

Трикладная нелинейная динамика



2
1995

Проблемы нелинейной гидродинамической устойчивости

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



Бифуркации
в динамических
системах различной природы



Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



детерминированный
АОС



Авто-
волны,
самоорганизация



Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн



нелинейная
динамика
в
лицах.
История. Рефераты

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калишкос, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Крицкий, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СОДЕРЖАНИЕ

Проблемы нелинейной гидродинамической устойчивости

<i>Ланда П.С.</i> Гидродинамическая турбулентность и когерентные структуры: обзор тематического выпуска	4
ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ	
<i>Климонтович Ю.Л.</i> Что же такое турбулентность?	7
<i>Ланда П.С.</i> Так что же такое турбулентность? (послесловие)	38
<i>Гиневский А.С., Ланда П.С.</i> Возбуждение гидродинамических и акустических волн в дозвуковых струйных и отрывных течениях	42
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ	
<i>Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Сухоруков А.Н.</i> О переходе от ламинарного режима движения к турбулентному в гидродинамических задачах	60
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.</i> Компьютерная концепция вихревой турбулентности	72
<i>Белоцерковский С.М., Хлапов Н.В.</i> Моделирование влияния диффузии вихрей на турбулентные характеристики струй	94
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ	
<i>Abarbanel H.D.I.</i> Tools for analyzing observed chaotic data	104
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA	
<i>Минаев А.Ф., Смыслов В.И.</i> Сергей Павлович Стрелков	106
<i>Трубецков Д.И.</i> Жозеф Валентен Буссинеск, Дидерик Йоганн Кортевег, Густав де Вриз и уравнение КдВ	111
ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ	
<i>Стрелков С.П.</i> Две «Задачки» (из прошлого)	114
КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ	
<i>Landa P.S.</i> Nonlinear oscillation and waves in dynamical systems	119
КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ	
Московский Синергетический Форум «Устойчивое развитие в изменяющемся мире» 27-31.01.96, Москва, Россия	128
Научно - методическая конференция «Динамика образования в регионе» 12-18.10.95, Саратов, Россия	129
III Международная конференция «Mathematics, computer, education» 29.01-03.02.96, Дубна, Россия	130
Международная конференция «Women-Matematicians: Matematics, Modeling, Ecology», 27-30.05.96, Волгоград, Россия	131
АНОНС	127

CONTENTS

*Problems of nonlinear hydrodynamic stability*Hydrodynamic turbulence and coherent structures: editorial. *P.S. Landa* 4

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

What the turbulence is? *Yu.L. Klimontovich* 7So what is the turbulence? (after words). *P.S. Landa* 38Excitation of hydrodynamic and acoustic waves in subsonic jet and separation flows.
A.S. Gynevski, P.S. Landa 42

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Laminar-turbulent transition in the hydrodynamics problems.
S.Ya. Gertsenshtein, E.B. Rodichev, A.N. Sukhorukov 60

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Computer conception of vortex turbulence. *S.M. Belotserkovsky, A.S. Ginevsky* 72Simulation of vortex diffusion influence on jet turbulent characteristics. *S.M. Belotserkovsky, N.V. Khlapov* 94

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

Tools for analyzing observed chaotic data. *Henry D.I. Abarbanel* 104

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

Sergei P. Strelkov. *A.F. Minaev, V.I. Smyslov* 106Joseph Valentin Boussinesq, Diderick Jogan Korteweg, Gustav de Vries and KdV-equation. *D.I. Trybetskoy* 111

ACTUAL PROBLEM FROM THE PAST

Two « Small problems». *S. P. Strelkov* 114

BOOK REVIEW

Nonlinear oscillation and waves in dynamical systems. *P.S. Landa* 119

CONFERENCE. MEETINGS. SYMPOSIUM. SCIENTIFIC SCHOOLS

Moscow Synergetic Forum «Stable Development in Changing World», 27-31.01.96, Moscow, Russia 128

Scientific-Methodical Conference «Dynamics of Education in the Region», 12-18.10.95, Saratov, Russia 129

III International Saratov Conference «Mathematics, computer, education», 29.01-03.02.96, Dubna, Russia 130

International Conference «Women-Matematicians: Matematics, Modelling, Ecology», 27-30.05.96, Volgograd, Russia 131

ANNOUNCEMENTS. 127

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И КОГЕРЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ: обзор тематического выпуска

Проблема турбулентности в различных ее проявлениях уже давно стала одной из актуальных проблем физики. Не говоря о гидродинамике, где эта проблема является центральной, вопросы происхождения турбулентности волнуют ученых, занимающихся плазмой, полупроводниками, электроникой, оптикой и другими разделами физики. Очередной бум в теории турбулентности был вызван открытием возможности сложных хаотических движений в простых системах, отражаемых в фазовом пространстве странным аттрактором. Любой переход к турбулентности стал рассматриваться как возникновение такого аттрактора. Однако дальнейшие исследования показали, что все не так просто, и что турбулентность есть значительно более сложное и по-прежнему не вполне понятное явление.

Не случайно наш номер открывается интереснейшей статьей Ю.Л. Климонтовича, в которой он излагает свою точку зрения на вопрос, что же такое турбулентность. Естественно, что эта точка зрения является несколько односторонней, потому что, на наш взгляд, достоверного ответа на поставленный вопрос в настоящее время дать невозможно. И связано это, по-видимому, с тем, что вообще не может быть единого объяснения турбулентности. Существует несколько причин возникновения турбулентности, хотя среди них имеется главная - это неустойчивость регулярного движения. Однако одной неустойчивости, если она является конвективной, мало: необходимы либо обратная связь, приводящая к возбуждению автоколебаний, либо постоянный приток возмущений в систему. Эти вопросы обсуждаются в послесловии к статье Ю.Л. Климонтовича.

Хотя турбулентность, безусловно, представляет собой волновое движение, использование для ее изучения, особенно в гидродинамике, достижений теории колебаний и волн явно недостаточно. Первые попытки такого подхода в применении к струйным и отрывным течениям сделаны в работе А.С. Гиневского и П.С. Ланды. Показано, что многие установившиеся в литературе представления о возникновении так называемых когерентных структур - крупномасштабных образований, всегда существующих на фоне случайного движения жидкости, - не выдерживают критики с точки зрения общих законов теории колебаний. Чтобы удовлетворить этим законам, пришлось предположить, что в ряде случаев в существующих представлениях причина и следствие поменялись местами. Еще один интересный факт состоит в том, что рассмотрение с точки зрения теории колебаний известной экспериментальной зависимости частоты срыва вихрей при обтекании колеблющегося цилиндра от частоты его колебаний, во-первых, позволило сделать вывод о том, что срыв вихрей с неподвижного цилиндра представляет собой автоколебательный процесс (этот вывод является далеко не очевидным), а, во-вторых, дать естественную трактовку наблюдающейся зависимости как проявления синхронизации генератора внешним периодическим воздействием.

Работа С.М. Белоцерковского и А.С. Гиневского посвящена описанию и исследованию при помощи компьютера вихревой модели турбулентности в применении, главным образом, к струям, следам и отрывным течениям. В этой работе для описания турбулентных процессов используется так называемый метод дискретных вихрей, то есть волновые движения в жидкости заменяются взаимодействием частиц. Ситуация здесь весьма схожа с использованием метода крупных частиц в СВЧ электронике. В разработку метода дискретных вихрей,

которым авторы занимаются около 25 лет, они внесли очень большой вклад. В настоящее время ими написана монография «Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей». М.: Наука, 1995. Метод позволяет эффективно описывать образование крупномасштабных когерентных структур и рассчитывать спектры турбулентных возмущений без введения эмпирических констант. Результаты расчетов, сделанных авторами при помощи компьютера, удовлетворительно согласуются с данными экспериментов. Однако обоснование метода, оценка пределов его применимости и непредвзятое описание его недостатков и достоинств в указанных статьях, к сожалению, отсутствуют. Утверждение авторов о том, что за счет процессов регуляризации и упрощений в процессе вычислений косвенно учитывается вязкость жидкости, требует серьезного обоснования, потому что эффективная диссипация, получаемая за счет этих процессов, может совершенно не соответствовать той, которая обусловлена истинной вязкостью жидкости.

Статья С.М. Белоцерковского и Н.В. Хлапова дополняет предыдущую статью, поскольку демонстрирует, каким образом может быть учтена диффузия вихрей, особенно существенная при малых числах Рейнольдса. Такой учет необходим для существенного уточнения результатов расчетов с целью их практического применения.

В статье С.Я. Герценштейна, Е.Б. Родичева и А.Н. Сухорукова подводится итог их двадцатилетних численных исследований в области нелинейного взаимодействия гидродинамических возмущений при переходе от ламинарного течения к турбулентному, которые проводились в Институте механики МГУ. Здесь, по существу, выявлен целый ряд бифуркаций (хотя такой термин в работе не используется); некоторые из них не были известны, например, возможность жесткого возникновения хаотического режима термоконвекции. Несмотря на излишне конспективный стиль статьи и на недостаточную обоснованность используемой методики (в частности, отсутствие обсуждения граничных условий, при которых справедливы полученные авторами результаты), статья представляет большой интерес и открывает широкое поле для дальнейших исследований.

В заключение следует отметить, что такая широкая тема, как гидродинамическая турбулентность, не может найти сколько-нибудь полного отражения в одном выпуске журнала. Тем не менее, редакция надеется, что даже представленный материал, который является неизбежно ограниченным, будет полезен для читателей.

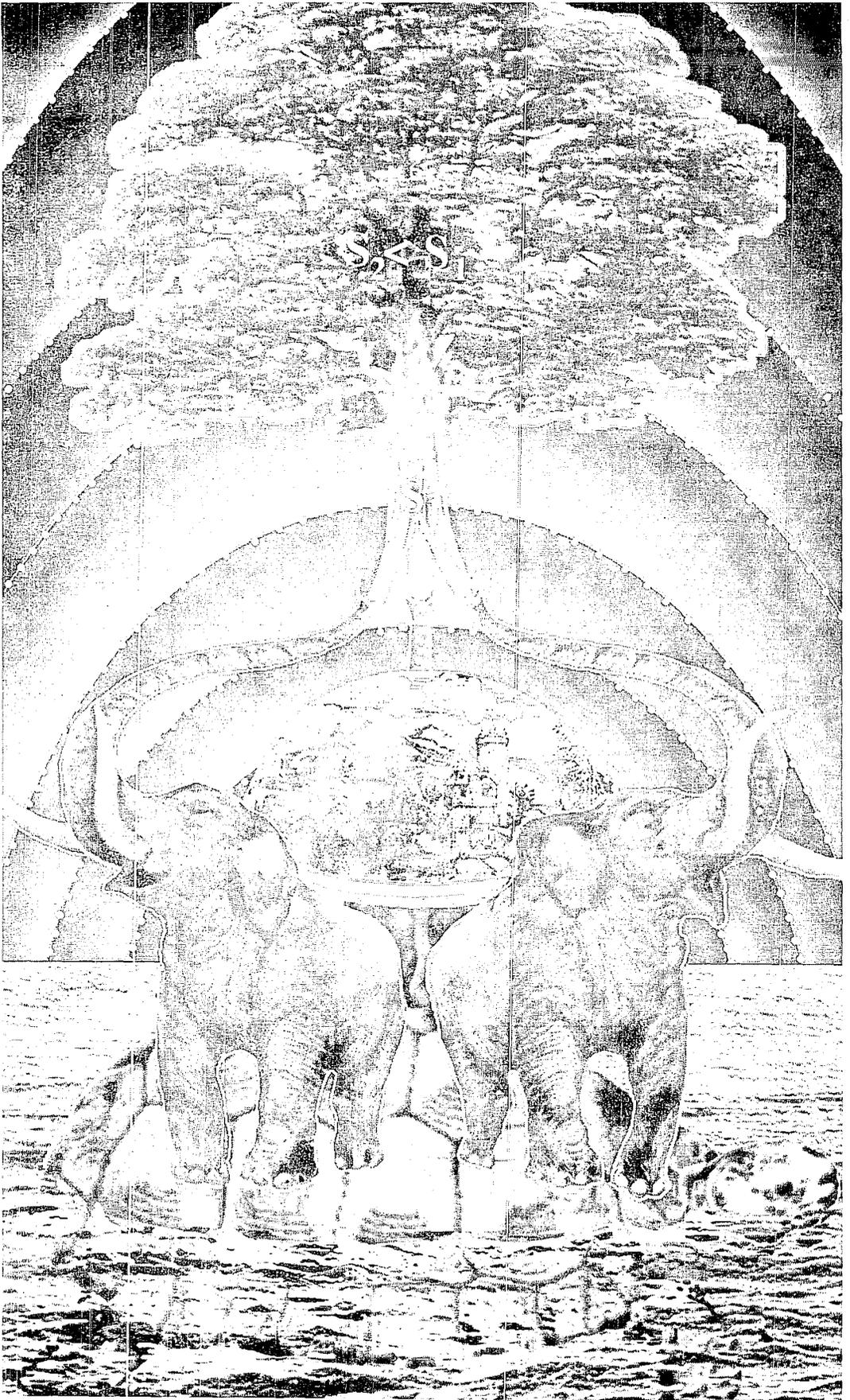
Редактор выпуска профессор кафедры акустики
Московского государственного университета

П.С. Ланда



Ланда Полина Соломоновна родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор четырех монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык. В настоящее время готовит монографию «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», которая выйдет в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия).

Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Прикладная нелинейная динамика».





ЧТО ЖЕ ТАКОЕ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ?

Ю.Л. Климонтович

Основная цель настоящей статьи - выявить общие свойства турбулентности движения, как физического явления. При этом оказывается возможным трактовать переход от ламинарного течения к турбулентному как цепочку неравновесных фазовых переходов, представляющих процесс самоорганизации. Такой вывод базируется на S-теореме. Таким образом, переход от ламинарного течения к турбулентному в открытых системах представляет *переход от хаоса к порядку*. В замкнутой системе возможен и *обратный переход от порядка к хаосу*. Так, созданное в начальный момент турбулентное движение в замкнутой системе будет деградировать к наиболее хаотическому равновесному состоянию с соответствующим увеличением температуры. Этот пример показывает, что процесс самоорганизации возможен лишь в открытых системах.

Я помню, что фон Карман в своем вступительном слове сказал, что когда он, наконец, предстанет перед Создателем, первое откровение, о котором он будет просить, - раскрытие тайн турбулентности...

Г. Моффат

Систематическое экспериментальное и теоретическое изучение турбулентного течения в жидкости началось в первой половине XIX века (Hagen, 1839). Однако, первые основополагающие результаты были получены английским физиком и инженером Осборном Рейнольдсом лишь почти полвека спустя. В 1883 году он установил, что переход от ламинарного течения в трубах к турбулентному происходит при некотором критическом значении безразмерного параметра - **числа Рейнольдса**. Он ввел и основную гипотезу теории турбулентности - **гипотезу Рейнольдса**. Суть ее состоит в следующем.

Сложное турбулентное движение в несжимаемой жидкости можно описывать на основе уравнения Навье - Стокса с той, однако, разницей, что скорость является недетерминированной - случайной функцией координат и времени. Путем усреднения по некоторому статистическому ансамблю, или осреднению по достаточно малым пространственно-временным масштабам, из него следует бесконечная последовательность уравнений для моментов случайной скорости. В частности, в уравнение для первого момента входят в силу нелинейности исходного уравнения вторые моменты флуктуаций скорости - **тензор напряжений Рейнольдса**. Вследствие этого возникает **проблема замыкания** - получение приближенной, но замкнутой системы уравнений для низших моментов. Нулевое по флуктуациям скорости приближение приводит к обычному уравнению Навье - Стокса.

Несмотря на многолетние исследования многих ученых, среди них - Richardson L.S., Batchelor G.K., Prandtl Z.A., Karman T., Колмогоров А.Н., Ландау Л.Д., Обухов А.М., Taylor G.L., турбулентное движение как физическое явление и по сей день остается одним из самых загадочных видов движения. Полученные за эти годы фундаментальные результаты относятся, в основном, к специальному случаю развитой турбулентности. В последние годы наметился существенный прогресс в экспериментальном и теоретическом анализе процесса зарождения турбулентности. Все же практические расчеты строятся, как правило, на основе полуэмпирической теории турбулентности. Такой подход для прикладных целей является очень плодотворным. Это не снимает, однако, вопроса о развитии теории турбулентного движения как одного из основных разделов статистической теории открытых систем.

До недавнего времени теория турбулентности рассматривалась как раздел механики сплошной среды. Глава о турбулентном движении была введена в университетский курс «Статистическая физика» лишь сравнительно недавно (Климонтович, 1982). Это стало возможным благодаря достигнутому в последние годы пониманию, что турбулентное движение отнюдь не является «привилегией» гидродинамики, а представляет собой один из самых распространенных видов движения в природе. В настоящее время турбулентное движение во многих случаях является определяющим для многих явлений в атмосфере, в плазме, в химически реагирующих средах, в нелинейной оптике и т.д.

Для детального изучения теории турбулентности и ее многочисленных практических приложений надо обратиться к специальной литературе. Это, например, замечательные книги (Ландау и Лифшиц, 1986; Batchelor, 1953; Монин, Яглом, 1965, 1967, 1992; Schlichting, 1968; Frost, Moulden, 1977; Lesieur, 1990).

Основная цель настоящей работы - выявить общие свойства турбулентного движения как физического явления, позволяющие трактовать переход от ламинарного течения к турбулентному как цепочку неравновесных фазовых переходов, последовательность которых представляет процесс самоорганизации. Такой вывод качественно базируется на анализе основных особенностей турбулентного движения, а количественно - на **S-теореме**. Таким образом, переход от ламинарного течения к турбулентному в открытых системах представляет собой *переход от хаоса к порядку* в открытых системах.

В замкнутой системе возможен, разумеется, и *обратный переход от порядка к хаосу*. Так, созданное в начальный момент турбулентное движение в замкнутой системе будет деградировать к наиболее хаотическому равновесному состоянию с соответствующим увеличением температуры. Этот очевидный пример показывает, что процесс самоорганизации возможен лишь в открытых системах.

1. Представляет ли турбулентное состояние хаос или порядок?

Итак, несмотря на то, что понятие *турбулентное движение* было введено в науку более ста лет назад, ответить на вопрос: «Что такое турбулентность?» нелегко и в настоящее время. Неслучайно поэтому, что первый раздел одной из недавних книг по турбулентности (Lesieur, 1990) носит название: «Is it possible to define turbulence?». В том же разделе автор формулирует три свойства турбулентности. Кратко они сводятся к следующему.

1. Турбулентное движение *непредсказуемо*.
2. Турбулентному движению свойственно *внутреннее перемешивание, как результат динамической неустойчивости движения*. Благодаря этому свойству турбулентная вязкость и теплопроводность значительно больше, чем для ламинарных течений.

3. Турбулентное движение характеризуется большим числом пространственных масштабов.

Близкое по содержанию определение турбулентности дано и в книге (Монин, Яглом, 1992. С. 125). Эти определения не различают, фактически, понятия *турбулентность* и *хаос* (точнее *пространственно-временной хаос*).

Несомненно, что перечисленные свойства присущи турбулентному движению. Но все же автор книги (Lesieur, 1990) не вполне удовлетворен этим определением и в третьей главе в разделе «Turbulence, order and chaos» снова возвращается к этому вопросу, но теперь уже и к историческим и философским его аспектам.

Обсуждается, в частности, воззрение древнеримского поэта Лукреция (Lucretius), который в своей знаменитой поэме «De Nature Rerum» представлял Вселенную как *турбулентный порядок*, который возник из начального *хаоса*. Это представление может быть преобразовано в интригующее утверждение (the provocative statement): «order (i.e. turbulence) emerges from chaos». Несмотря на авторитет Лукреция, Lesieur все же делает заключение: «In the reality of the fluid dynamics, it seems nevertheless difficult to accept blindly statements like this in order to explain turbulence» (Lesieur, 1990. P. 87).

Приведенная точка зрения на турбулентное движение как хаотическое является почти что общепринятой. Так, в книге (Frost, Moulden, 1977) авторы пишут: «... «Chaotic» in this context is almost synonym to «turbulent». Chaoticity constitutes the main property of such motion».

Противоположная точка зрения была принята автором (Климонтovich, IV, 1984, V) и в книге (Ebeling, Klimontovich, 1984). Согласно ей переход от ламинарного течения к стационарному турбулентному течению представляется как процесс самоорганизации. Это один из примеров, на котором была сформулирована S-теорема. Происходит, фактически, возврат «на позиции Лукреция». Автор, к сожалению, пришел к этому выводу независимо и поэтому не мог в дискуссиях опереться на авторитет великого древнеримского поэта и ученого.

Такая же точка зрения в очень ясной форме была выражена в книге (Prigogine, Stengers, 1984): «...the transition from laminar flow to turbulence is process of self-organization. Part of the energy of the system, which in laminar flow was in the thermal motion of molecules, is being transformed in macroscopic organized motion».

Естественно, что недостаточно лишь провозглашения той или иной точки зрения. Необходимо доказательство ее правомерности на основе общей статистической теории открытых систем. Это и является одной из задач настоящей статьи.

2. Характерные черты турбулентного движения

Что же, все-таки, это такое: турбулентное движение? Ответом может быть лишь перечисление его основных характерных особенностей.

1. Турбулентное движение определяется большим числом неравновесных макроскопических степеней свободы.

2. В зависимости от уровня описания - кинетического, гидродинамического, электродинамического - характеристики турбулентного движения являются средними значениями пульсирующих (случайных) функций распределения, гидродинамических функций, напряженности поля и т.д. В соответствии с гипотезой Рейнольдса уравнения для пульсирующих функций совпадают по форме с соответствующими диссипативными уравнениями кинетической теории, гидродинамики, электродинамики.

3. Приближение сплошной среды, принятое в кинетической теории, в гидродинамике и в электродинамике, недостаточно для описания турбулентного движения. Зарождение и развитие турбулентного движения обусловлено неравновесными флуктуациями, растущими по мере приближения к точке перехода. При этом коллективные (макроскопические) степени свободы турбулентного движения формируются в результате преобразования неупорядоченного молекулярного движения при ламинарном течении в более высокоорганизованное турбулентное движение.

4. Возможность перехода от уравнений движения «атомов» к менее детальному описанию на основе кинетических и гидродинамических уравнений

обусловлена динамической неустойчивостью движения «атомов». Она, тем самым, играет конструктивную роль. При возникновении турбулентного движения динамическая неустойчивость, теперь уже макроскопических характеристик, также играет конструктивную роль. Именно благодаря ей задача сводится к решению уравнений для макроскопических турбулентных переменных. Их число, хотя и велико, но все же много меньше числа микроскопических степеней свободы.

5. Переход от ламинарного течения к турбулентному, когда возникают новые коллективные степени свободы, представляет собой цепочку неравновесных фазовых переходов. В результате возникает более высокоорганизованное состояние. Тем самым такой переход служит примером процесса самоорганизации.

Мы видим, что утверждение Лукреция «order (i.e. turbulence) emerges from chaos» вполне сочетается с представлением о турбулентном движении как о движении, которое характеризуется свойствами 1 - 5.

В соответствии с изложенным основное внимание в работе уделяется следующим вопросам.

1. На примере турбулентного движения в несжимаемой жидкости выявляется роль неравновесных флуктуаций как при зарождении и развитии, так и в состоянии развитой турбулентности. Через производство энтропии вводится турбулентная вязкость.

2. На этой основе рассматриваются некоторые новые аспекты полупирической теории турбулентности. В частности, на примере течения Пуазейля она распространяется и на область перехода.

3. На примере стационарного течения несжимаемой жидкости в трубе показано, что переход от ламинарного течения к стационарному турбулентному течению представляет собой процесс самоорганизации. Параметр при фазовом переходе определяется напряжениями Рейнольдса. Относительная степень упорядоченности ламинарного и турбулентного течений определяется по S -теореме.

Вывод о большей организованности турбулентного течения подтверждается также и расчетом производства энтропии. На этой основе формулируется принцип минимума производства энтропии в процессах самоорганизации.

4. Показана необходимость и возможность единого кинетического и гидродинамического описания турбулентного движения. Получены соответствующие выражения для производства энтропии. Через нее вводятся при описании гидродинамической турбулентности коэффициенты турбулентной самодиффузии, турбулентной вязкости и турбулентной температуропроводности. Обсуждаются некоторые проблемы обобщенной теории броуновского движения.

Приступим к выполнению намеченной программы.

3. Несжимаемая жидкость. Уравнения и напряжения Рейнольдса

Обратимся к уравнениям гидродинамики несжимаемой жидкости. В рамках этой модели плотность и температура постоянны. Задача сводится к нахождению поля вихревой скорости $u^\perp(r, t)$. Знак « \perp » в дальнейшем опущен.

Следуя гипотезе Рейнольдса, допускаем, что эти уравнения справедливы и для случайной - пульсирующей - скорости $u(r, t)$. На этом основании для описания как ламинарного, так и турбулентного течений за исходные принимаем уравнения

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial r_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial r_j}, \quad \text{div } u = 0, \quad (3.1)$$

$$\Delta p = - \rho \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial r_i}, \quad (3.2)$$

$$\pi_{ij}^- = -\eta \left(\frac{\partial u_i^-}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j^-}{\partial r_i} \right) \equiv -\eta u_{ij}^- . \quad (3.3)$$

Здесь использованы стандартные обозначения (см., например, Климонтович, 1982).

Ламинарные течения характеризуются небольшим числом параметров длины и времени. Напротив, в развитом турбулентном течении имеется большое число макроскопических степеней свободы. Будем обозначать наибольшие - основные - масштабы длины и времени для турбулентного течения через L и T , а наименьшие - через L_0 и T_0 . Естественно, что для справедливости приближения сплошной среды минимальные масштабы должны быть много больше соответствующих физически бесконечно малых масштабов

$$L \gg L_0 \gg l_{ph}^{(H)}, \quad T \gg T_0 \gg \tau_{ph}^{(H)}. \quad (3.4)$$

Здесь индекс «Н» от слова Hydrodynamics. Соответствующие масштабы определены в работах (Климонтович, 1982, 1990, 1992). Сглаживание по соответствующему физически бесконечно малому объему и определяет сглаженную скорость u^- и давление p^- .

Вводим ансамбль Гиббса для неравновесных процессов. В результате усреднения по ансамблю определяем среднюю скорость $u = \langle u^- \rangle$. Вводим и соответствующие флуктуации скорости, давления и тензора производных скорости

$$u_i^- = u_i + \delta u_i, \quad p^- = p + \delta p, \quad u_{ij}^- = u_{ij} + \delta u_{ij}. \quad (3.5)$$

Производим, наконец, усреднение уравнений (3.1)-(3.3) для случайных функций. Уравнение для средней скорости имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial r_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial r_j} - \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \delta u_i \delta u_j \rangle. \quad (3.6)$$

По сравнению с уравнением Навье - Стокса оно включает вторые моменты компонент флуктуаций скорости

$$\langle \delta u_i(r,t) \delta u_j(r,t) \rangle \quad (3.7)$$

- тензор напряжений Рейнольдса. Уравнение для среднего давления, которое получается усреднением (3.2), содержит второй момент производных от флуктуаций скорости. В свою очередь, уравнения для вторых моментов содержат более высокие моменты. В результате мы приходим к бесконечной цепочке зацепляющихся уравнений для моментов гидродинамических функций. При этом возникает **проблема замыкания** - получения приближенной замкнутой системы конечного числа уравнений.

Проблема замыкания возникает и в теории кинетических флуктуаций. Основой теории может служить кинетическое уравнение для случайной - пульсирующей - функции распределения $f(r,p,t)$. Из-за нелинейности этого уравнения при усреднении по ансамблю Гиббса снова возникает бесконечная цепочка зацепляющихся уравнений, но теперь для моментов случайной функции распределения.

Здесь легко прослеживается аналогия с теорией турбулентности. Действительно, кинетическое уравнение для случайной функции распределения без учета флуктуаций δf совпадает, например, с уравнением Больцмана для детерминированной - неслучайной - функции распределения $f(r,p,t)$. Сопоставим уравнение для функции $f(r,p,t)$ с уравнением (3.1) для случайной - пульсирующей - скорости $u(r,t)$, а уравнение Больцмана для функции $f(r,p,t)$ - с уравнением Навье - Стокса для детерминированной скорости $u(r,t)$. Можно ли эту аналогию использовать и при решении проблемы замыкания?

В теории кинетических флуктуаций эта проблема решается следующим образом. Используется приближение вторых моментов, а точнее приближение вторых корреляционных функций. И то, и другое основано на условии малости флуктуаций $\delta f^- = f^- - f$. Малость флуктуаций есть следствие того, что для сплошной среды число частиц в каждой точке велико, так как велико число частиц N_{ph} в физически бесконечно малом объеме. «Сплошной» здесь является среда в шестимерном пространстве координат и импульсов! Это приближение оказалось эффективным, так как позволило провести расчеты неравновесных флуктуаций как на кинетических, так и на гидродинамических масштабах. Благодаря этому существенно расширилась «сфера действия» традиционной (без учета флуктуаций) кинетической теории и гидродинамики.

В гидродинамике также используется модель сплошной среды, правда, не в шестимерном, а лишь в трехмерном пространстве. Однако, и здесь в каждой «точке» сплошной среды много частиц. Поэтому, казалось бы, использованное в кинетической теории приближение малых флуктуаций должно быть эффективным и в гидродинамической теории турбулентности. Оказалось, что это не так! Проблема замыкания в гидродинамической теории турбулентности является неизмеримо более трудной, и она до сих пор, несмотря на многолетние усилия многих выдающихся исследователей, не имеет удовлетворительного решения. В чем причина этого? Ответ на этот вопрос до сих пор не найден. В последующих разделах мы попытаемся дать на него ответ. Здесь же отметим следующее.

Как кинетическая теория флуктуаций, так и гидродинамическая теория турбулентности базируются, фактически, на одной и той же гипотезе Рейнольдса, согласно которой уравнения для детерминированных функций считаются справедливыми и для случайных функций. Имеется, однако, существенная разница в выборе исходных уравнений. В первом случае это кинетическое уравнение, а для несжимаемой жидкости - уравнение Навье - Стокса. Поскольку, как мы знаем, уравнения гидродинамики и, в частности, уравнение Навье - Стокса, могут быть получены из кинетического уравнения, то имеется определенный «резерв». Именно, можно стартовать не с уравнения Навье - Стокса, а с кинетического уравнения. При этом более естественно базироваться не на уравнении Больцмана, а на обобщенном кинетическом уравнении (Климонтович, 1990, 1992). Это позволяет дать единое описание как кинетических, так и гидродинамических процессов. Соответственно, возможно и единое кинетическое и гидродинамическое описание турбулентного движения. Мы рассмотрим такой подход в конце статьи.

Есть и другой вопрос. Каково же основание для гипотезы Рейнольдса? Это связано с тем, что при некоторых значениях управляющих параметров, например, числа Рейнольдса, решение уравнения Навье - Стокса для ламинарного течения (для детерминированной скорости) становится неустойчивым. Это можно показать на примере тепловой конвекции. Возникновение неустойчивости сопровождается ростом флуктуаций. И то, и другое показывает, что описание на уровне средней скорости - приближение первых моментов - оказывается недостаточным. Это и служит стимулом перехода к более общим уравнениям для случайных функций. На их основе можно получить дополнительную информацию о высших моментах. При этом, как мы видели, возникает проблема замыкания, которая для гидродинамической турбулентности остается нерешенной. Однако, несмотря на такую ситуацию, в гидродинамической теории турбулентности получен целый ряд фундаментальных и прикладных результатов. Их детальный обзор имеется в книгах (Монин и Яглом, 1992; Lesieur 1990). Рассмотрим те из них, которые необходимы для дальнейшего изложения.

4. Гидродинамическая неустойчивость и возникновение турбулентности

Неустойчивость ламинарного течения в трубе, приводящая к турбулентности, была впервые обнаружена в 1839 году (Hagen, 1839). С тех пор

экспериментально наблюдалась неустойчивость многих других течений. Теоретический расчет устойчивости ламинарных течений представляет, как правило, весьма сложную задачу. К числу сравнительно более простых относятся задачи расчета неустойчивости конвективного течения слоя жидкости, подогреваемого снизу, а также течения жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами. В обоих случаях при наличии градиента температуры или разности угловых скоростей цилиндров сначала возникают новые стационарные течения - ячейки Бенара при конвекции и вихри Тейлора при вращении цилиндров. Турбулентное движение возникает лишь при дальнейшем увеличении разности температур и угловых скоростей, соответственно.

В настоящее время широко обсуждаются четыре сценария перехода от ламинарного течения к турбулентному. Их описания можно найти в (Berge, Romeau, Vidal, 1984; Ландау, Лифшиц, 1986; Бакай, Сигов, 1987; Монин, Яглом, 1992). Отметим лишь, что по Ландау и Хопфу переход к турбулентности происходит через последовательность квазипериодических течений; по сценарию Рюэля и Такенса рождение турбулентности - появление странного аттрактора; по Фейгенбауму турбулентность также связана с рождением странного аттрактора, но возникает он после каскада бифуркаций удвоения периода. Наконец, по сценарию Romeau, Manneville переход к турбулентности происходит через чередование (переменяемость) ламинарного и турбулентного течений. Эксперимент показывает, что при разных видах течений реализуются разные сценарии перехода к турбулентности.

По этим представлениям процесс возникновения турбулентности представляет переход к состоянию динамического хаоса. Следует, однако, помнить, что описанные процессы характеризуют лишь начальный этап зарождения турбулентности, когда число коллективных степеней свободы невелико. Приведенная ниже оценка показывает, что развитое турбулентное движение характеризуется очень большим числом степеней свободы и вопрос о его характере и природе в значительной степени является открытым. Описание этого движения требует, по-видимому, других образов. Рассмотрение некоторых из них и составляет нашу ближайшую задачу. Однако ниже мы еще вернемся и к вопросу о возникновении турбулентности, но с учетом результатов полуэмпирической теории.

5. Развитая турбулентность. Число степеней свободы

Предположим, что переход к турбулентности уже произошел. Рассмотрим столь большие числа Рейнольдса $Re \equiv R \propto uL/\nu$, что турбулентность можно считать развитой. Последнее означает, что выполняются неравенства (3.4) и, следовательно, движение характеризуется большим числом масштабов. В определении числа Рейнольдса L - основной масштаб, u - соответствующая характерная скорость, ν - кинематическая вязкость. Введем также обозначение для характерного числа Рейнольдса, определяемого минимальным масштабом развитого турбулентного движения L_0 ,

$$R^0 = \frac{u_0 L_0}{\nu} \quad (5.1)$$

Мы увидим, что характерный параметр R^0 связан с одной из двух констант полуэмпирической теории развитой турбулентности - постоянной Кармана $\alpha=0.4$.

Развитая турбулентность является локально однородной и изотропной. Рассмотрим предельный случай полностью однородной и изотропной турбулентности. Для этого состояния средняя скорость равна нулю, то есть $u=0$, и, следовательно флуктуация δu совпадает с пульсирующей скоростью u' . Для полностью однородной и изотропной турбулентности третьи моменты скорости

равны нулю. С учетом этого из (3.1) находим следующее уравнение баланса для плотности средней кинетической энергии турбулентного движения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\langle (u^-)^2 \rangle}{2} \right) = -\rho \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\nu}{2} \left\langle \left(\frac{\partial u_i^-}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j^-}{\partial r_i} \right)^2 \right\rangle \equiv \frac{\nu}{2} \langle (u_{ij}^-)^2 \rangle. \quad (5.2)$$

Величина ε определяет среднюю диссипацию кинетической энергии развитого турбулентного движения в единицу времени на единицу массы. В теории турбулентности она известна как **параметр Колмогорова**. В следующем разделе мы установим ее связь с производством энтропии. Мы увидим также, что параметр Колмогорова определяет интенсивность источника Ланжевена в уравнениях гидродинамики несжимаемой жидкости.

Обозначим через L' , T' , u' текущие масштабы развитой генерации и выделим, следуя Колмогорову, две характерные области масштабов: **инерционный интервал**

$$L > L' > L_0, \quad T > T' > T_0; \quad (5.3)$$

вязкий интервал

$$L' \sim L_0, \quad T' \sim T_0. \quad (5.4)$$

Левые неравенства в (5.3) позволяют выделить область развитой турбулентности, в которой зависимость от основных масштабов не является явной. Правые - позволяют в инерционном интервале пренебречь влиянием вязкости.

Возможность выделения инерционного интервала для развитой турбулентности обусловлена следующим. Из определения диссипативной функции в уравнении (5.2) следует связь между пространственными спектральными плотностями диссипативной функции и средней кинетической энергии

$$\varepsilon_k = 2\nu k^2 (u^-)_k^2. \quad (5.5)$$

Естественно считать, что максимум средней кинетической энергии приходится на масштабы, близкие к L , то есть на волновое число $k \approx 1/L$. Из последнего соотношения тогда следует, что из-за наличия множителя k^2 диссипативная функция в области основного масштаба мала. Она максимальна на границе вязкого интервала. На этом основании можно использовать следующую оценку для ε :

$$\varepsilon \sim \nu u_0^2 / L_0^2. \quad (5.6)$$

С помощью формул (5.1), (5.6) находим три соотношения между масштабами L_0 , T_0 , u_0 , которые включают два параметра ε , R^0 ,

$$u_0 \sim (\varepsilon L_0 R^0)^{1/3}, \quad u_0 \sim (\varepsilon T_0 R^0)^{1/2}, \quad T_0 \sim (L_0^2 / \varepsilon R^0)^{1/3}. \quad (5.7)$$

Используем теперь **гипотезу Колмогорова**: *в инерционном интервале статистические характеристики турбулентности полностью определяются параметром ε , а также R^0 , то есть не зависят от вязкости ν* . Основываясь на этой гипотезе, можно использовать соотношения (5.7) и для текущих масштабов инерционного интервала

$$u' \sim (\varepsilon L' R^0)^{1/3}, \quad u' \sim (\varepsilon T' R^0)^{1/2}, \quad T' \sim (L'^2 / \varepsilon R^0)^{1/3}. \quad (5.8)$$

Первое из них выражает «закон 2/3» Колмогорова - Обухова. В этих формулах присутствует параметр R^0 , который для развитой турбулентности имеет величину порядка единицы. Как мы увидим далее, в полуэмпирической теории он является существенным.

Основываясь на полученных соотношениях, проведем оценку числа степеней свободы развитой турбулентности. Это число естественно определить отношением объемов, отвечающих масштабам L и L_0 ,

$$N_{\text{turb}} \sim L^3/L_0^3. \quad (5.9)$$

Используем определение числа Рейнольдса $R = uL/\nu$, а также приведенные соотношения при замене $L' \Rightarrow L$. В результате получим соотношения между масштабами L и L_0 и между соответствующими скоростями

$$\frac{u}{u_0} \sim \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/3}, \quad \frac{L}{L_0} \sim \left(\frac{R}{R^0}\right)^{3/4}. \quad (5.10)$$

Из последних двух соотношений следует искомая оценка величины числа степеней свободы через число Рейнольдса и параметр R^0

$$N_{\text{turb}} \sim \left(\frac{R}{R^0}\right)^{9/4}. \quad (5.11)$$

Мы видим, что число степеней свободы N_{turb} для области развитой турбулентности, когда выполняется неравенство $R \gg R^0$, очень велико. Оно, однако, много меньше микроскопического числа степеней свободы.

6. Интенсивность источника Ланжевена, производство энтропии и турбулентная вязкость для развитой турбулентности

Интенсивность источника Ланжевена. Покажем, как можно определить источник Ланжевена для развитой турбулентности - для состояния, очень далекого от равновесного.

Для расчета равновесных флуктуаций гидродинамических функций источника Ланжевена вводятся в уравнения гидродинамики. Флуктуации тензора вязких напряжений и вектора теплового потока представляются в виде сумм «индуцированных вкладов», пропорциональных производным гидродинамических функций u , T , и собственно источников флуктуаций $\pi_{j,\text{source}}$, $q_{j,\text{source}}$. Корреляторы источников определяются известными формулами Ландау и Лифшица.

Наряду с этими источниками удобно использовать соответствующие гидродинамические случайные силы (Климонтович 1982, 1990). Проведем обобщение этих результатов, чтобы найти соответствующие источники Ланжевена для описания флуктуаций при турбулентном движении в несжимаемой жидкости.

Обратимся к формуле для коррелятора источника флуктуаций фазовой плотности $\delta N(r,p,t)$

$$\langle \delta N \delta N \rangle_{x,x',t}^{\text{source}} = n[\delta(x-x')f(x,t) - \frac{1}{V}f(x,t)f(x',t)]. \quad (6.1)$$

С ее помощью можно найти корреляторы источников флуктуаций гидродинамических функций. Нам понадобится коррелятор флуктуаций скорости

$$\langle \delta u_i \delta u_j \rangle_{r,r',t}^{\text{source}} = \frac{kT(r,t)}{\rho} \delta_{ij} \delta(r-r'), \quad \delta_{ij} - \text{символ Кронекера}. \quad (6.2)$$

С помощью этого выражения формулу для интенсивности флуктуаций в уравнении Навье - Стокса можно представить в виде (Климонтович, 1982)

$$A^{(n)}(r,r',t) = \frac{\rho \eta}{2} \langle \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \delta u_k}{\partial r_k} \right) \rangle_{r,r',t}^{\text{source}}, \quad \eta = \rho \nu. \quad (6.3)$$

Чтобы найти соответствующий источник флуктуаций в турбулентном потоке несжимаемой жидкости, произведем на основании гипотезы Рейнольдса замену $\delta u_i \Rightarrow \delta u_i^-$. Для изотропной и однородной турбулентности средняя скорость $u = 0$,

поэтому возможна замена $\delta u_i \Rightarrow \delta u_i^-$. В результате получаем искомое выражение для интенсивности источника флуктуаций при развитом турбулентном движении несжимаемой жидкости

$$A_{\text{turb}}^{(\eta)}(r, r', t) = \frac{\rho\eta}{2} \langle \left(\frac{\partial u_i^-}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j^-}{\partial r_i} \right)^2 \rangle_{r, r', t}^{\text{source}} \equiv \frac{\rho\eta}{2} \langle (u_{ij}^-)^2 \rangle. \quad (6.4)$$

Подставим его в формулу для коррелятора соответствующей силы Ланжевена и используем обозначение (5.2) для параметра Колмогорова ε . В результате получим выражение

$$\langle f_{\text{turb}}^{(\eta)} f_{\text{turb}}^{(\eta)} \rangle_{r, r', t}^{\text{source}} = 2\rho^2 \varepsilon \delta(t - t'), \quad \varepsilon = \nu \langle (u_{ij}^-)^2 \rangle / 2. \quad (6.5)$$

Мы видим, что для рассматриваемого случая коррелятор источника определяется параметром Колмогорова и, следовательно, скоростью диссипации средней кинетической энергии несжимаемой жидкости при развитом турбулентном движении. Интересно, что этот результат совпадает с полученным ранее на интуитивном уровне (Новиков, 1964).

Производство энтропии. Чтобы найти выражение для производства энтропии при развитом турбулентном движении несжимаемой жидкости, обратимся к соответствующей формуле для производства энтропии при ламинарных течениях. По гипотезе Рейнольдса произведем замену скорости $u \Rightarrow u^-$ и сделаем усреднение по ансамблю. В результате получим выражение для среднего производства энтропии при турбулентном движении

$$\langle \sigma^- \rangle = \frac{\eta}{2T} \langle \left(\frac{\partial u_i^-}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j^-}{\partial r_i} \right)^2 \rangle \equiv \frac{\eta}{2T} \langle (u_{ij}^-)^2 \rangle, \quad u^- = u + \delta u^-. \quad (6.6)$$

Мы пока не предполагали, что турбулентность является однородной и изотропной, поэтому средняя скорость u здесь не равна нулю. При $u = 0$ производство энтропии можно выразить через параметр Колмогорова

$$\langle \sigma^- \rangle = \rho \varepsilon, \quad \varepsilon = \nu \langle (u_{ij}^-)^2 \rangle / 2, \quad \nu = \eta / \rho, \quad (6.7)$$

то есть через скорость диссипации средней кинетической энергии.

Турбулентная вязкость. В общем случае среднее производство энтропии определяется суммой двух вкладов. Первый совпадает с σ для ламинарного течения, а второй определяется турбулентными пульсациями скорости. Путем введения турбулентной вязкости

$$\eta_{\text{turb}} = \eta [1 + \langle (\delta u_{ij}^-)^2 \rangle / u_{ij}^2] \quad (6.8)$$

можно свести выражение (6.6) к форме, характерной для ламинарного течения,

$$\langle \sigma^- \rangle = \eta_{\text{turb}} u_{ij}^2 / 2T. \quad (6.9)$$

Мы имеем, таким образом, определения производства энтропии и турбулентной вязкости для развитого турбулентного течения. Покажем, что полученное таким путем выражение для турбулентной вязкости согласуется с соответствующим выражением теории Колмогорова.

Оценим по порядку величины второй член в правой части формулы (6.8). Для этого используем соотношения, установленные для инерционного интервала развитой турбулентности. Предполагаем, что член, определяемый пульсациями δu^- , оценивается через минимальные масштабы L_0 , u_0 , а член с u_{ij}^- - через текущие масштабы L' , u' инерционного интервала. Тогда получаем оценку

$$\langle (\delta u_{ij}^-)^2 \rangle / u_{ij}^2 \sim (u_0^2 / L_0^2) (L'^2 / u'^2) = (u' L') / u_0 L_0 (L' u_0^3 / u'^3 L_0).$$

Обозначим число Рейнольдса $R' = u'L'/\nu$ для текущих масштабов. Тогда первую дробь в правой части можно выразить через отношение чисел Рейнольдса R'/R^0 . Вторая дробь на основании соотношений (5.7), (5.8) не зависит от параметров ϵ , R^0 и по порядку величины равна единице. В результате приходим к оценочной формуле для турбулентной вязкости в теории Колмогорова

$$\eta_{\text{turb}} = \eta(1 + R'/R^0), \quad R' = u'L'/\nu. \quad (6.10)$$

Мы видим, что дополнительный - турбулентный - вклад пропорционален соответствующему числу Рейнольдса. Этот результат полезен в полуэмпирической теории турбулентности.

Возможна и дальнейшая конкретизация полученной формулы (6.10). Для этого примем во внимание, что турбулентная вязкость, как и производство энтропии, определяется не скоростями, а производными скоростей. Вследствие этого возникает зависимость не от числа Рейнольдса R , а от динамического числа Рейнольдса R_* . Эти числа связаны так называемым законом сопротивления

$$R = R(R_*), \quad R_* = v_*L/\nu, \quad (6.11)$$

здесь v_* - динамическая скорость. Она связана с напряжениями на стенке, например, канала. С учетом этого для течения в плоском канале можно использовать следующее выражение для турбулентной вязкости (Климонтович, Энгель-Херберт, 1984; Монин, Яглом, 1992):

$$\eta_{\text{turb}}(y) = \eta(1 + f(y)R_*/R^0). \quad (6.12)$$

Здесь введена функция $f(y)$ (ось y направлена по нормали к стенке канала ширины $2h$), которая определяется по экспериментальным данным (Schlichting, 1959). На стенках канала функция $f(y = \pm h) = 0$. Это обеспечивает условие $\eta_{\text{turb}} = \eta$ на границах канала.

7. Полуэмпирическая теория Праудтля - Кармана

Рассмотрим двумерные стационарные течения Куэтта и Пуазейля в плоском канале. Расстояние между стенками равно $2h$. Ось x направлена вдоль оси канала, а ось y - перпендикулярно стенкам канала. Для установившегося двумерного течения отлична от нуля лишь компонента скорости $u_x \equiv u(y)$, поэтому уравнение (3.6) принимает вид

$$-\frac{d}{dy} \langle \delta u_x \delta u_y \rangle + \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = \begin{cases} 0, & \text{течение Куэтта,} \\ -\Delta p / \rho l, & \text{течение Пуазейля.} \end{cases} \quad (7.1)$$

Здесь Δp - перепад давления, l - длина канала. Граничные условия имеют вид

$$u|_{y=\pm h} = \begin{cases} \pm u_0, & \text{течение Куэтта,} \\ 0, & \text{течение Пуазейля.} \end{cases} \quad (7.2)$$

Динамическая скорость v_* и числа Рейнольдса определяются по формулам

$$\tau_h = \eta \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = \rho v_*^2, \quad R = \frac{u 2h}{\nu}, \quad R_* = \frac{v_* h}{\nu}. \quad (7.3)$$

Здесь τ_h - напряжение на стенке. Интегрирование по y с учетом граничных условий и (7.2) дает

$$-\langle \delta u_x \delta u_y \rangle + \nu \frac{du}{dy} = \begin{cases} v_*^2, & \text{течение Куэтта,} \\ -v_*^2 y/h, & \text{течение Пуазейля.} \end{cases} \quad (7.4)$$

где $-h \leq y \leq h$. Это уравнение также не является замкнутым, так как в него наряду со скоростью u входит и компонента тензора Рейнольдса. По условию замыкания, предложенного Карманом, она пропорциональна производной скорости

$$\langle \delta u_x \delta u_y \rangle = -(v_{\text{turb}}(y) - \nu) \frac{du}{dy}. \quad (7.5)$$

Для ламинарного течения правая часть равна, естественно, нулю. В результате получаем уравнение для скорости

$$v_{\text{turb}}(y) \frac{du}{dy} = \begin{cases} v_*^2, & \text{течение Куэтта,} \\ v_*^2 y/h, & \text{течение Пуазейля,} \end{cases} \quad (7.6)$$

где $-h \leq y < h$. Оно, однако, тоже незамкнуто, так как в нем еще не определена турбулентная вязкость $v_{\text{turb}}(y)$. Для замыкания воспользуемся определением (6.12). Вид функции берется из эксперимента.

Вернемся к соотношению Кармана (7.5). Заметим, что оно содержит три функции. Исключим из него с помощью последнего уравнения функцию du/dy . В результате получим связь напряжения Рейнольдса с турбулентной вязкостью

$$\langle \delta u_x \delta u_y \rangle = \begin{cases} (v_{\text{turb}}(y) - \nu) v_*^2 / v_{\text{turb}}(y), & \text{течение Куэтта,} \\ (v_{\text{turb}}(y) - \nu) v_*^2 y / v_{\text{turb}}(y) h, & \text{течение Пуазейля.} \end{cases} \quad (7.7)$$

Это соотношение интересно тем, что не содержит скорости. Из формулы (6.12) следует, что зависимость напряжения Рейнольдса от y полностью определяется видом функции $f(y)$.

Детальный расчет профиля скорости и соответствующего закона сопротивления $R(R_*)$ можно найти в цитированных выше работах. Ограничимся лишь некоторыми результатами. Они интересны сами по себе, а также полезны для дальнейшего изложения.

Для ламинарного течения Куэтта закон сопротивления имеет вид

$$R = 2R_*^2 \quad (\text{или } u_0 = v_*^2 h / \nu). \quad (7.8)$$

Сравним это соотношение с соответствующим законом сопротивления для развитой турбулентности ($R_* \gg R^0$)

$$R = 2R^0 R_* \ln(2R_* / R^0) + 2\delta R_*. \quad (7.9)$$

Здесь введено обозначение δ для безразмерного параметра. В отличие от (7.8) это соотношение содержит две «константы» R^0 , δ , точнее величины, которые очень слабо зависят от числа Рейнольдса. Чтобы найти их численные значения, используем вид закона сопротивления турбулентного потока, установленный экспериментально (Reichardt),

$$R = 5R_* \ln R_* + 14.5R_*. \quad (7.10)$$

Здесь выделены два вклада: один пропорционален $R_* \ln R_*$, а второй - R_* . Последнее выражение содержит уже численные константы. Сопоставление двух приведенных результатов показывает, что

$$R^0 \equiv \frac{1}{\alpha} = 2.5, \quad \delta = 7.8. \quad (7.11)$$

Эта формула устанавливает связь R^0 с α - постоянной Кармана (см. комментарии к формуле (5.1)).

Приведем, наконец, выражения для профиля скорости течения Куэтта. Для ламинарного потока имеется линейная зависимость

$$u(y) = v_*^2 y / \nu = u_0 y / h, \quad -h \leq y \leq h. \quad (7.12)$$

Для турбулентного потока вблизи стенки имеется логарифмическая зависимость от координаты

$$u(y) = v_*^2 R_{cr}^0 \ln\left(\frac{R_* y}{R_{cr}^0 h}\right) + \delta v_*^2. \quad (7.13)$$

При $y = 2h$ отсюда следует соотношение (7.9), выражающее закон сопротивления для турбулентного течения Куэтта.

Результаты полуэмпирической теории относятся лишь к области развитой турбулентности, то есть при достаточно больших значениях числа Рейнольдса R . Возможно обобщение этой теории на область перехода. Рассмотрим кратко этот вопрос (Климонтович, 1990).

8. Возникновение стационарных турбулентных течений. Оценка критического числа Рейнольдса

Напомним, что в разделе 4 рассматривались возможные сценарии *начала* перехода от ламинарного течения к турбулентному. Изменим теперь постановку задачи. Именно, проведем оценку критического числа Рейнольдса из условия возникновения стационарного течения с отличными от нуля напряжениями Рейнольдса. Рассмотрение проводится в так называемом квазилинейном приближении для течений Куэтта и Пуазейля.

Оказывается, что для течения Куэтта в этом приближении стационарное решение не существует. Это служит подтверждением результата линейной теории устойчивости, согласно которой ламинарное течение Куэтта устойчиво (Монин, Яглом, 1992). Покажем, что для стационарного течения Пуазейля ситуация существенно иная.

Рассмотрим уравнения квазилинейного приближения. Одним из них является уравнение (7.1) для течения Пуазейля

$$\frac{d}{dy} \langle \delta u_x \delta u_y \rangle - \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\Delta p}{\rho l}. \quad (8.1)$$

Второе уравнение является приближенным и имеет вид

$$-\frac{d \langle \delta u_x \delta u_y \rangle}{dy} = \frac{\nu k}{[\omega/k - u(y)]^2 + \nu^2 k^2} \frac{d^2 u}{dy^2} \langle \delta u_x \delta u_y \rangle. \quad (8.2)$$

Эта система двух уравнений содержит три неизвестные функции: две компоненты тензора Рейнольдса и среднюю скорость u . Ее можно было бы дополнить еще одним уравнением. В этом, однако, для нашей цели нет, как мы увидим, необходимости.

Проведем в последнем уравнении интегрирование по y в пределах от 0 до h . С учетом граничных условий $\langle \delta u_x \delta u_y \rangle|_{y=0,h} = 0$ и (8.1) приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\int_0^h \frac{\nu k}{[\omega/k - u(y)]^2 + \nu^2 k^2} \left\{ \frac{d \langle \delta u_x \delta u_y \rangle}{dy} - \frac{\Delta p}{\rho l} \right\} \langle \delta u_x \delta u_y \rangle dy = 0. \quad (8.3)$$

Естественно, что приведенные уравнения описывают при $\delta u = 0$ ламинарное течение. Существенно, что они выполняются с большой точностью (по параметру $1/R$) и при отличных от нуля напряжениях Рейнольдса. Для области перехода, когда $R \sim R_{cr}$, величина $1/R$ мала, так как для течения Пуазейля $R_{cr} \sim 10^3$.

Первый множитель под интегралом в уравнении (8.3) указывает на

наличие в некоторой точке y_0 волнового резонанса $\omega/k = u(y_0)$. Для основной моды, когда $kh \approx 1$, его ширина определяется единственным малым параметром $1/R$. Таким образом, в нулевом приближении резонансную кривую можно заменить на δ -функцию

$$\frac{vk}{[\omega/k - u(y)]^2 + v^2k^2} \rightarrow \pi\delta[\omega/k - u(y_0)]. \quad (8.4)$$

В этом приближении уравнение (8.3) при $u(y_0) = \omega/k$ принимает вид

$$\frac{d^2u}{dy^2} \Big|_{y=y_0} = 0. \quad (8.5)$$

Таким образом, критерием зарождения турбулентности является возникновение точки перегиба при некотором значении $y=y_0$, которое удовлетворяет условию волнового резонанса. Однако, условие волнового резонанса при $kh \approx 1$ еще не определяет величину y_0 . Для ее однозначного определения необходима дополнительная информация. Она может быть получена следующим образом.

Профиль стационарного течения Пуазейля характеризуется двумя масштабами длины: шириной канала h и толщиной так называемого ламинарного подслоя $l_{\text{lam}} = (\delta/R_*)h$. В это выражение входит одна из констант полуэмпирической теории развитой турбулентности. Масштаб l_{lam} определяет толщину пристеночного слоя, в котором вязкость не отличается заметно от вязкости ламинарного потока. Она составляет несколько сотых долей толщины канала h . Таким образом, стационарное турбулентное течение зарождается на расстояниях от стенки порядка толщины ламинарного подслоя. Это дает основание считать, что условие (8.4) выполняется в точке

$$y_0 \approx h - l_{\text{lam}}. \quad (8.6)$$

Нет, разумеется, необходимости требовать точного выполнения равенства (8.5). Достаточно, чтобы вторая производная была бы порядка $1/R$.

Экспериментальные исследования изменения профиля Пуазейля при переходе через критическое число Рейнольдса проводилось методом лазерной анимометрии (Дубинцев, Рынкевичус, 1982). На профиле скорости при $R = R_{\text{cr}}$ было обнаружено появление точки перегиба в области, примыкающей к стенке канала.

Проведем теперь оценку критического числа Рейнольдса. Для этого вернемся к уравнениям (8.1), (8.2). Исключим из них производную $d\langle \delta u_x \delta u_y \rangle / dy$. В результате приходим к уравнению

$$\left\{ \frac{\langle \delta u_y \delta u_y \rangle}{[\omega/k - u(y)]^2 + v^2k^2} + 1 \right\} v \frac{d^2u}{dy^2} = - \frac{\Delta p}{\rho l}. \quad (8.7)$$

Оно также не является замкнутым, так как наряду с функцией $u(y)$ в него входит напряжение Рейнольдса $\langle \delta u_y \delta u_y \rangle$. Заметим, что первый член в фигурных скобках определяет отличие турбулентной вязкости от v . Для оценки этого вклада, в силу узости резонанса (порядка $1/R$) достаточно иметь оценку напряжения Рейнольдса $\langle \delta u_x \delta u_y \rangle$ лишь в точке y_0 . Проведем эту оценку, используя понятие макроскопического числа степеней свободы N_{turb} при стационарном турбулентном течении Пуазейля. Наличие двух характерных масштабов - основного h и наименьшего l_{lam} - позволяет (по аналогии с (5.9)) определить число степеней свободы с помощью двух характерных объемов

$$N_{\text{turb}} = h^3 / l_{\text{lam}}^3. \quad (8.8)$$

При ламинарном течении «подслой» занимает всю область канала и $N_{\text{turb}} = 1$.

Результаты физических и численных экспериментов показывают, что возбуждение турбулентности при течении Пуазейля является жестким. Это означает, что рассматриваемое стационарное течение может существовать лишь при конечных значениях напряжения Рейнольдса $\langle \delta u_y \delta u_y \rangle$. Чтобы оценить это значение, воспользуемся выражением для относительной дисперсии

$$\frac{\langle \delta u_y \delta u_y \rangle}{\langle u \rangle^2} = \frac{1}{N_{\text{turb}}}, \quad (8.9)$$

определяемой числом степеней свободы турбулентного течения. Средняя скорость $\langle u \rangle$ связана с максимальной скоростью $u_{\text{max}} = u$, через которую выражается число Рейнольдса, соотношением $\langle u \rangle = (2/3)u$. С учетом этого перепишем равенство (8.9) в виде

$$\langle \delta u_y \delta u_y \rangle = \frac{4}{9} \frac{u^2}{N_{\text{turb}}}. \quad (8.10)$$

Подстановка этого выражения в (8.7) приводит к замкнутому уравнению для скорости. Введем в нем безразмерные переменные

$$u' = u/u_{\text{max}}, y' = y/h, w/ku = c, R = uh/\nu, R_* = v_*h/\nu.$$

Используем также закон сопротивления для ламинарного течения Пуазейля

$$2R = R_*^2, \quad (8.11)$$

который приближенно выполняется в области перехода. Используем, наконец, условие резонанса $c = u(y_0)$. В результате, опуская штрихи у безразмерных переменных, приходим к уравнению

$$\left\{ \frac{1}{(9/4)N_{\text{turb}}[u(y_0) - u(y)]^2 + (9/4)N_{\text{turb}}/R^2} + 1 \right\} \frac{d^2u}{dy^2} = - \frac{R_*^2}{R} = -2. \quad (8.12)$$

Чтобы найти связь критического числа Рейнольдса R_{cr} с числом степеней свободы N_{turb} , положим здесь $y = y_0$. Тогда получим

$$\left[\frac{R_{\text{cr}}^2}{(9/4)N_{\text{turb}}} + 1 \right] \frac{d^2u}{dy^2} = -2. \quad (8.13)$$

Член в квадратных скобках определяет в безразмерных переменных коэффициент турбулентной вязкости. Поскольку рассматривается жесткое возбуждение, то напряжение Рейнольдса конечно. Это дает основание считать, что турбулентная вязкость много больше единицы. Тогда первый член в скобках значительно больше второго и уравнение (8.13) можно переписать в виде

$$\left. \frac{d^2u}{dy^2} \right|_{y=y_0} = \frac{2}{R_{\text{cr}}} \frac{(9/4)N_{\text{turb}}}{R_{\text{cr}}}. \quad (8.14)$$

Сравним его с условием (8.5), выполнение которого необходимо для жесткого возникновения стационарной турбулентности при течении Пуазейля. Мы уже отмечали, что его следует понимать лишь как условие малости второй производной в точке резонанса по параметру $1/R_{\text{cr}}$. С учетом множителя 2, который возник в (8.14) при использовании закона сопротивления в виде (8.11), условие зарождения турбулентности можно записать в виде

$$\left. \frac{d^2u}{dy^2} \right|_{y=y_0} = \frac{2}{R_{\text{cr}}}. \quad (8.15)$$

Сопоставление последних результатов и приводит к определению критического числа Рейнольдса

$$R_{cr} = \frac{9}{4} N_{\text{турб}} = \frac{9}{4} \left(\frac{h}{l_{\text{лам}}} \right)^3. \quad (8.16)$$

Здесь использовано определение (8.8) для числа турбулентных степеней свободы. Наконец, с учетом определения $l_{\text{лам}} = (\delta/R_*)h$ и закона сопротивления (8.11) при $R=R_{cr}$ критическое число Рейнольдса можно выразить через константу δ

$$R_{cr} = \frac{8}{5} \left(\frac{\delta}{2} \right)^9. \quad (8.17)$$

Для численной оценки критического числа Рейнольдса отождествим δ с соответствующей константой (7.11) развитой турбулентности. Тогда получаем значение $R_{cr}=5623$, которое близко к численному значению, полученному путем приближенного решения задачи устойчивости ламинарного течения Пуазейля. Не следует, конечно, переоценивать значение приведенной численной оценки. Существенно другое.

Во-первых, установлена связь критического числа Рейнольдса с числом степеней свободы стационарного турбулентного течения в канале. Это служит объяснением того, что критическое число Рейнольдса много больше единицы.

Во-вторых, установлена связь критического числа Рейнольдса с одной из констант полуэмпирической теории турбулентности δ . Наличие такой связи позволяет распространить полуэмпирическую теорию турбулентности на область перехода без увеличения числа констант (Климонтович, 1990). В связи со столь важной ролью этой константы заметим, что она может рассматриваться как новое характерное число Рейнольдса

$$R_{**} = \frac{v_* l_{\text{лам}}}{\nu} \equiv \delta. \quad (8.18)$$

Таким образом обе константы полуэмпирической теории Прандтля - Кармана α и δ могут быть выражены через соответствующие числа Рейнольдса R^0 и R_{**} .

Изложенное дает основание рассматривать переход от ламинарного течения к турбулентному как пример неравновесного фазового перехода. В качестве параметра порядка естественно принять напряжение Рейнольдса. Для течений в канале оно связано с турбулентной вязкостью соотношениями (7.7). В точке перехода параметр порядка обращается в нуль. Подобная точка зрения принята в настоящее время другими авторами, например, (Зубарев, Морозов, Трошкин, 1992).

9. Производство энтропии при ламинарном и турбулентном течениях

В работе (Климонтович, Энгель-Херберт, 1984) было проведено сопоставление значений производства энтропий для двух видов движения:

1. Стационарного турбулентного течения Куэтта и Пуазейля;
2. Неустойчивого при числах Рейнольдса больших критического значения ($Re > R_{cr}$) ламинарного течения.

Удается показать, что при дополнительном условии постоянства напряжения на стенках канала, производство энтропии при турбулентном (устойчивом при $Re > R_{cr}$) течении меньше производства энтропии при ламинарном (неустойчивом при $Rl > R$) течении, то есть

$$\sigma_{\text{лам}} - \sigma_{\text{турб}} > 0. \quad (9.1)$$

Этот результат можно получить следующим образом.

Обратимся к выражению (6.9) для среднего значения производства энтропии при турбулентном движении

$$\langle \sigma^- \rangle \equiv \sigma_{\text{turb}} = \frac{\rho}{2T} v_{\text{turb}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right)^2. \quad (9.2)$$

Отсюда для стационарного турбулентного течения в канале следует, что

$$\sigma_{\text{turb}}(y) = \frac{\rho v_{\text{turb}}(y)}{T} \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (9.3)$$

Дальнейшие вычисления проведем для течения Куэтта. Исключим отсюда производную скорости с помощью первого уравнения (7.6). В результате получаем следующее выражение:

$$\sigma_{\text{turb}}(y) = \frac{\rho}{T} v_*^4 \frac{1}{v_{\text{turb}}(y)}. \quad \text{Отсюда } \sigma_{\text{turb}} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{\text{turb}}(y) dy. \quad (9.4)$$

Используем последнюю формулу для расчета производства энтропии ламинарного и турбулентного течений. При этом существенно следующее.

Расчет относительной степени упорядоченности ламинарного и турбулентного течений на основе S -теоремы будет в разделе 10 проводиться при условии неизменности средней эффективной энергии. Расчеты производства энтропии для той же цели также следует проводить при некотором дополнительном условии. Чтобы сформулировать его, примем во внимание следующее.

Можно выделить два класса характеристик движения в гидродинамике. Одни из них определяются скоростью движения, а другие - производными скорости. Соответственно этому вводятся и два разных числа Рейнольдса R и R_* . Число R_* выражается через динамическую скорость v_* , которая связана с производной скорости на стенке и, следовательно, с напряжением на стенке канала (см. (7.3)). Поскольку производство энтропии определяется производными скорости, то при сопоставлении значений производства энтропии для разных видов течений сравнение следует проводить при одинаковых напряжениях на стенке, то есть

$$v \left| \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = v_*^2 = \text{const}. \quad (9.5)$$

Это дает основание при расчете производства энтропии по формуле (9.4) считать динамическую скорость неизменной.

Рассмотрим два значения усредненного по y производства энтропии при числах Рейнольдса $R > R_{\text{cr}}$.

1. Для стационарного турбулентного движения, которое при $R > R_{\text{cr}}$ является устойчивым. Производство энтропии обозначаем через σ_{turb} .

2. Для воображаемого ламинарного течения, которое при условии $R > R_{\text{cr}}$ является неустойчивым и, следовательно, не может существовать в качестве стационарного течения. Обозначаем производство энтропии в этом случае через σ_{lam} . При расчете производства энтропии турбулентная вязкость ν_{turb} заменяется на ν .

Соответствующие вычисления производства энтропии проведены в (Климонтович, Энгель-Херберт, 1984). Приведем результат

$$\frac{\sigma_{\text{turb}}}{\sigma_{\text{lam}}} = 2 \frac{R}{R_*^2} \leq 1. \quad (9.6)$$

Мы видим, что отношение значений производства энтропий устойчивого турбулентного и неустойчивого ламинарного течений определяется законом

сопротивления $R=R(R_*)$. Знак равенства отвечает точке перехода, когда закон сопротивления для течения Куэтта имеет вид (7.8).

Для стационарного течения Пуазейля соответствующий результат

$$\frac{\sigma_{\text{urb}}}{\sigma_{\text{lam}}} = 2 \frac{R}{R_*^2} \leq 1. \quad (9.7)$$

И в этом случае отношение значений производства энтропии определяется законом сопротивления. Следует только иметь в виду, что для течения Пуазейля в точке перехода надо использовать соотношение (8.11), а не прежнее соотношение (7.8).

На основании приведенных результатов можно сделать вывод, что в критической точке $R=R_{\text{cr}}$ реальный (устойчивый) процесс идет по пути с наименьшим производством энтропии. Это служит одним из признаков большей упорядоченности стационарного турбулентного движения по сравнению с ламинарным. Имеется, тем самым, основание рассматривать переход от ламинарного течения к стационарному турбулентному движению как процесс самоорганизации. К такому же выводу приводит и анализ на основе энтропийного критерия.

Итак, на примерах стационарных течений Куэтта и Пуазейля установлено неравенство (9.1). Этот частный, но весьма важный, результат дает основание предположить справедливость некоторого общего *Принципа минимума производства энтропии в процессах самоорганизации* (Климонтович, 1990).

10. Уменьшение энтропии при переходе от ламинарного течения к турбулентному

Приведем теперь результаты расчета относительной степени упорядоченности ламинарного и турбулентного течений по S -теореме.

Исходим из того, что для стационарного несжимаемого ламинарного потока справедливо локальное распределение Максвелла

$$f_{\text{lam}}(r, v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m[v - u_{\text{lam}}(r)]^2}{2kT}\right). \quad (10.1)$$

Здесь $u_{\text{lam}}(r)$ - локальная скорость ламинарного потока. С помощью этого распределения находим локальную энтропию

$$S_{\text{lam}}(r) = -kn \int \ln n f_{\text{lam}}(r, v) f_{\text{lam}}(r, v) dv, \quad n = N/V. \quad (10.2)$$

Для турбулентного потока локальная скорость является случайной функцией. По этой причине случайной функцией становится и соответствующее локальное распределение Максвелла

$$f_{\text{urb}}(r, v, t) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m[v - u(r, t)]^2}{2kT}\right\}. \quad (10.3)$$

Мерой неопределенности может служить здесь усредненная энтропия

$$S_{\text{urb}} = \langle S_{\text{urb}} \rangle = -kn \langle \ln n f_{\text{urb}}(r, v, t) f_{\text{urb}}(r, v, t) \rangle dv. \quad (10.4)$$

Сформулируем теперь дополнительное условие постоянства средней эффективной энергии, которое необходимо для определения относительной степени упорядоченности рассматриваемых систем. Выбираем за состояние «физического хаоса» ламинарное течение. Такой выбор будет подтвержден результатами расчета эффективной температуры. Мы видим из (10.1), что за эффективную энергию следует выбрать кинетическую энергию относительно

среднего потока. Тогда условие постоянства средней энергии имеет вид

$$\int \frac{m[v - u_{\text{lam}}(r)]^2}{2} f_{\text{lam}} dv = \int \frac{m[v - u_{\text{turb}}(r)]^2}{2} \langle f_{\text{turb}} \rangle dv. \quad (10.5)$$

Здесь $u_{\text{turb}} = \langle u(r, t) \rangle$ - средняя скорость турбулентного потока. По решению этого уравнения находим эффективную температуру ламинарного потока - состояния «физического хаоса»

$$kT_{\text{lam}} = kT_{\text{turb}} + 1/3 m \langle (\delta u)^2 \rangle, \quad (T_{\text{turb}} \equiv T). \quad (10.6)$$

Таким образом, чтобы удовлетворить дополнительному условию (10.5), надо поднять температуру ламинарного потока. Это и подтверждает правильность сделанного выбора состояния физического хаоса. Соответствующее тепловое - неупорядоченное - движение переходит в турбулентном потоке в более организованное движение коллективных степеней свободы. Используя этот результат, находим разность энтропий ламинарного и стационарного турбулентного течений, которая служит количественной мерой относительной степени хаотичности этих движений

$$T(S_{\text{lam}} - S_{\text{turb}}) = 3/2 kT_{\text{lam}} n \ln \frac{kT_{\text{lam}}}{kT_{\text{lam}} - 1/3 m \langle (\delta u)^2 \rangle} \approx \frac{mn}{2} \langle (\delta u)^2 \rangle \geq 0. \quad (10.7)$$

Таким образом, при условии (10.5) энтропия усредненного турбулентного течения меньше, чем ламинарного. Уменьшение энтропии связано с рождением коллективных степеней свободы, которые характеризуются напряжениями Рейнольдса. По этой причине турбулентное движение и оказывается более упорядоченным. Это еще одна демонстрация того факта, что переход от ламинарного течения к турбулентному представляет процесс самоорганизации.

Заметим, что существенное увеличение вязкости при переходе от ламинарного течения к турбулентному означает смену молекулярного - индивидуального, неорганизованного - переноса импульса от слоя к слою при ламинарном течении - коллективным. Это можно выразить и другими словами: неорганизованное сопротивление при ламинарном течении сменяется при переходе к турбулентному течению более высокоорганизованным сопротивлением.

Благодаря изменению внутреннего трения происходит и изменение профиля скорости. Он также становится более упорядоченным - более равномерным по большей части сечения канала.

Итак, при переходе к турбулентному движению устанавливаются новые макроскопические связи - коллективные связи. При этом структура движения с макроскопической точки зрения настолько усложняется, что создается видимость хаоса. В этой связи можно выразить основную задачу теории турбулентности как выявление и описание **структуры хаоса**.

Большая упорядоченность турбулентного движения установлена здесь на основе S-теоремы путем сравнения упорядоченности двух стационарных состояний, отвечающих разным значениям управляющего параметра - числа Рейнольдса. Большую упорядоченность турбулентного движения можно, конечно, выявить и при рассмотрении временной эволюции в замкнутой системе. Для этого проследим в замкнутой системе переход от неравновесного начального турбулентного состояния к равновесному. Согласно H-теореме энтропия при этом возрастает и, следовательно, имеет место не самоорганизация, а деградация более упорядоченного в начальный момент движения. Наличие деградации может быть зафиксировано по повышению температуры.

В заключение этого раздела отметим следующее. На примере гидродинамического описания турбулентного движения в несжимаемой жидкости были продемонстрированы некоторые характерные черты турбулентного течения. При этом остались и «темные облачка». Мы увидим, что попытка их удаления приводит к необходимости пересмотра основной концепции описания турбулентного движения.

11. Аргументы в пользу кинетического описания турбулентного движения

В п. 3 перечня основных характерных особенностей турбулентного движения (см. раздел 2) сказано, что для описания турбулентного движения приближение сплошной среды, принятое в кинетической теории и в гидродинамике, недостаточно. Здесь отмечены «на равных» два уровня описания. Однако, мы хорошо знаем, что возможности кинетического описания значительно шире, чем гидродинамического. Это связано с различием физически бесконечно малых масштабов - «точка» в кинетической теории существенно меньше, чем в гидродинамике. Поэтому недостаточность модели сплошной среды на уровне гидродинамики не закрывает возможность использования приближения сплошной среды на уровне кинетического описания. Такая возможность и будет теперь использована.

Отметим некоторые причины, по которым переход к кинетическому описанию турбулентного движения является необходимым.

11.1. Максимальные значения числа Рейнольдса в теории Колмогорова

В теории Колмогорова число степеней свободы развитой однородной и изотропной турбулентности определяется через основной L и минимальный L_0 масштабы по формуле (5.9). Соотношения (5.10) позволяют найти связь (5.11) числа $N_{\text{турб}}$ с числом Рейнольдса R . Для справедливости гидродинамической теории турбулентности минимальный масштаб L_0 должен превышать размер «точки» сплошной среды. Последний определяется физически бесконечно малым элементом длины $l_{\text{ph}}^{(H)}$, который сам зависит от основного масштаба. Должно, таким образом, выполняться неравенство (Климонтович, 1992,1994)

$$L_0 \gg l_{\text{ph}}^{(H)} \sim L/N^{1/5} \sim L(r_{\text{ав}}/L)^{3/5}, \quad N = nL^3. \quad (11.1)$$

Здесь введено обозначение для среднего расстояния между частицами среды, которое определяется через среднюю плотность числа частиц n . Мы видим, что учет атомарной структуры «сплошной среды» накладывает существенное ограничение (при заданных L , n) на минимальный масштаб L_0 . С учетом второго соотношения (5.10) его можно представить как ограничение на максимальное допустимое (в рамках модели сплошной среды) значение числа Рейнольдса

$$R_{\text{max}}/R^0 < N^{4/5} \sim (L/r_{\text{ав}})^{4/5}. \quad (11.2)$$

Для газа при нормальных условиях при $L = 10^2$ см отсюда следует, что $R_{\text{max}} < 10^6$.

Приведем, наконец, соответствующее ограничение на максимальное число турбулентных степеней свободы

$$(N_{\text{турб}})_{\text{max}} \ll N_{\text{с.м.}} = N/N_{\text{ph}}^{(H)} \sim N^{3/5}. \quad (11.3)$$

Неравенство показывает, что оно не может превышать число «точек» $N_{\text{с.м.}}$, которые укладываются в объеме сплошной среды L^3 . При переходе к кинетическому описанию турбулентного движения возможности теории возрастают, поскольку уменьшается объем «точки».

11.2. Максимальное значение числа Рейнольдса при турбулентном течении в канале

Проведем соответствующую оценку R_{max} турбулентного течения в плоском канале. Роль масштабов L , L_0 играют теперь, соответственно, величина h и толщина ламинарного подслоя $l_{\text{лам}} = (\delta/R^*)h$. Они были использованы, в частности, в (8.3) при определении числа степеней свободы. Число R_{max} определяем из условия, что число степеней свободы не может превосходить число «точек» в объеме h^3

$$(N_{\text{turb}})_{\text{max}} = (h^3/l_{\text{lam}}^3)_{\text{max}} < N_{\text{с.м.}} = N/N_{\text{ph}}^{(H)} \sim N^{3/5}. \quad (11.4)$$

Это ограничение приводит к следующей оценке R_{max} при гидродинамическом описании турбулентного движения в канале:

$$R_{\text{max}} \sim N^{1/5} R_{\text{cr}}^{1/3}. \quad (11.5)$$

Здесь использовано приближенное выражение для закона сопротивления при развитой турбулентности: $R \approx \delta R_*$ (оно следует из формулы (7.9)), а также приближенное соотношение (8.17) критического числа Рейнольдса и одной из констант δ полуэмпирической теории турбулентности.

Для газа при атмосферном давлении, когда плотность числа частиц $n \approx 10^{19} \text{ см}^{-3}$, при $h = 10^2 \text{ см}$ и с учетом формул (11.2), (11.5) получаем числовую оценку: $R_{\text{max}} < 10^6$.

Таким образом, наличие структуры «сплошной среды» при гидродинамическом описании турбулентности приводит к ограничению сверху значений числа Рейнольдса, при которых возможно непротиворечивое описание турбулентного движения в рамках гидродинамики. Кинетическое описание таит, естественно, дополнительные возможности, поскольку структура «сплошной среды» является при этом более тонкой.

Следствием рассмотренного ограничения возможности гидродинамического описания является и так называемая **проблема замыкания**.

11.3. Проблема замыкания в теории турбулентности

Вернемся к разделу 3. В нем обсуждалась проблема замыкания бесконечной последовательности для моментов скорости в теории гидродинамической турбулентности несжимаемой жидкости. При этом мы отметили, что проблема замыкания возникает при расчете как кинетических, так и гидродинамических флуктуаций, например, в газе Больцмана. В этом случае решение проблемы замыкания основывается на условии малости флуктуаций. Оно обеспечивается наличием большого числа частиц в соответствующем физически бесконечно малом объеме. Однако, это условие является достаточным лишь для состояний, близких к равновесному, когда для расчета неравновесных флуктуаций эффективным является приближение Гаусса и, следовательно, для статистического описания достаточно двух первых моментов пульсирующей (случайной) функции распределения.

В теории развитой турбулентности ситуация существенно иная. Несмотря на то, что и здесь используется приближение сплошной среды и, следовательно, число частиц в «точке» велико, приближение Гаусса оказывается недостаточным. Причина в том, что развитое турбулентное движение является существенно неравновесным. Оно характеризуется большим числом неравновесных макроскопических степеней свободы.

В связи с этим возникает вопрос. Является ли уравнение Навье - Стокса достаточным базовым уравнением для построения на его основе последовательности уравнений Рейнольдса? Если нет, то как тогда улучшить выбор исходного уравнения? Такая возможность имеется. Именно, в качестве базового уравнения можно использовать не уравнения гидродинамики, а кинетическое уравнение для функции распределения $f(r, v, t)$. Однако, при выборе базового кинетического уравнения следует иметь ввиду, что кинетическое описание также основано на модели сплошной среды. В отличие от гидродинамики теперь это «сплошная среда» в пространстве координат и импульсов. По этой причине величина v в кинетической теории не является скоростью отдельной частицы. Она характеризует поведение коллектива частиц в «точке». При этом, однако, размер «точки» в кинетической теории значительно меньше, чем в гидродинамике.

На кинетическом уровне описания пульсирующая скорость $u(r, t)$ определяется случайной функцией f . Она, в свою очередь, представляет

сглаженное по объему «точки» динамическое распределение. Средняя же скорость снова выражается через функцию распределения $f(r,p,t)$, но теперь без условия малости числа Кнудсена.

Таким образом, кинетическое описание содержит потенциальную возможность более полного описания как ламинарных, так и турбулентных движений. Попробуем использовать такую возможность. Прежде, однако, отметим еще одну трудность традиционного гидродинамического описания турбулентного движения. Она связана с тем, что уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости не согласуются с уравнением баланса энтропии.

11.4. Уравнение баланса энтропии при турбулентном движении в несжимаемой жидкости

Для несжимаемой жидкости плотность и температура постоянны, поэтому постоянна и энтропия. В то же время производство энтропии отлично от нуля. Эта непоследовательность остается и в уравнениях турбулентного движения, основанных на гипотезе Рейнольдса. Действительно, среднее значение локальной энтропии турбулентного движения $\langle S \rangle$ постоянно, а соответствующее производство энтропии зависит от процесса. Мы увидим, как снимается это противоречие в кинетической теории турбулентности.

Отметим в связи с этим, что при использовании S -теоремы в разделе 10 ситуация была иная. Там средняя энтропия стационарного турбулентного потока (4.10) так же постоянна. Однако, энтропия, перенормированная к заданному значению средней эффективной энергии ламинарного движения, зависит от числа Рейнольдса и, следовательно, отражает характер турбулентного процесса.

12. О кинетическом описании турбулентного движения

12.1. Кинетическое уравнение для ламинарного движения

Итак, есть основания для описания турбулентного движения использовать в качестве базового кинетическое уравнение вместо уравнений гидродинамики. Такого рода попытки известны. В качестве исходных использовались кинетические уравнения для многочастичной функции распределения, например, уравнение Леонтовича (Жигулев, 1969; Климонтович, 1983). Они не приводили, однако, к ощутимым результатам.

Будем использовать в качестве исходного обобщенное кинетическое уравнение (Климонтович, 1990, 1992, 1994) для разреженного газа - газа Больцмана. Это уравнение содержит два диссипативных члена. Первый определяется перераспределением частиц по скоростям. Он представляется здесь не интегралом столкновений Больцмана, а *нелинейным интегралом столкновений Фоккера - Планка*. Такая замена оправдана наличием большого числа частиц в «точке» рассматриваемой среды. Дополнительный диссипативный член описывает пространственную диффузию функции распределения. Благодаря его учету, переход к уравнениям газовой динамики проводится без использования теории возмущений по параметру Кнудсена. Обобщенное кинетическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ D_{(v)}(r,t) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{\tau} [v - u(r,t)] f \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left[D_{(r)} \frac{\partial f}{\partial r} - \tau \frac{F}{m} f \right]. \quad D_{(v)} = \frac{kT(r,t)}{\tau m}, \quad D_{(r)} = \tau \frac{kT_{cp}}{m}. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Коэффициент диффузии $D_{(v)}$ определяется локальной температурой, которая сама, как и средняя скорость $u(r,t)$, выражается через функцию распределения. Пространственный коэффициент диффузии определяется средней температурой; τ - время свободного пробега. Для газа все три кинетических коэффициента (диффузии D , вязкости ν и температуропроводности χ) приближенно равны. Ниже полагаем, что $D = \nu = \chi$. В уравнении (12.1) имеются два масштаба времени: время свободного пробега τ и время пространственной диффузии $\tau_D = L^2/D$. Ниже удобней, особенно при условии несжимаемости, заменить D на ν . Тогда для ламинарных течений отношение времен

$$\tau/\tau_\nu \sim (l/L)^2 \sim (Kn)^2 \quad (12.2)$$

определяется параметром Кнудсена. При нормальных условиях и $L=10^2$ см $Kn \approx 10^{-6}$. Этим оправдан переход к уравнениям газовой динамики. Покажем, что для турбулентных движений отношение времен релаксации существенно меняется.

12.2. Оценка отношения времен релаксации для турбулентного движения

Начнем снова со случая однородной и изотропной турбулентности. Отношение времен в (12.2) для наименьшего масштаба L_0 заменится на $\tau/\tau_{\nu}^{\text{turb}} \sim \tau_{\nu}^{\text{turb}}/L_0^2$. В теории Колмогорова для развитой турбулентности $\nu^{\text{turb}} \sim \nu R$ и $L_0 \sim LR^{3/4}$. С учетом этого находим, что отношение времен релаксации остается меньше единицы при условии

$$\tau/\tau_{\nu}^{\text{turb}} \sim \tau R^{5/2}/\tau_\nu < 1 \quad \text{и, следовательно, при } R < Kn^{-4/5}. \quad (12.3)$$

Проведем соответствующую оценку для турбулентного течения в канале. Минимальный масштаб определяется теперь толщиной ламинарного подслоя $l_{\min} \sim (\delta/R_*)h$, а коэффициент турбулентной вязкости $\nu^{\text{turb}} \sim R_*\nu$. В результате вместо (12.3) получаем следующую оценку:

$$\tau/\tau_{\nu}^{\text{turb}} \sim \tau \nu R_* / l_{\text{lam}}^2 \sim \tau R^3 / \tau_\nu \delta^5 < 1 \quad (12.4)$$

и, следовательно, значения числа Рейнольдса ограничены условием

$$R < Kn^{-2/3} R_{cr}^{5/18}. \quad (12.5)$$

Здесь использована оценка (8.16) для критического числа Рейнольдса при течении Пуазейля в канале.

При $L = h = 10^2$ см и для нормального давления обе оценки (12.3), (12.5) приводят к ограничению на числа Рейнольдса $R < 10^5$. Это означает, что уже при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса второй диссипативный член в кинетическом уравнении (12.1) не является малым. По этой причине для развитой турбулентности локальное распределение Максвелла не может служить основным приближением для построения уравнений гидродинамики. Можно выделить, однако, более широкий класс решений кинетического уравнения

$$f(r,p,t) = f(r, |v - u(r,t)|, t), \quad (12.6)$$

для которого также переход к уравнениям газовой динамики возможен без использования теории возмущений по числу Кнудсена. При этом в них, наряду с вязкостью и теплопроводностью, учитывается и самодиффузия.

Хотя система уравнений для функций $\rho(r,t)$, $u(r,t)$, $T(r,t)$ и замкнута, ее решение недостаточно для описания процессов на малых масштабах, когда число Кнудсена не является малым. Действительно, решения кинетического уравнения даже при ограничении (12.6) дают возможность найти бесконечное число высших

моментов, которые на малых масштабах существенны, например, для расчета энтропии и теплового потока. При условии несжимаемости ($u \ll v_{\text{турб}}$) на функцию распределения надо наложить дополнительные условия

$$\int f(r, v, t) dv = \text{const}, \quad \int [v - u(r, t)]^2 f(r, v, t) dv = \text{const}. \quad (12.7)$$

Первое из них обеспечивает постоянство плотности, а второе - температуры. Уравнение непрерывности сводится к $\text{div} u = 0$. Поле скорости удовлетворяет уравнению Навье - Стокса.

Ситуация меняется еще более радикально, когда неравновесные распределения не относятся к частному виду (12.6). В этом случае система уравнений для низших моментов $\rho(r, t)$, $u(r, t)$, $T(r, t)$ не сводится к обычной системе уравнений газовой динамики. В них входят высшие моменты. По этой причине традиционное построение теории турбулентности на базе газодинамических уравнений оказывается практически невозможным. В этом мы убедимся в разделе 14.

Таким образом, при больших значениях числа Рейнольдса в качестве базового уравнения в теории турбулентности необходимо использовать кинетическое уравнение. В связи с этим заметим, что кинетическое описание турбулентности широко используется, например, в теории «бесстолкновительной» плазмы. Исходным при этом служит кинетическое уравнение Власова. Однако, развитая на этой основе теория не «стыкуется» с традиционной гидродинамической теорией турбулентности.

При учете столкновений для обоснования уравнений Рейнольдса для моментов газодинамических функций может быть использовано уравнение Леонтовича для N -частичной функции распределения (Леонтович, 1935). На его основе можно развить теорию как кинетических, так и газодинамических флуктуаций (Климонтович, 1975, 1983, 1994).

12.3. Гипотеза Рейнольдса в кинетической теории

Расширим гипотезу Рейнольдса - применим ее к кинетическому уравнению (12.1). Все сводится тогда к замене детерминированной функции распределения пульсирующим - случайным - распределением

$$f(r, v, t) \Rightarrow f^-(r, v, t). \quad (12.8)$$

В результате получаем уравнение, которое по гипотезе Рейнольдса может служить исходным для построения кинетической теории турбулентности

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^-}{\partial t} + v \frac{\partial f^-}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f^-}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \{ D_{(v)}^-(r, t) \frac{\partial f^-}{\partial v} + \frac{1}{\tau} [v - u^-(r, t)] f^- \} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} [D_{(r)} \frac{\partial f^-}{\partial r} - \tau \frac{F}{m} f^-]. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Естественно, что это уравнение является существенно более общим, чем уравнения Рейнольдса в гидродинамике (3.1)-(3.3). Переход к ним возможен лишь для класса пульсирующих функций распределения (ср. с (12.6), (12.7))

$$f^-(r, v, t) = f^-(r, |v - u^-(r, t)|, t). \quad (12.10)$$

В него, в частности, входит пульсирующее распределение Максвелла. Кинетическое уравнение содержит, таким образом, большие резервы для развития теории турбулентного движения.

Прежде, чем двигаться дальше, сделаем два замечания. Распределение класса (12.10) уже было введено в разделе 10 при использовании S -теоремы для определения относительной степени упорядоченности ламинарного и

турбулентного течений. Кинетическое уравнение Больцмана для пульсирующего распределения $f(r, v, t)$ используется и в кинетической теории флуктуаций. В теории кинетических флуктуаций на основе уравнения для функции f эффективным оказывается приближение вторых моментов. Условие малости флуктуаций определяется большим числом частиц в «точках» сплошной среды - фактором $1/N_{ph}$.

В теории турбулентности в гидродинамике основанием для перехода от уравнения Навье - Стокса к уравнениям Рейнольдса служит неустойчивость ламинарного течения. На кинетическом уровне такому переходу отвечает переход от частного решения (12.6) кинетического уравнения (12.1) к частному решению (12.10) уравнения (12.9) для пульсирующей функции распределения. В гидродинамической теории, во всяком случае в явном виде, не возникает вопрос о структуре сплошной среды. Действительно, как ламинарные, так и турбулентные движения описываются на основе уравнений механики сплошной среды. Вследствие этого малый фактор $1/N_{ph}$, который фигурирует в кинетической теории флуктуаций, здесь в явном виде отсутствует. Нет поэтому оснований для приближения малых флуктуаций. В такой ситуации возникает естественный вопрос. Ведь, согласно изложенному, как теория кинетических флуктуаций, так и теория турбулентного движения имеют общую основу - кинетическое уравнение (12.9). Это означает, что теория кинетических флуктуаций и теория турбулентности несжимаемой жидкости, рассматриваемая в настоящей главе, представляют собой частные случаи единой более общей кинетической теории как ламинарных, так и турбулентных движений. Естественно, что такая теория сложна. Она, однако, может выявить общие физические черты турбулентного движения и дать возможность рассмотреть вопросы, выходящие за пределы традиционной теории турбулентного движения.

13. Аналогия с переходом газ - жидкость в системе Ван-дер-Ваальса

Существуют два уровня описания перехода газ - жидкость: термодинамический и статистический. В первом случае основой служит уравнение Ван-дер-Ваальса. Представим его в виде

$$p = nkT(1 - nb)^{-1} - n^2a. \quad (13.1)$$

Здесь нет зависимости от N . Это показывает, что уравнение Ван-дер-Ваальса - уравнение для сплошной среды. Будем считать, что состояние выше критической точки аналогично ламинарному движению. При переходе через критическую точку возникает область, в которой с термодинамической точки зрения состояние системы неустойчиво. Возникновение неустойчивости связано с зарождением двухфазного состояния. Будем условно считать это состояние аналогичным турбулентному. В статистической теории состояния при всех значениях параметров описываются распределением с эффективной функцией Гамильтона. Выше критической точки его приближенно (!) можно заменить распределением Гаусса. При этом, по мере приближения к критической точке, дисперсия возрастает по закону Кюри. Это указывает на неустойчивость «ламинарного течения» или, иными словами, на начало перестройки однофазного состояния системы. Существенно, что появление неустойчивости имеет место лишь при замене общего распределения приближенным распределением Гаусса и, тем самым, приближением малых флуктуаций. Само же исходное распределение эквивалентно учету всех моментов.

Таким образом, весь расчет производится на основе анализа детерминированного распределения. Его можно рассматривать как равновесное решение некоторого кинетического уравнения. При этом само уравнение Ван-дер-Ваальса отвечает наиболее вероятному значению объема системы. Флуктуации - отклонения объема от наиболее вероятного. При этом относительная дисперсия

мала (пропорциональна $1/N$ лишь в *ламинарном* состоянии). По мере удаления от критической точки в область *турбулентного* движения относительные флуктуации становятся порядка единицы. Это означает, что двухфазное состояние сформировалось и каждая компонента является макроскопической подсистемой, число частиц в которой составляет конечную долю общего числа частиц N !

Из проведенной аналогии следует, что путем анализа детерминированного распределения можно описать не только крайние состояния, отвечающие «ламинарному движению» и состоянию развитой «турбулентности», но проследить за отклонениями от исходного ламинарного движения. Эти отклонения, нарастающие по мере приближения к критической точке, являются определяющими для зарождения и развития турбулентного движения. Существенно при этом, что сами уравнения ламинарного течения справедливы не для первых моментов соответствующих переменных, а для их наиболее вероятных значений. Их различие мало лишь для ламинарных состояний. Для развитой турбулентности относительные значения этих отклонений порядка единицы, что и означает появление новых макроскопических характеристик среды. Эта аналогия полезна для развития единого кинетического описания ламинарного и турбулентного движений.

14. Описание стационарного течения Пуазейля в плоском канале на основе обобщенного кинетического уравнения (12.1)

Обратимся к задаче о стационарном турбулентном движении Пуазейля в плоском канале, которая рассматривалась в разделах 7, 8. В этом случае функция распределения зависит лишь от трех переменных

$$f(r, v, t) \Rightarrow f(y, v_x, v_y), \text{ средняя скорость } u_x \equiv u(y), u_y = 0. \quad (14.1)$$

Кинетическое уравнение (12.1) упрощается и принимает вид

$$v_y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\Delta p}{ml} \frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ D_{(v)} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{\tau} [v - u(y)] f \right\} + v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad v = (v_x, v_y). \quad (14.2)$$

Здесь учтено, что сила определяется перепадом давления и коэффициент пространственной диффузии представлен как коэффициент вязкости. Нелинейность в кинетическое уравнение входит через *интеграл столкновений* - через зависимость коэффициента диффузии $D_{(v)}$ и средней скорости от искомой функции распределения.

Найдем соответствующее уравнение для средней скорости $u(y)$. Для этого умножим уравнение (14.2) на v_x и проинтегрируем по v_x, v_y . Не будем предполагать, что распределение относится к классу (12.6)! Тогда приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d}{dy} \langle \delta v_x \delta v_y \rangle = v \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{\Delta p}{ml}. \quad (14.3)$$

Это уравнение по форме совпадает с (7.1) для течения Пуазейля. Отличие состоит в определении тензора турбулентных напряжений. В уравнении (7.1) это тензор напряжений Рейнольдса. Здесь же член в левой части определяется решением кинетического уравнения (15.2). Он исчезает, если функция распределения принадлежит к классу (12.6).

Таким образом, с точки зрения кинетической теории переход к турбулентному движению означает изменение симметрии функции распределения. Именно, нарушается условие изотропности (12.6) по относительной скорости. При этом турбулентность определяется не корреляциями, связанными с взаимодействием частиц (ведь разреженный газ с точки зрения термодинамики

является идеальным), а, прежде всего, изменением структуры функции распределения по импульсам.

Таким образом, как и в теории Рейнольдса, уравнение для средней скорости не является замкнутым. Теперь, однако, можно делать акцент не на решении проблемы замыкания, а обратиться к решению кинетического уравнения (14.2).

При условии несжимаемости первое условие (12.7) сохраняется и для турбулентного движения. Второе же условие (12.7) нарушается, так как нарушается условие изотропности (12.6) для относительной скорости, что приводит к переопределению температуры. Это снимает противоречие с вторым законом термодинамики, о котором говорилось в разделе 11.4.

Для ламинарных течений решение кинетического уравнения (14.2) существенно упрощается. Действительно, при этом температура постоянна, а средняя скорость определяет профиль Пуазейля. При этом кинетическое уравнение (14.2) становится линейным, а функция распределения имеет структуру

$$f(r, |v - u_{\text{lam}}(y)|, t), \quad r = (x, y), \quad v = (v_x, v_y). \quad (14.4)$$

Она определяет и все высшие четные моменты относительной скорости при ламинарном течении. При достаточно больших давлениях, когда время свободного пробега τ много меньше времени диффузии скорости $\tau_v = h^2/\nu$, основной вклад определяется локальным распределением Максвелла

$$f_{\text{1.eq}} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^2 \exp\left[-\frac{m(v - u_{\text{lam}})^2}{2kT}\right], \quad v = (v_x, v_y). \quad (14.5)$$

Здесь $u_{\text{lam}}(y)$ - профиль ламинарного течения Пуазейля. Интересен также обратный предельный случай свободномолекулярного течения, когда длина свободного пробега много больше h .

Анализ кинетического уравнения (14.2) существенно более сложен. Наиболее интересные результаты могут быть получены лишь численным путем. Здесь мы ограничимся анализом соответствующего уравнения баланса энтропии.

15. Уравнение баланса энтропии при турбулентном движении

Запишем выражение для локальной энтропии

$$S(r, t) \equiv \frac{\rho(r, t)}{m} s(r, t) = -kn \int \ln(nf(r, v, t)) f(r, v, t) dv. \quad (15.1)$$

Здесь введена энтропия в расчете на одну частицу. Положим, что сила $F(R, t) = 0$. Ограничимся также классом распределений $f(r, |v - u|, t)$. Тогда уравнение баланса энтропии можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\rho u - D \frac{\partial \rho}{\partial r}) s \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left(D \rho \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \sigma(r, t). \quad (15.2)$$

Поток энтропии состоит из суммы конвективного и диффузионного вкладов. Второй пропорционален градиенту энтропии. Это дает возможность ввести общее (кинетическое) определение потока тепла. Производство энтропии определяется выражением

$$\sigma(r, t) = kn \int [D_{(v)} f \left(\frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{f}{f_{\text{1.eq}}} \right)^2 + Df \left(\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{f}{f_0} \right)^2] dv \geq 0. \quad (15.3)$$

Оно состоит из суммы двух положительных вкладов. Первый из них определяется перераспределением частиц по скоростям и пропорционален коэффициенту

диффузии $D_{(i)}$. Второй - определяется перераспределением частиц в пространстве и пропорционален соответствующему коэффициенту диффузии D .

Приведенное уравнение баланса энтропии является (для выделенного класса распределений) общим, то есть справедливым как для ламинарных, так и турбулентных движений. Естественно, что для описания ламинарных течений оно существенно упрощается, так как в качестве решения кинетического уравнения можно использовать локальное распределение Максвелла. В этом приближении в формуле для производства энтропии первый член правой части обращается в нуль, а второй принимает вид

$$\sigma(r,t) = \frac{k}{m} \left[D\rho \left(\frac{\text{grad} \rho}{\rho} \right)^2 + \nu \rho \frac{m}{kT} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} \right)^2 + \frac{3}{2} \rho \chi \left(\frac{\text{grad} T}{T} \right)^2 \right] \geq 0. \quad (15.4)$$

Для несжимаемой жидкости первый и третий члены в правой части обращаются в нуль и производство энтропии определяется, как мы уже знаем, производными скорости. Локальная энтропия при этом постоянна. Это и приводит к отмеченному выше противоречию со вторым законом термодинамики. Каков же выход из этого положения?

При описании ламинарных движений для этого необходимо отказаться от условия несжимаемости, хотя бы частично, как это делается в теории тепловой конвекции в приближении Бусинеска. В этом случае описание проводится на основе системы уравнений для вихревой скорости и температуры. Из второго уравнения видно, что пространственно неоднородное вихревое поле служит источником тепла. Вследствие этого производство энтропии порождает и изменение самой энтропии.

Для турбулентных, а также и далеких от локального равновесия ламинарных течений производство энтропии определяется более общим выражением (15.3). Сама энтропия определяется при этом решением кинетического уравнения. Вклад неравновесных «добавок» в выражении для производства энтропии существенно возрастает по мере развития турбулентности. Соответственно этому возрастают и кинетические коэффициенты вязкости, температуропроводности и самодиффузии. Явные оценки можно провести для двух рассмотренных выше частных случаев развитой пространственно однородной и изотропной турбулентности, а также для стационарного и турбулентного течения в канале. В обоих случаях «турбулентные добавки» при больших числах Рейнольдса становятся доминирующими.

Заключение: что же такое турбулентное движение?

Мы убедились на примере стационарного течения, что переход от ламинарного течения к турбулентному течению - переход к более высокоорганизованному состоянию. Его можно рассматривать как пример неравновесного фазового перехода. При этом понижается симметрия распределения по скоростям - функция распределения (вместо (12.6)) становится несимметричной по относительной скорости. Следствие этого - появление тензора напряжений Рейнольдса, который и играет роль параметра порядка.

Турбулентное движение является существенно неравновесным и характеризуется большим числом макроскопических степеней свободы. Дополнительные степени свободы возникают и при кинетическом описании мелкомасштабного ламинарного течения. При этом, однако, уравнения газовой динамики для функций $\rho(r,t)$, $u(r,t)$, $T(r,t)$ являются замкнутыми.

На основе обобщенного кинетического уравнения для детерминированной функции распределения $f(r,p,t)$ можно дать единое описание ламинарного и турбулентного движения. Как обычно, детерминированное распределение $f(r,p,t)$ является первым моментом более общего случайного (пульсирующего)

распределения $f(r, \rho, t)$. Основываясь на гипотезе Гейнгольда, можно предположить, что оно имеет вид (12.9) и, следовательно, совпадает по форме с обобщенным кинетическим уравнением. Это позволяет на его основе построить кинетическую теорию флуктуаций. Есть основание полагать, что роль этих флуктуаций не будет столь велика, как в традиционной гидродинамической теории турбулентного течения, поскольку дополнительные напряжения турбулентного движения описываются несимметричными по относительной скорости решениями обобщенного кинетического уравнения для детерминированной функции распределения. Тем самым основные особенности турбулентного движения «ухватываются» уже решением уравнения для первого момента пульсирующего распределения.

В последние годы все большее значение приобретают исследования турбулентных движений как в бесстолкновительной плазме (см. библиографический список), так и в более общих плазменно-молекулярных системах (Климонтович, Вильгельмсон, Загородний, Якименко, 1989, 1990). К ним относятся частично ионизованная плазма и другие системы с химическими реакциями, а также нелинейные оптические распределенные и многие медико-биологические системы, короче, самые разнообразные активные среды.

Библиографический список

- Бакай А.С., Сигов Ю.С. Многоликая турбулентность. М.: Знание, 1989.
- Berge P., Pomeau Y., Vidal Ch. L'Order dans le Chaos. Hermann Paris, 1984.
- Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М.: ИЛ, 1955.
- Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press, Oxford, 1961.
- Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применения. М.: Наука, 1981.
- Гречаный О.А. Статистическая теория необратимых процессов. Киев: Наукова думка, 1989.
- Дубинцев Ю.Н., Рышкевичус Б.С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982.
- Ebeling W., Klimontovich Yu.L. Self-Organization and Turbulence in Liquids. Teubner, Leipzig, 1984.
- Жигулев В.Н., Тумин А.М. Возникновение турбулентности. Новосибирск: Наука, 1987.
- Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Троицкий О.В. Турбулентность как неравновесный фазовый переход. ТМФ 92 (1992) 293.
- Haken H. Advanced Synergetics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- Haken H. Information and Self-Organization. Springer, Berlin, Heidelberg, New York., 1988; Moscow: Mir, 1991.
- Кадоццев Б.Б. Коллективные процессы в плазме. М.: Наука, 1976.
- Климонтович Ю.Л. Диссипативные уравнения для многочастичных функций распределения. УФН 139 (1983) 689.
- Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982; Harwood Academic Publishers, New York, 1986.
- Климонтович Ю.Л. Энтропия и производство энтропии при ламинарном и турбулентном течениях. Письма в ЖТФ 10 (1984) 80.
- Климонтович Ю.Л., Энгель-Херберт Х. Осредненные стационарные турбулентные течения Куэтта и Пуазейля в несжимаемой жидкости. ЖТФ 54 (1984) 440.
- Klimontovich Yu.L., Bonitz M. Evolution of the Entropy of Stationary States in Self-Organization Processes in the Control Parameter Space. Z. Phys.B, Condensed Matter. 70 (1988) 241.
- Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

Klimontovich Yu.L. The unified description of kinetic and hydrodynamic processes. *Physics Letters A* 170 (1992) 434.

Klimontovich Yu.L. On the Need for and the Possibility of a Unified Description of Kinetic and Hydrodynamic Processes. *TMF* 92 (1992) 312.

Klimontovich Yu.L. From the Hamiltonian Mechanics to a Continuous Media. Dissipative Structures. Criteria of Self-Organization. *Theor. Mathem. Phys.* 96 № 3 (1993) 1.

Klimontovich Yu.L. Criteria of Self-Organization. *Chaos, Solitons & Fractals* 1994 (in press).

Klimontovich Yu.L. Statistical Theory of Open Systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

Климонтovich Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Москва. Янус, 1995.

Klimontovich Yu.L., Wilhelmsson H., Yakimenko I.P., Zagorodny A.G. *Physics Reports* 175, № 5 & 6 (1989) 265.

Климонтovich Ю.Л., Вильгельмсон Х., Якименко И.П., Загородный А.Г. Статистическая теория плазменно-молекулярных систем. М.: Изд. МГУ, 1990.

Landau L.D., Lifshits E.M. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

Lesieur M. Turbulence in Fluids. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

Мошфат Г. Некоторые направления развития теории турбулентности. Сб. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984.

Монин А.А., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965, 1967; 1992.

Неймарк Ю.С., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987; Kluwer, Dordrecht, 1992.

Новиков Е.А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ (1964) 1919.

Prigogine I., Stengers I. Order out of Chaos. Heinemann, Лондон 1984; М.: Прогресс, 1986.

Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

Ситенко А.Г. Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Киев: Наукова думка, 1977.

Frost U., Moulden T. Турбулентность. М.: Мир, 1980.

Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: М.: Наука, 1969.

Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. М.: Атомиздат, 1971.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 04.10.94

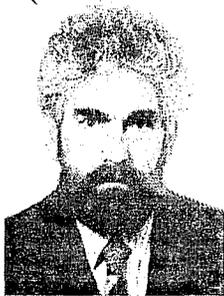
WHAT THE TURBULENCE IS?

Yu.L. Klimontovich

The main aim of this paper is to clear up general properties of the turbulent motion as a physical phenomena. With this it becomes possible to interpret the transition from the laminar flow to the turbulent one as a sequence of non-equilibrium phase transitions which represent a self-organization process. This conclusion is based on the criterion of the «S-Theorem».

Therefore, the transition from the laminar to the turbulent flow in open systems represents the «transition from chaos to order».

In a closed system the backward «transition from order to chaos» is possible as well. For instance, a turbulent motion prepared at an initial moment will degradate to a most chaotic flow. This example show the process of self-organization is possible in open systems only.



Климонтovich Юрий Львович - поступил на физический факультет МГУ осенью 1948 на третий курс. Окончил в 1948 году. Дипломную работу «Влияние взаимодействия молекул на коэффициент радиационного трения» выполнил под руководством профессора В.С. Фурсова. Работа опубликована в ЖЭТФе в 1949. Учеба в аспирантуре под руководством Н.Н. Боголюбова. В 1951 году защитил диссертацию. С 1955 года и по настоящее время доцент, профессор, главный научный сотрудник физического факультета МГУ. С 1994 - заведующий лабораторией «Синергетика».

Основные направления научной деятельности: метод микроскопической фазовой плотности в теории плазмы; кинетическая теория неидеальных газов и плазмы; кинетическая теория неравновесных флуктуаций; кинетическая теория электромагнитных процессов, динамические и флуктуационные процессы в лазерах; критерии самоорганизации для целей технической и медикобиологической диагностики;

единое описание кинетических, гидродинамических и диффузионных процессов в активных открытых системах. Опубликовал более 150 научных работ. В их числе 10 монографий, учебных пособий, изданных на русском и иностранных языках.

Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: изд. МГУ, 1964.

The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma. Oxford. Pergamon Press, 1967.

Лазеры и нелинейная оптика. М.: Просвещение, 1966; Laser und Nichtlineare Optik. Leipzig. Teubner, 1971. Lasery i Optika Nieliniowa. Poland, 1969.

Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. М.: Наука, 1974. Соавторы: С.Г. Зейгер, П.С. Ланда, Е.Г. Ларинцев, Е.Е. Фрадкн.

Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975;

The Kinetic Theory of Non Ideal Gases and Non Ideal Plasmas. Pergamon Press, Oxford. 1982.

Кинетическая теория электромагнитных процессов. М.: Наука, 1980;

The Kinetic Theory of Electromagnetic Processes. Berlin, Heidelberg, New York. Springer, 1983.

Статистическая физика. М.: Наука, 1982; Statistical Physics. Harwood Academic Publishers, New York, 1986.

Self-organization and Turbulence in Liquids. Teubner, 1984. Соавтор W. Ebeling.

Статистическая теория плазменно-молекулярных систем. М.: Изд. МГУ, 1989. Соавторы: Х. Вильгельмсон (Швеция), А.Г. Загородний, И.П. Якименко; Klimontovich Yu. L., Wilhelmsson H., Yakimenko P., Zagorodnii A.G. Statistical Theory of Plasma Molecular Systems. Physics Reports, 175 (5,6) 264, 1989.

Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990. Turbulent Motion and the Structure of Chaos. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 1991.

Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995. The Statistical Theory of Open Systems. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 1995.

Почетная медаль Ростокского университета, Германия. Почетный доктор Ростокского университета, Германия; Макс-Планк-Профессор, Берлин, Германия, 1990; Государственная премия России за 1991 год; Почетная медаль института Синергетики Академии Творчества России; Член Академии Творчества России; Соросовский профессор 1994; Лауреат премии имени Александра Гумбольдта за 1995 год, Германия; Медаль «50 лет Победы в великой отечественной войне», 1995.

В настоящее время на физическом факультете читает курс лекций «Статистическая теория открытых систем». Разрабатывает программы междисциплинарной специализации «Физика открытых систем». Руководит (в составе Оргбюро) семинаром «Синергетика».

ПОСЛЕСЛОВИЕ: Так что же такое турбулентность?

П.С. Ланда

В своей интереснейшей статье Ю.Л. Климонтovich дает понятие турбулентности с точки зрения описания ее свойств. Отмечая большую роль флуктуаций в развитии турбулентности, автор не объясняет, почему эта роль так велика. Ведь флуктуации существуют во всех физических системах, например, в радиотехнических генераторах, однако их роль очень незначительна, вследствие чего при описании поведения генератора их обычно не учитывают. Учет флуктуаций необходим лишь для анализа таких тонких эффектов, как уширение линии. Слабая роль флуктуаций в генераторах объясняется тем, что последние представляют собой автоколебательные системы, слабо чувствительные к любым внешним возмущениям. Чем же турбулентность отличается от процесса возбуждения генераторов? Ответа на этот вопрос Ю.Л. Климонтovich, к

сожалению, не даст. По-видимому, именно отсутствие ответа на этот вопрос является причиной того, что взгляды Ю.Л. Климонтовича на переход к турбулентности как к *более упорядоченному движению* по сравнению с ламинарным встречают резкий протест у большинства специалистов как по теории колебаний и волн, так и по гидродинамике. Действительно, если не учитывать флуктуации, то есть решать задачу в рамках *динамической* модели, то единственным критерием упорядоченности движения является энтропия Колмогорова. Очевидно, что эта энтропия при переходе к турбулентности возрастает, то есть переход к турбулентности означает переход к хаосу. Другой результат получается, если выйти за рамки динамической модели и учесть флуктуации. В этом случае критерием упорядоченности движения всей системы в целом (включая подсистему, являющуюся источником этих флуктуаций) может служить нормированная физическая энтропия Больцмана. Как показано Ю.Л. Климонтовичем, при переходе к турбулентности энтропия Больцмана, нормированная на единицу энергии движения относительно среднего потока, убывает. На основании этого автор делает вывод о большей степени упорядоченности турбулентного движения. Физически этот результат объясняется тем, что по мере развития турбулентности все большая часть энергии хаотического движения молекул превращается в энергию более крупномасштабного и более упорядоченного вихревого движения. Но каков относительный вклад энергии хаотического движения молекул, превращенной в энергию вихревого движения, и нужно ли этот вклад учитывать? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо ответить на вопрос, поставленный ранее.

Итак, чем отличается переход к турбулентности от процесса возбуждения генератора? Согласно принятым в настоящее время представлениям (они обобщены в последней книге А.А. Монина и А.М. Яглома [1]) - принципиально ничем. Эти представления протекают из высказывания Г.С. Горелика, воспроизведенного в воспоминаниях С.М. Рыгова [2], согласно которому «турбулентность с ее границей «самовозбуждения», с характерным гистерезисом ее возникновения и исчезновения при увеличении и уменьшении скорости порождающего потока, с первостепенной ролью нелинейности для ее развитого (стационарного) состояния - это автоколебания. Их специфика заключена в том, что это автоколебания в сплошной среде, то есть в системе с чрезвычайно большим числом степеней свободы». На такой же позиции, по существу, стоял и Л.Д. Ландау¹, предложивший в качестве математической модели возникновения турбулентности укороченное уравнение Ван-дер-Поля [3]. Дальнейшее развитие теории Ландау получила в работах Стюарта [4,5], который предложил способ расчета коэффициентов, входящих в уравнения Ландау, основанный на приближенном решении уравнения Навье - Стокса. Однако, задаваемая Стюартом форма приближенного решения некорректна с физической точки зрения. Действительно, это решение описывает периодическую в пространстве волну с заданным волновым числом k , амплитуда которой медленно изменяется во времени. Строго говоря, такое решение справедливо лишь для кольцевого потока длины $L=2\pi n/k$; где n - целое число.

В 70-х годах в связи с открытием динамического хаоса стал формироваться взгляд на развитие турбулентности как на скачкообразное возникновение в фазовом пространстве некоторых динамических переменных странного аттрактора [6-10]. Так как понятие странного аттрактора относится только к автоколебаниям, то в этих работах молчаливо предполагается, что турбулентность представляет собой именно автоколебания.

Трактуя турбулентность как один из типов автоколебаний, группа М.И. Рабиновича осуществила ряд работ по моделированию процесса развития турбулентности в виде цепочки связанных генераторов [11,12].

Однако такой взгляд на турбулентность не является безупречным. Дело в том, что неустойчивость решений, соответствующих ламинарным течениям в

¹ Термин «автоколебания» в работах Ландау не употребляется.

безграничных средах, является конвективной [13]. Это значит, что в любой точке потока возникшее возмущение не будет неограниченно нарастать во времени (в линейном приближении), а будет сноситься вниз по потоку. В зависимости от граничных условий системы с конвективной неустойчивостью могут вести себя по-разному. Если граничные условия приводят к отражению волн и возникновению глобальной обратной связи, то такие системы могут стать автоколебательными. Если же глобальная обратная связь отсутствует или недостаточна для выполнения условий возбуждения, то такие системы представляют собой лишь усилители возмущений². Возмущения же неизбежно присутствуют во всех реальных системах как за счет внешних причин (так называемые технические флуктуации), так и за счет внутренних (естественные флуктуации). В уравнения, описывающие турбулентность, эти возмущения должны быть включены как внешние случайные силы заданной величины. Расчет этих сил, обусловленных естественными флуктуациями в гидродинамических потоках, выполнен Ю.Л. Климонтовичем.

Таким образом, согласно высказанной точке зрения, учет флуктуаций является принципиальным, так как именно они обуславливают наблюдаемые турбулентные возмущения. Отсюда следует, что подход к исследованию турбулентности в рамках теории динамических систем не всегда является адекватным³. А раз так, то определение степени упорядоченности движения по критерию Ю.Л. Климонтовича является вполне оправданным и, вероятно, единственно корректным. Здесь, правда, возникает вопрос о процедуре вычисления указанной нормированной энтропии на основе экспериментальных данных, представляющих собой, как правило, запись зависимости от времени одной из фазовых координат системы.

Несет ли эта запись информацию о всей системе, включая действующий в ней шум? И поэтому можно ли применять алгоритм расчета энтропии по экспериментальным данным, предложенный Ю.Л. Климонтовичем? Это вызывает большие сомнения. Дело в том, что этот алгоритм, исключая процедуру нормировки, соответствует алгоритму вычисления информационной размерности [15], то есть величины пропорциональной энтропии Шеннона, но в одномерном пространстве. Очевидно, что подобная процедура для расчета истинной информационной размерности аттрактора динамической системы не годится: размерность следует вычислять в пространстве с размерностью не меньшей размерности вложения аттрактора [16, 17]. Как вычислять энтропию Больцмана, исходя из экспериментальных данных в системе с флуктуациями, неясно.

Одним из свидетельств того, что турбулентность не является автоколебаниями в указанном выше смысле слова, а представляет собой только результат усиления возмущений, является численный эксперимент Н.В. Никитина [18] по моделированию турбулентного течения в трубах конечной длины. Исследовалось течение в круглой трубе радиуса R с заданной скоростью во входном сечении и с несколько искусственным условием в выходном сечении, имеющем вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}}{u_0} \right) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

где $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ - вектор скорости течения, u - продольная, v - радиальная, w - азимутальная компоненты скорости, u_0 - средняя по сечению продольная составляющая скорости в выходном сечении трубы. Компоненты скорости во входном сечении трубы задавались в виде

² Этот факт отмечен также в монографии [14].

³ В принципе можно, конечно, записать уравнения движения, включив источники флуктуаций в систему, и тогда полученная система будет динамической и автоколебательной. Однако она будет иметь чрезвычайно большое число степеней свободы, что делает такой подход нецелесообразным и неосуществимым.

$$u = 2u_0(1 - \frac{r^2}{R^2}), \quad v = A(\frac{r}{R})^4 (1 - \frac{r^2}{R^2})^2 \cos\varphi \sin\omega t, \quad w = 0.$$

При $A \neq 0$ и достаточно больших значениях скорости u_0 вниз по потоку развивалась турбулентность. Если же в какой-то момент времени амплитуда периодического возмущения A полагалась равной нулю, то заданное до этого момента возмущение постепенно сносилось вниз по потоку и в конце концов исчезало. Отсюда следует, что рассматриваемое течение, действительно, не является автоколебательной системой, а представляет собой усилитель и преобразователь входного возмущения. Наблюдаемое развитие турбулентности при $A \neq 0$, можно объяснить явлением хаотизации, аналогично хаотизации колебаний нелинейного осциллятора при гармоническом внешнем воздействии.

Косвенным свидетельством того, что турбулентность не является автоколебаниями, по крайней мере в системе с не очень большим числом степеней свободы, а представляет собой только результат усиления шума, являются проведенные нами вычисления корреляционной размерности в струйных течениях. При вычислении размерности развитым нами методом [16, 17] оказалось, что при увеличении размерности пространства вложения не происходит насыщения вычисляемой корреляционной размерности, что говорит либо о том, что размерность очень велика, либо о том, что здесь имеет место усиление шума. Заметим, что расчет размерности по стандартной процедуре, основанной на теореме Такенса [19] и алгоритме Грассбергера [20] приводит к насыщению размерности и дает значение приблизительно равное 3. По-видимому, этот эффект связан с вытягиванием сконструированного по теореме Такенса «аттрактора» вдоль главной диагонали.

Как же быть тогда с теми признаками, на которые указал Горелик и которые, казалось бы, характерны именно для автоколебательных систем? Прежде всего слово «самовозбуждение» следует заменить словами «потеря устойчивости». Далее, гистерезис «ее (турбулентности) возникновения и исчезновения при увеличении и уменьшении скорости порождающего потока» вполне может быть объяснен характером нелинейности коэффициента усиления. Наконец, первостепенная роль нелинейности вполне реальна и для усилителя колебаний, поскольку, во-первых, при достаточно большом коэффициенте усиления нелинейность может существенным образом влиять на спектр сигнала на выходе усилителя, а, во-вторых, комбинация нелинейности и флуктуаций может привести к возникновению «индуцированных аттракторов» (и к флуктуационным переходам между ними). В качестве простого примера возникновения «индуцированного аттрактора» можно привести переход верхнего положения равновесия маятника со случайно колеблющейся осью подвеса из неустойчивого положения в устойчивое⁴. В стационарном состоянии такой маятник будет вести себя как система с двумя аттракторами, между которыми будут происходить флуктуационные переходы. По-видимому, привлечение теории индуцированных фазовых переходов может быть весьма плодотворным при исследовании турбулентности.

Разумеется, все сказанное не относится к так называемым замкнутым течениям, например, течению Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами или сферами [1]. В этих течениях имеется обратная связь, которая приводит к тому, что такая система становится автоколебательной.

Библиографический список

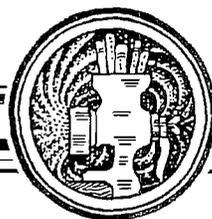
1. Монин А.А., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1992.
2. Рытов С.М. Памяти Г.С. Горелика // УФН. 1957. Т. 62, вып.4. С.485.

⁴ Переходы такого рода часто называют индуцированными фазовыми переходами.

3. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т.7, № 8. С.339.
4. Stuart J.T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows // J.Fluid Mech. 1960. Vol. 9, №3. P. 353.
5. Stuart J.T. Nonlinear stability theory // Ann.Rev.Fluid Mech. 1971. Vol. 3. P. 347.
6. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 20, № 3. P.167.
7. Ruelle D. Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence // Lect. Notes in Phys., Statistical Models and Turbulence. 1975. Vol.12. P. 292.
8. Ruelle D. The Lorenz attractor and the problem of turbulence // Lect. Notes in Math. 1976. № 565. P. 146.
9. Монин А.С. О природе турбулентности. // УФН. 1978. Т. 125, вып.1. С. 97.
10. Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН. 1978. Т. 125. С. 123.
11. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, вып. 12. С. 561.
12. Осипов Г.В. О развитии турбулентности по Ландау в дискретной модели потоковых систем // Сер. Изв. вузов, Радиофизика. 1988. Т. 31, № 5. С. 624.
13. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
14. Артамонов К.И. Термогидроакустическая устойчивость. М.: Машиностроение, 1982. С. 178.
15. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
16. Ланда П.С., Розенблюм М.Г. Сравнение методов конструирования фазового пространства и определения размерности аттрактора по экспериментальным данным // ЖТФ. 1989. Т. 59, № 11. С. 1.
17. Landa P.S., Rosenblum M.G. Time series analysis for system identification and diagnostics. Physica D. 1991. Vol. 48, № 1. P. 232.
18. Никитин Н.В. Численное моделирование пространственного развития турбулентности в каналах // Доклад на школе «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости». Москва, 1994.
19. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lect. Notes in Math. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1981. № 898. P. 366.
20. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. Physica D. 1983. Vol. 9D, № 1. P. 189.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 6.01.95



ВОЗБУЖДЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ДОЗВУКОВЫХ СТРУЙНЫХ И ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

А.С. Гиневский, П.С. Ланда

Дан обзор явлений, происходящих в дозвуковых струйных и отрывных течениях. Рассмотрены как свободные струи, так и струи, взаимодействующие с разного рода препятствиями, например, с плоским экраном, полостью и акустическим резонатором (аэродинамические трубы с открытой рабочей частью). Приводятся данные экспериментов по обтеканию неподвижного цилиндра и цилиндра, совершающего периодические колебания поперек потока. Изложение и осмысление всех результатов производится с точки зрения теории колебаний и волн.

Введение

Струя жидкости или газа представляет собой интереснейший и мало изученный с точки зрения теории волн объект. Течение жидкости в струе почти никогда не бывает ламинарным. В силу неустойчивости Кельвина - Гельмгольца [1] в пограничном слое струи возбуждаются и усиливаются гидродинамические волны, амплитуда которых экспоненциально убывает вне пограничного слоя. Последнее обстоятельство позволяет отнести гидродинамические волны к категории поверхностных волн. Гидродинамические волны могут распространяться только вниз по потоку со скоростью порядка скорости струи. Отличительной особенностью гидродинамических волн является их случайный характер. Однако на фоне этой случайности имеются сравнительно регулярные крупномасштабные образования - вихри, называемые когерентными структурами.

Взаимодействуя с каким-либо препятствием или неоднородностью, гидродинамические волны порождают акустические возмущения, распространяющиеся вверх по потоку. В свою очередь, при встрече с препятствием или неоднородностью акустические возмущения порождают гидродинамические и т.д. Так, при наличии препятствия или неоднородности возникает обратная связь, которая может привести к возбуждению автоколебаний.

Основную роль в образовании когерентных структур играют нелинейные эффекты. Как будет показано ниже, в струйных течениях возникает нелинейная обратная связь, приводящая в некотором диапазоне частот к увеличению коэффициента усиления гидродинамических волн с ростом их амплитуды. Это должно вызывать быстрый рост амплитуды возмущений вниз по потоку.

Весьма интересным проявлением нелинейных эффектов является возможность существенного уменьшения или увеличения коэффициента усиления гидродинамических волн с помощью слабого акустического воздействия на той или иной частоте. Эти эффекты похожи на асинхронное подавление и возбуждение автоколебаний [2], но имеют другую природу.

1. Начальный участок свободной струи

Вытекая из сопла, струя жидкости¹ всегда значительно расширяется (рис.1). Это связано с наличием вязкости, благодаря которой соседние слои жидкости вовлекаются в движение. При этом существенно изменяется профиль средней скорости течения. Если на выходе из сопла профиль средней скорости является близким к прямоугольному, то дальше он становится колоколообразным. Слой жидкости, в котором средняя скорость существенно изменяется, называется пограничным слоем или слоем смещения.

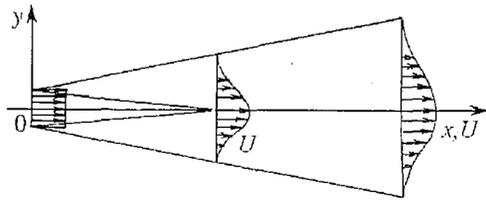


Рис. 1. Схема свободной струи, демонстрирующая деформацию профиля средней скорости и упрочнение пограничного слоя

Интересно, что когерентные структуры, о которых говорилось выше, образуются именно в этом слое. Как видно из рис.1, ширина пограничного слоя по мере удаления от сопла растет приблизительно линейно с расстоянием. На некотором расстоянии от сопла $x=x_{in}$ толщина внутренней части пограничного слоя Δ_1 становится равной половине толщины струи, после чего образуется сплошной пограничный слой. Участок струи при $x \leq x_{in}$ называется начальным участком. Ниже мы будем рассматривать процессы развития турбулентности и когерентных структур именно на этом участке.

Как уже говорилось, ламинарное течение жидкости в струе почти всегда является неустойчивым к малым гидродинамическим возмущениям. Можно показать, что эта неустойчивость является конвективной. Так как в свободных струях возникают акустические гидродинамические волны малой амплитуды не взаимодействуют с акустическими, то глобальная обратная связь в линейном приближении отсутствует, что приводит к тому, что данная система не может быть самовозбуждающейся. Однако из-за сильной неустойчивости она является усилителем с достаточно большим коэффициентом пространственного усиления. Вследствие этого всегда имеющиеся вблизи сопла, из которого вытекает струя, малые возмущения скорости или давления значительно усиливаются и приводят к образованию турбулентности и генерации аэродинамического шума. Если вблизи среза сопла подать акустическое возмущение на некоторой частоте f_s , то в определенном диапазоне частот оно превращается в усиливающуюся гидродинамическую волну. Об этом свидетельствуют эксперименты, проведенные в работах [3,4] и представленные на рис.2, а и б. Из данных эксперимента, представленных на рис. 2, а, следует, что для очень малых ϵ_{us} , для которых усиление можно полагать линейным, коэффициент усиления монотонно растет с увеличением числа Струхала $St_s = f_s D / U_0$, где D - диаметр сопла, U_0 - средняя скорость на оси струи. Этот рост продолжается, по крайней мере, до $St_s = 0.5$. При увеличении ϵ_{us} начинает проявлять себя нелинейное насыщение тем более заметно, чем больше число Струхала. В результате оказывается, что для достаточно больших значений ϵ_{us} величина ϵ_u растет при увеличении числа Струхала от 0.15 до 0.3 и уменьшается при дальнейшем увеличении числа Струхала. Акустическое возмущение на частоте, соответствующей числу Струхала 0.3, является предпочтительным в том смысле, что оно за счет комбинации эффектов линейного усиления и нелинейного насыщения имеет наибольшую амплитуду. Из рис. 2,б видно, что коэффициент усиления гидродинамической волны немонотонно зависит от расстояния от среза сопла, достигая максимума при $x/d = (0.75 \div 1.25) / St_s$.

¹ Мы будем для краткости говорить о струе жидкости, хотя все сказанное будет относиться и к газовой струе.

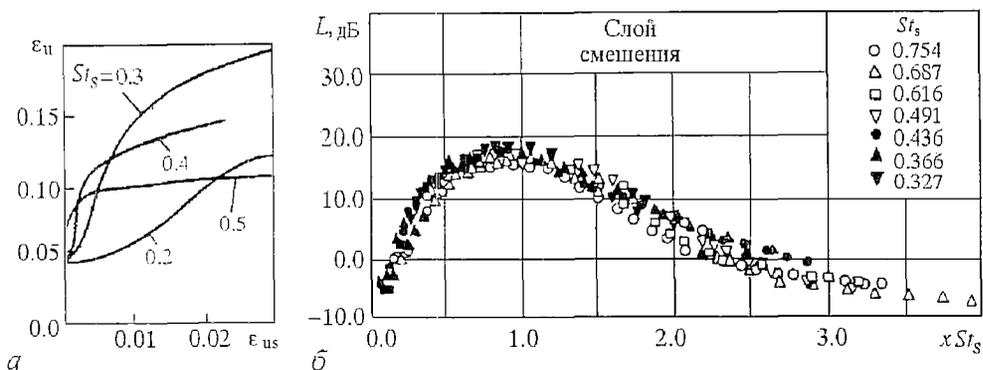


Рис. 2. Зависимость интенсивности пульсаций на оси струи $\epsilon_u = (\langle u'^2 \rangle)^{1/2} / U_0$ от интенсивности акустических пульсаций скорости $\epsilon_{us} = (\langle u_s'^2 \rangle)^{1/2} / U_0$ на срезе сопла [3] при относительном расстоянии от сопла $x/d=4$ (а) и распределение пульсаций давления вдоль середины слоя смешения при продольном акустическом облучении [4] (б). Частота звукового воздействия f_s указана в безразмерных единицах $St_s = f_s d / U_0$, где d - диаметр сопла, U_0 - средняя скорость течения вблизи сопла. Такая безразмерная частота называется числом Струхала

Вследствие того, что струя, по-видимому, не является автоколебательной системой с небольшим числом степеней свободы, для количественного описания происходящих в ней хаотических процессов нельзя использовать известные из нелинейной динамики характеристики, пригодные для маломерных систем, например, различного рода размерности [5]. В этом случае, по-видимому, наиболее адекватным является предложенное Ю.Л. Климонтовичем [6] использование энтропии Больцмана, нормированной на единицу энергии. Алгоритм расчета этой энтропии по экспериментальным данным описан в [6]². Нормированная энтропия показывает относительную степень упорядоченности движения, изменяющуюся при изменении какого-либо параметра, например, расстояния от сопла для струи.

Для расчета энтропии по алгоритму Ю.Л. Климонтовича [7]³ были использованы данные, полученные в результате экспериментов, проведенных под руководством Е.В. Власова и А.С. Гиневского. Для дальнейшей обработки осциллограммы пульсаций скорости были оцифрованы таким образом, чтобы каждый «период» пульсаций описывался не менее чем 10 дискретными значениями. Длина реализаций для каждого значения x составляла не менее 10^4 периодов. Вычисленные М.Г. Розенблюмом на основе подобных реализаций значения нормированной энтропии S на оси струи в зависимости от относительного расстояния от кромки сопла показаны на рис. 3. Оказалось, что при удалении от сопла нормированная энтропия в пределах начального участка уменьшается, что свидетельствует об усилении степени упорядоченности движения.

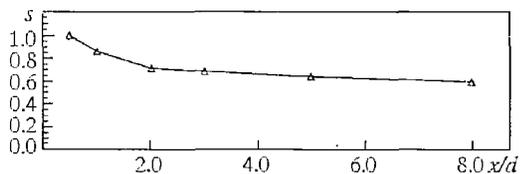


Рис. 3. Зависимость нормированной энтропии S на оси струи от относительного расстояния от кромки сопла x/d

В заключение заметим, что, кроме расчета энтропии, на основе полученных реализаций пульсаций скорости была предпринята также попытка вычислить корреляционную размерность аттрактора в сконструированном по алгоритму Такенса [5] фазовом пространстве. При использовании стандартной процедуры было получено конечное значение размерности, примерно равное 3 и слабо

² Вопрос справедливости этого алгоритма обсуждается в послесловии П.С. Ланды к статье Ю.Л. Климонтовича «Что же такое турбулентность?».

³ Другого алгоритма мы пока не знаем.

зависящее от расстояния до сопла. Однако, применив метод конструирования фазового пространства на основе хорошо приспособленного базиса [8] и произведя изменение масштабов по отдельным осям этого базиса так, чтобы проекции аттрактора на все оси имели примерно одинаковую величину, было получено, что вычисляемая размерность монотонно растет с ростом размерности пространства вложения. Это свидетельствует о том, что размерность является, по крайней мере, достаточно большой. Последнее косвенно подтверждает высказанную выше гипотезу о том, что возникающая в струе турбулентность не является автоколебаниями, а представляет собой результат усиления флуктуаций⁴. В случае справедливости этой гипотезы размерность должна быть практически бесконечной.

Возникновение когерентных структур - сгустков завихренности - обусловлено, как уже говорилось, неустойчивостью Кельвина - Гельмгольца, но их формирование связано с нелинейными процессами. Так как линейная часть коэффициента усиления в свободных струях достаточно велика, то нелинейные эффекты должны играть очень существенную роль. На нелинейной стадии развития возмущений в слое смещения происходит ряд последовательных парных слияний крупномасштабных вихревых структур. После каждого слияния расстояние между вихрями увеличивается вдвое и приблизительно вдвое утолщается слой смещения начального участка струи.

Несмотря на общепринятые представления о решающей роли нелинейности для объяснения процессов турбулентного смещения в свободных струях существует ряд работ, в которых эта задача рассматривалась, исходя из линейных уравнений Эйлера. Обзор этих работ дан в [9]. В указанных работах задавался профиль средней скорости с конечной толщиной пограничного слоя. В работе [10] численно было получено, что частота в спектре пульсаций скорости, соответствующая максимальному коэффициенту пространственного усиления, уменьшается при увеличении толщины пограничного слоя. В результате оказалось, что число Струхала, соответствующее максимуму в спектре пульсаций вблизи среза сопла и определенное по толщине потери импульса θ , равно $St_\theta = f_0 \theta_0 / U_0 = 0.017$, где индекс «0» соответствует параметрам течения в начальном сечении струи, f_0 - частота, соответствующая максимуму спектра, U_0 - средняя скорость истечения. В конце начального участка струи, где смыкаются пограничные слои, в качестве характерного размера принимают диаметр сопла d (для круглой струи) и число Струхала определяют по этому параметру. При этом согласно [10] в конце начального участка оно оказывается равным $St_d = f_m d / U_0 = (0.2 \div 0.4)$, где f_m - частота, соответствующая максимуму спектра пульсаций скорости. Исходя из крайних значений St_θ и St_d в начале и конце начального участка и полагая $d/\theta_0 \approx 200$, получаем, что частота f уменьшается в $8.5 \div 17$ раз. Эти данные полностью соответствуют результатам многочисленных экспериментов. Так как в пределах начального участка круглой струи в зависимости от начальных условий истечения наблюдается 3 - 4 парных слияний кольцевых вихрей [11], то из указанного уменьшения частоты большинство исследователей делает вывод, что причиной этого уменьшения является как раз слияние вихрей, при котором частота их следования уменьшается вдвое [12]. Заметим, правда, что этот вывод противоречит результатам экспериментов, согласно которым в обычных условиях уменьшение частоты происходит не скачкообразно, а плавно (рис. 4 [13]). Для устранения этого противоречия авторы работ, придерживающиеся указанной точки зрения, говорят о статистическом разбросе мест спаривания [12], или об их «пространственном дрожании» [14]. Однако объяснения причин этого разброса или «дрожания» в цитированных работах не дается.

⁴ Ланда П.С. Гипотеза о флуктуационном происхождении турбулентности в параллельных незамкнутых течениях // Академия естественных наук: Ассоциация авторов научных открытий. Москва, 1994, № 1 А-008.

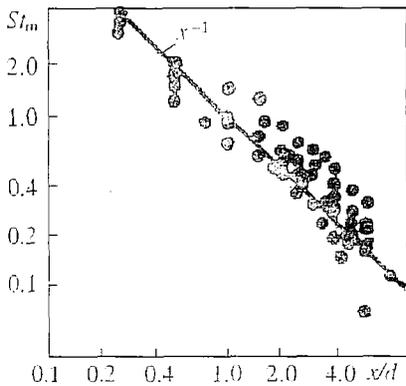


Рис. 4. Зависимость числа Струхала St_m , соответствующего максимуму спектра возмущений, от относительного расстояния от сопла x/d [13]

низкочастотными пульсациями скорости, частота которых соответствует $St_d = (0.2 \pm 0.4)$ [11]. Из-за этой акустической волны возникает нелинейная обратная связь. Из физических соображений можно заключить, что обратное влияние крупных вихрей на слой смешения вблизи среза сопла должно иметь резонансный характер и наиболее сильно проявляться для длин гидродинамических волн $\lambda_{hi} = u_h / f_i$ (где f_i - некоторая частота в месте i -го спаривания, u_h - скорость гидродинамической волны), удовлетворяющих условию [11,14-16]

$$x_i / \lambda_{hi} + x_i / \lambda_{ai} = N, \quad (1.1)$$

где x_i - продольная координата i -го спаривания, $\lambda_{ai} = a / f_i$ - длина акустической волны, распространяющейся от места i -го спаривания вихрей навстречу потоку со скоростью a , N - целое число. Условие (1.1) эквивалентно следующему условию:

$$\frac{x_i}{d} St_i = \frac{N}{1 + M_0 u_h / U_0} \frac{u_h}{U_0}, \quad (1.2)$$

где $M_0 = U_0 / a$ - число Маха, $St_i = f_i d / U_0$. При малых числах Маха ($M_0 \ll 1$), $u_h / U_0 \approx 0.6$ и $N = 2$ значения St_i в точках $x = x_i$ удовлетворительно ложатся на экспериментальную зависимость $St_m(x/d)$, представленную на рис. 4.

Наличие указанной нелинейной обратной связи в принципе может привести к жесткому возбуждению автоколебаний. Этот вопрос требует специального исследования. В любом случае в сечении струи с координатой x_i коэффициент усиления колебаний с частотой f_i должен быть существенно больше, чем для других частот, что, в свою очередь, должно привести к существенному увеличению амплитуды возмущений на этой частоте в рассматриваемом сечении. Можно предположить, что это увеличение амплитуды как раз и проявляется в эксперименте как явление спаривания вихрей. Согласно такому предположению именно уменьшение частоты, соответствующей максимуму в спектре пульсаций, является причиной наблюдаемого спаривания вихрей в тех сечениях струи, где выполняется условие (1.2), а не наоборот, как это принято многими исследователями (см. выше). Тот факт, что экспериментальная зависимость $St_d(x/d)$ является плавной, а не ступенчатой, подтверждает сделанное предположение.

Самое чувствительное место струи к внешним периодическим, в частности, к акустическим воздействиям - это тонкий слой смешения в непосредственной близости от сопла. Именно на кромке сопла, как и на любом другом препятствии, акустические возмущения преобразуются в вихревые, которые далее усиливаются и взаимодействуют с усиленными гидродинамическими

Обратимся теперь к анализу взаимодействия крупномасштабных когерентных структур в пределах начального участка круглой струи. Отметим, прежде всего, что крупные вихри, образующиеся в результате серии спариваний ближе к концу начального участка струи, обладают повышенной циркуляцией и индуцируют низкочастотные пульсации скорости и давления в слое смешения, благодаря акустической волне, распространяющейся вверх по потоку. Это подтверждается экспериментом, согласно которому вблизи среза сопла высокочастотные пульсации скорости в слое смешения, частота которых соответствует St_θ , модулируются

флуктуациями. При этом сравнительно слабое акустическое воздействие вследствие большого коэффициента усиления оказывает существенное влияние на когерентные структуры, их развитие, спаривание и разрушение. В зависимости от частоты и уровня акустического воздействия происходит либо усиление когерентных структур, сопровождающееся увеличением турбулентных возмущений при $St_s = f_s d / U_0 = (0.3 \div 0.5)$, либо их ослабление при $St_s = (2.0 \div 5.0)$. Оба эффекта имеют место при превышении амплитудой звуковой волны некоторого порогового значения. При низкочастотном воздействии увеличение амплитуды приводит к усилению эффекта, а затем к насыщению, когда дальнейшее увеличение уровня воздействия не влияет на его результат. При высокочастотном воздействии после достижения порогового уровня эффект постепенно усиливается, достигает максимума, а затем с дальнейшим ростом интенсивности результат воздействия меняется на обратный, то есть вместо ослабления вихреобразования происходит его интенсификация [12]. Эти эффекты являются существенно нелинейными, вследствие чего для их анализа требуется решение нелинейной задачи усиления турбулентных возмущений. Тем не менее, исходя из общих позиций теории колебаний, можно высказать некоторые качественные соображения. Низкочастотное воздействие является резонансным для турбулентных возмущений с числом Струхала, близким к St_m , которое соответствует максимуму спектра в конце начального участка. Поэтому оно существенно усиливает эти возмущения. Так как нелинейный коэффициент усиления должен иметь насыщение, то увеличение амплитуды такого воздействия выше некоторого значения не должно существенно изменять поведение системы. Высокочастотное воздействие является асинхронным и может, в зависимости от своей величины, как уменьшать, так и увеличивать коэффициент пространственного усиления возмущений. Если коэффициент усиления в зависимости от амплитуды асинхронного воздействия B изменяется как $k = -k_0(1 - \alpha B^2 + \beta B^4)$, то описанные выше экспериментальные результаты вытекают отсюда с очевидностью. Отметим, что при наличии акустического воздействия вблизи среза сопла характер зависимости числа Струхала, соответствующего максимуму спектра возмущений, от расстояния от сопла существенно изменяется. Вместо плавного он становится ступенчатым с явно выраженными явлениями гистерезиса (рис.5). В местах ступенек число Струхала уменьшается вдвое. Приверженцы той точки зрения, что причиной уменьшения частоты максимума спектра возмущений при увеличении расстояния от сопла является спаривание вихрей, говорят о «локализации» мест спаривания при акустическом облучении [12]. При этом опять же никак не объясняются причины локализации и даже не комментируются гистерезисные явления. Вместе с тем можно предложить другое, достаточно простое, объяснение наблюдаемой зависимости. В связи с тем, что каждое сечение струи представляет собой как бы резонатор с монотонно уменьшающейся при увеличении расстояния от сопла собственной частотой, то возможны последовательные перескоки к субгармоническим резонансам все более высокого порядка. Очевидно, что эти перескоки будут сопровождаться гистерезисом, если в некоторой области

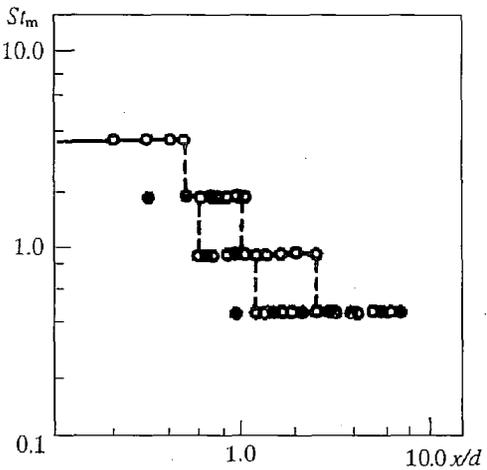


Рис. 5. Зависимость числа Струхала, соответствующего максимуму спектра возмущений, от относительного расстояния от сопла x/d на оси струи (темные кружочки) и в слое смешения (светлые кружочки) при акустическом воздействии на частоте, соответствующей числу Струхала $St_s = 3.54$, $Re = 5 \cdot 10^4$ [17]

x устойчивыми являются два субгармонических режима разных порядков. При переходе к субгармоническому резонансу более высокого порядка частота колебаний должна уменьшаться вдвое, и это естественно может проявляться как спаривание вихрей. Таким образом, и в этом случае можно предположить, что наблюдающееся экспериментально спаривание вихрей является следствием, а не причиной имеющей место деформации спектра возмущений.

Даже линейная теория устойчивости слоя смещения струн, исходящая из уравнений Эйлера, но учитывающая зависимость средней скорости от координат, является весьма сложной. Ниже мы приведем возможное аналитическое решение задачи о неустойчивости слоя смещения струн в линейном приближении. Ради простоты ограничимся рассмотрением плоского случая. Будем считать, что плотность ρ_0 и давление жидкости p_0 в стационарном состоянии не зависят от поперечных координат. Профиль продольной составляющей средней скорости U в пределах начального участка струн зададим в виде

$$U = \frac{U_0}{2} \left(1 - \operatorname{th} \left(q \frac{|y| - h}{\Delta} - r \right) \right), \quad (1.3)$$

где y - поперечная координата, h - половина расстояния между кромками сопла, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ - толщина пограничного слоя, зависящая от продольной координаты x и определяемая из условия, что при изменении координаты y на величину Δ скорость U изменяется от значения $0.95U_0$ до $0.05U_0$, Δ_1 - толщина части пограничного слоя, расположенной при $|y| \leq h$, Δ_2 - толщина части пограничного слоя, расположенной при $|y| \geq h$, q и r - некоторые параметры. Значения этих параметров и соотношение между значениями Δ_1 и Δ_2 могут быть определены из следующих соображений. Как следует из закона сохранения импульса, средняя скорость течения должна удовлетворять условию постоянства соответствующей составляющей тензора потока импульса при изменении продольной координаты x . Если считать, что на выходе из сопла профиль средней скорости является равномерным ($\Delta=0$), то это условие принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy = \text{Const} = 2U_0^2 h. \quad (1.4)$$

Отсюда получаем уравнение, связывающее параметры q и r

$$\ln \operatorname{ch} \left(q \frac{h}{\Delta} + r \right) - q \frac{h}{\Delta} + r + \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{th} \left(q \frac{h}{\Delta} + r \right) = 0. \quad (1.5)$$

Другие два уравнения находятся из данного выше определения толщины пограничного слоя. Полагая $U = 0.95U_0$ при $y = h - \Delta_1$ и $U = 0.05U_0$ при $y = h + \Delta_2$, получаем

$$1.9 = 1 + \operatorname{th} \left(q \frac{\Delta_1}{\Delta} + r \right), \quad 0.1 = 1 - \operatorname{th} \left(q \frac{\Delta_2}{\Delta} - r \right). \quad (1.6)$$

Из (1.6) находим, что $q\Delta_1/\Delta \approx 1.5 - r$, $q\Delta_2/\Delta \approx 1.5 + r$, то есть $q \approx 3$. В области начального участка $\Delta_1 \leq h$, то есть $\Delta \leq 3h/(1.5 - r)$. Уравнение (1.5) может быть приближенно решено аналитически при $qh/\Delta + r \gg 1$. В этом случае находим $r \approx 1/2$. В конце начального участка, когда $qh/\Delta = 1.5 - r$, из (1.5) находим $r \approx 0.4507$. Таким образом, в пределах начального участка величина r близка к $1/2$, а отношение Δ_2/Δ_1 близко к 2 (в пределах начального участка это отношение слабо уменьшается от 2 до 1.859). Как уже говорилось, толщина пограничного слоя в турбулентной струе в пределах начального участка растет приблизительно пропорционально рас-

стоянию от сопла (см., например, [18]), то есть $\Delta = bx$, где b - некоторый коэффициент пропорциональности, незначительно уменьшающийся с ростом числа Маха. Параметр b связан с длиной начального участка x_{in} соотношением $bx_{in} \approx 2.859h$. Из сказанного следует, что в конце начального участка скорость на оси струи равна $0.95U_0$. Множитель 0.95 обусловлен принятым определением толщины пограничного слоя. При $x > x_{in}$ средняя скорость на оси струи уменьшается более существенно. Можно считать, что в этом случае скорость U также можно определить выражением (1.3), где $\Delta = bx$, но величина Δ уже не будет иметь смысл толщины пограничного слоя.

Из уравнения непрерывности вытекает, что вследствие зависимости U от x должна быть отлична от нуля и поперечная составляющая средней скорости V . Пренебрегая зависимостью параметра r от координаты x и полагая $V(x,0) = 0$, получаем для V следующее выражение:

$$V = -\frac{bU_0}{6} \operatorname{sign} y \left\{ \left[3 \frac{|y| - h}{\Delta} - r \right] \operatorname{th} \left(3 \frac{|y| - h}{\Delta} - r \right) - \left(3 \frac{h}{\Delta} + r \right) \operatorname{th} \left(3 \frac{h}{\Delta} + r \right) - \ln \frac{\operatorname{ch} [3(|y| - h)/\Delta - r]}{\operatorname{ch} (3h/\Delta + r)} \right\}. \quad (1.7)$$

Зависимости продольной и поперечной составляющих средней скорости, определяемые формулами (1.3) и (1.7), показаны на рис. 6.

Для описания интересующих нас процессов воспользуемся линейризованными уравнениями гидродинамики невязкой жидкости. С учетом сжимаемости жидкости, которую необходимо учесть, если мы хотим дальше рассмотреть взаимодействие гидродинамических и акустических волн, и в предположении, что все процессы в струе и вокруг нее являются адиабатическими, исходные уравнения имеют вид

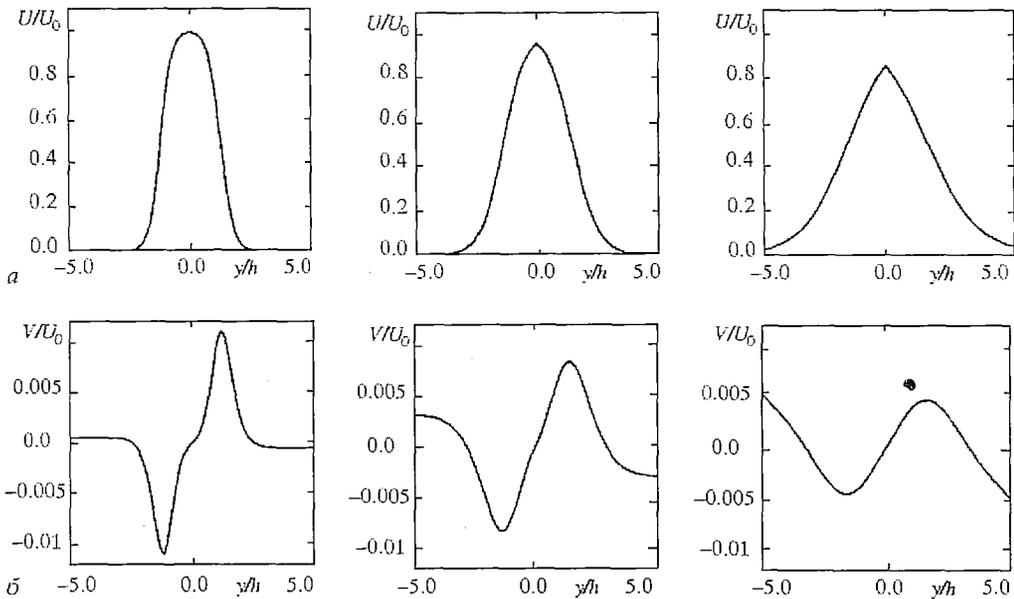


Рис. 6. Профили продольной (а) и поперечной (б) составляющих средней скорости в трех сечениях струи: в середине начального участка; в конце начального участка; на расстоянии от сопла, равном удвоенной длине начального участка

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + u \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial U}{\partial x} &= - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x} + V \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_0 a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где u и v - отклонения скорости жидкости от средних значений, p - возмущение давления, $a = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ - скорость звука, γ - показатель адиабаты.

Пусть на выходе из сопла задано некоторое гармоническое возмущение на частоте ω . Тогда можно считать, что все переменные, определяемые уравнениями (1.8), пропорциональны $\exp(i\omega t)$. Полагая в (1.8)

$$u = A \exp[i(\omega t - \varphi)], \quad v = B \exp[i(\omega t - \psi)], \quad p/\rho_0 = C \exp[i(\omega t - \chi)],$$

мы можем получить уравнения для переменных A , B , C , φ , ψ и χ . Полагая ω комплексной величиной ($\omega = \omega_r - i\omega_i$), имеем

$$\begin{aligned}
V \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial(UA)}{\partial x} + \omega_r A + \frac{\partial U}{\partial y} B \cos(\varphi - \psi) + \frac{\partial C}{\partial x} \cos(\varphi - \chi) + C \frac{\partial \chi}{\partial x} \sin(\varphi - \chi) &= 0, \\
VA \frac{\partial \varphi}{\partial y} + UA \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \omega_r A - \frac{\partial U}{\partial y} B \sin(\varphi - \psi) - \frac{\partial C}{\partial x} \sin(\varphi - \chi) + C \frac{\partial \chi}{\partial x} \cos(\varphi - \chi) &= 0, \\
\frac{\partial V}{\partial x} A \cos(\varphi - \psi) + V \frac{\partial B}{\partial y} + U \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} B + \omega_r B + \frac{\partial C}{\partial y} \cos(\psi - \chi) + C \frac{\partial \chi}{\partial y} \sin(\psi - \chi) &= 0, \\
\frac{\partial V}{\partial x} A \sin(\varphi - \psi) + VB \frac{\partial \psi}{\partial y} + UB \frac{\partial \psi}{\partial x} - \omega_r B - \frac{\partial C}{\partial y} \sin(\psi - \chi) + C \frac{\partial \chi}{\partial y} \cos(\psi - \chi) &= 0, \\
a^2 \left[\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \cos(\varphi - \psi) + B \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin(\varphi - \psi) \right] + [\omega_r C + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y}] \cos(\varphi - \chi) - \\
- C \left[\omega_r - U \frac{\partial \chi}{\partial x} \right] \sin(\varphi - \chi) &= 0, \\
a^2 \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \sin(\varphi - \psi) + B \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(\varphi - \psi) \right] - [\omega_r C + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y}] \sin(\varphi - \chi) - \\
- C \left[\omega_r - U \frac{\partial \chi}{\partial x} \right] \cos(\varphi - \chi) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Заменяя в этих уравнениях производные по x конечными разностями с учетом заданного возмущения при $x=0$, мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих производные по y . Эти уравнения должны быть решены при условиях

$$A(x, \pm\infty) = B(x, \pm\infty) = C(x, \pm\infty) = 0.$$

Найденное решение позволит для каждого значения частоты ω определить как

длину гидродинамической волны, так и ее коэффициент усиления при любом значении u .

Чтобы найти акустическую волну, нужно задать возмущение при некотором значении $x=x_0$ и решать уравнения (1.9) в обратном направлении по x .

2. Возбуждение автоколебаний при натекании струи на экран

При нормальном натекании струи жидкости или газа на плоский экран (рис.7) вблизи него происходит поворот потока на 90° и образуется так называемая пристенная струя. При достаточно малых расстояниях от среза сопла до экрана ($x_0/d \leq 8$) имеющиеся в слое смешения струи вихри в результате соударения с экраном генерируют звуковую волну, распространяющуюся навстречу потоку. Эта волна, попадая на кромку сопла, в свою очередь, способствует образованию вихрей. Так осуществляется обратная связь, которая при достаточно больших дозвуковых скоростях истечения, когда число Маха $M_0 > 0.6$, приводит к возбуждению мощных автоколебаний. Частота этих автоколебаний зависит от расстояния до экрана, но заключена в определенном диапазоне, примыкающем к частоте, которая соответствует максимуму спектра пульсаций скорости в конце начального

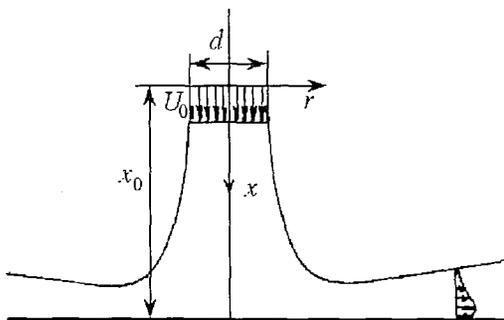


Рис. 7. Натекание струи на экран

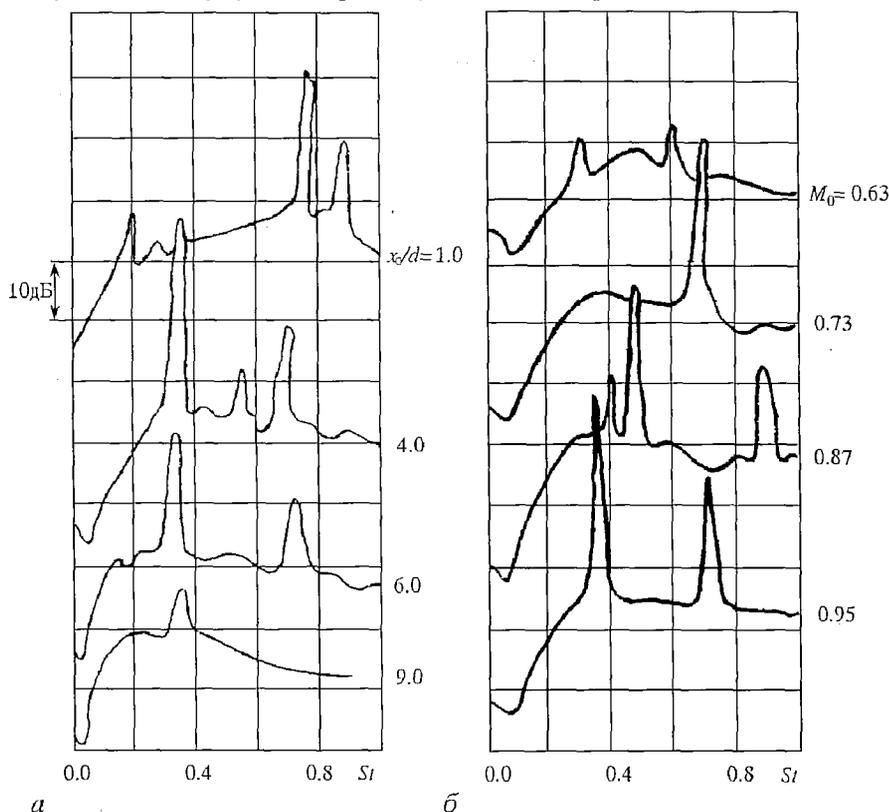


Рис. 8. Экспериментальные спектры шума в дальнем поле круглой струи, ударяющейся об экран, при $M_0 = 0.95$ и различных значениях x/d (а) и при $x/d=4$ и различных значениях M_0 (б), $St = fd/U_0$

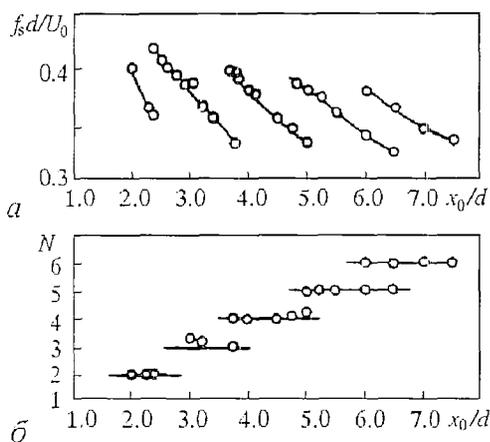


Рис. 9. Характерные частоты автоколебаний f_s (а) и значения N (б), определяемые формулой (1.1), для круглой струи при $M_0=0.9$

волной, удовлетворяет соотношению $p_s \sim M_0 q$, где $q = \rho_0 U_0^2 / 2$ - динамическое давление.

Автоколебательный режим характеризуется пронзительным шумом в дальнем поле струи (на частоте крупномасштабных когерентных структур) и ростом динамических нагрузок на экран. На рис. 8 представлены экспериментальные спектры шума в дальнем поле струи, ударяющей об экран⁵ [16]. Из рисунка видно, что в спектрах шума имеются дискретные составляющие, обусловленные возбуждением автоколебаний. Подобный вид имеют спектры пристеночных пульсаций давления вблизи экрана.

На рис. 9 представлены результаты измерения характерных частот автоколебаний и значений N , определяемых формулой (1.1), для $M_0=0.9$ и изменении x_0/d от 2 до 7.5 [19]. Мы видим, что при изменении расстояния наблюдаются перескоки с одной моды на другую, причем имеет место гистерезис.

Аналогичные эффекты наблюдаются при натекании плоской струи на клин, а также круглой струи на соосное кольцо или соосную трубку [22].

Поскольку возбуждение автоколебаний в случае импульсной струи имеет место вследствие взаимодействия между гидродинамическими и акустическими волнами, для расчета этого явления мы должны записать два граничных условия (на экране и на кромке сопла), которые будут определять преобразование волн одного типа в волны другого типа. Строгий вывод этих граничных условий представляет собой весьма трудную задачу. Мы будем полагать, что суммарный импульс, сообщаемый гидродинамической волной экрану в единицу времени, частично преобразуется в импульс, полученный от экрана акустической волной в единицу времени. Мы можем записать это условие в виде

$$R_1 M_0 u_h(x_0, t) + u_a(x_0, t) = 0,$$

где u_h - компонента скорости частиц в гидродинамической волне вдоль оси x , усредненная по поперечному сечению струи; u_a - аналогичная компонента скорости частиц в акустической волне; R_1 - коэффициент преобразования гидродинамической волны в акустическую на экране.

Аналогично, граничное условие на кромке сопла может быть записано в виде

$$u_h(0, t) + R_2 u_a(0, t) = 0,$$

участка свободной струи [16,19-21]. Для определения зависимости частоты автоколебаний от расстояния до экрана x_0 авторы многих работ (см., например, [19]) используют условие, аналогичное (1.1), в котором вместо координаты x ; следует подставить x_0 .

Для объяснения того факта, что при малых дозвуковых скоростях ($M_0 < 0.6$) автоколебания не возникают, несмотря на наличие обратной связи через акустическую волну, обычно предполагается, что интенсивность акустической волны оказывается недостаточной, чтобы возбудить слой смещения у корня струи. Согласно оценке, проведенной в [21], амплитуда пульсаций давления p_s у корня струи, вызванных прошедшей акустической

⁵ Также струи принято называть импульсными от английского слова impact - удар.

где R_2 - коэффициент преобразования акустической волны в гидродинамическую на кромке сопла. Заметим, что коэффициенты R_1 и R_2 могут быть комплексными и зависящими от частоты.

Задавая в этих условиях $u_h(x,t) = U_h(x)\exp(i\omega t)$, $u_a(x,t) = U_a(x)\exp(i\omega t)$, мы перепишем их в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_1 M_0 U_h(x_0) + U_a(x_0) &= 0, \\ U_h(0) + R_2 U_a(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Чтобы избежать решения сложной проблемы усиления гидродинамической волны в свободной струе, мы ограничимся феноменологическим выражением для коэффициента усиления гидродинамической волны и запишем $U_h(x)$ в виде

$$U_h(x_0) = K(St, x_0) \exp\left(-\frac{i\omega x_0}{V}\right) U_h(0), \quad (2.2)$$

где $St = \omega_r d / 2\pi U_0$ - число Струхала, ω_r - реальная часть комплексной частоты ω , $V \approx 0.6 U_0$ - фазовая скорость гидродинамической волны, $K(St, x)$ - некоторая функция числа Струхала и расстояния x . Для акустической волны можно записать

$$U_a(x_0) = \exp\left(-\frac{i\omega x_0}{a}\right) U_a(0). \quad (2.3)$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), мы получим линейную систему однородных уравнений относительно $U_h(0)$ и $U_a(0)$. Приравняв нулю детерминант этой системы, получим характеристическое уравнение:

$$R_1 R_2 M_0 K(St, x_0) = \exp\left[i\omega x_0 \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{a}\right)\right]. \quad (2.4)$$

Решение этого комплексного уравнения имеет вид

$$\omega_r = \omega_N = \frac{2\pi N}{x_0} \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{a}\right)^{-1} \quad (2.5)$$

$$\delta_N = \frac{1}{x_0} \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{a}\right)^{-1} \ln[R_1 R_2 M_0 K(St_N, x_0)], \quad (2.6)$$

где $St_N = \omega_N d / 2\pi U_0$, N - целое число. Мы видим, что соотношение (2.5) совпадает с эмпирическим соотношением (1.1). Из (2.6) следует, что возбуждение автоколебаний возможно, если

$$R_1 R_2 M_0 K(St_N, x_0) > 1. \quad (2.7)$$

Это условие определяет диапазон параметров M_0 и x_0 , в котором возможны автоколебания.

Поскольку, как указано выше, значение $K(St, x_0)$ имеет максимум при $St = St_m(x_0)$, число N должно увеличиваться при увеличении x_0 , так чтобы частота ω_N оставалась примерно постоянной. Это также подтверждается экспериментальными данными.

Из полученных результатов следует, что частота автоколебаний и условие их возбуждения слабо зависят от модели свободной струи. В частности, результаты решения задачи для простейшей модели струи с нулевой толщиной пограничного слоя изложены в работе [23]. Они дают удовлетворительное согласие с экспериментом.

3. Автоколебания в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью

В аэродинамических трубах замкнутого типа с открытой рабочей частью (рис. 10, а) в определенном диапазоне скоростей потока возникают автоколебания, приводящие к существенному возрастанию продольных низкочастотных пульсаций

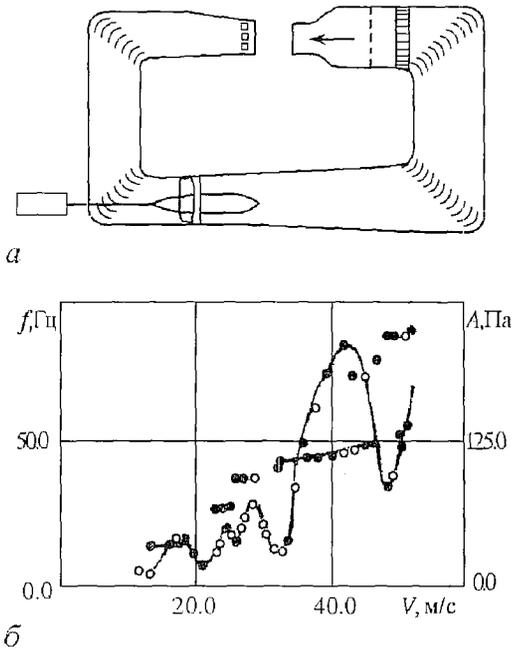


Рис. 10. Схема трубы с открытой рабочей частью (а) и изменения частоты f (черные кружочки) и амплитуды A (светлые кружочки) автоколебаний в трубе в зависимости от скорости струи V (б) [26]

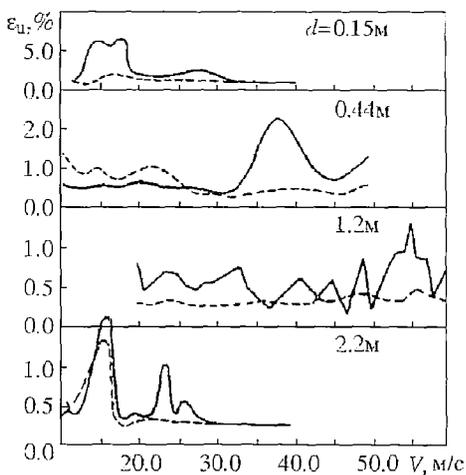


Рис. 11. Зависимости интенсивности пульсаций скорости в рабочей части четырех аэродинамических труб от скорости потока без какого-либо воздействия (сплошные кривые) и при высокочастотном акустическом воздействии (штриховые кривые), $St_s = (2.0 \div 5.0)$ (штриховые кривые)

скорости в рабочей части и пульсаций давления во всем тракте трубы. Еще в пионерских работах, выполненных под руководством С.П. Стрелкова [24-26] было показано, что возбуждение указанных автоколебаний обусловлено обратной связью через звуковую волну, распространяющуюся по обратному каналу, для которой последний является акустическим резонатором. На рис. 10,б [26] показаны изменения частоты и амплитуды автоколебаний в трубе (пульсаций давления в слое смешения) в зависимости от скорости струи.

В настоящее время установлено, что в трубе имеется не один, а два канала обратной связи: через обратный канал вдоль потока и через рабочую часть навстречу потоку. Последнее обусловлено тем, что при попадании струи на диффузор возникает акустическая волна, распространяющаяся против потока. Здесь имеется полная аналогия с натеканием круглой струи на соосно расположенную трубку (см. раздел 2).

Последовательный расчет условий возбуждения автоколебаний в трубе с учетом обоих каналов обратной связи может быть выполнен аналогично тому, как это было описано в разделе 2.

Наиболее распространенные способы подавления автоколебаний в трубах сводятся либо к ослаблению вихреобразования в слое смешения свободной струи, либо к ослаблению воздействия вихрей на возбуждение звука в обратном канале. Первое достигается сообщением пограничному слою в начальном сечении струи азимутальной неоднородности, что в конечном счете ослабляет или разрушает кольцевые вихри; второе - с помощью отверстий в стенках диффузора вблизи его входной кромки [42].

Следует также упомянуть акустические методы управления автоколебаниями в аэродинамических трубах [27-30], основанные на воздействии акустических колебаний на образование когерентных структур в слое смешения

(см. раздел 1). В качестве иллюстрации эффективности этих методов на рис. 11 показаны зависимости интенсивности пульсаций скорости в рабочей части четырех аэродинамических труб от скорости потока без какого-либо воздействия и при высокочастотном акустическом облучении.

4. Отрывное обтекание полости

При обтекании полости на плоской поверхности, как и в рассмотренных ранее случаях, при определенных условиях возникают автоколебания. Причина их возбуждения состоит в возникновении акустической волны в результате удара вихрей о заднюю кромку полости.

Это иллюстрируется сравнением характера пульсаций скорости в слое смещения для двух случаев обтекания: обтекания обращенного назад уступа и полости прямоугольного сечения (рис. 12). Во втором случае в спектре пульсаций наблюдаются ярко выраженные дискретные составляющие, что обусловлено возбуждением автоколебаний.

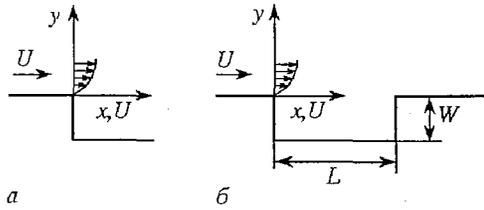


Рис. 12. Обтекание обращенного назад уступа (а) и полости прямоугольного сечения (б)

На характер возбуждения автоколебаний может влиять также то обстоятельство, что для некоторых частот полость может служить акустическим резонатором [31]. В результате характеристики автоколебаний определяются геометрией полости, числами Рейнольдса и Маха, режимом течения в пограничном слое перед полостью (ламинарный или турбулентный) и профилем скорости потока.

На рис. 13 представлены результаты экспериментального определения зависимости числа Струхала для первых трех мод автоколебаний при обтекании полости прямоугольной формы от отношения длины полости L к ее глубине W . На рис. 14 представлен спектр пульсаций давления за полостью. Эти рисунки взяты из обзора [31].

Для уменьшения амплитуды возбуждаемых автоколебаний разработан целый ряд мероприятий: передняя и (или) задняя прямоугольные кромки полости срезаются или скругляются, над полостью располагается перфорированная пластина и т.п.

Рассмотрим один важный пример, когда данный эффект играет зна-

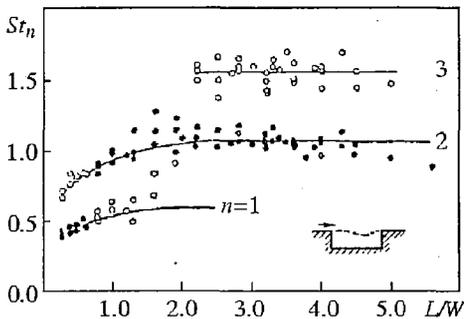


Рис. 13. Зависимости характерного числа Струхала $St_n = f_n L / U_0$ для первых трех мод автоколебаний при обтекании полости прямоугольной формы от отношения длины полости L к ее глубине W

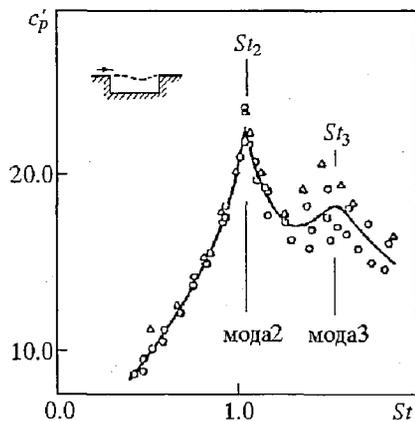


Рис. 14. Спектр пульсаций давления за полостью при $L/W=3.6$,

$$c_p' = (\langle p'^2 \rangle)^{1/2} \cdot 10^3 / ((1/2) \rho_0 U_0^2) \quad [31]$$

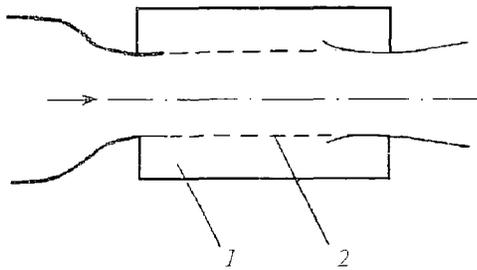


Рис. 15. Схема рабочей части трансзвуковой аэродинамической трубы: 1 - перфорированные стенки, 2 - камера

Проницаемость стенок трубы позволяет ликвидировать запирающие явления и проводить испытания на трансзвуковых режимах, соответствующих числам Маха $M=(0.6\div 1.3)$.

Перфорация стенок рабочей части трубы представляет собой ряды отверстий круглого сечения (рис.15). Такая перфорация, обеспечивающая возможность плавного перехода через скорость звука и повышение равномерности поля скорости в рабочей части трубы, является в то же время источником нежелательного фонового шума, который искажает результаты экспериментов. Дело в том, что каждое из отверстий ведет себя подобно полости, обтекаемой потоком. Вклад автоколебаний, вызванных наличием отверстий перфорации в рабочей части трубы, в общий уровень фонового шума особенно значителен при $M=(0.6\div 0.8)$.

Известные методы снижения фонового шума в трубах с перфорированной рабочей частью основываются на разрушении механизма возбуждения автоколебаний за счет отверстий. Это достигается путем установки металлических сеток на перфорированных стенках рабочей части [33] или же продольных перемычек в каждом из отверстий перфорации.

5. Цилиндр в поперечном потоке. Срывной флаттер

Как известно, при поперечном обтекании неподвижного цилиндра с его боковых поверхностей происходят периодические срывы потока, образующие шахматную дорожку вихрей, известную как дорожка Кармана. Визуализация потока за обтекаемым цилиндром при дозвуковых скоростях показала наличие цилиндрических звуковых волн, распространяющихся навстречу потоку. Эти звуковые волны, по-видимому, осуществляют обратную связь, необходимую для возбуждения автоколебаний. Если цилиндр поместить в некоторый канал, то процесс образования вихрей и обусловленной ими генерации звука может быть существенно усилен. Это происходит тогда, когда частота срыва вихрей близка к одной из собственных частот акустических колебаний в канале. При этом амплитуда звукового давления существенно превышает соответствующую амплитуду при обтекании того же цилиндра в безграничном потоке. Указанное явление иногда называют аэроакустическим резонансом [34-36].

В литературе описаны три случая поперечного обтекания цилиндра: 1) обтекание неподвижного цилиндра; 2) обтекание цилиндра, совершающего поперечные колебания с заданными частотой и амплитудой; 3) обтекание упруго закрепленного цилиндра.

В первом случае многочисленные экспериментальные наблюдения показали, что в широком диапазоне скоростей потока частота срыва вихрей соответствует числу Струхала $St \approx 0.22$ [37].

В случае обтекания колеблющегося цилиндра частота срыва вихрей f_s существенно зависит от частоты колебаний цилиндра f_0 . Соответствующая

чительную роль. В аэродинамических трубах трансзвуковых скоростей при приближении скорости потока к скорости звука возникает так называемое запирающее явление, при котором дальнейшее увеличение скорости потока становится невозможным даже при существенном увеличении мощности привода. Устранение указанного недостатка достигается за счет перфорации стенок рабочей части трубы, причем степень перфорации, в зависимости от нужного числа Маха, составляет до 20% [32,33].

зависимость в координатах $\Delta St_0 = (f_{s0} - f_0)d/U$, $\Delta St = (f_s - f_0)d/U$, где f_{s0} - частота срыва вихрей с неподвижного цилиндра, d - диаметр цилиндра, U - скорость набегающего потока, представлена на рис. 16. Мы видим, что эта зависимость качественно совпадает с известной зависимостью разности между частотой колебаний генератора и частотой гармонической внешней силы, действующей на этот генератор, от расстройки между частотой свободных колебаний генератора и частотой воздействия [38] (см. штриховую линию на рис.16). Напомним, что область, где частота колебаний генератора совпадает с частотой воздействия, называется областью синхронизации. Представленная зависимость построена на основе результатов экспериментов, изложенных в [39]. Указанные результаты лишней раз подтверждают, что явление срыва вихрей с неподвижного цилиндра имеет автоколебательный характер.

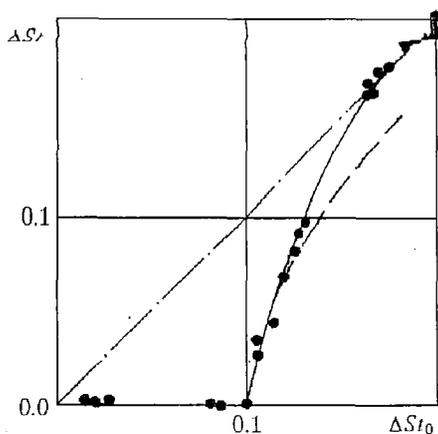


Рис. 16. Зависимость частоты срыва вихрей с поверхности колеблющегося круглого цилиндра от частоты его колебаний при $Re = U_0 d / \nu = (0.11 \div 1.55) \cdot 10^6$. Штриховая линия соответствует формуле $\Delta St = (\Delta St_0^2 - \Delta St_{0s}^2)^{1/2}$, где ΔSt_{0s} - полуширина полосы синхронизации ($\Delta St_{0s} \approx 0.1$)

Наконец, в третьем случае возможно явление, которое носит название срывного флаттера [40] или ветрового резонанса [41]. Это явление заключается в возникновении интенсивных колебаний цилиндра поперек потока в том случае, когда одна из его собственных частот близка к частоте срыва вихрей с неподвижного цилиндра. Срывной флаттер является причиной многих известных катастроф, например, знаменитого разрушения Такомского моста [40].

Аэродинамические способы гашения этих автоколебаний призваны устранить причину, их вызывающую, путем изменения характера обтекания. Один из таких способов состоит в спиральной навивке проволоки на цилиндр, что обеспечивает неодновременный срыв потока с его поверхности и, как следствие, существенное уменьшение амплитуды автоколебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 94-01-01135).

Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
3. Crow S.C., Champagne F.H. Orderly structure in jet turbulence // J.Fluid Mech.. 1971. Vol. 48, № 3. P. 547.
4. Chan Y.Y. Spatial waves in turbulence jets // Phys.Fluids. 1974. Vol. 17. № 1. P. 46; № 9. P. 1667.
5. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
6. Климоштович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
7. Климоштович Ю.Л. Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессах самоорганизации // УФН. 1989. Т. 158. Вып. 1. С. 59.
8. Landa P.S., Rosenblum M.G. Time series analysis for system identification and diagnostics // Physica D. 1991. Vol. 48, № 1. P. 232.

9. *Michalke A.* Survey on jet instability theory // *Progr. Aerosp. Sci.* 1984. Vol. 21, № 3. P. 159.

10. *Michalke A.* Instabilität eines kompressiblen runden Freistrahls unter Berücksichtigung des Einflusses der Strahlgrenzschichtdicke // *Z. Flugwiss.* 1971. Vol. 19, № 8-9. P. 319.

11. *Laufer J., Monkevitz P.* On turbulent jet flows: a new perspective // *AIAA Pap.* 1980, № 967.

12. *Власов Е.В., Гиневский А.С.* Когерентные структуры в турбулентных струях и следах. // *ВИНИТИ АН СССР. Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.* 1986. Т. 20. С.3.

13. *Petersen R.A.* Influence of wave dispersion on vortex pairing in a jet // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 89, № 3. P. 469.

14. *Ho Chih-Ming, Huerre P.* Perturbed free shear layers // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1984. Vol. 16. P. 365.

15. *Ho Chih-Ming.* Local and global dynamics of free shear layers // *Numer. and Phys. Aspects of Aerodyn. Flows.* N.Y. 1982. P.521.

16. *Власов Е.В., Гиневский А.С., Каравосов Р.К., Уханова Л.Н.* Исследование резонансных режимов при натекании на экран дозвуковой турбулентной струи // *Проблемы турбулентных течений.* М.: Наука, 1987. С. 115.

17. *Kibens V.* Discrete noise spectrum generated by an acoustically excited jet // *AIAA Journal.* 1980. Vol. 18, № 4. P. 434.

18. *Гиневский А.С.* Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969.

19. *Ho Chih-Ming, Nosseir N.S.* Dynamics of an impinging jet. Part 1. The feedback phenomenon // *J. Fluid Mech.* 1981. Vol. 105. P. 119.

20. *Ho Chih-Ming, Nosseir N.S.* Large coherent structures in an impinging jet // *Turbulent Shear Flows 2.* 2nd Int. Symp., London, 1979. Berlin, 1980. P. 297.

21. *Власов Е.В., Гиневский А.С., Каравосов Р.К., Уханова Л.Н.* Исследование резонансных режимов при натекании на экран дозвуковой турбулентной струи // *Промышленная аэродинамика.* Вып.1(33). М.: Машиностроение, 1986. С. 277.

22. *Kurasawa H., Yamamoto K., Obata T.* Self-excited oscillation in an axisymmetric jet with a coaxial circular pipe. The relation between the frequency locked in of the disturbance and acoustic resonance // *Mem. Nagano Techn. Coll.* 1987, № 18. P. 21.

23. *Ginevsky A.S., Landa P.S., Zaikin A.A.* Self-excitation of impinging jets with regard to acoustic feedback // *Proc. of the Third Intern. Congr. on Air- and Structure-borne Sound and Vibration.* Montreal, Canada. 1994. P. 1191.

24. *Бендриков Г.А., Стрелков С.П., Шубин Э.П.* Автоколебания в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью // *ЖТФ.* 1941. Т. 11, вып. 13-14. С. 1194.

25. *Стрелков С.П.* К теории автоколебаний в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью // *ЖТФ.* 1941. Т. 11, вып. 13-14. С. 1203.

26. *Стрелков С.П., Бендриков Г.А., Смирнов Н.А.* Пульсации в аэродинамических трубах и способы демпфирования их // *Тр. ЦАГИ.* 1946. № 593.

27. *Гиневский А.С., Власов Е.В., Колесников А.В.* Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978.

28. *Боярчикова М.Ю., Власов Е.В., Гиневский А.С., Зосимов А.В.* Подавление автоколебаний в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1982. № 1. С. 126.

29. *Зосимов А.В.* Акустический метод управления пульсациями скорости и давления в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью // *Труды ЦАГИ.* 1986, вып. 2292.

30. *Москвина М.Ю.* Подавление автоколебаний в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью путем периодического вдува-отсоса в пограничном слое сопла // *Инж.-физ. журнал.* 1990. Т. 59, № 1. С. 115.

31. *Rockwell D., Naudascher E.* Self-sustaining oscillations of flow past cavities (Review) // *Trans. ASME, J. Fluids Eng.* 1978. Vol. 100, № 2. P. 152.

32. Гродзовский Г.Л., Никольский А.А., Свищев Г.П., Таганов Г.И. Сверхзвуковые течения в перфорированных границах. М.: Машиностроение, 1967.

33. Ереза А.Г., Микеладзе В.Г., Мушин А.Г., Столяров Е.П., Филиппова Р.Д., Шлягуи А.Н. Снижение уровня фонового шума в рабочей части аэродинамической трубы при трансзвуковых скоростях // Уч. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21, № 2. С. 10.

34. Ильченко М.А., Руденко А.Н., Эпштейн В.Л. Исследование генерации вихревого звука при обтекании профиля в канале // Акуст. журнал. 1980. Т. 26, № 5. С. 708.

35. Ильченко М.А., Руденко А.Н., Селин Н.И. Исследование некоторых особенностей колебаний при обтекании профиля в канале // Акуст. журнал. 1982. Т. 28, № 2. С. 224.

36. Бардаханов С.П., Лыгденов В.С. Когерентные структуры в следе за плохо обтекаемым телом и генерация звука в резонансных условиях // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1990. № 2. С. 36.

37. Karman N.V. // Göttingen Nachrichten. 1991. P. 509; 1912. P. 547.

38. Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibration // Radio Rev. 1920. Vol. 1. P. 701.

39. Федлевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидродинамика отрывного обтекания тел. М.: Машиностроение, 1977.

40. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.

41. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. М.: Транспорт, 1987.

Центральный аэрогидродинамический
институт
Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 06.01.95
после переработки 09.10.95

EXITATION OF HYDRODYNAMIC AND ACOUSTIC WAVES IN SUBSONIC JET AND SEPARATION FLOWS

A.S. Gynevski, P.S. Landa

Review of phenomena taking place in subsonic jet and separation flows is given. Both free jets and jets interacting with different obstacles (for example, with a plane flat, cavity or acoustic resonator as in open-jet return-circuit wind tunnels) are considered. Experimental data for flow along a stationary cylinder and a cylinder executing lateral periodic vibrations are set out. The presentation and trying to find the sense of all results are given from the point of view of the oscillation and wave theory.



Гиневский Арон Семенович - родился в 1923 году, окончил Харьковский авиационный институт, доктор технических наук, профессор. Работает в ЦАГИ. Область научных интересов: гидродинамическая теория решеток, аэродинамика внутренних течений, теория турбулентного пограничного слоя, отрывных и струйных течений, аэроакустика. Общее число публикаций - 180, из них 6 монографий, 9 обзоров и одно открытие. Член редколлегии Реферативного журнала «Механика» и «Ученых записок ЦАГИ».



О ПЕРЕХОДЕ ОТ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ К ТУРБУЛЕНТНОМУ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

С.Я. Герценштейн, Е.Б. Родичев, А.Н. Сухоруков

Изучены механизмы нелинейного взаимодействия разномасштабных двумерных и трехмерных возмущений в зоне перехода от ламинарного режима гидродинамического течения к турбулентному и создана методика их исследования, основанная на применении к полным нестационарным уравнениям гидродинамики метода Бубнова - Галеркина. Рассмотрены конвективные процессы, градиентные потоки и течения с поверхностями раздела.

Данная статья представляет собой краткий обзор исследований проведенных авторами по нелинейному взаимодействию гидродинамических возмущений в зоне перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. Эти исследования были начаты в Институте механики МГУ в 1965 году и ведутся по настоящее время.

Целью работы является решение нелинейных задач теории гидродинамической устойчивости, построение и изучение моделей нелинейного взаимодействия возмущений и механизмов возникновения стохастичности, а также разработка эффективных численных методов решения системы уравнений Навье - Стокса и уравнений Эйлера.

Вопросы, связанные с изучением неустойчивости гидродинамических течений, представляют значительный теоретический и практический интерес для широкого класса явлений. Эти весьма актуальные вопросы тесно связаны с одной из фундаментальных проблем механики сплошной среды - проблемой турбулентности; они привлекали и привлекают внимание многих известных ученых. Интенсивные исследования в этой области обусловлены также некоторыми современными достижениями качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (теория V-систем, «странные аттракторы», система Лоренца и др.).

В настоящее время исследование различных волновых возмущений становится все более популярным среди механиков, физиков и математиков. Этому вопросу посвящено несколько тысяч статей, ряд сборников, обзоров и монографий. В гидродинамике наиболее подробно исследовано поведение волновых возмущений малой амплитуды. Успехи современной линейной теории гидродинамической устойчивости объясняются созданием эффективной численной методики исследования и широким внедрением ЭВМ.

В линейной теории устойчивости важное место занимает метод Бубнова - Галеркина, впервые обоснованный и обобщенный применительно к

гидродинамическим задачам Г.И. Петровым в 1940 году. В дальнейшем этот метод получил свое развитие в ряде работ, как у нас в стране, так и за рубежом. В последнее время особо широко развиваются различные модификации метода Бубнова - Галеркина, с помощью которых удается исследовать как двумерные, так и трехмерные нестационарные течения [1-5]. Становятся возможными решение нелинейных задач теории гидродинамической устойчивости, построение и изучение нелинейного взаимодействия возмущений и механизмов возникновения стохастичности, а также разработка эффективных численных методов решения системы уравнений Навье - Стокса и уравнений Эйлера. Вместе с тем, безусловно, не утратили своей актуальности и аналитические методы исследования.

В линейной теории большой интерес вызывает рассмотрение устойчивости течений, отличных от стационарных плоскопараллельных (нестационарных, зависящих от двух-трех пространственных переменных, с неоднородными граничными условиями и др.), а также изучение ряда новых физических явлений в астрофизике, в атмосфере, в океане, и в разнообразных технических приложениях.

В нелинейной теории наиболее распространенным является подход Ландау, который предполагает малость амплитуды рассматриваемого волнового возмущения и последующее разложение искомого решения в ряд по этой амплитуде. Наряду с этим в современной нелинейной теории гидродинамической устойчивости, представляющей собой весьма развитое научное направление, широко применяется богатый арсенал и других методов.

В методическом плане можно выделить следующие направления нелинейной теории:

- метод Бубнова - Галеркина и его различные модификации;
- метод Стюарта - Ватсона;
- метод Ляпунова - Шмидта;
- разностные методы;
- численные эксперименты с вихревыми системами;
- вариационные методы;
- энергетические методы и оценки;
- модельные подходы;
- методы сращиваемых асимптотических разложений и др.

Одним из существенных достижений современной теории является рассмотрение устойчивости конечно-амплитудных движений и различных резонансных явлений. Исследования по данной тематике в значительной степени иницируются и обогащаются экспериментом.

Повышенный в последнее время интерес к проблемам нелинейной теории объясняется, в частности, новыми математическими результатами, которые показывают возможность стохастических процессов (так называемых «странных» или «автостохастических аттракторов», аттрактор Лоренца и др.) в системах обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно невысокого порядка (начиная с третьего). Эти результаты по-новому освещают природу стохастических случайных процессов и позволяют совершенно иначе подойти к проблеме возникновения турбулентности в гидродинамике.

Оказывается, что в отличие от известной каскадной теории Ландау, турбулентные режимы могут возникать после конечного числа перестроек течения. Это обстоятельство делает вполне реальным проведение расчетов для стохастических режимов на основе уравнений Навье - Стокса, так как определяющим при этом является нелинейность взаимодействия конечного числа крупномасштабных гидродинамических возмущений, по меньшей мере, для некоторого класса гидродинамических течений вблизи порога возникновения турбулентности.

Следует подчеркнуть, что исследование нелинейного взаимодействия возмущений в гидродинамике представляет собой весьма сложную и малоизученную задачу численного анализа. Небольшое число работ по данной тематике выполнялось, как правило, с существенным использованием предположения о малости амплитуд взаимодействующих возмущений; применялись

обычные разложения по малому параметру, что давало возможность проследить за взаимодействием лишь на начальной стадии. Некоторые из наиболее интересных аспектов нелинейного взаимодействия, в том числе и «странные аттракторы», в силу выбранного метода последовательной линеаризации автоматически исключались из рассмотрения.

Основным содержанием работ [5-7] явились создание и разработка эффективных методов решения нелинейных гидродинамических задач, проведение с их помощью конкретных физических исследований в ряде традиционных разделов теории гидродинамической устойчивости, а также изучение механизмов нелинейного взаимодействия и проблемы возникновения стохастичности.

Существенное продвижение в понимании рассматриваемых физических процессов опирается, прежде всего, на создание и разработку эффективной численной методики исследования, которая позволила рассмотреть нелинейное взаимодействие большого числа разномасштабных возмущений. Эффективность разработанной методики обусловили следующие моменты.

1. Удачный выбор опорных функций. Построенный базис опорных функций содержит в качестве частных решений обычные асимптотические разложения, что обеспечивает чрезвычайно быструю сходимость метода, по крайней мере, вблизи нейтральных кривых. При этом, в частности, учитывается волновая природа искомых функций и по соответствующим переменным решение представляется в виде рядов Фурье.

2. При формировании системы опорных функций $\psi_k(x,y)$ в пространственном случае, на основе использования полных систем функций вида $\varphi_n(x)$ и $g_m(y)$, комбинационные составляющие конструируются таким образом, что функции низших порядков аппроксимируются с наибольшей точностью. Искомая функция представляется в следующем виде («треугольный алгоритм»):

$$\psi = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \sum_{m=1}^{N-n+1} A_{nm}(t) g_m(y) = \sum_{n=1}^N B_n(y,t) \varphi_n(x).$$

При этом учитывается, что при условии сходимости ряда вклад старших членов (например, B_N) будет достаточно мал, а следовательно их аппроксимация с помощью функций g_m может быть менее точной, чем для первых членов ряда. При этом необходимое число неизвестных в двумерном случае уменьшается примерно в 2 раза, а в трехмерном приблизительно в 6 раз. Кроме того, в ряде случаев удается примерно в 2 раза уменьшить число опорных функций (по каждой из переменных) за счет учета их свойств четности и нечетности.

3. Создание экономичных вычислительных алгоритмов. Особенно необходимой является разработка экономичных алгоритмов при исследовании нелинейного взаимодействия разномасштабных возмущений с несоизмеримыми волновыми числами. Рассмотрение несоизмеримых волновых чисел, с одной стороны, позволяет изучить нелинейное взаимодействие возмущений со сколь угодно большой разницей масштабов и оказывается экономичным при сильном отличии в размерах волновых возмущений, но, с другой стороны, требует большого дополнительного объема вычислений: так, учет всего двух масштабов увеличивает необходимое машинное время примерно так же, как при переходе от плоских задач к трехмерным.

Наиболее просто, с точки зрения программиста, формирование нелинейных дифференциальных систем производить на каждом шаге интегрирования по времени, вернее, при каждом обращении к процедуре вычисления правых частей. Однако, подобный способ формирования содержит большое число трудоемких логических операций и требует огромных затрат машинного времени.

Для создания реальной возможности проведения систематических численных исследований в работе был создан комплекс программ по повышению эффективности применяемых вычислительных алгоритмов. Основные мероприятия в этом отношении можно свести к следующим пунктам:

а) формирование одномерных массивов $\{A_n\}$. Выделение основных типов перемножения этих векторов (всего их оказывается не более двенадцати); однократное составление массивов, в которых запоминается информация о номерах перемножаемых элементов (n, k) , о номерах элементов, получающихся в результате перемножения, о знаке перемножения и о типе перемножения ($\sin nx$ на $\sin kx$ или $\sin nx$ на $\cos kx$ и т.п.). При этом коэффициенты при квадратичных членах вида $A_m A_k$, их знаки и номера фактически вычисляются не на каждом шаге интегрирования, а однократно;

б) приведение подобных членов; при этом число необходимых вычислений и требуемая память может уменьшиться примерно в 2-3 раза;

в) информация о нелинейных блоках перемножения содержит большое количество чисел. Эта информация с помощью автокода «Madlen» записывается, «запаковывается» непосредственно в ячейки оперативной памяти, причем, в одну ячейку удается поместить номера n и k перемножаемых элементов A_n и A_k , номер m , в который записывается ответ, а также знак соответствующего коэффициента, который определяется типом перемножения рядов. Таким образом, с помощью автокода удается в 15 раз увеличить объем информации, которая может быть помещена в быстродействующую оперативную память;

г) разработанные алгоритмы однократного формирования нелинейной системы увеличивают быстродействие первоначальных процедур в рассмотренном диапазоне параметров примерно в 16 раз. Отметим, что одновременная «запаковка» различных типов перемножения оказывается значительно более выгодной, чем составление отдельных блоков; в целом быстродействие увеличивается примерно в 4 раза. Вместе с тем, обращение к блоку перемножения, «распаковка», «запаковка» и прочие программные операции требуют, все-таки, довольно больших затрат машинного времени.

Наиболее радикальным средством «экономии» в этом отношении является «ручной» способ выписывания системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, такой способ явного выписывания системы очень ненадежен, чрезвычайно трудоемок и фактически возможен лишь для небольших систем, состоящих из 10-30 уравнений.

В работе [7] с помощью компиляторных схем проводится автоматизация такого «ручного» труда. При этом по специальным программам ЭВМ «сама» проводит выписывание системы уравнений и «сама» себе составляет новую программу, в которой эта система явно записана. В компиляторных схемах заранее заготовлены соответствующие символы, которые в нужный момент считываются, создавая в конечном итоге готовую программу. Отметим, что составление этой компиляторной программы может проводиться в рамках «нестандартного сервиса» системы «Редактор», а вводиться в действие после окончания работы «нестандартного сервиса» (как бы при условии наличия этой компиляторной программы до обращения к «нестандартному сервису»). Использование компиляторных схем увеличивает быстродействие применяемых вычислительных алгоритмов примерно в 4 раза.

В целом с помощью всего разработанного комплекса программ удается уменьшить первоначальные времена счета в рассмотренном диапазоне параметров приблизительно на два порядка (в 100 раз).

Несколько слов о быстром преобразовании Фурье. Быстрое преобразование Фурье позволяет вычислить коэффициенты ряда Фурье, который получается в

результате перемножения двух рядов: $\sum_1^N A_k \sin kx$ и $\sum_1^N B_k \sin kx$. При этом, если при обычном способе перемножения требуется $C_1 N^2$ арифметических операций, то при использовании быстрого преобразования Фурье $C_2 N \ln N$ операций. Естественно, что при больших значениях N быстрое преобразование Фурье обладает значительными преимуществами. Однако при небольших значениях N решающую роль играет сопоставление постоянных C_1 и C_2 . Отметим, что при рассмотрении

трехмерных нестационарных задач гидромеханики число гармоник N по каждой из пространственных переменных не превышает 10 (так как общее число гармоник, перерабатываемое имеющимися в наличии ЭВМ, не превышает нескольких тысяч).

Таким образом, применение асимптотически более эффективного быстрого преобразования Фурье в рассматриваемом случае оказывается нецелесообразным.

Применение данной методики имеет преимущества перед методами малого параметра принципиального характера: в методах малого параметра, как правило, существенно используется предположение о малости взаимодействующих амплитуд, фактически применяется метод последовательной линеаризации и многие важные аспекты нелинейного взаимодействия из рассмотрения исключаются. Методика обладает и значительными достоинствами при численной реализации на ЭВМ - существенно сокращается число неизвестных, уменьшается порядок рассматриваемых систем, упрощаются алгоритмы и программы.

Изучение классической задачи Рэлея. С помощью разработанной методики рассматривается классическая задача Рэлея о конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости, подогреваемого снизу. Учитывается также влияние вращения относительно вертикальной оси. Данный пример чрезвычайно удобен по «техническим» причинам и содержит в себе наиболее характерные для гидродинамики механизмы неустойчивости: «мягкое» и «жесткое» возбуждение, колебательную и монотонную неустойчивость.

Проведенные численные эксперименты [3, 4, 7] продемонстрировали следующий принципиально важный факт: рассмотрение ограниченного числа гармоник дает возможность воспроизвести ряд характерных особенностей, имеющих место при возникновении турбулентного движения. В частности, показано что первоначально наблюдаемые колебания синусоидальной формы с увеличением числа Рэлея оказываются промодулированными низкочастотной составляющей, а затем, при достаточно больших числах Рэлея, наблюдается появление высокочастотных пульсаций, носящих нерегулярный характер.

Показано также, что нелинейное взаимодействие коротковолновых возмущений (неустойчивых по линейной теории) с длинноволновыми возмущениями (устойчивыми по линейной теории) может приводить к «перекачке» энергии в сторону больших масштабов. Наиболее интересно то, что передача энергии сопровождается сложным неустановившимся процессом, который носит случайный характер. При этом проявляется сильная зависимость локальных характеристик течения от начальных данных, средние же характеристики течения оказываются устойчивыми. Интересно, что стохастическое поведение в рассматриваемой динамической системе может возникать внезапно: до некоторого значения параметра системы (скажем, числа Рэлея Ra) при $Ra < Ra^*$ наблюдаются чисто периодические режимы, а уже при $Ra > Ra^*$ решения системы «скачкообразно» перестраиваются и возникают нерегулярные стохастические колебания [4,7].

Существенно, что полученные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с известными экспериментальными данными (Россиби, 1969). Таким образом, изученная динамическая система достаточно точно отражает свойства решений уравнений Навье - Стокса, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными по возникновению турбулентности.

Рассмотрено также применение разработанной методики к трехмерному случаю конвективной неустойчивости [7]. Проведенные расчеты подтвердили основные результаты, полученные при исследовании двумерных уравнений, и вместе с тем показали возможность существенных количественных отличий, возникающих при достаточно высоких числах Рэлея.

Большое внимание уделено исследованию нелинейного взаимодействия в случае конвективной неустойчивости горизонтального слоя жидкости при наличии вертикальных вибраций [8]. В этом случае проблема «выбора» стояла особенно остро - было не понятно, не только какое из возмущений «выживает», но не было

ясно даже из какой резонансной области. Проведенные численные эксперименты обнаружили, что в определенной области параметров при большой амплитуде вибраций в результате нелинейного взаимодействия «выживают» возмущения из III резонансной области. При достаточно высоких числах Рейля эти возмущения оказались неустойчивыми по отношению к трехмерным возмущениям.

Рассмотрены также нелинейные конвективные движения в слое бинарной смеси, например, неоднородные растворы соли в воде [9]. Интересно, что основные механизмы нелинейного взаимодействия в этой задаче оказались аналогичны рассмотренной выше задаче о вращающемся слое жидкости. Подтверждена важная роль длинноволновых составляющих. Обнаружены стохастические движения. В области монотонной неустойчивости найдены стационарные трехмерные ячейки («солевые пальцы»).

Значительный методический интерес представляет сопоставление решения задачи с границами, свободными от касательных напряжений (условия Рейля), с решением задачи, имеющей твердые границы (обычные условия прилипания). Проведенные расчеты подтвердили предположение о несущественном влиянии граничных условий на качественную сторону вопроса (на появление стохастических движений и др.) и вместе с тем позволили более аккуратно провести сопоставление теории с экспериментом.

Заметим, что при исследовании нелинейного взаимодействия возмущений обнаружена большая роль начальных данных: «выживание» того или иного возмущения может зависеть от уровня его начальной амплитуды и, более того, изменение начальной амплитуды возмущений может привести к качественной перестройке конвективного течения. Так, при малой начальной амплитуде возмущений могут образовываться стационарные или периодические движения, а при большой - стохастические.

Нелинейные колебания в спутных потоках. С помощью развитых подходов рассмотрены также нелинейные колебания в спутных потоках. Основные результаты в данном направлении получены с помощью модифицированного метода Рейля. Применение этого метода оказалось достаточно эффективным и дало реальную возможность рассмотрения глубоких стадий нелинейного развития и взаимодействия возмущений. Математическое обоснование применения этого метода в линейном и нелинейном трехмерном случае дается в [2, 5]. Выделим некоторые результаты проведенного численного анализа:

1) амплитуды симметричных относительно оси следа вихревых возмущений примерно на порядок меньше амплитуд несимметричных возмущений;

2) нелинейное взаимодействие первичной моды с высшими гармониками сначала ослабляет обычный экспоненциальный рост, вытекающий из линейной теории, а затем приводит даже к уменьшению амплитуды первичной моды;

3) показана возможность образования «ундертонов» и существенное перераспределение энергии по спектру в сторону более длинных волн;

4) прослежено развитие крупномасштабных пульсаций на фоне мелкомасштабных. Показано, что при этом интенсивность крупномасштабных колебаний может несколько уменьшаться. Возможна также передача энергии от мелкомасштабных пульсаций к основному, осредненному движению и ослабление интенсивности основного крупномасштабного колебания;

5) взаимодействие развитых волн сильно влияет на средние характеристики течения.

Исследованы также трехмерные колебания. Установлена неустойчивость рассмотренных спутных потоков по отношению к резонансным и нерезонансным возмущениям. Выявлена важная роль поперечных стоячих трехмерных волн типа $(0, 2\beta z)$, образующихся в результате взаимодействия двух наклонных к основному потоку волн вида $(\alpha x, \beta z)$, $(\alpha x, -\beta z)$.

В некоторых случаях в следе за телом могут образовываться интенсивные вихри кольцевой или спиральной формы. Кольцевые вихри образуются, например,

в результате развития неустойчивости системы из двух прямолинейных вихрей, сходящих с крыльев самолета, и играют важную роль в процессе формирования следа. Спиральные вихри могут возникать, например, за вращающимся винтом. Подобные вихревые образования довольно часто встречаются в самых разнообразных случаях, и исследование их устойчивости представляет определенный интерес. В работе [10] в рамках модели Бетчова проводится численное и аналитическое исследование устойчивости двух вихревых систем: вихревого кольца и вихревой спиральной нити. Показано, в частности, что для вихревого кольца характерно жесткое разрушение, начиная с некоторых конечных значений амплитуды. Причем, уровень этих критических амплитуд резко уменьшается с уменьшением масштаба возмущений. Рассмотрены также резонансные механизмы взаимодействия возмущений и показано, что учет резонансных соотношений позволяет обнаружить существенное расширение области неустойчивых движений.

Исследования устойчивости пограничных течений. В работах [6 и др.] рассматривается устойчивость различных пограничных течений (течение Блазиуса, струя Бикли - Шлихтинга и др.), основное внимание уделяется зоне перехода от ламинарного течения к турбулентному, нелинейной эволюции двумерных волн Толмина - Шлихтинга, их трехмерному «короблению» и возникновению высокочастотных пульсаций. Для этого проводится модификация метода Стюарта - Ватсона применительно к течениям, близким к параллельным. Отклонение от параллельного течения предполагается малым и рассматриваются соответствующие разложения. Далее анализируются численные результаты. Учет непараллельности (например, для течения Блазиуса) дает существенное изменение профиля скорости среднего вторичного течения, при этом нелинейная поправка к коэффициенту усиления несколько увеличивается (что приводит к расширению области жесткого возбуждения), а нелинейная поправка к частоте может уменьшаться примерно на 30%. При исследовании автоколебаний в «жестком» режиме разложение по малому параметру проводится вплоть до членов пятого порядка малости.

Проведены также исследования, относящиеся к изучению механизма внезапного «взрыва» мелкомасштабных возмущений, происходящего на третьей стадии турбулизации потока [11]. Теоретическое исследование третьей стадии для пограничного слоя очень сложно и в настоящее время мало продвинуто, так как приходится изучать чрезвычайно сложные нерегулярные режимы, резко меняющиеся и во времени и по пространству. Значительную роль при этом играет возникновение внутри течения крайне неустойчивых нестационарных слоев смешения с профилем скорости, имеющим точку перегиба. Эти «сдвиговые» слои действительно наблюдаются в экспериментах, причем, они существенно нестационарны: их толщина и отвечающий им перепад скоростей быстро изменяются во времени.

В работе [12] с помощью модифицированного метода Рэлея ставится и решается задача об устойчивости периодического по времени плоскопараллельного потока идеальной жидкости и обсуждаются некоторые математические вопросы, связанные с этой постановкой. Показано, что для рассматриваемой задачи, сводящейся к решению системы уравнений в частных производных с периодическими коэффициентами, справедлив аналог теоремы Флоке для обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача об устойчивости сводится к исследованию решений вида $f(y,t)\exp(\omega t)$, где $f(y,t)$ - периодическая по t функция с тем же периодом T , что и коэффициенты системы; при этом доказана сходимость метода Рэлея, модифицированного применительно к исследованию устойчивости нестационарных течений, и показано, что рассмотрение более общих начальных данных (по сравнению с обычно используемыми в теории устойчивости при решении задачи на собственные значения методом Рэлея) приводит лишь к появлению чисто нейтральных дополнительных собственных значений.

С помощью разработанной методики проведена серия расчетов по исследованию устойчивости наблюдаемых в эксперименте нестационарных «сдвиговых» слоев. Показана сильная неустойчивость таких течений, получены соответствующие коэффициенты усиления и наиболее «опасные» волновые числа. Представляет интерес и численное подтверждение справедливости теоремы Сквайра для нестационарных течений. Оказывается, что нестационарные потоки идеальной жидкости, так же как и стационарные, более неустойчивы по отношению к двумерным, чем к трехмерным возмущениям. Отметим, что и для трехмерных потоков (например, для несимметричных струй), содержащих различные комбинации пространственных горизонтальных и вертикальных слоев смещения, неустойчивость слоев смещения оказывается определяющей - спектр возмущений объединяет соответствующие двумерные спектры [13].

Проводятся также и непосредственные численные эксперименты (в рамках уравнений Эйлера) с трехмерным «короблением» двумерной волны Толмина - Шлихтинга, возникновением профиля скорости с точкой перегиба и с последующим развитием мелкомасштабных возмущений. Показана важная роль трехмерного «коробления», удаляющего точку перегиба от стенки. Близость точки перегиба к стенке может оказывать существенное стабилизирующее воздействие. Интенсивность высокочастотных колебаний и их обратное влияние на усредненный профиль скорости в трехмерном случае оказывается существенно более мощным, чем в двумерном случае.

Отметим, что вследствие стабилизирующего воздействия стенки течения с точкой перегиба (например, за единичной шероховатостью [1]) могут быть более устойчивыми, чем аналогичные течения, но без точки перегиба. Полученные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с имеющимися эмпирическими данными.

Устойчивость течений с поверхностями раздела. Разработанная методика применяется к исследованию неустойчивостей различного рода, в которых одним из основных определяющих факторов являются поверхностные эффекты (неустойчивость Рэлея - Тэйлора, неустойчивость Кельвина - Гельмгольца и др.). Методы решения таких задач, как правило, весьма сходны, так как основные трудности возникают при выполнении динамических и кинематических условий на неизвестных заранее поверхностях. Методика численного исследования, в основном, определяется применением метода Бубнова - Галеркина; граничные условия на поверхностях раздела удовлетворяются с помощью разложения искомых функций вблизи поверхностей раздела в ряды Тейлора.

При исследовании неустойчивости Кельвина - Гельмгольца главное внимание уделено нелинейной эволюции ветровых волн конечной амплитуды и влиянию на их развитие градиента скорости как в воздухе, так и в воде. Установлено сильное дестабилизирующее влияние градиентов скорости на развитие ветровых волн конечной амплитуды. При этом показана правомерность аппроксимации исходных профилей скорости в воздухе и в воде кусочно-линейными ломаными. Обнаружено обратное влияние ветровых волн конечной амплитуды на основной профиль скорости: вблизи границы раздела скорость воздуха уменьшается, а скорость основного потока в воде увеличивается. В рассматриваемых градиентных потоках установлено также образование низкочастотной модуляции ветровых волн и их неустойчивости по отношению к длинноволновым возмущениям [13].

При изучении неустойчивости Рэлея - Тэйлора основное внимание уделено трехмерным и нестационарным эффектам. Установлено, что учет трехмерности явления приводит к заметно менее интенсивному нарастанию возмущений поверхности раздела по сравнению с двумерным случаем. Самостоятельный интерес представляет исследование Рэлея - Тейлоровской неустойчивости в условиях быстрого нарастания ускорения силы тяжести. При этом показана существенная стабилизация процесса по сравнению с квазистационарными расчетами [14].

Основные результаты. 1. Изучены нелинейная эволюция и взаимодействие разномасштабных двумерных и трехмерных возмущений в зоне перехода от ламинарного режима гидродинамического течения к турбулентному и разработана эффективная численная методика исследования, основанная на применении к полным нестационарным уравнениям гидродинамики метода Бубнова - Галеркина [5-7].

2. В исследованиях конвективной неустойчивости, проведенных на базе разработанной методики, установлено следующее.

а. Возможно внезапное возникновение стохастических конвективных движений - до некоторого числа Рэлея $Ra < Ra^*$ наблюдаются стационарные или периодические решения, а при $Ra = Ra^*$ решение системы мгновенно перестраивается и становится нерегулярным, стохастическим [4,7].

б. Важна роль «предыстории» конвективных течений (то есть начальных данных задачи): при малой начальной амплитуде возмущений могут наблюдаться периодические режимы, а при достаточно большой - стохастические. При этом число Рэлея, Прандтля и прочие «внешние» параметры задачи фиксированы. Существенно, что в определенной области «внешних» параметров независимо от начальных данных образуются стохастические решения задачи [4,7,9].

в. Имеет место принципиальная возможность возникновения двумерных и трехмерных стохастических конвективных течений при фиксированном, конечном числе взаимодействующих возмущений, а не в результате последовательного включения бесконечного числа возмущений с различными пространственными масштабами и частотами [4].

г. Сильно влияние длинноволновых возмущений на локальные и средние характеристики как стохастических, так и периодических конвективных движений.

3. Для свободных вязких потоков проведено исследование устойчивости и нелинейного взаимодействия разномасштабных двумерных и трехмерных возмущений [5,15].

Установлена неустойчивость двумерных волновых режимов по отношению к крупномасштабным, длинноволновым возмущениям - «ундертонам». Причем, амплитуды длинноволновых составляющих могут даже превышать амплитуду основного тона (и его кратных гармоник) и оказывать сильное влияние не только на спектральные характеристики пульсаций, но и на основной поток.

Показана неустойчивость рассматриваемых двумерных волновых режимов конечной амплитуды по отношению к трехмерным возмущениям и обнаружено, что на нелинейной стадии развития амплитуды трехмерных нерезонансных возмущений могут превышать амплитуду возмущений в резонансном случае. Обнаружено сильное выделение поперечных стоячих трехмерных волн. Выявлено важное влияние начальных данных на процесс отбора характерных масштабов двумерных и трехмерных возмущений.

Объяснено явление стабилизации струйных течений вынужденными высокочастотными вибрациями из определенного диапазона частот. Показано, что высокочастотные мелкомасштабные пульсации интенсивно нарастают в узких слоях смешения на границах струйных потоков (масштаб возмущений соответствует толщине слоя смешения) и быстро «сглаживают» эти резкие границы раздела - профили скорости при этом становятся заметно более плавными, а для таких «сглаженных» профилей скорости нарастание основного крупномасштабного тона происходит существенно менее интенсивно.

Показано, что нелинейное взаимодействие основного тона с мелкомасштабными возмущениями, масштаб которых много меньше толщины слоя смешения, может приводить, наоборот, даже к некоторому увеличению амплитуды основного тона.

Эти исследования были поставлены с целью объяснения обнаруженного Е.В. Власовым и А.С. Гиневским явления ослабления турбулентности в дозвуковых струях при их высокочастотном акустическом возбуждении [16].

4. Для вязких сдвиговых течений прослежена нелинейная эволюция «жестко» возбуждаемых колебаний. Решения построены методом Стюарта - Ватсона, модифицированным в работе применительно к непараллельным течениям

и к высоким асимптотическим разложениям вплоть до порядка порядка малости включительно. Область применимости построенных решений включает некоторую окрестность зоны перехода от «мягкого» режима возбуждения к «жесткому» [6].

Показана неустойчивость полученных волновых режимов конечной амплитуды типа волны Толмина - Шлихтинга по отношению к поперечным трехмерным возмущениям, а также по отношению к мелкомасштабным возмущениям. При этом установлена важная роль точек перегиба, возникающих в мгновенных нестационарных профилях продольной составляющей скорости. Интенсивность этих точек перегиба и их удаление от твердых стенок, близость к которым оказывает стабилизирующее воздействие, в значительной степени определяются развитием трехмерных возмущений. Исследование устойчивости проведено как с помощью асимптотических методов, так и с помощью непосредственных численных расчетов в рамках уравнений Эйлера, учитывающих кроме основной двумерной волны также и трехмерные поперечные и мелкомасштабные возмущения. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментально наблюдаемой картиной возникновения турбулентности в пограничных слоях, в частности, хорошо описывают «взрывообразный» рост мелкомасштабных пульсаций в зоне так называемых турбулентных пятен.

5. С помощью разработанной методики построены решения некоторых нелинейных задач, связанных с неустойчивостью поверхностей раздела [13,14,17-22].

Установлено сильное дестабилизирующее влияние ненулевых градиентов скорости в воздухе и в прилегающем к поверхности раздела слое воды на нелинейную эволюцию ветровых волн (на неустойчивость Кельвина - Гельмгольца). Показано также дополнительное увеличение скорости основного потока в воде и уменьшение его в воздухе за счет обратного влияния ветровых волн конечной амплитуды на основное течение.

Выявлено, что на нелинейной стадии развития неустойчивости Рэлея - Тейлора трехмерные возмущения нарастают заметно менее интенсивно, чем двумерные, показано также, что учет нестационарности процесса (например, увеличения ускорения во времени) приводит к значительной стабилизации процесса по сравнению с квазистационарными расчетами [20].

Полученные результаты, связанные с исследованием нелинейной эволюции, взаимодействия возмущений и возникновения стохастичности в гидродинамике, а также с разработкой численных методов исследования, основанных на применении метода Бубнова - Галеркина к нестационарным двумерным и трехмерным уравнениям гидродинамики, развивают известные представления теории гидродинамической устойчивости, существенно дополняют популярную «каскадную» теорию возникновения турбулентности, имеют весьма общий характер и широкий диапазон приложений в геофизике, астрофизике и в различных прикладных вопросах.

Разработанная теория дает практическую возможность расчета трехмерных течений в зоне перехода от ламинарного движения к турбулентному и может быть использована для расчета пульсационных и осредненных характеристик течений, в частности, трения и теплопереноса.

Развитые в работе подходы уже нашли применение при анализе когерентных структур в турбулентных подходах, при изучении конвективных движений в стратифицированных течениях и в некоторых других прикладных исследованиях.

Библиографический список

1. Герценштейн С.Я. О влиянии единичной шероховатости на возникновение турбулентности// Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1966. № 2. С. 163.

2. Герценштейн С.Я. О сходимости метода Рэлея // Докл. АН СССР. 1969. Т.187, № 5. С. 1012.
3. Герценштейн С.Я., Шмидт В.М. О взаимодействии волн конечной амплитуды в случае конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя // Докл. АН СССР. 1974. Т.219, № 2. С. 297.
4. Герценштейн С.Я., Шмидт В.М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя // Докл. АН СССР. 1975. Т.225, № 1. С.59.
5. Герценштейн С.Я. О применении метода Рэлея к нелинейным и трехмерным задачам // Докл. АН СССР. 1976. Т.231, № 6. С.1319.
6. Герценштейн С.Я., Штемлер Ю.М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость // Докл. АН СССР. 1977. Т.234, № 6. С. 1277.
7. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Шмидт В.М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемой снизу // Докл. АН СССР. 1978. Т.238, № 3. С.545.
8. Герценштейн С.Я., Рахманов А.И. Конвекция в осциллирующем поле сил и микрогравитация // МЖГ. 1994. № 5. С. 99.
9. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Семин В.Н., Шмидт В.М. О нелинейных конвективных движениях в средах с «двойной диффузией» // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 3. С. 570.
10. Герценштейн С.Я., Терещенко А.М. Устойчивость вихревых шнуров // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 3. С. 42.
11. Герценштейн С.Я., Сухоруков А.Н. О трехмерной неустойчивости в вязких течениях // Докл. АН. 1994. Т. 338, № 1. С. 46.
12. Герценштейн С.Я. Об устойчивости нестационарного прямолинейного плоскопараллельного потока идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 2. С. 5.
13. Герценштейн С.Я., Рудницкий А.Я., Сухоруков А.Н. Устойчивость непараллельных пространственных струйных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 21.
14. Герценштейн С.Я., Мусабеков П.М., Рудницкий А.Я., Уразов Ш.Н. Неустойчивость и распад наэлектризованных капиллярных струй // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 5. С.1073.
15. Герценштейн С.Я., Сухоруков А.Н. О нелинейной эволюции двумерных и трехмерных волн в слоях смешения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 10.
16. Гиневский А.С., Власов Е.В., Колесников А.В. Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978.
17. Герценштейн С.Я., Чернявский В.М., Штемлер Ю.М. О неустойчивости Рэлея - Тейлора при больших значениях времени // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 8.
18. Герценштейн С.Я., Ромашова Н.Б., Чернявский В.М. О возникновении и развитии ветрового волнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 163.
19. Востряков В.А., Герценштейн С.Я., Рудницкий А.Я. Устойчивость неосесимметричных струй // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1065.
20. Герценштейн С.Я., Чернявский В.М. Асимптотическая стадия неустойчивости Рэлея - Тейлора // МЖГ. 1989. № 5. С. 8.
21. Герценштейн С.Я., Филанд Л.Т. Устойчивость затопленных струй // МЖГ. 1990. № 1. С. 100.
22. Герценштейн С.Я., Мусабеков П.М., Рудницкий А.Я., Умаркулов К. О распаде наэлектризованных вращающихся капиллярных струй // ИФЖ. 1991. Т.60, № 2. С. 231.

Институт механики
Московского государственного
университета

Поступила в редакцию 04.10.94
после переработки 19.05.95

LAMINAR-TURBULENT TRANSITION IN THE HYDRODYNAMIC PROBLEMS

S.Ya. Gertsenshtein, E.B. Rodichev, A.N. Sukhorukov

The nonlinear mechanisms of nonlinear 2-D and 3-D disturbances interactions in transition zone from laminar flow to turbulent one are investigated. The investigation method based on application of Bubnov - Galerkin procedure to full nonstationary Navier - Stokes equations.

The convective flows, shear flows and with interface are investigated.



Герценштейн Семен Яковлевич - родился в 1941 году в Ташкенте, окончил механико-математический факультет МГУ (1964), аспирантуру МГУ (1967). После ее окончания работает в Институте механики МГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1970) и доктора наук (1988) в области теории возникновения турбулентности. Имеет более 300 публикаций. Один из организаторов известной школы-семинара «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости».



Родичев Евгений Борисович - родился в 1955 году в Москве, окончил механико-математический факультет МГУ (1979). После окончания работает в Институте механики МГУ. Является специалистом в области численного моделирования процессов возникновения турбулентности на базе трехмерных нестационарных уравнений Навье - Стокса. Им подготовлена диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.



Сухоруков Анатолий Николаевич - родился в 1944 году в Москве, окончил механико-математический факультет МГУ (1966). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1981) в области: механика жидкостей и газа, теория гидродинамической устойчивости. Автор многих статей и докладов по нелинейной теории гидродинамической устойчивости и переходу от ламинарного режима течения к турбулентному. Ученый секретарь многолетней школы-семинара «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости».



КОМПЬЮТЕРНАЯ КОНЦЕПЦИЯ ВИХРЕВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С.М. Белоцерковский, А.С. Гиневский

Рассмотрена проблема моделирования турбулентных струйных и отрывных течений несжимаемой жидкости на основе схемы идеальной среды и метода дискретных вихрей. Построение математической модели сдвигового течения при больших числах Рейнольдса базируется на трактовке свободной турбулентности как иерархии вихрей разного масштаба. При этом турбулентное движение рассматривается в общем случае как трехмерное и существенно нестационарное. Турбулентность порождается потерей устойчивости и распадом упорядоченных вихревых образований и превращением их в вихревые ансамбли. Последние, двигаясь вместе со средой, деформируются, захватывают друг друга и образуют как новые макроструктуры, так и мелкие вихри. Существенно, что вихревые движения содержат органически присущий им механизм потери устойчивости и перехода от порядка к хаосу. Полученные с помощью метода дискретных вихрей решения позволяют без использования эмпирических констант найти поля средних скорости и давления, нормальных и сдвиговых рейнольдсовых напряжений, пульсаций давления, корреляции пульсаций скорости и давления, соответствующие масштабы турбулентности, спектры.

Введение

Выявление механизма турбулентности и создание замкнутых математических моделей турбулентных следов и струй представляет огромный принципиальный интерес. Настоящая работа является важным этапом формирования компьютерной вихревой аэродинамики и осуществления методологии численного эксперимента на базе метода дискретных вихрей (МДВ) в новой области [1-12]. Именно здесь, при моделировании вихревых следов и струй, раскрываются главные особенности и преимущества метода. Концепция в максимальной степени опирается на схему идеальной среды и анализ нестационарных режимов обтекания с образованием поверхностных тангенциальных разрывов.

Основным является дискретное описание явления как по пространству, так и по времени. Можно утверждать, что вихревые движения жидкой среды содержат органически присущий им механизм потери устойчивости и перехода от порядка к хаосу. Он как бы вложен в «генетический код» систем свободных вихрей, а потому его не нужно вносить извне. В этом и заключаются богатство и красота вихревых движений жидкой среды. Корень, из которого произрастает это удивительное древо, заключен в тонкостях близкого взаимодействия бесконечно тонких вихревых нитей. Сингулярность поля индуктивных скоростей

создает то многообразие возможностей, которые заключены в математических моделях, основанных на МДВ.

Излагаемая концепция формировалась в значительной степени авторами и их учениками, начиная с 1970 года. Естественно, что этот процесс происходил под влиянием тех достижений, которыми обогатилась наука о турбулентности за последние два десятилетия. Прежде всего, это относится к установлению важной роли когерентных структур в турбулентном перемешивании в слоях смешения, струях и следах. Когерентные, упорядоченные структуры-сгустки завихренности локализованы в пространстве и отличаются достаточно большим временем существования. Очень важно для развиваемой методологии установление факта слабой зависимости этих явлений от вязкости среды [13-17].

Традиционная теория турбулентных струй и следов базируется на применении приближения пограничного слоя в сочетании с полуэмпирическими моделями турбулентности [18-20]. Недостаток такого подхода состоит, во-первых, в том, что теория содержит эмпирические константы, которые не являются универсальными и, во-вторых, предположение о стационарности течения в этой теории не позволяет учесть наличие в струях и следах крупномасштабных когерентных структур, играющих важную роль в процессах турбулентного смешения. Устранение этого последнего недостатка требует отказа от приближения пограничного слоя и использования полных нестационарных уравнений Навье - Стокса, Эйлера или Рейнольдса. Однако возможности такого подхода ограничены ввиду сложности и громоздкости соответствующих численных решений [11].

В этом плане существенными преимуществами обладает метод дискретных вихрей, позволяющий с наименьшими затратами машинного времени получить решение ряда классических задач о распространении турбулентных струй и следов, а также многих новых задач, которые с помощью традиционных методов не могут быть решены. Необходимо вместе с тем подчеркнуть, что получаемые с помощью МДВ решения содержат более богатую информацию по сравнению с решениями, которые получаются с помощью традиционных подходов [21-28].

Математические модели, созданные на основе МДВ, описывают главные черты развития турбулентных следов, струй и отрывных течений и позволяют определить статистические характеристики турбулентности (моменты 1-го и 2-го порядков). В последние годы ряд исследований подобного рода на базе различных модификаций МДВ был выполнен как отечественными [29,30], так и зарубежными учеными [31-37] из США, Великобритании, Японии.

Интересно отметить, что простейшие, алгебраические модели турбулентности, основанные на предположении, что рейнольдсовы напряжения сдвига в турбулентном сдвиговом течении вызываются переносом завихренности, были развиты Дж. Тейлором в 1915 году для двумерных течений и в 1932 году - для трехмерных течений.

1. МДВ при моделировании свободных сдвиговых турбулентных движений жидкости

При построении математической модели турбулентности будем исходить из сложившегося к настоящему времени понимания ее как иерархии вихрей разного масштаба. При больших числах Рейнольдса наблюдаются пульсации параметров с масштабами от самых больших до весьма малых. Крупномасштабная турбулентность определяется формой обтекаемого тела или сопла, из которого истекает струя, режимом истечения, состоянием внешней среды. Характеристики мелкомасштабной турбулентности в значительной степени описываются универсальными закономерностями. Крупномасштабная турбулентность в основном определяется силами инерционной природы, вследствие чего силами вязкости здесь можно пренебречь. При описании мелкомасштабной

турбулентности в струях и следах на определенном этапе следует вводить в рассмотрение механизм молекулярной вязкости.

Будем моделировать обтекание тела, вихревой след и поверхность струи с помощью дискретных вихрей и решать соответствующую задачу обтекания или истечения струи в нестационарной постановке. Такой подход позволил описывать как возникновение свободных вихрей, так и моделировать их движение, включая процесс распада пелены и образования вихревых ансамблей.

Первая попытка связать возникновение турбулентности с неустойчивостью принадлежит Л.Д. Ландау, соответствующая гипотеза была высказана им еще в 1944 году. Одна из новых идей, получивших сравнительно недавно права гражданства в механике - открытие нерегулярных колебаний в детерминированных динамических системах. Оказалось, что в сравнительно простых системах без видимых случайных источников возмущений возможны сложные, непредсказуемые движения. При этом тенденции к порядку или хаосу в подобных системах обусловлены устойчивостью или неустойчивостью [17].

В настоящее время можно говорить о завершении формирования самостоятельного раздела механики сплошных сред - вихревой механики жидкости и газа. Это - обширные области аэродинамики и гидродинамики, в которых решающая или во всяком случае значительная роль принадлежит влиянию вихревых следов и вихревых границ. В ней МДВ служит адекватным существо проблемы математическим описанием изучаемых явлений. Весьма важно, что МДВ - естественное, удобное и очень эффективное соединение трех сторон проблемы: физики, математики и вычислений на ЭВМ. Очень важным, имеющим фундаментальное значение, является следующее положение: вихревые подходы позволяют в известной мере дать замкнутое математическое описание турбулентного движения в струях и следах.

Расчет вихревой структуры турбулентного следа (определение положений свободных вихрей) ведется путем решения систем дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\tau} = \frac{u_i}{u_0}, \quad \frac{d\bar{y}_i}{d\tau} = \frac{v_i}{u_0}, \quad \frac{d\bar{z}_i}{d\tau} = \frac{w_i}{u_0}, \quad i=1, \dots, N, \quad (1)$$

где i - номер свободного вихря; N - число вихрей; u_i, v_i, w_i - скорости в вершинах вихревой рамки, найденные с учетом влияния всех вихрей; $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ - безразмерные координаты; τ - безразмерное время. Полное решение задачи об истечении струи (или обтекании тела) содержит два взаимосвязанных этапа: решение системы линейных уравнений для циркуляции суммарных вихрей на поверхности тела, которые соответствуют граничным условиям о непротекании, и определение положений свободных вихрей. Строго говоря, то и другое следует осуществлять совместно, однако обычно это делается последовательно, с задержкой каждый раз на один временной шаг $\Delta\tau$.

Рассматривается весь процесс формирования течения (например, с начала истечения струи). Турбулентная струя (след) моделируется с помощью свободных дискретных вихрей, число которых все время возрастает и может достигать (в зависимости от объема памяти ЭВМ) многих сотен и даже тысяч. Одной из кардинальных является проблема корректного построения вихревых следов и описания макроструктур турбулентных струй. МДВ позволил воспроизвести такие тонкие явления, как сворачивание вихревой пелены в жгуты, образование начального вихря Прандтля, формирование вихревой дорожки Кармана и т.д.

Важной особенностью МДВ является то, что в процессе расчетов происходит отбор возможных («устойчивых») решений. Он может инициироваться специально путем введения возмущений. Но и без этого все алгоритмы в том или ином виде содержат неявные источники возмущений. Например, из-за того, что число свободных вихрей при развитии истечения струи растет. Поэтому даже если картина обтекания тела «в большом»

периодична, начальные условия в соответственные моменты времени не будут строго повторяться. Кроме того, в задачах с симметричными условиями «источником возмущений» бывает разная последовательность расчетов скоростей или циркуляций в симметричных точках. Отметим также, что изучение процесса формирования макроструктур при расчете истечения плоской струи показало явно выраженные когерентные структуры.

В правой части уравнений (1) стоят безразмерные скорости, получающиеся в результате суммирования средних скоростей набегающего потока и их флуктуаций, а также вызванные вихрями на теле и свободными вихрями следа или струи [1, 2, 4, 11, 21, 22]. Задача о развитии следа за телом (об истечении струи) решается совместно с разнесением на расчетный шаг по времени $\Delta\tau$ и определением циркуляции вихрей, заменяющих тело (поверхность сопла). Для вихрей учитываются граничные условия о непротекании поверхности тела (поверхности сопла).

Турбулентные струи и следы, строго говоря, четырехмерны (три координаты и время). Иначе говоря, даже плоскопараллельные и осесимметричные отрывные и струйные течения ввиду неустойчивости вихревых образований приобретают на некотором расстоянии от начального участка пространственный характер. Численный эксперимент, основанный на полной пространственной модели, подтверждает это. Итак, основным источником возникновения турбулентности при больших числах Рейнольдса является движение большого числа свободных дискретных вихрей. Процесс разрушения регулярных вихревых структур носит трехмерный характер, причем решающую роль в нем играют силы инерционной природы.

В МДВ реализуются два механизма диссипации энергии (диффузии вихрей).

1. Движение свободных вихрей описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (1). В МДВ нельзя обычным образом вычислять скорости вблизи вихрей в «зоне дискретности» ввиду сингулярности формулы Био - Савара ($u_i = \Gamma_i / 2\pi r$), а если свободный вихрь Γ_i попадает в «зону дискретности» Γ_j , необходимо «сглаживание» скоростей, что эквивалентно соответствующему уменьшению Γ_i, Γ_j . Это ведет к срезанию пиков в скоростях, что можно трактовать как «численную диффузию» в МДВ (рис.1).

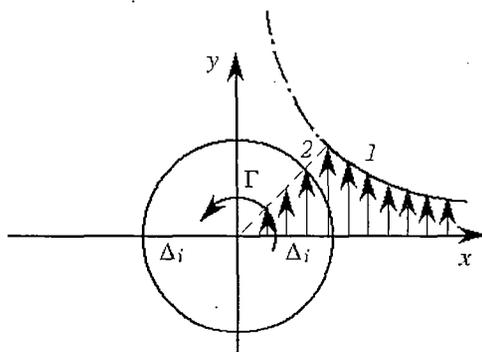


Рис. 1. Скорости, индуцированные вихрем вне и внутри зоны дискретности: 1 - закон Био - Савара; 2 - линейный профиль скорости в зоне дискретности радиусом $r_0 = \Delta_i$

2. При численном интегрировании уравнений (1) на каждом шаге $\Delta\tau$ вместо формул

$$\bar{x}_i^{s+1} = \bar{x}_i^s + \int_{\tau_s}^{\tau_s + \Delta\tau} u_i(\tau_1) d\tau_1, \dots \quad (2)$$

в методе Эйлера используются такие

$$\bar{x}_i^{s+1} = \bar{x}_i^s + \bar{u}_i^s \Delta\tau, \dots$$

то есть вместо (1) решаются уравнения типа

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\tau} = \bar{u}_i + \varepsilon_x, \quad \frac{d\bar{y}_i}{d\tau} = \bar{v}_i + \varepsilon_y, \quad \frac{d\bar{z}_i}{d\tau} = \bar{w}_i + \varepsilon_z,$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - малые случайные функции.

Отметим следующие особенности развиваемой концепции. В максимальной степени используются математические модели, основанные на схеме идеальной среды. Нестационарные подходы, обогащенные введением в рассмотрение течений с поверхностями тангенциальных разрывов, позволили раскрыть новые потенциальные возможности указанной схемы. В ряде случаев требуется учет вязких отрывов или диффузии свободных вихрей. Тогда дополнительно привлекаются уравнения нестационарного пограничного слоя [3, 8]. Но и при этом использование численных методов идеальной среды значительно повышает эффективность расчетов.

В МДВ расчетные схемы обтекания различных тел конструируются с помощью простейших вихревых элементов (вихревой отрезок, кольцевой и подковообразный вихри, замкнутые четырехугольные и треугольные вихревые рамки). Очень важно, что индуцируемые ими скорости удовлетворяют уравнению неразрывности, поэтому далее это уравнение можно исключить из рассмотрения. Все используемые в расчетах вихревые элементы строятся с учетом следующих известных **теорем** о вихрях.

***Теорема 1.** Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкой средой, во времени не изменяется.*

***Теорема 2.** Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему вихревую нить, постоянна вдоль длины нити.*

И присоединенные, и свободные вихри должны удовлетворять этим теоремам.

При конструировании следов в виде вихревых поверхностей и жгутов необходимо удовлетворять следующим **условиям**.

***Условие 1.** Давление на свободных вихревых поверхностях изменяется непрерывно.*

***Условие 2.** При установившемся движении вихревые линии направлены по линиям тока.*

***Условие 3.** При неустановившемся движении свободные вихри движутся по траектории жидких частиц вместе с ними.*

Выявились два преимущества метода, особенно четко видные в рамках схемы идеальной несжимаемой жидкости. Во-первых, он обладает уникальными возможностями по выстраиванию вихревых следов и свободных границ, по отслеживанию их эволюции в процессе развития. Во-вторых, здесь существенно снижается размерность задачи, поскольку нужно следить не за всем пространством, а только за вихрями в следе (струе) и на поверхности тела.

Анализ рассматриваемых задач потребовал определенного расширения понятий, связанных с их математическими постановками, порядком расчетов и особенностями реализации вычислений. Так, изучение сингулярных уравнений теории крыла было бы невозможно без введения понятия главного значения интеграла в смысле Коши. Еще более общим является класс нестационарных задач, в которых учитывается распад вихревых пелен и моделируются турбулентные структуры. Здесь проблема связи схемы явления и организации вычислений оказывается еще более глубокой.

Будем моделировать след или границы струн дискретными вихрями (в плоском случае - точечными вихрями, в пространственном - замкнутыми вихревыми рамками постоянной циркуляции вдоль размаха). Частью краевой задачи обтекания тела и истечения струи является расчет движения этих свободных вихрей под воздействием поля скоростей, важнейшими компонентами которых являются те, которые индуцируют они сами. Однако согласно закону Био - Савара последние сингулярны - они стремятся к бесконечности по мере приближения к оси каждого вихревого отрезка. Из-за этого задача Коши, к которой сводится изучение вихрей, оказывается некорректной и требуется ее регуляризация. Первый шаг в решении этой проблемы очевиден: в МДВ есть

«запретная зона», в которой нельзя определять скорости, вызванные дискретными вихрями, по формуле Био - Савара (см. выше). Это - зона дискретности Δ , определяемая расстоянием от вихря до ближайшей расчетной точки. Наиболее естественно во внутренних областях принять линейный закон экстраполяции скоростей от собственных вихрей, положив на самой оси вихревого отрезка скорости равными нулю (см. рис.1). Тогда поле скоростей будет всюду удовлетворять условию Липшица, а задача Коши будет корректна.

Для расчета статистических характеристик турбулентности следует прежде всего вычислить средние значения компонент скорости $\langle u_i \rangle$ и давления $\langle p \rangle$ и их пульсации $u_i'(\tau)$ и $p'(\tau)$ по формулам

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t+\tau) d\tau, \quad \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t+\tau) d\tau, \quad i=1, 2, 3,$$

$$u_i'(\tau) = u_i - \langle u_i \rangle, \quad p'(\tau) = p - \langle p \rangle,$$

после чего определяются и другие характеристики: нормальные и сдвиговые реинольдсовы напряжения, коэффициенты корреляции, спектры и пр.

2. Постановка задачи расчета турбулентных струй и следов

Рассмотрим для определенности истечение трехмерной струи в затопленное пространство. Пусть идеальная несжимаемая жидкость заполняет бесконечное пространство, разделенное жесткой непроницаемой стенкой S (рис. 2, а). Введем

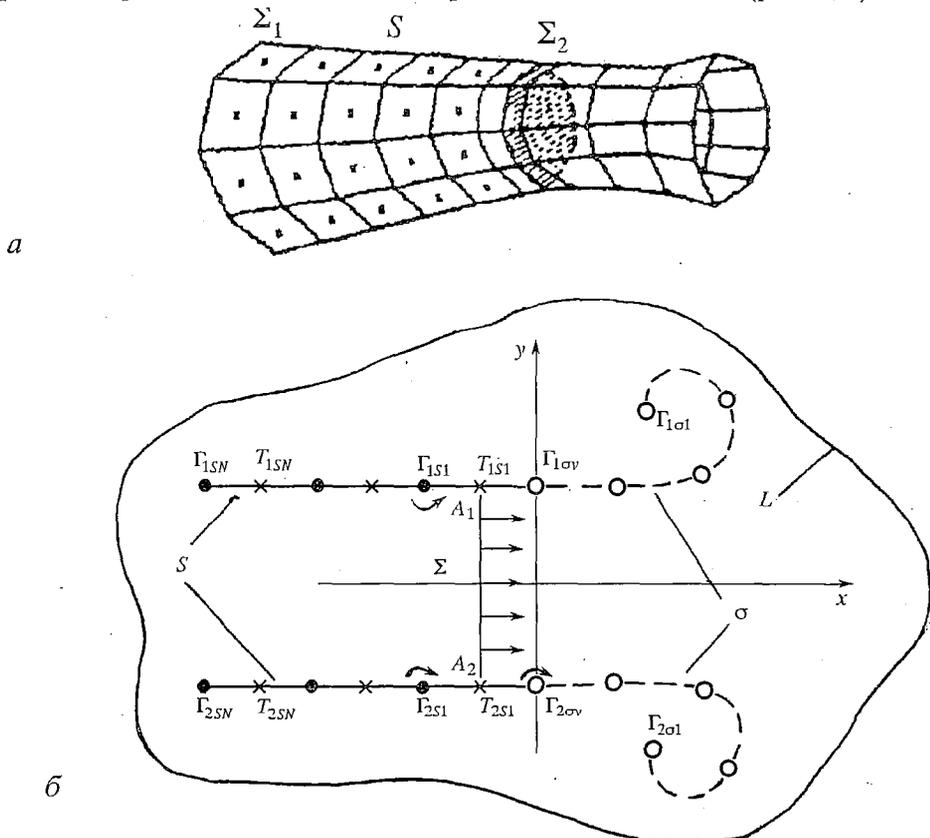


Рис. 2. Расчетная нестационарная модель истечения трехмерной струи Σ_2 из сопла S (а). Здесь волнистые линии - вихри, а крестикки - точки коллокации, где выполняется условие непротекания. Расчетная модель двумерной струи (б)

декартову систему координат, направив Ox по продольной оси поверхности S . Поперечные сечения $x = \text{const}$ (входное и выходное) обозначим Σ_1 и Σ_2 . Введем безразмерные координаты и время, взяв за характерный размер r_0 половину диаметра сечения Σ_2 и за характерную скорость - среднюю скорость истечения в сечении Σ_2

$$\bar{x}=x/r_0, \quad \bar{y}=y/r_0, \quad \bar{z}=z/r_0, \quad \tau=tu_0/r_0.$$

Объемный расход жидкости через сечение Σ_2 будем считать заданной функцией времени

$$Q=Q(t) \text{ или } Q=\text{const.}$$

Задачу об истечении жидкости в затопленное пространство будем решать в полной нестационарной постановке, полагая, что процесс начинается при $\tau = 0$ и плотности в струе и окружающей ее среде одинаковы. На поверхности S должно выполняться условие о непротекании, а на боковой границе струи - об отсутствии перепада давления. Вне тела и границы струи параметры жидкости должны удовлетворять уравнениям Эйлера и неразрывности. Заменим поверхность тела S и границу развивающейся струи вихревым слоем. От непрерывного распределения перейдем к дискретному и станем решать задачу методом дискретных вихрей. При этом граничные условия непротекания будут удовлетворяться в конечном числе точек на поверхности тела. Если обеспечить замкнутость вихревых систем и выполнение теорем о постоянстве циркуляций во времени, то поле скоростей, вызванное системой, потенциально и будет удовлетворять всем уравнениям гидродинамики. Остается обеспечить выполнение граничных условий на S и условия Чаплыгина - Жуковского о конечности скоростей на выходных кромках сопла. Решение задачи сводится к определению положения свободных вихрей и их циркуляции в каждый момент времени, а затем к расчету полей скорости и давления с последующим расчетом статистических характеристик турбулентности.

Заметим, что дискретная модель свободных вихрей основывается фактически на обобщении условия непрерывности движения по обе стороны вихревой поверхности. Здесь обеспечиваются требования движения вихрей по траекториям соответствующих частиц жидкости и сохранения циркуляции свободных вихрей.

Расчет турбулентных характеристик следов при отрывном обтекании тел или несущих поверхностей требует решения полной нестационарной задачи. При этом внешние условия, геометрия тела, закон движения считаются известными. Кроме того, на поверхности тела должны выполняться граничные условия о непротекании. При огибании острых кромок тонкого крыла или изломов на поверхности тела скорости и давления в идеальной жидкости обращаются в бесконечность. Постулат Чаплыгина - Жуковского о конечности скорости в этих точках устраняет указанную некорректность. Однако, если таких кромок больше одной, с остальных для обеспечения данного условия должны сходиться вихревые пелены. Нахождение циркуляций сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

При поперечном плоском обтекании гладких тел конечной толщины на первый план может выйти роль вязких отрывов. Строго говоря, анализ отрывного обтекания гладких тел, особенно таких, как круговой цилиндр, вообще невозможен без учета вязких эффектов. Определение места отрыва, интенсивности и положения первого свободного вихря, сходящего в поток с поверхности тела, потребовало дополнения расчетных схем моделью нестационарного пограничного слоя.

Автоматически в процессе установления выявляется предельная структура следа или струи «в большом». Она может быть одного из трех типов: стационарной, периодически изменяющейся во времени или обладающей

нерегулярной временной зависимостью. Примером стационарных структур могут служить боковые жгуты на крыльях при безотрывном обтекании. Периодические вихревые структуры типа дорожек Кармана наблюдаются при поперечном обтекании пластины или кругового цилиндра. Упорядоченные (когерентные) структуры иного вида образуются при истечении струи в затопленное пространство.

Остановимся теперь на вычислении давления. Поле давления вне тела в зонах, где существует потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$, определяется с помощью интеграла Коши - Лагранжа

$$p = \rho \left[f_*(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right],$$

где $f_*(t)$ - некоторая функция времени, которая находится в какой-либо точке (обычно на бесконечности). Однако в зонах, заполненных вихрями (внутри следа или струи), потенциал скорости не существует. Здесь приходится обращаться к уравнениям движения Эйлера, разрешенным относительно градиента давления,

$$\nabla p = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} \right],$$

$$\mathbf{u} = iu + jv + kw, \quad \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

В ряде случаев для «визуализации» течения используется способ отмеченных частиц. Он позволяет получить ценную информацию о характере течения, о вовлечении в турбулентное движение незавихренной жидкости. Практически он сводится к тому, что в каждый момент времени с шагом Δt на срезе сопла фиксируется положение 10-20 частиц и далее прослеживается их перемещение вдоль и поперек потока.

Рассмотрим важный вопрос: как моделировать движение свободных вихрей, когда они сближаются столь тесно, что оказываются в зонах дискретности друг друга. При этом их индуктивное взаимодействие ослабляется благодаря регуляризации (см. рис. 1), и такое «спаренное» состояние может сохраняться долго, неоправданно усложняя расчеты. В этом случае логично производить объединение близких вихревых отрезков. Данный прием, естественный для дискретной идеологии, не только улучшает процесс расчетов, но и расширяет возможности моделей путем введения новых способов трансформации вихревых структур.

Еще одна трудность: как справиться с нарастающим числом свободных вихрей, все время сходящих в поток. Чтобы осреднение по времени было законно, необходимо вести счет достаточно продолжительное время. Оно тем больше, чем дальше от тела отстоит изучаемый участок следа или струи. Хотя алгоритмы для определения индуктивных скоростей от вихревых модулей довольно просты и, главное, универсальны, численный анализ трехмерных турбулентных струй и следов наталкивается на серьезные трудности вычислительного характера. Здесь на помощь приходит идея объединения далеких вихрей. Если расстояние от точки, где ищется скорость, до двух вихрей много больше расстояния между ними, эти вихри можно объединить и заменить одним вихрем суммарной циркуляции.

Заметим, что два последних правила относительно объединения очень близких или весьма удаленных вихрей привносят в математические модели еще один новый элемент. Его можно трактовать как механизм, в определенном смысле похожий на процесс диффузии вихрей.

Рассмотрим теперь более подробно расчетные формулы для определения характеристик плоской турбулентной струи. При этом жесткие стенки сопла S моделируются (рис. 2, б) системой равноотстоящих точечных вихрей. Γ_{1st} и

Γ_{2si} ($i = 1, \dots, N$) и расположенных посредине между ними контрольных точек T_{1si} и T_{2si} . Боковые границы струи σ моделируются двумя системами свободных вихрей: $\Gamma_{1\sigma i}$ и $\Gamma_{2\sigma i}$, где $i = 1, \dots, N$; $\tau_v = \nu \Delta t$ ($\nu = 1, \dots$) - расчетный момент по времени.

В расчетные моменты времени τ_v неизвестными являются циркуляции вихрей на стенках Γ_{1si} , Γ_{2si} ($i = 1, \dots, N$) и циркуляции двух оторвавшихся вихрей $\Gamma_{1\sigma v}$, $\Gamma_{2\sigma v}$. При этом вихри Γ_{1s1} и $\Gamma_{1\sigma v}$ (Γ_{2s1} и $\Gamma_{2\sigma v}$) располагаются на равном расстоянии от контрольной точки T_{1s1} (T_{2s1}), что обеспечивает сходимость интеграла типа Коши в смысле главного значения.

Рассмотрим, как выполняются условия, указанные в постановке задачи.

а. В каждый расчетный момент времени τ_v условие непротекания в контрольных точках на поверхности сопла T_{1si} и T_{2si} ($i = 1, 2, \dots, N$) эквивалентно системе $2N$ алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \{ \sum W_{ksi}(T_{csj}) \Gamma_{ksi} + \sum W_{k\sigma i}(T_{csj}) \Gamma_{k\sigma i} \} + w_{0n}(T_{csj}) = 0, \quad (I)$$

$$c=1,2; j=1, \dots, N,$$

где $w_{ksi}(T_{csj})$, $w_{k\sigma i}(T_{csj})$, $w_{0n}(T_{csj})$ - нормальные составляющие безразмерной скорости, индуцируемые вихрями и течением в контрольных точках T_{csj} .

б. Уравнение расхода в дискретном виде

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \{ \sum_{-1}^1 \Gamma_{ksj} \int_{-1}^1 w_{xksj}(y_0) dy_0 + \sum_{i=1}^N \Gamma_{k\sigma i} \int_{-1}^1 w_{xk\sigma i}(y_0) dy_0 + \int_{-1}^1 w_{0x}(y_0) dy_0 \} = Q(\tau_v), \quad (II)$$

где w_{xksj} , $w_{xk\sigma i}$, w_{0x} - продольные составляющие безразмерной скорости; $Q(\tau_v)$ - заданный расход через сопло; интегрирование происходит в одном из сечений, например в сечении $A_1 A_2$ (см. рис. 2, б).

в. Выполнение условия Чаплыгина - Жуковского о конечности скорости на кромках сопла обеспечивается тем, что контрольные точки T_{1s1} и T_{2s2} выбраны в непосредственной близости от среза сопла и заданы как место схода вихревого слоя.

г. Отсутствие перепада давления на поверхностях обеспечивается тем, что свободные вихри $\Gamma_{1\sigma j}$ и $\Gamma_{2\sigma j}$ перемещаются с местной скоростью потока с сохранением циркуляции.

д. Так как число неизвестных циркуляций, подлежащих определению, равно $2N+2$, а число уравнений (I)-(II) равно $2N+1$, то для замыкания системы необходимо еще одно уравнение. Оно получается из условия равенства нулю циркуляции по жидкому контуру L , охватывающему всю вихревую систему, состоящую из сопла S и боковой границы σ (см. рис. 2, б)

$$\sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_{ksi} + \sum_{i=1}^N \Gamma_{k\sigma i} \right) = 0. \quad (III)$$

Найденные из системы (I)-(III) циркуляции определяют скорость в произвольной точке \mathbf{r} пространства струи

$$w_{x,y}(\tau_v, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{i=1}^N w_{x,y,ksi}(\mathbf{r}) \Gamma_{ksi} + \sum_{i=1}^N w_{x,y,k\sigma i}(\mathbf{r}) \Gamma_{k\sigma i} \right\},$$

где $w_{x,y,ks\sigma i}(\mathbf{r})$ - безразмерные составляющие скоростей, вычисляемые в соответствии с законом Био - Савара.

3. Динамическая система свободных вихрей

Рассматриваемая теория турбулентных струй и следов опирается на представление о том, что источниками турбулентности являются свободные вихри. Чтобы создать модель сценария перехода от детерминированного, упорядоченного течения к развитой турбулентности, прежде всего необходимо остановиться на математическом описании соответствующей динамической модели. С этой целью рассмотрим подробнее дифференциальные уравнения движения свободных вихрей. В безразмерном виде для каждого дискретного вихря можно написать

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\tau} = \bar{u}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \tau), \quad \frac{d\bar{y}_i}{d\tau} = \bar{v}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \tau), \quad \frac{d\bar{z}_i}{d\tau} = \bar{w}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \tau).$$

Если изучается плоскопараллельное течение, то i - номер свободного вихря на плоскости, в осесимметричном потоке i - номер кольцевого вихря. Основным элементом в пространственном случае будут вихревые отрезки, из которых, в свою очередь, конструируются вихревые рамки. Их движение определяется скоростями жидкости в концах отрезков i , которые одновременно являются вершинами вихревых рамок.

При описании перехода от порядка к хаосу удобно обращаться к пространству состояний жидкости (фазовому пространству), каждая точка которого отвечает полю скоростей в ней. Для жидкости, строго говоря, это бесконечномерное пространство, причем стационарные течения будут изображаться точками, а периодические - замкнутыми циклами. Поскольку в МДВ переход от порядка к хаосу и весь основной сценарий развития турбулентности определяется движением свободных вихрей, то здесь можно ограничиться многопараметрическим, но конечномерным пространством, в котором фазовыми координатами являются скорости движения свободных вихрей или их координаты (либо то и другое вместе). По мере развития течения вихревой след (струя) обогащается все новыми вихрями. Если на каждом расчетном шаге по времени $\Delta\tau$ в поток сходит m свободных вихрей, то к расчетному моменту τ_s их общее число будет равно

$$N_s = ms, \quad \tau_s = s\Delta\tau.$$

Итак, рассматриваемая динамическая система состоит из нарастающего счетного множества дискретных вихрей. Указанным выше способом, выделив главные механизмы влияния, удалось перейти к более простой динамической системе. Она содержит фиксированное число дискретных вихрей N , а влияние остальных учитывается приближенно, так как оно сравнительно невелико и его описывают достаточно гладкие функции.

Реализации поля скорости, полученные в численном расчете, удивительно похожи на экспериментальные: на фоне низкочастотных пульсаций видны хаотические возмущения, вызванные нерегулярным движением отдельных дискретных вихрей и их небольших групп. Объяснение такому поведению дают открытые сравнительно недавно нерегулярные колебания в детерминированных системах, получившие название «детерминированный хаос». Указанное свойство динамических систем, состоящих даже из небольшого числа свободных вихрей, является ключевым в развиваемой концепции.

Так, численный эксперимент, в котором изучается плоское движение трех или четырех дискретных вихрей одинаковой циркуляции под влиянием ими же вызванных скоростей, показывает разнообразие тех возможностей, которые заложены в этих довольно простых системах. Расчеты показывают, что уже при числе вихрей $N=4$ может возникнуть детерминированный хаос [38]. Можно полагать, что при весьма большом числе вихрей, достигающем сотен и даже тысяч, возникновение стохастических режимов становится гораздо более вероятным (рис.3).

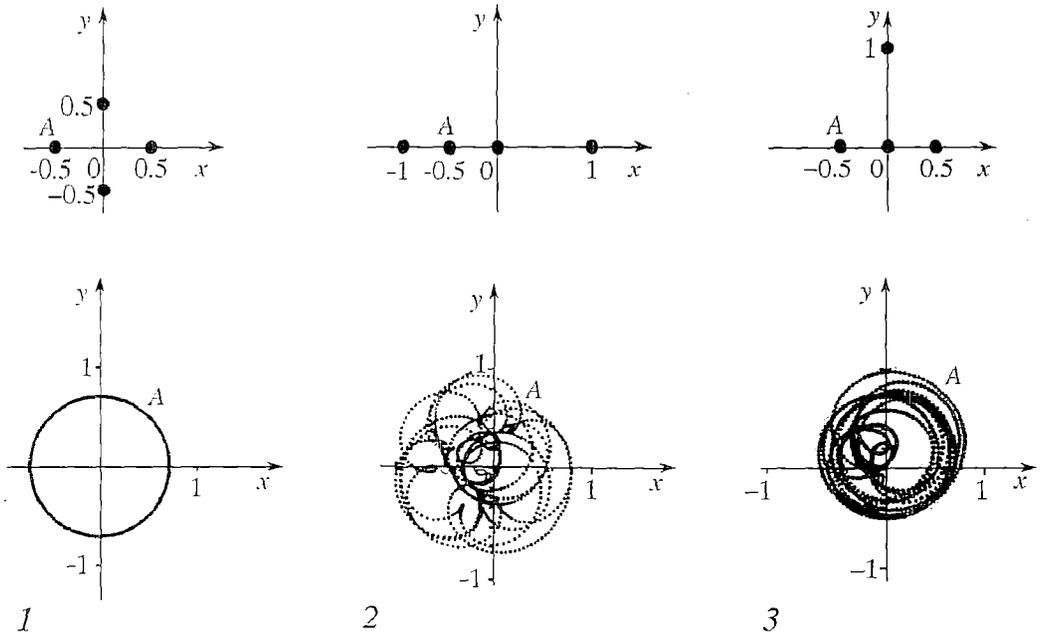


Рис. 3. Плоская задача о движении четырех вихрей одинаковой циркуляции при разных начальных положениях вихрей. Три режима: 1 - регулярный; 2 - квазипериодический; 3 - хаотический

В качестве примера рассмотрим задачу о движении четырех вихрей в безграничной жидкости. Для устранения сингулярности поля скорости дискретного вихря применим модель вихря с ядром постоянной завихренности (радиус ядра r_0). В этом случае движение системы четырех вихрей описывается следующими уравнениями:

при $r_{ij} > r_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum'_{j=1}^4 \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum'_{j=1}^4 \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2}, \end{array} \right.$$

при $r_{ij} \leq r_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum'_{j=1}^4 \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{r_0^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum'_{j=1}^4 \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{r_0^2}. \end{array} \right.$$

Здесь x_i, y_i - координата i -го вихря, Γ_j - циркуляция j -го вихря, $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$ и штрих у знака суммы означает, что $i \neq j$ (см.рис.1, $r_0 = \Delta_i$). Данная система является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{ij} \Gamma_i \Gamma_j \Phi(r_{ij}),$$

где

$$\Phi(r_{ij}) = \begin{cases} \ln r_{ij} - \ln r_0, & r_{ij} > r_0, \\ \frac{1}{2r_0^2} (r_{ij}^2 - r_0^2), & r_{ij} \leq r_0. \end{cases}$$

В процессе проведения расчетов движения четырех вихрей та или иная схема численного интегрирования может привести к изменению N , что эквивалентно превращению гамильтоновой системы в диссипативную [38].

Поскольку решение задачи о распространении двумерных турбулентных струй и следов методом дискретных вихрей сводится к численному интегрированию большого числа уравнений, возникает вопрос: не являются ли полученные в численном эксперименте статистические характеристики следствием неконтролируемых гауссовых процессов, протекающих в ЭВМ при счете? Иными словами, не является ли полученная турбулентность «машинной». Эти вопросы были детально рассмотрены в работе [25]. Рассмотрим основные предпосылки и выводы этой работы.

При счете на ЭВМ решение испытывает влияние случайного процесса округления, который с высокой степенью точности можно считать гауссовым. Шум округления представляет собой гауссов процесс с амплитудой, не превосходящей $5 \cdot 10^{-n}$, где n - число цифр после запятой. На основе известных результатов теории обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка был проанализирован статистический эффект влияния процесса вычислений на ЭВМ. Основной вывод состоит в том, что белый шум округления не дает рейнольдсовых напряжений сдвига, то есть $\langle u'v' \rangle = 0$; в то же время шум округления может порождать ненулевые значения нормальных рейнольдсовых напряжений, то есть $\langle u'^2 \rangle \neq 0$ и $\langle v'^2 \rangle \neq 0$. Следовательно, то обстоятельство, что численное моделирование турбулентных струй и следов дает отличающиеся от нуля значения $\langle u'v' \rangle$, удовлетворительно совпадающие с данными физического эксперимента (см. ниже раздел 5), свидетельствует о том, что моделирование описывает реальные, а не «машинные» турбулентные процессы.

4. Исследования по методике расчетов

Проверка достоверности математических моделей турбулентных струй и следов должна идти по двум направлениям. Одно из них естественно назвать внутренним контролем, второе - внешним. Внутренний контроль должен обеспечить корректность и надежность реализации моделей и алгоритмов с точки зрения математической, программной, компьютерной. Один из главных вопросов при этом заключается в выборе рациональных параметров расчетных схем. Численный эксперимент с четко продуманной методической направленностью позволяет получить конкретные рекомендации.

Внешний контроль должен ответить на самый важный и трудный вопрос: можно ли считать, что математические модели описывают реальные процессы в турбулентных струях и следах? Еще более тонкой является проблема установления пределов применимости моделей, выявление тех границ, в которых можно считать, что модели правильно описывают явления. Ответить на эти вопросы можно только опираясь на результаты численных и физических экспериментов.

Остановимся на некоторых результатах численных экспериментов, проведенных Н.В. Хлаповым в ЦАГИ, целью которых было установление рациональных параметров расчетных схем. К этим параметрам, в первую очередь, относятся шаг по времени Δt ; число дискретных вихрей N , заменяющих обтекаемое тело или сопло; временной интервал, в течение которого ведется

осреднение статистических характеристик струи или следа, мера дискретности. Наиболее простой и наглядный путь решения указанных методических задач заключается в систематическом проведении расчетов при разных значениях параметров схем и последующем анализе их влияния на конечные результаты. Как правило, это устанавливается по достижении практической сходимости результатов при уменьшении шага по времени Δt и увеличении числа свободных вихрей n , временного интервала осреднения T и длины сопла L . Все перечисленные параметры были определены для плоских и круглых струй.

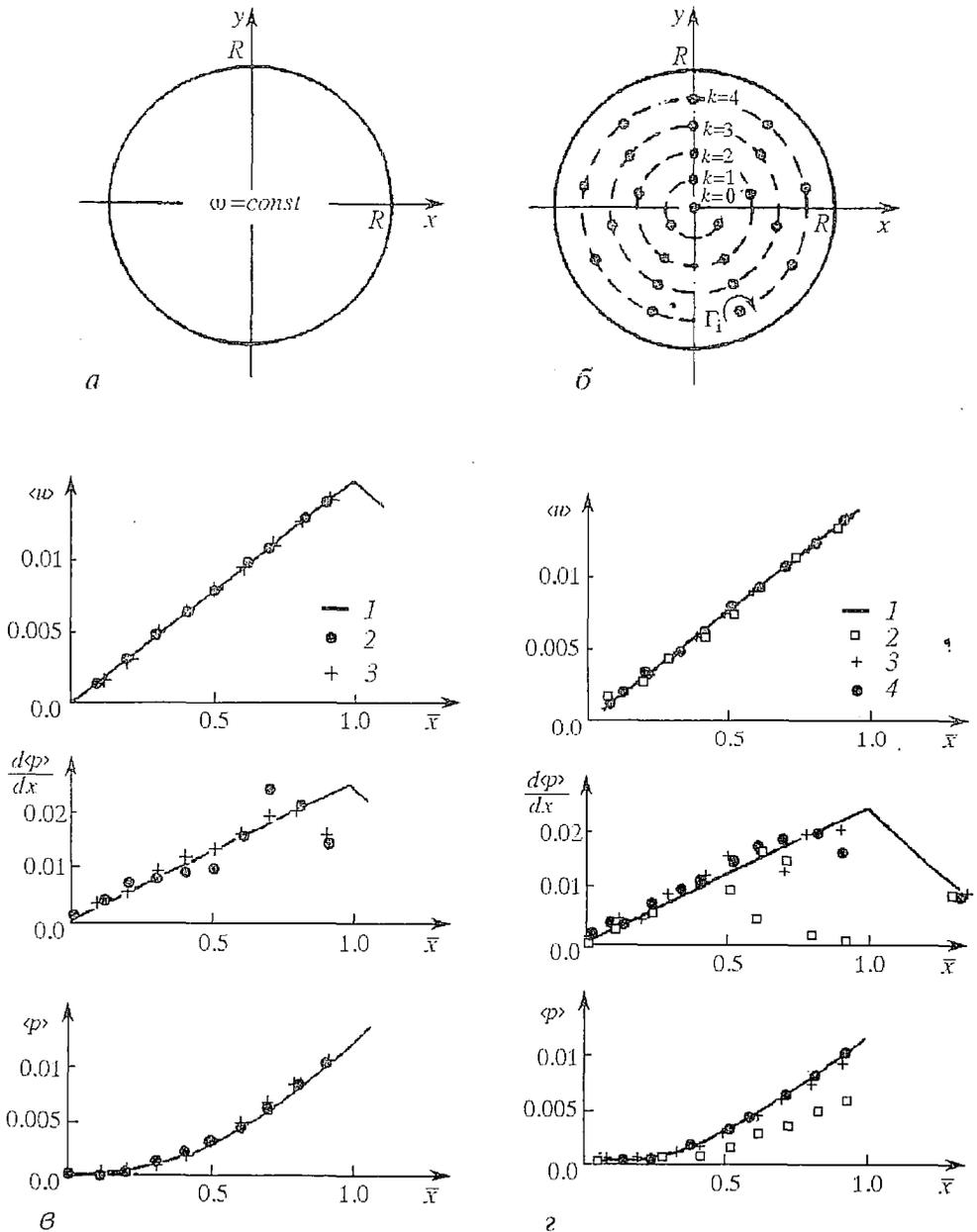


Рис. 4. Результаты расчета модельного течения: а - вихревой цилиндр; б - дискретный аналог вихревого цилиндра; сравнение приближенных и точных решений для скорости $\langle \omega \rangle$, давления $\langle p \rangle$ и градиента давления $d\langle p \rangle/dx$: а - 1 - точное решение; 2 - $N=100$, $\Delta=0.2$; 3 - $N=400$, $\Delta=0.2$; з - 1 - точное решение; 2 - $\Delta=0.05$, $N=400$; 3 - $\Delta=0.1$, $N=400$; 4 - $\Delta=0.2$, $N=400$

Кроме того, при выборе параметров расчетных схем было рассмотрено модельное течение, для которого известно точное решение. Речь идет о вихревом цилиндре радиуса R с равномерно распределенной внутри него завихренностью $\omega = \text{const}$ (рис. 4, а). В дискретном аналоге вихревого цилиндра вихревой объем заменялся дискретными вихрями одинаковой циркуляции Γ_i , равномерно распределенными по угловым координатам на каждой окружности (рис. 4, б). Безразмерные величины вводились следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{R}, \quad \bar{u} = \frac{uR}{\sum_{i=1}^N \Gamma_i}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho} [(\sum_{i=1}^N \Gamma_i)/R]^{-2}.$$

Численный эксперимент имел целью выбор необходимого числа вихрей N и зоны дискретности Δ . Последняя величина должна быть согласована со средним расстоянием между дискретными вихрями. Пример сопоставления рассчитанных значений скорости, давления и его радиального градиента с точным решением для цилиндрического вихря (рис. 4, в, г) свидетельствует об удовлетворительной точности предложенного алгоритма при $N=400$ и $\Delta = 0.2$.

На рис. 5 представлена зависимость спектральной плотности турбулентной энергии E от частоты для цилиндрического вихря, иллюстрирующая выполнение универсального «закона пяти третей»: $E(f) = \text{const} \cdot f^k$, где $k = -5/3$.

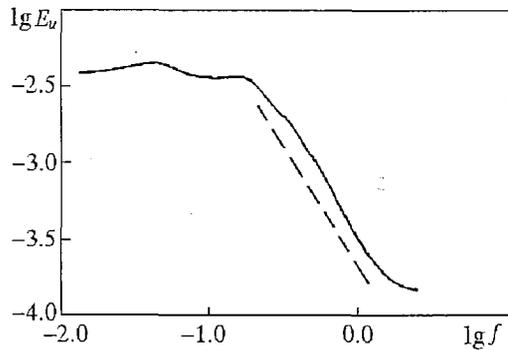


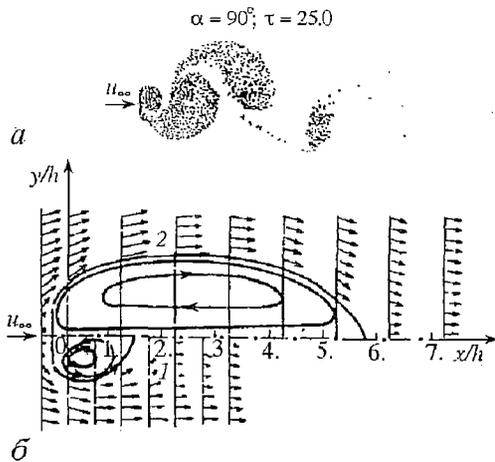
Рис. 5. Зависимость спектральной плотности турбулентной энергии E_u от частоты f ; штриховая линия - универсальный закон $k = -5/3$

5. Расчет плоских, осесимметричных и трехмерных турбулентных струй, следов и отрывных течений

В качестве иллюстрации возможностей изложенного подхода к моделированию свободных сдвиговых турбулентных течений рассмотрим результаты расчета для ряда важнейших течений.

5.1. Плоский турбулентный след за поперечно обтекаемой пластиной [3,11,34]. Как показывают расчеты, здесь возможны два режима обтекания: симметричный и несимметричный. Однако первый из них оказывается неустойчивым, в нем отсутствует поперечное перемешивание вихревых сгустков с положительной и отрицательной циркуляцией. Несимметричная вихревая структура плоского следа за пластиной в фиксированный момент времени показана на рис. 6, там

Рис. 6. Несимметричная вихревая структура в следе за поперечно обтекаемой пластиной (а): α - угол атаки пластины; τ - безразмерное время, за которое пластина с начала движения прошла 25 хорд; осредненные картины отрывного течения при несимметричном 1 и симметричном 2 режимах (б): u_∞ - скорость набегающего потока, h - хорда пластины



же представлены осредненные картины течения за пластиной при несимметричном (1) и симметричном (2) режимах. В первом случае зона обратных токов за пластиной намного короче. Изменение расчетных и опытных значений средних скорости и давления, а также двух компонент пульсаций скорости вдоль оси следа за пластиной показано на рис. 7.

Как известно, установка в плоскости симметрии следа разделяющей пластины приводит к симметризации течения. Этот эффект хорошо описывается в рамках излагаемого метода.

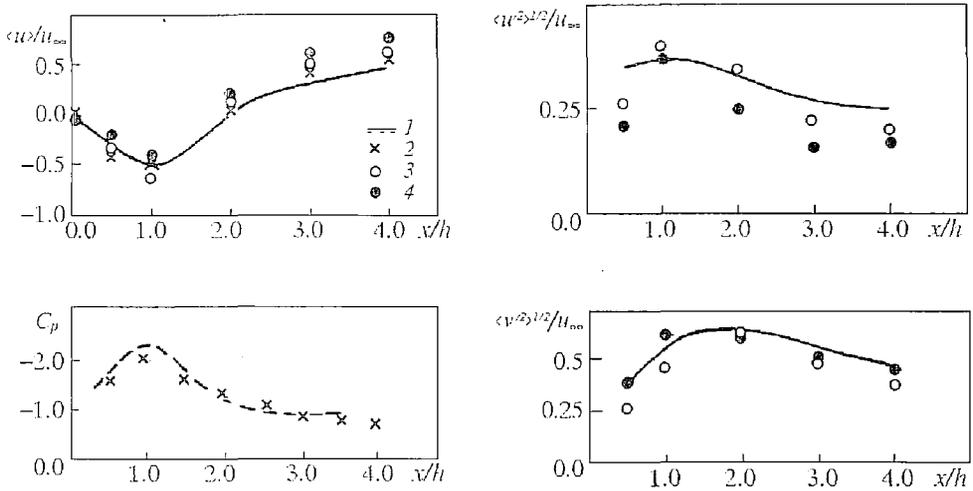


Рис. 7. Изменение вдоль оси следа за пластиной средней скорости $\langle u \rangle / u_{\infty}$, давления $c_p = \langle p \rangle / (0.5 \rho u_{\infty}^2)$, продольных $\langle u'^2 \rangle^{1/2} / u_{\infty}$ и поперечных $\langle v'^2 \rangle^{1/2} / u_{\infty}$ пульсаций скорости на участке протяженностью $x/h = (0.0 \div 4.0)$; 1 - эксперименты [44,45]; расчеты: 2 - [21], 3 - [34], 4 - [43]

5.2. Отрывное обтекание интерцептора [28]. Схема рассматриваемого течения представлена на рис. 8: Сравниваются экспериментальные [39] и расчетные профили средней скорости и продольные пульсации скорости в ряде сечений отрывной зоны, а также среднего давления $\langle c_p \rangle$ и интенсивности его пульсаций $\epsilon_p = (\langle c_p'^2 \rangle)^{1/2}$ на пластине. На рис. 9 приведено изменение коэффициента пространственной корреляции пристеночных пульсаций давления вдоль по потоку $R_{pp}(x_0, \Delta x)$ при трех значениях x_0/h . В верхней части рисунка справа представлены соответствующие экспериментальные значения R_{pp} .

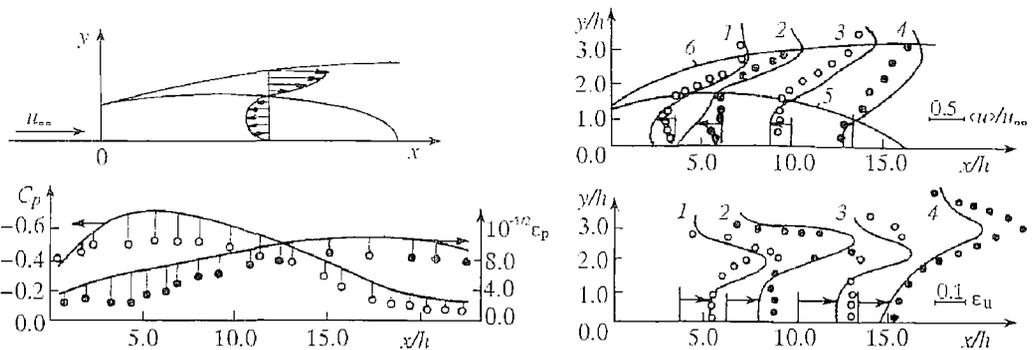


Рис. 8. Сравнение расчетных и опытных данных средних значений давления $\langle c_p \rangle$ и пульсаций давления $\epsilon_p = (\langle c_p'^2 \rangle)^{1/2} / (0.5 \rho u_{\infty}^2)$ на стенке в отрывной зоне за интерцептором, а также профилей средней скорости $\langle u \rangle / u_{\infty}$ и продольных пульсаций скорости $\epsilon_{11} = (\langle u'^2 \rangle)^{1/2} / u_{\infty}$; 1-4 - сечения, 5 - линия нулевых продольных скоростей, 6 - граница циркуляционной зоны

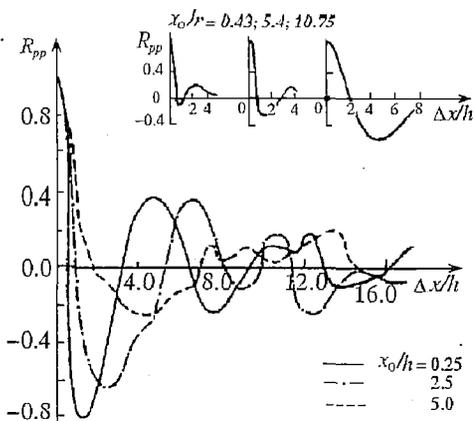


Рис. 9. Изменение коэффициентов корреляции пристеночных пульсаций давления вдоль по потоку $R_{pp}(x_0, \Delta x)$. В верхнем правом углу - данные эксперимента [39]

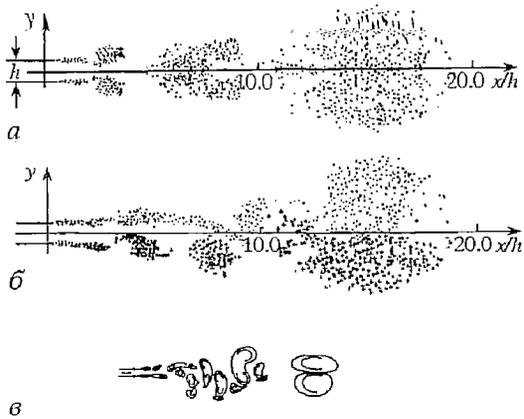


Рис. 10. Симметричные (а) и несимметричные (б) вихревые структуры плоской струи в момент времени $\tau = tu_0/h = 45$; когерентные вихревые структуры в момент времени $\tau = 85$ (в); справа - густки начальных вихрей

5.3. Плоские затопленные турбулентные струи. Как и в случае плоского следа за пластиной, расчеты показывают возможность реализации двух режимов истечения плоской струи из сопла - симметричного и несимметричного [4]. Соответствующие вихревые структуры в фиксированный момент времени $\tau = tu_0/h = 45$ представлены на рис. 10. Там же для фиксированных моментов времени показано расположение густков положительной и отрицательной завихренности, представляющих собой когерентные структуры, которые соответствуют несимметричной вихревой структуре.

В действительности реализуется несимметричная вихревая структура струи, соответствующая поперечному перемешиванию густков завихренности разного знака. Из представленного на рис. 11 сравнения расчета и эксперимента для средней скорости и эффективной толщины струи видно, что только в случае реализации несимметричной вихревой структуры обеспечивается удовлетворительное согласие расчета с экспериментом. Дальнейшие расчеты показали, что при этом условии обеспечивается удовлетворительное согласие с опытом следующих характеристик: профилей средних скорости и давления, среднеквадратичных значений пульсаций скорости, а также пространственных корреляций пульсаций скорости вдоль оси. В рамках данного подхода были получены также решения для струи в спутном потоке и для струи, истекающей из диафрагмы с острыми кромками [11].

5.4. Осесимметричные турбулентные струи [4, 11]. Численное решение данной задачи было получено для круглой струи. В качестве базового вихревого элемента было использовано вихревое кольцо. Однако жесткое условие осевой

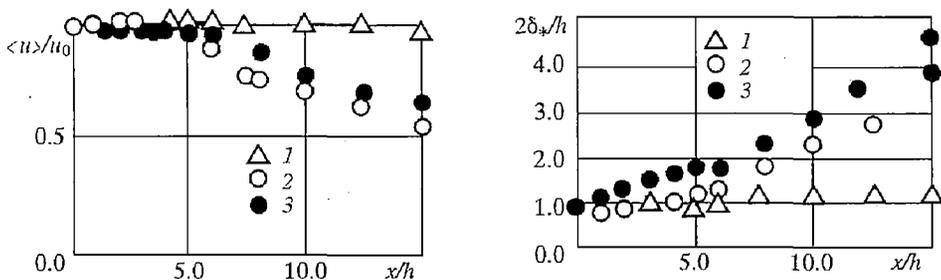


Рис. 11. Изменение скорости и эффективной толщины плоской струи вдоль по потоку: 1 - расчет для «симметричной» струи [37], 2 - расчет для «несимметричной» струи, 3 - эксперимент [46]

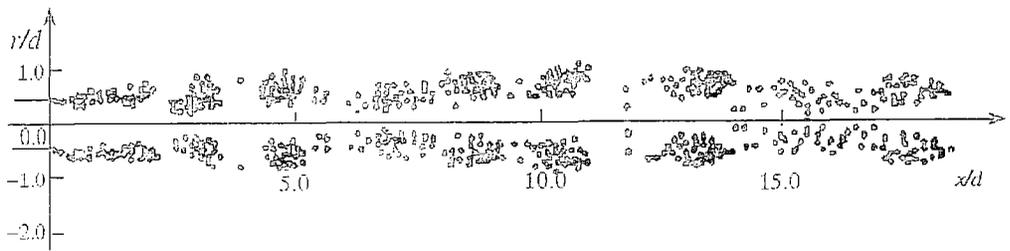


Рис. 12. Вихревая структура затопленной осесимметричной струи [4], d - диаметр сопла симметрии имело следствием очень слабое расширение струи. Таким образом, полученное решение оказалось справедливым только вблизи сопла, в пределах начального участка струи. На рис. 12 представлена вихревая структура круглой струи, на рис. 13 - изменение средней скорости $\langle u \rangle / u_0$ вдоль оси струи и эжекции

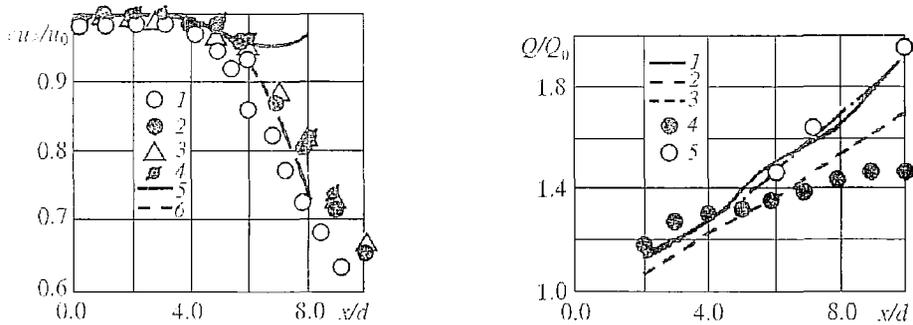
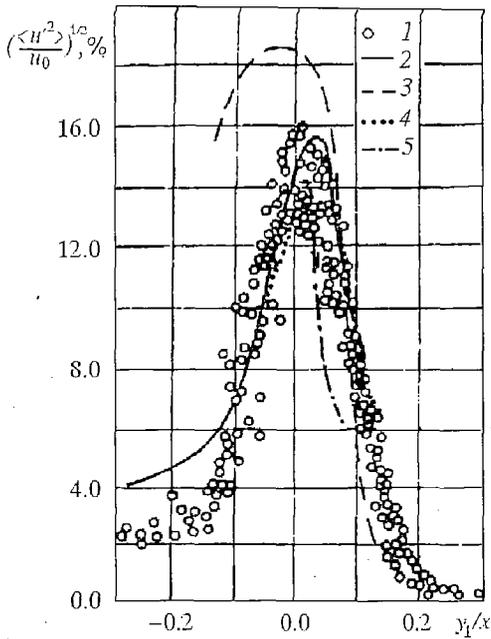


Рис. 13. Изменение средней скорости $\langle u \rangle / u_0$ и эжекции Q/Q_0 вдоль струи, истекающей из круглого сопла: 1-4 - эксперименты [36], 5 - расчет осесимметричной струи, 6 - расчет в трехмерной постановке

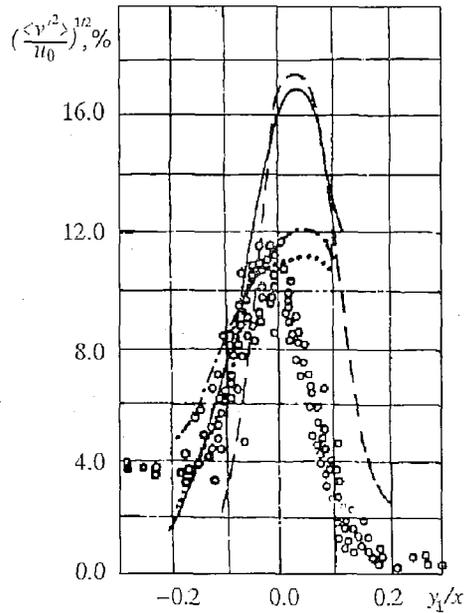
Q/Q_0 вдоль по потоку в сравнении с экспериментом для круглой струи [36]. Здесь совпадение расчета и эксперимента оказывается удовлетворительным только вблизи среза сопла (при $x/d < 5$), то есть в пределах начального участка. На рис.14 приведены расчетные и экспериментальные [40] профили продольных и радиальных пульсаций скорости в пределах начального участка. Здесь обращает на себя внимание худшее совпадение расчета с опытом для радиальных пульсаций по сравнению с продольными.

5.5. Трехмерные турбулентные струи. Решение для круглой струи в трехмерной постановке [11]. Как указывалось выше, в подавляющем большинстве случаев турбулентные течения жидкости существенным образом трехмерны. Это, в частности, относится к мгновенным характеристикам струй, истекающих из плоского и круглого сопел. С целью проверки этого утверждения были выполнены расчеты круглой струи при отказе от условия осевой симметрии, то есть в полной пространственной постановке. В качестве основного модуля использовались вихревые многоугольники, при этом границы струи моделировались вихревыми рамками и по мере растяжения вихревых отрезков, составляющих эти рамки, производилось их дробление на более мелкие.

Расчеты показали (рис. 15), что сходящиеся с кромки сопла почти круглые вихри (вихревые многоугольники) сохраняют свою азимутальную однородность на первых трех калибрах $x/d = (0.0 \div 3.0)$, после чего вихревые кольца приобретают звездообразную и пространственную структуру $x/d = (3.5 \div 6.0)$; далее, при $x/d > 6.0$, происходит стохастизация течения. При этом, в отличие от строго осесимметричного случая (см. рис. 13), здесь моделируется расширение струи и, соответственно, уменьшение средней скорости и увеличение эжекции вдоль по потоку; при этом заметно улучшается совпадение расчета с экспериментом для продольных и радиальных пульсаций скорости (см. рис.14) и, кроме того, рассчитываются азимутальные пульсации скорости.



а



б

Рис. 14. Профили интенсивности осевых (а), радиальных (б) и азимутальных (в) пульсаций скорости в слое смешения круглой струи ($y_1 = y - r_0$): 1 - эксперимент [40], $x/d = (1.0 \div 6.0)$; 2, 3 - расчеты осесимметричной струи; 4, 5 - расчеты круглой струи в трехмерной постановке

Важным критерием эффективности метода моделирования пространственных турбулентных струй служит их способность описать эффект переориентации большой и малой осей изотоп в поперечных сечениях струи, истекающей из сужающегося сопла прямоугольной или эллиптической формы или из диафрагмы с острыми кромками (рис. 16). Удовлетворительное решение этой задачи в настоящее время отсутствует [18, 20]. В то же время МДВ позволяет решить указанную задачу без каких-либо дополнительных предположений.

Результаты соответствующего расчета для струи, истекающей из сужающегося сопла прямоугольного сечения с отношением сторон в выходном сечении $\lambda = l/h = 2$, представлены на рис. 16. Здесь сравниваются данные расчета и эксперимента [41] для продольного изменения скорости на оси $\langle u \rangle / u_0$ и эффективных толщин струи $(\delta_{1/2})_z / d_*$ и $(\delta_{1/2})_y / d_*$ в плоскостях симметрии $y = 0$ и $z = 0$. Линейные размеры отнесены к эквивалентному диаметру $d_* = 2h(\lambda/\pi)^{1/2}$ круга, площадь которого равна площади сечения щели $F = hl$, а скорость $\langle u \rangle$ на оси струи - к средней скорости в выходном сечении сопла. Мы видим, что расчет правильно описывает эффект переориентации большой и малой осей изотоп в поперечных сечениях струи.

Для упрощения расчета здесь предполагалось, что через плоскости

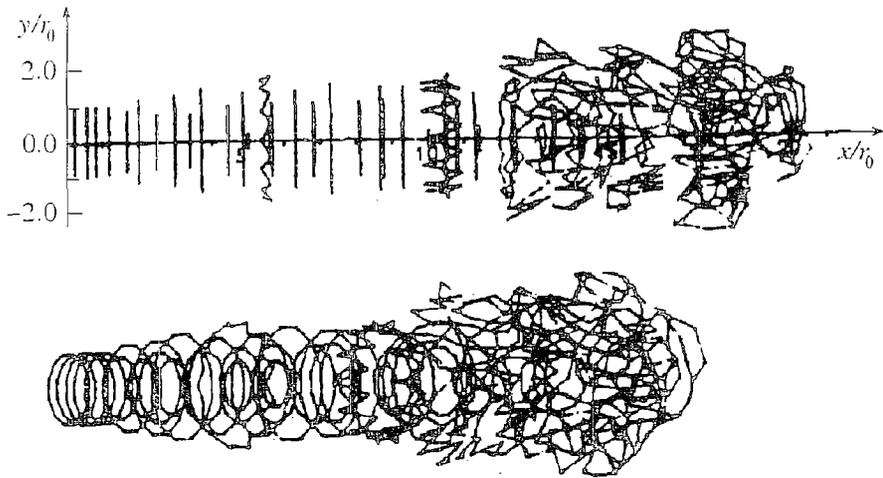


Рис. 15. Трехмерная вихревая структура круглой турбулентной струи в момент времени $\tau = tu_0/r_0 = 45$, r_0 - радиус сопла. Виды сбоку и под углом 30°

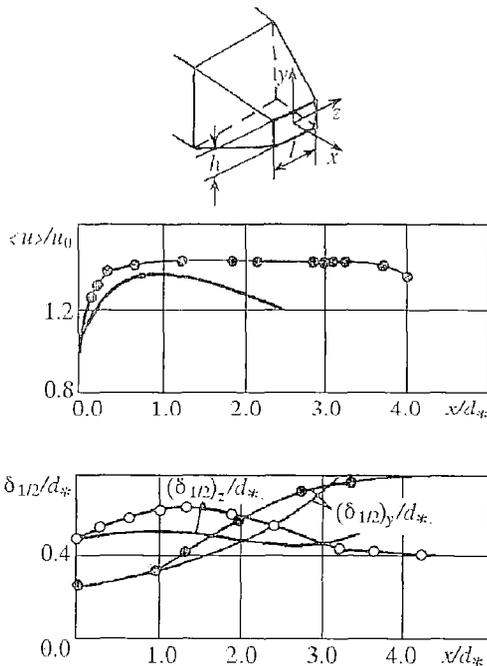


Рис. 16. Сравнение расчетных (сплошные кривые) и опытных [41] (кружочки) значений скорости на оси и характерных толщин в плоскостях симметрии $(\delta_{1/2})_y$ и $(\delta_{1/2})_z$ струи, истекающей из сужающегося сопла прямоугольного сечения с отношением сторон 2:1 в выходном сечении

Изложенные в настоящей статье результаты свидетельствуют об эффективности метода дискретных вихрей и перспективности его использования и совершенствования для моделирования разнообразных струйных и отрывных турбулентных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (Грант M2R 300).

симметрии $y = 0$ и $z = 0$ не происходит перетекание жидкости, то есть отсутствует турбулентный обмен. Можно полагать, что отказ от этого ограничения заметно улучшит согласование расчета с экспериментом. Отметим, что аналогичный эффект наблюдается также в случае трехмерного турбулентного следа [42]; он может быть описан с помощью МДВ.

5.6. Другие задачи. Приведенными выше примерами отнюдь не исчерпываются возможности моделирования свободных турбулентных течений с помощью МДВ. Перечислим другие задачи, которые были решены в рамках этого метода [11]: исследование периодического возбуждения турбулентных струй, когда расход жидкости через сопло меняется по заданному гармоническому закону $Q(t) = Q_0[1 + A \sin(2\pi ft)]$ с амплитудой A и частотой f ; моделирование периода формирования турбулентной струи; моделирование диффузии твердых инерционных частиц в турбулентных струях и следах; натекание турбулентных струй на экран; турбулентные струи в поперечном и встречном потоках; коаксиальные струи.

Нам представляется, что изло-

Библиографический список

1. Белоцерковский С.М., Нишин М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985.
3. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Нишин М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988.
4. Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. М.: Наука, 1989.
5. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.М., Давыдов Ю.М., Нишин М.И. Моделирование отрывных течений на ЭВМ. М.: АН СССР, «Кибернетика», 1984.
6. Belotserkovsky S.M. The theory of thin wings in subsonic flow. New York. Plenum Press. 1967.
7. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of discrete vortices // CRC Press. Boca Raton. Ann Arbor; London, 1993.
8. Belotserkovsky S.M., Kotskii V.N., Nisht M.I., Fedorov R.M. Two-dimensional separated flows // CRC Press. Boca Raton. Ann Arbor; London, 1993.
9. Belotserkovsky S.M. Digital simulation of separated and jet flows using discrete vortex method // IUTAM Symposium. Novosibirsk. 1990. P.97.
10. Belotserkovsky S.M. Study of the unsteady aerodynamics of lifting surface using the computer // Ann. Rev. Fluid Mech. 1977. Vol. 9. P.469.
11. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Наука, 1995.
12. Белоцерковский С.М., Скобелев Б.Ю. Метод дискретных вихрей и турбулентность. ИТПМ. Препринт № 10.1993. 39 с.
13. Власов Е.В., Гиневский А.С. Когерентные структуры в турбулентных струях и следах // Итоги науки и техники. Сер. «Механика жидкости и газа». Т. 20. ВИНТИ. 1986. С. 3.
14. Рабинович М.И., Суццик М.М. Когерентные структуры в турбулентных течениях // Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 56.
15. Fiedler H.E. Coherent structures // ADV Turbul. Proc., 1st Eur. Turbul. Conf. Lyon, 1-4 July. 1986. Berlin, 1987. P. 320
16. Hussain A.K.M.F. Coherent structures - reality and myth // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. № 10. P. 2816.
17. Бушмович Л.А. Когерентные структуры и нелинейная динамика // Когерентные структуры и самоорганизация океанич.движений. РАН. Ин-т океанологии. Москва, 1992. С. 62.
18. Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Теория турбулентных струй/ Под ред. Г.Н. Абрамовича. М.: Наука, 1984.
19. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов // М.: Машиностроение. 1969.
20. Shetz J. Injection and mixing in turbulent flow // Astronautics and Aeronautics. Vol. 88. AIAA, N.Y., 1990.
21. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Желанников А.И., Котовский В.Н. Моделирование на ЭВМ турбулентных струй и следов // Проблемы турбулентных течений. М.: Наука, 1987. С. 129.
22. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Хлапов Н.В. Моделирование на ЭВМ плоских турбулентных струй // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 3. С. 46.
23. Белоцерковский С.М., Нишин М.И. К исследованию турбулентного следа за пластиной // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 6. С. 1240.
24. Айрапетов А.Б. О корректности «в среднем» задачи Коши для системы обыкновенных и стохастических уравнений // Тр. ЦАГИ. 1976. Вып. 1784. С. 18.
25. Айрапетов А.Б. О статистических свойствах системы дискретных

вихрей. моделирующей турбулентное струйное течение // Турбулентные течения. М.: Наука, 1977. С. 188.

26. Смирных Е.А. Моделирование периодического возбуждения плоской турбулентной струи методом дискретных вихрей // Теплофизические и физ.-химич. процессы в химических установках. Минск, 1986. С. 92.

27. Смирных Е.А. Численное моделирование перемешивания газов и твердых инерционных частиц в плоской турбулентной струе // Механика неоднородных и турбулентных потоков. М.: Наука, 1989. С. 220.

28. Смирных Е.А. Численное исследование методом дискретных вихрей структуры отрывного течения за препятствием // Тр.ЦАГИ.1989. Вып.2420.С.78.

29. Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я. О процессах образования и эволюции вихревых структур в сдвиговых слоях // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1987. № 1. С. 31.

30. Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яненко Н.Н. О построении дискретных вихревых моделей идеальной несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и математич. физ. 1986. Т. 26, № 1. С. 103.

31. Leonard A. Vortex method for flow simulation // J.Comput.Phys. 1990. Vol. 37. P. 298.

32. Leonard A. Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements // Ann.Rev.Fluid Mech. 1985. Vol.17. P. 523.

33. Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow // J. Fluid Mech. 1973. Vol. 57, pt. 4. P. 785.

34. Chein R., Chung J.N. Discrete-vortex simulation of flow over inclined and normal plates // Computers and Fluids. 1988. Vol. 16, № 4. P. 405.

35. Edwards A.V.J., Morfey C.L. A computer simulation of turbulent jet flow // Computers and Fluids. 1981. Vol. 9. P. 205.

36. Acton E. A modelling of large eddies in an axisymmetric jet // J. Fluid Mech. 1980. Vol 98. P. 1.

37. Shimizu S. Discrete-vortex simulation of two-dimensional turbulent jet // Bulletin of JSME. 1986. Vol. 29, № 254. P. 254.

38. Новиков Е.А., Седов Ю.Б. Статистические свойства 4-х вихрей // ЖТЭФ. 1978. Т. 75. С. 868.

39. Власов Е.В., Гиневский А.С., Каравосов Р.К., Франкфурт М.О. Пристеночные пульсации давления в зоне отрыва за двумерными препятствиями // Тр. ЦАГИ. 1982. Вып. 2137. С. 3.

40. Власов Е.В. Исследование турбулентности в связи с определением акустических характеристик струн // Инж.-физ. журн. 1965. Т. VIII, № 5. С. 568.

41. Quinn W.R. Turbulent free flows issuing from sharp-edged rectangular slots: The influence of slot aspect ratio // Experimental Thermal and Fluid Science. 1992. Vol.5. P.203.

42. Уханова Л.Н. Некоторые закономерности развития трехмерного турбулентного следа // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1567. С.44.

43. Kiya M., Arie M. Discrete-vortex simulation of unsteady separated flow behind a nearly normal plate // Bull. JSME. 1980. Vol. 23, № 183. P. 1451.

44. Bradbury L.J.S. Measurements with a pulsed and hot-wire anemometer in highly turbulent wave of a normal flat plate // J. Fluid Mech. 1976. Vol.77. P. 473.

45. Gadd G.E. Two-dimensional separated or cavitating flow past a flat plate normal to the stream // ARC CP № 697.1962.

46. Hussain A.K.M.F., Thompson C.A. Controlled symmetric perturbation of the plane jet: an experimental study in the initial region // J. Fluid Mech. 1980. Vol.100, pt.2. P.397.

Центральный аэрогидродинамический институт

Поступила в редакцию 04.10.94

COMPUTER CONCEPTION OF VORTEX TURBULENCE

S.M. Belotsercovsky, A.S. Ginevsky

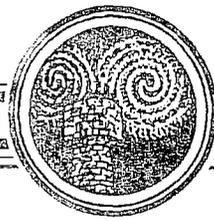
A simulation of turbulent jets and separated flows of incompressible liquid based on the scheme of ideal medium and on the method of discrete vortices is considered. The mathematical construction of shear flow model with high Reynolds numbers is based on treating a free turbulence as a hierarchy of vortices of various scales. Generally a turbulent motion is considered as a three-dimensional and essentially nonsteady one.

A turbulence is generated by a loss of stability and by a breakup of regular vortex formations (sheets) with its further transformation into vortex ensembles. The latter, having common motion with the medium, alter, catch each other, and form new macrostructures as well as small vortices. It is significant that vortex motion contain an inherent mechanism of a loss of stability and transformation from order to chaos.

Solutions received with the method of discrete vortices allow to find fields of average velocity and pressure, normal and shear Reynolds stress, pressure pulsations; spatial, time and spatial-time correlations of velocity and pressure pulsations as well as appropriate turbulence scale without application of empirical constants.



Белоцерковский Сергей Михайлович - родился в 1920 году. Выпускник факультета механики и математики Московского государственного университета. Окончил Военно-воздушную инженерную академию им. Жуковского (1945). Кандидат наук (1948), доктор технических наук (1955), в 1958 году присвоено профессорское звание. В настоящее время - профессор ЦАГИ. Автор 25 монографий, изданных в США, Великобритании, Швейцарии, Франции, Германии и т.д. Опубликовал более 270 статей, имеет 30 изобретений. Круг научных интересов - разработка основ вихревой компьютерной механики жидкости и газов и практическое применение прогноза взаимодействия вихрей в аэропортах и во время полета в рамках метода дискретных вихрей.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИФФУЗИИ ВИХРЕЙ НА ТУРБУЛЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРУИ

С.М. Белоцерковский, Н.В. Хлапов

В представленной работе разработан метод учета молекулярной диффузии на основе метода дискретных вихрей. Рассмотрен ряд примеров: диффузия бесконечной вихревой пары, движение вихревой пары, истечение плоской струи, а также рассмотрен упрощенный подход к учету диффузии.

Общая концепция моделирования турбулентных струй и следов

При построении математических моделей турбулентности будем исходить из сложившегося к настоящему моменту понимания ее как иерархии вихрей разного порядка. При больших числах Рейнольдса наблюдаются пульсации параметров течения от самых больших до весьма малых масштабов.

Крупномасштабная турбулентность - в основном определяется силами инерционной природы. Поэтому здесь вязкость играет второстепенную роль и в ряде случаев ею можно вообще пренебречь. При описании же мелкомасштабных турбулентных течений на определенном этапе следует вводить в рассмотрение механизм молекулярной вязкости.

Будем моделировать обтекание тела, вихревой след и поверхность струи с помощью дискретных вихрей и решать соответствующую задачу обтекания тела или истечения струи в нестационарной постановке. Такой подход позволил описать как возникновение свободных вихрей, так и моделировать их движение, включая процесс распада пелены и образования вихревых ансамблей [1 - 11].

Один из перспективных путей обобщения метода дискретных вихрей (МДВ) связан с учетом диффузии свободных вихрей на основании уравнений Гельмгольца. Принципиальное значение имеет то обстоятельство, что в численный процесс включаются не сеточные методы, а точные решения соотношений типа уравнений теплопроводности.

Общий подход к моделированию диффузии свободных вихрей

Моделирование процессов диффузии в вихревых следах и струях требует усложнения математических моделей путем учета влияния вязкости среды. При непосредственном численном решении уравнений Навье - Стокса возникает ряд трудностей не только технического, но и принципиального характера. Поэтому в данной работе развит метод, основанный на использовании уравнений Гельмгольца в сочетании с методом дискретных вихрей.

В идеальной среде свободные вихри $\omega(x, y, t)$ движутся вместе с жидкими частицами, не изменяясь

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Здесь ω - завихренность; t - время; u - x -ая компонента, а v - y -ая компонента скорости.

В вязкой среде имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

где ν - кинематическая вязкость.

При численном решении общей задачи применим метод физического дробления ее на каждом расчетном шаге по времени Δt .

Вначале проходим временной шаг Δt , положив в уравнении Гельмгольца (2) $v=0$ и получая соотношение (1). Здесь имеет место теорема о сохранении вихревых линий и интенсивности вихревых трубок. На этом этапе расчета, когда свободные вихри движутся вместе со средой, не меняя своей интенсивности, будет использоваться МДВ.

Проходя временной шаг Δt во второй раз, рассмотрим оставшуюся часть процесса, которая описывается уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Второй шаг реализуется с помощью аналитических выражений, являющихся точным решением уравнения типа теплопроводности (3).

Рассмотрим дискретный вихрь, расположенный в точке (x_i, y_i) циркуляции Γ_i в момент времени t_i . Тогда к моменту времени t будем иметь согласно (3)

$$\begin{aligned} \omega_i(x, y, t) &= \omega_{0i} \exp(-\Delta r_i^2 / (4\nu \Delta t_i)), \\ \omega_{0i} &= \Gamma_i / (4\pi \nu \Delta t_i), \\ \Delta t_i &= t - t_i, \\ \Delta r_i^2 &= (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Как известно, в идеальной среде циркуляция каждого свободного вихря не меняется во времени, и дискретные вихри, двигаясь вместе с жидкостью, остаются дискретными. Учет вязкости ν описывает явление диффузии вихрей. В вихревое движение вовлекается вся жидкость, что приводит к размазыванию дискретных вихрей. При этом в несжимаемой среде суммарная циркуляция скорости по бесконечно удаленному замкнутому контуру, охватывающему всю жидкость, сохраняется. В случае (4) она будет равна начальной циркуляции Γ_i .

Наряду с полным моделированием диффузии свободных вихрей рассмотрим упрощенный подход. Пусть вовлечение новых частиц жидкости в вихревое движение изучается приближенно, без учета влияния переноса вихрей (конвективных членов в уравнении (2)). Этот прием, заметно снижающий объем расчетов, для краткости назовем локальной («статической») моделью диффузии.

В данном случае не нужно проходить расчетные шаги по времени Δt дважды, рассматривая всякий раз влияние перемещения свободных вихрей, в том числе и вторичных. Расчеты ведутся как обычно в МДВ, но по измененным формулам для скоростей u_i, v_i , соответствующим каждому из свободных вихрей Γ_i . Из соотношений (3) и (4) получаем

$$u_i(x,y,t) = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{y-y_i}{\Delta r_i^2} (1-\exp(-\Delta r_i^2/(4\nu \Delta t))),$$

$$v_i(x,y,t) = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{x-x_i}{\Delta r_i^2} (1-\exp(-\Delta r_i^2/(4\nu \Delta t))).$$

При полном моделировании диффузии свободных вихрей нужно учитывать не только «статическую» диффузию, но и ту часть явления, которая связана с движением свободных вихрей. Для этого совершается переход от распределенной завихренности ω_i (4) к системе вторичных дискретных вихрей. Таким образом удастся моделировать старение основных свободных вихрей, вовлечение в вихревое движение всей жидкости и перемещение вихрей. Поскольку циркуляции вторичных вихрей быстро убывают по мере удаления от начальных (первичных) свободных вихрей, удастся ограничиться сравнительно малым их числом.

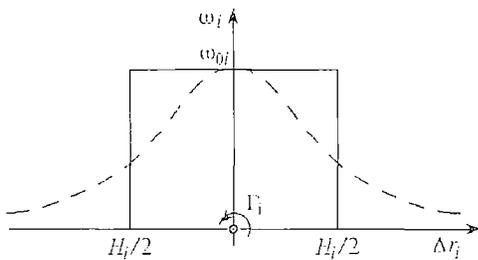
Численное моделирование диффузии и методические примеры

Рассмотрим в момент времени t завихренность $\omega_i(r_i,t)$, которая согласно (4) описывает закон распределения ее от дискретного вихря Γ_i при $t=t_i$. Простейшая схема перехода от непрерывного распределения завихренности к дискретной заключается в замене истинного закона $\omega_i(\Delta r_i,t)$ ступенчатым, когда на участке H_i $\omega_i = \omega_{i0}$, а вне его равна нулю (рис.1).

Поскольку при диффузии общая завихренность сохраняется, то

$$\omega_{i0} H_i^2 = \Gamma_i,$$

откуда



$$\frac{\Gamma_i}{4\pi\nu\Delta t} H_i^2 = \Gamma_i.$$

При выбранном размере сетки H_i это равенство дает возможность определить дискретный шаг по времени Δt при расчете диффузии

$$\Delta t = \frac{H_i^2}{4\pi\nu}. \quad (6)$$

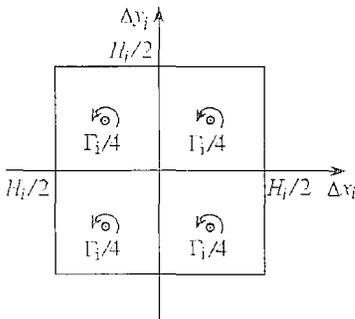


схема 1

Таким образом, численное моделирование диффузии в простейшей схеме осуществляется переходом через интервал времени Δt от одного дискретного вихря Γ_i к четырем Γ_{ik} , расположенным в центрах квадратов со сторонами $H_i/2$ (рис.1, схема 1). Циркуляции их одинаковы и равны

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_i/4. \quad (7)$$

Рис.1. Закон распределения завихренности i в плоскости течения при диффузии дискретного вихря Γ_i и переход к ступенчатому распределению. Простейшее описание диффузии (схема 1): через расчетный шаг Δt один свободный вихрь Γ_i переходит в четыре вихря

Аналогичным образом моделируется диффузия вторичных вихрей Γ_{ik} . Каждый из них, в свою очередь, через интервал времени (6) также распадается на четыре дискретных вихря и т.д.

Параллельно с этим численно изучается динамика движения дискретных вихрей по обычной методике МДВ. При этом на каждом шаге по времени

$$\Delta_{i0}t = t_0 - t_i \quad (8)$$

циркуляции вихрей не изменяются. Обычно здесь требуются более мелкие шаги ($\Delta_{i0}t < \Delta_i t$). Как только на шаге s выполняется неравенство

$$s\Delta_{i0}t \geq \Delta_i t, \quad (9)$$

происходит перестроение свободных вихрей, соответствующее указанной выше модели диффузии. Более точный способ аппроксимации закона распределения завихренности $\omega_i(x_i, y_i)$ на каждом расчетном шаге $\Delta_i t$ представлен на рис. 2. Остановимся на двух методических примерах.

Первый пример - сопоставление результатов численного моделирования диффузии для вихря, который при $t=0$ представлял собою дискретную нить циркуляции Γ . Результаты расчетов и данные точного решения приведены на рис. 3, где безразмерные параметры введены следующим образом:

$$\bar{r} = \frac{r}{H}, \quad \tau = \frac{t\Gamma}{H^2}, \quad \text{Re} = \frac{\Gamma}{\nu}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega H^2}{\Gamma}, \quad (10)$$

здесь r - расстояние от вихря, H - линейный размер квадратной сетки.

Второй пример - движение и диффузия двух вихревых сгустков, образующихся из пары вихревых шнуров противоположного вращения. В момент времени $t=0$ они имели циркуляции Γ и $-\Gamma$ и находились в точках с координатами $x/h=2$, $y/h=\pm 0.5$, h - расстояние между шнурами. Пусть ω_{\max} - значение завих-

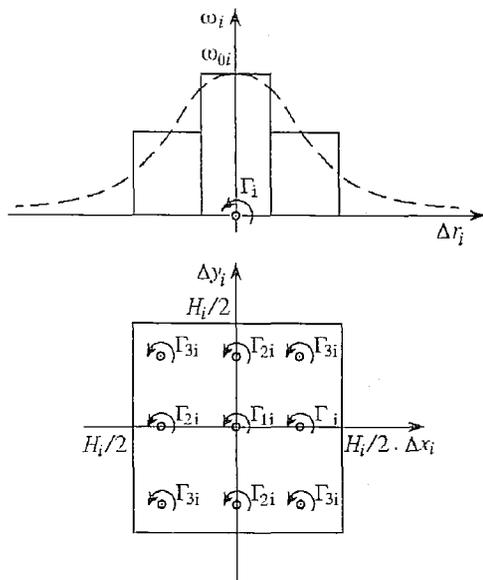
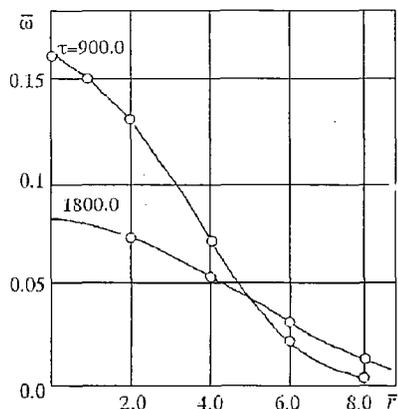
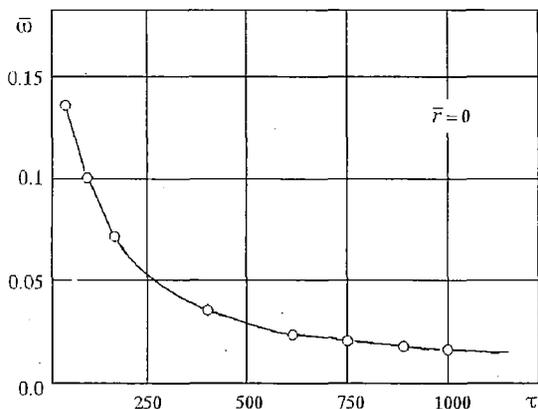


схема 2

Рис.2. Расчетная схема второго порядка точности (схема 2); через временной шаг $\Delta_i t$ один свободный вихрь Γ_i переходит в девять вихрей

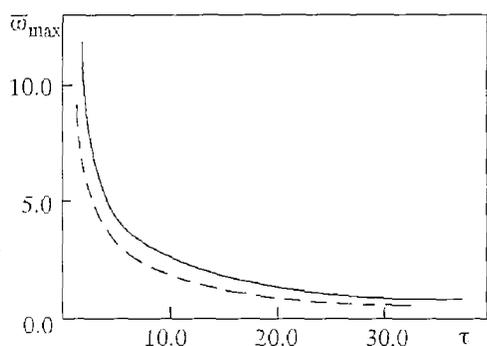


а

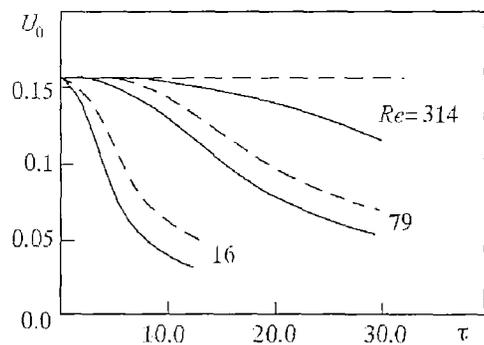


б

Рис. 3. Диффузия бесконечной прямолинейной вихревой нити при $\text{Re}=200$: сплошная линия - численные данные, точки - точное решение



a



b

Рис. 4. Изменение во времени завихренности в центре одного из двух сгустков (a) и скорости движения его центра (б); сплошная линия - полная модель, штриховая - упрощенная модель

ренности в центрах вихревых образований, u_0 - скорость движения центров. Введем безразмерные величины, положив

$$\bar{u}_0 = \frac{u_0 h}{\Gamma}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega h^2}{\Gamma}, \quad \tau = \frac{t \Gamma}{h^2}, \quad (11)$$

$$Re = \Gamma/\nu.$$

Результаты расчетов для полной модели были сопоставлены в двух вариантах: при простейшей схеме (см. рис.1, схема 1), и более точной (см. рис.2, схема 2). В качестве примера приведем результаты расчетов в том и другом случаях ($Re=314$, $\tau=40$) для координат центра сгустков и скорости его движения

$$\begin{aligned} x_{01}/h &= 7.15, & x_{02}/h &= 7.08, \\ y_{01}/h &= 2.13, & y_{02}/h &= 2.15, \\ \bar{u}_{01} &= 0.096, & \bar{u}_{02} &= 0.095. \end{aligned}$$

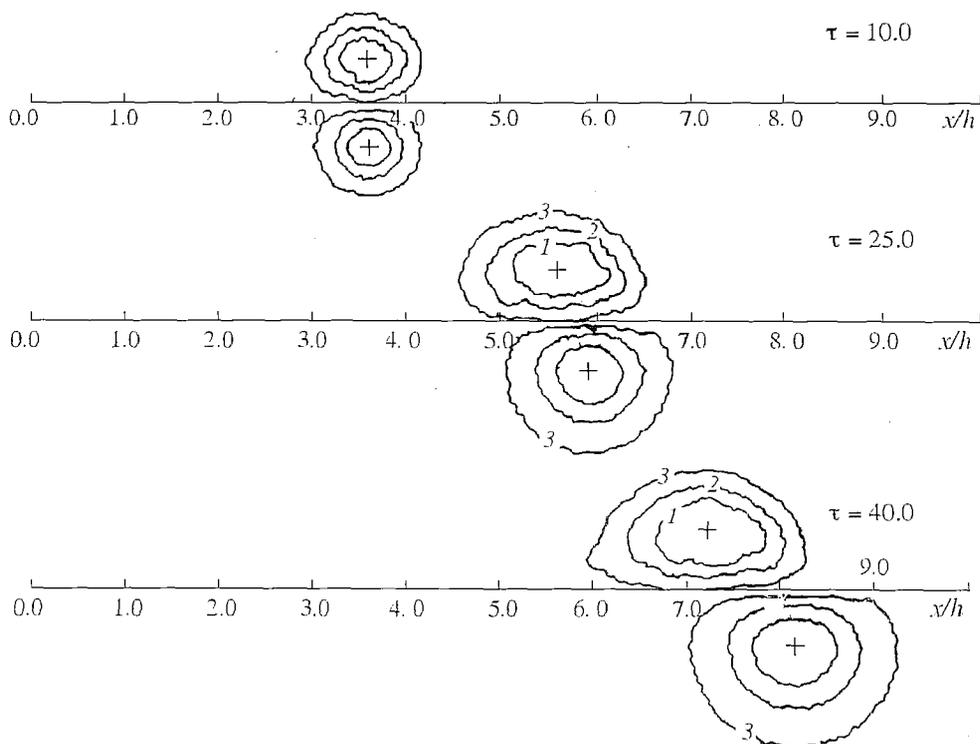


Рис. 5. Движение и развитие двух вихревых образований, полученных по упрощенной (нижняя полуплоскость) и полной моделям (верхняя полуплоскость), $Re=314$. Отмеченные границы: 1 - $\omega=0.7\omega_{\max}$; 2 - $\omega=0.4\omega_{\max}$; 3 - $\omega=0.1\omega_{\max}$

Наряду с полной моделью диффузии (локально-конвективной) рассматривалась и упрощенная (локальная). На рис. 4 и 5 приведены результаты моделирования развития указанного процесса.

Влияние диффузии на турбулентные характеристики плоской струи

Отметим следующую важную особенность данного численного метода. Здесь расчеты при больших числах Re оказываются более простыми, нежели при малых. Дело в том, что удельный вес диффузии с ростом Re снижается, а время, за которое накапливается ее существенный вклад, увеличивается. Таким образом, при больших числах Re влияние диффузии заметно проявляется в дальних участках следов и струй. Здесь реальные трудности возникают только при необходимости моделировать эти дальние участки, для чего без принятия специальных мер требуется длительный счет. Поэтому при отработке рациональной методики расчетов и проверке эффективности метода используются малые числа Re .

Рассмотрим далее истечение плоской струи в затопленное пространство из сопла с расстоянием между стенками h . Длина его L во много раз превосходит h , поэтому параметр L/h можно не рассматривать. Пусть в момент времени $\tau=0$ начинается истечение струи, причем среднерасходная скорость на срезе сопла соответствует u_0 .

Введем безразмерные параметры, положив

$$\bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{tu_0}{h}, \quad Re = \frac{u_0 h}{\nu}. \quad (12)$$

Наряду с полной моделью диффузии применим упрощенную, а также МДВ в чистом виде. Результаты расчетов приведены на рис. 6, 7 и 8, причем учет диффузии осуществлялся при $Re=558$.

Можно отметить, что вязкость оказывает сглаживающее влияние на формирование вихревых структур (см. рис. 6). При $Re \rightarrow \infty$ когерентные структуры образуются ближе к срезе сопла, влияние диффузии задерживает этот процесс, отодвигая эти структуры на 4-5 калибров от сопла. При этом упрощенная модель дает менее четкое описание формирования слоя смешения в начальном участке струи, нежели полная.

Молекулярная вязкость, как это видно из рис. 7 и 8, оказывает сглаживающее влияние и на профили осредненных скоростей в сечениях струи, но прежде всего на моменты второго порядка. В сечениях более отдаленных процесс диффузии, успев развиваться более полно, проявляется более существенно. Учет влияния вязкости по приближенной методике недостаточен.

Подчеркнем, что отмеченные эффекты относятся к малым числам Рейнольдса, когда разница между тремя различными подходами становится особенно заметной.

Переход от непрерывных представлений к дискретным вносит в соответствующие схемы и модели новые элементы, расширяющие их возможности. Поэтому, строго говоря, нельзя ставить знак равенства между пределами применимости математических моделей, основанных на классических эйлеровых представлениях, и полученных на базе МДВ. Основной источник различия - новый механизм близкого взаимодействия тонких вихревых нитей, введение которого необходимо для обеспечения устойчивости расчетного процесса, но который одновременно обогащает модели.

Опыт систематического применения данных математических моделей позволит выявить реальные возможности, заложенные в них. Но уже сейчас можно отметить некоторые положительные стороны такого синтеза. Здесь

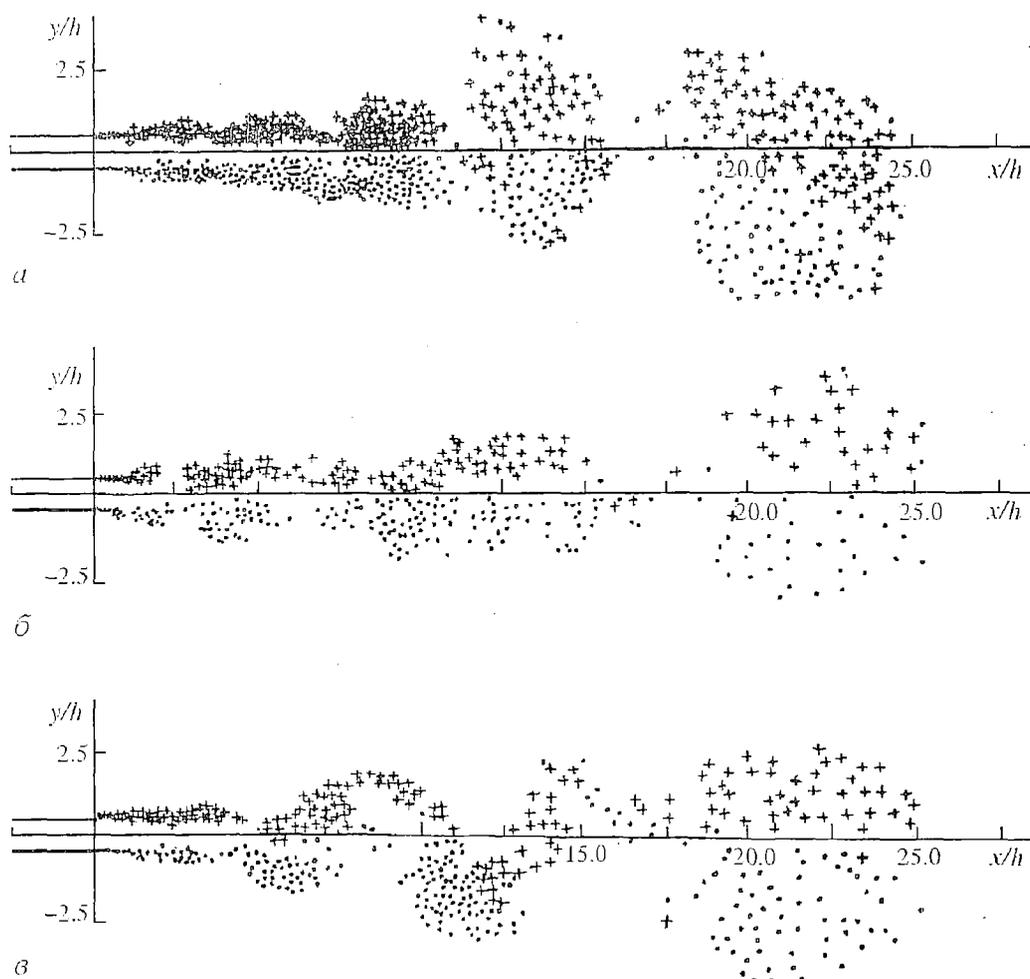


Рис. 6. Свободные вихри, моделирующие границы плоской струи при $\tau=60$: *a* - полная модель диффузии, $Re=558$; *б* - упрощенная модель, $Re=558$; *в* - без диффузии $Re \rightarrow \infty$

сохраняются все достижения, которые были завоеваны на основе МДВ. Кроме того, таким путем удастся уйти от необходимости применения очень мелких сеток для интегрирования уравнений Навье - Стокса.

Конечно, окончательная доводка математических моделей турбулентных следов и струй, а также оценка их достоверности, установление пределов применимости потребуют еще больших усилий. Одна из главных трудностей, которую предстоит преодолеть, связана с тем, что турбулентные движения жидкости и газа носят, как правило, существенно пространственный и нестационарный характер. Таким образом, даже процессы, начинающиеся как плоскопараллельные, нельзя считать сохраняющими двумерный характер далеко от обтекаемого тела или сопла. Поэтому строгая проверка достоверности математических моделей турбулентных следов и струй должна опираться на решение четырехмерных задач, что существенно усложняет численный эксперимент. Более простые модели - плоскопараллельные и осесимметричные - с определенной степенью осторожности следует применять для изучения ближних участков следов и струй.

Повышенный интерес к области механики, которую естественно назвать вихревой аэродинамикой, вызван возросшими запросами практики. Так, наряду с

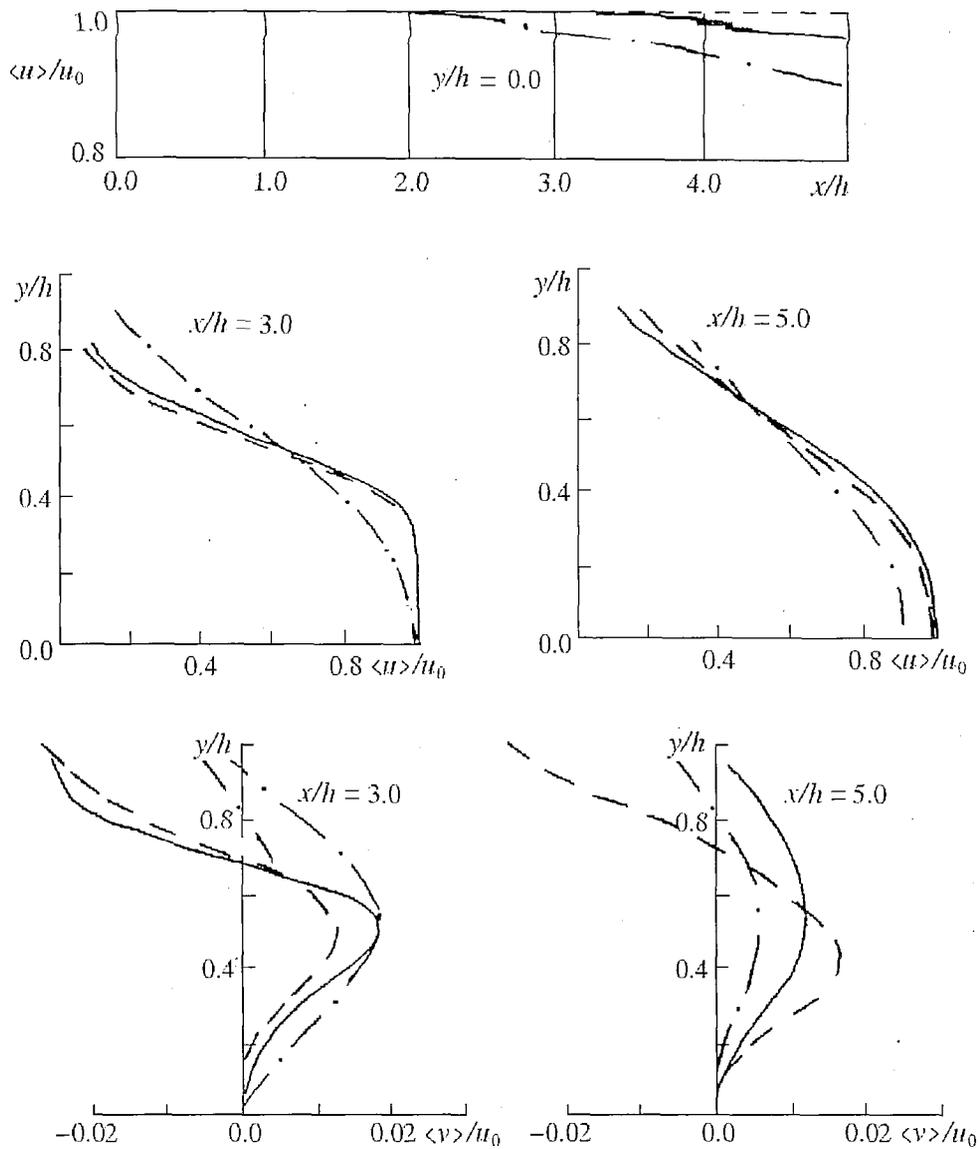


Рис. 7. Моменты первого порядка (мгновенные скорости) плоской струи, $Re=558$: сплошная линия - полная модель диффузии, штрихпунктирная - упрощенная, штриховая - без учета диффузии

динамикой полета и аэроупругостью, которые традиционно опираются на ее достижения, следует отметить и новые области. Прежде всего, это аэроакустика и анализ воздействия вихревых следов за самолетами и вертолетами на другие летательные аппараты и грузы.

Широкое распространение авиации, круглосуточные полеты, приближение аэропортов к жилым и деловым центрам приводят к необходимости снижения шума, значительная часть которого приходится на долю вихревых следов и турбулентных струй. Наряду с этим требуется сокращение интервалов как между взлетающими самолетами и вертолетами, так и при их посадке, особенно на больших аэродромах, с гарантированным обеспечением безопасности от воздействия вихревых следов.

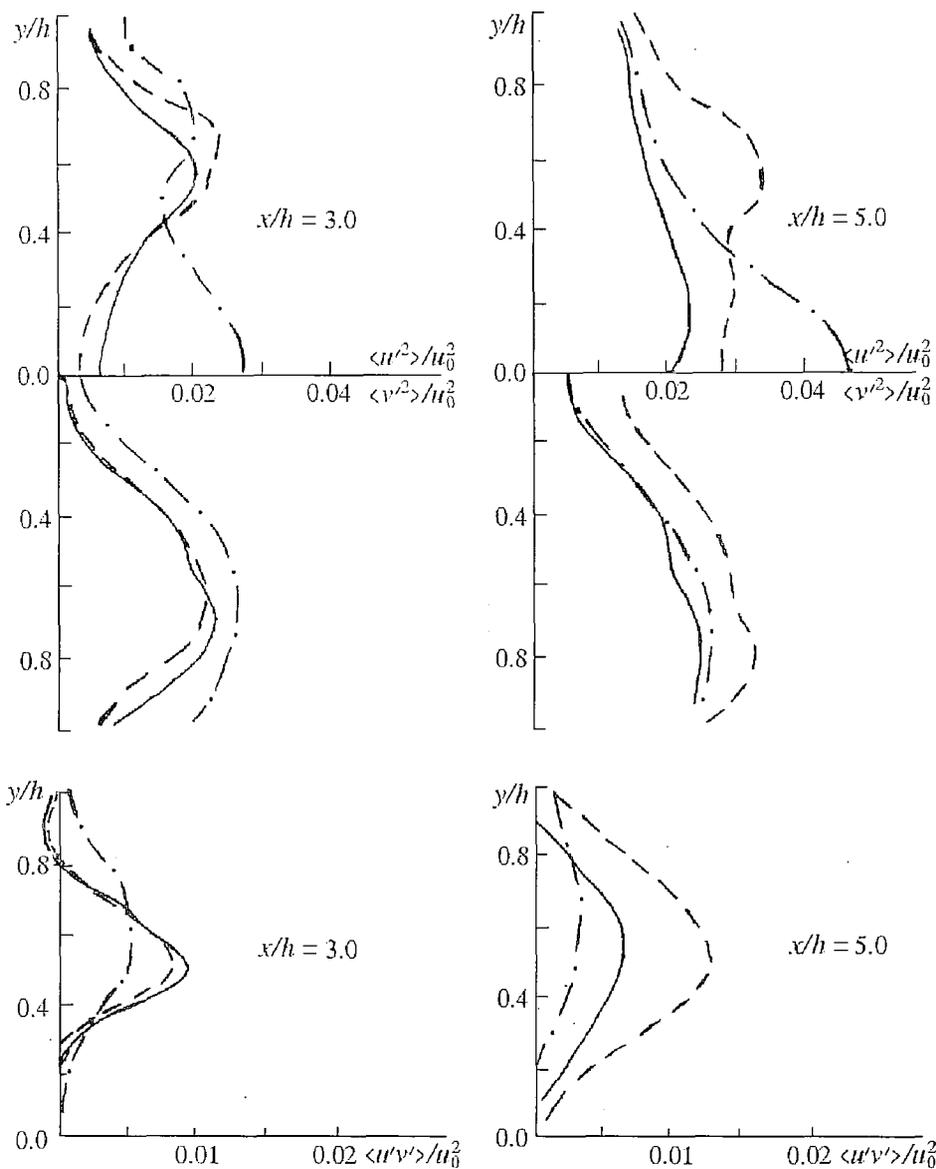


Рис. 8. Моменты второго порядка (осредненные квадраты и произведения скоростей) плоской струи, $Re=558$: сплошная линия - полная модель диффузии, штрихпунктирная - упрощенная, штриховая - без учета диффузии

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (Грант M2R300).

Библиографический список

1. Айранетов А.Б. Вихревая модель плоской турбулентной струи // Тр.ЦАГИ.1976. Вып.1784. С.3.
2. Белоцерковский С.М. К созданию замкнутых моделей турбулентности при отрывном обтекании тел и истечении струй // Тр. ВВИА им. проф.Н.Е. Жуковского. 1986. Вып.1313. С.3.

3. Белоцерковский С.М. Метод численного решения пространственной задачи о диффузии вихрей // Тр. ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского. 1986. Вып.1313. С. 40.

4. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Хлапов Н.В. Моделирование на ЭВМ плоских турбулентных струй//Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 3. С. 542.

5. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Хлапов Н.В. К построению замкнутых моделей турбулентных струй // Численное моделирование в аэрогидродинамике. М.:Наука,1986. С. 46.

6. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Желанников А.И., Котовский В.Н. Моделирование на ЭВМ турбулентных струй и следов // Проблемы турбулентных течений. М.:Наука,1987. С. 129.

7. Дворак А.В., Хлапов Н.В. Расчет пространственной турбулентной струи, истекающей в затопленное пространство // Тр. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 1986. Вып.1313. С. 99.

8. Chorin A.J. Estimates of intermittency spectra and flow-up in development turbulence // Comm.Pure and Appl.Math. 1991. Vol. 34. P. 853.

9. Edwards A.V.J., Morfey C.I. A computer simulation of turbulent jet flow // Computers and Fluids. 1981. Vol.9, № 2. P. 205.

10. Ferziger J.H. Large eddy numerical simulations of turbulent flows // AIAA J. 1977. Vol. 15, № 9. P. 1261.

11. Inoue O., Leonard A. Vortex simulation of forced/unforced mixing layers // AIAA Pap. 1987, № 288. 19p. Turbulent layer in a ideal fluid // Phys.Fluids. 1972. Vol. 15, № 1. P.1.

Центральный аэрогидродинамический институт

Поступила в редакцию 04.10.94

SIMULATION OF VORTEX DIFFUSION INFLUENCE ON JET TURBULENT CHARACTERISTICS

S.M. Belotserkovsky, N.V. Khlapov

The method is suggested for calculation of molecular diffusion on the base of Discret Vortex Method. A lot of examples: diffusion of infinit vortex filament, motion of vortex pair and issue of plane jet are exemplified. An approximate calculation of vortex diffusion is also presented.



Хлапов Николай Васильевич - родился в 1954 году. Окончил МФТИ (1982), затем учился в аспирантуре в ЦАГИ. С 1990 года - кандидат технических наук, работает в ЦАГИ. Опубликовал 12 статей. Занимался разработкой новых схем и целнейных математических моделей турбулентных струй. В данное время круг научных интересов - разработка и практическое применение метода вихрей для случая трехмерных потоков.



Изв. вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

С этого номера мы начинаем публиковать некоторые материалы из монографии Henry D.I. Abarbanel «Tools for analyzing observed chaotic data», любезно предоставленной нам автором. Предполагается перепечатка 1 Introduction, Part 3, Part 4, 5 Summary and Conclusions (см. Contents монографии). Возможно, заинтересованный читатель дополнит этот список и другими разделами. Редакция ждет Ваши предложения.

Редакционная коллегия

TOOLS FOR ANALYZING OBSERVED CHAOTIC DATA

Henry D.I. Abarbanel

Abstract

We present an introduction to the ideas used in nonlinear time series analysis with examples drawn from applications to observed data. The tools are for the analysis of time series, namely measurements at a single spatial point. We will only comment on the extension of the ideas to space-time chaos or chaotic fields. The tools allow one to perform the nonlinear version of the usual signal processing tasks:

- **signal separation**
- **establishing the proper state space for the signal**
- **extracting invariant characteristics of the system from the observed signal - sometimes called system identification**
- **model building in the state space - for prediction and control**

The emphasis in this review will be on finding the appropriate state space and on determining the invariant characteristics of the source of the source of chaotic data, but we will touch on model building as well. The tools we introduce will enable the reader to distinguish between low dimensional dynamical systems and «noise» (high dimensional systems) in a quantitative way using demonstrated, working algorithms.

We utilize in this article a recurrent set of examples on which we apply our tools to demonstrate the broad nature of their applicability. These examples include a computer generated time series and data from laser physics, hydrology, nonlinear circuit dynamics, and turbulent fluid dynamics:

- a time series generated from the Lorenz set of differential equations,
- several data sets from the chaotic intensity fluctuations of a Nd:YAG laser with an intracavity birefringent crystal,
- over one hundred and forty years of biweekly observations of chaotic variations of the volume of a large lake,
- observations from a nonlinear hysteretic circuit, and
- pressure fluctuations along the wall in turbulent boundary layer.

CONTENTS

1. Introduction

2. Finding the Phase Space

- 2.1. Choosing the Time Delay T
 - 2.1.1. Chaos as an Information Source
- 2.2. Average Mutual Information
 - 2.2.1. Lorenz Model
 - 2.2.2. Chaotic Laser Intensity
 - 2.2.3. Chaotic Lakes
 - 2.2.4. Chaotic Circuits
 - 2.2.5. Chaotic Fluid Boundary Layers
 - 2.2.6. A Few Remarks About $I(T)$
- 2.3. Choosing the Embedding Dimension d_E
 - 2.3.1. Lorenz Model
 - 2.3.2. Chaotic Laser Intensity
 - 2.3.3. Chaotic Lakes
 - 2.3.4. Chaotic Circuits
 - 2.3.5. Chaotic Fluid Boundary Layers
 - 2.3.6. A Few Remarks About Global False Nearest Neighbors
- 2.4. Choosing the Dynamical Dimension d_L
 - 2.4.1. Lorenz Model
 - 2.4.2. Chaotic Laser Intensity
 - 2.4.3. Chaotic Lakes
 - 2.4.4. Chaotic Circuits
 - 2.4.5. Chaotic Fluid Boundary Layers
 - 2.4.6. A Few Remarks About Local False Nearest Neighbors

3. Invariant Characteristics of the Dynamics

- 3.1. Fractal Dimensions
 - 3.1.1. Lorenz Model
- 3.2. Global Lyapunov Exponents
- 3.3. Local Lyapunov Exponents
 - 3.3.1. Lorenz Model
 - 3.3.2. Chaotic Lakes
 - 3.3.3. Chaotic Circuits
- 3.4. A Few Remarks About Lyapunov Exponents

4. Model Making in Chaos

- 4.1. Local Models
 - 4.1.1. Lorenz Model
 - 4.1.2. Chaotic Circuits
- 4.2. Global Models
- 4.3. A Few Remarks about Model Making

5. Summary and Conclusions

Institute for Nonlinear Science

Поступила в редакцию 18.12.94



Генри Д.И. Абарбанель - профессор физики и физик-исследователь Института океанографии Скрипса в Калифорнийском университете, Сан-Диего, UCSD, США. Получил степень доктора в Принстонском университете и преподавал в Принстоне, Станфорде, Нортвестерне, Чикаго и Калифорнийском университете в Беркли, с 1983 года работает в Калифорнийском университете в Сан-Диего. Занимается анализом хаотических явлений в геофизических и лабораторных установках. Директор Института нелинейных наук при UCSD.





Изв. вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

СЕРГЕЙ ПАВЛОВИЧ СТРЕЛКОВ

А.Ф. Минаев, В.И. Смыслов

В 1995 году исполнилось 90 лет со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, профессора, доктора физико-математических наук Сергея Павловича Стрелкова, научная деятельность которого на протяжении многих лет была связана с физическим факультетом Московского университета и Центральным Аэрогидродинамическим Институтом - ЦАГИ.

Являясь, наряду с А.А. Андроновым, А.А. Виттом, С.Э. Хайкинъм, Г.С. Гореликом и др., одним из ярких представителей научной школы академика Л.И. Мандельштама, Сергей Павлович Стрелков был крупным специалистом в области физики колебаний. Многие задачи, которые ставились и решались в его работах, а также в работах его учеников, были вызваны проблемами, возникающими при создании новой авиационной техники.

С.П. Стрелков родился в 1905 году в селе Долгоруково Пензенской губернии в семье учителей сельской школы. После окончания в 1923 году средней школы три года работал также сельским учителем. Будучи комсомольцем, окончил совпартшколу первой ступени и получил направления на учебу: в Саратовский либо в Московский университеты. В 1927 году он поступил на физико-математический факультет МГУ и прошел путь от студента до профессора, заведующего одной из крупнейших кафедр физического факультета.

Окончив физическое отделение МГУ в 1931 году, он был оставлен в аспирантуре по кафедре колебаний у Л.И. Мандельштама. С 1932 года по 1935 год работал ассистентом физического факультета, затем - доцентом.

Первая научная работа С.П. Стрелкова, опубликованная в 1933 году, была посвящена решению нелинейной задачи, поставленной еще Рэлеем в его знаменитом трактате «Теория звука», а именно - исследованию автоколебаний маятника Фруда. В этой работе дана подробная физическая картина возбуждения автоколебаний в системе с трением скольжения, зависящим от скорости, проведен математический анализ процесса установления стационарной амплитуды, а также приведены результаты экспериментального исследования.

В следующей работе С.П. Стрелковым дан подробный качественный и количественный анализ процессов в ламповом генераторе с двумя колебательными контурами (явление затягивания частоты). Впоследствии это явление вошло во все учебники по теории нелинейных колебаний.

Сергей Павлович Стрелков был одним из основоположников исследований автоколебаний в распределенных системах. Им были получены существенные результаты в задаче А.А. Витте об автоколебаниях в двухпроводной линии с электронной лампой на одном из концов. В своих работах Сергей Павлович успешно использовал строгие нелинейные методы, развиваемые школой Л.И. Мандельштама. Эти методы существенно отличались от применявшихся тогда в технике квазилинейных методов анализа автоколебательных систем. В то время казалось, что эти два подхода принципиально исключают друг друга, но дальнейшее развитие обоих направлений показало, что они дополняют друг друга.

Занимаясь в аспирантуре изучением различного вида механических автоколебаний, он в 1935 году начал вести в ЦАГИ исследовательскую работу по договору с МГУ. Аспирантские работы С.П. Стрелкова были посвящены как экспериментальному исследованию некоторых видов механических колебаний, так и теории автоколебаний.

Не прерывая связей с МГУ и ЦАГИ, С.П.Стрелков в 1938 году приехал в Горький, где работал старшим научным сотрудником в НИИ радиофизики у А.А. Андропова (до 1940 года). Прочные связи с горьковскими радиофизиками он сохранил и впоследствии, со времени основания журнала «Радиофизика» до 1973 года состоял членом его редколлегии.

В 1940 году он переехал в Жуковский (тогда - поселок Стаханово) на постоянную работу в ЦАГИ. В начале отечественной войны вместе с семьей был эвакуирован в Казань с ЦАГИ, в 1943 году - вернулся в Жуковский.

Начиная с довоенных лет и до конца своих дней С.П.Стрелков активно участвует в исследовательских теоретических и экспериментальных работах ЦАГИ по изучению сложных динамических явлений в условиях взаимодействия потока воздуха с конструкцией летательных аппаратов и наземных испытательных установок. Он занимал должности начальника, а затем научного руководителя одного из наиболее важных подразделений в комплексе прочности, был членом Ученого совета института, редколлегии журнала «Ученые записки ЦАГИ», руководил работой научных семинаров.

Следует отметить открытие и изучение им целого ряда механических автоколебаний: колебания шарового маятника, колебания струны в тонкой струе, срывные крутильные колебания крыла, колебания в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью. Первые три явления просто не были известны в науке, в последнем был установлен его физический характер и доказана его автоколебательная природа.

Автоколебательные явления в распределенных системах были рассмотрены С.П. Стрелковым на примерах системы Лехера и аэродинамических труб с открытой рабочей частью. Первая задача аналогична задаче Ван-дер-Поля с той лишь разницей, что роль колебательного контура играет двухпроводная линия. Условия колебаний на одном конце «рождают» силу, которая с запаздыванием действует на другом конце распределенной системы. Вторая задача существенно более сложная. Здесь наблюдаются явления, которые в принципе были предсказаны Л.И. Мандельштамом, а именно, - возможность преобразования волн одного типа в волны другого типа при взаимодействии с препятствием. Сергей Павлович отметил, что на таких препятствиях, как кромки сопла и диффузора, гидродинамические волны превращаются в акустические и обратно. Благодаря этому возникает обратная связь через акустическую волну в обратном канале трубы (см. статью А.С. Гиневского и П.С. Лапды в настоящем выпуске журнала).

Работа по глушению пульсаций в трубах с открытой рабочей частью имела практическое значение. Такие трубы должны быть «заглушены» по разработанной методике, иначе, при больших размерах труб, колебания могут достигать угрожающей заданно интенсивности уже при скорости 50 м/с.

При изучении явления шсто крутильных колебаний крыла им впервые наблюдался срывной флаттер - автоколебания, возникающие вследствие срыва потока с крыла.

Таким образом, в 1935 - 1941 годах С.П. Стрелков провел фундаментальные исследования автоколебаний потока воздуха в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью, проявляющихся в виде крайне нежелательных пульсаций давления (возникновение этих автоколебаний препятствовало вводу труб в эксплуатацию). В результате исследований Сергея Павловича удалось выяснить причины и физическую картину этих автоколебаний и разработать методы их устранения. Эти методы вошли в практику строительства аэродинамических труб в нашей стране.

Свою докторскую диссертацию «Автоколебания в аэродинамических трубах» С.П. Стрелков защитил в Москве в МГУ летом 1942 г. Сообщение о подробностях защиты было опубликовано наряду со сводками «От Советского Информбюро» в газете «Вечерняя Москва» (от 28 июля 1942 года): «... Член-корреспондент АН СССР профессор М. Леонтович, профессор С. Хайкин, профессор М. Абрамович и другие ученые дали блестящие отзывы о работе Стрелкова. Профессор Леонтович указал, что работа Стрелкова представляет большое, интересное и разностороннее исследование. В ней не только впервые установлены причины и выяснен механизм вибрации в аэродинамических трубах, но и разработаны мероприятия к устранению этих вибраций. Получен чрезвычайно важный для нашего самолетостроения результат. Академик Л.И. Мандельштам в своем отзыве пишет, что работа С. Стрелкова имеет громадное значение для прикладной аэродинамики...»

До 1941 года С.П. Стрелков занимался в ЦАГИ гидродинамическими колебаниями, далее - проблемами, связанными с механическими автоколебаниями самолета в полете. Тематика его работ в МГУ, на кафедре колебаний, включала проблемы как довольно близкие к тем задачам, которые ему приходилось рассматривать в ЦАГИ, так и существенно отличные от них (автоколебательные процессы в биофизических системах, лазерах и других объектах).

В 1941 - 1950 годах С.П. Стрелковым были выполнены исследования автоколебаний тел в аэродинамическом потоке и в это же время он принял участие в решении труднейшей аэромеханической задачи - определении аэродинамических сил на упругой конструкции в потоке. Под его непосредственным руководством был разработан весьма тонкий и эффективный способ измерения сил на колеблющемся крыле. Это имело большое значение при изучении физической природы вибраций упругих тел в потоке газа при создании методов расчета подобных колебаний в полете (флаттера, нагрузок при полете в неспокойном воздухе и т.д.).

В 1943 году Сергей Павлович стал профессором кафедры колебаний Московского университета и начал читать основной курс лекций по теории колебаний. Продолжая традиции Л.И.Мандельштама по созданию теории колебаний как самостоятельной науки, Сергей Павлович вместе с тем создал новый оригинальный курс лекций, более тесно связанный с возникшими в то время техническими задачами. На основе курса своих лекций С.П. Стрелков написал «Введение в теорию колебаний», одну из наиболее оригинальных и читаемых книг на эту тему. Она выдержала несколько изданий и была переведена на многие иностранные языки.

В 1950 году С.П. Стрелков вместе с сотрудниками провел широкий круг исследований устойчивости самолетов и вертолетов, впервые указал на роль упругости конструкции при автоколебаниях самолетов, снабженных бустерами и автопилотом, обосновал идеологически средства борьбы с автоколебаниями в этих случаях. Под его руководством были разработаны экспериментальные и теоретические методы, позволяющие решать задачи о взаимодействии упругой конструкции с системой автоматического управления в полете.

Прекрасно понимая, что колебательные явления играют весьма существенную роль в системах автоматического управления, Сергей Павлович Стрелков занялся изучением этих вопросов. Им была создана общая теория воспроизведения сигнала в линейных следящих системах и в усилителях с обратной связью. В этих работах была установлена связь между нулями и полюсами передаточной функции системы и характеристиками качества воспроизведения заданного воздействия. Сергеем Павловичем предложены способы исследования собственных частот сложных систем автоматического регулирования в зависимости от различных параметров. Эти идеи имели естественное продолжение в методе траекторий корней, наряду с У. Эвансом (США) С.П. Стрелков является автором геометрического метода траекторий корней.

В работах Сергея Павловича получил развитие классический метод исследования колебательных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами - метод Галеркина. С.П. Стрелков применил этот метод к исследованию автоколебательных систем, близких к линейным, показал, что этим методом можно получить известные приближенные решения. Большой интерес представляет данное им физическое обоснование метода Галеркина и пути оценки точности приближенных решений по этому методу. Эти результаты отражены в его учебнике по теории колебаний.

С.П. Стрелков внес большой вклад в развитие теории колебаний в линейных системах со многими степенями свободы. Для дискретных неконсервативных систем им было введено понятие нормальных комплексных координат, для которых установлены условия биортогональности. Теория колебаний в линейных системах была изложена Сергеем Павловичем матричным методом, он ввел ее в практику инженеров расчетов на ЭВМ при исследованиях характеристик авиационных конструкций.

Идейно эта теория связана с циклом работ по флаттеру, проведенных С.П. Стрелковым и его учениками. Среди этих работ особое место занимает предложенный С.П. Стрелковым и осуществлявшийся под его руководством оригинальный метод электромеханического моделирования флаттера, позволяющий в лабораторных условиях исследовать упругие колебания самолета в полете. В этом методе самолет заменяется механической моделью, а возникающие при колебаниях в полете аэродинамические силы воспроизводятся (с помощью датчиков и вычислительного устройства) специальными электродинамическими возбудителями. За эти работы С.П. Стрелкову была присуждена золотая медаль и премия им. Н.Е. Жуковского.

С.П. Стрелков впитал в себя и постоянно проповедовал глубокое проникновение в физическую сущность изучаемого явления, приложимость общезначимых исследований к конкретным объектам техники. Сергей Павлович был не только и не просто физик - он был инженер, внесший весомый вклад в развитие нашей авиационной науки и в улучшение образцов авиационной и ракетной техники. Он обладал замечательной способностью увидеть и объяснить первопричины возникновения опасных «болезней» самолетов, вертолетов, ракет, аэродинамических труб, связанных с их вибрационными характеристиками. Он всегда находил эффективные пути устранения этих «недугов» техники и предотвращения их появления в дальнейшем.

С именем С.П. Стрелкова связано становление и развитие ряда научных направлений, его интересы в науке охватывали самые разнообразные области физики, теории колебаний, динамической прочности, аэроупругости, аэродинамики. С.П. Стрелков обладал исключительной эрудицией, энциклопедическими знаниями, тонкой инженерной интуицией. Его талант являл собой редкое сочетание большого практического опыта незаурядного экспериментатора с ясным и гибким умом аналитика. Практическая целенаправленность результатов, строгость теоретических выводов, простота и отточенность стиля - вот отличительные черты трудов С.П. Стрелкова.

Большую научную работу Сергей Павлович совмещал с активной преподавательской деятельностью. Он был прирожденным педагогом, его лекции, семинары по теории колебаний и общей физике всегда пользовались заслуженной популярностью. Он сыграл огромную роль в становлении современного курса общей физики, читаемого в Московском университете.

Сергей Павлович является автором прекрасных учебников по механике и теории колебаний, задача по курсу общей физики - по ним учились и учатся десятки тысяч студентов университетов. Известный учебник механики С.П. Стрелкова переиздавался дважды. Когда Сергея Павловича спрашивали о том новом, что он внес в книгу, он отвечал, что старался, прежде всего, изложить еще нагляднее, убедительнее и доступнее физические принципы механики. За последние десятилетия выдержал еще несколько изданий задачник по общему курсу физики, одним из основных авторов которого, определившим весь стиль этого важного учебного руководства, был С.П. Стрелков. Задачник был издан и за рубежом. Он на несколько десятилетий определил прогрессивный стиль семинарских занятий по общему курсу физики.

Работая в течение многих лет со своими учениками и сотрудниками и являясь с 1955 года заведующим кафедрой физического факультета МГУ, Сергей Павлович создал свою научную школу по теории колебаний. Многие научные сотрудники МГУ и ЦАГИ - его ученики, более 50 из них стали кандидатами и докторами наук. С.П. Стрелков был наделен самыми привлекательными человеческими качествами. Добрый, благожелательный, он охотно помогал своим ученикам, сотрудникам, всем, кто шел к нему за советом. Его авторитет ученого-физика, крупного авиационного специалиста был исключительно высок в научных центрах, учебных заведениях и на промышленных предприятиях.

С.П. Стрелков оставил большое наследие не только в своих трудах, он способствовал формированию «колебательной культуры» (по выражению Л.И. Мандельштама) - определенного строя научных взглядов специалистов, которые продолжают работать в направлениях, связанных с его деятельностью.

Центральный аэрогидродинамический институт

Поступила в редакцию 14.07.95



Минаев Аркадий Федорович - родился в 1923 году в Орле, окончил Казанский авиационный институт в 1957 году. После окончания КАИ работает в Центральном аэрогидродинамическом институте - в настоящее время в должности главного научного сотрудника отделения аэроупругости. Защищал диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в ЦАГИ (1963) и доктора технических наук (1981) в области теории колебаний летательных аппаратов, аэроупругости, динамики деформируемых конструкций, теории управления процессами в колебательных системах. Является одним из авторов справочника «Вибрации в технике», энциклопедии «Авиация», имеет много научно-технических статей и изобретений по направлениям, указанным выше.



Смыслов Всеволод Игоревич - родился в 1931 году в Ленинграде, окончил физический факультет МГУ в 1954 году. После окончания МГУ работает в Центральном аэрогидродинамическом институте - в настоящее время в должности начальника сектора отделения аэроупругости. Защищал диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1961) и доктора технических наук в ЦАГИ (1989) в области теории колебаний, аэроупругости, теории автоматического управления, моделирования колебательных процессов, методов и средств воспроизведения вибраций, автоматизации экспериментальных исследований. Автор главы справочника «Вибрации в технике», статей в энциклопедии «Авиация», много научно-технических статей и изобретений по направлениям, указанным выше, лауреат премии им. Н.Е. Жуковского.



Изв. вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

ЖОЗЕФ ВАЛЕНТЕН БУССИНЕСК, ДИДЕРИК ИОГАНН КОРТЕВЕГ, ГУСТАВ ДЕ ВРИЗ И УРАВНЕНИЕ КДВ

Уравнение КдВ в нормальной форме охарактеризовано Крускалом как «по-видимому, простейшее дифференциальное уравнение в частных производных..., не охватываемое классическими методами».

Дж. Майлс

Уравнению Кортевега - де Вриза (уравнению КдВ) сто лет, если считать, что впервые оно явно выписано в статье

Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Phil. Mag. 1895. Vol.39. P. 422-443.

Это - официальный юбилей, хотя раньше уравнение появилось в докторской диссертации Густава де Вриза (*de Vries G. Bijdrage tot de kennis der lange golden. Doctoral dissertation. University of Amsterdam, 1894*), которая и послужила основой знаменитой статьи 1895 года. Впрочем, по мнению Дж. Майлса [1], это уравнение косвенно возникает в исследованиях 1871-1877 годов французского физика Жозефа Валентена Буссинеска (1842-1929), который известен своими работами в гидродинамике (достаточно вспомнить «приближение Буссинеска», используемое, например, в теории конвекции жидкости), в теории упругости, в теории распространения света и тепла. Непосредственно Дж. Майлс ссылается на статью 1872 года

Boussinesq J. Theoric des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal en communiquant du liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J.Math. Pures Appl. 1872. Vol.17(2). P.55-108,

в которой приведены уравнения по сути такие же, как уравнение КдВ, но устроенные более сложно. Впервые уравнение КдВ было использовано для описания распространения волн на воде при слабой дисперсии и слабой нелинейности. История распорядилась так, что его открытие навсегда связано с именами известного голландского физика и механика Дидерика Иоганна Кортевега и преподавателя математики в голландских гимназиях Густава де Вриза.

Д.И. Кортевег (1848-1941) был учеником Я.Д. Ван-дер-Ваальса. Его первая докторская диссертация (1878) была посвящена движению вязкой жидкости в упругой трубе применительно к артериальному течению крови. С 1881 по 1918 год Кортевег возглавлял в Амстердамском университете кафедру

математики и механики. Весьма занятно, что в его биографии нет упоминания о его работе о волнах на воде и, более того, нет ссылки на совместную работу со своим учеником де Вризом [1]. Судя по всему ни Кортвег, ни де Вриз не знали упомянутую выше работу Буссинеска. Де Вриз после защиты диссертации преподавал в гимназиях и опубликовал в Трудах голландской королевской академии наук и искусств две статьи о циклонах. Больше о нем ничего не известно.

В диссертации де Вриза уравнение КдВ было получено для описания длинных гравитационных волн в невязкой несжимаемой жидкости конечной глубины h , причем, в качестве переменной использовалось смещение $y(x,t)$ свободной поверхности жидкости от равновесного уровня. Уравнение имело следующий вид:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{3}{2h} y \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right) = 0, \quad (1)$$

где x - продольная координата, t - время, $c_0 = (gh)^{1/2}$, g - ускорение свободного падения. Несомненная ценность уравнения КдВ в том, что оно является модельным (иногда говорят эталонным) для любой физической системы с приближенным законом дисперсии

$$\omega/k = c_0(1 - bk^2), \quad (2)$$

и слабой квадратичной нелинейностью. Здесь $b \ll l^2$, l - характерный масштаб длины вдоль направления распространения волны, c_0 - фазовая скорость линейных волн.

В общем случае, когда нелинейные и дисперсионные добавки в исходных уравнениях, описывающих распространение волн, одного порядка величины и малы по сравнению с линейными членами, уравнение одноволнового приближения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c_0 + v(u)) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) все переменные безразмерные. В системе координат, движущейся со скоростью c_0 , полагая $v(u)=u$, находим наиболее распространенную форму уравнения КдВ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (4)$$

Современный интерес к уравнению (4) и непрерывающееся число публикаций, связанных с изучением (4) и родственных ему эволюционных уравнений, начался с проблемы Ферми, Паста, Улама [2] и привел к переткритию Забуски и Крускалом в 1965 году солитона [3] (еще один юбилей!) и развитию метода обратной задачи рассеяния [4,5].

Солитону, как известно, соответствует точная компенсация изменений, происходящих в волне за счет дисперсионных свойств среды, изменениями, связанными с ее нелинейностью. Аналитически локализованное в пространстве решение уравнения (4), соответствующее одиночному возвышению или уединенной волне - солитону, записывается в виде

$$u(x,t) = u_{\max} \operatorname{ch}^{-2}[(x - Vt)/\Delta], \quad (5)$$

где $u_{\max} = 3V$, V - постоянная скорость солитона, Δ - характерная ширина солитона. Решение (5) удовлетворяет уравнению КдВ при выполнении равенств

$$4\beta/\Delta^2 = V, \quad 6\beta/\Delta^2 = u_{\max}/2,$$

из которых следует, что: 1) чем выше солитон, тем он уже; 2) чем солитон шире, тем он медленнее бежит и тем меньше его амплитуда.

У КдВ-уравнения много «родственников». К ним относятся: модифицированное уравнение КдВ (кубичная нелинейность); уравнение Бенджамина, Бонн и Магони (вместо $\partial^3 u / \partial x^3$ в уравнение входит $\partial^3 u / \partial x^2 \partial t$); уравнение Бенджамина - Оно для описания внутренних волн в тонком стратифицированном слое, расположенном в однородной жидкости; наконец, нелинейное уравнение Шредингера для волнового пакета, решением которого являются солитоны огибающей (см., например, [1]).

Все перечисленные уравнения по свойствам решений аналогичны юбилейру - уравнению Кортевега - де Вриза. Хороший обзор этих вопросов можно найти в статье [6].

Библиографический список

1. *Майлс Дж.* Уравнение Кортевега - де Вриза (исторический очерк). Современная гидродинамика. Успехи и проблемы / Под ред. Дж.Бэтчелора и Г.Моффата. М.: Мир, 1984. С. 186.

2. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonlinear problems. I. Nonlinear Wave Motion // Lectures in Applied Mathematics. Ed. A.C. Newell. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1955/1974. Vol.15. P.143-156.

3. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol.15. P. 240.

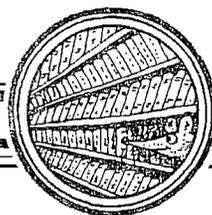
4. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg - de Vries equation // Phys.Rev.Let. 1967. Vol.19. P. 1095.

5. *Захаров В.Е., Мананов С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова. М.: Наука, 1980.

6. *Корпел А., Банерджи П.П.* Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям с дисперсией и к решениям солитонного типа // ТИИЭР. 1984. Т.72, № 9. С. 6.

Саратовский государственный
университет

Д.И. Трубецков



Изв. вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

ДВЕ «ЗАДАЧКИ» (ИЗ ПРОШЛОГО)

С.П. Стрелков

История решения двух задач, связанных с колебательными явлениями в потоке воздуха. Первая задача: о колебаниях воздуха в открытой рабочей части аэродинамической трубы. Были установлены общие физические закономерности, проведены эксперименты по измерениям колебаний, разработаны практические меры устранения вибраций. Вторая задача: измерения нестационарных аэродинамических сил на колеблющейся поверхности в потоке аэродинамической трубы. Полученные результаты имели большое значение для установления точности расчетов на флаттер с применением различных аэродинамических теорий.

В начале тридцатых годов в ЦАГИ разрабатывались проекты больших аэродинамических труб, ныне труб Т-101, Т-104 и др. Все эти трубы имеют открытую рабочую часть. Начиная с 1935 года мне довелось заниматься исследованием физических причин возникновения вредных колебаний давления воздуха в таких трубах. Первые опыты с аэродинамическими трубами этого типа показали наличие сильных вибраций при определенных режимах работы трубы или в некоторых диапазонах изменения скорости потока. Вибрации при большой скорости потока довольно значительны и препятствуют нормальной работе в трубе и ближайших помещениях и даже могут угрожать целостности стенок трубы и окружающих сооружений. Вибрации или, как их тогда называли, «пульсации» наблюдались как у нас, так и за границей при пуске первых труб со свободной струей. Чисто эмпирическим путем были найдены некоторые способы ослабления пульсаций. Но физические причины и законы возникновения колебаний тогда по существу известны не были. В литературе приводились лишь сведения качественного характера и некоторые соображения о возможной физической картине со ссылкой на аналогичные с органами трубами. Так как явления в органических трубах до сих пор еще не изучены хорошо, то в ЦАГИ решено было предпринять подробное физическое исследование явления пульсаций в аэродинамических трубах со свободной струей.

В 1935 году по договору с НИИФ МГУ была организована специальная группа из физиков и сотрудников ЦАГИ, которая начала свою работу в БПТИЛ ЭАО*, в отделе К.К. Баулина, под его непосредственным наблюдением.

От МГУ в эту группу входили Г.А. Бендриков и пишущий эти строки, а ЦАГИ Э.П. Шубин (физик, только что окончивший МГУ) и Ю.Г. Захаров. На первых порах, как советовал нам К.К. Баулин, мы занялись созданием подходящих физических приборов для измерения переменного давления. Тогда не было нужных готовых приборов. Применявшейся еще в прошлом столетии «пайбой Мореля» можно измерить частоту колебаний, но измерения амплитуды и фазы были очень ненадежны.

* БПТИЛ - Бюро проектирования труб и лабораторий, ЭАО - экспериментально-аэродинамический отдел.

В то время большинство физиков работало по старинке - все приборы делали сами, сейчас только иногда приходится делать так.

Измерительные приборы разрабатывали и изготовляли сами. В основе нашего прибора лежал относительно грубый конденсаторный микрофон, пригодный для измерения статического и динамического давления в потоке воздуха (мы назвали его приемником давления). Диапазон частот был известен только ориентировочно, амплитуды неизвестны совсем. Шли практически ощупью. Регистрирующая система, превращающая давления в колебания электрического тока, была сделана при помощи радиогенератора высокой частоты с двумя контурами. Система простая и удобная, с выходом по току прямо на шлейфовый осциллограф. Простота, конечно, достигалась после длительной наладки.

Такими приборами измерялись давления в нескольких точках работающей трубы (по крайней мере, в двух) и записывались на осциллографе СИ**. Были довольно подробно исследованы колебания во всех моделях труб, стоявших в то время в «зале мелких опытов» (Т-4, Т-20, Т-23), и в трубах Т-5 и Т-1.

Часто приходилось работать по ночам, так как вначале нужно было исследовать явления в трубах без всяких демпфирующих приспособлений. Шум и вибрации в окружающих помещениях были настолько сильны, что работники института протестовали, если опыты шли днем. Кстати сказать, максимальная интенсивность шума в незадемпфированном варианте наблюдалась в трубе Т-104, она металлическая и скорость потока в ней большая. Помню, шум достигал иногда такой силы, что некоторые работники ложились на пол, не могли стоять, несмотря на то, что на всех были надеты специальные шлемы.

В результате подробных измерений амплитуды и фазы колебаний давления на различных режимах и в разных местах удалось представить картину поля колебаний давления в свободной струе, внутри различных частей обратного канала и в окружающих помещениях. Анализ поля показал: колебания в свободной струе и внутри трубы имеют различную физическую природу. В струе основные колебания гидродинамического характера, во всех остальных местах - акустические колебания вследствие сжимаемости воздуха. В свободной струе колебания давления вызваны образованием в пограничном слое струи эквидистантных кольцевых вихрей, движущихся от сопла к диффузору примерно с половинной скоростью ядра струи. Интенсивность вихрей и колебаний резко нарастает вдоль потока. Сравнение зависимостей частоты и амплитуды колебаний (в соответствующих точках) от скорости потока и числа оборотов вентилятора показало, что изучаемый процесс имеет чисто автоколебательный характер, вынужденные колебания потока около вентилятора быстро затухают и не влияют на процесс автоколебаний. Этот вывод и положен в основу разработки упрощенной теории явления и отыскания рациональных способов глушения вибраций.

Следующие этапы, довольно продолжительные, вплоть до пуска в эксплуатацию труб Т-104 и Т-101 в 1939-1940 годах, в основном были посвящены изучению особенностей вибраций в разных трубах с различным аэродинамическим контуром и устройством. Главное внимание обращалось на эффективность и целесообразность демпфирующих приспособлений, без которых невозможна эксплуатация больших труб. Основной результат - обеспечение нормальной работы важнейшего «прибора» ЦАГИ - трубы с открытой рабочей частью - был получен.

В работе некоторое время, особенно в напряженные моменты, принимали участие Н.А. Лошаков и В.П. Шальнов, сотрудники НИИФ МГУ. Мне и Г.А. Бендрикову пришлось вести эту работу до конца. В 1938 году Э.П. Шубин ушел из ЦАГИ и в работу в разное время включались Н.А. Смирнов, Н.А. Любимов, М.С. Филиппов, инженеры ЦАГИ, и техник А.М. Дыканюк.

Вспоминая пути решения первой задачи, которой мне довелось заниматься в ЦАГИ, и ту обстановку, в которой мы были тогда в ЭАО, хочется отметить особо благоприятные условия для нашего развития, тогда еще весьма «зеленых» научных работников.

Через год - полтора после начала мне пришлось фактически руководить всей работой, и, естественно, я был в очень большом затруднении. Физики-теоретики или,

** Осциллограф Сейсмологического института АН СССР

как называли выходцев из школы Манделштама, физики-«колебатели», мы вначале безнадежно плавали в аэродинамике и инженерных вопросах, в которых нужно было разбираться. Только благодаря своевременной и благожелательной помощи работников ЭАО, в первую очередь со стороны К.К.Баулина, с которыми нам приходилось тогда много общаться, нам удавалось относительно быстро устранять на ходу недостатки университетского образования. С другой стороны, у нас в запасе было только одно, правда, как показал опыт, довольно мощное оружие - хорошее знание «языка теории колебаний», которым можно пользоваться во всех разделах науки и техники. Сейчас важность этого обстоятельства всем ясна, а тогда... Но нам посчастливилось по линии «вибраций» познакомиться с рядом ведущих ученых: К.А.Ушаковым, Г.Н. Мусиняцем, Б.Н. Юревым, Б.А. Ушаковым, с тогда еще молодыми, но уже авторитетными учеными М.В. Келдышем и Г.Н. Абрамовичем. Деловое общение с ними и компетентные советы помогали решать наши задачи, а главное, учиться и учиться. Это, конечно, должен делать каждый научный работник всю жизнь. Но в молодости не всегда мы понимаем это. Некоторые наивно думают, что окончание ВУЗа или обладание кандидатской степенью делает их научными работниками.

По окончании работы с «пульсациями» в 1940 году решено было на основе опыта исследования переменных давлений в потоке создать в лаборатории № 2 группу по изучению явлений в неустановившемся потоке. В нее вошли, кроме меня, инженеры ЦАГИ: Н.А.Смирнов, Н.А. Любимов, О.А. Емельянов, Ю.Я. Запольский, М.С. Филиппов и А.М. Дыканюк. Группа была довольно хорошо по тому времени оснащена аппаратурой для измерений колебаний давления и вибраций. Имелась даже аппаратура для «мгновенного» спектрального анализа колебаний. Мы строили радужные планы дальнейших работ. Предполагалось заниматься исследованием колебаний давления на поверхности колеблющегося крыла и измерением сил, действующих на вибрирующее или мгновенно изменяющее угол атаки крыло и т.д.

Но война нарушила все наши планы. Группа была расформирована - часть перешла в лабораторию № 3, в отдел динамики М.В. Келдыша, Н.А. Смирнов был мобилизован, Ю.Я. Запольский ушел добровольцем с ополчением МГУ, О.А. Емельянов поступил в ВВА.

Прежде чем рассказывать о следующей задаче, хочу здесь остановиться особо на работе Ю.Я. Запольского, погибшего осенью 1941 года при отступлении от Ельни. Юра был освобожден от военной службы, у него в детстве была неудачно сломана рука. Он настойчиво добивался призыва в военкомате, но ему отказывали. Тогда он ушел с ополчением МГУ, с товарищами по университету. Юра успешно закончил физический факультет МГУ в 1940 году и поступил в ЦАГИ потому, что делал дипломную работу у меня на тему: «Водяная модель свободной струи аэродинамической трубы», которую он начал вместе с Л. Клячко еще в студенческом научном кружке. Это была довольно трудная экспериментальная работа с убедительными и красивыми результатами, которые были использованы в исследованиях «пульсаций». Из стекла изготовлялась геометрически подобная модель рабочего помещения аэродинамической трубы, камера, в которую входило сопло с одной стороны и часть диффузора - с другой. Струя воды протекала через камеру из вышестоящего резервуара. На поверхности струи воды образовывались кольцевые вихри. При помощи струйки чернил или краски можно сделать вихри видимыми и наблюдать за их развитием в стробоскопическом освещении. На фотографических снимках отчетливо видно и перемещение вихря со скоростью, примерно равной половине скорости струи, и увеличение размеров вихря в направлении к диффузору, и разрушение его у кромки диффузора. На модели все происходило аналогично тому, что мы наблюдали в воздушной струе аэродинамической трубы. Сжимаемость воды ничтожна, и очевидно, что она не играет никакой роли в этом явлении. Поэтому все процессы колебаний в свободной струе аэродинамической трубы мы назвали гидродинамическими. Опыты Ю.Я. Запольского дали наглядное подтверждение верности физической картины колебаний давления в аэродинамической трубе.

Следует заметить, что на водяной модели наблюдалась большая чувствительность системы вихрей к внешнему периодическому воздействию. Достаточно было неаккуратно поставить вблизи модели мотор стробоскопа, как система вихрей синхронизировалась с частотой оборотов мотора или кратной к ней («захватывалась»).

Помню, что у многих возникали сомнения в правильности *положенных ранее* толкований картины колебаний давления в свободной струе аэродинамической трубы. Но когда оппоненты знакомились с результатами опытов на водяной модели, то они снимали свои возражения. С.А. Христианович смотрел эти опыты в лаборатории МГУ.

Вся наша работа заключается в решении «задачек». Когда я был еще студентом и приехал домой, то мои сверстники задавали мне вопрос: «Чему тебя там учат?». Трудно было просто рассказать об университетской науке на уровне давно забытой начальной школы, поэтому обычно отвечал так: «Учат решать задачки». Можно было видеть, что спрашивающих такой ответ не устраивал. Им было непонятно, как это такой дядя занимается какими-то задачками. А по существу все было именно так: вся жизнь научного работника - это решение различных «задачек»: и больших, и сложных, и простых, и маленьких.

Я подробно рассказал о «задачке» исследования «пульсаций» и еще скажу об одной: об измерении нестационарных сил на колеблющемся крыле.

В 1940 году М.В. Келдыш пригласил меня в комиссию, которая рассматривала возможность создания универсального прибора для измерения сил, действующих в потоке на вибрирующее крыло. Не помню уже, по чьей инициативе, кажется по предложению Е.П. Гроссмана, в конструкторском отделе прорабатывали возможность создания такого прибора. Прибор в первом варианте представлял собой довольно сложную машину весом в несколько тонн. Изготовить такую машину можно было только на специальном заводе. Во время анализа проекта и довелось мне ближе познакомиться с Г.Н. Мусиняцем и К.А. Ушаковым, которые принимали участие в работе комиссии. В результате детального рассмотрения проекта и всей задачи в целом все согласилось не строить универсальную машину и решать задачу путем физического эксперимента.

До этого Б.А. Ушаковым, Л.С. Поповым и Н.В. Альхимовичем была сделана небольшая простая установка для измерения колебаний подъемной силы колеблющегося крыла. Учитывая опыт создания этой установки, М.В. Келдыш предложил нам заняться аналогичными измерениями с записью колебаний на шлейфовом осциллографе. За эту работу взялся в 1940 году пришедший к нам после окончания физфака МГУ О.А. Емельянов. Он успел до начала войны провести довольно успешно первые опыты с новой установкой, спроектированной им в трубе Т-20. Труба Т-20 - это модель Т-101 (1/20). После пуска этой трубы модель была передана в полное распоряжение нашей группы. Но работать Олегу не пришлось. Он был призван в армию, поступил в Военно-воздушную академию, поехал в командировку, заболел сыпным тифом и умер.

В 1940-1941 годах М.В. Келдыш для своего отдела читал лекции по теории нестационарных аэродинамических воздействий на крыло. Все сотрудники нашей группы аккуратно посещали эти очень интересные лекции. Он излагал нестационарную теорию, используя не только вихревую модель обтекания крыла, но и потенциал скорости возмущений потока. Тогда это не было обычным изложением, и оно представлялось не только математически стройным, но и более физичным и понятным, поскольку нам теория электромагнитного поля была ближе, чем аэродинамика.

Основная цель измерения сил на колеблющемся крыле состояла в экспериментальной проверке допустимости расчетов аэродинамических сил по упрощенной теории, основанной на так называемой гипотезе стационарности. Последняя значительно проще для объяснения и давала менее сложные выражения для сил, чем «точная» теория нестационарных аэродинамических воздействий на колеблющееся крыло («нестационарная теория»). Гипотеза стационарности допускает пренебрежение влиянием следа за крылом на обтекание колеблющегося крыла. Поэтому согласно стационарной теории сила, действующая на крыло в данный момент, определяется стационарным потоком, который соответствует мгновенному значению «местных» углов атаки крыла. Более «точная» нестационарная теория основана на точном решении линейного приближения для возмущенного колебаниями потока идеальной жидкости около тонкого крыла, совершающего любые гармонические колебания. При обтекании выполняются условия Жуковского - Чаплыгина на задней кромке и возмущения достаточно малы, чтобы можно было считать законным линейное приближение.

Практически расхождение в определении сил по этим теориям заключалось в различной зависимости динамических коэффициентов от числа Струхала. При числе Струхала, равном нулю, обе теории, естественно, сходились к результату чистого обтекания в постоянном потоке. Для крутильных (вращательных) колебаний крыла различие в действующих на крыло силах и моментах становилось заметным, когда число Струхала было больше 0,25. Вообще, расхождение между двумя теориями, как показывали расчеты, могло привести к разным значениям критической скорости флаттера крыла. Тогда за рубежом критическую скорость флаттера определяли по нестационарной теории, а у нас, в основном, по стационарной. Поэтому и решено было для проверки допустимости расчетов по той или иной теории обратиться к прямым опытам. Война нарушила все эти планы, и только в 1947 году мы вернулись к решению поставленной задачи.

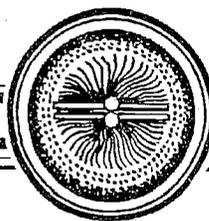
За работу по экспериментальному определению переменных аэродинамических сил взялся поступивший в ЦАГИ после окончания Казанского авиационного института Н.Н. Дорехин. После подробного анализа довоенных опытов и испытания целого ряда предварительных вариантов установки решено было применить появившиеся во время войны тензодатчики для измерения переменных сил, действующих на колеблющееся крыло. Далеко не сразу, но в конце концов удалось получить хорошие записи колебаний, в которых полезные сигналы значительно превышали неизбежный средний уровень «шумов и помех». Измерения колебаний подъемной силы и момента при вращательных колебаниях модели крыла в различных вариантах - крыла с шайбами («плоский» поток), конечного крыла, моделей разных масштабов (трубы Т-20, Т-102), в условиях различных амплитуд и т. д. - показали в основном следующее. Нестационарная теория более правильно определяет значения переменных сил для крыла бесконечного размаха. Однако практически для чисел Струхала в области от 0 до 0,25 отличие от значений, получаемых по стационарной теории, невелико. Линейная зависимость сил от амплитуды колебаний справедлива для амплитудных значений угла атаки, приблизительно равных 5° . Последнее обстоятельство довольно важно. Ведь колебания угла атаки с амплитудой 5° (размах 10°) при скорости потока 30 м/с давали уже не такие малые возмущения, во всяком случае не бесконечно малые, как считалось в теории. Тем не менее линейная теория, конечно при малых дозвуковых скоростях, оставалась справедливой. Так была решена вторая «задача».

© Труды ЦАГИ. 1983. Вып. 2200. С. 7.

TWO « SMALL PROBLEMS» (FROM THE PAST)

S. P. Strelkov

A history of solving of two problems about oscillation phenomena in airflow. The first problem : an air oscillations in the open part of wind tunnel. General physical conformities to natural laws were established, experimental measurements of oscillations were performed, the practical ways to remove oscillations were elaborated. The second problem : measurements of unsteady aerodynamic forces on oscillating surface in the wind tunnel flow. The received results had the essential significance for precision in flutter calculations.



Изв. вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

Выходит в свет в 1996 году монография

NONLINEAR OSCILLATION AND WAVES IN DYNAMICAL SYSTEMS

by P.S. Landa

published by Kluwer Academic Publishers,
Dordrecht, 1996
570 pages, 721 references

PREFACE

A rich variety of books devoted to dynamical chaos, solitons, self-organization made their appearance in recent years. These problems are considered independently of one another. Therefore, many of readers of these books do not suspect that the problems discussed there are divisions of great generalizing science - the theory of oscillations and waves. This science is not some branch of physics or mechanics. It is in its own right. It is meta-science in some sense. In this respect the theory of oscillations and waves is nearest to mathematics. In the book called attention to reader the present-day theory of nonlinear oscillations and waves is carried out. From unified point of view oscillatory and wave processes in the systems of diversified physical nature, both periodic and chaotic, are considered. The relation between the theory of oscillations and waves, nonlinear dynamics and synergetics is discussed. One of purposes of the book is to convince reader of the necessity of thorough study of the theory of oscillations and waves and to show that such popular branches of science as nonlinear dynamics, synergetics, the soliton theory, and so on, are, in fact, constituent parts of this theory.

Primary audience for the book: researchers having to do with oscillatory and wave processes; students and post-graduate students interested in deep study of general laws and applications of the theory of oscillations and waves.

INTRODUCTION

Purpose and subject-matter of the book. Subject of the theory of oscillations and waves. The history of creation and development of this theory.

1. Purpose and subject-matter of the book

Purpose of the book called attention to reader is to give a good indication of the present state of the theory of nonlinear oscillations and waves. A distinguishing feature of this book is unified approach to both oscillatory and wave phenomena as well as to both regular and chaotic processes in dynamical systems.

The book contains introduction, five parts, and two appendixes. In introduction we give the definition of theory of oscillations and waves and describe the subject of its investigation. The history of creation and development of this theory is briefly reviewed too.

The first part deals with notions of dynamical system and its phase space, energy, adiabatic invariants, integrability and so on. Classification of dynamical systems is conducted. Elements of

the theory of near-integrable Hamiltonian systems are outlined. The definitions of natural (free), forced and self-oscillations and waves, chaotic and stochastic motions and corresponding attractors are given. The main quantitative characteristics of attractors are also described.

In the second part basic dynamical models studied in theory of oscillations and waves are described. For example, we have considered different models of nonlinear one-degree-of-freedom oscillators, including the «prey-predator» model by Lotka - Volterra; nonlinear chains by Toda and Fermi - Pasta - Ulam; some model equations for waves in dispersive media having solutions of soliton form; the Riemann and the Burgers equations describing wave processes in non-dispersive media; a set of models of self-oscillatory and autowave systems.

Natural oscillations and waves in the models of linear and nonlinear oscillators and chains, and soliton solutions of some model equations are considered in the third part. The notions of normally and anomalously dispersive waves are given and corresponding examples are adduced. Saw-tooth and shock waves in non-dispersive media, and solitary waves for the Burgers equation are considered. Elements of the theory of waves in slightly inhomogeneous, slightly nonstationary and periodically stratified media are also presented.

The fourth part of the book is devoted to consideration of oscillations and waves caused by external actions both forced and parametric. Much attention is given to different resonance problems. Nonlinear phenomena occurring in half-bounded chains and continuous media with harmonic input actions, such as excitation of the second harmonic and decay instability, are analyzed. The formation of saw-tooth and shock waves in nonlinear non-dispersive media and the change in form of harmonic wave in the process of its propagation in nonlinear slightly dispersive medium described by the Korteweg - de Vries equation are considered. Behavior of nonlinear bundles in non-dispersive and dispersive media described by the cubic Schrodinger equation and the Khokhlov - Zabolotzkaya equation is considered too.

Finally, the fifth part of the book, which is the most extensive, is devoted to oscillations and waves in active systems and, in particular, to self-oscillations and autowaves. Forced one-dimensional waves in active (non-equilibrium) media and a possibility of development of so-called burst instability are described. The notion of waves with negative energy is given. A view on turbulence in nonclosed flows as on amplification of fluctuations is discussed. Different mechanisms of self-excitation of oscillations and waves and of limitation of their magnitudes are analyzed. Classification of self-oscillatory and autowave systems is carried out. The energetic criterion for stochastization of self-oscillations is set forth. A great body of examples of self-oscillatory and autowave systems of diversified physical nature, both known and unknown, are adduced and studied. Influence of periodic actions on different self-oscillatory and autowave systems is investigated. In particular, the problems of asynchronous depression and excitation of self-oscillations, of synchronization and chaotization are considered. Interaction between self-oscillatory systems, both periodic and chaotic, is studied; in so doing the emphasis is on synchronization and chaotization problems.

Some mathematical methods used for investigation of oscillatory and wave systems are given in appendixes.

The book concludes with a comprehensive bibliography.

2. Definition and significance of the theory of oscillations and waves. Subject of its investigations. The history of creation and development of this theory. The relation between the theory of oscillations and waves and the synergetics problems

Theory of oscillations and waves is science studying oscillatory and wave motions irrespective of their physical nature. By oscillatory motions any limited changes of body state taking place in a long time interval are meant. Due to the limitation these changes must necessarily be «thither and thither» [Mandelstam, 1955].

By wave motions oscillatory motions propagating in the space are meant. Such definition of the theory of oscillations and waves is very common. We know that other sciences study spatial-temporal changes of body state too. How does the theory of oscillations and waves differ from their? An answer to this question has been given by L.Mandelstam [Mandelstam, 1955]. Contrary to other sciences for which the prime interest is in what takes place with a body in a given space point and at a given moment, the theory of oscillations and waves concerns «general character of a process taken as a whole over a long interval of time».

Basing on knowledge of general laws of oscillatory and wave motions we can profitably predict different phenomena from diversified areas of science. Discovery of light combination scattering by L.Mandelstam [Mandelstam, 1947 (1,2)]* is a typical example of such prediction. As for analogy between light combination scattering and usual objects of the oscillation theory,

* In the west literature this effect is usually called the Raman effect.

Mandel'shtam has written following [Mandel'shtam, 1972]: «From the point of view of theory of oscillations, wireless telephony and light combination scattering are the same. It is modulation. Sound - in radio, atomic oscillations - in combination scattering.» Thus, the availability of analogy between oscillatory and wave systems of diversified physical nature is the basis for prediction. Regarding such analogies, Mandel'shtam told students in one of his lectures on the theory of oscillations: «All of you know such systems as a pendulum and an oscillatory circuit, and also know that from oscillatory point of view it is the same. Now all this is trivial, but it is wonderful that this is trivial». These ideas up till now have not become fashioned. In the paper «L.I. Mandel'shtam and theory of nonlinear oscillations» A.A. Andronov [Andronov, 1956] has written about lectures and seminars by Mandel'shtam: «Lectures and seminars by Mandel'shtam have sometimes contained new scientific results which were not published. But, may be, the most significance of these lectures was in methodical inculcating habits of {it oscillatory thinking}, in general rise of {it oscillatory culture}». Unfortunately, many of even prominent scientists, studying concrete problems, are still lacking in «oscillatory culture». For example, if chemistry scientists had got such culture in due time, they would have not argued against principal possibility of oscillatory chemical reactions in homogeneous media, and fortune of B.P. Belousov discovered experimentally such reactions in 1951 [Belousov, 1959] would have been alternate. Furthermore, up till now scientific works, which are absolutely erroneous from the point of view of the oscillation theory, are occurred on occasion. Had their authors general «oscillatory culture», these works could have not appeared. It has historically arisen that the theory of oscillations was strongly attracting to radio engineering and drew from it basic models and objects under investigation. By this fact, the universality of the oscillation theory laws and the necessity to study these laws by specialists in different branches of science were not realized immediately, if at all.

The availability of analogies between oscillatory and wave processes in the systems of diversified physical nature is the reason why the theory of oscillations and waves has got its {it subject} for investigation and thereby it took shape of original science. {it Dynamical system} is such a subject [Neimark, 1988,1992]. Dynamical system is the system whose behavior is predetermined by a set of rules (algorithm). In particular, and it is most often, behavior of dynamical system is described by differential, integral or finite-difference equations. Obviously, dynamical system is a model of a real system. So, we can say that the theory of oscillations and waves studies abstract models, but not concrete systems. Basic models of the theory of oscillations and waves will be described in the Part II.

Contrary to physics, where dynamical models of investigated phenomena have been long worked out and studied, in other sciences this, as a rule, has not taken place. Investigations were concrete and had mainly pure descriptive character. The situation has essentially changed in the last tens of years only. Models have began to be worked out and investigated in chemistry, biology, ecology, meteorology, economics and even medicine. True, exceptions took place in the past too. So, in 1920 A. Lotka proposed a model of hypothetical chemical reaction with oscillations of reacting substances [Lotka, 1920,1925]. Analogous model was later suggested by V. Volterra for explanation of oscillations of numbers of competing species of animals and plants [Volterra, 1931]. At a later time this model has come to be known as «the prey - predator model». In 1928 a dynamical model of heart was proposed by B. van der Pol and M. van der Mark [Van der Pol, 1928]. This model consisted in three coupled relaxation generators. Using this model, authors demonstrated some known heart diseases, such as arrhythmia, and even attempted to predict unknown diseases. However, similar models were very few in number and, as a rule, they remained a mystery for the general circle of investigators.

By analyzing different models from diversified areas of science we can detect that these models have much in common. Therefore, these models may be classified by one or other indication; and in so doing we can separate the most typical ones for each class. Such classification, being of considerable importance in the presentation of the theory of oscillations and waves, will be carried out in the Chapter 1.

How and when was created such generalizing science as the oscillation theory? Apparently, it goes back to G. Lagrange works in the field of analytic mechanics published in 1788. By introducing generalized coordinates and momenta Lagrange has in effect digressed from traditional mechanics. The equations derived by him can be applied to systems of any nature. The investigation of properties of solutions of these equations makes possible to obtain general oscillatory and wave laws. It is not accidental that many of fundamental ideas of the present-day theory of oscillations and waves are expounded through the use of the Lagrange equations (or of their counterpart, the Hamilton equations).

The more important step on the road to creation and development of theory of oscillations and waves is associated with famous treatise by Rayleigh (J.W. Strutt) «The Theory of Sound» published in 1877 [Rayleigh, 1945]. In this treatise Rayleigh has first called attention to analogy between acoustic and electrical oscillations. Although the calculations of investigated phenomena

in the Rayleigh treatise were largely based on the linear theory, the elements of nonlinear theory, in particular of the self-oscillation theory, were embedded in this book. For example, the equation describing the general laws of self-oscillatory processes was derived there. At the present time this equation is known as the Rayleigh equation. The majority of problems formulated in the Rayleigh treatise were solved in more recent times. Among these are the investigations of self-oscillations of the Froude pendulum [Strelkov, 1933], of thermo-acoustic self-oscillations of the Helmholtz resonator [Teodorchik, 1952], and many others.

Creation of the present-day nonlinear oscillation theory is associated with investigations of H.Poincare [Poincare, 1886,1899], G.Birkhoff [Birkhoff, 1927] and A.M.Lyapunov [Lyapunov, 1950, 1954-1956] laying the mathematical foundations for this theory. True, application of their mathematical methods to the oscillation theory as such has occurred well later, primarily owing to works of A.A. Andronov [Andronov, 1956,1959].

A great contribution to development of nonlinear oscillation theory, especially of applied part of this theory, was made by van der Pol [Van der Pol, 1920, 1926, 1960], studying the operation of electronic generator and proposing his own investigative techniques, viz., the techniques of slightly varying amplitudes.

The next quite considerable step to development of oscillation theory and to transformation of this theory to the branch of science in its own right is associated with works of L.Mandelshtam and his disciples A.Andronov, A.Vitt, G.Gorelik, N.Papalexi, S.Khaikin, S.Strelkov, S.Rytov and other. Mandelshtam was the first scientist who as early as 1930 delivered lectures on the theory of oscillations and waves [Mandelshtam, 1955]. These lectures were given in Moscow University. They, as well as succeeding monograph «Oscillations and Waves» by G.Gorelik [Gorelik, 1959], up till now are examples of a unified approach to oscillatory and wave phenomena.

Almost independently of Mandelshtam, Andronov and other physicists mathematical groundworks for the nonlinear oscillation theory were laid by N. Krylov, N. Bogolyubov, Yu. Mitropolsky and their disciples [Krylov, 1937; Bogolyubov, 1950, 1961; Mitropolsky, 1955,1971,1988]. They worked out the most important methods for analysis slightly nonlinear oscillations: asymptotic method, the methods of averaging and of equivalent linearization. These methods have received further development through works of N.Moiseev [Moiseev, 1981], V.Volosov and B.Morgunov [Volosov, 1971], A.Nayfeh [Nayfeh, 1981], A.Vasilyeva [Vasilyeva, 1973,1990], E.Mischenko [Mischenko, 1975], R.O'Malley [O'Malley, 1974], W. Eckhaus [Eckhaus, 1979], J.Sanders and F.Verhulst [Sanders, 1985] and other.

It was one of the most important Andronov's achievements that he was the first to perceive interrelation between Poincaré's limit cycles and periodic oscillations of electronic generator studied by van der Pol. Such oscillations were called by Andronov {it self-oscillations}. Injection into oscillation theory by Andronov of the notion of self-oscillations initiated a great current of papers. Authors of these papers let know of detection of self-oscillations in concrete systems. Still more papers were initiated by subsequent discovery of the fact that self-oscillatory processes can be not only periodic, but chaotic as well. A great contribution to this discovery was made by one from Andronov's disciple, Yu.I.Neimark, in his works on homoclinic structure theory [Neimark, 1958, 1972 (1), 1976 (1,2), 1987]. The discovery of chaotic self-oscillations has received unprecedented attention of specialists in the very different branches of science.

In addition to this discovery, widespread attention to the problems of the theory of nonlinear oscillations was caused by the discovery of somewhat opposed trend in the evolution of dynamical systems, viz., trend to ordering, to self-organization**.

Owing to this discovery new science by the name «synergetics» arises [Haken, 1978, 1983; Prigogine, 1980; Polak, 1983, Loskutov, 1990]. Although synergetics appears without visible association with the theory of oscillations and waves, subject of its study and general methods of investigation have been just adopted from this theory.

An essential effect on development of theory of oscillations and waves has been exerted by the discovery of special type of waves known as {it solitons}. Experimentally soliton was detected even in the 19th century by J.Scott Russell describing his observations and experiments in [Russell, 1844]. The first equation having solutions of soliton form was derived by D.Kortevæg and G. de Vries in 1895 [Kortevæg, 1895]. However, the theoretical comprehension of the soliton discovery and the elaboration of mathematical technique for calculation of solitons were happened rather not long ago, in 60s of this century [Zabusky, 1965; Gardner, 1967; Kruskal, 1970]. Today, an extensive literature has evolved which concerns the soliton theory (see, for example, [Whitham, 1974; Zakharov, 1980; Ablowitz, 1981; Eilenberger, 1981; Dodd, 1982; Infeld, 1990]). Un-

** It must be mentioned that the transition of system to chaotic regime, according to Yu.Klimontovich's hypothesis [Klimontovich, 1989,1990], is just associated with ordering of motion in the system. But this hypothesis is not generally recognized.

fortunately, up till now many investigators did not have a clear understanding of how the soliton theory relates to general theory of oscillations and waves, and therefore confusion with using of soliton notion often arises. The term «autosolitons» suggested recently by B.Kerner and V.Osipov [Kerner, 1991, 1994] may help to eliminate this confusion to a degree.

CONTENTS

Preface

Introduction. Purpose and subject-matter of the book. Subject of the theory of oscillations and waves. The history of creation and development of this theory

1. Purpose and subject-matter of the book
2. Definition and significance of the theory of oscillations and waves. Subject of its investigations. The history of creation and development of this theory. The relation between the theory of oscillations and waves and the synergetics problems

Part I. Basic Notions and Definitions

Chapter 1. Dynamical systems. Phase space. Stochastic and chaotic systems. The number of degrees of freedom

- 1.1. Definition of dynamical system and its phase space
- 1.2. Classification of dynamical systems. A concept of the energy
- 1.3. Integrable and nonintegrable systems. Action - angle variables
- 1.4. Systems with slightly time-varying parameters. Adiabatic invariants
- 1.5. Dissipative systems. Amplifiers and generators

Chapter 2. Hamiltonian systems close to integrable. Appearance of stochastic motions in Hamiltonian systems

- 2.1. The content of the Kolmogorov - Arnold - Moser theory
- 2.2. The Henon - Heiles system

Chapter 3. Attractors and repellers. Reconstruction of attractors from an experimental time-series. Quantitative characteristics of attractors

- 3.1. The simple and complex attractors and repellers. Stochastic and chaotic attractors
- 3.2. Reconstruction of attractors from an experimental time-series
- 3.3. Quantitative characteristics of attractors

Chapter 4. Natural and forced oscillations and waves. Self-oscillations and autowaves

- 4.1. Natural and forced oscillations and waves
- 4.2. Self-oscillations and autowaves

Part II. Basic Dynamical Models of the Theory of Oscillations and Waves

Chapter 5. Conservative systems

- 5.1. Harmonic oscillator
- 5.2. Anharmonic oscillator
- 5.3. The Lotka - Volterra system («prey-predator» model)
- 5.4. Chains of nonlinear oscillators. The Toda and Fermi - Pasta - Ulam chains
- 5.5. The wave equation. The Klein - Gordon and the Sine - Gordon equations. The Born - Infeld equation
- 5.6. The equation of simple (Riemann) waves
- 5.7. The Boussinesq and the Korteweg - de Vries equations
- 5.8. The Whitham and the Rudenko equations
- 5.9. The Khokhlov - Zabolotzkaya, the cubic Schrodinger, the Ginsburg - Landau and the Hirota equations
- 5.10. Some discrete models of conservative systems

Chapter 6. Nonconservative Hamiltonian and dissipative systems

- 6.1. Nonlinear damped oscillator with external force
- 6.2. The Burgers equation
- 6.3. The van der Pol, the Rayleigh and the Bautin equations
- 6.4. The equations of systems with inertial excitation and inertial nonlinearity
- 6.5. The Lorenz, the Rossler and the Chua equations

- 6.6. A model for active string
- 6.7. Models for locally excited media (the equation for overfall wave, the Fitz - Hugh - Nagumo and the Turing equations)
- 6.8. The Feigenbaum and the Zisook maps

Part III. Natural (Free) Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems

Chapter 7. Natural oscillations of nonlinear oscillators

- 7.1. Pendulum oscillations
- 7.2. Oscillations described by Duffing equation
- 7.3. Oscillations of a material point in the force field with the Toda potential
- 7.4. Oscillations of a bubble in fluid
- 7.5. Oscillations of species strength described by the Lotka - Volterra equations
- 7.6. Oscillations in the system with slowly time-varying natural frequency

Chapter 8. Natural oscillations in the systems of coupled oscillators

- 8.1. Linear conservative systems. Normal oscillations
- 8.2. Oscillations in linear homogeneous and periodically inhomogeneous chains
- 8.3. Normal oscillations in nonlinear conservative systems
- 8.4. Oscillations in nonlinear homogeneous chains
- 8.5. Oscillations of coupled nonlinear damped oscillators. Homoclinic structures. A model of acoustical emission

Chapter 9. Natural waves in bounded and unbounded continuous media. Solitons

- 9.1. Normally and anomalously dispersive linear waves. Ionization waves in plasmas. Planetary waves in ocean (the Rossby waves and solitons)
- 9.2. Nonlinear waves described by the Born - Infeld equation. Solitons of the Klein - Gordon and the Sine - Gordon equations. Interaction between solitons
- 9.3. Simple, sawtooth and shock waves
- 9.4. Solitons of the Korteweg - de Vries equation
- 9.5. Solitons of the Boussinesq equation
- 9.6. Solitons of the cubic Schrodinger and the Ginsburg - Landau equations
- 9.7. Natural waves in slightly inhomogeneous and slightly nonstationary media. The wave action as an adiabatic invariant
- 9.8. Natural waves in the periodically stratified media

Part IV. Forced Oscillations and Waves in Passive Systems

Chapter 10. Oscillations of a nonlinear oscillator excited by an external force

- 10.1. Periodically driven nonlinear oscillators. The main, subharmonic and superharmonic resonances
 - 10.1.1. Main resonance
 - 10.1.2. Subharmonic resonance
 - 10.1.3. Superharmonic resonance
- 10.2. Chaotic oscillations of nonlinear systems under periodic external actions
 - 10.2.1. Chaotic oscillations described by the Duffing equation
 - 10.2.2. Chaotic oscillations of a gas bubble in liquid under exposure to sound field
 - 10.2.3. Chaotic oscillations in the Vallis model for nonlinear interaction between ocean and atmosphere
- 10.3. Oscillations excited by external force with slowly time-varying frequency

Chapter 11. Oscillations of coupled nonlinear oscillators excited by external periodic force

- 11.1. The main resonance in a system of two coupled harmonically excited nonlinear oscillators
- 11.2. Combination resonances in two coupled harmonically driven nonlinear oscillators
- 11.3. Driven oscillations in linear homogeneous and periodically inhomogeneous chains caused by harmonic force applied to input of the chain
- 11.4. Forced oscillations in nonlinear homogeneous and periodically inhomogeneous chains caused by harmonic force applied to input of the chain. Excitation of the second harmonic and decay instability
- 11.5. Driven vibration of a string excited by distributed external harmonic force

Chapter 12. Parametric oscillations

- 12.1. Parametrically excited nonlinear oscillator
 - 12.1.1. Slightly nonlinear oscillator with small damping and small harmonic action

- 12.1.2. High-frequency parametric action upon a pendulum. Stabilization of the upper equilibrium position as an induced phase transition
- 12.2. Chaotization of parametrically excited nonlinear oscillator. Regular and chaotic oscillations in a model of childhood infections with regard to periodic seasonal change of the contact rate
- 12.3. Parametric resonances in the system of two coupled oscillators
- 12.4. Simultaneous forced and parametric excitation of a linear oscillator. Parametric amplifier

- Chapter 13.** Waves in half-bounded media excited by perturbations applied to their boundaries
- 13.1. One-dimensional waves in nonlinear homogeneous nondispersive media. Shock and sawtooth waves
 - 13.2. One-dimensional waves in nonlinear homogeneous slightly dispersive media described by the Korteweg - de Vries equation
 - 13.3. One-dimensional waves in nonlinear highly dispersive media
 - 13.4. Nonlinear wave bundles in dispersive media
 - 13.4.1. Self-focusing and self-defocusing of wave bundles
 - 13.4.2. Compressing and spreading pulses in nonlinear dispersive media
 - 13.5. Nonlinear wave bundles in nondispersive media. Approximate solutions of the Khokhlov - Zabolotzkaya equation
 - 13.6. Waves in slightly inhomogeneous media
 - 13.7. Waves in periodically inhomogeneous media

Part V. Oscillations and Waves in Active Systems. Self-Oscillations and Auto-Waves

- Chapter 14.** Forced oscillations and waves in active non-self-oscillatory systems
- Turbulence. Burst instability. Excitation of waves with negative energy
 - 14.1. Amplifiers with lumped parameters
 - 14.2. Continuous half-bounded media with convective instability.
 - 14.3. Excitation of turbulence in nonclosed fluid flows. The Klimontovich criterion of motion ordering
 - 14.4. One-dimensional waves in active nonlinear media. Burst instability
 - 14.5. Waves with negative energy and instability caused by them
- Chapter 15.** Mechanisms of excitation and amplitude limitation of self-oscillations and auto-waves. Classification of self-oscillatory systems
- 15.1. Mechanisms of excitation and amplitude limitation of self-oscillations in the simplest systems. Soft and hard excitation of self-oscillations
 - 15.2. Mechanisms of self-oscillation excitation in systems with high-frequency power sources
 - 15.3. Mechanisms of excitation of self-oscillations in continuous systems. Absolute instability as a mechanism of excitation of auto-waves
 - 15.4. Quasiharmonic and relaxation self-oscillatory systems. Stochastic and chaotic systems
 - 15.5. Possible routes for loss of regular motion stability and the appearance of chaos and stochasticity
 - 15.5.1. The Feigenbaum scenario
 - 15.5.2. The transition to chaos via fusion of a stable limit cycle with an unstable one and subsequent disappearance of both of these cycles
 - 15.5.3. The transition to chaos via destruction of a two-dimensional torus
 - 15.5.4. The Ruelle - Takens scenario
- Chapter 16.** Examples of self-oscillatory systems with lumped parameters. I
- 16.1. Electronic generator. The van der Pol and Rayleigh equations
 - 16.2. The Kaidanovsky - Khaikin frictional generator and the Froude pendulum
 - 16.3. The Bonhoeffer - van der Pol oscillator
 - 16.4. A model of glycolysis and a lumped version of «brusselator»
 - 16.5. A lumped model of the Buravtsev oscillator
 - 16.6. Clock movement mechanisms and the Neimark pendulum. The energetic criterion of self-oscillation chaotization
 - 16.7. Self-oscillatory models for species interaction based on the Lotka - Volterra equations
 - 16.8. The systems with inertial nonlinearity
 - 16.8.1. The Pikovsky model
 - 16.9. The systems with inertial excitation
 - 16.9.1. The Helmholtz resonator with non uniformly heated walls

- 16.9.2. The heated wire with weight at its center
- 16.9.3. A modified «brusselator»
- 16.9.4. Self-oscillations of an air-cushioned body
- Chapter 17.** Examples of self-oscillatory systems with lumped parameters. II
 - 17.1. The Rossler and Chua systems
 - 17.2. A three-dimensional model of an immune reaction illustrating an oscillatory course of some chronic diseases and «oregonator»
 - 17.3. The simplest model of economic progress of human society
 - 17.4. Models of vocal source
 - 17.5. A lumped model of «singing» flame
- Chapter 18.** Examples of self-oscillatory systems with high-frequency power sources
 - 18.1. The Duboshinsky pendulum, «gravitational machine» and the Andreev hammer
 - 18.2. The Bethenod pendulum, the Papaleksi effect and the Rytov device
 - 18.3. Electromechanical vibrators. Capacitance sensors of small displacements
- Chapter 19.** Examples of self-oscillatory systems with time delay
 - 19.1. Biological controlled systems
 - 19.1.1. The models of respiration control
 - 19.1.2. The Mackey - Glass model of the process of regeneration of white blood corpuscles (neutrophils)
 - 19.1.3. Models of upright human posture control
 - 19.2. The van der Pol - Duffing generator with additional delayed feedback as a model of Doppler's autodyne
 - 19.3. A ring optical cavity with external field (the Ikeda system)
- Chapter 20.** Examples of continuous self-oscillatory systems with lumped active elements
 - 20.1. The Vitt system. Competition and synchronization of modes
 - 20.2. The Rijke phenomenon
 - 20.3. A distributed model of «singing» flame
- Chapter 21.** Examples of self-oscillatory systems with distributed active elements. I
 - 21.1. Lasers. Competition, synchronization and chaotization of modes. Optical autosolitons
 - 21.2. The Gann generators
 - 21.3. Ionization waves (striations) in low-temperature plasmas
 - 21.3.1. Inert gases
 - 21.3.2. Molecular gases
 - 21.4. A model of the Korotkov sound generation
 - 21.5. Self-oscillations of a bounded membrane due to excitation of waves with negative energy
- Chapter 22.** Periodic actions upon self-oscillatory systems. Synchronization and chaotization of self-oscillations
 - 22.1. Synchronization of periodic self-oscillations by an external force in the van der Pol - Duffing generator. Two mechanisms of synchronization. Synchronization as a non-equilibrium phase transition
 - 22.2. Synchronization of periodic oscillations in a generator with inertial nonlinearity and more complicated systems
 - 22.3. Synchronization of the van der Pol generator with modulated natural frequency
 - 22.4. Asynchronous quenching and asynchronous excitation of periodic self-oscillations
 - 22.5. Chaotization of periodic self-oscillations by a periodic external force
 - 22.6. Synchronization of chaotic self-oscillations. The synchronization threshold and its relation to quantitative characteristics of attractor
- Chapter 23.** Interaction between self-oscillatory systems
 - 23.1. Mutual synchronization of two generators of periodic oscillations
 - 23.2. Mutual synchronization of three and more coupled generators of periodic oscillations
 - 23.3. Chaotization of self-oscillations in systems of coupled generators
 - 23.4. Interaction between generators of periodic and chaotic oscillations
 - 23.5. Interaction between generators of chaotic oscillations. The notion of synchronization
- Chapter 24.** Examples of auto-waves and dissipative structures
 - 24.1. Auto-waves of burning. A model of the overfall wave
 - 24.2. Auto-waves in the Fitz - Hugh - Nagumo model
 - 24.3. Auto-waves in a distributed version of brusselator and in some other models of biological, chemical and ecological systems
- Chapter 25.** Convective structures and self-oscillations in fluid. Onset of turbulence
 - 25.1. The Rayleigh - Taylor instability and initial stage of thermoconvection excitation in plane layer
 - 25.2. Thermoconvection in a toroidal tube. The Lorenz equations

- 25.3. Initial stage of bioconvection excitation
- 25.4. Onset of turbulence in the flow between two coaxial rotating cylinders. The Taylor vortices

Chapter 26. Hydrodynamic and acoustic waves in subsonic jet and separated flows

- 26.1. The Kelvin - Helmholtz instability
- 26.2. Subsonic free jet
- 26.3. Sound excitation by impinging jet. Excitation of edgetones
- 26.4. Self-oscillations in open-jet return-circuit wind tunnels
- 26.5. The Karman vortex wake, Aeolian tones and stalling flutter

Appendix A. Approximate methods for solving linear differential equations with slowly time-varying parameters

- A.1. JWKB Method
- A.2. Asymptotic method
- A.3. The Liouville - Green transformation
- A.4. The Langer transformation

Appendix B. The Whitham method and the stability of periodic running waves for the Klein - Gordon equation

Bibliography



Вышел в свет сборник трудов Л.А. Вайнштейна

Издательством «Радио и связь» выпущен сборник трудов члена-корреспондента АН СССР, профессора **Льва Альбертовича Вайнштейна**. В книге объемом 600 страниц, изданной под редакцией члена-корреспондента АН СССР С.М. Рытова, объединены оригинальные статьи Л.А.Вайнштейна по теории дифракции, электронике СВЧ и отдельным вопросам радиофизики, в том числе, не вошедшие в его монографии. Эти работы не потеряли актуальности и в настоящее время и могут быть полезны как для студентов, изучающих физику, так и для исследователей, активно работающих в данных областях. В сборник вошли также стихи и переводы Льва Альбертовича, воспоминания его друзей и учеников.

Для получения книги наложенным платежом по почте необходимо направить заявку, указав адрес, телефон, количество экземпляров, по адресу:

**117334, Москва, ГСП-1, ул. Косыгина, 2
ИФП им. П.Л.Капицы РАН
Клееву А.И.**

E-mail: klev@magnit.msk.su
Факс: (095) 9382030





Изв. вузов «ПНД», т. 3, № 2, 1995

Московский Синергетический Форум
Январская встреча

«УСТОЙЧИВОЕ РАЗВИТИЕ В ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ МИРЕ»

Москва, 27-31 января 1996 года

Московский Синергетический Форум призван стать международной организацией ученых, озабоченных проблемами путей развития человечества, поисками новой методологии познания исторического развития, образами будущего цивилизации. Предусматривается проведение регулярных встреч и конференций, ориентированных на открытый творческий диалог между участниками.

Оргкомитет

С.П. Капица, профессор, Институт физических проблем РАН
С.П. Курдюмов, чл.-корр. РАН, директор Института прикладной математики РАН
Н.Н. Моисеев, академик
В.Д. Поремский, доктор, Германия
В.С. Степин, академик, директор института философии РАН
В.А. Ядов, профессор, директор института социологии РАН

Проблемы к обсуждению

- Теория самоорганизации как основа междисциплинарного синтеза знания, как язык кросс-дисциплинарной коммуникации, а также мост между естественными и гуманитарными науками, восточным и западным миропониманием, новой наукой (наукой о сложности, нелинейности и хаосе) и старой культурой, наукой и искусством, наукой и религией, традицией и инновацией.
- Социальные проекции теории самоорганизации (синергетики), поиски конструктивных принципов коэволюции сложных систем, в частности, коэволюции социальных организаций, стран, регионов, находящихся на разных стадиях развития.
- Теория самоорганизации и новые подходы к образованию и обучению, новые способы адаптации человека к жизни в эпоху нестабильного развития.
- Теория самоорганизации и диалог культур, различных способов видения мира, стилей жизни, религиозных позиций; поиски принципов взаимопонимания, кооперации, солидарности, согласия, толерантности, новых способов коммуникации.

Приглашаемые докладчики

Анри Атлан, профессор, Франция
Франц Вукетич, доцент, Австрия
Эрвин Ласло, профессор, Австрия, Италия
Эдгар Моран, профессор, Франция
Герман Хакен, профессор, Германия

Место проведения

Санаторий-профилакторий «Знамя революции» в Тимирязевском парке г. Москвы, ул. Вучетича, 32, м. Тимирязевская.

Публикация материалов

Тезисы докладов и выступлений просим выслать по адресу Оргкомитета до **15 декабря 1995 года**. Материалы Форума будут опубликованы в специальном сборнике, а также в журналах «Общественные науки и современность», «Россия и современный мир», «Химия и жизнь», «Знание - сила».

Секретариат: Аршинов Владимир Иванович, Князева Елена Николаевна.

Москва, 119142, ул. Волхонка, 14, факс (095)200-32-50, тел./факс (095)203-34-44.



Изв.вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

С 12 по 18 октября 1995 г. в загородном пансионате «Волжские Дали» прошла научная конференция «Динамика образования в регионе», посвященная памяти двух замечательных людей - ректора Саратовского государственного университета А.М.Богомолова и начальника Управления образования администрации Саратовской области В.И.Антонченко, сыгравших большую роль в становлении учебных заведений нового типа, в частности Колледжа прикладных наук при СГУ.

Конференция включала в себя совещание работников средней и высшей школ «Интеграция средней и высшей школ» (15-18 октября 1995 г.) и традиционную V школу-семинар (школу-турнир) по физике «Колебания, волны, электроны» для учащихся 10 и 11 классов. Попытка объединения в рамках одной конференции учителей и старшеклассников, по мнению многих участников и организаторов, оказалась удачной и заслуживающей дальнейшего рассмотрения. Школа-семинар старшеклассников преследовала цели профессиональной ориентации молодежи и поддержки одаренных детей, а совещание работников образования - обмен опытом по созданию инновационных образовательных структур в регионе. Организаторы конференции также ставили своей целью ознакомить как учителей, так и учащихся старших классов с новым междисциплинарным направлением - нелинейной динамикой (синергетикой), допускающей общность подхода к решению «нелинейных» проблем в самых различных областях знаний (от физики и других естественных наук до экономики, социологии и управления).

Организаторы конференции: Саратовский государственный университет (Трубецков Д.И.), Управление образования администрации Саратовской области (Кошелев В.А.), Управление образования администрации города (Суровов С.Б.), Администрация Волжского района города (Рустиков Ю.А.), Саратовский институт повышения квалификации работников образования (Владимирова А.П.). Решение оперативных вопросов по организации и проведению конференции было возложено на Государственный учебно-научный центр «Колледж» СГУ (Левин Ю.И.). В организации конференции принимал участие также Научно-методический центр Управления образования администрации города.

Финансирование конференции осуществлялось организаторами на принципах долевого участия. Значительную финансовую поддержку в проведении конференции оказал Международный благотворительный фонд Институт «Открытое общество», Нью-Йорк, США (Фонд Сороса).

Число участников конференции - 210 человек. Из них: учащиеся школ города, области и других городов РФ - 90; студенты и аспиранты СГУ - 11; учителя школ города, области и других городов РФ - 75; лекторы, организаторы, гости - 34. В работе конференции приняли участие 5 академиков, 7 профессоров, из них 3 саратовских стипендиата, 11 кандидатов наук и доцентов, 16 саратовских учителей, ученые из Москвы и Нижнего Новгорода, представители Госкомвуза РФ и Министерства образования, руководители органов управления образования, представители администраций области, города и Волжского района.

Программа конференции включала общеобразовательные лекции и цикл лекций по синергетике: «Колебания», «Как Галилей взвешивал доводы своих оппонентов», «О синергетике», «Как в библиотеке МГУ нашли первое издание «Начал» Ньютона» (Данилов Ю.А., Москва); «Волны», «Синергетика в действии» (Трубецков Д.И., Саратов); «О сверхпроводимости» (Сафонов В.М., Москва); «Что такое вейвлетный анализ» (Астафьева Н.М., Москва); «Относительность - время, пространство, поля» (Дмитриев Б.С., Саратов); «Современные проблемы астрономии» (Скляр Ю.А., Саратов); «Физика твердого тела» (Усанов Д.А., Саратов); «Что такое лазер на свободных электронах» (Новожилова Ю.В., Нижний Новгород); «Диссипативные структуры в химии и биологии» (Гурья Г.Т., Москва); «Гуманитарное образование в физико-математических школах» (Рыскин М.И., Саратов). Состоялись круглые столы Физико-технического лицея № 1, Колледжа прикладных наук, трех инновационных образовательных структур при СГУ, физического факультета СГУ. Проведен вечер памяти В.И.Антонченко и А.М.Богомолова. Для старшеклассников работала компьютерный класс, состоялись семинары по решению задач, проведена физическая олимпиада. Показан научный фильм «Chaos». Состоялись тематические беседы учителей и учащихся с ведущими специалистами, приглашенными на конференцию. Культурную программу по вечерам обеспечивал клуб СГУ (концерты, дискотеки). Проведена игра «Что? Где? Когда?».

Д.И. Трубецков
Ю.И. Левин



Изв. вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

III INTERNATIONAL CONFERENCE
MATHEMATICS, COMPUTER, EDUCATION

Dubna, Russia, 29 January - 3 February, 1996

Russian Association «Women in Science and Education» initiates a series of conferences to combine efforts of Russian and foreign experts interested in development of science and high education in Russia and other states of FSU, and to embed of our science and education in the world community.

Organizers

Russian Association «Women in Science and Education», Joint Institute for Nuclear Research (Dubna), Moscow State University, Institute of Mathematical Problems in Biology (Pushchino), Institute of Applied Mathematics RAN.

International scientific advisory committee

R.Pose, I. Schmeltzer (Germany), B. Leaver, G. Vincent (USA), Leon Pismen (Israel), S.V. Chernichenko, V.A. Roitman (Ukraine), V.A. Shlyk (Belarus), S. Paysha (France), M. Osella (Argentina), N.L. Ulanova (Latvia), S.Svetina (Slovenia), A.M. Molchanov, N.V. Belotelov, L.A. Uvarova, L.V. Yakushevich, S.P. Kurdyumov, Yu.I. Zhuravlev, A.B. Rubin, G.Yu. Riznichenko, S.P. Ivanova, P.D. Shirkov, V.P. Shakin, L.D. Lozinsky, V.A. Kuznetsova, I.S. Emelyanova, G.G. Malinetsky (Russia)

Organizing committee

Prof. Galina Riznichenko - Co-Chairman, Moscow State University, President of Association «Women in Science and Education»

Prof. Rudolf Pose - Co-Chairman, Director of Laboratory of Computing Techniques and Automation, Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

Nina Yanson - Scientific secretary (Pushchino)

A.B. Rubin, Y.I. Zhuravlev, S.P. Kurdyumov, R.D. Shyrkov, S.P. Ivanova, S.V. Chernichenko, L. Ya. Timofeeva, G.V. Lebedeva, T.Y. Plusnina, L.D. Lozinsky, N.V. Belotelov

Planned sessions

- Computing in education
- Computer informational technologies
- Mathematical modelling in physics and techniques
- Mathematical modelling in biology, medicine and ecology

Round tables will be held on

- Science and universities
- Education, society and authorities

The abstracts of communications (not more than one page) will be published before the beginning of the Conference. Conference proceedings will be published after the Conference. Text of each communication, including posters, should not exceed 8 pages 20x30 cm with the following margins: bottom - 2.5, top - 2.5, left - 3.5, right - 1.5. Computer demonstrations and posters are invited.

Official languages: English, Russian

Important deadlines: The registration form and the abstract should be sent to the organizing committee by the 1st November 1995. Invitations we'll send you in December, 1995.

The registration fee (\$300) you can pay just before the beginning of the Conference. It includes travel expenses Moscow-Dubna-Moscow, living expenses, publication of materials of the Conference, social programme and reception.

ORGANIZING COMMITTEE ADDRESS

Prof. G. Riznichenko,
Chair of Biophysics,
Dept. of Biology,
Moscow State University,
119899 Moscow, Russia

phone/fax: (095) 939-19-63
Fax: (095) 939-11-15
e-mail: riznich@orgmath.msk.su
riznich@biophys.bio.msk.su



Изв.вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

INTERNATIONAL CONFERENCE
WOMEN - MATHEMATICIANS: MATHEMATICS, MODELLING, ECOLOGY

Volgograd, Russia, 27-30 May, 1996

The foundation meeting of Russian women mathematicians held on May 25, 1993 in Souzdal has established the Association of Russian Women in Mathematics. The Association has been created for women who have chosen mathematics as the sphere of their scientific activity. The International Congresses of Women-Mathematicians were held under the auspice of UNESCO in Pushchino (June, 1994) and Voronezh (June 1995).

Organizers

Russian Association «Women-Mathematicians», Russian Association «Women in Science and Education», Volgograd State University, Volgograd Ecological Academy

Scientific committee

T. Vasilyeva, I. Emelyanova, I. Gudovich (Russia), J. Vincent (USA), G. Kiotina, V. Kuznetsova, G. Kurina, I. Melnikova, A. Malyh, G. Lobacheva, E. Nikitina (Russia), M.E.T. de Osella (Argentina), S. Payche (France), C. Sadosky (USA), G. Riznichenko (Russia).

Organizing committee

G. Riznichenko (Moscow), T. Vasilyeva (Volgograd), B. Siplivy (Volgograd), I. Gudovich (Voronezh), V. Gavricov (Volgograd), I. Emelyanova (N. Novgorod), V. Kuznetsova (Yaroslavl), E. Nikitina (Yakutiya), L. Timofeeva (Moscow)

Scientific programme

The programme comprises lectures, round tables and poster sessions. Themes and speakers will be selected by the Scientific Committee.

Sessions

•Differential Equations and Function Theory •Algebra, Topology and Geometry •Theory of Probability and Discret Analysis •Computing Mechanics and Mathematical Simulation •Mathematical Models in Economics •Modern Problems of Mathematical Education for Mathematical and Science faculties

Round tables

•Women in Science and Education •Ecological problems of the Volga Basin •Computers in Mathematical Education

Poster sessions will give to all participants the opportunity of presenting their works. These sessions will be organized by topic so as to encourage an exchange of ideas. Each participant has the possibility of presenting only one poster. Poster size should not exceed a maximum width of 42 cm and a maximum height of 100 cm. The abstracts of communications (not more one page) will be published before the beginning of the conference. Conference proceedings are to be published after the conference. Text presented in Conference Proceedings and for poster reports should consist of less than 6 pages (in page size 20x30 cm, top and bottom margins 2.5 cm each, left-hand margin 3.5 cm, right-hand margin 1.5 cm).

Official languages of the Conference are Russian and English.

Important deadlines: The titles of the reports and abstracts are to be received before 1 March 1996. The Invitation with travel instructions will be sent to you in April 1996. Registration fee for participants - \$150, for accompanying person - \$100. This registration fee includes: reception, excursions, publication of the conference materials. The registration fee you can pay just before the beginning of the conference. All information you can get by e-mail.

ORGANIZING COMMITTEE ADDRESS

Prof. G. Riznichenko,
Chair of Biophysics,
Dept. of Biology,
Moscow State University,
119899 Moscow, Russia

phone/fax: (095) 939-19-63
Fax: (095) 939-11-15
e-mail: riznich@orgmath.msk.su
riznich@biophys.bio.msk.su
vasilt@math.ygu.tsaritsyn.su

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал - макет подготовлен *Г.А. Суминой* с использованием
программы Design Studio на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам
осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж»
при Саратовском государственном университете.

Банковские реквизиты - р/с № 000609446 в КБ «Экономбанк»
г. Саратова, МФО 251279, корсчет банка 700161122, РКЦ, МФО 251008.

Индекс издания по каталогу «Газеты и журналы» 73498

Сдано в набор 1.10.95. Подписано к печати 15.12.95. Формат 70x108/16.

Бумага писчая № 1. Печать офсетная. Гарнитура Латинская.
Усл. печ.л. 11,55 (8,25). Уч.-изд. л. 13,8. Тираж 200 экз. Заказ

Издательство ГосУНЦ «Колледж».
410071, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446
E-mail:and@ccollege.saratov.su

ГП «Типография №1». 410040, Саратов, Вишнёвая, 10.

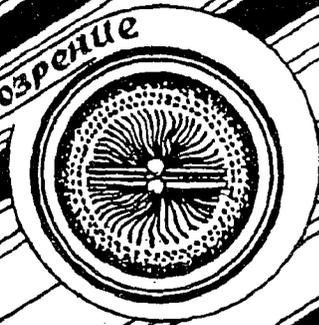
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1995



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikov, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

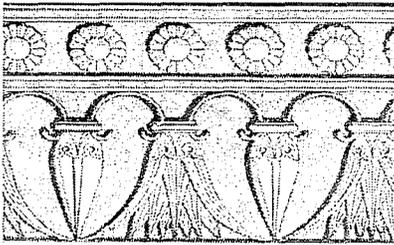
V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей в журнале -



Современной нелинейной динамики

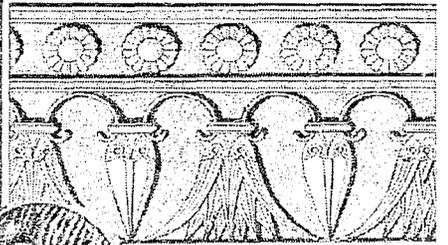


ВСЕМИРНАЯ ИСТОРИЯ И ПИД

*(Взгляд через призму
изобразительного искусства)*



Рис. 1



ИСКУССТВО АССИРИИ И ВАВИЛОНА

*(Проблемы археоло-
гической гидродинамики)*

В своем наивном самодовольстве мы полагаем, что гидродинамика, которой посвящен данный выпуск журнала, есть плод развития новейшей цивилизации. Меж тем упорное и пристальное вглядывание в глубь веков (составляющее, собственно, цель настоящей рубрики), показывает, что плоды эти взращены на дереве, корни которого, возможно, омывались когда-то водами Тигра и Евфрата. Кажется несомненным, что гидродинамика не могла не возникнуть на этой земле с водным названием «Двуречье», прорезанной двумя великими потоками, то величаво-ламинарными, то ревущими бурными водоворотами и завихрениями; земле, насыщенной мириадами каналов, водоводов, ручейков и арыков, образующих ирригационную систему, созданную чуть ли не за 5 тысячелетий до Р.Х.

Поэтому гидродинамический подход к памятникам ассиро - вавилонской культуры оказывается не только вполне уместным, но и плодотворным. С этой точки зрения поразительный интерес представляет, например, голова божества - хранителя из дворца Саргона II (рис.1). Трехмерная пластика настолько выразительно и зримо отображает здесь процесс турбулентизации ламинарного потока, что этому могут только позавидовать авторы статей о методе дискретных вихрей на стр. 72 и 94, а строгость и точность в передаче малейших деталей динамической структуры вихрей разного масштаба невольно порождает вопрос: А как же все это было посчитано?

Ключом к разгадке оказалось инвентарное клеймо на бедре хранителя, содержавшее аббревиатуру ПИСИ и цифры 400806. Ученые предположили, что буквы означают «Писцовый компьютер», а цифры дают число ячеек памяти (в данном случае - писцов), естественно, в шестидесятиричной системе счисления (в десятичной это соответствует 144486 писцам). Эта догадка сразу позволила связать воедино многие необъяснимые ранее факты.

1. Огромное количество найденных археологами россыпей глиняных табличек с цифрами; которые ранее считались уцелевшими фрагментами ученых книг; теперь выяснилось, что это просто записи содержимого отдельных ячеек памяти, причем писцы с сырыми, необожженными табличками образовывали ОЗУ, а с обожженными - ПЗУ.

2. Сразу стало понятным основное назначение огромных пирамидальных зданий - зиккуратов (рис.2; в отличие от Египта, эти пирамиды никогда не были гробницами). Оказалось, что зиккурат с размещенными в нем писцами, и образует системный блок компьютера, причем размеры его ($140 \times 140 \times 70 \text{ м}^3$) таковы, что он вмещает как раз 144486 человек, из расчета 3 м³ на человека. В качестве монитора использовались артели скульпторов по граниту типа VGA (visual granit art-association).

3. Загадочное по своей нецелесообразности строительство Вавилонской башни представляется теперь просто неудачной попыткой создания суперкомпьютера, провалившейся вследствие отсутствия стандарта на алгоритмические языки. Симптоматично, что следствием этого провала явилась широкая программа построения персональных (для каждого отдельного царя) компьютерных зиккуратов.

Конечно, быстроедействие подобных устройств было невелико, но зато проблем с подключением дополнительной памяти никогда не возникало.

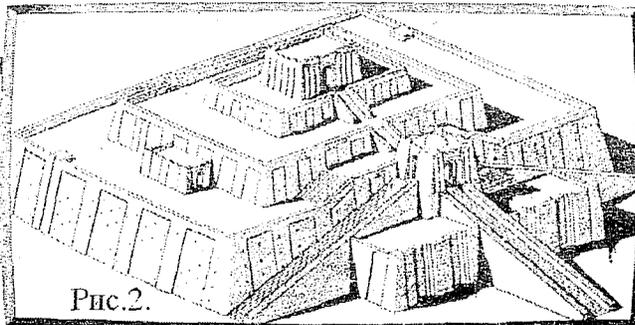
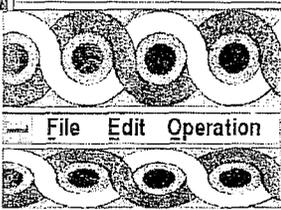


Рис. 2.

