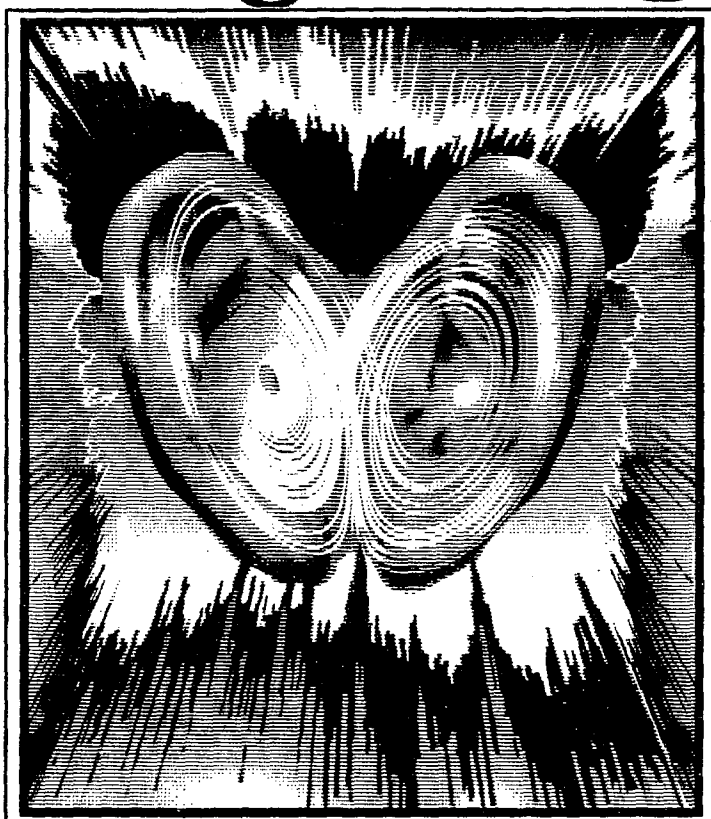


ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Трикладная нелинейная динамика



Роль шумов в нелинейной прикладной динамике

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



**Бифуркации
в динамических
системах различной природы**



**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



Конференции, семинары, симпозиумы



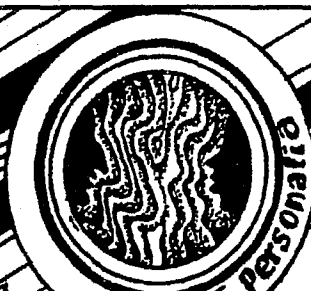
Детерминированный хаос



Авто-волны, самоорганизация



**Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн**



Нелинейная динамика в лицах. История. Personalities

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пушкино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.К. Юлпатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СОДЕРЖАНИЕ

Роль шумов в нелинейной динамике

<i>Анищенко В.С.</i> От редактора	4
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ	
<i>Нейман А.Б.</i> Применение кумулянтного анализа для исследования бифуркаций динамических систем, возмущаемых внешним шумом	8
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ	
<i>Ebeling W.</i> Nonlinear dynamics of mixed evolutionary strategies for solving optimization problems	22
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС	
<i>Стратонович Р.Л.</i> Динамический хаос в системе с марковскими отображениями и экспоненциальный характер выхода из метастабильного состояния	28
<i>Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В.</i> Механизмы рождения странного нехаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием	34
<i>Старобинец И.М., Угриновский В.А.</i> Динамический метод оптимизации управления хаосом	44
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Dykman M.I., Luchinsky D.G., Mannella R., McClintock P.V.E., Stein N.D., Stocks N.G.</i> Stochastic resonance and its provenance	56
<i>Малахов А.Н., Панкратов А.Л.</i> Времена стохастических переходов в кусочно-параболических бистабильных системах с шумом	70
<i>Агудов Н. В., Малахов А. Н.</i> Влияние формы потенциального профиля метастабильного состояния на температурную зависимость его времени жизни	80
<i>Анищенко В.С., Хованов И.А., Шульгин Б.В.</i> Стохастический резонанс в цепи Чуа при взаимодействии различных типов аттракторов системы	91
<i>Постнов Д.Э.</i> Стохастический резонанс в автогенераторах с жестким возбуждением	100
<i>Янсон Н.Б., Анищенко В.С.</i> Моделирование динамических систем по экспериментальным данным	112
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ	
<i>Abarbanel H.D.I.</i> Tools for analyzing observed chaotic data. I Introduction	122
КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ	
<i>Anishchenko V.S.</i> Dynamical chaos - models and experiments	126
КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА	
<i>Kaplan D., Glass L.</i> Understanding nonlinear dynamics	131

CONTENTS

Role of noises in nonlinear dynamics

Editorial. <i>V.S. Anishchenko</i>	4
BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS	
The cumulant approach for the investigation of bifurcations of dynamical systems driven by the external noise. <i>A.B. Neiman</i>	8
AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION	
Nonlinear dynamics of mixed evolutionary strategies for solving optimization problems. <i>W. Ebeling</i>	22
DETERMINISTIC CHAOS	
The dynamic chaos in a system with the Markov mapping and the exponential law of exit from metastable state. <i>R.L. Stratonovich</i>	28
Mechanisms of strange nonchaotic attractor birth in the ring map with quasi-periodic excitation. <i>V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtzeva</i>	34
A dynamical method for controlling chaos optimization. <i>I.M. Starobinets and V.A. Ugrinovskii</i>	44
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
Stochastic resonance and its provenance. <i>M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.D. Stein and N.G. Stocks</i>	56
Temporal scales of stochastic transitions in the piecewise-parabolic bistable systems with noise. <i>A.N. Malakhov and A.L. Pankratov</i>	70
The effect of the shape of the potential profile of the metastable state on its life time temperature dependence. <i>N. V. Agoudov and A. N. Malakhov</i>	80
Stochastic resonance in Chua's circuit when different types of attractors of the system interact. <i>V.S. Anishchenko, I.A. Khovanov and B.V. Shulgin</i>	91
Stochastic resonance in generators with threshold excitation. <i>D.E. Postnov</i>	100
Modelling dynamical systems on experimental data. <i>N.B. Jenson, V.S. Anishchenko</i>	112
METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS	
Tools for analyzing observed chaotic data. 1 Introduction. <i>Henry D.I. Abarbanel</i>	122
BOOK REVIEW	
Dynamical chaos - models and experiments. <i>V.S. Anishchenko</i>	126
STUDENT'S BOOKSHELF	
Understanding nonlinear dynamics. <i>D.Kaplan and L.Glass</i>	131



ОТ РЕДАКТОРА

Современное естествознание в настоящее время находится в состоянии далеко от равновесия, что обусловлено удивительными открытиями, к которым привели исследования динамики нелинейных систем и процессов. Целый ряд явлений и эффектов, представлявших совсем недавно загадки для науки, сейчас стали доступны как для теоретического описания, так для численного и экспериментального анализа. Большая доля успехов в этом направлении связана с резко возросшими возможностями, которые предоставляет современный вычислительный эксперимент.

Формирующаяся во многом благодаря достижениям нелинейной физики современная картина мира допускает, как и раньше, использование чисто детерминистического (динамического) и статистического (с учетом действия флуктуаций) описания. Можно привести весомые аргументы в пользу динамического описания определенных закономерностей эволюции нелинейных систем. В то же время существует обширный класс процессов, для которых учет роли флуктуаций оказывается первостепенным фактором.

Настоящий выпуск журнала включает в основном работы, относящиеся ко второму направлению. Речь идет об исследованиях, в той или иной степени относящихся к современной статистической теории нелинейных динамических систем. Ничто не ново под луной! Более 60 лет назад эта проблема была сформулирована классиками теории колебаний А.С. Понтрягиным, А.А. Андроновым и А.А. Виттом в статье «О статистическом рассмотрении динамических систем» (ЖЭТФ, 1933, т.3, вып.3, с.165). Так уж получилось, что в те времена (и много еще лет спустя) заложенные в этой работе фундаментальные идеи не овладели умами большинства исследователей. Понадобилось еще полвека, чтобы общество осознало неизбежную в них потребность и были созданы условия для их осмысления и развития.

Так почему же вопрос о роли флуктуаций в нелинейной динамике так важен? Представьте себе, что Вы находитесь на самой вершине большой горы. Ваше состояние равновесия, естественно, неустойчиво. Сколь угодно малые флуктуации приведут к падению с горы и, что самое важное, именно направление силы случайного воздействия определит ваше будущее (если уцелеете!), так как условия с разных сторон подножия горы могут оказаться принципиально различными.

Для нелинейных систем с изменением параметров типичны бифуркации. В точке бифуркации системы мы имеем практически полную аналогию с положением на вершине горы: дальнейшая ее эволюция может полностью определяться возмущением.

Приведенный простой пример естественно не исчерпывает всего многообразия возможных явлений, обусловленных откликом нелинейных систем на шумовое возмущение. Например, известно, что в нелинейных системах с шумом могут реализоваться режимы функционирования, которые принципиально исключены в соответствующих детерминированных системах! В таких случаях говорят об индуцированных шумом переходах.

Мне кажется, что читателям журнала, уже достаточно ясна важность обсуждаемого вопроса. Становится понятной причина интереса со стороны физиков к построению моделей эволюции живой природы, к исследованию процессов самоорганизации живой и неживой материи, к исследованиям детерминированного хаоса и турбулентности. Все эти проблемы безусловно относятся к области статистической теории нелинейных динамических систем или, как сейчас говорят, к проблеме описания нелинейного броуновского движения.

Я хотел бы несколько слов уделить вопросу роли шумов в динамике хаотических систем. Открытие детерминированного хаоса в системах, моделируемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, для которых доказана теорема существования и единственности решений, 20 лет назад вызвало шок в научном мире! Сейчас и того хуже: стало ясно, что фундамент детерминистического описания, базирующийся на доказательстве решения задачи Коши для нелинейных динамических систем, дал трещину! Дело в том, что выше критической точки рождения детерминированного хаоса, как стало ясно из последних работ группы Л.П. Шильникова, система характеризуется бесконечным числом решений, классификация которых оказывается в принципе невозможной! Ведь по сути дела, речь идет о достижении предела применимости детерминистического описания, которое для нелинейных систем может вообще не работать! Каков же выход из создавшейся ситуации? Однозначного ответа на этот вопрос, по-видимому, пока не существует. Один из наиболее конструктивных путей связан с решением задачи обоснования существования и нахождения наиболее вероятных решений в зашумленных хаотических системах. Вы скажете, что эта задача уже давно поставлена и в общетеоретическом плане решена: существует теория марковских процессов и есть уравнение Эйнштейна - Фоккера - Планка. Да, есть! Однако, если система с динамическим хаосом, то ее размерность $N \geq 3$, она принципиально нелинейна и диссипативна. Для автоколебательных режимов в подобных системах еще не доказана теорема существования стационарного распределения!

В экспериментальном плане также масса сложностей. Даже современные мощные компьютеры пока не дают нам возможности приблизиться к решению подобных задач. Здесь возникает целый ряд принципиальных трудностей, которые можно отчасти преодолеть численным интегрированием стохастических дифференциальных уравнений.

Таким образом, на сегодняшний день проблема динамики зашумленных хаотических систем представляет собой то обширное поле деятельности, на котором можно ожидать много удивительных результатов.

Выпуск открывается статьей А.Б. Неймана, посвященной описанию и иллюстрации классического метода кумулянтного анализа в приложении к задаче исследования бифуркаций в зашумленных динамических системах. Суть этого интересного метода в том, что он позволяет при определенных ограничениях свести задачу анализа стохастических уравнений к традиционной задаче исследования зависимости решения от параметра в детерминированных уравнениях, записанных для моментных функций. Решение, как правило, удается получить лишь в приближении гауссова шума, однако и эта возможность оказывается плодотворной.

Статья профессора Гумбольдтского университета в Берлине Вернера Эбелинга посвящена проблеме смешанной стратегии эволюции по Больцману - Дарвину. Автор использует термодинамический и биологический аспекты эволюции, описывает относительно простые эволюционные модели и обсуждает вопрос с точки зрения проблемы оптимизации.

Раздел «Детерминированный хаос» открывает статья профессора МГУ Р.Л. Стратоновича, посвященная теоретическому анализу проблемы достижения границ в марковском отображении с динамическим хаосом. В качестве конкретного примера описывается осциллятор с отрицательным трением и демпфирующими случайными воздействиями. В статье В.С. Анищенко с соавторами рассматривается проблема возникновения так называемых странных нехаотических аттракторов. Эти аттракторы имеют фрактальную структуру, но характеризуются отсутствием перемешивания (то есть в спектре ляпуновских показателей отсутствуют положительные). Насколько мне известно, в отечественной литературе это первая работа на эту тему. В статье И.М. Старобинца и В.А. Угриновского исследуется проблема управления динамическим хаосом. Предложен оригинальный метод, основанный на принципе максимума из теории оптимальных процессов, который позволяет не только

стабилизировать неустойчивые периодические траектории системы, но и оптимизировать время достижения управления.

Большинство статей раздела «Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн» посвящены проблеме индуцированных шумом переходов и, в частности, анализу явления стохастического резонанса. Статья М. Дькмана с соавторами, которые представляют собой международный научный коллектив, дает достаточно содержательный обзор существующих теорий стохастического резонанса. Основное внимание уделено преимуществам теории линейного отклика в описании широкого круга физических примеров систем со стохастическим резонансом. Описанию радиофизических систем, демонстрирующих эффект стохастического резонанса, посвящены статьи Д.Э. Постнова и В.С. Анищенко с соавторами. В работах А.Н. Малахова с соавторами исследуется классическая проблема диффузии броуновских частиц через потенциальный барьер. Известно, что существует весьма ограниченный круг примеров аналитического решения этой задачи. В работах А.Н. Малахова предложена новая модель броуновского движения в системе с кусочно-линейным и кусочно-параболическим потенциалом. В этом случае удалось получить строгое решение задачи. Наконец, в работе Н.Б. Янсон предпринята попытка на основе экспериментальной реализации электрокардиограммы сердца человека решить задачу реконструирования модельных уравнений. Хотя полученные здесь результаты не могут быть окончательными (уж очень сложна проблема!), вызывает уважение смелость автора, которая позволяет надеяться на дальнейшие успехи в этом направлении.

Я надеюсь, что беглый анализ содержания выпуска журнала поможет читателям в выборе наиболее интересных работ, прочтение которых, как мы надеемся, привлечет внимание молодых исследователей к проблеме изучения роли флуктуаций в нелинейных динамических системах.

Редактор выпуска, доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры радиофизики СГУ

В.С. Анищенко



Анищенко Вадим Семенович защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук (1970) и докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. В качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдском университете (Берлин, 1987). С 1988 г. заведующий кафедрой радиофизики Саратовского университета. Автор 175 научных работ, среди которых 6 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Три монографии написаны на английском языке, из них 2 книги опубликованы в Лейпциге (1987, 1989), готовится выпуск новой монографии издательством «World Scientific». Издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых системах» (1990), хорошо известная среди специалистов. Соросовский профессор (1994), действительный член Нью-Йоркской академии наук.





ПРИМЕНЕНИЕ КУМУЛЯНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ВОЗМУЩАЕМЫХ ВНЕШНИМ ШУМОМ

А. Б. Нейман

Рассматриваются проблемы бифуркационного анализа динамических систем с шумом. Изложена методика бифуркационного анализа стохастических систем, основанная на кумулянтном разложении. В качестве примера рассматривается влияние шума на последовательность квазипериодических бифуркаций в отображении окружности и на бифуркации удвоения периода в отображении Фейгенбаума.

Введение

Проблема анализа динамических систем с учетом флуктуаций впервые была сформулирована и рассмотрена в классической работе Л.С.Понтрягина, А.А.Андропова и А.А.Витта [1]. Опубликованная в 1933 году, она остается актуальной и по сей день. Об этом свидетельствует ее перевод на английский язык и публикация в 1989 году в сборнике под редакцией профессоров F.Moss, P.V.E.McClintock [2]. Интересно отметить, что её авторы, создатели современной теории нелинейных колебаний, уже тогда отчетливо понимали необходимость введения в рассмотрение случайных сил. В своей работе они сформулировали две основные задачи. Первая задача вытекает из принципиальной неустраимости шумов в реальных диссипативных системах. Следовательно, описание реальной динамической системы дифференциальными уравнениями является с необходимостью неполным. **Первая задача** формулировалась так: «*Выяснить общее поведение системы при наличии случайных толчков и, в частности, дать теоретическое построение, которое позволило бы из экспериментальных данных подойти к выяснению характера «случайных толчков» в реальных динамических системах*». **Вторая задача:** «*Дополнить биркгоффовскую общую теорию движений соображениями, связанными с учетом случайных толчков, в частности, выделить из множества движений динамической системы те движения, которые осуществляются с наибольшей вероятностью при наличии таких толчков*». Эти проблемы, сформулированные свыше шестидесяти лет назад, остаются актуальными и по сей день.

Дальнейшее развитие теории влияния шумов на нелинейные системы в физике связано с именами Р.Л.Стратоновича [3], Ю.Л.Климонтовича [4], С.М.Рытова [5], А.Н.Малахова [6], В.И.Кляцкина [7] и других.

Развитие современной теории колебаний, открытие явления динамического хаоса поставило ряд новых проблем, связанных с одной стороны с влиянием шума на динамику систем. К таким новым задачам прежде всего следует отнести проблемы бифуркаций динамических систем в присутствии шума; проблемы статистических и динамических характеристик сложных автоколебаний с учетом флуктуаций; задачи, связанные с анализом временных рядов методами нелинейной динамики. С другой стороны, необходимость учета флуктуаций еще более подчеркивается последними открытиями в области качественной теории дифференциальных уравнений. Режимы динамического хаоса, реализующиеся в реальных физических системах чаще всего соответствуют так называемым квазигиперболическим аттракторам [8]. Для таких аттракторов характерно сосуществование в фазовом пространстве счетного числа предельных множеств различной природы. При малом шевелении параметров эти предельные множества претерпевают различные бифуркации. В результате становится невозможным дать полную картину динамических режимов и их бифуркаций [9]. Тем не менее, в реальных физических системах экспериментатор наблюдает один предельный режим, который представляет собой результат сложного взаимодействия внутренней динамики системы, внутренних шумов и окружающей среды. Очевидно, что учет шумов необходим для анализа подобных систем как с точки зрения полноты физического описания (неустранимость флуктуаций как следствие флуктуационно-диссипационной теоремы), так и с математической точки зрения (упрощение описания за счет сглаживающего действия флуктуаций).

Область исследований нелинейных систем с шумом чрезвычайно широка и бурно развивается в последнее время. В этой статье мы ограничимся лишь некоторыми проблемами влияния *внешнего шума* на динамику нелинейных систем, а именно: мы остановимся на рассмотрении вопросов, связанных с бифуркациями динамических систем с шумом. В разделе 1 мы кратко остановимся на математическом формализме марковских процессов для описания влияния шума на динамические системы. В разделе 2 обсуждаются проблемы бифуркационного анализа систем с шумом. Раздел 3 посвящен изложению кумулянтного подхода для бифуркационного анализа систем с шумом. В последних разделах кумулянтный метод применяется для исследования влияния шума на квазипериодическую последовательность бифуркаций в отображении окружности и на бифуркации удвоения периода.

1. Математический аппарат для описания влияния внешнего шума на динамические системы

Рассмотрим для определенности нелинейную динамическую систему в одномерном фазовом пространстве, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (1)$$

где f - нелинейная функция переменной состояния x и α - параметр системы. Существует два основных метода для описания влияния внешнего шума, которые основаны на теории марковских процессов [1, 4].

Первый подход основан на использовании стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) или уравнений Ланжевена. В правую часть системы вводятся случайные источники, которые моделируются δ -коррелированными случайными гауссовыми процессами. Это приближение соответствует предположению о том, что временные масштабы внешнего шума и динамической системы несоизмеримы, причем процессы в системе без шума протекают гораздо медленнее. На спектральном языке это означает, что спектр шума является равномерным или белым. Итак, вместо детерминированной

системы (1) мы имеем стохастическую систему, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, \alpha) + (2D)^{1/2}g(x)\xi(t), \quad (2)$$

где $g(x)$ описывает взаимодействие среды, генерирующей внешний шум, с системой; величина D является интенсивностью гауссова белого шума $\xi(t)$. Автокорреляционная функция шума является δ -функцией: $\langle \xi(t+s)\xi(t) \rangle = \delta(s)$. Если функция $g(x)$ является константой, то такой шум называется аддитивным. В противном случае шум называется мультипликативным.

Второй подход основан на использовании уравнения Эйнштейна - Фоккера - Планка (УЭФП) [10]. Переход от СДУ к УЭФП возможен в случае, когда случайный источник $\xi(t)$ является белым шумом, то есть когда случайный процесс $x(t)$ является марковским [11]. УЭФП описывает эволюцию во времени плотности вероятности процесса $p(x,t)$

$$\partial_t p(x,t) = -\partial_x f(x,\alpha)p(x,t) + D\partial_{xx}p(x,t). \quad (3)$$

Однако такой переход неоднозначен в силу сложностей, возникающих при рассмотрении стохастических интегралов. Существует несколько форм записи УЭФП и СДУ, среди которых наиболее употребимые форма Стратоновича, форма Ито и кинетическая форма. Детали данного вопроса читатель может найти в серии недавних работ Ю.Л. Климонтовича [12]. Отметим только, что для рассмотрения естественных флуктуаций наиболее физически адекватные результаты дает кинетическая форма, которая вытекает из кинетической теории. Для описания влияния внешнего шума с физической точки зрения более подходит форма Стратоновича, которая будет использоваться в этой статье. В случае аддитивного шума подходы Ито и Стратоновича совпадают. Оба подхода позволяют определить статистические характеристики процесса. Например, стационарную плотность вероятности, спектр мощности, корреляционную функцию и другие.

Другими часто используемыми моделями для описания динамических систем являются системы с дискретным временем или дискретные отображения

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha), \quad (4)$$

здесь f - опять нелинейная функция, а α - параметр системы. Для систем с дискретным временем также возможны два способа описания влияния внешнего шума. Один из них аналогичен СДУ и основан на решении стохастических разностных уравнений

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha) + D^{1/2}\xi_n, \quad (5)$$

где ξ_n - дискретный белый шум: $\langle \xi_{n+m}\xi_n \rangle = \delta(m)$. Уравнение, описывающее эволюцию плотности вероятности в дискретном времени $p(x,n)$, называется уравнением Фробениуса - Перрона или Чепмена - Колмогорова [13]

$$p(x,n+1) = \int (1/D) W\{[x - f(y,\alpha)]\}p(y,n)dy, \quad (6)$$

где $W(z)$ - плотность вероятности внешнего шума.

Однако, далеко не всегда случайный источник ξ можно считать белым шумом. Часто временные масштабы случайных сил сопоставимы с временными масштабами возмущаемой системы. В этом случае корреляционная функция случайного источника отлична от δ -функции и такой шум называется цветным. Основная трудность, возникающая здесь, это немарковость результирующего процесса $x(t)$. Аппарат УЭФП непосредственно неприменим для цветного шума. Один из методов анализа состоит в добавлении дополнительных СДУ, описывающих источник цветного шума [14]. Одной из наиболее распространенных

моделей цветного шума является экспоненциально коррелированный гауссов шум, который моделируется процессом Орнштейна - Уленбека

$$\dot{\xi} = (1/\tau) [-\xi + (2D)^{1/2}w(t)], \quad (7)$$

где $w(t)$ - δ -коррелированный гауссов шум, τ - время корреляции шума $\xi(t)$. Автокорреляционная функция $\langle \xi(t+s)\xi(t) \rangle = (D/\tau)\exp(-|s|/\tau)$. Белый шум реализуется как предел $\tau \rightarrow 0$. Дополняя уравнение для переменной состояния стохастическим дифференциальным уравнением (7), получаем расширенную систему СДУ, в которую входят только гауссовы белые шумы, то есть случайный процесс $\{x(t), \xi(t)\}$ будет марковским и возможность применения аппарата уравнений Эйнштейна - Фоккера - Планка сохраняется.

2. Бифуркации в динамических системах с шумом

Коль скоро шум принят во внимание, необходим переход от рассмотрения предельных множеств в фазовом пространстве динамической системы к анализу усредненных по ансамблю статистических характеристик стохастического процесса, описываемого СДУ или УЭФП. Так как УЭФП является линейным уравнением, то в общем случае трудно ожидать наличия бифуркаций в системе с шумом при изменении параметров в обычном понимании термина «бифуркация».

Проиллюстрируем последнее на простом примере бифуркации удвоения состояний равновесия (pitchfork bifurcation) [1]. В отсутствие шума эта бифуркация моделируется модельной системой

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3, \quad (8)$$

где величина ε является бифуркационным параметром. При $\varepsilon < 0$ в фазовом пространстве системы (которое в данном случае есть просто прямая линия) имеется одно глобально устойчивое состояние равновесия в начале координат. При положительных значениях параметра в системе имеются два локально устойчивых состояния равновесия $\pm \varepsilon^{1/2}$ и седловое состояние равновесия в нуле. Значение параметра $\varepsilon = 0$ является бифуркационным. При добавлении аддитивного белого шума интенсивности D система описывается УЭФП вида

$$\partial p(x,t) = -\partial_x [(\varepsilon x - x^3)p(x,t)] + D\partial_{xx}p(x,t), \quad (9)$$

которое имеет стационарное решение $p_{st}(x)$

$$p_{st}(x) = C \exp[(1/D)(x^2/2 - x^4/4)]. \quad (10)$$

Очевидно, что при любых значениях параметра ε УЭФП имеет всегда одно глобально устойчивое стационарное решение. Шум индуцирует глобальную устойчивость системы [15], анализ которой может быть проведен в терминах соответствующих функционалов Ляпунова [4,10], что является аналогом H -теоремы Больцмана. Однако, при изменении управляющего параметра происходят качественные изменения структуры стационарной плотности вероятности (10). Действительно, при отрицательных значениях параметра стационарная плотность имеет один глобальный максимум в начале координат. Для положительных значений ε стационарная плотность вероятности характеризуется наличием двух локальных максимумов, соответствующих устойчивым состояниям равновесия детерминированной системы, и локальный минимум, соответствующий седлу в фазовом пространстве невозмущенной системы. Таким образом, в данном случае под бифуркацией следует понимать качественное изменение структуры стационарной плотности вероятности при изменении управляющего параметра.

Подобная идеология принята во многих работах, посвященных проблеме бифуркаций динамических систем с шумами [16-19]. Однако, в качестве величины для анализа могут быть выбраны различные статистические характеристики: спектр мощности [20], время первого достижения границы случайным процессом [21, 22] и другие.

Учет естественных флуктуаций ведет к нелинейности коэффициента диффузии. Последнее ведет к изменению асимптотики стационарного распределения [4]. Рассмотрение вопросов учета влияния естественных шумов выходит за рамки настоящей статьи. Обсуждение этой проблемы читатель может найти в работах Ю.Л.Климонтовича [4, 12].

Эффекты влияния внешнего шума могут быть условно разделены на две группы. К первой группе относятся явления сдвига бифуркационных точек и линий в пространстве параметров за счет шума. Однако такого же поведения можно достичь простым изменением управляющих параметров детерминированной системы [17, 23]. Другая группа явлений связана с понятием *индуцированных шумом переходов* [18]. Изменение интенсивности шума приводит к появлению новых режимов, которые не реализуются в соответствующей детерминированной системе. Параметры, определяющие свойства шума (интенсивность, время корреляции), становятся управляющими параметрами системы. Следовательно, бифуркационный анализ необходимо проводить в расширенном пространстве параметров, в которое дополнительно включаются параметры шума. Отметим, что впервые явление индуцированного шумом перехода было обнаружено в работе Р.Л. Стратоновича и П.С. Ланда [24], посвященной исследованию параметрических флуктуаций в автогенераторе.

Таким образом, для проведения бифуркационного анализа динамической системы с шумом прежде всего необходимо найти стационарное решение УЭФП или уравнения Фробениуса - Перрона для дискретных отображений. Затем проводится исследование структуры статистических характеристик при изменении управляющих параметров. Очевидно, что такая программа гораздо сложнее, чем бифуркационный анализ детерминированных систем. Для детерминированных систем бифуркационный анализ часто сводится к решению алгебраических задач (определение собственных значений матриц линеаризации или матриц монодромии). Численные методы бифуркационного анализа также хорошо разработаны [25]. Сложности анализа систем с шумом начинаются с определения стационарной плотности вероятности. Для УЭФП стационарная плотность вероятности может быть получена аналитически лишь для одномерных систем. Для двумерных динамических систем это сделать чаще всего не удается. Например, для классического генератора Ван-дер-Поля с аддитивным шумом точное стационарное решение УЭФП до сих пор неизвестно. Более того, уже для трехмерных динамических систем численное решение УЭФП представляет значительные вычислительные сложности. Что касается дискретных систем, то даже для одномерных отображений с шумом стационарное решение уравнения Фробениуса - Перрона аналитически найти не удается.

Аналитические результаты можно получить в предельных случаях малых и больших шумов [26].

Теория влияния слабого шума, основанная на понятии квазипотенциалов, была построена в классических работах А.Д.Вентцеля и М.И.Фрейдлина [27]. В дальнейшем в работах Ю.И. Кифера [28], Я.Г. Синая [29], М.Л. Бланка [30] было рассмотрено влияние слабого шума на странные аттракторы. В частности, было показано [28], что малые случайные возмущения динамической системы со странным аттрактором приводят к малым же изменениям инвариантной меры или стационарной плотности вероятности. В недавних работах [19, 31] теория квазипотенциалов была расширена на системы со сложной динамикой. Изложим вкратце основные идеи этой теории.

Предположим, что динамическая система имеет аттрактор в N -мерном фазовом пространстве и существует инвариантная мера на этом аттракторе. Пусть система возмущается слабым гауссовым белым шумом интенсивности D , $D \rightarrow 0$ и

описывается системой СДУ вида

$$\dot{x}_i = f_i(x) + g_{ij}(x)\xi_j(t), \quad i=1, \dots, N, \quad (11)$$

где $\langle \xi_i(t+s)\xi_j(t) \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(s)$. Тогда инвариантная мера или стационарная плотность вероятности $p_{st}(x)$ выражается через квазипотенциал (или неравновесный потенциал) $\Phi(x)$ следующим образом:

$$p_{st}(x) \propto \exp [-\Phi(x)/D]. \quad (12)$$

Квазипотенциал, который является аналогом свободной энергии [4] для неравновесного стационарного состояния, зависит только от переменных состояния и не зависит от интенсивности шума D . Квазипотенциал принимает минимальные значения на аттракторе и является решением уравнения Гамильтона - Якоби

$$f_i(x)\partial_i\Phi(x) + DQ_{ij}(x)\partial_i\Phi(x)\partial_j\Phi(x) = 0, \quad (13)$$

где $Q_{ij}(x) = \sum_k g_{ik}(x)g_{jk}(x)$ - матрица диффузии. После получения квазипотенциала ставится задача определения числа экстремумов $\Phi(x)$ при изменении управляющих параметров системы. Указанная методика была применена для исследования влияния шума на последовательность бифуркаций удвоения периода и на последовательность квазипериодических бифуркаций [32, 33]. Следует отметить, что большую часть исследований этим методом приходится проводить численно. При этом задача продолжения бифуркационных решений по параметрам, равно как и построение бифуркационных диаграмм в пространстве управляющих параметров, представляет собой нетривиальную численную проблему.

3. Применение кумулянтного анализа для исследования влияния шума на бифуркации

Идея метода кумулянтного анализа состоит в переходе от стохастических уравнений или соответствующего кинетического уравнения к системе детерминированных уравнений, описывающих эволюцию кумулянтов к некоторому стационарному состоянию [34]. В силу нелинейности системы цепочка уравнений, описывающих эволюцию кумулянтов (будем называть такие уравнения кумулянтными), является незамкнутой: в уравнение для n -го кумулянта входят кумулянты высших порядков, например, $n+1$, $n+2$ [35]. Для замыкания этой цепочки используют различные модельные приближения, простейшим из которых является гауссово приближение, учитывающее только кумулянты первых и вторых порядков. После замыкания цепочки кумулянтных уравнений получаем новую динамическую систему, описывающую эволюцию кумулянтов. Состояния равновесия системы кумулянтных уравнений описывают качественную структуру стационарной плотности вероятности. Бифуркационный анализ системы кумулянтных уравнений может быть проведен обычными методами теории динамических систем. Важно отметить, что анализ новой динамической системы кумулянтных уравнений проводится в расширенном пространстве параметров, куда помимо параметров невозмущенной системы входят параметры, характеризующие шум (например, интенсивность шума и время корреляции).

Во многих случаях гауссово приближение адекватно описывает влияние слабого шума. Это было показано на примерах исследования фазового перехода в глобально связанных стохастических осцилляторах [34], времен релаксации броуновского движения в потенциалах различной формы [35], систем фазовой синхронизации [36], бистабильного осциллятора с шумом [37], индуцированного цветным шумом перехода [38], стохастического резонанса [39]. В работе [40] этот подход был применен для исследования влияния цветного шума на

последовательность бифуркаций удвоения периода, а в работе [41] - для последовательности квазипериодических бифуркаций. В следующих разделах мы подробно рассмотрим применение кумулянтного метода на примерах отображения окружности, описывающего последовательность квазипериодических бифуркаций, и отображения Фейгенбаума, описывающего последовательность бифуркаций удвоения.

4. Влияние шума на последовательность квазипериодических бифуркаций

Одним из путей перехода к хаосу в диссипативных системах является переход от квазипериодических колебаний на торе к хаотическому аттрактору. Этот сценарий сопровождается последовательностью квазипериодических бифуркаций (mode-locking bifurcations) на торе. Наиболее популярной моделью для исследования универсальных свойств этого сценария является отображение окружности (см., например, в [42, 43])

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Omega - (K/2\pi)\sin(2\pi\theta_k). \quad (14)$$

Отображение (14) может рассматриваться как нелинейное преобразование фазы осциллятора с периодом 1. Параметр Ω соответствует отношению невозмущенных частот, а параметр K определяет величину нелинейности. В суперкритической области ($K > 1$) это отображение необратимо и может демонстрировать хаотическое поведение. Универсальные свойства скейлинга исследуются в нетривиальном критическом случае, когда $K=1$ [44].

Рассмотрим последовательность квазипериодических бифуркаций, генерируемых числами Фибоначчи $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ с числом вращения ω_n

$$\omega_n = F_n / F_{n+1} = 1 / (1 + F_{n-1}/F_n). \quad (15)$$

Предел последовательности ω_n при $n \rightarrow \infty$ есть золотое сечение

$$\omega^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega^*. \quad (16)$$

На плоскости параметров (Ω, K) это соответствует наличию языков Арнольда, которые ограничивают области существования резонансов на торе с числами вращения ω_n . Ширина языков $\Delta\Omega_n$, генерируемая последовательностью (15), демонстрирует самоподобную структуру

$$\Delta\Omega_n \propto \delta^{-n}, \quad (17)$$

где δ является универсальной константой, $\delta = 2.8336\dots$

Рассмотрим теперь влияние аддитивного белого гауссова шума. Стохастическое отображение записывается в виде

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Omega - (K/2\pi)\sin(2\pi\theta_k) + \sigma\xi_k. \quad (18)$$

Действие шума ведет к уменьшению ширины языков Арнольда. Более того, существует максимально допустимая величина интенсивности шума σ_n^{\max} (для каждого из языков с числом вращения ω_n), при котором еще возможно различить данный резонанс. Существует универсальный закон скейлинга, связывающий эту максимально допустимую интенсивность шума и порядок резонанса,

$$\sigma_n \propto \beta^{-n}, \quad (19)$$

где β - другая универсальная постоянная, $\beta = 2.306\dots$ Этот результат был получен

аналитически методами частичных интегралов [45] и квазипотенциалов [33]. Мы рассмотрим эту проблему методом кумулянтного анализа в гауссовом приближении.

Введем сначала обозначения для кумулянтов

$$x_k \equiv \langle \theta_k \rangle, \quad y_k \equiv \langle \theta_k^2 \rangle - \langle \theta_k \rangle^2, \quad (20)$$

где скобки усреднения $\langle \cdot \rangle$ означают усреднение по ансамблю реализаций стохастического процесса ξ_k . Уравнения, описывающие эволюцию кумулянтов, могут быть выведены непосредственно из стохастического отображения (18) или из соответствующего уравнения Фробениуса - Перрона. Принимая во внимание, что в гауссовом приближении $\langle \sin(2\pi\theta_k) \rangle = \exp(-2\pi^2 y_k) \sin(2\pi x_k)$ [35], получаем

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Omega - K/(2\pi) \exp(-2\pi y_k) \sin(2\pi x_k), \\ y_{k+1} &= y_k + K^2/(4\pi^2) \{ (1/2) [1 - \exp(-8\pi^2 y_k) \cos(4\pi x_k)] - \exp(-4\pi^2 y_k) \sin(2\pi x_k)^2 \} - \\ &\quad - 2K \exp(-2\pi^2 y_k) \cos(2\pi x_k) y_k + \sigma^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Начальные условия для кумулянтного отображения определяются как

$$x_0 = \theta_0, \quad y_0 = 0, \quad (22)$$

где θ_0 является неподвижной точкой соответствующей детерминированной системы. Задание начальных значений кумулянтов в таком виде соответствует начальному распределению в виде δ -функции: $p(\theta, 0) = \delta(\theta - \theta_0)$. Таким образом, мы получаем динамическую систему, которая содержит новый параметр - интенсивность шума, и дальнейшее рассмотрение будет проводиться в расширенном пространстве параметров (Ω, K, σ) . Предмет интереса составляют неподвижные точки кумулянтного отображения (21). Бифуркаций кумулянтного отображения соответствуют качественным изменениям стационарной плотности вероятности. Однако, так как эволюция кумулянтов в гауссовом приближении описывается дискретным отображением, то бифуркационный анализ может быть проведен обычными методами [25]. В пределе слабого шума мы можем упростить отображение (21), оставляя только линейные члены по второму кумулянту y_k

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Omega - K/(2\pi) (1 - 2\pi^2 y_k) \sin(2\pi x_k), \\ y_{k+1} &= [1 - K \cos(2\pi x_k)]^2 y_k + \sigma^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Прежде всего на рис.1 показан результат численного расчета плотности вероятности $P(\theta)$ для стохастического отображения (18) и гауссова аппроксимация одного из максимумов. Значения параметров выбраны в области существования резонанса с числом вращения $\omega_5 = 5/8$ и слабого шума $\sigma = 10^{-3}$. Плотность вероятности имеет восемь максимумов в силу существования неподвижной точки периода 8 в невозмущенной системе. Каждый из максимумов $P(\theta)$ может быть аппроксимирован гауссовым распределением вида

$$P_G^{(i)}(\theta) = [1/(2\pi y_0^{(i)})^{1/2}] \exp[-(\theta - x_0^{(i)})^2 / (2y_0^{(i)})], \quad (24)$$

где $x_0^{(i)}$ и $y_0^{(i)}$ - координаты i -той компоненты неподвижной точки кумулянтного отображения (23). Аналогичная картина получается для других чисел вращения. Таким образом, гауссово приближение дает корректное описание структуры плотности вероятности.

Далее мы проводим двухпараметрический бифуркационный анализ на

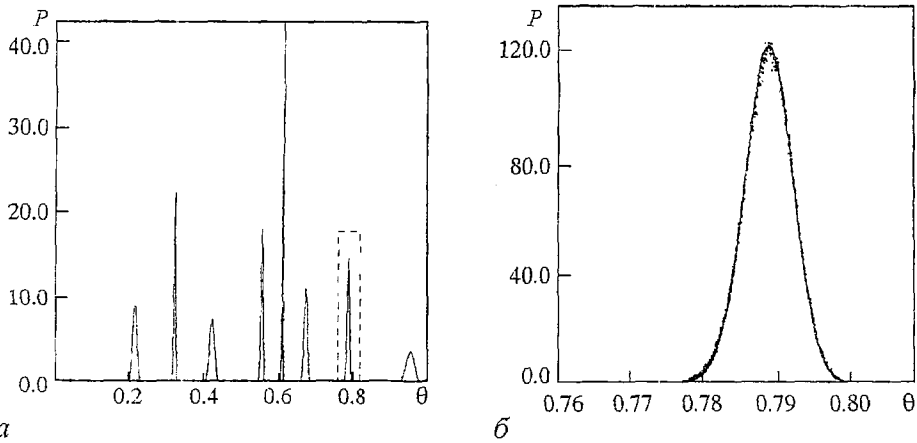


Рис. 1. Плотность вероятности отображения (18), полученная численным моделированием: *а* - полная структура; *б* - отмеченный максимум; точки соответствуют численному моделированию, непрерывная линия соответствует гауссовой аппроксимации (24)

плоскости параметров (Ω, σ) при критическом значении параметра нелинейности $K=1$ вдоль последовательности чисел вращения, ведущей к золотому сечению. Бифуркационные линии, изображенные на рис.2, соответствуют бифуркациям рождения резонансных циклов (неподвижных точек) с числами вращения $\omega_n = 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13$. Бифуркационным условием на этих линиях является равенство «+1» одного из мультипликаторов неподвижной точки (другой мультипликатор по модулю меньше единицы). Эти бифуркационные линии имеют коразмерность 1. Из рисунка видно, что существуют граничные значения интенсивности шума σ_n^{\max} для каждого резонанса, определяющие область существования резонанса на плоскости параметров (Ω, σ) . Точки на бифуркационной диаграмме, соответствующие этим значениям, имеют коразмерность 2, так как эти бифуркационные точки определяются двумя условиями: первое - равенство «+1» одного из мультипликаторов; второе - максимум бифуркационной кривой $\sigma(\Omega)$.

Гауссово приближение корректно описывает ситуацию предельно малых шумов, когда потенциальные ямы, соответствующие устойчивым фиксированным точкам невозмущенной системы, хорошо разделены (см. рис.1). При приближении к точкам бифуркации существенным становится индуцированная шумом диффузия через потенциальные барьеры, разделяющие минимумы потенциала. В этом случае гауссово приближение, конечно, неудовлетворительно описывает динамику этой диффузии. Для корректного описания диффузии через потенциальные барьеры, в принципе, необходим учет всех кумулянтов. Однако в этом случае кумулянтные уравнения не будут демонстрировать бифуркации в обычном понимании этого термина. Этот факт отмечался в монографии В. Хорстхемке и Р. Лефевра [18]. Действительно, УЭФП имеет глобально устойчивое стационарное решение, которое не претерпевает ветвления при изменении управляющего параметра*. Следовательно, бифуркации будут отсутствовать и для стационарных решений полной системы кумулянтных уравнений. Гауссово приближение, при котором каждый максимум плотности вероятности аппроксимируется гауссовым распределением, позволяет получить бифуркации в системе кумулянтных уравнений, которые фактически соответствуют изменению числа экстремумов стационарной плотности вероятности. Положение экстремумов определяется первыми кумулянтами, вторые кумулянты позволяют учесть действие шума в первом порядке по малому параметру интенсивности шума.

* Напомним, что бифуркации невозмущенной системы отражаются в изменении числа экстремумов стационарной плотности вероятности системы с шумом

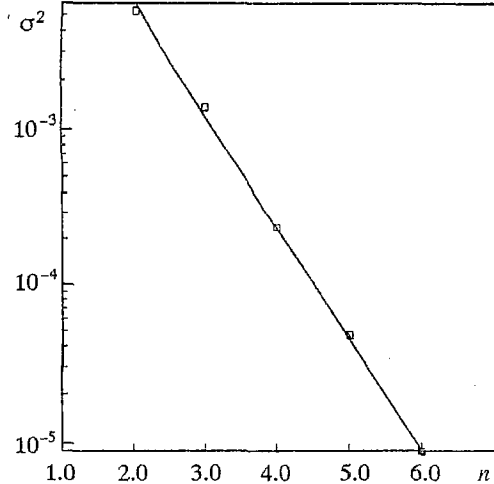
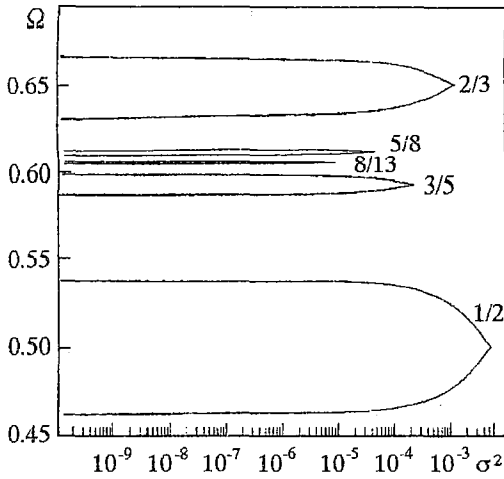


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма отображения (23)

Рис. 3. Зависимость σ_n^{\max} от n (квадраты) и аппроксимация ее законом β_{cum}^n , $\beta_{\text{cum}} = 2.23$ (линия)

Вернемся к рассмотрению бифуркационной диаграммы рис. 2. Важно отметить, что последовательность σ_n^{\max} удовлетворяет закону скейлинга $\sigma_n^{\max} \propto \beta_{\text{cum}}^{-n}$ с показателем $\beta \approx 2.23$ (рис. 3). Таким образом, кумулянтный анализ в гауссовом приближении дает константу скейлинга, находящуюся в хорошем соответствии с результатами строгой теории.

Включение в рассмотрение кумулянтов высших порядков не изменяет качественную картину поведения системы. Однако здесь возникают сложности, связанные с численными алгоритмами бифуркационного анализа динамической системы кумулянтных уравнений. Так как система рассматривается для очень малых значений интенсивности шума, то возникают проблемы с ошибками округления при исследовании циклов большого периода. При учете высших кумулянтов размерность системы кумулянтных уравнений возрастает и, следовательно, возрастают сложности при анализе бифуркаций циклов больших периодов. Поэтому исследование влияния учета высших кумулянтов на величину константы скейлинга в настоящей работе не рассматривается и будет предметом дальнейших исследований.

Применение кумулянтного анализа позволяет рассмотреть и случай мультипликативного шума, который может рассматриваться как стохастическая модуляция параметра нелинейности K

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Omega - [(K + \xi_k)/(2\pi)] \sin(2\pi\theta_k). \quad (25)$$

Метод, изложенный выше, дает следующее кумулянтное отображение в гауссовом приближении

$$x_{k+1} = x_k + \Omega - K/(2\pi)(1 - 2\pi^2 y_k) \sin(2\pi x_k),$$

$$y_{k+1} = [1 - K \cos(2\pi x_k)]^2 y_k + K^2/(4\pi^2) \sigma^2 \sin(2\pi x_k). \quad (26)$$

Результат бифуркационного анализа этой системы для последовательности чисел вращения, ведущих к золотому сечению, дает результаты качественно аналогичные случаю аддитивного шума (см. рис.2). Для скейлинга интенсивности шума мы получили константу $\beta_{\text{cum}} \approx 2.26$. Необходимо отметить, что качественно аналогичные результаты для мультипликативного и аддитивного шума получаются только в пределе малых шумов. При определенных величинах интенсивности мультипликативного шума возможны индуцированные шумом переходы [18], которые не реализуются при возмущении аддитивным шумом.

5. Кумулянтный анализ влияния шума на последовательность бифуркаций удвоения периода

Традиционной моделью, описывающей последовательность бифуркаций удвоения периода, ведущей к динамическому хаосу, является семейство дискретных отображений $x_{n+1}=f(x_n, a)$, где $f(x, a)$ - функция с квадратичным максимумом, a - управляющий параметр. В дальнейшем мы будем рассматривать конкретную форму, отображение Фейгенбаума

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2. \quad (27)$$

В отображении (27) a является бифуркационным параметром. Бифуркационная последовательность неподвижных точек периода 2^k имеет место для значений параметров a_k : $a_1=0.75$, $a_2=1.25$, $a_3=1.368099$, ... Критическая точка $a_{cr}=1.40115...$ соответствует накоплению бифуркаций удвоения периода и переходу к хаосу.

С учетом аддитивного шума получаем стохастическое отображение вида

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + \sigma \xi_n, \quad (28)$$

где σ - параметр, определяющий интенсивность белого шума ξ_n . Влияние шума на последовательность бифуркаций удвоения периода рассматривалось в ряде работ (см., например, [46] и литературу, указанную в ней). Основным результатом состоит в том, что в присутствии шума последовательность бифуркаций удвоения периода становится конечной. Более того, существует универсальный закон скейлинга, связывающий максимальную величину интенсивности шума σ_k^{max} и возможность наблюдения неподвижной точки периода (цикла) 2^k

$$\sigma_k \propto \mu^{-k}, \quad (29)$$

где $\mu=6.557...$ является универсальной константой. Этот результат получен различными теоретическими методами. В настоящем разделе мы иллюстрируем применение кумулянтного анализа для исследования универсальных свойств системы.

Введем обозначения кумулянтов первого и второго порядков в виде

$$X_n \equiv \langle x_n \rangle, \quad Y_n \equiv \langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2. \quad (30)$$

Тогда в Гауссовом приближении получаем кумулянтное отображение вида

$$X_{n+1} = 1 - a(X_n^2 + Y_n), \quad Y_{n+1} = 4a^2 X_n^2 Y_n + \sigma^2. \quad (31)$$

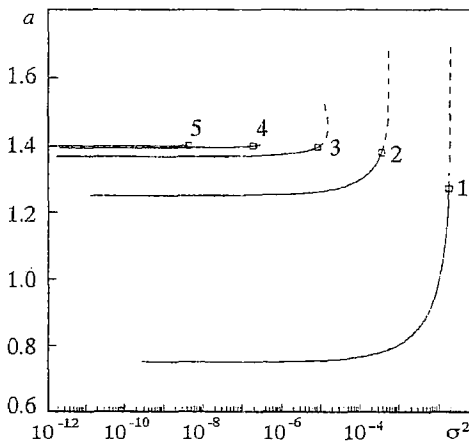


Рис. 4 Бифуркационная диаграмма отображения (31)

Здесь, как и в предыдущем примере отображения окружности, мы рассматриваем случай слабого шума, оставляя только линейные члены по второму кумулянту. Начальные условия для кумулянтной системы записываются в виде $X_0=x_0$, $Y_0=0$, где x_0 является неподвижной точкой соответствующего периода. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (a, σ) для циклов периода 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 и 2^5 показана на рис.4. Так же, как и для отображения окружности, бифуркационные линии соответствуют условию равенства «+1» одного из мультипликаторов неподвижной точки соответствующего периода. Бифуркационная диаграмма показывает наличие граничных значений интенсив-

ности шума σ_k^{\max} , которые обозначены квадратами на рис.4. Эти точки на бифуркационных линиях имеют коразмерность 2 и определяются дополнительным условием: равенство второго мультипликатора «-1». Последовательность σ_k^{\max} удовлетворяет закону скейлинга $\sigma_k^{\max} \propto \mu_{\text{cum}}^{-k}$ с константой $\mu_{\text{cum}}=6.592$. Таким образом, мы получили результат, находящийся в хорошем соответствии с теоретическим значением константы скейлинга $\mu=6.557$.

Заключение

В настоящей работе мы рассмотрели некоторые проблемы бифуркационного анализа динамических систем, возмущаемых внешним шумом. Подробно изложена методика, основанная на применении кумулянтного анализа. Данный подход позволяет перевести задачу исследования стохастической системы (системы с шумом) в плоскость проблем бифуркационного анализа детерминированных динамических систем. Использование кумулянтного подхода иллюстрируется на примере исследования последовательности бифуркаций в отображении окружности и отображении Фейгенбаума.

Автор выражает искреннюю признательность Ю.Л. Климонтовичу и В.С. Анищенко за поддержку работы и ценные замечания. Автор благодарен J.Kurths, U.Feudel, W.Ebeling, A.S.Pikovsky и L.Schimansky-Geier за обсуждение результатов работы.

Работа частично поддерживалась за счет средств Международного Научного Фонда (грант NRO 000) и Госкомитета по высшему образованию России (грант 93-8.2-10).

Библиографический список

1. Понтрягин Л., Андронон А., Витт А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т.3, вып.3. С.165.
2. Noise in Nonlinear Dynamical Systems // Eds. F.Moss, P.V.E. McClintock. Vol.1-3. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
3. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов.радио, 1961.
4. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985.
5. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
6. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
7. Климонтович Ю.Л. Нелинейное броуновское движение // УФН. 1994. Т.164, № 8. С.811.
8. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
9. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
10. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
11. Shi'nikov L.P. Strange attractors and dynamical models // Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos / Ed. R.N.Madan. Singapore: World Scientific, 1993. P. 3.
12. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shi'nikov L.P. On models with nonrough Poincare homoclinic curves // DAN USSR. 1991. Vol. 320. P.269.
13. Risken H. The Fokker - Planck Equations // Methods of Solution and Applications. Berlin: Springer, 1989.
14. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов.радио, 1977.

12. *Klimontovich Yu.L.* Ito, Stratonovich, kinetic forms of stochastic equations // *Physica A*. 1990. Vol.163. P.515.

Klimontovich Yu.L. Alternative description of stochastic processes in nonlinear systems. «Kinetic form» of master and Fokker - Planck equations // *Physica A*. 1992. Vol.182. P.121.

13. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.

14. *Van Kampen N.G.* Langevin-like equation with colored noise // *J.Stat.Phys.* 1989. Vol.54, № 5/6. P.1289.

Hänggi P. Colored noise in continuous dynamical systems: a functional calculus approach // *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*. Vol.1. / Ed. F.Moss and P.V.E.McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. P. 384.

15. *Mackey M., Longtin A., Lasota A.* Noise-induced global asymptotic stability // *J.Stat.Phys.* 1990. Vol.60, № 5/6. P.735.

16. *Ebeling W.* Structural stability of stochastic systems // *Chaos and Order in Nature* / Ed. H.Haken. Berlin, 1981. P.188.

17. *Meunier C., Verga A.D.* Noise and bifurcations // *J.Stat.Phys.* 1988. Vol.50, № 1/2. P.345.

18. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.

19. *Graham R.* Bifurcations under weak noise // *J.Stat.Phys.* 1989. Vol.54, №5/6. P.1207.

Graham R. Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*. Vol.1. / Ed. F.Moss and P.V.E.McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. P.384.

20. *Wiesenfeld K.* Noisy precursors of nonlinear instabilities // *J.Stat.Phys.* 1985. Vol.38, № 5/6. P.1071.

21. *Пиковский А.С.* О влиянии шумов на статистику хаотических автоколебаний // *Изв.вузов. Радиофизика*. 1986. Т.29, № 5. С.526.

22. *Klosek-Dygas M.M., Matkovsky B.J., Schuss Z.* A first passage time approach to stochastic stability of nonlinear oscillators // *Phys.Lett.A*. 1988. Vol.130, № 1. P.11.

23. *Anishchenko V.S., Neiman A.B.*, Structure and properties of chaos in presence of noise // *Nonlinear Dynamics of Structures* / Ed. R.Z. Sagdeev et al. Singapore: World Scientific, 1991. P.21.

24. *Стратонович Р.Л., Ланда П.С.* Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением // *Изв.вузов. Радиофизика*. 1959. Т.2, № 1. С.37.

25. *Khibnik A.I., Kuznetsov Yu.A., Levitin V. Nikolaev E.V.* Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODEs and iterated maps // *Physica D*. 1993. Vol.62. P.360.

26. *Banke U., Ebeling W.* Large-noise expansions for the stationary solution of Fokker - Planck equation // *Annalen der Physik*. 1990. Vol.47, № 2/3. P.101.

27. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.

28. *Кифер Ю.И.* О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем // *Изв. АН СССР. Математика*. 1974. Т.38, № 5. С.1091.

Kifer Yu. Attractors via random perturbations // *Commun.Math.Phys.* 1989. Vol.121. P.44.

29. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны* / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С.192.

30. *Бланк М.Л.* Эргодические свойства динамических систем со стохастическими аттракторами // *Взаимодействующие марковские процессы и их применение в биологии*. Пушкино: НЦБИ АН СССР, 1986. С. 34.

31. *Graham R., Hamm A., Tel T.* Nonequilibrium potentials for dynamical systems with fractal attractors or repellers // *Phys.Rev.Lett.* 1991. Vol.66, № 24. P. 3089.

32. *Hamm A., Graham R.* Quasipotentials for simple noisy maps with complicated dynamics // *J.Stat.Phys.* 1992. Vol. 66. P. 689.

33. *Hamm A., Graham R.*, Scaling for small random perturbations of golden critical circle map // *Phys.Rev.E.* 1992. Vol.46, № 10. P. 6323.
34. *Desai R.C., Zwanzig R.* Statistical mechanics of a nonlinear stochastic model // *J.Stat.Phys.* 1978. Vol.19, № 1. P.1.
35. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов.радио, 1978.
36. *Татарникова Г.В., Шалфеев В.Д.* Исследование статистической динамики систем фазовой синхронизации // *Радиотехника.* 1986. Т.73, № 3. С.40.
37. *Just W., Sauermann H.* Ordinary differential equations for nonlinear stochastic oscillators // *Phys.Lett.A.* 1988. Vol.131, № 4/5. P.234.
38. *Anishchenko V.S., Neiman A.B.* Bifurcational analysis of bistable system excited by colored noise // *International J. Bif. & Chaos.* 1992. Vol.2, № 4. P. 979.
39. *Neiman A., Schimansky-Geier L.* Stochastic resonance in bistable systems driven by harmonic Noise // *Phys.Rev.Lett.* 1994. Vol.72, № 19. P. 2988.
40. *Neiman A., Anishchenko V., Kurths J.* Period-doubling bifurcations in the presence of colored noise // *Phys.Rev.E.* 1994. Vol.49, № 5. P.3801.
41. *Neiman A., Feudel U., Kurths J.* The cumulant approach for investigating the noise influence on mode-locking bifurcations // *J.Phys.A* (submitted).
42. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
43. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
44. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis // *Physica D.* 1982. Vol.5, № 2. P. 370.
- Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D.* 1983. Vol.8, № 3. P.303.
45. *Feigenbaum M.J., Hasslacher B.* Irrational decimations and path integrals for external noise // *Phys.Rev.Lett.* 1982. Vol.49. P. 605.
46. *Свитановић Р.* Universality in Chaos. Bristol & N.Y.: Adam Hilger, 1989.
- Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.Н.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // *УФН.* 1984. Т.39, № 3. С. 3.

Саратовский государственный университет

*Поступила в редакцию 10.01.95
после переработки 15.03.95*

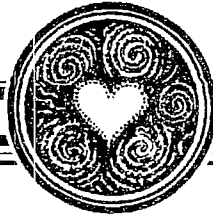
THE CUMULANT APPROACH FOR THE INVESTIGATION OF BIFURCATIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS DRIVEN BY THE EXTERNAL NOISE

A.B. Neiman

The problems of bifurcation analysis of noisy systems are considered. The technique of bifurcation analysis based on the cumulant expansion is proposed. The noise influence on the mode-locking bifurcations in the circle map and on the period-doubling bifurcations in the Feigenbaum map is considered as examples.



Нейман Александр Борисович - родился в октябре 1962 года. Окончил физический факультет Саратовского университета (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1991). В настоящее время - докторант кафедры радиофизики. Автор более 35 публикаций в международных и отечественных изданиях. Область научных интересов: нелинейная динамика, стохастическая динамика нелинейных систем, теория случайных процессов и теория информации.



NONLINEAR DYNAMICS OF MIXED EVOLUTIONARY STRATEGIES FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS

Werner Ebeling

Several elementary strategies of evolution are investigated and described by simple mathematical models, leading to a highdimensional system of coupled differential equations. The stationary states of the system correspond to relative optima and the stable attractor corresponds to the final solution of the optimization problem. Special attention is devoted here to mixed Boltzmann - Darwin strategies modelling basic elements of thermodynamic and biological evolution respectively. A continuous model leading to one p.d.e., the corresponding eigenvalue problem and several applications are discussed.

1. Introduction

Our world including biological species, the ecological communities and human society appears to be the result of a special search process: natural evolution. There is no external program which controls this search for well-adapted solutions. Our world is fundamentally based on the selforganization of matter which is a highly complex nonlinear process [1-7].

Evolution we understand here as in earlier work as unlimited sequences (spirals in Hegel's picture) of selforganization steps [1,2]. Selforganization is defined as the spontaneous formation of order in open entropy-exporting systems. One of the most evident features of evolution is the tendency to form ever more complex structural and behaviour modes during the course of time. The understanding and explanation of the trend to complexification and optimization forms the heart of any research program dealing with problems of evolution. Modern research has shown that the strategies developed in the process of natural evolution might also be of interest for the design and construction of technical systems. Pioneering work in this direction was done by Holland, Bremermann, Rechenberg and Schwefel [8-10].

2. Models of the Basic Strategies of Evolution

Analyzing the mechanisms of natural evolution we find several basic strategies [8-14]; the main of them are:

1. Boltzmann strategy. The fundamental goal nature tried to reach in its course of evolution up to the appearance of life is the optimization of certain thermodynamic functions. In our present understanding the metagalaxis was the result of a giant vacuum fluctuation which extended through an inflationary process and led to an hot and quickly ex-

panding plasma. The expansion of this very hot plasma started about 10-20 billions of years ago. The expanding plasma tried to maximize its entropy and this was the basic reason for the formation of the chemical elements and for the clustering of matter which finally led to galaxies, stars and planets.

The Boltzmann strategy has three important elements:

- a. Motion along gradients to reach steepest ascent of entropy.
- b. Various stochastic processes including thermal and hydrodynamic fluctuations. Thanks to these fluctuations locking in local maxima was avoided.
- c. Decrease in temperature during the adiabatic expansion of our world.

Let us consider for example a numbered set of states $i = 1, 2, \dots, n$ each characterized by a potential energy U_i and a population $x_i(t)$ at time t . Then the simplest model of a Boltzmann process which tends to find minima of U_i is

$$\partial_t x_i(t) = \sum_j (A_{ij} x_j(t) - A_{ji} x_i(t)), \quad (1)$$

$$A_{ij} = A_{ij}^0 \begin{cases} 1, & \text{if } U_j > U_i, \\ \exp \{(U_j - U_i)/T\}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

$$A_{ij}^0 = A_{ji}^0.$$

In other words a hill-down transition is always carried out and a hill-up transition occurs only with a small rate which decreases exponentially with the height of the threshold.

2. Darwin strategy. This second important natural strategy appears in the universe only in the process of biogenesis i.e. about 3-4 billions of years ago. The basic elements of a Darwinian strategy are:

- a. Self-reproduction of good species that show maximal fitness.
- b. Mutation processes due to error reproductions that change the phenotypic properties of the species.
- c. Increase of the precision of selfreproduction in the course of the evolution of life.

Considering again as an example the population of n states a simple model reads

$$\partial_t x_i = (E_i - \langle E \rangle) x_i + \sum_j (A_{ij} x_j - A_{ji} x_i). \quad (3)$$

Here E_i denotes the fitness (expressed by the rate of self-reproduction) of species i in the population and $\langle E \rangle$ is the population average.

The two strategies discussed so far will be denoted in the following as elementary strategies. For completeness let us mention only other more difficult strategies which were developed by nature in the course of evolution, as e.g. Haeckel strategies, Volterra strategies etc. [1,2,10-12].

3. Mixed Boltzmann - Darwin Strategy. Boltzmann and Darwin strategies show several parallels but also essential differences [10-11]. Both strategies are well suited to find the extrema in landscapes of potential functions. In general it will depend on the structure of this landscape, what search strategy is the better one. The qualitative analysis carried out in earlier work [11] suggests that in the case that no knowledge about the structure of the landscape is available, it will be advantageous to apply the Boltzmann strategy combined with annealing. This strategy seems to be more universal; it will always work. However, thermodynamic processes have the tendency to be locked in relative extrema surrounded by high threshold. In the other hand, Darwinian processes are able to cross high barriers by tunneling if the next minimum is close. In any case we have seen, that both strategies are quite different and we might expect that there exists a class

of problems, where the Boltzmann strategy is better and another class of problems where the Darwin strategy is more appropriate. In such a situation it seems to be a good idea to develop a strategy which possesses components from both elementary strategies.

In order to model mixed strategies let us consider again a numbered set of states $i = 1, 2, \dots, n$ each characterized by a potential energy U_i and a population $x_i(t)$ at time t . Then a simple model of a mixed strategy with the property to find minima of U_i is

$$\partial_t x_i = \gamma (\langle U \rangle - U_i) x_i + \sum_j (A_{ij} x_j - A_{ji} x_i), \quad (4)$$

$$A_{ij} = A_{ij}^0 \begin{cases} 1, & \text{if } U_j > U_i, \\ \exp \{ \beta (U_j - U_i) \} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5)$$

with

$$A_{ij}^0 = A_{ji}^0, \quad \beta = 1/T. \quad (6)$$

The new models described by eqs. (4)-(6) contains as a special case the Boltzmann strategy for $\gamma = 0$. The Darwin strategy is obtained for $\gamma = 1$ and $T \rightarrow \infty$.

3. The Continuous Model of Mixed Strategies and the Associated Eigenvalue Problem

Since the mathematical problem connected with the solution of the coupled non-linear differential equations (4)-(6) is extremely difficult, let us simplify it. We introduce a corresponding continuous model leading to one partial d.e. by replacing the vector x_i by a continuous function $x(q, t)$ and restricting mutational changes to small steps [1,11]. With these assumptions we get a mixture of Fisher - Eigen and Fokker - Planck equations

$$\partial_t x(q, t) = \gamma [\langle U \rangle - U(q)] x(q, t) + D [\Delta x(q, t) + \beta x(q, t) \nabla U(q)]. \quad (7)$$

For $\beta = 0$ ($T \rightarrow \infty$) this is the standard Fisher - Eigen equation which is solved for $t \rightarrow \infty$ by a Gaussian-like distribution centered around the absolute minimum of $U(q)$. For $\gamma = 0$ results the standard Fokker - Planck equation which is solved for $t \rightarrow \infty$ by the Boltzmann distribution

$$x_0(q) \sim \exp [-\beta U(q)] \quad (8)$$

which possesses a maximum around the lowest minimum of $U(q)$. In the general case $\gamma > 0$, $\beta > 0$ the following ansatz is useful

$$x(q, t) = \exp \left[\gamma \int_0^t \langle U \rangle dt' - \beta U(q) / 2 \right] y(q, t). \quad (9)$$

This substitution transforms the nonlinear p.d.e. (7) into a linear equation for $y(q, t)$ which is similar to the Schrödinger equation with imaginary time

$$\partial_t y(q, t) = D [\Delta y(q, t) - V(q)] y(q, t) \quad (10)$$

with the effective potential

$$V(q) = \gamma U(q) - (D/2) \beta \Delta U(q) + (D/4) (\nabla U(q))^2. \quad (11)$$

The new linear equation which is solved by

$$y(q, t) = \sum a_n \psi_n(q) \exp(-\varepsilon_n t). \quad (12)$$

Here the eigenvalues ε_n and the eigenfunctions ψ_n are determined by the stationary Schrödinger problem

$$D\Delta\psi_n(q) + [\varepsilon_n - V(q)]\psi_n(q) = 0 \quad (13)$$

for the effective potential. In this way we get the complete explicit solution of eq. (7) in the form

$$x(q, t) = \exp[-\beta U(q)/2] \cdot \sum a_n \psi_n(q) \exp(-\varepsilon_n t) / \sum c_n \exp(-\varepsilon_n t). \quad (14)$$

The coefficients a_n and c_n are defined by

$$a_n = \int dq x(q, 0) \psi_n(q), \quad (15)$$

$$c_n = a_n \int dq \psi_n(q).$$

In the limit $t \rightarrow \infty$ our solution converges to

$$x_0(q) = \exp[-\beta U(q)/2] \cdot (a_0/c_0) \psi_0(q) \quad (16)$$

where $\psi_0(q)$ is the ground state wave function which is centered around the deepest minimum of the effective potential $V(q)$. A deeper mathematical analysis of the solution given above is in preparation [15].

4. Application to Optimization Problems

Let us first show that the dynamics of the mixed process is problem-solving that means it will find the absolute minimum of $U(q)$ which is the target of the search. Since the Boltzmann factor has a maximum at the deepest minimum of the potential $U(q)$ we see that $x_0(q)$ is centered near to the latter. In other words, the dynamics of the mixed strategy converges to a point attractor near to the minimum of $U(q)$ which is searched, i.e. the strategy is indeed problem solving. In order to guarantee the exact convergence to the minimum of $U(q)$ we may use a kind of annealing $\gamma \rightarrow 0$ and $\beta \rightarrow \infty$. Since for $\gamma = 0$ the ground state solution of eq. (13) is

$$\psi_0(q) = \exp[-\beta U(q)/2] \quad (17)$$

we see that $x_0(q)$ degenerates in the limit of the annealing process to a δ -function centered around the deepest minimum of $U(q)$. This proves that the dynamic process converges in the limit $\gamma \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$ and $t \rightarrow \infty$ indeed to the absolute minimum of $U(q)$.

In earlier work we considered the application of mixed Boltzmann - Darwin strategies based on the discrete form of the mixed strategies given by eqs. (4)-(6) to the travelling salesman problem (TSP) and the related cost problem (CP) [13]. For example we considered routes between 100 towns stochastically distributed on a square as well as routes connecting 16 «real» towns. The potential corresponding to the TSP is the total length of a closed tour connecting all towns [13]

$$U = \sum L(i, j) \quad (18)$$

where $L(i, j)$ is the distance between the towns i and j . The «real» towns considered in our earlier work were: Schwerin (B), Rostock (A), Stralsund (P), Neubrandenburg (C), Stendal (H), Potsdam (D), Berlin (I), Frankfurt (E), Cottbus (Z), Dresden (R), Chemnitz (T), Gera (N), Halle (K), Leipzig (S), Suhl (O), Erfurt (L). The distances then were taken from the data given in a common calendar for automobile kilometers. The problem was of course not, to solve a realistic touring problem but, to find good strategies which yield short tours in a modest time. It could be shown by simulations that in this respect mixed Boltzmann - Darwin strategies have very good search properties. We mention

also another variant of those strategies which includes aging of the searchers, a strategy which was called a Haeckel-type strategy [12].

In our simulations the number of representatives (salesmen) in the ensemble was varied between 2^0 and 2^7 . We calculated the mean value of the dispersion and the best results obtained by a search in a given fixed total computer time. It was shown that ensembles with 4-32 representatives give the best results with respect to the mean value, the best value and the dispersion of the results. The interpretation of these findings is the following: certain amount of parallelism is a useful element of good search strategies. The computer time which is lost for simulating a number of parallel searchers is gained by certain advantages of parallel search as e.g. the possibility of exchange of experience. In our mixed strategy this is modelled by the Darwinian elements: competition between searchers, survival of the fittest. However when the number of searchers working in parallel is too high, in our case exceeding the number 32, the parallelism costs more than one can gain from it. According to our experience, a successful strategy requires a fine balance between parallelism and individualism on one side and between Darwinian and Boltzmann elements on the other side.

Similar results were obtained by the analysis of a cost problem with the potential

$$U = \sum C(i,j) \quad (19)$$

where the cost for travelling from town i to town j was derived from the distance by multiplication with a random number in the range $(0.2 \div 1.2)$. The cost problem does not satisfy a triangle inequality and must be considered therefore as a different class of optimization problems. The results show again certain advantage of including Darwinian elements into the search strategy. Let us underline that $N = 1$ corresponds to a pure Boltzmann strategy and $N = 2, 4, \dots, 128$ to a mixed Boltzmann - Darwin strategy. In this case we are simulating a population of N salesman which are searching simultaneously and which are coupled by a competition for the best results. The simultaneous search was simulated always on a single sequential computer. Of course it could in principle be carried out also on a net of parallel processors. Since the coupling (acts of selection) between the elements of a Darwinian ensemble is a rather seldom event, the speed up by using such an N -processor net might be near to N . Possibly the real power of mixed strategies including Darwinian elements will show up only on parallel computers with 4 - 32 parallel processors [14]. This question has to be left to future work, as well as a deeper mathematical analysis of the mixed strategies [15], which were described here in a more qualitative way.

References

1. *Ebeling, W. and Feistel, R.*: Physik der Selbstorganisation und Evolution. Akademie-Verlag Berlin 1982, 1986; *Feistel, R. and Ebeling, W.*: Evolution of Complex Systems. Kluwer Publ. Dordrecht 1989.
2. *Ebeling, W., Peschel, M. (Eds.)*: Cooperation and Competition in Dynamical Systems. Akademie-Verlag 1985.
3. *Eigen, M. and Schuster, P.*: The Hypercycle. Naturwiss. 64(1977)541; 65 (1978)341.
4. *Haken, H. (Ed.)*: Complex Systems - Operational Approaches in Neurobiology. Physics and Computers. Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg-New York 1985.
5. *Herzel, H., Ebeling, W., Schmitt, A.O.*: Entropies of Biosequences. Phys. Rev. E 50 (1994) 5061.
6. *Conrad, M.*: Adaptability. Plenum Press. New York 1983.
7. *Klimontovich, Yu.L.*: The Structure of Chaos, Kluwer, Dordrecht 1994.
8. *Rechenberg, L.*: Evolutionsstrategie 94. Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution. Fromman-Verlag, Stuttgart 1994.
9. *Schwefel, H.-P.*: Numerical Optimization of Computer Models. Wiley, New York 1981.

10. *Açelmeyer, T., Ebeling, W., Rose, H.*: Smoothing Representations of Fitness Landscapes - the Genotype - Phenotype Map of Evolution. *Biosystems* (submitted).
11. *Ebeling, W.; Engel, A.*: Models of Evolutionary Systems and their Application to Optimization Problems. *Syst. Anal. Model. Simul.* 3(1986) 377.
12. *Ebeling, W., Engel, A., Mazenko, V.G.*: Modelling of Selection Processes with Age-dependent Birth and Death Rates. *BioSystems* 19(1986)213.
13. *Boseniuk, T., Ebeling, W., Engel, A.*: Boltzmann and Darwin Strategies in Complex Optimization. *Phys. Lett.* 125(1987)307; *Boseniuk, T., Ebeling, W.*: Optimization of NP-Complete Problems by Boltzmann-Darwin Strategies Including Life-Cycles. *Europhys. Lett.* 6(1988)107.
14. *Mühlenbein, H. et al.*: *Parallel Computing* 4(1987)26.
15. *Açelmayer, T., Ebeling, W.*: in preparation.

*Institut für Physik
Humboldt-Universität Berlin*

Поступила в редакцию 19.10.95

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СМЕШАННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ ОПТИМИЗАЦИИ

Вернер Эбелинг

Исследуются несколько простых стратегий эволюции. Они описываются простыми математическими моделями, сводящимися к многомерной системе связанных дифференциальных уравнений. Стационарные состояния системы соответствуют относительным оптимальным условиям, а устойчивый аттрактор соответствует окончательному решению проблемы оптимизации. Особое внимание уделяется смешанной стратегии Больцмана - Дарвина, моделирующей основные элементы термодинамической и биологической эволюции. Обсуждается распределенная модель, сводящаяся к одному дифференциальному уравнению в частных производных, проблема собственных значений и ряд применений.



Вернер Эбелинг - окончил Ростовский университет (1958), профессор, заведующий кафедрой статистической физики Гумбольдского университета в Берлине. Известный физик-теоретик, один из ведущих специалистов по теории процессов самоорганизации и эволюции открытых неравновесных систем разной природы. Его ученики успешно работают во многих университетах и научных институтах. Имеет более 20 книг: от фундаментальных монографий по теории физики плазмы до научно-популярных книг по синергетике. Его книги неоднократно издавались на английском и на русском языках.



ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В СИСТЕМЕ С МАРКОВСКИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ВЫХОДА ИЗ МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Р.Л. Стратонович

Рассмотрена динамическая теория флуктуационного выхода из метастабильного состояния, которую можно противопоставить известной диффузионной теории, основанной на марковской теории достижения границ. Динамическая теория применима в том случае, когда случайные воздействия не входят в динамические уравнения, но уравнения таковы, что имеется динамический хаос (если отсутствует утечка фазовых точек). Показано, что закон выхода из метастабильного состояния является экспоненциальным. Найдено среднее время жизни и квазистационарное распределение вероятности. В качестве примера рассмотрен осциллятор с отрицательным затуханием и демпфирующими толчками. Значения параметров взяты такими, что имеет место долгоживущее метастабильное состояние.

В пионерской работе Крамерса [1] самопроизвольный распад молекулы трактуется как обусловленный флуктуациями выход из потенциальной ямы. При этом флуктуационные воздействия $\xi_\alpha(t)$ в стохастических уравнениях

$$\dot{x}_\alpha = f_\alpha(x) + \xi_\alpha(t), \quad \alpha = \bar{1}, \dots, r \quad (1)$$

считаются дельта-коррелированными. В этом приближении процесс является диффузионным марковским, а к процессу выхода из потенциальной ямы применима марковская теория достижения границ [2, 3]. В этой теории удастся доказать экспоненциальный характер самопроизвольного распада.

Нужно отметить, однако, что применение уравнения (1) к проблеме самопроизвольного распада сложной молекулы вызывает сомнения. Неясно, чем порождены случайные воздействия $\xi_\alpha(t)$. Если они являются следствием взаимодействия выделенной молекулы с окружающими молекулами, то ее распад не является самопроизвольным. Если $\xi_\alpha(t)$ порождены прочими степенями свободы y_1, \dots, y_m молекулы, то, строго говоря, вместо (1) имеем

$$\dot{x}_\alpha = f_\alpha(x) + \xi_\alpha(x(t), y(t)), \quad (2)$$

$$\dot{y}_\sigma = F_\sigma(x, y). \quad (3)$$

Уединенная молекула имеет конечное число степеней свободы и поэтому ξ_α не

могут быть строго дельта-коррелированными [4]. Кроме того, случайные воздействия ξ_α не могут быть инновационными. Строго говоря, при этом следовало бы рассматривать совместную систему уравнений (2), (3), определяющую процесс $\{x(t), y(t)\}$. Уравнения же (1) недостаточно.

В данной работе мы рассмотрим механизм экспоненциального распада, не основанный на внешних случайных воздействиях. В нашей теории существенно, что достаточно небольшой модификации метастабильной системы, из которой возможен выход, чтобы получить стабильную систему и наоборот. При такой модификации приобретение или потеря свойства стабильности происходит без резкого изменения уравнений движения. Мы предполагаем уравнения движения такими, что в стабильной системе имеется динамический хаос. Тогда в соответствующей метастабильной системе возможен экспоненциальный распад или хотя бы процесс, имитирующий таковой, если время жизни достаточно велико по сравнению с постоянной времени установления квазистационарного распределения (или стационарного в соответствующей системе без утечки фазовых точек). Условие большого времени жизни, то есть малой утечки фазовых точек аналогично известному условию большой высоты потенциального барьера по сравнению с kT в теории Крамерса.

Отметим, что при уравнениях движения, не дающих динамический хаос, нет экспоненциального распада метастабильного состояния. Только при динамическом хаосе в случае, описываемом уравнениями (2), (3), к конечной системе приближенно применимы результаты статистической физики, определяющие статистические свойства случайных воздействий $\xi_\alpha(t)$ в (1). Иначе теория Крамерса становится неприменимой.

Чтобы показать теоретически возможность экспоненциального распада при отсутствии случайных воздействий извне, рассмотрим негамильтонов случай. Пусть движение в фазовом пространстве таково, что за время T_0 имеет место марковское кусочно-линейное отображение

$$x' = F(x) \tag{4}$$

пространства состояний в себя. Здесь $x = (x_1, \dots, x_r)$, $x = x(t)$, $x' = x(t+T_0)$.

Начнем с того случая, когда распад отсутствует, то есть отсутствует выход изобразяющей точки за область \mathfrak{R} стабильных состояний. Предположим, что (4) осуществляет марковское кусочно-линейное отображение области \mathfrak{R} в себя. Это значит, что область стабильности \mathfrak{R} можно разбить на подобласти $\{\mathfrak{R}_j\}$ таким образом, что при отображении каждая подобласть \mathfrak{R}_j переходит в одну или несколько подобластей $\mathfrak{R}_{\alpha_{j1}}, \dots, \mathfrak{R}_{\alpha_{jn_j}}$ ($n_j \geq 1$), причем это отображение

$$\mathfrak{R}_j \rightarrow \mathfrak{R}'_j = \sum_{i=1}^{n_j} \mathfrak{R}_{\alpha_{ji}} \tag{5}$$

происходит линейно. Вводя матрицу $d_{kj} = \sum_i \delta_{k, \alpha_{ji}}$, элементы которой равны нулю или единице ($d_{kj} = 1$, если переход из \mathfrak{R}_j в \mathfrak{R}_k возможен, и $d_{kj} = 0$ в противном случае), правую часть формулы (5) при любом j можно записать $\sum_k \mathfrak{R}_k d_{kj}$.

Обозначим через $V_j = |\mathfrak{R}_j|$ объем области \mathfrak{R}_j . В силу линейности отображения (5) нетрудно найти вероятности перехода $P[\mathfrak{R}_{\alpha_{ji}} | \mathfrak{R}_j]$ из \mathfrak{R}_j в каждую из подобластей $\mathfrak{R}_{\alpha_{j1}}, \dots, \mathfrak{R}_{\alpha_{jn_j}}$. При условии, что распределение в \mathfrak{R}_j было равномерным, имеем

$$P[\mathfrak{R}_{\alpha_{ji}} | \mathfrak{R}_j] = V_{\alpha_{ji}} / \sum_{i=1}^{n_j} V_{\alpha_{ji}} \tag{6}$$

здесь j любое и $i=1, \dots, n_j$. Используя матрицу d_{kj} , формуле (6) можно придать вид

$$p_{kj} = P[\mathfrak{R}_k | \mathfrak{R}_j] V_k d_{kj} / \sum_i V_i d_{ij} \tag{7}$$

где k уже любое.

Пусть плотность вероятности в \mathfrak{X} является кусочно-постоянной: $w(x)=p_j/V_j$ при $x \in \mathfrak{X}_j$. Здесь p_j - вероятность попадания в \mathfrak{X}_j . Преобразование распределения вероятности за время T_0 определяется формулой обычного вида

$$p_k[l+1] = \sum_j p_{kj} p_j[l], \quad (8)$$

где $p_j[l] = p_j[lT_0 + t_0]$. При этом условие стационарности распределения выражается уравнением

$$p_k^{st} = \sum_j p_{kj} p_j^{st}. \quad (9)$$

Пусть теперь возможен выход из области состояний \mathfrak{X} , причем вышедшая точка уже не возвращается в нее. Предположим, что каждая подобласть \mathfrak{X}_j области \mathfrak{X} линейно преобразуется в области $\mathfrak{X}_{\alpha_{j1}}^0, \dots, \mathfrak{X}_{\alpha_{jnj}}^0$, которые уже не обязаны целиком лежать в \mathfrak{X} . При этом та часть области $\mathfrak{X}_{\alpha_{ji}}^0$, которая находится в \mathfrak{X} , обозначается $\mathfrak{X}_{\alpha_{ji}}$, то есть $\mathfrak{X}_k = \mathfrak{X}_k^0 \cap \mathfrak{X}$. Далее пусть $V_k^0 = |\mathfrak{X}_k^0|$, $V_k = |\mathfrak{X}_k|$. Теперь будем иметь вместо (7)

$$p_{kj} = P[\mathfrak{X}_k | \mathfrak{X}_j] = V_k d_{kj} / \sum_l V_l^0 d_{lj} \leq V_k^0 d_{kj} / \sum_l V_l^0 d_{lj}.$$

Очевидно, что теперь

$$\sum_k p_{kj} \leq 1, \quad (9a)$$

то есть условие сохранения вероятности $\sum_k p_{kj}=1$ не обязательно удовлетворяется при всех j . Поэтому из (9) уже не вытекает условие $\sum_k p_k^{st} = 1$, если в (9a) имеет место знак « $<$ » хотя бы при одном значении j , то есть стационарное распределение невозможно. Однако, вместо стационарного распределения теперь можно найти распределение вероятности p_j^0 , сохраняющее форму при экспоненциальном убывании суммарной вероятности. Положив

$$p_{jl}[l] = \Lambda^l p_j^0 = e^{-\lambda l} p_j^0, \quad \lambda = -\ln \Lambda \quad (10)$$

при $\sum_j p_j^0 = 1$, из уравнения (8) получаем

$$\sum_j p_{kj} p_j^0 = \Lambda p_k^0. \quad (11)$$

Отсюда можно найти Λ и p_k^0 . Значение Λ_1 определяется как максимальное значение (только для максимального значения все $p_k^0 \geq 0$), при котором детерминант матрицы $\| p_{kj} - \Lambda \delta_{kj} \|$ обращается в нуль, то есть возможно нетривиальное решение $\{p_k^0\}$ уравнения (11). Проводя суммирование в (11) по k и учитывая, что $\sum_k p_k^0 = 1$, находим

$$\Lambda_1 = \sum_{kj} p_{kj} p_j^0 \leq 1.$$

Эта величина меньше единицы, если хотя бы для одной подобласти \mathfrak{X}_j , имеющей ненулевую вероятность p_j^0 , справедливо строгое неравенство $\sum_k p_{kj} < 1$. В этом случае, действительно, имеет место нестабильность.

Нетрудно понять, что среднее время жизни в рассмотренном случае определяется формулой

$$\tau_{av} = T_0 / \ln(1/\Lambda_1). \quad (12)$$

Заметим также, что в случае стабильной системы средний коэффициент экспоненциального увеличения объема, рассчитанный на единицу времени, равен

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0} \sum_j p_j \ln(V_j^{-1} \sum_k V_k d_{kj}).$$

При этом можно показать, что коэффициент растяжения α не меньше этой величины. Он совпадает с α_0 для одномерного фазового пространства.

Нужно отметить, что в рассматриваемом случае при $\alpha_0 > 1$, когда имеется динамический хаос, отображение (4) не исключает возможности пересечения фазовых траекторий. Поэтому динамический хаос возможен в подобных системах при размерности фазового пространства меньше трех. Чтобы это пересечение было возможным, дифференциальные динамические уравнения движения должны быть нетрадиционными, скажем, содержать запаздывание

$$\dot{x}_\alpha(t) = f_\alpha(x(t-\Delta)), \Delta > 0.$$

В качестве простого конкретного примера рассмотрим осциллятор с отрицательным затуханием и с демпфирующими толчками [5,6]. Его поведение описывается уравнением

$$\ddot{y} - 2\delta\dot{y} + (\omega_0^2 + \delta^2)y = -h\vartheta(\dot{y}_\varepsilon - b)y\delta(y), \quad (13)$$

где $\vartheta(z) = (1 + \text{sgn } z)/2$, $\dot{y}_\varepsilon = \dot{y}(t - \varepsilon)$ обозначает запаздывание на весьма малую величину ε . Уравнение (13) означает, что справедливо уравнение

$$\ddot{y} - 2\delta\dot{y} + (\omega_0^2 + \delta^2)y = 0,$$

если $\dot{y} < b$. Если же $\dot{y} > b > 0$, то в момент прохождения точки $y = 0$ маятник испытывает толчок навстречу движению, который приводит к мгновенному уменьшению скорости \dot{y} на $h > 0$, то есть к преобразованию $\dot{y} \rightarrow \dot{y} - h$.

При отсутствии толчков амплитуда колебаний экспоненциально увеличивается, причем за период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ происходит увеличение амплитуды в $\gamma = e^{\delta T_0}$ раз. При наличии толчка имеет место такое отображение за период

$$x' = \begin{cases} \gamma x & \text{при } x < b/\gamma, \\ \gamma x - h & \text{при } x > b/\gamma, \end{cases} \quad (14)$$

где x и x' - значения скорости \dot{y} немедленно после пересечения полупрямой $\dot{y} > 0$, $y = 0$, то есть после толчка, если он есть.

Разумеется, в случае преобразования (14) не при всех значениях параметров γ и h/b имеет место марковское отображение. Простейший марковский случай (им и ограничимся) мы получим, если положим $\gamma = \gamma_0 = (1 + 5^{1/2})/2$ (то есть $\gamma_0^2 - \gamma_0 - 1 = 0$) и $h/b = \gamma_0 - 1$. Тогда стационарная плотность вероятности $w(y, \dot{y})$ сосредоточена в области, которая заштрихована на рис. 1. В этой области происходит хаотическое осцилляционное движение. Стационарное же распределение переменной x сосредоточено на интервале (a, b) , где $a = b - h$. Последний состоит из двух подинтервалов $\mathfrak{R}_1 = (a, \gamma_0 a)$ и $\mathfrak{R}_2 = (\gamma_0 a, b)$. При отображении (14) интервал \mathfrak{R}_1 переходит в \mathfrak{R}_2 , а \mathfrak{R}_2 в $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ (рис.2). При этом интервал $\mathfrak{R}'_2 = \mathfrak{R}$ разделяется на \mathfrak{R}_1 и \mathfrak{R}_2 в соотношении $1/\gamma_0$. Это позволяет без труда определить матрицу вероятности перехода (7)

$$p_{11} = 0, \quad p_{21} = 1, \quad p_{12} = (\gamma_0 + 1)^{-1} = 2 - \gamma_0, \quad p_{22} = \gamma_0 - 1. \quad (15)$$

Произведем теперь малую деформацию с тем, чтобы появилась

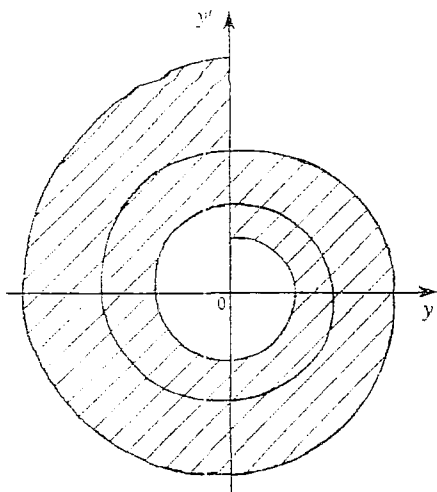


Рис. 1. Область фазового пространства, в которой лежат хаотические фазовые траектории ($\gamma = \gamma_0$)

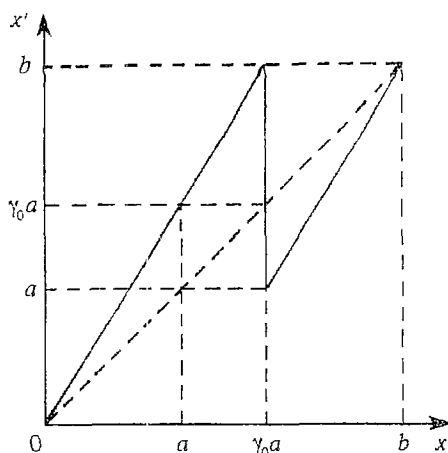


Рис. 2. Простой пример марковского отображения

нестабильность. Возьмем несколько большее значение δ и $\gamma = \gamma_0 + \epsilon$ ($\epsilon > 0$). При этом положим $h = (1 - \gamma^2)b$, так что отображение за период будет иметь вид

$$x' = \begin{cases} \gamma x & \text{при } x < b/\gamma, \\ \gamma x - (1 - \gamma^2)b & \text{при } x > b/\gamma. \end{cases}$$

Это отображение при $\gamma = \gamma_0 + \epsilon$ показано на рис. 3. Оно переводит интервал $\mathfrak{R}_1 = (b/\gamma^3, b/\gamma)$ в $\mathfrak{R}_2 = (b/\gamma, b)$, а интервал \mathfrak{R}_2 в $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2^0$, где $\mathfrak{R}_2^0 = (b/\gamma, (\gamma + \gamma^{-2} - 1)b)$. Точки, попавшие на интервал $(b, (\gamma + \gamma^{-2} - 1)b)$, уже не возвращаются, а уходят в бесконечность. Здесь $\gamma + \gamma^{-2} - 1 = 1 + (7 - 4\gamma_0)\epsilon + O(\epsilon^2) = 1 + (5 - 20^{1/2})\epsilon + O(\epsilon^2)$. Теперь в отличие от (15) будем иметь

$$p_{11} = 0, \quad p_{21} = 1, \quad p_{12} = \gamma^2 = 2 - \gamma_0 - 2\gamma_0^{-3}\epsilon + O(\epsilon^2),$$

$$p_{22} = \gamma^{-1} = \gamma_0^{-1} - \gamma_0^{-2}\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Тогда максимальный корень Λ_1 уравнения $\|p_{kj} - \Lambda \delta_{kj}\|$ будет таков:

$$\Lambda_1 = 1 - (\gamma_0 - 1)\epsilon + O(\epsilon^2).$$

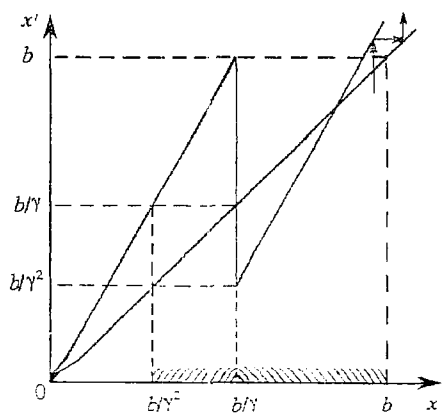


Рис. 3. Отображение при возможности выхода

Учитывая также второй корень Λ_2 , распределение $p_j[l]$ можно записать

$$p_j[l] = \Lambda_1 p_j^0 + \Lambda_2 \tilde{p}_j^0.$$

Когда второй член в правой части практически исчезнет по сравнению с первым, получим простую экспоненциальную зависимость (10). Тем самым в данном примере экспоненциальный распад действительно имеет место, причем согласно (12) среднее время жизни равно $\tau_{av} = \gamma_0 T_0 / \epsilon$.

В заключение нужно отметить, что марковские преобразования (8) для

вероятностей, дающие экспоненциальный закон распада, можно получить и в гамильтоновом случае как приближенные, если дискретизировать время и разбить фазовое пространство на элементарные ячейки $\{\mathcal{R}_j\}$. При этом вероятности перехода p_{kj} по-прежнему определяются как та доля фазового объема, которая при преобразовании (4) попадает в \mathcal{R}_k , то есть $p_{kj} = |\mathcal{R}_k \cap \mathcal{X}_j| / |\mathcal{R}_j|$. Здесь $\mathcal{X}_j = \Gamma \mathcal{R}_j$ - область, в которую переходит \mathcal{R}_j за один шаг.

Данное исследование частично финансировано грантом ND 1000 Международного научного фонда и грантом ND 1300 Международного научного фонда и Российского правительства.

Библиографический список

1. *Kramers H.A.* Brownian motion in the field of the force and the diffusional model of chemical reactions // *Physica*. 1940. Vol. 7. P. 284.
2. *Понтрягин А., Андронов А., Витт А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // *ЖЭТФ*. 1933. Т. 3. С. 165.
3. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов.Радио, 1961. С.76.
4. *Stratonovich R.L.* From Microscopic Reversibility to Macroscopic Irreversibility // *Z.Phys. Chem*. 1991. Vol. 170. P. 207.
5. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. С. 69.
6. *Стратонович Р.Л., Рузмайкина А.А., Чичигина О.А.* Динамический хаос в осцилляторе с отрицательным трением. Аномальный режим // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1993. Т. 36. С. 892.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 02.02.95
после переработки 25.07.95

THE DYNAMIC CHAOS IN A SYSTEM WITH THE MARKOV MAPPING AND THE EXPONENTIAL LAW OF EXIT FROM METASTABLE STATE

R.L. Stratonovich

The special kind of the metastable state and the fluctuational exit from it are considered. The process in the system is near to the auto-stochastic process (the dynamic chaos) described by extending the Markov mapping if life-time of the state is great. It is shown that the exit law is exponential. Thus the process of the metastable state exit is another example of the exponential exit along with the potential well exit considered in the diffusional Markov exit theory.



Стратонович Руслан Леонтьевич - родился в 1930 году в Москве. Окончил физический факультет Московского государственного университета (1953). После окончания аспирантуры при физическом факультете МГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание звания кандидата физико-математических наук в области теории флуктуаций (1956), а также докторскую диссертацию (1965), посвященную условным марковским процессам и оптимальной нелинейной фильтрации. Автор монографий «Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике», «Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления», «Принципы адаптивного приема», «Теория информации» и «Нелинейная неравновесная термодинамика». Опубликовал большое число научных статей по вышеуказанным направлениям. Лауреат Ломоносовской премии МГУ, Лауреат Государственной премии СССР, Заслуженный профессор МГУ.



МЕХАНИЗМЫ РОЖДЕНИЯ СТРАННОГО НЕХАОТИЧЕСКОГО АТТРАКТОРА В ОТОБРАЖЕНИИ КОЛЬЦА С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, О.В. Сосновцева

Приведены результаты численного моделирования динамики двумерного отображения кольца с внешним квазипериодическим воздействием на плоскости управляющих параметров. Установлены механизмы образования режима странного нехаотического аттрактора и его грубость по отношению к влиянию внешнего шума. Результаты получены с использованием метода построения бифуркационных диаграмм, анализа фазовых портретов аттракторов, расчета автокорреляционных функций, дополненных применением метода рациональной аппроксимации.

Введение

В последние годы внимание исследователей привлекли автоколебательные системы с бигармоническим воздействием и их дискретные модели в виде отображений с квазипериодическим воздействием. Бигармоническое воздействие позволяет задать извне фиксированное иррациональное число вращения (соотношение частот воздействия) и тем самым обеспечить грубое эргодическое квазипериодическое движение T^2 , исключив явления синхронизации на T^2 при вариации параметров. С увеличением параметра нелинейности системы или амплитуды воздействия реализуется переход к хаосу через разрушение эргодического двумерного тора. Бифуркационный механизм такого перехода имеет свои особенности. Как показали исследования ряда авторов [1-9], в системах, о которых идет речь, переходу к хаосу часто предшествует возникновение режима так называемого странного нехаотического аттрактора (СНА). По определению Гребоджи и др. [1], странным аттрактором называется притягивающее предельное множество в фазовом пространстве системы не состоящее из конечного числа точек и не являющееся кусочно-дифференцируемым. При этом «странность» и «хаотичность» являются различными характеристиками аттрактора и не обязательно сопутствуют друг другу. Аттрактор может иметь фрактальную структуру и дробную размерность Хаусдорфа (то есть быть странным) и при этом экспоненциальное разбегание траекторий и перемешивание на нем могут отсутствовать (то есть аттрактор может быть нехаотическим). В спектре ляпуновских показателей траекторий, принадлежащих СНА, нет положительного показателя, что позволяет отличить странный нехаотический аттрактор от странного хаотического аттрактора (СХА). Труднее отличить СНА от квазипериодического движения, однако в последние годы разработан ряд методов

позволяющих сделать это с достаточной степенью достоверности, например методы предложенные в [2,10,11].

В настоящей работе рассматривается разрушение эргодического двумерного тора, сценарии возникновения СЧА и переход к хаосу в модельном отображении кольца с квазипериодическим внешним воздействием.

1. Исследуемая модель

Модельное отображение кольца с квазипериодическим воздействием*, записанное в автономной форме с помощью введения дополнительной переменной $Z_n = \omega n$ (текущая фаза воздействия), имеет вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Omega - [K/(2\pi)]\sin(2\pi x_n) + \gamma y_n + A\cos(2\pi z_n), \quad \text{mod } 1, \\y_{n+1} &= \gamma y_n - [K/(2\pi)]\sin(2\pi x_n), \\z_{n+1} &= z_n + \omega, \quad \text{mod } 1.\end{aligned}\tag{1}$$

При сильном сжатии (малых значениях параметра γ) динамика этого отображения может не отличаться от динамики одномерного необратимого отображения окружности с квазипериодическим воздействием. Однако отображение (1) является обратимым (диффеоморфизмом), что позволяет использовать полученные для него результаты применительно к дифференциальным системам. Для реализации режима грубого эргодического двумерного тора параметр Ω фиксировался равным 0.5. Тем самым из рассмотрения исключался режим трехчастотных квазипериодических колебаний T^3 . При $\Omega=0.5$ в автономном отображении кольца существует цикл периода 2 (резонанс на торе с числом вращения 1/2). При квазипериодическом воздействии возникает двухобходная инвариантная кривая. Параметр диссипации γ выбирался равным $\gamma = 0.01$, что обеспечивало сильное сжатие. Частота воздействия, задающая второе (внешнее) число вращения, фиксировалась равной золотому сечению $\omega = \omega_G = 0.5[0.5^{1/2} - 1]$. Динамика системы исследовалась на плоскости параметров $A-K$, где A - амплитуда воздействия, K - параметр нелинейности.

2. Бифуркационная диаграмма системы

На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма системы (1) на плоскости управляющих параметров $A-K$. При вариации параметров A и K в системе наблюдались следующие бифуркации динамических режимов:

1 - бифуркация объединения частей двухобходного аттрактора (линия l_1). Как оказалось, эта бифуркация наблюдается как в области хаоса (объединение лент СЧА), так и в области квазипериодических движений. При объединении частей двухобходной инвариантной кривой образуется СЧА;

2 - бифуркация рождения СЧА в результате объединения двух сосуществующих в фазовом пространстве квазипериодических аттракторов (линия l_2);

3 - фрактализация инвариантной кривой с переходом к режиму СЧА на линии l_3 (пунктир);

* Гармоническое воздействие $A\cos(2\pi\omega n)$ с иррациональной частотой ω в дискретной системе (1) соответствует бигармоническому воздействию в дифференциальной системе. Следуя ранее опубликованным работам [1-11], мы будем называть такой вид воздействия квазипериодическим (примечание авторов).

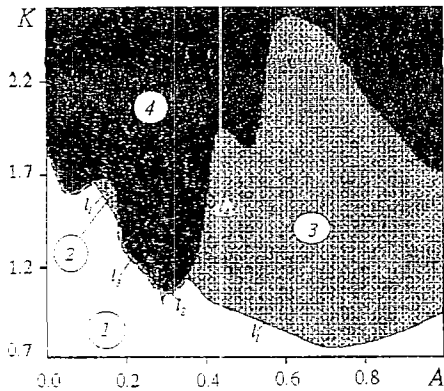


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1) на плоскости параметров «амплитуда воздействия A - параметр нелинейности K »: l_1 - линия объединения двух частей инвариантной кривой; l_2 - линия объединения двух инвариантных кривых; l_3 - линия разрушения инвариантной кривой в результате фрактализации; l_4 - граница хаоса; 1 - область квазипериодического режима; 2 - область СНА; 3 - область, в которой существует либо СНА, либо кусочно-дифференцируемое множество, не гомеоморфное тору; 4 - область СХА

4 - переход от режима СНА к режиму СХА на линии l_4 , сопровождающийся появлением положительного показателя в спектре ляпуновских показателей системы (1).

На бифуркационной диаграмме отмечены области различных динамических режимов. В области 1 существует всюду дифференцируемая инвариантная кривая T^2 , диффеоморфная окружности. Область 2 - область существования СНА. В области 3 может наблюдаться как режим СНА, так и кусочно-дифференцируемое множество, не являющееся ни T^2 , ни СНА. Область 4 соответствует хаотической динамике. Глядя на бифуркационную диаграмму можно выделить четыре сценария перехода от гладкой инвариантной кривой к СНА и хаосу, наблюдающиеся при различных амплитудах A с ростом параметра нелинейности K . Рассмотрим подробнее эти четыре сценария.

3. Сценарии возникновения странного нехаотического и хаотического аттракторов при разрушении инвариантной кривой

Рассмотрим процесс разрушения инвариантной кривой при вариации параметра K и фиксированном значении $A=0.15$. Как видно из бифуркационной диаграммы на рис. 1, при этом значении амплитуды воздействия разрушение квазипериодического режима происходит на линии l_1 при объединении частей двухобходной инвариантной кривой. Объединение частей аттрактора происходит в тот момент, когда в результате искажения формы инвариантной кривой с ростом K происходит ее касание в какой-то точке седловой инвариантной кривой, разделяющей части аттрактора, после чего седловое квазипериодическое движение разрушается, а части притягивающей инвариантной кривой объединяются. Подобная бифуркация была впервые описана в [9].

На рис. 2,а,б представлены ZX-проекции аттракторов до (рис. 2,а) и после (рис. 2,б) бифуркации объединения частей инвариантной кривой при $K=1.56035$ и $K=1.56040$, соответственно. На вид они мало отличаются. Уверенно диагностировать бифуркацию объединения лент можно, используя изображение фазовых точек через итерацию. В этом случае до бифуркации получаем изображение только части аттрактора (рис. 2,в), а после бифуркации - полное изображение аттрактора (рис. 2,г). На рис. 2,д,е представлены графики абсолютной величины автокорреляционной функции $|\psi_x(\tau)|$ до (см. рис. 2,д) и после (см. рис. 2,е) бифуркации объединения частей инвариантной кривой. Можно видеть, что автокорреляционная функция чувствительна к бифуркации объединения частей аттрактора, в результате которой возникает случайная компонента движения, связанная с нерегулярными переходами фазовой точки между частями аттрактора. Наличие таких переходов приводит к спаданию автокорреляционной функции (см. рис. 2,е).

После бифуркации объединения частей инвариантной кривой образуется аттрактор, не являющийся кусочно-дифференцируемым множеством и,

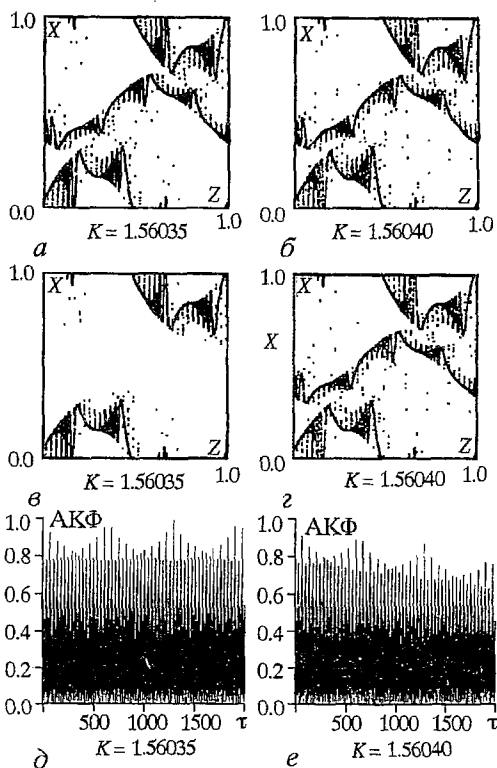


Рис. 2. Полные ZX-проекции аттракторов при амплитуде воздействия $A=0.15$ до бифуркации объединения частей инвариантной кривой (а) и после объединения (б); в, з - ZX-проекции тех же аттракторов, полученные при изображении фазовой точки через итерацию; д, е - графики абсолютной величины автокорреляционной функции до и после бифуркации объединения частей инвариантной кривой, соответственно

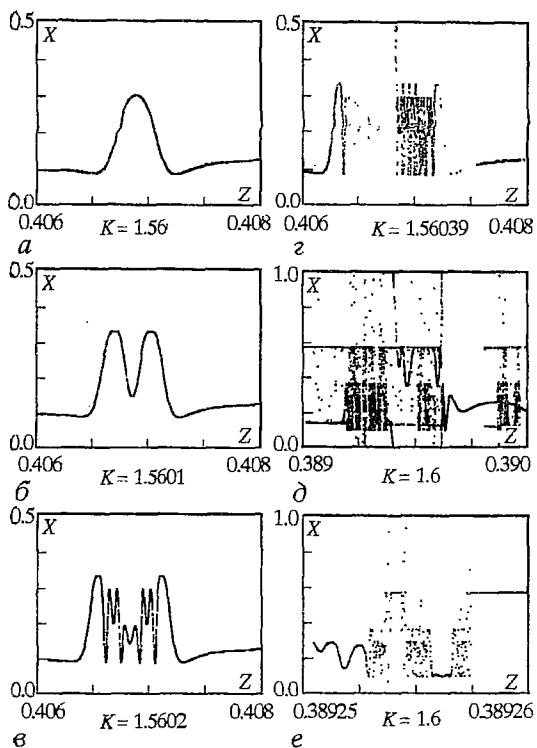


Рис. 3. Эволюция фрагмента инвариантной кривой при амплитуде воздействия $A=0.15$ с ростом параметра нелинейности

следовательно, представляющий собой странный аттрактор. Так как старший ненулевой ляпуновский показатель λ_{\max} остается еще отрицательным, то возникающий аттрактор есть СНА. На рис. 3, а-з представлена эволюция фрагмента инвариантной кривой с ростом K , предшествующая бифуркации объединения частей. Наблюдается возникновение мелкомасштабной структуры складок на инвариантной кривой. Развитие этих складок и приводит к касанию с седловой инвариантной кривой и объединению частей аттрактора. На рис. 3, д и 3, е представлены два разномасштабных фрагмента СНА при $K=1.60$, дающих представление о его «внутреннем устройстве». С ростом K структура аттрактора продолжает усложняться и при $K \approx 1.685$ старший ненулевой ляпуновский показатель становится положительным, что соответствует переходу от СНА к СХА.

Для подтверждения существования СНА при $K \in [1.5604; 1.685]$ был использован метод рациональной аппроксимации Пиковского - Фойдель [10]. Метод состоит в следующем: рассматривается рациональное приближение числа вращения $\omega_k = F_k / F_{k+1}$, где F_k и F_{k+1} - последовательные члены основного ряда Фибоначчи. Рациональной аппроксимацией аттрактора называется множество точек $X_n(Z_0)$, где Z_0 - начальная фаза воздействия; $Z \in [0; 1/F_{k+1}]$. Если рациональная аппроксимация аттрактора не является дифференцируемым множеством на всем интервале $Z_0 \in [0; 1/F_{k+1}]$ при $k \rightarrow \infty$ (реально при достаточно больших k), то соответствующий аттрактор при $\omega = \omega_C$ является странным (и

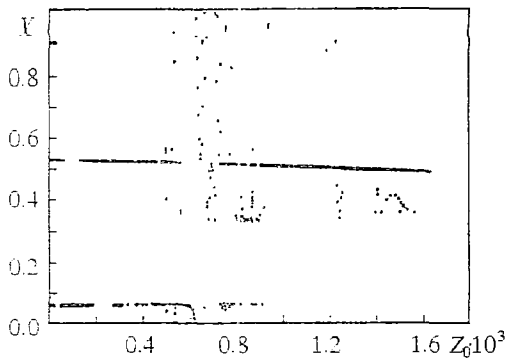


Рис. 4. Рациональная аппроксимация аттрактора для $A=0.15$, $K=1.60$, $\omega_k=377/610$

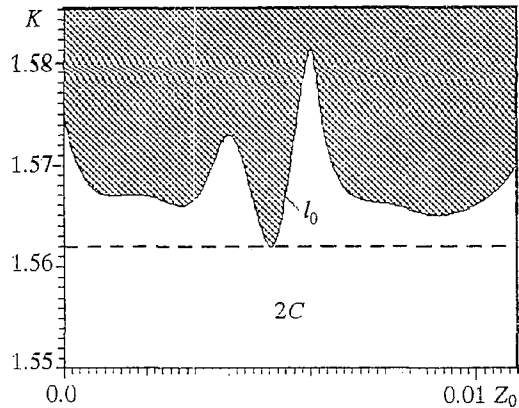


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров «начальная фаза воздействия Z_0 - параметр нелинейности K » для $A=0.15$ и рационального приближения числа вращения $\omega_k=55/89$

нехаотическим при отсутствии положительного ляпуновского показателя). Если при вариации Z_0 наблюдаются бифуркации предельного множества, то рациональная аппроксимация аттрактора $X_n(Z_0)$ не может быть дифференцируемым множеством всюду на $[0; 1/F_{k+1}]$. Следовательно, наличие бифуркаций при изменении Z_0 свидетельствует о существовании странного аттрактора в исходной системе.

На рис. 4 представлена рациональная аппроксимация аттрактора при $A=0.15$, $K=1.60$ для $\omega_k=377/610$. Множество $X_n(Z_0)$ очевидно не дифференцируемо. Оно остается недифференцируемым и при более точных рациональных аппроксимациях. На рис. 5 представлена бифуркационная диаграмма режимов на плоскости параметров Z_0 - K для рационального приближения числа вращения $\omega_k=55/89$. На линии l_0 происходит жесткий переход от цикла периода два ($2C$) на одноперiodический цикл (C). Далее (в заштрихованной области) наблюдается множество различных бифуркаций, образующих сложную структуру бифуркационных линий. Таким образом, при $K > K_1 \approx 1.562$ наблюдаются бифуркации предельного множества точек при вариации Z_0 . Следовательно, в этой области значений K существует странный аттрактор. При $K < K_2 \approx 1.685$ он является нехаотическим. Полученная методом рациональной аппроксимации нижняя граница области СНА несколько превышает значение K , при котором происходит бифуркация объединения частей инвариантной кривой. Причиной этого, по-видимому, является конечная точность рационального приближения числа вращения.

В сечении $A=0.3$ бифуркационной диаграммы рис. 1 для значений K , меньших некоторого значения $K_1 \approx 1.046$, в фазовом пространстве системы существуют две двухобходные инвариантные кривые T_1^2 и T_2^2 , обладающие взаимной симметрией относительно замены $X \rightarrow -X$, $Z \rightarrow 1/2 + Z$. При $K = K_1$ происходит бифуркация объединения двух инвариантных кривых, аналогичная по своему механизму ранее рассмотренной бифуркации объединения частей двухобходной инвариантной кривой. В результате этой бифуркации также возникает СНА. При $K > K_2 \approx 1.0698$ старший ненулевой ляпуновский показатель становится положительным и образуется СХА. На рис. 6, а представлены ZX -проекции аттракторов T_1^2 и T_2^2 до их объединения и график абсолютной величины автокорреляционной функции, соответствующей движению на этих аттракторах. На рис. 6, б приведен странный нехаотический аттрактор, образующийся в результате объединения T_1^2 и T_2^2 и

соответствующий график автокорреляционной функции. Рис. 6, в иллюстрирует режим слабого хаоса. Автокорреляционная функция демонстрирует чувствительность к бифуркации объединения аттракторов, после которой она начинает спадать.

Сценарий разрушения инвариантной кривой при $A=0.4$ так же как и при $A=0.15$ связан с бифуркацией объединения частей двухобходной инвариантной кривой, в результате которой образуется СНА. Эта бифуркация наблюдается при $K=K_1 \approx 1.0310$. Однако, при дальнейшем увеличении K СНА может вырождаться в кусочно-дифференцируемое множество, которое трудно отличить от СНА. На рис. 7 наблюдается только одна бифуркация, состоящая в жестком переходе с двухпериодического цикла $2C$ на однопериодический цикл C . Бифуркации при вариации Z_0 наблюдаются в ограниченной области изменения $K \in [K_1; K_2]$, где $K_2 \approx 1.0455$. Найденная таким способом нижняя граница существования СНА хорошо соответствует результатам наблюдения фазовых проекций. Значение K , при котором происходит бифуркация объединения частей инвариантной кривой, получено с помощью построения фазовых проекций с изображением точек через итерацию. Эта кривая практически совпадает с нижней границей СНА, полученной с помощью построения бифуркационной диаграммы для рационального приближения ω_C . На рис. 8 представлена рациональная аппроксимация аттрактора. Ее характер подтверждает наличие режима СНА в

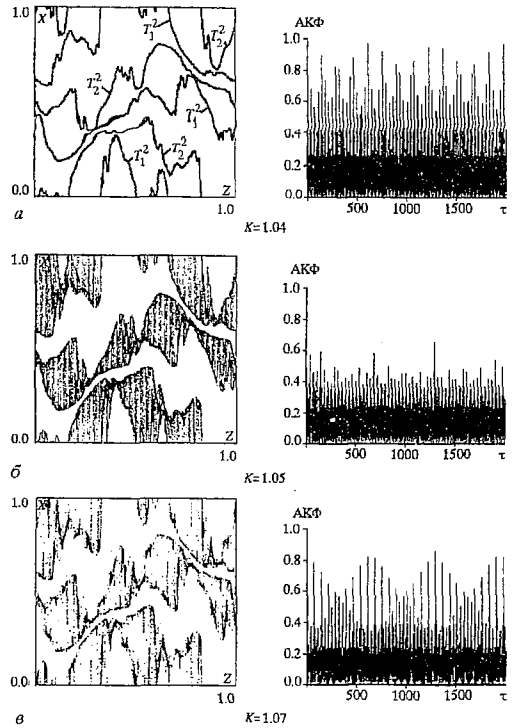


Рис. 6. ZX-проекции фазовых портретов и соответствующие графики абсолютной величины автокорреляционных функций для режимов, наблюдающихся при $A=0.3$ и различных K : а - две взаимно-симметричные инвариантные кривые, б - СНА, в - хаос

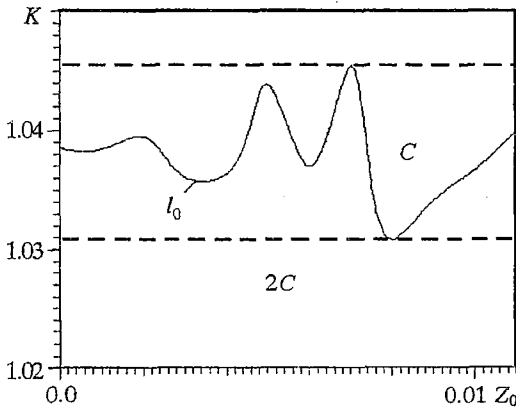


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров «начальная фаза воздействия Z_0 - параметр нелинейности K » для $A=0.4$ и рационального приближения числа вращения $\omega_k=55/89$

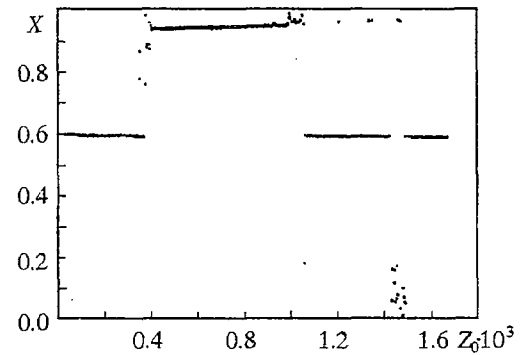


Рис. 8. Рациональная аппроксимация аттрактора для $A=0.4, K=1.04, \omega_k=377/610$

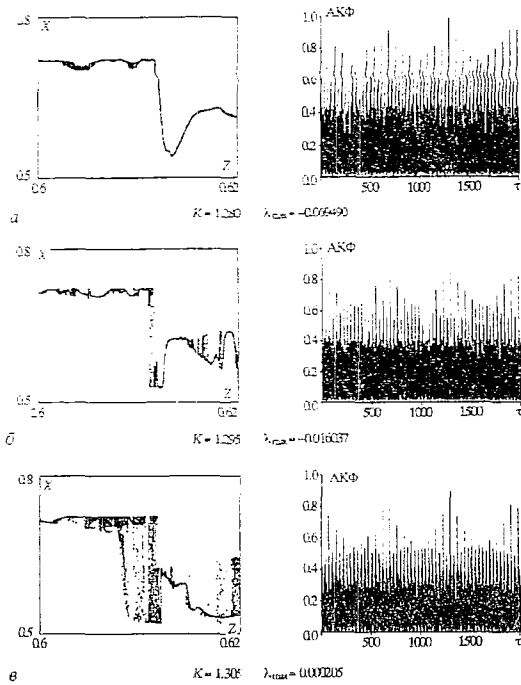


Рис. 9. Фрагменты ZX-проекции аттракторов и соответствующие графики абсолютной величины автокорреляционных функций для $A=0.2$ при различных K : а - квазипериодический режим, б - режим СНА, в - хаос

ляпуновский показатель становится положительным при $K=K_2 \approx 1.305$. В интервале $K \in [K_1; K_2]$ существует СНА. Он возникает не в результате какой-либо бифуркации, а эволюционным путем в результате фрактализации инвариантной кривой. На рис. 9 представлены небольшие фрагменты ZX-проекции аттрактора и соответствующие графики модуля автокорреляционной функции для гладкой инвариантной кривой (рис. 9, а), странного нехаотического аттрактора (рис. 9, б) и хаотического аттрактора на пороге его возникновения (рис. 9, в). На рисунках приведены значения старшего ненулевого ляпуновского показателя λ_{\max} . Автокорреляционная функция в данном случае слабо изменяется с образованием СНА, так как он формируется эволюционным путем.

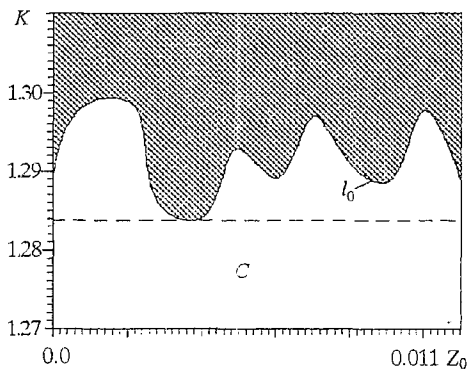


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров $Z_0 - K$ для $A=0.2$ и рационального приближения числа вращения $\omega_1=55/89$

интервале $[K_1; K_2]$. Старший ненулевой ляпуновский показатель становится положительным лишь при $K=K_3 \approx 1.520$.

Однако, СНА может возникать и без помощи бифуркации объединения частей инвариантной кривой или объединения различных инвариантных кривых. Об этом свидетельствует сценарий разрушения инвариантной кривой в сечении $A=0.2$ бифуркационной диаграммы рис. 1. Первоначально гладкая инвариантная кривая с ростом K искажается. Возникают все более мелкие складки. Происходит так называемая фрактализация тора, описанная еще в работе Канеко [12]. Производная $\partial X/\partial Z$ в различных точках инвариантной кривой растет, и при некотором $K=K_1 \approx 1.285$ предельное множество перестает быть дифференцируемым (и даже кусочно-дифференцируемым).

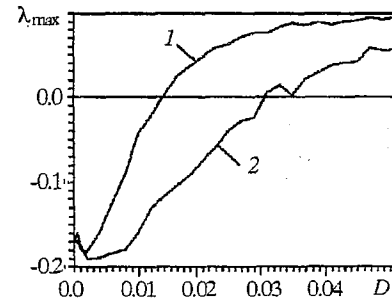
Разрушение инвариантной кривой происходит раньше, чем возникает экспоненциальное разбегание траекторий. При указанном значении амплитуды воздействия старший ненулевой

ляпуновский показатель становится положительным при $K=K_2 \approx 1.305$. В интервале $K \in [K_1; K_2]$ существует СНА. Он возникает не в результате какой-либо бифуркации, а эволюционным путем в результате фрактализации инвариантной кривой. На рис. 9 представлены небольшие фрагменты ZX-проекции аттрактора и соответствующие графики модуля автокорреляционной функции для гладкой инвариантной кривой (рис. 9, а), странного нехаотического аттрактора (рис. 9, б) и хаотического аттрактора на пороге его возникновения (рис. 9, в). На рисунках приведены значения старшего ненулевого ляпуновского показателя λ_{\max} . Автокорреляционная функция в данном случае слабо изменяется с образованием СНА, так как он формируется эволюционным путем.

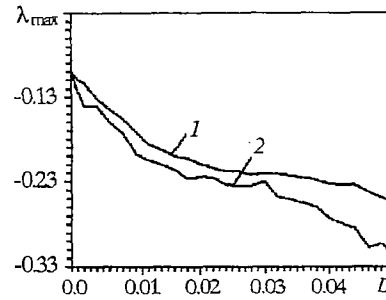
Для подтверждения существования режима СНА при $A=0.4$ была построена бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 10. На линии l_0 происходит жесткий переход от цикла $2C$ на какое-либо другое множество точек (чаще всего на цикл $3C$ периода 3). Выше этой линии существует область со сложной структурой бифуркационных линий. Для любого $K > K_1 \approx 1.284$ неизбежно наблюдаются бифуркации предельного множества при вариации Z_0 , что означает существование странного аттрактора в этой области значений K . Хаотическим же странный аттрактор становится только при $K \geq K_1 \approx 1.305$.

4. Влияние шума на режим СНА

Можно считать установленным, что переходу к хаосу при разрушении двухчастотных эргодических квазипериодических колебаний предшествует режим СНА, существующий в конечной области значений параметров. Однако, остается неясным вопрос о грубости режима СНА. Не приведет ли добавление слабого шума в отображение к хаотизации движения на СНА, то есть к переходу СНА \rightarrow СХА, проявляющемуся в возникновении положительного ляпуновского показателя? Для ответа на этот вопрос было предпринято исследование влияния слабого шума на динамику отображения (1) в режиме СНА. Воздействие в форме аддитивного нормального белого шума вводилось либо в первое уравнение (возмущение переменной X) либо в третье уравнение (возмущение фазы воздействия). Рассчитывалось значение старшего ненулевого ляпуновского показателя при различных интенсивностях шума D . Результаты, полученные для двух режимов СНА, представлены на рис. 11, а и б, соответственно. Кривые 1 относятся к случаю возмущения переменной X , а кривые 2 - к случаю возмущения фазы воздействия. При $A=0.15$, $K=1.60$ (см. рис.11, а) старший ляпуновский показатель λ_{\max} становится положительным лишь при достаточно сильном шумовом воздействии. Причиной хаотизации движения является увеличение «эффективного» значения параметра нелинейности. Такой эффект влияния флуктуаций хорошо известен в нелинейной динамике. При $A=0.4$ с ростом параметра нелинейности K в интервале $1.040 \leq K \leq 1.290$ старший ненулевой ляпуновский показатель ни только не становится положительным, но даже несколько уменьшается. К аналогичному результату приводит и добавление шума в отображение при $K=1.040$, что отражено на рис. 11, б. Таким образом, можно сделать вывод о грубости режима СНА, возникающего при разрушении эргодического тора T^2 по отношению к слабому шумовому воздействию.



а $A = 0.15$ $K = 1.60$



б $A = 0.4$ $K = 1.04$

Рис. 11. Зависимость старшего ненулевого ляпуновского показателя от интенсивности шумового воздействия на отображение (1) в режиме СНА при значениях параметров $A=0.15$, $K=1.60$ (а) и $A=0.4$, $K=1.04$ (б). Кривые 1 соответствуют случаю введения шума в первое уравнение отображения (1), кривые 2 соответствуют случаю введения шума в третье уравнение отображения (1)

Выводы

На основании результатов проведенного исследования динамики отображения (1), а также результатов исследования отображения Хенона с квазипериодическим воздействием и результатов других авторов по исследованию систем подобного типа [2,4,5,9] можно заключить, что переходу к хаосу при разрушении эргодических квазипериодических колебаний обязательно предшествует режим странного нехаотического аттрактора. Отображение (1) демонстрирует три возможных сценария формирования СНА при разрушении

инвариантной кривой: 1 - бифуркация объединения частей квазипериодического аттрактора; 2 - бифуркация объединения двух квазипериодических аттракторов; 3 - фрактализация тора с эволюционным переходом к режиму СНА. Установлена чувствительность автокорреляционной функции к переходу в режим СНА при первом и втором сценариях перехода. Показана структурная устойчивость СНА, возникающего при разрушении эргодического тора к действию слабого аддитивного шума. Примененный в работе метод рациональной аппроксимации Пиковского - Фойдель показал свою эффективность при диагностике СНА и границ его существования. Однако, следует отметить существование ряда нерешенных проблем, касающихся разрушения эргодических квазипериодических движений и перехода к СНА и хаосу. К ним относится вопрос о роли седловых движений в формировании хаоса (является ли хаос квазитиперболическим?), о возникновении СНА при разрушении эргодического трехмерного тора T^3 , о бифуркационной структуре области синхронизации на T^3 и бифуркационных механизмах синхронизации в области СНА и т.д. Отмеченные вопросы могут служить темой дальнейших исследований.

Пользуемся возможностью поблагодарить Ju.Kurths, A.Пиковского и U.Feudel за обсуждение результатов работы и помощь в проведении расчетов.

Работа частично финансировалась за счет средств Международного научного фонда (грант NR0000) и Госкомитета по высшему образованию России (грант 93-8.2-10).

Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica. 1984. Vol.13D. P.261.
2. Romeiras F.J., Bondeson A., Ott E., Antonsen Th.M., Grebogi C. Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors // Physica. 1987. Vol.26D. P.277.
3. Romeiras F.J., Ott E. Strange nonchaotic attractors of the damped pendulum with quasiperiodic forcing // Phys. Rev. 1987. Vol.35A, № 10. P.4404.
4. Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // Phys.Rev. 1989. Vol.9A, № 5. P.2593.
5. Kapitaniak T., Ponce E., Wojewoda J. Route to chaos via strange nonchaotic attractors // J.Phys. 1990. Vol.23A. P.L383.
6. Brindley J., Kapitaniak T., El Noschie M.S. Analytical conditions for strange chaotic and nonchaotic attractors of the quasiperiodically forced van der Pol equation // Physica. 1991. Vol. 51D. P.1.
7. Kapitaniak T. Generating strange nonchaotic trajectories // Phys.Rev. 1993. Vol. 47E, №2. P.1408.
8. Kapitaniak T., Wojewoda J. Attractors of quasiperiodically forced systems // World Scientific. 1993. Series A. Vol.12.
9. Heagy J.F., Hammel S.M. The birth of strange nonchaotic attractors // Physica. 1994. Vol. 70D. P.140.
10. Pikovsky A.S., Feudel U. Characterizing strange nonchaotic attractors. Preprint Nld-002. Universitat Potsdam, 1994.
11. Pikovsky A.S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // J.Phys. 1994. Vol. 27A. P.5209.
12. Kaneko K. Fractalization of torus // Progr.Theor.Phys. 1984. Vol.71, № 5. P.1112.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 28.12.94
после переработки 02.03.95

MECHANISMS OF STRANGE NONCHAOTIC ATTRACTOR BIRTH IN THE RING MAP WITH QUASIPERIODIC EXCITATION

V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtzeva

The results of computer simulation of the dynamic of two-dimensional ring map with quasiperiodic excitation are represented on the control parameter plane. The mechanisms of the strange nonchaotic attractor regime appearance and its roughness in relation to external noise addition are established. The results were obtained using a method of bifurcational diagram drawing, analysis of attractor phase portraits, autocorrelation function calculation, with addition of rational approximation method.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна - родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), аспирантуру на кафедре радиофизики СГУ и защитила диссертацию на степень кандидата физико-математических наук (1986). В настоящее время является доцентом кафедры радиофизики Саратовского университета. Имеет 27 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



Сосновцева Ольга Владимировна - родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Работала инженером в НИИ механики и физики при Саратовском университете (1989-1992). В настоящее время является аспиранткой кафедры радиофизики СГУ. Имеет 5 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ХАОСОМ

И.М. Старобинец, В.А. Угриновский

Предлагается метод управления траекториями на странном аттракторе, позволяющий переводить их в заданное неустойчивое состояние с помощью малых возмущений параметров. В отличие от классической процедуры Отта - Гребоджи - Йорке, данный метод основан на дискретном и непрерывном принципах максимума и позволяет оптимизировать среднее время достижения управления. Исследуется случай многомерного управления. Предложенный подход апробируется в ряде моделей, как дискретных, так и непрерывных.

Введение

Данная статья посвящена некоторым вопросам, относящимся к задаче управления хаосом. Несколько лет назад Отт, Гребоджи и Йорке (OGY) предложили метод управления хаотическими динамическими системами, позволяющий стабилизировать одну или несколько неустойчивых периодических орбит, погруженных в хаотический аттрактор, с помощью малых (зависящих от времени) возмущений управляющего параметра [1]. Этот метод привлек внимание многочисленных исследователей в различных областях науки. Существует уже большое число примеров успешного управления хаосом в задачах механики жидкостей [2], физиологии [3], лазерной физики [4], химической кинетики [5] и др. Позднее OGY-метод был теоретически развит для систем с запаздывающими координатами [6], а также использован в многомерных системах [7, 8].

Все перечисленные работы базируются на OGY-методе, использующем уравнения, линеаризованные в окрестности требуемой неподвижной точки или периодической орбиты. Таким образом, если система находится далеко от искомого состояния, управление не применимо: необходимо ждать, пока точка попадет в малую окрестность этого состояния, и лишь затем включать управление. Поэтому одна из важнейших характеристик - среднее время достижения управления из произвольной начальной точки - может оказаться очень велико. Задача оптимизации управления хаосом к настоящему времени исследована весьма слабо. Так называемый «тагетинг-метод» [9] хотя и примыкает к данной проблеме, однако управление в нем носит случайный характер. Отметим также, что OGY-метод и связанные с ним работы используют однопараметрическое управление, стремясь перевести систему на устойчивое многообразие желаемого состояния. Очевидно, что в сильно развитом хаотическом режиме сделать это далеко не

всегда возможно. Поэтому естественно возникает необходимость в методах многомерного управления хаосом.

В настоящей статье мы описываем иной подход, основанный на дискретном и непрерывном принципах максимума и оптимизирующий среднее время достижения управления даже на больших расстояниях от искомого состояния. В отличие от OGY-процедуры, в предлагаемом методе траектория направляется не к устойчивому многообразию, а непосредственно к требуемой цели. Такой подход позволяет использовать не только дискретное, но и непрерывное управление, и допускает как однопараметрический, так и многомерный вариант управления хаосом. Некоторые предварительные сведения, относящиеся к предлагаемому методу, анонсированы в заметках [10, 11].

В разделе 1 с помощью общей методики [12] получены необходимые условия оптимальности для дискретной задачи, моделирующей оптимизационный вариант управления хаосом. На их основе построены одномерный и многомерный численные алгоритмы, определяющие стратегию управления вдали от требуемого состояния и в его окрестности. В разделе 2 эти алгоритмы апробируются в задачах управления одномерными и двумерными отображениями и сравниваются по эффективности как между собой, так и с классическим методом OGY. В разделе 3 по схеме [12] строятся условия оптимальности в модели непрерывного управления хаосом, а на их основе - численная процедура квазинепрерывного управления. Данный алгоритм используется в задаче управления системой непрерывных уравнений типа Гинзбурга - Ландау. В разделе 4 сконструирован метод многомерного управления хаотическими системами. На примере управления цепочкой связанных одномерных отображений иллюстрируется преимущество такого подхода перед однопараметрическими алгоритмами.

1. Дискретное управление хаосом

Для простоты изложения рассмотрим задачу о стабилизации системы в неустойчивом состоянии равновесия x_F (предлагаемый подход может быть также применен к задаче стабилизации неустойчивых периодических орбит, торов и т.д.). Рассмотрим дискретную отображающую систему, стартующую из точки \bar{x} на аттракторе. Зафиксируем некоторое число шагов N и будем стремиться максимально приблизить точку за N шагов к требуемому состоянию x_F . Тогда можно сформулировать задачу оптимизации [10]

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = F(x_k, u_k), & x_0 = \bar{x}, \\ J(x) = (x_N - x_F)^2 \rightarrow \min, & U \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $x_F = F(x_F, 0)$, $U = \{|u_k| \leq \bar{u}\}$, а максимально допустимое управление \bar{u} , как правило, достаточно мало.

Будем далее использовать общую методику получения условий оптимальности, разработанную в [12]. Предположим, что $\{u_k^*, x_k^*\}$ - оптимальный процесс в задаче (1). Возьмем классическое однопараметрическое семейство вариаций управления

$$u_k^\varepsilon = u_k^* + \varepsilon \cdot \delta u_k,$$

соответствующую ему траекторию x_k^ε и приращение функционала J

$$\Delta J(\varepsilon) = J(x^\varepsilon) - J(x^*).$$

Тогда вариацию функционала J можно представить [11] в виде

$$\delta J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \Delta J(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u \delta \mathbf{u}_k,$$

где

$$\partial F(k) / \partial x = \partial F(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*) / \partial x, \quad \partial F(k) / \partial u = \partial F(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*) / \partial u, \quad \partial J / \partial x = \partial J(\mathbf{x}_N^*) / \partial x,$$

а ψ_k суть решения сопряженной системы [12]

$$\psi_k = \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial x, \quad \psi_N = \partial J / \partial x. \quad (2)$$

Из условия оптимальности $\delta J \geq 0$ получаем, что для всех k должны выполняться неравенства

$$\psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u \delta \mathbf{u}_k \geq 0,$$

откуда находим оптимальное управление

$$\mathbf{u}_k^* = -\bar{u} \{ \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u \} / | \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u | \quad (3)$$

(в случае, когда знаменатель отличен от нуля). В частности, если $m=1$, то

$$u_k^* = -\bar{u} \operatorname{sgn} \{ \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u \}, \quad (4)$$

либо должно быть

$$\psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u = 0$$

(так называемое сингулярное управление).

Теперь применим полученные условия оптимальности (3), (4) для построения алгоритмов управления. В начале ограничимся случаем $m=1$

(однопараметрическое управление) и ввиду малости \bar{u} будем рассматривать упрощенный вариант уравнений (1), полагая

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) u_k, \quad (5)$$

где $\mathbf{b} \in R^n$. Тогда сопряженная система (2) запишется как

$$\psi_k = \psi_{k+1} \partial f(\mathbf{x}_k^*) / \partial x, \quad \psi_N = 2(\mathbf{x}_N^* - \mathbf{x}_F),$$

поэтому из условий (4) находим оптимальное управление в виде

$$u_k^* = -\bar{u} \operatorname{sgn} \{ (\mathbf{x}_N^* - \mathbf{x}_F) [\prod_{i=k+1}^{N-1} \partial F(\mathbf{x}_i^*) / \partial x] \mathbf{b}(\mathbf{x}_k^*) \}, \quad (6)$$

либо реализуется сингулярное управление

$$(\mathbf{x}_N^* - \mathbf{x}_F) [\prod_{i=k+1}^{N-1} \partial F(\mathbf{x}_i^*) / \partial x] \mathbf{b}(\mathbf{x}_k^*) = 0. \quad (7)$$

На основе соотношений (6), (7) можно построить одношаговый ($N=1$) и многошаговый ($1 < N < \infty$) алгоритмы управления. Для $N=1$ используем

$$u_0^* = \begin{cases} -\bar{u} \operatorname{sgn} r_0, & |r_0| > \bar{u}, \\ -r_0, & |r_0| \leq \bar{u}, \end{cases} \quad (8)$$

где $r_0 = (f(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{x}_F) \mathbf{b}(\bar{\mathbf{x}}) / \|\mathbf{b}(\bar{\mathbf{x}})\|^2$. В случае $N > 1$ имеем более «дальновидную» (и, следовательно, более эффективную) стратегию управления (при $\bar{u} \ll 1$)

$$u_k^* = \begin{cases} -\bar{u} \operatorname{sgn} r_k, & |r_k| > \bar{u}, \\ -r_k, & |r_k| \leq \bar{u}, \quad k = 0, N-1, \end{cases} \quad (9)$$

где $r_k = (\mathbf{x}_N^0 - \mathbf{x}_F) W_k \mathbf{b}(\mathbf{x}_k^0) / \|W_k \mathbf{b}(\mathbf{x}_k^0)\|^2$, $W_k = \prod_{i=k+1}^{N-1} \partial f(\mathbf{x}_i^0) / \partial \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_{k+1}^0 = f(\mathbf{x}_k^0)$.

На практике, стратегия многошагового управления выглядит следующим образом [10]. Выбрав начальное управление $\bar{\mathbf{x}}$, мы последовательно для каждого $N=1, 2, \dots, N_{\max}$ с помощью (9) вычисляем управляющую серию u_k^* , а затем из (5) находим соответствующее $\mathbf{x}(N)$. Если при малом ε выполнено условие

$$\|\mathbf{x}(N) - \mathbf{x}_F\| < \varepsilon, \quad (10)$$

то данное N дает удовлетворительное управление, и мы используем его, применяя на конечной стадии одношаговый метод или метод OGY. Если (10) не достигается ни при каких $1 \leq N \leq N_{\max}$, то мы вовсе не применяем управления и делаем итерацию с $u_0=0$. Затем вся процедура повторяется.

2. Многошаговый метод: переход к глобальной управляемости

Эффективность алгоритмов (8), (9) была проанализирована на примерах систем, описываемых известными дискретными отображениями с хаотическим поведением траекторий. Наиболее наглядно специфика этих алгоритмов проявляется в случае одномерных отображений. Рассмотрим, например, задачу о стабилизации неустойчивого состояния равновесия в хорошо известном отображении отрезка

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - 2|x_k - 0.5| + u_k, & 0 \leq x \leq 1, \\ J(x) = (x - x_F)^2 \rightarrow \min, \end{cases} \quad (11)$$

где $|u| \leq \bar{u}$, $x_F = 2/3$.

При $u_k = 0$ система демонстрирует хаотическое поведение (рис.1,а). Применяя одношаговый алгоритм (8), получаем управление

$$u_k^* = \begin{cases} -\bar{u} \operatorname{sgn} r_k, & |r_k| > \bar{u}, \\ -r_k, & |r_k| \leq \bar{u}, \end{cases}$$

где $r_k = -1/3 + 2|x_k - 0.5|$, то есть мы имеем скорректированное отображение

$$x_{k+1} = f^*(x_k) = 1 - 2|x_k - 0.5| + u_k^*,$$

представленное на рис. 1, б. Для него точка x_F становится устойчивой, но она сосуществует с переходным хаосом, и система может долгое время случайно блуждать, прежде чем будет стабилизирована в x_F . Многошаговый алгоритм приводит к управлению (9), в котором r_k имеет вид

$$r_k = (x_N^0 - 2/3) \prod_{i=k+1}^{N-1} (x_i^0 - 0.5),$$

а x_i^0 соответствует $u_i=0$. Для некоторого N_{\max} последняя неустойчивая орбита исчезает, и отображение принимает вид, приведенный на рис. 1, в. Здесь более нет

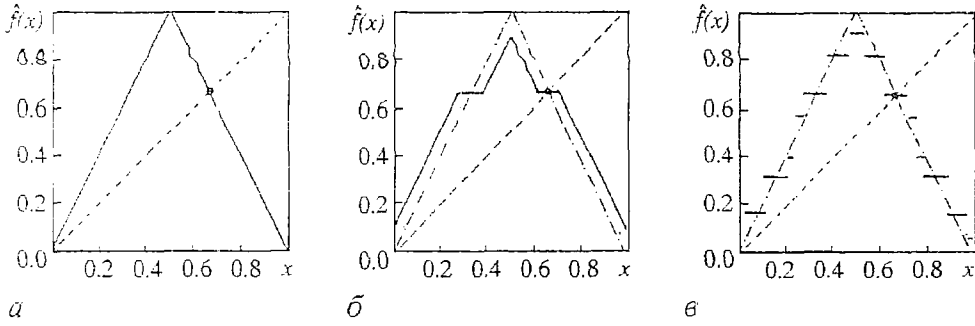


Рис. 1. Управляемое отображение (11): а - без управления; б - одношаговый метод - локальная управляемость, $u=0.1$; в - многошаговый метод - глобальная управляемость, $u=0.1$, $N_{\max}=5$

участков с экспоненциально разбегающимися траекториями: для любых начальных условий за конечное время $k \leq N_{\max}$ траектория стабилизируется в точке x_F . Данное явление можно трактовать как глобальную управляемость системы.

В качестве другой модели, позволяющей сравнить эффективность алгоритмов (8), (9), было выбрано двумерное отображение Хенона

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \xi - x_{1,k}^2 + \eta x_{2,k} + u_k, \\ x_{2,k+1} = x_{1,k}, \end{cases}$$

где $J(x) = (x - x_F)^2$, $|u| \leq \bar{u}$, $x_{F,1} = x_{F,2} = (\eta - 1)/2 + [(\eta - 1)^2 + 4\xi]^{1/2}$, $\xi = 1.4$, $\eta = 0.3$. (Заметим, что это отображение рассматривалось в работе [1] в качестве иллюстрации к методу OGY). Здесь одношаговое управление принимает вид (8), где

$$r_0 = \xi - \bar{x}_1^2 + \eta \bar{x}_2 - x_{F,1}.$$

N -шаговый алгоритм записывается соотношением (9), в котором

$$r_k = (x_N^0 - x_F) W_k^1 / |W_k^1|^2, \\ W_k^1 = \prod_{i=k+1}^{N-1} \begin{pmatrix} -2x_{1,i}^0 & \eta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов по этим алгоритмам представлены на рис. 2. Здесь также приводятся для сравнения данные, полученные для тех же параметров с помощью OGY-метода. Во всех случаях очевиден значительный выигрыш многошагового метода по сравнению с одношаговой процедурой и методом OGY.

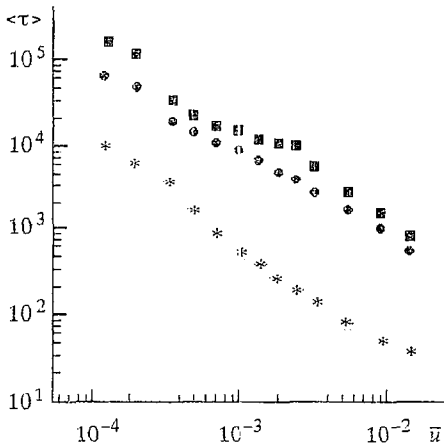


Рис. 2. Среднее время достижения управления $\langle \tau \rangle$ для отображения Хенона в зависимости от \bar{u} . \blacksquare - OGY-метод; \odot - одношаговый алгоритм (8); $*$ - многошаговый алгоритм (9) с $N_{\max}=30$

3. Непрерывное управление хаосом

Существующие к настоящему времени алгоритмы управления хаосом в непрерывных системах имеют дискретный характер, то есть позволяют использовать управление лишь в отдельные моменты времени (например, через период вынуждающей силы, или на секущей Пуанкаре). Однако в прикладных задачах чрезвычайно важной явилась бы возможность корректировать управление непрерывно (или достаточно часто) с тем, чтобы использовать его в полной мере.

Однако попытки получения таких алгоритмов на основе метода ОГУ серьезных успехов пока не принесли.

Мы рассмотрим непрерывный аналог задачи (1) и на основе метода вариаций [12] получим алгоритм квазинепрерывного управления. Предположим, что система задается дифференциальными уравнениями, и будем стремиться максимально приблизиться к требуемому состоянию \mathbf{x}_F за некоторое время T с помощью непрерывного управления $\mathbf{u}(t)$. Формулировка задачи примет вид

$$\begin{cases} dx/dt = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \\ J(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_F)^2 \rightarrow \min_{U}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $0 \leq t \leq T$, $U = \{\mathbf{u}(t) | \|\mathbf{u}(t)\| \leq \bar{u}\}$, $\varphi(\mathbf{x}_F, 0) = 0$.

Пусть $\{\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*\}$ - оптимальный процесс в задаче (12). Построим однопараметрическую вариацию управления

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \delta \mathbf{u}(t),$$

соответствующую ей траекторию \mathbf{x}^ε и приращение функционала J

$$\Delta J(\varepsilon) = J(\mathbf{x}^\varepsilon(T)) - J(\mathbf{x}^*(T)).$$

Тогда вариацию функционала J можно записать [11] в виде

$$\delta J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \Delta J(\varepsilon) = \int_0^T \psi(t) \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} \delta \mathbf{u}(t) dt,$$

где $\partial \varphi(t) / \partial \mathbf{x} = \partial \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) / \partial \mathbf{x}$, $\partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} = \partial \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) / \partial \mathbf{u}$, $\partial J / \partial \mathbf{x} = \partial J(\mathbf{x}^*(t)) / \partial \mathbf{x}$, а $\psi(t)$ - решение сопряженной системы [12]

$$d\psi/dt = -\psi \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{x}, \quad \psi(T) = \partial J(T) / \partial \mathbf{x}. \quad (13)$$

Условие оптимальности $\delta J \geq 0$ приводит к неравенству

$$\psi(t) \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} \delta \mathbf{u}(t) \geq 0$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Это дает выражение для оптимального управления

$$\mathbf{u}^*(t) = -\bar{u} \{ \psi(t) \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} \} / | \psi(t) \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} |,$$

справедливое при почти всех t (если знаменатель отличен от нуля).

В частности, если $m=1$, то для почти всех t справедливо

$$u^*(t) = -\bar{u} \operatorname{sgn} \{ \psi(t) \partial \varphi(t) / \partial u \}, \quad (14)$$

либо должно реализоваться особое управление

$$\psi(t) \partial \varphi(t) / \partial u = 0.$$

Теперь применим условие (14) для управления непрерывной системой вида

$$dx/dt = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u, \quad 0 \leq t \leq \Delta \tau,$$

где $\Delta \tau \ll 1$ (как правило, шаг интегрирования исходной системы). В этом случае сопряженная система (13) записывается как

$$d\psi/dt = -\psi \partial g / \partial \mathbf{x}, \quad \psi(\Delta \tau) = \partial J(\Delta \tau) / \partial \mathbf{x},$$

и ее решение

$$\psi(t) = \psi(\Delta\tau) \exp\left\{\int_t^{t+\Delta\tau} \partial g / \partial x d\tau\right\} \approx \psi(\Delta\tau)(E + \Delta\tau \partial g(t) / \partial x),$$

где E - единичная $(n \times n)$ -матрица. Поэтому (14) определяет управление

$$u^*(t) \approx -\bar{u} \operatorname{sgn}\left\{\partial J(\Delta\tau) / \partial x (E + \Delta\tau \partial g(t) / \partial x) \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\right\}. \quad (15)$$

Кроме того, заметем, что при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_F| \ll 1$

$$d\mathbf{x}/dt \approx \partial g(\mathbf{x}_F) / \partial x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \approx 0. \quad (16)$$

На основе (15), (16) строим алгоритм, использующий на интервале $[0, \Delta\tau]$ управление

$$u^* = \begin{cases} -\bar{u} \operatorname{sgn}\left\{\partial J^0(\Delta\tau) / \partial x (E + \Delta\tau \partial g^0(t) / \partial x) \mathbf{b}(\mathbf{x}^0(t))\right\}, & |r| > \bar{u}, \\ -r, & |r| \leq \bar{u}, \end{cases} \quad (17)$$

где $r = |\mathbf{b}(\mathbf{x})|^{-2} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \partial g(\mathbf{x}_F) / \partial x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F)$, а выражения $\partial J^0 / \partial x$, $\partial g^0 / \partial x$, \mathbf{x}^0 соответствуют управлению $u(t) = 0$. Этот алгоритм в дальнейшем включается в численную схему интегрирования системы.

Метод квазинепрерывного управления (17) был апробирован нами на примере системы уравнений

$$dw_j/dt = w_j - (1 + i\beta) |w_j|^2 w_j + \varepsilon(1 - ic)(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}), \quad j = \overline{1, M} \quad (18)$$

с периодическими условиями $w_0 = w_M$, $w_{M+1} = w_1$, моделирующей комплексное уравнение Гинзбурга - Ландау [13]. Делая замену

$$v_j = w_j \exp(i\beta t)$$

и добавляя управление, получаем систему

$$dv_j/dt = (1 + i\beta)(1 - |v_j|^2)v_j + \varepsilon(1 - ic)(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}) + b_j u, \quad j = \overline{2, M}, \quad (19)$$

где $b_1 = (1, 0)$; $b_j = (0, 0)$; $|u| \leq \bar{u}$.

Задачи о стабилизации неустойчивых периодических орбит ставились как задачи минимизации функционалов двух видов

$$J(v) = \sum_{j=1}^N (v_j - 1)^2 \quad \text{либо} \quad J(v) = (|v_1|^2 - 1)^2 + \sum_{j=2}^N (v_j - v_1)^2.$$

При решении были использованы как алгоритмы дискретного управления (для отображения на секущей Пуанкаре), так и квазинепрерывное управление (17).

Некоторые результаты численных расчетов представлены на рис. 3-5 (см. также [11]). На рис. 3 показана стабилизация в системе (18) периодической орбиты, имеющей одно неустойчивое собственное направление, с помощью непрерывного алгоритма (17). На рис. 4 продемонстрировано преимущество непрерывного управления перед дискретным для случая стабилизации неустойчивого тора в фазовом пространстве системы (19). Режим развитой стохастичности (см. рис. 4,а) удается частично стабилизировать с помощью дискретного управления (см. рис. 4,б) и полностью - с помощью непрерывного алгоритма (17) (см. рис. 4,в). Наконец, на рис. 5 изображен случай, когда даже с помощью непрерывного управления удается добиться лишь частичной стабилизации режима, имеющего несколько неустойчивых собственных

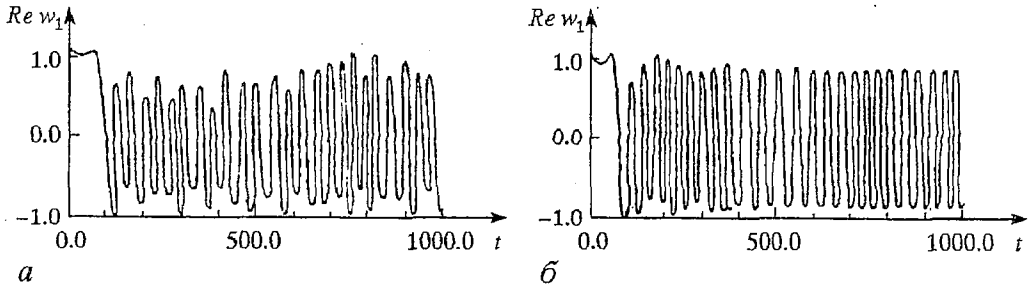


Рис. 3. Стабилизация периодической орбиты в системе (18) с $\beta=c=3^{1/2}$, $\epsilon=0.2$: *a* - реализация в отсутствие управления; *б* - траектория, стабилизированная квазинепрерывным управлением (17), $\bar{u}=0.01$

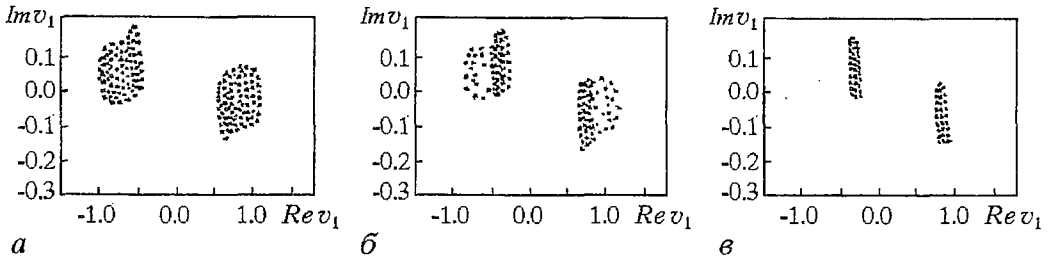


Рис. 4. Стабилизация тора в системе (19). Отображение Пуанкаре на секущей $Re v_M=0$: *a* - хаотический аттрактор, управление отсутствует; *б* - дискретное управление на секущей (частичная стабилизация); *в* - квазинепрерывное управление (17)

направлений. Видно, что управляемый режим (см. рис. 5, *б*) имеет более упорядоченную структуру, чем исходный неуправляемый (см. рис. 5, *а*). Это подтверждают и оценки фрактальной размерности соответствующих аттракторов.

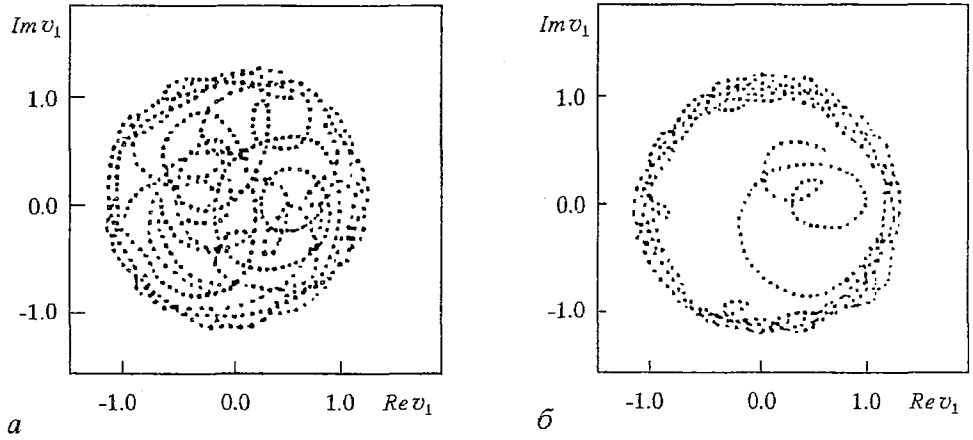


Рис. 5. Частичная управляемость в системе (19): *a* - проекция траектории на плоскость v_1 в случае развитого хаоса, управление отсутствует; *б* - то же для квазинепрерывного управления (17)

4. Многомерное управление

Заметим, что отсутствие полной управляемости в последнем примере вполне естественно. В случае развитой стохастичности неустойчивые инвариантные состояния могут иметь несколько (и даже много) неустойчивых собственных направлений, то есть несколько положительных характеристических показателей Ляпунова. Трудно гарантировать стабилизацию таких режимов с помощью

одномерного управляющего параметра. Естественно предположить, что стабилизации можно добиться, повышая размерность управления (что вполне допустимо с помощью предложенных выше методов).

Рассмотрим такую возможность на примере дискретной периодически замкнутой цепочки диффузионно связанных одномерных отображений отрезка $[0, 1]$

$$x_{k+1}^l = (1 - 4D)(1 - \bar{u}b^l)f(x_k^l) + D(\Delta x_k^l + 2) + \frac{1-4D}{2}(\bar{u} + u_k^l)b^l, \quad (20)$$

где $f(x) = \alpha x(1-x)$; $\Delta x^l = x^{l-1} - 2x^l + x^{l+1}$; $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ - вектор состояния; $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ - управление; $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^m)$ - весовой вектор, позволяющий использовать управление различной размерности (от 1-мерного при $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0)$ до m -мерного при $\mathbf{b} = (1/m^{1/2}, \dots, 1/m^{1/2})$).

При $\alpha = 3.83$ и $\mathbf{u} = 0$ в системе (20) существует странный аттрактор, содержащий неустойчивую неподвижную точку $\mathbf{x}_F = (x_F^1, \dots, x_F^m)$, $x_F^l = 0.735$, которую требуется стабилизировать, то есть

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F)^2 \rightarrow \min_U, \quad (21)$$

где $U = \{ |u_k^l| \leq \bar{u} \}$.

Используя в задаче (20), (21) одношаговую стратегию, на основе условий (3) получаем алгоритм многомерного управления

$$\mathbf{u}_k = \begin{cases} -\bar{u} \mathbf{r}_k / |\mathbf{r}_k|, & |\mathbf{r}_k| > \bar{u}, \\ -\mathbf{r}_k, & |\mathbf{r}_k| \leq \bar{u}, \end{cases} \quad (22)$$

где $\mathbf{r}_k^l = (1 - 4D)(1 - \bar{u}b^l)f(x_k^l) + 1/2(1-4D)\bar{u}b^l + D(\Delta x_k^l + 2) - x_F^l$.

При $m=1$ и малых \bar{u} ситуация аналогична той, что описана выше для задачи (11) в случае локальной управляемости (см. рис. 1, б). Из почти любых начальных условий, пройдя период переходного хаоса, траектория стабилизируется в требуемой точке. Заметим, однако, что при увеличении \bar{u} точка \mathbf{x}_F теряет почти всю свою область притяжения: система очень быстро выходит на периодический режим, изображенный на рис. 6, а, что связано с появлением при $\bar{u} \approx 0.04$ 6-кратного суперустойчивого цикла в отображении $x_k \rightarrow x_{k+1}$ (рис. 6, б). Подобная

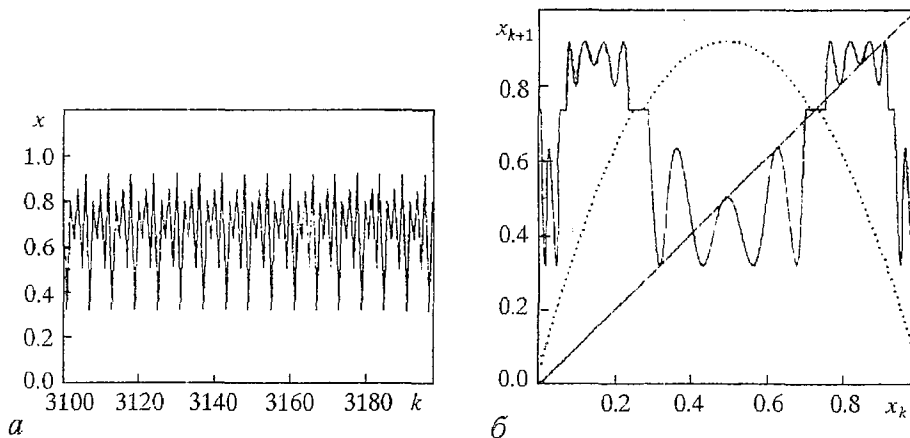


Рис. 6. Рождение устойчивого цикла в модели (20) при $m=1$: а - реализация x_k при $D=0.001$, $\bar{u}=0.04$; б - отображение $x_k \rightarrow x_{k+1}$ (пунктир) и его 6-я итерация (сплошная линия), k - номер итерации

картина наблюдается и при больших m , если \bar{u} достаточно велико, а управление одномерно (то есть все $u_k^1 = \dots = u_k^m = u_k$). На рис. 7, 8 изображены временные (по k при $l=1$) и пространственные (по l при $k=1000$) реализации системы (20). В первом случае в системе реализуется указанный выше 6-кратный цикл (см. рис. 7, а); кроме того, управление приводит к частичной пространственной синхронизации (см. рис. 7, б). Во втором случае появляется устойчивый цикл кратности 2 (см. рис. 8, а) и полная синхронизация в пространстве (см. рис. 8, б). Таким образом, за счет увеличения \bar{u} систему удается стабилизировать с помощью одномерного управления, однако не всегда в желаемом состоянии (подобная же ситуация, по-видимому, приводит к частичной стабилизации в задаче (19) из предыдущего раздела).

Если же \bar{u} мало ($\bar{u} \lesssim 0.02$), а $m > 1$, то разрушить хаотический режим в системе (20) посредством однопараметрического (одношагового) управления не удастся. В этом случае мы использовали управление соответствующей размерности m (то есть $\mathbf{b} = (1/m^{1/2}, \dots, 1/m^{1/2})$), задаваемое одношаговым алгоритмом (22). Этого оказалось вполне достаточно для стабилизации состояния \mathbf{x}_F (рис. 9). Естественно, что при этом среднее время достижения управления $\langle \tau \rangle_m$ растет с увеличением размерности системы m . В частности, проведенные расчеты

показывают, что для $\bar{u} = 0.02$. $\langle \tau \rangle_4 \approx 330$, $\langle \tau \rangle_5 \approx 2600$, $\langle \tau \rangle_6 \approx 22000$ и т.д. Однако, как следует из раздела 2 настоящей статьи, значения $\langle \tau \rangle_m$ можно существенно уменьшить, перейдя к многошаговой стратегии управления.

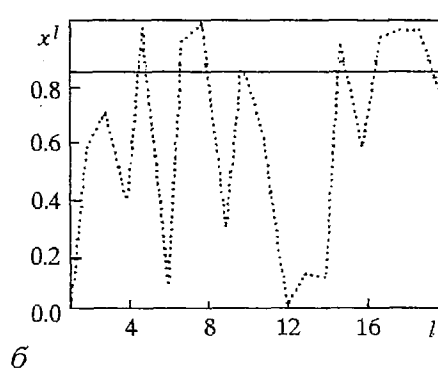
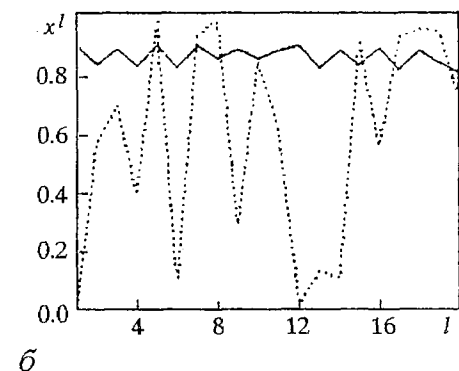
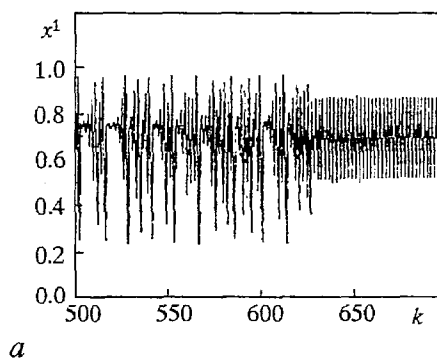
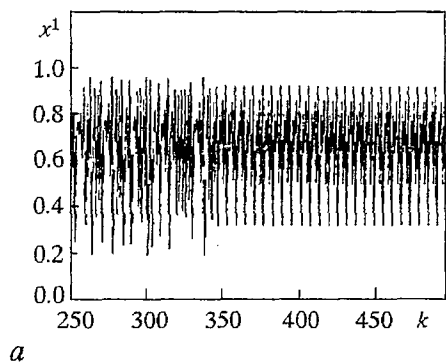


Рис. 7. Временная (а) и пространственная (б) реализации системы (20) при $m=20$, $D=0.001$, $\bar{u}=0.04$ (пунктирная линия - распределение начальных условий); k - номер итерации, l - номер отображения

Рис. 8. Временная (а) и пространственная (б) реализации системы (20) при $m=20$, $D=0.001$, $u=0.1$ (пунктирная линия - распределение начальных условий); k - номер итерации, l - номер отображения

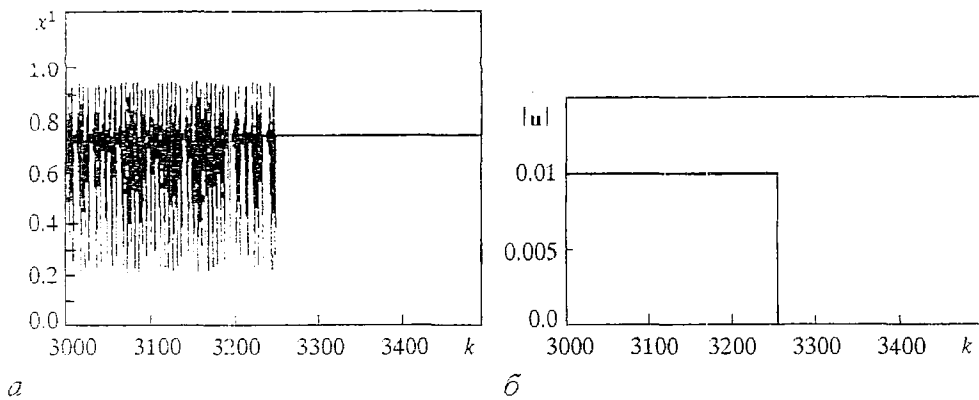


Рис. 9. Многомерное управление в системе (20) при $m=3$: а - реализация x_k^1 , $D=0.001$, $\bar{u}=0.01$; б - соответствующее распределение $|u_k|$; k - номер итерации

Авторы признательны М.И. Рабиновичу и Л.Н. Корзинову за интерес к данной работе и многочисленные полезные обсуждения.

Исследования, описанные в данной публикации, стали возможны, в частности, благодаря поддержке гранта NP2300 Международного научного фонда, Российского правительства и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94- 02- 03263).

Библиографический список

1. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64, № 11. P.1196.
2. Singer J., Wang Y., Bau H. Controlling chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol.66, № 9. P.1123.
3. Garfinkel A., Spano M., Ditto W., Weiss J. Controlling cardiac chaos // Science. 1992. Vol.257. P.1230.
4. Roy R., Murphy T., Maier T., Gills Z., Hunt E. Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68, № 9. P.1259.
5. Petrov V., Gáspár V., Masere J., Showalter K. Controlling chaos in the Belousov - Zhabotinsky reaction // Nature. 1993. Vol.361. P.240.
6. Dressler U., Nitsche C. Controlling chaos using delay coordinates // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68, № 1. P.1.
7. Aranson I., Levine H., Tsimring L. Controlling spatio-temporal chaos // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol.72, № 16. P.2561.
8. Sepulchre J., Babloyants A. Controlling chaos in a network of oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol.48, № 2. P.945.
9. Shinbrot T., Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Using small perturbations to control chaos // Nature. 1993. Vol.363. P.411.
10. Starobinets I., Pikovsky A. Multistep method for controlling chaos // Phys. Lett. A. 1993. Vol.181. P.149.
11. Starobinets I., Chugurin V. Optimization method for controlling chaos problems: theory and applications // Proc. SPIE's Photonic conf. Mobile Robots IX. USA, Boston. 1994. Vol.2352. P.38.
12. Казимиров В.И., Плотников В.И., Старобинец И.М. Абстрактная схема метода вариаций в необходимые условия экстремума // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1985. Т.49, № 1. С.141.

13. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Рождение многомерного хаоса в активных решетках // ДАН СССР. 1984. Т.283, № 3. С.596.

Институт прикладной физики РАН

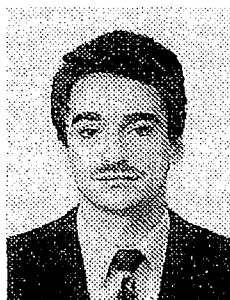
Поступила в редакцию 26.04.95

Научно-исследовательский
радиофизический институт

A DYNAMICAL METHOD FOR CONTROLLING CHAOS OPTIMIZATION

I.M. Starobinets, V.A. Ugrinovskii

A control method is presented to direct a trajectory on a strange attractor towards a desirable unstable set by small parameters perturbations. The method is alternative to the classical Ott - Grebogi - Yorke control procedure. The proposed approach is based on the discrete and continuous maximum principles and optimizes the mean time to achieve control. The case of multidimensional control is investigated. The proposed method is tested both in discrete models and continuous systems.



Старобинец Игорь Михайлович - родился в 1957 году в Горьком, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области теории оптимального управления динамическими системами (1986). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН, доцент Нижегородского государственного технического университета. Область научных интересов - динамические системы, пространственно-временной хаос, оптимальное управление, управление хаосом. Имеет свыше 50 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



Угриновский Валерий Аронович - родился в 1960 году в г.Хмельник Винницкой области, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области системного анализа (1990). Старший научный сотрудник Научно-исследовательского радиофизического института (в настоящее время - по контракту в Институте эволюции университета Хайфы, Израиль). Область научных интересов - теория обработки сигналов, теория стохастической устойчивости и управления, теория робастной устойчивости. Имеет свыше 30 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



STOCHASTIC RESONANCE AND ITS PROVENANCE

*M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock,
N.D. Stein, N.G. Stocks*

Stochastic resonance, in which the signal and/or signal/noise ratio in a nonlinear system can be enhanced by the addition of random fluctuations (noise) of appropriate intensity, is discussed. By revealing the relationship of stochastic resonance to earlier research, and especially to work by Debye in the 1920s, the phenomenon is set in a broad physical context. It is shown that the traditional techniques of statistical physics, for example linear response theory, are applicable to stochastic resonance and their implications for its range of occurrence are discussed.

1. Introduction

Stochastic resonance (SR) is a phenomenon of some topical interest in which a weak periodic signal in a nonlinear system can be optimally amplified by the addition of random fluctuations (noise) of appropriate intensity; even more surprisingly, the signal/noise ratio can often be enhanced as well. In its modern form [1,2] the concept of SR emerged from the ideas of Benzi et al. [3,4] and Nicolis [5]. They were seeking to account for the earth's periodic $\sim 10^5$ -year ice-age cycle in terms of the small variations, also of period $\sim 10^5$ years, in the earth's orbital eccentricity: SR provided a possible mechanism by which a weak periodic effect of this kind could be sufficiently amplified by environmental noise to exert a strong influence on the climate, as observed.

Since then SR, and other phenomena closely related to SR, have been found to have a remarkably wide range of occurrence. They have been observed or are to be anticipated in, for example: a Schmitt trigger [6]; a bistable ring laser [7]; a variety of electronic circuits [8] - [13]; a passive optically bistable [14]; a laser with saturable absorber [15]; a magnetoelastic ribbon [16]; a hybrid ESR device [17]; a magnetoresistive oscillator [18]; single-domain uniaxially anisotropic magnetic particles [19]; a bistable superconducting quantum interference device (SQUID) [20]; a quantum two-level system with ohmic dissipation [21]; a system with a cyclic variable [22]; and a tunnel diode [23]. Synchronization of otherwise random switchings between the states has been observed for a Brownian particle in a bistable optical trap [24] and also for a two-state defect that modulates conductance of a mesoscopic wire [25]. The SR-related phenomenon of noise-enhanced heterodyning has been demonstrated in an electronic model [26] and observed experimentally in an all-optical bistable system [27]. Although most of the work has related to bistable systems that can be characterised by coexisting attractors corresponding to the minima of a static bistable potential, it is now understood that SR is not by any means confined to such system. It has also been investigated: in monostable systems [11,22]; in a system with one point attractor and one chaotic attractor

[10]; for coexisting periodic attractors, yielding a high frequency form of SR [12,13]; in the transient dynamics of an evolving system [28]; and in a level-crossing detector [29]. In relation to biology, it has been proposed [30,31] that SR may be relevant to transmission of information by sensory neurons; the effects of neuron coupling have been analysed [32]; and SR in a crayfish mechanoreceptor has been observed and investigated [33]. Many of these examples are treated in the proceedings [1,2] of two recent topical conferences on SR.

Perhaps in part because of the context in which SR was discovered [3]-[5], it was treated from the outset as a major challenge in its own right, so that the theoretical development of the subject (see, for example, [34]-[39]) was undertaken almost on an *ab initio* basis, without drawing significantly on related work in condensed matter physics that had occurred much earlier. Consequently, the simplest, most direct and straightforward approach (classical linear response theory (LRT): see below) was applied [9] to SR only a few years after its discovery and, even then, did not meet with immediate acceptance. One of the aims of the present paper is to demonstrate the close connection between SR and earlier work, especially that of Debye [40], thus enabling SR to take its proper place in the context of other phenomena in physics. A fuller discussion of some of these ideas will be presented in [41].

2. A physical picture of stochastic resonance

To set the scene, we first discuss the SR in terms of the adiabatic approximation introduced by McNamara, Wiesenfeld and Ray [7] and McNamara and Wiesenfeld [34] in order to account for SR phenomena observed in a ring laser. A particular advantage of this approach is that it provides a simple and intuitively appealing physical picture of the mechanism of SR. We consider a Langevin equation of the type

$$\dot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + A \cos \Omega t + \xi(t), \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D \delta(t - t') \quad (1)$$

where D is the characteristic noise intensity and the potential $U(q)$ is assumed to be bistable, with local minima at the two coordinate values $q_{1,2}$ when $A=0$. When $A \neq 0$, a delta-shaped spike occurs in the power-spectrum of $q(t)$ at frequency Ω (and its overtones), and it is the increase in the height of this spike with D that signals the occurrence of SR. For small D , the fluctuations of q about $q_{1,2}$ are small compared to $q_2 - q_1$. Nevertheless, although the noise is weak on the average, there can occur, occasionally, outbursts large enough to cause switchings between the stable states. The probability W_{nm} of a switching from the n th to the m th state for a white-noise driven system was found by Kramers [42] to be of the activation type,

$$W_{nm} = \pi^{-1} [U''(q_n) |U''(q_s)|]^{1/2} \exp(-\Delta U_n / D), \quad \Delta U_n = U(q_s) - U(q_n). \quad (2)$$

Here, ΔU_n is the depth of the n th well of the potential $U(q)$ measured relative to the value $U(q_s)$ of $U(q)$ at its local maximum q_s , between the minima of $U(q)$ at q_1 and q_2 , $U'(q_s)=0$ and $U''(q_s)<0$. The balance equation for the average populations $w_{1,2}$ of the stable states can be written

$$\dot{w}_1(t) = W_{21}(t)w_2(t) - W_{12}(t)w_1(t), \quad w_1(t) + w_2(t) = 1. \quad (3)$$

The transition probabilities $W_{nm}(t)$ can readily be evaluated in the adiabatic approximation: i.e. assuming that the frequency Ω of the sinusoidal driving is small compared to the reciprocal relaxation time of the system. In this case the probability $W_{nm}(t)$ is determined by the *instantaneous* value of the potential well depth $\Delta \tilde{U}_n(A \cos \Omega t)$ where $\Delta \tilde{U}_n(A)$ is the depth of the n th potential well in the potential tilted by the external

force, $U(q) - Aq$. For small enough amplitude of the force only linear terms need be retained in the potential well depth. Using Eq. (2), one can then write $W_{nm}(t)$ in the form:

$$W_{nm}(t) = W_{nm}^{(0)} \exp(g_n \cos \Omega t), \quad g_n = \tilde{g}_n A/D, \quad \tilde{g}_n = - \left[\frac{\partial \Delta \tilde{U}_n(A)}{\partial A} \right]_{A=0} \quad (4)$$

where $W_{nm}^{(0)}$ is the value of the transition probability in the absence of the force.

It is evident from Eq.(4) that the parameter which determines the effect of the driving is proportional to the ratio of the amplitude of the force A to the noise intensity D . Thus, in agreement with what was said above, for small D we can have strong effects even for comparatively small A . Moreover, if A is so small that $|g_{1,2}| \ll 1$, the probabilities $W_{nm}(t)$ can be expanded in g_n and Eq.(3) can then be solved analytically. To first order in $|g_{1,2}|$ the dependence of the populations $w_{1,2}(t)$ on time is sinusoidal.

The solution is particularly simple in the important case of a symmetric potential $U(q)$, for which $\Delta U_1 = \Delta U_2$, $g_1 = -g_2$. An important byproduct of this solution is an interesting behaviour of the spectral density of fluctuations $Q(\omega)$ of the coordinate of the system $q(t)$:

$$Q(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (4\pi\tau)^{-1} \int_{-\tau}^{\tau} dt q(t) \exp(i\omega t) \quad (5)$$

If the coordinate $q(t)$ is approximated by the sum of its values in the stable states $q_{1,2}$ weighted by the populations $w_{1,2}(t)$ (the two-state approximation), then, because of the sinusoidal dependence of the populations on time a δ -shaped spike occurs in $Q(\omega)$ at the frequency $\omega = \Omega$. The ratio of its intensity (area) to the value of the power spectrum $Q^{(0)}(\Omega)$ in the absence of the driving, i.e. the signal-to-noise ratio R , is given by the expression [7,34]:

$$R = \pi g^2 W^{(0)}/4, \quad g \equiv g_1 = -g_2, \quad W^{(0)} \equiv W_{12}^{(0)} + W_{21}^{(0)} = 2W_{12}^{(0)}. \quad (6)$$

It follows from (4) and (6) that the signal-to-noise ratio *increases exponentially* with increasing noise intensity for small enough D ,

$$R \propto \exp(-\Delta U/D), \quad \Delta U \equiv \Delta U_1 = \Delta U_2, \quad \Delta U \gg D$$

i.e. SR occurs. It was this amazing result that stimulated so much interest in the phenomenon of SR among physicists, biologists, and engineers.

3. Linear response theory and stochastic resonance

An alternative approach to SR which, as we shall see, makes it possible to place the phenomenon in its natural context within statistical physics and condensed matter physics, and to relate it to what had been done in these areas before, is based on linear response theory (LRT). According to LRT, if a system with a coordinate q is driven by a weak force $A \cos \Omega t$ (the addition to the Hamiltonian function of the system is of the form of $-Aq \cos \Omega t$), there arises a small periodic term in the ensemble-averaged value of the coordinate, $\delta \langle q(t) \rangle$, oscillating at the same frequency Ω and with amplitude a proportional to that of the force [44]:

$$\delta \langle q(t) \rangle = a \cos(\Omega t + \phi) \equiv \text{Re}[\chi(\Omega) A e^{-i\Omega t}], \quad A \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$a = A |\chi(\Omega)|, \quad \phi = -\arctan[\text{Im}\chi(\Omega)/\text{Re}\chi(\Omega)].$$

The quantity $\chi(\Omega)$ here is the *susceptibility* of the system. Eq.(7) holds for dissipative and

fluctuating systems that do not display persistent periodic oscillations in the absence of the force $A\cos\Omega t$. In the more general case of a system performing phase-locked oscillations with a period $2\pi/\omega_F$ (this case is of particular interest for systems driven by strong periodic fields with a frequency ω_F , e.g., by laser radiation) the linear response is described by the expression

$$\delta\langle q(t) \rangle = \text{Re} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi^{(k)}(\Omega) A \exp[i(k\omega_F - \Omega)t], \quad A \rightarrow 0. \quad (8)$$

In this case a weak force gives rise to vibrations not only at its own frequency, but also at the combination frequencies $|\Omega \pm k\omega_F|$, and $\chi^{(k)}(\Omega)$ are the corresponding susceptibilities.

The function $\chi(\Omega)$ (or the functions $\chi^{(k)}(\Omega)$) contains all information on the response of the system to a weak driving force. It gives both the *amplitude* of the signal, a , and its *phase lag* with respect to the force, ϕ (or partial amplitudes and phase lags for the vibrations at the combination frequencies). In fact, Eqs.(7), (8) still hold even if the force is of a more general nature than just an «additive» coordinate-independent force described by the extra term $-Aq\cos\Omega t$ in the Hamiltonian. In particular, the force can be coordinate-dependent (a multiplicative force), or it can be the intensity of the noise driving the system (e.g., the temperature, if the noise is of thermal origin) that is modulated periodically. In any case, if the amplitude of the modulation is weak enough, the response of the system is linear and is described by (7), (8). The onset of SR in response to the modulation of the noise intensity (temperature) was investigated in [45], and in [21] SR in response to the modulation of the temperature was considered for a mesoscopic wire with a two-state dissipating defect.

The periodic terms (7), (8) induced by the force give rise to δ -shaped spikes in the spectral density of fluctuations (SDF) $Q(\omega)$ (5) at the frequency of the force Ω (and at the combination frequencies $|\Omega \pm k\omega_F|$). The *intensity* (i.e., the area) of these spikes is equal to one quarter of the squared amplitude of the corresponding vibrations, i.e., to $1/4A^2|\chi(\Omega)|^2$, or to $1/4A^2|\chi^{(k)}(\Omega)|^2$. The signal-to-noise ratio R is thus expressed in terms of the susceptibility as

$$R = 1/4A^2|\chi(\Omega)|^2/Q^{(0)}(\Omega), \quad A \rightarrow 0, \quad (9)$$

and for periodically oscillating systems the signal-to-noise ratio $R^{(k)}$ at the combination frequency $|\Omega - k\omega_F|$

$$R^{(k)} = 1/4A^2|\chi^{(k)}(\Omega)|^2/Q^{(0)}(|\Omega - k\omega_F|), \quad A \rightarrow 0. \quad (10)$$

Therefore, the evolution of the susceptibility and of $Q^{(0)}(\omega)$ with varying noise intensity D show immediately whether or not SR (understood as an increase, with the increasing D , of the signal or of the signal-to-noise ratio in a certain range of D) is to be expected at a given frequency.

Describing SR in terms of the susceptibility is particularly advantageous for systems that are in thermal equilibrium or in quasi-equilibrium. In this case the susceptibility can be expressed immediately in terms of the SDF $Q^{(0)}(\Omega)$ in the absence of periodic driving via the fluctuation-dissipation relations [44]:

$$\text{Im} \chi(\omega) = \pi\omega/T Q^{(0)}(\omega), \quad \text{Re} \chi(\omega) = 2/T P \int_0^{\infty} d\omega_1 Q^{(0)}(\omega_1) \omega_1^2 / (\omega_1^2 - \omega^2) \quad (11)$$

where P implies the Cauchy principal part and T is the temperature in energy units. It follows from (10), (11) that the onset of SR can be predicted from purely *experimental* data on the evolution of the SDF of a system with temperature without assuming anything at all about the equations that describe its dynamics, i.e. for a system treated as a «black box».

The relevance of this approach to SR is seen from Fig.1 where some data from analog experiments for electronic systems simulating Brownian motion in a bistable [9]

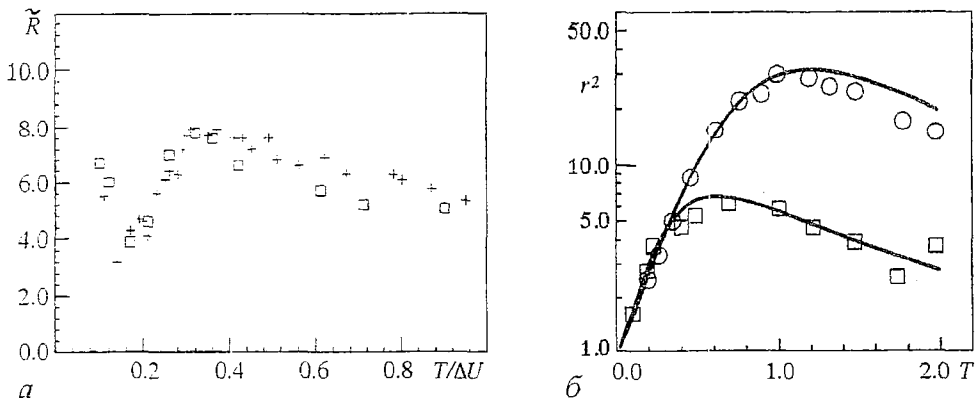


Fig. 1. Stochastic resonance for the Brownian motion $\ddot{q} + 2\Gamma\dot{q} + U'(q) = (2\Gamma)^{1/2}\xi(t) + A\cos\Omega t$, for the white noise $\xi(t)$ (1) with the intensity $D \equiv T$ (after [9]): *a* - bistable potential $U(q) = -q^2/2 + q^4/4$. The values of $\bar{R} = 6.51 \cdot 10^{-4} R$ are given for $\Omega = 0.0695$, $A = 0.1$, $\Gamma = 0.125$. \square - Direct measurements, $+$ - data calculated from the *measured* $Q^{(0)}(\omega)$ via fluctuation-dissipation relations (11); *b* - Monostable potential, $U(q) = Bq + q^2/2 + q^4/4$. The stochastic amplification factors, $r^2 = a^2(T)/a^2(0)$ equal to the squared ratio of the amplitude of the signal with and without noise, \square - $B=0$, \circ - $B=2$; $A=0.02$, $\Gamma=0.011$. The full curves represent theoretical predictions derived using LRT (after [11] (*b*))

and in a monostable [11] potential are compared with the LRT theoretical predictions. The simulated systems are quasi-thermal. The results of Fig. 1, *a* demonstrate that SR in the signal-to-noise ratio is described *quantitatively* by the fluctuation-dissipation relations (11), even in the range where an explicit analytic calculation of the susceptibility of the system was not possible. The data in Fig. 1, *b* show that, contrary to what had been commonly accepted, a noise-induced increase of the signal in a system does not require that it be a bistable one: the effect can arise in monostable systems as well. The particular mechanism explored [11] is based on the fact that the frequency of a nonlinear system depends on the amplitude (energy) of the vibrations. By varying the temperature of the system (the noise intensity) one varies the distribution of the system over the energy, and hence over the frequency. It is possible therefore to «tune» the system, and thus to increase the response at an appropriate frequency. The strong and rather interesting temperature dependence of the spectral density of the fluctuations $Q^{(0)}(\omega)$ of underdamped systems was reviewed in [46]. Recent results obtained for a special class of underdamped systems where the dependence of the eigenfrequency of the vibrations on the amplitude is nonmonotonic - the upper curve in Fig. 1, *b* refers to a system of this sort - are reported in [47].

4. Susceptibility and relaxation in solids with reorienting dipoles

To the best of our knowledge, analytical results for the susceptibility of a fluctuating symmetrical system with two coexisting stable states, which traditionally has been of primary interest in the context of SR, were first obtained by Debye [40]. Debye analyzed the dielectric response of polar molecules in a solid. He assumed that a molecule can switch between two *equivalent* positions within a unit cell, and that in these positions the dipole moment of the molecule is pointing in opposite directions. The expression for the transition probability W_{nm} he used was equivalent to Eq. (4), with $g_n = -\mathbf{E}\mathbf{d}_n/T$ where \mathbf{E} is the amplitude of the electric field and \mathbf{d}_n is the dipole moment in the n th position ($n=1,2$; $\mathbf{d}_1 = -\mathbf{d}_2$); he linearized W_{nm} in $\mathbf{E}\mathbf{d}_n/T$ (however, he did not specify the form of the transition probabilities $W_{nm}^{(0)}$ in the absence of the external field).

The well-known expression for the susceptibility Debye derived was, in the present notation, of the form

$$\chi_D(\Omega) = \frac{d_1^2}{T} \frac{W^{(0)}}{W^{(0)} - i\Omega}, \quad W^{(0)} \equiv W_{12}^{(0)} + W_{21}^{(0)} = 2W_{12}^{(0)}. \quad (12)$$

This expression made it possible to explain the experimental data on the dispersion of the real part of the dielectric constant of ice. It is straightforward to see from the fluctuation-dissipation relations (11) that the signal-to-noise ratio R that follows from (9), (12) is precisely of the form (6) (cf. [9,48]) that describes SR in the linear regime.

In the context of condensed-matter physics, the quantity of special interest is usually the phase shift between the force and the signal, since it is the phase shift that determines the absorption of the energy from the force, in particular from the electromagnetic field in the case considered by Debye. In the symmetrical two-state model with thermally activated transitions between the states the phase shift ϕ as given by (7), (12) decreases monotonically with increasing temperature [40, 5, 34]:

$$(\phi)_{\text{two-state}} = -\arctan(\Omega/W^{(0)}). \quad (13)$$

The phase shift is one of the characteristics used to describe the elastic properties of solids: in this case the force is stress, the signal is strain, and the phase lag is referred to as *internal friction* [49]. For finite frequency of the stress there arises a phase shift between the stress and the strain, even though the stress is linear in the strain (and thus reversible). In some metal alloys internal friction displays a strong nonmonotonic temperature dependence as shown in Fig. 2 taken from [50]. A simple mechanism of this dependence for body-centered cubic metals with interstitial impurity atoms was suggested by Snoek [51]. He assumed that an impurity occupies one of the equivalent interstitial points in an elementary cell thus forming an elastic dipole. The dipole can reorient as a result of thermal fluctuations. Uniaxial stress breaks the symmetry, like an electric field in the case of electric dipoles, and the response to the stress is given basically by Debye's theory, slightly modified to allow for a different number of equivalent stable states.

The strain measured experimentally arises as a combination of the strain related to the reorientation of the elastic dipoles and the strain due to the deformation of those cells that are free of impurities. This deformation is characterized by much faster relaxation than the reciprocal reorientation rate $1/W^{(0)}$ of the dipoles at room temperature. For low temperatures the reorientation rate $W^{(0)}$ is negligibly small, and the strain is equal to that for a crystal with immovable defects and is in phase with the stress (Hooke's law). Therefore the phase shift is equal to zero rather than to $-\pi/2$ as given by (13). Only for higher T does the reorientation of the elastic dipoles become «switched on» and the term described by (13) contributes to the phase shift. As a result $|\phi|$ sharply increases with temperature and displays a clearly resolved peak. The position of the peak (see the next subsection) may be used to determine the activation energy for reorientation of the elastic dipoles [49].

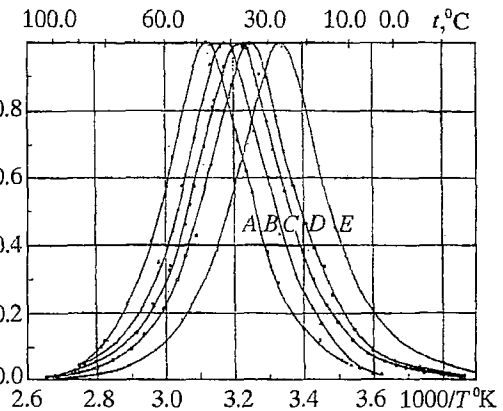


Fig. 2. Peaks of internal friction (normalized phase lag $-\phi$) vs temperature due to Snoek relaxation in an Fe-C alloy; the curves A to E correspond to the frequencies 2.1; 1.17; 0.86; 0.63; 0.27 Hz (after Wert and Zener [50])

5. Stochastic resonance in continuous dynamical systems

In many cases, the bistable dynamical systems where SR is investigated are *continuous* rather than being two-state ones. For such systems, the dependence of the

phase lag on the noise intensity (temperature) is similar to that observed for internal friction in anelastic solids. This is clearly seen from a comparison of Fig.2 and Fig.3. In the latter case, the data [52] are from an analog simulation of overdamped Brownian motion (1) in a simple symmetric bistable potential

$$U(q) = -1/2 q^2 + 1/4 q^4. \quad (14)$$

The explicit LRT expressions for the phase shift and for the signal-to-noise ratio R of a continuous system (1) for low noise intensities and for low frequency Ω are of the form:

$$\phi = -\arctan[(\Omega/\Omega_r)(\Omega_r^2 W^{(0)} + \Omega^2 D)/(\Omega_r W^{(0)2} + \Omega^2 D)],$$

$$R = \frac{\pi A^2}{4D^2} (\Omega_r^2 W^{(0)2} + \Omega^2 D^2)/(\Omega_r^2 W^{(0)} + \Omega^2 D), \quad \Omega_r D \ll \Omega_r, \quad W^{(0)} \ll D \quad (15)$$

where $\Omega_r \equiv \tau_{rel}^{-1} = U''(q_{1,2})$ is the reciprocal relaxation time for the intrawell motion (corrections to (15) of the order of $\Omega/\Omega_r, D/\Delta U$ have been dropped).

Measurements of the phase lag in an electronic model of (1), (14) are plotted as a function of noise intensity in Fig 3. The variation of $|\phi|$ with D exhibits a well-defined maximum and clearly has much in common with the internal friction data of Fig.2, although the peaks in the latter case are noticeably narrower, which shows that the system (1), (14) does not provide a completely adequate quantitative model for anelastic relaxation. We notice that the values of Ω in Fig.3 is very much higher than the effective value of Ω for the anelastic relaxation experiments (where the absolute value of the driving frequency is ~ 1 Hz as compared to $\sim 10^{13}$ Hz for atomic vibrations in solids so that $\Omega \sim 10^{-13}$). For $\Omega = 10^{-13}$, the function of $-\phi(1/D)$ as given by (15) takes the form plotted in Fig. 4, showing a narrower and more symmetrical maximum than that in Fig. 3, albeit still slightly broader than those in Fig. 2. The positions of the maxima of $|\phi|$ as a function of D depend on Ω in both cases; for the model (1), (14) this position D_{max} is given by the equation

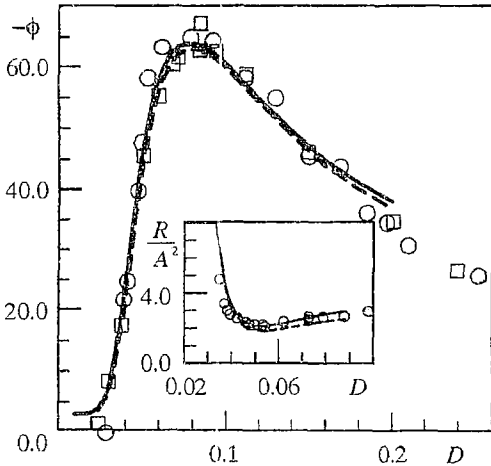


Fig. 3. Phase lag $-\phi$ between the coordinate $\langle q(t) \rangle$ of an overdamped Brownian particle oscillating in a potential (14) and the force of frequency $\Omega=0.1$ as measured in the electronic experiment; the force amplitude: $\circ-A=0.04, \square=0.2$. The solid line represents the theoretical prediction based on LRT [52] (nonlinear corrections do not change this curve strongly for the actual value of A). The inset shows the normalized signal-to-noise ratio in the region of the minimum in R

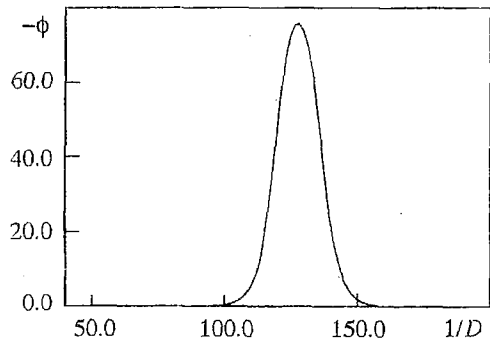


Fig. 4. Phase lag $-\phi$ for the system (1), (14), calculated [52] from (7), (11) for $\Omega=10^{-13}$ and plotted as a function of $1/D$ for more convenient comparison with the data of Fig.2

$$W^{(0)}(D_{\max}) = \Omega(D_{\max}/\Omega_r)^{1/2}.$$

The response of a continuous system differs markedly from that of a two-state one, not only in its non-monotonic rather than monotonic variation of ϕ with D , but also in the variation of its signal/noise ratio with D : for small D the function R decreases rather than increases with the increasing D . Such behaviour, seen in Fig.1, *a*, has a simple explanation. For small D the interwell transitions are frozen out: the susceptibility is then determined by the intrawell motion of the system, and is independent of noise, whereas the power spectrum is formed by the fluctuations about the minima of the potential and increases proportional to the noise intensity, so that $R \propto 1/D$, as seen from (15) for small $W^{(0)}$. The analysis of the position of the local maximum of R vs noise intensity was performed by Fox and Lu [53].

In general, of course, the motion of a bistable continuous system will not be described by the simple model (1) of overdamped Brownian motion in a symmetrical double-well potential. Neither will the noise be white, nor will the system be moving in a static potential. For example, the stable states of interest may be the states of stable periodic vibrations in a strong external force (periodic attractors), as is of interest in the context of optical bistability [54]. Analytic results for the fluctuations and for the response to a weak external force can be obtained [55] provided the noise intensity is small so that the probabilities of fluctuational transitions between the states are very much smaller than the reciprocal intrawell relaxation time, $W_{nm}^{(0)} \ll t_{\text{rel}}^{-1}$, and the fluctuations occur mostly within narrow vicinities of the stable states. The results hold for systems driven by an arbitrary Gaussian noise, in which case the dependence of the transition probabilities on the characteristic noise intensity D is of the activation type, and in the absence of the additional weak force

$$W_{nm}^{(0)} = \text{const} \exp(-R_n/D). \quad (16)$$

The activation energy of the escape from the state n , R_n , is given by the solution of a variational problem [56]. For certain types of non-white Gaussian noise R_n was found in Refs. [56, 57].

For small enough D there are two main contributions to the susceptibilities $\chi^{(k)}(\Omega)$. One comes from the motion close to the stable states where the system spends most of the time. This contribution is given by the sum of the partial susceptibilities $\chi_n^{(k)}(\Omega)$ ($n=1,2$) weighted by the populations of the stable states w_n . The other contribution, $\chi_{\text{tr}}^{(k)}(\Omega)$, is important in the case where the frequency Ω of the weak force is small or is close to the frequency ω_F of the strong external force. In this case the weak force modulates the probabilities of the transitions between the states and thus the populations of the states:

$$\chi^{(k)}(\Omega) = \sum_{n=1,2} w_n \chi_n^{(k)}(\Omega) + \chi_{\text{tr}}^{(k)}(\Omega), \quad w_1 = 1 - w_2 = W_{21}^{(0)}/W_{12}^{(0)}. \quad (17)$$

The partial susceptibilities $\chi_n^{(k)}(\Omega)$ can be easily found from the equations of motion linearized about the stable states in the absence of noise (noise determines the values of the populations w_n via the transition probabilities). They display dispersion on the frequency scale t_{rel}^{-1} , whereas in the range of interest for SR, $\Omega \ll t_{\text{rel}}^{-1}$ or $|\Omega - \omega_F| \ll t_{\text{rel}}^{-1}$, they are nearly frequency-independent.

The characteristic frequency scale which determines the dispersion of $\chi_{\text{tr}}^{(k)}(\Omega)$ is given by the relaxation rate of the populations, i.e., by $W^{(0)} = W_{21}^{(0)} + W_{12}^{(0)}$. A simple way to obtain $\chi_{\text{tr}}^{(k)}(\Omega)$ for $\Omega \ll \nu_c$ or $|\Omega - \omega_F| \ll \nu_c$ ($\nu_c = \min(t_{\text{rel}}^{-1}, t_{\text{cor}}^{-1})$, where t_{cor} is the correlation time of the noise) is based [55] on the fact that the major effect of the additional weak force $A \cos \Omega t$ on the populations of the states comes from the modulation of the activation energies of the transitions between the states R_n . For small Ω one can

find this modulation just by evaluating R_n for a system biased by a *constant* force A , i.e., by finding $R_n \equiv \tilde{R}_n(A)$, and then by replacing A by $A \cos \Omega t$. In this case the escape probability can be written in the form similar to (4):

$$W_{nm}(t) = W_{nm}^{(0)} \exp(g_n \cos \Omega t), \quad g_n = \tilde{g}_n A/D, \quad \tilde{g}_n = -\left[\frac{\partial \tilde{R}_n(A)}{\partial A}\right]_{A=0}, \quad \Omega \ll v_c. \quad (18)$$

In the case of periodic attractors corresponding to forced vibrations in a strong periodic force $F \cos(\omega_F t + \phi_F)$, with the frequency $\omega_F \gg v_c$, the additional weak force $A \cos \Omega t$ with Ω very close to ω_F can be considered as a modulation of the amplitude of the strong force,

$$F \cos(\omega_F t + \phi_F) + A \cos \Omega t = \operatorname{Re} \tilde{F}(t) \exp(i(\omega_F t + \phi_F)),$$

$$\tilde{F}(t) = F + A \exp[i(\Omega - \omega_F)t - i\phi_F].$$

The activation energies $R_n \equiv R_n(F)$ are independent of the phase ϕ_F , and when the weak force $A \cos \Omega t$ is applied they take on time-dependent values corresponding to the instantaneous value of the amplitude $|\tilde{F}(t)|$, so that

$$W_{nm}(t) = W_{nm}^{(0)} \exp[g_n \cos((\Omega - \omega_F)t - \phi_F)], \quad g_n = \tilde{g}_n A/D, \quad (19)$$

$$\tilde{g}_n = -\frac{1}{F} \frac{\partial R_n(F)}{\partial F}, \quad |\Omega - \omega_F| \ll v_c \omega_F.$$

Eqs. (18), (19) can be inserted into Eq. (3) for the populations. For small amplitudes A , when $|g_n| \ll 1$, one can expand the transition probabilities in g_n . Terms linear in g_n are sinusoidal in time, and so also are the corresponding terms in the populations $w_{1,2}(t)$. If the value of the coordinate in the n th periodic attractor

$$q_n(t) = \sum_k q_n^{(k)} \exp(ik\omega_F t)$$

then the expression for the susceptibility $\chi_{tr}^{(k)}(\Omega)$ for $|\Omega - \omega_F| \ll v_c$ is of the form

$$\chi_{tr}^{(k)}(\Omega) = -\frac{W_{12}^{(0)} W_{21}^{(0)}}{W^{(0)}} \frac{\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2}{D} \frac{q_1^{(k-1)} - q_2^{(k-1)}}{W^{(0)} - i(\Omega - \omega_F)} e^{i\phi_F}. \quad (20)$$

The equation for the susceptibility with respect to a low-frequency force is very similar:

$$\chi_{tr}(\Omega) = -\frac{W_{12}^{(0)} W_{21}^{(0)}}{W^{(0)}} \frac{\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2}{D} \frac{q_1^{(0)} - q_2^{(0)}}{W^{(0)} - i\Omega}, \quad \Omega \ll v_c. \quad (20a)$$

It can easily be seen that in the symmetrical case, $W_{12}^{(0)} = W_{21}^{(0)}$, $\tilde{g}_1 = -\tilde{g}_2$, $q_1 \equiv q_1^{(0)} = -q_2 \equiv -q_2^{(0)}$, this expression goes over into Debye's result (12).

Note that, for a simple model of *overdamped* Brownian motion in the bistable potential (1), the expressions for the susceptibility (17), (20a) (and also the explicit form of the partial susceptibility $\chi_n(\Omega)$) can be obtained at low noise intensities directly from an analysis of the eigenvalues and eigenfunctions [58] of the Fokker - Planck equation, both in the case of a symmetric [59] (a) and an asymmetric [59] (b) potential. A detailed

numerical analysis of the Fokker - Planck equation for the system (1), (14) is [60] in full agreement with the analytic results derived above, and in particular with those for the phase shift shown in Fig. 3. Note also some earlier numerical work on the Fokker - Planck equation for periodically driven bistable systems [33].

From (18) - (20) (cf. [55]) it is clear: (i) that the susceptibility due to the transitions between the states *increases* exponentially sharply with noise intensity D in the range of very small D ; (ii) that this susceptibility is greatest within a frequency range that is extremely narrow compared with the characteristic inverse relaxation time t_{rel}^{-1} ; (iii) that the susceptibility is proportional to the reciprocal noise intensity, which is why it can become large, and (iv) that it becomes large only within the narrow range of the system parameters for which $R_1 \approx R_2$, and thus the transition probabilities, $W_{12}^{(0)}$ and $W_{21}^{(0)}$, and the populations, w_1 and w_2 , are of the same order of magnitude (the range of the kinetic phase transition). All of these features have been observed in experiments and are immediately related to the onset of SR in bistable systems. In particular, the feature (iv) shows that SR in bistable systems is a kinetic phase transition effect. A demonstration of SR in a system with periodic attractors, obtained from an analog electronic experiment [13] is shown in Fig. 5. The experimental data (points) exhibit an increase of signal-to-noise ratio both at the frequency of the force Ω and at the combination frequency $2\omega_F - \Omega$; they agree well with the LRT theoretical predictions (curves).

Finally in this section, we would point out also that an important corollary of LRT is that, for small-amplitude signals, the signal-to-noise ratio at the output of a system driven by a stationary Gaussian noise does not exceed that at the input, even if the system displays SR. Indeed, the Fourier components of the noise are statistically independent and the total power of the noise $\Xi(\Omega)d\Omega$ in a small spectral interval $d\Omega$ about the frequency of the signal Ω is small. The signal-to-noise ratio at the input is given by $1/4A^2/\Xi(\Omega)$, whereas that at the output is $1/4|\chi(\Omega)|^2A^2/[|\chi(\Omega)|^2\Xi(\Omega)+Q^{(0)}(\Omega)]$. The quantity $Q^{(0)}(\Omega)$ gives the value of the spectral density of fluctuations in the system at frequency Ω as it would be if there was no signal and the spectral components of the noise at frequency Ω were suppressed, i.e., the power spectrum of the input noise had a hole at frequency Ω . By construction $Q^{(0)}(\Omega) \geq 0$, which proves the statement. (In linear systems, on the other hand, which do not mix frequencies, $Q^{(0)}(\Omega)=0$ and the signal-to-noise ratio at the output must be the same as at the input).

6. Conclusion

The main advantages of the LRT approach to SR are its simplicity, generality and predictive power. It follows on naturally from earlier work in physics, especially that of Debye [40]. Of course, LRT is by definition restricted to the small signal limit. Beyond this range of linear response, where LRT is inapplicable, other (perhaps numerical) methods become necessary (though analytic results can be obtained [9,43, 61] for the

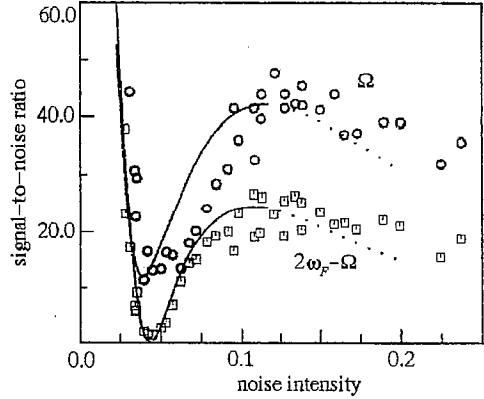


Fig. 5. The response of a noise-driven underdamped nonlinear oscillator with coexisting periodic attractors to an extra force $A\cos\Omega t$ (after [13]). The equation of motion of the oscillator for $A=0$ is of the form $\ddot{q}+2\Gamma\dot{q}+\omega_0^2q+q^3=F\cos\omega_F t$. The quantities P and P provide signal-to-noise ratios at the frequencies Ω and $2\omega_F - \Omega$. The data refer to the kinetic phase transition range, $(\omega_F - \omega_0)/\Gamma=0.236$, $3F^2/32\omega_F^3(\omega_F - \omega_0)^3=0.0814$

system (1), (14) in the low noise limit, still using classical techniques of theoretical physics), and the early theories of SR may then be expected to come into their own. Inevitably, they lack the generality of LRT and, in most cases, are directly applicable only to the particular type of system for which they were introduced. The LRT approach meets *a fortiori* the acid test of any theory in science, namely, the possession of predictive power. For example, it enables the presence or absence of SR in any given thermal equilibrium system to be predicted simply from the evolution of its SDF with increasing noise intensity in the absence of the periodic driving force: the discovery of SR in monostable systems [11] was arrived at in precisely this way.

With the benefit of hindsight, therefore, it can be seen that there is nothing particularly mysterious about SR, and its position in the mainstream evolution of physics has become clear. The next stage in the development of the topic seems likely to be in terms of applications, perhaps related to SQUIDS [20], or to information transfer in biological systems [30]-[33] or to communications, for example through noise-protected optical heterodyning [27].

Acknowledgements. We are grateful to R. Landauer who draw our attention to the earlier research on anelastic relaxation in solids, and to A. Longtin and K. Wiesenfeld for valuable comments on an earlier version of the manuscript. One of us (MID) acknowledges support from Stanford University; (DGL) would like to acknowledge the hospitality of Lancaster University. The research was supported in part by the Science and Engineering Research Council (UK), by the Royal Society of London, by the European Community DGXII, and by the Ministry of Education and Science of Russia.

References

1. Special issue of J. Stat. Phys. **70**, nos. 1/2 (1993).
2. Special issue of Nuovo Cimento D, in press.
3. R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani, J. Phys. A **14**, L453 (1981).
4. R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani, Tellus **34**, 10 (1982).
5. C. Nicolis, Tellus **34**, 1 (1982).
6. S. Fauve and F. Heslot, Phys. Lett. A **97**, 5 (1983).
7. B. McNamara, K. Wiesenfeld and R. Roy, Phys. Rev. Lett. **60**, 2626 (1988).
8. G. Debnath, T. Zhou, and F. Moss, Phys. Rev. A **39**, 4323 (1989); L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, and S. Santucci, Phys. Rev. Lett. **62**, 349 (1989); G. Vemuri and R. Roy, Phys. Rev. A **39**, 4668 (1989).
9. M.I. Dykman, R. Mannella, P.V.E. McClintock, and N.G. Stocks, Phys. Rev. Lett. **65**, 2606 (1990); M.I. Dykman, P.V.E. McClintock, R. Mannella, and N.G. Stocks, JETP Lett. **52**, 144 (1990).
10. V.S. Anishchenko, M.A. Safonova, and L.O. Chua, Int. J. Bifurcations and Chaos **2**, 397 (1992).
11. (a) N.G. Stocks, P.V.E. McClintock, and S.M. Soskin, Europhys. Lett. **21**, 395 (1993); (b) N.G. Stocks, N.D. Stein, and P.V.E. McClintock, J. Phys. A **26**, L385 (1993).
12. T.L. Carroll and L.M. Pecora, Phys. Rev. Lett. **70**, 576 (1993); Phys. Rev. E **47**, 3941 (1993).
13. M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, N.D. Stein, and N.G. Stocks, JETP Lett. **58**, 145 (1993); M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.D. Stein, and N.G. Stocks, Phys. Rev. E **49**, 1198 (1994).
14. M.I. Dykman, A.L. Velikovich, G.P. Golubev, D.G. Luchinsky, and S.V. Tsuprikov, JETP Lett. **53**, 193 (1991).
15. A. Fioretti, R. Mannella, L. Guidoni, L. Fronzoni, and E. Arimondo, J. Stat. Phys. **70**, 799 (1993).
16. E. Ippen, J. Linder, and W.L. Ditto, J. Stat. Phys. **70**, 437 (1993).
17. L. Gammaitoni, M. Martinelli, L. Pardi, and S. Santucci, Phys. Rev. Lett. **67**, 1799 (1991).

18. S.T. Vohra and F. Bucholtz, *J. Stat. Phys.* **70**, 413 (1993).
19. E.K. Sadykov, *J. Phys.: Condens. Matter* **4**, 3295 (1992); Yu. L. Raikher and V.I. Stepanov, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 4137 (1994).
20. A. Hibbs, E.W. Jacobs, J. Bekkedahl, A. Bulsara, and F. Moss, Proceedings of the AIP Conference on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations (AIP Press, New York, 1993), p. 720.
21. R. Löfstedt and S.N. Coppersmith, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1947 (1994).
22. K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames, and F. Moss, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2125 (1994).
23. R.N. Mantegna and B. Spagnolo, *Phys. Rev.* **49**, R1792 (1994).
24. A. Simon and A. Libchaber, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3375 (1992).
25. G.B. Alers, N.O. Birdge, and B. Golding, submitted to *Phys. Rev. Lett.*
26. M.I. Dykman, G.P. Golubev, D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, N.D. Stein, and N.G. Stocks, *Phys. Rev. E* **49**, 1935 (1994).
27. M.I. Dykman, G.P. Golubev, I. Kh. Kaufman, D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock and E.A. Zhukov, «Fluctuations, stochastic resonance and noise-protected heterodyning in bistable optical systems», to be published.
28. I. Dayan, M. Gitterman and G.H. Weiss, *Phys. Rev. A* **46**, 757 (1992).
29. Z. Gingl, L.B. Kiss and F. Moss «Non-dynamical stochastic resonance: theory and experiments with white and arbitrarily coloured noise», to be published.
30. A. Longtin, A. Bulsara, and F. Moss, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 656 (1991).
31. F. Moss and A. Bulsara, Proceedings of the AIP Conference on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations (AIP Press, New York, 1993), p. 703, and references therein.
32. A.R. Bulsara and G. Schmera, *Phys. Rev. E* **47**, 3734 (1993).
33. J.K. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou, and F. Moss, *Nature* **365**, 337 (1993).
34. B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **39**, 4854 (1989).
35. P. Jung and P. Hänggi, *Europhys. Lett.* **8**, 505 (1989).
36. R. Fox, *Phys. Rev. A* **39**, 4148 (1989).
37. C. Presilla, F. Marchesoni and L. Gammaitoni, *Phys. Rev. A* **40**, 2105 (1989).
38. Hu Gang, G. Nicolis and C. Nicolis, *Phys. Rev. A* **42**, 2030 (1990).
39. P. Jung and P. Hänggi, *Phys. Rev. A* **44**, 8032 (1991).
40. P. Debye, *Polar Molecules* (Dover Publications, Inc. 1929).
41. M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.D. Stein and N.G. Stocks, «Stochastic resonance in perspective», to be published in *Nuovo Cimento*.
42. H. Kramers, *Physica* **7**, 284 (1940).
43. M.I. Dykman, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.D. Stein, and N.G. Stocks, *Phys. Rev. E* **47**, 1629 (1993).
44. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics*, 3rd ed., Part 1 (Pergamon, New York, 1980).
45. M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, N.D. Stein, and N.G. Stocks, *Phys. Rev. A* **46**, R1713 (1992).
46. M.I. Dykman and M.A. Krivoglaz, in *Soviet Physics Reviews*, ed. I.M. Khalatnikov (Harwood, New York, 1984), vol. 5, p. 265; M.I. Dykman and P.V.E. McClintock, *Physica D* **58**, 10 (1992).
47. S.M. Soskin, *Physica A* **180**, 386 (1992); N.G. Stocks, N.D. Stein, S.M. Soskin, and P.V.E. McClintock, *J. Phys. A* **25**, L1119 (1992).
48. L.B. Kiss, Z. Gingl, Z. Márton, J. Kertész, F. Moss, G. Schmera, and A. Bulsara, *J. Stat. Phys.* **70**, 451 (1993).
49. A.S. Nowick and B.S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids* (Academic Press, New York, 1972).
50. C. Wert and C. Zener, *Phys. Rev.* **76**, 1169 (1949).
51. J.L. Snoek, *Physica* **8**, 711 (1941); *Physica* **9**, 862 (1942).
52. M.I. Dykman, R. Mannella, P.V.E. McClintock, and N.G. Stocks, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2985 (1992).

53. R.F. Fox and Y. Lu, Phys. Rev. E **48**, 3390 (1993).
 54. H.M. Gibbs, Optical Bistability: Controlling Light with Light, Academic Press, New York, 1985.
 55. M.I. Dykman and M.A. Krivoglaz, Sov. Phys. JETP **50**, 30 (1979).
 56. M.I. Dykman, Phys. Rev. A **42**, 2020 (1990); M.I. Dykman and K. Lindenberg, in Contemporary Problems of Statistical Physics, Ed. by G. Weiss (SIAM, Philadelphia, 1994), p. 41.
 57. J.F. Luciani and A.D. Verga, Europhys. Lett. **4**, 255 (1987); M.M. Klosek-Dygas, B.J. Matkowsky, and Z. Schuss, SIAM J. Appl. Math **48**, 425 (1988); A.J. Bray and A.J. McKane, Phys. Rev. Lett. **62**, 493 (1989); S.J.B. Einchcomb and A.J. McKane, Phys. Rev. E **49**, 259 (1994); K. Lindenberg, B.J. West, and G.P. Tsironis, Rev. Solid State Sci. **3**, 143 (1989).
 58. N.G. van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry (Elsevier, Amsterdam, 1990); H. Risken, The Fokker - Planck Equation 2nd edition (Springer, Berlin, 1989).
 59. (a) G. Hu, H. Haken, and C.Z. Ning, Phys. Lett. A **172**, 21 (1992); (b) M.I. Dykman, H. Haken, Hu Gang, D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, C.Z. Ning, N.D. Stein, and N.G. Stocks, Phys. Lett. A **180**, 332 (1993).
 60. M. Morillo and J. Gómez-Ordóñez, Phys. Rev. Lett. **71**, 9 (1993).
 61. T. Zhou, F. Moss, and P. Jung, Phys. Rev. A **42**, 3161 (1990).

*Institut für Physik
Humboldt-Universität Berlin*

Поступила в редакцию 05.11.94

СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС И ЕГО ПРОИСХОЖДЕНИЕ

*М.И. Дыкман, Д.Г. Лучинский, Р. Манелла,
П.В.Е. Мак-Клинтон, Н.Д. Стейн, Н.Г. Стокс*

Обсуждается явление стохастического резонанса, при котором можно увеличить соотношение сигнал-шум (или сигнал-сигнал) в нелинейной системе за счет добавления случайных флуктуаций (шума) соответствующей интенсивности. Выявляя связь стохастического резонанса, с более ранними исследованиями и особенно с работой Debye в 20-е годы, авторы дают явлению широкую физическую трактовку. Показывается, что к стохастическому резонансу применимы традиционные методы статистической физики, например, теория линейного отклика, и обсуждаются их сложности в области возникновения стохастического резонанса.



Mark Dykman was born on 4 April 1951 in Kiev, Ukraine (FSU). In 1973 he got a degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph. D.) from the Institute of Metal Physics, Academy of Sci. of Ukraine, and in 1985 he got a degree of Doctor of Sciences. From 1972 until 1991 he was working in the Institute of Semiconductors, Academy of Sci. of Ukraine. Then he worked at Stanford University (USA). Since 1995 he is an Associate Professor of Physics at Michigan State University. Scientific interests: theory of transport phenomena, condensed matter physics, nonlinear optics, including electron transport and resonant phenomena in two-dimensional systems, large fluctuations in systems away from thermal equilibrium, dynamics of quantum and classical nonlinear vibrations, polarization-dependent nonlinear optical effects.



Dmitrii Georgievich Luchinsky was born in Moscow on 18 October 1959. He was educated in Moscow, gaining his undergraduate degree in physics from Moscow State University (Radiophysics Division) in 1983. He obtained his Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD) from the All-Russian Institute for Metrological Service (VNIIMS) in 1990. His research in nonlinear optics has included the invention of a novel optically bistable device, the discovery of a new form of optical hysteresis, and the first observation of optical heterodyning noise-protected with stochastic resonance. He has also made numerous contributions to the understanding of stochastic nonlinear dynamics. He has been a Royal Society Visiting Fellow at Lancaster University on three occasions. He is currently an EPSRC Research Associate at Lancaster, on leave of absence from his permanent position as Senior Scientific Researcher in VNIIMS.

Riccardo Mannella was born in Massa, Italy on 3 April 1960. In 1985 he became Dottore in Physics from Pisa University, with a dissertation on Linear Response Theory. He has been a PostDoc Research Associate in Pisa University and Lancaster University. As from 1992 he is a Researcher in Physics at the University of Pisa. His research activities are in the field of nonlinear stochastic Physics. He holds a PhD from Lancaster University and a Dottorato di Ricerca in Physics from Pisa University.



Peter Vaughan Elsmere McClintock was born in Omagh, N.Ireland, on 17 October 1940. After being educated in Ireland, N. Rhodesia, W. Germany and England, he read physics at Queen's University Belfast, gaining his BSc in 1962. His doctoral research in Oxford, under H.M. Rosenberg, was on spin-phonon interactions in paramagnetic crystals at very low temperatures, leading to a DPhil in 1966. During his subsequent postdoctoral appointment (1966-1968) at Duke University, N. Carolina, Henry Fairbank and Horst Meyer introduced him to the superfluidity and other fascinating properties of liquid helium. Since 1968, when he came to Lancaster University, where he is now Professor of Physics, he has investigated several topics related to liquid helium, including a measurement of the Landau critical velocity, studies of the creation of quantised vortices, and helium isotopic separation. He has also contributed to the exploration of a range of fundamental problems in stochastic nonlinear dynamics. He holds a DSc from Queen's University, Belfast, and is a Fellow of the Institute of Physics.



Norman Stein gained the BA degree in Mathematics in 1981 from Cambridge University. After some years in industry, he joined the Theoretical Physics Department at Manchester University, where he was awarded a PhD in 1989 for research into Rayleigh - Bénard convection. At Manchester, he acquired an interest in statistical mechanics, particularly noise driven systems, which he has developed since joining the nonlinear dynamics group at Lancaster University, where he is now a Senior Research Associate. He is currently investigating stochastic ratchets, using both theoretical and analogue simulation techniques.



Dr Nigel Stocks gained his PhD from the University of Lancaster in 1990 in the field of stochastic nonlinear dynamics. After spending a further three years at Lancaster as a PDRA, working on topics such as stochastic resonance and noise-induced-linearisation, Dr Stocks took up the position of Research Associate in the department of Engineering at the University of Warwick. Current research interests are in the nonlinear response of periodically driven stochastic systems and the modelling of the laminar-turbulent transition in fluid flow.



ВРЕМЕНА СТОХАСТИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ В КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ БИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ШУМОМ

А. Н. Малахов, А. Л. Панкратов

Рассмотрена кинетика стохастических переходов из одного устойчивого состояния в другое в бистабильных системах с шумом, описываемых кусочно-параболическими потенциальными профилями. Методом преобразования Лапласа исходного уравнения Фоккера - Планка получены точные значения средних времен переходов (времен релаксации) броуновских частиц через потенциальные барьеры, разделяющие устойчивые состояния. Для трех конкретных кусочно-параболических профилей проведен сравнительный анализ полученных точных значений времен релаксации с известными ранее приближенными результатами Крамерса. Прослежено влияние формы и ширины потенциального барьера на времена релаксации. В структуре времени релаксации выявлены множители, отвечающие за форму устойчивого состояния, за форму, высоту и ширину потенциального барьера.

Введение

Броуновское движение в потенциальных полях, впервые рассмотренное Крамерсом [1] с точки зрения скоростей реакций, успешно применяется до сих пор как адекватная модель кинетики процессов перехода различных динамических систем из одного устойчивого состояния в другое через соответствующие потенциальные барьеры. Эта модель широко используется во многих задачах физики, химии и биологии (см., например, обзор [2]) и прежде всего для определения скоростей переходов, времен релаксации и времен жизни метастабильных состояний.

Начиная с Крамерса основные результаты этой проблемы были получены главным образом для высоких потенциальных барьеров, когда интенсивность флуктуаций, существующих в динамических системах, предполагалась много меньшей потенциальной энергии барьера, благодаря чему поток вероятности через потенциальный барьер считался постоянным и все рассмотрение велось квазистационарным образом.

Отыскание временных характеристик стохастических переходов для случаев средних и низких потенциальных барьеров, когда флуктуации достаточно велики, требует знания нестационарного решения уравнения Фоккера - Планка (УФП), являющегося основополагающим дифференциальным уравнением рассматриваемой проблемы, в чем и заключается основная ее трудность.

Наиболее широко используемый подход к отысканию нестационарного решения УФП состоит из разложения оператора Фоккера - Планка по собственным функциям и нахождения минимального ненулевого собственного числа, которое и определяет временной масштаб релаксации (см. монографию

Ризкина [3] и приведенную там библиографию). Однако, с помощью этого метода удается получить искомые временные характеристики лишь для некоторых простейших моделей потенциальных профилей.

Наш подход к решению проблемы основан на отыскании нестационарного решения УФП в терминах преобразования Лапласа и получении искомых временных характеристик непосредственно из преобразования Лапласа. Этим методом в работах [4-6] были определены точные временные характеристики нестационарной диффузии через произвольные кусочно-линейные потенциальные профили без каких либо ограничений на высоту потенциальных барьеров. В настоящей работе этот подход распространен на анализ нестационарного броуновского движения в трех конкретных кусочно-параболических потенциальных профилях.

Отметим, что кроме упомянутой работы Крамерса кусочно-параболический профиль рассматривался также и в других работах [7-10]. Однако, использованный в этих работах метод разложения по собственным функциям не позволил найти решение для произвольной высоты потенциальных барьеров; полученные приближенные решения и поправки относятся лишь к высоким потенциальным барьерам.

1. Общее решение УФП в изображении Лапласа

1.1. Как известно, движение броуновских частиц в поле сил с потенциалом $\Phi(x)$ в режиме большого трения описывается следующим исходным уравнением Ланжевена:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{d\Phi(x)}{dx} + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ - белый гауссов шум

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D\delta(\tau), \quad D = 2kT/h,$$

h - вязкость, T - температура и k - постоянная Больцмана. Для плотности вероятности координат броуновских частиц $W(x,t)$ УФП имеет следующий вид:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{B} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} W(x,t) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) \right\}, \quad (1.1)$$

где $B = 2/D$, $G(x,t)$ - поток вероятности и $\varphi(x) = 2\Phi(x)/hD = \Phi(x)/kT$ - безразмерный потенциальный профиль.

Пусть при $t=0$ все броуновские частицы расположены в точке $x = x_0$, чему соответствует начальное условие $W(x, 0) = \delta(x - x_0)$. С течением времени это начальное распределение расплывается, и в конце концов может установиться ненулевое стационарное вероятностное распределение

$$W(x, \infty) = A \exp[-\varphi(x)], \quad (1.2)$$

если

$$A^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\varphi(x)] dx$$

является конечной величиной. Общей задачей является нахождение временных масштабов изменения вероятностного распределения от начального $W(x, 0)$ до финального $W(x, \infty)$.

Для решения УФП (1.1) применим преобразование Лапласа

$$Y(x, s) = \int_0^{\infty} W(x, t) e^{-st} dt.$$

Уравнение (1.1) запишется при этом в виде

$$\frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Y(x, s) \right] - \gamma^2 Y(x, s) = -B\delta(x - x_0), \quad (1.3)$$

где $\gamma^2 = sB$. Заметим, что поток вероятности в изображении Лапласа равен

$$\hat{G}(x, s) = \int_0^{\infty} G(x, t) e^{-st} dt = -\frac{1}{B} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Y(x, s) + \frac{dY(x, s)}{dx} \right].$$

Рассмотрим параболический потенциальный профиль

$$\varphi(x) = b_k(x - l_k)^2/2 + \varphi_{0k},$$

заданный в интервале $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Уравнение (1.3) в этом интервале примет вид

$$\frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} + \frac{d}{dx} [b_k(x - l_k)Y(x, s)] - \gamma^2 Y(x, s) = -B\delta(x - x_0). \quad (1.4)$$

Можно показать, что общее решение уравнения (1.4) при $b_k \neq 0$ может быть представлено в указанном интервале в виде

$$Y_k(x, s) = \exp(-\varphi(x)/2) \{A_k U(a, z) + C_k U(a, -z)\}, \text{ если } x_0 \notin [x_k, x_{k+1}].$$

Если же $x_0 \in [x_k, x_{k+1}]$, то $Y(x, s) = Y_k(x, s) + y(x, s)$, где

$$y(x, s) = \frac{B\Gamma(a + 1/2)}{(2\pi|b_l|)^{1/2}} \exp[(\varphi(x_0) - \varphi(x))/2] \begin{cases} U(a, z_0)U(a, -z), & x < x_0 \\ U(a, -z_0)U(a, z), & x > x_0 \end{cases} \equiv \begin{cases} y^-(x, s), & x < x_0 \\ y^+(x, s), & x > x_0, \end{cases}$$

здесь A_k, C_k - произвольные постоянные, $a = \sigma - 1/2 \operatorname{sgn} b_k$, $\sigma = \gamma^2/|b_k| = sB/|b_k|$, $z = |b_k|^{1/2}(x - l_k)$, $z_0 = |b_k|^{1/2}(x_0 - l_k)$ и $\Gamma(x)$ - гамма-функция. Функции Вебера $U(a, z)$, $U(a, -z)$ являются линейно независимыми решениями и обладают, в частности, следующими свойствами [11]: $U(a, \infty) = 0$, $U(a, -\infty) = \infty$.

1.2. Для определения произвольных постоянных A_k, C_k необходимо задаться граничными условиями, связанными с конкретным видом исследуемого потенциального профиля $\varphi(x)$ [3,6]. Так, например, для трех типов потенциальных профилей, изображенных на рис. 1-3 и анализируемых далее, нетрудно установить граничные условия, налагаемые на трансформации Лапласа плотностей и потоков вероятностей. Для профиля, изображенного на рис. 1

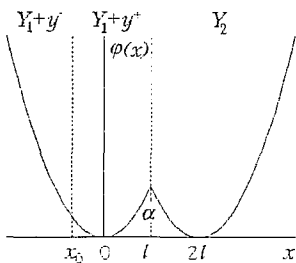


Рис.1

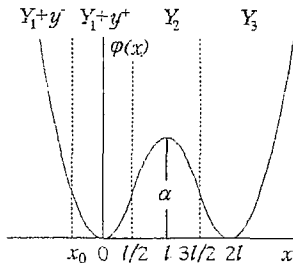


Рис.2

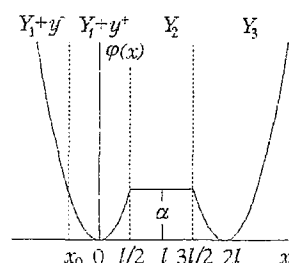


Рис.3

$$Y_1(-\infty, s) + y^-(-\infty, s) = 0, \quad Y_2(+\infty, s) = 0,$$

$$Y_1(l, s) + y^+(l, s) = Y_2(l, s),$$

$$\hat{G}(l-0, s) = \hat{G}(l+0, s);$$

для профилей, изображенных на рис.2 и 3

$$Y_1(-\infty, s) + y^-(-\infty, s) = 0, \quad Y_3(+\infty, s) = 0,$$

$$Y_1(l/2, s) + y^+(l/2, s) = Y_2(l/2, s), \quad Y_2(3l/2, s) = Y_3(3l/2, s),$$

$$\hat{G}(l/2 - 0, s) = \hat{G}(l/2 + 0, s), \quad \hat{G}(3l/2 - 0, s) = \hat{G}(3l/2 + 0, s).$$

2. Временные характеристики эволюции плотности вероятности

2.1. Приведем теперь метод определения характерного времени диффузии броуновских частиц в потенциальном профиле. Рассмотрим, например, потенциальный профиль, изображенный на рис. 4. Пусть начальное распределение $W(x, 0)$ как-то расположено в районе точки $x = x_0$. С течением времени плотность вероятности будет расплываться по оси x . Выберем на этой оси некоторую граничную точку $x = L > x_0$ и найдем среднее время, за которое броуновские частицы пересекут эту границу в положительном направлении. Введем вероятность

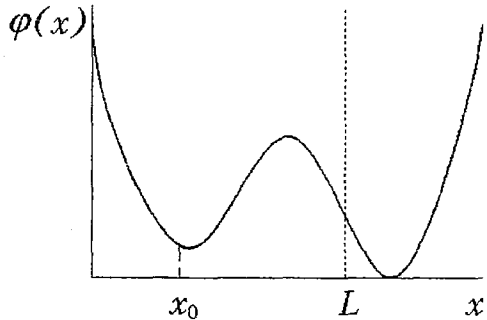


Рис. 4

$$P(t) = \int_{-\infty}^L W(x, t) dx,$$

которая уменьшается от $P(0)$ до $P(\infty)$

$$P(0) = \int_{-\infty}^L W(x, 0) dx, \quad P(\infty) = \int_{-\infty}^L W(x, \infty) dx = A \int_{-\infty}^L e^{-\varphi(x)} dx.$$

Согласно [6], характерное время эволюции вероятности равно

$$T = \frac{\int_0^{\infty} [P(t) - P(\infty)] dt}{P(0) - P(\infty)}. \quad (2.1)$$

Это определение работает, если изменение $P(t)$ происходит монотонно и достаточно быстро, так что интеграл в (2.1) сходится. В изображениях Лапласа это характерное время принимает вид [6]

$$T = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \hat{P}(s) - P(\infty)}{s [P(0) - P(\infty)]}, \quad \hat{P}(s) = \int_0^{\infty} P(t) e^{-st} dt. \quad (2.2)$$

Отыскание T , согласно (2.2), требует интегрирования решения уравнения (1.4) по координате, так как

$$\hat{P}(s) = \int_{-\infty}^L Y(x, s) dx.$$

Можно дать другой рецепт вычисления T согласно (2.2), не требующий указанного интегрирования, поскольку его можно провести заранее. Так, интегрируя исходное уравнение (1.1) по координате в указанных пределах, получим

$$\frac{dP(t)}{dt} = - \int_{-\infty}^L \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} dx = - G(L, t) + G(-\infty, t).$$

Полагая, что $G(-\infty, t) = 0$ и совершая преобразование Лапласа, найдем

$$s\hat{P}(s) - \hat{P}(0) = - G(L, s) = \frac{1}{B} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Y(x, s) + \frac{dY(x, s)}{dx} \right]_{x=L}.$$

Подставляя это в (2.2), находим окончательно

$$T = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[P(0) - P(\infty)] + \frac{1}{B} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Y(x) + \frac{dY(x)}{dx} \right]_{x=L}}{s[P(0) - P(\infty)]}. \quad (2.3)$$

Заметим, что если $W(x, 0) = \delta(x - x_0)$, то $P(0) = 1$, поскольку $x_0 < L$.

Таким образом, для определения скорости стохастического перехода броуновских частиц через некоторую границу $x = L$ потенциального профиля, достаточно знать решение УФП «в Лапласе» $Y(x, s)$ и его производную $dY(x, s)/dx$ только в точке $x = L$.

Перейдем теперь к конкретным примерам.

3. Времена релаксации бистабильных систем

Рассмотрим три примера бистабильных систем, потенциальные профили которых изображены на рис. 1-3. Поскольку для всех этих профилей существуют ненулевые равновесные вероятностные распределения $W(x, \infty)$, то характерное время T , определяемое согласно (2.1), есть ни что иное, как время релаксации θ равновесного распределения в этих системах.

3.1. Первый пример. Рассмотрим бистабильную систему с острым потенциальным барьером, безразмерный потенциальный профиль которой изображен на рис. 1 и равен ($b > 0$)

$$\varphi(x) = \begin{cases} bx^2/2, & x \leq l \\ b(x - 2l)^2/2, & x \geq l \end{cases}$$

Высота потенциального барьера равна $\alpha = bl^2/2 = \Delta\Phi/(kT)$, $\Delta\Phi = \Phi(l)$. Начальная дельта-образная плотность вероятности расположена в точке $x_0 < l$. С течением времени в бистабильной системе установится стационарное бимодальное вероятностное распределение $W(x, \infty) = Ae^{-\varphi(x)}$ (1.2). Найдем время установления этого распределения - время релаксации, воспользовавшись формулой (2.3) и положив $L = l$. Как очевидно, $P(0) = 1$, $P(\infty) = 1/2$.

Вычисления показывают, что значение $Y_2(x, s)$, справедливое для $x \geq l$, равно

$$Y_2(x, s) = \frac{B \exp(bx_0^2/4 - b(x - 2l)^2/4) U(\sigma - 1/2, -b^{1/2}x_0) U(\sigma - 1/2, b^{1/2}(x - 2l))}{b^{1/2}2\sigma U(\sigma + 1/2, -(2\alpha)^{1/2}) U(\sigma - 1/2, -(2\alpha)^{1/2})},$$

где $\sigma = sB/b$, $B = 2iD$.

Вычисляя значение $\hat{G}(x, s)$ в точке $x = l + 0$, используя свойства функций Вебера [11], на основании (2.3) получим следующее точное значение времени релаксации рассматриваемой бистабильной системы, справедливое для любой высоты потенциального барьера

$$\theta = [2/(bD)][A((2\alpha)^{1/2}) - A(b^{1/2}x_0)]. \quad (3.1)$$

Здесь введена функция

$$A(z) = \int_0^z \exp(x^2/2) \left[\int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt \right] dx, \quad (3.2)$$

которую можно разложить на четное и нечетное слагаемые

$$A(z) = A^0(z) + A^1(z). \quad (3.3)$$

Для малых z

$$A^0(z) = \int_0^z \exp(x^2/2) \left[\int_0^x \exp(-t^2/2) dt \right] dx = z^2/2! + 2z^4/4! + 2 \cdot 4z^6/6! + \dots, \quad (3.4)$$

$$A^1(z) = (\pi/2)^{1/2} \int_0^z \exp(x^2/2) dx = (\pi/2)^{1/2} (z + z^3/3! + 3z^5/5! + 3 \cdot 5z^7/7! + \dots).$$

Асимптотический ряд при $z \gg 1$ для функций $A^0(z)$, $A^1(z)$ имеет следующий вид

$$A^0(z) = A^1(z) = [(\pi/2)^{1/2} \exp(z^2/2)/z][1 + 1/z^2 + 1 \cdot 3/z^4 + 1 \cdot 3 \cdot 5/z^6 + \dots]. \quad (3.5)$$

Для анализа времени релаксации ограничимся случаем $x_0 = 0$. Для низкого потенциального барьера ($(2\alpha)^{1/2} \ll 1$) из формул (3.1) - (3.4) следует

$$\theta = [2/(bD)][(\pi\alpha)^{1/2} + \alpha + \dots]. \quad (3.6)$$

Пусть интенсивность флуктуаций kT много больше размерной высоты барьера $\Delta\Phi$, которая, как и расстояние от начального минимума до барьера l , сохраняется постоянной. В этом случае формулу (3.6) удобно записать в виде

$$\theta = hl^2/(2\Delta\Phi) [(\pi\Delta\Phi/(kT))^{1/2} + \Delta\Phi/(kT) + \dots]. \quad (3.7)$$

Таким образом, при возрастании интенсивности флуктуаций время релаксации, как и должно быть, стремится к нулю.

В другом предельном случае высокого барьера, когда интенсивность тепловых флуктуаций мала ($(2\alpha)^{1/2} \gg 1$), используя формулу (3.5), из (3.1) находим

$$\theta = 2\pi^{1/2}/(bD\alpha^{1/2}) e^\alpha [1 + 1/(2\alpha) + \dots]. \quad (3.8)$$

Таким образом, при малой интенсивности флуктуаций

$$\theta = \pi^{1/2} hl^2/(2\Delta\Phi) (kT/\Delta\Phi)^{1/2} \exp(\Delta\Phi/(kT)). \quad (3.9)$$

Практически такой же профиль был рассмотрен Крамерсом [1]. В наших обозначениях результат Крамерса равен

$$\theta_{Kr} = 2\pi^{1/2} hl^2/(2\Delta\Phi) (kT/\Delta\Phi)^{1/2} \exp(\Delta\Phi/(kT)). \quad (3.10)$$

Отличие в численном коэффициенте этой формулы от (3.9) связано с тем, что Крамерс полагал, что в точке $x = 2l$ плотность вероятности равна нулю, то есть он фактически помещал в точку $x = 2l$ поглощающую границу. А в этом случае за

вершину барьера с течением времени должны выйти все частицы, тогда как в нашем случае бистабильной системы за барьер выйдет только половина частиц, после чего установится стационарное распределение, и именно поэтому в нашем случае время релаксации θ получается вдвое меньшим.

Заметим, что точный расчет времени жизни метастабильного состояния, получаемого из изображенного на рис. 1 при размещении в точке $x = 2l$ поглощающей границы, в точности подтверждает формулу Крамерса (3.10) для высокого барьера.

С другой стороны, формула Крамерса (3.10), если попытаться ее использовать для большой интенсивности тепловых флуктуаций, дает даже качественно неверный результат по сравнению с точной формулой (3.7). При $kT \rightarrow \infty$ формула (3.10) приводит к $\theta \rightarrow \infty$, в то время как согласно (3.7) $\theta \rightarrow 0$, что физически очевидно.

Отметим, наконец, что время релаксации для рассматриваемого профиля, полученное приближенно в работе [10] для высокого барьера методом разложения по собственным функциям, полностью совпадает с формулой (3.9).

3.2. Второй пример. Рассмотрим бистабильную систему с гладким барьером, безразмерный потенциальный профиль которой состоит из трех парабол одинаковой крутизны $b > 0$ (см.рис. 2),

$$\varphi(x) = \begin{cases} bx^2/2, & x \leq l/2, \\ -b(x-l)^2/2 + bl^2/4, & l/2 < x < 3l/2, \\ b(x-2l)^2/2, & x \geq 3l/2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Безразмерная высота потенциального барьера равна $\alpha = bl^2/4$.

Для нахождения времени релаксации выберем граничную точку на вершине барьера ($L = l$). Решение уравнения (1.3) в области $l/2 < x < 3l/2$ имеет вид

$$Y_2(x, s) = \exp(b(x-l)^2/4) [A_2 U(\sigma+1/2, -b^{1/2}(x-l)) + C_2 U(\sigma+1/2, b^{1/2}(x-l))], \quad (3.12)$$

где $\sigma = sB/b$, $A_2 = Fp/(q^2 - p^2)$, $C_2 = Fq/(q^2 - p^2)$,

$$F = B/b^{1/2} U(\sigma - 1/2, -b^{1/2}x_0) \exp(bx_0^2/4 - \alpha/2),$$

$$p = U(\sigma-1/2, -\alpha^{1/2}) U(\sigma-1/2, \alpha^{1/2}) - \sigma U(\sigma+1/2, -\alpha^{1/2}) U(\sigma+1/2, \alpha^{1/2}),$$

$$q = \sigma U^2(\sigma+1/2, -\alpha^{1/2}) + U^2(\sigma-1/2, -\alpha^{1/2}).$$

Подставляя (3.12) в (2.3), можно получить следующее точное выражение для времени релаксации бистабильной системы с потенциальным профилем (3.11)

$$\theta = 2/(bD) \{ 2A^0(\alpha^{1/2}) + A^1(\alpha^{1/2}) - A(b^{1/2}x_0) + (\pi/2) e^\alpha \operatorname{erf}((\alpha/2)^{1/2}) [1 + \operatorname{erf}((\alpha/2)^{1/2})] \}. \quad (3.13)$$

Для высокого барьера ($\alpha > 3$) и $x_0 = 0$

$$\theta = 2\pi e^\alpha / (bD). \quad (3.14)$$

Подобный случай, когда профиль имеет гладкие параболические яму и барьер, также был рассмотрен Крамерсом [1]. В наших обозначениях формула Крамерса имеет вид

$$r_{Kr} = 4\pi e^\alpha / (bD)$$

Как и ранее, различие в два раза вызвано тем, что Крамерс помещал во втором минимуме ($x=2l$) поглощающую границу и рассматривал, фактически, метастабильное состояние, которое с течением времени должны покинуть все частицы.

Если потенциальный барьер рассматриваемой бистабильной системы низкий ($\alpha \ll 1$), то из (3.13) следует, что

$$\theta = 2/(bD) [(2\pi)^{1/2}\alpha^{1/2} + 2\alpha + \dots]. \quad (3.15)$$

Если размерная высота барьера $\Delta\Phi$, как и расстояние от минимума до вершины барьера l , сохраняются постоянными, в то время как изменяется лишь интенсивность тепловых флуктуаций, то из (3.15) следует

$$\theta = hl^2/(2\Delta\Phi) \{[\pi\Delta\Phi/(2kT)]^{1/2} + \Delta\Phi/(kT) + \dots\}.$$

3.3. Третий пример. Рассмотрим бистабильную систему, обладающую плоским потенциальным барьером (см.рис. 3)

$$\varphi(x) = \begin{cases} bx^2/2, & x \leq l/2, \\ bl^2/8, & l/2 < x < 3l/2, \\ b(x - 2l)^2/2, & x \geq 3l/2. \end{cases}$$

Как и в предыдущих случаях, выберем L на вершине барьера ($L = l$). Выполняя описанную выше процедуру, можно получить следующий точный результат для времени релаксации равновесного распределения в таком потенциальном профиле:

$$\theta = 2/(bD) \{A((2\alpha)^{1/2}) - A(b^{1/2}x_0) + \pi^{1/2}\alpha^{1/2} e^\alpha [1 + \operatorname{erf}(\alpha^{1/2})] + \alpha\},$$

Для высокого барьера ($\alpha > 3$) и $x_0 = 0$ время релаксации имеет следующий вид:

$$\theta = 2/(bD) 2\pi^{1/2}\alpha^{1/2} e^\alpha. \quad (3.16)$$

В случае низкого барьера нетрудно получить следующее асимптотическое разложение:

$$\theta = 2/(bD) [2\pi^{1/2}\alpha^{1/2} + 4\alpha + \dots]. \quad (3.17)$$

3.4. Анализ результатов. Проведем теперь общий сравнительный анализ полученных времен релаксации для трех рассмотренных примеров. Начнем со случая высокого барьера.

В соответствии с формулами (3.8), (3.14), (3.16) время релаксации для острого (sharp), гладкого (smooth) и плоского (flat) барьеров равно, соответственно,

$$\theta_{sh} = 2/(bD)\pi^{1/2}\alpha^{1/2}e^\alpha, \quad \theta_{sm} = 2/(bD)\pi e^\alpha, \quad \theta_{fl} = 2/(bD)2\pi^{1/2}\alpha^{1/2}e^\alpha. \quad (3.18)$$

В этих формулах естественно выделяется фактор Крамерса e^α , дающий основной вклад высокого потенциального барьера в значение времени релаксации. Префактор отражает зависимость времени релаксации от конкретной формы потенциальной ямы и потенциального барьера.

Примечательно, что множитель $\alpha^{1/2}$ не входит в «среднюю» формулу (3.18) и совершенно по-разному входит в «крайние» значения θ . Причиной этого, по нашему мнению, является то, что гладкий барьер, будучи параболическим, представляет, фактически, линейную систему, описываемую линейным исходным уравнением Ланжевена, в то время как «крайние» барьеры описываются нелинейным уравнением Ланжевена, причем у них нелинейности «обратные» по отношению к чисто параболическому барьеру: один более крутой чем парабола, другой более пологий. Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и для времени установления равновесного распределения в моностабильных системах. Так, время релаксации стационарного вероятностного распределения в линейной системе (параболический потенциальный профиль) не зависит от интенсивности воздействующего шума D , которая, однако, существенно влияет на время релаксации нелинейных моностабильных систем, причем качественно по-разному в зависимости от того, является ли потенциальный профиль нелинейной системы более крутым чем парабола или более пологим, [12, гл. 15].

Для низких потенциальных барьеров ($\alpha \ll 1$) времена релаксации в соответствии с формулами (3.6), (3.15), (3.17) имеют следующий вид:

$$\theta_{sh} = 2/(bD)[\pi^{1/2}\alpha^{1/2} + \alpha + \dots], \theta_{sm} = 2/(bD)[(2\pi)^{1/2}\alpha^{1/2} + 2\alpha + \dots], \theta_{pl} = 2/(bD)[2\pi^{1/2}\alpha^{1/2} + 4\alpha + \dots].$$

Легко видеть, что разница между этими значениями времен релаксации только численная. Она легко может быть объяснена, если принять во внимание различную ширину потенциальных барьеров как расстояния от минимумов потенциальных ям до вершин потенциальных барьеров w . Если мы зафиксируем ширину барьеров $w_{sh} = w_{sm} = w_{pl} = w = l$, предполагая различными высоты барьеров $\alpha_{sh} = bl^2/2$, $\alpha_{sm} = bl^2/4$, $\alpha_{pl} = bl^2/8$, то времена релаксации для всех трех случаев низкого барьера станут одинаковыми

$$\theta = 2/(bD)[\pi^{1/2}b^{1/2}w/2^{1/2} + bw^2/2 + \dots].$$

Таким образом, в случае малой высоты барьера основной вклад во время релаксации дает именно ширина барьера, а форма не играет заметной роли. Лишь по мере возрастания высоты барьера начинает сказываться его форма.

Заключение

На основании вышеизложенного могут быть сформулированы следующие общие замечания о зависимости $\theta = \theta(\alpha)$ - времени релаксации бистабильных кусочно-параболических систем от безразмерной высоты потенциального барьера.

1. Множитель Крамерса e^α появляется в $\theta(\alpha)$ только для высокого барьера, когда $e^\alpha \gg 1$.

2. При низком потенциальном барьере ($\alpha \ll 1$) время релаксации зависит главным образом от ширины барьера.

3. Непараболичность высокого потенциального барьера отражается на отклонении $\theta(\alpha)$ от закона Крамерса $\theta \sim e^\alpha$. По характеру отклонения можно судить о форме потенциального барьера.

4. Для высоких потенциальных барьеров в префакторах могут быть выделены множители, отвечающие за форму потенциальной ямы, за форму потенциального барьера и за ширину барьера. Так, множитель $2/(bD)$, одинаковый для всех трех префакторов в (3.18), есть время релаксации в моностабильной параболической потенциальной яме*: $\varphi(x) = bx^2/2$, $-\infty < x < \infty$. Множители $\pi^{1/2}/\alpha^{1/2}$, $\pi/2^{1/2}$ и $\pi^{1/2}\alpha^{1/2}$ отражают влияние формы потенциальных барьеров, а множители 1, $2^{1/2}$ и 2 связаны с различной шириной барьеров.

Авторы выражают благодарность Н.В. Агудову за интерес к работе и ценные замечания.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 94-02-04698-а).

Библиографический список

1. *Kramers H.* Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // *Physica*. 1940. Vol.7. P. 284.
2. *Hänggi P. Talkner P., Borkovec M.* Reaction-rate theory: fifty years after Kramers // *Rev.Mod.Phys.* 1990. Vol.62. P. 251.
3. *Risken H.* The Fokker - Planck Equation. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
4. *Малахов А.Н.* Диффузия через резкие потенциальные барьеры 1. Точное решение // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1991. Т. 34, № 5. С. 536.

* Рассматривая размерный параболический потенциальный профиль $\Phi(x) = ax^2/2$, легко убедиться, что, как должно быть для линейной системы, время релаксации $2/bD = \hbar/a$ не зависит от интенсивности воздействующего шума.

5. Малахов А.Н. Диффузия через резкие потенциальные барьеры 2. Временные характеристики диффузии // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 6. С. 681.

6. Агудов Н.В. Малахов А.Н. Нестационарная диффузия через произвольный кусочно-линейный потенциальный профиль. Точное решение и временные характеристики // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 2. С.148.

7. Blomberg C. The Brownian motion theory of chemical transition rates // Physica(Utrecht) A. 1977. Vol. 86. P. 49.

8. Edholm O., Leimar O. The accuracy of Kramers' theory of chemical kinetics // Physica A. 1979. Vol. 98. P. 313.

9. Larson R.S., Kostin M.D. Kramers' theory of chemical kinetics: Eigenvalue and eigenfunction analysis // Journ. Chem. Phys. 1978. Vol. 69, № 11. P. 4821.

10. Larson R.S. Thermally activated crossing of a sharp potential barrier // Journ. Chem. Phys. 1984. Vol. 81, № 4. P. 1731.

11. Miller J.C.P. Tables of Weber parabolic cylinder functions. London, Her Majesty's Stationery Office, 1955.

12. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. Радио, 1978.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 12.11.94

TEMPORAL SCALES OF STOCHASTIC TRANSITIONS IN THE PIECEWISE-PARABOLIC BISTABLE SYSTEMS WITH NOISE

A.N. Malakhov, A.L.Pankratov

The kinetics of stochastic transitions from one stable state to another in bistable systems with noise which are described by piecewise-parabolic potential profiles is considered. Using the method of the Laplace transform of the initial Fokker - Planck equation it has obtained the exact values of the mean transition times (i.e. relaxation times) of Brownian particles across the potential barriers, which separate the stable states. For the three concrete piecewise-parabolic profiles it has been made a comparative analysis of the obtained results with the well-known approximate Kramers' results. The influence of the shape and width of the potential barriers on the relaxation times is analyzed. There are found the factors of the relaxation time structure, which represent the shape of stable state and the shape, height and width of a potential barrier.



Малахов Аскоłд Николаевич - родился в 1926 году, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки РФ, профессор кафедры статистической радиофизики Нижегородского государственного университета. Область научных интересов: шумы и флуктуации в динамических системах и средах; теория негауссовых случайных процессов; случайные волны; броуновское движение в нелинейных системах. Общее число публикаций в отечественных и иностранных журналах около 200, из них 4 монографии в центральных издательствах (одна за рубежом).



Панкратов Андрей Леонидович - родился в 1971 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1993). Аспирант кафедры статистической радиофизики ННГУ. Область научных интересов: шумы и флуктуации в динамических системах, броуновское движение в нелинейных системах.



ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НА ТЕМПЕРАТУРНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ ЕГО ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ

Н. В. Азудов, А. Н. Малахов

Исследованы температурные зависимости полученных точных значений времен жизни метастабильных состояний, описываемых кусочно-линейными и кусочно-параболическим потенциальными профилями. Показано, что при любой высоте потенциального барьера его форма, равно как и форма остальной части потенциального профиля, существенно влияют на время жизни метастабильного состояния τ и, в частности, на его температурную зависимость. Найдено, что хорошо известный закон Аррениуса $\tau = \theta_0 \exp(E/kT)$ ($\theta_0 = \text{const}$) справедлив лишь для некоторых конкретных форм потенциального профиля и при малых интенсивностях флуктуаций $kT \ll E$. Показано, что различные отклонения температурной зависимости времен жизни метастабильных состояний от закона Аррениуса, когда префактор θ_0 становится функцией температуры $\theta_0 = \theta_0(kT)$ могут быть объяснены как непараболическостью профилей, описывающих потенциальную яму и потенциальный барьер метастабильного состояния, так и учетом произвольного выбора высоты потенциального барьера E по отношению к интенсивности флуктуаций kT . В конце работы приведена таблица зависимости $\theta_0(kT)$ для ряда конкретных форм потенциальных ям и барьеров при $kT \ll E$.

Введение

1. Задача определения характерных времен индуцированных шумом переходов динамических систем через энергетические барьеры возникает при решении различных проблем в физике, химии и биологии [1-6]. В наиболее простом виде эта задача сводится к нахождению временных характеристик броуновского движения в потенциальном поле $U(x)$ и описывается одномерным уравнением Ланжевена в пределе большой вязкости

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{dU(x)}{\eta dx} + \xi(t), \quad (1)$$

где η - вязкость, $\xi(t)$ - случайная сила - белый гауссов шум, $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \xi(t + \theta) \rangle = D\delta(\theta)$, $D = 2kT/\eta$ - интенсивность шума, kT - температура. Как известно [1], уравнению (1) соответствует уравнение Фоккера - Планка (УФП)

для плотности вероятности $W(x, t)$

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{kT}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{du(x)}{dx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] W(x, t) \equiv \hat{L}_{\text{фп}} W(x, t) \quad (2)$$

с граничными условиями $W(\pm\infty, t) = 0$. Здесь $\hat{L}_{\text{фп}}$ - оператор Фоккера - Планка, $u(x) = U(x)/kT$ - безразмерный потенциал.

В настоящей статье рассматриваются динамические системы, обладающие потенциальными профилями, имеющими один минимум ($x_{\text{min}} = 0$) и один максимум ($x_{\text{max}} = L$, рис. 1). Слева, при $x < 0$ потенциал неограниченно возрастает, справа, при $x > 0$ имеется барьер, безразмерная высота которого равна $\beta \equiv E/kT$, $E = U(L) - U(0)$ - так называемая энергия активации. За барьером при $x \rightarrow \infty$ $U(x) \rightarrow -\infty$. Такой потенциальный профиль описывает метастабильное состояние системы в точке $x = 0$. В отсутствие флуктуаций броуновская частица, однажды попав в минимум (то есть в метастабильное состояние), будет оставаться в нем бесконечно долго. Под воздействием флуктуаций частица за некоторое время может преодолеть потенциальный барьер и скатиться в бесконечно глубокую потенциальную яму, начинающуюся за барьером, что соответствует разрушению метастабильного состояния системы. Среднее время, за которое это произойдет, характеризует скорость преодоления потенциального барьера броуновскими частицами и называется временем жизни метастабильного состояния. В настоящей статье изучаются температурные зависимости времен жизни таких метастабильных состояний, описываемых некоторыми конкретными потенциальными профилями.

2. Известно, что основным фактором, определяющим время жизни метастабильного состояния τ является безразмерная высота барьера β . Многие экспериментальные данные удовлетворительно описываются выражением

$$\tau = \theta_0 \exp(E/kT), \quad (3)$$

где θ_0 - характерное время системы, не зависящее от температуры. Выражение (3) хорошо известно также как закон Аррениуса, являющийся обобщением экспериментальных данных, применительно к скорости химических реакций $r = \tau^{-1}$. Теоретическое объяснение (3) было предложено Френкелем [7], а также Поланьи, Эйрингом и др. [8], и затем более детально на основе анализа УФП (2) Крамерсом [5]. Оно основано на предположении, что для малых интенсивностей воздействующих флуктуаций ($kT \ll E$) вероятностное распределение $W(x, t)$ внутри потенциальной ямы считается стационарным, бальцмановским $W(x, t) \sim \exp(-U(x)/kT)$.

Тем самым закон Аррениуса (3) справедлив только для высоких потенциальных барьеров $\beta \gg 1$ и неявно предполагает, что форма потенциального барьера и ямы не оказывают существенного влияния на время жизни метастабильного состояния, имеет значение лишь высота потенциального барьера E и интенсивность флуктуаций kT . Параметры θ_0 и E формулы Аррениуса обычно определяются по графику аррениусовой прямой (то есть по графику температурной зависимости $\ln(\tau)$ от $1/kT$). С другой стороны, к настоящему времени накоплены многочисленные экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что в ряде случаев наблюдается отклонение от закона Аррениуса, то есть отклонение графика $\ln[\tau(1/kT)]$ от прямой линии, например, явление аномальной диффузии в твердых телах [9] и при этом отсутствует общепринятая интерпретация этого отклонения [10].

3. В настоящей статье на основе использования точных значений времен жизни различных метастабильных состояний для произвольной высоты потенциального барьера показано, что различные отклонения температурной зависимости времен жизни метастабильных состояний от закона Аррениуса (3)

могут быть объяснены как непараболичностью профилей, описывающих потенциальную яму и потенциальный барьер метастабильного состояния, так и учетом произвольного выбора безразмерной высоты потенциального барьера. В конце работы приведены температурные зависимости $\theta_0(kT)$, соответствующие различным формам потенциальных барьеров и ям при $kT \ll E$, то есть полученные в рамках метода Крамерса.

1. Произвольная высота потенциального барьера. Точные результаты

1. Рассмотрим следующие безразмерные потенциальные профили, описывающие метастабильное состояние системы, изображенные на рис. 1-4, соответственно

$$u_{\text{par}}(x) = \beta \begin{cases} 2(x/L)^2, & x \leq L/2, \\ 1 - 2(x/L - 1)^2, & x \geq L/2, \end{cases} \quad (4)$$

$$u_{\text{rect}}(x) = \begin{cases} \infty & x = -L/2, \\ 0, & -L/2 < x < L/2, \\ \beta, & L/2 < x < 3L/2, \\ -\infty & x = 3L/2, \end{cases} \quad (5)$$

$$u_{\text{tri}}(x) = \beta \begin{cases} |x|/L, & x \leq L, \\ -x/L + 2, & x \geq L, \end{cases} \quad (6)$$

$$u_{\text{trap}}(x) = \beta \begin{cases} -x/l - 1/(2\mu) + 1/2, & x \leq (l - L)/2, \\ 0, & (l - L)/2 \leq x \leq (L - l)/2, \\ x/l - 1/(2\mu) + 1/2, & (L - l)/2 \leq x \leq (L + l)/2, \\ 1, & (L + l)/2 \leq x \leq (3L - l)/2, \\ -x/l + 3/(2\mu) + 1/2, & (3L - l)/2 \leq x. \end{cases} \quad (7)$$

Все эти потенциальные профили имеют одинаковую высоту β и одинаковую ширину L потенциального барьера и различаются только формой. Трапецевидный потенциальный прсфиль $u_{\text{trap}}(x)$ является комбинацией прямоугольного $u_{\text{rect}}(x)$ и

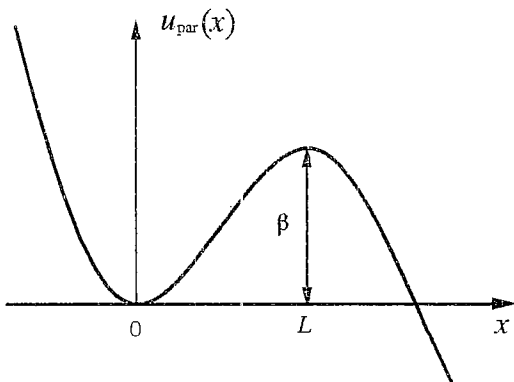


Рис. 1.

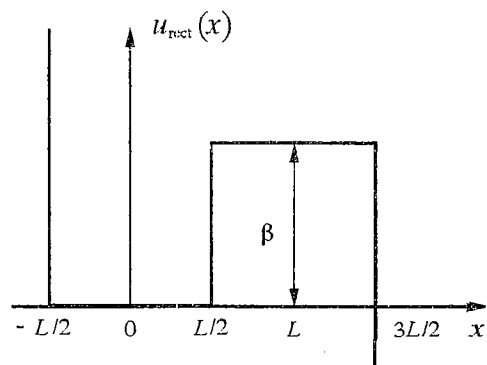


Рис. 2.

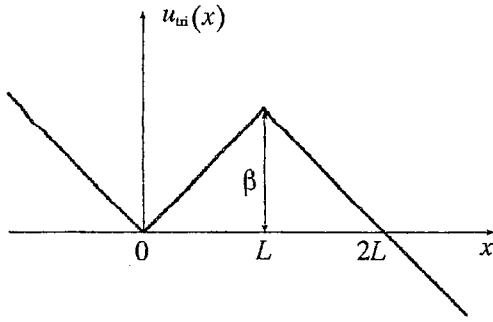


Рис. 3.

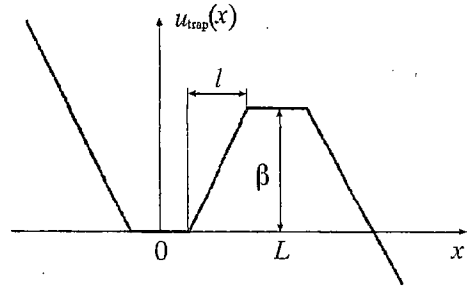


Рис. 4.

треугольного $u_{tri}(x)$. Безразмерный параметр $\mu = l/L \in [0,1]$ описывает относительную ширину наклонной части трапецевидного барьера. При $\mu \rightarrow 0$ трапецевидный потенциальный профиль превращается в прямоугольный: $u_{trap}(x) \rightarrow u_{rect}(x)$; при $\mu \rightarrow 1$ - в треугольный: $u_{trap}(x) \rightarrow u_{tri}(x)$.

2. Время жизни метастабильных состояний определяется, согласно [11], как характерное время изменения вероятности нахождения частиц слева от барьера $Q(t, L)$ от начального значения $Q(0, L)$ до финального $Q(\infty, L) = 0$, поскольку с течением времени все частицы уйдут за барьер. Здесь

$$Q(t, L) = \int_{-\infty}^L W(x, t) dx.$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ все частицы находятся в точке $x = 0$, тогда $Q(0, L) = 1$ и время жизни метастабильного состояния равно

$$\tau = \int_0^{\infty} Q(t, L) dt. \quad (8)$$

Используя результаты работ [12,13] для кусочно-параболического профиля и результаты работы [11] для кусочно-линейных потенциальных профилей, можно получить, согласно (8), следующие времена жизни рассматриваемых метастабильных состояний:

$$\tau_{par} = \theta_L \{ \pi/4 e^{\beta} [1 + (2/\pi)^{1/2} \int_0^{\beta^{1/2}} \exp(-t^2/2) dt]^2 + A(\beta^{1/2}) \}, \quad (9)$$

$$\tau_{rect} = \theta_L \beta (e^{\beta} + 3/4), \quad (10)$$

$$\tau_{tri} = \theta_L (1/\beta) (4 e^{\beta} - \beta - 3), \quad (11)$$

$$\tau_{trap} = \mu^2 \tau_{tri} + \theta_L \mu (1 - \mu) (4 e^{\beta} - 3/2) + (1 - \mu)^2 \tau_{rect}. \quad (12)$$

Здесь $\theta_L = \eta L^2/E$ - величина, имеющая размерность времени и не зависящая от температуры, $\beta = E/kT$ - безразмерная высота потенциального барьера. Входящая в (9) функция $A(z)$ вычисляется по формуле [12,13]

$$A(z) = \int_0^z \exp(x^2/2) \left[\int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt \right] dx$$

и может быть разложена на четное и нечетное слагаемые

$$A(z) = A^0(z) + A^1(z).$$

Для малых $z \ll 1$

$$A^0(z) = z^2/2! + 2z^4/4! + 2 \cdot 4z^6/6! + \dots,$$

$$A^1(z) = (\pi/2)^{1/2}(z + z^3/3! + 3z^5/5! + 3 \cdot 5z^7/7! + \dots).$$

При $z \gg 1$ функции $A^0(z)$, $A^1(z)$ представляются асимптотическим рядом:

$$A^0(z) = A^1(z) = (\pi/2)^{1/2} \exp(z^2/2)/z(z + 1/z^2 + 1 \cdot 3/z^4 + 1 \cdot 3 \cdot 5/z^6 + \dots).$$

Формулы (9) - (12) являются точными и справедливы при любой величине $\beta \in [0; \infty]$. Пусть для всех метастабильных состояний $E = \text{const}$, $L = \text{const}$ - высота и ширина размерного барьера фиксированы, и меняется лишь температура kT . В этом случае в формулах (9) - (12) будет изменяться только безразмерная высота потенциального барьера $\beta \sim 1/kT$.

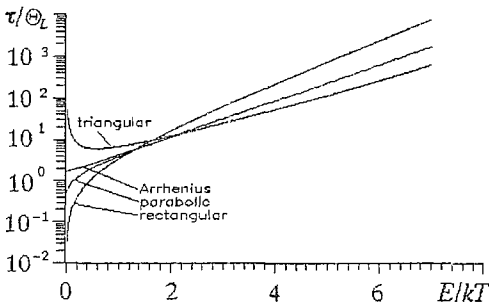


Рис. 5.

Как видно из сравнения (9) - (12), форма потенциального профиля существенно влияет на время жизни метастабильного состояния, поскольку при произвольной высоте барьера β все эти выражения различны. Графики $\ln(\tau_i(\beta)/\theta_L)$, соответствующие (9) - (11), изображены на рис. 5, где прямая линия, к которой стремится $\tau_{\text{par}}(\beta)$ при $\beta \rightarrow \infty$, есть аррениусова прямая (3) ($\theta_0 = \pi\theta_L/2$).

3. Начнем анализ со случая низких барьеров - большого шума. Интуитивно кажется, что чем больше интенсивность шума kT , выталкивающего частицу из потенциальной ямы, тем меньше должно быть время жизни любого метастабильного состояния. Однако, из (11) следует, что при $kT \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$) время жизни $\tau_{\text{tri}} \rightarrow \infty$, вместе с этим $\lim_{\beta \rightarrow 0} \tau_{\text{rect}} = 0$ и $\lim_{\beta \rightarrow 0} \tau_{\text{par}} = \text{const}$. Такое сильно

качественное различие в поведении времен жизни метастабильных состояний можно понять, если рассмотреть, как меняются их безразмерные потенциальные профили $u_{\text{par}}(x)$, $u_{\text{rect}}(x)$ и $u_{\text{tri}}(x)$ с увеличением температуры. В треугольном метастабильном потенциальном профиле $u_{\text{tri}}(x)$ (см. рис. 3) с ростом температуры будет уменьшаться не только безразмерная высота барьера β , но и наклон стенок всего потенциального профиля. Это означает, что с увеличением интенсивности флуктуаций броуновской частице станет не только «легче» перескочить через барьер, но еще легче вернуться назад в область $x < L$, так как стенки барьера станут более пологими. Кроме того, уменьшение наклона левой стенки потенциальной ямы означает, что частица, прежде чем преодолеть барьер, может достаточно далеко сместиться в область $x < 0$. Все это замедляет уменьшение времени жизни треугольного метастабильного состояния с увеличением kT , а начиная с $kT \sim 2E$ время жизни этого метастабильного состояния уже увеличивается с ростом kT . При $kT \rightarrow \infty$ диффузия через барьер становится настолько медленной, что определение (8) для времени жизни метастабильного состояния перестает работать и дает $\tau_{\text{tri}} = \infty$.

В прямоугольном безразмерном потенциальном профиле $u_{\text{rect}}(x)$ с ростом kT будет уменьшаться лишь высота барьера β , в то время как положение и наклон вертикальных стенок ямы и барьера останутся неизменными. Таким образом, в потенциальном профиле $u_{\text{rect}}(x)$ при любых температурах диффузия броуновской частицы влево всегда ограничена точкой $x = -L/2$, а после попадания в точку

$x = 3L/2$, то есть в бесконечно глубокую потенциальную яму, частица уже никогда оттуда не возвратится. Поэтому время жизни метастабильного состояния, описываемого ступенчатым потенциальным профилем, $\tau_{\text{rect}} \rightarrow 0$ при $kT \rightarrow \infty$.

Время жизни метастабильного состояния, описываемого кусочно-параболическим потенциальным профилем $u_{\text{par}}(x)$, занимает, в этом смысле, промежуточное положение: при $kT \rightarrow \infty$, $\tau_{\text{par}} \rightarrow \text{const}(kT) \neq 0$. Наклон стенок безразмерного потенциального профиля $u_{\text{par}}(x)$, конечно, уменьшается с ростом kT , но вместе с этим остается при $x \rightarrow \pm\infty$ существенно большим, чем для треугольного потенциального профиля. Это ограничивает диффузию броуновской частицы влево в область $x < 0$ и одновременно сдерживает ее возвращение из забарьерной области $x > L$.

Для трапецевидного метастабильного состояния из (12) следует, что первое слагаемое пропорциональное τ_{tri} характеризует вклад от пологих стенок барьера и ямы. Последнее слагаемое в (12) пропорциональное τ_{rect} описывает вклад от плоских дна ямы и вершины барьера. При больших температурах $kT \gg E$, $\beta \ll 1$, $\tau_{\text{trap}} \rightarrow \tau_{\text{tri}}$ для любого $\mu \neq 0$, то есть первое слагаемое в выражении (12) будет определяющим. Следовательно, в этом случае вид температурной зависимости времени жизни (12) определяется формой стенок потенциальных барьера и ямы. Это связано с тем, что при больших температурах безразмерная высота барьера настолько мала, что его практически не существует и, поэтому, время жизни метастабильного состояния определяется поведением потенциала при $x \rightarrow \pm\infty$.

Таким образом, при большой интенсивности возмущающего шума по сравнению с высотой барьера ($kT \gtrsim E$) форма потенциального профиля существенно влияет на величину времени жизни метастабильного состояния вплоть до того, что это время, вопреки интуитивным представлениям, может возрастать с ростом температуры.

4. Рассмотрим теперь времена жизни метастабильных состояний в пределе малых температур, то есть в пределе высоких потенциальных барьеров.

Из точных формул (9) - (12) следует, что при $e^{\beta} \gg \beta$

$$\tau_{\text{par}} \approx \theta_L(\pi/2)e^{\beta} \sim e^{E/kT}, \quad (13)$$

$$\tau_{\text{rect}} \approx \theta_L\beta e^{\beta} \sim (1/kT) e^{E/kT}, \quad (14)$$

$$\tau_{\text{tri}} \approx \theta_L(4/\beta)e^{\beta} \sim kTe^{E/kT}, \quad (15)$$

$$\tau_{\text{trap}} \approx \theta_L[4\mu^2/\beta + 4\mu(1-\mu) + (1-\mu)^2]e^{\beta} \sim [4\mu^2kT + 4\mu(1-\mu) + (1-\mu)^2/kT]e^{E/kT}. \quad (16)$$

Отсюда видно, что основным фактором, определяющим температурную зависимость времен жизни, при малых температурах становится аррениусов множитель $\exp(E/kT)$. Вместе с этим, влияние формы метастабильных потенциальных профилей на температурную зависимость времен жизни переносится в предэкспоненциальный множитель. Формула (13) есть фактически закон Аррениуса (3), так как в нем предэкспоненциальный множитель не зависит от температуры.

В (14)-(16) зависимость предэкспоненциального множителя от температуры оказывается разной. Это связано с различной зависимостью от температуры времен релаксации в соответствующих потенциальных минимумах. В самом деле, если записать выражения (13) - (16) для времен жизни метастабильных состояний в следующем виде:

$$\tau_{\text{par}} \approx \theta_{p1}e^{\beta}, \quad \tau_{\text{rect}} \approx \theta_{p2}e^{\beta}, \quad \tau_{\text{tri}} \approx \theta_{p3}e^{\beta}, \quad \tau_{\text{trap}} \approx \theta_{p4}e^{\beta},$$

то окажется, что времена θ_{p1} , θ_{p2} , θ_{p3} и θ_{p4} есть ни что иное, как времена релаксации плотности вероятности $W(x, t)$ к стационарному распределению

$W_{st}(x) \sim \exp(-U(x)/kT)$ в параболической, в прямоугольной, в треугольной и трапециевидной потенциальных ямах, соответственно. Таким образом, множитель θ_0 в формуле Аррениуса (3) имеет смысл времени установления стационарного распределения $W_{st}(x)$ в соответствующей потенциальной яме. Температурные зависимости времен релаксации в потенциальных ямах различной формы проанализированы методами кумулянтного анализа в работе [14], где показано, что лишь в параболической потенциальной яме (то есть в случае, когда уравнение (1) линейно) время релаксации не зависит от интенсивности воздействующих флуктуаций, в то время как непараболическая потенциальная яма ведет к сильной зависимости времени релаксации от интенсивности флуктуаций (см. также [12]).

Как следует из (16), при температурах малых настолько, что $\beta \gg 1$, время жизни трапециевидного метастабильного состояния определяется формами дна ямы и вершины барьера, поскольку в этом случае $\tau_{\text{пар}} \rightarrow \tau_{\text{rect}}$. Это объясняется тем, что если тепловая энергия броуновской частицы мала, то она надолго задерживается на участках, где регулярная сила $F(x) = -dU(x)/dx$ наименьшая, то есть там, где почти ничто не заставляяет ее двигаться. Поэтому при низких температурах именно формы этих участков (в случае метастабильного потенциального профиля - это как раз дно ямы и вершина барьера) определяют температурную зависимость предэкспоненциального множителя в выражении для времени жизни метастабильного состояния. Форма же стенок барьера и ямы становится несущественной.

Таким образом, различие в температурной зависимости времен жизни метастабильных состояний, вызванное различной формой потенциальных профилей, описывающих эти метастабильные состояния, имеет место при любой высоте безразмерного потенциального барьера, и можно сказать, что это различие обязано разной ангармоничности колебаний в непараболических потенциальных ямах.

Кроме того, обобщая вышесказанное, можно утверждать, что какой бы ни была форма всего потенциального профиля, описывающего метастабильное состояние, температурная зависимость времени жизни при высоких температурах будет определяться поведением потенциального профиля при $x \rightarrow \pm\infty$, а при низких - формой дна ямы, формой вершины барьера и высотой барьера. И если, например, некоторый потенциальный профиль $u(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ будет линейным, то при высоких температурах $kT \gg E$ зависимость времени жизни τ такого метастабильного состояния будет совпадать с $\tau_{\text{ли}}(kT)$. Или, если форма $u(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ будет параболической, то при $kT \gg E$ температурная зависимость $\tau(kT)$ будет иметь вид $\tau_{\text{par}}(kT) = \text{const}$ и т. д. Если же дно ямы и вершина барьера метастабильного потенциального профиля будут плоскими, то при малых температурах $kT \ll E$, какой бы ни была форма остальной части потенциального профиля, температурная зависимость времени жизни такого метастабильного состояния будет иметь вид $\tau_{\text{rect}}(kT)$ (10). Если дно ямы и вершина барьера имеют параболическую форму, то при $kT \ll E$ температурная зависимость будет аррениусовой (3) и т. д.

5. До сих пор мы анализировали метастабильные потенциальные профили, имеющие одинаковые по форме яму и барьер. Поставим вопрос: как влияет на время жизни метастабильного состояния отдельно форма ямы и отдельно форма потенциального барьера.

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим метастабильные состояния, описываемые потенциальными профилями $u_1(x)$ и $\tilde{u}_1(x)$, изображенными на рис. 6, а, б и имеющими различные формы ямы и барьера. Заметим, что эти профили можно считать взаимоперевернутыми. Форма ямы (барьера) одного профиля переходит в форму барьера (ямы) другого.

Времена жизни этих метастабильных состояний, как можно вычислить на основании [11], оказываются одинаковыми

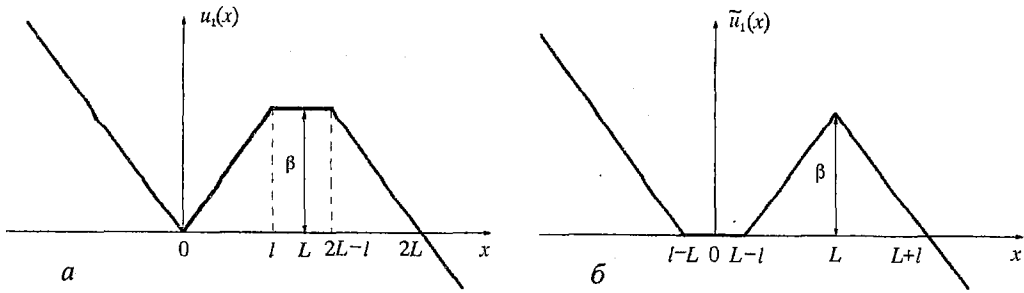


Рис. 6

$$\tau_1 = \tilde{\tau}_1 = \theta_L [\mu^2(4e^\beta - \beta - 3)/\beta + \mu(1 - \mu)(4e^\beta - 1) + (1 - \mu)^2 3/2\beta]. \quad (18)$$

Как и должно быть, при $l = L$ ($\mu = 1$) время жизни τ_1 совпадает с $\tau_{\text{ин}}$. Из сравнения значений (18) и (11) следует, что введение плоского участка в потенциальный профиль $u_{\text{ин}}(x)$ как дна ямы, так и вершины барьера одинаково изменяет время жизни метастабильного состояния.

Согласно (18) при высоком барьере $kT \ll E$ температурная зависимость времени жизни τ_1 соответствует закону Аррениуса (3): $\tau_1 = \tilde{\tau}_1 \sim \mu(1 - \mu)\exp(E/kT)$, хотя формы ямы и барьера непараболические. Это интересное обстоятельство обязано тому, что ускорение диффузии броуновской частицы из треугольной ямы по сравнению с законом Аррениуса (параболическая яма) компенсируется замедлением диффузии на плоской вершине барьера и наоборот. Следовательно, на время жизни метастабильного состояния влияет не только форма высокого барьера, но и форма добарьерной части потенциального профиля. С более общей позиции это рассматривается в следующем разделе.

С увеличением температуры, при $kT \gg E$ (низкий барьер) формы барьера и ямы перестают сказываться и температурная зависимость времени жизни определяется формой потенциала $u_1(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, поэтому $\tau_1 = \tilde{\tau}_1 \rightarrow \tau_{\text{ин}}$ при $\beta \rightarrow 0$.

6. Обратим теперь внимание на факт совпадения τ_1 и $\tilde{\tau}_1$ для потенциальных профилей, изображенных на рис. 6. Это совпадение вовсе не связано с конкретным видом выбранных профилей, поскольку можно привести примеры других пар метастабильных состояний, обладающих этим же свойством. Дело здесь в свойствах симметрии решений УФП для взаимоперевёрнутых потенциальных профилей $u(x)$ и $\tilde{u}(x)$, описывающих метастабильные состояния. Как показал Ризкин [1, стр.118], если эти профили связаны условием $\tilde{u}(x) = -u(x)$, то времена жизни таких метастабильных состояний τ_1 и $\tilde{\tau}_1$, определяемые как обратные величины наименьших ненулевых собственных значений оператора Фоккера - Планка (2), совпадают. Поскольку любые временные характеристики броуновского движения в потенциальном профиле $u(x)$, определенные с помощью (8), не изменяются при замене $u(x) \rightarrow u(a-x) - b$ (здесь a, b произвольные величины), то совпадение времен жизни метастабильных состояний будет иметь место и для профилей, связанных условием $\tilde{u}(x) = -u(a-x) + b$. В частности, это соответствует профилям рис. 6 ($a = L, b = \beta$).

Таким образом, какие-либо изменения формы потенциальной ямы или аналогичные им изменения формы потенциального барьера могут быть равносильны с точки зрения их влияния на время жизни метастабильного состояния, в том числе и на его температурную зависимость.

2. Высокие барьеры. Приближение Крамерса

1. Для низких температур ($kT \ll E$), то есть для случая высоких потенциальных барьеров β , круг различных потенциальных ям и потенциальных

барьеров, рассматриваемых с точки зрения их влияния на температурную зависимость времени жизни метастабильных состояний, может быть существенно расширен, поскольку в этом случае можно обойтись без точных решений УФП и пользоваться приближенным методом Крамерса [5] для вычисления скорости перехода через барьер r и, следовательно, времени жизни метастабильного состояния $\tau = 1/r$. Расчеты показывают, что для произвольных потенциальных профилей дна ямы $U_w(x)$ и вершины барьера $E - U_b(x)$ при $\beta \gg 1$ ($kT \ll E$) время релаксации метастабильного состояния может быть записано в следующем виде:

$$\tau = \theta_0(kT) \exp(E/kT), \tag{19}$$

где
$$\theta_0(kT) = \eta/(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-U_w(x)/kT) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-U_b(x)/kT) dx. \tag{20}$$

Отсюда следует, что при высоком барьере время жизни метастабильного состояния и его температурная зависимость определяются лишь профилем дна ямы и профилем вершины барьера, в то время как влиянием остальной части потенциального профиля можно пренебречь.

Если дно потенциальной ямы и вершина барьера параболически

$$U_w(x) = bx^2, \quad U_b(x) = b(x - L)^2,$$

то из (20) получаем $\theta_0 = \text{const}$ и, следовательно, закон Аррениуса (3). Однако, если взять другие функции $U_w(x)$ и $U_b(x)$ соответствующие, например, треугольному или ступенчатому метастабильным потенциальным профилям, то из (19), (20) мы получим времена жизни метастабильных состояний (15) и (14), соответственно.

2. Значения интегралов в выражении (20) в общем случае произвольных $U_w(x)$ и $U_b(x)$ неизвестны, однако температурную зависимость $\theta_0(kT)$ с точностью до постоянного множителя в ряде случаев можно найти. Если, например, описывать потенциальные яму и барьер степенными функциями: $U_w(x) = c|x|^p$, $U_b(x) = d|x|^q$ ($p, q > 0$), то согласно (19), (20) время жизни $\tau(kT)$ будет иметь следующий вид:

$$\tau = B(kT)^{1/p+1/q-1} \exp(E/kT) = \theta_0(kT) \exp(E/kT),$$

где не зависящий от температуры множитель B определяется по формуле

$$B = \eta c^{-1/p} d^{-1/q} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|y|^p) dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|z|^q) dz.$$

В таблице приведены температурные зависимости предэкспоненциального множителя $\theta_0(kT)$ для ряда потенциальных барьеров и ям различной формы. Для рассматриваемых в таблице функций $U_w(x)$ и $U_b(x)$ зависимость $\theta_0(kT)$ меняется от $\theta_0 \sim (kT)^3$ до $\theta_0 \sim (kT)^{-1}$. Из таблицы следует, что аррениусовая зависимость (3) ($\theta_0(kT) = \text{const}$) возникает лишь для тех конкретных форм потенциальных ямы и барьера, для которых $1/p+1/q=1$. Так будет для параболических дна и вершины ($p = 2, q = 2$), а также для плоского дна ($p = \infty$) и треугольного барьера ($q = 1$), и наоборот, для треугольного дна ($p = 1$) и плоского барьера ($q = \infty$), что, в частности, согласуется с точной формулой (18) при $kT \ll E$.

Заметим, что все рассмотренные в данной статье точные формулы для времен жизни метастабильных состояний (9)-(12), (18) переходят в соответствующие приближенные, полученные методом Крамерса не при $\beta \gg 1$, как это предполагалось в [5], а уже при $\exp \beta \gg \beta$ (или $\beta \geq 4$).

Таблица

$\Theta_0(kT) \sim$		$U_b(x) \sim$					
		$ x ^{1/2}$	$ x ^{2/3}$	$ x $	x^2	x^4	$ x ^\infty, x \leq 1$
$U_w(x) \sim$	$ x ^{1/2}$	$(kT)^3$	$(kT)^{5/2}$	$(kT)^2$	$(kT)^{3/2}$	$(kT)^{5/4}$	$(kT)^1$
	$ x ^{2/3}$	$(kT)^{5/2}$	$(kT)^2$	$(kT)^{3/2}$	$(kT)^1$	$(kT)^{3/4}$	$(kT)^{1/2}$
	$ x $	$(kT)^2$	$(kT)^{3/2}$	$(kT)^1$	$(kT)^{1/2}$	$(kT)^{1/4}$	$(kT)^0$
	x^2	$(kT)^{3/2}$	$(kT)^1$	$(kT)^{1/2}$	$(kT)^0$	$(kT)^{-1/4}$	$(kT)^{-1/2}$
	x^4	$(kT)^{5/4}$	$(kT)^{3/4}$	$(kT)^{1/4}$	$(kT)^{-1/4}$	$(kT)^{-1/2}$	$(kT)^{-3/4}$
	$ x ^\infty,$	$(kT)^1$	$(kT)^{1/2}$	$(kT)^0$	$(kT)^{-1/2}$	$(kT)^{-3/4}$	$(kT)^{-1}$
	$ x \leq 1$						

Заключение

1. Итак, форма потенциального барьера, равно как и форма остальной части потенциального профиля, описывающего метастабильное состояние, существенно влияют на время жизни метастабильного состояния и, в частности, на его температурную зависимость.

2. При высоких температурах $kT \gg E$ влияние формы потенциального профиля особенно значительно. В этом случае время жизни метастабильного состояния может быть как убывающей, так и возрастающей функцией температуры. Температурная зависимость $\tau(kT)$ определяется поведением метастабильного потенциального профиля $U(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

3. При $kT \ll E$ температурная зависимость времени жизни метастабильного состояния в общем случае имеет вид $\tau = \theta_0(kT) \exp(E/kT)$, где $\theta_0(kT)$ - функция от температуры, определяемая формой вершины потенциального барьера и формой дна потенциальной ямы.

Авторы благодарны А.Л.Панкратову за обсуждение полученных результатов и ценные советы.

Данная работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 94-02-04698а).

Библиографический список

1. Risken H. The Fokker - Planck Equation. Methods of Solution and Applications. Springer-Verlag, 1989.
2. Hänggi P., Talkner P., Borkovec M. Reaction-rate theory: fifty years after Kramers // Rev. Mod. Phys. 1990. Vol. 62. P. 251.
3. Анищенко В.С., Нейман А.Б. Статистические свойства эффекта перемежаемости в квазигиперболических системах // ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 1. С. 3.
4. Туницкий Н.Н., Каминский В.В., Тимашев С.Ф. Методы Физико-химической кинетики. М.: Химия, 1972.
5. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.
6. De Rise George, Adam John A. A generalization of a solvable model in population dynamics // J.Phys.A. 1990. Vol. 23, №. 14. P.L727.

7. Frenkel J // Z. Phys. 1924. Vol. 26. P. 37. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука 1975.

8. Evans M.G. and Polanyi M. // Trans. Far. Soc. 1935. Vol. 31 P. 875; Stearn A.E. and Eyring H. // J. Chem. Phys. 1935. Vol. 3. P. 778; Эйринг Г., Лин С.Г., Лин С.М. Основы химической кинетики. М.: Мир, 1983.

9. Бокштейн Б.С., Бокштейн С.З., Жуховицкий А.А. Термодинамика и кинетика диффузии в твердых телах. М.: Металлургия, 1974.

10. Köhler U., Herzog Ch. On the correlation between self-diffusion and the low-frequency LA 2/3 <111> phonon mode in b.c.c. metals // Phil. Mag. A. 1988. Vol. 58. P. 769.

11. Агудов Н.В., Малахов А.Н. Нестационарная диффузия через произвольный кусочно-линейный потенциальный профиль. Точное решение и временные характеристики // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 2. С. 148.

12. Малахов А.Н., Панкратов А.Л. Временные характеристики диффузии через произвольный кусочно-параболический потенциальный профиль. Точное решение. Н.Новгород: ННГУ (8.08.1994) 48 с. Деп. в ВИНИТИ N 2057-В94.

13. Малахов А.Н., Панкратов А.Л. Времена стохастических переходов в кусочно-параболических бистабильных системах с шумом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика (в этом же номере).

14. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 12.11.94

THE EFFECT OF THE SHAPE OF THE POTENTIAL PROFILE OF THE METASTABLE STATE ON ITS LIFE TIME TEMPERATURE DEPENDENCE

N. V. Agoudov, A. N. Malakhov

The temperature dependences of the derived exact values of the life times of the metastable states described by some piece-wise linear and piece-wise parabolic potential profiles are investigated. The shape of the potential barrier along with the shape of the other potential profile parts is shown to effect essentially on the metastable state life time τ and on its temperature dependence at any values of the potential barrier height E . It is demonstrated that well-known Arrhenius law $\tau = \theta_0 \exp(E/kT)$ ($\theta_0 = \text{const}$) is correct only for some particular shapes of the potential profile and under small intensity of fluctuations $kT \ll E$. It is shown that various deviations of the temperature dependence of the metastable state life times from the Arrhenius law when the prefactor θ_0 becomes a function of the temperature, may be explained by the taking into account both the nonparabolic shapes of potential barrier and well and the arbitrary choice of the potential barrier height E in comparison with the fluctuation intensity kT . The various dependences of $\theta_0(kT)$ caused by the different specific shapes of the potential wells and barriers under $kT \ll E$ are given at the end of this paper.



Агудов Николай Викторович - родился в 1967 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1991). Аспирант кафедры статистической радиофизики ННГУ. Область научных интересов: шумы и флуктуации в нелинейных динамических системах, броуновское движение.



СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЦЕПИ ЧУА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ АТТРАКТОРОВ СИСТЕМЫ

В.С. Анищенко, И.А. Хованов, Б.В. Шульгин

Методами численного анализа и физического эксперимента исследуется стохастический резонанс в цепи Чуа при различных режимах ее собственной динамики. В качестве состояний бистабильной системы рассматриваются состояния равновесия, предельные циклы, хаотические аттракторы. Проводится сравнение основных характеристик стохастического резонанса для различных режимов в условиях адиабатического приближения, с точки зрения использования его для усиления сигнала в радиотехнике.

Введение

Одним из интересных явлений, привлекающих пристальное внимание специалистов по нелинейной динамике, является стохастический резонанс (СР) в бистабильных системах [1-3]. Эффект СР проявляется в резонансном усилении слабого регулярного сигнала и в увеличении отношения сигнал/шум (SNR), за счет когерентности между процессом переключений, индуцированных внешним шумом, и сигналом [2]. Теоретический анализ СР наталкивается на ряд сложностей математического характера и приближенные аналитические расчеты удается провести пока что для бистабильных осцилляторов с размерностью фазового пространства $N \leq 2$ [4-7].

К настоящему времени наиболее детальное теоретическое и экспериментальное исследование совокупности характеристик СР проведено для бистабильных систем типа диссипативный осциллятор Дуффинга с двумя симметричными взаимодействующими аттракторами в виде устойчивых состояний равновесия [4, 6]

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = -dU(x)/dt + F(t), \quad (1)$$

где $U(x)$ - бистабильный потенциал, а $F(t)$ - внешний сигнал, представляющий собой сумму гармонической и шумовой компонент [2]

$$U(x) = -ax^2/2 + bx^4/4, \quad (2)$$

$$F(t) = A \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] + (2D)^{1/2} \xi(t), \quad \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle = \delta(\tau), \quad (3)$$

A , ω_0 - амплитуда и частота гармонического сигнала, соответственно; $\varphi(t)$ -

равномерно распределенная случайная величина, изменяющаяся в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; D - интенсивность внешнего шума.

Большинство работ посвящено исследованию предельного случая, так называемого «передемпфированного» осциллятора. В этом пределе уравнения системы становятся одномерными, что значительно упрощает математические проблемы при использовании методов теории стохастических процессов [6-9].

В случае большого трения $\ddot{x} = 0$ в безразмерных переменных [6] уравнение (1) примет вид

$$\dot{x} = -dU(x)/dx + F(t). \quad (4)$$

Однако, бистабильное поведение можно реализовать в системах размерности $N > 2$, когда взаимодействующими аттракторами могут являться симметричные предельные циклы, торы или хаотические аттракторы [10-12]. Более того, эффект СР проявляется и в мультистабильных системах [13], и в системах общего положения (несимметричных). В последнем случае СР может быть реализован при взаимодействии различных типов аттракторов, например, «состояние равновесия - предельный цикл» или «состояние равновесия - хаотический аттрактор» и т.д.

Теоретический анализ СР в указанных выше типах систем как правило невозможен по целому ряду причин. Основные из них связаны с трудностями решения уравнений Фоккера - Планка, определением потенциала и т.д. Поэтому исследование таких систем проводится численными или экспериментальными методами, а также методом аналогового моделирования [10-15].

В режиме СР внешний шум определенной интенсивности индуцирует взаимодействие аттракторов (переключение между ними), при котором частота слабого внешнего периодического сигнала становится близкой к средней частоте переключений - частоте Крамерса [16]. При этом основными, практически важными характеристиками эффекта СР являются коэффициент усиления и SNR [5, 14, 17, 18]. В частности, одним из важных (и до сих пор открытым) является вопрос о возможности получения положительной разности ΔSNR на выходе и входе системы. Для случая передемпфированного осциллятора ответ ясен: $SNR_{\text{вых}} \leq SNR_{\text{вх}}$. В общем случае более сложных систем ответа на этот вопрос пока нет. Кроме того, не совсем ясна проблема зависимости коэффициента усиления от характера движения на каждом из взаимодействующих аттракторов, то есть от типа «внутриямной» динамики системы.

Сказанное выше определило главную цель настоящей работы. Представляется интересным рассмотреть бистабильную систему, в которой реализуется эффект СР при взаимодействии различных типов аттракторов. Исследование позволяет ответить на ряд вопросов, связанных с влиянием типа внутриямной динамики на характеристики СР. Изучение эффекта СР мы будем проводить численными и экспериментальными методами, которые позволяют выйти за пределы ряда ограничений, используемых в той или иной степени при построении теоретических моделей.

1. Исследуемая бистабильная система

В качестве объекта исследования эффекта СР нами была выбрана классическая цепь Чуа, описываемая уравнениями [19]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (5)$$

где $h(x)$ - кусочно-линейная характеристика нелинейного диода Чуа [19]

$$h(x) = m_1x + (m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)/2. \quad (6)$$

Система (5) характеризуется двумя управляющими параметрами α и β собственно цепи Чуа и двумя параметрами m_0 и m_1 , задающими разные наклоны характеристики диода Чуа. В наших экспериментах мы зафиксировали вид нелинейной характеристики ($m_0 = -1/7$, $m_1 = 2/7$) и один из параметров цепи Чуа ($\beta = 14.286$). Таким образом для управления режимами колебаний в автономной цепи Чуа был выбран единственный контрольный параметр - параметр α .

Динамическая система (5) задает векторное поле в \mathbb{R}^3 , инвариантное к преобразованию симметрии

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z) \quad (7)$$

при условии, что параметры m_0 и m_1 отличны от нуля. На рис.1 представлена бифуркационная диаграмма симметричных режимов колебаний в цепи Чуа. Если мы будем менять параметр α в интервале $2 < \alpha < 10$ в сечении $\beta = 14.286$, то последовательно будут наблюдаться симметричные режимы двух состояний равновесия ($2 < \alpha < 6.8$), предельных циклов T_1 ($6.8 < \alpha < 8.2$), циклов удвоенных периодов T_2 ($8.2 < \alpha < 8.4$), хаотических аттракторов типа Ресслера ($8.7 < \alpha < 8.9$) и, наконец, режимы «double-scroll» (DS) ($8.9 < \alpha$), как это показано на рис. 2.

Для реализации эффекта СР в систему (5) аддитивно вводился сигнал $F(t)$ (3). Анализировались две ситуации: сигнал вводится в последнее уравнение или в

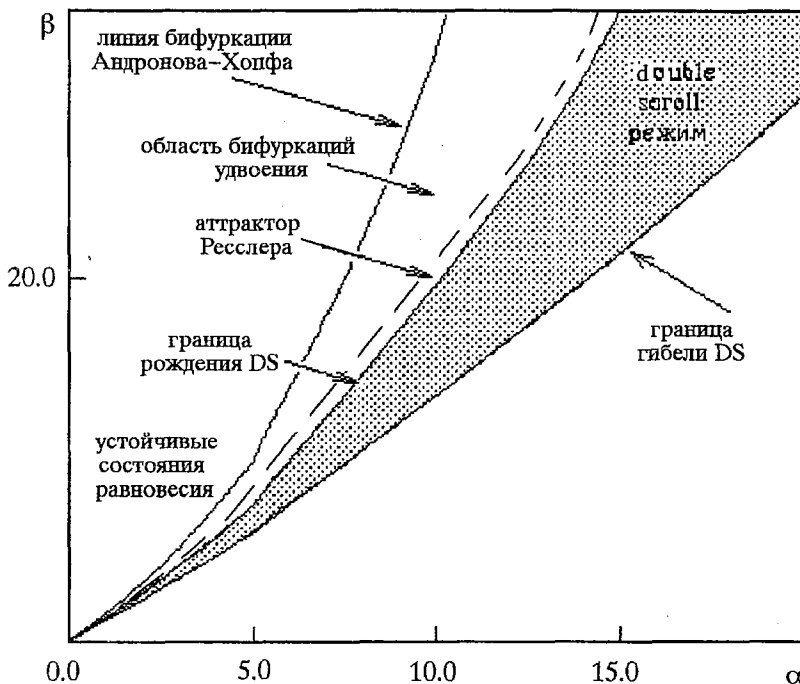


Рис. 1. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма системы (5), $m_0 = -1/7$, $m_1 = 2/7$ (качественное изображение)

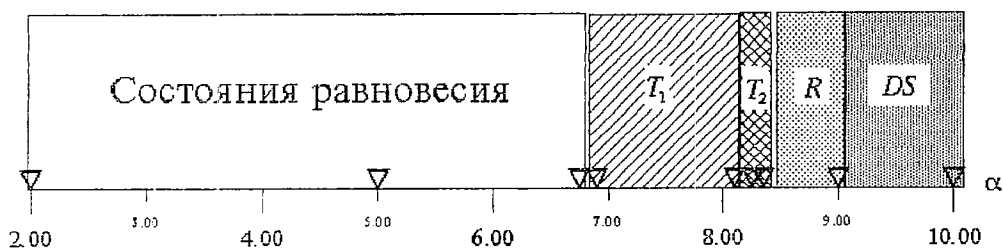


Рис. 2 Последовательность динамических режимов, выступающих в роли состояний бистабильной системы (5), с изменением параметра α при $\beta = 14.286$. Треугольниками обозначены значения α в исследуемых точках; T_n - цикл периода n ; R - аттрактор Ресслера; DS - аттрактор Double scroll

первое уравнение системы (5). В качестве сигнала на выходе системы был выбран процесс $x(t)$, характеристики которого подвергались всестороннему анализу.

2. Методы исследования

Эффект СР в системе (5) исследовался численными методами и экспериментально. Алгоритм численного моделирования описан в [20]. В эксперименте использовалась реальная цепь Чуа, любезно предоставленная нам профессором университета Беркли Л.О. Чуа. Совокупность численных и экспериментальных методов была проверена на примере модели передемпфированного осциллятора с потенциалом

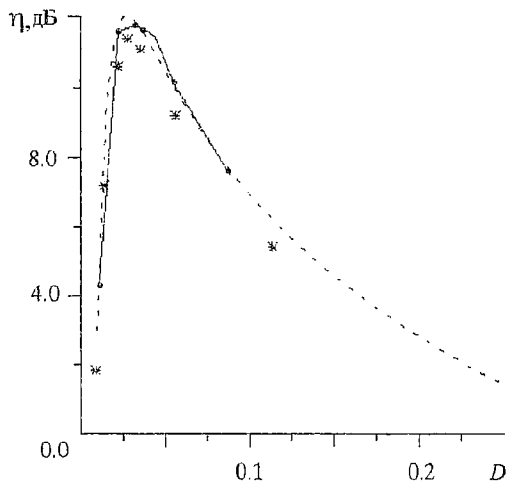


Рис. 3. Зависимости усиления сигнала η от интенсивности шума D для системы (4) с потенциалом (9); сравнение теории и эксперимента: --- теория; ●-●-●- численное моделирование; ***- эксперимент; $A=20$ мВ, $f = 400$ Гц, D - безразмерная величина

$$dU(x)/dx = a_1x - a_3x^3 + a_5x^5 - a_7x^7 \quad (8)$$

Исследования показали хорошее соответствие между теоретически, численно и экспериментально полученными характеристиками эффекта СР в системе (1). В качестве примера на рис. 3 представлены результаты работы [20], иллюстрирующие работоспособность и точность используемых нами методов анализа эффекта СР. Специально отметим, что для исключения эффекта алиасинга (который заключается в зеркальном отражении спектра из области частот больших максимальной частоты быстрого преобразования Фурье (БПФ) в область низких частот [21] и всегда сопровождает расчет спектров мощности с использованием БПФ), анализируемые сигналы пропускались через специальный фильтр низких частот с частотой среза равной частоте Найквиста БПФ.

3. Результаты численного моделирования в условиях адиабатического приближения

При проведении исследований влияния типа внутриямной динамики на характеристики СР на первом этапе мы зафиксировали параметры регулярной компоненты сигнала (3), которые оптимизировались для случая $\alpha=5$. При этом СР

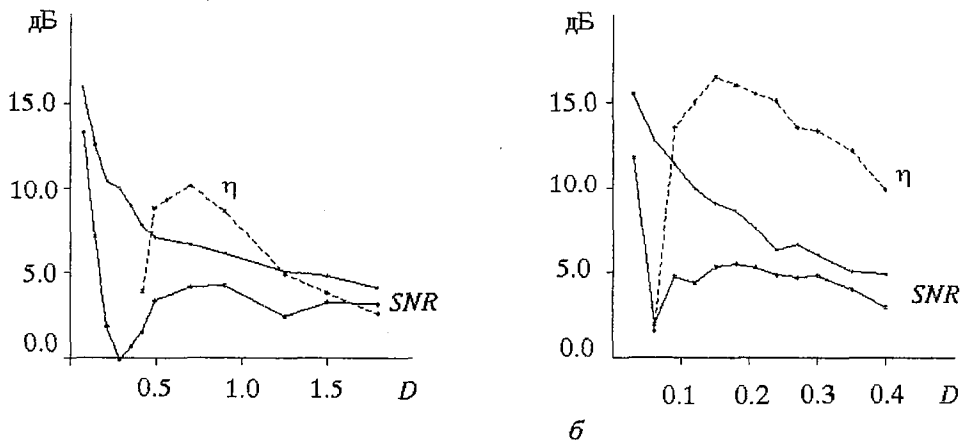


Рис. 4. Зависимость усиления η и SNR от интенсивности шума D при $\alpha = 5.0, f = 0.008, a = 8.1, b = 14.286$: *a* - сигнал (3) аддитивно вводится в третье уравнение системы (5); *б* - сигнал аддитивно вводится в первое уравнение системы (5); D - безразмерная величина

обуславливался переключениями между двумя состояниями равновесия в системе (5) (см.рис. 2). Для значения $\alpha=5$ оптимальная амплитуда и частота гармонической компоненты сигнала были $A = 0.04$ и $f_0 = \omega_0/2\pi = 0.008$, соответственно.

На рис. 4, *a* приведены зависимости коэффициента усиления входного и выходного SNR от интенсивности шума D , когда сигнал аддитивно добавлялся в правую часть третьего уравнения системы (5). Аналогичные данные приведены на рис. 4, *б* для случая введения сигнала $F(t)$ в первое уравнение системы. Нетрудно видеть, что рис. 4, *б* иллюстрирует заметное улучшение характеристик СР: увеличивается усиление η и уменьшается разность $\Delta SNR = |SNR_{\text{ввых}} - SNR_{\text{вх}}|$. Подобное качественное улучшение характеристик было отмечено для всех других режимов колебаний в цепи Чуа, и в дальнейшем мы будем использовать результаты, соответствующие введению сигнала $F(t)$ в первое уравнение системы (5).

На рис. 5 приведена зависимость средней частоты переключений от интенсивности шума. Частота Крамерса $f_{\text{кр}}$ соответствует удвоенной средней «частоте переключений» $f_{\text{п}}$ системы. Под «частотой переключений»* мы понимаем величину обратную среднему времени пребывания системы в одном, а затем в другом состоянии.

Как видно из графика на рис.5, при интенсивности шума $D \approx 0.12$ частота переключений $f_{\text{п}}$ близка к частоте сигнала $f_0 \approx f_{\text{п}} = 0.008$ и именно при этой интенсивности шума фиксируется резкое увеличение усиления (см. рис. 4,б).

Если изменять параметр α , в системе (5) реализуется последовательность усложняющихся автоколебательных режимов от предельных циклов

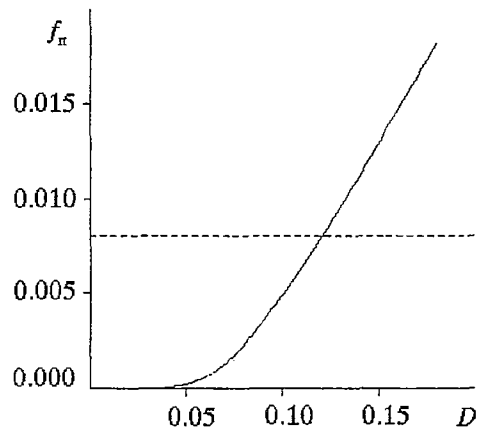


Рис. 5. Зависимость средней частоты переключений $f_{\text{п}}$ от интенсивности шума D ; пунктиром обозначена величина $f_{\text{кр}} = 2f_0$, D - безразмерная величина

* Частота Крамерса определялась путем вычисления среднего времени пребывания траектории на одном из взаимодействующих симметричных аттракторов $\tau_{\text{ср}} = T_{\text{п}}/2, f_{\text{кр}} = 2T_{\text{п}}^{-1} = 2f_{\text{п}}$.

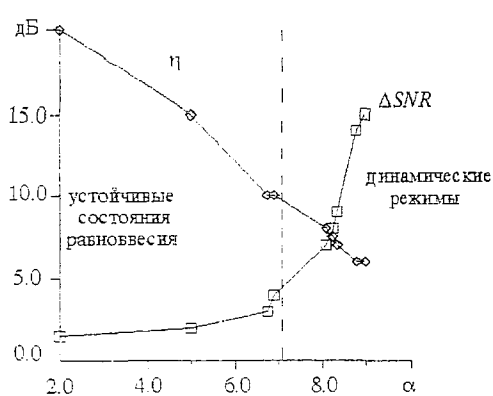


Рис. 6. Зависимости максимального усиления η в области с минимальным ΔSNR и среднего минимального ΔSNR от параметра α ; пунктиром разделены области до и после бифуркации Андронова - Хопфа

Сигнал модуляции, оптимальный для случая $\alpha=5.0$, естественно не будет удовлетворять этим условиям в случае $\alpha>5.0$. Мы проводили оптимизацию параметров гармонического сигнала и шума на предмет улучшения характеристик СР для $\alpha>5.0$, оставаясь в рамках адиабатического приближения, когда частота Крамерса много меньше частоты релаксации и амплитуда сигнала существенно меньше высоты потенциального барьера. Исследования показали, что качественных изменений в сравнении с данными рис. 6 не происходит, хотя при этом можно добиться некоторого улучшения количественных характеристик СР.

4. Экспериментальные результаты

Физический эксперимент по изучению характеристик СР в наших исследованиях обладает заметным преимуществом в сравнении с численным. Практически не уступая в точности (ср. результаты, представленные на рис. 3), физический эксперимент проводится в реальном масштабе времени (то есть в десять раз быстрее вычислительного), позволяет легко варьировать не только параметры системы и регулярного воздействия, но и статистические характеристики внешнего шума. Для обработки выходного сигнала используется компьютер с тем же программным обеспечением, что и в численном эксперименте. Таким образом, «физика» эксперимента заключается по сути дела лишь в том, что сигнал на выходе бистабильной системы (цепи Чуа) представляет реальный электрический сигнал, для анализа характеристик которого в дальнейшем используется цифровая техника. Методика эксперимента в деталях описана в работе [20], и мы не будем останавливаться на этом вопросе.

В исследуемой цепи Чуа, соответствующей математической модели (5), (6), параметры β , m_0 и m_1 несколько отличаются от используемых в численном моделировании, что обусловлено особенностями эксперимента. В связи с этим значения α , для которых наблюдаются различные динамические режимы, близки, но не совпадают с приведенными на диаграмме рис. 2. Внешнее воздействие на цепь соответствует введению сигнала $F(t)$ в последнее уравнение системы (5), что связано с удобством эксперимента.

На рис. 7 представлены зависимости коэффициента усиления η в функции эффективного значения интенсивности шума D для различных режимов работы цепи Чуа, которые реализуются в интервале значений параметра $4.62 \leq \alpha \leq 7.022$.

до хаоса (см. рис.1 и 2). На рис. 6 представлены результаты зависимости максимального значения усиления η в области, где ΔSNR минимально, и зависимости средней минимальной разности ΔSNR от параметра α для фиксированных значений амплитуды и частоты внешней модуляции. Результаты наглядно демонстрируют эффект ухудшения характеристик СР с усложнением типов взаимодействующих аттракторов: коэффициент усиления η практически линейно спадает, а ΔSNR резко возрастает с увеличением α .

С изменением α меняются величина и форма потенциального барьера, разделяющего взаимодействующие симметричные аттракторы.

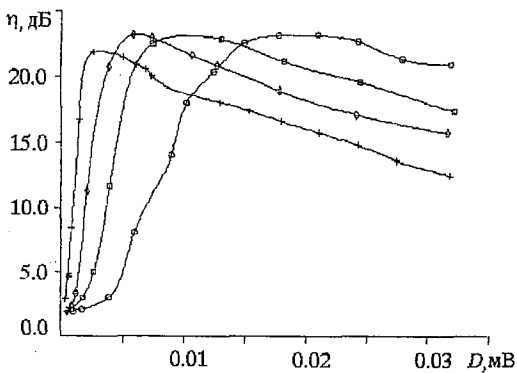


Рис. 7. Экспериментальные зависимости усиления сигнала η от интенсивности шума D для различных значений параметра α ; устойчивые состояния равновесия: ● - $\alpha = 4.62$, ■ - $\alpha = 5.6$, ◆ - $\alpha = 6.303$; предельный цикл: +- $\alpha = 7.022$

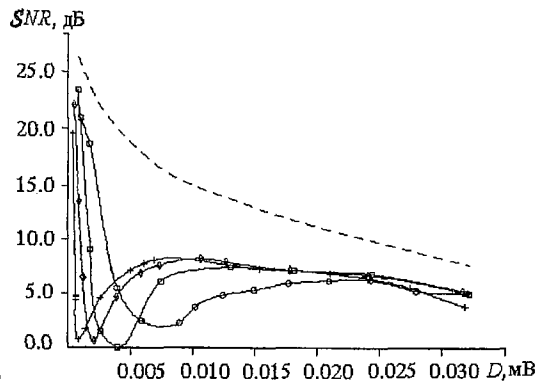


Рис. 8. Экспериментальные зависимости SNR на выходе от интенсивности шума D для различных значений параметра α ; устойчивые состояния равновесия: ● - $\alpha = 4.62$, ■ - $\alpha = 5.6$, ◆ - $\alpha = 6.303$; предельный цикл: +- $\alpha = 7.022$; пунктиром обозначено значение SNR на входе системы

Как видно из результатов, коэффициенты усиления в оптимальных условиях (оптимальные значения интенсивности шума D) практически совпадают ($\eta_{\text{опт}} \approx 16.5 \div 17.5$) дБ, но явно уменьшаются с ростом α в области $D > (0.015 \div 0.02)$ мВ. На рис. 8 даны результаты зависимости $SNR_{\text{вх}}$ и $SNR_{\text{вых}}$ от интенсивности D для тех же, что и на рис. 7, значений α . Как видно из рис. 8, оптимальная разность $\Delta SNR = |SNR_{\text{вых}} - SNR_{\text{вх}}|$ достигается именно в области $D > 0.015$ мВ! В связи с этим, если анализировать зависимость коэффициента усиления, измеренного в области значений D , отвечающей оптимальной разности ΔSNR (см. рис. 8), мы получим качественно тот же результат, что представлен на рис. 6. Рис. 9 иллюстрирует результаты измерений усиления η при оптимальных значениях ΔSNR и величину ΔSNR в зависимости от параметра α , включая области взаимодействия аттракторов Ресслера ($8.2 < \alpha < 8.59$) и режим DS ($8.59 < \alpha < 9.0$). Численные (см. рис. 6) и экспериментальные (см. рис. 9) данные находятся в хорошем качественном соответствии. С ростом параметра α , когда в цепи Чуа устойчивые состояния равновесия последовательно сменяются режимами предельных циклов, циклов удвоенного периода, аттракторами Ресслера, а затем режимом перемежаемости типа «хаос-хаос» [22] (режим DS), характеристики эффекта CP ухудшаются

Отметим, что в приведенных результатах амплитуда и частота гармонической компоненты сигнала $F(t)$ были зафиксированы и соответствовали условиям адиабатического приближения: частота $\omega_0 = 60.06$ Гц и амплитуда $A = 10$ мВ. Выход за рамки этих условий (например, увеличение частоты внешнего регулярного воздействия) может повлиять на количественные характеристики CP и привести к новым эффектам так называемого высокочастотного стохастического резонанса [13].

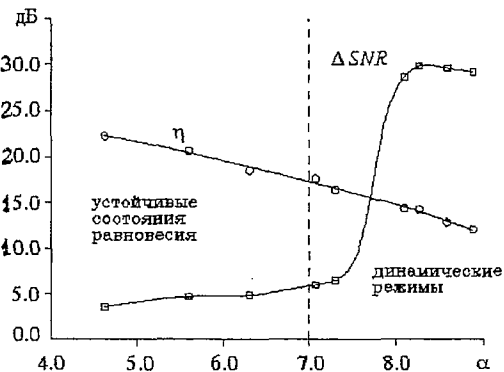


Рис. 9. Экспериментальные зависимости максимального усиления η в области с минимальным ΔSNR и среднего минимального ΔSNR от параметра α ; пунктиром разделены области до и после бифуркации Андронова - Хопфа

Выводы

В настоящей работе мы провели вычисление и измерение характеристик СР (усиления и разности отношения сигнал/шум на входе и выходе) в цепи Чуа в зависимости от параметра α . При этом эффект СР реализовался при бистабильном взаимодействии двух симметричных состояний равновесия, предельных циклов периода T_1 , циклов удвоенного периода, аттракторов Фесслера и DS-аттрактора. Исследования проводились для классического адиабатического приближения, когда амплитуда внешнего гармонического воздействия мала в сравнении с потенциальным барьером, а частота воздействия много меньше частоты, определяемой временем релаксации системы [4]. В условиях адиабатического приближения с усложнением структуры взаимодействующих аттракторов (с усложнением типов внутриямной динамики) характеристики СР однозначно ухудшаются: уменьшается усиление и возрастает ΔSNR !

Однако, это не означает, что пути оптимизации характеристик СР в этом направлении являются закрытыми. Дело в том, что усложненная внутриямная динамика системы требует детального учета новых характерных временных масштабов и поиска новых условий их когерентного взаимодействия с сигналом внешней модуляции. Мы убеждены в том, что для оптимизации характеристик СР в более сложных случаях необходимо выйти за пределы адиабатического приближения, рассматривать высокочастотный СР [13] и перейти к более детальному исследованию нелинейных аспектов явления СР [23].

Настоящая работа частично финансировалась Международным научным фондом (грант NRO 000) и Госкомитетом по высшему образованию России (грант 93-8.2-10).

Библиографический список

1. Benzi R., Sutera S., Vulpiani V. The mechanism of stochastic resonance // J.Physica A. 1981. Vol.14. P.453.
2. Moss F. Stochastic Resonance: From the Ice Ages to the Monkey Ear // Some problems in Statistical Physics / Ed. G.Weiss. SIAM, Philadelphia, 1992.
3. J.Stat. Phys.: special issue // Proc. NATO Advanced Research Workshop on Stochastic Resonance. 1992. Vol.70, № 1/2.
4. McNamara B., Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance // Phys.Rev. A. 1989. Vol.39, № 9. P. 4854.
5. Jung P., Hänggi P. Amplification of small signals via stochastic resonance // Phys.Rev.A. 1991. Vol.44, № 12. P. 8032.
6. Jung P. Periodically Driven Stochastic Systems // Phys. Rep. 1994. Vol.234, № 175.
7. Dykman M., Haken H., Hu Gang, etc. Linear Response Theory in Stochastic Resonance // Phys.Lett.A. 1993. Vol.180. P. 332.
8. Gardiner K. Handbook of Stochastic methods. Berlin: Springer, 1985.
9. Risken H. The Fokker - Planck Equations. Berlin: Springer, 1988.
10. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic resonance in Chua's circuit // Int.J.Bif. and Chaos. 1992. Vol.2, № 2. P. 397.
11. Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A. Stochastic Resonance in Chaotic Systems // J.Stat.Phys. 1993. Vol.70, № 1/2. P. 183.
12. Nicolis G., Nicolis C., McKernan D. Stochastic Resonance in Chaotic Dynamics // J.Stat.Phys. 1993. Vol.70, № 1/2. P. 125.
13. Dykman M., Luchinsky D., McClintock P., Stein N., Stocks N. High frequency stochastic resonance in periodically driven systems // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т.58, № 2. С. 145.
14. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Использование стохастического резонанса для повышения отношения сигнал/шум в радиотехнических системах // РЭ. 1994. Т.39, № 12. С. 2004.

15. Zhou T., Moss F. Analog simulation of stochastic resonance // Phys.Rev.A. 1990. T.41, № 8.

16. Kramers H.. Brownian motion in field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940.Vol.7. P. 284.

17. Gammaitoni L., Menichella-Saetta E., Marchesoni F. // Phys. Lett.A. 1989. Vol. 142. P. 59.

18. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Сафонова М.А., Хованов И.А. Стохастический резонанс при многочастотном воздействии // РЭ. 1994. Т.39, № 8/9. С. 1380.

19. Chua L., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Trans. in circuits and systems. 1986. Vol. 33. P. 1073.

20. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Стохастический резонанс в бистабильной электрической цепи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. № 4-5 (в печати).

21. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. Numerical Recipies in C. Cambridge, 1988.

22. Anishchenko V.S., Neiman A.B., Chua L. Chaos-chaos intermittency and 1/f noise in Chua's circuit // Int. J. of Bif. and Chaos. 1994. Vol.4, № 1. P. 99.

23. Dykman M.I., Luchinsky D.G., Mannella R., McClintock P., Stein N., Stocks N. Stochastic Resonance in Perspective // special issue of Nuovo Cimento D. 1995 (in press).

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 18.01.95
после переработки 31.03.95

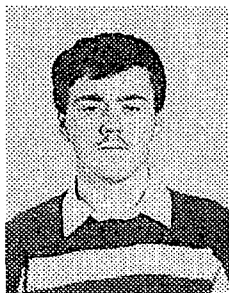
STOCHASTIC RESONANCE IN CHUA'S CIRCUIT WHEN DIFFERENT TYPES OF ATTRACTORS OF THE SYSTEM INTERACT

V.S. Anishchenko, I.A. Khovanov, B.V. Shulgin

Stochastic resonance in Chua's circuit is investigated by numerical simulations and physical experiments for different regimes of its own dynamics. The main characteristics of stochastic resonance for different regimes under adiabatic approximation are compared from the points of view of the using of stochastic resonance for the amplification of the signal in radioengineering.



Хованов Игорь Александрович - родился в 1971 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского университета (1993). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов - нелинейная динамика и статистическая физика. Автор 5 научных работ.



Шульгин Борис Владимирович - родился в 1970 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского университета (1992). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов - нелинейная динамика и стохастические процессы. Автор 4 научных работ.



СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В АВТОГЕНЕРАТОРАХ С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Д.Э. Постнов

Показано, что эффект стохастического резонанса является типичным для широкого класса радиотехнических систем - генераторов с жестким возбуждением автоколебаний. Приведены результаты физического эксперимента на двух моделях: генераторе с отрицательным сопротивлением и классическом трехточечном *LC*-генераторе. Обсуждается проблема «эффективной симметрии» системы применительно к эффекту стохастического резонанса.

Введение

Исследование стохастического резонанса (СР) началось в 1981-83 годах с работ [1, 2]. Необычный механизм поведения динамической системы под воздействием слабого периодического сигнала в присутствии флуктуаций, предложенный в качестве объяснения ледниковых периодов, вызвал к жизни множество экспериментальных и теоретических работ (для обзора см. [3, 4]). Суть эффекта СР заключается в резонансном характере усиления сигнала в зависимости от интенсивности шума. При этом отношение сигнал/шум выходного сигнала ведет себя аномальным образом, увеличиваясь при увеличении внешнего шума. Теория СР была развита применительно к системам типа передемпфированного бистабильного осциллятора [5-7] и значительное число экспериментальных работ основано на исследовании именно этой модели [3, 8]. В реальных физических системах СР впервые был обнаружен в лазере [9], позднее в условиях парамагнитного резонанса [10]. Недавно получены результаты по проявлению СР при передаче нервных импульсов у ракообразных [11]. Радиотехнические системы, демонстрирующие СР, как правило, являлись аналоговыми моделями, построенными на базе уравнений бистабильной системы [3, 6, 12].

Результаты последующих исследований привели к пониманию того, что принципиальным для эффекта СР является наличие управляемой интенсивностью шума перемежаемости между аттракторами системы. При этом характер (тип) взаимодействующих режимов может быть различен. СР был обнаружен в автоколебательных системах в режиме перемежаемости между сосуществующими циклами [4, 13, 14] и даже между хаотическими аттракторами [15-17]. Кроме того, была показана возможность эффекта типа СР в моностабильной системе [18].

В настоящее время традиционным подходом является исследование стохастического резонанса в системах с определенной степенью симметрии. Результаты исследования классической бистабильной модели показали оптимальность симметричного случая с точки зрения характеристик СР [8]. Исследуемые автоколебательные системы обладают, как правило, симметрично расположенными состояниями равновесия, в окрестности которых существуют регулярные или хаотические аттракторы (такова, например, цепь Чуа [15, 16], осциллятор Дуффинга [13]). Лишь в немногих работах уделяется внимание ситуации, когда характеристики взаимодействующих устойчивых режимов различны [8, 19]. Представляется, что роль симметрии в проявлении эффекта СР исследована к настоящему времени далеко не полно. В частности, несомненный интерес представляет исследование характеристик СР в условиях перемежаемости между аттракторами различного типа.

Ниже будет показано наличие и типичность эффекта СР для широкого класса радиотехнических систем - генераторов с жестким возбуждением автоколебаний, имеющих в фазовом пространстве как единственное устойчивое состояние равновесия, так и устойчивый предельный цикл. В роли бистабильной системы такой генератор принципиально асимметричен. Чем в этом случае характеризуется оптимальный (с точки зрения проявления СР) режим, какова в этом роль параметров системы - вот вторая задача данной работы.

1. Используемые величины и обозначения

Ниже приведены обозначения и пояснен смысл ряда величин, использованных при экспериментальном исследовании явления СР.

Входной сигнал состоит из регулярной и шумовой составляющей

$$V(t) = A \sin(\omega_s t) + (2D)^{1/2} \xi(t), \quad \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle = \delta(\tau).$$

В нашем случае регулярная компонента есть гармонический сигнал с частотой ω_s и амплитудой A . Шумовая компонента есть гауссов белый шум с интенсивностью D .

Отношение сигнал/шум определяется как отношение мощностей сигнала и шума в полосе частот сигнала. Для входного сигнала $V(t)$

$$R_1 = S_{s1}(\omega_s) / S_{n1}(\omega_s),$$

где $S_{s1}(\omega_s)$ и $S_{n1}(\omega_s)$ - спектральные плотности мощности регулярной и шумовой компонент входного сигнала соответственно. Кроме того, для входного сигнала $V(t)$, включающего гармонический сигнал и белый шум, можно записать

$$R_1 = \pi A^2 / (8D).$$

Для выходного сигнала аналогично

$$R_r = S_{s2}(\omega_s) / S_{n2}(\omega_s),$$

где $S_{s2}(\omega_s)$ - спектральная плотность, соответствующая величине превышения пиком на частоте входного сигнала уровня шумового пьедестала в спектре выходного сигнала, а $S_{n2}(\omega_s)$ - соответствующий уровень шумового пьедестала.

Коэффициент усиления характеризует изменение общей спектральной амплитуды на частоте сигнала от входа к выходу исследуемой системы

$$K = [(S_{s2}(\omega_s) + S_{n2}(\omega_s)) / (S_{s1}(\omega_s) + S_{n1}(\omega_s))]^{1/2}.$$

Частота Крамерса [20] f_s - средняя частота индуцированных шумом переключений системы; $f_s = 1/(2\tau)$, где τ - среднее время пребывания системы в

одном из устойчивых состояний. В нашем случае принципиально асимметричной системы будем различать $\tau_{гр}$ и $\tau_{ис}$ - времена пребывания в окрестности состояния равновесия и предельного цикла, соответственно.

2. Стохастический резонанс в генераторе с характеристикой N -типа

В достаточно общем виде автогенератор с одной степенью свободы может быть описан уравнением

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0. \quad (1)$$

Иногда системы такого вида называют генераторами типа Ван-дер-Поля, подчеркивая этим зависимость величины эквивалентной диссипации $f(x)$ только от самой переменной x . Наиболее простым и общим способом уравнение (1) может быть смоделировано с помощью схемы, представленной на рис. 1, а. Как известно, для возбуждения автоколебаний в системе типа (1) необходимо наличие интервала по x , где $f(x) < 0$. Для режима жесткого возбуждения автоколебаний этот интервал не должен включать состояние равновесия $x = 0$. Оба указанных условия легко удовлетворяются выбором для R кусочно-линейной вольт-амперной характеристики N -типа (рис. 1, б). При этом в пределах падающего участка характеристики R имеет дифференциальную проводимость $G^- < 0$, а в остальной области значений u - $G^+ > 0$. Уравнение Кирхгофа для схемы на рис. 1, а имеет вид

$$Cdu/dt + 1/L \int u dt + I(u) = 0. \quad (2)$$

Дифференцируя по t , вводя нормированные время $\tau = t/(LC)^{1/2}$ и напряжение $x = u/u_0$ ($u_0 = \text{const}$, например, 1В), а также учитывая, что $dI(u)/du = G(u)$ - дифференциальная проводимость, получим

$$\ddot{x} + (L/C)^{1/2}G(x)\dot{x} + x = 0, \quad (3)$$

где точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ . Очевидно, что при замене $f(x) = (L/C)^{1/2}G(x)$ получаем систему (1).

Свойства характеристики (см. рис. 1, б) определяют разбиение фазовой плоскости системы (1). Будем характеризовать $f(x)$ двумя параметрами: $|G^-/G^+|$ - отношение отрицательной и положительной проводимостей и $U_c/\Delta U$ - нормированный сдвиг падающего участка. Бифуркационная диаграмма на плоскости указанных параметров приведена на рис. 2.

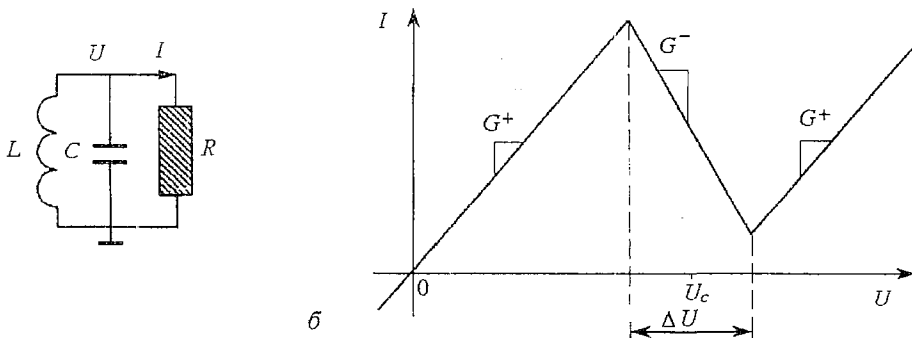


Рис. 1. а - эквивалентная схема автогенератора с линейными индуктивностью L и емкостью C , и нелинейным резистором R ; б - кусочно-линейная характеристика R ; U_c соответствует середине падающего участка; G^+ и G^- - проводимости, соответствующие восходящим и падающему участкам характеристики

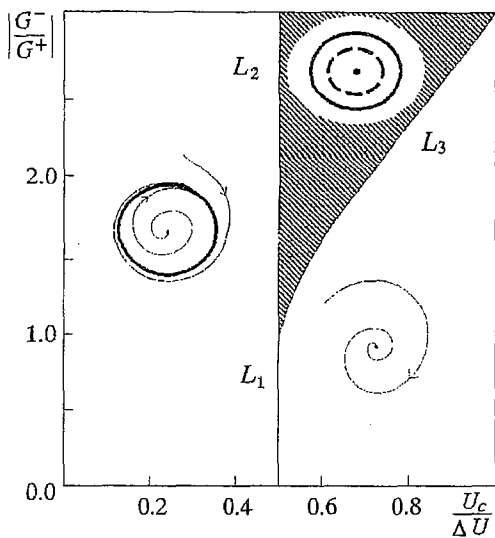


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма системы (1); численный эксперимент для $G^+ + |G^-| = 3.0$

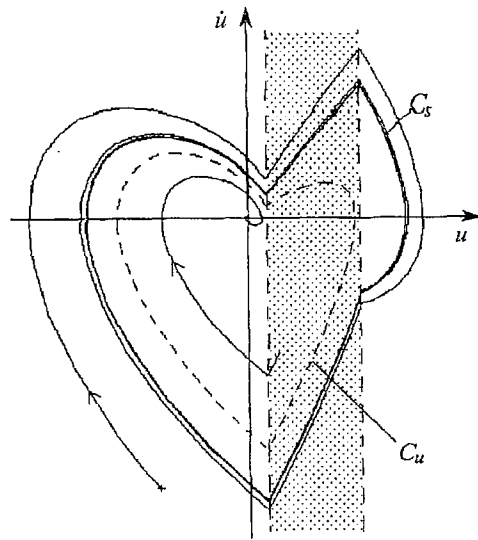


Рис. 3. Фазовый портрет системы (1) для $G^+ + |G^-| = 3.0$, $|G^-/G^+| = 2.0$, $U_c/\Delta U = 0.56$; C_u и C_s обозначают неустойчивый и устойчивый циклы, соответственно

При $U_c/\Delta U > 0.5$, правее L_1 и L_2 , состояние равновесия в начале координат всюду устойчиво. Область левее L_1 и L_2 соответствует мягкому возбуждению автоколебаний, поскольку точка равновесия $x=0$ находится в пределах падающего участка характеристики (см. рис. 1,б). Линия L_1 отвечает бифуркации Андронова - Хопфа. Заштрихованная зона соответствует сосуществованию на фазовой плоскости устойчивого фокуса, неустойчивого и устойчивого предельных циклов. L_2 соответствует слиянию устойчивого фокуса с неустойчивым предельным циклом, L_3 - касанию и исчезновению устойчивого и неустойчивого предельных циклов.

Объект нашего интереса - заштрихованная зона между линиями L_2 и L_3 . На рис. 3 приведен фазовый портрет системы для $|G^-/G^+| = 2.0$ и $U_c/\Delta U = 0.56$. Здесь C_u и C_s обозначают неустойчивый и устойчивый циклы, соответственно, а заштрихованная зона соответствует падающему участку характеристики на рис. 1,б. Хорошо видно, что колебательный режим далек от гармонического. Предельный цикл существует в условиях баланса между мощной подкачкой энергии в заштрихованной зоне и не менее мощной ее диссипацией на остальном участке траектории.

Практическая реализация автогенератора с нелинейной характеристикой рассматриваемого типа приведена на рис. 4. Повторитель на операционном усилителе A_1 обеспечивает аддитивное включение входного сигнала (в правую часть уравнения (1)). Нелинейный резистор R реализован на операционном усилителе A_2 . При этом $G^- = -1/R_2$, $G^+ = 1/R_1$, $\Delta U = 2[R_2/(R_1 + R_2)]E_s$, где E_s - напряжение насыщения микросхемы. Смещение падающего участка характеристики задается источником напряжения U_c . Величины L и C выбирались так, чтобы выполнялось условие $f_0 \gg f_i$, где f_0 и f_i - частоты генерации и входного сигнала, соответственно. В данном случае f_0 составляла 25 кГц.

Поскольку воздействие входного сигнала проявлялось в виде модуляции высокочастотной генерации, для переноса выходного сигнала в низкочастотную часть спектра использовался детекторный блок DET, содержащий НЧ-фильтр с постоянной времени порядка 0.5 мс. В результате выходной сигнал U_r содержал компоненты сигнала отклика системы на частоте сигнала f_i . Назначение детекторного блока - различить в выходном сигнале два состояния системы. В принципе, эта задача может быть решена и другим способом.

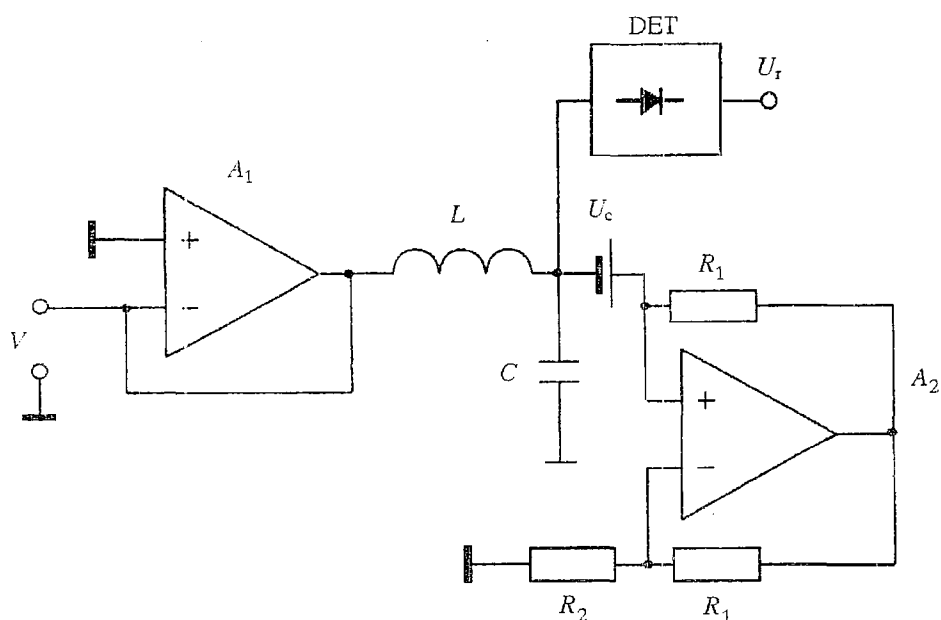


Рис. 4. Принципиальная схема исследуемого генератора с характеристикой типа, изображенной на рис. 2. $R_1=44$ кОм; $L = 18$ мГн; $C = 6800$ пФ; R_2 менялось в пределах (0+5) кОм

В процессе экспериментов входной и выходной сигналы подавались для обработки в компьютер i486 через 12-разрядный аналого-цифровой преобразователь DAC-1600 с частотой дискретизации до 50 кГц. Для устранения эффекта подмены (aliasing [21]) на входе АЦП были установлены НЧ-фильтры, ограничивающие частотный диапазон сигналов на уровне половины частоты Фурье-преобразования. Сама обработка сигналов - усреднение Фурье-спектров и расчет необходимых характеристик - производилась при помощи специально разработанного программного обеспечения [22].

Как отмечалось выше, принципиальная особенность системы, демонстрирующей эффект СР, это наличие управляемой шумом перемежаемости

между аттракторами. На рис. 5 приведены результаты эксперимента, который играл роль тестового. Он заключался в подаче на вход генератора шумового сигнала в отсутствие регулярной компоненты. На выходе устройства измерялась средняя частота переключений - частота Крамерса f_s . Как видно из графика, до уровня шума $D = 0.002$ [мВ²/Гц] переключения не фиксируются. При больших значениях D кривая резко идет вверх, переключения между режимами работы генератора становятся все более частыми. Фактически, диапазон интенсивностей шума и частот Крамерса на рис. 5 определяет область проявления эффекта СР в исследуемом устройстве.

На рис. 6 приведены результаты измерения R_T - отношения сигнал/шум для выходного сигнала и коэффициента

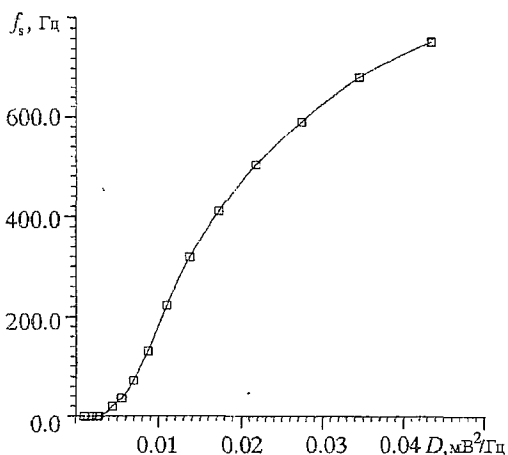


Рис. 5. Зависимость частоты Крамерса устройства, изображенного на рис. 4, от интенсивности шума $D: |G^-/G^+| = 2.0, U_c/\Delta U = 0.6$

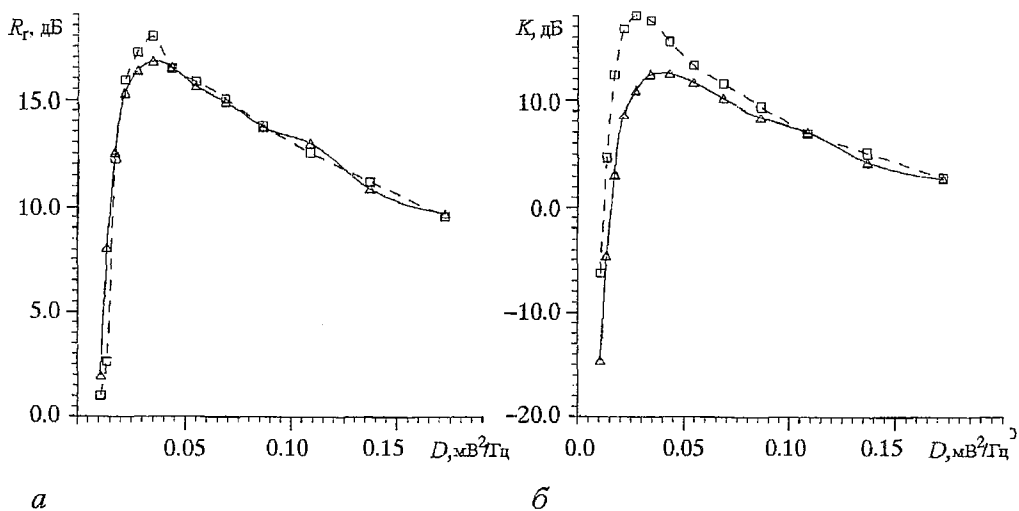


Рис. 6. Зависимости выходного отношения сигнал/шум R_r (а) и коэффициента усиления K (б) от интенсивности шума D в системе (1); значения частоты сигнала $f_s=33.6$ Гц (\square) и 133 Гц (\triangle) выбирались из соображений точности последующей дискретизации сигналов и численного расчета Фурье-спектров

усиления K в зависимости от интенсивности шума D при $A = 11$ мВ для двух значений частоты сигнала f_s . Крутой рост R_r и K в узкой области значений D , наличие максимума и последующий плавный спад убедительно свидетельствуют о наличии эффекта стохастического резонанса. Обращает на себя внимание следующая особенность: в то время как графики усиления K для значений $f_s=33.6$ Гц и 133 Гц заметно различаются (их поведение качественно соответствует теоретическим результатам для классической бистабильной системы [23]), зависимости R_r практически ложатся одна на другую, имея небольшое различие в значении максимума. Из теоретических предпосылок величина D , соответствующая максимуму K или R_r , должна зависеть от частоты сигнала [23]. Для K такой сдвиг максимума четко виден, однако на рис. 6, а максимум обеих кривых R_r достигается при одном и том же значении D . В остальном же графики качественно вполне соответствуют результатам, полученным при исследовании классической бистабильной модели [24]. Результаты экспериментов свидетельствуют о том, что подобное поведение исследуемой системы наблюдается в широкой области значений параметров (заштрихованная зона на рис. 2). При этом степень проявления эффекта (величины усиления, максимального отношения сигнал/шум для выходного сигнала и т.д.) может варьировать в широких пределах. Все это позволяет заключить, что рассмотренная модель достаточно общего характера представляет класс систем, для которых эффект СР является типичным. В соответствии с математической моделью, к этому классу могут быть отнесены, например, СВЧ-генераторы на туннельных диодах и т.д. Ниже мы подтвердим подобное обобщение на примере классической радиочастотной схемы.

3. Стохастический резонанс в трехточечном LC-генераторе

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 7 [25]. Она широко применяется в радиотехнике и известна как «емкостная трехточка», или генератор Колпитца. Однако, при соответствующем выборе напряжения смещения транзистора и величин элементов схемы она ведет себя как сильно нелинейная система, демонстрирующая эффект СР. В отличие от схемы, приведенной на рис. 4, ее

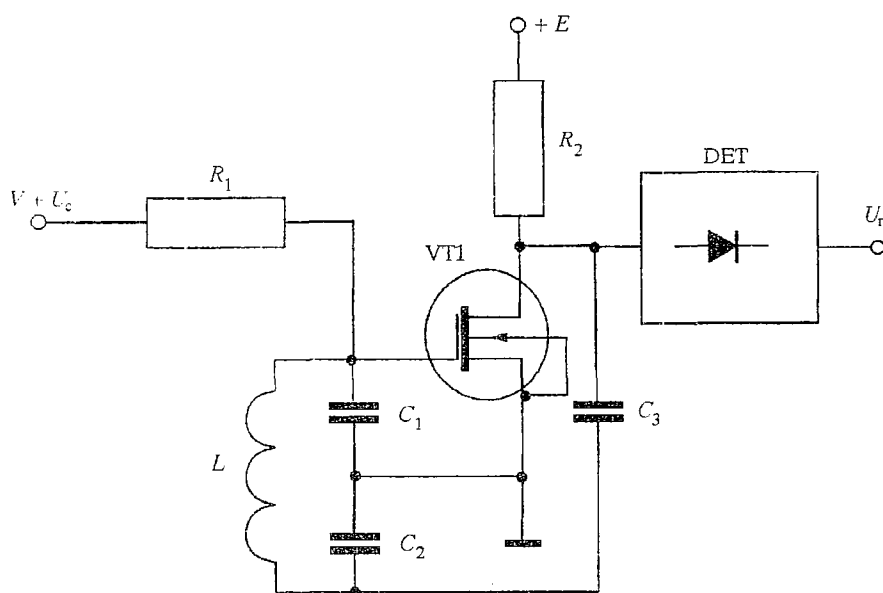


Рис. 7. Принципиальная схема трехточечного LC -генератора [25]; $C_1=C_2=C_3= 680$ пФ; $R_1 = 20$ кОм; $R_2=2.4$ кОм; VT1 - КП305

математическая модель в условиях сильной обратной связи как минимум трехмерна. Способ введения входного сигнала в уравнения также иной: включение источника сигнала последовательно с резистором соответствует тому, что в уравнениях появляется производная по времени от входного сигнала. Для регулярной гармонической компоненты входного сигнала это означает лишь фазовый сдвиг, тогда как спектральная интенсивность шумовой части сигнала становится частотно-зависимой.

Таким образом, данная схема заметно отличается от идеализированной модели (1). Однако, аналогичное разбиение их фазовых пространств (устойчивое состояние равновесия - неустойчивый предельный цикл - устойчивый предельный цикл) позволяет рассчитывать на наличие эффекта СР в данной системе.

При практической реализации трехточечного автогенератора собственная частота f_0 составляла около 200 кГц. Измерения проводились на трех частотах входного сигнала, составлявших 300, 600 и 1200 Гц. Зависимости выходного отношения сигнал/шум R_r и коэффициента усиления K приведены на рис. 8. Результаты убедительно свидетельствуют о наличии эффекта СР в исследуемой системе. При этом само проявление эффекта оказывается значительно смещенным по величинам амплитуды сигнала A и интенсивности шума D в сравнении с системой (1) (см. рис. 6), что можно отнести за счет влияния резистора R_1 . Интересно, что максимальное достигаемое значение усиления $K=(18\div 20)$ дБ практически совпадает с результатами, полученными при исследовании системы (1). Как и на графиках рис. 6, наблюдается существенное отличие в поведении R_r и K . В то время как графики K для частот сигнала 300 и 1200 Гц различаются на 13 дБ в области максимума, соответствующее различие в максимумах R_r составляет около 3 дБ. Для зависимостей K сдвиг максимума по D с частотой входного сигнала четко виден, тогда как для выходного отношения сигнал/шум он практически отсутствует. Объяснение подобного эффекта за счет реактивных элементов схемы, образующих некий фильтр, представляется неудовлетворительным, поскольку не объясняет наблюдаемый сдвиг по D максимумов коэффициента усиления.

Из других особенностей экспериментальных результатов по исследованию СР в трехточечном автогенераторе следует отметить постоянство значений

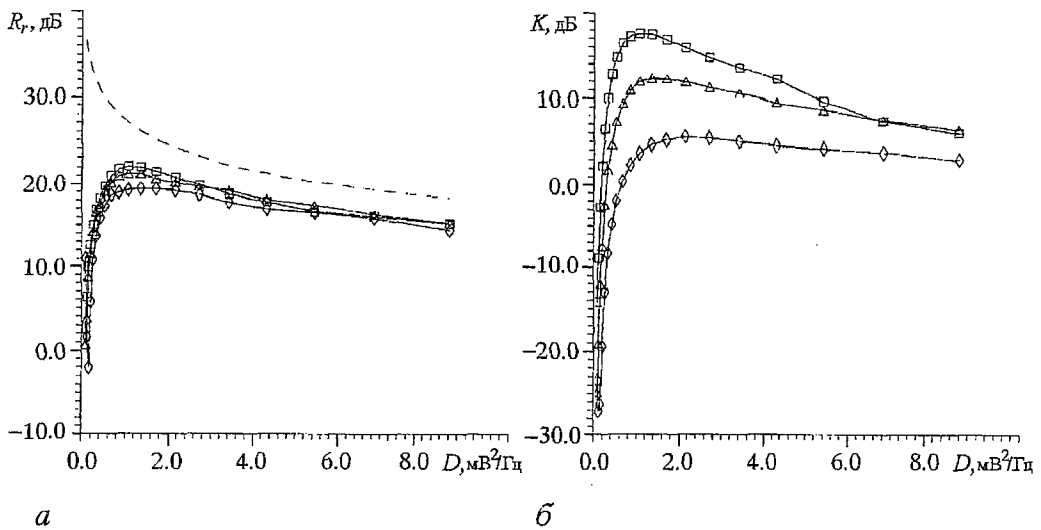


Рис. 8. Зависимости выходного отношения сигнал/шум R_r (а) и коэффициента усиления K (б) от интенсивности шума D в трехточечном LC -генераторе для напряжения смещения $U_c = -0.8$ В и частот выходного сигнала f_i : \square - 300 Гц; \triangle - 600 Гц; \diamond - 1200 Гц

разности входного и выходного отношения сигнал/шум $R = R_i - R_r$ в области правее максимумов кривых R_r . Во всех приведенных на графике случаях она составляла примерно 4 дБ. Не исключено, что этот факт может быть объяснен влиянием детекторного блока DET, который ухудшает отношение сигнал/шум. К сожалению, непосредственное измерение R_r на частоте генерации схемы лежит за пределами возможностей использованной экспериментальной установки.

В целом по результатам исследования СР в трехточечном LC -генераторе можно заключить, что данное устройство в полной мере демонстрирует этот эффект, что подтверждает его типичность для систем типа (1) и открывает возможность исследования СР на относительно высоких частотах сигнала. На основании изложенного выше подхода нами были изготовлены образцы генераторов, управляемые входным сигналом с частотой до 200 кГц.

4. Влияние эффективной симметрии системы на характеристики СР

Как уже отмечалось во Введении, СР традиционно исследуется на моделях с симметрично расположенными устойчивыми состояниями. Разумеется, реальные системы, как правило, асимметричны. Работ, учитывающих и исследующих влияние асимметрии системы, относительно немного [8, 19]. Для систем с симметричными устойчивыми состояниями введение «перекоса» представляется неким искусственным приемом и не выглядит задачей первостепенной важности при исследованиях. Однако, в случае систем, исследуемых в данной работе, ситуация кардинально меняется. Во-первых, при взаимодействии аттракторов различных типов, да еще расположенных вокруг одного и того же состояния равновесия, само применение понятия «симметрия» требует серьезного обоснования. Ниже мы будем применять термин «эффективная симметрия», подразумевая под этим режим системы, когда эффект СР выражен максимально четко. Для систем с односторонними, но «перекошенными» потенциальными ямами, это как раз и соответствует отсутствию «перекоса», когда средние времена пребывания в каждом из устойчивых состояний совпадают. Во-вторых, в исследуемых в данной работе системах естественным образом присутствует параметр, влияющий на степень эффективной симметрии. Это напряжение смещения U_c (в системе (1) нормированное смещение $U_c/\Delta U$), которое влияет на расположение и размер неустойчивого предельного цикла.

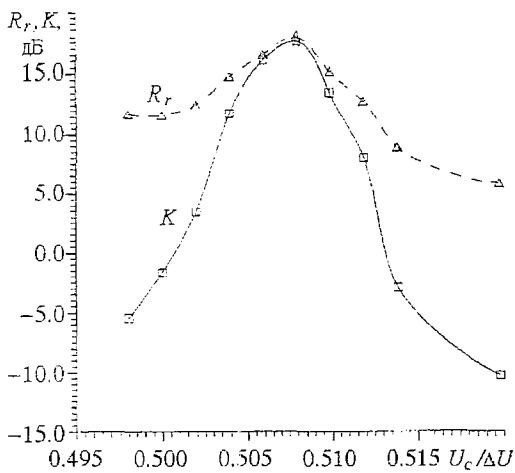


Рис. 9. Зависимость R_r и K от параметра $U_c/\Delta U$ для системы (1): $|G^-/G^+| = 1.25$, $A = 11$ мВ, $D = 0.04$ мВ²/Гц

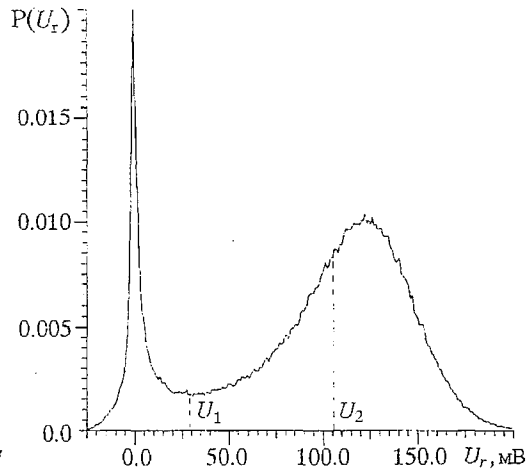


Рис. 10. Плотность распределения вероятности для выходного сигнала U_r системы (1) в режиме, соответствующем максимуму R_r на рис. 9. Линией U_1 обозначен мнимый потенциальный барьер, линией U_2 - истинный

На рис. 9 приведены зависимости R_r и K для системы (1) в зависимости от указанного параметра $U_c/\Delta U$. Они имеют ярко выраженный резонансный характер, достигая максимума при значении $U_c/\Delta U = 0.508$. Это и есть точка, где система ведет себя оптимальным образом, то есть эффект СР проявляется наиболее ярко. Попробуем охарактеризовать режим работы системы в этой точке. Как известно, симметрию классической бистабильной системы удобно оценивать по одномерной функции плотности распределения вероятности сигнала отклика, которая в режиме СР имеет двугорбый вид. Ее минимум четко указывает местоположение потенциального барьера, а площадь правого и левого сегментов дает соотношение времен пребывания в двух устойчивых состояниях. Аналогичное распределение плотности вероятности для выходного сигнала U_r системы (1) приведено на рис. 10. Действуя традиционным образом, можно определить положение потенциального барьера на уровне U_1 . Однако, расчет соотношения площадей слева и справа под кривой дает в этом случае соотношение 0.121/0.879! Очевидно, при практически симметричном (что можно определить визуально) переключении системы уровень U_1 не может отвечать расположению потенциального барьера системы. Поиск на графике рис. 10 точки, отвечающей равновероятному пребыванию системы в обоих состояниях, дает уровень U_2 . Как выяснилось, значение U_2 с высокой степенью точности соответствует местоположению неустойчивого предельного цикла на фазовой плоскости системы.

Таким образом, для асимметричных систем минимум распределения плотности вероятности выходного сигнала может не соответствовать положению потенциального барьера, разделяющего два устойчивых состояния. Его положение в значительной степени определяется скоростью изменения состояния системы в данной области. В нашем случае система может долго находиться вблизи неустойчивого цикла, но очень быстро «скатиться» в устойчивое состояние равновесия.

Приведенный выше пример показывает, что более адекватным может оказаться подход, основанный на анализе средних времен пребывания в каждом из устойчивых состояний системы. На рис. 11 приведены зависимости средних времен пребывания τ_{lc} и τ_{rp} , а также частоты Крамерса f_s от напряжения смещения U_c в трехточечном автогенераторе. На рис. 12 приведены соответствующие зависимости для R_r и K при трех различных интенсивностях шума. Кривые 1

соответствуют точке левее максимума R_r на рис. 8, кривые 3 - правее, а 2 - точке максимума.

Из графиков рис. 11 видно, что несмотря на изначальную асимметрию системы, графики τ_{lc} и τ_{fp} являются практически зеркальным отображением друг друга. При этом области максимумов R_r и K (см. рис.12) соответствуют зоне пересечения кривых τ_{lc} и τ_{fp} . Пунктирной линией на рис. 11 нанесена зависимость для частоты Крамерса f_s . Она имеет резонансный вид и достигает максимума при величине U_c , соответствующей пересечению времен пребывания.

Из представленных результатов следуют важные выводы. Можно заключить, что разбаланс времен пребывания влияет на режим системы двояким образом. С одной стороны, выходной сигнал упрощенно рассматривать как последовательность импульсов-переключений со случайной длительностью. Тогда разбаланс времен пребывания должен увеличивать их среднюю скважность. При этом уменьшается доля первой гармоники в Фурье-образе сигнала. Однако, такой механизм не может объяснить ярко выраженного резонансного характера зависимостей R_r и K . Значительно большую роль играет отраженное на рис. 11 изменение частоты Крамерса системы. С этой точки зрения изменение соотношения времен пребывания эффективно меняет интенсивность действующего на систему шума и именно таким образом управляет ее режимом. В некотором смысле, изменение степени эффективной симметрии системы эквивалентно сдвигу в область меньших величин интенсивности шума (см. рис. 8). Конкретный вид зависимости должен при этом определяться исходной точкой на графике. На рис. 12 приведены такие зависимости для R_r и K . Таким образом, острый пик кривых 1 объясняется тем, что при разбалансе система «сдвигается» влево по круто падающему участку графика рис. 8. Кривые 2, соответствующие максимуму на рис. 8, имеют более пологий вид, а кривые 3 имеют наиболее

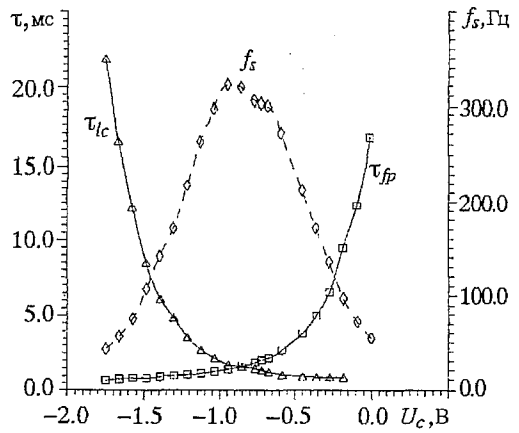
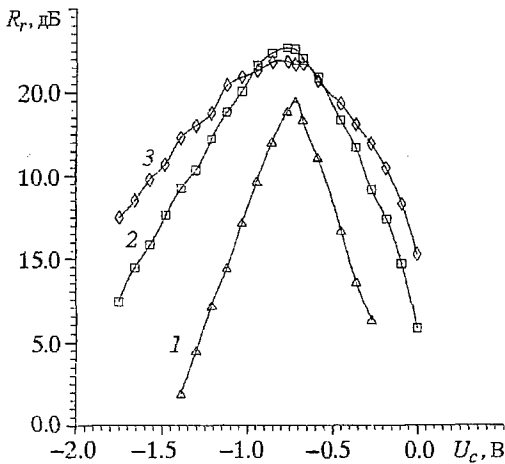
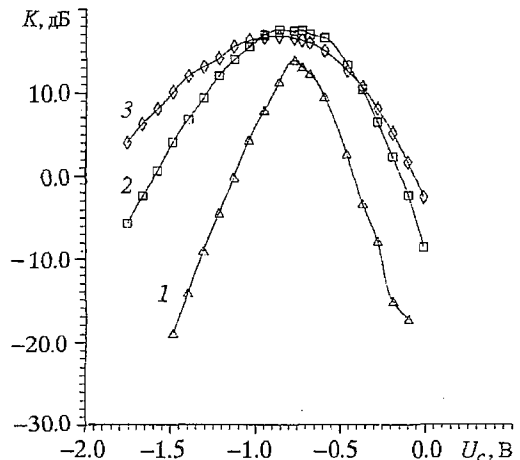


Рис. 11. Зависимости времен пребывания τ_{fp} , τ_{lc} и частоты Крамерса f_s от напряжения смещения U_c



а



б

Рис. 12. Зависимости R_r (а) и K (б) от напряжения смещения U_c для трехточечного LC-генератора при $A = 1$ В и значениях D : 1 - $0.542 \text{ мВ}^2/\text{Гц}$; 2 - $1.379 \text{ мВ}^2/\text{Гц}$; 3 - $2.17 \text{ мВ}^2/\text{Гц}$

половую верхнюю часть, поскольку оптимальная для данной частоты сигнала частота Крамерса достигается только при некотором разбалансе системы.

Отметим еще один интересный факт. Точное сопоставление кривых 2 и соответствующей им зависимости f_s позволяет установить, что максимум K достигается при соотношении $\tau_{ic}=\tau_{ip}$, что соответствует максимуму f_s , а наибольшему значению R_T отвечает точное равенство $f_s = f_i$.

Выводы

В данной работе показана типичность эффекта стохастического резонанса для систем типа автогенераторов с жестким возбуждением автоколебаний, имеющих в качестве устойчивых режимов как состояние равновесия, так и предельный цикл. Достаточно общий характер изучаемых моделей позволяет использовать полученные результаты для анализа генераторов подобного типа, работающих в высокочастотном и СВЧ диапазоне. При этом необходимым условием является контроль за соотношением между периодом собственных колебаний и характерными временами выхода на устойчивый режим: эти времена должны быть одного порядка с периодом.

Изучение стохастического резонанса в таких системах естественным образом ставит вопрос о введении понятия «эффективной симметрии» системы. В данной работе показано, что области наибольшего проявления стохастического резонанса соответствует зона близких значений времен пребывания в двух устойчивых состояниях, однако максимум выходного отношения сигнал/шум может достигаться и при некотором разбалансе системы. Показано, что вводимая в систему асимметрия уменьшает частоту Крамерса, эффективно уменьшая интенсивность шума.

Работа была частично поддержана Международной научной программой NATO (Grant NTECH.LG 930749), Международным научным фондом Сороса (грант RNO 000) и Госкомитетом России по науке и высшей школе (грант 93-8.2-10).

Библиографический список

1. Benzi R., Sutera S., Vulpiani V. The mechanism of stochastic resonance // J.Phys.A. 1981. Vol. 14. L. 453.
2. Nicolis C. and Nicolis G. Stochastic aspects of climatic transitions - additive fluctuations // Tellus. 1981. Vol.33, P.225.
3. Moss F. Stochastic Resonance: From the Ice Ages to the Monkey Ear // Some problems in Statistical Physics / Ed. G.Weiss, SIAM, Philadelphia, 1992.
4. J.Stat. Phys. Special issue «Proc. of the NATO. Advanced Research Workshop on Stochastic Resonance». 1992. Vol.70, № 1/2.
5. McNamara B., Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance // Phys.Rev. A. 1989, Vol. 39, № 9. P. 4854.
6. Gammaitoni L., Menichella-Saetta E., Marchesoni F. // Phys.Lett.A. 1989. Vol.142. P. 59.
7. Dykman M., Haken H., Hu Gang, etc. Linear Response Theory in Stochastic Resonance // Phys.lett.A 1993. Vol.180, № 332.
8. Jung P. Periodically Driven Stochastic Systems // Phys.Rep. 1994. Vol.234, № 175.
9. McNamara B., Wiesenfeld K., Roy R. Observation of stochastic resonance in a ring laser // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. P. 2626
10. Gammaitoni L., Martinelli M., Pardi L., and Santucci S. Observation of stochastic resonance in bistable electron-paramagnetic-resonance systems // Phys.Rev.Lett., 1991, Vol.67. P. 1799.
11. Douglass J.K., Wilkens L., Pantazelou E., Moss F. Noise enhancement of the

information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance // Nature. 1993. Vol.365(6444). P. 337.

12. Zhou T., Moss F. Analog simulation of stochastic resonance // Phys.Rev.A. 1990. Vol.41, № 8.

13. Carroll T.L., Pecora L.M. Stochastic resonance as a crisis in a period-doubled circuit // Phys. Rev.E. 1993. Vol. 47, № 6. P.3941.

14. Dykman M., Luchinsky D., McClintock P., Stein N., Stocks N. High frequency stochastic resonance in periodically driven systems // Pisma Zh.Eksp.Theor.fiz. 1993. Vol.58, № 2. P. 145.

15. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic resonance in Chua's circuit // Int.J.Bif. and Chaos. 1992. Vol.2, № 2. P. 397.

16. Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A. Stochastic Resonance in Chaotic Systems // J.Stat.Phys. 1993. Vol.70, № 1/2. P. 183.

17. Nicolis G., Nicolis C., McKernan D. Stochastic Resonance in Chaotic Dynamics // J.Stat.Phys. 1993. Vol.70, № 1/2.

18. Stocks N.G., Stain N.D., and McClintock P.V.E. Stochastic Resonance in monostable systems // J.Phys.A. 1993. Vol.26. P. 385.

19. Bartussek R., Hänggi P. Stochastic resonance in optical bistable system // Phys.Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 3930.

20. Kramers H. Physica. 1940. Vol.7. P. 284.

21. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. Numerical Recipes in C. Cambridge, 1988.

22. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Стохастический резонанс в бистабильной электрической цепи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. №4-5. В печати.

23. Jung P., Hänggi P. Amplification of small signals via stochastic resonance // Phys.Rev.A. 1991. Vol.44, № 12. P. 8032.

24. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Использование стохастического резонанса для повышения отношения сигнал/шум в радиотехнических системах // РЭ. Т.39, № 12. С. 2004.

25. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники. Ч.1. М.:Мир, 1986.

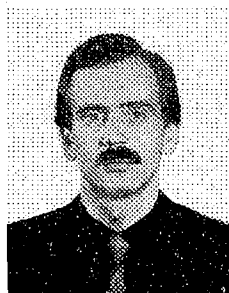
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 28.02.95
после переработки 20.09.95

STOCHASTIC RESONANCE IN GENERATORS WITH THRESHOLD EXCITATION

D.E.Postnov

It has been show that stochastic resonance is a typical effect for the wide class of electronic circuits such as generators with threshold excitation. The results of full-scale experiment for two type of electronic circuits are described. The models used are the oscillator with negative resistance and the Kolpitz circuit. The problem of «effective symmetry» of the system in terms of stochastic resonance is discussed.



Постнов Дмитрий Энгелевич в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года - инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 23 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Н. Б. Янсон, В. С. Анищенко

В работе осуществлена попытка создания качественных моделей реальных биологических систем: изолированного сердца лягушки, сердца человека и системы кровообращения белой крысы. В качестве исходных данных были взяты дискретизированные одномерные реализации. Для оценки размерности вложения рассчитывались корреляционные размерности аттракторов. Результатом работы являются дифференциальные уравнения, приближенно описывающие динамику исследуемых систем.

Введение и постановка задачи

Проблема реконструкции динамических систем (ДС) по экспериментальным данным имеет давнюю историю. Можно выделить два аспекта данной проблемы. Первый состоит в решении задачи реконструкции фазового портрета системы по данным измерения зависимости от времени лишь одной переменной $a(t)$. Результатом решения этой задачи является N -мерная реконструированная траектория $x(t)$, в заданном приближении воспроизводящая фазовый портрет исходной системы. В эту же задачу входит прогнозирование зависимости $a(t)$ на время $t > t_0$, где t_0 - длительность экспериментальной реализации. Этой задаче посвящено большое количество работ и достигнуты конструктивные результаты [1-3]. Второй, более общий аспект проблемы включает решение неоднозначной задачи математического моделирования системы в виде соответствующих дискретных или дифференциальных эволюционных уравнений. Если модель найдена, то решение эволюционных уравнений должно с заданной степенью точности воспроизводить экспериментальную зависимость $a(t)$ и давать прогноз на время $t > t_0$. Кроме того (и это главный результат), наличие реконструированных уравнений дает возможность описания не только процесса $a(t)$, но и его зависимости от управляющих параметров модельной системы. Решению данной задачи на примере некоторых модельных систем было также посвящено много работ (например, [4-5] и ссылки в них). Одна из проблем, возникающих при этом, состоит в том, что результирующие уравнения получают негрубыми, то есть малое изменение их параметров приводит к уходу траектории на бесконечность. Отметим, что решение задачи реконструкции математической модели безусловно включает необходимость решения задачи реконструкции N -мерной фазовой траектории.

Целью нашей работы является попытка реконструкции исследуемых биологических систем, причем под реконструкцией мы будем понимать нахождение явного вида уравнений, приближенно моделирующих их поведение.

1. Описание метода

Первым шагом к реконструкции является восстановление фазового портрета по известной исходной реализации. Известно несколько способов решения этой проблемы [4-7], но в данной работе мы остановимся на двух из них. Первый использует метод задержки Такенса

$$x(t) = \{a(t), a(t+p\Delta t), \dots, a(t+p(N-1)\Delta t)\}, \quad (1)$$

где $x(t)$ - фазовый вектор в N -мерном фазовом пространстве, N - размерность вложения, p - задержка, t - текущее время, Δt - шаг выборки исходной реализации $a(t)$. Вторым методом заключается в последовательном дифференцировании координат вектора x

$$x_1 = a, \quad x_{i+1} = \dot{x}_i, \quad i = 1, N-1. \quad (2)$$

Заметим, что часто производные \dot{x} аппроксимируются по формуле

$$\dot{x}_i = [x_i(t + \Delta t) - x_i(t)]/\Delta t. \quad (3)$$

Однако, используемые нами реализации были сняты с шагом дискретизации слишком большим для такой аппроксимации. Поэтому для более точного вычисления производных нам пришлось интерполировать фазовую координату между двумя известными точками с помощью полиномов степени m , чтобы получить точку $x_i(t + \Delta t^*)$, где $\Delta t^* \ll \Delta t$. В этом случае производные вычислялись по формуле (3), в которой Δt заменялось на Δt^* .

Следующим этапом решения задачи является построение математической модели исследуемой системы, например, получение системы N обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ &\dots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (4)$$

или дискретного отображения в R^N

$$\begin{aligned} x_{k+1,1} &= f_1(x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,N}), \\ x_{k+1,2} &= f_2(x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,N}), \\ &\dots \\ x_{k+1,N} &= f_N(x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,N}). \end{aligned} \quad (5)$$

Существует много способов аппроксимации функций f_j , и самый простой из них - представление искомых функций в виде полиномов степени v

$$f_j(x) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_N=0}^v C_{j, l_1, l_2, \dots, l_N} \prod_{k=1}^N x_k^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^N l_k \leq v \quad (6)$$

и нахождения коэффициентов этих полиномов методом наименьших квадратов. В нашей работе мы использовали этот способ. Использование этого метода требует большого количества оперативной памяти компьютера, поэтому аттрактор должен рассматриваться не во всех доступных точках, а лишь в относительно небольшом их количестве i_{\max} при выбранном шаге s вдоль траектории.

2. Исследуемые системы

Описанные алгоритмы были протестированы на широко известных моделях, в частности, на системе уравнений Лоренца со стандартными значениями параметров: $\sigma = 28$, $r = 10$, $\gamma = 8/3$; на системе уравнений Ресслера при значениях параметров $c=0.38$, $b=0.3$, $a=4.82$, а также на системе уравнений генератора Анищенко - Астахова (модифицированного генератора с инерционной нелинейностью), который рассматривался в хаотическом режиме при $m = 1.5$, $g = 0.2$ [8]. Из-за экономии места мы не приводим результатов восстановления этих систем по одной реализации. Убедившись в том, что написанные программы работают правильно, мы приступили к рассмотрению более сложных систем медико-биологического происхождения.

Первой системой было изолированное сердце лягушки (ИСЛ). Эксперимент по измерению исходной реализации проводился следующим образом: ИСЛ помещалось в специальный физиологический раствор, где оно начинало сокращаться. В него вводился металлический крючок, который двигался вместе с поверхностью сердца. Дискретизированная зависимость от времени текущей координаты крючка давала исходный временной ряд. Частота дискретизации составляла 60 Гц, а количество точек временного ряда равнялось 8192. Для экспериментов с реконструкцией описанной системы была выбрана наиболее типичная реализация колебаний точки на поверхности сердца лягушки¹.

Вторая система, исследованная нами, была сердцем человека (СЧ). Исходной реализацией являлась наиболее типичная ЭКГ здорового человека, снятая с частотой выборки 200 Гц и состоящая из 10240 точек.

Наконец, последняя система, с которой мы работали, была системой кровообращения лабораторной белой крысы. В качестве исходных данных бралась временная зависимость артериального давления крови крысы (АДК), которая измерялась с помощью датчика, введенного непосредственно в артерию животного. Частота дискретизации и количество точек были теми же, что и для ЭКГ СЧ.

Реализации, полученные в ходе экспериментов, состояли из целых чисел, изменяющихся в диапазоне $[-256, 256]$ для ИСЛ или $[-512, 512]$ для СЧ и АДК. Для удобства работы с ними осуществлялась перенормировка каждой из реализаций к интервалу $[0, 1]$. Для получения более «заполненных» фазовых портретов систем СЧ и АДК мы, путем интерполяции, определяли в промежутках между каждыми двумя соседними точками по 4 дополнительных. Таким образом, количество точек в исходных фазовых портретах увеличилось в 5 раз и, соответственно, в 5 раз уменьшился шаг их выборки. Далее будем считать шагом выборки Δt этот новый уменьшенный шаг.

Исходные временные ряды характеризовались достаточно заметным уровнем шума. Были предприняты попытки фильтрации шумов (например, методом Брунхеда - Кинга [9]). Однако, эксперименты показали, что использование отфильтрованных временных рядов для решения задачи реконструкции уравнений не дает результата. В связи с этим все приводимые ниже данные мы получали путем обработки исходных зашумленных реализаций.

¹ Экспериментальные данные были предоставлены нам Центральной научной лабораторией Медицинского университета (руководитель профессор Г.Е. Бриль).

3. Восстановление фазовых портретов

При восстановлении фазового портрета по реализации методом производных мы получаем лишь один вариант результата, поскольку все координаты связаны между собой однозначно соотношением (2). Конечно, можно варьировать параметры для достижения наибольшей точности этого соотношения. В частности, при интерполяции данных с помощью полиномов, можно менять степень последних, а, следовательно, и количество используемых соседних точек, которые могут влиять на результат. Можно также менять величину Δt^* . Но качественных изменений фазового портрета вариации этих параметров не вызывают.

Иная ситуация реализуется при восстановлении фазового портрета методом задержки, технически более простым. В этом случае нам предстоит правильно выбрать время задержки $\tau = p \Delta t$. В работе [10] утверждается, что, в принципе, оно может быть любым для незашумленных данных бесконечной длины. Однако, если это время окажется слишком мало, i -ая и $i+1$ -ая координаты фазовой точки станут практически неотличимы друг от друга. Реконструированный аттрактор в этом случае будет располагаться вблизи главной диагонали пространства вложения, что очень затрудняет его диагностику. При выборе слишком большого τ координаты оказываются некоррелированными, и структура реконструированного аттрактора по данным тестовых экспериментов теряется [11].

В ряде работ предлагается выбирать в качестве времени задержки первый нуль автокорреляционной функции (АКФ), первый минимум функции взаимной информации τ_{\min} [12-13] или первый минимум логарифма обобщенного корреляционного интеграла [14]. На рис. 1 представлены двумерные проекции восстановленных методом задержки фазовых портретов систем ИСЛ, СЧ и АДК при различных τ : внизу $\tau = \tau_{\min}$, а сверху $\tau < \tau_{\min}$. Видно, что увеличение времени задержки усложняет фазовый портрет и увеличивает размерность вложения, хотя топология аттракторов сохраняется. Поэтому в нашей работе мы остановились на фазовых портретах, изображенных на рис. 1, *a-v*, отвечающих условию $\tau < \tau_{\min}^2$.

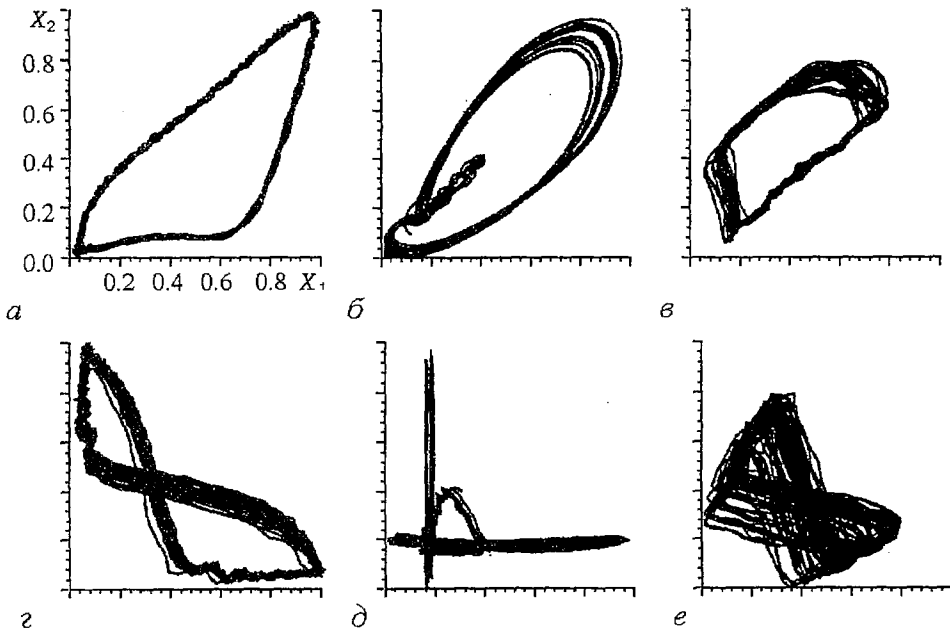


Рис. 1. Фазовые портреты колебаний исследуемых систем, реконструированные методом Такенса при различных значениях задержки по времени при $p = 5$ и $\tau < \tau_{\min}$: *a* - ИСЛ, *б* - СЧ, *в* - АДК; при $\tau = \tau_{\min}$: *г* - ИСЛ $p = 54$, *д* - СЧ $p = 75$, *е* - АДК $p = 18$

² В дальнейшем будем указывать τ_{\min} в единицах Δt .

4. Оценка размерности вложения исследуемых систем

Для оценки минимальной размерности вложения N для реконструкции уравнений мы использовали корреляционную размерность в силу преимуществ ее расчета, указанных в [15-20]. Использовался стандартный метод вычисления корреляционной размерности D_C по тангенсу угла наклона линейного участка графика функции $\lg C(\epsilon)$, где C - корреляционный интеграл, рассчитанный по формуле

$$C(\epsilon) = \lg \sum_{i=1}^{M(\epsilon)} p_i^2. \quad (7)$$

Здесь ϵ - длина стороны кубической ячейки разбиения реконструированного фазового пространства, p_i - вероятность попадания фазовой точки в ячейку с номером i , $M(\epsilon)$ - количество непустых ячеек. Заметим, что в силу проведенной нормировки исходных данных к интервалу $[0,1]$ максимальный размер ячейки равен 1. Размерность D_C рассчитывалась для диапазона изменения размерностей вложения N от 1 до 10. В качестве «истинной» D_C выбиралась размерность, полученная при $N=10$, хотя сходимость к этой величине начинала наблюдаться при существенно меньших значениях N . Результаты расчета корреляционной размерности приведены в таблице.

Таблица

Система	Корреляционная размерность D_C
ИСЛ	1.19
СЧ	2.79
АДК	2.14

Корреляционная размерность D_C аттрактора системы ИСЛ оказалась меньше двух и близка к единице. Можно предположить, что аттрактором системы ИСЛ является предельный цикл. Этот вывод подтверждает также вид реализации, медленно спадающая АКФ, почти линейчатый спектр на фоне шумового пьедестала и форма одномерной плотности распределения, характерная для предельного цикла [21]. Несколько завышенное значение размерности, по-видимому, связано с использованием сильно зашумленных экспериментальных данных. Для реконструкции этой системы мы использовали размерность вложения $N \leq 3$.

Корреляционная размерность, рассчитанная для системы СЧ, оказалась принципиально нецелым числом³. Это говорит о том, что мы имеем дело с хаотическим аттрактором. Согласно теореме Такенса, необходимой является размерность пространства вложения $N \geq 2D_C + 1$ [10], что требует в нашем случае задания $N = 7$. Однако, эксперименты показали, что значение $N = 7$ является в нашем случае завышенным, и мы ограничились заданием $N = 3$.

Для системы АДК мы получили значение корреляционной размерности немного больше двух, что говорит о возможном хаотическом характере колебаний. Этот результат хорошо согласуется с утверждением о том, что в системе реализуется аттрактор близкий к разрушившемуся тору [23]. Для восстановления уравнений этой системы также ограничимся размерностью вложения равной трем.

В целом, обнадеживающим результатом является малость вычисленных корреляционных размерностей. Это свидетельствует о том, что динамика исследуемых систем не сложнее динамики систем с одним положительным Ляпуновским показателем.

³ Приведенное в таблице значение согласуется с результатом, полученным в [22].

5. Реконструкция уравнений

5.1. Получение уравнений и свойства их решений. Первой нашей попыткой написать модель ИСП стала работа [21], в которой удалось получить лишь соответствующую двумерную дискретную модель. В настоящей работе были восстановлены системы из двух и трех дифференциальных уравнений, приближенно моделирующих данную систему. Для этого фазовый портрет, как и в [21], восстанавливался методом задержки с $p=\tau/\Delta t=5$ при $\Delta t = 0.01(6)$ (см. рис. 1, а). Свойства решений дифференциальных уравнений как двумерных, так и трехмерных, полностью совпадают со свойствами решений дискретных уравнений. Наблюдается соответствие спектров мощности, АКФ и одномерных плотностей распределения, вычисленных по реализациям обоих типов уравнений, с теми же характеристиками исходных данных.

Следующим шагом работы с ИСП стала реконструкция фазового портрета методом производных с использованием размерности вложения $N=3$. В силу зашумленности исходной реализации получившийся фазовый портрет оказался гораздо более хаотичным, чем изображенный на рис. 1, а, и совершенно не напоминал предельный цикл. Но мы все же сделали попытку реконструкции системы по такому фазовому портрету. Ее можно было считать успешной только после очень тщательного выбора параметров реконструкции $s^4 = 54$ ($\tau_{\min}=54$), $\Delta t^*=10^{-10}$, $m=10$, $v=3$. При других значениях этих параметров разумных результатов получено не было. Решением восстановленных уравнений являлся предельный цикл, по форме напоминающий исходный фазовый портрет (полученный методом дифференцирования). Временные зависимости соответствующих координат оказались также очень похожими.

Теперь обратимся к системе СЧ. Ее фазовый портрет, восстановленный методом Такенса, показан на рис. 1, б. Попытка реконструкции данной системы по такому фазовому портрету оказалась неудачной. Далее, мы выбрали в качестве исходных данных первую производную от экспериментальной реализации и уже по ней методом задержки восстановили фазовый портрет, эквивалентный показанному на рис. 1, б. По этому фазовому портрету при $s=1$ ($\Delta t=0.001$), $m=10$, $\Delta t^*=10^{-10}$, $i_{\max}=3500$, $v=4$ ($N=3$) были получены уравнения с предельным циклом, близким по форме к исходному фазовому портрету.

Затем мы восстановили аттрактор системы СЧ методом производных. На рис. 2, а-в показаны его двумерные проекции. Следует обратить внимание на топологическую эквивалентность данного аттрактора и аттрактора, изображенного на рис. 1, б. Разумные результаты для этого случая получились при нескольких вариантах задания параметров реконструкции. Например, при $s=16$ ($\tau_{\min}=75$), $m=10$, $\Delta t^*=10^{-10}$, $v=3$ удалось получить систему из трех дифференциальных уравнений, проекции решения которой показаны на рис. 2, г-е. Временные зависимости координат исходной и реконструированной систем изображены на рис. 3. В этом случае мы также имеем предельный цикл как результат реконструкции, хотя исходный аттрактор напоминал хаотический (о чем, кроме размерности, свидетельствует и характер АКФ). Эффект, при котором вместо хаотического режима восстанавливается регулярный, может быть связан с усредняющим действием метода наименьших квадратов⁵. Фазовая траектория системы СЧ не является периодической, но фазовая точка хаотическим образом движется в окрестности некоторого периодического режима, который и восстанавливается данным методом. Форма восстановленной первой координаты (см. рис. 3, г) также отлична от формы исходной ЭКГ (см. рис. 3, а), хотя в ней присутствуют все характерные для ЭКГ P, Q, R, S, T - зубцы.

⁴ Параметр s указан в единицах Δt .

⁵ Мы не исключаем возможности того, что аттрактор СЧ в действительности периодический, а результаты, приведенные на рис. 2, а-в, являются следствием влияния флуктуаций.

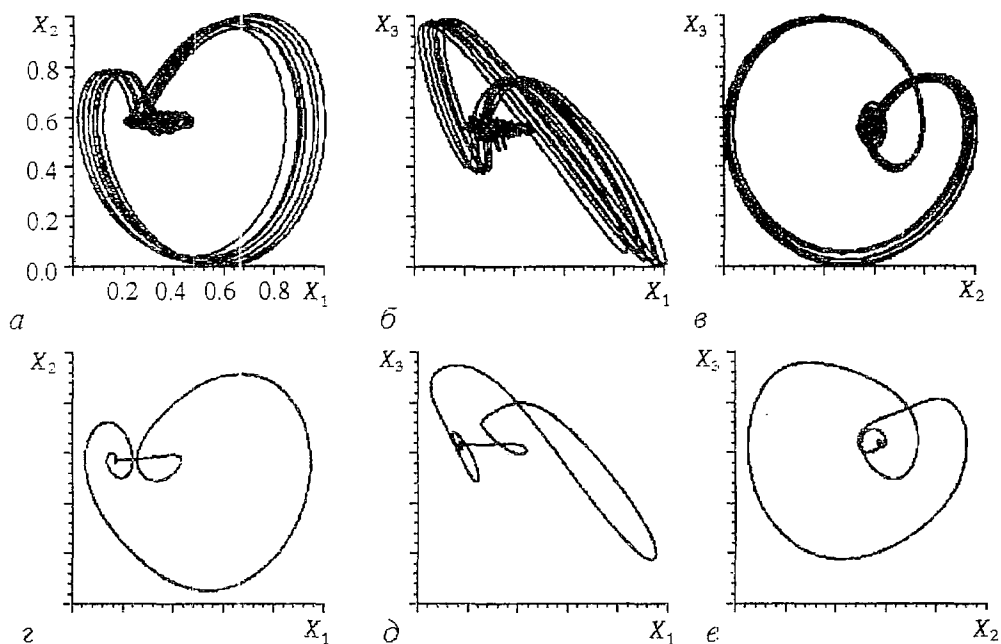


Рис. 2. *a - в* проекции фазового портрета системы СЧ, реконструированного методом производных и дополненного промежуточными точками; *г-е* проекций решения соответствующих реконструированных дифференциальных уравнений

Процедуре реконструкции мы подвергли также систему АДК. Отметим, что реконструкция этой системы так же, как и системы ИСЛ по фазовому портрету, полученному с помощью метода Такенса, не удалась. Фазовый портрет данной системы был восстановлен методом производных. При этом мы реконструировали уравнения с решением в виде хаотического аттрактора, по форме напоминающего исходный, но поведение его координат несколько отличалось от поведения соответствующих исходных координат.

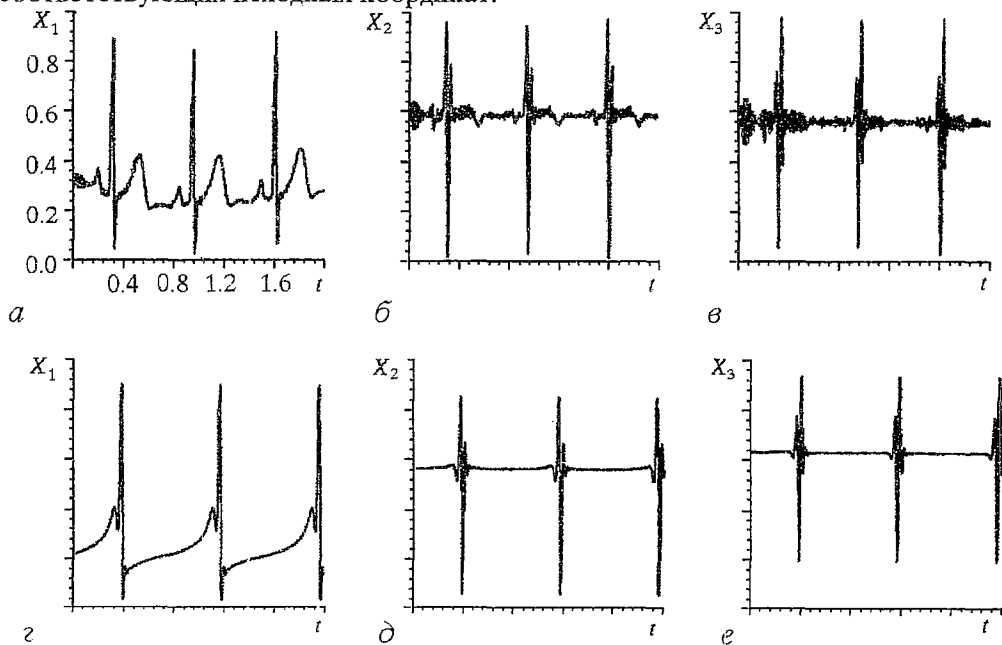


Рис. 3. Временные зависимости исходных координат системы СЧ: *a - $x_1(t)$* , *б - $\dot{x}_1(t)$* , *в - $\ddot{x}_1(t)$* ; *г-е* - соответствующие временные зависимости координат решения реконструированных уравнений

6.2. Свойства реконструированных уравнений. Мы не будем приводить в статье полученные нами дифференциальные уравнения ввиду их сложности. Правые части трехмерных дифференциальных уравнений имели вид (6), причем количество коэффициентов C_{j_1, l_2, \dots, l_n} при $\nu = 3$ равнялось 60. Пределы изменения значений коэффициентов оказались довольно значительными ($\pm 10^4$).

Очень важным результатом оказалась грубость полученных уравнений, то есть при малом изменении их параметров решение уравнений также менялось мало. При более значительном изменении некоторых параметров наблюдались бифуркации решений. Интересным является следующий факт. В результате реконструкции системы СЧ были получены уравнения с периодическим решением, хотя исходный аттрактор обладал хаотической динамикой. Но изменением одного из управляющих параметров можно перевести реконструированную систему в режим динамического хаоса (рис. 4), визуально напоминающий исходный фазовый портрет (см. рис. 2, а-в). Расчет старших показателей Ляпунова для этих двух режимов дал приблизительно совпадающие значения: для исходной электрокардиограммы было получено значение примерно равное 3.6, а для режима динамического хаоса, существующего в реконструированной системе, это значение было примерно равно 3.24.

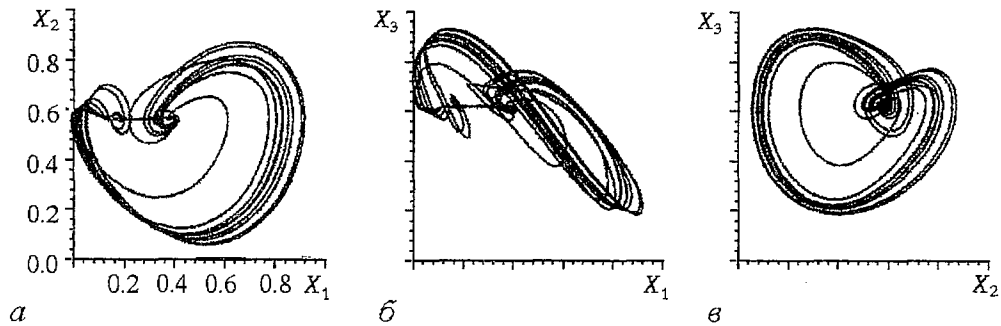


Рис. 4. Двумерные проекции фазового портрета системы уравнений, реконструированной по электрокардиограмме сердца человека, в режиме динамического хаоса (ср. с рис. 2, а-в)

А теперь обратим внимание на следующее. В случае, когда мы реконструировали фазовую траекторию методом последовательного дифференцирования координат, то ожидали получить уравнения в виде

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = F(x, y, z). \quad (8)$$

Но, несмотря на качественное соответствие фазовых портретов и реализаций, мы не получили дифференциальных уравнений вида (8), хотя при реконструкции этим методом тестовых систем мы получали ожидаемый результат. Все три реконструированные уравнения имели сложную форму правых частей (6), и никакими коэффициентами нельзя было пренебречь. Это может быть связано с сильной зашумленностью исходных данных, с тем, что размерность вложения, которой мы были вынуждены ограничиться из-за нехватки оперативной памяти ЭВМ, оказалась недостаточной, а также с возможной нестационарностью исходных данных: исходные фазовые траектории не принадлежали аттракторам систем в силу воздействия каких-то побочных факторов в процессе снятия реализаций с живых организмов.

Выводы

1. Построен алгоритм реконструкции динамических систем по одной реализации, который протестирован на известных модельных системах, что подтвердило его работоспособность.

2. Проведен расчет корреляционной размерности аттракторов исследуемых

биологических систем: изолированного сердца лягушки, сердца человека и системы кровообращения белой крысы по их одномерным реализациям.

3. Осуществлена попытка применения метода реконструкции динамической системы по наблюдаемой к перечисленным реальным медико-биологическим системам. В результате получены некоторые грубые уравнения, решение которых качественно соответствует исходным данным.

4. Найдены управляющие параметры реконструированных систем, изменение которых приводит к бифуркациям решений.

Нашу первую попытку создания качественных моделей реальных биологических систем не следует рассматривать как конечный результат. Мы лишь показали, что алгоритмы реконструкции систем в принципе применимы к зашумленным данным, полученным в ходе эксперимента (в нашем случае, биологического). Объем работы не позволяет привести данные более подробного исследования полученных уравнений, в том числе результаты их интегрирования с шумом различной интенсивности. Следующим шагом в наших дальнейших исследованиях в этой области будет увеличение размерности вложения при реконструкции уравнений, использование более точных методов аппроксимации правых частей уравнений, изменение способа вложения данных в фазовое пространство.

Мы выражаем глубокую благодарность профессору Саратовского медицинского университета Г.Е. Бриллио за любезно предоставленные нам экспериментальные реализации ИСЛ, П.И. Сапарину и Н.Б. Игошевой за предоставленные записи ЭКГ, профессору СГУ Т.Г. Анищенко и А.Н. Мурашову за предоставленные экспериментальные реализации артериального давления белой крысы.

Работа частично финансировалась Международным научным фондом (грант RNO 000) и Русским фондом фундаментальных естественных наук (грант 93 - 8.2 - 10).

Библиографический список

1. *Casdagli M.* Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D.* 1989. Vol. 35. P. 335.
2. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.
3. *Arbanel H.D.I., Brown R., Kadtko J.B.* Prediction in chaotic nonlinear systems: Methods for time series with broadband Fourier spectra // *Phys.Rev. A.* 1990. Vol. 41. P. 1782.
4. *Gouesbet G., Letellier C.* Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 495.
5. *Brown R., Rulkov N.F., Tracy E.R.* Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3784.
6. *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P.712.
7. *Mindlin G.B., Solari H.G., Natiello M.A., Gilmore R., Hou X.-J.* // *Nonlinear Sci.* 1991. Vol. 1. P. 147.
8. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 311 с.
9. *Broomhead D.S., King G.P.* Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data // *Physica 16D.* 1986. Vol. 20, № 2. P. 217.
10. *Takens F.* // *Dynamical Systems and Turbulence.* Warwick, 1980. Vol. 898 of *Lecture Notes in Mathematics* / Eds. D.A.Rang, L.S.Young. Berlin: Springer, 1981. P. 366.
11. *Parker T.S., Chua L.O.* Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. New York: Springer-Verlag, 1989. P. 191.

12. Bransater A., Swinney H.L. Strange attractors in weakly turbulent Couette - Taylor flow // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35. P. 2207.
13. Fraser A.M., Swinney H.L. Independent coordinates from mutual information // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. P. 1134.
14. Liebert W., Schuster H.G. Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 142. P. 107.
15. Pawelski K., Schuster H.G. Generalized dimensions and entropies from a measured time series // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35. P. 48.
16. Atmanspacher H., Schungraber H., Voges W. Global scaling properties of a chaotic attractor reconstructed from experimental data // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. P. 1314.
17. Theiler J. Estimating fractal dimension // J. Opt. Soc. Am. A. 1990. Vol. 7, № 6. P.105.
18. Havstad J.W., Ehlers C.L. Attractor dimension of nonstationary dynamical systems from small data sets // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 845.
19. Theiler J. Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time series data // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34. P. 2427.
20. Nerenberg M.A.H., Essex C. Correlation dimension and systematic geometric effects // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42. P. 7065.
21. Anishchenko V.S., Smirnova N.B. Analysis and synthesis of dynamical systems from experimental data // SPIE. 1993. Vol. 2098. P. 137.
22. Destexhe A., Sepulchre J.A., Babiloyantz A. A comparative study of the experimental quantification of deterministic chaos // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 132. P. 101.
23. Анищенко В.С., Сафонова М.А., Сапарин П.И. Измерительно - вычислительный комплекс для диагностики сложных режимов автоколебаний // РЭ. 1992. Т. 37, № 3. С. 467.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 19.01.95
после переработки 28.08.95

MODELLING DYNAMICAL SYSTEMS ON EXPERIMENTAL DATA

N.B. Jenson, V.S. Anishchenko

An attempt is made in the work to create qualitative models of some real biological systems, i.e., isolated frog's heart, a human's heart and a blood circulation system of a white rat. Sampled one-dimensional realizations of these systems were taken as the initial data. Correlation dimensions were calculated to evaluate the embedding dimensions of the systems' attractors.

The result of the work are the systems of ordinary differential equations which approximately describe the dynamics of the systems under investigation.



Янсон Наталья Борисовна - родилась в 1971 г. в Саратове. Окончила Саратовский государственный университет по специальности радиофизика (1993). С 1993 года является аспиранткой кафедры радиофизики СГУ. Участница трех международных научных конференций (Volga Laser Tour '93, Russia; 3-rd Technical Conference on Nonlinear Dynamics (CHAOS) and Full Spectrum Processing, '95, Mystic, CT, USA; International Workshop on Nonlinear Techniques in Physiological Time-Series Analysis, '95, Dresden, Germany). Автор нескольких статей. Области научных интересов: анализ временных рядов, реконструкция динамических систем по экспериментальным данным.



Изв. вузов «ПНД», т.3, № 3, 1995

TOOLS FOR ANALYZING OBSERVED CHAOTIC DATA*

Henry D.I. Abarbanel

1 Introduction

Most problems in physical and biological science which involve evolution in time can be cast as sets of differential equations where variables evolve in continuous time or discrete time maps where time is sampled at given intervals. If we allow infinite numbers of differential equations then partial differential systems and time delay systems and many integral equations also fit into this general category. Certainly the majority of engineering systems are typically cast into this framework, and it is the analysis of the evolution in time (continuous or discrete) which is the province of dynamical systems. When those dynamical systems involve the dependent variable $\mathbf{x}(t)$ in a nonlinear fashion in the evolution equations, and this is typically the case, phenomena occur which are substantially different and richer than those arise when the equations are constrained to be linear in $\mathbf{x}(t)$. In this review we expose some of the ideas which have been uncovered about the solutions to such nonlinear systems over the past several decades and discuss in detail how these new ideas allow the analysis of complex looking time series which might be dismissed as «noise» without the understanding achieved. Our viewpoint is to describe tools for the analysis of real data with an eye toward learning enough from that data to provide means to make models for prediction and control of the nonlinear systems one observes. We restrict the discussion to ordinary differential equations and maps, though with appropriate care on the kind of space one works in more general questions are encompassed as well.

The solution $\mathbf{x}(t)$ to sets of ordinary differential equations

$$d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (1)$$

or discrete time iterated maps

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \quad (2)$$

where $\mathbf{x}(t)$ is a vector in d -dimensional state space, and $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ is a smooth nonlinear function of \mathbf{x} , has revealed numerous remarkable surprises over the past two decades. In the case where the physical system is dissipative, state space volumes shrink to zero in time, and time asymptotic motion occurs on a set of points to which all orbits $\mathbf{x}(t)$ from a large

* *Продолжение.* Начало см. Изв. вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

set of initial conditions $x(0)$ are attracted. The set of initial conditions $x(0)$ is called the *basin of attraction* associated with the particular time asymptotic set, and the set itself is called an *attractor*. A most remarkable feature of these attractors is that while they have zero volume, they may have a dimension $0 < d_A < d$ which is fractional. Motion on such a *strange attractor* is typically nonperiodic in time.

The study of this nonperiodic motion, called *chaos*, has been the subject of abstract mathematical investigations as well as laboratory and numerical experimentation in physical, biological, chemical and other environments. The knowledge we have of such behavior has moved from the realm of analysis of given sets of differential equations and given maps to the stage where one can take experimental observations and determine characteristic features of the source of the signal. This «inverse» problem is critical for the application of ideas of nonlinear dynamics to real world issues. This article is devoted to the description of tools which are available for the systematic and quantitative analysis of measured data from laboratory experiments and field observations. Using these tools one can go from the observed data to model equations on the attractor. These are usable for prediction, control, and design of engineering systems in fields ranging from communications to fluidized bed flows. In this article we report on «methods that work» and allow one to analyze motions which appear complex when viewed one way and see them in other ways where they appear amenable to quantitative analysis and practical use.

Chaotic motion of physical systems - mechanical, fluid, electromagnetic, hydrologic, optical, ... - is known to occur as a pervasive feature of their motion [1,2]. To a traditional linear analyst of these signals the output of these systems when undergoing chaotic motion appears complex in the time domain and broadband in the Fourier domain. Broadband not only by virtue of occupying a wide band of frequencies but also by dint of being continuous in its spectral band. In other words, and this is the critical feature of chaotic spectra, it is continuous, broadband, so the motion in time domain is *non-periodic*. Nonetheless, the motion is totally deterministic and often that of a system which is composed of a small number of degrees of freedom. Chaotic signals represent a middle ground between (1) our traditional view of «noise» which is spectrally continuous broadband but not predictable and is composed of a very large number of degrees of freedom - in principle, an infinite number - and (2) our traditional view of acceptable signals which are regular, completely predictable, and spectrally composed of a number of sharp signals. The time domain version of such regular signals looks complex because of the presence of many sinusoids in it, but in Fourier domain its simplicity is revealed.

Chaotic signals are also simple when properly viewed, and the main thrust of this review is to discuss how to establish and then use the space in which this simplicity is revealed. The simplicity is essentially geometric, and using these geometric properties one can perform the usual tasks associated with signal processing:

- **signal separation** - given observations contaminated by a signal which is not of direct interest, how do we separate the signal of interest from the combination presented in the observation? If one of the signals is «noise», this is often called noise reduction, but it is quite important to recognize that separating one signal from another is the main problem. This opens up the use of many of the techniques we will discuss for communications applications. The task of separating signals when one is chaotic is both simpler and more difficult than in the conventional case where one signal is spectrally broad («noise») and the other is spectrally narrow («signal»). One uses the structure of chaos in state space to differentiate it from another signal, and the geometric and dynamical features of this structure allow one to separate the signals.

- **establishing the proper state space for the signal** - given an observation which is a single scalar quantity, how can we reestablish the essential features of the multivariate space which is required for chaotic motion? The analysis of this question will occupy the center of this paper, and in the absence of contamination of the signal is often enough to pin down many of the needed properties needed in model making and system identification.

- **extracting invariant characteristics of the system from the observed**

signal - sometimes called system identification. In linear systems we characterize the system producing a signal by the collection of narrow lines associated with resonant behavior of the dynamics. If the system is driven harder, the energy under such lines will change, but their frequency, as long as the system remains linear, is unchanged. Similarly if the system is started at a different time, the phase of the signal will be altered, but the characteristic lines in the spectrum will not change. In nonlinear, chaotic system, these lines are not present, so we turn to other characteristics such as fractal dimensions and Lyapunov exponents which are unchanged under changes in initial conditions or changes of coordinate system. These quantities allow one to identify the system which originates the signal. It is not known what constitutes a complete set of such invariants. Nonetheless, their use in characterizing the source of the chaos is clear.

• **model building in the state space - for prediction and control.** This is the main goal in engineering practice. One studies systems not to catalogue their fractal dimensions, regardless of how expert one may become at that exercise, but to establish a set of evolution equations which govern the motion and then use these equations for predicting future behavior of the system or for providing a framework within which to devise controls to make the system perform «better» according to some criterion established by the user. We will show how to use the neighborhood structure in the system phase space (or state space) to make local or global models of the dynamics revealed by the observations.

There is an important sense of model building which becomes evident when one views the geometric structure defined by orbits of a chaotic system: since one sees motion of the system only on the set of points in state space to which all orbits are attracted (a strange attractor in the case of chaotic motions) after system transients have died out, the natural model one can build for evolution of the system will evolve it along the attractor or perhaps within the whole basin of attraction. The attractor is typically located on a small subspace of the original system state space, so one should not expect to be able to determine the original differential equations (partial or ordinary) which govern the system dynamics in its larger state space -infinite dimensional in the case of partial differential equations. Instead one should expect to be able to determine only an effective set of equations which allows the analysis of motion on the attractor subspace alone. The effective equations may not have any global analytic expression in the phase space, but may be composed of a large collection of local evolution rules having no expression beyond a kind of lookup table on a computer hard disk. This redefines the traditional view of finding some version of Newton's equations as the goal of the signal analysis. Since one can use the effective model to perform most of what can do with the differential equations, substituting the effective equations for analytic expressions does not diminish the utility of the analysis for practical tasks.

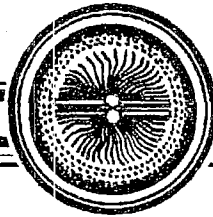
Another important use of the analysis tools is to determine the appropriateness of a proposed set of differential equations for the description of the observations. One cannot compare the detailed orbits (time series) of any of the variables in the solution of the differential equations with the observed chaotic orbits because chaotic motion is associated with unstable orbits throughout the system state space so any roundoff error or difference in initial conditions is exponentially amplified in chaotic motion. Any two orbits of the same system are uncorrelated in any sense - linear or nonlinear - after a characteristic time. Comparison of the output from the model with data must be carried out on other terms: comparison of the attractor properties such as fractal dimensions or Lyapunov exponents or other invariant aspects of the dynamics. Even though the system may be completely deterministic, the essential instabilities which underlie the chaotic behavior means that the terms of comparison are statistical.

It is the purpose of this brief review article to explain many of these statements in enough detail and with sufficient elaboration so that the reader can fully understand how to go about the kind of time series analysis we describe. We will stick to practical al-

gorithms and give examples of their application to quite varied data sets. The algorithms described here all run on standard serial workstations and, depending on the length of the data sets and the dimension of the state space, run in minutes to a few hours. None of the computation is prohibitive and much of it can be parallelized with accompanying speed-ups in execution.

Many topics will be passed by in this short article. We do not touch at all on the applications of the methods to medical or biological problems, though the tools are general enough to be useful there without any alteration. We focus on establishing the proper state space for the signal and extracting invariant characteristics of the system from the observed signal - two of the items from our list above. Signal separation, though not difficult, requires some ideas beyond what is useful to present in this kind of introduction. We will only touch on the ideas in model building since that is both the easiest and the hardest part of the whole process: it is easy to construct models which work; it is difficult to construct models which encompass aspects of the physics one is trying to capture. The development of efficient and usable models is a wide open subject which knows no hard and fast rules. It is unlikely there will be a «handbook» of models to use for this or that data. Much will depend on the interests and goals of the user, and that makes the subject rich indeed. We will outline what is known and works, but we expect that to grow rapidly with the application of the methods to a wide variety of practical problems. Some of the topics not contained here are touched on in [2,3] and additional detail will be found in [4].

The analysis of chaotic time series is by no means a closed or finished subject, so what we write on many of these topics will be superseded over the next few years as one applies the general viewpoint to numerous real world and practical problems. Out of this we anticipate will emerge a set of practices moving within the general sort of guidelines we are able to present and even more by what works and what doesn't work in practical situations. At this stage we are able to content ourselves with a consistent set of successful applications of the framework without having either the chutzpah or necessity to dictate how *all* problems should be approached or solved when dealing with nonlinear chaotic systems.



Изв. вузов «ПНД», т.3, № 3, 1995

World Scientific on Nonlinear Science - Series A Vol.8

DYNAMICAL CHAOS - MODELS AND EXPERIMENTS

**Appearance Routes and Structure of Chaos
in Simple Dynamical Systems**

by V.S. Anishchenko

ISBN 981 022 1428

Published by:

World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

PO Box 128, Farrer Road, Singapore 9128

USA office: Suite 1B, 1060 Main Street,
River Edge, NJ 07661

UK office: 57 Shelton Street, Covent
Garden, London WC2H 9HE

© 1995 World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Printed in Singapore

Preface

Dear reader! You are faced with a further book on the problem of dynamical chaos in dissipative systems. This subject has already been covered in a number of notable books. An impression might come to mind that the problem has been exhausted. However, let us not hasten this conclusion. In studies of most of the books dedicated to dynamical chaos in dissipative systems, a group of questions can be separated which, in my opinion, deserve a more detailed analysis. The following issues are the most important:

1. The role of characteristic homoclinic trajectories and Poincaré structures which define general bifurcational mechanisms of the appearance and the main properties of chaotic attractors in the appropriate class of nonlinear systems.

2. Regularities and interplay of the bifurcational mechanisms of transition to chaos, as well as the statistical properties of chaotic attractors which are revealed under the multi-parameter bifurcational study of dynamical systems.

3. The influence of external and internal fluctuations on typical bifurcations, structure transformation, the scenarios of development of chaotic attractors and their statistical properties.

The use of the theory of robust hyperbolic attracting sets (the theory of «truly» strange attractors) is found to be insufficient for investigation of the above problems. The application of the concept of quasiattractors which include regular (periodic and quasiperiodic) subsets of trajectories, along with the «strange» ones appears to be more fruitful. The analysis of dynamical systems from the viewpoint of this quasiattractor conception is more constructive for the examination of experimental results.

In low-dimensional dynamical systems, the occurrence of quasiattractors is mainly due to three types of homoclinic trajectories, and namely: 1) a saddle-focus separatrix loop of the equilibrium state; 2) a homoclinic structure in the form of «Smale's horseshoe» that is realized under intersection between stable and unstable manifolds of a saddle limit cycle; and 3) homoclinic trajectories appearing from breakdown of a resonant two-dimensional torus.

The study of the typical properties of quasiattractors engendered by the above types of homoclinic trajectories is the basic content of this book.

In Chapters 1 and 2, the elements of the stability and bifurcation theories are briefly outlined, as well as the methods for experimental research of dynamical chaos. The incorporation of this material pursues the goal of assisting young scientists in understanding of the main part of the book and to spare them the necessity of referring to additional literature on the first stage of examination.

Chapter 3 attends to an original system with chaotic dynamics (a modified oscillator with inertial nonlinearity) along with its mathematical model. A simple electronic circuit with one-and-a-half degree of freedom due to a number of its attributes has proved to be extremely convenient for numerical and experimental investigation of a low-dimensional chaos.

The objective of Chapters 4 and 5 is to analyze in more detail, both numerically and experimentally, the dynamics of an autonomous oscillator under variation of the control parameters of the system.

In Chapters 6 and 7, the typical hierarchies of instabilities are discussed which accompany nonlinear phenomena as the regimes of quasiperiodic oscillations with two or three independent frequencies are destroyed. For a basic model the inertial nonlinearity oscillator is used. The successive increase in dimension is achieved for the models under study by introducing an external periodic force or using a system of coupled oscillators.

Chapter 8 is devoted to the problem of synchronization of chaotic oscillations. A more simple class of chaotic attractors is considered for which a pronounced basic frequency in the power spectrum is typical (Shilnikov's attractors). The feasibility of generalization for the concepts of the classical oscillation theory on the external and mutual synchronization of periodic oscillations is shown for the case when these attractors are synchronized.

Recent findings on chaotic oscillations in the well-known Chua's circuit are presented in Chapter 9. Unlike the inertial nonlinearity oscillator, Chua's circuit is described by the equations with distinct symmetry properties and is characterized by three equilibrium states. These properties are responsible for the appearance of attractors with more complicated structure permitting a number of novel effects (e.g. the phenomenon of stochastic resonance) to be observed in this system. Chapter 9 has been written in collaboration with A.B.Neiman and M.A.Safonova.

Chapters 10 and 11 deal with the results of research into the influence of fluctuation on the bifurcations of regular and chaotic attractors. The foremost conclusion is here a justification of a strong sensitivity of particular chaos regimes in quasihyperbolic systems to small external perturbations. These chapters have been written together with A.B.Neiman.

Finally, Chapter 12 is devoted to the problem of reconstruction of dynamical systems with account of homoclinic trajectories and noise. This chapter is written together with M.A. Safonova.

The exposition and discussion of most of the results obtained are performed by starting from a detailed comparison between the data of theory, numerical simulation and

full-scale experiment. This allows many typical regularities to be obviously interpreted from the viewpoint of physics and the role of fluctuations, involved in a physical experiment, to be evaluated.

Finally, a distinctive feature of this book is that it has been written based on the results of original studies performed in the Laboratory of Nonlinear Dynamics of the Saratov State University for the past decade under my supervision.

The book's peculiarities briefly listed above, which make it different from books in print, lead me to hope that you, dear reader, will read this book with particular interest and to your benefit.

I express my profound thanks to V.V.Astakhov, T.E.Vadivasova-Letchford, M.A.Safonova, D.E.Postnov and A.B.Neiman, my students and colleagues, and collaborators in most of the works which have provided the basis for this book.

I am sincerely grateful to Professor L.O. Chua from Berkeley University, Professor J.Kurths from Potsdam University and their colleagues in USA and Germany for an inestimable help and support rendered to our laboratory's team. Their assistance has highly fostered the completion of work on this book.

I would like to thank Prof. Yu.L.Klimontovich, Prof. L.P.Shilnikov, Prof. V.N.Belykh, Prof. Yu.I.Neimark, Prof. M.I.Rabinovich, Prof.V.Ebeling, Prof. F.Moss, Prof. S.P.Kuznetsov, and Prof.L. Schimansky-Geier for numerous discussions and their noteworthy scientific works which undoubtedly have made an impact on the formation of my notions in the field of nonlinear dynamics and statistical physics.

Lastly, the author wishes to express his gratitude to Mrs. S.M.Bormasova and Mrs. N.B.Smirnova-Yanson for great efforts in translation of the text of the book and to Miss O.V.Sosnovtseva for her great assistance in preparation of the manuscript for the press.

The work on this book was partly financed by ISF Long-Term Research Grant NRO 000, the State Committee of Russia in Higher Education (Grant 93-8.2-10), the Physical Society of America (individual grant) and Linkage High Technology Grant NATO N HTECH. LG 93 07 49.

Saratov State University, Russia

Vadim S. Anishchenko

Contents

Preface	vii
Chapter 1. Stability and Bifurcation of Dynamical Systems	1
1.1 Linear analysis of stability. Variational equations	1
1.2 Spectrum of Lyapunov characteristic exponents of phase trajectories of dynamical systems	2
1.3 Stability of equilibrium states	5
1.4 Stability of periodic solutions. Limit cycle multipliers	6
1.5 Stability of quasiperiodic and chaotic solutions	8
1.6 Discrete-time systems. Poincaré map	10
1.7 Stability of discrete system solutions	13
1.8 Structural stability and bifurcations	15
1.9 Bifurcation of equilibrium states	16
1.9.1 Bifurcation of codimension one - a double equilibrium point	16
1.9.2 Bifurcation of codimension two - a triple equilibrium point	17
1.9.3 Limit cycle birth bifurcation	18
1.9.4 Nonlocal codimension-one bifurcations. The separatrix loop of saddle equilibrium state	20
1.10 Bifurcations of periodic solutions	21
1.10.1 Saddle-node bifurcation of limit cycle	22

1.10.2	Period doubling bifurcation of cycle	23
1.10.3	Two-dimensional torus birth bifurcation	25
1.10.4	Symmetry breaking bifurcation	27
1.10.5	Nonlocal periodic motion bifurcations accompanied by a period becoming infinite	29
1.11	Nonlocal bifurcations in the vicinity of double-asymptotic trajectories	31
Chapter 2. Numerical Methods of Chaos Investigations		33
2.1	Experimental approach to investigations of nonlinear system dynamics	33
2.2	Calculation of the Poincaré map	35
2.3	Numerical analysis of periodic solutions and their bifurcations	42
2.4	Numerical analysis of statistical properties of attractors	50
2.5	Algorithms for calculating the spectrum of Lyapunov characteristic exponents (LCE)	55
2.6	Method of numerical calculating the singular solutions	60
2.7	Dimension calculating algorithms	64
Chapter 3. Inertial Nonlinearity Oscillator. Regular Attractor Bifurcations		69
3.1	General equations of one-and-a-half-freedom degree oscillators	69
3.2	Statement of equations for a modified oscillator with inertial nonlinearity	73
3.3	Periodic oscillation regimes in the oscillator and their bifurcations under variation of the parameters	79
3.3.1	Andronov-Hopf bifurcation	80
3.3.2	Limit cycle bifurcations	83
Chapter 4. Autonomous Oscillation Regimes in Oscillator		90
4.1	Two-parametric analysis of transition to chaos via the cascade of period doubling bifurcations	90
4.2	The Poincaré map	96
4.3	System dynamics in the supercritical range of parameter values. Hysteresis and transition to chaos via intermittency induced by fluctuations	104
4.4	Interaction of chaotic attractors. Intermittency of «chaos-chaos» type	112
4.5	Dissipative nonlinearity influence on attractor bifurcations	116
Chapter 5. Quasiattractor Structure and Properties and Homoclinic Trajectories of Autonomous Oscillator		122
5.1	Oscillator dynamics in the vicinity of a homoclinic trajectory of saddle-focus separatrix loop type	122
5.2	Role of homoclinic saddle cycle trajectories in chaotic attractor bifurcation	131
5.3	Physical interpretation of exciting the nonperiodic oscillations in oscillator with inertial nonlinearity	138
5.4	On the dimension of an attractor	141
Chapter 6. Two-Frequency Oscillation Breakdown		146
6.1	General problem statement	146
6.2	Bifurcation diagram of nonautonomous oscillator in the vicinity of basic resonance. Computer simulation	148
6.3	The bifurcation diagram of system (6.1). Full-scale experiment	151
6.4	Two-dimensional torus doubling bifurcation. Soft transition to chaos	155
6.5	Bifurcation mechanism of torus-chaos birth under two-frequency oscillation breakdown	159
6.6	Universal quantitative regularities of soft transition to chaos via two-dimensional torus breakdown	164

Chapter 7. Breakdown of Two- and Three-frequency Quasiperiodic Oscillations	174
7.1 Transitions to torus-chaos in the system of two coupled oscillators	174
7.2 Qualitative description of bifurcations in the system of coupled oscillators by using a model map	180
7.3 Transitions to chaos via three-frequency quasiperiodic oscillations	188
Chapter 8. Synchronization of Chaos	199
8.1 Introduction and definition of the problem	199
8.2 Experimental system and its mathematical model	200
8.3 Methods of investigation	203
8.4 Forced synchronization of chaos	205
8.5 Bifurcational mechanisms of synchronization in the region of chaos	210
8.6 Mutual synchronization of symmetrically coupled oscillators	211
8.7 Evolution of distribution density of phase spectra difference in the process of synchronization	216
Chapter 9. Nonlinear Phenomena and Chaos in Chua's Circuit	219
9.1 Definition of the problem	219
9.2 Chua's circuit	220
9.3 Chaos-chaos intermittency and $1/f$ noise in Chua's circuit	231
9.4 Dynamics of non-autonomous Chua's circuit	241
9.5 Stochastic resonance in Chua's circuit	248
9.6 Confirmation of the Afraimovich-Shilnikov torus-breakdown theorem via Chua's torus circuit	255
Chapter 10. Bifurcations of Dynamical System in the Presence of Noise	268
10.1 Some methods of stochastic calculus	268
10.2 Influence of external noise on the bifurcations of equilibrium state	278
10.3 Period doubling bifurcations in the presence of noise	291
Chapter 11. Chaos Structure and Properties in the Presence of Noise	302
11.1 Introduction	302
11.2 Regimes of dynamical chaos under the influence of noise with finite intensity	304
11.3 Hyperbolic and quasihyperbolic attractors under the influence of colored noise	308
11.4 Bifurcations of chaotic attractors in the presence of noise	312
11.5 Transitions in chaotic systems induced by noise	319
11.6 Statistical properties of intermittency in quasihyperbolic systems in the presence of noise	325
Chapter 12. Reconstruction of Dynamical Systems from Experimental data	337
12.1 Introduction	337
12.2 Methods and algorithms	338
12.3 Results of map (12.1) reconstruction	342
12.4 Reconstruction of system (12.2)	345
12.5 Comparison of qualitative characteristics of reconstructed attractors with original ones	350
12.6 Reconstruction of differential system	354
Bibliography	361
Index	381



Изв.вузов «ПНД», т.3, № 3, 1995

Книга доктора Даниэля Каплана и профессора Леона Гласса «Понимание нелинейной динамики» рассчитана на студентов выпускных курсов университетов по специальностям: биология, биохимия и биофизика. Книга в доступной форме служит введением в современные проблемы нелинейной динамики. Она содержит главы об устойчивости, мультистабильности, клеточных автоматах и активных средах, фракталах, размерности, циклах и хаосе. В отдельную главу вынесен материал по численному анализу временных рядов, являющийся важным для экспериментальных исследований динамики нелинейных систем.

Книга не претендует на строгое математическое описание рассматриваемых проблем, предполагая, что студенты имеют соответствующую подготовку по физико-математическим дисциплинам университетских программ. В то же время книга содержит большое количество интересных примеров и задач прикладного характера, что очень важно для стимулирования самостоятельной работы.

Книга написана интересно, доступным языком и будет полезна в качестве учебного пособия по прикладной нелинейной динамике студентам, изучающим науки о жизни.

В.С. Анищенко

UNDERSTANDING NONLINEAR DYNAMICS

by Daniel Kaplan & Leon Glass

Department of Physiology McGill University
Montréal, Québec, Canada

ISBN 0-387-94440-0

Published by:

© Springer-Verlag New York, Inc., 1995
Printed and bound by: Hamilton Printing Co.,
Castleton on Hudson, NY, USA.

Contents

Preface	vii
About the Authors	xiii
1 Finite-Difference Equations	1
1.1 A Mythical Field	1
1.2 The Linear Finite-Difference Equation	2

1.3	Methods of Iteration	6
1.4	Nonlinear Finite-Difference Equations	8
1.5	Steady States and Their Stability	12
1.6	Cycles and Their Stability	20
1.7	Chaos	27
1.8	Quasiperiodicity	33
	1 <i>Chaos in Periodically Stimulated Heart Cells</i>	37
	Sources and Notes	41
	Exercises	42
	Computer Projects	51
2	Boolean Networks and Cellular Automata	55
2.1	Elements and Networks	56
2.2	Boolean Variables, Functions, and Networks	58
	2 <i>A Lambda Bacteriophage Model</i>	64
	3 <i>Locomotion in Salamanders</i>	70
2.3	Boolean Functions and Biochemistry	73
2.4	Random Boolean Networks	77
2.5	Cellular Automata	79
	4 <i>Spiral Waves in Chemistry and Biology</i>	88
2.6	Advanced Topic: Evolution and Computation	91
	Sources and Notes	94
	Exercises	96
	Computer Projects	101
3	Self-Similarity and Fractal Geometry	105
3.1	Describing a Tree	106
3.2	Fractals	
3.3	Dimension	111
	5 <i>The Box-Counting Dimension</i>	115
3.4	Statistical Self-Similarity	116
	6 <i>Self-Similarity in Time</i>	117
3.5	Fractals and Dynamics	121
	7 <i>Random Walks and Lóvy Walks</i>	126
	8 <i>Fractal Growth</i>	137
	Sources and Notes	141
	Exercises	142
	Computer Projects	143
4	One-Dimensional Differential Equations	147
4.1	Basic Definitions	148
4.2	Growth and Decay	149
	9 <i>Traffic on the Internet</i>	156
	10 <i>Open Time Histograms in Patch Clamp Experiments</i>	158
	11 <i>Gompertz Growth of Tumors</i>	163
4.3	Multiple Fixed Points	164
4.4	Geometrical Analysis of One-Dimensional Nonlinear Ordinary Differential Equations	166
4.5	Algebraic Analysis of Fixed Points	168
4.6	Differential Equations versus Finite-Difference Equations	172
4.7	Differential Equations with Inputs	174
	12 <i>Heart Rate Response to Sinusoid Inputs</i>	182
4.8	Advanced Topic: Time Delays and Chaos	183
	13 <i>Nicholson's Blowflies</i>	186
	Sources and Notes	188
	Exercises	189
	Computer Projects	205

5	Two-Dimensional Differential Equations	209
5.1	The Harmonic Oscillator	209
5.2	Solutions, Trajectories, and Flows	211
5.3	The Two-Dimensional Linear Ordinary Differential Equation	213
5.4	Coupled First-Order Linear Equations	219
	14 <i>Metastasis of Malignant Tumors</i>	221
5.5	The Phase Plane	226
5.6	Local Stability Analysis of Two-Dimensional, Nonlinear Differential Equations	230
5.7	Limit Cycles and the van der Pol Oscillator	240
5.8	Finding Solutions to Nonlinear Differential Equations	244
	15 <i>Action Potentials in Nerve Cells</i>	245
5.9	Advanced Topic: Dynamics in Three or More Dimensions	248
5.10	Advanced Topic: Poincaré Index Theorem	253
	Sources and Notes	260
	Exercises	260
	Computer Projects	275
6	Time-Series Analysis	279
6.1	Starting with Data	279
6.2	Dynamics, Measurements and Noise	280
	16 <i>Fluctuations in Marine Populations</i>	281
6.3	The Mean and Standard Deviation	286
6.4	Linear Correlations	291
6.5	Power Spectrum Analysis	298
	17 <i>Daily Oscillations in Zooplankton</i>	300
6.6	Nonlinear Dynamics and Data Analysis	303
	18 <i>Reconstructing Nerve Cell Dynamics</i>	304
6.7	Characterizing Chaos	314
	19 <i>Predicting the Next Ice Age</i>	330
6.8	Detecting Chaos and Nonlinearity	338
6.9	Algorithms and Answers	347
	Sources and Notes	348
	Exercises	349
	Computer Projects	353
Appendix A. A Multi-Functional Appendix		359
A.1	The Straight Line	361
A.2	The Quadratic Function	362
A.3	The Cubic and Higher-Order Polynomials	362
A.4	The Exponential Function	363
A.5	Sigmoidal Functions	364
A.6	The Sine and Cosine Functions	367
A.7	The Gaussian (or «Normal») Distribution	368
A.8	The Ellipse	370
A.9	The Hyperbola	371
	Exercises	371
Appendix B. A Note on Computer Notation		381
Solutions to Selected Exercises		385
Bibliography		401
Index		409

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал - макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам
осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж»
при Саратовском государственном университете.

Банковские реквизиты - р/с № 000609446 в КБ «Экономбанк»
г. Саратова, МФО 251279, расчет банка 700161122, РКЦ, МФО 251008.

Индекс издания по каталогу «Газеты и журналы» 73498

Сдано в набор 1.11.95. Подписано к печати 5.04.96. Формат 70x108/16.

Бумага финская. Печать офсетная. Гарнитура Латинская.

Усл. печ.л. 11,825 (8,375). Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 200 экз. Заказ 9.

Издательство ГосУНЦ «Колледж».
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446
E-mail:and@college.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

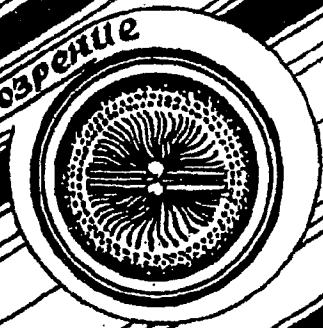
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1996



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



в журнале ~
студентов и преподавателей



Современной нелинейной динамики

Искусство Средневековья - искусство схоластического реализма. С упоением художник исследует и описывает вдруг открывшуюся ему новую трансцендентальную реальность, тот космический аттрактор, в котором совершается вековечный кругооборот душ человеческих, либо ликующе созерцающих заоблачные сферы небесного Града, либо со стоном и стенаниями горящих и не сгорающих в дымящихся вихрях адского пламени. Земная жизнь - краткий миг, но это миг испытания души, миг ее свободы воли. Только здесь, внимая чистым звукам божественного призыва и погружаясь в соблазны бесовских наваждений, душа может совершить ряд последовательных

бифуркаций, определяющих ее судьбу; ведь дальше - Страшный Суд и вечный приговор. На гобелене XV века неизвестный немецкий художник представил нам момент первой проверки переходного аттрактора земного странствия души - архангел Михаил с мечом и весами решает открывать или не открывать пред ней Райские Врата. К сожалению, центральная часть гобелена оказалась, как всегда, изъеденной временем и представляла собой кучу беспорядочно скрученных волоконца. С чисто немецкой педантичностью всех их соединили в единую нить, которая, будучи рассмотрена как некая биотекстильная реализация, была подвергнута анализу* с целью построения качественной модели исходной, казалось бы, безвозвратно утраченной системы. Шедевр средневекового мастера вновь засиял в своей первозданной красоте.

* Методику см. в данном выпуске в статье Н.Б. Янсон с соавтором.

