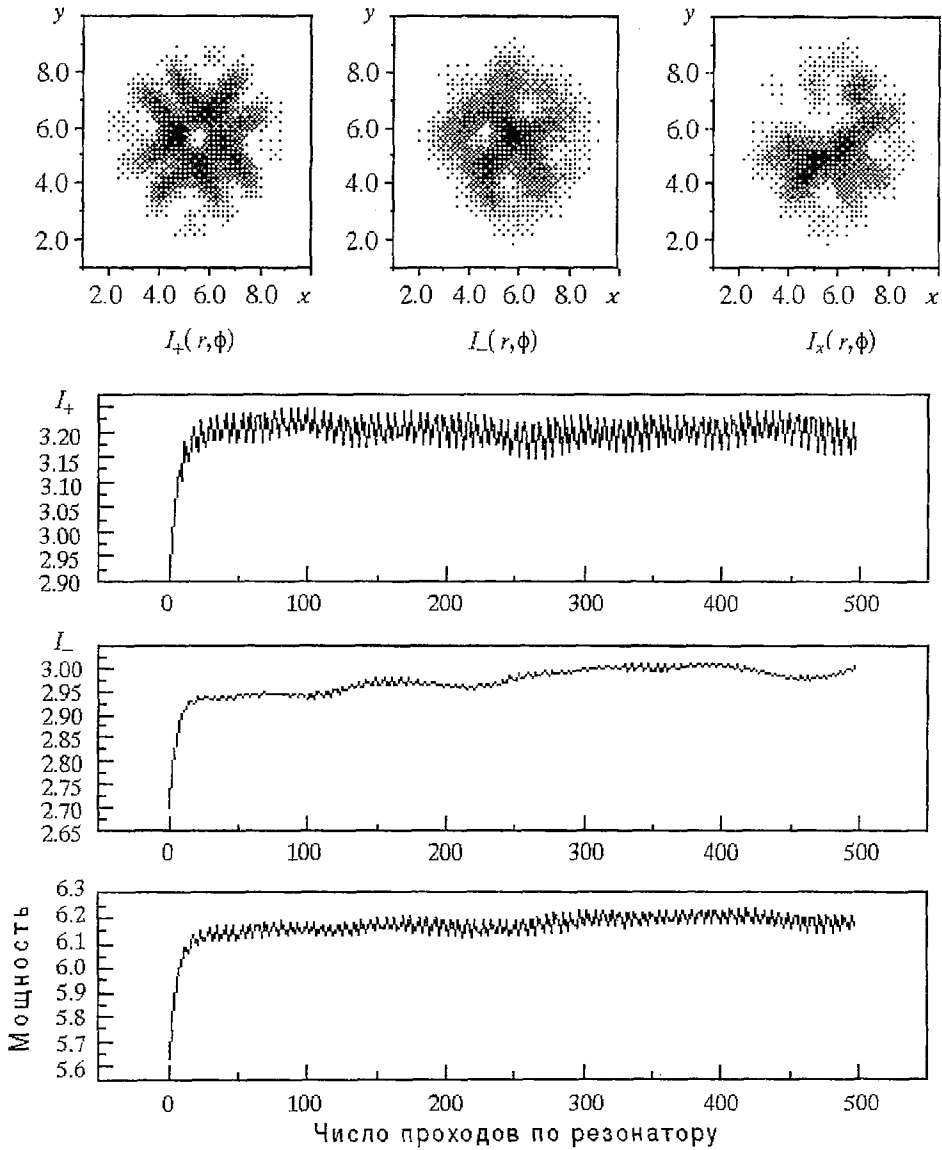


Рис. 7. Поперечный профиль циркулярно поляризованных компонент  $\xi_+$ ,  $\xi_-$  и линейно поляризованного поля. Зависимость интегральных интенсивностей соответствующих компонент и полной мощности от числа проходов по резонатору;  $gl=1.55$ ,  $\mu=0.2$ ,  $\delta=0$ ,  $F=3$

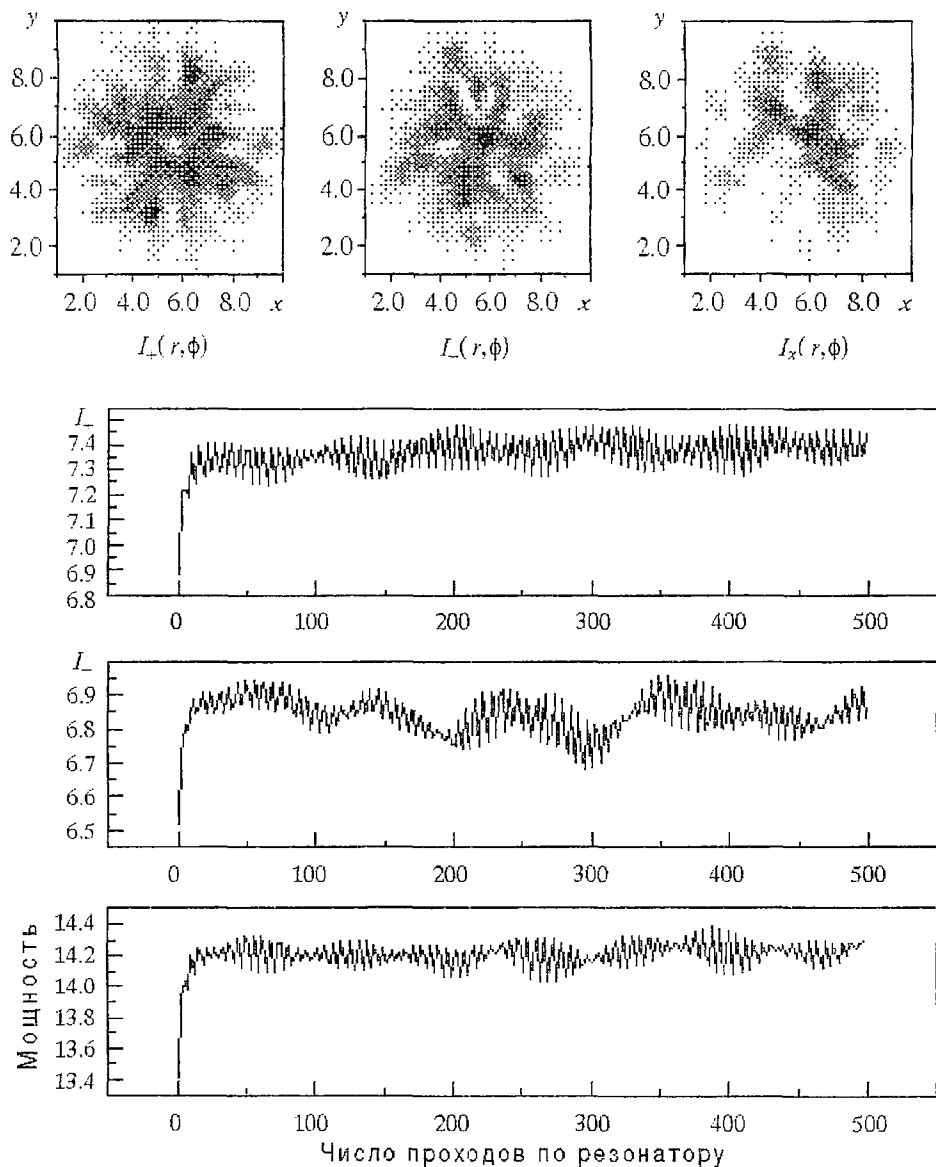


Рис. 8. Режим генерации лазера, показывающий формирование более сложных поперечных структур и усиление низкочастотной модуляции выходной мощности лазера при увеличении коэффициента;  $gl=2$ ,  $\mu=0.2$ ,  $\delta=0$ ,  $F=3$

зависимости полной мощности от числа проходов по резонатору. Это связано с изменением частотных расстояний между поперечными модами вследствие нелинейности активной среды. С увеличением линейного коэффициента усиления низкочастотная модуляция биений поперечных мод становится более выраженной (рис. 8). При дальнейшем увеличении усиления зависимость мощности излучения от времени принимает хаотический характер. При этом поперечный профиль пучка имеет вид неупорядоченной структуры.

### Заключение

Поляризационная динамика лазеров с кольцевым и линейными резонаторами, работающими на основной поперечной моде и на одной или

нескольких продольных модах достаточно хорошо исследована в связи с созданием различного рода лазерных гироскопов, использующих поляризационные эффекты и наложенное на активную среду магнитное поле для уменьшения связи встречных волн и для управления величиной разности частот. В теоретических расчетах, в основном, использовалась модель газового лазера (лазер класса А) или твердотельного лазера (лазер класса В) в рамках теории третьего порядка по полю или в приближении, соответствующем методу скоростных уравнений. Основное внимание уделялось поиску стационарных стабильных решений в резонаторах с существенной циркулярной или линейной анизотропией резонатора, когда поляризация волн в основном определялась резонатором. Лазеры со слабой анизотропией резонаторов обычно использовались в измерительных системах, где измеряемый эффект приводил к изменению поляризации генерируемого излучения или к дихроизму.

В теории учет поляризации поля в лазере, работающем на основной поперечной моде, приводит к увеличению вдвое числа уравнений, описывающих динамику поля, и интерпретация результатов обычно на представляет затруднений, хотя уравнения для активной среды получаются достаточно громоздкими, так как должны отражать динамику подуровней зеемановской структуры рабочего перехода. Для расчета отклика активной среды в лазерном поле большое значение приобрело так называемое  $k-q$  представление, позволяющее уменьшить число существенных релаксационных констант вследствие учета определенной симметрии процессов релаксации.

Как следует из представленного в работе краткого обзора, в последнее время поляризационные явления начали исследоваться в лазерах на основе полупроводниковых активных сред, в лазерах с более сложными типами накачки, а также в лазерах, работающих более чем на одной поперечной моде. При этом удается наблюдать различного рода поляризационные неустойчивости, нетривиальную динамику поляризонных параметров поля, а также пространственно-поляризонные структуры, когда поляризация световой волны зависит от поперечной координаты. Однако режимы с большим числом поперечных мод не рассматривались, а возникающие структуры описывались качественно.

Теория динамических явлений в лазере с многими поперечными модами, учитывающая поляризацию излучаемого поля, является наиболее сложным вариантом теории лазера. В данной работе впервые представлена динамическая модель лазера класса А, включающая зеемановскую структуру подуровней рабочего перехода, вращение изображения в лазерном резонаторе, произвольную анизотропию резонатора и не имеющая ограничений на число поперечных мод. В данной модели расчет поляризуемости активной среды выполнялся на основе приближения скоростных уравнений для поляризонных моментов, однако обобщение решений для лазера класса А не представляет существенных сложностей. Также просто учесть неоднородное уширение линии перехода. На основе численного моделирования динамики поперечных структур исследованы режимы генерации лазера с рабочим однородно уширенным переходом  $j_a=1 \rightarrow j_b=2$  и изотропным кольцевым резонатором. В таком лазере вектор электромагнитного поля может свободно эволюционировать в пространстве, так как изотропный резонатор не накладывает никаких ограничений на его ориентацию. В расчете использовалось разложение полей циркулярно поляризованных компонент по более чем 200 поперечным модам, количество которых ограничивалось только возможностями компьютера. Учет большого количества мод позволил наблюдать сложные поляризационные структуры. Проведено исследование динамики поля, режимов генерации с учетом спонтанной эмиссии. Продемонстрировано существенное влияние спонтанного шума на формирование пространственно-поляризонных структур. Следует отметить, что с появлением возможности моделирования пространственно-поляризонных структур, продемонстрированной в данной работе, появляется также возможность постановки задач о

классификации наблюдаемых многомодовых поляризационных структур и о расчете количественных характеристик, определяющих их «сложность».

*Выполнение данной работы поддерживалось, в частности, грантами NS4000 и NS4300 Международного научного фонда.*

### Библиографический список

1. Special Issue «Laser instabilities» / Eds. N.B. Abraham, L.A. Lugiato, L.M. Narducci // JOSA B. 1985. Vol. B2, № 1.
2. Special Issue «Nonlinear dynamics in lasers» / Eds. D.K. Bandy, A.N. Oraevsky, J.R. Tredicce // JOSA B. 1988. Vol. B5, № 5.
3. Special Issue «Transverse effects in nonlinear optical systems» / Eds. N.B. Abraham, W. Firth // JOSA B. 1990. Vol. B7, № 6,7.
4. Special Issue «Nonlinear optical structures, patterns, chaos» / Eds. L.A. Lugiato // Chaos, Solitons and Fractals. 1994. Vol. 4, № 8,9
5. *Brambilla M., Lugiato L.A., Penna V., Prati F., Tamm C., Weiss C.O.* Transverse laser patterns-II: variational principle for pattern selection, spatial multistability and laser hydrodynamics // Phys. Rev. 1991. Vol. A43. P. 5114.
6. *Staliunas K.* Laser Ginsburg - Landau equation and laser hydrodynamics // Phys. Rev. 1993. Vol. A48. P. 1573.
7. *Lugiato L.A., Oldano C. and Narducci L.M.* Cooperative frequency locking and stationary spatial structures in lasers // J. Opt. Soc. Am. 1988. Vol. B5. P. 879.
8. *Couillet P., Gil L. and Rocca F.* Optical vortices // Opt. Comm. 1989. Vol. 73. P. 403.
9. *Oppo G.-L., D'Alessandro G.P. and Firth W.J.* Spatiotemporal instabilities of lasers in models reduced via center manifold techniques // Phys. Rev. 1991. Vol. A44. P. 4712.
10. *Mandel P., Georghiou M. and Erneux T.* Transverse effects in coherently driven nonlinear cavities // Phys. Rev. 1993. Vol. A47. P. 4277.
11. *Tlidi M., Georghiou M. and Mandel P.* Transverse patterns in nascent optical bistability // Phys. Rev. 1993. Vol. A48. P. 4605.
12. *Lega J., Jakobsen P.K., Moloney J.V. and Newell A.C.* Nonlinear transverse modes of large aspect ratio homogeneously broadened lasers-II: pattern analysis near and beyond threshold // Phys. Rev. 1994. Vol. A49. P. 4201.
13. *Lefever R., Lugiato L.A., Wang K., Abraham N.B. and Mandel P.* Phase dynamics of transverse diffraction patterns in the laser // Phys. Lett. 1989. Vol. A135. P. 254.
14. *Wang K., Abraham N. B. and Lugiato L. A.* Leading role of optical phase instabilities in the formation of certain laser transverse patterns // Phys. Rev. 1993. Vol. A47. P. 1263.
15. *Staliunas K.* Vortices and dark solitons in the two-dimensional Nonlinear Schrödinger Equation // Chaos, Solitons & Fractals. 1994. Vol. 4, № 8/9. P. 1783.
16. *Дьяконов М.И., Перель В.И.* К теории газового лазера в магнитном поле // Оптика и спектр. 1966. Т. 20. С. 472.
17. *Соколов В.А., Фрадкин Э.Е.* Двухмодовые режимы генерации в кольцевом газовом лазере с двухизотопной активной средой // Кв.электроника. 1975. Т. 2. С. 807.
18. *Hanson D., Sargent M.* Theory of Zeeman laser: General formalism // Phys. Rev. 1974. Vol. A9. P. 466.
19. *Веткин В.А., Хромых А.М.* Конкуренция продольных мод в кольцевом лазере с анизотропным резонатором // Кв. электроника. 1972. Т. 3. С. 59.
20. *Гиунов Е.А., Фрадкин Э.Е.* Нелинейное взаимодействие эллиптически-поляризованных волн в кольцевом газовом лазере в магнитном поле // Кв.электроника. 1982. Т. 9. С. 889.
21. *Мельников Л.А., Савельев И.И., Четвериков В.И.* Динамика кольцевого газового лазера с циркулярно-анизотропным резонатором в существенно надпороговом режиме генерации // Кв. электроника. 1984. Т. 5, № 5. С. 937.
22. *Мейтленд А., Дани М.* Введение в физику лазеров. 1978.

23. *Maeda H. and Shimoda K.* Theory of the inverted Lamb dip with a Gaussian beam // *J. Appl. Phys.* 1976. Vol. 47, № 3. P. 1069.

24. *Titov A.* Saturated reflective index frequency shifts in laser stabilized by saturated absorption // *Optics Comm.* 1982. Vol. 419. P. 43.

25. *Мельников Л.А., Дербов В.Л., Новиков А.Д.* Новый метод решения задач о самовоздействии и его применение для расчета асимметрии контура резонансного поглощения в гауссовых пучках // *Кв. электроника.* 1987. Т. 14, № 12. С. 2529.

26. *Дербов В.Л., Мельников Л.А., Новиков А.Д.* Асимметрия резонансов насыщения за счет линзовых и апертурных эффектов при распространении внеосевых гауссовых пучков в нелинейной среде // *Кв. электроника.* 1989. Т. 16, № 8. С. 1652.

27. *Шпак И.В., Фрадкин Э.Е., Хоменко Ю.М., Довбешко А.М., Сидоренко В.С.* Численное исследование дифракционной невзаимности кольцевых оптических генераторов // *Оптика и спектр.* 1983. Т. 55, вып.1. С. 100.

28. *Khanin Ya.I., Kagan A.G., Novikov V.D., Novikov M.A., Polushuik I.N. and Shcherbakov A. I.* // *Opt. Comm.* 1980. Vol. 32. P. 456.

29. *Мельников Л.А., Рабинович Э.М., Тучин В.В.* Газоразрядные лазеры с линзоподобными средами. Саратов: Изд-во СГУ, 1987.

30. *Богатов А.П., Елисеев П.Г.* Нелинейная оптика полупроводниковых лазеров // *Итоги науки и техники. Сер. Радиотехника.* 1986. Т. 35. С.208,

31. *Ramaswamy-Paye M., Fujimoto J.G.* Compact dispersion-compensating geometry for Kerr-lens mode-locked femtosecond lasers // *Opt.Lett.* 1994. Vol. 19. P. 1756.

32. *Cormier J.-F., Piche M., Salin F.* Suppression of beam breakup in self-mode-locked Ti:sapphire lasers // *Opt.Lett.* 1994. Vol. 19. P. 1225.

33. *Cerullo G., De Silvestri S., Magni V.* Self-starting Kerr-lens mode locking of a Ti:sapphire laser // *Opt.Lett.* 1994. Vol. 19. P. 1040.

34. *Gabetta G., Huang D., Jacobson J., Ramaswamy N., Ippen E.P. and Fujimoto J. G.* Femtosecond pulse generation in Ti:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> using a microdot mirror mode locked // *Opt. Lett.* 1991. Vol. 16. P. 1756.

35. *Briges R.E., Boyd R.W., Agraval G.P.* Effect of beam ellipticity on self-mode locking in lasers // *Opt. Lett.* 1993. Vol. 18. P. 2026.

36. *Haus H. A., Fujimoto J. G., Ippen E. P.* Analytic theory of additive pulse and kerr lens mode locking // *IEEE J. Quantum Electron.* 1992. Vol. 28. P. 2086.

37. *Arecchi F.T., Giacomelli G., Ramazza P.L. and Residori S.* Experimental evidence of chaotic itinerancy and spatiotemporal chaos in optics // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. P. 2531.

38. *McDonald G. S. and Firth W. J.* Spatial solitary-wave optical memory // *J. Opt. Soc. Am.* 1990. Vol. B7. P. 1328.

39. *McDonald G. S. and Firth W. J.* Switching dynamics of spatial solitary wave pixels // *J. Opt. Soc. Am.* 1993. Vol. B10. P. 1081.

40. *Brambilla M., Lugiato L.A., Penna M.V., Prati F., Pagani P., Vanotti P., Li M.Y. and Weiss C.O.* The laser as nonlinear element for an optical associative memory // *Opt. Comm.* 1992. Vol. 92. P. 145.

41. *Vanotti P., Pagani P., Lugiato L.A. and Penna M.V.* All-optical associative memory based on the use of the laser as a nonlinear element // *Opt. Lett.* 1992. Vol. 17. P. 1526.

42. *Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu., Larichev A.V. and Zheleznykh N.I.* Controlling transverse-wave interaction in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // *J. Opt. Soc. Am.* 1992. Vol. B9. P. 78.

43. *Smith C.P., Dihadja Y., Weiss C.O., Lugiato L.A., Prati F. and Vanotti P.* Low energy switching of laser doughnut modes and pattern recognition // *Opt. Comm.* 1993. Vol. 102. P. 505.

44. *Kolobov M.I. and Sokolov I.V.* Spatial behaviour of squeezed states of light and quantum noise in optical images // *Sov.Phys. JETP.* 1989. Vol. 69. P. 1097; Squeezed states of light and quantum noise-free optical images // *Phys. Lett.* 1989. Vol. A140. P.

101; Multimode squeezing, antibunching in space and noise-free optical images // *Europhys. Lett.* 1991. Vol. 15. P. 271.

45. *La Porta A. and Slusher R.E.* Squeezing limits at light parametric gains // *Phys. Rev.* 1991. Vol. A44. P. 2013.

46. *Lugiato L.A. and Castelli F.* Quantum noise reduction in a spatial dissipative structure // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68. P. 3284.

47. *Lugiato L.A. and Gatti A.* Spatial structure of a squeezed vacuum // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. P. 3868.

48. *Grynberg G. and Lugiato L.A.* Quantum properties of hexagonal patterns // *Opt. Comm.* 1993. Vol. 101. P. 69.

49. *Lugiato L.A., Castelli F.* Non-Local Behaviour in the Far-Field of the Optical Parametrical Oscillator Above Threshold, Paper QMD2 // Conference on Lasers and Elektro-Optic. European Quantum Electronics Conference. P. 8 September, 1996, Hamburg, Germany.

50. *Law C.T. and Swartzlander G.A.Jr.*, Polarized optical vortex solitons: instabilities and dynamics in Kerr nonlinear media // *Chaos, Solitons Fractals.* 1994. Vol. 4, № 8/9. P. 1759.

51. *Gudelev V.G., Svirina L.P., Zhurik Yu.P.* Antiphase polarization dynamics influenced by noise in a single-mode gas laser with anisotropic cavity // *Laser Optics '95: Nonlinear Dynamics in Lasers / Eds Neal B. Abraham, Yakov I. Khanin.* // *Proc. SPIE.* 1996. Vol. 2792. P. 118.

52. *Kul'minskii A.M., Serrat C., Vilaseca R.A., Corbalan R.* Polarization effects in the dynamics of optically pumped lasers // *Laser Optics '95: Nonlinear Dynamics in Lasers / Eds Neal B. Abraham, Yakov I. Khanin.* // *Proc. SPIE.* 1996. Vol. 2792. P. 125.

53. *Martin-Regalado J., San Miguel M., Abraham N.B., Prati F., Tissoni G.* Polarization properties and transverse mode characteristics in quantum well vertical cavity surface-emitting lasers // *Laser Optics '95: Nonlinear Dynamics in Lasers / Eds Neal B. Abraham, Yakov I. Khanin.* *Proc. SPIE.* 1996. Vol. 2792. P. 136.

54. *Milovsky N.D., Khanin Ya.I., Khandokhin P.A., Bielawski S., Derozier P., Glorieux D.P.* Dynamics of class-B laser with two elliptically polarized modes // *Laser Optics '95: Nonlinear Dynamics in Lasers / Eds Neal B. Abraham, Yakov I. Khanin.* // *Proc. SPIE.* 1996. Vol. 2792. P. 148.

55. *Voitovich A.P., Kul'minskii A.M., Loiko Yu.V., Severikov V.N.* Spontaneous polarization symmetry breaking in gas lasers and its observation possibilities // *Laser Optics '95: Nonlinear Dynamics in Lasers / Eds Neal B. Abraham, Yakov I. Khanin.* // *Proc. SPIE.* 1996. Vol. 2792. P. 157.

56. *Yasinskii V. M.* Polarization dynamics in He-Ne ring laser // *Laser Optics '95: Nonlinear Dynamics in Lasers / Eds Neal B. Abraham, Yakov I. Khanin.* // *Proc. SPIE.* 1996. Vol. 2792. P. 166.

57. *Melnikov L.A., Veshneva I.V., Konukhov A.I.* Transverse pattern dynamics in short-pulse mode-locked solid-state laser // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1994. Vol. 4, № 8/9. P. 1535.

58. *Arnoud J.A.* Nonorthogonal optical waveguides and cavities // *The Bell System Technical Journal.* 1970. Vol. 49, № 9. P. 2311.

59. *Савельев И.И., Хромых А.М.* Продольные моды объемного кольцевого резонатора // *Квантовая электроника.* 1976. Т. 3, № 7. С. 1517.

60. *Виницкий С. И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П.* Топологические фазы в квантовой механике и поляризационной оптике // *УФН.* 1990. Т. 160, вып.6.

61. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах / Под ред. Ю.Л. Климонтовича.* 1974.

62. *Раутиан С. Г., Смирнов Г. И., Шалагин А.М.* Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул. 1979.

63. *Мельников Л.А.* Пространственно-временная динамика световых полей в лазерах, резонансных средах и оптических волноводах. Дисс.... д-ра. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 1992.

64. Segev M., Solomon R. and Yariv A. Manifestation of Berry's Phase in Image-Bearing Optical Beams // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69, № 4. P. 590.

65. Собельман И.И. Введение в теорию атомных спектров. М., 1963.

66. Савельев И.И. К теории зеэмановского газового лазера бегущей волны при больших интенсивностях излучения // Квантовая электроника. 1979. Т.6. С.632.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 28.10.96  
после переработки 27.12.96

## TRANSVERSE POLARISATION DYNAMICS OF FIELD STRUCTURE IN LASERS

*L.A. Melnikov, A.I. Konukhov, M.V. Ryabinina*

Theoretical and numerical models are presented for the investigation of transverse polarization pattern dynamics in lasers having the cavities with image rotation taking into account the magnetic sublevels structure of transition. For class A laser with an isotropic cavity and without restriction on the transverse number of modes a field dynamics, regimes of oscillations, the spontaneous emission on generated structures have been investigated effect numerical simulations



*Мельников Леонид Аркадьевич* - родился в 1949 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1971). С 1978 года - кандидат, с 1992 года - доктор физико-математических наук. Профессор кафедры оптики с 1992 года. Область научных интересов: физика лазеров, лазерная спектроскопия, лазерные и волоконно-оптические измерительные системы, оптическая гироскопия, нелинейная динамика лазеров и оптических систем, нелинейное распространение световых пучков и импульсов в волноводных и резонансных средах, лазеры сверхкоротких импульсов, поперечная нелинейная оптика. Автор более чем 100 научных публикаций, член Оптического общества Америки, Международного общества по оптической технике.



*Конюхов Андрей Иванович* - родился в 1972 году. Окончил физический факультет Саратовского университета. С 1994 году аспирант кафедры оптики СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика лазеров и оптических систем. Стипендиат программы «Соросовские аспиранты» (1995, 1996).



*Рябинина Мария Викторовна* - родилась в 1971 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1993). С 1995 года является аспиранткой кафедры оптики СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика лазеров и оптических систем, лазерная спектроскопия.



## ПОЛИСПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

*Г.Н. Бочков, К.В. Горохов, А.А. Дубков, С.Н. Желтов, Г.А. Марков*

Рассмотрены методы формирования, передачи и восстановления в приемном устройстве биспектральных структур сигналов для радио-, акустических и оптических систем передачи массивов информации в виде изображений. На основе результатов теоретического расчета и стендовых экспериментов установлено, что биспектральный метод обеспечивает возможность повышения скорости передачи больших информационных массивов в ситуации со значительным уровнем помех, исключая возможность применения синхронных способов передачи информации.

### Введение

К настоящему времени известны и активно развиваются методы полиспектрального анализа случайных процессов в физике плазмы, оптике, акустике, технике и медицине как адекватное средство исследования нелинейной физической природы процессов [1,2].

Авторами предложено [3] использовать спектры высших порядков искусственно генерируемых электромагнитных (вообще говоря, любых волновых) процессов в качестве носителей информационного сигнала. Это, с одной стороны, дает возможность развития высокоинформативных методов полиспектрального зондирования различных физических объектов, а с другой - является принципиально новым шагом в развитии средств и техники связи.

При реализации предлагаемого метода возникают две задачи: во-первых, задача синтеза передаваемого сигнала с заданным спектром  $n$ -го порядка; во-вторых, задача полиспектрального анализа принимаемого сигнала и идентификации информации, содержащейся в его спектре  $n$ -го порядка, в условиях, когда принимаемый сигнал представляет собой смесь переданного сигнала и помехи.

В данной работе рассматриваются методы решения указанных задач синтеза и анализа для биспектрально-организованных сигналов (БОС), то есть сигналов, имеющих заданную структуру простейшего из полиспектров - спектра 3-го порядка - биспектра. Описывается лабораторный стенд, на котором продемонстрирована возможность передачи информации с помощью БОС [3,4]. Обсуждаются физические основы высокой помехоустойчивости и высокой скорости биспектрального метода передачи информации.



# 1. Синтез биспектрально-организованных сигналов

## 1.1. По аналогии со спектральной плотностью мощности

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X_T(f) X_T^*(f) \rangle / T, \quad (1)$$

биспектр случайного процесса  $x(t)$  с ограниченной средней мощностью можно определить как

$$B(f_1, f_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X_T(f_1) X_T(f_2) X_T^*(f_1 + f_2) \rangle / T, \quad (2)$$

где  $X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} [x(\tau) - \langle x(\tau) \rangle] \exp(-i2\pi f\tau) d\tau$ ; «\*» - комплексное сопряжение. Для стационарных случайных процессов формулы (1) и (2), как показано в [5], эквивалентны широко известным определениям спектра мощности и биспектра через преобразования Фурье корреляционных функций 2-го и 3-го порядков [1,2].

В широком смысле задача синтеза БОС может быть сформулирована как задача синтеза такого сигнала  $x(t)$ , биспектр которого в базовой области  $f_1 \geq f_2 \geq 0$  биспектральной плоскости тождествен (или почти тождествен) некоторой комплексной функции  $B_0(f_1, f_2)$ , задаваемой парой поверхностей

$$b_0(f_1, f_2) = |B_0(f_1, f_2)| \text{ и } \Psi_0(f_1, f_2) = \arg\{B_0(f_1, f_2)\} \text{ (или } \text{Re}\{B_0(f_1, f_2)\} \text{ и } \text{Im}\{B_0(f_1, f_2)\}).$$

Вместе с тем, столь общая постановка задачи синтеза для широкой области приложений не является конструктивной, так как не учитывает возможностей проведения последующего анализа синтезированного сигнала и восстановления содержащейся в его биспектре информации.

Поясним это, ориентируясь на широкий класс методов цифрового биспектрального анализа [1], которые базируются на использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) и при осуществлении анализа в полосе частот от 0 до  $F_{\max}$  с шагом  $\Pi = F_{\max} / M$  обеспечивают вычисление  $[M^2/4]^*$  отсчетов биспектральной оценки в декартовой сетке частот  $\{(n\Pi, m\Pi), m \leq n \leq M - m, l \leq m \leq [M/2]\}$ . Получаемые при этом отсчеты  $B^\wedge(n\Pi, m\Pi)$  при условии, что анализируемый процесс обладает соответствующим эргодическим свойством, с ростом времени наблюдения стремятся к величинам

$$B_w(n\Pi, m\Pi) = \langle B^\wedge(n\Pi, m\Pi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 W(n\Pi - f_1, n\Pi - f_2) B(f_1, f_2). \quad (3)$$

В соотношении (3) функция биспектрального окна  $W(f_1, f_2)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 W(f_1, f_2) = \Pi_w^2 W(0, 0) = 1 \quad (4)$$

где  $\Pi_w$  - эквивалентная ширина биспектрального окна. Совокупность отсчетов сглаженного биспектра (3) при заданном биспектральном окне  $W(f_1, f_2)$  и шаге анализа в частотной области  $\Pi$  будем называть *биспектр-образом* сигнала  $x(t)$ . Как видим, даже если результатом решения задачи синтеза будет сигнал с требуемым биспектром  $B_0(f_1, f_2)$ , результатом анализа этого сигнала, вообще говоря, могут быть различные биспектр-образы в зависимости от выбранных разрешения и формы биспектрального окна.

Исходя из этого, целесообразно сузить задачу синтеза БОС и сформулировать ее как задачу синтеза сигнала с определенным биспектр-образом  $\{B_w(n\Pi, m\Pi)\}$ . Естественным подходом к решению этой задачи является

\* Здесь и далее [...] - целая часть числа внутри скобок

формирование сигнала

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sum_{n=m}^{M-m} g_{n,m}(t) \quad (5)$$

в виде суммы некоторых элементарных сигналов  $g_{n,m}(t)$ , каждый из которых отвечает за образование соответствующего отсчета биспектр-образа  $B_W(n\Pi, m\Pi)$ . При этом для обеспечения независимости образуемых отсчетов биспектр-образа суммарного сигнала элементарные сигналы должны быть взаимонезависимы и их собственные биспектр-образы  $\{B_{W^{n,m}}(n\Pi, m\Pi)\}$  должны удовлетворять соотношению

$$B_{W^{n,m}}(n_1\Pi, m_1\Pi) = \begin{cases} B_W(n\Pi, m\Pi), & \text{при } (n_1, m_1) = (n, m), \\ 0, & \text{при } (n_1, m_1) \neq (n, m). \end{cases} \quad (6)$$

Этот подход к решению задачи синтеза сигналов с заданными биспектральными свойствами используется в изложенном ниже способе синтеза квазидетерминированных БОС.

**1.2.** Как следует из (2), биспектр описывает статистическую связанность троек спектральных компонент на гармонически связанных частотах  $f_1, f_2$  и  $f_3 = f_1 + f_2$ . Поэтому в основе принципа действия любого синтезатора БОС лежит некоторый способ, обеспечивающий требуемую степень биспектральной связанности триплетов спектральных составляющих генерируемого БОС.

Предложенные в [6,7] аналоговые методы синтеза БОС связаны с формированием случайных процессов с изменяющимися во времени амплитудами и/или фазами взаимосвязанных спектральных составляющих, порождаемых нелинейными преобразованиями исходных шумовых сигналов. При этом принципиальные трудности синтеза заключаются в обеспечении стационарности и строгой определенности статистических характеристик задающих генераторов исходных шумов [6].

Основная идея способа синтеза квазидетерминированного БОС, впервые предложенного в работе [8], заключается в том, что в качестве отдельных его элементов, образующих соответствующие отсчеты биспектр-образа, используются биспектрально связанные триплеты

$$g_{(n,m)}(t) = \sum_{k=1}^3 2A_{(n,m),k} \cos(2\pi F_{(n,m),k} t + \varphi_{(n,m),k}), \quad (7)$$

где  $F_{(n,m),3} = F_{(n,m),1} + F_{(n,m),2}$ ;  $\varphi_{(n,m),1}, \varphi_{(n,m),2}$  - независимые равномерно распределенные в  $[0, 2\pi]$  случайные фазы;  $\varphi_{(n,m),3} = \varphi_{(n,m),1} + \varphi_{(n,m),2} - \Psi_{(n,m)}$ ;  $\Psi_{(n,m)}$  - бифаза  $(n,m)$ -го триплета. При этом, стабильность биспектральных характеристик синтезируемого сигнала обеспечивается высокой стабильностью, гармонической связанностью и взаимосфазированностью составляющих элементарных триплетов.

Структура биспектра  $S_3(f_1, f_2)$  (его несглаженный биспектр-образ) синтезируемого сигнала  $x(t)$  представляет собой совокупность  $\lfloor M^2/4 \rfloor$  пиков в точках  $(F_{(n,m),1}, F_{(n,m),2})$  биспектральной плоскости. Эти точки должны быть расположены достаточно близко к соответствующим отсчетным точкам  $(n\Pi, m\Pi)$  так, чтобы

$$W(n_1\Pi - F_{(n,m),1}, m_1\Pi - F_{(n,m),2}) \equiv \begin{cases} W(0,0), & \text{при } (n,m) = (n_1, m_1); \\ 0, & \text{при } (n,m) \neq (n_1, m_1). \end{cases} \quad (8)$$

Интенсивности и фазы биспектр-образа в этих точках являются двумя независимыми биспектральными параметрами соответствующих триплетов (7)

$$|B_W(n\Pi, m\Pi)| = (1 + \delta_{nm}) A_{(n,m),1} A_{(n,m),2} A_{(n,m),3} / \Pi W^2, \quad (9)$$

$$\arg B_W(n\Pi, m\Pi) = \Psi_{(n,m)} = \varphi_{(n,m),1} + \varphi_{(n,m),2} - \varphi_{(n,m),3}, \quad (10)$$

где  $\delta_{nm}$  - символ Кронекера.

Несвязанность составляющих, относящихся к различным триплетам и, следовательно, однозначность биспектр-образа БОС в целом обеспечивает *принцип запрета*: любая тройка частот составляющих различных триплетов не должна образовывать гармонически связанную тройку частот, то есть

$$F_{(n_1,m_1),i} + F_{(n_2,m_2),j} \begin{cases} = F_{(n_3,m_3),k}, & \text{при } (n_1,m_1)=(n_2,m_2)=(n_3,m_3) \text{ и } i=1, j=2, k=3; \\ \neq F_{(n_3,m_3),k}, & \text{при других } (n_1,m_1), (n_2,m_2), (n_3,m_3) \text{ и } i, j, k. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, квазидетерминированный БОС содержит  $[M^2/4]$  биспектрально связанных триплетов, для формирования которых необходимо, в общем случае, до  $k_M=3[M^2/4]$  гармонических составляющих.

В [8] был предложен способ организации триплетов синтезируемого сигнала, который обеспечивает существенное уменьшение полного числа гармонических составляющих и предполагает использование двух групп «опорных» составляющих. Первая из них включает составляющие на частотах  $F_{(n,m),1} = F_{m,1}$ , каждая из которых является общей для триплетов, отвечающих элементам  $B_W(n\Pi, m\Pi)$  биспектр-образа с одинаковыми значениями индекса  $n$ . А каждая из компонент второй группы составляющих на частотах  $F_{(n,m),2} = F_{m,2}$  является общей для триплетов, соответствующих элементам  $B_W(n\Pi, m\Pi)$  с одинаковыми значениями индекса  $m$ . При этом для каждого триплета  $g_{(n,m)}(t)$  БОС независимой - информативной составляющей является составляющая на суммарной частоте  $F_{(n,m),3} = F_{n,1} + F_{m,2}$ .

Таким образом, одним из возможных способов выбора частот составляющих синтезируемых триплетов может быть следующий:

$$\begin{cases} F_{(n,m),1} = F_{n,1} = n\Pi + \Delta_{n,1}, & 1 \leq n \leq M-1, \\ F_{(n,m),2} = F_{m,2} = m\Pi + \Delta_{m,2}, & 1 \leq m \leq [M/2], \\ F_{(n,m),3} = F_{n,1} + F_{m,2}, & 1 \leq m \leq [M/2]; m \leq n \leq M-m; \end{cases} \quad (12)$$

где смещения  $\Delta_{k,i}$  выбираются так, чтобы с одной стороны удовлетворить условиям однозначности биспектр-образа (11), а с другой - обеспечить для выбранного окна  $W(f_1, f_2)$  требуемую точность выполнения условия (8).

При цифровой реализации синтеза квазидетерминированного БОС целесообразно использовать такую последовательность операций.

**А.** Для заданного биспектр-образа  $B(n\Pi, m\Pi)$  согласно (9),(10) определяются амплитуды и фазы  $k_M = (M-1) + [M/2] + [M^2/4]$  составляющих БОС в частотной области  $X(f)$

$$\begin{aligned} X(f) = & \sum_{n=1}^{M-1} A_{n,1} \exp(i\varphi_{n,1}) \delta(f - F_{n,1}) + \sum_{m=1}^{[M/2]} A_{m,2} \exp(i\varphi_{m,2}) \delta(f - F_{m,2}) + \\ & + \sum_{m=1}^{[M/2]} \sum_{n=m}^{M-m} A_{(n,m),3} \exp(i\varphi_{(n,m),3}) \delta(f - F_{(n,m),3}), \quad f \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом, как следует из (9),(10), амплитуды и фазы опорных составляющих произвольны в общем случае и могут быть получены с помощью датчика случайных чисел.

**Б.** Посредством обратного дискретного преобразования Фурье вычисляется реализация БОС  $x(t)$  во временной области. Отметим, что для выполнения этой операции с использованием алгоритмов БПФ, все частоты  $F_{(n,m),i}$  должны быть кратны некоторой частоте  $f_0$ .

Синтез БОС, у которых частоты составляющих кратны некоторой заданной частоте  $f_0$ , целесообразно осуществлять, в общем случае, как при цифровой, так и при аналоговой реализации биспектр-синтезаторов. Это обусловлено тем, что синтезируемый сигнал при этом является периодическим, и в результате анализа его биспектра на периоде  $T=1/f_0$ , содержащем всю информацию о каждом из  $[M^2/4]$  элементов БОС, заданный биспектр-образ сигнала может быть восстановлен безошибочно.

Анализ наборов частот триплетов (12) с учетом условий (8),(11) позволил найти семейство периодических квазидетерминированных БОС [8], имеющих при заданном  $M$  минимальную длительность периода

$$T = (2[M/2] - 1)Q/\Pi. \quad (14)$$

Здесь параметр  $Q$  выбирается, исходя из требуемой степени идентичности передаваемого и принимаемого биспектр-образов [8]: чем больше  $Q$ , тем точнее выполняется условие их близости (8). Вместе с тем, как следует из (14), выбор параметра  $Q$  должен осуществляться на основе разрешения противоречия между требованиями повышения близости передаваемого и принимаемого биспектр-образов и снижения длительности периода БОС. Чем ближе форма частотных характеристик узкополосных фильтров применяемого биспектр-анализатора к идеальной прямоугольной, а биспектральное окно - к идеальному шестиугольному окну

$$W(f_1, f_2) = 4/(3\Pi^2)\lambda_{\Pi}(f_1)\lambda_{\Pi}(f_2)\lambda_{\Pi}(f_1+f_2), \quad (15)$$

где  $\lambda_{\Pi}(f)=\{1, \text{при } |f| \leq \Pi/2; 0, \text{при } |f| > \Pi/2\}$ , тем ближе может быть параметр  $Q$  к значению 2, являющемуся минимальным для разработанных алгоритмов синтеза [8].

## 2. Биспектральный анализ

В теории и практике цифрового биспектрального оценивания известно несколько различных методов измерения биспектров [1,9]. Как показывает анализ, наиболее экономичными (как по требуемым объемам памяти ЭВМ, так и по времени вычислений) являются так называемые методы прямого типа, основанные на определении биспектра (2).

Алгоритмы биспектрального оценивания прямого типа включают в себя, в соответствии с (2), следующие две основные операции: оценивание с заданным разрешением по частоте  $\Pi_0$  комплексного спектра сигнала  $X_T(f)$  и вычисление корреляций 3-го порядка (бикорреляций) между спектральными компонентами на гармонически связанных частотах. При этом в зависимости от того, как производят усреднение при вычислении бикорреляций, различают методы с усреднением по времени, по частоте и смешанные. Как показано в [9], наиболее экономичными по требуемому объему вычислений являются алгоритмы, использующие только усреднение по времени. Их применение позволяет обеспечить прием и обработку передаваемой информации в текущем времени.

С другой стороны, для анализа квазидетерминированных БОС, имеющих в биспектре достаточно насыщенные информационные образы, более предпочтительными оказываются алгоритмы биспектрального оценивания на основе метода комплексной демодуляции [1,9]. Этот метод является фактически наиболее экономичным способом получения биспектральных оценок прямого типа с усреднением в частотной области [9]. Поэтому оценки на основе комплексной демодуляции обладают преимуществами оценок с усреднением в частотной области по сравнению с оценками, использующими только усреднение по времени. В частности, при достаточно большой длине сегмента данных, по которым вычисляются комплексные члены демодуляции, и разрешении, равным шагу синтеза  $\Pi$ , эффективное биспектральное окно очень близко к идеальному окну (15) [9]. Если при этом длина указанного сегмента равна периоду БОС  $T$ , то в этих

оценках, как показали тестовые эксперименты, практически полностью подавляются вклады «паразитных» спектральных троек на частотах  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3=f_1+f_2+n/T$  ( $n \neq 0$ ). Влияние таких небиспектральных троек, определяющее статистические ошибки анализа, обусловлено в общем случае конечностью времени измерения.

Результаты теоретического анализа точности биспектральных измерений, проведенного для методов биспектрального оценивания прямого типа, приведены в [10]. Как показано в [10] (где также приведены результаты анализа точности измерений спектра мощности), негауссовость анализируемого процесса приводит к возникновению оптимального значения полосы анализа, при котором для заданного времени измерения обеспечивается наилучшее качество биспектральной оценки. Это обстоятельство приобретает принципиальное значение при приеме и анализе искусственных БОС, где при заранее известных статистических характеристиках высоких порядков сигналов оптимальная полоса биспектрального анализа может быть точно рассчитана.

### 3. Биспектральный канал передачи информации

**3.1.** Рассмотренные выше методы синтеза и анализа реализованы авторским коллективом на лабораторном стенде (рис. 1), моделирующем биспектральный канал связи. Передающая сторона включает в себя компьютер-синтезатор, на котором программным способом осуществляется синтез информационного квазидетерминированного БОС. Синтезированный цифровой сигнал преобразуется в аналоговый с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и после необходимого сглаживания в блоке фильтров низкой частоты (ФНЧ) поступает на передатчик, через который сигнал попадает в линию связи. В качестве линии связи на стенде предусмотрены акустический, сверхнизкочастотный электромагнитный и инфракрасный каналы распространения сигнала. На принимающей стороне сигнал с приемного датчика после необходимого ограничения по спектру в блоке ФНЧ преобразуется посредством аналого-цифрового преобразователя (АЦП) в цифровой сигнал, который подвергается биспектральному анализу в компьютере-анализаторе. Программное обеспечение биспектрального анализа позволяет проводить обработку и восстанавливать передаваемые образы на экране монитора как в режиме однократного отсчета (когда выводится только конечный результат обработки сигнала, принятого в течение требуемого интервала времени), так и в режиме текущего наблюдения (когда производится скользящее усреднение биспектральной оценки по времени). Последний режим позволяет не только следить за процессом формирования биспектр-образа, но и принимать биспектр-образы, изменяющиеся во времени. В диапазоне до 500 Гц режим текущего наблюдения обеспечивает проведение биспектрального анализа принимаемых сигналов в реальном масштабе времени.

Вычислительная техника стенда представлена двумя компьютерами 486DX2 со встроенными 12-ти разрядными АЦП/ЦАП (L-1210) с частотами квантования до 90 кГц. Блоки ФНЧ на передающей и принимающей сторонах стенда представляют собой ФНЧ Бесселя 8-го порядка с задаваемой частотой среза (2 Гц, 20 Гц, 2.5 кГц, 10 кГц) и регулируемым коэффициентом передачи в полосе пропускания (0 дБ ÷ 66 дБ).

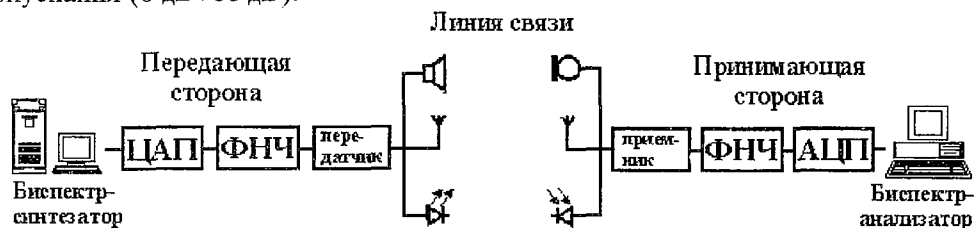


Рис. 1. Структурная схема лабораторного стенда

Рис. 2 иллюстрирует результаты демонстрационного сеанса передачи определенного информационного массива по инфракрасному каналу во время доклада авторов на юбилейной конференции ННГУ [11,12], посвященной «100-летию радио» и «50-летию радиофизики», что символически отражено на двух рельефах, переданных одним биспектрально организованным сигналом (рис. 2, в-е).

Сформированный в компьютере-синтезаторе квазидетерминированный БОС (с параметрами  $M=100$  и  $Q=247/99$ ) выводился через ЦАП со скоростью 8160 отсч./с так, что длина периода составила 24.7с. В пространство сигнал излучался с помощью ИК передатчика, выполненного на базе светодиода АЛ-107.

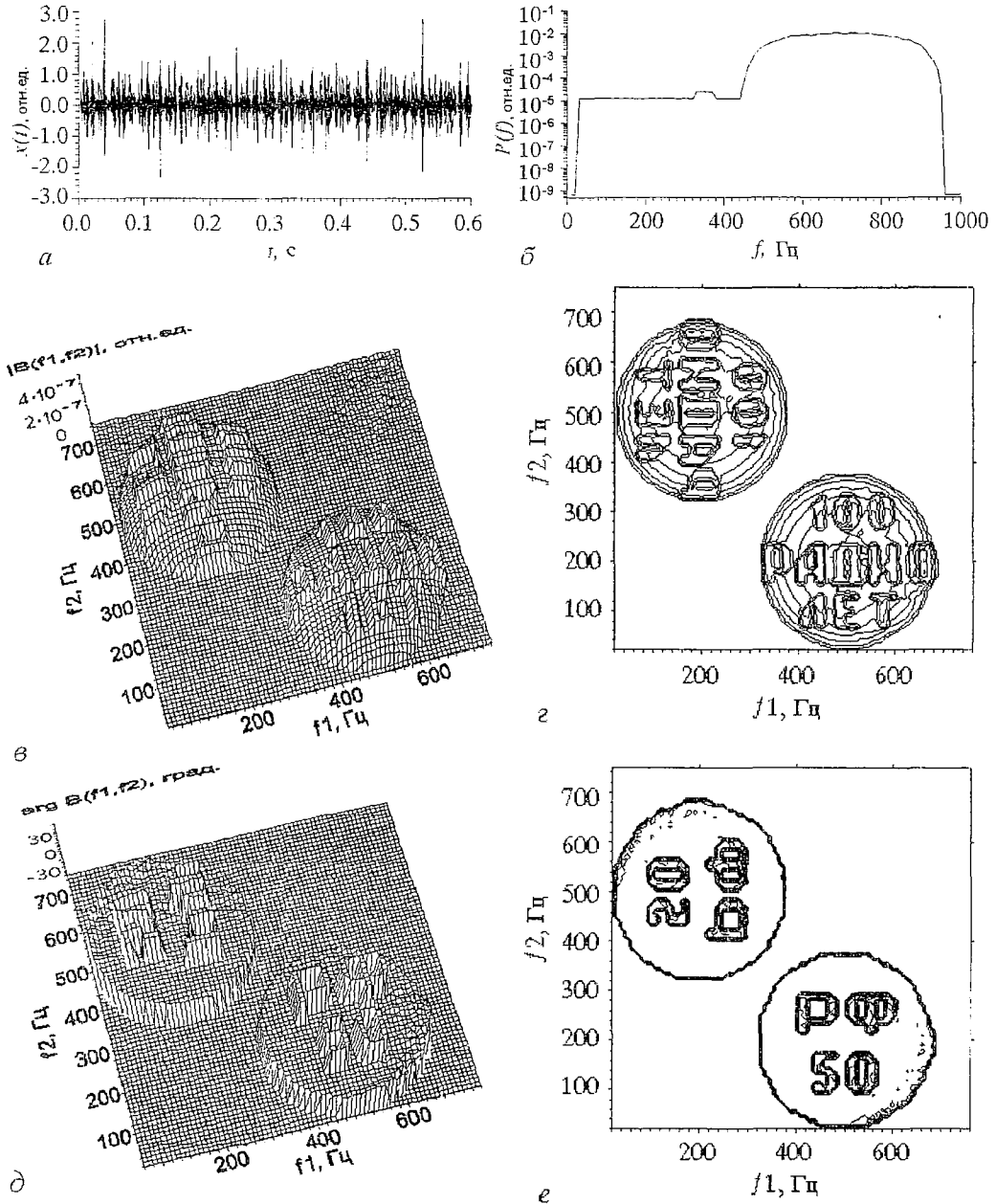


Рис. 2. Результаты синтеза биспектрально организованного сигнала, передачи его по каналу связи, спектральной и биспектральной обработки принятого сигнала: фрагмент сигнала - (а), спектр мощности - (б), рельеф модуля биспектра - (в) и его сечения - (г), рельеф бифазы - (д) и его сечения - (е)

Прием сигнала осуществлялся посредством ИК приемника с фотодиодом ФД-7Г и расположенного от передатчика на расстоянии 5 м. Частота среза ФНЧ на приемной и передающей сторонах была 2.5 кГц. На стенде были успешно проведены также тестовые исследования акустического и НЧ электромагнитного каналов передачи информативных БОС [11].

**3.2.** Качественным отличием биспектрального способа организации системы связи является то, что одновременная передача информации сразу обо всех структурных элементах сообщения по одному каналу, в отличие от спектрального метода, осуществляется в виде изображений или рельефов. Эта особенность является физической основой высокой помехоустойчивости и высокой информативности передаваемого сигнала при наличии широкого класса помех. Метод обеспечивает возможность резкого ускорения передачи больших массивов информации. Нетрудно показать, что величина скорости передачи  $C = I/TF_{\max}$ , отнесенная к единице используемой полосы  $F_{\max}$ , для спектрального метода организации параллельной передачи элементов сообщения не зависит от числа  $I$  одновременно передаваемых элементов и падает с увеличением базы  $ТП$  отдельных подканалов системы как  $C_p = 1/ТП$ . В то же время, при организации биспектральной системы параллельной передачи элементов сообщения, в силу того, что с ростом базы  $ТП$  число одновременно передаваемых элементов  $I = [M^2/4]$  может расти по квадратичному закону  $I \approx (ТП)^2$ , скорость передачи  $C_B = 1/4Q$  не зависит от величины базы отдельных подканалов системы и определяется, в конечном счете, только параметром синтеза БОС  $Q$ . Отсюда видно, что при одинаковых значениях базы  $ТП$  спектральной и биспектральной систем передачи, относительный выигрыш биспектральной системы по скорости

$$C_B/C_p = ТП/(4Q) \quad (16)$$

может достигать при  $ТП \gg 4Q$  весьма существенных значений. Это иллюстрируется таблицей, где для ряда значений  $ТП$  приведены значения отношения (16) при  $Q=2$ . Заметим также, что для сигнала на рис. 2, синтезированного при  $Q=247/99 \approx 2.49$  и переданного по инфракрасному каналу при величине базы подканала  $ТП=247$ , соотношение (16) дает  $C_B/C_p = 99/4 = 24.75$ .

Приведем результаты расчета помехоустойчивости спектральной и биспектральной систем передачи  $I$  двоичных элементов сообщения к аддитивному белому гауссовому шуму. В таблице относительный выигрыш биспектральной системы по скорости сопоставляется со значениями  $(h^2/I)_p / (h^2/I)_B$  - энергетического выигрыша биспектральной системы (здесь  $h^2 = E/PN_0$ , где  $E$  - энергия сигнала,  $N_0$  - односторонняя спектральная плотность мощности шума) при нескольких заданных вероятностях ошибки  $P$  в отдельных подканалах системы. Данное сопоставление показывает, что, если при относительно небольших значениях базы ( $ТП=30 \dots 100$ ) переход от спектрального к биспектральному методу дает выигрыш в скорости ценой увеличения энергетических затрат на передачу единицы информации (пусть даже и не слишком большого, как при  $ТП=100$ ), то

Таблица

ТП	$C_B/C_p$	$(h^2/I)_p / (h^2/I)_B$ , дБ		
		$P=10^{-2}$	$P=10^{-3}$	$P=10^{-4}$
30	3.75	-2.77	-2.91	-3.06
100	12.5	-0.67	-0.69	-0.70
300	37.5	0.08	0.27	0.33
1000	125.	0.13	0.41	0.56

при  $T\Pi \geq 300$  этот переход обеспечивает как выигрыш по энергетике, так и существенный выигрыш по скорости передачи.

**3.3.** Принципиальные возможности к передаче информации для любого канала связи характеризуются, как известно, его пропускной способностью, которая определяется как максимальная средняя скорость безошибочной передачи при неограниченной продолжительности сеанса связи. В свою очередь, пропускная способность зависит от фонового уровня собственных шумов канала.

Для спектрального канала этот уровень задается естественным спектром мощности помехи и определяется известной линейной флуктуационно-диссипационной теоремой (ФДТ) Найквиста - Каллена - Велтона [13]. Рецепты для расчета естественных уровней спектров высших порядков дают обобщенная нелинейная ФДТ [14-16] и вытекающие из нее нелинейные флуктуационно-диссипационные соотношения. В частности, биспектр естественных шумов как мешающий фон биспектрального канала определяется квадратичной ФДТ Ефремова - Стратоновича [17,18].

Одним из основных источников шума в канале является входной усилитель приемника. В свою очередь, минимальный уровень собственного шума усилителя определяется естественным шумом и нелинейностью входной цепи. Для безынерционного усилителя, вольт-амперная характеристика входного элемента которого

$$U = R_1 J + 1/2 R_2 J^2 + \dots, \quad (17)$$

линейная ФДТ определяет спектр мощности

$$P_N(f) = 2k_B \Theta R_1, \quad (18)$$

а квадратичная ФДТ - биспектр

$$B_N(f_1, f_2) = 6(k_B \Theta)^2 R_2, \quad (19)$$

эффективной флуктуационной ЭДС на входе усилителя. В (18),(19)  $k_B$  - постоянная Больцмана,  $\Theta$  - абсолютная температура входных цепей приемника. Как следует из (19), для линейного усилителя ( $R_2 \rightarrow 0$ ) естественный биспектральный фон исчезающе мал и биспектральный метод приема информационных сигналов выступает в данном случае как «метод темного поля». Для того, чтобы охарактеризовать биспектральный фон в более реалистических ситуациях, когда входной усилитель имеет определенный коэффициент нелинейности  $\eta = R_2 J / R_1$ , сопоставим величины отношений «сигнал - шум»

$$(S/N)_P = P_S(n\Pi) / P_N(n\Pi), \quad (20a)$$

$$= P_n / (4k_B \Theta \Pi), \quad (20b)$$

$$(S/N)_B = \{ |B_S(n\Pi, m\Pi)| / B_N(n\Pi, m\Pi) \}^{2/3} \quad (21)$$

на выходах отдельных подканалов спектрального и биспектрального приемников, соответственно. В (20)  $P_S(n\Pi) = P_n = 2A_n^2 / R_1$  - мощность гармонической составляющей спектрально-организованного сигнала на входе приемника, имеющей амплитуду  $2A_n$ , частоту  $F_n = n\Pi$  и обеспечивающей передачу  $n$ -го элемента сообщения. Используя (9),(19), отношение «сигнал - шум» (21) для биспектрального приемника, нетрудно выразить через величину мощности на входе приемника  $P_{(n,m)} = 6A^2 / R_1$ , обусловленной  $(n,m)$ -м триплетом (7) БОС при  $A_{(n,m),1} = A_{(n,m),2} = A_{(n,m),3} = A$  ( $n \neq m$ ), и представить в аналогичном формуле (20б) виде

$$(S/N)_B = P_{(n,m)} / (4k_B \Theta_{eff} \Pi), \quad (22)$$

В (22) величина



$$\Theta_{eff} = 3(4.5k_B\Theta\Pi R_2^2/R_1^3)^{1/3}\Theta \quad (23)$$

имеет смысл потенциальной эффективной шумовой температуры биспектрального приемника и для квазилинейных усилителей принимает значения существенно более низкие, чем реальная температура  $\Theta$ . Так при  $\Theta=300$  К,  $\Pi=1$  Гц,  $R_1 = 50$  Ом и  $R_2=50$  Ом/А (коэффициент нелинейности  $\eta=0.1\%$  при  $J=1$  мА) вычисления эффективной температуры (23) дают  $\Theta_{eff}\approx 10^{-5}$  К.

### Заключение

В работе изложены основы формирования, передачи и воспроизведения в приемном устройстве биспектральных структур сигналов для радио-, акустических и оптических систем передачи массивов информации в виде изображений и рельефов. Предложен способ и разработаны экономичные алгоритмы биспектрального синтеза информационных биспектрально-организованных сигналов на основе элементарных сигналов, представляющих собой биспектрально-связанные тройки монохроматических компонент. Стабильность биспектральных характеристик синтезированного квазидетерминированного сигнала обеспечивается высокой стабильностью, гармонической связанностью и взаимосвязанностью составляющих его элементарных триплетов.

Найдены адекватные процедуры биспектрального анализа квазидетерминированных биспектрально организованных сигналов. Исследованы фундаментальные пределы чувствительности биспектральных приемников.

Описан стенд полиспектрального анализа и синтеза сигналов и шумов, на котором продемонстрирована несинхронная передача информационных массивов (изображений и рельефов) акустическими и электромагнитными биспектрально-организованными сигналами. На основе результатов теоретического расчета и стендовых экспериментов установлено, что биспектральный метод обеспечивает возможность повышения скорости передачи больших информационных массивов в ситуации со значительным уровнем помех, приводящей к необходимости использования сигналов с большой базой и исключающей возможность применения синхронных способов передачи информации.

Авторы благодарны за интерес к работе, обсуждение результатов и полезные замечания В.А. Звереву, В.И. Тихонову, В.Н. Харисову, Ю.П. Палочкину, А.В. Резвову, Д.И. Трубецкову.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-02-18027а) и МНТП «Конверсия и высокие технологии» (проект №35-01-01).*

### Библиографический список

1. Никитас Х.Л., Рагувер М.Р. Биспектральное оценивание применительно к цифровой обработке сигналов // ТИИЭР. 1987. Т.75, №7. С.5.
2. Mendel J.M. Tutorial on Higher- Order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory: Theoretical Results and Some Applications // Proc. IEEE. 1991. Vol.79, №3. P.278.
3. Бочков Г.Н., Горохов К.В., Марков Г.А. Способ передачи сообщения и устройство для его осуществления // Заявка на патент РФ № 94023814. 1994. Положительное решение от 20.08.96.
4. Bochkov G.N., Gorokhov K.V., Dubkov A.A., Zheltov S.N., Markov G.A., Rezvov A.V. Analysis and Synthesis of High-Order Correlations and Polyspectral Structures of Signals // Proc. 7th Vilnius Conf. «Fluctuation Phenomenon in Physical Systems». Palanga, Lithuania: Vilnius Univ. Press, 1994. P. 244.

5. Дубков А.А., Малахов А.Н. К статистике обобщенных телеграфных сигналов // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т.21, №9. С.81.
6. Sasato K., Sato T. A bispectral synthesizer // J. Acoust. Soc. Am. 1979. Vol.65, №3, P.732.
7. Sasaki K., Sato T., Kano M. A synthesizer of random signals with bispectral characteristics - a machine noise simulator // J. Acoust. Soc. Am. 1981. Vol.69, №1. P.286.
8. Бочков Г.Н., Горохов К.В. Способ синтеза биспектрально-организованных сигналов // Письма в ЖТФ. 1995. Т.21, В.16. С.27.
9. Huber P.J., Kleiner B., Gasser T., Dumermuth G. Statistical methods for investigating phase relations in stationary stochastic processes // IEEE Trans. Audio and Electroacoust. 1971. AU -19, № 1. P.78.
10. Бочков Г.Н., Горохов К.В., Коннов И.Р. О точности спектральных и биспектральных измерений // Письма в ЖТФ. 1994. Т.20, В.8. С.35.
11. Бочков Г.Н., Горохов К.В., Дубков А.А., Желтов С.Н., Марков Г.А. Полиспектральные методы анализа, синтеза и передачи информации // Тезисы докл. Юбилейной научн. конф., посвященной 100-летию Радио и 50-летию Радиофизического факультета ННГУ. Нижний Новгород, 1995. С.12.
12. Бочков Г.Н., Горохов К.В., Дубков А.А., Желтов С.Н., Марков Г.А. Полиспектральные методы анализа, синтеза и передачи информации // Сб. научн. трудов посв. 100-летию Радио и 50-летию Радиофизического факультета ННГУ «Современные проблемы радиофизики». Нижний Новгород, 1996. С.161.
13. Callen H.B., Welton T.A. Irreversibility and generalized noise // Phys. Rev. 1951. Vol.83. P.34.
14. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.А. К общей теории тепловых флуктуаций в нелинейных системах // ЖЭТФ. 1977. Т.727 С. 238.
15. Бочков Г.Н. Флуктуации в неравновесных радиофизических системах. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1981.
16. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985.
17. Ефремов Г.Ф. Флуктуационно-диссипационная теорема для нелинейных сред // ЖЭТФ. 1968. Т.55. С. 2322.
18. Стратонович Р.Л. О важнейших соотношениях нелинейной термодинамики необратимых процессов // Вест. МГУ. физ.астр. 1967. №4. С. 84.

*Нижегородский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 4.12.96  
после переработки 14.03.97*

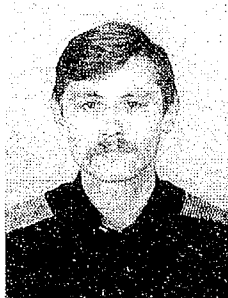
## POLYSPECTRAL METHODS OF ANALYSIS, SYNTHESIS AND TRANSMISSION OF INFORMATION

*G.N.Bochkov, K.V.Gorokhov, A.A.Dubkov, S.N.Zheltoy, G.A.Markov*

The methods of formation, transmission, and reconstruction of the bispectral structures of signals for radio, acoustic and optical systems of information transmission in the form images and reliefs are considered. It is found that the bispectral methods provide a possibility to increase the transmission speed for large information volumes in a complicate noise situation when the synchronous methods of information transmission are not applicable. This conclusion was made on basis of theoretical computations and laboratory tests.



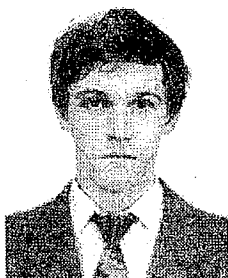
*Бочков Герман Николаевич* - родился в 1941 году в Горьком. Закончил Горьковский университет (1963), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1973). Доцент кафедры квантовой радиофизики ННГУ. Области научных интересов: статистическая и квантовая радиофизика, флуктуационные явления в нелинейных неравновесных системах. Автор более 100 статей, обзоров и учебных пособий.



*Горохов Константин Виталиевич* - родился в 1965 году в Брянске. Закончил Горьковский университет (1989). Инженер кафедры квантовой радиофизики ННГУ. Область научных интересов: применение методов полиспектрального анализа и синтеза для решения задач передачи информации, идентификации и диагностики. Опубликовал 12 работ.



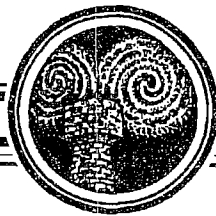
*Дубков Александр Александрович* - родился в 1949 году в Горьком. Закончил Горьковский университет (1972). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1981). Доцент кафедры математики ННГУ. Области научных интересов: статистическая радиофизика, обработка сигналов, динамический хаос, математическое моделирование. Автор более 50 научных публикаций.



*Желтов Сергей Николаевич* - родился в 1972 году в Горьком. Закончил Нижегородский государственный университет (1994). Инженер кафедры квантовой радиофизики ННГУ. Аспирант. Области научных интересов: полиспектральный анализ, динамический хаос, цифровая обработка сигналов. Автор 20 статей и докладов на российских и международных научных конференциях.



*Марков Герман Анатольевич* - родился в 1939 году в Горьком. Закончил Горьковский университет (1963). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в ГГУ (1989). Профессор кафедры электродинамики ННГУ. Области научных интересов: нелинейная электродинамика плазмы, активные плазменные антенны. Автор более 100 публикаций и изобретений.



## О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ В ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*Л.А. Синицкий, О.А. Цвигун*

Рассматривается диссипативная система, описываемая системой обычных дифференциальных уравнений третьего порядка, все решения которой представляют собою квазипериодические колебания, спектр и базисные частоты которых зависят от начальных условий. Поведение приведенной системы подобно поведению гамильтоновой системы. Изучена зависимость характеристик колебаний от параметров системы и начальных условий.

Для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы хорошо известны режимы, когда все начальные условия из некоторой замкнутой области фазового пространства соответствуют квазипериодическим режимам. Тогда эта область может быть представлена в виде совокупности вложенных трехмерных торов, которые плотно заполнены фазовыми траекториями квазипериодического режима. При этом движению на каждом из торов соответствуют свои базисные частоты и различные спектры. Простой пример - движение материальной точки на плоскости под действием центральной силы, имеющей потенциал

$$U(r) = r^{-\beta},$$

где  $r$  - радиус-вектор точки на плоскости,  $\beta \neq 1$  [1].

Известно, что в системах третьего порядка (3/2 степеней свободы) также возможно существование квазипериодических режимов. Они изучались при рассмотрении хаоса в подобных системах [2,3], а также в связи с изучением явления прерывистой генерации [4,5].

В этих случаях квазипериодические режимы были изолированы в том смысле, что все они всюду плотно заполняют поверхность одного двухмерного тора и их спектр и базисные частоты для всех режимов одинаковы. Это означает, что для системы

$$dx/dt = f(x), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ , решение в случае квазипериодического режима имеет вид

$$x_i = \varphi_i(\omega_1 t + \xi_1, \omega_2 t + \xi_2), \quad (2)$$

$$\varphi_i(z_1 + 2\pi, z_2) = \varphi_i(z_1, z_2 + 2\pi) = \varphi_i(z_1, z_2).$$

Постоянные  $\xi_1$  и  $\xi_2$  определяют континуум решений, которые, в случае иррациональности  $\omega_1/\omega_2$ , всюду плотно заполняют поверхность одного двухмерного тора в трехмерном фазовом пространстве. Причем, вне зависимости от  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , спектр колебаний и базисные частоты остаются неизменными.

В статье рассматривается возможность построения диссипативной системы, имеющей  $3/2$  степеней свободы, для которой при всех начальных условиях реализуется квазипериодический режим. В зависимости от начальных условий изменяются базисные частоты и спектр колебаний. В этом смысле диссипативная система подобна гамильтоновой системе с двумя степенями свободы.

С точки зрения радиоэлектроники это означает существование колебаний с изменяющейся глубиной амплитудной модуляции в зависимости от выбора начальных условий.

Разумеется, что подобная система, как и гамильтоновы системы, не может быть структурно устойчивой [6]. В рассматриваемом примере существование квазипериодических режимов достигается за счет того, что диссипация в среднем за некоторый период времени равна нулю. Очевидно, такая система не соответствует автоколебательным системам общего положения.

Рассмотрим систему в виде линейного колебательного неустойчивого (устойчивого) при фиксированном  $\epsilon > 0$  ( $\epsilon < 0$ ) звена второго порядка

$$dx_1/dt = x_2 + \epsilon x_1, \quad (3)$$

$$dx_2/dt = -x_1 + \epsilon x_2,$$

которое охвачено обратной связью в виде интегрирующего звена первого порядка

$$d\epsilon/dt = \beta(1 - r), \quad (4)$$

где  $r = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\beta > 0$  - параметр.

Система (3), (4) заведомо не гамильтонова, так как количество уравнений нечетно, она также неконсервативна, так как не сохраняется фазовый объем

$$\operatorname{div} \mathbf{x} = 2\epsilon \neq 0,$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \epsilon)$ . Поэтому возможность существования квазипериодических решений требует специального исследования. Как будет указано ниже, фазовый объем сохраняется в среднем за достаточно большой промежуток времени.

Система (3) в полярных координатах

$$r = x_1^2 + x_2^2, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = x_1/x_2$$

приводится к виду

$$dr/dt = 2r\epsilon, \quad (6)$$

$$d\varphi/dt = 1,$$

а переменные  $x_1, x_2$  определяются равенствами

$$x_1 = r^{1/2} \sin \varphi, \quad (7)$$

$$x_2 = r^{1/2} \cos \varphi.$$

Из (7) следует, что переменная  $r$  равна квадрату амплитуды колебаний переменных  $x_1, x_2$ . Система уравнений (6), (4) разделяется на независимое уравнение для фазы

$$d\varphi/dt = 1, \quad (8)$$

которое может быть проинтегрировано

$$\varphi = t + \varphi_0, \quad (9)$$

и подсистему уравнений для переменных  $r, \varepsilon$

$$\begin{aligned} dr/dt &= 2r\varepsilon, \\ d\varepsilon/dt &= \beta(1 - r). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим систему (10) на фазовой плоскости  $(r, \varepsilon)$  для уравнения

$$dr/d\varepsilon = 2r\varepsilon/[\beta(1 - r)]. \quad (11)$$

Уравнение (11) может быть проинтегрировано в квадратурах

$$\varepsilon = C - \beta(r - \ln r), \quad (12)$$

где  $C$  - постоянная интегрирования, которая при начальном условии  $\varepsilon=0, r=r_0$  равна

$$C = \beta(r_0 - \ln r_0). \quad (13)$$

Очевидно, что (11) описывает негрубую систему, в которой существует континуум периодических решений. Из (13) следует, что это уравнение при постоянном значении  $C$  имеет два решения (рис.1)

$$0 < r_{01} < 1, \quad r_{02} > 1.$$

Соотношение (12) можем записать в виде

$$\varepsilon^2 = \beta(r_0 - r) - \beta \ln(r_0/r), \quad (14)$$

откуда следует, что фазовые траектории являются замкнутыми кривыми (рис.2), причем размер вдоль оси  $r$  определяется значениями  $r_{01}, r_{02}$ , а вдоль оси  $\varepsilon$

$$\varepsilon_{\max} = +[\beta(r_0 - 1) + \beta \ln r_0]^{1/2}, \quad (15)$$

$$\varepsilon_{\min} = -[\beta(r_0 - 1) + \beta \ln r_0]^{1/2}.$$

Характеристические показатели системы (10) в окрестности особой точки  $r=1, \varepsilon=0$  чисто мнимые

$$\lambda_{1,2} = \pm i(2\beta)^{1/2}. \quad (16)$$

Следовательно, при начальных условиях  $r_0$  близких к единице, переменные  $r, \varepsilon$  совершают гармонические колебания с периодом

$$T = \pi(2/\beta)^{1/2}. \quad (17)$$

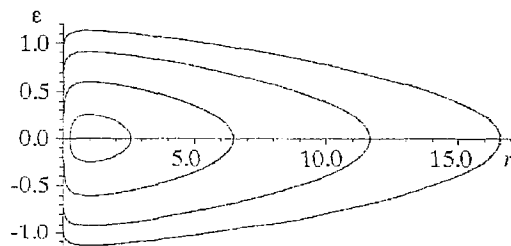
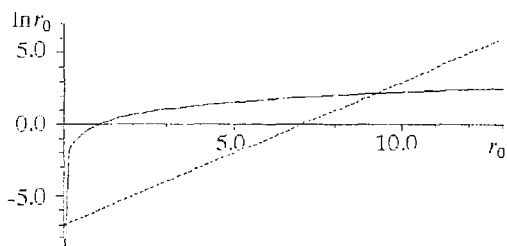


Рис. 1. Графическое решение уравнения (13) при  $C=0.7$

Рис. 2. Фазовый портрет системы (10) при  $\beta=0.1$

В соответствии с (7) переменные  $x_1, x_2$  имеют вид амплитудно-модулированных колебаний с глубиной модуляции

$$m = [1 - (r_{01}/r_{02})^{1/2}]/[1 + (r_{01}/r_{02})^{1/2}]. \quad (18)$$

При  $r_{01}/r_{02} \ll 1$  глубина модуляции (18) стремится к единице, а характер движений  $x_1, x_2$  приобретает вид прерывистых колебаний (рис. 3).

На участке, где  $r \approx r_{01}$  и при  $r_{01} \ll 1$  уравнения (8) приобретают вид

$$\begin{aligned} dr/dt &= 0, \\ d\epsilon/dt &= \beta. \end{aligned} \quad (19)$$

Время движения  $t$  на этом участке соответствует длительности пауз между пакетами колебаний  $x_1, x_2$ . Длительность  $t$  можно приближенно оценить, положив, что участок траектории является отрезком прямой, а его длина

$$L \approx 2\epsilon_{\max}. \quad (20)$$

Проинтегрируем второе уравнение (19) на этом отрезке и получим

$$t \approx [4(\ln r_{01}^{-1} - 1)/\beta]^{1/2}. \quad (21)$$

Очевидно, что соотношение (21) имеет смысл при  $r_{01} < e^{-1}$ .

Следующие размышления приводят к оценке полного периода колебаний переменных  $r, \epsilon$ . Поскольку период колебаний (15) в окрестности особой точки  $r=1, \epsilon=0$  не зависит от начального условия  $r_0$ , то можно предположить, что эта величина останется постоянным слагаемым в полном периоде колебаний для начального условия  $r_0$ , достаточно удаленного от единицы. Начальное условие влияет только на длительность движения (19) на вертикальном участке фазовой траектории. Следовательно, период колебаний  $r, \epsilon$  для начальных условий  $r_0$  близких к единице определяется формулой (17), а для начальных условий  $0 < r_{01} \ll 1$  или  $r_{02} \gg 1$  формулой

$$T = \pi(2/\beta)^{1/2} + [4(\ln r_{01}^{-1} - 1)/\beta], \quad (22)$$

где первое слагаемое есть длительность пакета колебаний  $x_1, x_2$ , а второе - определяет длительность паузы между пакетами колебаний переменных  $x_1, x_2$ .

Для точного определения периода колебаний  $r$  и  $\epsilon$  выполнялось численное интегрирование системы (10). Сопоставление результатов численного расчета с полученными приближенными соотношениями (21), (22) приведено на рис. 3, 4. Закон изменения  $x_1$  во времени, полученный численным интегрированием, приведен на рис. 5.

Уравнение двумерных торов в пространстве  $(x_1, x_2, \epsilon)$  в соответствии с (12) имеет вид

$$\epsilon^2 = C - \beta[(x_1^2 + x_2^2) - \ln(x_1^2 + x_2^2)]. \quad (23)$$

Очевидно, что сечение торов плоскостью  $\epsilon = \text{const}$  представляет две концентрические окружности, для которых радиус внешней убывает, а внутренней возрастает по мере возрастания  $\epsilon$ . При изменении  $C$  имеем совокупность вложенных торов, которые заполняют все фазовое пространство, причем при росте внешнего радиуса  $r_{02}^{1/2}$  внутренний радиус  $r_{01}^{1/2}$  стремится к нулю, то есть «внутреннее» отверстие в торах сужается и в пределе совпадает с осью  $\epsilon$ . Сечение торов плоскостью  $x_2=0$  представлено на рис. 6.

Можно показать, что приведенный пример не уникален. Аналогичным путем доказывалось существование континуума квазипериодических движений для случая, когда вместо (3) рассматривается линейный колебательный контур

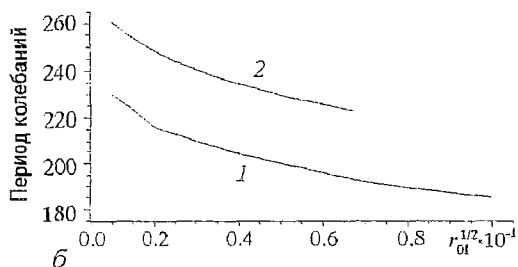
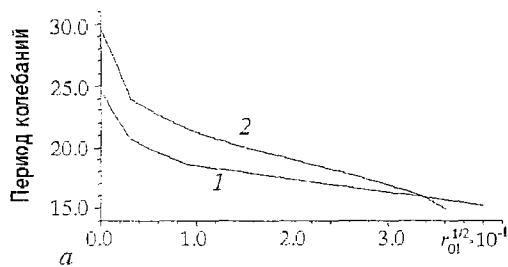


Рис. 3. Зависимость периода колебаний  $r, \epsilon$  системы (10) от начальных условий  $r=r_{01}, \epsilon=0$ , полученная численным интегрированием (кривая 1) и аналитически из соотношения (22) (кривая 2): а -  $\beta=0.1$ ; б -  $\beta=0.001$

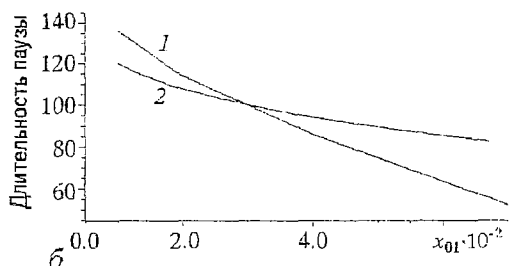
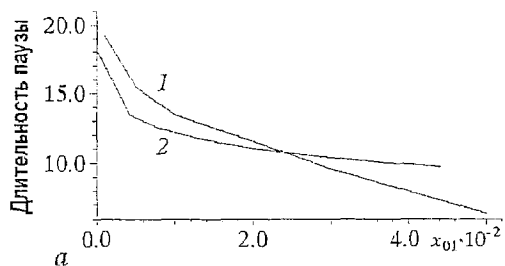


Рис. 4. Длительность паузы между пакетами колебаний переменной  $x_1$  системы (3),(4) в зависимости от начальных условий  $x_1=x_{01}, x_2=0, \epsilon=0$ , полученная численным интегрированием (кривая 1) и аналитически из соотношения (21) (кривая 2): а -  $\beta=0.1$ ; б -  $\beta=0.001$

$$d^2x/dt^2 + \epsilon dx/dt + x = 0, \quad (24)$$

при сохранении уравнения обратной связи в виде (4), где  $r = x^2 + (dx/dt)^2$ .

Для автогенератора Ван-дер-Поля

$$d^2x/dt^2 - \epsilon(1 - x^2)dx/dt + x = 0 \quad (25)$$

доказательство существования континуума квазипериодических режимов аналитическим путем найти не удалось.

Однако для системы уравнений

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= +x_2 + \epsilon(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1, \\ dx_2/dt &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2 \end{aligned} \quad (26)$$

доказательство приведено в [7].

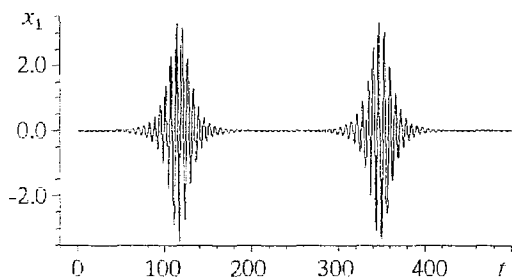


Рис. 5. Закон изменения переменной  $x_1$  системы (3), (4) во времени при  $\beta=0.001$  и начальных условиях  $x_1=0.01, x_2=0, \epsilon=0$

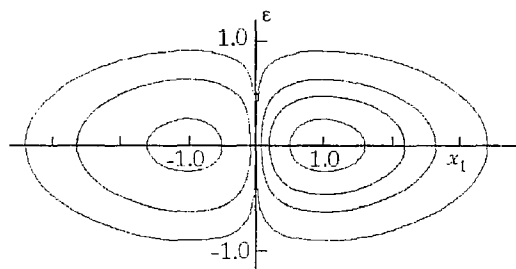


Рис. 6. Сечения торов в фазовом пространстве системы (3),(4) при  $\beta=0.1$  плоскостью  $x_2=0$



## Библиографический список

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
3. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
4. Белкин М.К., Кравченко Г.И. Сверхрегенераторы. М.: Радио и связь, 1983.
5. Дворников А.А., Уткин Г.М. Автогенераторы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1991.
6. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. Синицкий Л.А., Цвигун О.А. Квазигармонические колебания и импульсная генерация в автоколебательных системах третьего порядка // Электронное моделирование. 1996. № 4. С. 48.

Львовский государственный  
университет  
Украина

Поступила в редакцию 25.12.96  
после переработки 25.03.97

## ON QUASI-PERIODIC SOLUTIONS IN DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS OF THE THIRD ORDER

*L.A. Sinitsky, O.A. Tsvigun*

Quasi-periodic solutions of the third order dissipative system are considered. Their fundamental frequencies and spectrum depend on initial conditions. Behavior of such system is similar to Hamiltonian system having two degrees of freedom. Dependence of amplitudes and frequencies of system's parameters is considered.



*Синицкий Лев Аронович* - доктор технических наук, профессор Львовского государственного университета. Окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения (1948). Автор 150 научных работ, в том числе семи монографий. Область научных исследований - теория электрических цепей.



*Цвигун Олег Алексеевич* - аспирант Львовского государственного университета. Окончил физический факультет Львовского государственного университета (1996). Автор научных работ. Область научных исследований - теория электрических цепей.



## РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ НЕИНВАЗИВНОГО МОНИТОРИНГА И ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРОВОТОКА

*И.В. Меглинский, Д.А. Боас, А.Г. Йод, Б. Чанс, В.В. Тучин*

В работе представлено развитие экспериментального метода мониторинга структуры биотканей, неинвазивного наблюдения и измерения динамических параметров кровотока в мышцах и коже. Метод позволяет осуществлять визуализацию и измерение параметров кровотока в больших и малых сосудах крови, сети капилляров в мышцах и других биологических тканях. Данное исследование использует оптический неинвазивный метод диффузионно-волновой спектроскопии. В методе анализируется доплеровски уширенный спектр флуктуаций интенсивности, возникающих в многократно рассеивающей динамической среде; метод также чувствителен к изменению коэффициентов рассеяния и поглощения. Это исследование полезно для обоснованных оценок и развития экспериментальных неинвазивных методов измерения динамических параметров кровотока в живой ткани, включая опухоли, и получения информации в интересах физиологии, медицины и биологии.

### Введение

В последние годы особый интерес вызывает изучение биотканей различными оптическими методами [1-5], в том числе с использованием корреляционных методов [1, 3-7]. Наиболее интересные из этих применений касаются неинвазивных измерений параметров кровотока в больших и малых сосудах, а также изменений объема крови в капиллярных петлях в мышцах и других биотканях [7-13]. Корреляционно оптический метод мониторинга кровотока был развит усилиями многих авторов (см. [1-10] и цитируемую там литературу).

Для контроля пространственной динамики кровотока в однородной мутной среде с многократным рассеянием оказываются применимыми методы, основанные на измерении временных флуктуаций интенсивности или динамики спеклов [6, 13-16]. Динамика спеклов зависит от различных факторов, таких как пространственная структура ткани, поглощающие и рассеивающие характеристики среды и др. [4, 17, 18]. Эти факторы могут быть количественно оценены с использованием корреляционного диффузионного уравнения в рамках области применимости диффузионно-волновой спектроскопии (ДВС). Развитие этой теории и ее приложения в различных исследованиях можно найти в [5-6, 14-16, 19-24].

Ниже представлено развитие экспериментального метода, ранее детально апробированного в модельных экспериментах [24], в направлении его применения

для измерений *in vivo*. В первой части кратко обсуждаются теоретические и прикладные аспекты применения метода ДВС для неинвазивных измерений параметров кровотока в больших и малых сосудах. Во второй части кратко описана принципиальная схема экспериментальной установки. В третьей части представлены методика измерений, основные результаты, а также их анализ и обсуждение. В заключении даны выводы и некоторые принципиальные замечания.

## 1. Материалы и методы

Пусть свет через волоконный световод попадает на исследуемый объект и в дальнейшем сильно ослабляется в исследуемой среде за счет рассеяния. Картина миграции фотонов, детектируемых от входа до выхода из среды, подчиняется так называемой «банановой» форме [25], для которой средняя глубина проникновения внутрь биоткани определяется приблизительно половиной расстояния между источником и приемником [2, 6, 25]. Фотоны, достигающие определенной глубины, чувствительны к изменениям параметров кровотока в капиллярах и малых венах мышечной ткани. Движение основных рассеивателей (эритроцитов или лейкоцитов) регистрируется путем измерения временных зависимостей флуктуаций интенсивности рассеянного света. Эти флуктуации обычно характеризуются с помощью нормированной временной корреляционной функции поля рассеянного излучения [1, 4-9, 11, 14-16, 24]

$$g_1(\tau) = \langle E(0)E^*(\tau) \rangle / \langle |E(0)|^2 \rangle. \quad (1)$$

Здесь  $E(\tau)$  - электрическое поле рассеянного света, которое собирается детектором, а  $\tau$  - время задержки. Обычно на практике измеряют корреляционную функцию интенсивности, которая связана с корреляционной функцией поля соотношением Зигерта [15]

$$g_2(\tau) = \langle I(0)I(\tau) \rangle / \langle I^2 \rangle = 1 + \beta |g_1(\tau)|^2, \quad (2)$$

где  $\beta$  - апертурная функция, определяемая в основном собирающей оптикой,  $0 \leq \beta \leq 1$  [15, 26].

Временная корреляционная функция поля в однородной среде надежно моделируется с помощью корреляционного диффузионного уравнения [27, 28]

$$(D_\gamma \nabla^2 - \vartheta \mu_a - \vartheta \mu_s' \langle v^2 \rangle k_0^2 \tau^2 / 3) G_1(r, \tau) = -\vartheta S(r). \quad (3)$$

Здесь  $k_0$  - волновое число для фотона в среде;  $\vartheta$  - скорость света в среде;  $\mu_a$  - коэффициент поглощения;  $\mu_s'$  - редуцированный коэффициент рассеяния;  $\langle v^2 \rangle$  - второй момент распределения частиц по скоростям;  $G_1(r, \tau)$  - ненормированная временная корреляционная функция поля;  $S(r)$  - распределение интенсивности источника;  $D_\gamma = \vartheta / 3 \mu_s'$  - коэффициент диффузии фотонов.

Предлагаемый метод позволяет учитывать характер движения жидкости, находящейся в некоторой области (сосуде и т.п.), расположенной внутри среды. Нормированная корреляционная функция поля имеет экспоненциальный вид [29]

$$g_1(\tau) \propto \exp\{-2[\tau/\tau_B + (\tau/\tau_S)^2] s/l^*\}, \quad (4)$$

где  $\tau_B^{-1} = D k_0^2$  (броуновское движение);  $\tau_S^{-1} = (30)^{-1/2} \Gamma k_0 l^*$  (направленный поток);  $D$  - коэффициент диффузии рассеивателей;  $l^*$  - средний свободный путь фотона;  $\Gamma$  - градиент скорости потока;  $s = nl$  - путь, пройденный фотоном;  $n$  - число рассеивающих событий. Эта модель была использована для интерпретации результатов. Легко видеть, что, взяв натуральный логарифм от  $g_1(\tau)$  или

анализируя экспоненциальный наклон, мы получаем возможность непосредственно определять коэффициент диффузии рассеивателей или градиент скорости потока.

Сравнивая предложенный оптический метод с другими методами, необходимо отметить: во-первых, ультразвуковой доплеровский метод нечувствителен к скоростям кровотока со средней скоростью ниже 10 см/с [7, 13]; во-вторых, электромагнитные флоуметры требуют сложной калибровки для получения абсолютных значений коэффициента пропорциональности между электрическим полем и скоростью; в-третьих, инъекционный метод не может дать локальную скорость микроциркуляции [7, 10, 13].

Предлагаемый метод является неинвазивным и использует для анализа корреляционных функций в сильнорассеивающей среде хорошо апробированное корреляционное диффузионное уравнение [24, 27, 28], поэтому ожидается, что результаты должны соответствовать физиологии кровотока и, очень важно, позволить наблюдать гиперемические явления, которые обнаруживают себя, как увеличение скорости потока в зависимости от условий эксперимента.

## 2. Эксперимент

Для измерения временной автокорреляционной функции интенсивности обратно рассеянного света от руки человека была использована лазерная система и коммерческий цифровой автокоррелятор (рис.1). Лазерная система состояла из аргонового ионного лазера мощностью 8.4 Вт, который использовался для накачки титан-сапфирового лазера (Coherent, Mira Model 900B Laser, Santa Clara), работающего в диапазоне волн от 740 до 840 нм. Свет с длиной волны 800 нм, генерируемый титан-сапфировым лазером, проходил через волоконный световод (источник) и падал на образец. Мощность излучения 0.1 Вт. В качестве источника был взят силиконовый многомодовый световод (FG-200-UAT, Thorlabs Inc, Newton, NJ) диаметром сердцевины  $200 \pm 5$  мкм, длиной 1.50 м и числовой апертурой  $0.16 \pm 0.02$ . Для наблюдения флуктуаций интенсивности света в отдельном спекле (моде), перерассеянный от образца свет собирался с помощью детектора, одномодового волоконного световода (FS-SN 4224, Thorlabs Inc, Newton, NJ,  $\lambda=820$  нм, коэффициент потерь 3.5 дБ/км), диаметром 5.5 мкм и длиной 1 м. Одномодовые световоды являются хорошими приемниками для экспериментов по динамическому светорассеянию [30]. Такая пара: излучатель - многомодовый световод и приемник - одномодовый световод, эффективна для достижения большого значения отношения сигнал/шум и снижения влияния вибраций [13]. Свет, собранный одномодовым световодом, поступал на фотоумножитель (Thorn EMI, Gencom Inc), работающий в режиме счета фотонов, и затем на электронный цифровой автокоррелятор (Model BI-9000AT, Brookhaven Instruments Corporation, Holtsville, NY, USA), который высчитывал временную автокорреляционную функцию интенсивности. Расстояние между источником и детектором варьировалось от 2 мм до 1 см. Полученные данные записывались в виде файла на жесткий диск компьютера для дальнейшего анализа. Использование манжета для изменения давления крови позволяло также контролировать изменение скорости кровотока. Точка измерения была выбрана на тыльной стороне предплечья.

Анализ наклона автокорреляционной функции, измеряемой при последовательном изменении сдавливания руки, контролируемого медицинским тонометром (см. рис.1), позволяет связать этот наклон со скоростью кровотока. Оказывая различное давление на руку, пережимая венозные сосуды, вены и артерии, вызывая изменение скорости потока крови. Изменение степени содержания кислорода (оксигенации) в крови, обычно влекущее за собой изменение коэффициента поглощения крови, в данном случае не влияет на результаты, так как выбранная длина волны находится в окрестности изобестической точки, где коэффициент поглощения практически не изменяется.

Одновременно с помощью двухволнового спектрофотометра Runman™ [31, 32] производилась запись на самописец изменения поглощения ткани в области

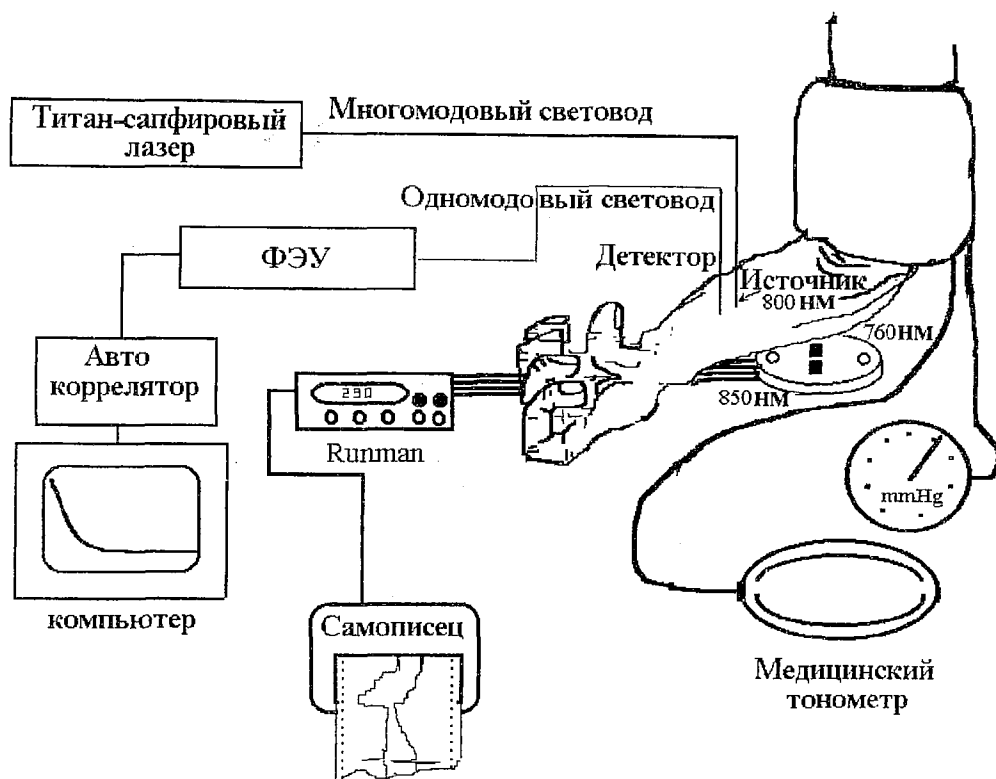


Рис. 1. Схема эксперимента

корреляционных измерений (см. рис.1). Это позволило соотнести изменение сигнала от спектрофотометера с физиологическим поведением кровотока. Измерения тем и другим методом проводились одновременно на одном и том же мускуле, что позволяло считать движение рассеивателей (эритроцитов) и изменение степени оксигенации вызванными одними и теми же причинами. Взаимодействия между различными источниками считались пренебрежимо малыми.

Сравнение результатов, полученных двумя независимыми методами: ДВС и хорошо апробированного метода NIRS (Near Infrared Spectroscopy - спектроскопии ближнего ИК), позволяет судить об адекватности наших измерений корреляционным методом, а также связать физиологическое поведение кровотока и изменение степени оксигенации тканей с изменением наклона измеряемой автокорреляционной функции обратно рассеянного излучения.

### 3. Анализ и обсуждение результатов

На рис. 2, а представлен типичный вид нормализованной автокорреляционной функции поля обратно рассеянного излучения при различной степени сдавливания руки. Заметим, что наибольший интерес для нас представляет не вся функция  $g_1(\tau)$ , а только часть, находящаяся в интервале  $0 \div 400$  мкс, так как именно в этом диапазоне наиболее хорошо видны и поддаются анализу экспериментальные данные. Исследуя потоки крови в (5), пренебрежем влиянием броуновской составляющей [29] и линейно аппроксимируем данные как  $\ln(g_1)$  от  $\tau^{1/2}$  (рис. 2, б). С увеличением сдавливания, то есть с уменьшением скорости кровотока, наклон автокорреляционной функции уменьшается, что хорошо согласуется с предыдущими модельными экспериментами [24].

После предварительных пробных измерений, показавших, что

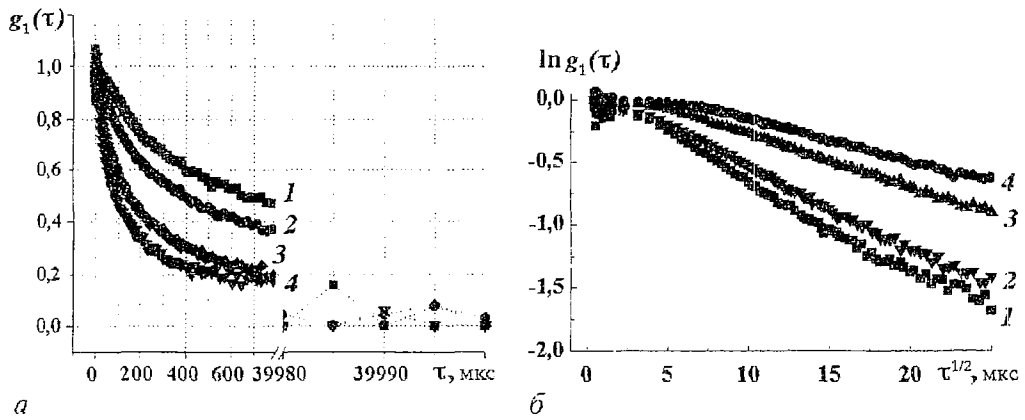


Рис. 2. *а* - типичный вид нормализованной автокорреляционной функции обратно рассеянного излучения при различной степени сдавливания руки; *б* - аппроксимация тех же экспериментальных данных, как  $\ln(g_1)$  в зависимости от  $\tau^{1/2}$ , наклон прямолинейного участка характеризует динамику рассеивателей в среде

корреляционный метод действительно чувствителен к изменению скорости кровотока, была проведена серия измерений при различной степени сдавливания руки: 6 измерений в отсутствие сдавливания руки; 4 измерения при сильном сдавливании в 230 мм рт. ст.; по 1-ому измерению при сдавливании в 150, 95, 85, 65 и 45 мм рт. ст. и заключительные 8 измерений в отсутствие сдавливания. Каждое измерение проводилось в течение 3-х минут. Первые 6 измерений показывают прекрасную повторяемость эксперимента (рис. 3, точки 1-6). Сильное сдавливание, значительно большее, чем артериальное давление, необходимо для остановки кровотока в сосудах - поверхностных венах и более глубоко залегающих артериях; при этом объем крови в той части руки, где проводятся измерения, остается неизменным. Поток крови, а значит движение рассеивателей (эритроцитов) в ней,

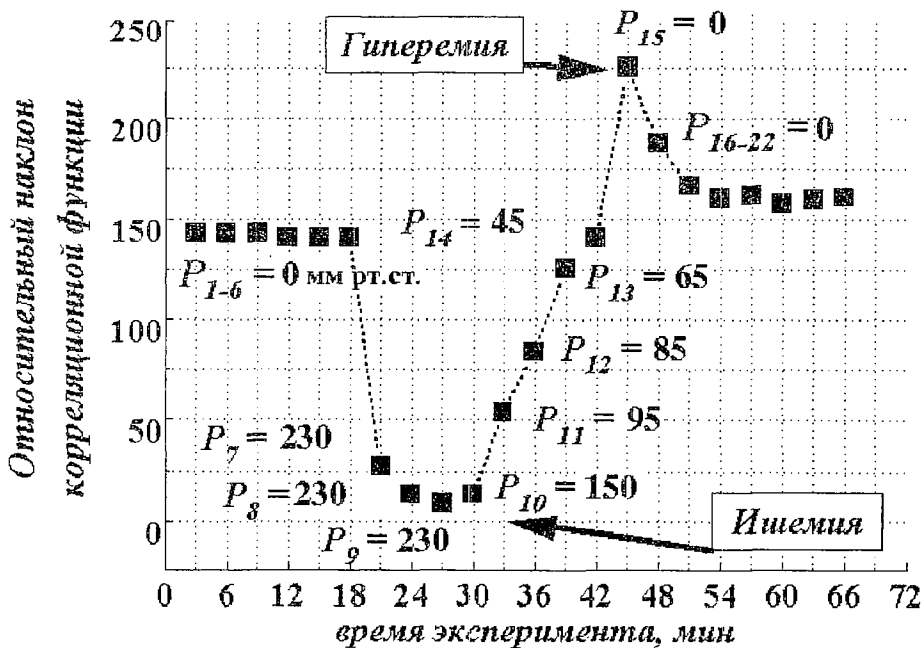


Рис. 3. Изменение относительного наклона автокорреляционной функции во время эксперимента при различных сдавливаниях руки

останавливается, что наблюдается по изменению относительного наклона спада автокорреляционной функции. На рис. 3 (точки 8-10) видно это резкое изменение относительного наклона автокорреляционной функции - ишемия. При ослаблении сжатия руки сосуды открываются, возникает движение крови, которое ускоряется по мере уменьшения сжатия, что соответствует увеличению относительного наклона (точки 11-14). Уменьшая давление на руку до нулевого значения, отмечаем, что относительный наклон автокорреляционной функции не возвращается к первоначальному, а значительно выше его (точка 15). Это объясняется гиперемическим расширением сосудов: при сжатой руке кровь теряет кислород (деоксигенирует), «открывая» сосуды (уменьшая сжатие руки), даем возможность поступления свежей оксигенированной крови в исследуемый участок. В этот момент существующая потребность тканей в кислороде заставляет сосуды расширяться для скорейшего насыщения тканей кислородом; объем крови, проходящий по этим сосудам, увеличивается. Это подтверждается показанием спектрофотометра *Ripman™* и отражается изменением относительного наклона автокорреляционной функции. Повторные измерения показывают, что дальше относительный наклон экспериментально измеренной функции  $\ln(g_1)$  со временем медленно возвращается к своему первоначальному значению (точки 16-22). Это соответствует физиологическому поведению кровотока: ткани насыщаются кислородом, потребность в большем его количестве уменьшается и сосуды возвращаются к своему первоначальному состоянию.

На рис. 4 представлены изменения наклона автокорреляционной функции, полученные экспериментально и с использованием решений уравнения (3) [24]. Изменение наклона автокорреляционной функции дано на фоне результатов, полученных спектрофотометром *Ripman™*. Поведение наклона автокорреляционной функции, полученной из теоретических расчетов, качественно повторяет изменение наклона, полученного из эксперимента. Количественные расхождения в теоретических и экспериментальных значениях объясняются, по нашему мнению, в основном изменением граничных условий динамических областей (то есть сужением или расширением сосудов) и изменением числа рассеивателей.

### Заключение

Экспериментально показана возможность применения метода ДВС для исследования поведения кровотока в тканях. Метод чувствителен к изменению количества рассеивателей и их скорости в исследуемом объеме. Предложенная математическая модель качественно описывает поведение кровотока в соответствии с его физиологическим поведением, что позволяет считать эту модель применимой для решения ряда задач в биологии и медицине. Использование волоконной оптики сильно упрощает эксперимент и делает возможным широкое применение метода в медицине.

Спекл-корреляционный метод представляется перспективным для распознавания и классификации различных форм патологий ткани, ведущих к

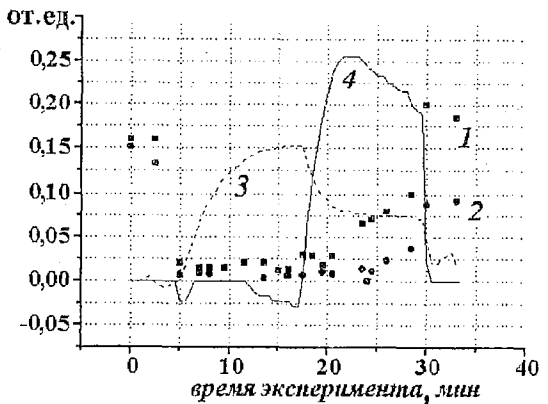


Рис. 4. Результаты измерений характеристик кровотока с использованием методов ДВС и NIRS. Изменение наклона корреляционной функции: 1 - эксперимент ДВС; 2 - теория ДВС; 3 - изменение степени оксигенации крови (NIRS); 4 - изменение объема крови (NIRS)

изменению ее структуры. Другой принципиальный вопрос, предлагаемый для изучения как экспериментально, так и теоретически, заключается в развитии методов и алгоритмов для разделения двух различных компонентов флуктуаций интенсивности - один, вызванный динамикой спеклов при сканировании лазерным пучком всей рассеивающей структуры, и другой, связанный с регулярными и случайными движениями рассеивателей в ткани (например, в лимфе и в крови) [4, 6, 17, 18, 33].

### Библиографический список

1. Приезжев А.В., Тучин В.В., Шубочкин Л.П. Лазерная диагностика в биологии и медицине. М.: Наука, 1989. 240 с.
2. Selected Papers on Tissue Optics. Applications in Medical Diagnostics and Therapy / Eds. V.V.Tuchin // SPIE Milestone Series. 1994. Vol. MS 102.
3. Романовский Ю.М., Теплов В.А. Физические основы клеточного движения. Механизмы самоорганизации амебодной подвижности // УФН. 1995. Т. 165, № 5. С. 555.
4. Зимняков Д.А., Тучин В.В., Утц С.Р. Исследование статистических свойств частично развитых спекл-полей применительно к диагностике структурных изменений кожи человека // Оптика и спектроскопия. 1994. Т. 76, № 5. С. 838.
5. Kolinko V.G., Priezzhev A.V. Application of the time-gating technique to laser Doppler tomography of biological tissue // Photon Propagation in Tissue / Eds. B.Chance, D.T.Delpy, and G.Muller // Proc.SPIE. 1995. Vol. 2626. P. 158.
6. CIS Selected papers. Coherence-Domain Methods in Biomedical Optics / Ed. V.V.Tuchin // Proc. SPIE . 1996. Vol. 2732.
7. Shepherd A.P., Oberg P.A. Lasers Doppler Blood Flowmetry. Kluwer Academic Publishers, 1990.
8. Приезжев А.В., Романовский Ю.М. Лазерная доплеровская спектроскопия и ее применение в биологии и медицине // Квантовая электроника. 1978. Т. 5, № 10. С.2237.
9. Silva J. and Intaglietta M. The Correlation of Photometric Signals Derived from In Vivo Red Blood Cell Flow in Microvessels // Microvascular Research. 1974. Vol. 7. P. 156.
10. Tanaka T., and Benedek G.B. Measurement of the Velocity of Blood Flow (in vivo) Using a Fiber Optic Catheter and Optical Mixing Spectroscopy // Applied Optics. 1975. Vol. 14, № 1. P. 189.
11. Gush R.J., King T.A. and Jayson M.I.V. Aspects of laser light scattering from skin tissue with application to laser Doppler blood flow measurement // Phys.Med.Biol. 1984. Vol. 29, № 12. P. 1463.
12. Bonner R. and Nossal R. Model of laser Doppler measurements of blood flow in tissue // Applied Optics. 1981. Vol. 20, № 12. P. 2097.
13. Aizu Y., Asakura T., Ogino K. and Sugita T. Evaluation of flow volume in a capillary using dynamic laser speckles based on the photon correlation // Optics Communications. 1990. Vol. 80, № 1. P. 1.
14. Лебедев А.Д., Левчук Ю.Н., Ломакин А.В., Носкин В.А. Лазерная корреляционная спектроскопия в биологии. Киев: Наукова думка, 1987.
15. Cummins H.Z. and Pike E.R. Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy. N.Y.: Plenum Press, 1973.
16. Brown W. Dynamic Light Scattering. The method and some applications. Oxford: Clarendon Press, 1993.
17. Ul'yanov S.S., Zimnyakov D.A., Tuchin V.V. Fundamentals and applications of



dynamic speckles induced by focused laser beam scattering // *Optical Engineering*. 1994. Vol. 33, № 10. P. 3189.

18. Ульянов С.С. Особенности проявления эффекта Доплера при дифракции сфокусированных Гауссовых пучков в движущихся случайно неоднородных средах // *Изв. РАН. Серия Физическая*. 1995. Т. 59, № 6. С. 151.

19. Ackerson B.J., Dougherty R.L., Reguigui N.M., and Nobbman U. Correlation Transfer: Application of Radiative Transfer Solution Methods to Photon Correlation Problems // *J. Thermophys and Heat Transfer*. 1992. Vol. 6, № 4. P. 577.

20. Fuller G.G., Rallison J.M., Schmidt R.L., and Leal L.G. The Measurement of Velocity Gradients in Laminar Flow by Homodyne Light-Scattering Spectroscopy // *J. Fluid Mech*. 1980. Vol. 100, part 3. P. 555.

21. Pine D.J., Weitz D.A., Zhu J.X. and Hebolzheimer E. Diffusing-Wave Spectroscopy: dynamic light scattering in the multiple scattering limit // *J. Phys. France*. 1990. Vol. 51. P. 2101.

22. Bicout D. and Maynard R. Diffusing wave spectroscopy in inhomogeneous flows // *Physica A*. 1993. Vol. 199. P. 387.

23. Weitz D.A. and Pine D.J. Diffusing-Wave Spectroscopy // *Dynamic Light Scattering. The method and some applications* / Edited by Wyn Brown. Oxford: Clarendon Press, 1993. P. 653.

24. Boas D.A., Meglinsky I.V., Zemaný L., Cambell L.E., Chance B., and Yodh A.G. Diffusion of Temporal Field Correlation with Selected Applications // *SIC Selected Papers: Coherence Domain Methods in Biomedical Optics* / Edited by V.V. Tuchin // SPIE. Bellingham, WA, 1996. Vol. 2732. P. 34.

25. Patterson M.S., Chance B., and Wilson B.C. Time resolved reflectance and transmittance for the non-invasive measurement of tissue optical properties // *Applied Optics*. 1989. Vol. 28, № 12. P. 2331.

26. Xue J.-Z., Pine D.J., Milner S.T., Wu X.-L., Chaikin P.M. Nonergodicity and light scattering from polymer gels // *Physical Review A*. 1992. Vol. 46, № 10. P. 6550.

27. Boas D.A., Cambell L.E., and Yodh A.G. Scattering and Imaging with Diffusing Temporal Field Correlations // *Phys. Rev. Lett*. 1995. Vol. 75, № 9. P. 1855.

28. Boas D.A., Cambell L.E., and Yodh A.G. Fluctuation Imaging // *Proc. SPIE*. 1995. Vol. 2389, part 1. P. 220.

29. Wu X.-L., Pine D.J., Chaikin P.M., Huang J.S., and Weitz D.A. Diffusing-wave spectroscopy in a shear flow // *J. Opt. Soc. Am. B*. 1990. Vol. 7, № 1. P. 15.

30. Ricka J. Dynamic Light Scattering with Single-mode and Multimode Receivers // *Appl. Optics*. 1993. Vol. 32, № 15. P. 2860.

31. Chance B., Nioka S., Kent J., McCully K., Fountain M., Greenfield R., Holtom G. Time resolved spectroscopy of hemoglobin and myoglobin in resting and ischemic muscle // *Anal. Biochem*. 1988. Vol. 174. P. 698.

32. Chance B., Dait M., Zhang C., Hamaoka T., Hagerman F. Recovery from exercise-induced desaturation in the quadriceps muscles of elite competitive rowers // *Am. J. Physiol*. 1992. Vol. 262. P. C766.

33. Zimnyakov D.A., Tuchin V.V., Utz S.R., Mishin A.A. Far-zone speckle statistics study in applications to biotissue structure imaging // *Proc. SPIE*. 1995. Vol. 2390. P. 170.

Саратовский государственный  
университет, Россия  
Тафтский университет, США  
Пенсильванский университет, США

Поступила в редакцию 4.09.96  
после переработки 30.12.96

# DEVELOPMENT OF CORRELATION OF LASER ERADIATION INTENSITY FLUCTUATIONS TECHNIQUES FOR NON-INVASIVE MONITORING AND MEASURING OF BLOOD FLOW CHANGES

*I.V. Meglinsky, D.A. Boas, A.G. Yodh, B. Chance, V.V. Tuchin*

We have non-invasively measured in vivo blood flow changes using photon correlation spectroscopy (Diffusing Wave Correlation Techniques) with a simple correlation diffusion model to study and quantify blood flow in the human arm during cuff ischemia. The method utilizes the Doppler broadening of light that arises in a multiply scattering dynamic media, and is also responsive to changes in absorption and scattering coefficients. Our measurements clearly show blood flow changes with cuff pressures, including the hyperemic overshoot after cuff release, that qualitatively agree with the physiological behavior of the cardiovascular system. In this article, we present method, results and discuss the clinical relevance of our findings.



*Игорь Владиславович Меглинский* - родился в 1968 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1992). В настоящее время аспирант кафедры оптики Саратовского университета. В 1995 году был удостоен президентской стипендии РФ для обучения за рубежом. Обучался и проходил стажировку в Пенсильванском университете США (1995-1996) под руководством профессоров Б.Чанса и А.Г.Йода. Круг научных интересов: биомедицинская оптика, компьютерное моделирование, корреляционная спектроскопия, взаимодействие лазерного излучения с тканями, оптика кожи. Автор 16 научных работ.



*Дэвид Алан Боас* - окончил политехнический институт в городе Трой штата Нью-Йорк, где получил степень бакалавра (1991). Защитил диссертацию в Пенсильванском университете по теме «Использование диффундирующих волн фотонной плотности для детектирования и характеристики оптических неоднородностей», PhD (1996). В настоящее время профессор Тафтского университета. Имеет много научных публикаций. Основал и в настоящее время активно развивает международную дискуссионную группу «photon migration/optical imaging (PMI)» в системе Интернет. Научные интересы включают проблемы компьютерного моделирования, визуализации объектов в плотных сильнонеоднородных средах, биомедицинской оптики, корреляционной спектроскопии и взаимодействия лазерного излучения с тканями.



*Арсен Г. Йод* - окончил университет Cornell (1981), где получил степень бакалавра, затем Гарвардский университет, MS (1982) и PhD (1986). В настоящее время профессор физического факультета Пенсильванского университета. Опубликовал много научных статей в областях конденсированных материалов и оптической физики. Лауреат различных премий и наград научных обществ США.



*Бриттон Чанс* - родился в 1913 году. Окончил Пенсильванский университет (1936), PhD (1940), PhD (1942, Кембридж). Почетный доктор Стокгольмского Каролинского института, Медицинского колледжа в Огайо, Семмел Вейс университета в Будапеште, университета Пенсильвании, университета в Хельсинки, Дюссельдорфского университета в Германии, Саратовского университета в России и многих других известных университетов. Научные интересы - в областях электроники, биофизики, биохимии, молекулярной и клеточной биологии и физиологии. Автор многочисленных, фундаментальных трудов, монографий, научных статей в областях, указанных выше (более 2500). Лауреат многих премий разных стран. Действительный член многих, в том числе международных научных обществ, включая National Academy of Science in the United States, the Royal Society of the UK, Academia Nazionale dei Lincei of Italy и др. Редактор и член

редколлегий многих научных журналов. См. так же справочник: «Who is Who in America?»



*Валерий Викторович Тучин* - доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой оптики СГУ (с 1983), декан физического факультета СГУ (1982-1989), зав. лабораторией лазерной диагностики технических и живых систем Института проблем точной механики и управления РАН (с 1989). Круг научных и педагогических интересов лежит в области нелинейной динамики лазерных систем, физики лазерных и оптических измерений, биомедицинской оптики и лазерной биомедицины. Автор или редактор 16 книг и глав в книгах, 23 изобретений и более 200 научных статей. Читает курсы «Оптика», «Динамика газоразрядных лазеров», «Лазеры и волоконная оптика в биомедицине», «Оптика биотканей», «Введение в специальность - биофизика». Лектор кратких курсов по биомедицинской оптике для международных аудиторий научных работников, инженеров и медицинских работников. Действительный член Международной

академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук по специальности биофизика и медицинская физика, член совета Российского отделения SPIE, член SPIE/BiOS, а также IEEE/LEOS, стипендиат Государственной научной стипендии России (1994-1996).



## НОВЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕНОСА

*Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, И.В. Фельдштейн*

В работе рассмотрен возможный подход к оценке коэффициента диффузии в среде по временным рядам наблюдений в нескольких точках. Подход основан на анализе зависимости наибольшего собственного значения матрицы ковариации от коэффициента диффузии. Показано, что такая зависимость для широкого круга систем имеет монотонный характер и может рассматриваться как характеристика среды. Рассмотрен вопрос о том, при каких условиях на границе монотонность имеет место.

### Введение

Одной из важнейших задач современной математической физики является анализ обратных задач [1]. По своей постановке они могут быть условно разделены на несколько типов. Например, оценка начальных условий по значениям переменной в некоторый момент времени, определение пространственного распределения некоторой величины по интегральным характеристикам и некоторые другие. Среди них особое место занимают задачи структурной и параметрической идентификации исследуемых систем. Это включает в себя получение уравнений (обычно в частных производных), описывающих наблюдаемое динамическое поведение системы, и параметров, входящих в эти уравнения. Важность такой постановки задачи заключается в том, что развитие эффективных методов ее решения позволит кардинально изменить подходы к моделированию пространственно-распределенных систем.

Широкий круг процессов в физике, химии, медицине, климатологии описывается следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Lambda \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi, t),$$

$$\xi \in \Omega, \quad \text{где } \Omega - \text{область в } R^n,$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\xi), \quad \mathbf{u}|_{\xi \in \partial\Omega} = 0,$$

где  $\Lambda$  - оператор, содержащий пространственные производные переменной  $\mathbf{u}$ .

Таким образом, задача сводится к определению вида функции  $\mathbf{f}$  и оператора  $\Lambda$ , а также входящих в них параметров, исходя из знания поведения системы, например, в форме временных рядов наблюдений величины  $\mathbf{u}$  в нескольких точках области  $\Omega$ .

Отметим, что для решения задачи определения правых частей системы

обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

разработаны методики, изложенные, например, в [2,3].

Рассмотрим случай, когда динамика элемента среды определяется одно- или двумерным отображением, или системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а оператор  $\Lambda$  - диффузионного типа, то есть

$$\Lambda = D \partial^2 / \partial \xi^2.$$

Тогда процессы в изучаемой среде определяются следующими уравнениями:

$$\mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^j) + D \partial^2 \mathbf{x}^j / \partial \xi^2, \quad (1a)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + D \partial^2 \mathbf{x} / \partial \xi^2. \quad (1б)$$

Здесь  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ , верхний индекс  $j$  - момент времени для отображений,  $0 \leq \xi \leq 1$ . В качестве граничных условий выбрано условие  $\mathbf{x}=0$  на границе, то есть  $\mathbf{x}(0, t) = \mathbf{x}(1, t) = 0$ . Поставим задачу определения матрицы диффузии  $D$  по рядам наблюдений в нескольких точках.

Задача оценки некоторого параметра (в данном случае - коэффициента диффузии) может считаться решенной, если будет найдена величина, которая в широком диапазоне изменения параметра монотонно зависит от него. Величина, обладающая такими свойствами, может рассматриваться и как самостоятельная характеристика среды. Например, ее значение для разных сред с одинаковым поведением элементов может использоваться для сравнения сил связей в этих средах. Подобная постановка задачи имеет смысл для широкого круга задач диагностики состояния систем в физике, медицине, климатологии и т.д.

Традиционный подход к построению феноменологических моделей по результатам наблюдений связан с процедурой реконструкции аттрактора в соответствии с методом Такенса или модификациями этого алгоритма. Однако, для задач гидродинамики и ряда других систем использование этого метода, позволяющего восстановить некоторую динамическую систему, сталкивается с принципиальными трудностями. Кроме того, этот подход не позволяет ничего сказать об уравнениях в частных производных или цепочках связанных отображений, описывающих изучаемую пространственно-распределенную систему. Восстановление таких уравнений или цепочек требует других подходов, один из которых и рассматривается в настоящей работе.

### Метод и модельные системы

Для решения поставленной задачи представляется разумным (по крайней мере в качестве отправной точки) проанализировать зависимость корреляций между точками среды от параметра типа коэффициента диффузии. Будем использовать временные ряды наблюдений первой компоненты вектора  $\mathbf{x}$  в нескольких точках отрезка  $0 \leq \xi \leq 1$ :  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , то есть  $x_1(\xi_1), x_1(\xi_2), \dots, x_1(\xi_n)$  (в дальнейшем индекс 1 у первой компоненты вектора  $\mathbf{x}$  опускается). Рассмотрим наибольшее собственное значение матрицы ковариации

$$C = (1/N) M^T M,$$

где  $M$  - матрица наблюдений

$$M = \begin{bmatrix} u_1^0 & u_2^0 & \dots & u_n^0 \\ u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{N-1} & u_2^{N-1} & \dots & u_n^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $N$  - число наблюдений,  $u_i^j$  - отклонение от среднего  $i$ -го элемента среды для  $j$ -го наблюдения [4]

$$u_i^j = x_i^j - 1/N \sum_{k=0}^{N-1} x_i^k.$$

Выбор максимального собственного значения матрицы  $C$  в качестве объекта анализа объясняется следующими соображениями. При отсутствии связей (случай  $D=0$ ) в фазовом пространстве системы не существует выделенного направления - проекции на все направления равнозначны. С ростом диффузии элементы среды начинают участвовать в общем движении. Это приводит к тому, что появляется направление, проекции фазовых векторов на которое максимальны. Решение задачи об определении максимума суммы квадратов проекций множества векторов сводится к задаче о наибольшем собственном значении матрицы, построенной аналогично матрице  $C$ , причем величина этого максимума равна  $\lambda_1$ . В работе подобный анализ проведен для следующих отображений:

$$x^{j+1} = c - (x^j)^2, \quad (3a)$$

$$x^{j+1} = 1 - c|x^j|, \quad (3б)$$

$$x^{j+1} = 1 - |x^j - c|^{1/2} / [1 + (x^j - c)^2], \quad (3в)$$

$$\begin{cases} x^{j+1} = (2x^j + y^j) \bmod 2\pi, \\ y^{j+1} = (x^j + y^j) \bmod 2\pi, \end{cases} \quad (3г)$$

$$\begin{cases} x^{j+1} = 1 + y^j - c(x^j)^2, \\ y^{j+1} = bx^j \end{cases} \quad (3д)$$

и системы Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = -xz + rz - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (3e)$$

При численной реализации на отрезке  $0 \leq \xi \leq 1$  строилась сетка  $\{\xi_i\}$  с равномерным расположением узлов ( $\xi_i = ih$ , где  $h=1/n$ ,  $i=0 \dots n$ ) и использовалась разностная аппроксимация оператора диффузии

$$\partial^2 x(\xi_i) / \partial \xi^2 \approx [x(\xi_{i-1}) - 2x(\xi_i) + x(\xi_{i+1})] / h^2.$$

Таким образом, исходные уравнения (1) принимали вид

$$\dot{x}_i^{j+1} = f(x_i^j) + Dn^2 (x_{i-1}^{j+1} - 2x_i^{j+1} + x_{i+1}^{j+1}), \quad (4a)$$

$$\dot{x}_i = f(x_i) + Dn^2 (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}). \quad (4б)$$

Здесь нижний индекс  $i$  - номер элемента среды,  $i=1 \dots n$ ; верхний индекс  $j$  - момент времени для отображений. Предполагается, что отображения связаны только по первой компоненте вектора  $x$ , то есть в матрице  $D$  отличен от нуля только элемент  $D_{11}$ . В качестве граничных условий выбрано условие  $x=0$  на границе, то есть для 1-го и  $n$ -го элемента соотношения (4) имеют вид

$$x_1^{j+1} = f(x_1^j) + Dn^2 (-2x_1^{j+1} + x_2^{j+1}),$$

$$\mathbf{x}_{it}^{j+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{it}^j) + Dn^2 (\mathbf{x}_{i-1}^{j+1} - 2\mathbf{x}_{it}^{j+1}),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + Dn^2 (-2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + Dn^2 (\mathbf{x}_{n-1} - 2\mathbf{x}_n).$$

Начальные условия полагаются несущественными, так как все переходные процессы считаются завершенными. В дальнейшем  $D_{11}$  будем обозначать  $D$ .

### Некоторые результаты

Рассмотрим вначале вопрос о зависимости величины  $\lambda_1$  от масштаба разбиения, то есть величины  $n$ . Рис. 1 иллюстрирует зависимость  $\lambda_1/n$  от  $n$  при  $D=0.03, 0.05$  для отображения (36). При построении матрицы  $M$  использовались все  $n$  значений динамической переменной (ДП). Видно, что уже при  $n > 20$  происходит выход на предельное значение.

Следующим и основным в рамках поставленной задачи является вопрос о зависимости величины наибольшего собственного значения матрицы ковариации от коэффициента диффузии. Рис. 2 демонстрирует зависимость  $\lambda_1$  от величины  $Dn^2$  для систем (3). Полученные значения  $\lambda_1$  поделены на максимальную величину  $\lambda_{\max}$  для каждой кривой. Такая нормировка используется и в дальнейшем. При расчетах  $n$  бралось равным 10 и при формировании матрицы  $M$  использовались все значения ДП. Видно, что за исключением области малых  $D$  зависимости носят монотонный характер. Таким образом, подобные зависимости могут быть использованы для оценки коэффициента диффузии в среде. Резкое падение кривой, соответствующей отображению (36) при  $Dn^2 \approx 6$ , связано с тем, что при этом значении параметра синхронизация происходит скачком.

Отметим, что для того, чтобы введенная величина действительно являлась параметром среды, она должна быть независимой от расчетных параметров, а именно, числа  $n$ . Зависимость  $\lambda_1(D)$  не обладает таким свойством, однако, зависимость  $(1/n)\lambda_1(D)$  является универсальной для данного отображения при фиксированных параметрах (рис. 3). Именно это позволяет говорить о том, что она характеризует свойства среды.

Рассмотрим требования, накладываемые на множество точек среды, по значениям ДП в которых строится матрица  $M$ . Так, рис. 4 демонстрирует зависимость  $\lambda_1(Dn^2)$ , причем при расчетах  $n=10$ , но матрица  $M$  формировалась по значениям ДП в трех точках, неравноотстоящих друг от друга,

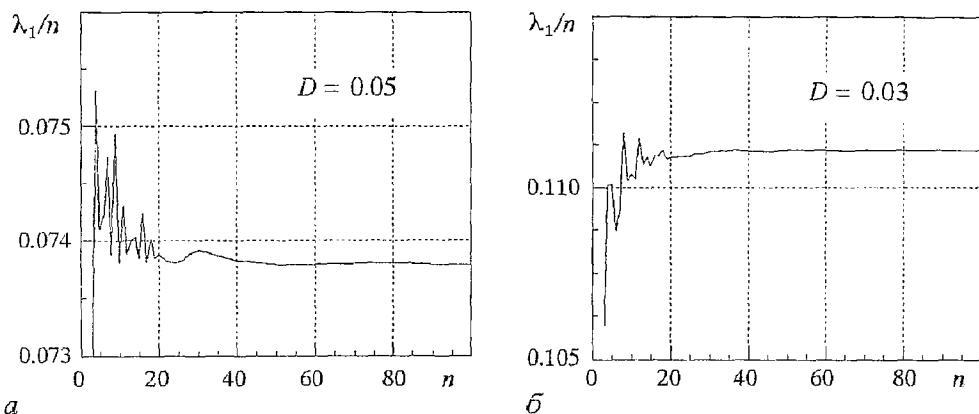


Рис. 1. Зависимость  $\lambda_1/n$  от масштаба разбиения при разных коэффициентах диффузии

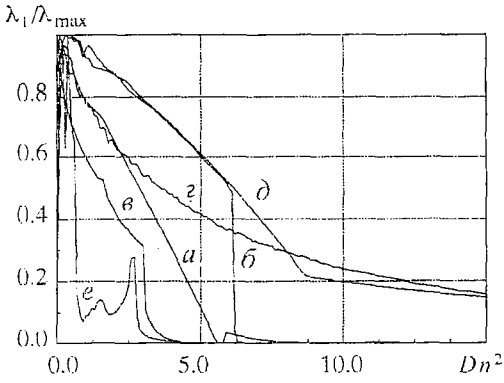


Рис. 2. Зависимость нормированного значения  $\lambda_1^n$  от величины  $Dn^2$ , для исследуемых систем, обозначения кривых соответствуют отображениям (3а)-(3е)

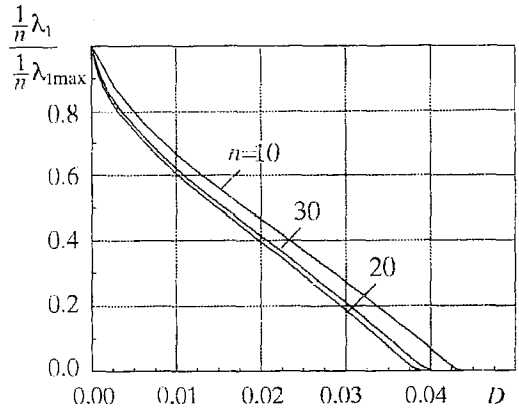


Рис. 3. Зависимость нормированного значения  $\lambda_1/n$  от  $D$

$$M = \begin{bmatrix} u_2^0 & u_5^0 & u_7^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_2^{N-1} & u_5^{N-1} & u_7^{N-1} \end{bmatrix}.$$

Видно, что зависимость качественно та же, что и в том случае, когда в каждый момент времени берется полный вектор наблюдений. Ход кривой «б» при  $D \approx 6$  демонстрирует возникновение синхронизации.

Еще один вопрос, который необходимо рассмотреть, связан с оценкой влияния на  $\lambda_1$  расстояния между точками, по значениям ДП в которых формируется матрица  $M$ . Поясним значение этого вопроса следующим примером. Если расстояние между соседними точками заметно больше корреляционной длины (то есть характерного расстояния затухания автокорреляционной функции), то трудно ожидать от метода разумных результатов - элементы среды практически не «чувствуют» друг друга, как если бы диффузионная связь отсутствовала. Рис. 5 представляет линии уровня автокорреляционной функции в зависимости от  $D$  и расстояния между точками для отображения (3г). Из рисунка следует, что при расстоянии между точками  $\Delta n$  больше  $30 \div 35$  значение автокорреляционной функции становится менее 0.2. То, как это влияет на оценку

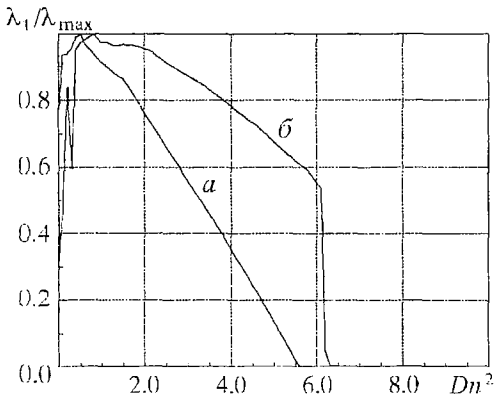


Рис. 4. Зависимость нормированного значения  $\lambda_1$  от  $Dn^2$  при анализе рядов наблюдений в трех точках; кривая «а» соответствует отображению (3а), кривая «б» - отображению (3б)

величины  $\lambda_1$ , показано на рис. 6. При расчетах бралось  $n=200$ , матрица  $M$  формировалась по рядам наблюдений в 5 точках. Видно, что зависимость при заданном  $D$  становится более пологой, что затрудняет определение значения коэффициента диффузии при наличии погрешности в определении наибольшего собственного значения матрицы ковариации. Следовательно, предлагаемый алгоритм необходимо использовать при расстоянии между точками наблюдений меньшем, чем корреляционная длина.

Существенным для применения предлагаемого подхода в задачах построения моделей пространственно-



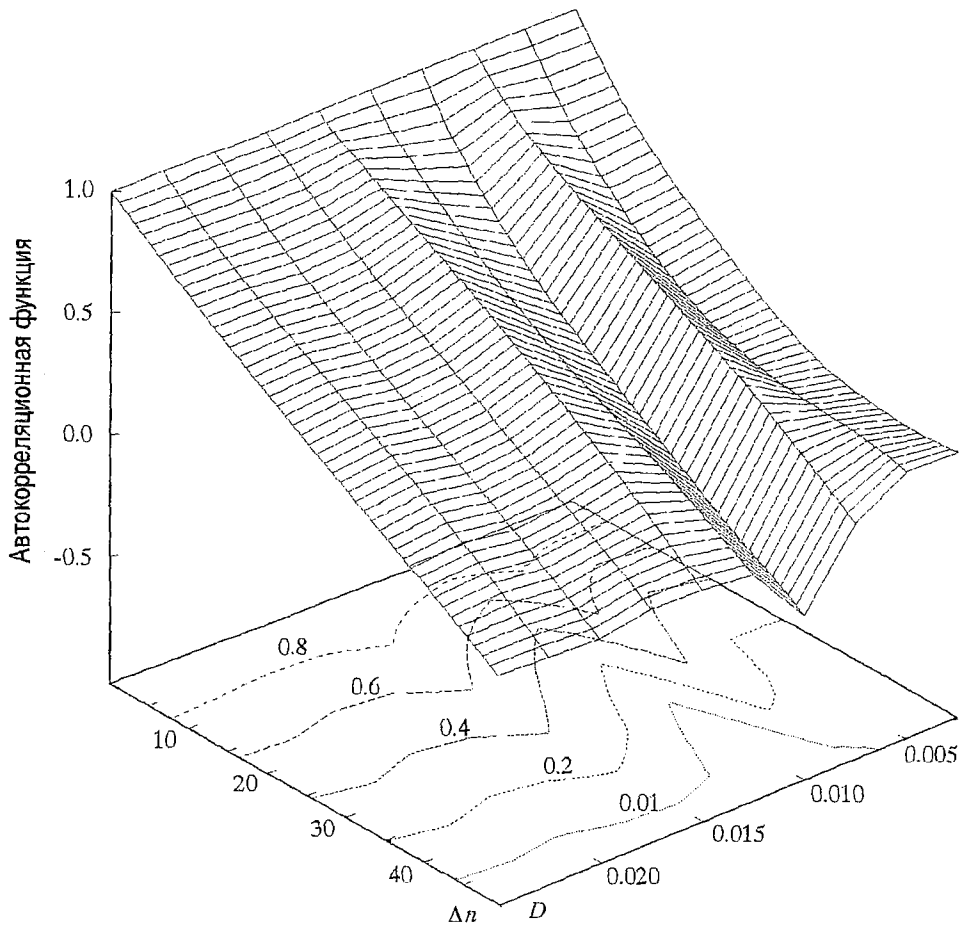


Рис. 5. Автокорреляционная функция для системы (3г) при разных  $D$  и  $\Delta n$

распределенных систем является вопрос о том, как влияют неточности определения остальных параметров модели (входящих в функцию  $f$ ) на оценку коэффициента диффузии. На рис. 7 приведены результаты расчетов  $\lambda_1$  для (3б) при  $n=20$  и  $c = 1.48, 1.50, 1.52$ . Видно, что в области  $0.015 \leq D \leq 0.05$  кривые практически совпадают. То есть в рассмотренном случае метод не является чувствительным к небольшим ошибкам при определении остальных параметров системы.

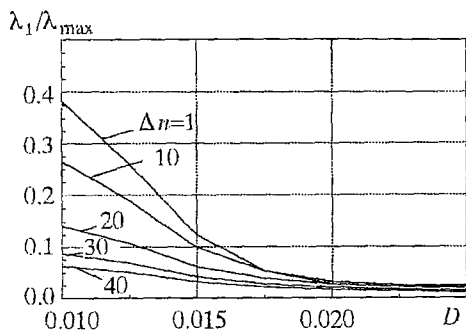


Рис. 6. Влияние расстояния между точками среды  $\Delta n$  на оценку  $\lambda_1$

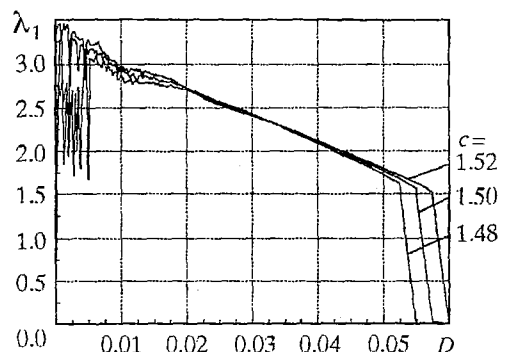


Рис. 7. Влияние параметра  $c$  отображения (3б) на оценку  $\lambda_1$

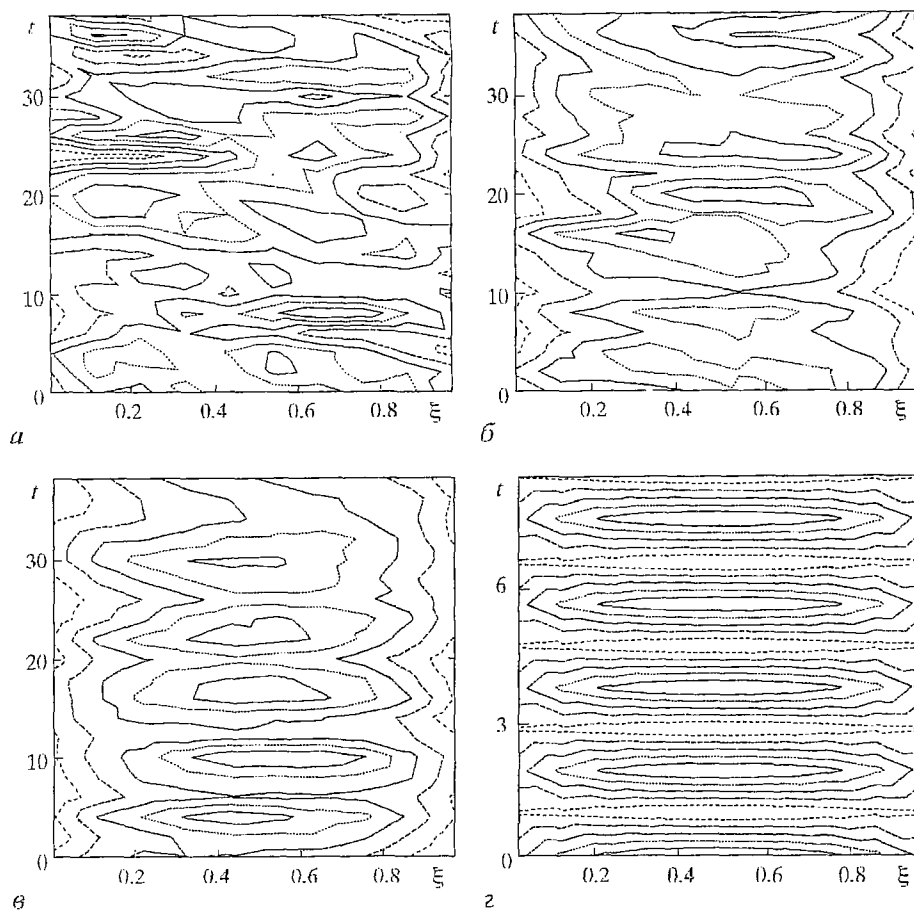


Рис. 8. Пространственно-временная динамика для отображения (3г) при различных  $D$ :  $a$  - 0.01;  $б$  - 0.05;  $в$  - 0.10;  $г$  - периодическая пространственно-временная динамика для отображения (3б) при  $D=0.05$

Интересным представляется вопрос об изменении характера поведения системы при изменении коэффициента диффузии. Хотя подобный анализ далеко не завершен, наглядное представление об изменениях в системе дает рис. 8. На рис. 8,  $a$ - $в$  показаны линии уровня в координатах (пространственная переменная, время) для отображения (3г) при  $D = 0.01, 0.05, 0.10$ , соответственно. Видно, что с ростом коэффициента диффузии движение переходит от неупорядоченного к почти периодическому. Для отображения (3б) при  $D=0.05$  (рис. 8,  $г$ ) движение становится в точности периодическим. Из рис. 8,  $a$ - $в$  следует, что кривые рис. 1,2 были получены для случая, когда в системе реализуется хаотический режим с размерностью аттрактора, которой соответствует корреляционный показатель  $\nu < 4$ .

Рис. 9 представляет результаты расчетов корреляционного интеграла в  $n$ -мерном фазовом пространстве для различных коэффициентов диффузии. Динамика элемента среды определяется отображением (3б) при  $c=1.5, n=20$ . Видно, что корреляционная размерность, определяемая наклоном кривой, с ростом  $D$  уменьшается и достигает некоторой предельной величины. Это, по-видимому, можно трактовать как «упрощение» поведения системы, вызванное тем, что отдельные элементы системы начинают участвовать в общем движении из-за наличия внутренних связей, растущих с увеличением коэффициента диффузии.

Рассмотрим вопрос о граничных условиях. Расчеты показывают, что

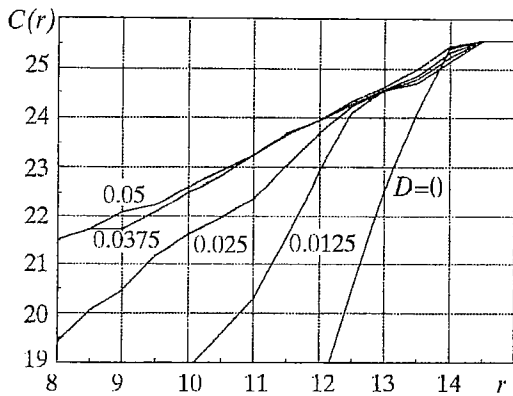


Рис. 9. Корреляционный интеграл для отображения (36) при различных  $D$

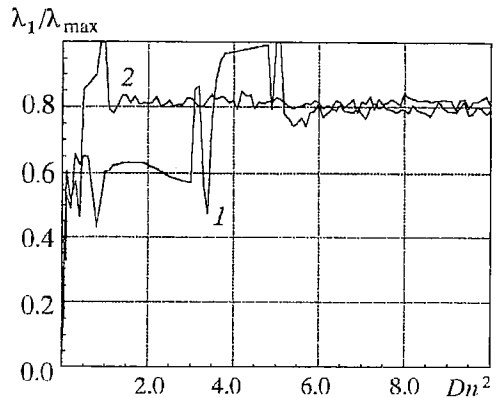


Рис. 10. Результаты оценки нормированного значения  $\lambda_1$  для случаев периодических граничных условий (кривая 1) и условий нулевого потока на границе (кривая 2)

зависимости  $\lambda_1$ , подобные рассмотренным ранее (имеющие монотонный участок в широкой области изменений  $D$ ), встречаются только при фиксированных значениях переменной на краях. Так, рис. 10 представляет результаты расчетов для периодических граничных условий и условий нулевого потока на границе. В первом случае цепочка осцилляторов «замыкалась» в кольцо связями (для одномерного отображения)

$$x_1^{j+1} = f(x_1^j) + D(x_{n-1}^{j+1} - 2x_1^{j+1} + x_2^{j+1}),$$

$$x_n^{j+1} = f(x_n^j) + D(x_1^{j+1} - 2x_n^{j+1} + x_{n-1}^{j+1}),$$

а во втором случае ставились следующие условия:

$$-3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0,$$

$$-x_{n-2} + 4x_{n-1} - 3x_n = 0.$$

Для двумерных отображений и обыкновенных дифференциальных уравнений делалось то же самое. Видно, что зависимость  $\lambda_1$  является в обоих случаях нерегулярной и для задачи оценки параметра  $D$  интереса, по-видимому, не представляет. Влияние краевых условий при небольшой области и выбранных коэффициентах диффузии оказывается достаточно велико. Такое поведение показывает, при каких условиях описанный алгоритм может быть неэффективен. Однако вдали от краев при небольших коэффициентах диффузии (или при достаточно больших областях) кривые  $\lambda_1(D)$  для первой и второй краевых задач практически совпадают и при увеличении  $D$  все больше расходятся.

### Заключение

Показано, что для различных сред, описываемых системой уравнений диффузии с нелинейным источником либо цепочками диффузионно связанных отображений, может быть введен параметр - наибольшее собственное значение матрицы ковариации, составленной по результатам наблюдений в нескольких точках, - монотонно меняющийся с изменением коэффициента диффузии. Показано, что этот параметр может рассматриваться как самостоятельная характеристика среды. Рассмотрены вопросы зависимости такого рода параметра от расстояния между точками наблюдений, неточностей описания динамики элементов среды и др. Рассмотрено изменение поведения среды с ростом коэффициента диффузии.

На основе предложенного метода, зная закон, которому подчиняется динамическое поведение элемента среды (в форме отображения или обыкновенного дифференциального уравнения), возможно определение коэффициента диффузии по записи наблюдений в нескольких точках.

*Настоящая работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-01-01161).*

### Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
2. Aguirre L.A., Billing S.A. Retrieving dynamical invariants from chaotic data using NARMAX models // International journal of bifurcation and chaos. 1995. Vol.5, № 2. P. 449.
3. Фельдштейн И.В. Об одном подходе к восстановлению динамических уравнений по временным рядам // Международная конференция «Математика, компьютер, образование». Дубна, 29.01-3.02.1996.
4. Ababrbanel H.D.I., Brown R., Sidorowich J.J., Tsimring L.S. The analysis of observed chaotic data in physical systems // Rev. Mod. Phys. 1993. P. 1331.

Институт прикладной  
математики РАН

Поступила в редакцию 6.12.96

## NEW APPROACH TO TRANSITION COEFFICIENT ESTIMATION

*G.G. Malinetskii, A.B. Potapov, I.V. Feldstein*

The paper studies one possible approach to nonlinear media transition coefficient estimation from time series of observations in several points. The approach is based on the covariant matrix biggest eigenvalue dependence on diffusion coefficient. It is shown this dependence is monotone for various systems and it can be considered as a media characteristic.

System state vector reconstruction by Takens is not used in this approach. The problem of media points choice influence on results and some other problems are analyzed. Among them - the influence of boundary conditions on existence of monotone dependence.



*Малинецкий Георгий Геннадьевич* родился в 1956 году в Уфе, окончил физический факультет МГУ (1979), защитил кандидатскую диссертацию на тему «Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных средах» (1982) и докторскую диссертацию на тему «Диффузионный хаос и новые типы упорядоченности в нелинейных средах» (1990) в Институте прикладной математики. В настоящее время работает там же заведующим сектором нелинейной динамики. Автор большого количества статей в области исследования хаоса и нелинейных явлений, а также учебника «Структуры, хаос, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику».



*Потанов Алексей Борисович* - родился в 1960 году. Окончил физический факультет МГУ (1983). В настоящее время старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Область интересов - нелинейная динамика, обработка временных рядов, количественные характеристики хаоса, моделирование сложных систем.



*Фельдштейн Илья Валерьевич* - родился в 1969 году. Окончил Московский физико-технический институт (1993). Работает в Институте проблем механики РАН, аспирант Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Область интересов - анализ временных рядов, построение моделей систем, оценка их параметров.



## ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГорова - ФОККЕРА - ПЛАНКА ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*С.П. Жогаль, С.И. Жогаль*

Исследуются вопросы применимости метода марковских диффузионных процессов в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики при изучении случайных колебаний в динамических системах. Дана постановка проблемы получения аналитического решения уравнений Колмогорова - Фоккера - Планка (КФП). Сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях интегрируемости усредненных уравнений КФП, соответствующих достаточно широкому классу квазилинейных колебательных систем с одной степенью свободы, подверженных различным типам внешнего периодического воздействия и случайному возмущению параметров.

При решении различных задач науки и техники встает необходимость исследования случайных колебательных процессов в динамических системах. Теория случайных колебаний принадлежит к числу новых перспективных направлений современных прикладных наук. Одной из актуальных задач подобного класса является изучение совместного влияния различных типов периодического и случайного воздействий на колебания механических систем. При решении данной задачи весьма эффективным является метод марковских диффузионных процессов в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики, особенно для квазилинейных колебательных систем с одной степенью свободы. Однако применение данного метода крайне затруднено вследствие сложности задачи получения аналитического решения соответствующего уравнения Колмогорова - Фоккера - Планка (КФП). В данной работе определяется один, достаточно широкий, класс неавтономных квазилинейных колебательных систем, удовлетворяющих полученному нами достаточному условию интегрируемости соответствующих уравнений КФП.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую неавтономную механическую квазилинейную систему с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \varepsilon^{1/2} g(t, x, \dot{x}) \xi(t), \quad (1)$$

где  $\varepsilon > 0$  - малый параметр;  $\omega$  - частота собственных колебаний системы;  $\xi(t)$  - случайный процесс типа «белого шума» единичной интенсивности;  $f, g$  - дифференцируемые функции своих аргументов, периодические по  $t$ .

Используя замену переменных

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t)\cos\phi(t), \\ \dot{x}(t) &= -\omega a(t)\sin\phi(t), \quad \phi(t) = \omega t + \theta(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a(t), \theta(t)$  - медленно меняющиеся функции времени, и, применяя формулу Ито дифференцирования сложной случайной функции, приходим к следующей системе стохастических дифференциальных уравнений, определяющих двумерный марковский случайный процесс  $\{a(t), \theta(t)\}$  [1]:

$$\begin{aligned} da(t) &= [-(\varepsilon/\omega)f(t, a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\sin\phi + \varepsilon g^2(t, a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\cos^2\phi/(2\omega^2 a)]dt - \\ &\quad - (\varepsilon^{1/2}/\omega)g(t, a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\sin\phi d\xi(t), \\ d\theta(t) &= [-\varepsilon/(\omega a)f(t, a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\cos\phi - \varepsilon g^2(t, a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\sin\phi\cos\phi/(\omega^2 a^2)]dt - \\ &\quad - \varepsilon^{1/2}/(\omega a)g(t, a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\cos\phi d\xi(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Соответствующее уравнение КФП для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы колебаний  $w(a, \theta)$  имеет после применения к нему метода усреднения по явно входящему времени  $t$  (что вполне оправдано, поскольку система (3) имеет стандартную по Н.Н.Боголюбову форму [2]) следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial/\partial a(K_1(a, \theta)w) + \partial/\partial \theta(K_2(a, \theta)w) = \\ = 1/2 \partial^2/\partial a^2(K_{11}(a, \theta)w) + \partial^2/\partial a \partial \theta(K_{12}(a, \theta)w) + 1/2 \partial^2/\partial \theta^2(K_{22}(a, \theta)w), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(a, \theta) &= \mathbf{M}_t [-(1/\omega)f \sin\phi + g^2 \cos^2\phi/(2\omega^2 a)], \\ K_2(a, \theta) &= \mathbf{M}_t [-1/(\omega a)f \cos\phi - g^2 \sin 2\phi/(2\omega^2 a^2)], \\ K_{11}(a, \theta) &= \mathbf{M}_t [(1/\omega^2)g^2 \sin^2\phi], \\ K_{12}(a, \theta) &= \mathbf{M}_t [1/(2a\omega^2) g^2 \sin 2\phi], \\ K_{22}(a, \theta) &= \mathbf{M}_t [1/(a^2\omega^2)g^2 \cos^2\phi]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{M}_t$  - оператор усреднения по явно входящему времени  $t$ .

Поскольку уравнение КФП является детерминированным, то сама процедура усреднения его коэффициентов сноса и диффузии не отличается от описанной в [3, с. 54-59; 4, с. 75-79] процедуры усреднения за период.

Получение аналитического решения уравнения КФП (4) для систем вида (1) в большинстве практических случаев невозможно. Для автономных систем, то есть в случае, когда

$$\begin{aligned} f(t, x, \dot{x}) &= f(x, \dot{x}), \\ g(t, x, \dot{x}) &= g(x, \dot{x}), \end{aligned} \quad (6)$$

коэффициенты усредненного уравнения КФП будут зависеть только от амплитуды колебаний  $a$ , представляется возможным рассмотреть отдельное уравнение КФП для стационарной амплитуды колебаний, допускающего аналитическое

решение [1,2]. Однако существует довольно широкий класс неавтономных систем вида (1), встречающихся при решении многих практических задач механики и математической физики, для которых удается получить аналитическое решение уравнения КФП (4). Это класс систем, соответствующие уравнения КФП которых обладают условием потенциальности [2,5,6].

## 2. Достаточное условие интегрируемости усредненных уравнений КФП для систем с параметрическим случайным воздействием

Рассмотрим частный случай системы (1) - систему, случайные колебания в которой могут быть описаны одним из следующих стохастических дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon h(x, \dot{x}) + \varepsilon \sum_{s=0}^S P_s \cos(\Omega_s \omega t) \dot{x}^s + \varepsilon \sum_{k=1}^K R_k \cos(\zeta_k \omega t) \dot{x}^k + \varepsilon^{1/2} \sigma_l [x^{(p)}] \xi(t),$$

$$l = 1, 2, \dots, L, \quad p = 0, 1, \dots, P, \quad (7)$$

где  $h(x, \dot{x})$  - дифференцируемая функция своих аргументов;  $P_s, R_k, \sigma_l, \Omega_s, \zeta_k, \omega$  -

положительные постоянные;  $\xi(t)$  - «белый шум» единичной интенсивности;  $\varepsilon > 0$  - малый параметр.

Колебательные системы, подобные (7), подверженные различным типам внешнего периодического воздействия и параметрическому случайному возмущению (здесь мы воспользовались терминологией [2; 5, с. 502-503; 7, с. 176]), довольно часто являются предметом многих прикладных исследований. Наличие параметрических случайных воздействий значительно усложняет задачу исследования колебаний в подобных системах методами марковских случайных процессов.

Класс систем вида (7), для которых выполняются достаточные условия аналитической интегрируемости соответствующего уравнения КФП (4), может быть определен с помощью полученной нами следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть для системы (7) выполняются следующие условия:

1.  $\partial/\partial a \{a^{1-2l} \mathbf{M}_l [h(a \cos \phi, -a \omega \sin \phi) \cos \phi]\} = 0.$  (8)

2. Для параметров внешних гармонических воздействий  $\Omega_s$  выполняются лишь те из резонансных соотношений

$$\Omega_s = s - 2n + 1, \quad n = 0, 1, \dots, [s/2], \quad \forall s = 0, 1, \dots, S, \quad (9)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\Omega_s^2 = (s+1)(s-2l+1)(2l+1) \text{sign}((-1)^{l+1}), \quad \forall s = 0, 1, \dots, S. \quad (10)$$

3. Для параметров внешних гармонических воздействий  $\zeta_k$  при  $p$  - четном не выполняется ни одно из резонансных соотношений

$$\zeta_k = k - 2n + 1, \quad n = 0, 1, \dots, [k/2], \quad \forall k = 0, 1, \dots, K, \quad (11)$$

при  $p$  - нечетном - резонансные соотношения (11) выполняются лишь для  $k=2l$ .

Тогда соответствующее системе (7) усредненное уравнение КФП (4) удовлетворяет условию потенциальности

$$\begin{aligned} & \partial/\partial \theta \{1/K_{11} [K_1 - 1/2 \partial K_{11} / \partial a]\} = \\ & = \partial/\partial a \{1/K_{22} [K_2 - 1/2 \partial K_{22} / \partial \theta - \partial K_{12} / \partial a] - 2K_{12} / (K_{11} K_{22}) [K_1 - 1/2 \partial K_{11} / \partial a]\} \end{aligned} \quad (12)$$



и, следовательно, может быть проинтегрировано в квадратурах [2,5].

Отметим, что резонансные соотношения (9) - (11), по-существу, означают, что все частоты воздействия являются гармониками частоты автоколебаний. Прежде, чем приступить к доказательству теоремы, сформулируем следующую лемму.

**Лемма.** Условие потенциальности (12) уравнения КФП для системы (7), удовлетворяющей соотношению (8), эквивалентно следующим условиям:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{M_i[\cos^s \phi \sin \phi \cos(\Omega_s \omega t)]\} = (s+1-2l)(2l+1)^{\text{sign}((-1)^{p+1})} M_i[\cos^{s+1} \phi \cos(\Omega_s \omega t)],$$

$$\forall s = 0, 1, \dots, S, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{M_i[\sin^{k+1} \phi \cos(\zeta_k \omega t)]\} = (k+1-2l)(2l+1)^{\text{sign}((-1)^{p+1})} M_i[\cos \phi \sin^k \phi \cos(\zeta_k \omega t)],$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, K.$$

Доказательство леммы легко получить, определив по формулам (5) коэффициенты усредненного уравнения КФП (4), соответствующего системе (7), и подставив их затем в условие потенциальности (12).

Используя утверждение леммы, а также воспользовавшись формулами для представления  $\sin^k \phi$ ,  $\cos^s \phi$  через тригонометрические функции кратных аргументов, несложно получить, что в резонансном случае при

$$\Omega_s = s - 2n + 1, \quad n \in \{0, 1, \dots, [s/2]\},$$

$$\zeta_k = k - 2n + 1, \quad n \in \{0, 1, \dots, [k/2]\},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{M_i[\cos^s \phi \sin \phi \cos(\Omega_s \omega t)]\} = 1/2^{s+1} \left[ \binom{s}{n} - \binom{s}{n-1} \right] \cos((s-2n+1)\theta) (s-2n+1),$$

$$M_i[\cos^{s+1} \phi \cos(\Omega_s \omega t)] = 1/2^{s+1} \binom{s+1}{n} \cos((s-2n+1)\theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{M_i[\sin^{k+1} \phi \cos(\zeta_k \omega t)]\} = (-1)^{(k+3+2n)/2} / 2^{k+1} \binom{k+1}{n} \sin((k-2n+1)\theta) (k-2n+1),$$

$k$  - нечетное,  
(14)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{M_i[\sin^{k+1} \phi \cos(\zeta_k \omega t)]\} = (-1)^{(k+2n)/2} / 2^{k+1} \binom{k+1}{n} \cos((k-2n+1)\theta) (k-2n+1),$$

$k$  - четное,

$$M_i[\cos \phi \sin^k \phi \cos(\zeta_k \omega t)] = (-1)^{(k+2n-1)/2} / 2^{k+1} \left[ \binom{k}{n} - \binom{k}{n-1} \right] \sin((k-2n+1)\theta),$$

$k$  - нечетное,

$$M_i[\cos \phi \sin^k \phi \cos(\zeta_k \omega t)] = (-1)^{(k+2n)/2} / 2^{k+1} \left[ \binom{k}{n} - \binom{k}{n-1} \right] \cos((k-2n+1)\theta),$$

$k$  - четное,

где  $\binom{s}{n} = s! / [n!(s-n)!]$ .

Исходя из соотношений (14), несложно установить, что условия (13) будут выполняться лишь в случае, если  $\Omega_s$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Omega_s [1 - 2n/(s+1)] = (2l+1)^{\text{sign}((-1)^{p+1})} (s+1-2l)$$

или, окончательно, условиям

$$\Omega_s^2 = (s+1)(s-2l+1)(2l+1)^{\text{sign}((-1)^{p+1})}, \quad \forall s = 0, 1, \dots, S.$$

Для выполнения условия потенциальности относительно  $\zeta_k$  получаем

$$\zeta_k = (k-2l+1)(2l+1)^{\text{sign}((-1)^{p+1})} \left[ \binom{k+1}{n} - 2 \binom{k}{n-1} \right] \binom{k+1}{n}^{-1}, \quad (15)$$

$$\forall k=1, 2, \dots, K, \quad n=0, 1, \dots, [k/2].$$

Следовательно, при  $p$ , четном относительно  $\zeta_k$ , не могут удовлетворяться никакие из резонансных соотношений вида (11), а при  $p$  - нечетном соотношения (11) выполняются лишь для  $k=2l$ . Теорема доказана.

В том случае, когда некоторая система вида (7) удовлетворяет условиям доказанной теоремы, ее усредненное уравнение КФП для амплитуды и фазы стационарных колебаний будет иметь следующее точное решение:

$$w(a, \theta) = C \exp\{2 \int 1/K_{11} [K_{11}^{-1/2} \partial K_{11} / \partial a] da + (K_{22}/K_{22}) d\theta\}, \quad (16)$$

где  $C$  - постоянная нормировки [5].

### 3. Исследование неавтономных квазилинейных систем, подверженных случайному возмущению параметров колебаний

При решении многих прикладных задач объектом исследования выступают квазилинейные колебательные системы, испытывающие случайные изменения собственной частоты. Пусть исследуемая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon h(x, \dot{x}) + \varepsilon \sum_{s=0}^S P_s \cos([(s^2-1)/3]^{1/2} \omega t) x^s + \varepsilon^{1/2} \sigma x \dot{\xi}(t), \quad (17)$$

где параметры гармонических воздействий

$$\Omega_s = [(s^2-1)/3]^{1/2} \quad (18)$$

удовлетворяют резонансным соотношениям (9), (10), а дифференцируемая функция своих аргументов  $h(x, \dot{x})$  - соотношению (8) ( $l=1, p=0$ ). Тогда, согласно доказанной теореме, соответствующее усредненное уравнение КФП обладает свойством потенциальности и его точное решение может быть получено по формуле (16)

$$W(a, \theta) = C \exp\left\{ \int \left[ -16\omega / (\sigma^2 a^2) M_l [h(a \cos \phi, -a \omega \sin \phi) \sin \phi] - \right. \right.$$

$$- 16\omega / \sigma^2 \sum_{s=0}^S P_s a^{s-2/2s+1} \left[ \binom{s}{n} - \binom{s}{n-1} \right] \sin([(s^2-1)/3]^{1/2} \theta) + 1/a \Big] da +$$

$$\left. + \left[ -16\omega / (3\sigma^2 a) M_l [h(a \cos \phi, -a \omega \sin \phi) \cos \phi] - \right. \right.$$

$$\left. - 16\omega / (3\sigma^2) \sum_{s=0}^S P_s a^{s-1/2s+1} \binom{s+1}{n} \cos([(s^2-1)/3]^{1/2} \theta) \right] d\theta, \quad (19)$$

где  $n = 1/2 \{s+1 - [(s^2-1)/3]^{1/2}\}$ .

В качестве конкретного примера рассмотрим систему Ван-дер-Поля,

находящуюся под воздействием параметрического гармонического воздействия в главной резонансной области и случайных возмущений частоты автоколебаний, математической моделью которой служит следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\alpha - \beta x^2)\dot{x} - \varepsilon\Delta x + \varepsilon P x^2 \cos \omega t + \varepsilon^{1/2} \sigma x \xi(t), \quad (20)$$

где

$$\varepsilon\Delta = \omega_0^2 - \omega^2, \quad (21)$$

$\omega_0$  - собственная частота системы;  $\omega$  - частота внешнего гармонического воздействия;  $\Delta$  - некоторая постоянная.

Данная система удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно,  $W(a, \theta)$  может быть непосредственно определена по формуле (16)

$$W(a, \theta) = C a^{(\sigma^2 + 8\alpha\omega^2)/\sigma^2} \exp\{-(\beta\omega^2/\sigma^2)a^2 - (2\omega P/\sigma^2)a \sin \theta + 8\omega\Delta/(3\sigma^2)\theta\}. \quad (22)$$

Для периодичности по  $\theta$  необходимо рассматривать только нулевую расстройку  $\Delta=0$ .

Аналогичный результат был получен в [2,8] с помощью метода разложения  $W(a, \theta)$  по квазициклической координате, применение которого требует крайне трудоемких математических выкладок и зачастую приводит к представлению  $W(a, \theta)$  в виде бесконечного ряда разложения по степеням амплитуды  $a$ . Следует также отметить, что для систем, не удовлетворяющих условиям доказанной выше теоремы, на основе метода, предложенного в [8], не удалось получить представления  $W(a, \theta)$  в виде конечного ряда.

При наличии случайных возмущений коэффициента линейного затухания система будет удовлетворять условиям теоремы, если она описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon h(x, \dot{x}) + \varepsilon \sum_{s=2}^S P_s \cos([3(s^2-1)]^{1/2}\omega t) x^s + [R_1 \cos \omega t + R_2 \cos 3\omega t] x^2 + \varepsilon^{1/2} \sigma x \xi(t), \quad (23)$$

где функция  $h(x, \dot{x})$  такая, что выполняется условие (8) ( $l=1, p=1$ ).

В том случае, когда функция  $h(x, \dot{x})$  удовлетворяет условию

$$M_l[h(a \cos \phi, -a \omega \sin \phi) \cos \phi] = 0, \quad (24)$$

являющемуся более жестким, чем (8), или же когда она представима в виде ряда по степеням амплитуды  $a^i$  с показателями  $i \geq 2$ ,  $W(a, \theta)$  может быть представлена в удобной для приложений форме

$$\begin{aligned} W(a, \theta) = & C a^{-5/3} \exp\{-16/(3\sigma^2\omega) \int_0^a (1/a^2) M_l[h(a \cos \phi, -a \omega \sin \phi) \sin \phi] da - \\ & - 1/(3\sigma^2\omega) \sum_{s=2}^S P_s a^{s-1} / [(s-1)2^{s-3}] [ \binom{s}{n} - \binom{s}{n-1} ] \sin([3(s^2-1)]^{1/2}\theta) - \\ & - R_1 a (\omega \sin \theta) / \sigma^2 + R_2 a (\omega \sin 3\theta) / (3\sigma^2)\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим следующую конкретную систему, удовлетворяющую условиям теоремы:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\alpha - \beta x^2)\dot{x} + \varepsilon P x^2 \cos 3\omega t + \varepsilon(R_1 \cos \omega t + R_2 \cos 3\omega t) x^2 + \varepsilon^{1/2} \sigma x \xi(t), \quad (26)$$

Совместная плотность вероятностей амплитуды  $a$  и фазы  $\theta$  стационарных колебаний определяется, согласно (25), следующим образом:

$$W(a, \theta) = Ca^{(8\alpha - 5\sigma^2)/(3\sigma^2)} \exp\{-\beta a^2/(3\sigma^2) - 2Pa(\sin 3\theta)/(3\omega\sigma^2) - R_1 a(\omega \sin \theta)/\sigma^2 + R_2 a(\omega \sin 3\theta)/(3\sigma^2)\}. \quad (27)$$

Для нахождения наиболее вероятных значений амплитуды и фазы стационарных колебаний из (27) получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} 2\beta a^2 + 3R_1 \omega a \sin \theta + [2P/\omega - R_2 \omega] a \sin 3\theta + 5\sigma^2 - 8\alpha &= 0, \\ R_1 \omega a \cos \theta + [2P/\omega - R_2 \omega] a \cos 3\theta &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Если, например,  $R_1=0$ , то из (28) получаем, что наиболее вероятное значение амплитуды стационарных колебаний удовлетворяет соотношению

$$a = (R_2 \omega^2 - 2P)/(4\beta \omega) + \{[(R_2 \omega^2 - 2P)/(4\beta \omega)]^2 + (8\alpha - 5\sigma^2)/(2\beta)\}^{1/2}, \quad (29)$$

из которого следует, что, во-первых, в системе возможна взаимокompенсация периодических воздействий в том случае, когда

$$P = R_2 \omega^2 / 2,$$

и, во-вторых, если возможен выбор коэффициента  $\alpha$  таким образом, чтобы

$$\alpha = 5\sigma^2/8 + 1,$$

то можно добиться гашения воздействия флуктуаций, и в системе будут наблюдаться колебания с той же амплитудой, что и в детерминированной неавтономной системе Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - \beta x^2)\dot{x} + \varepsilon P x^2 \cos 3\omega t + R_2 \cos 3\omega t x^2.$$

## Библиографический список

1. Коломиец В.Г. Об усреднении в стохастических уравнениях Ито // Мат. физика и нелинейная механика. 1987. Вып.7(41). С. 1.
2. Митропольский Ю.А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. Киев: Наукова думка, 1992. 344 с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
4. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
5. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 560 с.
6. Жогаль С.И. Достаточное условие интегрируемости уравнений Колмогорова - Фоккера - Планка для неавтономных квазилинейных систем с непараметрическим случайным воздействием // Вестник Белорусского госуниверситета. Сер.1. 1995. № 1. С. 62.
7. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
8. Нгуен Донг Ань. Взаимное влияние различных типов случайных и

периодических возмущений на колебательные нелинейные системы. Автореф. дисс. ... доктора физ.- мат. наук. Киев, 1986. 32 с.

Гомельский государственный  
университет им. Ф.Скорины,  
республика Беларусь

Поступила в редакцию 4.12.96  
после переработки 14.03.97

## ON INTEGRATION OF KOLMOGOROV - FOKKER - PLANCK EQUATIONS FOR NON-AUTONOMOUS QUASILINEAR SYSTEMS HAVING PARAMETRIC RANDOM EFFECT

*S.P. Zhogal, S.I. Zhogal*

The sufficient conditions of analytic integration of Kolmogorov - Fokker - Planck equations for the quasilinear oscillatory systems with different types of external periodic forces and random disturbances of parameters are investigated in this paper.



*Жогаль Сергей Петрович* - родился в 1962 году в деревне Белев Житковичского района Гомельской области (Беларусь). Окончил Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины (1985). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук на тему «Влияние случайных возмущений на некоторые сложные колебательные системы, описываемые дифференциально-функциональными уравнениями» в Киевском государственном университете им. Т.Г. Шевченко (1991). Работает доцентом кафедры математических проблем управления Гомельского государственного университета. Автор 26 публикаций.



*Жогаль Светлана Ивановна* - родилась в 1963 году в деревне Перелевка Ветковского района Гомельской области (Беларусь). Окончила Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины (1985). Защитила диссертацию на соискание степени кандидата технических наук на тему «Моделирование и исследование колебательных режимов квазилинейных систем при широкополосных случайных возмущениях» в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины (1996). Работает старшим преподавателем кафедры прикладной математики и теории надежности Белорусского государственного университета транспорта. Автор 14 публикаций.



## О ФОРМАЛИЗАЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЛАДКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Н. Чуканов

Предложен метод формализации взаимодействия гладких нелинейных динамических систем с использованием двухпараметрических левых групп. Метод может быть применен для линейных динамических систем и обобщен на нелинейные динамические системы. Рассмотрен пример взаимодействующих нелинейных динамических систем, которые при линейном рассмотрении являются не взаимодействующими.

### Введение

В классических работах Р.Калмана [1] разработаны ранговые методы исследования линейных динамических систем, а именно, исследование управляемости и наблюдаемости этих систем. Системный подход Р.Калмана основан на учете взаимного влияния компонент вектора состояния систем, которое приводит к зависимости эволюции одной из компонент вектора состояния при возмущении другой компоненты вектора состояния.

Используя ранговые методы исследования Р.Калмана, возможно провести формализацию взаимодействия линейных динамических систем. Однако исследование взаимодействия нелинейных динамических систем осуществимо только после линеаризации этих систем.

### 1. Постановка задачи

Учет нелинейной структуры взаимного влияния компонент вектора состояния систем может привести к изменению размерности пространства управляемости и наблюдаемости гладких нелинейных динамических систем. Для учета нелинейной структуры взаимного влияния компонент вектора состояния систем в работе используется аппарат групп Ли [2].

Для векторов состояния гладкой нелинейной динамической системы  $x$  и дополнительной динамической системы  $\xi$  можно составить диаграмму морфизмов

$$\begin{array}{ccc}
 & e - D_{\xi} & \\
 \Psi_t \downarrow & x_t \longrightarrow & \xi_t \downarrow \Phi_t \\
 & x_0 \longrightarrow & \xi_0 \\
 & e - D_{\xi} & 
 \end{array} \quad (1)$$

Здесь  $\Psi_t$  - неизвестная переходная матрица для гладкой нелинейной системы

$$dx/dt = \psi(x), \quad (2)$$

$\Phi_t$  - переходная матрица

$$\Phi_t = e^{tA} \quad (3)$$

для линейной системы

$$d\xi/dt = Ax, \quad (4)$$

$e^{D\xi}$  - морфизм  $\xi \rightarrow x$  с инфинитезимальным генератором  $D_\xi$

$$D_\xi = T(\xi)\partial/\partial\xi \quad (5)$$

и компонентами генератора  $T(\xi)$ , определяемыми в Приложении по компонентам вектора  $\psi(x)$  методом, аналогичным методу Кэмела-Хори [3]. В дальнейшем указание на зависимость от  $\xi$  компонент матрицы  $T$  опускается. Для выполнения условий коммутативности диаграммы (1) должно выполняться соотношение

$$e^{-D_\xi}\Psi_t = \Phi_t e^{-D_\xi} \quad (6)$$

или

$$x_t = e^{D_\xi}\Phi_t e^{-D_\xi}x_0. \quad (7)$$

## 2. Взаимодействие линейных динамических систем

Рассмотрим взаимодействие двух гладких линейных динамических систем с векторами состояния

$$x = \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

удовлетворяющими соотношению

$$\begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} \Big|_t = \begin{pmatrix} e_{I,I}^{tA} & e_{I,II}^{tA} \\ e_{II,I}^{tA} & e_{II,II}^{tA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} \Big|_{t=0}. \quad (9)$$

При изменении в момент времени  $t=0$  вектора состояния системы  $\alpha$  на  $\delta x_\alpha$  вектор состояния системы  $\beta$  изменится на  $\delta x_\beta$  в момент времени  $t$  ( $\alpha, \beta = I$  или  $II$ )

$$\delta x_{\alpha t} = e_{\alpha,\beta}^{tA} \delta x_{\beta 0}, \quad (10)$$

где

$$e_{\alpha,\beta}^{tA} = \sum_{i \geq 0} [(tA)_{\alpha,\beta}^{[i]} / i!]. \quad (11)$$

Для  $A_{\alpha,\beta}^{[i]}$  получим рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} A_{I,I}^{[i]} &= A_{I,I} A_{I,I}^{[i-1]} + A_{I,II} A_{II,I}^{[i-1]}, \\ A_{I,II}^{[i]} &= A_{I,I} A_{I,II}^{[i-1]} + A_{I,II} A_{II,II}^{[i-1]}, \\ A_{II,I}^{[i]} &= A_{II,I} A_{I,I}^{[i-1]} + A_{II,II} A_{II,I}^{[i-1]}, \\ A_{II,II}^{[i]} &= A_{II,I} A_{I,II}^{[i-1]} + A_{II,II} A_{II,II}^{[i-1]}. \end{aligned} \quad (12)$$

Исследуя ранги матриц  $e_{\alpha,\beta}^{tA}$ , можно установить структуру взаимодействия линейных динамических систем [1].

### 3. Взаимодействие нелинейных динамических систем

Для случая взаимодействия гладких нелинейных динамических систем

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi t} \Phi_t \mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi \mathbf{x}_0} = \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi t A} \mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi \mathbf{x}_0}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi t} \Phi_t \mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi \mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} \Psi_{I,I} & \Psi_{I,II} \\ \Psi_{II,I} & \Psi_{II,II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{I,I}^{\mathbf{D}_\xi} & \mathbf{e}_{I,II}^{\mathbf{D}_\xi} \\ \mathbf{e}_{II,I}^{\mathbf{D}_\xi} & \mathbf{e}_{II,II}^{\mathbf{D}_\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{I,I}^{tA} & \mathbf{e}_{I,II}^{tA} \\ \mathbf{e}_{II,I}^{tA} & \mathbf{e}_{II,II}^{tA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{I,I}^{-\mathbf{D}_\xi} & \mathbf{e}_{I,II}^{-\mathbf{D}_\xi} \\ \mathbf{e}_{II,I}^{-\mathbf{D}_\xi} & \mathbf{e}_{II,II}^{-\mathbf{D}_\xi} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi} = \sum_{i \geq 0} [(\mathbf{D}_\xi)^i / i!]$$

и

$$\mathbf{D}_\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_I \partial / \partial \xi_I & \mathbf{T}_I \partial / \partial \xi_{II} \\ \mathbf{T}_{II} \partial / \partial \xi_I & \mathbf{T}_{II} \partial / \partial \xi_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\xi I I} & \mathbf{D}_{\xi I II} \\ \mathbf{D}_{\xi II I} & \mathbf{D}_{\xi II II} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{D}_\xi^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\xi I I} \mathbf{D}_{\xi I I} + \mathbf{D}_{\xi I II} \mathbf{D}_{\xi II I} & \mathbf{D}_{\xi I I} \mathbf{D}_{\xi II II} + \mathbf{D}_{\xi I II} \mathbf{D}_{\xi II II} \\ \mathbf{D}_{\xi II I} \mathbf{D}_{\xi I I} + \mathbf{D}_{\xi II II} \mathbf{D}_{\xi II I} & \mathbf{D}_{\xi II I} \mathbf{D}_{\xi II II} + \mathbf{D}_{\xi II II} \mathbf{D}_{\xi II II} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{D}_\xi^i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\xi I I} \mathbf{D}_{\xi I I}^{i-1} + \mathbf{D}_{\xi I II} \mathbf{D}_{\xi II I}^{i-1} & \mathbf{D}_{\xi I I} \mathbf{D}_{\xi II II}^{i-1} + \mathbf{D}_{\xi I II} \mathbf{D}_{\xi II II}^{i-1} \\ \mathbf{D}_{\xi II I} \mathbf{D}_{\xi I I}^{i-1} + \mathbf{D}_{\xi II II} \mathbf{D}_{\xi II I}^{i-1} & \mathbf{D}_{\xi II I} \mathbf{D}_{\xi II II}^{i-1} + \mathbf{D}_{\xi II II} \mathbf{D}_{\xi II II}^{i-1} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Из (14) следует

$$\begin{aligned} \Psi_{I,I} &= \mathbf{e}_{I,I}^{\mathbf{D}_\xi} (\mathbf{e}_{I,I}^{tA} \mathbf{e}_{I,I}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{I,II}^{tA} \mathbf{e}_{II,I}^{-\mathbf{D}_\xi}) + \mathbf{e}_{I,II}^{\mathbf{D}_\xi} (\mathbf{e}_{II,I}^{tA} \mathbf{e}_{I,I}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{II,II}^{tA} \mathbf{e}_{II,II}^{-\mathbf{D}_\xi}), \\ \Psi_{I,II} &= \mathbf{e}_{I,I}^{\mathbf{D}_\xi} (\mathbf{e}_{I,I}^{tA} \mathbf{e}_{I,II}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{I,II}^{tA} \mathbf{e}_{II,II}^{-\mathbf{D}_\xi}) + \mathbf{e}_{I,II}^{\mathbf{D}_\xi} (\mathbf{e}_{II,I}^{tA} \mathbf{e}_{I,II}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{II,II}^{tA} \mathbf{e}_{II,II}^{-\mathbf{D}_\xi}), \\ \Psi_{II,I} &= \mathbf{e}_{II,I}^{\mathbf{D}_\xi} (\mathbf{e}_{I,I}^{tA} \mathbf{e}_{I,I}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{I,II}^{tA} \mathbf{e}_{II,I}^{-\mathbf{D}_\xi}) + \mathbf{e}_{II,II}^{\mathbf{D}_\xi} (\mathbf{e}_{II,I}^{tA} \mathbf{e}_{I,I}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{II,II}^{tA} \mathbf{e}_{II,II}^{-\mathbf{D}_\xi}), \\ \Psi_{II,II} &= \mathbf{e}_{II,I}^{\mathbf{D}_\xi} (\mathbf{e}_{I,I}^{tA} \mathbf{e}_{I,II}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{I,II}^{tA} \mathbf{e}_{II,II}^{-\mathbf{D}_\xi}) + \mathbf{e}_{II,II}^{\mathbf{D}_\xi} (\mathbf{e}_{II,I}^{tA} \mathbf{e}_{I,II}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{II,II}^{tA} \mathbf{e}_{II,II}^{-\mathbf{D}_\xi}). \end{aligned} \quad (19)$$

Исследуя ранги матриц  $\Psi_{\alpha,\beta}$ , можно установить структуру взаимодействия гладких нелинейных динамических систем [1].

### 4. Пример

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений

$$d\xi/dt = A\xi \quad (20)$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad (21)$$

такой, что  $\xi_1$  и  $\xi_2$  не взаимодействуют, и систему двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = \psi(\mathbf{x}), \quad (22)$$

получаемой из (18) отображением  $\mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}$  с инфинитезимальным генератором



$$D_{\xi} = T \partial / \partial \xi = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \partial / \partial \xi, \quad (23)$$

причем первый член разложения компоненты первого порядка разложения матрицы  $T$  по  $\varepsilon$  (см. (П.10)) имеет вид

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Тогда функция  $\psi$  (см. (20)) имеет компоненты нулевого порядка разложения по  $\varepsilon$

$$\psi^{(0)} = A \xi = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

и компоненты первого порядка разложения по  $\varepsilon$

$$\psi^{(1)} = A \xi \partial T^{(1)} / \partial \xi - T^{(1)} A. \quad (26)$$

В соответствии с (7) имеем

$$\begin{aligned} x_t &= e^{D_{\xi} \varepsilon t A} e^{-D_{\xi} x_0} = \\ &= (E + \varepsilon T^{(1)} \partial / \partial \xi + \dots) (E + t A + \dots) (E - \varepsilon T^{(1)} \partial / \partial \xi + \dots) x_0 = \\ &= \{E + t[A + \varepsilon(T^{(1)} \partial A / \partial \xi - A T^{(1)} \partial / \partial \xi)] + \dots\} x_0 = \\ &= [E + t \begin{pmatrix} A_{11} & \varepsilon(A_{11} - A_{22}) T_{12}^{(1)} \partial / \partial \xi_2 \\ \varepsilon(A_{11} - A_{22}) T_{21}^{(1)} \partial / \partial \xi_1 & A_{22} \end{pmatrix} + \dots] x_0 \end{aligned} \quad (27)$$

и при

$$(A_{11} - A_{22}) T_{12}^{(1)} \neq 0 \quad (28)$$

имеет место влияние возмущения  $x_2$  на процесс изменения  $x_1$ , а при

$$(A_{11} - A_{22}) T_{21}^{(1)} \neq 0 \quad (29)$$

имеет место влияние возмущения  $x_1$  на процесс изменения  $x_2$ .

## Приложение

### Определение инфинитезимальных генераторов групп Ли

Использование лиевых групп при исследовании систем нелинейных дифференциальных уравнений основано на соотношениях [2]

$$\psi(x) = \psi(e^{D_{\xi} \xi}) = e^{D_{\xi} \psi(\xi)}, \quad (П.1)$$

$$\psi(\xi) = \psi(e^{D_x x}) = e^{D_x \psi(x)}.$$

Использование функции  $\psi(x)=x$  или функции  $\psi(\xi)=\xi$  приводит к

$$x = e^{D_{\xi} \xi}, \quad (П.2)$$

$$\xi = e^{D_x x}.$$

В (П.1) использованы инфинитезимальные генераторы лиевых групп [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\xi &= \sum_i T_i(\xi) \partial / \partial \xi_i, \\ \mathbf{D}_x &= \sum_i T_i^{-1}(\mathbf{x}) \partial / \partial x_i, \\ \mathbf{T}_k^{-1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}_k(\xi)|_{\xi=\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

и морфизм элемента лиевой группы

$$\mathbf{e}^{\mathbf{D}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}^k / k!, \quad (\text{П.4})$$

здесь  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_\xi$  или  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_x$ . В дальнейшем указание на зависимость от  $\xi$  компонент  $T_i$  и матрицы  $\mathbf{T}$  опускается.

Разложим правую часть уравнения движения системы с вектором состояния  $\mathbf{x}$  по степеням параметра  $\varepsilon$

$$\dot{\mathbf{x}} = \psi(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \cdot \psi^{(k)}(\mathbf{x}) \quad (\text{П.5})$$

с дополнительной системой [3]

$$\dot{\xi} = \psi^{(0)}(\xi), \quad (\text{П.6})$$

тогда

$$\dot{\xi} = \psi^{(0)}(\xi) = \psi(\mathbf{x}) \partial / \partial \mathbf{x} (\mathbf{e}^{\mathbf{D}_x} \mathbf{x}) = \psi_\xi(\mathbf{x}) \quad (\text{П.7})$$

или в соответствии с (П.1)

$$\psi^{(0)}(\xi) = \psi_\xi(\mathbf{x}(\xi)) = \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi} [\psi(\xi) \partial / \partial \xi (\mathbf{e}^{\mathbf{T}^{-1} \partial / \partial \xi} \xi)], \quad (\text{П.8})$$

или в форме разложения в ряд

$$\psi^{(0)}(\xi) = \sum_{p, q \geq 0} (-1)^p \mathbf{D}_\xi^p \psi^{(q)}(\xi) \partial / \partial \xi (\mathbf{D}_\xi^q \xi) / (p! q!). \quad (\text{П.9})$$

В дальнейшем указание на зависимость от  $\xi$  функций  $\psi^{(0)}$  и  $\psi^{(r)}$  опускается.

Представим  $\mathbf{T}$  в виде разложения в ряд по параметру  $\varepsilon$

$$\mathbf{T} = \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \cdot \mathbf{T}^{(j)}, \quad (\text{П.10})$$

тогда

$$\mathbf{D}_\xi^2 = [\sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \cdot \mathbf{T}^{(j)}] \partial / \partial \xi [\sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \cdot \mathbf{T}^{(j)}] \partial / \partial \xi = \sum_{j \geq 2} \varepsilon^j \cdot \mathbf{d}_2^{(j)}(\xi), \quad (\text{П.11})$$

где использованы дифференциальные операторы

$$\mathbf{d}_2^{(j)} = \sum_{j_1 \geq 1, j_2 \geq 1, j_1 + j_2 = j} \mathbf{T}^{(j_1)} \partial / \partial \xi [\mathbf{T}^{(j_2)} \partial / \partial \xi] \quad (\text{П.12})$$

и

$$\mathbf{D}_\xi^p = \sum_{j \geq p} \varepsilon^j \cdot \mathbf{d}_p^{(j)}, \quad (\text{П.13})$$

где использованы дифференциальные операторы

$$\mathbf{d}_p^{(j)} = \sum_{j_1 \geq 1, j_2 \geq 1, j_1 + j_2 = j} \mathbf{T}^{(j_1)} \partial / \partial \xi (\mathbf{d}_{p-1}^{(j_2)}). \quad (\text{П.14})$$

После этого разложение (П.9) может быть переписано в виде

$$\psi^{(0)} = \sum_{p, q \geq 0} (-1)^p / (p! q!) (\sum_{i \geq q} \varepsilon^i \cdot \mathbf{d}_q^{(i)}) [\sum_{r \geq 0} \varepsilon^r \cdot \psi^{(r)} \partial / \partial \xi (\sum_{j \geq p} \varepsilon^j \cdot \mathbf{d}_p^{(j)} \xi)], \quad (\text{П.15})$$

или после преобразования сумм

$$\psi^{(0)} = \sum_{p, q \geq 0} (-1)^p / (p! q!) [\sum_{i \geq q, r \geq 0, j \geq p, k | i+j+r=k} \varepsilon^k \cdot \mathbf{d}_q^{(i)} \psi^{(r)} \partial / \partial \xi (\mathbf{d}_p^{(j)} \xi)]. \quad (\text{П.16})$$

Собирая члены с  $\varepsilon^k$ , при  $k \geq 1$  получим

$$\sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p/(p!q!)} [\sum_{i \geq q, r \geq 0, j \geq p+i+j+r=k} \mathbf{d}_q^{(i)} \psi^{(r)} \partial / \partial \xi (\mathbf{d}_p^{(j)} \xi)] = 0 \quad (\text{П.17})$$

или

$$\sum_{i \geq 1, r \geq 0, i+r=k} \mathbf{T}^{(i)} \partial \psi^{(r)} / \partial \xi - \sum_{r \geq 0, j \geq 1, i+j+r=k} \psi^{(r)} \partial \mathbf{T}^{(j)} / \partial \xi + \tilde{\psi}^{(k)} = 0, \quad (\text{П.18})$$

где

$$\tilde{\psi}^{(k)} = \sum_{p,q \geq 1} (-1)^{p/(p!q!)} [\sum_{i \geq q, r \geq 0, j \geq p+i+j+r=k} \mathbf{d}_q^{(i)} \psi^{(r)} \partial / \partial \xi (\mathbf{d}_p^{(j)} \xi)]. \quad (\text{П.19})$$

В соответствии с (П.6) имеем

$$\psi^{(0)} \partial \mathbf{T}^{(l)} / \partial \xi = d\mathbf{T}^{(l)} / dt. \quad (\text{П.20})$$

Из (П.18) получим

$$d\mathbf{T}^{(k)} / dt = \sum_{i \geq 1, r \geq 0, i+r=k} \mathbf{T}^{(i)} \partial \psi^{(r)} / \partial \xi - \sum_{i \geq 1, r \geq 1, i+r=k} \psi^{(r)} \partial \mathbf{T}^{(i)} / \partial \xi + \psi^{(k)} = 0. \quad (\text{П.21})$$

Так как в правой части (П.21) отсутствуют  $\mathbf{T}^{(l)}$  с  $l > k$  и  $\partial \mathbf{T}^{(l)} / \partial \xi$  с  $l \geq k$ , то (П.21) - система линейных дифференциальных уравнений относительно  $\mathbf{T}^{(k)}$ .

При наличии линейной дополнительной системы

$$\dot{\xi} = \mathbf{A} \xi \quad (\text{П.22})$$

из (П.21) получим

$$d\mathbf{T}^{(k)} / dt = \mathbf{T}^{(k)} \cdot \mathbf{A} + \sum_{i \geq 1, r \geq 1, i+r=k} \mathbf{T}^{(i)} \partial \psi^{(r)} / \partial \xi - \sum_{i \geq 1, r \geq 1, i+r=k} \psi^{(r)} \partial \mathbf{T}^{(i)} / \partial \xi + \tilde{\psi}^{(k)}. \quad (\text{П.23})$$

Для случая  $k=1$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} \partial \mathbf{T}^{(1)} / \partial \xi - \mathbf{T}^{(1)} \partial \psi^{(0)} / \partial \xi \quad (\text{П.24})$$

или

$$\psi^{(1)} = \mathbf{A} \xi \partial \mathbf{T}^{(1)} / \partial \xi - \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{A}. \quad (\text{П.25})$$

## Библиографический список

1. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974. 288с.  
Kalman R. On the General Theory of Control Systems // Proceedings First International Congress of the International Federation of Automatic Control. London: ButterWorth, 1961. P. 481.
2. Постников М.М. Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982. 448с.  
Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий. М.: Мир, 1987. 304с.
3. Hori G. Theory of general perturbations for noncanonical systems // J. Japan. Astron. Soc. 1971. Vol. 23. P. 567.  
Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320с.  
Kamel A.A. Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations // Celest. Mech. 1970. Vol. 3, № 1. P. 90.

Омский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию 13.08.96

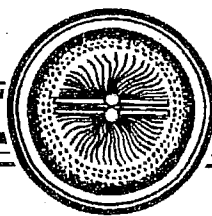
## FORMALIZATION METHOD OF INTERACTION OF SMOOTH NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

*S.N. Chukanov*

Formalization method of interaction of smooth nonlinear dynamic systems with use two-parametrical Lie groups is offered. The method can be applied for linear dynamic systems and is generalized on nonlinear dynamic systems. An example of interacting nonlinear dynamic systems is considered, which by linear consideration are noninteracting.



*Чуканов Сергей Николаевич* - родился в 1951 году. Кандидат технических наук (1990). Старший научный сотрудник отдела проблем автоматизации проектирования Института информационных технологий и прикладной математики СО РАН. Доцент Омского государственного технического университета.



## ИНФОРМАЦИЯ И САМООРГАНИЗАЦИЯ - КЛЮЧИ К ТАЙНЕ ЭВОЛЮЦИИ?

*Б.Н. Пойзнер*

Наши дни подтверждают тезис Е.Н.Князевой и С.П.Курдюмова, открывающий их книгу [1], давно ставшую раритетом: **синергетика входит в моду**. В эпоху Постмодерна к моде нельзя относиться непочтительно. Тем паче, когда модными становятся последние вопросы, касающиеся основ нашего существования.

Синергетика (как для краткости называют теорию самоорганизации и примыкающие к ней дисциплины) входит в интеллектуальную моду во многом спонтанно и неостановимо. Кампания борьбы с синергетикой - какая, скажем, проводилась у нас против кибернетики - немыслима. Хотя бывшие адепты коммунизмоведения и КПССологии, совершившие в (рас)считанные мгновения **фазовый переход** и назвавшиеся независимыми гуманитариями, в концепциях самоорганизации и ноосферы часто находят «и стол, и дом», как вчера еще - в своем марксизме. Лексику синергетики эксплуатируют уже в сочинениях, претендующих быть постмодернистскими. Например, тому, кто преодолет читательскую брезгливость, «Эрон» Ан. Королева<sup>1</sup> поведаст о «фрактальных побегах бытия». Поэтому, начнишь вдруг антисинергетический поход, он оказал бы услугу синергетике, отпугнув шарлатанов.

Пока же вхождение доктрины самоорганизации в моду, то-есть структурирование общественного сознания ее понятиями, иллюстрирует содержание ее ветви, занимающейся эволюцией нелинейных систем, в данном случае - эволюцией пестрого сообщества исследователей и заинтересованных читателей. За три года увидели свет около трех десятков изданий, в частности, известные нам [1-27] (по нашей оценке, число подобных на русском языке за предшествующие 20 лет далеко не достигает сотни). К ним примыкают разноплановые статьи, по своему уровню не уступающие книгам, например, работы [28-36]. В философских сочинениях о смехе [37], человеческом теле [38], о культуре XX века [39], определяющих лик отечественного постмодернизма, в ряду ключевых категорий - хаос. Уместно выглядит бифуркационная диаграмма на переплете книги Ж.Делёза, назвавшего свой блестящий труд «Логика смысла» (хотя с тем же правом мог бы - «Динамика смысла»). Соблазнительно квалифицировать такой взрыв публикаций, как известный в теории квазилинейных параболических уравнений **режим с обострением** в открытой нелинейной системе, имеющий, согласно определению [1], длительную квазистационарную стадию и

<sup>1</sup> Королев А. Эрон // Знамя. 1994. № 7. С. 4, № 8. С. 81.

стадию сверхбыстрого нарастания процессов. Если считать фундаментом синергетики учение о самотворении, то нельзя не признать ее древнейшей «наукой». Образы и сюжеты синергетики встречаются в космогонических мифах большинства народов. Корпус этих текстов составляет *in sui generis* сводный курс палеоестествознания с неизбежными в таком тексте разночтениями, повторами, параллелями. Становление знания о бытии становления идет неспешно, растянувшись минимум на 45 веков.

Приход моды венчает ее победу в скрытом соревновании вблизи точки бифуркации с другими тенденциями, оказавшимися сегодня аутсайдерами из-за недоразвитости, или перезрелости, или невнимания авторитетных *arbiters* *elegantiarum*. Естественно заинтересоваться: кто же **вводит** синергетику в моду? Если учесть, что половина авторов исследований [1-39] - философы, то сразу выявится законодатель вкуса. Существенно, что совместному рассмотрению феноменов информации и самоорганизации посвящена половина указанных работ, а именно: [1-4,6,8,11,12,19,21-23,26,28,29,31,33,34,36,37], причем в трех монографиях [2,12,26] эта тема является ведущей. Новые подходы к изучению взаимосвязи самоорганизации и информации заданы появившимися недавно книгами Г.Хакена и Д.С.Чернавского. Названием и кругом обсуждаемых вопросов близка к ним монография И.М.Мелик-Гайказян [12], составляющая предмет нашей рецензии.

Автор исходит из того, что «достигаемое на основе информационно-синергетического подхода изображение более богатого, сложного и объемного мира идей способствует сведению различных сторон описания к единой картине, конвергенции противоположностей, каждая из которых находит свое место в эволюционирующей реальности» [12, с.8]<sup>2</sup>. Преимущества такого подхода автор умело реализует при анализе закономерностей эволюции социокультурных систем и, в частности, системы «наука». Тем самым совершен еще один акт интеграции «двух культур» (в смысле Ч.П. Сноу). Монография компактна, имеет четкую структуру, отвечающую цели замысла; у автора - живой язык лектора, варьирующего строгость изложения от научно-популярного уровня до лаконичного пересказа весьма специальных вопросов. Мизерный тираж (200 экз.) ограничивает читательский круг. Проблематика и сконцентрированный в работе материал (привлечено полтора десятка литературных источников) позволяют квалифицировать ее как стимул формирования постнеклассического мышления. Тем более важно остановиться на положениях, вызывающих возражения, на спорных моментах, наконец, на мелких недочетах, неизбежных в научном труде, создаваемом в обстановке интерференции далеких друг от друга исследовательских традиций.

*Первые три главы* содержат богатую и упорядоченную коллекцию определений феномена информации, ее свойств, ее связи с энтропией. Автор обращается к методологическим спорам 1950-60-х годов, что помогает ему интерпретировать информацию как сложный процесс, специфика стадий которого требует различных языков описания. Исходя из близости подходов исследователей к оценке роли информации в явлении самоорганизации [с.80], И.В.Мелик-Гайказян заключает, что свойства информации оказываются общими для всех ее видов [с.44]. Физики (и рецензент в их числе) вправе рассматривать этот вывод как призыв выявлять информационные детерминанты структурогенеза в изучаемых ими объектах.

Обращают на себя внимание отдельные стилистические шероховатости и фактические неточности. Вопреки утверждению автора «тезаурус» - слово древнегреческое, а не латинское (кстати, в латинской транскрипции допущены две ошибки), и в контексте 19-й страницы уместнее было бы перевести его как «запас». О количественном определении лучше говорить как о выражении в числах, а не в цифрах [с.21]. В комментариях к формуле (1.10) [12] просится слово

<sup>2</sup> Ниже, при обращении к рецензируемой монографии в квадратных скобках указаны только номера страниц. - *Прим. ред.*

«соотнесение», а не «соотношение». Оборот «довлели над» [с.39], хотя и является распространенным, но противоречит литературной традиции, а главное - семантике глагола: довлеть = удовлетворять, быть достаточным (и в этом смысле быть довольным); отнюдь не тяготеть, давить и т.п. Выражение «сказанному импонирует следующее определение» [с.42] не очень удачно, поскольку по-немецки *imponieren* = внушать уважение.

Трудно согласиться с заявлением автора: «Самое старое представление о роли слова дано в Евангелии от Иоанна» [с.16]. Насколько известно, мотив творения мира словом впервые встречается в мемфисской версии древнеегипетского космогонического мифа<sup>3</sup>. В свете этой роли различима опечатка в первом слове евангелиста («Вначале» вместо канонического «В начале»), снижающая его смысл. «Удивительно то, что, умея отличать живое от косного, ученые не дали конструктивного определения понятию *жизнь*» - читаем на с.84. В защиту ученых есть такое соображение: это конструктивное определение предполагает - как минимум - наличие не противоречащих друг другу дефиниций информации и самоорганизации. Следовательно, готовность ученых выдвинуть долгожданное определение зависит и от успехов методологического анализа указанных феноменов, на котором сосредоточены усилия автора книги.

**В четвертой главе** информационно-синергетический подход применяется к эволюции науки. И.В.Мелик-Гайказян использует оправдавшую себя в методологическом отношении аналогию между теорией научных революций Т.Куна и концепцией развития открытых систем И.Пригожина. В разработку этой аналогии заметный вклад внесли А.И.Яблонский и Ю.Нееман [33]. При описании особенностей самоорганизации в когнитивной системе И.В.Мелик-Гайказян оперирует эпизодами из истории теоретической физики 1880-1920-х и 1980-х годов, опираясь на аппарат динамической теории информации и на предложенную Д.С.Чернавским классификацию стадий структурообразования.

При чтении четвертой главы иногда возникает подозрение в недостаточно ясном разведении автором категорий «неравновесность» и «неустойчивость». Согласно сложившимся представлениям, неустойчивость физической системы проявляется в заметном отклике текущих в ней процессов на малые внешние или внутренние возмущения, скажем, флуктуации. Неравновесность, или неравновесное состояние, присуще физической системе, выведенной из термодинамического равновесия (к которому она самопроизвольно приходит в условиях изоляции от внешней среды) благодаря протеканию через систему потока энергии и/или вещества (информации). Система, выведенная из термодинамического равновесия, например, лазер, может обладать устойчивостью к возмущениям. А система, находящаяся в равновесном состоянии, может быть весьма неустойчивой - вспомним карточный домик. Терминологическую путаницу способно внести ошибочное обращение к понятию неустойчивого равновесия, при котором малое возмущение вызывает существенное отклонение системы от состояния равновесия и переход в новое состояние равновесия.

В монографии уделено должное место методам анализа устойчивости [с. 91-93] и дана расшифровка понятия открытой системы [с.107-108], что помогает читателю различать упомянутые категории. К сожалению, в ряде утверждений автора это различие затушевано, что делает их дискуссионными. Приведем несколько цитат. «В определенные моменты своего развития наука представляет собой неравновесную систему. Что это за моменты? Они характерны для кризисных ситуаций в науке... В качестве примера хаотического характера научных гипотез и предположений, являющегося следствием неустойчивости системы «наука» в определенный период времени, можно рассмотреть ситуацию, сложившуюся в физике после опыта Майкельсона - Морли» [с.109]. Далее по поводу противоречия между фактом инвариантности скорости света и справедливостью принципа относительности говорится: «Это случай типично

<sup>3</sup> см., например, *Вейнберг И.П.* Человек в культуре древнего Ближнего Востока. М., 1986. С.15.

неравновесного состояния всего сообщества физиков, ибо обсуждаемые проблемы имеют общий смысл» [с.110]. Рассмотренный эпизод резюмируется так: «... период с 1887-го по 1905-й год был периодом неустойчивого состояния физики, порождающего неравновесность системы «наука». Можно показать, что периоды неустойчивости и неравновесности сопровождают эволюцию каждой науки... Таким образом, система «наука» является открытой, автономной, а в определенные периоды своего развития приобретает признаки неустойчивости и неравновесности» [с.111]. (В естественнонаучной литературе термины «открытость» и «автономность» употребляются почти как антонимы: автономность предполагает минимальную зависимость от внешней среды). Вариант этого положения встречается на с.132: «Наука - это самоорганизующаяся система, поэтому в процессе ее развития неизбежны неравновесные состояния, бифуркации (революции)...»

Комментируя переход к релятивистской парадигме, И. В. Мелик-Гайказян подчеркивает: «Замечательно, что в описанной ситуации неравновесность системы была вызвана аналогом внешнего воздействия на нее - опытом Майкельсона. В отличие от этого, второе бифуркационное состояние было результатом хаоса в голове только одного ученого - Эйнштейна, это пример влияния внутренней флуктуации на образование диссипативной структуры» [с.128]. Бифуркационную диаграмму на рис 4.2 автор характеризует двумя этапами развития: «нормальным, когда в силу вступает детерминизм, и бифуркационным, когда система находится в сильно неравновесном состоянии» [с.131], и чуть позже заключает, что «... совершенно невозможно возражать против бифуркационных состояний, подготовленных неустойчивостью и неравновесностью» [с.132].

Содержание цитированных фрагментов способно вызвать у читателя предположения о том, что неравновесность самоорганизующейся системы - состояние временное, ситуативное; что неравновесность может быть вызвана неустойчивостью или даже слабеньким внешним воздействием; что пока система «наука» остается открытой, признаков неустойчивости и неравновесности нет. Надо ли объяснять, почему подобные предположения были бы явным заблуждением?

Венчающая книгу *пятая глава* отражает правомерность и продуктивность информационно-синергетического подхода к эволюции социокультурных систем. Методологию описания социокультурной динамики автор разрабатывает, обращаясь к информационной концепции В.И.Корогодина, к цивилизационной теории А.Тойнби, к трудам Ю.М.Лотмана по семиотике культуры, оценившего плодотворность синергетической парадигмы. В системе аргументации И.В.Мелик-Гайказян существенную роль играет положение об изоморфизме свойств и сходстве функций синергетической, генетической, поведенческой и логической информации, обсуждавшееся в третьей главе (табл. 3.1). Представленная в монографии информационно-синергетическая схема социокультурной эволюции продолжает линию исследований П.Сорокина, А.Кребера, Р.Докинза, В.Вайдлиха, П.Бурдье, Н.С.Розова. Присущий книге рационализм, возможно, выполнит гигиеническую функцию: сузит поток имитирующих социосинергетику спекуляций на историко-культурные темы.

Содержательность и доказательность результатов пятой главы служат контрастным фоном для некоторых положений, требующих дискуссии. Так, понимание иногда мешает, уже упоминавшееся выше, нечеткое различение категорий «неравновесность» и «неустойчивость». В середине книги, при анализе последствий глобального похолодания для наших предков, высказывалось соображение о том, что «неравновесность (человекоподобных - Б.П.) обеспечивалась жестокой конкуренцией за новые экологические ниши» [с. 62]. В пятой главе [с. 159] читаем: «Последледниковые изменения климата... привели к иссушению земель, что можно рассматривать как экологический вызов, обусловивший сильную неравновесность примитивных культурных систем. Ответом на него были различные реакции примитивных обществ, обладающих свойствами неравновесности». В данном контексте правильнее было бы говорить



либо о слабой неравновесности, либо о сильной неустойчивости. Действительно, иссушение земель резко сокращает поток ресурсов, поступающих в систему. А это снижает степень неравновесности человеческого сообщества в целом и каждого его члена. И одновременно влечет сильную неустойчивость существования (и всей системы, и ее голодных элементов), грозя - при наличии возмущающих воздействий - переходом к самому равновесному состоянию, то есть смерти. Автор такую возможность сознает и в подстрочной сноске добавляет: «Процессы само- или дезорганизации начинаются только в том случае, если превзойден порог стабильности системы. «Допороговые» вызовы не будут иметь своим следствием изменения структуры системы» [с.159]. Сопоставление последних фраз показывает, что имеет место *qui pro quo*. Корректным было бы употребление термина «порог неравновесности» (или «пороговый уровень потока ресурсов»). Превышение порога неравновесности системы делает возможным структурогенез. Термином «порог стабильности» целесообразно пользоваться не в связи с экологическим вызовом, а в связи с возмущающим систему фактором: эпидемией, внутрплеменным конфликтом, скажем. И тот, и другой порог зависят от характеристик системы. Если речь идет о дезорганизации, то чем меньше степень неравновесности системы (чем меньше поток ресурсов), тем ниже порог стабильности, отделяющий ее от распада.

Оценивая возможность синергетического подхода к социокультурным системам, И.В.Мелик-Гайказян, в частности, говорит: «Одной из важных особенностей новых представлений является понимание того, что при объединении элементов в систему на определенном уровне сложности у нее могут возникать свойства, не сводимые к свойствам элементов, ее составляющих» [с.143]. Однако эта особенность была осознана задолго до представлений синергетики. Она относится к числу системных принципов (так называемый *принцип целостности*), сформулированных в эпоху А.А.Богданова<sup>4</sup> и Л.Берталанфи, а в настоящее время излагаемых в учебниках по системологии.

Установленная И.В.Мелик-Гайказян параллель в объяснениях А.Тойнби и Ю.М.Лотманом динамики цивилизации и семиосферы весьма плодотворна в методологическом отношении. Но, пожалуй, в пятой главе стоило бы указать на приоритет Ю.Н.Тынянова (с ссылки на которого Лотман начинает статью, цитируемую в монографии), выдвинувшего в 1924 году конструктивный принцип литературной эволюции: «Он вырисовывается на основе **случайных результатов и случайных выпадов, ошибок**». В ходе реорганизации литературного материала «этот **случайный результат закрепляется**», сменяя предшествующий (разложившийся, как его называет Тынянов) конструктивный принцип. Кстати, та же схема структурогенеза описана (но уже на другом языке) в рецензируемой монографии [с.80-81].

Поводом для упрека автору представляется место в пятой главе, где автор, размышляя над тем, как происходит развитие социокультурных систем, останавливается на позиции Фр.Хайека. Согласно Хайеку, цивилизация оказывается возможной в основном благодаря подчинению врожденных животных инстинктов у человека нерациональным обычаям. И.В.Мелик-Гайказян излагает один из его тезисов так: «Как и живая природа, культура не планируется рационально, не передается по наследству...» [с.154]. Между тем конструкция мысли Хайека более сложная, состоящая из парных оппозиций. Вот полный текст: «Культура есть явление не искусственное, но и не естественное; она не передается по наследству, но и не планируется рационально». А в интерпретации автора культура - вопреки апофатической дефиниции Хайека - поставлена в один ряд с живой природой, где действует наследственность.

Ощущаемый на с.153-154 планоненавистнический пафос автора, испытавшего прелести спланированной утопии, психологически объясним. Но думается, что адекватное понимание механизмов социокультурной динамики (а тем более - прогнозирование ее) неосуществимы без учета выводов теории

<sup>4</sup> на его «Тектологшо» автор ссылается во второй главе

эволюционной экономики. Последняя озабочена поиском эффективных форм самоорганизации современной цивилизации (столь насыщенных в ситуации крупномасштабной нестабильности мира, остро переживаемой Россией), уделяет внимание явлениям разупорядоченности, неустойчивости, конкуренции технологических укладов etc. и предусматривает целенаправленное (но, естественно, не тотальное) регулирование социальноэкономических процессов [9,27]. Акты такого регулирования аналогичны по своей функции «конструктивным» флуктуациям вблизи точки бифуркации. Для складывающейся (под влиянием синергетики) трансферологии, изучающей феномен **перехода** в сложных системах, развиваемая школой С.П.Курдюмова идея «резонансного» воздействия, вызывающего определенный вид социального структурогенеза, представляется более плодотворной, чем критика проектирования культуры у Хайека.

И заключительная реплика. «Граница между эклектикой постмодернизма и синтезом на основе общенаучных концепций не всегда очевидна,» - говорится в эпилоге последней главы [с.174]. Но очевидна ли сама возможность проведения такой границы? Ведь постмодернизм в сфере познания, провозглашающий (устаами Ж.Ф.Лиотара, например) разногласие (диссенсус), соревновательность, плюрализм, гетерогенность форм мышления, парадоксальность, избегает соседства с **общенаучными** концепциями. Поэтому надежде автора на «персрастание культурологии из междисциплинарной области в науку, способную использовать общенаучные методы» будет нелегко сбыться, пока здравствует постмодернизм.

### Библиографический список

1. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М.: Наука, 1994.
2. *Абдеев Р.Ф.* Философия информационной цивилизации. М.: ВЛАДОС, 1994.
3. *Вишневский И.Л., Лошер А.Н., Салли И.В.* Энтропия в природе и обществе. М.: ПИК ВИНТИ, 1994.
4. *Евин И.А.* Синергетика искусства. М., 1993.
5. *Зимов С.А.* Азбука рисунков природы. М.: Наука, 1993.
6. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995.
7. *Коваленко В.В.* Бифуркации в религиозной философии, естествознании и общественном развитии. СПб.: Гидрометеиздат, 1994.
8. Концепция самоорганизации в исторической ретроспективе. М.: Наука, 1994.
9. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995.
10. Критерии самоорганизации в физических, химических, биологических системах: Тез. докл. междунар. конф. Москва - Суздаль, 12 - 18 июня 1995 г. Суздаль, 1995.
11. *Курашов В.И.* Познание природы в интеллектуальных коллизиях научных знаний. М.: Наука, 1995.
12. *Мелик-Гайказян И.В.* Информация и самоорганизация. (Методологический анализ). Томск: Изд-во ТПУ, 1995. 179 с.
13. Метафизика и идеология в истории естествознания. М.: Наука, 1994.
14. *Налимов В.В.* В поисках иных смыслов. М.: Прогресс, 1993.
15. Наука, технология, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1993.
16. Нелинейные волны: Физика и астрофизика / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича. М.: Наука, 1993.
17. *Пайтген Х.О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов: образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993.
18. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. М.: Прогресс, 1994.

19. *Разумовский О.С.* Бихевиоральные системы. Новосибирск: ВО «Наука», 1993.
20. *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.* Математические модели биологических продукционных процессов. М.: МГУ, 1993.
21. Самоорганизация в природе и обществе: Философско-методологические очерки / Отв. ред. В. Н. Михайловский. СПб.: Наука, 1994.
22. Самоорганизация и наука: Опыт философского осмысления / Отв. ред. И.А. Акчурина, В.И. Аршинов. Ин-т философии РАН. М.: Арго, 1994.
23. Самоорганизация природных и социальных систем: Материалы семинара. Алма-Ата, 6 - 8 июня 1995 г. Алма-Ата: Гылым, 1995.
24. Синергетика и фракталы в материаловедении / В. С. Иванова и др. М.: Наука, 1994.
25. *Удунян Н. К.* Концепция самоорганизации и проблемы молекулярной эволюции. М.: Наука, 1994.
26. *Цымбал Л.А.* Синергетика информационных процессов: закон информативности и его следствия. М.: Наука, 1995.
27. Эволюционный подход и проблемы переходной экономики: Доклады и выступления участников международного симпозиума. Пущино, 12 - 15 сентября 1994 г. М.: Ин-т экономики РАН, 1995.
28. *Алексеева Т.И.* Город как саморазвивающаяся система: контуры новой парадигмы // Город как социокультурное явление исторического процесса / Под ред. Э. В. Сайко. М., 1995. С.38.
29. *Гольц Г.А.* Город и его культурно-уровневые показатели в определении и измерении урбанизации // Там же. С.47.
30. *Кравцов Ю.А.* Земля как самоорганизующаяся климато-экологическая система // Соросовский образовательный журнал. 1995. № 1. С.82.
31. *Кругликов Р.И., Рузавин Г.И.* Синергетика и мозг // Мозг и разум. М., 1994. С.56.
32. *Ласло Э.* Век бифуркации. Постигание изменяющегося мира // Путь. 1995. № 7. С.3.
33. *Неман Ю.* Счастливый случай, наука и общество. Эволюционный подход // Путь. 1993. № 4. С.70.
34. *Сперри Р.У.* Перспективы менталистской революции и возникновение нового научного мировоззрения // Мозг и разум. М., 1994. С.20.
35. *Хоружий С.С.* К проблеме глобальной динамики // Хоружий С. С. После перерыва. Пути русской философии. СПб., 1994. С.412.
36. *Чайковский Ю.* К общей теории эволюции // Путь. 1993. № 4. С.101.
37. *Карасев Л. В.* Философия смеха. М.: Изд-во РГГУ, 1996.
38. *Подорога В.* Феноменология тела: введение в философскую антропологию. М.: Ad Marginem, 1995.
39. *Якимович А.* Магическая Вселенная. Очерки по искусству, философии, литературе XX в. М.: Галарт, 1995.

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 8.09.96



*Поизнер Борис Николаевич* - родился в Томске (1941), окончил Томский университет (1963). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТГУ (1970) в области теории колебаний и волн, доцент ТГУ. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Соавтор учебных пособий «Лабораторный практикум по физике лазеров», «Импульсные лазеры на плотных газах» и др. Опубликовал статьи по указанной тематике и по ряду гуманитарных проблем. Инициатор издания и редактор библиографических указателей, посвященных научному творчеству, литературе и философии русской эмиграции, университетскому образованию, синергетике и смежным наукам, применению компьютера в образовании. Член Комиссии по творческому наследию Густава Шпета. Председатель Вольного гуманитарного семинара Томска.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты - р/с № 000609446 в АКБ «Экономбанк»  
г. Саратова, БИК 046311722, корсчет банка 700161122

**Подписка на II-ое полугодие 1997 года**  
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498

Сдано в набор 15.01.97. Подписано к печати 8.04.97. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 9,95 (7,125). Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 200 экз. Заказ 42

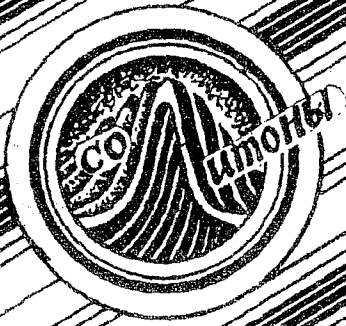
Издательство ГосУНЦ «Колледж»  
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.  
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446  
E-mail:and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

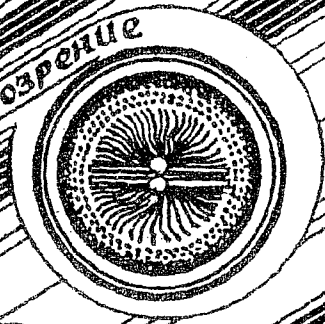
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1996



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tushin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



Журнал  
для студентов и преподавателей



Методические заметки  
по учебной литературе



Книжная полка студента



Маленькая энциклопедия

Современной нелинейной динамики

ЗАДНИЙ  
УГОЛОК

ЭЛЕМЕНТЫ  
научные  
обсуждения

журнальный телеигра вариант

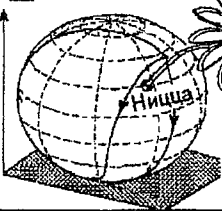
## Условия Игры

1. В отличие от телевизионного варианта, в качестве объекта угадывания выступает видеоряд, составленный из графических образов, взятых из материалов данного выпуска журнала.
2. В процессе угадывания необходимо выбрать один из трех предлагаемых вариантов ответа. Если ни один из предлагаемых вариантов Вас не удовлетворяет, не огорчайтесь - в этом случае Вам засчитывается в качестве правильного любой альтернативный вариант ответа.
3. В зависимости от сложности, каждому угадываемому объекту присваивается начальная стоимость в рублях. В настоящем сеансе Игры один рубль равен двум долларам  $T_{E^X}a$  или  $La T_{E^X}a$  (1 руб = \$Rub\$).

Если реальная сложность вопроса оказывается выше, за каждый дополнительный день обдумывания стоимость возрастает в два раза.

Редакция выражает сочувственную признательность авторам номера, приславшим графические материалы для проведения Игры, и дружеское порицание авторам, пренебрегшим этой обязанностью.

1

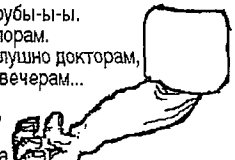


- Ландыши, ландыши...
- Букет цветов из Ниццы  
Принес ты мне.
- Ромашки спрятались,  
Поникли лютики...

2

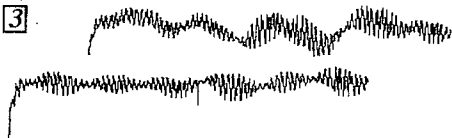
- Привычны руки к топорам.  
Только сердце непослушно докторам,  
Если иволга поет по вечерам...
- Дай мне руку на прощанье,  
Улыбнись тайком...  
Вечер вальса, вечер вальса  
В нашем клубе заводском.

Лесорубы-ы-ы.



Если ранили дРУКа,  
Перевяжет подРУКа  
Горячие раны его.

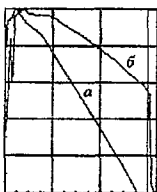
3



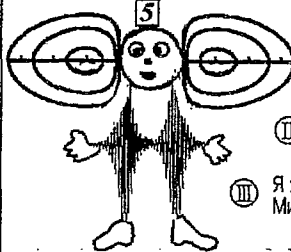
- Давай закурим,  
товарищ, по одной,  
Давай закурим,  
товарищ мой!
- Стою на полустаночке,  
В цветастом полушалочке,  
А мимо пролетают поезда.
- Позарастали стежки-дорожки,  
Где проходили милого ножки...

- Помню, как в памятный вечер  
Падал платочек твой с плеч...

4

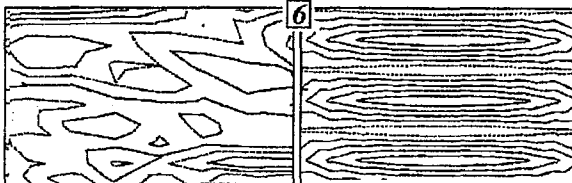


- Мощным взмахом поднимает  
Он красавицу-княжну  
И за борт ее бросает  
В набежавшую волну.
- Го-о-о-рные верши-и-ны  
Спя-я-я-т во тьме  
ночной.



5

- Ой, цветет калина в поле у ручья,  
Парня молодого полюбила я.
- Он живет не зная ничего о том,  
Что одна дивчина думает о нем.
- Я хожу, не смея волю дать словам,  
Милый мой, хороший, догадайся сам!



6

- Партия наши народы сплотила  
В братский, единый союз трудовой.
- Море Счастья обмелело и река Любви замерзла,  
Но осталось озеро Надежды.
- Родина наши народы сплотила  
В братский, единый союз трудовой.

Правильные варианты ответов, напетые Вами в сопровождении Концертного оркестра Белоруссии п/у М.Финберга, должны быть отосланы до 31 декабря 1996 г. по адресу: Россия, Москва, Валдису Пельшу для Натальи Н. Левиной, зав.редакцией ПНД. Участники, имеющие основания полагать себя победителями Игры, соглашаются посетить универсальные или специализированные магазины нашего (или своего) города, где их ожидает широкий выбор импортной аудио-, теле- и видеоаппаратуры. Приятной встречи с Вашим выигрышем!