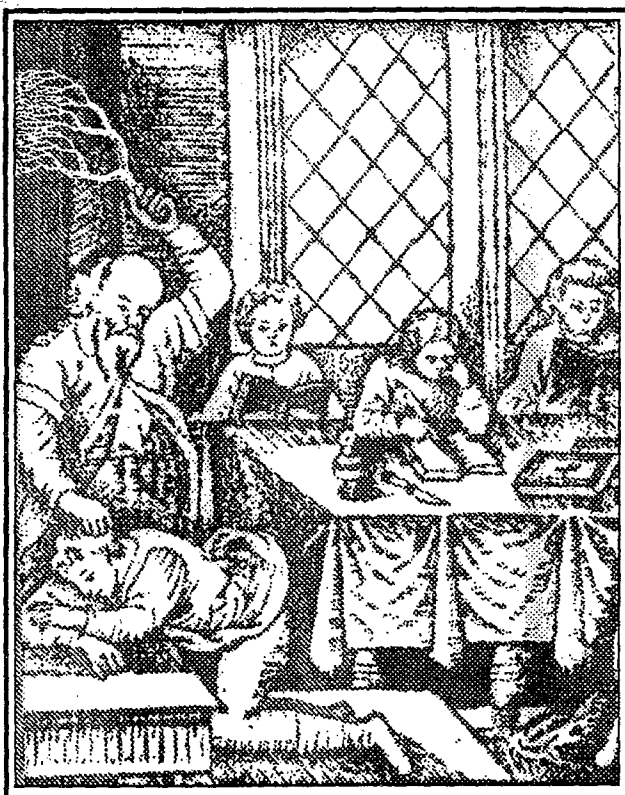


Трикладная Деловая Динамика



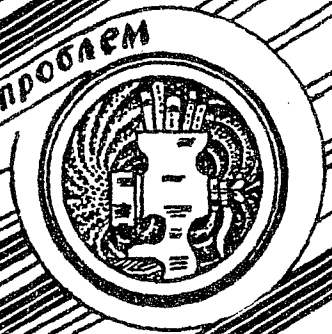
5
1995

Материалы школы "ХАОС-94" (Саратов, Волжские Дали)

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



**Бифуркации
в динамических
системах различной природы**



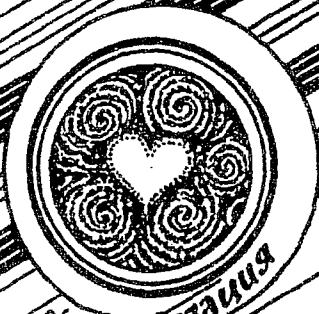
**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



Конференция, семинары, симпозиумы



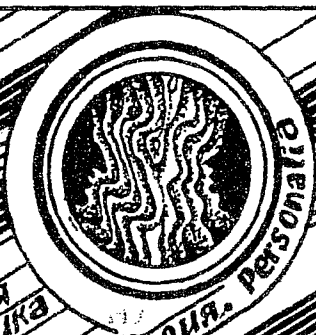
детерминированный хаос



Автомобильная самоорганизация



**Прикладные задачи
нелинейной
теории колебаний волн**



Динамическая теория персонажа

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.К. Юлматов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Х а о с - 9 4

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Андреев Ю.В. Аттракторы и бифуркационные явления в одномерных динамических системах с записанной информацией 3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Стохастический резонанс в бистабильной электрической цепи 16

Пономаренко В.П., Заулин И.А. Роль инерционности и начального рассогласования в развитии колебательных режимов в бистабильной системе с фазовым управлением 26

Архипов А.В., Богданов Л.Ю., Воскресенский С.В., Левчук С.А, Лукаша О.И., Соминский Г.Г. Исследование колебаний объемного заряда и формирования пространственных структур в электронном потоке с магнитным удержанием. Часть 2. 35

Санин А.Л., Ермолаев Ю.Л. Реконструкция структур тока при рассеянии электронов на ионизированных донорах и фононах в неоднородном полупроводнике 55

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Фрактальный сигнал и динамика систем, демонстрирующих удвоения периода 64

Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г. Динамический хаос в двухрезонаторных клистронных автогенераторах с запаздывающей обратной связью 88

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Кальянов Э.В. Самоорганизация при взаимодействии связанных автостохастических автоколебательных систем 100

Майоров В.В. Самоорганизация колебаний в кольцевой системе из однородных нейронных модулей. Часть 2. Модель кольцевой системы из однородных модулей 109

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Abarbanel H.D.I. Tools for analyzing observed chaotic data. Part 4 and 5 Summary 119

CONTENTS

Chaos - 94

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Attractors and bifurcation phenomena in 1-D dynamic systems with stored information. *Yu.V. Andreyev* 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Stochastic resonance in a bistable electronic circuits. *V.S. Anishchenko, D.E. Postnov, I.A. Khovanov, B.V. Shulgin* 16

Role of inertia and initial deviation in development of oscillating regimes in bistable phase control system. *V.P. Ponomarenko, I.A. Zaulin* 26

Investigation of space charge oscillations and structure formation in magnetically confined electron beams. Part 2. *A.V. Arhipov, L.Yu. Bogdanov, S.V. Voskresensky, S.A. Levchuk, O.I. Louksha, G.G. Sominski* 35

Current structure reconstruction under electron scattering by ionized donors and phonones in inhomogeneous semiconductor. *A.L. Sanin, Yu.L. Ermolaev* 55

DETERMINISTIC CHAOS

Fractal signal and dynamics of period doubling systems. *A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, I.R. Sataev* 64

Chaotic dynamics of two-cavity clystron oscillators with delayed feedback. *V.V. Aphanasyeva, A.G. Lazerson* 88

AUTOWAVES. SELFORGANIZATION

Selforganization with interaction of the coupling autostochastic autooscillation systems. *E.V. Kalyanov* 100

Selforganization of oscillations in ring system of homogeneous neuron modules. Part 2. Model of ring structure of homogeneous modules. *V.V. Mayorov* 109

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

Tools for analyzing observed chaotic data. Part 4 and 5 Summary. *H.D.I. Abarbanel* 119



АТТРАКТОРЫ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПИСАННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Ю.В. Андреев

Рассматривается динамика одномерного отображения с записанной информацией. Исследуются аттракторы, существующие в системе при записи информации на устойчивых и неустойчивых предельных циклах. Для этого изучены бифуркационные явления в отображении с записанной информацией, возникающие при изменении параметра s , определяющего устойчивость информационных предельных циклов. Анализ бифуркационных диаграмм показывает, что потеря устойчивости предельных циклов при переходе параметра $|s|$ через единицу сопровождается рождением хаотических аттракторов типа циклов интервалов.

Показано, что принцип использования динамических аттракторов для записи информации может быть обобщен на класс хаотических аттракторов типа циклов интервалов. На простых примерах продемонстрирована возможность записи информации на хаотических циклах интервалов.

Существование хаотических циклов интервалов - носителей информации позволяет использовать явление перемежаемости в отображениях с записанной информацией для хаотического сканирования памяти.

Введение

Несколько лет назад был предложен принцип записи информации в одномерных динамических системах, использующий в качестве носителей информации предельные циклы в фазовом пространстве этих систем [1, 2]. Для этого была разработана процедура синтеза одномерных кусочно-линейных отображений с соответствующими предельными циклами. Устойчивость циклов в такой динамической системе определяется единственным параметром s - наклоном информативных участков функции отображения.

Запись информации с использованием в качестве информационных носителей динамических аттракторов - предельных циклов - позволяет органично реализовать ряд таких функций обработки информации, как ассоциативная память (при записи на устойчивых циклах), распознавание образов, в том числе в присутствии ошибок (при записи на неустойчивых циклах), фильтр новизны и некоторых других [3-6].

Однако, до сих пор оставались неизученными вопросы о характере движения в системе и эволюции информационных предельных циклов при изменении параметра устойчивости s , а также возможность записи информации на более сложных динамических структурах, например, на хаотических аттракторах. Эти вопросы и составляют предмет исследования настоящей работы.

1. Принцип записи информации в одномерных динамических системах

Прежде чем приступить к обсуждению вопросов, рассматриваемых в настоящей статье, вкратце определим основные понятия и термины на примере записи на отображении двух блоков информации - английских слов *dad* и *babe* (подробное описание принципа записи см. в [1-5]). Информационный блок - это конечная одномерная цепочка символов, принадлежащих упорядоченному конечному множеству A , которое далее будем называть алфавитом. В качестве алфавита в данном случае возьмем подмножество латиницы $A = \{a, b, c, d, e\}$, содержащее $N = 5$ элементов. Под записью будем понимать синтез одномерной динамической системы с дискретным временем с двумя предельными циклами в ее фазовом пространстве, соответствующими этим двум блокам информации. Запись будем вести на втором уровне, это означает, что каждая точка предельного цикла определяется двумя последовательными элементами соответствующего информационного блока.

Фазовое пространство динамической системы - единичный отрезок $I=[0,1]$ - разделим на N регионов первого уровня (интервалов длины $1/N=0.2$) и каждому из них поставим в соответствие свой элемент алфавита. Каждый из регионов первого уровня разделим в свою очередь на N регионов второго уровня (интервалов длины $1/N^2 = 0.04$) и каждому из них тоже поставим в соответствие свой элемент алфавита (рис.1).

Теперь построим два цикла $\gamma_n=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, однозначно связанных с записываемыми информационными блоками. Для блока *dad* три точки цикла связаны с парами *da*, *ad*, *dd* (информационный блок мысленно сшивается в кольцо). Точка цикла, соответствующая фрагменту блока *da*, является центром региона второго уровня *a*, расположенного на регионе первого уровня, соответствующего букве *d* (рис.1). Аналогично строятся другие точки цикла. Точки цикла, соответствующего блоку *babe*, связаны с фрагментами блока *ba*, *ab*, *be*, *eb*.

После того, как в одномерном фазовом пространстве построен скелет замкнутых траекторий - циклов γ_n , приступаем к синтезу динамической системы с фазовым пространством такой структуры. Для этого на плоскости (X_m, X_{m+1}) откладываем пары последовательных точек всех циклов (x_i, x_{i+1}) . Для управления устойчивостью циклов через эти точки на плоскости (X_m, X_{m+1}) проводим короткие отрезки с фиксированным наклоном s (далее называемые информативными участками). Как известно, устойчивость предельного цикла определяется его мультипликатором μ . В случае одномерного отображения для цикла $\gamma_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ он равен $\mu = f'(x_1) \dots f'(x_n)$, а в данном случае определяется величиной тангенса

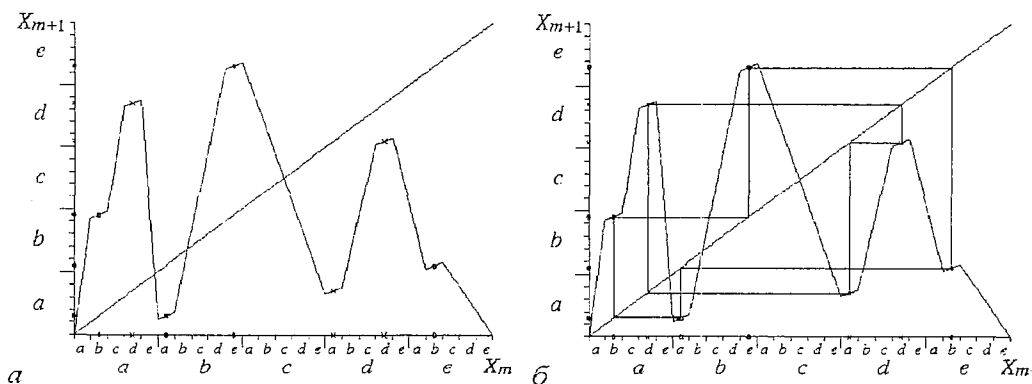


Рис. 1. Синтез одномерного отображения при записи информационных блоков *dad* и *babe* на втором уровне

угла наклона информативных участков: $\mu = s^n$. При $|\mu| < 1$ ($|s| < 1$) цикл устойчив, при $|\mu| > 1$ ($|s| > 1$) - неустойчив.

Синтез функции $f(x)$ искомого одномерного отображения завершается последовательным соединением концов информативных участков между собой и с концами отрезка $[0,1]$ прямыми линиями. График функции отображения с устойчивыми предельными циклами ($s = 0.5$) приведен на рис.1, а.

Извлечение информации происходит при итерировании отображения $x_{n+1} = f(x_n)$: когда фазовая траектория x_n попадает на те или иные регионы первого уровня, это трактуется как «генерация» или появление на «выходе» системы соответствующего элемента алфавита. Последовательность элементов алфавита на «выходе» системы будем называть информационным потоком. Циклы, соответствующие блокам *dad* и *babe*, показаны на рис.1, б.

2. Бифуркационные явления в отображениях с записанной информацией

Для эффективной обработки информации в нелинейной динамической системе необходимо понимание характера движений и существования и устойчивости тех или иных динамических структур в ее фазовом пространстве. Ниже рассматриваются явления, сопровождающие потерю устойчивости предельных циклов с записанной информацией при увеличении наклона $|s|$ от значений, меньших единицы.

Однопараметрические бифуркационные диаграммы для одномерных отображений с записанной информацией показаны на рисунках, приведенных в конце этого и в следующем разделе. При построении такой диаграммы отображение $x_{n+1} = f(x_n, s)$ итерируется и 5000 последовательных значений переменной x_n откладываются вдоль оси ординат для текущего значения s . После этого делается приращение s на относительную величину $\sim 10^{-3}$ и просчитывается переходной процесс длиной 5000 шагов для нового значения s без вывода на диаграмму. Начальные условия x_0 задаются только один раз, а последовательные точки x_n находятся всегда как бы на одной и той же фазовой траектории системы. Выбирая соответствующим образом начальные условия x_0 , можно просматривать эволюцию того или иного конкретного аттрактора.

Анализ бифуркационных диаграмм будем вести, опираясь на результаты, полученные в [7, 8]. Там показано, что в кусочно-линейных отображениях помимо обычных циклов точек $\gamma_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ могут иметь место циклы интервалов* $\Gamma_m = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ - хаотические притягивающие множества, состоящие из конечного числа отрезков I_k . При движении на таком аттракторе фазовая траектория системы проходит через точки $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = f(x_n), \dots$, последовательно попадающие на интервалы I_1, I_2, \dots, I_m . В работах [7, 8] построена теория кусочно-линейных отображений с единственным экстремумом, и подробно исследованы механизмы возникновения и динамические свойства этих аттракторов.

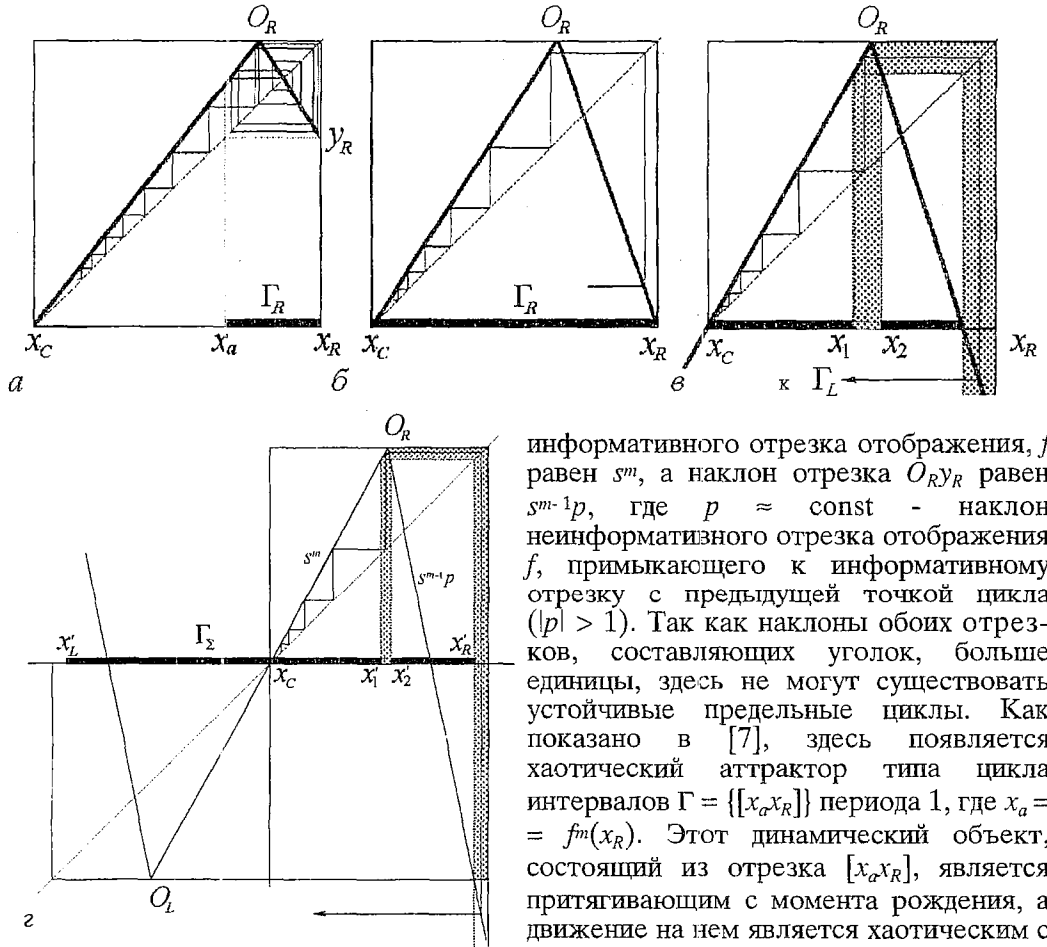
Рассмотрим схематически явления в окрестности информативных отрезков во время бифуркации потери устойчивости предельных циклов при $s = 1$ ($\mu = +1$).

Устойчивость периодического решения с периодом m отображения $f: I \rightarrow I$ удобно анализировать с помощью отображения f^m . Предельный цикл $\gamma_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ периода m отображения f соответствует неподвижной точке x_c отображения f^m , где

* Циклы интервалов, известные также под именем «шумящие интервалы», могут иметь место и в гладких отображениях. В качестве примера можно привести аттрактор - цикл интервалов периода 1 отображения логистической параболы $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ при $\lambda = 4$ с непрерывным хаотическим множеством на отрезке $[0,1]$.

x_c - одна из точек цикла. Устойчивость предельного цикла γ_m однозначно связана с устойчивостью неподвижной точки x_c отображения f^m : цикл γ_m устойчив, если устойчива x_c , то есть $|f^m(x_c)'| < 1$, и наоборот: $|f^m(x_c)'| = |f'(x_1)' \dots f'(x_m)'| = |\mu|$, где μ - мультипликатор цикла γ_m .

В критической точке $s = 1$ все точки информативного отрезка на $f^m: I \rightarrow I$ неподвижны и лежат на биссектрисе $x_{n+m} = x_n$. При прохождении s через $+1$ на границе информативного и неинформативного отрезков появляется «уголок», подобный изображенному на рис. 2, а, где показана правая половина информативного участка. x_c - середина информативного отрезка, точка цикла, O_R - вершина уголка, x_R вначале совпадает с правой границей информативного интервала. Наклон отрезка $x_c O_R$, являющегося образом правой половины



информативного отрезка отображения, f равен s^m , а наклон отрезка $O_R y_R$ равен $s^{m-1}p$, где $p \approx \text{const}$ - наклон неинформативного отрезка отображения f , примыкающего к информативному отрезку с предыдущей точкой цикла ($|p| > 1$). Так как наклоны обоих отрезков, составляющих уголок, больше единицы, здесь не могут существовать устойчивые предельные циклы. Как показано в [7], здесь появляется хаотический аттрактор типа цикла интервалов $\Gamma = \{[x_a x_R]\}$ периода 1, где $x_a = f^m(x_R)$. Этот динамический объект, состоящий из отрезка $[x_a x_R]$, является притягивающим с момента рождения, а движение на нем является хаотическим с положительным показателем Ляпунова. Этому хаотическому аттрактору периода 1 отображения f^m соответствует интервальный цикл Γ_m периода m отображения f , полученный итерациями интервала $[x_a x_R]$ под действием f . Этот, очевидно, притягивающий цикл проходит через краевые области соответствующих информативных отрезков потерявшего устойчивость предельного цикла γ_m .

Рис. 2. Эволюция хаотического цикла интервалов в окрестности информативного отрезка на отображении f^m . x_c - неподвижная точка f^m (точка цикла периода m отображения f). а - цикл интервалов Γ_R на правой половине информативного отрезка, $\Gamma_R = [x_a x_R]$; б - бифуркация потери устойчивости Γ_R (кризис Γ_R): $x_a = x_R$; в - появление «дырки» $[x_1 x_2]$ - канала ухода траектории с Γ_R ; г - разрушение общего аттрактора Γ_Σ , уход траектории с Γ_Σ через «дырку» $[x_1 x_2]$

Эволюция интервального цикла Γ_R отображения f^m зависит от наклона отрезков $[x_c O_R]$ и $[O_R x_R]$.

В момент своего рождения цикл интервалов совпадает с вершиной «уголка» - точкой O_R . По мере роста s растут наклоны составляющих «уголок» отрезков, и аттрактор $\Gamma = \{[x_c x_R]\}$ увеличивается, расширяясь в обе стороны от O_R . При некотором критическом значении $s = s_1$, когда выполняется условие $f^m(x_R) = x_c$, интервальный цикл занимает всю правую половину информативного интервала исходного отображения и часть неинформативного (рис.2, б). При дальнейшем росте s в аттракторе появляется «дырка» $[x_1 x_2]$, где $f^m(x_1) = x_R$ и $f^m(x_2) = x_c$, через которую фазовая траектория покидает аттрактор (рис.2, в), уходя на левую половину информативного отрезка.

Это явление можно рассматривать как кризис аттрактора - трансформацию в переходной (метастабильный) хаос хаотического аттрактора при столкновении его границы с неподвижной точкой x_c . Следуя подходу, развитому в [9], можно оценить среднее время пребывания фазовой траектории на метастабильном аттракторе Γ_R как

$$T \propto P^{-1} = \left(\frac{|x_1 x_2|}{|x_c x_R|} \right)^{-1} = \left(\frac{s^m}{1 + s/|P|} - 1 \right)^{-1}, \quad (1)$$

где вероятность ухода траектории с интервального цикла $P=0$ при $s=s_1$. Для s , близких к s_1 ,

$$T \propto P^{-1} \approx (m(s - s_1))^{-1}. \quad (2)$$

Отметим, что при $s = s_1$ фазовая траектория системы, покидая данный аттрактор, попадает в центр информативного отрезка (точку x_c), а при больших s забрасывается все ближе к его левому краю, и если на левой половине информативного отрезка происходят аналогичные явления с аттрактором Γ_L , образуется общий аттрактор Γ_Σ , объединяющий Γ_R и Γ_L на обеих половинах информативного отрезка. Это устойчивый аттрактор, так как единственные каналы ухода траектории с Γ_R и Γ_L направлены в сторону друг друга. С ростом s он теряет устойчивость: при некотором $s=s_2$ возникает «дырка» $[x_1' x_2']$, где $f^m(x_1') = x_R'$ и $f^m(x_2') = x_c'$, и траектория покидает уже окрестность информативного отрезка, отправляясь блуждать по фазовому пространству (рис.2, г). Зависимость среднего времени T пребывания фазовой траектории на неустойчивом множестве Γ_Σ аналогична (1).

Проиллюстрируем эти качественные рассуждения анализом бифуркационных диаграмм для отображения с информационным блоком 375, записанным на первом уровне (рис.3). Алфавит - набор цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $N = 10$. Если фазовая траектория системы в момент бифуркации рождения циклов интервалов при $s = 1$ находилась на правой стороне информативных отрезков (относительно точек предельного цикла), она притягивается к интервальному циклу, проходящему через правую половину информативных

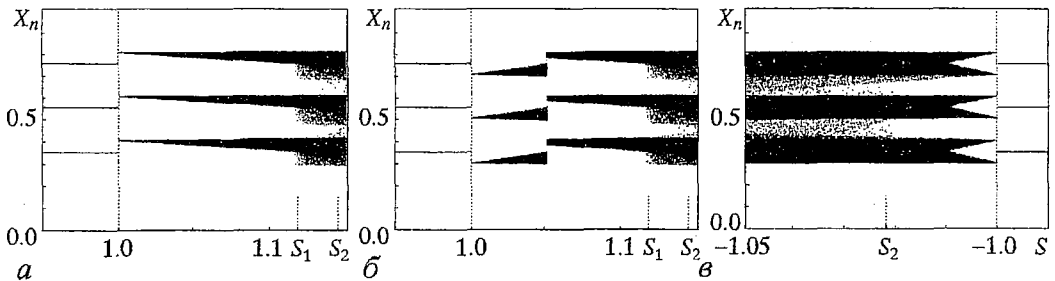


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для отображения с информационным блоком 375, записанным на первом уровне: а - при $\mu = 1$ фазовая траектория притягивается к Γ_R ; б - при $\mu = 1$ фазовая траектория притягивается к Γ_L ; в - рождение удвоенного цикла интервалов при $\mu = -1$

отрезков («правый» аттрактор Γ_R). Показатель Ляпунова для этого аттрактора $\lambda \approx 0.3$. При увеличении s мера этого интервального цикла на отрезке $[0,1]$ увеличивается, и при $s_1 \approx 1.12$ аттрактор доходит до x_c - середины информативного отрезка. Это момент потери устойчивости «правого» цикла интервалов. При $s > 1.12$ через появившийся канал траектория покидает окрестность этого аттрактора. Однако, как следует из рис. 2, в, характер потери устойчивости таков, что фазовая траектория, покидая аттрактор на правой половине информативного отрезка, попадает на его левую половину. Если бы аттрактор на левом краю информативного отрезка («левый» аттрактор Γ_L) был в этот момент устойчивым, то траектория осталась бы на нем. Однако он потерял устойчивость раньше (при $s \approx 1.05$), поэтому после некоторого блуждания по нему траектория уходит обратно на «правый» аттрактор, и так далее.

Таким образом, при $s = s_1 \approx 1.12$ образуется общий хаотический аттрактор Γ_Σ периода 3, охватывающий все информативные отрезки. Этот аттрактор состоит из двух неустойчивых интервальных циклов Γ_R и Γ_L , однако единственный канал потери траектории для каждого из них направлен в сторону другого, так что любая траектория, попавшая в Γ_Σ , останется в нем.

С ростом s канал ухода на краю информативного отрезка «углубляется» (как на рис.2, г), и при $s = s_2 \approx 1.14$ общий аттрактор Γ_Σ теряет устойчивость, и траектория покидает его. Таким образом, при $s = s_2$ происходит бифуркация потери устойчивости Γ_Σ . Через s_2 будем далее обозначать момент потери устойчивости в отображении всех циклов интервалов. При больших s в системе наблюдается глобальный хаос.

На рис. 3, б изображена бифуркационная диаграмма для случая, когда фазовая траектория системы в момент бифуркации $s = 1$ находилась с левой стороны информативного отрезка относительно точки предельного цикла. В этом случае она притягивается к интервальному циклу Γ_L с показателем Ляпунова $\lambda \approx 0.2$. Однако его время жизни по параметру s существенно меньше: он теряет устойчивость уже при $s \approx 1.05$. При больших s траектория уходит с Γ_L к устойчивому Γ_R . Дальнейшие события совпадают с уже описанными для рис. 3, а.

Характер бифуркационных явлений при $\mu = -1$ (при $s = -1$ и нечетной длине информационного цикла) заметно отличается от рассмотренной: потеря устойчивости предельного цикла приводит к рождению удвоенного интервального цикла (см. рис. 3, в), так как для отображения $f^m: I \rightarrow I$ наклон отрезка, проходящего через неподвижную точку цикла x_c , становится равным $s^m = -1$, и при каждой итерации f^m края информативного отрезка меняются местами. Реальный период интервального цикла при этом получается не m , а $2m$. Вместо бифуркации слияния интервальных циклов с разных краев информативного отрезка с ростом $|s|$ здесь (при $s_1 \approx -1.009$) происходит заполнение всего информативного отрезка в результате расширения интервального цикла, что можно интерпретировать как обратную бифуркацию удвоения периода интервального цикла.

Если в динамической системе записаны несколько информационных блоков, то при переходе $|\mu|$ через 1 в окрестности каждого из соответствующих предельных циклов независимо рождаются либо два притягивающих цикла интервалов (при $\mu = 1$), либо удвоенный цикл интервалов ($\mu = -1$). Их эволюция с ростом s совпадает в общих чертах с описанной выше. Однако наклоны неинформативных участков, примыкающих к разным информативным отрезкам, различны, поэтому различаются «время жизни», и условия устойчивости по параметру s каждого из этих интервальных циклов. Это видно из рис. 4, на котором изображены бифуркационные диаграммы для отображения с двумя информационными блоками 12345 и 97583, записанными на втором уровне. Размер информативных участков

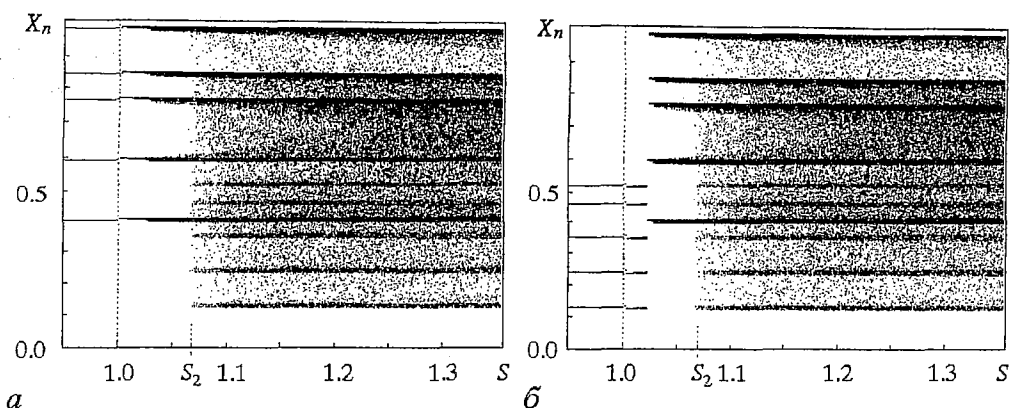


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для отображения с информационными блоками 12345 и 97583, записанными на втором уровне. Начальные условия на цикле для: а - блока 97583; б - блока 12345

здесь в $N = 10$ раз меньше, чем в предыдущем случае и равен 0.01. На рис. 4, а изображена диаграмма для случая, когда при бифуркации потери устойчивости предельного цикла, несущего информационный блок 97583, фазовая траектория притягивается к правому интервальному циклу в окрестности этого информационного цикла. При $s \sim 1.03$ цикл интервалов на правой границе информативных отрезков теряет устойчивость и траектория уходит с него через «дырку», аналогичную $[x_1, x_2]$ с рис.2, в. Однако она уходит в сторону аттрактора на левой границе информативных отрезков. Если бы он был в этот момент устойчив, траектория там и осталась бы. Но ввиду того, что он обладает аналогичной неустойчивостью, траектория остается на нем некоторое время, и возвращается на первый аттрактор, и так далее. При этом наблюдается рождение общего интервального цикла, охватывающего целиком информативные отрезки цикла 97583.

На рис. 4, б изображен случай, когда во время бифуркации потери устойчивости предельного цикла точек, соответствующего информационному блоку 12345, траектория притягивается к новорожденному устойчивому циклу интервалов, проходящему через правый край информативных отрезков. Но он практически сразу же теряет устойчивость, и траектория уходит к интервальному циклу на другом краю информативных отрезков. При $s \sim 1.015$ рождается общий цикл интервалов $\Gamma_{5, \Sigma}$. В тот момент, когда и он теряет устойчивость при $s \sim 1.025$, еще существует устойчивый цикл интервалов, связанный с другим информационным блоком 97583, и фазовая траектория притягивается к нему.

При $s = s_2 \sim 1.07$ теряет устойчивость общий интервальный цикл для блока 97583, то есть в аттракторе появляется «дырка», через которую фазовая траектория может покидать его, как показано на рис.2, г. Таким образом, в фазовом пространстве динамической системы не остается устойчивых структур. При этом фазовая траектория системы начинает блуждать по фазовому пространству системы. В момент своего появления «дырки» на интервальных циклах малы, и траектория проводит большую часть времени в окрестности интервальных циклов, но с увеличением наклонов «дырки» растут, и инвариантная мера отображения становится более равномерной, что видно далее из раздела 4.

Таким образом, анализ бифуркационных диаграмм отображения с записанной информацией показывает, что при $|s| < 1$ единственными устойчивыми аттракторами в колебательной системе являются информационные предельные циклы, а при $1 < |s| < s_2$ - соответствующие им хаотические интервальные циклы. При $|s| > s_2$ в нелинейной динамической системе наблюдается переход к глобальному хаосу через перемежаемость «неустойчивые циклы интервалов - глобальный хаос».

3. Запись информации на хаотических аттракторах

В этом разделе рассматривается возможность использования хаотических аттракторов типа циклов интервалов для записи информации.

Как следует из анализа бифуркационных диаграмм, циклы интервалов имеют довольно широкую область существования по параметру s . Несмотря на то, что движение по такому аттрактору является хаотическим, он устойчив и ограничен в фазовом пространстве. Интервальный цикл состоит из конечного числа непрерывных интервалов, включающих в себя информативные интервалы соответствующего информационного цикла (или их часть) и небольшую часть примыкающих к ним неинформативных интервалов. Важно также, что порядок обхода интервалов этого хаотического аттрактора совпадает с порядком обхода находящихся на них точек информационного предельного цикла. Поэтому, если рассмотреть информационный поток $a_i a_{i+1} a_{i+2} \dots$, где $a_i = \text{int}(Nx_i)$ ($\text{int}(x)$ - целая часть x), порождаемый отображением $x_{n+1} = f(x_n)$, при движении на этом хаотическом аттракторе, то окажется, что он представляет собой воспроизведение записанного информационного блока.

Согласно алгоритму записи информации в одномерных отображениях [1, 2], для воспроизведения элемента информационного блока достаточно попадания траектории x_n на соответствующий регион первого уровня отображения. Как видно из распределения фазовой траектории, например, при записи блока 375 (рис. 5, а), это условие может не выполняться при записи на первом уровне из-за того, что интервальный цикл включает в себя часть неинформативных интервалов, однако это препятствие легко может быть обойдено за счет уменьшения длины информативного интервала.

Таким образом, информация, записанная на устойчивых предельных циклах одномерного отображения при $|s| < 1$, не теряется в момент бифуркации рождения соответствующего хаотического аттрактора, а обретает качественно новый носитель, и может быть извлечена так же, как и при записи на устойчивых предельных циклах точек. Поэтому, класс динамических объектов - носителей

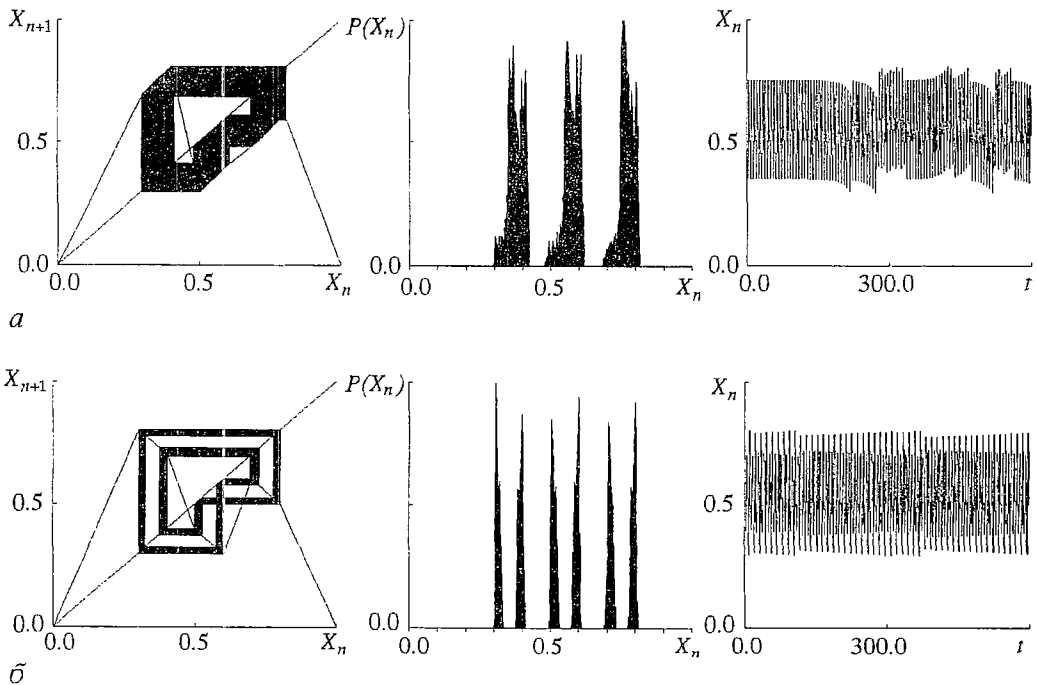


Рис. 5. Запись информации на хаотических аттракторах - фазовые портреты, распределения и временные реализации: а - $s = 1.125$; б - $s = -1.005$

информации для метода записи в одномерных динамических системах, предложенного в [1, 2], может быть расширен за счет хаотических аттракторов. При этом увеличивается и область параметра s , используемая для записи информации на устойчивых аттракторах.

На рис. 5 приведены примеры использования хаотических аттракторов - интервальных циклов для записи информации. На рисунке приведены фазовые портреты, инвариантные меры (распределение фазовой траектории на отрезке $[0,1]$) и временные реализации движений в отображении для случая записи информационного блока 375 на первом уровне.

При $s < 0$ и нечетном периоде информационного цикла, как указывалось в предыдущем разделе, интервальный цикл рождается удвоенным, что хорошо видно на фазовом портрете на рис.5, б, но соответствующий информационный поток, тем не менее, тоже представляет собой повторение записанного информационного блока, поскольку последовательные значения переменной итерирования при движении на этом аттракторе укладываются в регионы 1-го уровня, соответствующие цифрам 3, 5 и 7.

4. Перемежаемость как средство хаотического сканирования памяти

Анализ бифуркационных диаграмм одномерных отображений с записанной информацией показывает, что после потери устойчивости всех циклов интервалов в динамической системе реализуется режим перемежаемости «хаос-хаос». При этом фазовая траектория хаотически блуждает по всему фазовому пространству, посещая и области с записанной информацией. Если эту динамическую систему рассматривать как память, то такой режим может быть использован для хаотического сканирования памяти.

Запишем информацию на неустойчивых циклах интервалов, используя область параметра $s > s_2$. Если наклон информативных участков ненамного больше s_2 , траектория будет «застревать» в окрестности интервального цикла на некоторое время, прежде чем покинуть его снова, так как вероятность ухода с него мала согласно (1). Если инвариантная мера отображения ненулевая на всем единичном отрезке (или, по крайней мере, в окрестности информативных интервалов), траектория посещает окрестности всех циклов интервалов (а значит, и информативных предельных циклов), и наблюдается перемежаемость по отношению ко всем циклам, соответствующим записанной информации. Важно подчеркнуть, что в отличие от хорошо известного феномена перемежаемости, когда ламинарные (регулярные) участки движения прерываются турбулентными всплесками, здесь наблюдается перемежаемость между хаотическими циклами интервалов и глобальным хаосом - движение на хаотическом аттракторе (интервальном цикле) перемежается блужданием по всему фазовому пространству.

Если наклоны информативных участков s слишком велики, траектории покидают окрестности неустойчивых интервальных циклов, соответствующих записанной информации, очень быстро, в информационном потоке присутствуют только «обрывки» записанных образов, и сканирование памяти не наблюдается.

Проиллюстрируем явление следующими примерами.

На рис. 6 приведен пример перемежаемости между двумя циклами, соответствующими информационным блокам 97583 и 12345, записанными на втором уровне. Бифуркационная диаграмма для этого отображения показана на рис. 4. Наклон информативных участков выбран в области перемежаемости $s = 1.14 > s_2$. В этом случае система «блуждает» по окрестностям двух циклов.

На рис.7 приведены графики инвариантной меры отображения для трех значений наклона s ($s \approx s_2 \approx 1.07$, $s = 1.15$ и $s = 2.0$) в области перемежаемости. Из рисунка видно, что инвариантная мера ненулевая всюду в информативной части

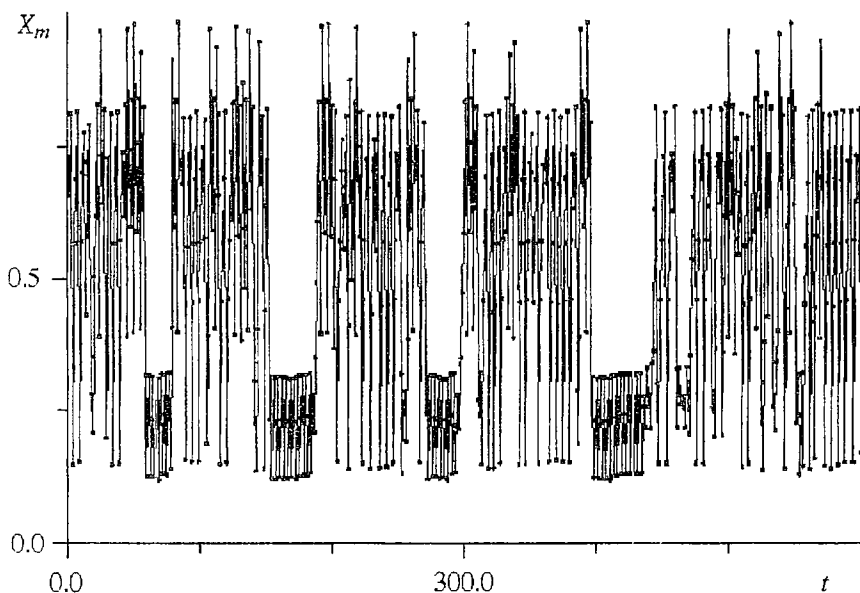


Рис. 6. Перемежаемость в отображении с информационными блоками 12345 и 97583

отображения, причем при $s \approx s_2$ на ней видны несколько узких пиков, а пьедестал очень мал, что объясняется тем, что фазовая траектория большую часть времени проводит в окрестности информационных циклов (см. формулы (1) и (2)), с увеличением s она становится более равномерной.

Рассмотрим более сложный пример хаотического сканирования памяти на примере записи на одномерном отображении шести русских пословиц:

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.
 ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.
 БЕЗ ТРУДА НЕ ВЫНЕШЬ И РЫБКУ ИЗ ПРУДА.
 ПОД ЛЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВОДА НЕ ТЕЧЕТ.
 НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.
 НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

Каждая пословица представляется в отображении отдельным предельным циклом. Запись произведена на втором уровне с предварительным кодированием-сжатием информации, согласно алгоритму [5, 6]. Область перемежаемости начинается здесь при $s = s_2 \approx 1.03$. Информационный поток, порождаемый этой динамической системой в области перемежаемости ($s = 1.05$) выглядит следующим образом:

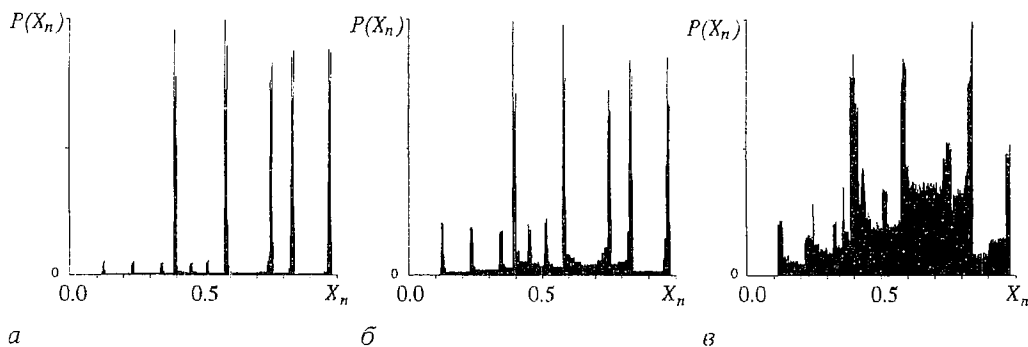


Рис. 7. Распределение фазовой траектории для разных значений наклона s в области перемежаемости: а - $s = 1.07$; б - $s = 1.15$; в - $s = 2.00$

ГОНЕ Г, ЛЮБГОМУ, САМ В НЕЕ-ЧЕОЯЛЮБИ НЕЮАТ, РУНЕ ОТЬРУДАГОЫ
ЧЙЧЕООЧЕНЪГ ДЕЗ ЮКУНЕ. „ЛЮБ. ЗОХ-Ы ЯЛЮБИ НЕЪ ДЕРУДАГО
РУЛЮБ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЯ ЛЮБГОЛЮБИ НЕС В.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САДИСЬ З Ъ, СЪФ. УДГОАТРУУЛЮТЬ.

Ф ДЕОЛТЛЮБИ. ЯНЕ

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДХЪРУДАГОНЕ ЖГНЕ ЧЕНПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯЛЮ, З ЧЕНС И ОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИНЕЧЕНЬНЕ ДЕРУДГОНЕ КНЕ, ЛЮБИ НЕРЫГЪВАТЭ, МУ

УАТЕЧЕМУЧЕН ДЧЙКУ И. „МУ ДО СДЧИЫЛС ВОЗИГОТЪАТЯРУУАТ

ЛЮБ. РУТЬ. ЧИЯ СЛЮ, РУДАГО И- ПЕЧЕЛЮБ.

НЕ ПОРЫ- ДЕЛРЫ

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ОХШЖДЧЙМУ ЪХ, ОД, РУГОМУ,

САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ Д-

ПЮ СПЛЮБ.

ДОРУДАГОО НЕ ВЫНЕСЬНЬРУДГОЛЮБГОУМУ, ЧИМЫ- УЛЮТЬ ДЕ-

ЧЕХЫ, МУ, ЮНЬРУГОЛЮТЬ, ПАТЗ ЧЙНЬ ДЕ, МУ П. РРЫЛМЪГ Х. ЯЛЮБ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ РУДАГО, МУ. ЭНЬЛЮТЬЛЮ, РУДГО ВЭ ВГОЪВХЪ-

ЩЕМЧИЮАТ ДЕЛРЫЧЕНЧЙ ИЗ ПРУДА.

ВСЬЛЮТЬРУДАГОГО ВСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЭГОХШЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВЩДЫБАТНЕ ВЯЛЮБГО-

КУШЬЧЕОУЛЮБГОАТЛЮБ.

РУРУДАГО, ЕЧЕ- ДЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САНОЦПРЫЧЙПГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ О, РУДГО СРУДА.

Н- ДЕЛЮБИ. ШИРЬ.

ХЪОД НЕ КЮАТЧЕОНЧЕОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДОХ, ЛЮБИ НЕЖБРЫГРУД-

ГОГОНЕ МЦТТЛЮБИ НЕЪГЮКУАМРЫЖГЯЛЮБГОГО, АТ. Э ВЕ-

ЧЕ. ЪВЛЮБ. ИТЛЮБ.

ЧЕЪРУРУТЬОД ЛЮБИ НЕ С, ИЧИЫГЪ ДЕ СТЬГОЛЮБИШЬНЕЗ ФЧЕО-

ЛАТЬ Н ДЕНЬ ДРЩЕЗКГО С

УЛЮБГО ВНЬ Д. Д ДЕ, ЛЮБ.

ЗИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И ТАНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ ЛЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВОДА НЕ ТЕЧЕТ.

ПОД ЛЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВОДА НЕ ТЕЧЕТ.

ПОД ЛЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВОДВРЬХШДТ С НЕ САДИЦК Д,

Анализ этого фрагмента информационного потока, представляющего, по сути, дискретизированную временную реализацию позволяет судить о динамике системы при данном параметре s . Например, здесь отчетливо различаются «хаотические» участки информационного потока, отвечающие срыву фазовой траектории с цикла и движению по фазовому пространству, и «регулярные» участки, воспроизводящие записанные пословицы и отвечающие пребыванию траектории в окрестности предельных циклов. При увеличении параметра s длина «регулярных» участков быстро уменьшается, и начиная с $s \approx 1.20$ в информационном потоке уже не встречаются пословицы целиком, а только их «обрывки».

Выводы

В работе исследована динамика отображения с записанной информацией, сконструированного согласно принципу записи, впервые предложенному в [1]. Исследованы аттракторы, существующие в системе при записи информации на устойчивых и неустойчивых предельных циклах. Для этого изучались бифуркационные явления в отображении с записанной информацией, возникающие при изменении параметра s - наклона информативных отрезков отображения, определяющего устойчивость информационных предельных циклов. Анализ бифуркационных диаграмм показал, что потеря устойчивости предельных циклов при переходе параметра $|s|$ через 1 сопровождается рождением хаотических аттракторов типа циклов интервалов.

Показано, что описанный в первом разделе принцип использования динамических аттракторов для записи информации может быть обобщен на класс хаотических аттракторов типа циклов интервалов. На простых примерах продемонстрирована возможность записи информации на хаотических интервальных циклах.

Существование хаотических циклов интервалов - носителей информации, помимо познавательной ценности, позволяет использовать явление перемежаемости «хаос-хаос» в отображениях с записанной информацией для хаотического сканирования памяти.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 93-012-730).

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С.* Запись и распознавание информации в одномерных динамических системах // РЭ. 1991. Т. 36, вып. 1. С. 101.
2. *Dmitriev A.S., Panas A.I., and Starkov S.O.* Storing and recognition information based on stable cycles of one-dimensional map // Phys. Lett. A. 1991. Vol. 155, № 8-9. P. 494.
3. *Andreyev Yu.V., Belsky Yu.L., Dmitriev A.S.* Information processing in nonlinear systems with dynamic chaos // Proc. Int. Seminar Nonlinear Circuits and Systems. Moscow 1992. Vol. 1. P. 51.
4. *Дмитриев А.С.* Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // РЭ. 1993. Т. 38, вып. 1. С. 1.
5. *Andreyev Yu.V., Dmitriev A.S., Chua L.O., Wu C.W.* Associative and random access memory using one-dimensional maps // Int. J. Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 483.
6. *Андреев Ю.В., Дмитриев А.С.* Запись и восстановление изображений в одномерных динамических системах // РЭ. 1994. Т. 39, вып. 1. С. 104.
7. *Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко И.М.* Аттракторы кусочно-линейных отображений прямой и плоскости. Препринт / Ин-т Математики АН Украины. Киев, 1992.

8. Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко И.М. Бифуркационные явления в генераторах с линиями задержки. // РЭ. 1994. Т.39, вып. 8-9. С. 1367.

9. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Critical exponent of chaotic transients in non-linear dynamic systems // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 1284.

Институт радиоэлектроники
РАН

Поступила в редакцию 20.02.95
после переработки 22.09.95

ATTRACTORS AND BIFURCATION PHENOMENA IN 1-D DYNAMIC SYSTEMS WITH STORED INFORMATION

Yu.V. Andreyev

Bifurcation phenomena taking place in the maps with stored information are studied as a function of the slope of information districts of the maps, thus allowing to distinguish the following dynamic structures existing in such systems: stable or unstable limit cycles, chaotic attractors of the kind of cycles of intervals. A possibility of storing information using chaotic attractors is analyzed, chaotic scanning of memory with the use of intermittency is discussed.



Андреев Юрий Вениаминович - родился в 1960 году в Уфе. Окончил МФТИ (1983). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1993). Работает научным сотрудником в ИРЭ РАН. Научные интересы - нелинейная динамика, обработка информации с использованием методов хаотической динамики, проблемы связи. Опубликовал более 15 работ по данной тематике.



СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В БИСТАБИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов, И.А. Хованов, Б.В. Шульгин

Методами численного и физического экспериментов исследуется эффект стохастического резонанса в бистабильной радиотехнической системе. Анализируются зависимости коэффициента усиления и отношения сигнал/шум от интенсивности внешнего шума и параметров сигнала модуляции. Проводится детальное сравнение результатов экспериментов с теоретическими расчетами. Установлено, что предложенная простая электрическая схема бистабильного передемпфированного осциллятора может служить базовой динамической моделью для исследования эффекта стохастического резонанса.

Введение

Классический эффект стохастического резонанса (СР) был обнаружен в бистабильных системах, находящихся под одновременным воздействием шума и слабого гармонического сигнала [1, 2]. Эффект заключается в улучшении отклика системы при достижении интенсивностью внешнего шума некоторого оптимального значения. Под улучшением отклика понимается увеличение отношения сигнал/шум или усиление энергии внешнего гармонического сигнала в выходном спектре мощности. Механизм эффекта СР заключается в резонансном взаимодействии двух характерных временных масштабов системы, один из которых соответствует среднему времени переключения бистабильного элемента из одного состояния в другое под действием шума, а другой - периоду сигнала. Устойчивыми состояниями бистабильной системы могут быть два одинаковых режима, например состояния равновесия, периодические циклы [3,4], хаотические аттракторы [5,6,7], или комбинация двух различных асимметричных режимов.

Исследованиям СР, впервые описанному в [1], в настоящее время посвящено около сотни теоретических и экспериментальных работ, ссылки на которые можно найти, например, в обзоре [2], специальных выпусках, содержащих материалы конференций по СР [8,9], и обзорной работе [10], в которой явление СР всесторонне изучается с точки зрения периодически возбуждаемых стохастических систем. Вопросы, относящиеся к изучению эффекта СР, также обсуждаются в монографиях [11,12].

Актуальной проблемой является вопрос практического применения СР, являющийся предметом ряда исследований [2,13-18]. В работах [13,17] обсуждалась возможность использования СР для выделения слабого сигнала из шума. В работе [14] исследовалось усиление слабого сигнала посредством эффекта

СР. В работах [15,16] исследовались нелинейные и частотные искажения сигнала, возникающие при прохождении через бистабильную систему амплитудно и частотно модулированных сигналов. В статье [18] исследовалось явление СР при прохождении через бистабильную систему информационно-подобного сигнала с конечной шириной спектральной линии.

Целью данной работы было изучение закономерностей усиления сигнала посредством эффекта СР в реальном радиотехническом устройстве, моделирующем широкий класс наиболее простых бистабильных систем, и выяснение возможности практического использования бистабильных преобразователей в радиоэлектронике. Детальное сопоставление данных теоретического и экспериментального анализа позволит также определить пределы применимости теоретических результатов и работоспособность программного комплекса, специально созданного для цифровой обработки данных на компьютере.

1. Исследуемая модель

Исследуемая электрическая цепь была разработана и изготовлена на основе классической модели эффекта СР - бистабильного передемпфированного осциллятора, соответствующего предельному случаю осциллятора с большим трением. Передемпфированный осциллятор моделирует основные характерные особенности поведения бистабильных систем независимо от их физической природы. Он описывается уравнением:

$$\dot{x} = -dU/dx + F(t), \quad (1)$$

где $U(x)$ - бистабильный потенциал, а $F(t)$ - входной сигнал.

$$F(t) = A \cos \omega_0 t + \xi(t),$$

$$\langle \xi(t + \tau) \xi(t) \rangle = 2D \delta(\tau),$$

где $\xi(t)$ - гауссов белый шум, а $2D$ - интенсивность шума. В качестве потенциала обычно используют симметричный бистабильный потенциал 4-ой степени:

$$U(x) = x^4/4 - x^2/2.$$

Была создана экспериментальная установка, моделирующая систему (1), принципиальная схема которой приведена на рис. 1.

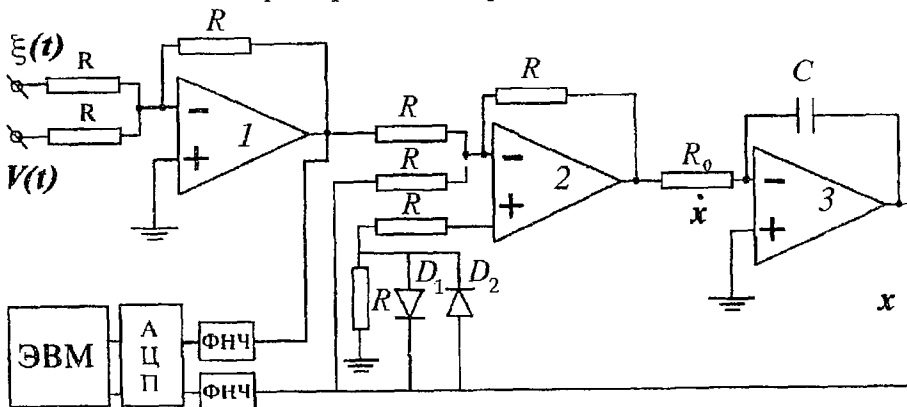


Рис. 1. Упрощенная принципиальная схема экспериментальной установки. 1,2 - сумматоры, 3 - интегратор, $\xi(t)$ - белый шум, $V(t)$ - регулярный сигнал $A \cos \omega_0 t$, D_1, D_2 - диоды с квадратичной нелинейностью, C и R_0 - элементы, определяющие постоянную интегрирования

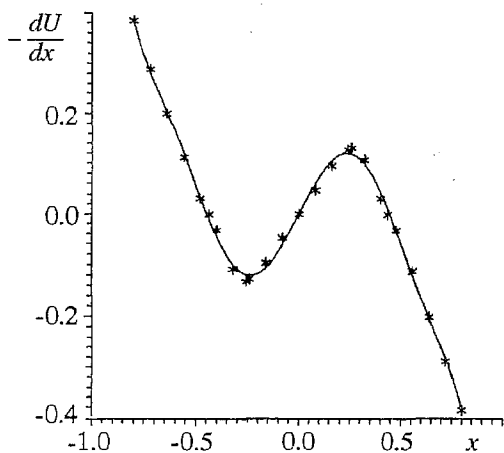


Рис. 2. Нелинейная характеристика бистабильного элемента схемы. Точками изображены экспериментально полученные значения, сплошная кривая - аппроксимация характеристики полиномом 7-ой степени (2)

теоретических и численных расчетов.

Потенциал $U(x)$ (2) имеет минимумы в точках $x_{\min} \approx \pm 0.447511$, максимум в точке $x_{\max} = 0$, глубину потенциального барьера $\Delta U \approx 0.0347205$. Значения кривизны потенциала в точках минимума и максимума определяют локальный временной масштаб, соответствующий времени релаксации при движении вблизи минимума

$$\tau_l^{-1} \sim d^2U(x)/dx^2|_{x=x_{\min}} = U''(\min) = 1.00583. \quad (3)$$

и глобальный масштаб, соответствующий перескокам из одной ямы в другую, определяющий время релаксации плотности вероятности к стационарной.

$$\tau_k^{-1} = [U''(\max)|U''(\min)]^{1/2} e^{-\Delta U/D/2\pi}. \quad (4)$$

При исследовании СР сигнал выбирался слабым: $A \ll \Delta U/x_{\min}$. При этом было возможно использовать теорию линейного отклика. Частота сигнала выбиралась намного меньше времени релаксации системы $\omega_0 \ll U''(\min)$, что соответствует адиабатическому пределу [19].

Сигналы схемы, отвечающие величинам $x(t)$ и $F(t)$, через АЦП поступали в компьютер i486, где проводилась их соответствующая обработка при помощи специально созданного программного обеспечения. Перед АЦП сигналы пропускались через фильтры низких частот ФНЧ с целью удаления эффекта подмены (aliasing) [21]. Частота среза фильтров равнялась частоте Найквиста - максимальной частоте быстрого преобразования Фурье (БПФ):

$$f_c = f_n = 1/2\Delta t = f_{\text{дискр.АЦП}}/2, \quad f_c = 3 \text{ кГц.}$$

2. Теоретические результаты

Для стохастического резонанса был разработан ряд приближенных теорий. Первой была предложена адиабатическая теория Макнамары и Визенфельда [19]. Хенге и Юнг предложили теорию, в которой теоретическое решение уравнения Фоккера - Планка находится с использованием численных методов [14]. Впоследствии была разработана теория линейного отклика для СР [10, 20]. В рамках нашей задачи наиболее целесообразно использовать теорию линейного

В основу созданной установки был положен принцип наиболее простой схемной реализации радиотехнического устройства с двумя устойчивыми и одним неустойчивым состояниями. Для того, чтобы в дальнейшем провести комплекс сравнительных экспериментальных и теоретических исследований, нелинейная характеристика цепи была измерена экспериментально и аппроксимирована полиномом 7-ой степени рис. 2:

$$-dU(x)/dx = a_1x - a_3x^3 + a_5x^5 - a_7x^7, \quad (2)$$

$$a_1 = 0.802079, a_3 = 5.76467, a_5 = 10.1135, \\ a_7 = 6.62694.$$

При условии малых x , $|x(t)| \leq 1$, потенциал (2) приближенно соответствует потенциалу 4-й степени. Аналитическая аппроксимация использовалась в дальнейшем для проведения

отклика: условия эксперимента удовлетворяют условиям применимости теории, и для нахождения интересующих нас теоретических зависимостей необходимо знать только крутизну потенциала в точках минимума и максимума и глубину потенциального барьера. От этих параметров зависит управляемый шумом глобальный временной масштаб.

Усиление сигнала, то есть отношение спектральной мощности сигнала на выходе к входной, определяется выражением [10, 14]

$$\eta = P_{\text{вх}}/P_{\text{вых}} = 4|k_1|^2/A^2,$$

где k_1 - коэффициент при первой гармонике периодического асимптотического среднего значения стохастического процесса $x(t)$ на выходе системы (1). Он определяется формулой:

$$|k_1| = (A/2)|\chi(\omega)|,$$

где $\chi(\omega)$ - восприимчивость системы, являющаяся Фурье-преобразованием от функции отклика $R(\tau)$, которая в свою очередь может быть найдена из флуктуационно-диссипационной теоремы. В итоге усиление определяется формулой [10]:

$$\eta = \langle x^2 \rangle_{\text{ст}}^2 / [D(1 + \omega_0^2/\lambda_{\text{мин}}^2)], \quad (5)$$

где $\lambda_{\text{мин}}$ - минимальное собственное значение оператора Фоккера - Планка для системы (1)

$$L_{\text{FP}} = -\partial(-\partial U/\partial x)/\partial x + D \partial^2/\partial x^2.$$

$\lambda_{\text{мин}}$ определяет время релаксации плотности вероятности к стационарному значению. В отсутствии периодического возмущения $\lambda_{\text{мин}}$ равняется удвоенной частоте Крамерса или обратно пропорционально среднему времени первого перехода

$$\lambda_{\text{мин}} = 2r_k = 1/T_1 = [|U''(\text{max})| |U''(\text{min})|]^{1/2} e^{-\Delta U/D/\pi}.$$

$\langle x^2 \rangle_{\text{ст}}$ в (5) - среднее значение стохастического процесса в отсутствии периодической силы,

$$\langle x^2 \rangle_{\text{ст}} = \int x^2 P_s(x) dx,$$

где $P_s(x) = N \exp(-u(x)/D)$.

Зависимости усиления от интенсивности шума для различных частот изображены на рис. 3, а штриховыми линиями.

Отношение сигнал/шум (SNR) на выходе определяется формулой [10]

$$SNR_{\text{вых}} = \frac{\pi A^2}{2D^2} \langle x^2 \rangle_{\text{ст}}^2 \lambda_{\text{мин}}.$$

Отношение сигнал/шум на входе определяется

$$SNR_{\text{вх}} = A^2/8D.$$

Зависимости SNR на входе и выходе от интенсивности шума изображены на рис. 3, б штриховыми линиями. Из полученных результатов следует, что би-стабильная система усиливает мощность сигнала на величину порядка 8-10 дБ, в области значений интенсивности шума, где отношение сигнал/шум на выходе не ухудшается по сравнению с SNR на входе. Различия между теорией и экспериментом в интересующей нас области не превышают ± 1 дБ и, по-видимому,

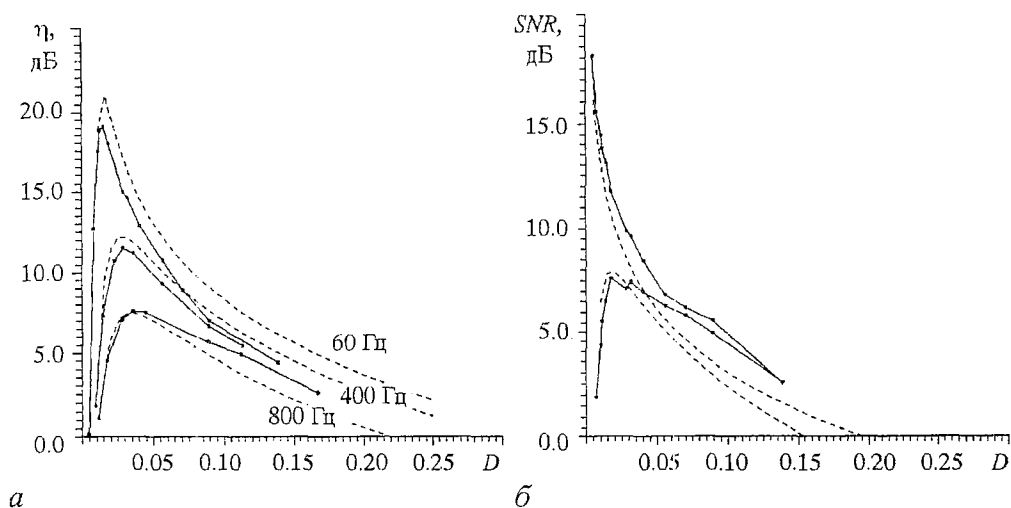


Рис. 3. Зависимости усиления от интенсивности шума для различных частот (а); зависимости SNR на входе и выходе от интенсивности шума (б). Сплошные кривые - экспериментальные, штриховые - теоретические, $A = 20$ мВ

обусловлены несоответствием шума, производимого радиотехническим генератором, идеальному белому шуму. Методика получения результатов физического эксперимента будет описана в разделе 4.

3. Численный эксперимент

Система (1) была исследована численными методами. Реализации стохастического процесса находились посредством интегрирования уравнения (1) методом Рунге-Кутты для стохастических дифференциальных уравнений [22]. Под отношением сигнал/шум в численном эксперименте (так же как и в физическом) понималось отношение энергии сигнала к энергии шума в полосе Δf , равной разрешению по спектру БПФ:

$$\Delta f = 1/N\Delta t,$$

$$SNR = P_s/P_n(\Delta f).$$

Таким образом, для сравнения теории с численным и физическим экспериментом необходимо добавить множитель $\Delta f = 1/(N\Delta t)$ в знаменатель выражения (6). В проведенных экспериментах N равнялось 2048, Δt равнялось $2\pi/(12\omega_0)$. SNR на входе определялось по формуле (7). Перед вычислением выходного спектра сигнал с выхода бистабильного фильтра пропускался через фильтр нижних частот с целью удаления эффекта алиасинга. Частота среза фильтра равнялась частоте Найквиста БПФ.

$$f_c = 1/2\Delta t. \quad (8)$$

Мы использовали $f_c = 6f_0$. На рис. 4, а приведены численно полученные зависимости коэффициента усиления от интенсивности шума для двух различных частот сигнала. На рис. 4, б приведена зависимость SNR от интенсивности шума. Различие в поведении численной и теоретических кривых в области малых значений D на рис. 4, б обусловлено тем, что приближенная теория разработана для «системы двух состояний» [19]. В приближении динамики двух состояний сигнал на выходе системы считается равным s , если система находится в правой

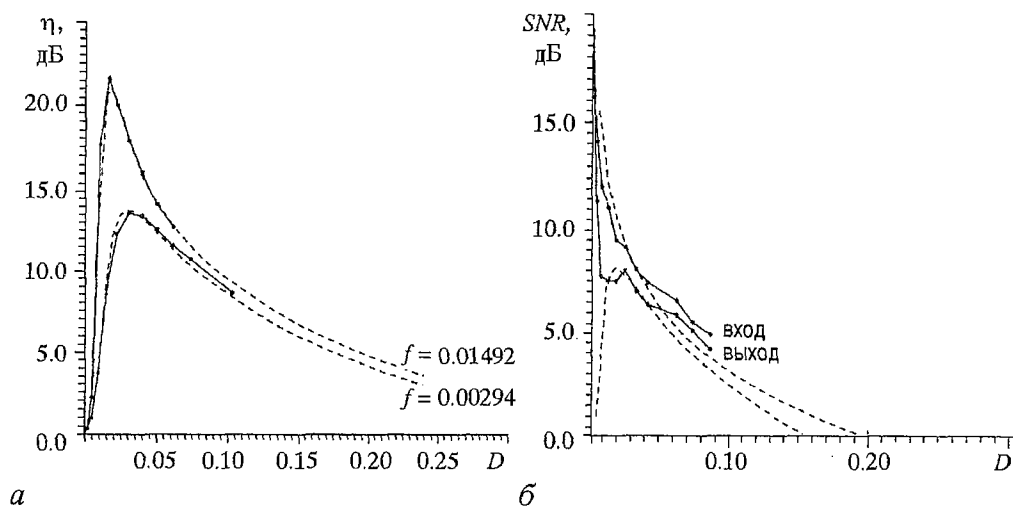


Рис. 4. Зависимость усиления от интенсивности шума для двух различных частот (а); зависимость SNR от интенсивности шума на входе и на выходе (б). Сплошные кривые - численные, штриховые теоретические

яме, и $-c$, если система находится в левой яме, где $2c$ - расстояние между центрами потенциальных ям. Таким образом в этом приближении отбрасывается динамика системы внутри ямы, а при малых D , когда перескоки между ямами отсутствуют, именно внутриямная динамика целиком определяет SNR на выходе системы.

4. Физический эксперимент

На рис. 5 изображены типичные сигналы, получаемые в эксперименте, после прохождения через АЦП. Верхний сигнал - входной $A\cos\omega_0 t + \xi(t)$, средний выходной $x(t)$, нижний - сигнал внешней модуляции $A\cos\omega_0 t$.

На рис. 6 изображены типичные экспериментальные входные (слева) и выходные (справа) спектры мощности. На рис. 6, а интенсивность шума мала, перескоки между состояниями довольно редкие. Поэтому в спектре преобладают низкочастотные компоненты, соответствующие длительному пребыванию системы на одном уровне. Отношение сигнал/шум (SNR) в выходном спектре намного меньше, чем во входном.

На рис. 6, б интенсивность шума несколько выше, перескоки становятся более частыми.

Рис. 6, в соответствует моменту стохастического резонанса. Увеличение шума на входе привело к увеличению регулярной компоненты на выходе. Перескоки системы из одного состояния в другое заметно коррелируют с периодическим сигналом. Усиление сигнала максимально. $SNR_{вх} \sim SNR_{вых}$.

На рис. 6, г интенсивность шума превышает оптимальную. Усиление сигнала меньше. $SNR_{вх} \sim SNR_{вых}$ по-прежнему.

Сигналы со схемы перед обработкой пропускались через фильтры низких частот, так как при дискретизации сигнала возникает эффект алиасинга, который заключается в зеркальном отражении спектра из области частот, больших

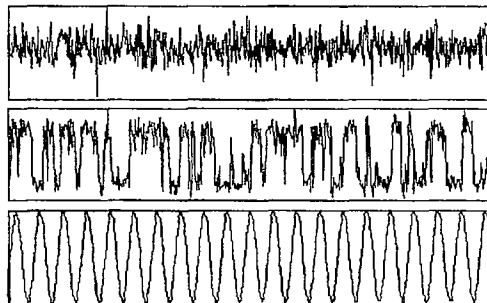


Рис. 5. Типичные экспериментальные сигналы. Верхний сигнал - входной, средний - выходной, нижний - сигнал внешней модуляции

максимальной частоты БПФ - f_n , в область низких частот [21]. На входе системы шум белый, а на выходе сильно окрашен, с частотой среза $\omega_c \sim \tau_{\text{КГ}}^{-1}$. Поэтому эффект алиасинга максимален на входе, где энергия шума равномерна распределена по спектру, и практически отсутствует на выходе, где почти вся

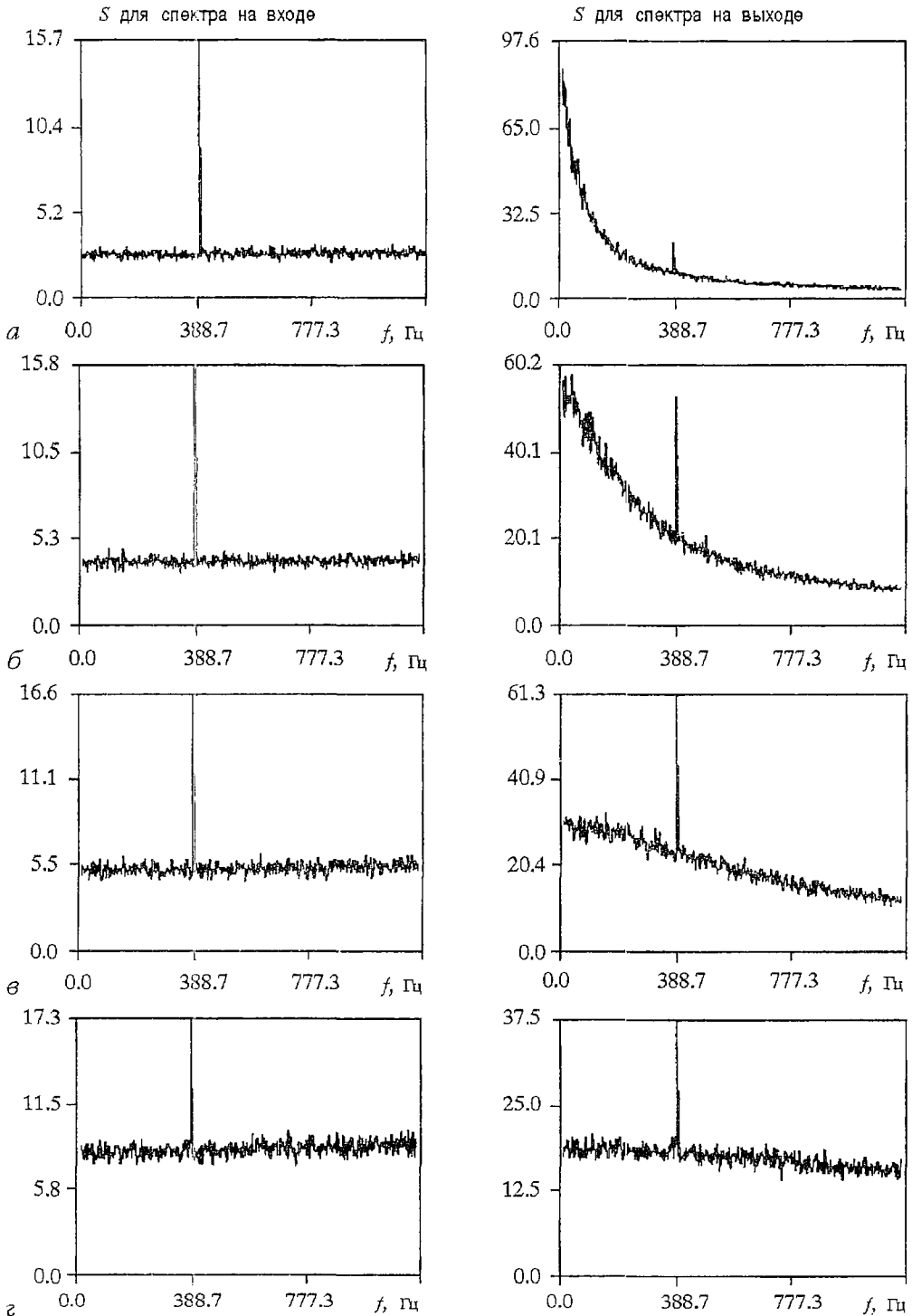


Рис. 6. Типичные экспериментальные входные (слева) и выходные (справа) спектры мощности, интенсивность шума увеличивается от верхнего рисунка к нижнему

энергия шума находится в полосе ниже максимальной частоты БПФ. Таким образом, шум на входе искусственно увеличивается за счет «отражения» энергии из полосы частот больших f_n , $SNR_{вх}$ уменьшается, и получается ошибочный результат - $SNR_{вых} > SNR_{вх}$, свидетельствующий о выделении сигнала из шума посредством СР [13]. При удалении эффекта алиасинга $SNR_{вых} \approx SNR_{вх}$.

Для сравнения теории и эксперимента было необходимо перейти от физических величин к безразмерному виду [23]. Схема моделирует уравнение :

$$RC\dot{x} = -dU/dx + A\cos\omega_0 t + (2D)^{1/2}\xi(t). \quad (9)$$

Нормируя время на постоянную времени интегратора $\tau = RC$, получим

$$\bar{x}/t = -dU/dx + A\cos\bar{\omega}_0 \bar{t} + (2D)^{1/2}\xi(\bar{t}), \quad (10)$$

$$\text{где } \bar{t} = t/\tau, \quad \bar{\omega}_0 = \omega_0\tau. \quad (11)$$

Постоянная времени цепи была измерена: $\tau = 49$ мкс. Амплитуда входного сигнала и нелинейная функция нормировались на 1 В. Интенсивность шума определялась посредством вычисления дисперсии оцифрованного входного сигнала.

Результаты физического эксперимента представлены на рис. 3 сплошными линиями. На рис. 7 сравниваются результаты численного и физического эксперимента с теорией на примере зависимости усиления сигнала от шума. Результаты находятся в хорошем соответствии между собой, что подтверждает правильность использованных методов и позволяет использовать созданную экспериментальную установку и программное обеспечение для исследования более сложных систем.

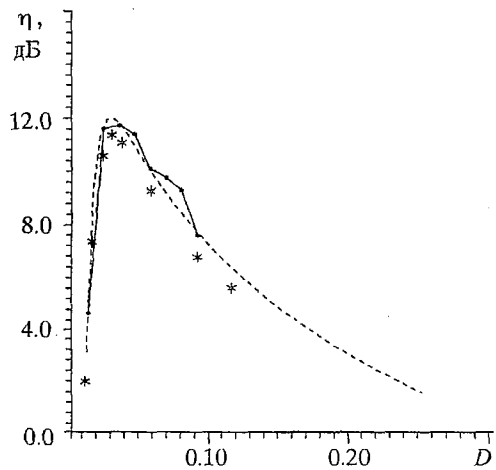


Рис. 7. Зависимости усиления сигнала от шума. Сравнение теоретических (штриховая линия), численных (сплошная) и экспериментальных (звездочки) данных, $A = 20$ мВ, $f = 400$ Гц

5. Обсуждение результатов и выводы

Приведенные теоретические и экспериментальные результаты при их сопоставлении свидетельствуют о том, что в условиях линейного приближения основные характеристики эффекта СР, полученные теоретически, прямым численным моделированием и экспериментально, совпадают в пределах ошибки, не превышающей $\pm 2\%$ в численном и $\pm 8\%$ - в физическом экспериментах. Из этого следует:

1) теория линейного отклика применима для анализа динамики системы типа передемпфированного осциллятора с бистабильным потенциалом (2);

2) предложенная радиотехническая схема бистабильной системы (рис. 1) допускает описание уравнениями (1) с потенциалом (2);

3) разработанный комплекс программ для численного и экспериментального исследования эффекта СР дает правильные результаты и может быть использован в будущем как независимый метод анализа применительно к случаям более сложных динамических систем, реализующих эффект СР.

Результаты анализа конкретных характеристик эффекта СР в исследованной системе свидетельствуют о следующем: бистабильный фильтр с индуцированным

шумом взаимодействием аттракторов типа симметричных состояний равновесия обеспечивает усиление внешнего гармонического сигнала порядка 15-20 дБ по мощности; при этом отношение сигнал/шум на выходе фильтра в сравнении с входом в лучшем случае не изменится, но не может быть увеличено. Отсюда следует возможность практического использования подобных бистабильных преобразователей в качестве усилителей сигналов, работающих в условиях интенсивного внешнего шума.

Работа частично финансировалась за счет средств Международного Научного Фонда (грант NRO 000) и Госкомитета по высшему образованию России (грант № 93-8.2-10).

Библиографический список

1. Benzi R., Sutera S., Vulpiani V. // J. Phys. A. 1981. Vol. 14. P. 453.
2. Moss. F. Stochastic Resonance: From the ice ages to the monkey ear // Some problems in statistical physics / Ed. by G.Weiss. SIAM. Philadelphia, 1992.
3. Dykman M., Luchinsky D., McClintock P., Stein N., Stocks N. High frequency stochastic resonance in periodically driven systems // Pisma Zh. Eksp. Theor. Fiz. 1993. Vol. 58, № 2. С. 145.
4. Carroll T., Pecora L. Stochastic resonance as a crisis in a period-doubled circuit // Phys. Rev. E 1993. Vol.47, № 6. С. 3941.
5. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic resonance in Chua's circuit // Int.J.Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2, № 2. С. 397.
6. Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A. Stochastic resonance in chaotic systems // J.Stat.Phys. 1993. Vol.70, № 1/2. С. 183.
7. Nicolis G., Nicolis C., McKernan D. Stochastic Resonance in Chaotic Dynamics // J.Stat.Phys. 1993. Vol. 70, № 1/2.
8. Proceedings of the NATO advanced research workshop on stochastic resonance // J. Stat. Phys. 1992. Special issue.Vol.70, № 1/2.
9. Fluctuation in physics and biology: stochastic resonance // Nuovo Cimento D. Special issue. Будет опубликовано.
10. Jung P. Periodically driven stochastic systems // Phys.Rep. 1994. Vol. 234, № 175.
11. Gardiner K. Handbook of stochastic methods. Berlin; Springer, 1985.
12. Risken H. The Fokker-Planck equations. Berlin: Springer, 1988.
13. Gammaitoni L., Menichella-Saetta E., Marchesoni F. // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 142. P.59.
14. Jung P., Hänggi P. Amplification of small signals via stochastic resonance // Phys.Rev.A. 1991. Vol. 44, № 12. С. 8032.
15. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic resonance in Chua's circuit driven by amplitude or frequency modulated signals // Int. J. Bif. and Chaos. 1994. Vol. 4, № 1.
16. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Сафонова М.А., Хованов И.А. Стохастический резонанс при многочастотном воздействии // РЭ. 1994. Т. 39, № 8/9. С. 1380.
17. Анищенко В.С., Постнов Д.Е., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Использование стохастического резонанса для повышения отношения сигнал/шум в радиотехнических системах // РЭ. Т. 39, № 12. С. 2004.
18. Neiman A.B., Shimansky-Geier L.R. Stochastic resonance in bistable systems driven by harmonic noise // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72, № 1. С. 2988.
19. McNamara B., Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39, № 9. С. 4854.
20. Dykman M., Haken H., Gang Hu, и др. Linear response theory in stochastic resonance // Phys. Lett. A 1993. Vol. 180, № 332.
21. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. Numerical Recipes in C. Cambridge, 1988.
22. Никитин Н., Разевиг В. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // ЖВМ. 1978. Т. 18, № 1. С. 106.
23. Zhou T., Moss F. Analog simulation of stochastic resonance // Phys. Rev. A 1990. Vol.41, № 8.

STOCHASTIC RESONANCE IN A BISTABLE ELECTRONIC CIRCUITS

V.S. Anishchenko, D.E. Postnov, I.A. Khovanov, B.V. Shulgin

The phenomenon of stochastic resonance in a bistable radiotechnical system is studied by means of numerical stimulation and full-scale experiments. The amplification factor and signal-to-noise ratio are analyzed depending on external noise intensity and periodic signal parameters. The results of experiments are compared in detail with theoretical computation. It has been shown that simple proposed electronic circuit of bistable over damped oscillator can serve as a basic dynamical model for exploration of stochastic resonance phenomenon.



Анищенко Вадим Семенович защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1970). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. Защитил докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). В качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдском университете (Берлин, 1987). С 1988 года заведующий кафедрой радиофизики Саратовского университета. Автор 175 научных работ, среди которых 6 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Три монографии написаны на английском языке, из них 2 книги опубликованы в Лейпциге (1987, 1989), готовится выпуск новой монографии издательством «World Scientific». В 1990 году издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых

системах», хорошо известная среди специалистов. Удостоен почетного звания «Соросовский профессор» (1994) и принят в действительные члены Нью-Йоркской академии наук. С 1995 года Заслуженный деятель науки РФ.



Постнов Дмитрий Энгелевич в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года - инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 23 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



Хованов Игорь Александрович родился в 1971 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского университета (1993). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов - нелинейная динамика и статистическая физика. Автор 5 научных работ.



Шульгин Борис Владимирович родился в 1970 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского университета (1992). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов - нелинейная динамика и стохастические процессы. Автор 4 научных работ.



РОЛЬ ИНЕРЦИОННОСТИ И НАЧАЛЬНОГО РАССОГЛАСОВАНИЯ В РАЗВИТИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В БИСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко, И.А. Заулин

Исследуется динамика симметричной и асимметричной моделей нелинейной системы с фазовым управлением, обладающей тремя состояниями равновесия. Установлены свойства и закономерности развития автоколебательных и хаотических режимов, существующих в такой системе в области неустойчивости режимов автофазирования, при изменении параметра инерционности цепи управления.

Введение

В работе [1] исследована модель нелинейной системы автофазирования (САФ) с фильтром низких частот третьего порядка в цепи управления, описываемая уравнениями [2]

$$d\varphi/d\tau = y, \quad dy/d\tau = z, \quad dz/d\tau = (\sigma - \Phi(\varphi) - (\lambda + b\Phi'(\varphi))y - z)/\mu, \quad (1)$$

где φ - разность фаз управляемого и входного колебаний; $\Phi(\varphi) = \varphi + a\sin\varphi$ - обобщенная нелинейность системы; σ - начальное фазовое рассогласование; λ, b, μ - параметры инерционности цепи управления. Как оказалось, модель (1) имеет сложную динамику в области значений параметров, где режимы автофазирования неустойчивы. В системе существуют разнообразные периодические и хаотические движения, реализуются различные бифуркационные переходы как мягкие, так и жесткие, возможно существование одновременно нескольких аттракторов в фазовом пространстве при фиксированных значениях параметров.

Множество различных движений и бифуркаций, свойственных модели (1), создает предпосылки для применения систем с фазовым управлением в качестве генераторов сложных регулярных и шумоподобных колебаний. Для управления свойствами таких колебаний, необходимого в этих приложениях, очень важно исследовать роль основных параметров систем - начального рассогласования и инерционности - в возникновении, развитии и взаимодействии колебательных движений. В данной работе проводится такое исследование в случае, когда система (1) имеет три состояния равновесия и в отсутствие колебательных движений является стационарно бистабильной системой. С применением качественно-численных методов исследована динамика системы с симметрией, а также рассмотрено влияние асимметрии, степень которой определяется величиной

начального рассогласования. В качестве активного параметра инерционности выбран, как и в [1], параметр λ , изменение которого оказывает существенное влияние на поведение системы. Проводимое исследование представляет интерес и для динамики ряда других объектов с близким поведением (кольцевых автоколебательных систем [3,4], джозефсоновских соединений [5], электронных генераторов Чуа [6-9] и других бистабильных и мультистабильных систем).

1. Динамика системы с симметрией

Будем рассматривать систему (1) в области значений параметров $S_3 = \{\max(\sigma_1^*, -\sigma_1^*) < \sigma < \min(\sigma_1^* + 2\pi, 2\pi - \sigma_1^*)\}$, где $\sigma_1^* = \pi + \arccos(1/a) - (a^2 - 1)^{1/2}$, при которых она имеет [2] три состояния равновесия $A_1(\varphi_1, 0, 0)$, $A_2(\varphi_2, 0, 0)$ и $A_3(\varphi_3, 0, 0)$ с координатами, удовлетворяющими неравенствам $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < 2\pi$. При значениях $\lambda > \max(-(b-\mu)\Phi'(\varphi_1), -(b-\mu)\Phi'(\varphi_3))$ система (1) является бистабильной с аттракторами A_1 и A_3 .

Особенностью системы (1) является наличие при $\sigma = \pi$ свойства симметрии, обусловленного инвариантностью системы относительно замены $(\varphi, y, z) \rightarrow \rightarrow (2\pi - \varphi, -y, -z)$. В отличие от случая, когда $\sigma = \pi/4$, исследованного в [1], в рассматриваемом случае $\sigma = \pi$ система ведет себя существенно более сложным образом. В фазовом пространстве (φ, y, z) могут существовать следующие типы предельных циклов [3,7]: пары асимметричных циклов, симметрично расположенных относительно точки $(\pi, 0, 0)$, то есть переходящих один в другой при указанной замене переменных; симметричные циклы, охватывающие все три состояния равновесия A_1, A_2, A_3 (с одинаковым числом витков вокруг A_1 и A_3); парные асимметричные циклы, охватывающие A_1, A_2, A_3 (как с одинаковым, так и с различным числом витков вокруг A_1 и A_3). В системе (1) с симметрией возможны условия для существования двухспиральных хаотических аттракторов, подобных обнаруженным в [3, 7-9].

Как и в [1], при численном исследовании модели (1) были выбраны значения параметров $a = 4.6, b = 0.1, \mu = 1$. Приведем описание движений и явлений, возникающих в системе при изменении параметра λ , выделяя следующие интервалы его значений: $\Lambda_1 = \{\lambda > 4.3437\}$, $\Lambda_2 = \{1.99251 < \lambda < 4.3437\}$, $\Lambda_3 = \{1.8195 < \lambda < 1.99251\}$, $\Lambda_4 = \{1.46 < \lambda < 1.8195\}$, $\Lambda_5 = \{0.6485 < \lambda < 1.46\}$.

Интервал значений $\lambda \in \Lambda_1$ характеризуется тем, что оба состояния равновесия A_1 и A_3 устойчивы, колебательные режимы не возникают, в зависимости от начальных условий в системе реализуется один из режимов автофазирования. При переходе с уменьшением λ в интервал Λ_2 в фазовом пространстве системы (1) в результате бифуркации Андронова - Хопфа мягко рождается пара устойчивых асимметричных предельных циклов L_1 и L_3 , фазовый портрет которых показан на рис.1, *диаг.1*. Эти циклы с уменьшением λ претерпевают бифуркации удвоения периода, завершающиеся возникновением асимметричных хаотических аттракторов P_1 и P_3 (рис.1, *диаг.2*); затем происходит разрушение аттракторов P_1 и P_3 и жесткий переход системы на один из двухоборотных предельных циклов L_2 или L_4 (рис.1, *диаг.3*). Дальнейшее уменьшение λ приводит к исчезновению этих циклов в результате бифуркации петель сепаратрис и к возникновению устойчивого симметричного предельного цикла L_5 , охватывающего все три состояния равновесия (рис.1, *диаг.4*); цикл L_5 характеризуется одинаковым числом витков n_1 и n_2 вокруг A_1 и A_3 ($n_1 = n_2 = 2$).

При значениях $\lambda \in \Lambda_3$ изменение колебательных режимов с уменьшением λ связано с эволюцией предельного цикла L_5 . Это изменение отражает

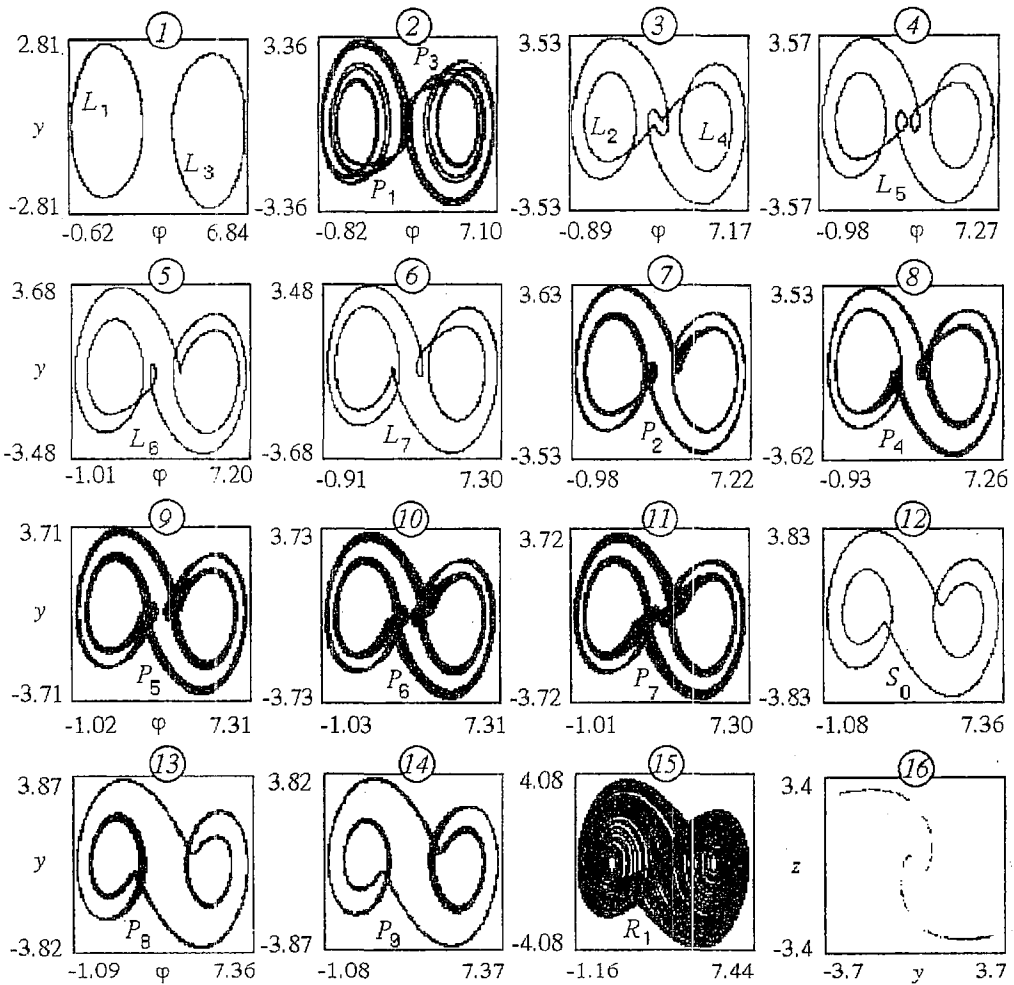


Рис. 1. Фазовые портреты аттракторов системы с симметрией при $\lambda = 2.5$ (1); 2.11 (2); 1.9975 (3); 1.98 (4); 1.89 (5,6); 1.87575 (7,8); 1.874 (9); 1.84 (10); 1.822 (11); 1.8 (12); 1.7825 (13,14); 1.65 (15,16)

бифуркационная диаграмма (рис. 2), представляющая зависимость значения переменной ϕ на аттракторе от управляющего параметра λ . Для системы характерны следующие явления: бифуркация потери симметрии цикла L_5 с рождением двух устойчивых асимметричных предельных циклов L_6 и L_7 с $n_1 = n_2 = 2$ (рис.1, *диаг.* 5, 6); бифуркации удвоения периода циклов L_6 и L_7 и возникновение асимметричных двухспиральных хаотических аттракторов P_2 и P_4 (рис.1, *диаг.* 7, 8); объединение P_2 и P_4 с образованием симметричного хаотического аттрактора P_5

(рис.1, *диаг.* 9); колебательные режимы, определяемые устойчивыми симметричными предельными циклами с числом витков $n_1 = n_2 = 6, 8, 10$, и бифуркации удвоения периода этих циклов, завершающиеся возникновением симметричных двухспиральных хаотических аттракторов (на рис.1, *диаг.* 10, 11 показаны фазовые портреты хаотических аттракторов P_6 и P_7 , возникающих на базе предельных циклов

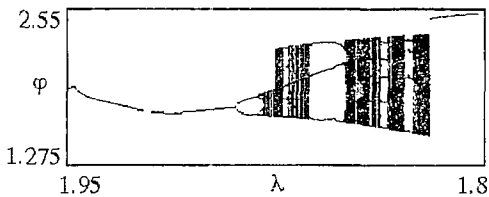


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма колебательных режимов системы с симметрией в области Λ_3

с $n_1 = n_2 = 6$ и $n_1 = n_2 = 8$); переход к регулярным колебаниям, определяемым устойчивым симметричным предельным циклом S_0 с $n_1 = n_2 = 2$ (рис.1, *diag.12*), когда λ достигает значения 1.8195.

В интервале значений $\lambda \in \Lambda_4$ бифуркационные переходы и возникающие режимы поведения системы определяются развитием режима симметричных автоколебаний, определяемых циклом S_0 , которое иллюстрирует бифуркационная диаграмма $\{\lambda, \varphi\}$

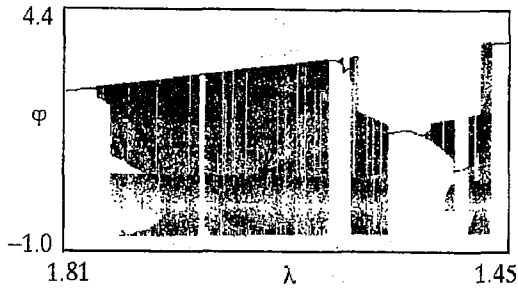


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма колебательных режимов системы с симметрией в области Λ_4

на рис.3. При уменьшении λ вначале в результате бифуркации потери симметрии цикла S_0 и бифуркаций удвоения периода рождающихся при этом устойчивых предельных циклов S_1 и S_2 образуются «узкие» асимметричные хаотические аттракторы R_8 и R_9 (рис.1, *diag.13, 14*), которые затем объединяются в симметричный двухспиральный хаотический аттрактор R_1 . Фазовый портрет и сечение Пуанкаре, соответствующие аттрактору R_1 , показаны на рис.1, *diag.15, 16*. Далее на диаграмме следует широкая область хаоса, прерываемая узкими «окнами» регулярных колебаний, определяемых как симметричными, так и асимметричными предельными циклами модели (1). В качестве примера на рис.4, *diag.1, 2* представлены фазовые портреты пары устойчивых асимметричных циклов S_3 и S_4 с неодинаковым числом витков n_1 и n_2 .

С уменьшением λ аттрактор R_1 становится узким (аттрактор R_2 на рис. 4, *diag.3,4*). Область хаоса сменяется при $\lambda < 1.54682$ областью симметричных колебаний, определяемых устойчивым предельным циклом S^* с $n_1 = n_2 = 1$ (рис.4, *diag.5*), после которой снова следует область хаотических колебаний (рис.4,

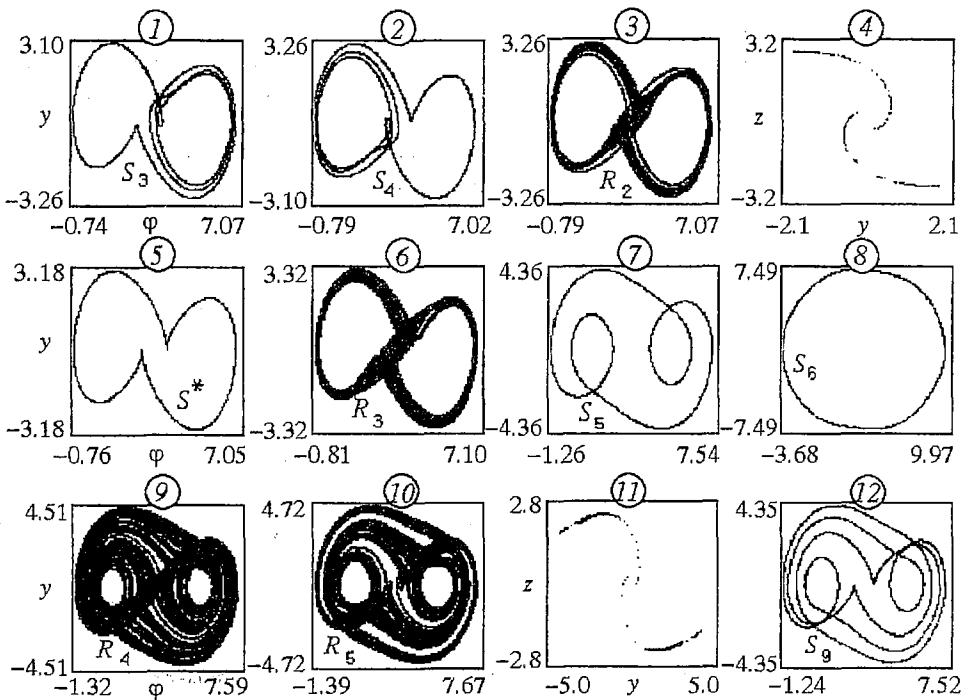


Рис. 4. Аттракторы системы с симметрией при $\lambda = 1.55$ (1,2); 1.5466 (3,4); 1.5199 (5); 1.48 (6); 1.4633 (7); 1.11 (8); 1.4 (9); 1.30031 (10); 1.299 (11,12)

диаг.б). Интересным явлением здесь представляется существование у системы внутри этой области регулярных колебаний, определяемых одним из пары асимметричных предельных циклов, качественно аналогичных циклам L_1 и L_3 (см. рис.1, диаг.1). С приближением λ к границе интервала Λ_4 система в результате разрушения хаотического аттрактора R_3 (рис.4, диаг. б) переходит на режим регулярных колебаний, определяемых симметричным предельным циклом S_5 с $n_1 = n_2 = 2$ (рис.4, диаг. 7).

Развитие динамических режимов в диапазоне значений $\lambda \in \Lambda_5$ связано с эволюцией предельного цикла S_5 и характеризуется бифуркационной диаграммой $\{\lambda, \varphi\}$, приведенной на рис. 5. Необходимо отметить, что при $\lambda \in \Lambda_5$ в фазовом пространстве системы (1) одновременно существует устойчивый симметричный предельный цикл S_6 , содержащий внутри себя цикл S_5 (рис. 4, диаг. 8). На бифуркационной диаграмме выделяются три области: область, в которой преобладают хаотические колебания ($1.207 < \lambda < 1.4325$), и две области регулярных колебаний, соответствующих циклу S_6 ($1.05 < \lambda < 1.207$) и асимметричным предельным циклам S_7 и S_8 ($0.64856 < \lambda < 1.05$), рождающимся в результате бифуркаций потери симметрии цикла S_6 . Хаос в системе возникает в результате бифуркации потери симметрии цикла S_5 и последовательности бифуркаций удвоения периода рождающихся асимметричных предельных циклов.

На рис. 4, диаг. 9, 11, 12 показаны фазовые портреты хаотических аттракторов R_4 и R_5 , характерных для левого и правого краев области хаоса. Внутри этой области существуют интервалы значений λ , соответствующие регулярным колебаниям системы, определяемым симметричными предельными циклами с $n_1 = n_2 = 2$ (см. рис.4, диаг. 7) и $n_1 = n_2 = 4$ (рис.4, диаг. 10). При $\lambda = 0.6485$ предельные циклы S_7 и S_8 исчезают в результате седло-узловой бифуркации, следствием которой является жесткий переход системы на режим колебаний с большим размахом фазовых переменных. Этот режим сохраняется в системе при изменении λ в интервале $0 < \lambda < 0.6485$.

Из приведенных результатов исследования динамики модели (1) следует, что при начальном рассогласовании $\sigma = \pi$ можно получить большое количество

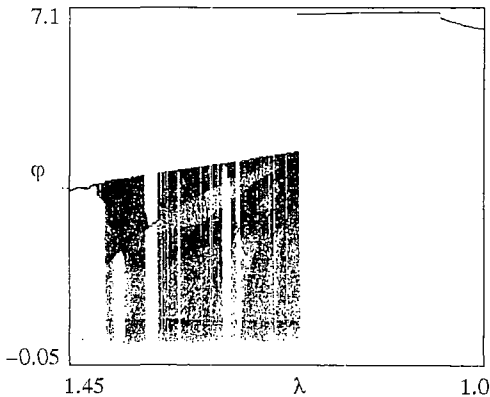


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма колебательных режимов системы с симметрией в области Λ_5

различных периодических и хаотических сигналов на выходе изучаемой САФ, изменяя величину параметра инерционности λ . Бифуркационные диаграммы на рис.2,3,5 показывают характер возникающих при этом движений в системе, через которые режимы колебаний относительно состояний равновесия A_1 и A_3 (циклы L_1 и L_3) преобразуются в режим колебаний с большой амплитудой фазовых переменных (в цикл L_0). Представляет интерес выяснить, насколько критична установленная картина динамических явлений в симметричной модели (1) к возмущениям параметра σ .

2. Режимы колебаний и бифуркации в системе с асимметрией

Рассмотрим динамику модели (1) при небольшой степени асимметрии, полагая значение параметра $\sigma = 3.5$. В этом случае состояния равновесия A_1, A_2, A_3

смещаются так, что их координаты удовлетворяют неравенствам $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$, $3\pi/2 < \varphi_3 < 2\pi$. Введение асимметрии приводит к появлению различия бифуркационных значений $\lambda_{1,3} = -(b - \mu)\Phi'(\varphi_{1,3})$, соответствующих потере устойчивости A_1 и A_3 и рождению устойчивых предельных циклов L_1 и L_3 ($\lambda_1 \approx 4.15375$, $\lambda_3 \approx 4.50197$), а также диапазонов значений λ , отвечающих режимам колебаний относительно A_1 ($\lambda \in (1.9475, 4.15375)$) и A_3 ($\lambda \in (2.0142, 4.50197)$), определяемых циклами L_1 и L_3 (см. рис. 1, диаг. 1).

На рис. 6 приведена бифуркационная диаграмма режимов, характеризующая эволюцию предельного цикла L_1 с уменьшением λ . Областям стохастичности соответствуют значения $\lambda \in (2.045, 2.075)$ и $\lambda \in (1.9884, 1.995)$. Фазовые портреты хаотических аттракторов P_1 и Q_1 , существующих при этих значениях λ , показаны на рис. 7, диаг. 1 и 3. Из диаграммы

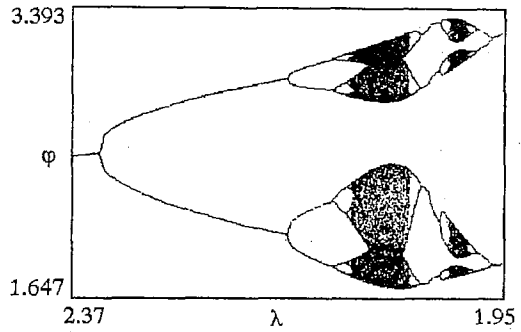


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма режимов колебаний относительно состояния равновесия A_1 в системе с асимметрией

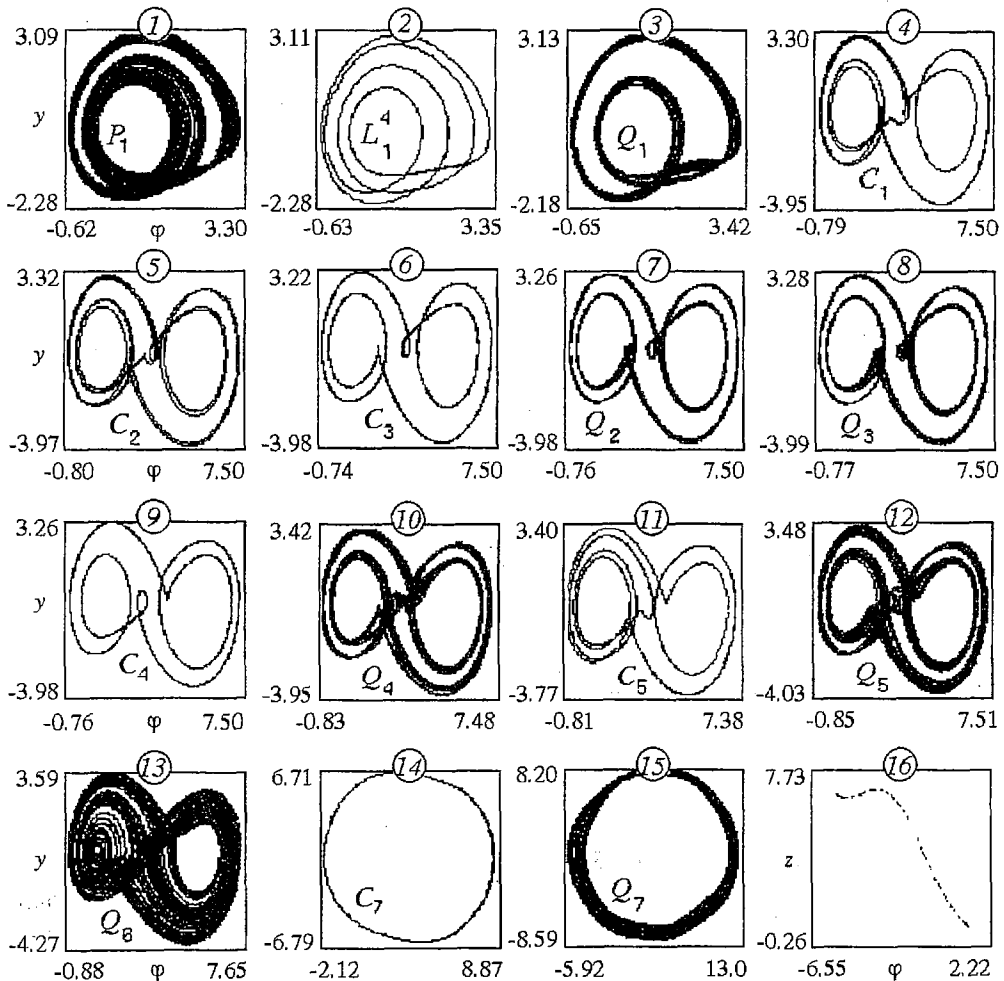


Рис. 7. Фазовые портреты аттракторов в системе с асимметрией при $\sigma = 3.5$, $\lambda = 2.0625$ (1); 2.03 (2); 1.99 (3); 1.93 (4); 1.91 (5); 1.9 (6); 1.8775 (7); 1.8725 (8); 1.86 (9); 1.83 (10); 1.808 (11); 1.8 (12); 1.7 (13); 1.44 (14); 0.73 (15,16)

на рис. 6 видно, что аттракторы P_1 и Q_1 образуются в результате последовательности бифуркаций удвоения периода соответствующего цикла L и четырехоборотного предельного цикла L_1^4 (рис.7, *диаг.2*). При $\lambda = 1.9475$ колебания вокруг состояния равновесия A_1 исчезают, в системе (1) происходит жесткий переход к другому режиму колебаний, определяемому устойчивым предельным циклом S_1 , охватывающим все три состояния равновесия с числом витков $n_1=4, n_2=2$ (рис.7, *диаг.4*).

В интервале значений $\lambda \in (2.0142, 4.50917)$ одновременно с событиями, представленными на рис. 6, в системе существуют режимы колебаний относительно состояния равновесия A_3 , развивающиеся на базе предельного цикла L_3 . Поведение этого цикла с уменьшением λ характеризуется тремя бифуркациями удвоения периода, затем двумя бифуркациями, обратными удвоениям, далее - возникновением двухоборотного предельного цикла L_3^2 и его исчезновением в результате бифуркации двухободной петли сепаратрис. Следствием этой бифуркации является жесткий переход системы на устойчивый предельный цикл L_1^4 вокруг состояния равновесия A_1 (рис.7, *диаг.2*).

При уменьшении λ от значения $\lambda = 1.9475$, соответствующего предельному циклу S_1 , режимы и бифуркации системы (1) связаны с предельными циклами, охватывающими все три состояния равновесия. Характер изменения колебательных режимов в интервале значений $\lambda \in (1.26, 1.96)$ при уменьшении λ показан на рис.8, на котором имеет смысл выделить две области: $\Pi_1 = \{1.81 < \lambda < 1.96\}$ и $\Pi_2 = \{1.26 < \lambda < 1.81\}$. В области Π_1 чередуются узкие интервалы с периодическими режимами, определяемыми устойчивыми предельными циклами S_2 с числом витков $n_1 = 6, n_2 = 4$ (рис.7, *диаг.5*), S_3 и S_4 с $n_1=n_2=2$ (рис.7, *диаг.6,9*), S_5 с $n_1 = 4, n_2 = 2$ (рис.7, *диаг.11*) и S_6 с $n_1=n_2=2$, и с хаотическими движениями, соответствующими аттракторам Q_2, Q_3 и Q_4 (рис.7, *диаг. 7, 8, 10*). Двухспиральные хаотические аттракторы Q_2 и Q_4 образуются в результате последовательности бифуркаций удвоения периода циклов S_3 и S_4 . На хаотический аттрактор Q_3 система переходит после седло-узловой бифуркации цикла S_6 .

Область Π_2 характеризуется широкими интервалами значений λ , соответствующих хаотическим движениям, и узкими «окнами» периодических движений. Переход к хаосу наблюдается после исчезновения предельного цикла S_5 в результате седло-узловой бифуркации. Фазовый портрет возникающего при этом двухспирального хаотического аттрактора Q_5 показан на рис.7, *диаг.12*. Уменьшение λ приводит к увеличению размеров хаотических аттракторов в фазовом пространстве (аттрактор Q_6 на рис.7, *диаг.13*), то есть к повышению степени хаотичности системы. В «окнах» периодических движений установлено существование разнообразных предельных циклов, охватывающих как только состояния равновесия A_1 (при $1.4476 < \lambda < 1.452$) или A_3 (при $1.508 < \lambda < 1.5185$), так и все три состояния равновесия A_1, A_2, A_3 с числом витков $n_1=3, n_2=2; n_1=2, n_2=1; n_1=n_2=2; n_1=2, n_2=4; n_1=1, n_2=2; n_1=2, n_2=3; n_1=n_2=6$. Интересно отметить, что при значениях $1.25 < \lambda < 1.4467$ хаотический аттрактор Q_6 (рис.7, *диаг.13*) сосуществует в фазовом пространстве с однооборотным устойчивым предельным циклом S_7 (рис.7, *диаг.14*), будучи локализованным внутри этого цикла.

Область Π_2 при уменьшении λ сменяется областью колебаний, определяемых циклом S_7 . В интервале $0.6725 < \lambda < 1.25$ поведение системы характеризуется следующими явлениями: бифуркации удвоения периода цикла S_7 и переход к хаотическому аттрактору

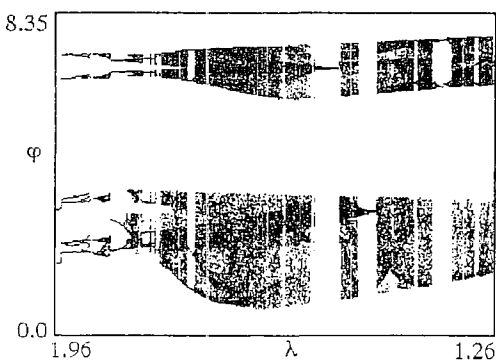


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма колебательных режимов системы с асимметрией

Q_7 при $\lambda = 0.74$ (рис.7, *диаг.15,16*); разрушение аттрактора Q_7 (при $\lambda = 0.716$) и переход на однооборотный предельный цикл C_8 (при $\lambda = 0.69$); исчезновение цикла C_8 в результате седло-узловой бифуркации при $\lambda = 0.6725$ и жесткий переход на предельный цикл L_0 со значительно большим динамическим диапазоном.

Приведенные результаты показывают, что уже сравнительно небольшая степень асимметрии вносит качественные изменения в динамику исследуемой системы. С увеличением степени асимметрии при дальнейшем увеличении параметра σ обнаружено уменьшение интервала значений λ , в котором реализуются режимы колебаний относительно состояния равновесия A_1 (на базе цикла L_1), и увеличение интервала значений λ , соответствующего режимам колебаний относительно состояния равновесия A_3 (на базе цикла L_3). Кроме этого, с ростом σ наблюдается исчезновение режимов сложных колебаний, определяемых предельными циклами, охватывающими все три состояния равновесия и имеющими витки вокруг A_1 и A_3 , и двухспиральными хаотическими аттракторами. Отметим, что в силу инвариантности системы (1) относительно замены σ, φ, ψ, z на $2\pi - \sigma, 2\pi - \varphi, -\psi, -z$ поведение системы при удалении от значения $\sigma = \pi$ с уменьшением σ остается таким же, как и при увеличении σ с точностью до замены событий в окрестности состояния равновесия A_1 на события в окрестности состояния равновесия A_3 и наоборот.

Заключение

Для модели стационарно бистабильной системы автофазирования установлены режимы поведения и проанализированы бифуркационные переходы при изменении величин начального фазового рассогласования σ и параметра инерционности λ . Наиболее сложной и разнообразной динамика рассмотренной модели оказывается при значении $\sigma = \pi$, когда она обладает симметрией движений. Обнаружена сложная зависимость поведения модели (1) от изменения параметра λ , для которой характерно чередование интервалов с хаотическими и сложными регулярными колебаниями. Выяснено сосуществование различных колебательных режимов, которое является причиной гистерезисных явлений в системе и обуславливает зависимость поведения системы от начальных условий.

Результаты данной работы вместе с результатами, полученными в [1,2], позволяют сделать вывод о том, что в рассмотренной системе автофазирования при значениях параметров в области неустойчивости состояний равновесия удастся реализовать все типы колебательных режимов и их бифуркаций, которые свойственны кольцевым автоколебательным системам [3], генераторам Чуа [6-9] и другим бистабильным системам. Возбуждая колебательные режимы в САФ, можно сформировать на выходе системы различные фазомодулированные сигналы. Особый интерес представляют режимы системы с хаотической модуляцией выходного сигнала и в первую очередь те из них, которые определяются двухспиральными хаотическими аттракторами модели (1) с переходами фазовых переменных между неустойчивыми состояниями равновесия. Возможность существования таких режимов позволяет реализовать генератор хаоса на базе САФ, а сильная зависимость режимов поведения от параметров инерционности и начального рассогласования позволяет осуществить эффективное управление характеристиками генерируемых хаотических процессов, а также перевод системы на колебательный режим с желаемыми свойствами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).

Библиографический список

1. Пономаренко В.П., Заулин И.А. Сложная динамика систем с

неединственным состоянием равновесия // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, № 1. С. 30.

2. *Зулин И.А., Пономаренко В.П.* Синхронные и автоколебательные режимы в многоустойчивых системах с фазовым управлением // РЭ. 1993. Т. 37, № 4. С. 732.

3. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.

4. *Кислов В.Я.* Динамический хаос и его использование в радиоэлектронике для генерирования, приема и обработки колебаний и информации // РЭ. 1993. Т. 38, № 10. С. 1783.

5. *Лихарев К.К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985.

6. *Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* The double-scroll family // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1986. Vol. CAS-33. P. 1073.

7. *Ogorzalek M.J., Galias Z.* Characterization of chaos in Chua's oscillator in terms of unstable periodic orbits // Chua's Circuits: A Paradigm for Chaos / Ed. R.N.Madan. Singapore: World Scientific, 1993. P. 230.

8. *Deregel P.* Chua's oscillator: a zoo of attractors // Chua's Circuits: A Paradigm for Chaos / Ed. R.N.Madan. Singapore: World Scientific, 1993. P. 179.

9. *Genot M.* Applications of 1-D map from Chua's circuit: a pictorial guide // Chua's Circuits: A Paradigm for Chaos / Ed. R.N.Madan. Singapore: World Scientific, 1993. P. 545.

*НИИ прикладной математики
и кибернетики*

*Поступила в редакцию 4.10.94
после переработки 2.03.95*

ROLE OF INERTIA AND INITIAL DEVIATION IN DEVELOPMENT OF OSCILLATING REGIMES IN BISTABLE PHASE CONTROL SYSTEM

V.P. Ponomarenko, I.A. Zaulin

The dynamics of symmetrical and asymmetrical models of nonlinear phase control system having three equilibrium states has been investigated. Properties and regularities of development of autooscillating and chaotic regimes are established under variation of control circuit inertia parameter for the region where autophasing regimes are unstable.



Пономаренко Валерий Павлович родился в 1941 году в Мурманске, окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года - заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.



Зулин Игорь Александрович родился в 1962 году в Горьком, окончил Горьковский государственный университет (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994). Научный сотрудник НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов - динамика систем, математическое моделирование, применение нелинейной динамики в задачах синхронизации автоколебательных систем. Опубликовал 15 научных статей по направлениям, указанным выше, соавтор двух учебных пособий.



ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИИ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА И ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ С МАГНИТНЫМ УДЕРЖАНИЕМ

Часть II

*А.В. Архипов, Л.Ю. Богданов, С.В. Воскресенский, С.А. Левчук,
О.И. Лукиша, Г.Г. Соминский*

В разнообразных электронных потоках с магнитным удержанием экспериментально определены характеристики "мгновенных" спектров колебаний пространственного заряда. Выявлены закономерности и механизмы изменения степени упорядоченности коллективных процессов. Получена информация о пространственной структуре колебаний. Исследовано воздействие на коллективные процессы внешнего гармонического сигнала.

Начало статьи (часть I) опубликовано в предыдущем номере журнала. В тексте первой и второй частей используется единая нумерация разделов, формул, рисунков и литературных источников. Для удобства читателя в конце части II помещен полный список литературы.

Оглавление

Часть I

Введение.

1. Объекты исследования.
2. Методы измерений и аппаратура.

Часть II

3. Результаты измерений и их обсуждение.
 - 3.1. Магнетронный усилитель.
 - 3.2. Винтовой электронный пучок системы гиротронного типа.
 - 3.3. Релятивистский электронный пучок.
 - 3.4. Длинноимпульсный электронный пучок сплошного сечения.
- Заключение.

3. Результаты измерений и их обсуждение

Новые данные о коллективных процессах в пространственном заряде были получены во всех исследованных системах. Рассмотрим результаты измерений для каждой из них.

3.1. Магнетронный усилитель

Колебания пространственного заряда в устройствах со скрещенными полями развиваются во втулке электронного облака, прилегающей к катоду. Радиальная протяженность втулки в отсутствие интенсивных колебаний определяется соотношением анодного напряжения и магнитного поля. В закритическом режиме ($U_a < U_{акр}$) у границы втулки ($r = r_{гр}$), определяемой равенством электрических сил расталкивания и магнитных сил сжатия, циклотронная частота ($\omega_{ц}$) приблизительно равна плазменной ($\omega_{пл}$). В усилителях и генераторах М-типа происходящая под действием СВЧ полей замедляющей системы группировка в спицы пространственного заряда над радиусом синхронизма r_c несколько меняет распределение пространственного заряда [15, 16]. Однако, и в этом случае у границы ($r = r_c$) циклотронная частота близка к плазменной. Таким образом, в системах магнетронного типа существует автоматический механизм, регулирующий соотношение между концентрацией электронов у границы прикатодного облака пространственного заряда и магнитным полем.

Характеристики автоколебаний электронного облака должны зависеть от размеров втулки и распределения полей, а, следовательно, от напряжения U_a и магнитного поля B . В усилителе М-типа с холодным вторично-эмиссионным катодом характеристики автоколебаний могут меняться также и при изменении коэффициента вторичной эмиссии δ_m . В наших исследованиях получены данные о связи автоколебаний с указанными параметрами.

Ранее в закритическом режиме ($U_a < U_{акр}$) магнетронных устройств выявлены колебания, обусловленные движением сгруппированного заряда в азимутальном [19, 20] и в аксиальном [2-4] направлении. Частота азимутальных колебаний $f_{аз}$ описывается уравнением Хартри - Банемана, а для частоты аксиальных колебаний f_a получены выражения, приближенно описывающие ее изменения в отсутствие интенсивных колебаний другого типа

$$f_a \approx \frac{n_a U_a}{\pi h B (r_a - r_k)} \quad (1)$$

и в режиме больших амплитуд СВЧ полей замедляющей системы

$$f_a \approx 2 \frac{n_a r_k}{n h} f. \quad (2)$$

Выражения (1) и (2) получены в предположении, что колебания развиваются вблизи границы втулки электронного облака. Частота f_a аксиальных колебаний вида n_a определяется в первом случае отношением U_a/B и геометрическими размерами пространства взаимодействия: радиусами катода (r_k) и анода (r_a), а также расстоянием h между торцевыми катодными экранами. В условиях, когда существуют интенсивные поля замедляющей системы вида n и на частоте f (см. соотношение (2)), величина f_a практически не меняется с U_a и B , но зависит от f и n . Высказывалось предположение [4] о взаимном влиянии азимутальных и аксиальных движений сгруппированного пространственного заряда. Однако, отсутствие сведений о пространственно-временных характеристиках колебаний не позволяло уточнить картину коллективных процессов во втулке электронного облака. Необходимые для этого данные получены нами с использованием описанной в разделе 2 методики.

В исследованном амплитроне с изменением анодного напряжения и магнитного поля меняются не только характерные частоты колебаний, но также и степень их упорядоченности. В мгновенном спектре зондов выделяются дискретные пики повышенной интенсивности в области низких ($100 \leq f \leq 1000$ МГц) и в области высоких ($1000 \leq f \leq 2500$ МГц) частот (рис. 6). В высоко-

частотном спектре зондов в стандартном режиме наибольшую амплитуду имеют колебания на частоте входного сигнала $f_{вх} \sim 2400$ МГц и на частотах самовозбуждения прибора $f_c \sim 1600 \dots 1800$ МГц. На спектре рис. 6, полученном в условиях самовозбуждения, отмечены частоты $f_{вх}$, f_c и соответствующие им амплитуды $A_{вх}$, A_c , а также максимальное значение амплитуды низкочастотной части спектра $A_{нч}^M$.

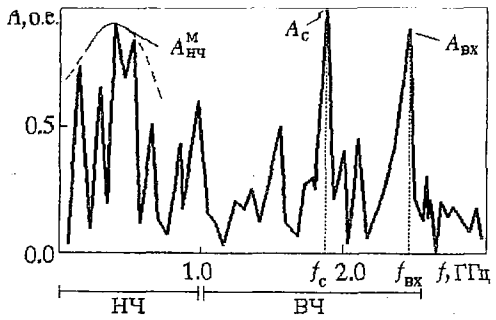


Рис. 6. Мгновенный спектр колебаний пространственного заряда в магнетронном усилителе. $A_{нч}^M$ - максимальная амплитуда низкочастотной части спектра (НЧ). A_c - амплитуда колебаний по частоте f_c самовозбуждения, $A_{вх}$ - амплитуда на частоте входного сигнала $f_{вх}$; анодное напряжение $U_a = 7.5$ кВ; магнитное поле $B = 0.12$ Тл; входная мощность $P_{вх} = 3$ кВт; коэффициент вторичной эмиссии $\delta_{m2} = 1.8$

Соотношение амплитуд различных частотных компонентов ($A_{вх}$, A_c и $A_{нч}^M$) меняется с изменением коэффициента вторичной эмиссии катода δ_m . На рис. 7 сравниваются полученные при фиксированном магнитном поле $B = 0.12$ Тл зависимости от анодного напряжения значений $A_{нч}^M$, $A_{вх}$ и A_c . Измерения выполнены в автоколебательном режиме при мощности входного сигнала $P_{вх} = 3$ кВт. Изменение с U_a выходной мощности P_0 также показано на рис. 7.

При самовозбуждении амплитрона с низкоэффективным во вторично-эмиссионном отношении катодом с $\delta_m \sim 1.8$ (см. рис. 7, а) значения $A_{вх}$ бывают сравнимы по величине с $A_{нч}^M$. В приборе с эффективным катодом ($\delta_m \sim 2.5$) при его самовозбуждении $A_{вх} \ll A_{нч}^M$ (см. рис. 7, б). Величина же A_c существенно меньше $A_{нч}^M$ во всем исследованном интервале $1.8 \leq \delta_m \leq 3.0$. Аналогичным образом меняется соотношение амплитуд низкочастотной и высокочастотной частей спектра и в стандартном режиме.

Таким образом, полученные данные свидетельствуют, что низкочастотные колебания играют важную роль во вторично-эмиссионном поддержании пространственного заряда в любых режимах работы УМ.

Спектральный состав низкочастотных зондовых сигналов, связанных с автоколебаниями электронного облака, более подробно рассмотрим только для наиболее интересного с практической точки зрения случая работы прибора с достаточно эффективным катодом ($\delta_m \geq 2.5$).

Простейший низкочастотный спектр образован существующими одно-

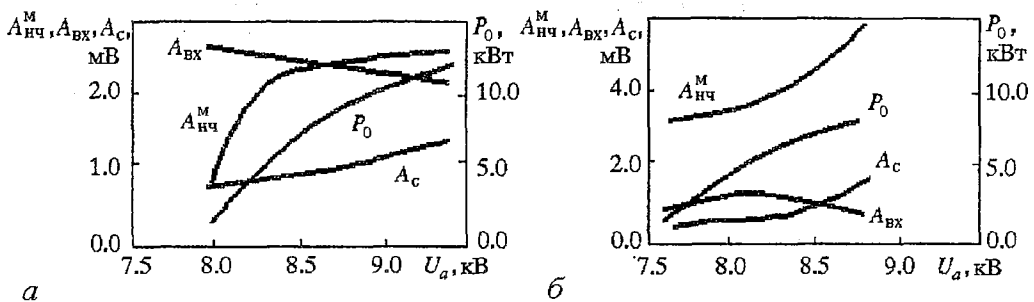


Рис. 7. Зависимости от анодного напряжения мощности выходного сигнала P_0 , максимальной амплитуды $A_{нч}^M$ низкочастотных колебаний, а также амплитуды $A_{вх}$ колебаний на частотах входного сигнала $f_{вх}$ и амплитуды A_c колебаний на частоте f_c самовозбуждения, измеренные в автоколебательном режиме (АР) при магнитном поле $B = 0.12$ Тл и мощности входного сигнала $P_{вх} = 3$ кВт: а - для прибора с низкоэффективным катодом ($\delta_{m1} \sim 1.8$), б - для катода с коэффициентом вторичной эмиссии $\delta_{m2} \sim 2.5$

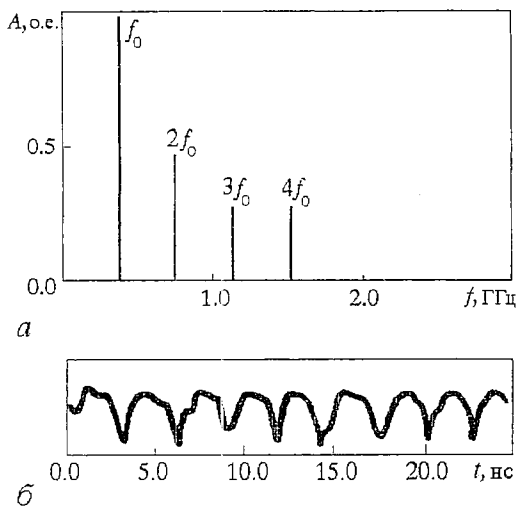


Рис. 8. Простейший низкочастотный спектр колебаний пространственного заряда (а) и временная реализация сигнала (б), измеренные в автоколебательном режиме УМ при $B = 0.12$ Тл, $U_a = 12.9$ кВ, $P_{вх} = 1$ кВт, $\delta_m \sim 3.0$; f_0 - основная частота спектра

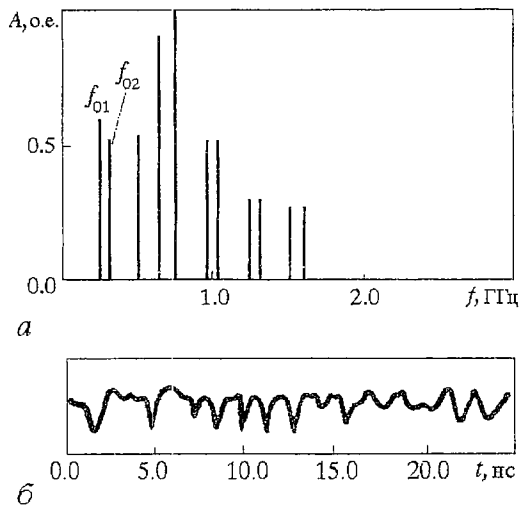


Рис. 9. Низкочастотный спектр колебаний пространственного заряда (а) и временная реализация сигнала (б), измеренные в стандартном режиме УМ при $B = 0.12$ Тл, $U_a = 12.9$ кВ, $P_{вх} = 1$ кВт, $\delta_m \sim 3.0$. Отмечены две сосуществующие колебательные структуры с основными частотами f_{01} и f_{02}

временно составляющими на частотах, кратных некоторой основной f_0 . На рис. 8, а несколько упрощенно изображен типичный спектр такого типа. Указаны положение максимумов основных составляющих спектра и их амплитуда. Такой спектральный состав соответствует единому колебательному процессу в пространственном заряде. Вид соответствующей временной реализации (рис. 8, б) свидетельствует о неизменности соотношения фаз гармоник в течение всего времени наблюдения. Спектр в виде существующих одновременно гармоник, соотношения фаз и амплитуд которых неизменны во времени, соответствует стационарной волне в электронном облаке, связанной с движением мимо отверстия в катоде устойчивой структуры сгустков пространственного заряда.

Разрушение стационарных волн, проявляющееся в «хаотизации» временных реализаций, наблюдается при формировании сосуществующих структур сгустков. В спектре колебаний им соответствуют наборы составляющих на кратных частотах, но с разными основными частотами f_{0n} ($n = 1, 2, \dots$). Конкурирующие структуры возникают, например, при подаче несогласованного с автоколебаниями входного сигнала в замедляющую систему, т. е. при переходе от АР к СР. Типичные для этого случая спектр и реализация показаны на рис. 9.

Наблюдалось разрушение стационарных волн и при изменении соотношения U_a и B в автоколебательном режиме. Монотонное изменение анодного напряжения при $B = \text{const}$ ведет к немонотонному изменению добротности и амплитуды составляющих спектра. Для хаотизированного спектра характерно чередование во временных реализациях цугов с упорядоченным и неупорядоченным заполнением. Длительность и характер заполнения цугов меняются от импульса к импульсу, а также в течение данной реализации.

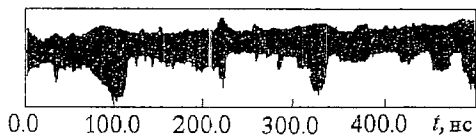


Рис. 10. Временная реализация зондового сигнала, измеренная в стандартном режиме УМ при $B = 0.12$ Тл, $U_a = 13.8$ кВ, $P_{вх} = 1$ кВт, $\delta_m \sim 3.0$

Наблюдение временных реализаций за большой промежуток времени свидетельствует (рис. 10), что эти изменения носят характер, типичный для сценария перехода нелинейной динамической системы в стохастический режим через перемежаемость. В пользу стохастизации колебаний говорит и реакция

электронного облака на входной сигнал в стандартном режиме. Увеличением $\Gamma_{\text{вх}}$ в некоторых случаях удается упорядочить колебания, а иногда наоборот, первоначально упорядоченный сигнал хаотизировать. Такая реакция, согласно [22], типична для нелинейных динамических систем.

Для определения пространственных характеристик колебательных процессов на основании полученных данных построены зависимости частоты мгновенного спектра от сдвига фазы в азимутальном (θ_ϕ) и аксиальном (θ_z) направлении, то есть дисперсионные характеристики. Обычно (рис. 11) выделяется несколько ветвей колебаний с разными значениями фазовой скорости v_ϕ . Азимутальная (v_ϕ) и аксиальная (v_z) проекции фазовой скорости в пределах одной ветви приблизительно постоянны. Наиболее низкие частоты колебаний близки к редуцированной плазменной $f_{\text{пр}}^2$.

Полученные дисперсионные характеристики свидетельствуют, что колебания объемного заряда, как правило, носят характер винтовых мод и связаны с одновременным движением сгустков пространственного заряда как в азимутальном, так и в аксиальном направлении. Исключение составляют лишь режимы, характеризующиеся максимальной мощностью выходного сигнала $P_0 \sim 140-150$ кВт. В таких режимах высокочастотным ветвям колебаний в координатах ($f, -\theta_\phi$) соответствуют значения θ_z , близкие к 360 градусам (или, что то же самое, к нулю).

Из полученных дисперсионных характеристик следует слоистая структура колеблющегося электронного облака. Действительно, если предположить, что колебания с разными v_ϕ связаны с синхронными потоками электронов, разные ветви соответствуют колебаниям в разнесенных по радиусу потоках электронов. Проведенные оценки свидетельствуют, что выделяются две преимущественные области локализации колебаний - у радиуса синхронизма (именно там развиваются колебания ветвей 1 и 2 (см. рис. 11)) и в районе прикатодного максимума плотности пространственного заряда [15, 16] (ветвь 3 на рис. 11).

Таким образом, фазовые измерения позволили дополнить и уточнить картину коллективных процессов в пространственном заряде магнетронного усилителя. В них подтверждено высказанное ранее предположение [4] о существовании винтовых мод, показано, что в колебаниях участвуют не только приграничные слои втулки пространственного заряда.

Существование колебаний в разнесенных по радиусу слоях электронного облака может быть объяснено с учетом взаимодействия попутно движущихся

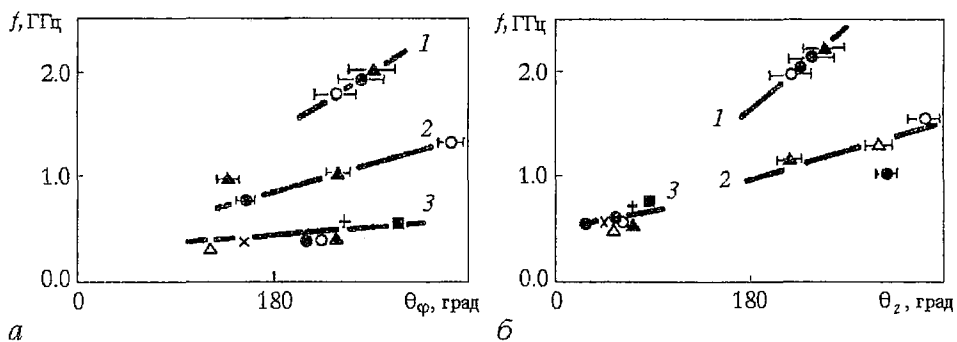


Рис. 11. Дисперсионные характеристики колебаний пространственного заряда: зависимости частоты выделенных пиков мгновенного спектра от сдвига фазы θ_ϕ в азимутальном (а) и θ_z в аксиальном (б) направлении в автоколебательном режиме УМ при $B = 0.12$ Тл, $U_a = 10.4$ кВ, $P_{\text{вх}} = 1$ кВт, $\delta_m = 3.0$

² Редукция (уменьшение) плазменной частоты учитывает влияние ограничивающих поток проводящих электродов [23].

потоков заряженных частиц с разными скоростями, то есть развитием двухпучковой неустойчивости (см., например, [1, 23]). Такое взаимодействие наиболее эффективно при некоторых оптимальных соотношениях скоростей потоков.

Слоистая структура колебательных процессов в электронном облаке, возможно, является специфической особенностью систем М-типа с вторично-эмиссионными катодами. Пока нет надежного ответа на вопрос о том, такова ли она в условиях, когда ток с катода обусловлен термоэмиссией. Однако, учитывая, что в мощных устройствах М-типа значительная часть тока, как правило, определяется вторичной эмиссией, полученные данные имеют достаточно большое и общее значение.

Как показали проведенные исследования, автоколебаниями электронного облака можно управлять с помощью СВЧ полей, создаваемых при подаче мощности не только в замедляющую систему, но и по коаксиалу, подключенному между торцевым экраном и катодом.

КСВ тракта, соединяющего источник управляющего сигнала с УМ, сильно меняется при изменении частоты f_y . На данном этапе измерения выполнены при двух значениях частоты $f_y = 385$ и 540 МГц, соответствующих минимумам зависимости КСВ (f_y). Для указанных частот получены подобные результаты. Поэтому поясним основные закономерности на основании более подробных измерений на частоте $f_y = 385$ МГц.

Влияние управляющего сигнала носит пороговый характер и заметно при значениях управляющей мощности $P_y \geq 100-150$ Вт. В низкочастотной области спектра эффект воздействия наиболее сильно проявляется в повышении амплитуды A_1 колебаний на частотах $100-150$ МГц, близких по величине к частоте первого номера ($n_a = 1$) аксиальных колебаний пространственного заряда. При этом интенсивность сигналов на кратных частотах остается много меньше A_1 . На рис. 12 приведены измеренные при двух значениях магнитного поля 0.1 (см. рис. 12,а) и 0.135 Тл (см. рис. 12,б) зависимости от анодного напряжения величины A_1 , а также амплитуд сигналов на удвоенной (A_2) и учетверенной (A_4) частотах. Показаны характеристики, измеренные в отсутствие управляющего сигнала (сплошные линии) и при мощности $P_y=300$ Вт (штриховые линии). Видно, что влияние управляющего сигнала меняется с напряжением, и повышение амплитуды A_1 достигает в некоторых режимах 2-3 раз.

Описанный эффект воздействия управляющего сигнала можно связать с возникновением вторично-эмиссионного резонансного разряда (ВЭР). В пользу такого предположения говорит типичный для ВЭР пороговый характер изменения амплитуды A_1 сигнала с P_y . При возникновении ВЭР у торцевой поверхности катода происходит размножение электронов. Эмитированные в торцевой области электроны под действием краевых полей «отрываются» от катода и начинают

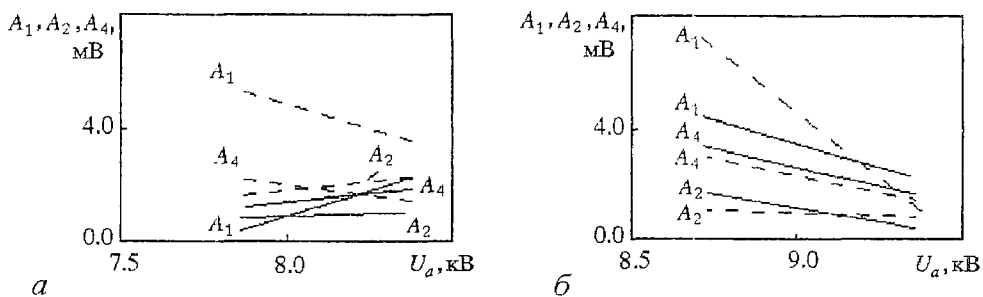


Рис. 12. Зависимости от анодного напряжения U_a амплитуд A_1 , A_2 , A_4 колебаний пространственного заряда на кратных частотах, измеренные в автоколебательном режиме УМ при магнитных полях $B = 0.1$ Тл (а) и 0.135 Тл (б) в отсутствие управляющего сигнала (сплошные линии) и при мощности управляющего сигнала $P_y = 300$ Вт (штриховые линии). $P_{вх} = 3$ кВт, $\delta_m \sim 2.5$

двигаться в противоположную торцевую область пространства взаимодействия [24,25]. В присутствии даже малых флуктуаций СВЧ полей часть электронов не оседает на катоде и совершает колебательное движение вдоль оси. Увеличение количества захваченных таким образом электронов способно привести к росту амплитуды коллективных аксиальных колебаний пространственного заряда.

Наряду с данным объяснением, можно предположить и «полевой» механизм воздействия управляющего сигнала, проявляющийся во влиянии созданных при подачи мощности P_y СВЧ полей на аксиальное движение сгустков объемного заряда.

Имеющихся данных недостаточно для выделения того или иного механизма. Однако, полученные результаты имеют значительный практический интерес и свидетельствуют о возможности эффективного управления коллективными процессами в мощных устройствах со скрещенными полями с помощью небольшого по сравнению с мощностью питания СВЧ сигнала, вводимого в прикатодную область.

3.2. Винтовой электронный пучок системы гиротронного типа

Так как время жизни электронов в МИП не превышает по порядку величины циклотронного периода, интенсивные колебания здесь практически невозможны. Поэтому основной интерес с точки зрения развития коллективных процессов представляют участки перемагничивания и дрейфа ВЭП.

Ранее [18] были обнаружены низкочастотные ($20 < f < 50$ МГц) колебания пространственного заряда в своеобразной ловушке между пробкой магнитного поля и катодом МИП, но сведения о пространственно-временных характеристиках коллективных процессов на участке дрейфа ВЭП отсутствовали. На участке дрейфа ВЭП сильно замагничен. Здесь реализуется соотношение $\omega_c \gg \omega_{пл}$. Из-за сравнительно малой плотности пространственного заряда в отсутствие сильных СВЧ полей поперечная структура пучка в области плато магнитного поля определяется, в основном, распределением плотности тока эмиссии по поверхности катода МИП и его компрессией на участке перемагничивания. При постановке настоящей работы нам представлялось, что на участке дрейфа возможны колебания пространственного заряда, причем не только навязанные движением электронных сгустков из области перемагничивания.

В проведенных экспериментах в системе формирования и транспортировки ВЭП всеми зондами зафиксированы колебания в широком интервале частот. При значениях питч-фактора, превышающих некоторое пороговое значение g_0^n , и сравнительно небольших токах пучка $0.5 \leq I \leq 6$ А преобладают колебания с частотами $f \leq 150$ МГц. В области частот $f \leq 50$ МГц в спектре, зафиксированном с помощью спектр-анализатора, выделяются дискретные пики на приблизительно кратных частотах. Если $g_0 > g_0^n$ и $I > I_{нч}^n$, где $I_{нч}^n$ - пороговое значение тока для возникновения этих низкочастотных колебаний, их амплитуда $A_{нч}$ возрастает с увеличением g_0 и I . На рис. 13,а приведена типичная зависимость $A_{нч}$ одного из пиков спектра от магнитного поля B_0 на полке зависимости $B(z)$. Здесь же указано соответствующее изменение питч-фактора, рассчитанного по адиабатической теории [5]. Изменение величины $A_{нч}$ с током для того же пика, измеренная при $B_0 = 2.5$ Тл, показана на рис. 13, б.

Амплитуда низкочастотных колебаний сильно меняется вдоль оси системы. Наиболее показательны изменения, зафиксированные зондом 8 при его смещении (см. рис. 2). На частотах $f \leq 50$ МГц характерно монотонное уменьшение амплитуды при удалении зонда 8 от катода МИП (кривая 1 на рис.14, а). Колебания на частотах $50 < f < 150$ МГц достигают максимальной амплитуды на некотором расстоянии $z = 7.5$ мм (кривая 2 на рис.14, а), однако, далее также уменьшают свою амплитуду при удалении от катода. Наименьшие из зафиксированных частот дискретных пиков спектра близки по величине к частоте колебательного движения

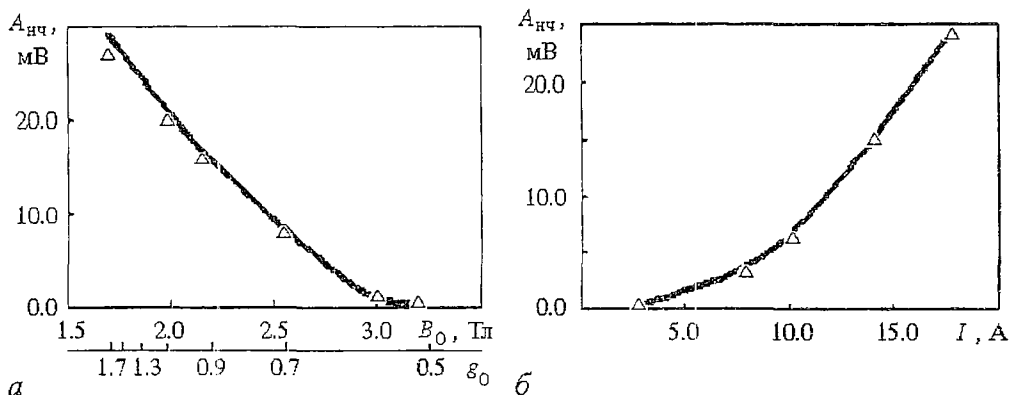


Рис. 13. Зависимости амплитуды пика спектра с зонда 7 на наименьшей из зафиксированных частот от магнитного поля и изменение питч-фактора (а) и от тока пучка (б), измеренные при коэффициенте перемагничивания $B_0/B_k = 25$ и значениях: а - ускоряющее напряжение $U = 8.2$ кВ, ток пучка $I = 15$ А; б - $U = 9.6$ кВ, магнитное поле $B_0 = 2.5$ Тл

электронов в ловушке между катодом и пробкой магнитного поля, рассчитанной без учета поля пространственного заряда. Эти оценки колебательного движения электронов свидетельствуют о связи низкочастотных колебаний с коллективным движением объема заряда в ловушке между катодом и магнитной пробкой, что согласуется с выводами работы [18]. «Пространственные» измерения позволяют оценить распределение поля этих колебаний и на участке дрейфа ВЭП.

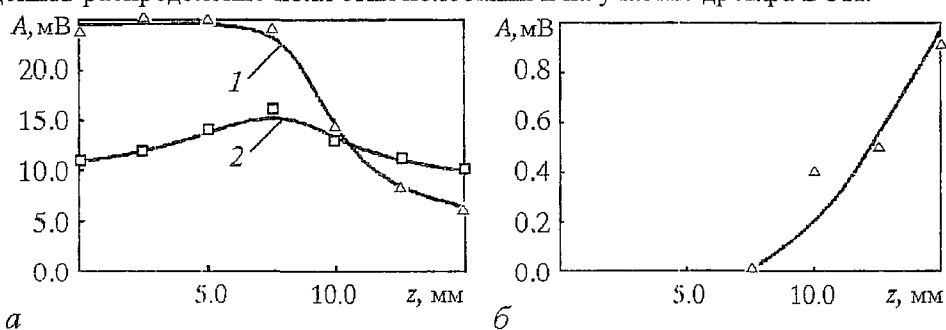


Рис. 14. Зависимости амплитуды колебаний на частотах $f \leq 150$ МГц (а) и на частотах $f = 790$ МГц (б) от аксиального положения зонда 8: Кривая 1 соответствует пика спектра с наибольшей амплитудой в полосе частот 0-50 МГц, а кривая 2 - в полосе частот 50-150 МГц; ускоряющее напряжение $U = 8$ кВ; магнитное поле $B_0 = 2.05$ Тл; ток пучка $I = 7$ А; коэффициент перемагничивания $B_0/B_k = 25$

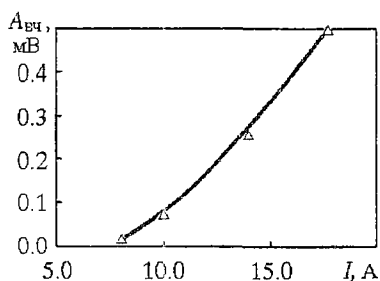


Рис. 15. Типичная зависимость амплитуды ВЧ колебаний с зонда 9 от тока пучка. Пик на частоте $f = 790$ МГц; ускоряющее напряжение $U = 9.6$ кВ; магнитное поле $B_0 = 3$ Тл; коэффициент перемагничивания $B_0/B_k = 25$

В высокочастотной области спектра наиболее интенсивны и воспроизводимы колебания на дискретных частотах в интервале 700-1000 МГц. Амплитуда $A_{вч}$ высокочастотных пиков возрастает с током пучка и при $I \sim 15-20$ А приближается по величине к амплитуде низкочастотных.

Рис.15 демонстрирует изменение с током амплитуды колебаний на частоте $f \sim 790$ МГц. При фиксированном токе амплитуды высокочастотных пиков увеличиваются с ростом коэффициента перемагничивания и с уменьшением B_0 при неизменном коэффициенте пере-

магничивания. Например, снижение магнитного поля от 2 до 0.5 Тл приводит к увеличению амплитуды примерно в два раза. Уменьшение полной энергии электронов при малых значениях $g_0 < 1$ сопровождается падением $A_{вч}$. Приведенные данные позволяют связать рост амплитуды высокочастотных колебаний с увеличением концентрации n_0 электронов на участке дрейфа в области полки магнитного поля, так как все перечисленные операции, приводящие к росту амплитуды, сопровождаются увеличением n_0 .

В спектре высокочастотных колебаний обычно выделяется 4-5 пиков, частоты которых слабо меняются с током пучка и магнитным полем в исследованном интервале $I_{вч} < I \leq 20$ А, $2.0 \leq B_0 \leq 3.5$ Тл. Расстояние Δf между пиками близко по величине или кратно значениям частот низкочастотных колебаний. На рис.16 показан типичный спектр колебаний, полученный при токе $I = 17$ А.

В отличие от описанных ранее низкочастотных, высокочастотным колебаниям свойственно быстрое увеличение амплитуды в направлении от катода к коллектору. Это изменение видно при сравнении сигналов разных зондов, но наиболее ярко прослеживается в зависимости амплитуды сигнала $A_{вч}$ от z , измеренной подвижным зондом δ (см.рис. 14, б).

Таким образом, очевидно, что обнаруженные высокочастотные колебания связаны с процессами в пространственном заряде на участке дрейфа ВЭП и имеют конвективную природу. Чтобы объяснить возникновение этих колебаний, интересно сопоставить полученные данные с существующими в литературе моделями коллективных явлений в удерживаемых магнитным полем электронных потоках. Известны механизмы развития неустойчивостей на частотах, значительно меньших циклотронной, связанные с существованием градиентов скоростей электронов. Наиболее изучены так называемые диокотронная и слиппинг-неустойчивости (см., например, [1,23,26-31]). Анализ характеристик колебаний, возникающих при взаимодействии проскальзывающих электронных потоков, сложен, причем наибольшие трудности встречаются в трехмерном рассмотрении, когда приходится учитывать градиенты скоростей, связанных с движением электронов как в азимутальном, так и в продольном (вдоль магнитного поля) направлениях [29-31]. К сожалению, результатами теории трехмерных колебательных процессов не удается воспользоваться для интерпретации данных настоящей работы. Поэтому сделаем оценки на основе более простых рассмотрений.

Для исследованного нерелятивистского ВЭП в сильном магнитном поле согласно критериям, приведенным в [30], среди неустойчивостей, связанных с градиентами скоростей, наибольший инкремент нарастания имеет диокотронная с продольным волновым числом $k = 0$. Для такого типа неустойчивости можно в первом приближении пренебречь влиянием градиента продольных скоростей.

Расчеты, выполненные в работе [28] для моноскоростных в осевом направлении пучков, показывают, что диокотронные (азимутальные) колебания с $k = 0$ могут развиваться в широком интервале частот, причем максимуму инкремента нарастания для пучков кольцевого сечения с геометрией, близкой к

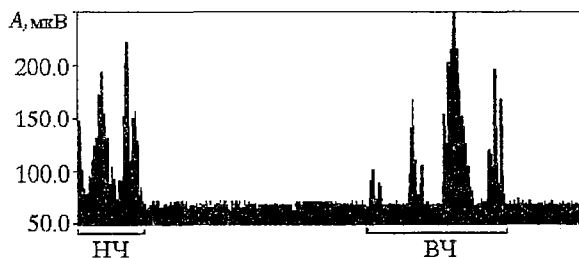


Рис. 16. Изображение спектра сигналов с зонда 9 в полосе частот $0 < f < 1000$ МГц. Указаны амплитуды A сигналов и области НЧ и ВЧ колебаний; ускоряющее напряжение $U = 10$ кВ; магнитное поле $B_0 = 2.5$ Тл; ток пучка $I = 17$ А; коэффициент перемагничивания $B_0/B_k = 25$

геометрии исследованных нами ВЭП, соответствуют частоты $\sim 20-40$ МГц. Таким образом, развитием диокотронной неустойчивости могут быть объяснены только низкочастотные колебания на участке дрейфа ВЭП.

Объяснение спектра высокочастотных колебаний удастся получить с учетом механизма двухпучкового усиления волн пространственного заряда [1,23,27]. Известно, что в замагниченных потоках с «дискретным» распределением по скоростям возможно усиление волн пространственного заряда, распространяющихся вдоль магнитного поля. Скорость нарастания таких волн на линейной стадии, определенная без учета движения электронов в поперечном магнитному полю направлении, зависит от частоты усиливаемых волн, значений редуцированной плазменной частоты $f_{пр}^3$ и соотношения продольных скоростей взаимодействующих потоков.

В исследованном ВЭП из-за неоднородностей эмиссии по поверхности катода формируются дискретные пучки с отличающимися продольными скоростями $v_{||}$. Различие значений $v_{||}$ для потоков электронов, эмиттированных с разных участков катодного пояса, могут быть около 5-10% (см., например, [32]). Соотношение же значений редуцированной плазменной частоты $f_{пр}$ тех же потоков, согласно нашим измерениям, достигает нескольких раз. Взаимодействие таких потоков, как показывают оценки, выполненные с использованием расчетных данных работы [23], ведет к усилению волн пространственного заряда в широком интервале частот, включающем и колебания на частотах 300-1400 МГц, обнаруженные в ВЭП.

Двухпучковая неустойчивость не объясняет существования дискретной структуры высокочастотных пиков (см.рис.16). Однако, «линейчатый» вид спектра может быть понят, если учесть влияние на развитие двухпучковой неустойчивости аксиальных («ловушечных») или азимутальных (диокотронных) колебаний на участке дрейфа. Параметрическое, например, воздействие этих колебаний способно выделить и поддержать нарастание «продольных» волн пространственного заряда на зафиксированных в работе дискретных частотах. Аналогичный эффект может быть также обусловлен воздействием на развитие колебаний своеобразной электродинамической структуры, создаваемой ограничивающими ВЭП электродами.

До сих пор мы использовали результаты измерения характеристик колебательных процессов с помощью спектр-анализатора с усреднением ~ 10 с по большой серии импульсов тока. Для выявления временных характеристик обнаруженных колебаний пространственного заряда ВЭП воспользуемся зарегистрированными временными реализациями сигналов. На рис. 17 показаны типичные реализации длительностью $\tau_p \sim 13$ нс и полученные в результате их обработки мгновенные спектры, соответствующие двум различным значениям времени задержки Δt относительно переднего фронта импульса тока, равным 0.5 мкс (см.рис.17,а,б) и 6 мкс (см.рис.17,в,г). Обработка реализаций дает информацию лишь о спектре частот в области $f > 1/\tau_p$ [33]. Поэтому для выявления особенностей спектра низкочастотных колебаний проводилось также наблюдение реализаций большей длительности 100 нс и 500 нс. На рис.18 приведены типичная осциллограмма длительностью 100 нс (см.рис.18,а), а также характерные мгновенные спектры низкочастотных колебаний для разных участков импульса тока, построенные на основе обработки реализаций с $\tau_p \sim 100$ нс (см.рис.18,б,в,г).

Анализ реализаций и мгновенных спектров свидетельствует, что в течение импульса падает амплитуда низкочастотных ($f < 150$ МГц) и возрастает амплитуда высокочастотных ($f \sim 800-1400$ МГц) колебаний (см.рис.17,18). Меняется одновременно и распределение мощности по спектру колебаний (см.рис.18). Отмеченное быстрое затухание низкочастотных сигналов свидетельствует, видимо, о существенном влиянии на развитие и поддержание колебаний пространственного

³ Редукция плазменной частоты может достигать в рассматриваемом в настоящей работе случае значений равных или больших 10.

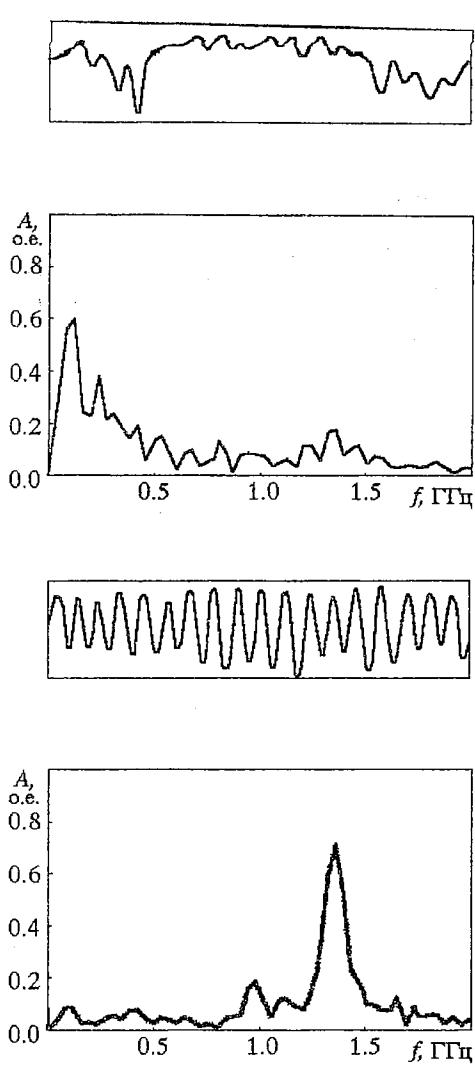


Рис. 17. Осциллограммы сигналов с зонда 8 длительностью развертки 13 нс (а, в) и соответствующие мгновенные спектры (б, г), полученные с задержкой относительно переднего фронта импульса тока в 0.5 мкс (а, б) и 6 мкс (в, г). Масштаб изменения амплитуды для приведенных спектров одинаков, ускоряющее напряжение $U = 8$ кВ; магнитное поле $B_0 = 2.3$ Тл; ток пучка $I = 8$ А; коэффициент перемagnичивания $B_0/B_k = 25$

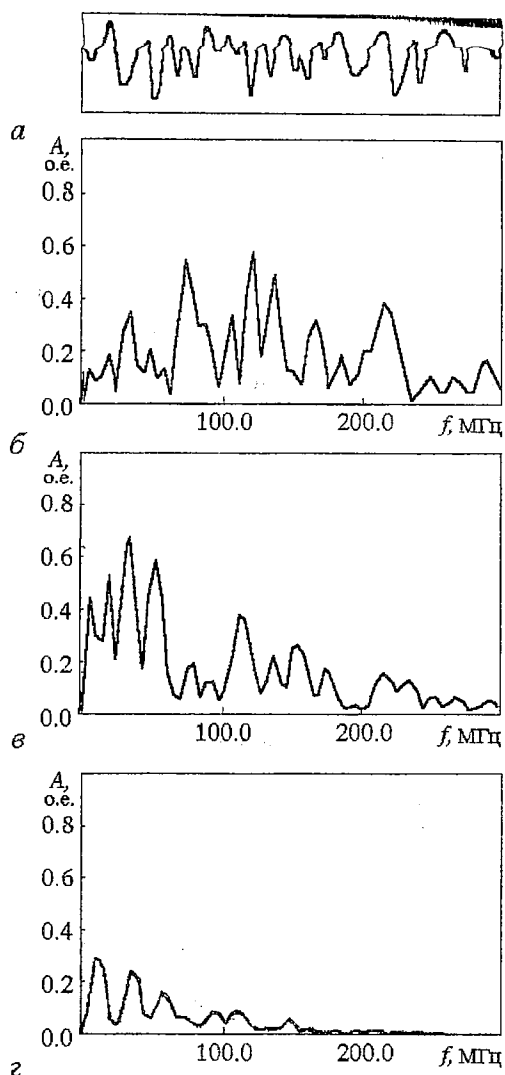


Рис. 18. Типичная осциллограмма сигнала длительностью развертки 100 нс (а) и мгновенные спектры в низкочастотной области (б, в, г), полученные с зонда 8 при разном времени задержки относительно переднего фронта импульса тока. Масштаб изменения амплитуды для приведенных спектров одинаков, ускоряющее напряжение $U = 8$ кВ; магнитное поле $B_0 = 2.3$ Тл; ток пучка $I = 8$ А; коэффициент перемagnичивания $B_0/B_k = 25$; время задержки $\Delta t = 0.5$ мкс (а, б), 1 мкс (в), 6 мкс (г)

заряда в ловушке изменений электрического поля (или тока пучка) на фронте импульса ускоряющего электроны напряжения. Учитывая изменение во времени амплитуды сигналов, можно предположить, что зарегистрированные высокочастотные колебания оказывают большее влияние на работу длинноимпульсных устройств. Однако, пока не ясно, оказывают ли существенное влияние на раскачку высокочастотных низкочастотные колебания. Такое воздействие принципиально может быть существенным в начале импульсов.

Описанные пространственно-временные характеристики колебаний объемного заряда получены при фиксированном положении катода МИП. Сравнение сигналов зондов и их изменение с поворотом катода, сопоставление

этих сигналов с видом зависимостей $j_s(\theta)$ и $j_k(\theta)$ свидетельствуют, что характеристики колебаний зависят как от величины плотности тока пучка в ближней от регистрирующего зонда зоне, так и от малых изменений неоднородных полей в системе формирования и транспортировки ВЭП. Возможно, именно с малым неконтролируемым изменением юстировки или эмиссионных характеристик поверхности катода связаны некоторые отличия спектра, отмеченные при переборке деталей прибора. Отличия не затрагивали в целом описанную качественную картину колебательных процессов и проявлялись в небольших ($\leq 10-20\%$) смещениях характерных частот и в изменении стабильности регистрируемых сигналов.

3.3. Релятивистский электронный пучок

Основные исследования РЭП выполнены при токах пучка, не превышающих предельного вакуумного тока [34]. В этих условиях ток РЭП, как известно [7,8], ограничен условиями его отбора с границы катодной плазмы и определяется ее распределением у поверхности катода, а также электрическими полями у границы плазмы. Изменение тока пучка во времени поэтому связано с изменениями площади эмитирующей поверхности и перемещением плазменной границы. На рис.19 показана типичная форма импульса тока РЭП, зарегистрированная по изменению интенсивности рентгеновского излучения с коллектора. Исследованные РЭП отличаются заметной инерционностью нарастания тока. Время нарастания достигало 0.8 мкс.

Поперечная структура РЭП меняется во времени не только из-за движения плазменного источника электронов. При анализе процессов в РЭП приходится учитывать расфокусировку пучка под действием полей пространственного заряда, которые существенно больше, чем в исследованном ВЭП. Как показали проведенные нами ранее эксперименты [12], поперечная структура РЭП существенно меняется в исследованном интервале магнитных полей $0.15 \leq B_r \leq 1.0$ Тл. Пучок имеет кольцевое сечение с толщиной стенки существенно меньше радиуса РЭП только при магнитных полях в канале транспортировки $B_r \geq 0.5$ Тл. Уменьшение поля до 0.35 Тл приводит к приблизительно однородному распределению плотности тока в сечении пучка. Таким образом, измерения при разных магнитных полях позволяют выявить связь колебаний пространственного заряда с поперечной структурой РЭП.

При анализе коллективных процессов в РЭП приходится учитывать и возможные структурные изменения вдоль него. Этим свойственна так называемая нитевидная неустойчивость, проявляющаяся в шнуровании пучка [29,35], так что характеристики сигналов, регистрируемых разнесенными вдоль РЭП зондами, могут отличаться из-за изменения поперечной структуры пучка.

Основные полученные в настоящей работе результаты исследования РЭП приведены на рис. 19-22.

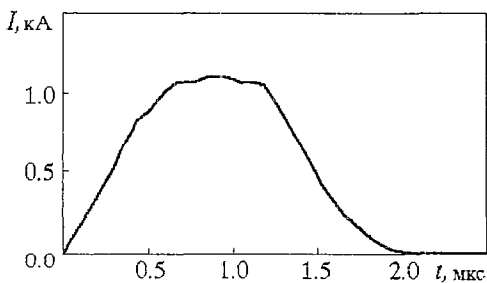


Рис. 19. Форма импульса тока РЭП на коллектор

Колебания пространственного заряда возникают с заметной задержкой $\Delta t \sim 0.4-0.8$ мкс относительно начала импульса тока. Спектры колебаний, регистрируемых обоими зондами, в исследованных режимах качественно подобны. Наиболее стабильны и воспроизводимы колебания вблизи вершины импульса тока. Выделяются пики на дискретных частотах в интервале от 500 до 1500 МГц. Значения частот, соответствующих максимальной

амплитуде колебаний A_m , поскольку отличаются для зондов 9 и 10 (см. рис.3), и близки соответственно к 1400 и 1000 МГц.

На рис. 20 показана типичная реализация сигнала с зонда 10 (см.рис. 20, а) длительностью 6 нс и полученный в результате ее обработки мгновенный спектр (см.рис. 20, б). Отмечены максимальная его амплитуда A^m и соответствующая частота f^m . Амплитуда колебаний увеличивается с ростом тока пучка I и магнитного поля B_T .

Рис. 21 иллюстрирует изменение A^m с I (см.рис. 21, а) и B_T (см.рис. 21, б). Приведены характеристики, полученные в результате обработки спектров более ста реализаций с зонда 10. Разброс значений A^m при фиксированных токе и магнитном поле ограничен пределами заштрихованных зон. Согласно проведенной в холодных измерениях калибровке чувствительности зондов при токе $I = 1100$ А и магнитном поле $B_T = 0.75$ Тл ВЧ поля РЭП вблизи зонда достигают значений порядка 10^6 В/м.

Принципиально наблюдаемые колебания могут быть обусловлены высокочастотной модуляцией тока с катода [8]. Однако, рост их интенсивности во времени, а также с увеличением тока и магнитного поля свидетельствуют, на наш взгляд, о связи колебаний с развитием неустойчивости пространственного заряда РЭП. Рост тока при фиксированном магнитном поле и увеличение магнитного поля при заданном токе повышают концентрацию электронов в кольцевом сечении РЭП, что, как известно (см., например, [28,30]), ведет к росту скорости нарастания волн пространственного заряда, связанных, например, с наличием градиентов скоростей электронов в продольном и в поперечном магнитному полю направлениях.

Отмеченное выше различие частот f^m наиболее интенсивных колебаний разных зондов может быть обусловлено изменением структуры РЭП вдоль его оси, связанным, например, с его шнурованием [35].

Для получения дополнительной информации о закономерностях и механизмах колебательных процессов в РЭП интересно проследить более подробно их изменение в пространстве и во времени.

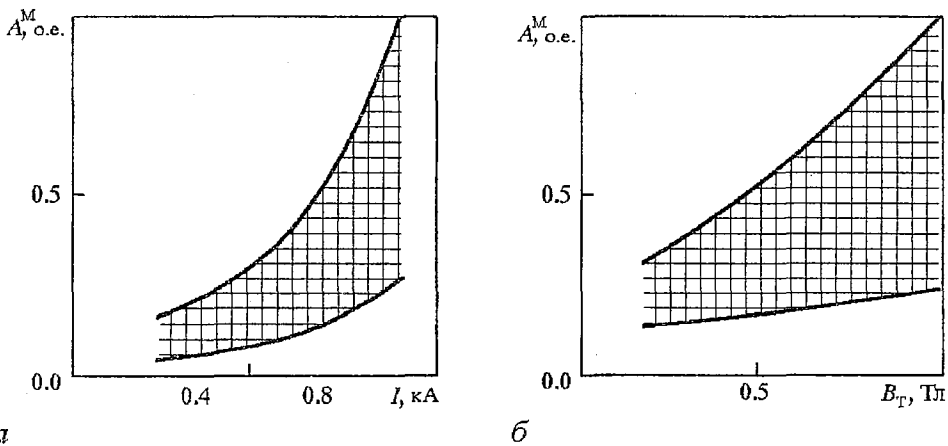


Рис. 21. Зависимости максимальной амплитуды мгновенных спектров A^m от тока РЭП I при $B_T = 0.75$ Тл (а) и от магнитного поля B_T при $I = 1100$ А (б)

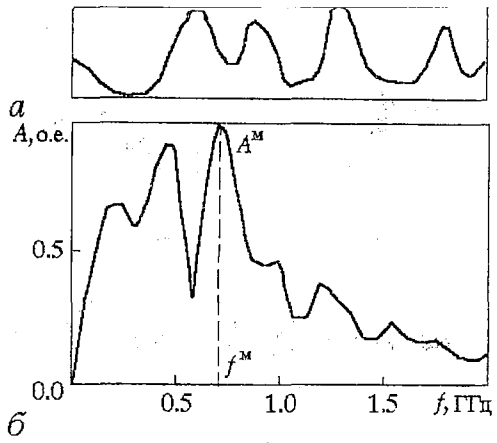


Рис. 20. Типичная реализация сигнала с зонда длительностью 6 нс (а) и полученный в результате ее обработки мгновенный спектр (б). A^m - максимальная амплитуда спектра на частоте f^m

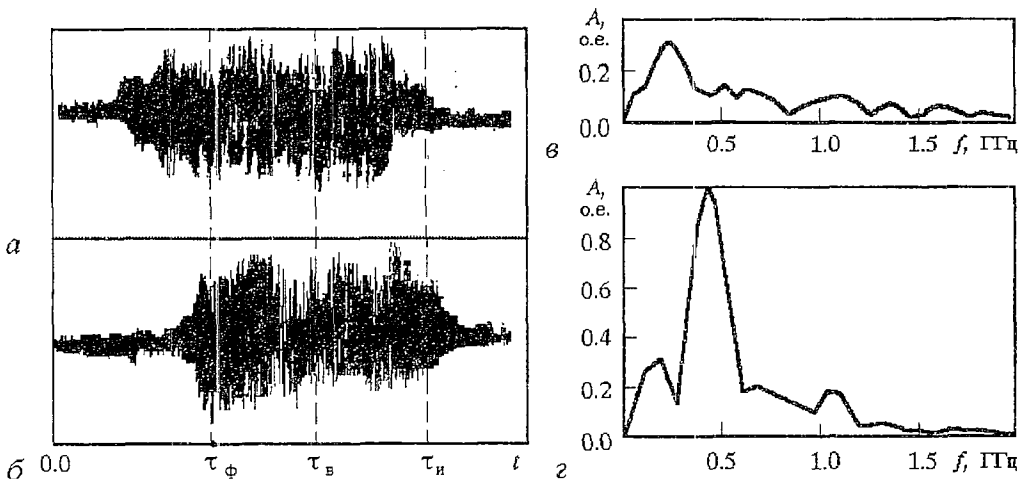


Рис. 22. Типичные характеристики колебательных процессов на разных участках импульса тока, полученные при токе РЭП $I = 1100$ А и магнитном поле $B_T = 0.75$ Тл: a и b - зависимости от времени амплитуды колебаний, регистрируемых зондами 10 и 9, соответственно; v и z - мгновенные спектры колебаний при $t = 2.1$ мкс для зондов 10 и 9, соответственно. Характеристики рисунков (в) и (z) приведены в одинаковом масштабе

Регистрация последовательности реализаций максимальной для осциллографа С7-19 длительности 600 нс позволил восстановить достаточно общую картину изменения интенсивности колебательных процессов в канале транспортировки РЭП в течение времени. На рис. 22 показаны построенные таким образом типичные характеристики амплитуды колебаний для зондов 10 (см.рис. 22, a) и 9 (см.рис. 22, b). Здесь же отмечены начало импульса тока ($t = 0$), конец переднего фронта ($t = \tau_\phi$) и вершины ($t = \tau_v$), а также момент окончания тока пучка ($t = \tau_n$). В разных импульсах хорошо воспроизводятся следующие основные закономерности.

Задержка Δt возникновения интенсивных колебаний различна для зондов 9 и 10. Величина $\Delta t = \Delta t_1$ на зонде 9 (~ 0.6 мкс) заметно больше соответствующего значения Δt_2 (~ 0.4 мкс) зонда 10. Сравнение полученных одновременно мгновенных спектров сигналов с зондов 9 и 10 свидетельствует о конвективной природе нарастания колебаний, так как на фронте импульса они усиливаются с удалением от катода. Приблизительное равенство максимальных значений амплитуд сигналов на вершине импульса говорит о существовании эффективного нелинейного механизма ограничения их интенсивности.

На заднем фронте импульса амплитуда колебаний падает, но высокочастотные сигналы удается зарегистрировать на обоих зондах и по окончании тока пучка ($t > 2$ мкс). Спад интенсивности колебаний происходит быстрее на зонде 10, чем на зонде 9.

Колебания, регистрируемые зондами при $t > 2$ мкс, могут быть связаны с процессами в распадающейся по окончании импульса плазме. Анализ соответствующих реализаций сигналов свидетельствует, что в спектре распадающейся плазмы преобладают колебания на одной выделенной частоте (рис. 22, v , z). Приняв, что она равна электронной плазменной частоте, можно определить концепцию плазмы n_n . Проведенные таким образом оценки показывают, что вблизи зонда 9 $n_n \sim 10^9$ см⁻³, а у зонда 10 эта величина приблизительно на порядок меньше.

Поскольку «плазменные» колебания при $t > 2$ мкс уменьшаются по амплитуде с удалением от катода, можно предположить, что они связаны с движением катодной плазмы в сторону коллектора. Полученные данные позволяют оценить среднюю скорость движения катодной плазмы в канале транспортировки $\sim 2 \cdot 4 \cdot 10^7$ см/с, что согласуется по порядку величины с литературными данными [7,8].

Колебания распадающейся плазмы преобладают на заднем фронте импульса тока пучка. Как уже отмечалось, спектры сигналов на переднем фронте и вершине импульса отличны от «плазменных». Тем не менее, нельзя на данном этапе отрицать возможность существенного влияния эффектов в прикатодной плазме и на развитие колебаний пространственного заряда РЭП.

Итак, проведенные исследования показали, что в РЭП, как и в ВЭП, развитие колебаний пространственного заряда носит конвективный (сносовый) характер. Можно предположить, что здесь, как и в усилителе магнетронного типа, развитие колебаний связано с диокотронной и двухпучковой неустойчивостями. Необходимые для этого азимутальные и продольные градиенты скоростей типичны для РЭП. Однако, уже имеющиеся данные говорят о большой роли плазменных эффектов в возбуждении и изменении во времени характеристик колебаний. Одной из важнейших задач будущих исследований является, видимо, конкретизация этой роли.

При исследовании РЭП, как и в магнетронном усилителе, были обнаружены режимы, в которых колебания пространственного заряда носят характер стационарных волн. Измерения в разовых импульсах не позволили установить закономерности их разрушения. Можно только констатировать, что в большинстве случаев регистрируются менее упорядоченные сигналы.

3.4. Длинноимпульсный электронный пучок сплошного сечения

При исследовании длинноимпульсного СП были выявлены колебания на частотах, которые существенно меньше частот описанных в предыдущих разделах электронных колебаний. Эти низкочастотные колебания влияли на транспортировку пучка и возникали, если ток коллектора превышал некоторое пороговое значение $I_k = I_k^p$.

При магнитном поле в канале транспортировки $B_T \approx 0.5$ Тл, независимо от величины поля B_K у коллектора, пороговый ток $I_k^p \approx 2.0$ А. Рис. 23-25

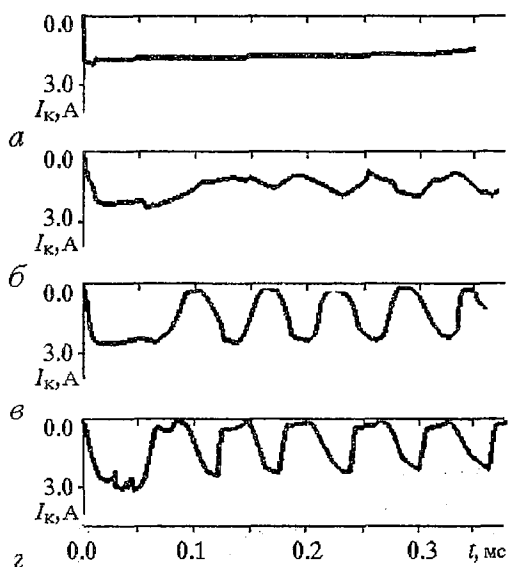


Рис. 23. Изменение во времени коллекторного тока при разных его амплитудных значениях: $I_k = 1.8$ А (а); 2.2 А (б); 2.5 А (в); 3.0 А (г). Ускоряющее электроны напряжение 30 кВ, магнитное поле в канале транспортировки $B_T = 0.5$ Тл, поле у коллектора $B_K = 0$

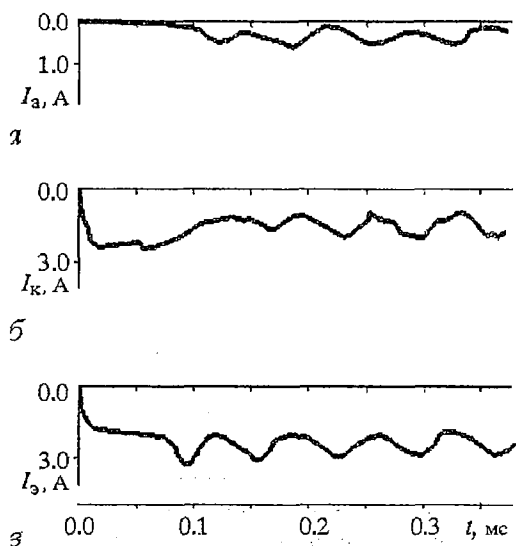


Рис. 24. Изменение во времени токов анода I_a (а), коллектора I_k (б) и электрода 4 (рис. 4) I_4 (в) при коллекторном токе, близком по амплитуде к пороговому ($I_k = 2.2$ А); ускоряющее электроны напряжение 30 кВ, магнитное поле в канале транспортировки $B_T = 0.5$ Тл, поле у коллектора $B_K = 0$

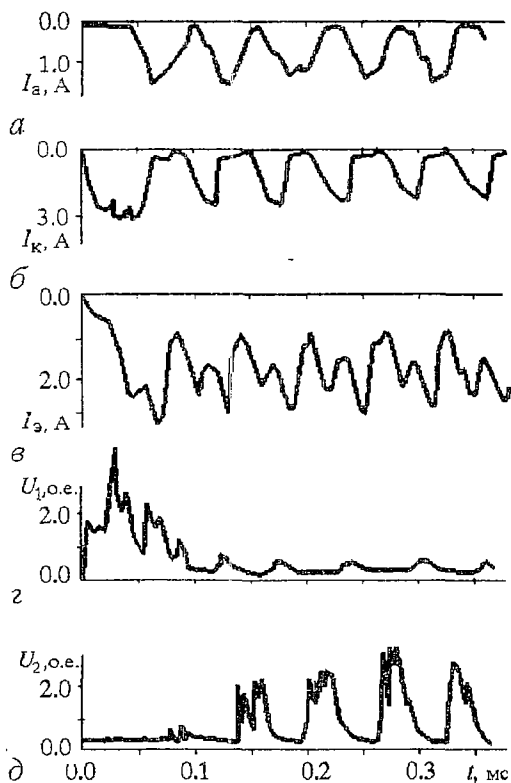


Рис. 25. Изменение во времени токов анода I_a (а), коллектора I_k (б) и электрода 4 I_3 (в), а также световых сигналов U_1 с датчика 11 (з) и U_2 с датчика 12 (д); характеристики получены при амплитудном значении коллекторного тока $I_k=3.0$ А, ускоряющем электронах напряжении 30 кВ, магнитном поле в канале транспортировки $B_T = 0.5$ Тл, поле у коллектора $B_K = 0$

бомбардируемая электронами пучка поверхность секции канала транспортировки вблизи магнитного экрана 3 (см.рис.4). Такая бомбардировка отсутствует при выключенном магнитном поле B_T и, возможно, связана с отражением электронов пучка от магнитной пробки на участке неадиабатического изменения - магнитного поля у экрана. С учетом бомбардировки можно предложить релаксационный механизм модуляции, учитывающий влияние плазмы на прохождение пучка в этой области. Видимо, рождение плотной плазмы у электрода 4, воздействуя на электронно-оптические свойства системы транспортировки, влияет на прохождение пучка и уменьшает бомбардировку этого электрода. В результате падает скорость образования плазмы, снова усиливаются токопрохождение и бомбардировка соответствующего электрода и так далее. Практическая неизменность периода описанного релаксационного процесса в широком интервале токов I_k (см. рис. 23-25) свидетельствует, видимо, о том, что он определяется, в основном, не запаздыванием начала генерации плазмы по отношению к моменту максимальной интенсивности бомбардировки электрода, а временем движения плазмы от образующей ее поверхности к участку канала, где присутствие плазмы сильнее всего влияет на параметры электронного пучка.

При фокусировке электронного пучка на коллекторе полем B_K до 1.8 Тл он становится мощным источником вторичных частиц и плазмы. Влияние этой плазмы на транспортировку СП велико и, как показано в [36], проявляется в многократном снижении достигающего мишени тока быстрых электронов через несколько сотен микросекунд после начала импульса. Однако, влияние компрессии

демонстрируют изменение во времени токов коллектора (I_k), анода пучки (I_a), электрода 4 (I_3), а также световых сигналов U_1 и U_2 с датчиков 11 и 12 (см.рис. 4). Эти характеристики получены при $B_K=0$ и ускоряющем электронах напряжении 30 кВ.

Если ток коллектора превышает пороговое значение, но близок к нему, его изменение (см.рис.23,б), а также изменение других сигналов (см.рис.24), близко к гармоническому и происходит на частоте $\sim 15-20$ кГц. С ростом I_k глубина модуляции увеличивается (см. рис. 23, в), достигая почти 100% при $I_k \sim 2.5$ А. Дальнейшее повышение амплитуды тока сопровождается искривлением формы всех сигналов от синусоидальной (см. рис. 23, г и рис. 25). При этом становятся заметными различия по форме разных сигналов.

Одновременное с токами периодическое изменение световых сигналов говорит, видимо, о том, что описанная модуляция обусловлена плазменными процессами в канале транспортировки. Наблюдаемый в припороговых режимах сдвиг фазы характеристик (см.рис.24) объясняется в предположении о том, что изменения сигналов (токов и величины U_2) обусловлены движением плазмы вдоль оси системы со скоростью $\sim 10^5$ см/с. Источником плазмы может быть

у коллектора практически не сказывается на характеристиках описанного выше коллективного процесса.

Заключение

Подводя итоги настоящей работы, отметим важнейшие закономерности коллективных процессов в исследованных электронных потоках.

Как показали проведенные измерения, колебания пространственного заряда наиболее интенсивны в области частот $f_{\text{пр}} \leq f \leq 10 f_{\text{пр}}$, где $f_{\text{пр}}$ - редуцированная плазменная частота.

Выделяются два основных типа коллективных процессов. Прежде всего, это колебания, связанные с движением группы долгоживущих электронов, удерживаемых в ограниченной области пространства. Типичны в этом смысле колебания в магнетронном усилителе, где пространственный заряд удерживается не только в поперечном магнитном поле, но и в продольном направлении. С движением долгоживущих электронов связаны и колебания на участке неоднородного магнитного поля (в ловушке между катодом и пробкой магнитного поля) в ВЭП. Хотя с СП электронные колебания специально не исследованы, видимо, и там отражение электронов от магнитной пробки играет существенную роль. Амплитудно-частотные характеристики колебаний долгоживущих электронов определяются размерами области их локализации и распределением полей в ней, а также эмиссионными характеристиками источника электронов - катода. На существование же ловушечных колебаний в ВЭП влияет, кроме того, изменение ускоряющего электроны напряжения на фронте импульса.

Колебания второго типа, связанные с развитием волн пространственного заряда, реализуются в электронных пучках на участке их дрейфа. Эти колебания имеют конвективную (сносовую) природу. Поэтому в сравнительно коротких вдоль оси системах они регистрируются только при достаточно больших токах (например, в ВЭП, когда ток пучка превышает ~ 6 А). В РЭП при токах ~ 1 кА отмечено нелинейное ограничение роста амплитуды колебаний на расстояниях от катода $\sim 40-80$ см.

Возникновение волн пространственного заряда в пучках связано, видимо, не только с диокотронной неустойчивостью, обусловленной градиентом азимутальных скоростей электродов, но и взаимодействием электронных потоков, имеющих различные продольные скорости (неустойчивостью типа двухпучковой). Поэтому на развитие волн влияют неоднородности эмиссии по поверхности катода в системе формирования ВЭП, а также катодной плазмы взрывоэмиссионного катода релятивистской системы.

В электронных пучках (ВЭП и РЭП) прослеживается увеличение скорости нарастания и амплитуды колебаний с повышением концентрации электронов. В РЭП выявлено изменение вдоль пучка частоты установившихся (ограниченных нелинейными процессами) колебаний, обусловленное, видимо, изменением его структуры.

В спектре колебаний пространственного заряда всех исследованных электронных систем выделяются дискретные пики повышенной интенсивности. Такой вид спектра объясняется не только существованием и взаимным влиянием разных видов колебаний (например, аксиальных и азимутальных колебаний в УМ и РЭП, ловушечных колебаний и волн пространственного заряда в ВЭП), но и воздействием на коллективные процессы своеобразной электродинамической структуры, которую формируют ограничивающие электронный поток электроды.

Использованная методика наблюдения колебательных процессов позволила выявить типичные для мощных электронных устройств изменения степени упорядоченности автоколебаний пространственного заряда. В некоторых режимах работы УМ и РЭП обнаружены стационарные волны. Разрушение стационарных волн, как установлено при исследовании УМ, может быть обусловлено конкуренцией различных структур сгруппированного пространственного заряда. Это разрушение сопровождается хаотизацией спектра. Изменения степени

упорядочения происходят по сценариям, типичным для стохастических процессов в нелинейных динамических системах. Стохастизация колебаний или, наоборот, их упорядочение могут быть произведены с помощью внешнего гармонического ВЧ сигнала. Введение гармонического сигнала достаточно большой амплитуды позволяет, кроме того, заметно изменять соотношения амплитуд составляющих спектра.

При наблюдении временных реализаций выявлена эволюция колебаний во времени.

Исследования пучков с высоким уровнем переносимой удельной энергии (РЭП и СП) позволило выявить влияние на коллективные процессы плазмы и потоков вторичных частиц, рождающихся на бомбардируемых электронами электродах. В РЭП обнаружено влияние на колебания катодной плазмы. Специфические релаксационные плазменные процессы выявлены в СП, где периодические низкочастотные изменения токов на ограничивающие электронный пучок электроды обусловлены влиянием меняющейся во времени прозрачности плазмы на распространение потока электронов.

Полученные в работе новые результаты представляют, с нашей точки зрения, интерес в связи с тем, что существенно дополняют и уточняют картину коллективных явлений в удерживаемых магнитными полями электронных потоках высокой плотности.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Бондарцов Г.И., Соминский Г.Г. // ЖТФ. 1975. № 8. С.1654.
3. Бондарцов Г.И., Соминский Г.Г., Фридрихов С.А. // Письма в ЖТФ. 1975. № 19. С.895.
4. Соминский Г.Г. // Лекции по электронике СВЧ (4-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн.3. Саратов: Изд-во СГУ, 1978. С. 119.
5. Флягин В.А., Цимринг Ш.Е. // Проблемы физической электроники. Л.: Изд. ЛИЯФ, 1987. С. 122.
6. Цимринг Ш.Е. // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике (9-я зимняя школа-семинар). Саратов: Изд-во СГУ, 1993. С. 11.
7. Релятивистская высокочастотная электроника / Отв.ред. А.В.Гапонов-Грехов. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1979.
8. Бугаев С.П., Канавец В.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А. Релятивистские многоволновые СВЧ-генераторы. Новосибирск: Наука, СО, 1991.
9. Бондарь Ю.Ф., Заворотный С.И., Ипатов А.Л. и др. // Физика плазмы. 1982. Т. 8, № 5. С. 941.
10. Левчук С.А., Соминский Г.Г., Воскресенский С.В. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, № 13. С. 1194.
11. Архипов А.В., Богданов Л.Ю., Воскресенский С.В. и др. // Проблемы физической электроники. Л.: Изд-во ЛИЯФ АН СССР, 1989. С. 28.
12. Богданов Л.Ю., Воскресенский С.В., Соминский Г.Г. // Проблемы физической электроники. Л.: Изд-во. ЛИЯФ АН СССР, 1991. С. 102.
13. Богданов Л.Ю., Соминский Г.Г. // ЖТФ. В печати. 1995.
14. Лукаш О.И., Соминский Г.Г. // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 11. С. 160.
15. Малюгин В.И., Соминский Г.Г. // ЖТФ. 1974. Т. 44, № 7. С. 1511.
16. Соминский Г.Г. // ЖТФ. 1968. Т. 38, № 4. С. 663.
17. Болотов В.Е., Зайцев Н.И., Кораблев Г.С. и др. // Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6, № 16. С. 1013.
18. Лукаш О.И., Цыбин О.Ю. // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике (9-я зимняя школа-семинар). Саратов: Изд-во СГУ, 1993. С. 20.
19. Тычинский В.П., Деркач Ю.Т. // РЭ. 1956. Т. 1, № 2. С. 233; № 3. С. 344.
20. Кузнецов М.И., Бербасов В.А., Нечаев В.Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3, № 1. С. 102; № 2. С. 290.
21. Соминский Г.Г., Терехин Д.К., Фридрихов С.А. // ЖТФ. 1964. Т. 34, № 9. С. 1666.

22. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. // Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
23. Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.В. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. Саратов: Изд-во СГУ, 1962.
24. Завьялова Т.А., Уткин К.Г., Чепарухин В.В. // Физическая электроника. Труды ЛПИ. 1970. № 311. С. 159.
25. Блейвас И.М., Моносов Г.Г., Соминский Г.Г., Хомич Р.А. // Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ. 1984. № 4.
26. Гладун А.Д., Дунаев А.С., Лейман А.Г. // Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ. 1968. № 10. С. 48.
27. Дэвидсон Р. Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 215 с.
28. Нечаев В.Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 9. С. 1067.
29. Siambis J.G., Uhm H.S. // Phys. Fluids. 1982. Vol. 25, № 3. P.566.
30. Mostrom M.A., Jones M.E. // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26, № 6. P.1649.
31. Buneman O., Barnes C.W., Green J.C., Nielsen D.E. // J.Comput. Phys. 1980. Vol. 38. P.1383.
32. Гольденберг А.Л., Лыгин В.К., Мануилов В.Н. и др. // Гиротрон. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981. С. 86.
33. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1971.
34. Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Б., Рухлин В.Г. // Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1980. С. 168.
35. Иванов В.С., Кременцов С.И., Райзер М.Д. и др. // Физика плазмы. 1981. Т. 7, № 4. С. 784.
36. Архипов А.В., Соминский Г.Г. // Письма в ЖТФ. 1994. Т.20, № 11. С.6.

Санкт-Петербургский
технический университет

Поступила в редакцию 4.10.94
после переработки 18.01.95

INVESTIGATION OF SPACE CHARGE OSCILLATIONS AND STRUCTURE FORMATION IN MAGNETICALLY CONFINED ELECTRON BEAMS

Part II

A.V. Arhipov, L.Yu. Bogdanov, S.V. Voskresensky, S.A. Levchuk,
O.I. Louksha, G.G. Sominski

In a number of very different systems with magnetically confined electron beams «momentary» spectra of space charge oscillations had been experimentally obtained, as well as certain information on spatial location and structure of these oscillations. Spectra with different degree of disorder were registered, and some factors responsible for alteration of this degree were found. Influence of an external signal upon electron collective behaviour has also been studied.



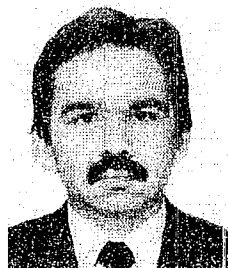
Архипов Александр Викторович - родился в 1963 году в Ленинграде, окончил Ленинградский политехнический институт (1986). Сейчас - инженер Санкт-Петербургского технического университета (СПбГТУ), автор 9 научных работ. Область научных интересов - плотные электронные потоки и связанные с ними плазменные образования.



Богданов Леонид Юрьевич - родился в 1960 году в Ленинграде, окончил ЛПИ (1984)г. Инженер СПбГТУ, автор 9 научных работ. Область научных интересов - диагностика релятивистских электронных потоков.



Воскресенский Сергей Валерьевич - родился в 1965 году в г. Мурманске, окончил ЛПИ в 1988 г. Инженер СПбГТУ. Автор 5 печатных работ. Область научных интересов - экспериментальное исследование сильноточных электронных систем.



Левчук Сергей Анатольевич - родился в 1953 году. Окончил ЛПИ (1977), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1989). Доцент СПбГТУ. Область научных интересов - диагностика электронных потоков, стохастические процессы.



Луکشя Олег Игоревич - родился в 1961 году в Ленинграде, окончил ЛПИ (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992). Доцент СПбГТУ. Область научных интересов - динамика и структура пространственного заряда в сильноточных электронных устройствах. Автор 17 научных публикаций.



Соминский Геннадий Гурьевич - родился в 1935 году в Ленинграде, окончил ЛПИ (1960), защитил кандидатскую диссертацию (1967) и докторскую (1984). Профессор СПбГТУ. Автор около 100 печатных работ. Область научных интересов: эмиссионная и СВЧ электроника, экспериментальное исследование потоков заряженных части и плазмы.



РЕКОНСТРУКЦИЯ СТРУКТУР ТОКА ПРИ РАССЕЙАНИИ ЭЛЕКТРОНОВ НА ИОНИЗОВАННЫХ ДОНОРАХ И ФОНОНАХ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

А.Л. Санин, Ю.Л. Ермолаев

На основе моментов уравнения Больцмана проведен анализ электронного отклика в GaAs n-типа с пространственно-периодической модуляцией плотности доноров. При определенном соотношении периодов модуляции и собственных колебаний возможны интенсивные пространственные резонансы. Выполнены численные расчеты, показывающие влияние различных механизмов рассеяния и их совместного действия на резонансы. При пороговых условиях доминирует механизм взаимодействия с продольными оптическими фононами, действующий в пределах части периода, и происходит ограничение амплитуды пространственных колебаний. Проанализирована генерация субгармоник и высших гармоник, характеризующая нелинейную динамику электронов. Модуляция синхронизирует процессы формирования структур и приводит к их реконструкции. Мелкомасштабные релаксационные колебания при слабых неоднородностях стохастизируют структуры тока. Представлены функциональные зависимости электронной плотности от координаты, фазовые портреты и фурье-спектры моделируемых процессов.

Введение

Детальное изучение динамических электронных структур в полупроводнике с пространственно-периодической модуляцией плотности доноров и совместном действии разных механизмов рассеяния мотивируется проблемами самоорганизации и управления электронными потоками. В статье представлены результаты исследования диссипативных структур, явлений пространственной синхронизации и генерации мелкомасштабных стохастических колебаний. Проведен качественный и численный анализ решений самосогласованных уравнений гидродинамики и электрического поля с учетом более сложных моделей рассеяния, чем в [1,2].

1. Транспортные уравнения

Транспорт баллистических электронов рассмотрим в ограниченной области $0 < x < L$. Полагаем, что поток электронов инжектируется в эту область через плоскость $x=0$, в которой он характеризуется плотностью n_b и скоростью направленного движения v_b . В области $x > 0$ эти переменные равны n, v и для одномерного транспорта зависят от одной координаты x . Динамические свойства потока опишем в приближении холодных электронов, полагая, что тепловая

скорость и соответствующая электронная температура малы. Для анализа транспорта баллистических электронов широко применяются гидродинамические уравнения в виде первых двух моментов уравнения Больцмана [3-5]. Следуя [6], стационарные транспортные уравнения можно представить в виде

$$d(nv)/dx = 0, \quad (1)$$

$$v dv/dx = -e/m E + 1/m R. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) приняты обозначения: E - напряженность электрического поля; $-e$, m - заряд и эффективная масса электрона; R - средняя сила трения, приходящаяся на один электрон. Величина R может быть определена как

$$R = 1/n \int m(-u_x)/\tau_p(\epsilon) f(\mathbf{u})(d\mathbf{u}). \quad (3)$$

Здесь величина $\tau_p(\epsilon)$ - время релаксации импульса, $\epsilon = (m/2)(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$; $f(\mathbf{u})$ - функция распределения электронов по скоростям; u_x, u_y, u_z - компоненты скорости \mathbf{u} отдельного электрона; $(d\mathbf{u}) = du_x du_y du_z$ - элемент объема в пространстве скоростей. При малой дисперсии импульса функцию распределения электронов по скоростям можно аппроксимировать δ -функцией

$$f(\mathbf{u}) = n\delta(u_x - v)\delta(u_y)\delta(u_z). \quad (4)$$

Систему уравнений (1),(2) рассмотрим совместно с уравнением для электрического поля

$$\epsilon dE/dx = -4\pi e(n - n_d), \quad n_d = n_d^{(0)} + n_d^{(1)}(x), \quad (5)$$

где ϵ - диэлектрическая постоянная, n_d - плотность доноров. Величина $n_d^{(0)}$ характеризует однородную компоненту плотности, а $n_d^{(1)}(x)$ - пространственную модуляцию. Для рассматриваемых нами режимов движения полагаем, что $n_d^{(1)}(x) = n_m^{(1)} \cos(k_0 x)$; $n_m^{(1)}$, $2\pi/k_0$ - амплитуда и период модуляции.

Интегрирование (1) приводит к алгебраическому уравнению

$$nv = n_b v_b.$$

Перейдем от размерных величин $n, v, E, x, L, d/dx$ к нормированным $N, V, \mathcal{E}, \zeta, \zeta_L, d/d\zeta$, используя соотношения

$$N = n/n_b, \quad V = v/v_b, \quad \mathcal{E} = E/E_0, \quad \zeta = k_p x, \quad \zeta_L = k_p L, \quad d/d\zeta = k_p^{-1} d/dx,$$

при этом $E_0 = 4\pi e n_b / (\epsilon k_p)$, $k_p = \omega_p / v_b$, $\omega_p = [4\pi e^2 n_b / (\epsilon m)]^{1/2}$. Плазменный масштаб определяем как $\lambda = 2\pi / k_p$.

Выражение R/m имеет размерность ускорения и может быть преобразовано к нормированной величине η_R при помощи соотношения $\eta_R = -R / (m k_p v_b^2)$. Знак «минус» вводим для удобства и учитываем впоследствии. В результате уравнения (1), (2), (5) приводятся к виду

$$NV = 1, \quad (6)$$

$$V dV/d\zeta = -\mathcal{E} - \eta_R, \quad (7)$$

$$d\mathcal{E}/d\zeta = -N + N_d, \quad N_d = \gamma [1 + n \cos(r\zeta)]. \quad (8)$$

В уравнении (8) $\gamma = n_d^{(0)} / n_b$, $n = n_m^{(1)} / n_d^{(0)}$, $r = k_0 / k_p$. Для слабых неоднородностей $n \ll 1$. При $r=1$ период модуляции равен плазменному масштабу.

Уравнение (7) описывает движение в классическом пределе. Основываясь на

уравнениях квантовой гидродинамики (моментах уравнения Шрёдингера - Больцмана [7,8]), можно сформулировать условие игнорирования квантовых эффектов: $(1/48)[\hbar\omega_p/(mv_b^2/2)]^2 \ll 1$. Здесь \hbar - постоянная Планка.

Граничные условия для N , V , \mathcal{E} в плоскости $\zeta=0$ имеют вид $N(0)=1$, $V(0)=1$, $\mathcal{E}(0)=\mathcal{E}_b$. Анализ решений системы уравнений (6)-(8) при заданных граничных условиях выполняется для режимов движения с положительными скоростями. Для изучения свойств решений и фурье-спектров интервалы расчета реализаций ζ_L должны быть выбраны много большими, чем $2\pi/r$.

2. Колебания и структуры

Переменные N , V , \mathcal{E} зависят друг от друга. Исключая N , \mathcal{E} из уравнений (6)-(8), можно получить уравнение для скорости

$$V^2(d^2V/d\zeta^2) + V(dV/d\zeta)^2 + V(d\eta_R/dV)dV/d\zeta + \gamma(1+h\cos(r\zeta))V = 1. \quad (9)$$

В уравнении (9) неавтономный член $\gamma h \cos(r\zeta)V$ определяет действие гармонической модуляции плотности доноров на электроны. Диссипацию характеризует производная $d\eta_R/dV$. В моделях, учитывающих зависимость времени релаксации от энергии электронов, производная может быть знакопеременной.

Рассмотрим основные свойства решений уравнения (9). Для однородного полупроводника ($h=0$) уравнение (9) становится автономным, его решения зависят от значений $d\eta_R/dV$. Если $d\eta_R/dV=0$, то в системе отсутствует диссипация и она становится консервативной.

В приближении холодных электронов автоматически выполняется условие превышения скорости направленного движения V по отношению к тепловой скорости. Как известно [1], при выполнении этого критического условия в электронном потоке возможны собственные колебания. Эти колебания можно отнести к неравновесным процессам. Форма колебаний зависит от нелинейности, а период - от свойств самой системы. Этой своей спецификой они отличаются от других колебаний, и их можно назвать структурами консервативной системы.

Если распределение доноров однородное, но величина $d\eta_R/dV$ знакопеременна, то также оказывается возможной генерация незатухающих собственных колебаний. Это - диссипативные структуры неконсервативной системы. В неконсервативной системе возможны и другие режимы: собственные колебания с затуханием, а также аperiodическая релаксация граничных возмущений потока. Наряду с решениями, зависящими от координаты, реализуются и однородные решения.

Полагая $h=0$ и $dV/d\zeta=dN/d\zeta=d\mathcal{E}/d\zeta=0$, из уравнений (6)-(8) получаем уравнения, описывающие равновесное (однородное) состояние системы. Переменные N , V , \mathcal{E} , удовлетворяющие этим уравнениям, обозначим $N^{(eq)}$, $V^{(eq)}$, $\mathcal{E}^{(eq)}$. Они определяются следующим образом:

$$N^{(eq)} = \gamma, \quad V^{(eq)} = \gamma^{-1}, \quad \mathcal{E}^{(eq)} = -\eta_R(V^{(eq)}). \quad (10)$$

Это однородные решения для неограниченной системы. Если $\gamma=1$, $\mathcal{E}_b=\mathcal{E}^{(eq)}$ (то есть возмущение равновесного состояния на границе отсутствует), то решения остаются также однородными и для всей полуограниченной системы ($0 \leq \zeta < \infty$). При $\gamma \neq 1$, $\mathcal{E}_b \neq \mathcal{E}^{(eq)}$ возможно развитие отклонений от однородного состояния в области $\zeta > 0$.

В неоднородном полупроводнике, когда имеет место пространственно-периодическая модуляция плотности доноров ($h \neq 0$), возможны резонансы, процессы синхронизации и мелкомасштабные колебания. Резонансы и процессы синхронизации являются условиями самоорганизации структур.

Характер решений неавтономного уравнения (9) также существенно зависит от диссипативного коэффициента $d\eta_R/dV$. Если он равен нулю, то уравнение (9) описывает неавтономную консервативную систему. При соблюдении резонансных условий $l\gamma^{3/2}=r$, $l=1,2$ возможны интенсивные колебания, обусловленные резонансами на внешней неоднородности [1]. Характерная особенность этих колебаний - секулярный рост их амплитуды при увеличении ζ . При наличии слабой диссипации резонансные решения (9) также могут характеризоваться большими амплитудами. С увеличением $d\eta_R/dV$ амплитуда колебаний уменьшается и происходит ограничение ее роста. Диссипативный коэффициент может иметь значительную величину на определенной части периода колебаний и разный знак в разных его частях. Используя однородные решения (10), можно выполнить приближенный анализ исходных уравнений (6)-(8) или (9). Решения для N , V можно представить в виде

$$N = N^{(eq)} + N^{(1)}(\zeta), \quad V = V^{(eq)} + V^{(1)}(\zeta). \quad (11)$$

Полагая переменные $N^{(1)}(\zeta)$, $V^{(1)}(\zeta)$ малыми по сравнению с $N^{(eq)}$, $V^{(eq)}$, вместо (9) можно получить упрощенное линейаризованное уравнение. В этом приближении диссипативный коэффициент перед первой производной $dV^{(1)}/d\zeta$ становится постоянным и принимает вид $d\eta_R/dV^{(eq)}$, а коэффициент перед $V^{(1)}(\zeta)$ равен γ^3 . Неавтономный член распадается на слагаемые $\gamma^2 h \cos(r\zeta)$ и $\gamma^3 h V^{(1)}(\zeta) \cos(r\zeta)$. Первое из них является аналогом вынуждающей силы, второе характеризует параметрическое изменение собственной частоты. Решения имеют сходство со случаем простых моделей рассеяния [1].

В уравнении (2) тепловое движение игнорируется. Его учет приводит к изменению частоты q_s собственных колебаний. Зависимость электронной температуры от ζ можно установить из трехмоментных гидродинамических уравнений [5,6]. Как показывают расчеты, электронная температура медленно увеличивается (в среднем) вдоль потока, поэтому локальное значение q_s также возрастает. Пусть разность $\Delta=q_s-r$ определяет расстройку от резонанса. При фиксированной величине r эта расстройка будет увеличиваться с ростом координаты ζ . В некоторой точке $\zeta=\zeta_r$ расстройка может достигнуть критической величины Δ_r , при которой условия резонанса нарушатся. Если Δ продолжает расти, то в области $\zeta>\zeta_r$ возникнут биения. В модели, не учитывающей указанные тепловые эффекты, для возможности игнорирования расстройки от резонанса транспортная длина ζ_L выбиралась согласно требованию $\Delta<\Delta_r$. Как показали расчеты, при этом на длине ζ_L все же может укладываться значительное число периодов $2\pi/r$.

3. Нелинейный отклик и синхронизация

Колебания электронов при рассеянии на фононах и ионизованных донорах рассматриваем для p-GaAs. Полагаем, что транспорт электронов происходит в центральной (Γ) долине зоны проводимости, а междолинные переходы могут быть игнорированы.

При совместном действии нескольких различных механизмов рассеяния в формуле (7) и последующих диссипативный член надо представить в виде суммы $\eta_R^\Sigma = \sum_i \eta_R^i$. Величина η_R^i соответствует конкретному механизму рассеяния. В расчетах использовались формулы для времен релаксаций импульса $\tau_p(\epsilon)$, приведенные в [9,10]. Конкретизация выражений для $\tau_p(\epsilon)$, а также подстановка $f(\mathbf{u})$ в виде (4) в (3) и переход к нормированным величинам позволяют записать η_R^i для каждого механизма рассеяния и суммарную величину η_R^Σ .

Для рассеяния на продольных оптических фононах

$$\eta_R^{L0} = \eta_p^{L0} \{ \exp(\mathcal{J}_D/\mathcal{J}_L) - 1 \}^{-1} \{ (V_D^2/V_D^2 + 1)^{1/2} - (V_D^2/V_D^2)^{1/2} \} + \Theta \exp(\mathcal{J}_D/\mathcal{J}_L) \{ (1 - V_D^2/V^2)^{1/2} + (V_D^2/V^2) \text{Arsh}(V^2/V_D^2 - 1)^{1/2} \},$$

где $\eta_p^{L0} = (\omega_p \tau_p^{L0})^{-1}$, $(\tau_p^{L0})^{-1} = (2mk_B T_D)^{1/2} / (eE_p)$, $v_D = (2k_B T_D / m)^{1/2}$,
 $\mathcal{J}_D = k_B T_D / (m v_b^2)$, $\mathcal{J}_L = k_B T_L / (m v_b^2)$, $V_D = v_D / v_b$.

Здесь T_D , T_L - температуры Дебая и решетки; k_B - постоянная Больцмана, E_p - эффективная напряженность электрического поля. Величина V_D - нормированная пороговая скорость. Функция $\Theta(V, V_D)$ принимает значение 1 для $V \geq V_D$ и 0 для $V < V_D$.

При взаимодействии через оптический деформационный потенциал

$$\eta_R^0 = \eta_p^0 \{ \exp(\mathcal{J}_D/\mathcal{J}_L) - 1 \}^{-1} [(V^2/V_D^2 + 1)^{1/2} + \Theta \exp(\mathcal{J}_D/\mathcal{J}_L) (V^2/V_D^2 - 1)^{1/2}] V,$$

где $\eta_p^0 = (\omega_p \tau_p^0)^{-1}$, $(\tau_p^0)^{-1} = D^2 m^{3/2} / [2^{1/2} \pi \rho \hbar^2 (k_B T_D)^{1/2}]$, ρ - плотность решетки, D - константа оптического деформационного потенциала.

Для рассеяния на ионизованных донорах

$$\eta_R^d = \eta_p^d (2\mathcal{J}_L)^{3/2} / V^2,$$

где $\eta_p^d = (\omega_p \tau_p^d)^{-1}$, $(\tau_p^d)^{-1} = \pi e^4 n_d \Lambda / [\epsilon^2 (2m)^{1/2} (k_B T_L)^{3/2}]$, Λ - кулоновский логарифм.

При рассеянии на акустическом деформационном потенциале

$$\eta_R^{ac} = \eta_p^{ac} (2\mathcal{J}_L)^{-1/2} V^2,$$

где $\eta_p^{ac} = (\omega_p \tau_p^{ac})^{-1}$, $(\tau_p^{ac})^{-1} = 2^{1/2} G^2 (m k_B T_L)^{3/2} / (\pi \rho s^2 \hbar^4)$, G - константа акустического взаимодействия, s - скорость звука.

Расчеты зависимостей $\eta_R^i(V)$, $\eta_R^{\Sigma}(V)$ и их производных от скорости V (характеризующей энергию направленного движения) были проведены для различных параметров T_L , n_b , v_b ; при этом эффективная масса электрона в GaAs $m = 0.07 m_0$ (где m_0 - масса свободного электрона), а $v_D = 4.25 \cdot 10^7$ см/с. Характер функциональных зависимостей $\eta_R^i(V)$, $\eta_R^{\Sigma}(V)$ отражает основные свойства рассеяния и согласуется с результатами [11,12]. Зависимость производной $d\eta_R^{\Sigma}/dV$ от скорости V имеет резкий скачок при $V = V_D$ и последующий спад в области $V \sim V_D + \Delta V$, $\Delta V \sim 0.2 V_D$. Это означает сильное рассеяние на продольных оптических фононах при изменении v от $4.25 \cdot 10^7$ см/с до $5.2 \cdot 10^7$ см/с. Функция $\eta_R^{\Sigma}(V)$ (и ее производная $d\eta_R^{\Sigma}/dV$) определяется суммарным вкладом всех зависимостей $\eta_R^i(V)$. Рассеяние на ионизованных донорах ослабевает с увеличением V ; оно оказывается определяющим в области $V < V_D$, так как формирует резкий спад $\eta_R^{\Sigma}(V)$ и, соответственно, участок с большим отрицательным значением $d\eta_R^{\Sigma}/dV$. При более высоких температурах и относительно небольших n_b становится заметным акустическое рассеяние, причем возрастающая кривая $\eta_R^{ac}(V)$ может скомпенсировать падающий участок $\eta_R^d(V)$. В результате $d\eta_R^{\Sigma}/dV$ перестает быть отрицательной при $V < V_D$. Таким образом, изменение параметров полупроводника оказывает существенное влияние на нелинейную функциональную зависимость диссипативного коэффициента.

Свойства колебаний зависят от соотношения между $V^{(eq)}$ и V_D , поэтому рассматриваем режимы движения, когда $V^{(eq)} < V_D$ и $V^{(eq)} \geq V_D$. Сравнение свойств колебаний в однородном ($\hbar = 0$) и неоднородном ($\hbar \neq 0$) полупроводниках проводилось для нескольких серий численных расчетов, обозначенных далее буквами А, В, С. Основные параметры этих режимов движения представлены в таблице. Во всех режимах $\gamma = 1$, а в режиме С выбрано $V_b = V_D$, $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}^{(eq)}$.

Рассмотрим результаты для серии А. При $\hbar = 0$ решение для электронной

Таблица

Режим	$n_b, \text{см}^{-3}$	$v_b, \text{см/с}$	$T_L, \text{К}$	отн.ед.
A	10^{16}	$4.0 \cdot 10^7$	300	-0.05
B	10^{14}	$4.2 \cdot 10^7$	5	-0.05
C	10^{17}	$4.25 \cdot 10^7$	77	-0.324

плотности $N(\zeta)$ имеет переходный участок с выбросом, за которым следуют установившиеся периодические колебания. Выброс обусловлен различием значений \mathcal{E}_b и $\mathcal{E}^{(eq)}$. Установившиеся колебания происходят относительно равновесной плотности $N^{(eq)}=1$ с амплитудой 0.06; величина равновесной скорости $V^{(eq)}=1$. Минимальным значениям плотности соответствуют максимальные скорости, и наоборот. Максимальные значения скорости близки к V_D . Фурье-спектр для реализации $N(\zeta)$ имеет две резко выраженные спектральные линии, соответствующие им фурье-амплитуды $FN(q)$ равны $FN(1)=11.5$; $FN(2)=2$ (значению аргумента $q=1$ соответствует пространственный период в 2π). Вторая гармоника возбуждена слабее.

Гармоническое воздействие с $h=0.1$ приводит к более интенсивным колебаниям, чем в случае $h=0$. После переходного участка колебания скорости $V(\zeta)$ принимают трапецевидный характер. Для электронной плотности $N(\zeta)$ они имеют треугольную форму (рис.1). Расстояния между одинаковыми максимумами равны 4π , что соответствует $1/2$ от частоты r . Фурье-амплитуда электронной плотности $FN(1)$ на частоте внешнего воздействия $r=1$ в три раза больше, а $FN(2)$ - в десять раз больше, чем соответствующие фурье-амплитуды при $h=0$. Кроме высших гармоник, возбуждается субгармоника на частоте $q=0.5$. Фурье-амплитуда субгармоники $FN(0.5)$ меньше $FN(1)$, $FN(2)$, но больше $FN(3)$. Таким образом, происходит синхронизация колебаний вынуждающим воздействием с частотой r и изменение свойств исходной структуры.

Для этого же режима при $h=0.1$, $r=2$ выполняется равенство $2\gamma^{3/2}=r$, выражающее условие параметрического резонанса. Минимальные значения $N(\zeta)$ и максимальные значения $V(\zeta)$ ограничены действием сильного рассеяния при $V \approx V_D$. Решения представляют суперпозицию двух видов колебаний. Для одного из них

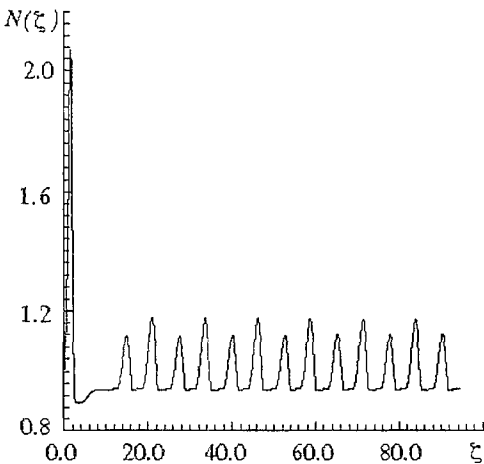


Рис. 1. Установившиеся пространственные колебания при $h=0.1$, $r=1$

амплитуды колебаний убывают с увеличением ζ , для другого - возрастают, но секулярный рост невелик. Генерация спектральной линии $FN(q)$ на частоте $q=1$ происходит под воздействием $FN(r)$ при $r=2$, при этом $FN(2) < FN(1)$.

Рассмотрим режим движения В. При $h=0$ собственные колебания имеют очень малые амплитуды относительно равновесных значений: для электронной плотности $N_m=0.01$. Фурье-амплитуда основной гармоники тоже невелика: $FN(1)=4$. Это объясняется малой разностью $V_D - V^{(eq)}$, а также более высокими значениями $\eta_R^{\pm}(V)$ и $d\eta_R^{\pm}/dV$ для режима В по сравнению с А. Зависимости $N(\zeta)$ и $\mathcal{E}(V)$ даны на рис. 2.

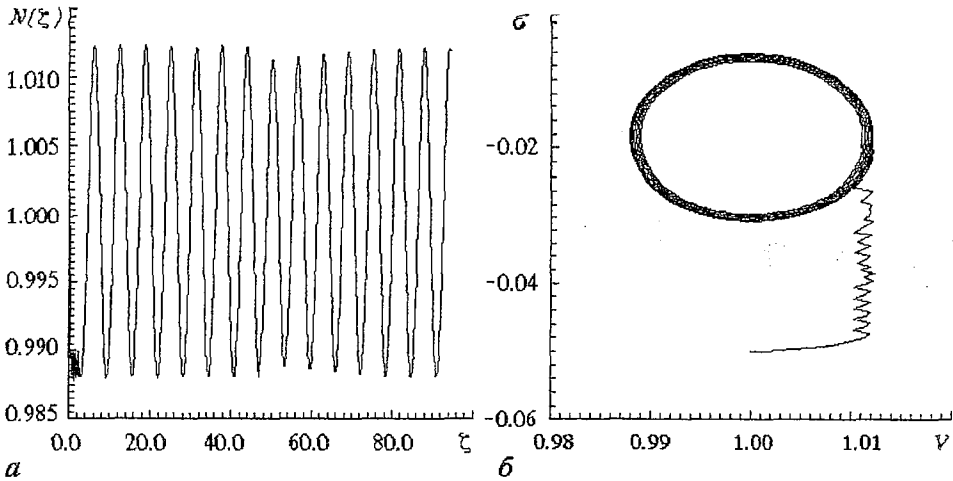


Рис. 2. Диссипативная структура вблизи порога рассеяния: *a* - реализация $N(\zeta)$; *b* - фазовый портрет $\mathcal{E}(V)$

При $h=0.1$, $r=1$ имеет место субгармонический нелинейный резонанс. На частоте $0.5r$ возбуждаются два вида колебаний: амплитуда одного из них увеличивается, а другого - убывает с ростом ζ (рис. 3, *a*). Их величины больше амплитуды собственных колебаний. Фазовый портрет $\mathcal{E}(V)$ характеризует механизм сильного рассеяния и ограничение амплитуды колебаний скорости (рис. 3, *b*). Кроме субгармоники $FN(0.5r)$, а также $FN(1.5r)$, $FN(2.5r)$, в спектре содержатся высшие гармоники $FN(lr)$, $l=2,3,\dots$ Основная гармоника $FN(r)$, соответствующая частоте синхронизации $r=1$, максимальна (рис. 3, *в*).

В режимах движения А, В выполняется соотношение $v_b < v_D$. Рассмотрим режим движения С при $v_b = v_D$. В этих вариантах для уменьшения выбросов от переходного процесса вблизи $\zeta=0$ величина \mathcal{E}_b подобрана близкой к \mathcal{E}^{eq} . В отличие от режимов А, В, здесь значение $d\eta_R^2/dV$ при $V=V_D$ сравнительно мало, и действие сильного рассеяния меньше, чем в предыдущих вариантах. При $h=0$ решения для N, V, \mathcal{E} не зависят от координаты, они характеризуют равновесное однородное состояние. При $h \neq 0$ ($r=1$), даже для самых малых значений h возникают колебания. Расчеты проведены с $h=10^{-3}$ и представлены на рис. 4. Динамический процесс является сложным и представляет суперпозицию двух видов колебаний, различающихся масштабами. Присутствуют крупномасштабные колебания с основным периодом $4\pi/r$, соответствующим генерации субгармоники $FN(0.5r)$. Они представляют серию импульсов с одинаковыми интервалами, равными $4\pi/r$ ($r=1$). На длине реализации укладывается более 20 целых периодов. Амплитуды таких импульсов отличаются друг от друга, и среди них практически нет совпадений.

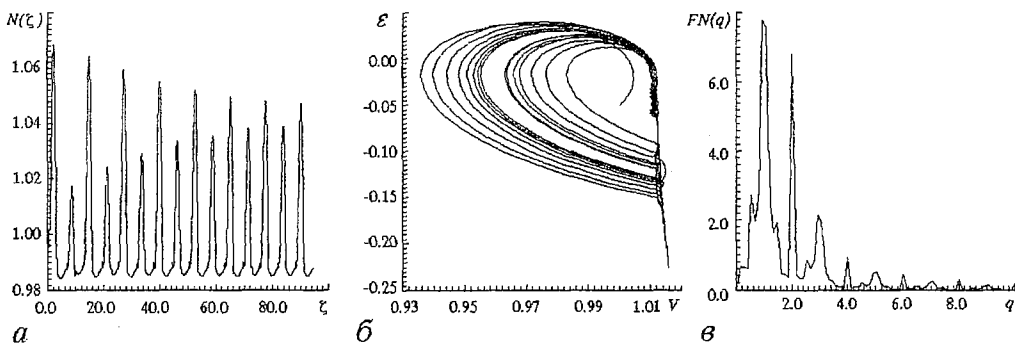


Рис. 3. Влияние сильного рассеяния на динамику электронов при $h=0.1$, $r=1$: *a* - реализация $N(\zeta)$; *b* - фазовый портрет $\mathcal{E}(V)$; *в* - фурье-спектр $FN(q)$

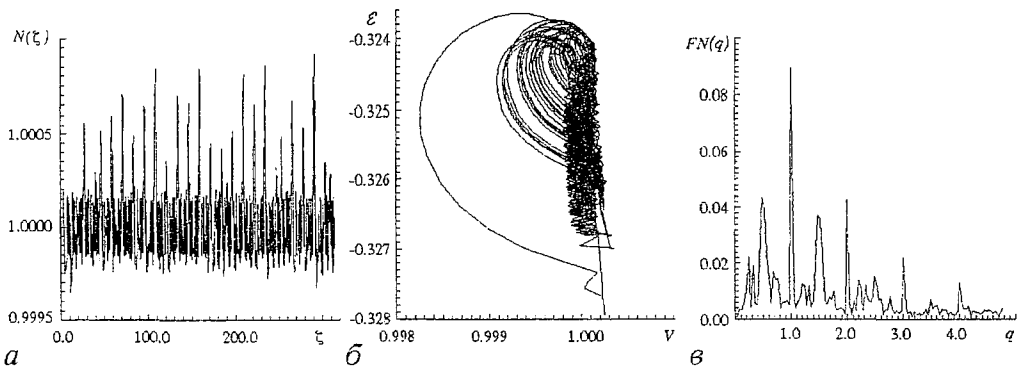


Рис. 4. Стохастизация при слабой неоднородности, $h = 10^{-3}$: *a* - реализация $N(\zeta)$; *b* - фазовый портрет $E(V)$; *c* - фурье-спектр $FN(q)$

Наряду с крупномасштабными, существуют и мелкомасштабные колебания, заполняющие пространство между соседними импульсами крупномасштабной серии. Мелкомасштабные колебания имеют релаксационный характер; их период составляет малую долю периода крупномасштабных колебаний. Эти колебания возникают в результате действия сильного рассеяния на продольных оптических фонах, в точках, где выполняются пороговые условия $V(\zeta) > V_D$ включения этого механизма.

Реализация пространственных колебаний представлена на рис. 4, *a*. Проекция фазовых траекторий на плоскость $E(V)$ имеют вид, показанный на рис. 4, *б*. Фазовый портрет состоит из двух областей, соответствующих различным видам колебаний. Мелкомасштабные колебания «стохастизируют» крупномасштабные. Их роль становится более существенной при уменьшении неоднородности, то есть при $h < 10^{-3}$. И наоборот, при $h > 10^{-3}$ их влияние резко ослабевает. Фурье-спектр рассматриваемых процессов приведен на рис. 4, *в*. Он содержит субгармонические относительно широкие спектральные линии $FN(0.5r)$, $FN(1.5r)$, $FN(2.5r)$ и более узкие линии гармоник $FN(lr)$, $l=1, 2, 3, \dots$

Несмотря на сложность динамического процесса здесь, как и раньше, внешнее воздействие с частотой r синхронизирует колебания. Вместе с тем, происходят качественные изменения в эволюции процессов, формах (профилях) колебаний (структур) при $h \neq 0$. В зависимости от величины h в условиях рассеяния на продольных оптических фонах имеют место качественные перестройки, или реконструкции структур тока. Представленные здесь отдельные результаты выбраны из больших серий расчетных данных и отражают типичную картину динамических процессов в системе.

Выводы

Проведен качественный анализ и численное моделирование совместного действия различных механизмов рассеяния на колебания и резонансы баллистических электронов. При слабой диссипации в неоднородном полупроводнике возможны интенсивные резонансные колебания. Резонансы имеют место и в случае, когда диссипация является слабой на одной части периода колебаний и сильной на другой части его. Однако действие сильного рассеяния ограничивает секулярный рост и амплитуду колебаний. При таких режимах движения имеет место генерация субгармоник и высших гармоник. Эти процессы синхронизируются с периодом модуляции плотности доноров и формируют нелинейный динамический отклик.

При слабых неоднородностях и больших n_b становится существенным действие мелкомасштабных релаксационных колебаний на динамические процессы

в системе. Внешняя неоднородность реконструирует токковые структуры в условиях нелинейного механизма рассеяния на продольных оптических фононах.

Библиографический список

1. Ермолаев Ю.Л., Санин А.Л. Электронная синергетика. Л., 1989. 250 с.
2. Санин А.Л., Ермолаев Ю.Л., Мизандронцев Д.Б. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1-2. С. 102.
3. Cheng M.C., Huang L. // J.Appl. Phys. 1992. Vol. 72. P. 3539.
4. Barunger H., Wilkins J. // Phys. Rev. B. 1987. Vol. 36. P. 1487.
5. Krowne C.M., Blakey P.A. // J.Appl. Phys. 1987. Vol. 61. P. 2257.
6. Blotekjar K. // IEEE Trans. 1970. Vol. ED-17. P. 38.
7. Grubin H.L., Kreskovsky J.R. // Sol. St. Electron. 1989. Vol. 32. P. 1071.
8. Zhou J.R., Ferry D.K. // IEEE Trans. 1992. Vol. ED-39. P. 473.
9. Конуэлл Э. // Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях. М., 1970.
10. Кокин А.А., Толстихин В.И. // Микроэлектроника. 1984. Т. 13. P. 24.
11. Hinata S. // J.Appl. Phys. 1990. Vol. 68. P. 5205.
12. Jalabert R., Das Sarma S. // Sol. St. Electron. 1989. Vol. 32. P. 1259.

Государственный технический
университет, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 6.10.94
после переработки 9.03.95

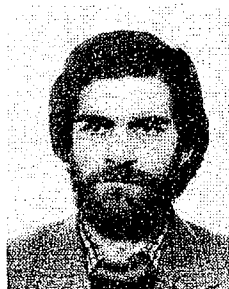
CURRENT STRUCTURE RECONSTRUCTION UNDER ELECTRON SCATTERING BY IONIZED DONORS AND PHONONES IN INHOMOGENEOUS SEMICONDUCTOR

A.L.Sanin, Yu.L.Ermolaev

By using the moments of Boltzman's equation the analysis of the electron response in n-type GaAs with the space-periodic donor density modulation was carried out. The computer calculations are performed for the different scattering mechanisms and their joint action to the oscillations and structure reconstruction. Under threshold conditions the strong longitudinal optical phonone scattering dominates. The generation of sub-harmonics, high harmonics and small scale relaxation oscillation define the nonlinear dynamics of the electrons.



Санин Андрей Леонардович - родился в 1935 году в Ленинграде, окончил Ленинградский политехнический институт с квалификацией инженера-физика. Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая физика» Санкт-Петербургского государственного технического университета. Область научных интересов: транспорт и структуры электронного газа, уравнения квантовой гидродинамики, методы нелинейной математики, фундаментальное образование. Автор и соавтор монографий «Структуры и хаос - проблемы физики», «Электронная синергетика», имеет 80 публикаций в различных журналах, сборниках и трудах конференций.



Ермолаев Юрий Леонидович - родился в 1959 году, окончил Ленинградский политехнический институт (1985). В настоящее время - старший научный сотрудник НИИ электрофизической аппаратуры (НИИЭФА СПб). Автор учебного курса по нелинейной вычислительной физике в Государственном техническом университете. В отечественных и зарубежных изданиях опубликовал более 20 работ, посвященных численному моделированию мощных импульсных систем, коротковолновых лазеров, явлений самоорганизации и хаоса в электронных потоках. Соавтор монографии «Электронная синергетика». Занимается также исследованием микровозреческих проблем науки.



ФРАКТАЛЬНЫЙ СИГНАЛ И ДИНАМИКА СИСТЕМ, ДЕМОНСТРИРУЮЩИХ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев

Модель фрактального сигнала, возникающая при обходе по определенному правилу элементов двухмасштабного канторова множества, при надлежащем выборе двух параметров a и b дает возможность удовлетворительно описывать многие типы динамики, возникающие в одномерных и двумерных отображениях при переходе к хаосу. Указано расположение соответствующих этим типам поведения точек на плоскости параметров фрактального сигнала. Описана простая схема, допускающая экспериментальную реализацию и позволяющая генерировать фрактальный сигнал с регулируемыми свойствами. Развита ренормгрупповая анализ задачи о воздействии фрактального сигнала на систему, демонстрирующую каскад удвоений периода. При изменении параметров фрактального сигнала происходит бифуркация в уравнении ренормгруппы, так что поведение на пороге хаоса может описываться фейгенбаумовской или нефейгенбаумовской неподвижной точкой этого уравнения. Приводятся численные результаты, иллюстрирующие скейлинговые свойства динамики под действием фрактального сигнала.

Введение

Зачастую в природе и технике приходится сталкиваться с сигналами, имеющими фрактальную природу в том смысле, что в них можно выделить структурные элементы с различными масштабами времени и амплитуды, причем какой бы масштаб мы ни выбрали, обнаруживается определенное подобие в построении сигнала из соответствующих структурных элементов. Один из примеров фрактального сигнала - это последовательность данных, поступающих с регистрирующего датчика в гидродинамическом турбулентном потоке [1]. Другим примером может служить $1/f$ - шум: известна трактовка, объясняющая его генерацию наличием иерархии релаксационных процессов с широким диапазоном характерных времен [2]. По-видимому, тексты на естественных языках могут также моделироваться посредством фрактальных сигналов, поскольку в них очевидным образом можно выделить иерархию структурных элементов (буква-слово-предложение-абзац- ...) [3].

Поиск и исследование фрактальных сигналов, построение их моделей, анализ воздействия на нелинейный системы, рассмотрение возможностей использования фрактальных сигналов в целях обработки и кодирования информации составляют обширное и заслуживающее детальной проработки направление исследований.

В этой статье мы сосредоточим внимание на фрактальных сигналах, которые генерируются нелинейными системами на пороге возникновения хаоса. Известно,

что такие сигналы демонстрируют универсальный характер присущих количественных закономерностей скейлинга, допускают далеко идущий теоретический анализ и технически несложную реализацию в эксперименте.

Мы ограничимся обсуждением таких фрактальных сигналов, для которых соотношения подобия (скейлинга) проявляются при удвоении характерного временного масштаба, и будем иметь дело только с сигналами, заданными в дискретном времени (временными рядами). Мы вводим простую модель фрактального сигнала, которая возникает при обходе по определенным правилам элементов двухмасштабного канторова множества (см. также [4-6]). Будет показано, что эта модель, содержащая два свободных параметра, позволяет хорошо описывать целый ряд различных типов поведения при переходе к хаосу через удвоения периода и отвечающих разным классам количественной универсальности. Будет рассмотрена также задача о воздействии фрактального сигнала на систему, демонстрирующую удвоения периода. Оказывается, что в зависимости от параметров фрактального сигнала возможны ситуации, когда он влияет или не влияет на фрактальные свойства динамики на пороге возникновения хаоса, причем наличие или отсутствие такого влияния в широких пределах не зависит от интенсивности воздействия.

1. Фейгенбаумовский аттрактор и модель фрактального сигнала

Как известно, один из самых распространенных сценариев перехода к хаосу в нелинейных диссипативных системах при изменении управляющего параметра - это каскад бифуркаций удвоения периода, подчиняющийся универсальным закономерностям Фейгенбаума [7-9]. В логистическом отображении с параметром λ

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \quad (1)$$

порогом возникновения хаоса служит критическая точка $\lambda = \lambda_c = 1.401155\dots$ - предельная точка накопления бифуркаций удвоения периода. В этой точке аттрактором системы является фрактальное множество на оси x - аттрактор Фейгенбаума [2,10] (рис.1).

Его построение осуществляется следующим образом. Начав итерации (1) из точки $x_0 = 0$, получаем последовательность x_1, x_2, x_3, \dots . Тогда на k -м шаге построения аттрактор представляется объединением $N = 2^k$ интервалов

$$\bigcup_{i=1}^N [x_i, x_{i+2^k}],$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. По существу эта процедура аналогична построению канторова множества (ср. рис.1, *a* и *b*) с той лишь разницей, что длины интервалов, оставляемых и выбрасываемых на каждом шаге построения, подчиняются более сложным закономерностям. Вблизи точки $x = 0$ структура аттрактора Фейгенбаума локально воспроизводит себя при пересчете масштаба на фактор $\alpha = \alpha_F = -2.502907\dots$, а вблизи $x = 1$ - на фактор α^2 . Оказывается, что хорошую аппроксимацию аттрактора Фейгенбаума можно построить, используя так называемое двухмасштабное канторово множество [2,10] (см. рис.1, *в*). Задавшись некоторыми константами a и b такими, что $a+b < 1$, на первом шаге построения делим исходный отрезок в отношении $a, 1-a-b, b$, и выбрасываем среднюю треть. На втором шаге и последующих шагах процедура повторяется, причем отрезки различной длины располагаются так, как показано на рисунке. Если положить $a = 1/|\alpha|$, $b = 1/\alpha^2$, то полученное множество очень трудно отличить на глаз от аттрактора Фейгенбаума. Неплохое соответствие обнаруживается и в количественных характеристиках обоих множеств (см. [2]).



Рис.1. Аттрактор Фейгенбаума (а), множество Кантора (б) и двухмасштабное канторово множество (в)

Ясно, что если мы зададим надлежащим образом правило обхода элементов двухмасштабного канторова множества (см. рис.1), то получим модель фрактального сигнала, порождаемого логистическим отображением в критической точке. К этой модели можно прийти и другим путем, используя непосредственно отображение (1) и свойства скейлинга вблизи точек 0 и 1. Построим последовательность w_i , стартующую из $w_0 = 0$, следующим образом. Положим для четных членов

$$w_{2i} = w_i / \alpha, \quad (2)$$

а для нечетных

$$w_{2i+1} = 1 - \lambda_c w_{2i}^2 = 1 - \lambda_c z_i^2 / \alpha^2 = 1 - 1/\alpha^2 + w_{i+1} / \alpha^2. \quad (3)$$

Обозначая $a = 1/\alpha$, $b = 1/\alpha^2$, перепишем (2) и (3) в виде

$$w_{2i-1} = (1 - b) + b w_i, \quad w_{2i} = -a w_i. \quad (4)$$

С помощью этих соотношений всю последовательность w_i можно найти по ее первым двум членам $w_0 = 0$ и $w_1 = 1$.

Если сдвинуть индекс на единицу и положить $w_i = -[(u_{i-1}(a+1)+a)(b-1)/(b+a)]$, то (4) перепишется в форме

$$u_{2i} = b(1 + u_i), \quad u_{2i+1} = -a(1 + u_i), \quad (5)$$

принятой в наших предыдущих статьях [4-6]. Видно, что для самосогласованности при $i = 0$ надо положить $u_0 = b/(1-b)$.

Мы будем придавать соотношению (4) (или (5)) более общее значение, чем просто модели динамики логистического отображения в критической точке. Его можно рассматривать как определение *фрактального сигнала*, зависящего от двух параметров a и b . В разделе 4 мы представим целый ряд конкретных примеров, допускающих описание в терминах этого сигнала.

2. Фрактальный сигнал и его свойства в зависимости от параметров a и b

Как правило, если не оговорено противное, мы будем полагать a и b действительными числами из интервала $[0, 1]$. Если к тому же $a+b < 1$, то взаимное расположение элементов последовательности w_i такое же, как в случае аттрактора Фейгенбаума. Следовательно, при этом остается справедливой интерпретация фрактального сигнала в терминах обхода двухмасштабного канторова множества по тому же самому правилу. Формально уравнения (4) или (5) сохраняют смысл

при любых действительных и комплексных a и b , и такое, более широкое обобщение фрактального сигнала также имеет право на существование и может представлять интерес [11, 12]. Отметим, в частности, что замена a на $-b$ и b на $-a$ определяет сигнал с фрактальными свойствами, аналогичными исходному, но с обратным порядком обхода элементов двухмасштабного канторова множества.

Двухмасштабное канторово множество - традиционный пример, используемый для объяснения и иллюстрации мультифрактального формализма [2,10]. В контексте нашего рассмотрения, вводимые в рамках этого формализма обобщенные размерности и скейлинг-спектр следует рассматривать как определенные характеристики фрактального сигнала.

На k -ом уровне построения двухмасштабного канторова множества совокупность интервалов длины $l_i = |w_i - x_{i+2^k}|$, $i = 1, \dots, 2^k$ представляет собой покрытие этого множества. Чтобы определить хаусдорфову размерность D_0 , потребуем, чтобы сумма $\sum_{i=1}^{2^k} l_i^{D_0}$ не менялась с ростом k . Поскольку при переходе к следующему уровню каждый элемент l_i заменяется на два, с длинами al_i и bl_i , то D_0 должно удовлетворять уравнению

$$a^{D_0} + b^{D_0} = 1. \quad (6)$$

На рис. 2, а показаны линии равной размерности D_0 на плоскости параметров a, b .

Чтобы получить спектр обобщенных размерностей и скейлинг-спектр, припишем всем элементам покрытия на k -ом уровне построения одинаковую

меру (вероятность) $p_i = 1/2^k$. Определим сумму $\Gamma_k = \sum_{i=1}^{2^k} p_i^q / l_i^\tau$ и потребуем выполнения такого соотношения между q и τ , чтобы Γ_k оставалась конечной и не менялась с ростом k . Это будет выполнено, если $2^{-q} a^{-\tau} + 2^{-q} b^{-\tau} = 1$, откуда $q = -\log_2 (a^{-\tau} + b^{-\tau})$. Далее, полагая $D_q = \tau / (q-1)$, $\alpha = (dq/d\tau)^{-1}$, $f = \alpha q - \tau$, получаем в неявной форме зависимость D_q от q (спектр обобщенных размерностей) и f от α (скейлинг-спектр). На рис. 2, б и в показаны линии равной размерности D_1 (информационной) и D_2 (корреляционной) на плоскости параметров фрактального сигнала. Рис.3 и 4 показывают, как выглядит спектр обобщенных размерностей и скейлинг-спектр в разных точках плоскости параметров.

Рассмотренные характеристики описывают фрактальный сигнал с точки зрения взаимного расположения значений переменной на числовой оси, но не учитывают порядок их следования во времени. Информацию о порядке следования содержит такая характеристика, как фурье-спектр. Известны приближенные соотношения между интенсивностями спектральных линий для сигнала, порождаемого динамикой в фейгенбаумовской критической точке [13,14]. Для фрактальных сигналов типа (4) или (5) аналогичные соотношения тоже можно получить, причем они оказываются точными. Определим фурье-образ сигнала на частоте f как

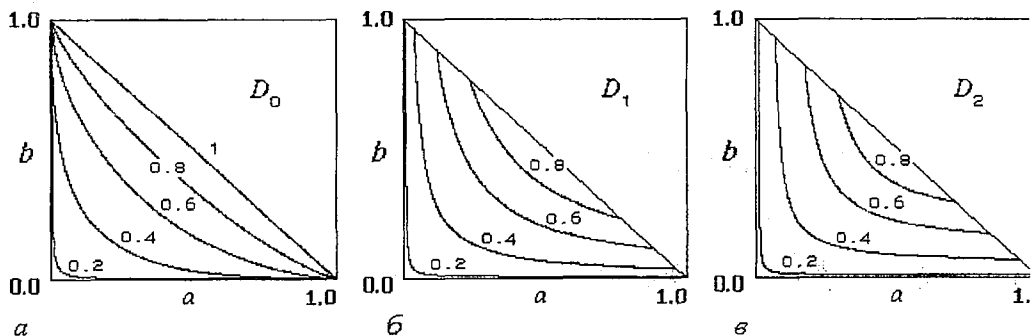


Рис. 2. Линии равных размерностей Хаусдорфа D_0 , информационной D_1 и корреляционной D_2 на плоскости параметров фрактального сигнала

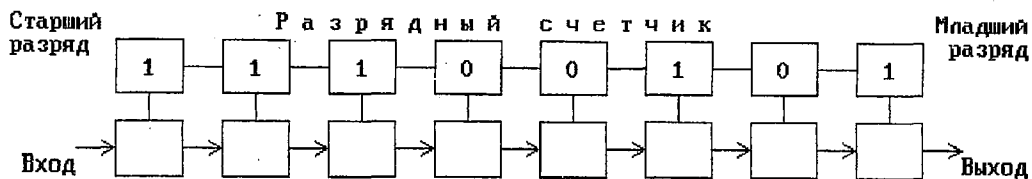


Рис. 6. Схема устройства, позволяющего генерировать фрактальный сигнал с регулируемыми параметрами a и b . Верхний ряд - элементы двоичного разрядного счетчика, нижний ряд образован блоками, передаточные свойства которых зависят от состояния разрядов счетчика: $y_{\text{вых}} = b(1+y_{\text{вх}})$, если 0, $y_{\text{вых}} = -a(1+y_{\text{вх}})$, если 1

находится 0, то на выходе двухполюсника сигнал равен $b(1+u)$, где u - входной сигнал. Если в этом разряде находится 1, то на выходе двухполюсника сигнал равен $-a(1+u)$. Все двухполюсники связаны в цепочку, как показано на рис. 6. На вход цепочки подается сигнал $u_{\text{вх}} = b/(1-b)$. Нетрудно показать, что на выходе будет генерироваться сигнал, описываемый рекуррентным соотношением (5), в котором n играет роль дискретного времени, отсчитываемого счетчиком.

Пусть число элементов в цепочке очень велико, $k \rightarrow \infty$. Тогда переменная u_n в ходе эволюции пробегает в соответствующем порядке по элементам двухмасштабного канторова множества на оси u , расположенного на отрезке $[-a/(1-b), b/(1-b)]$. При конечном числе разрядов в счетчике k мы будем получать «усеченный» сигнал, который обеспечивает аппроксимацию двухмасштабного канторова множества до уровня k построения из отрезков конечной длины. При этом поведение «истинного» фрактального сигнала правильно описывается на интервале времени в 2^k шагов.

3. Различные примеры фрактальных сигналов

При построении модели фрактального сигнала (4) мы исходили из скейлинговых свойств динамики логистического отображения в точке накопления бифуркаций удвоения периода. Согласно теории Фейгенбаума, эти скейлинговые свойства обусловлены наличием неподвижной точки функционального уравнения ренормгруппы (РГ)

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)). \quad (11)$$

Здесь α - уже упоминавшаяся универсальная константа α_F , а $g(x)$ - универсальная функция, которая была найдена численно с высокой точностью в виде разложения в ряд по четным степеням аргумента.

Одно из предлагавшихся обобщений теории Фейгенбаума [15-17] состояло в распространении его подхода на отображения с экстремумом, порядок которого определяется произвольным вещественным числом z , $1 < z < \infty$, например

$$x \rightarrow 1 - \lambda|x|^z. \quad (12)$$

Оказывается, что в этом случае динамическое поведение на пороге хаоса также ассоциируется с неподвижными точками уравнения (11) - функциями, представляемыми в виде рядов по степеням $|x|^z$, а масштабная константа α оказывается зависящей от z . Ясно, что наша модель фрактального сигнала (4) одинаково пригодна при различных z , достаточно придать фигурирующим в ней параметрам значения $a = 1/|\alpha(z)|$ и $b = 1/|\alpha(z)|^z$. На рис.7 на плоскости фрактального сигнала показано геометрическое место точек, отвечающих различным z от 1.05 до 10.

Предположим теперь, что мы остаемся в классе одномерных отображений, задаваемых аналитическими функциями действительной переменной, но допускающими наличие более одного экстремума, точек перегиба, и управляемых более чем одним параметром. В этом случае в пространстве параметров могут

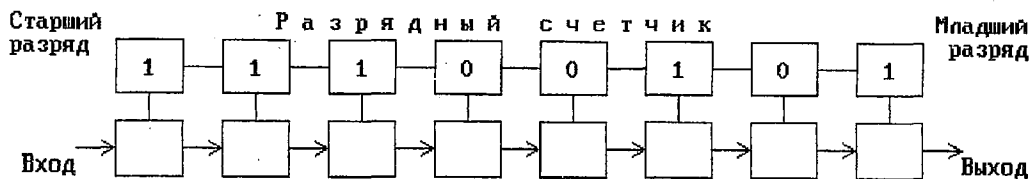


Рис. 6. Схема устройства, позволяющего генерировать фрактальный сигнал с регулируемыми параметрами a и b . Верхний ряд - элементы двоичного разрядного счетчика, нижний ряд образован блоками, передаточные свойства которых зависят от состояния разрядов счетчика: $y_{\text{вых}} = b(1+y_{\text{вх}})$, если 0, $y_{\text{вых}} = -a(1+y_{\text{вх}})$, если 1

находится 0, то на выходе двухполюсника сигнал равен $b(1+u)$, где u - входной сигнал. Если в этом разряде находится 1, то на выходе двухполюсника сигнал равен $-a(1+u)$. Все двухполюсники связаны в цепочку, как показано на рис. 6. На вход цепочки подается сигнал $u_{\text{вх}} = b/(1-b)$. Нетрудно показать, что на выходе будет генерироваться сигнал, описываемый рекуррентным соотношением (5), в котором n играет роль дискретного времени, отсчитываемого счетчиком.

Пусть число элементов в цепочке очень велико, $k \rightarrow \infty$. Тогда переменная u_n в ходе эволюции пробегает в соответствующем порядке по элементам двухмасштабного канторова множества на оси u , расположенного на отрезке $[-a/(1-b), b/(1-b)]$. При конечном числе разрядов в счетчике k мы будем получать «усеченный» сигнал, который обеспечивает аппроксимацию двухмасштабного канторова множества до уровня k построения из отрезков конечной длины. При этом поведение «истинного» фрактального сигнала правильно описывается на интервале времени в 2^k шагов.

3. Различные примеры фрактальных сигналов

При построении модели фрактального сигнала (4) мы исходили из скейлинговых свойств динамики логистического отображения в точке накопления бифуркаций удвоения периода. Согласно теории Фейгенбаума, эти скейлинговые свойства обусловлены наличием неподвижной точки функционального уравнения ренормгруппы (РГ)

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)). \quad (11)$$

Здесь α - уже упоминавшаяся универсальная константа α_F , а $g(x)$ - универсальная функция, которая была найдена численно с высокой точностью в виде разложения в ряд по четным степеням аргумента.

Одно из предлагавшихся обобщений теории Фейгенбаума [15-17] состояло в распространении его подхода на отображения с экстремумом, порядок которого определяется произвольным вещественным числом z , $1 < z < \infty$, например

$$x \rightarrow 1 - \lambda|x|^z. \quad (12)$$

Оказывается, что в этом случае динамическое поведение на пороге хаоса также ассоциируется с неподвижными точками уравнения (11) - функциями, представляемыми в виде рядов по степеням $|x|^z$, а масштабная константа α оказывается зависящей от z . Ясно, что наша модель фрактального сигнала (4) одинаково пригодна при различных z , достаточно придать фигурирующим в ней параметрам значения $a = 1/|\alpha(z)|$ и $b=1/|\alpha(z)|^z$. На рис.7 на плоскости фрактального сигнала показано геометрическое место точек, отвечающих различным z от 1.05 до 10.

Предположим теперь, что мы остаемся в классе одномерных отображений, задаваемых аналитическими функциями действительной переменной, но допускающими наличие более одного экстремума, точек перегиба, и управляемых более чем одним параметром. В этом случае в пространстве параметров могут

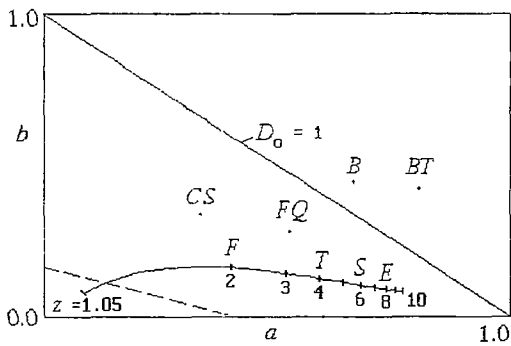


Рис. 7. Точки на плоскости параметров, где фрактальный сигнал (4) может служить аппроксимацией динамики в различных критических ситуациях в точке накопления удвоений периода: F (Фейгенбаум), T (трикритичность), S и E - типы поведения одномерных отображений с экстремумом степени 2, 4, 6 и 8, B (бикритичность), FQ и BT - типы поведения двумерных отображений, CS - канторов сигнал. Сплошная кривая отвечает одномерным отображениям с экстремумом степени z от 1.05 до 10. Штриховая линия обозначает порог бифуркации РГ уравнения в задаче о внешнем воздействии фрактального сигнала на квадратичное отображение

(диссипативные), могут демонстрировать фейгенбаумовский тип удвоений периода. Однако при наличии достаточного количества управляющих параметров появляется возможность реализации других типов критического поведения, специфических для двумерных отображений. В этом случае вместо одномерного уравнения РГ (11) приходится иметь дело с его двумерным обобщением [21,22]

$$g(X, Y) = \alpha g(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta)),$$

$$f(X, Y) = \beta f(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta)), \quad (13)$$

где g и f - универсальные функции двух аргументов, α и β - масштабные факторы. Уравнения (13) записываются в компактной форме благодаря специальному выбору системы координат X, Y в двумерном фазовом пространстве («скейлинговые координаты»). Направления осей этой системы координат совсем не обязательно совпадает с той, в которой записано исходное отображение, так что динамические переменные x и y в общем случае выражаются через X и Y посредством некоторой замены. Каждая из величин X и Y демонстрирует свои скейлинговые свойства. Тем не менее, однокомпонентная модель фрактального сигнала (4) все-таки может быть полезной: если масштабные факторы α и β заметно различаются по величине, то одна компонента, характеризуемая меньшим по модулю масштабным фактором, оказывается более существенной, тогда как вторая практически незаметна на ее фоне.

Простейший нетривиальный новый тип критического поведения, названный *бикритическим* (B) [23,24,11], обнаруживается в системе двух логистических отображений с однонаправленной связью

$$A_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - A y_n^2 - B x_n^2. \quad (14)$$

Этот тип поведения достигается, если вывести первую подсистему на порог хаоса изменением параметра λ , и вторую - изменением параметра A при (умеренном) фиксированном значении параметра связи B . Например, при $B = 0.375$

существовать кривые или поверхности, на которых отображение, описывающее динамику за одну или несколько итераций, имеет экстремум степени $z = 4, 6, 8, \dots$. Если мы будем двигаться вдоль такой кривой или поверхности и обнаружим каскад удвоений периода, то он будет подчиняться скейлинговым закономерностям с масштабными константами, такими же как в отображениях вида (12) с соответствующими целыми четными показателями z . При наличии одного, двух и трех управляющих параметров могут встретиться критические ситуации следующего типа: фейгенбаумовская F ($z=2$), трикритическая T ($z=4$), тип S ($z=6$) и тип E ($z=8$) (см. [18-20]). Соответствующие точки отмечены буквами на плоскости параметров фрактального сигнала на рис.7.

Дальнейшие интересные ситуации возникают, если мы перейдем к двумерным отображениям. Известно,

что отображения, сжимающие площадь

бикритическая точка располагается при $\lambda = 1.4011552\dots$ и $A = 1.1249814\dots$. Неподвижная точка уравнения РГ (13), ответственная за бикритичность, и точные значения масштабных констант найдены в [24,11,22]. Для переменной x константы скейлинга совпадают с фейгенбаумовскими, а для y это новые константы: $\beta = \beta_B = -1.505318159\dots$ вблизи начала координат и β_B^2 вблизи точки $y=1$.

Если рассмотреть такую систему, в которой отображение с квадратичным экстремумом воздействует на отображение с экстремумом четвертой степени

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - P y_n^4 - Q x_n^2, \quad (15)$$

то в нем при выходе на порог хаоса одновременно в первой и второй подсистемах реализуется другой тип критического поведения, который был обозначен символом *BT* [25]. Например, при $Q = 0.375$ точка *BT* расположена при $\lambda = 1.401155\dots$, $P = 1.279735\dots$. В этой точке вторая подсистема демонстрирует скейлинговое поведение с масштабными константами $\beta = \beta_{BT} = -1.2416604$ и β_{BT}^4 ; соответствующая неподвижная точка уравнения РГ найдена в [25]. Заметим, что этот тип поведения обнаруживается и в системе (14): при увеличении связи бикритичность сохраняется, пока параметр B не достигнет $0.835050\dots$. При этом значении B критическая точка типа *BT* располагается при $\lambda = 1.401155\dots$ и $A = 1.066053\dots$.

На рис. 7 на плоскости a, b отмечены точки $(1/|\beta_B|, 1/\beta_B^2)$ и $(1/|\beta_{BT}|, 1/\beta_{BT}^4)$, которые соответствуют фрактальному сигналу, аппроксимирующему последовательность y_n в критических ситуациях B и *BT*.

Следующий тип критичности, специфический для двумерных необратимых отображений, был обнаружен при добавлении квадратичного члена, описывающего обратное воздействие второй подсистемы на первую в уравнениях (14) [22, 26, 27]. Однако более простой пример, для которого к тому же направления координатных осей оказываются совпадающими со скейлинговыми, дается отображением

$$x_{n+1} = 1 - A x_n^2 + D x_n y_n, \quad y_{n+1} = 1 - B x_n y_n. \quad (16)$$

При фиксированном D критическую точку *FQ* можно найти на плоскости параметров A, B на конце фейгенбаумовской критической линии, например, при $D=0.3$ имеем $A=1.629678013$, $B=1.767192895$. Этому типу поведения также соответствует определенная неподвижная точка уравнений (13). Масштабные константы α (для переменной x) и β (для переменной y) равны, соответственно, $\alpha = -1.900071670$ и $\beta = -4.008157849$. Динамика переменной x может быть приближенно описана моделью фрактального сигнала (4), если положить $a = 1/|\alpha_{FQ}|$, $b = 1/\alpha_{FQ}^2$. Соответствующая точка на рис.7 обозначена буквами *FQ*.

Во всех перечисленных ситуациях модель фрактального сигнала (4) дает весьма неплохое описание фрактальных свойств сигналов, генерируемых нелинейными системами на пороге хаоса. Об этом можно судить, сопоставляя скейлинг-спектры и фурье-спектры (рис.8 и 9).

Следует заметить, однако, что для некоторых других типов поведения на пороге хаоса данная модель фрактального сигнала непригодна, например, в случае переходов к хаосу через перемежаемость и квазипериодичность. К ним следует прибавить и некоторые критические ситуации, связанные с удвоениями периода, например критическое поведение, характерное для гамильтоновских систем [21], а также типы поведения, ассоциирующиеся не с неподвижными точками, а с более сложными седловыми траекториями, порождаемыми уравнениями РГ [28, 29, 30].

С другой стороны, представленный выше перечень критических ситуаций далеко не исчерпывает возможностей, открываемых моделью фрактального сигнала (4), (5), если допустить большую свободу в выборе параметров a и b . Остановимся на некоторых более экзотических примерах.

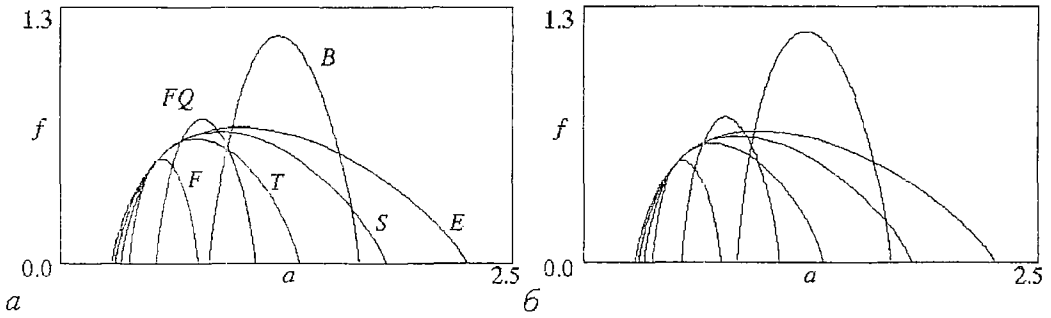


Рис. 8. Скейлинг-спектры, порождаемые одномерными и двумерными отображениями в ситуациях, относящихся к различным классам количественной универсальности F, T, S, E, FQ и B (a) и для модельного фрактального сигнала (4) в соответствующих точках плоскости параметров (b)

Если мы положим $a=1, b=0$, то для $i=1, 2, \dots$ из (4) получаем последовательность $w_i = 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, \dots$, которая в точности соответствует последовательности знаков переменной x , при старте из начала координат в логистическом отображении в точке накопления бифуркаций удвоения периода: $w_i = \text{sign}(x_i)$. Эта последовательность связана с известной в теории чисел последовательностью Морса-Туэ ξ_i (сумма по модулю два значащих цифр целого числа i в двоичной записи) соотношением $w_i = 2|\xi_i - \xi_{i-1}| - 1$ [2].

При $a=b=1/3$ последовательность w_i пробегает по элементам классического канторова множества. Такой сигнал можно было бы назвать *канторовым сигналом*. На рис.7 ему соответствует точка, обозначенная CS .

Еще одна интересная возможность, которую стоит здесь упомянуть, заключается в исследовании комплексных аналитических отображений $z \rightarrow f(z)$. Как известно, при изменении параметра в комплексной области в простейшем квадратичном отображении

$$z \rightarrow \lambda - z^2 \quad (17)$$

можно наблюдать не только бифуркации удвоения по Фейгенбауму, но также другие варианты усложнения периодических движений, в частности, каскады бифуркаций утроения или учетверения периода [31-33]. Соответствующие типы поведения описываются в рамках РГ анализа, имеющего дело с комплексными

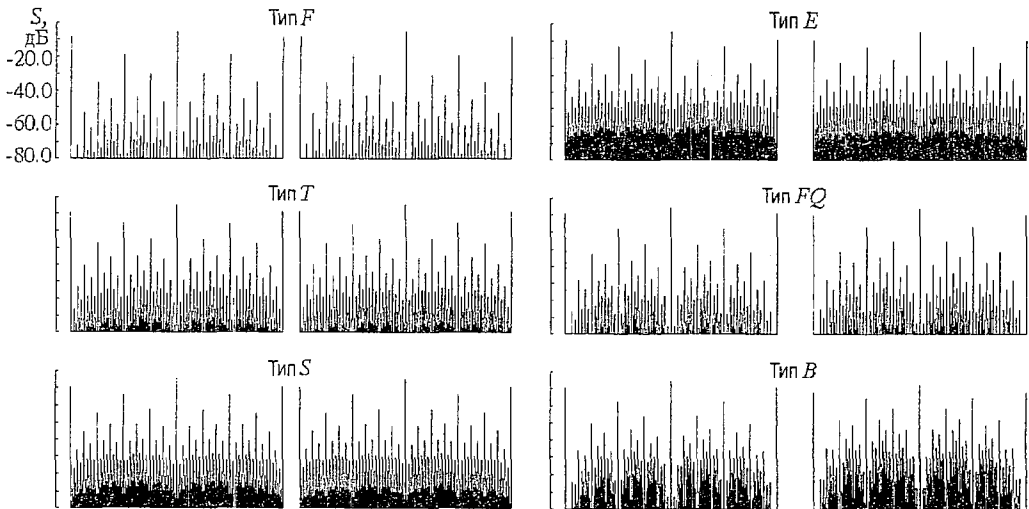


Рис. 9. Спектры Фурье, для одномерных и двумерных отображений в ситуациях, относящихся к различным классам количественной универсальности (левая колонка) и для модельного фрактального сигнала (4) в соответствующих точках плоскости (a, b) (правая колонка)

решениями функциональных уравнений (несколько более сложных нежели (11)) в комплексной области.

Если же мы обратимся к отображениям вида

$$z \rightarrow \lambda - z^m, \quad (18)$$

то для целых $m > 2$ при определенном выборе пути в комплексной плоскости λ можно наблюдать каскады удвоений периода, которые ассоциируются с новыми, комплексными решениями функционального уравнения Фейгенбаума (11). Эти решения могут быть представлены в виде рядов по степеням z^m , причем каждому нечетному m отвечает $(m-1)/2$ различных комплексно-сопряженных пар неподвижных точек (11), а четному - одно действительное решение и $(m-2)/2$ комплексно-сопряженных пар.

В точках накопления бифуркаций удвоения периода, последовательности z_n , порождаемые отображениями вида (18) при старте из $z_0 = 0$, допускают описание в терминах фрактального сигнала (4) с комплексными параметрами $a = -1/\alpha$ и $b = 1/\alpha^m$. В табл. 1 приводятся значения параметра λ , соответствующие точкам накопления каскадов удвоений периода в отображении (18) при различных m , а также полученные в результате численного решения уравнения РГ (11) комплексные константы a и b (см. также [12]). Из рис.10 видно, что соответствие между моделью фрактального сигнала и динамикой комплексных аналитических отображений очень хорошее.

Таблица 1

Точки накопления удвоений периода для комплексных отображений $z \rightarrow \lambda - z^m$ и значения параметров a и b для фрактального сигнала, описывающего их динамику

m	λ	$-a$	b
3	1.063768980 + .244689164i	-0.0711231 + 0.526676i	0.0588262 - 0.1381009i
4	1.168363396 -.662752348 + .733365728i	-0.59160994 0.2289259 - 0.570646i	0.12250162 0.0063919 + 0.1427745i
5	1.106273870 + .081472852i 0.931548081 + .173983111i	- 0.4543062 - 0.431655i 0.4078290 - 0.536576i	0.0764963 + 0.0509744i -0.0149815 + 0.1382535i
6	1.109763025 .350140669 + 1.046537760i -.829296309 + .417925362i	-0.68131846 -0.2309544 + 0.625969 0.5233241 - 0.491469i	0.10002324 0.0461123 - 0.0752169i -0.025627 + 0.1344976i
7	1.089143713 + .033432524i .428277386 + .944463146i -.568210546 + .722577612i	-0.596 - 0.345i -0.0339267 - 0.695788i 0.6031723 - 0.448573i	0.065 + 0.037i 0.026627 + 0.750216i -0.031737 + 0.131834i

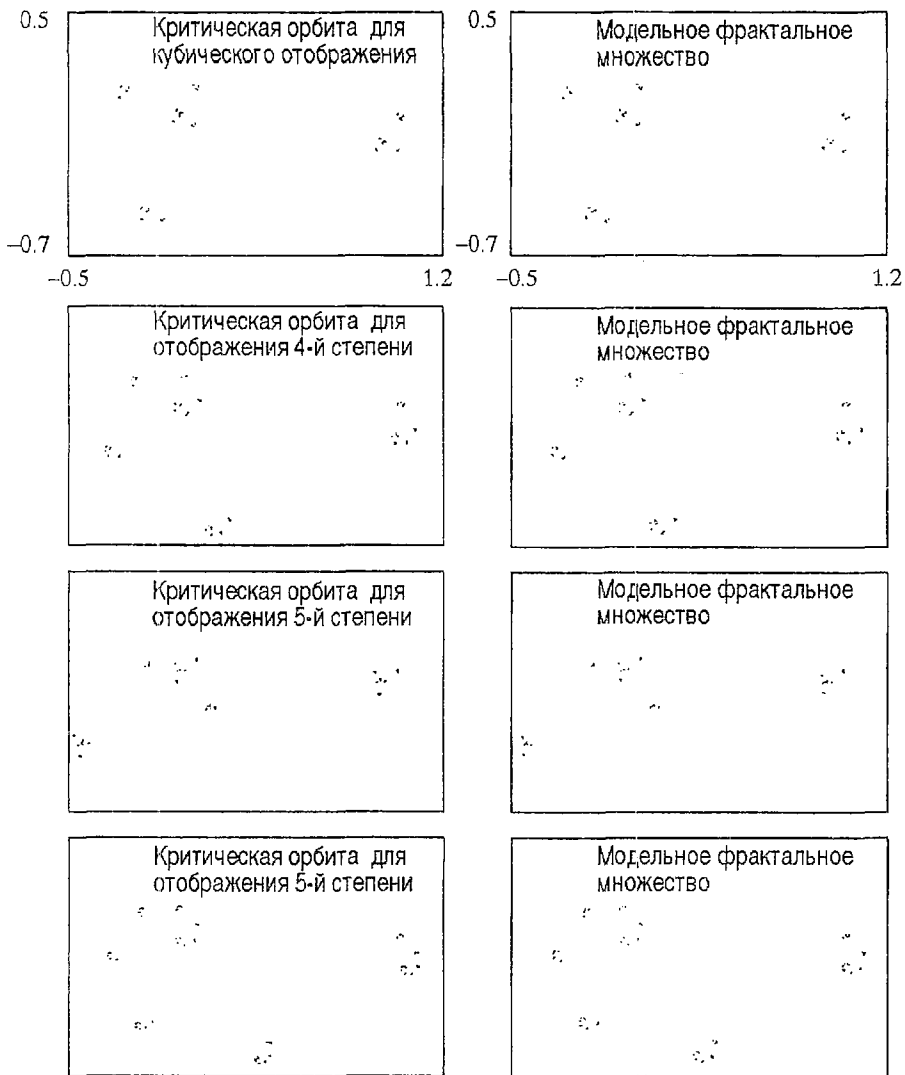


Рис. 10. Фрактальное множество на плоскости комплексной динамической переменной z , порождаемое отображениями вида $z \rightarrow \lambda \cdot z^m$ для $m = 3, 4$ и 5 . Значения параметра λ соответствуют точкам накопления удвоений периода в комплексной плоскости и приведены в табл.1

4. Воздействие фрактального сигнала на динамику системы, демонстрирующей переход к хаосу через удвоения периода. Модельное уравнение и трансформация бифуркационного дерева

Как только мы вводим в рассмотрение фрактальные сигналы, возникает естественный вопрос - что будет происходить при воздействии такого сигнала на нелинейные системы? Можно предположить, что интересные и нетривиальные эффекты могут реализоваться в том случае, если структура фрактального сигнала в каком-то смысле «приспособлена» к динамике системы, так, чтобы сходные по своей природе особенности поведения существовали бы на разных временных масштабах. Или, иначе говоря, - на разных уровнях иерархической структуры, с которой мы имеем дело, когда рассматриваем фрактальный сигнал.

С этой точки зрения, естественным «объектом приложения» для воздействия обсуждаемых в данной статье фрактальных сигналов являются системы, демонстрирующие каскад бифуркаций удвоения периода. Сконструируем

соответствующую модельную систему. Для этого возьмем логистическое отображение $X \rightarrow \lambda - X^2$, содержащее единственный существенный параметр λ , и предположим, что этот параметр включает переменную добавку в виде фрактального сигнала (5):

$$X_{n+1} = \lambda - X_n^2 + \varepsilon u_n. \quad (19)$$

Заменой $X = x\lambda$, $\varepsilon = c\lambda$, его можно привести к виду [4,5]

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + c u_n. \quad (20)$$

Параметр c определяет интенсивность воздействия фрактального сигнала, и мы будем именовать его *константой связи*.

Обсудим сначала на качественном уровне, что происходит с бифуркациями удвоения периода при включении фрактального сигнала.

Рассмотрим «усеченный» сигнал, который получается, если использовать для $n < 2^k$ формулу (5), а для $n \geq 2^k$ считать последовательность u_n периодически продолженной. С ростом k это дает все более точную аппроксимацию фрактального сигнала. Рассмотрим отображение, описывающее динамику нашей системы (20) за 2^k шагов. Задавая при различных λ ансамбль начальных условий x_0 , итерируем отображение так, чтобы исключить переходный процесс, а затем откладываем наблюдаемые точки на плоскости (λ, x) . Если константа связи нулевая, то получается обычное бифуркационное дерево Фейгенбаума (рис.11, слева). Каждая бифуркация удвоения представляется вилообразной структурой, «pitchfork» (рис.11, слева внизу). При $c > 0$ происходит трансформация этой структуры, показанная на рис.11 справа. Этот феномен «снятия вырождения» хорошо известен в теории бифуркации «pitchfork» [34]. Если, например, интерпретировать график на рис.11 внизу слева как зависимость прогиба вертикально поставленной металлической линейки от величины продольной нагрузки, то график справа будет представлять аналогичную зависимость для слегка деформированной линейки.

В нашем случае роль фактора, приводящего к снятию вырождения, играет внешнее воздействие на систему, демонстрирующую бифуркацию удвоения

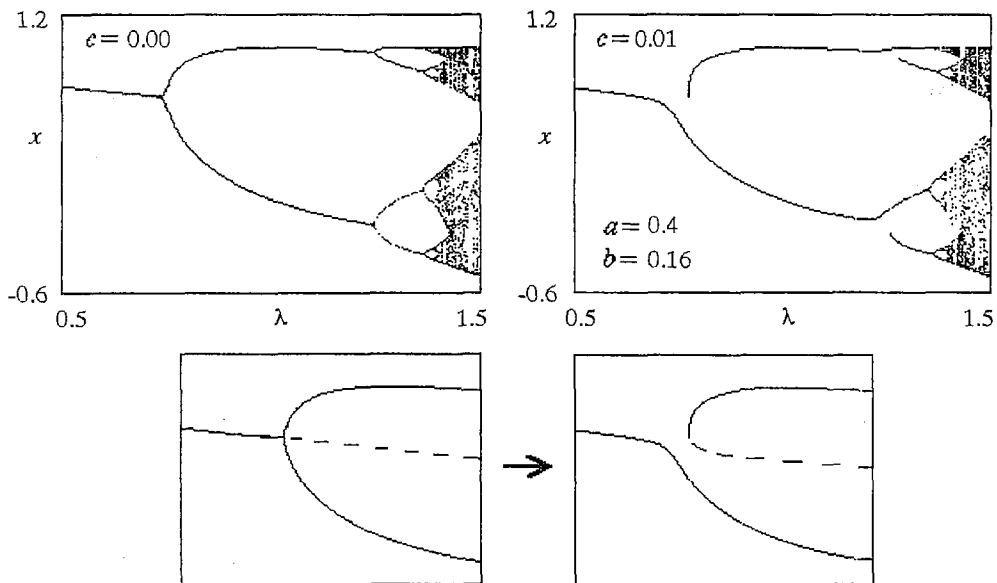


Рис. 11. Трансформация бифуркационного дерева при включении фрактального сигнала (см. текст). На графиках внизу сплошными линиями обозначены устойчивые, а штрихами - неустойчивые состояния

периода. Даже при очень малых c , вблизи точек разветвления «дерева» с номером меньше k , сигнал подталкивает систему так, что способствует выбору одного определенного из двух возможных вариантов фазы возникающих колебаний удвоенного периода. В случае $k \rightarrow \infty$, отвечающем фрактальному сигналу, бифуркации удвоения «разрушены» на всех уровнях. Как прогрессирует этот процесс от уровня к уровню - убывает ли относительная величина возмущения бифуркационной структуры или нарастает, - будет зависеть от параметров фрактального сигнала. Ясно во всяком случае, что при очень малых a и b будет реализоваться первая, а при достаточно больших - вторая возможность. Переход от первой ситуации ко второй находит свое выражение в бифуркации решения уравнения РГ, которая обсуждается ниже.

5. Ренормгрупповой анализ задачи о воздействии фрактального сигнала

Перейдем к РГ анализу, который позволит изучить различные возможности скейлингового поведения при переходе к хаосу в системе, подвергаемой воздействию фрактального сигнала. Основная идея такова. Представим фрактальный сигнал в виде суммы двух компонент I и II, первая из которых представляет собой «усеченный» сигнал периода 2^k , и построим отображение, описывающее динамику системы под действием «усеченного» сигнала за 2^k итераций. Теперь задача переформулирована: мы имеем новое отображение, и на него действует новый фрактальный сигнал, в качестве которого выступает компонента II. Если мы находимся на пороге возникновения хаоса, то оказывается возможным так перенормировать динамическую переменную, что уравнения, сформулированные для последовательных k , будут совпадать (в асимптотике по k). Эта ситуация интерпретируется как наличие неподвижной точки РГ преобразования. Итак, ключевой момент анализа состоит в том, чтобы построить процедуру перехода к описанию динамики на последовательно удваивающихся масштабах времени.

Начнем с самого простого для анализа случая, когда параметр фрактального сигнала $b = 0$. Тогда согласно (5)

$$u_{2n} = 0, \quad u_{2n+1} = -a(1+u_n), \quad (21)$$

причем $u_0 = 0$. Фрактальный сигнал (21) характеризуется единственным параметром a , управляющим его масштабными свойствами*. Из (6) видно, что хаусдорфова размерность в этом случае выражается явно: $D_0 = 1/\ln(a)$.

Введем обозначение $f(x) = 1 - \lambda x^2$ и исходя из отображения (20) перейдем к описанию динамики за два шага итераций. Поскольку каждый второй элемент внешнего сигнала равен нулю, то оператор эволюции выглядит очень просто:

$$x_{n+2} = f(f(x_n)) + cu_{n+1}. \quad (22)$$

Используя определение фрактального сигнала (5), получим

$$x_{n+2} = f(f(x_n)) - ca - cau_{n/2}. \quad (23)$$

Перенормируем переменную x по правилу $x \rightarrow x/\alpha$ и произведем переобозначение индекса n на $2n$. В результате получаем уравнение

$$x_{n+1} = f_1(x_n) + c_1u_n, \quad (24)$$

которое совпадает по форме с исходным, но с новой функцией f и другой константой связи c :

* В схеме генератора на рис.6 случай $b = 0$ соответствует тому, что каждый двухполюсник на выходе дает сигнал, равный нулю, если в соответствующем разряде счетчика имеется ноль. Кроме того, отсутствует сигнал на входе цепочки.

$$f_1(x) = \alpha f(f(x/\alpha)) + c_1, \quad c_1 = -\alpha a c. \quad (25)$$

Множественно повторяя эту процедуру, можно построить последовательность перенормированных операторов эволюции системы за 2^k шагов итераций. При этом оператор эволюции задается функцией $f_k(x)$ и константой связи c_k , которые подчиняются рекуррентным уравнениям РГ

$$f_{k+1}(x) = \alpha f_k(f_k(x/\alpha)) + c_k, \quad c_{k+1} = -\alpha a c_k. \quad (26)$$

Нас будут интересовать теперь неподвижные точки РГ преобразования (26), отвечающие за поведение системы на пороге возникновения хаоса. Сразу видно, что имеется две возможности - с нулевой и с ненулевой константой связи c .

При $c = 0$ для функции f получаем уравнение, совпадающее с уравнением Фейгенбаума (11). Его решением является функция Фейгенбаума $g(x)$, а масштабная константа $\alpha = \alpha_F = -2.5029...$ Соответствующую неподвижную точку РГ преобразования $\{g(x), c = 0\}$ мы называем *фейгенбаумовской*. В частности, она описывает поведение автономной системы на пороге хаоса.

При $c \neq 0$ из второго уравнения (26) следует, что должно быть $\alpha = -1/a$, и мы приходим к новому функциональному уравнению

$$g(x) = -g(g(ax))/a + c. \quad (27)$$

В этом уравнении масштабный фактор a не подлежит определению, как в уравнении Фейгенбаума, а представляет собой фиксированную величину, определяемую параметром фрактального сигнала. С другой стороны, аддитивная постоянная c должна быть найдена в процессе решения уравнения так, чтобы обеспечить существование решения в классе гладких четных функций с квадратичным экстремумом при заданном a . Найденное уравнение определяет *нефейгенбаумовскую* неподвижную точку РГ преобразования.

На рис. 12 показано семейство универсальных функций $g_a(x)$, полученных при различных значениях параметра фрактального сигнала a в результате численного решения уравнения (27). Заметим, что с ростом a максимум функции $g_a(x)$ становится все более пологим.

Из второго уравнения (26) видно, что если параметр фрактального сигнала $a < 1/|\alpha_F|$, то эффективная константа связи уменьшается по абсолютной величине при последовательных итерациях ренормпреобразования вблизи фейгенбаумовской неподвижной точки. Поэтому при надлежащем выборе управляющего параметра λ поведение системы будет определяться именно этой неподвижной точкой несмотря на то, что на нее действует внешний фрактальный сигнал. С другой стороны, при $a > 1/|\alpha_F|$ эффективная константа связи нарастает при итерациях, так что система уходит от фейгенбаумовской неподвижной точки.

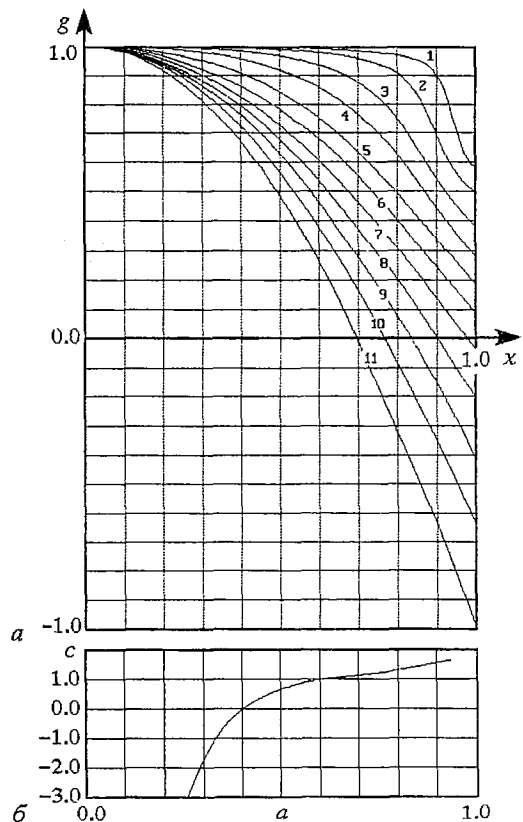


Рис. 12. Решения функционального уравнения РГ для задачи о воздействии фрактального сигнала на квадратичное отображение при $b = 0$; цифрами 1 - 11 обозначены кривые, для $a = 0.93, 0.9, 0.86, 0.82, 1/a = 1.31, 1.45, 1.7, 2.1, \alpha_F, 3, 3.7(a)$. Зависимость параметра c в уравнении (27) от a (б)

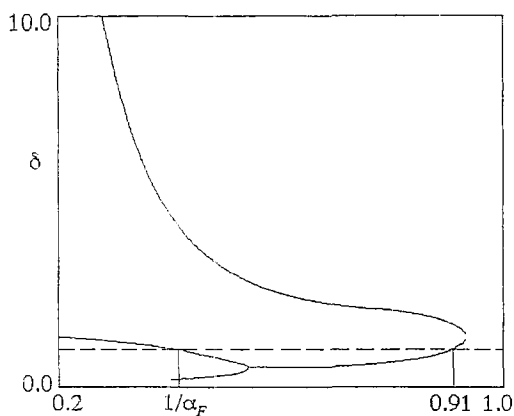


Рис. 13. Модуль собственного значения δ для нефейгенбаумовской неподвижной точки от параметра фрактального сигнала a при $b = 0$

Если мы рассмотрим линеаризованное уравнение (26), описывающее динамику возмущений вблизи фейгенбаумовской неподвижной точки, то при $a < 1/|\alpha_F|$ единственное существенное (приводящее к нарастанию при итерациях) собственное возмущение характеризуется собственным числом $\delta_1 = 4.6692\dots$, которое известно из теории Фейгенбаума и играет роль масштабного фактора, ответственного за скейлинговые свойства системы по управляющему параметру λ . При $a > 1/|\alpha_F|$ к нему добавляется второе существенное собственное число $\delta_2 = -\alpha_F a$. При $a = 1/|\alpha_F|$ происходит *бифуркация в уравнении ренормгруппы*; с этого момента за поведение системы на пороге хаоса отвечает нефейгенбаумовская неподвижная точка.

Для нефейгенбаумовской неподвижной точки линеаризованное РГ преобразование (26) приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$\delta h(x) = -[g'_\alpha(g_\alpha(-ax))h(-ax) + h(g_\alpha(-ax))]/a. \quad (28)$$

Численное решение показывает, что спектр собственных чисел δ , который зависит от параметра фрактального сигнала a , содержит единственное существенное собственное число $\delta_1(a)$, превышающее по модулю 1, в интервале a от $1/|\alpha_F|$ до 0.91 (рис.13 и табл.2). Это собственное число представляет собой масштабный фактор, который отвечает за скейлинг по управляющему параметру λ в указанной области изменения a .

Таблица 2

Масштабные константы и собственные числа для нефейгенбаумовской неподвижной точки уравнения (14)

b	a	α_{NF}	$\delta_{NF}^{(1)}$	$\delta_{NF}^{(2)}$
0	0.28571	3.50000	9.451	1.232
	0.38462	2.60000	5.03506	1.03642
	0.43416 0.5	2.30329 2.00000	3.99075 3.15823	<1
0.05	0.1	3.62884	10.08665	1.41811
	0.15	3.27345	8.08463	1.30943
	0.2	2.95726	6.52502	1.19965
0.1	0	3.16228	7.42181	1.36605
	0.1	2.74442	5.57055	1.14818
	0.3	2.04806	3.33476	<1
	0.4 0.5	1.17701 1.53259	2.75770 2.39421	
0.15963	0.39954	1.54945	2.44700	<1
0.2	0.1	2.03762	3.36808	<1
	0.2	1.83305	2.93239	
	0.3	1.62654	2.57723	
0.3	0.1	1.68773	2.71621	<1

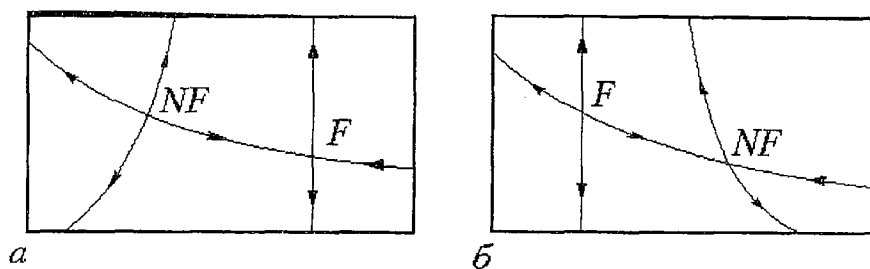


Рис. 14. Качественное пояснение порождаемой уравнением РГ динамики в системе под действием фрактального сигнала: *a* - до бифуркации, когда за критическое поведение отвечает фейгенбаумовская неподвижная точка *F*, *б* - после бифуркации, когда эта роль переходит к нефейгенбаумовской неподвижной точке *NF*

Рис. 14 схематически иллюстрирует динамику решения уравнения РГ до и после бифуркации. Тип этой бифуркации хорошо известен в общей теории [34] и соответствует слиянию и обмену характера устойчивости двух неподвижных точек. Заметим, что в теории фазовых переходов аналогичная по своей природе бифуркация имеет место в ситуации, когда размерность пространства рассматривается как непрерывный параметр и изменяется таким образом, что переходит через критическое значение (4 для моделей типа Изинга) [35].

При переходе *a* через 0.91 два комплексно-сопряженных собственных числа становятся по модулю больше 1, и происходит какое-то новое изменение характера динамики, детали которого пока не ясны.

Если оба параметра фрактального сигнала *a* и *b* отличны от нуля, то РГ анализ усложняется: в этом случае приходится иметь дело с функциями двух переменных. Однако основным феноменом - наличием бифуркации слияния и обмена устойчивости неподвижных точек - сохраняется.

Обозначим правую часть (20) через $f_0(x, u)$ и перейдем к отображению, описывающему изменение состояния за два временных шага:

$$x_{n+2} = f_0(f_0(x_n, u_n), u_{n+1}). \quad (29)$$

Изменяя масштаб динамической переменной *x* в некоторое число раз α и выражая u_n и u_{n+1} через $u_{n/2}$ в соответствии с (5.1), получаем новое отображение $f_1(x, u)$. Многократно повторяя процедуру, приходим к рекуррентному уравнению

$$f_{k+1}(x, u) = \alpha f_k(f_k(x/\alpha, b(1+u)), -a(1+u)). \quad (30)$$

Нахождение неподвижных точек этого РГ преобразования подразумевает определение масштабной константы α и функции $f(x, u)$, удовлетворяющей уравнению

$$f(x, u) = \alpha f[f(x/\alpha, b(1+u)), -a(1+u)]. \quad (31)$$

Если рассмотреть малое возмущение неподвижной точки в виде $f_m(x, u) = f(x, u) + \delta^m h(x, u)$, где *h* - малая добавка, то в линейном приближении получаем:

$$\delta h(x, u) = \alpha [f'(f(x/\alpha, b(1+u)), -a(1+u))h(x/\alpha, b(1+u)) + h(f(x/\alpha, b(1+u)), -a(1+u))]. \quad (32)$$

Отсюда могут быть найдены собственные функции $h(x, u)$ и собственные числа δ , характеризующие скейлинговые свойства по параметрам вблизи точки перехода к хаосу в системе с фрактальным сигналом (см. табл.2).

На рис. 15 сплошными линиями показаны найденные путем численного решения уравнений (31), (32) зависимости скейлинговых констант δ и *a* от параметра фрактального сигнала *a* при $b = 0, 0.1$ и 0.2 . Характерный излом на графиках отвечает точке бифуркации. До бифуркации критические индексы

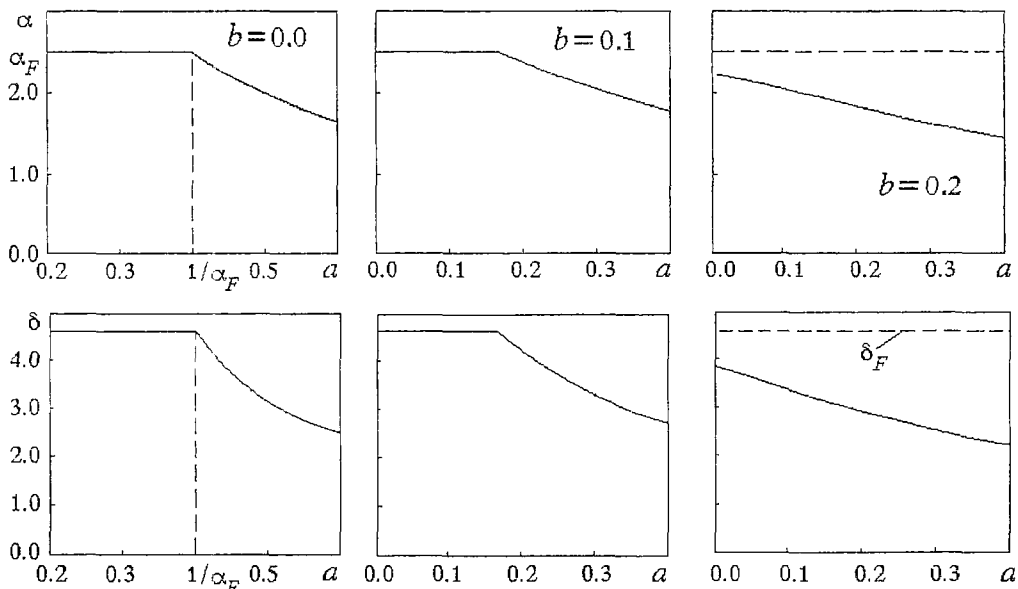


Рис. 15. Масштабные факторы α и δ , при воздействии на квадратичное отображение фрактального сигнала в зависимости от его параметра f при фиксированных $b = 0, 0.1$ и 0.2 . Излом соответствует бифуркации в уравнении ренормгруппы

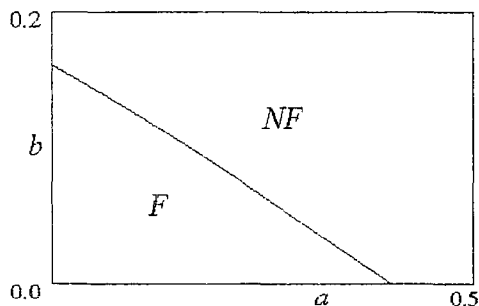


Рис. 16. Бифуркационная линия на плоскости параметров фрактального сигнала, F и NF - области, где критическое поведение системы под воздействием этого сигнала определяется фейгенбаумовской и нефейгенбаумовской неподвижной точкой уравнения РГ

фейгенбаумовские и не зависят от параметров фрактального сигнала, а после бифуркации - зависят.

Чтобы найти бифуркацию слияния неподвижных точек, подставим в (30) $f(x,u) = g(x) + uh(x)$, где $g(x)$ - функция Фейгенбаума, а $uh(x)$ - малая добавка. Приравнивая члены первого порядка малости, получаем следующее условие существования двукратно вырожденной неподвижной точки:

$$h(x,u) = \alpha[(b/a)g'(g(x/\alpha))h(x/\alpha) - h(g(x/\alpha))]. \quad (33)$$

На плоскости параметров a, β точки бифуркации располагаются на кривой, показанной сплошной линией на рис. 16.

6. Динамика под действием фрактального сигнала: свойства скейлинга

В этом разделе мы рассмотрим компьютерные иллюстрации, которые демонстрируют скейлинговые свойства динамики модельного отображения под действием фрактального сигнала в различных ситуациях, выявленных при РГ анализе.

На рис.17 и 18 показаны примеры зависимостей ляпуновского показателя Λ от управляющего параметра λ и бифуркационные деревья при таких параметрах фрактального сигнала, когда поведение на пороге хаоса определяется фейгенбаумовской и нефейгенбаумовской неподвижными точками. На каждом графике выделены фрагменты, внутри которых, согласно результатам РГ анализа, картинки должны воспроизводиться: пересчет масштаба производится в δ раз по

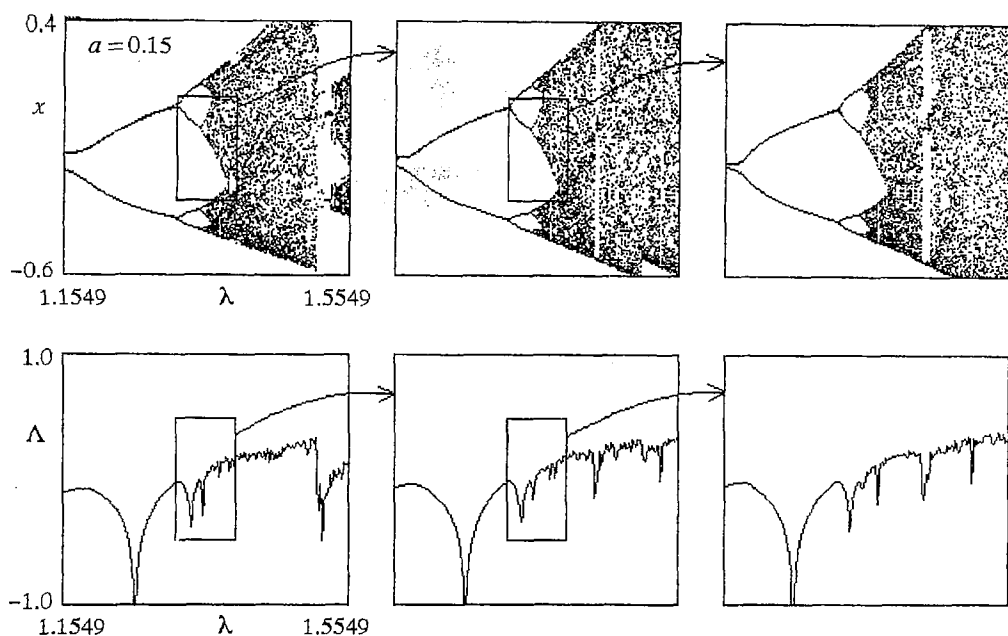


Рис. 17. Бифуркационные деревья на графиках x от λ и ляпуновские показатели Λ в зависимости от λ для отображения (20). Критическая точка находится в центре каждой картинке. Фейгенбаумовский скейлинг - факторы пересчета масштаба по оси x : $\alpha_F = -2.5029\dots$, по оси λ : $\delta_F = 4.6692\dots$, по оси Λ : 2

оси параметра λ , в α раз по оси x , и в 2 раза по оси Λ . Здесь δ и α - масштабные факторы, полученные из РГ анализа для соответствующих неподвижных точек уравнений РГ при данных значениях параметров фрактального сигнала (см. подписи к рисункам).

Заметим, что в области до бифуркации графики «деревьев» и ляпуновских показателей хотя и отличаются внешне от классических фейгенбаумовских, но с увеличением разрешения, на глубоких уровнях фрактальной структуры, это отличие становится все меньше и меньше. Напротив, после бифуркации графики выглядят совершенно иначе. Более того, их вид начинает существенно зависеть от a и b . В этом находит свое выражение зависимость решения уравнения РГ от параметров фрактального сигнала, характерная для нефейгенбаумовской неподвижной точки.

При еще больших значениях параметров a и b характер динамики изменяется, причем детали этого изменения еще неясны. В частности, при $b = 0$ это изменение, по-видимому, связано с обнаруживающейся при $a = 0.91$ еще одной бифуркацией в уравнении ренормгруппы, когда два комплексно-сопряженных собственных числа нефейгенбаумовской неподвижной точки становятся по модулю больше 1. Заметим, впрочем, что при $a=1, c=1, \lambda=1$ имеет место замечательный по простоте частный случай динамики системы (20): имеется ровно два сверхустойчивых неперiodических режима динамики, в каждом из которых переменная x последовательно принимает одно из трех значений $-1, 0$ и 1 . Начальный участок обеих последовательностей и фрактального сигнала u_n для этого случая приводится в табл. 3.

В заключение продемонстрируем, как можно воспользоваться результатами исследования динамики под действием фрактального сигнала для анализа задачи о переходе к хаосу в системе двух одномерных отображений при наличии однонаправленной связи. Рассмотрим модельную систему следующего вида:

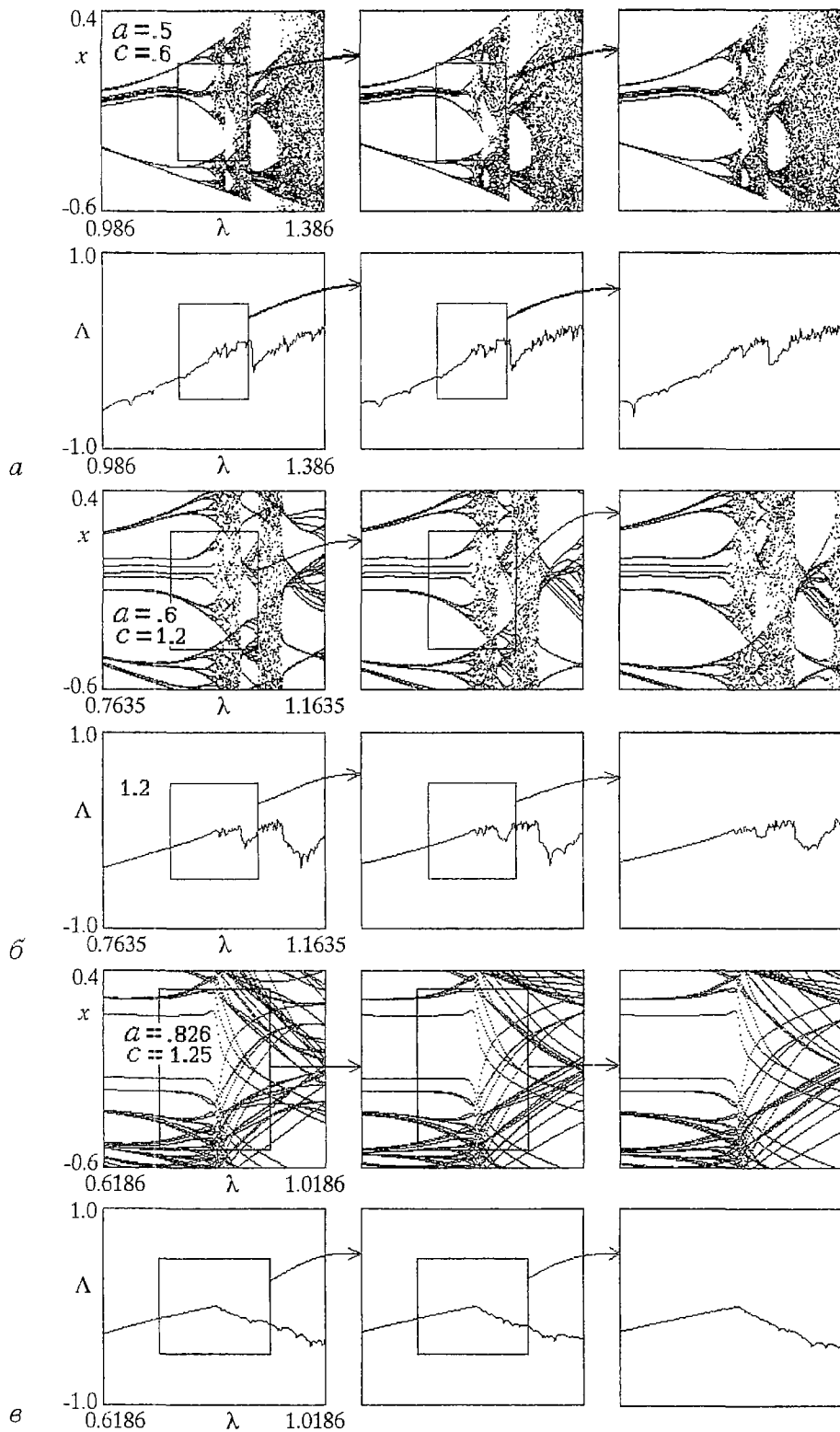


Рис. 18. Бифуркационные деревья на графиках x от λ и ляпуновские показатели Λ в зависимости от λ для отображения (20) при различных a и $b = 0$. На каждой картинке критическая точка находится в центре. Нефейгенбаумовский скейлинг - факторы пересчета масштаба по осям x и λ зависят от параметров фрактального сигнала: а) $\alpha = -2$, $\delta = 3.1582$, б) $\alpha = -1.6666$, $\delta = 2.5203$, в) $\alpha = -1.2106$, $\delta = 2$.

Таблица 3

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
u_n	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	
режим	1	0	1	-1	0	1	0	0	1	-1	0	0	1	0	1	-1	0	1
x_n																		
режим	2	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	-1	0	1	0	0	1	0

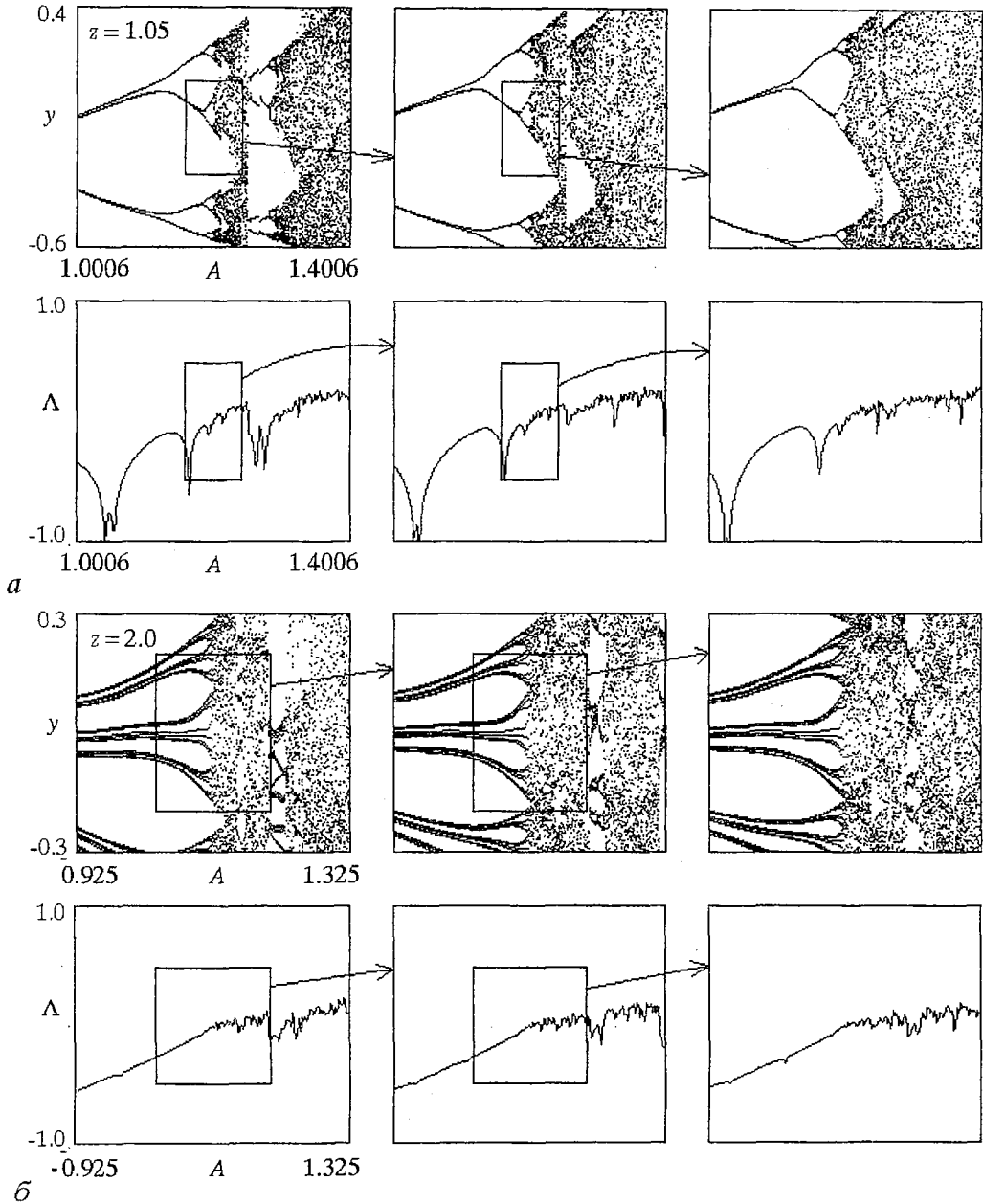


Рис. 19. Бифуркационные деревья на графиках u от λ и ляпуновские показатели Λ_u в зависимости от λ для системы двух отображений с однонаправленной связью (34): *a* - в первой подсистеме $z=1.05$, $\lambda=1.08164912$, во второй - фейгенбаумовский скейлинг, факторы пересчета масштаба по оси u и λ , соответственно α_F и δ_F ; *б* - в первой подсистеме $z=2$, $\lambda=1.401155189$, во второй - нефейгенбаумовский скейлинг, факторы пересчета масштаба по оси u и λ , соответственно $\alpha_B = -1.50532$ и $\delta_B = 2.39272$

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda|x_n|^z, \\y_{n+1} &= 1 - Ay_n^2 - B|x_n|^z,\end{aligned}\tag{34}$$

где $z > 1$.

Выберем параметр λ так, чтобы он соответствовал точке накопления бифуркаций удвоения периода в первой подсистеме, и будем рассматривать ее как генератор фрактального сигнала (см. разд.3). Сопоставляя параметры этого фрактального сигнала $a = 1/|\alpha(z)|$ и $b = 1/|\alpha(z)|^z$ и расположение бифуркационной линии на рис.16, мы обнаруживаем, что при $z = 1.05$ точка лежит ниже, а при $z = 2$ - выше этой линии. Это значит, что поведение второй подсистемы на пороге хаоса будет определяться в первом случае фейгенбаумовской, а во втором - нефейгенбаумовской неподвижной точкой РГ уравнений.

Отсюда следует, что динамика второй подсистемы в зависимости от управляющего параметра A в первом случае должна подчиняться скейлингу с классическим масштабным фактором $\delta_f = 4.6692\dots$, тогда как во втором случае масштабный фактор будет другим. В соответствии с численными данными табл.2, масштабный фактор для динамической переменной равен в этом случае -1.54945 , а для управляющего параметра 2.44700 . Действительно, как мы знаем, при однонаправленной связи двух логистических отображений возникает тип критического поведения, названный бикритическим (см. [23,24,11,22,26,27] и разд.3). Приведенные значения масштабных констант хорошо согласуются с результатами для бикритичности (соответственно, $-1.50532\dots$ и $2.39272\dots$).

На рис. 19 показаны бифуркационные деревья и графики ляпуновских показателей, построенные для модельной системы (34) при $z = 1.05$ и 2 . Параметр первой подсистемы отвечает точке накопления удвоений периода при данном z , соответственно, $\lambda = 1.0816491238\dots$ и $1.401155189\dots$; константа связи $B = 0.375$. Фрагменты картинок, показанные в увеличенном виде, демонстрируют скейлинг, согласующийся с проведенным анализом.

Заключение

Достигнутые за последние годы успехи в области теории фракталов и ее приложений доказали плодотворность этого подхода, существенно повлияли на формирование научной картины мира. С одной стороны, идеи фрактальной геометрии позволяют описывать и интерпретировать как фракталы многие естественные объекты, которые имеют самподобную (в той или иной степени) структуру в широком диапазоне масштабов. В частности, вошли в обиход и получили распространение количественные характеристики, такие как фрактальная размерность, отражающие иерархические свойства фрактальных объектов. С другой стороны, идея фрактала подразумевает наличие определенной системы правил (детерминированных или стохастических), позволяющих воспроизводить структуру шаг за шагом от одних масштабов к другим. Сформулировать в явном виде такую систему правил - это значит сконструировать точную или приближенную теоретическую модель фрактального объекта.

В этом ключе можно рассматривать и проблему фрактальных сигналов. В этой статье обсуждается только одна простая модель, которая, тем не менее, позволяет описывать свойства достаточно широкого класса сигналов, порождаемых нелинейными системами на пороге возникновения хаоса. Можно надеяться, что идея конструирования моделей фрактальных сигналов с использованием более сложных «правил игры», как детерминированных, так и стохастических, окажется плодотворной для описания и анализа широкого круга явлений, встречающихся в разных областях в природе и технике.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-02-16169).

Библиографический список

1. *Peinke J., Castaing B., Chabaud B., et al.* On a fractal and an experimental approach to turbulence.
2. *Schroeder M.* Fractals, Chaos, Power Laws. Freeman & C^o, NY, 1991. P. 295.
3. *Ebeling W., Nicolis G.* Entropy of symbolic sequences: The role of correlations // *Europhysics Letters*. 1991. Vol. 14, № 3. P. 191.
4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Воздействие фрактального сигнала на систему Фейгенбаума и бифуркация в уравнении ренормгруппы // *Изв.вузов. Радиофизика*. 1991. Т. 34, № 6. С. 661.
5. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period doubling system under fractal signal: bifurcation in the renormalization group equation // *Chaos, Solitons and Fractals*. 1991. Vol. 1, № 4. P. 355.
6. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Генератор фрактального сигнала // *Письма в ЖТФ*. 1992. Т. 18, вып.24. С. 19.
7. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
8. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. Vol. 21, № 6. P. 669.
9. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН*. 1983. Т. 141, № 2. С. 343.
10. *Halsey T. S., Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I., Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities // *Phys. Rev.* 1986. Vol. A33. P. 1141.
11. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Bicritical dynamics of period-doubling system under the fractal signal // *Int. J. of Bifurc. and Chaos*. 1991. Vol.1, № 4. P. 839.
12. *Кузнецов С.П.* Каскад удвоенный периода в комплексном кубическом отображении: ренормгрупповой анализ и количественная универсальность (в печати).
13. *Huberman B., Zisook A.* Power spectra of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 26. P. 626.
14. *Nauenberg M., Rudnik J.* Universality and the power spectrum at the onset of chaos // *Phys. Rev.* 1981. Vol. B24. P. 493.
15. *Hu B., Mao J.M.* Period Doubling: universality and critical point order // *Phys.Lett.* 1982. Vol. 25A, № 6. P. 3259.
16. *Van der Weele J.P., Capel H.W., Kluiving R.* On the scaling factors (z) and (z) // *Phys.Lett.* 1986. Vol. A119, № 1. P. 15.
17. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. С. 239.
18. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map: Critical lines and tricritical behavior // *Phys.Rev.* 1981. Vol. A24. P.2669.
19. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Дерево сверхустойчивых орбит и скейлинг в трехпараметрических отображениях // *Письма в ЖТФ*. 1992. Т. 18, вып.21. С. 34.
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Three- parameter scaling for one-dimensional maps // *Phys.Lett.* 1994. Vol. A189. P. 367.
21. *Eckmann J.P., Koch H., Wittwer P.* Existence of a fixed point of the doubling transformation for area-preserving map of the plane // *Phys.Rev.* 1982. Vol.A26. P. 720.
22. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // *Phys.Lett.* 1992. Vol. A162, № 3. P. 236.
23. *Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Новый тип критического поведения связанных систем при переходе к хаосу // *Доклады АН СССР*. 1986. Т. 287, № 3. С. 619.
24. *Кузнецов С.П.* Динамика двуз однонаправленно связанных систем Фейгенбаума у порога гиперхаоса. Ренормгрупповой анализ // *Изв.вузов Радиофизика*. 1990. Т. 33, №7. С. 788.
25. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Variety of types of critical behavior

and multistability in period doubling systems with uni-directional coupling near the onset of chaos // *Int.J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3, № 1. P. 139.

26. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Multi-parameter transition to chaos and fractal nature of critical attractors // In book: *Fractals in the Natural and Applied Sciences* / Ed. M.Novak. Elsevier Science, B.V. 1994. P. 413.

27. *Erastova E.N., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Two-parameter criticality in nonlinear systems near the onset of chaos: *Proc. Int. Seminar «Nonlinear Circuits and Systems»*. М., 1992. Vol.2. P. 131.

28. *MacKay R.S., Van Zeijts J.B.* Period doubling for bimodal maps: A Horseshoe for a Renormalization Operator // *Nonlinearity*. 1988. Vol. 1. P. 253.

29. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O.* Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: Renormalization Group, Universality and Scaling // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3, № 4. P. 943.

30. *Кузнецов С.П.* Критический квазиаттрактор: бесконечное самоподобное множество устойчивых циклов, возникающих при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу // *Письма в ЖТФ*. 1994. Т.20, вып.10. С. 11.

31. *Гольдберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательности бифуркаций утроения периода // *УМН*. 1983. Т. 38, № 1. С.159.

32. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Universality for period n-tupling in complex mappings // *Phys.Lett*. 1983. Vol. 94A. P. 329.

33. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Complex universality // *Commun.Math.Phys*. 1989. Vol. 121. P. 225.

34. *Иосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.

35. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.

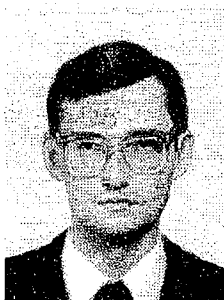
*Институт радиотехники и электроники
РАН, Саратовский филиал*

Поступила в редакцию 13.01.95

FRactal signal and dynamics of periodic-doubling systems

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov and I.R. Sataev

The model of fractal signal having a phase portrait in a form of two-scale Cantor set provides a possibility to describe many real signals generating by dynamical systems at the onset of chaos and to treat them in a unified way. The points in the parameter plane of the fractal signal are outlined, which correspond to these real types of dynamical behavior. Simple electronic circuit admitting experimental realization is suggested, that generates the fractal signal with tunable parameters. Renormalization group analysis is developed for the case of period-doubling system forced by the fractal signal. It is shown that a bifurcation takes place in the RG equation, and the behavior at the onset of chaos may be described by either Feigenbaum or non-Feigenbaum fixed point solutions. The results of numerical simulations are presented to illustrate the scaling properties of the dynamics forced by the fractal signal.



Кузнецов Александр Петрович родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Автор двух популярных книг по физике.



Кузнецов Сергей Петрович родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал свыше 100 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соавтор 2 монографий. В качестве приглашенного профессора в 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.



Сатаев Игорь Рустамович родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт (1982). Занимался проблемами лазерной физики. С 1988 года работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН, научный сотрудник. Область научных интересов - методы решения ренормгрупповых уравнений, компьютерное моделирование скейлинга на пороге хаоса, исследование критических явлений в реальных нелинейных системах. Имеет 20 публикаций.



ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ДВУХРЕЗОНАТОРНЫХ КЛИСТРОННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРАХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В. В. Афанасьева, А. Г. Лазерсон

Изложены результаты исследования хаотической динамики некоторых электронных СВЧ генераторов: двухрезонаторного клистронного генератора с запаздывающей обратной связью (ЗОС), двухрезонаторного гироклистрона и связанных клистронов с ЗОС. Построена приближенная нелинейная нестационарная теория двухрезонаторного клистрона (гироклистрона) с ЗОС. Показано, что в двухрезонаторном клистроне (гироклистроне) с ЗОС в широкой области параметров существуют хаотические автоколебания. Переходы к хаосу происходят по сценарию, типичному для симметричных систем: пара асимметричных предельных циклов (ПЦ) вместо удвоения периода сливается с возникающим в фазовом пространстве (ФП) метастабильным хаотическим множеством, в результате чего в ФП системы рождается симметричный СА, отличающийся от фейгенбаумовского спектральными и статистическими характеристиками. Более одной-двух бифуркаций удвоения и рождения асимметричного фейгенбаумовского СА не наблюдается. С ростом параметра обратной связи m в ФП системы последовательно появляются новые симметричные ПЦ. Переходы к хаосу от циклов аналогичны описанному выше. Области существования различных симметричных СА найдены для различных времен задержки. При больших значениях параметра обратной связи m симметричные СА связываются, образуя единое протяженное хаотическое множество большой размерности. Фазовая траектория блуждает по парциальным аттракторам, последовательно переходя с одного на другой или совершая скачки. Спектр такого хаотического процесса имеет вид $1/f$. Показано, что КПД клистронного генератора достигает максимального значения в окрестности бифуркационных значений управляющего параметра, а в режимах хаотической генерации может превышать значения, характерные для режима одночастотной генерации. Обнаружен эффект расширения полосы генератора, обусловленный динамической электронной нагрузкой пучка в режиме хаотических колебаний.

Введение

Усиливающийся интерес к приложениям идей и методов теории динамических систем в СВЧ электронике и, вместе с тем, широкие возможности для проявления эффектов динамического хаоса (ДХ) в электронных СВЧ приборах побуждают исследователей заново взглянуть на различные классы СВЧ приборов, в первую очередь, с точки зрения возможности построения мощных широкополосных генераторов СВЧ шума. В этой связи представляет интерес рассмотреть сложную динамику колебаний, возникающих в прелетных клистропах с внешней запаздывающей обратной связью (ЗОС), построенных по типу

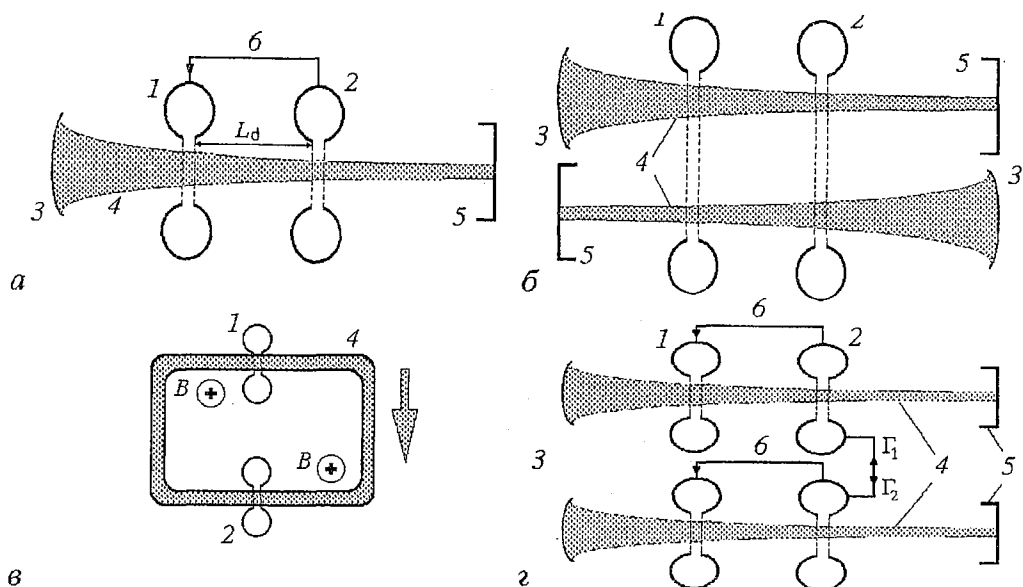


Рис. 1. Различные схемы клистронов с ЗОС: *a* - двухрезонаторный клистрон с ЗОС; *б* - двухрезонаторный двухлучевой клистрон; *в* - двухрезонаторный клистрон с кольцевым пучком; 1, 2 - резонаторы, 3 - электронная пушка, 4 - электронный пучок, 5 - коллектор, 6 - линия обратной связи резонаторов

«шумотрона» (см., например, [1]). Следует отметить, что, в отличие от ламп бегущей волны (ЛБВ) с ЗОС, подобные радиотехнические схемы с клистроном (рис. 1) никогда не исследовались, по-видимому, из-за достаточно узкой рабочей полосы клистронов по сравнению с ЛБВ. Однако, если речь идет об относительной ширине полосы порядка нескольких процентов, то простота конструкций автогенераторов, представленных на рис. 1, вкуче с достаточно высоким КПД клистронов, делает их весьма привлекательными.

В настоящей работе анализируется сложная динамика клистронных генераторов с ЗОС и систем связанных автогенераторов, определены области параметров регулярной и хаотической динамики, найдены типы переходов к хаосу и взаимодействия аттракторов, приводящие к развитым хаотическим режимам, а также определены энергетические и спектральные характеристики генераторов в различных режимах колебаний.

1. Рассматриваемые системы и основные уравнения

1.1. Двухрезонаторный клистрон с ЗОС (см. рис. 1, *a*). Выведем сначала уравнения, описывающие динамику двухрезонаторного клистронов. При выводе будем использовать кинематическое приближение для электронного потока (пренебрегаем влиянием сил пространственного заряда). Движение электронов считаем одномерным, а длины зазоров резонаторов d_i много меньшими длины волны, так что ВЧ поле в зазорах можно считать однородным и можно пренебречь группировкой электронов в зазорах.

В режиме монохроматических колебаний комплексная амплитуда ВЧ поля в зазоре $E(z, t) = \text{Re}\{E^\wedge \exp(-i\omega t + \phi)\}$, где $E^\wedge - \text{const}$. В рамках нестационарной модели $E^\wedge = E^\wedge(t)$ - медленно меняющаяся по сравнению с экспонентой функция, соответствующая узкополосному нестационарному процессу.

В зазоре входного ($i = 1$) резонатора происходит модуляция скорости электронов ВЧ полем, в результате чего на выходе из 1-го резонатора имеем (см., например, [2]):

$$v(t) = v_0 \{1 + \xi_1(t) M \cos(\omega t + \phi_0/2 + \Phi)\} \quad (1)$$

Здесь $\xi_1(t) = U_1(t)/(2U_0)$ - безразмерное ВЧ напряжение на 1-ом зазоре, $U_1(t) = E_1^{\wedge}(t) \cdot d_1$, U_0 - постоянное напряжение, $M = \sin(\phi_0/2)/(\phi_0/2)$ - параметр эффективности модуляции, ϕ_0 - невозмущенный угол пролета в зазоре.

В пространстве дрейфа ($d_1 \leq z \leq d_1 + L_d$) происходит группировка пучка. Вычисляя стандартным способом амплитуду первой гармоники сгруппированного тока с учетом медленности изменения $\xi_1(t)$, имеем

$$i_1^{\wedge}(t) = 2 I_0 J_1[X(t)], \quad (2)$$

где I_0 - постоянный ток пучка, $X = \xi_d \theta M$, $\theta_d = \omega L_d / v_0$ - пролетный угол в пространстве дрейфа, J_1 - функция Бесселя первого порядка.

В выходном резонаторе ($i=2$) сгруппированный ток $i^{\wedge}(t)$ (индекс, соответствующий номеру гармоники, отбрасываем) возбуждает ВЧ поле в полосе частот вблизи комплексной резонансной частоты $\omega_2 = \omega_2' - i\omega_2''$ выходного резонатора. Комплексная амплитуда ВЧ напряжения $U_2(t)$ находится из уравнения возбуждения выходного резонатора [2], которое имеет вид

$$dU_2/dt - i(\omega - \omega_2)U_2 = i^{\wedge}(t)\omega_2''\rho_2, \quad (3)$$

где ρ_2 - усредненное по поперечному сечению пучка волновое сопротивление выходного резонатора. Вводя безразмерные переменные выходного напряжения $\xi_2(t) = U_2(t)/2U_0$, затухания $\alpha_2 = 1/2Q_2$, где Q_2 - добротность выходного резонатора, и времени $\tau = \omega_2' t$, получим из уравнения (3)

$$\dot{\xi}_2 + \alpha_2 \xi_2 = 2\alpha_2 \varepsilon_2 J_1[\xi_1(t) M \theta_0], \quad (4)$$

где $\varepsilon_2 = I_0 \rho_2 / 2U_0$ - аналог параметра Пирса для резонатора.

Уравнение (4) описывает усиление нестационарного сигнала в двухрезонаторном клистронном усилителе. Чтобы получить уравнения, описывающие автогенератор, необходимо задать связь между полями выходного ξ_2 и входного ξ_1 резонаторов, обусловленную цепью ЗОС. С этой целью запишем уравнение возбуждения входного резонатора полем E_2^{\wedge} , поступающем из выходного резонатора в следующем виде:

$$dE_1^{\wedge}/dt + \omega_1' E_1^{\wedge} / 2Q_1 = \Gamma_{12} E_2^{\wedge} (t - T_3), \quad (5)$$

где Γ_{12} - коэффициент обратной связи, T_3 - время запаздывания цепи ЗОС, E_1^{\wedge} , ω_1' , Q_1 - соответственно амплитуда ВЧ поля, собственная частота и добротность входного резонатора. Переходя к безразмерным переменным $x_i = \xi_i$, $m = 2\alpha_2 \Gamma_{12} \theta_d M_1$, $T = \omega_2' T_3$, $\alpha_1 = 1/(2Q_1)$, имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \alpha_1 x_1 = \gamma x_2(\tau - T), \\ \dot{x}_2 + \nu \alpha_2 x_2 = m J_1[x_1(\tau)], \end{cases} \quad (6)$$

где $\nu = \omega_2' / \omega_1'$ - параметр расстройки резонаторов, $\gamma \equiv \Gamma_{12}$.

Если считать добротность входного резонатора Q_1 достаточно низкой, то из первого уравнения (6) следует простая функциональная связь между полями, при этом автогенератор описывается одним дифференциальным уравнением

$$\dot{x} + \alpha x = m J_1[x(\tau - T)], \quad (7)$$

где $x \equiv x_2$, $\alpha \equiv \alpha_2$, $m = 2\alpha \gamma M_1 \theta_d \varepsilon_2$ - параметр возбуждения генератора. Это простейшее уравнение, описывающее динамику двухрезонаторного клистрона с

ЗОС*. Из уравнения (7), в частности, следует условие стационарной генерации

$$\alpha x_s = m J_1(x_s), \quad (8)$$

откуда определяется амплитуда x_s установившихся колебаний на частоте $\omega_0 \equiv \omega_2'$. Как следует из более детального анализа, эти колебания устойчивы в нечетных (по номеру соответствующего корня уравнения) зонах и неустойчивы в четных зонах колебаний (число зон при конечных значениях α и m всегда конечно).

Можно показать [3, 4], что уравнения (6) - (8) описывают также автогенератор на двухрезонаторном гироклистроне, причем в этом случае безразмерные переменные напряжений на резонаторах для модели, предложенной В.К. Юшатовым, равны

$$x_i = 2\mu d_i e m_e E_i^{\wedge}(t) / p_{\perp} p_z,$$

где $\mu = 1/2 \omega p_{\perp}^2 / (c^2 p_z m_e)$, p_z, p_{\perp} - продольная и поперечная компоненты импульса электронов [4], а параметр m выражается следующим образом:

$$m = 2\alpha \mu e L_d e m_e \gamma M / p_z^2.$$

1.2. Другие конструкции клистронных автогенераторов с ЗОС.

Представляет интерес рассмотреть также более сложные конструкции двухрезонаторных клистронных генераторов, в которых роль ЗОС играет сам электронный пучок (или несколько пучков). Так, в клистроне с двумя встречными пучками (см. рис. 1, б) обратная связь осуществляется каждым из пучков, а в генераторе с кольцевым электронным потоком (см. рис. 1, в) - одним и тем же пучком, изменяющим направление движения за счет внешнего магнитного поля. По аналогии с рассмотренным выше генератором (см. рис. 1, а) имеем для генератора на встречных пучках и для генератора с кольцевым пучком

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \alpha_1 x_1 = m_1 J_1[x_2(\tau - T_1)], \\ \dot{x}_2 + \nu \alpha_2 x_2 = m_2 J_1[x_1(\tau - T_2)]. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь ν - параметр расстройки резонаторов, T_i - времена пролета электронов в прямом и обратном направлениях.

И, наконец, приведем уравнения, описывающие систему двух связанных генераторов на двухрезонаторных клистромах (см. рис.1,з).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \alpha_1 x_1 = m_1 J_1[x_2(\tau - T_1)] + C_{12} x_2(\tau - \tau_2), \\ \dot{x}_2 + \nu \alpha_2 x_2 = m_2 J_1[x_1(\tau - T_2)] + C_{21} x_1(\tau - \tau_1). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь C_{ij} - коэффициенты связи генераторов, τ_{ij} - времена задержки в цепях связи между генераторами.

2. Переходы к хаосу и хаотическая динамика двухрезонаторного клистрона с ЗОС

Численный анализ динамики системы, описываемой уравнением (7), проводился при помощи комплекса методов исследования различных режимов динамических систем: вычисление временных реализаций, построение фазовых портретов $\{x(t), x(t - \tau)\}$ и сечений Пуанкаре, расчет спектров, корреляционной и

* Уравнения (6), (7) впервые получены и проанализированы Д.В. Соколовым в неопубликованной работе.

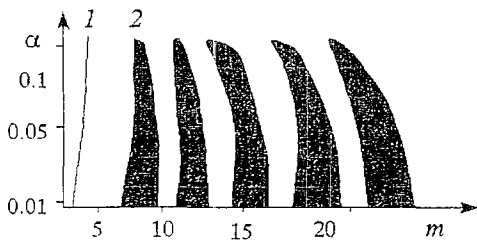


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма двухрезонаторного клистрона с ЗОС при фиксированном значении времени запаздывания, $T=2.0$: 1 - линия рождения ПЦ, 2 - области стохастичности

где $x_0 = 1/(2\tau) \int_0^{T_p} x(t) dt$ - среднее значение временной реализации за период $T_p=2\tau$.

Действительно, как показывает численный анализ, при некотором значении параметра m в ФП системы рождается симметричный относительно своего центра предельный цикл (ПЦ), существующий при изменении m в некоторых пределах (рис. 3, а). Период движения по ПЦ примерно равен времени запаздывания петли

редуцированной размерностей. Бифуркационная диаграмма (рис.2), построенная на плоскости параметров (α, m) при $T=\text{const}$, показывает, как соотносятся регулярные и хаотические режимы.

Переходы к хаосу в рассматриваемой системе обладают рядом особенностей, связанных, как показано в [4,6], с симметрией уравнения (7) относительно преобразования S :

$$\{x(t), x(t-\tau), t\} \Rightarrow \{2x_0 - x(t), 2x_0 - x(t+\tau), t+\tau\}, \quad (11)$$

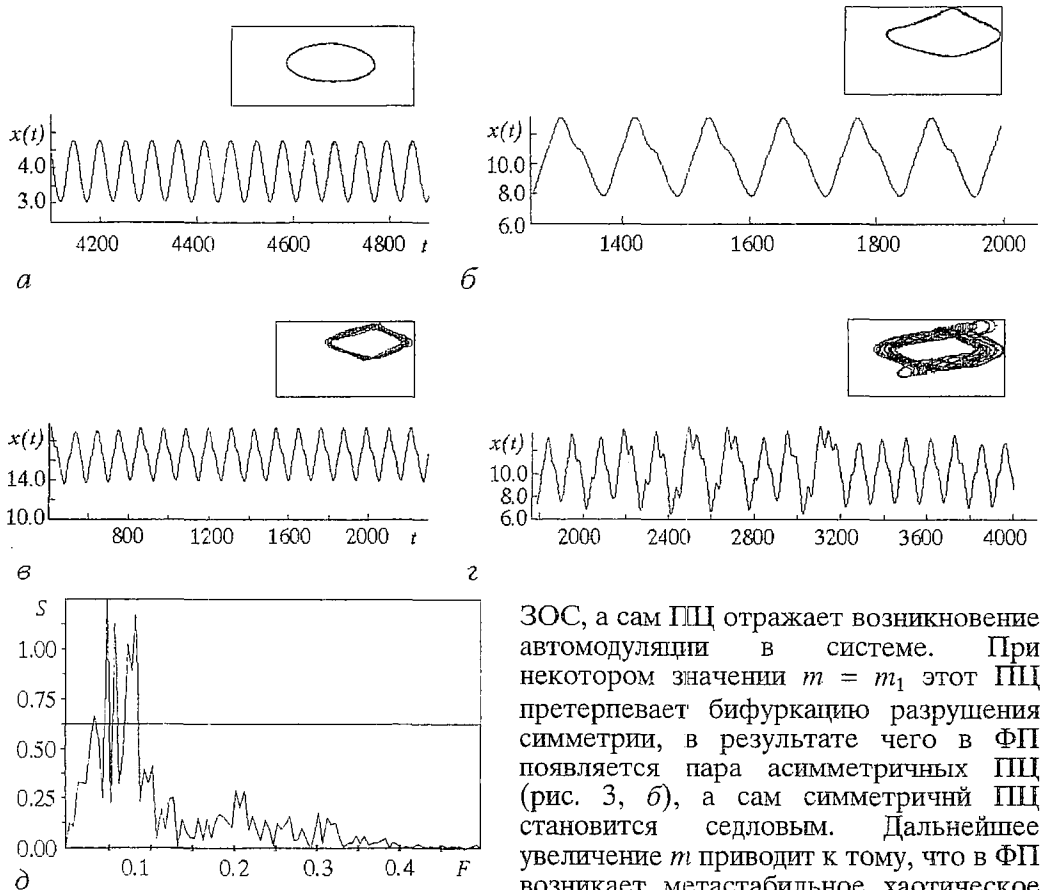


Рис. 3. Фазовые портреты и временные реализации $x(t)$ колебаний в двухрезонаторном клистроне с ЗОС при $\alpha=0.001$; $T=2.0$: а - в режиме существования симметричного ПЦ, $m=2.5$; б - после бифуркации разрушения симметрии, $m=5.1$; в - при возникновении в ФП МХМ, $m=7.5$; г - после рождения симметричного СА, $m=8.4$; д - спектр хаотических колебаний в режиме симметричного СА, $f_a=0.08$

ЗОС, а сам ПЦ отражает возникновение автомодуляции в системе. При некотором значении $m = m_1$ этот ПЦ претерпевает бифуркацию разрушения симметрии, в результате чего в ФП появляется пара асимметричных ПЦ (рис. 3, б), а сам симметричный ПЦ становится седловым. Дальнейшее увеличение m приводит к тому, что в ФП возникает метастабильное хаотическое множество (МХМ), локализованное в окрестности симметричного ПЦ (рис. 3, в). В реализации $x(t)$ при этом появляется длительный хаотический переходный процесс, предшествующий выходу на регулярный асимметричный ПЦ. Удвоения периода асимметричного

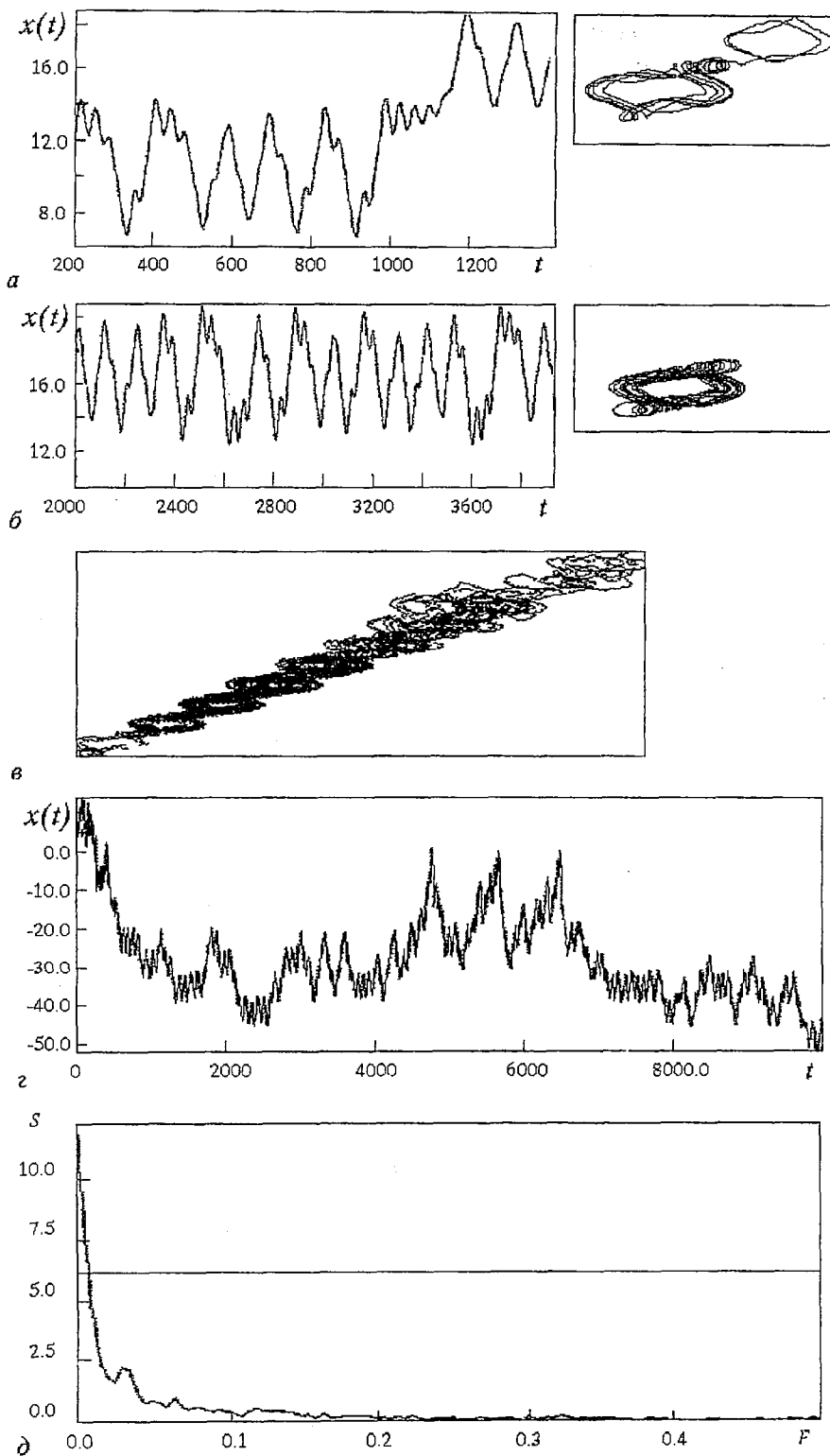


Рис. 4. Потеря устойчивости симметричного СА₁ и рождение нового симметричного ПЦ (а), нового симметричного СА₂ (б) и «гиперхаотического» СА (в); временная реализация (г); спектр колебаний в режиме «гиперхаотического» СА (д); $\alpha=0.001$; $m=8.86$ (а), 9.0 (б), 14.0 (в-д)

ПЦ не происходит, вместо этого оба асимметричных ПЦ с ростом m мягко теряют устойчивость, и в ФП рождается странный аттрактор (СА), симметричный относительно своего центра (рис. 3, з) и имеющий непрерывный спектр, отличный от фейгенбаумовского и сосредоточенный вблизи частоты автомодуляции $f_a = 1/\tau$ (рис. 3, д). Корреляционная размерность такого аттрактора колеблется в пределах 1.8-1.9, что выше размерности аттрактора Фейгенбаума. Этот тип бифуркации не описан формальной теорией бифуркаций, поскольку в ней помимо регулярных движений участвуют и хаотические. Ранее он наблюдался в симметричном осцилляторе Дуффинга [3,4], а также в симметричных системах с запаздыванием [5,6] и, по-видимому, является типичным для симметричных систем с постоянной диссипацией. Следует отметить, что при больших значениях параметра затухания ($\alpha \geq 0.007$) в системе могут наблюдаться одна-две бифуркации удвоения периода, однако каскад удвоений не развивается и фейгенбаумовский СА не рождается.

При дальнейшем увеличении m в системе рождается новый симметричный ПЦ. Одновременно с этим ранее сформировавшийся симметричный СА теряет устойчивость и фазовая траектория «сваливается» на новый симметричный ПЦ (рис. 4, а), который после бифуркации разрушения симметрии становится седловым, порождая пару асимметричных ПЦ и МХМ, что приводит к рождению нового симметричного СА (рис. 4, б) со спектром, аналогичным наблюдаемому ранее (рис. 3, д). С ростом m в ФП рождаются новые ПЦ, которые переходят к хаосу по уже описанному сценарию, порождая новые симметричные СА, аналогичные описанным выше. На плоскости параметров (m, α) им соответствуют n областей стохастичности (см. рис.2). Удаётся наблюдать 5-6 таких областей. Начиная с некоторого значения m , МХМ, возникающие при разрушении различных симметричных ПЦ, последовательно образовавшихся в ФП, начинают объединяться, и фазовая траектория начинает блуждать сразу по всем ним, порождая СА (рис.4,в), размерность которого превышает 3, поэтому можно условно назвать его «гиперхаотическим» СА. Фазовая траектория может переходить с одного парциального аттрактора на другой последовательно или скачком, минуя соседние. Если в ФП появляется новый симметричный ПЦ, он сразу же разрушается, включаясь в движение. С ростом m связываются все новые парциальные хаотические множества, в результате движение сильно усложняется (рис. 4, г), его спектр содержит мощную низкочастотную компоненту со спектральной плотностью вида $1/f$ (рис.4, д).

Как показали расчеты, критические значения параметра возбуждения m_c и параметра запаздывания T_c , соответствующие нижним границам областей стохастичности (см. рис.2), связаны приближенным соотношением

$$m_c T_c = \text{const}, \quad (12)$$

а значение константы практически не зависит от α и примерно равно 3. Число областей стохастичности на бифуркационной диаграмме (см. рис.2) быстро растет с ростом T , причем с ростом номера области амплитуда и период колебаний в ней не изменяются, а среднее значение реализации растет, что соответствует росту энергии колебаний на основной частоте.

3. Электроника двухрезонаторного клистронного автогенератора с ЗОС

С точки зрения приложений представляет интерес исследовать особенности процессов в клистронном автогенераторе, обусловленные их электронной природой, то есть, взаимодействием электронов с ВЧ полем в режимах со сложной динамикой.

Энергетика автогенератора, как известно, полностью характеризуется значением КПД взаимодействия, который в режиме генерации монохроматических колебаний определяется (с учетом введенных обозначений) соотношением

$$\eta_e = |U_2|^2 / (\rho_2 I_0 U_0) = 8\epsilon x_s^2 / (m/\alpha)^2. \quad (13)$$

В дальнейшем удобно рассматривать величину $\eta^{\wedge} \equiv \eta_e/\epsilon$, зависящую только от динамики системы, а не от электродинамических параметров резонатора или статических характеристик пучка. Из условия стационарной генерации (8) имеем $\eta^{\wedge} = 8 J_1^2(x_s)$, откуда следует, что максимальный КПД в этом режиме равен примерно 2.88ε. Это значение достигается при $x_s \equiv 1.841$, и при значении параметра $(m/\alpha) \equiv 3.07$, что дает следующее условие для безразмерных параметров взаимодействия: $2M\theta_d\gamma\epsilon = 3.07$. Как следует из (4), это выражение можно записать в виде $K_{ул}K = 3.07$, где $K_{ул} = 2M\theta_d\epsilon$ - коэффициент усиления клистрона по напряжению в линейном режиме, а $K \equiv \gamma$ - коэффициент обратной связи. Таким образом, если положить, например, $K=1$, то видим, что максимальный КПД генерации в одночастотном режиме достигается при электрической длине клистронного автогенератора $\theta_d\epsilon \equiv 3$.

В режиме нестационарной генерации выражение для КПД следует изменить, введя мощность отрезка временной реализации $\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^2(t) dt$, усредненную за достаточно большой отрезок времени. Тогда имеем

$$\overline{\eta^{\wedge}} = 8\overline{x^2} / (m/\alpha)^2 = 8 / (m/\alpha)^2 (x_0^2 + \tilde{x}^2), \quad (14)$$

где x_0 - среднее значение реализации, $\tilde{x}(t)$ - переменная составляющая. Из соотношения (14) следует, что КПД растет с ростом как постоянной составляющей x_0 (что приводит к возрастанию спектральной плотности мощности (СПМ) колебаний вблизи основной частоты ω_0), так и с ростом амплитуды колебаний \tilde{x} (что приводит к росту СПМ вблизи частот автомодуляции). При этом значения КПД тем выше, чем меньше величина $m/\alpha = K_{ул}K$, определяющая режим колебаний. Когда в ФП системы возникает ПЦ, соответствующий автомодуляции медленно меняющейся огибающей, то с ростом параметра m его размеры (амплитуда автомодуляции) и местоположение (x_0) практически не меняются, поэтому КПД медленно уменьшается с ростом m . При переходе через критическое значение параметра m_0 , соответствующее рождению нового ПЦ, система скачком переходит из одного состояния в другое, при этом скачком меняется местоположение центра ПЦ (значение x_0). Поскольку при этом величина m практически не меняется или меняется очень мало, то, в соответствии с соотношением (14), КПД резко возрастает по сравнению с предыдущим режимом.

В режимах хаотической автомодуляции \tilde{x}^2 больше, чем в режимах регулярной автомодуляции, соответствующих одному и тому же значению m/α , поэтому КПД хаотических колебаний в этих режимах выше, чем в соответственных режимах регулярной автомодуляции.

В случае возникновения в системе «гиперхаотического» аттрактора (см. рис.4, з, д) ситуация резко меняется. Фазовая траектория «блуждает» по обширной

области ФП, при этом значение \tilde{x}^2 резко возрастает и становится больше, чем x_0^2 . Это приводит к резкому росту КПД генерации в режиме «гиперхаоса» по сравнению с другими регулярными и хаотическими режимами, что позволяет считать этот режим наиболее энергетически выгодным для использования при построении генераторов шума. Как следует из формулы (14), КПД тем больше, чем меньше значение параметра m/α . Поэтому для получения высоких КПД следует стремиться к уменьшению значений параметра m , при которых возможны хаотические режимы. Для этого целесообразно увеличивать длину ЗОС,

поскольку, как следует из соотношения (12), хаотизация происходит при меньших значениях m . Так, например, при $T=20$, режим «гиперхаоса» возникает уже при

$m/\alpha = 37.27$ ($m = 1.17$; $\alpha = 0.03$), при этом $(x_0 + \tilde{x})^2 \approx 625$, откуда $\eta^* \approx 3.6$, что превышает КПД в режиме монохроматической генерации.

Другой интересной физической особенностью генерации хаотических колебаний в рассматриваемой системе являются спектральные характеристики колебаний. Как видно из расчетов (см. рис.3,д, 4,д) спектры хаотических колебаний значительно шире, чем следовало бы ожидать, принимая во внимание «холодную» полосу пропускания резонатора (как известно, $\Delta f/f \approx \alpha$). Возникает вопрос, чем можно объяснить такое расширение полосы генератора. Оказывается, дело здесь в том, что хаотически промодулированный электронный поток представляет для резонатора довольно большую реактивную нагрузку. Такую нагрузку нельзя объяснить пространственным зарядом пучка (напомним, что мы рассматриваем пучок в кинематическом приближении). То, что электронная нагрузка зависит не только от статических параметров пучка, но и от его динамики, является хорошо известным фактом в теории электронных генераторов. Однако то, что в режиме динамического хаоса величина электронной нагрузки сильно возрастает, свидетельствует еще об одном аспекте динамического хаоса, важном для приложений в электронике. По-видимому, аналогичные эффекты динамической электронной нагрузки должны наблюдаться и в других электронных системах со сложной динамикой.

4. Стохастическая динамика связанных автогенераторов на двухрезонаторных клистронах с запаздывающей обратной связью

Был исследован случай симметричной связи двух одинаковых клистронных генераторов с ЗОС, описываемый системой уравнений (10) при значениях коэффициентов связи $C_{12} = C_{21} = C$. Параметры потерь, параметры обратной связи, времена задержек выбирались одинаковыми, причем $\alpha = 0.001$; $T = 1.0$.

Было выяснено, что положительная обратная связь уже при небольших значениях коэффициента обратной связи приводит к срыву режима автомодуляции и установлению в системе синфазных монохроматических колебаний, амплитуда которых не меняется со временем. Значение параметра обратной связи, при котором начинается хаотизация, уменьшается по сравнению с автономным случаем и несколько растет с ростом абсолютного значения коэффициентов связи.

Отрицательная обратная связь способствует усложнению режимов колебаний. В случае отрицательной обратной связи в широких пределах изменения коэффициентов связи ($C_{12}=C_{21}=-0,1\dots-0.9$) наблюдались три последовательности бифуркаций:

1. Переход к хаосу в результате слияния пары асимметричных предельных циклов с метастабильным хаотическим множеством, завершающийся рождением симметричного СА, иногда включающий одну-две бифуркации удвоения периода колебаний парциального генератора при небольших m (рис. 5) и обусловленный симметрией системы;

2. Последовательность бифуркаций, завершающаяся перемежаемостью между регулярными режимами разных периодов и хаотическим режимом (перемежаемость «цикл-хаос») (рис. 6, а);

3. Последовательность бифуркаций, завершающаяся хаотическими переключениями между двумя регулярными режимами разных периодов (рис. 6, б).

В первом случае наблюдается следующее. При фиксированных коэффициентах связи ($C=-0.1$) и небольших значениях m ($m=0\dots 2.5$) в ФП системы (10) существует неподвижная точка, соответствующая отсутствию генерации. Увеличение m приводит к рождению симметричных ПЦ (см. рис. 5, а). Симметрия этих циклов отлична от симметрии ПЦ автономного генератора. Если ПЦ

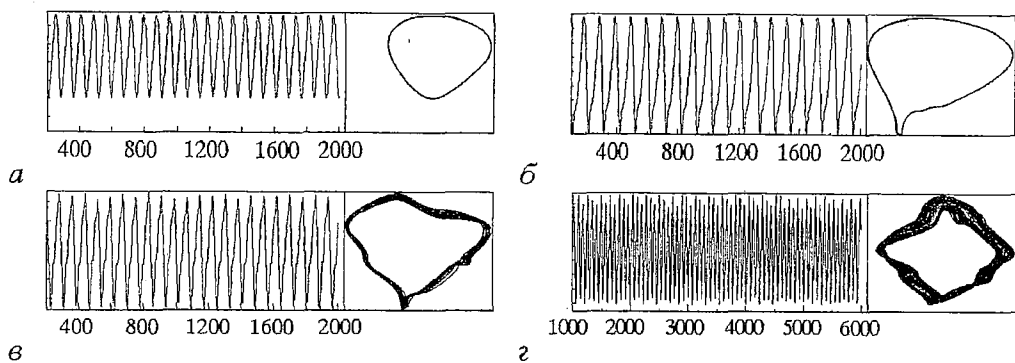


Рис. 5. Переход к хаосу в системе симметрично связанных клистронных генераторов, завершающийся рождением симметричного СА: $\alpha=0.001$; $C=-0.12$; $m=2.5$ (а); 3.64 (б); 8.5 (в); 10.2(г)

автономного генератора центрально симметричны, то ПЦ в связанных автогенераторах обладают симметрией относительно поворотов на 90° , а иногда - на 120° . Реализация является симметричной. Парциальные генераторы испытывают при этом синфазные регулярные колебания. С ростом m симметрия этих колебаний нарушается (см. рис. 5, б), при некотором значении m в фазовом пространстве парциального генератора появляется метастабильное хаотическое множество (см. рис. 5, в). С ростом m длительность переходного процесса растет, затем в фазовом пространстве рождается симметричный СА (см. рис. 5, г). Этот

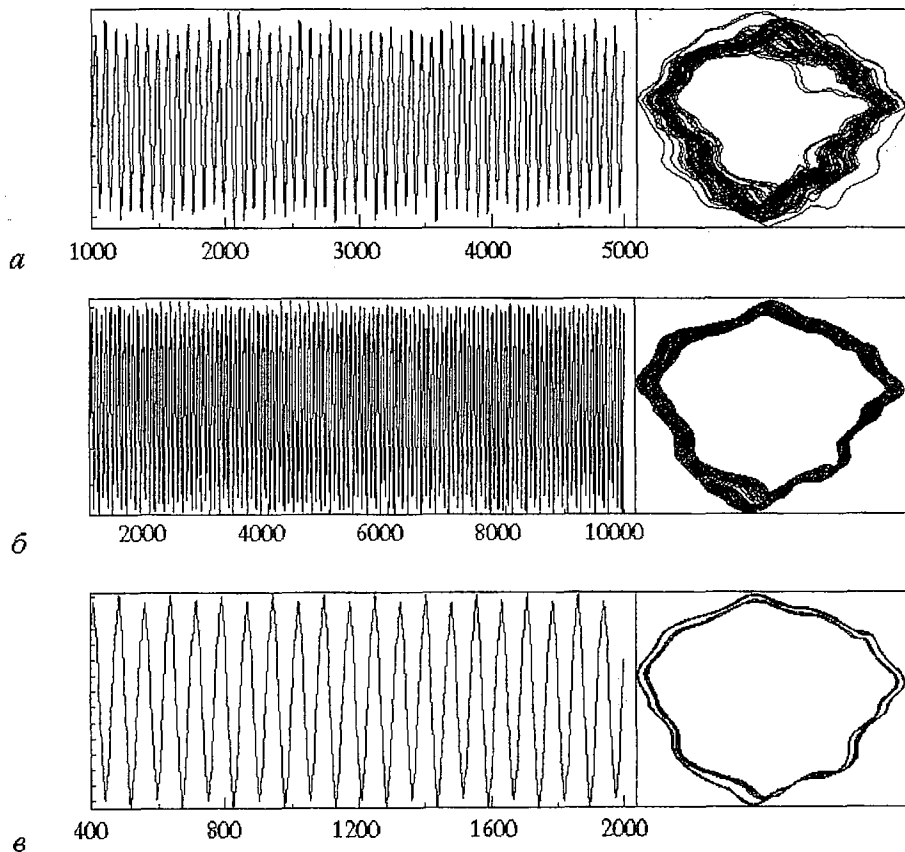


Рис. 6. Симметричные СА в системе симметрично связанных клистронных генераторов с ЗОС рождающиеся в результате перемежаемости «цикл-хаос»(а) и «цикл - цикл» (б) из исходных ПЦ (в) $C = -0.8$; $\alpha=0.001$; $m=9.5$ (а); 8.5 (б); 6.7 (в)

аттрактор существует в узкой области параметра обратной связи и при малых диссипациях. При больших диссипациях СА не образуется, а метастабильное хаотическое множество с ростом m исчезает. При еще больших значениях m появляется новый симметричный цикл, в зависимости от величины параметра потерь он претерпевает одно-два удвоения, затем в фазовом пространстве системы появляется метастабильное хаотическое множество, а затем рождается новый симметричный СА, аналогичный представленному на рис. 5, 2.

Переходы к хаосу в системе связанных клистронных автогенераторов не исчерпываются вышеперечисленными переходами, а отличаются многообразием, включая перемежаемость между различными СА и ПЦ разных периодов (рис.6). Следует отметить, что зависимость режимов колебаний от времени запаздывания менее сильная, чем в автономном случае.

Заключение

Рассмотрение сложной динамики клистронных автогенераторов с ЗОС позволяет выявить ряд закономерностей, характерных для этих систем как для типичных представителей класса нелинейных динамических систем с постоянной диссипацией, обладающих определенной симметрией, а также наблюдать особенности, обусловленные их электронной природой. К числу общих закономерностей следует отнести нетипичные переходы к хаосу, связанные с симметрией рассмотренных систем и обусловленные взаимодействием аттракторов и МХМ, обрывающим каскад бифуркаций удвоения периода и приводящим к рождению нефейгенбаумовских СА с непрерывным спектром. Другим характерным явлением в рассматриваемых системах является объединение аттракторов в результате гетероклинических бифуркаций, порождающее развитие «гиперхаотические» множества со спектром огибающей вида $1/f$. Особенности взаимодействия электронных потоков с ВЧ полями резонаторов в режимах динамического хаоса проявляются в двух основных эффектах: значительном электронном КПД взаимодействия, сравнимом и даже превышающем КПД одночастотной генерации, а также в значительном расширении рабочей полосы генератора, обусловленном динамической электронной нагрузкой резонаторов, связанной со сложной динамикой. Отмеченные особенности динамических режимов и выходных характеристик рассматриваемых систем, по-видимому, могут оказаться важными для практической реализации при построении электронных генераторов СВЧ шума.

Авторы выражают глубокую признательность Д.И. Трубецкову за постановку задачи и ряд ценных замечаний по содержанию рукописи, а также Л.В. Красичкову и А.А. Кипчатову за любезно предоставленную программу восстановления и расчета размерностей аттракторов и консультации по её практическому применению.

Библиографический список

1. *Афанасьева В.В., Трубецков Д.И.* Динамический хаос в электронных свехвысокочастотных приборах. Ч.1. Нерелятивистские приборы // *Обзоры по электронной технике. Сер.1. Электроника СВЧ.* М., 1991. Вып.3 (1614). С. 40.
2. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по свехвысокочастотной электронике. М.: Сов. Радио, 1967.
3. *Афанасьева В.В.* Влияние симметрии на сложную динамику нелинейных колебательных систем // *Автореферат дисс.... канд. физ.-мат. наук.* Саратов: Изд-во СГУ, 1993.
4. *Афанасьева В.В.* Об особенностях хаотической динамики двух симметричных автоколебательных систем (неавтономный осциллятор Дуффинга и автогенератор с запаздывающей обратной связью) // *Письма в ЖТФ.* 1993. Т. 19, № 6. С. 62.
5. *Афанасьева В.В.* Влияние симметрии на хаотическую динамику автоколебательных систем с запаздыванием // *III Всесоюзная конференция по нелинейным колебаниям механических систем: Доклады.* Н. Новгород, 1993. С.20.

б. Афанасьева В.В., Железовский Е.Е., Лазерсон А.Г. Два типа взаимодействия странных аттракторов в симметричных автоколебательных системах с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 12. С. 24.

Институт радиотехники и электроники
РАН, Саратовский филиал

Поступила в редакцию 26.08.94
после переработки 23.03.95

CHAOTIC DYNAMICS OF TWO-CAVITY CLYSTRON OSCILLATORS WITH DELAYED FEEDBACK

V.V. Aphanasyeva, A.G. Lazerson

Chaotic behaviour of two-cavity clystron oscillators with delayed feedback is studied. The equations of several types of the devices are derived which are studied by computer simulations. Various chaotic oscillations have been found in wide parameter range on (α, m) - plane where α is the cavity loss parameter, m is the generalised excitation parameter. Transitions to chaos are typical for the dynamical systems with the kind of symmetry discovered earlier in these systems: two asymmetric limit circles instead of period doubling merge with a metastable chaotic set which appears in the phase space after symmetry breaking. This bifurcation gives birth to a symmetric strange attractor which differs from Feigenbaum's one in spectrum and statistical characteristics. Asymmetric Feigenbaum's strange attractor does not appear in these systems. At large values of m several symmetric strange «metaattractors» are bounded, and high-dimensional wide-spread hyperchaotic set is formed. The spectrum of this «hyperchaotic» attractor is of $1/f$ -type.

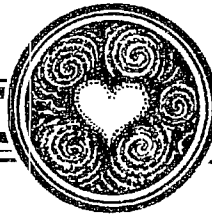
The efficiency of the two-cavity clystron oscillator reaches its maximum value near the bifurcation points, and in the chaotic mode it may exceed that of the single-frequency mode. The electron beam in chaotic oscillation mode presents a sufficient active load which greatly enhances the bandwidth of the resonant cavity providing super-broadband performance of the oscillator. This active load depends not on the direct current density of the beam, but on its dynamics only.



Лазерсон Александр Григорьевич родился в 1945 г. Окончил физический факультет СГУ (1969). С 1969 г. работает в ГНПП «Алмаз». Кандидат физико-математических наук по специальности Радиофизика. Автор более 100 научных публикаций по акустоэлектронике, электродинамике, радиофизике, электронике СВЧ. В последнее время активно работает в области теоретического исследования хаотической динамики распределенных систем, в частности, в потоках заряженных частиц.



Афанасьева Вера Владимировна родилась в 1961 г. Окончила с отличием физический факультет СГУ (1984). Работала в СФИРЭ АН, ГНПП «Алмаз». Окончила аспирантуру СГУ (1993), защитив кандидатскую диссертацию по исследованиям сложной динамики симметричных автоколебательных систем. Автор более 10 научных работ. Область научных интересов - нелинейная динамика автоколебательных систем. В настоящее время работает преподавателем кафедры математики Саратовского высшего военного инженерного училища ракетных войск.



САМООРГАНИЗАЦИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЯЗАННЫХ АВТОСТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Э.В. Кальянов

Численными методами исследованы три модели связанных автостохастических автоколебательных систем, описываемых уравнениями с запаздыванием. Показана возможность самоорганизации колебаний при определенных величинах связи между генераторами. Математическим образом самоорганизации является предельный цикл. Механизм самоорганизации хаотических колебаний в связанных автостохастических системах рассмотрен с позиций явления взаимной синхронизации генераторов.

Введение

Процессы самоорганизации исследуются многими авторами в различных областях науки, изучающих нелинейные взаимодействия в сложных системах [1-7]. Эти процессы проявляются разнообразно, в связи с чем самоорганизация имеет несколько математических образов [8]. При взаимодействии связанных систем со странными аттракторами возможна дестохастизация с возникновением одно- или многотактных колебаний [9] и в этом случае образ самоорганизации представляется в виде предельного цикла. Образование регулярных структур с простыми или сложными предельными циклами при взаимодействии хаотических колебаний представляет интерес и мало изучено [9]. В настоящей работе рассматривается формирование детерминированных колебаний с образом самоорганизации в виде предельного цикла при взаимодействии связанных автостохастических автоколебательных систем. Численными методами исследуются процессы дестохастизации в трех математических моделях автоколебательных систем с запаздыванием, обладающих хаотической динамикой.

1. Математические модели

Достаточно общие уравнения для связанных автоколебательных систем с запаздыванием и инерционностью, обеспечивающих режимы хаотических колебаний, можно аналогично [9] записать в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_i + (\omega_i/Q_i)\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = (\omega_i^2/\sigma_i) dF_i(y_i)/dt + \omega_i^2 \sum_{j \neq i} C_{ji} \varphi_j(x_j(t - T_{ji})), \\ \delta_i \dot{y}_i + y_i = x_i(t - \tau_i) + \sum_{j \neq i} D_{ji} \psi_j(y_j(t - T_{ji})), \end{cases} \quad (1)$$

где каждый парциальный генератор состоит из замкнутых в кольцо нелинейного элемента, фильтра первого порядка, линии задержки, фильтра второго порядка и дифференцирующего элемента. В этих уравнениях $i, j = 1, 2, 3 \dots k$; ω_i, Q_i - собственная частота и добротность фильтра второго порядка i -го парциального генератора; σ_i, δ_i - постоянные времени дифференцирующего элемента и фильтра первого порядка; τ_i - запаздывание в цепи обратной связи i -го генератора; C_{ji}, D_{ji} - коэффициенты связи; $\varphi_j(x_j(t - T_{ji})), \psi_j(y_j(t - T_{ji}))$ - функции, определяющие тип связи генераторов с учетом запаздывания в элементах связи; $F_i(y_i)$ - характеристика нелинейного элемента i -го генератора.

Ниже рассматриваются три математические модели связанных автоколебательных систем, получающихся из (1) при характеристике нелинейного элемента в виде унимодальной функции [10]

$$F_i(y_i) = G_i y_i / (1 + y_i^n), \quad (2)$$

где G_i, n - постоянные коэффициенты.

При условиях $D_{ji} = 0, G_i = \sigma_i B_i$ уравнения (1) с учетом (2) преобразуются к следующему виду (первая модель):

$$\ddot{x}_i + (\omega_i / Q_i) \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \omega_i^2 \{ [B_i [1 + y_i^n (1 - n)] [x_i(t - \tau_i) - y_i] / (1 + y_i^n)^2 \delta_i + \sum_{j \neq i} C_{ji} x_j(t - T_{ji}) \}, \quad (3)$$

$$\delta_i \dot{y}_i + y_i = x_i(t - \tau_i).$$

Подобные уравнения, но при резистивной связи без запаздывания по связи рассматривались в [9]; обнаружено явление самоорганизации при взаимодействии связанных систем при хаотических автоколебаниях в каждом генераторе в отдельности.

При отсутствии фильтра второго порядка и дифференцирующего элемента уравнения (1) с учетом соотношения (2) и условий $C_{ji} = 0, \gamma_i = (1/\delta_i), G_i = \delta_i B_i, D_{ji} = \delta_i D_{ji}^0$ принимают вид (вторая модель)

$$\dot{y}_i + \gamma_i y_i = B_i [y_i(t - \tau_i) / (1 + [y_i(t - \tau_i)]^n)] + \sum_{j \neq i} D_{ji}^0 y_j(t - T_{ji}). \quad (4)$$

Этими уравнениями может быть описано изменение продукции на душу населения в i -м регионе, если параметром γ_i определять исчезновение продукции за счет потребления в i -м регионе и обмена с другими (j -ми) регионами, параметром D_{ji} - связь между регионами, а первым членом в правой части - воспроизводство продукции. В этом случае τ_i - запаздывание производства продукции в ответ на спрос, T_{ji} - задержка в обмене продукцией между регионами. При $D_{ji} = 0$ система уравнений (4) превращается в известное уравнение Мэки - Гласса, которым описывается воспроизводство крови в организме человека [10].

Уравнениями (4) может моделироваться также система связанных генераторов широкополосного шума, так как уравнение Мэки - Гласса отличается от модели генератора шума (шумотрона) [11] лишь характеристикой нелинейного элемента. К тому же, при значении коэффициента, определяющего степень нелинейности, равном $n = 4$, характеристика, описываемая соотношением (2), практически не отличается от используемой в [11] при описании генератора шума

$$F(y) = M y \exp(-y^2),$$

если $M = 1.5G$ (естественно, полагая, что $G_i = G, F_i = F, y_i = y$).

При отсутствии фильтра первого порядка и дифференцирующего элемента уравнения (1) при условии (2) принимают вид (третья модель)

$$\ddot{x}_i + (\omega_i / Q_i) \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \omega_i^2 \{ [G_i x_i(t - \tau_i) / (1 + (x_i(t - \tau_i))^n)] + \sum_{j \neq i} C_{ji} x_j(t - T_{ji}) \}. \quad (5)$$

Этими уравнениями может моделироваться система связанных между собой генераторов с запаздыванием (например, ЛБВО-генераторов), каждый из которых содержит в своей цепи обратной связи избирательный фильтр. При малых добротностях фильтра в каждом парциальном генераторе возможны хаотические автономные автоколебания при соответствующем выборе остальных параметров.

При отсутствии запаздывания в цепях обратной связи и фильтра первого порядка уравнения (3) преобразуются в систему, описывающую связанные между собой генераторы детерминированных колебаний, которые в зависимости от степени нелинейности генерируют автономно либо квазигармонические (при слабой нелинейности), либо релаксационные (при сильной нелинейности) колебания. В этом случае будем иметь

$$\ddot{x}_i + \omega_i/Q_i \{1 + \omega_i Q_i B_i [(n-1)x_i^n - 1]/(1+x_i^n)^2\} \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \sum_{j \neq i} C_{ji} x_j (t - T_{ji}). \quad (6)$$

При нелинейности кубического типа уравнения (6) превращаются в систему связанных уравнений Ван-дер-Поля.

2. Результаты численного анализа

Системы дифференциальных уравнений (3), (4), (5) решались методом Рунге - Кутты - Мерсона 4-го порядка с шагом численного интегрирования по времени, равным 0.025 (в случае первой и третьей моделей) и 0.0125 (в случае второй модели). Начальные условия для колебательных переменных выбирались равными 0.1.

Для анализа процессов самоорганизации колебаний использовались в основном бифуркационные диаграммы, показывающие изменение максимальных значений колебательных процессов при адиабатическом увеличении (или уменьшении) интересующего параметра. Бифуркационные диаграммы представляются в рассматриваемых случаях наиболее информативными иллюстрациями изменения характера колебаний.

В *первой модели* двух связанных автостохастических автоколебательных систем, описываемых уравнениями (3) при $k = 2$, процесс самоорганизации иллюстрируется рис. 1-3. На рис. 1 приведены бифуркационные диаграммы, показывающие изменение максимальных отклонений колебательного процесса $x_1(t)$ в зависимости от параметра связи (при $C_{21} = C_{12} = C$) при его увеличении и уменьшении. При этом параметры каждого генератора выбраны так, что автономно колебания хаотичны.

Видно, что при увеличении параметра связи происходит переход хаотических колебаний, отражаемых случайным разбросом максимальных значений колебательного процесса, в детерминированные, когда изменение максимальных значений колебательного процесса становится закономерным. Режим детерминированных колебаний имеет место при $C > 0.18$. В интервале значений параметра связи $C \in (0.244; 0.27)$ колебания являются трехтактными, а в

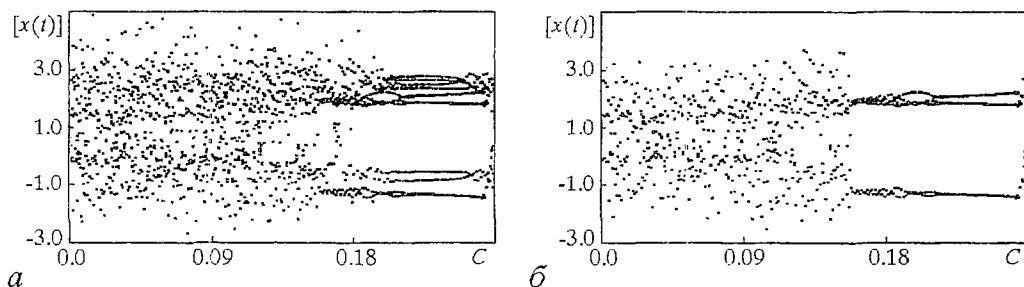


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы при взаимодействии автостохастических систем в случае первой модели при увеличении параметра связи (а) и при его уменьшении (б); $B_1=B_2=4$, $Q_1=Q_2=4$, $n=6$, $\tau_1=\tau_2=\tau=T_{12}=T_{21}=2$, $\omega_1=1$, $\omega_2=1.01$, $\delta_1=\delta_2=0.1$

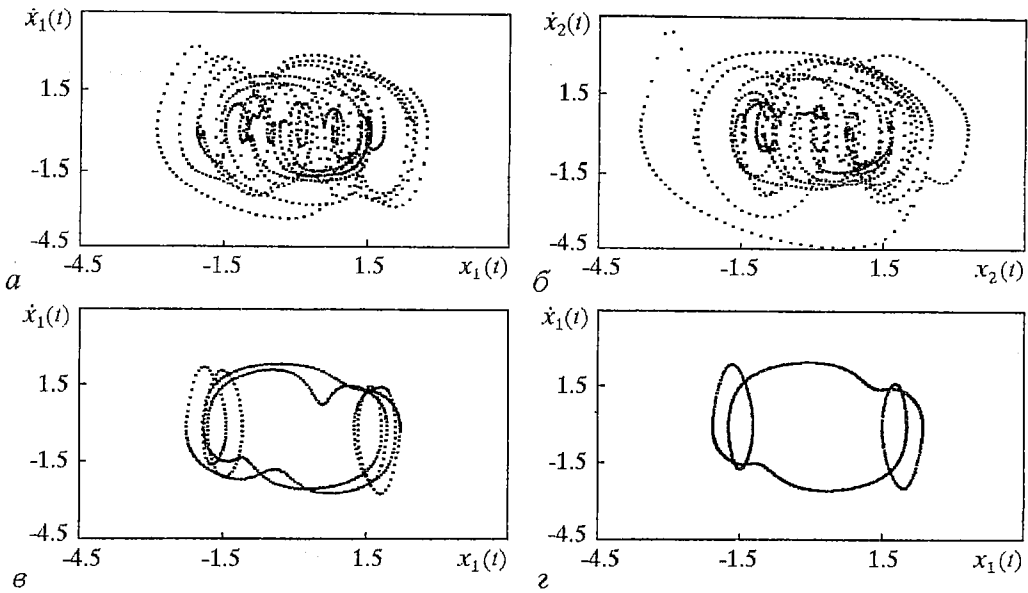


Рис. 2. Аттракторы автоколебаний в случае первой модели при автономных колебаниях (а, б) и при наличии связи (в, г): а, б - $C = 0$; в - $C = 0.2$; г - $C = 0.25$

интервале $C \in (0.18; 0.244)$ структура колебаний более сложная. При уменьшении параметра связи от 0.27 до 0 изменение максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ отличается от приведенного на рис. 1, а: проявляется гистерезис, и минимальное значение параметра связи, соответствующее детерминированным колебаниям, снижается до величины $C = 0.158$. Характерно, что область трехтактных колебаний, как и при увеличении параметра связи, находится при больших его величинах (в интервале $C \in (0.214; 0.262)$).

Максимальные значения колебательного процесса во втором генераторе $[x_2(t)]$ принимают регулярный характер при тех же величинах параметра связи, что и $[x_1(t)]$ как при увеличении C , так и при его уменьшении. При этом структура колебаний та же.

Более наглядно, но лишь при трех характерных значениях параметра связи, колебания $x_1(t)$ и $x_2(t)$ иллюстрируются фазовыми портретами, представленными на рис. 2. Последние получены в интервале времени $t \in (450; 500)$. Фазовые портреты колебательного процесса $x_2(t)$ при $C = 0.2$ и при $C = 0.25$ не имеют заметных отличий от фазовых портретов, представленных соответственно на рис. 2, в и рис. 2, г. Видно, что автономно ($C = 0$) фазовые портреты обоих генераторов представляются «стохастическими аттракторами». При детерминированных режимах колебания являются трехтактными при $C = 0.25$ и шеститактными при $C = 0.2$. Анализ реализаций показал, что имеет место взаимная синхронизация детерминированных движений - колебания синфазны; при этом частоты взаимносинхронизированных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в случае $C = 0.25$ равны $\omega_1' = \omega_2' = 0.85$, а в случае $C = 0.2$ - $\omega_1' = \omega_2' = 0.42$.

Существенную роль при дестохастизации играет в рассматриваемой модели взаимная обратная связь. На рис. 3 приведены бифуркационные диаграммы, полученные для колебательного процесса $x_1(t)$ в режиме, отличающемся от иллюстрируемого рис. 1 лишь тем, что изменялось воздействие колебаний первого генератора на второй при постоянной величине параметра $C_{21} = 0.2$, определяющего воздействие колебаний второго генератора на колебания первого. Видно, что при увеличении параметра C_{12} в интервале его значений $C_{12} \in (0; 0.2)$ дестохастизация колебаний не наблюдается (рис. 3, а) несмотря на относительно большую величину параметра C_{21} . Аналогичная картина имеет место при уменьшении параметра C_{12} (рис. 3, б). Как при увеличении, так и при уменьшении

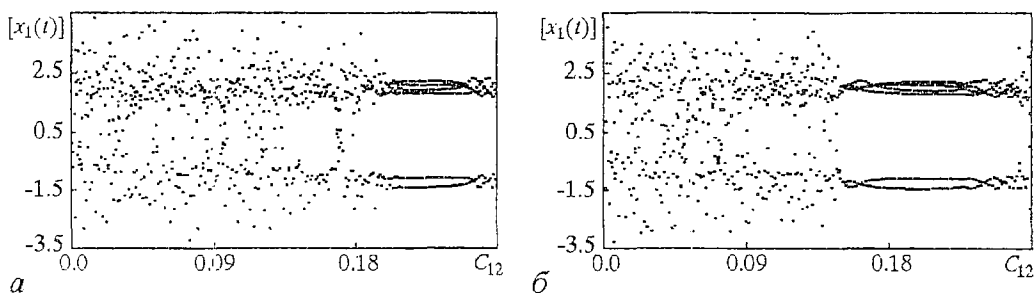


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы при взаимодействии автостохастических систем в случае постоянного воздействия второго генератора на первый при увеличении воздействия первого генератора на второй (а) и при его уменьшении (б)

параметра связи C_{12} в интервалах его изменения, соответствующих дестохастизации колебаний, возникают только шеститактные движения.

Следует отметить, что процессы дестохастизации в связанных генераторах, описываемых уравнениями (3), возникают далеко не при всех режимах, соответствующих автостохастическим автономным колебаниям. В приведенном случае взаимодействия автостохастических автоколебательных систем существенное значение имеет запаздывание по связи: при отсутствии запаздывания по связи ($T_{21} = T_{12} = 0$), а также в случаях, когда запаздывание имеется лишь в одной ветви связи ($T_{21} = 0, T_{12} = 2$ или $T_{21} = 2, T_{12} = 0$), процессы дестохастизации не наблюдались.

Во *второй модели* связанных автоколебательных систем с хаотической динамикой, описываемых уравнениями (4), рассматривались процессы дестохастизации также при параметрах, обеспечивающих стационарный хаос при автономной работе парциальных систем. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая процесс самоорганизации хаотических автоколебаний, приведена на рис. 4. На нем показано изменение максимальных значений колебательного процесса $y_1(t)$ в зависимости от параметра связи D (при $D_{21}=D_{12}=D$) между двумя генераторами. Видно, что уже при слабой связи (при $D = 0.03$) имеет место «сгущение» точек, определяющих величины максимальных отклонений колебательного процесса $y_1(t)$, но границы «облака» точек расплывчаты. При дальнейшем увеличении параметра связи (при $D > 0.18$) «сгущение» точек принимает четкие очертания и колебания становятся детерминированными. Бифуркационная диаграмма для колебательного процесса $y_2(t)$ аналогична. Структура хаотических и регулярных колебаний, соответствующих режимам автономной работы парциальных автоколебательных систем и их взаимной синхронизации иллюстрируется рис. 5, на котором приведены аттракторы первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) генераторов в проекции на плоскость $y_i(t), y_i(t - \tau)$. Аттракторы рассчитаны в интервале времени $t \in (40; 90)$

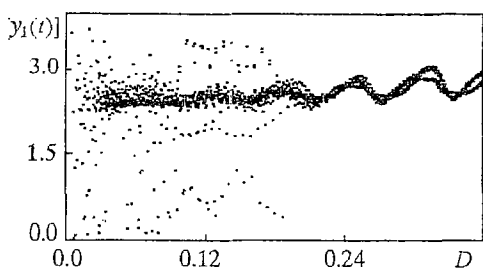


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма при взаимодействии двух автостохастических систем в случае второй модели: $n=6, B_1=B_2=20, \tau_1=\tau_2=T_{21}=T_{12}=8, \gamma_1=3, \gamma_2=3.2$

для колебательных процессов $y_1(t)$ (см. рис. 5, а, е) и $y_2(t)$ (см. рис. 5, б, з).

Возможность дестохастизации колебаний при взаимодействии большего числа ($k > 2$) автостохастических автоколебательных систем иллюстрируется рис. 6, 7. На рис. 6 приведена бифуркационная диаграмма изменения максимальных значений колебательного процесса $y_1(t)$ в зависимости от параметра связи при взаимодействии трех генераторов ($k = 3$). При этом $B_3=20, \gamma_3 = 2.8, \tau_3 = T_{32} = T_{23} = T_{31} = T_{13} = 8, D_{32} = D_{23} = D_{31} = D_{13} = D$, а остальные

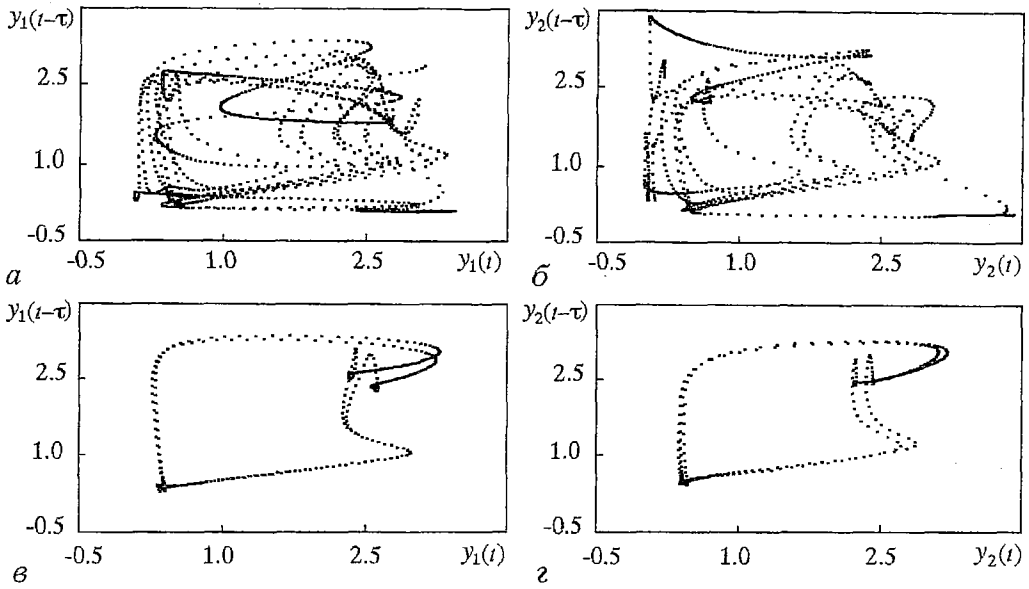


Рис. 5. Аттракторы автоколебаний при взаимодействии двух автостохастических систем в случае второй модели при автономных колебаниях (а, б) и при наличии связи (в, г): а, б - $D=0$; в, г - $D=0.36$

параметры те же, что и в случае рис. 4. Процесс самоорганизации подобен случаю взаимодействия двух автоколебательных систем: с увеличением параметра связи хаотический разброс точек, отображающих изменение максимальных значений колебательного процесса $y_1(t)$, уменьшается и границы «сгущения» точек становятся четко очерченными. В отличие от рис. 4 детерминированный режим самоорганизации имеет место при $D > 0.14$. На рис. 7 показаны аттракторы (в проекции на плоскость $y_1(t), y_1(t - \tau)$) колебательного процесса $y_1(t)$ в синхронном режиме и автоколебаний $y_3(t)$, полученные, как и в случае рис. 5, в интервале времени $t \in (40; 90)$. Аттракторы синхронных колебаний $y_2(t)$ и $y_3(t)$ не приведены, так как их структуры не имеют существенных отличий от структуры аттрактора, показанного на рис. 7, а.

В отличие от первой модели, в модели, описываемой уравнениями (4),

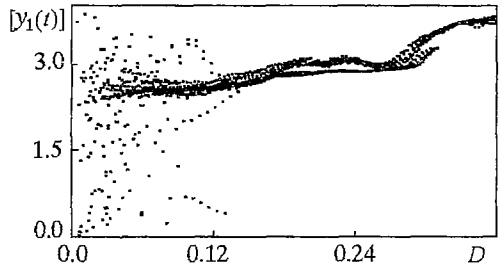


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма при взаимодействии трех автостохастических систем в случае второй модели

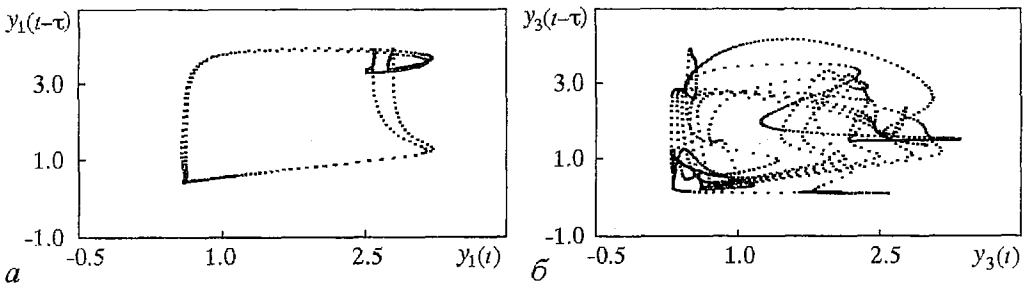


Рис. 7. Аттракторы автоколебаний при взаимодействии трех автостохастических систем в случае второй модели при наличии связи (а) и при автономных колебаниях (б): а - $D = 0.36$; б - $D = 0$

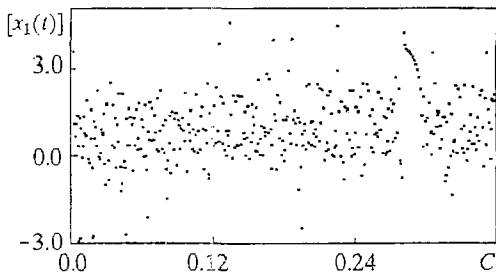


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма при взаимодействии автостохастических систем в случае третьей модели; $C_{21}=C_{12}=C$, $G_1=5$, $G_2=7$, $Q_1=Q_2=4$, $\omega_1=1$, $\omega_2=1.01$, $\tau_1=\tau_2=T_{21}=T_{12}=2$, $n=12$

сохранялись хаотические движения в случаях $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 1.01$. Процесс самоорганизации при $k = 2$ иллюстрируется бифуркационной диаграммой изменения максимальных значений колебаний $x_1(t)$ в зависимости от параметра связи C (рис. 8). Как видно, режим хаотических колебаний нарушается в относительно узком интервале изменения параметра связи $C \in (0.26; 0.31)$. Бифуркационная диаграмма изменения $[x_2(t)]$ в зависимости от C (на рис. 8 не показана) имеет аналогичный вид.

Механизм перехода к детерминированным колебаниям в рассмотренных моделях связанных автостохастических автоколебательных систем представляется одинаковым. В каждом генераторе, в силу большого числа степеней свободы, имеется возможность одновременного возбуждения многих колебаний на различных парциальных частотах, и при их возбуждении на нескольких частотах в случае отсутствия синхронизма с взаимным захватом на комбинационных частотах происходит асинхронное взаимодействие колебаний. В этом случае автоколебания в многомодовой системе не выходят на предельный цикл, и происходит случайным образом переход траектории движения с одного аттрактора на другой. При этом не только не устанавливаются колебания определенной частоты, но и изменяются условия возбуждения парциальных колебаний (мод), для которых потенциально возможность возбуждения существует. Поэтому одни парциальные колебания могут гаситься в процессе взаимодействия, уступая возбуждению других, так что может меняться число взаимодействующих парциальных колебаний. При вводе связи между автостохастическими генераторами, в которых происходят подобные процессы, взаимное влияние динамического хаоса приводит к тому, что при некоторой величине связи система выходит на предельный цикл - происходит стимулирование взаимной синхронизации аналогично стимулированию детерминированных движений в многомодовой автостохастической системе при воздействии внешних хаотических колебаний [12]. Взаимное воздействие колебаний может создавать «преимущественные» условия для генерации определенных мод подобно тому, как они создаются при воздействии внешнего шума [12, 13] или, что более очевидно, при воздействии внешнего гармонического сигнала с частотой «подвозбуждаемых» колебаний [13]. Внешний сигнал, как известно, может стимулировать возбуждение новых мод, которые не возбуждаются автономно, но сохраняются при стимулировании их возбуждения (при «подвозбуждении») даже после прекращения внешнего воздействия. Подобное создание «преимущественных» условий генерации для определенных мод возможно и при воздействии одиночного импульса [14]. При этом менее эффективным, как это на первый взгляд ни парадоксально, может быть более длительное воздействие. Для осуществления «подвозбуждения» важно, чтобы в момент окончания воздействия местоположение изображающей точки фазовой траектории находилось в бассейне притяжения аттрактора «подвозбуждаемых»

процессы самоорганизации наблюдались и при отсутствии запаздывания по связи ($T_{ji} = 0$), как в случае двух, так и в случае трех связанных автоколебательных автостохастических систем.

В *третьей модели* связанных автоколебательных систем также использовались параметры, при которых каждый генератор автономно устойчиво (при относительно широком варьировании параметров) работал в хаотическом режиме. Так, при $Q_i = 4$, $\tau_i = 2$, $n = 12$ при изменении параметра усиления в интервале $G_i \in (3.6; 20)$

колебаний [14]. Аналогичные, но более сложные (из-за взаимного влияния колебаний) процессы, можно полагать, имеют место при взаимодействии хаотических колебаний рассматриваемых автостохастических систем. Для лучшего понимания механизма образования детерминированных структур при взаимодействии хаотических колебаний необходимы дальнейшие исследования связанных автостохастических систем.

Заключение

В рассмотренных моделях связанных автостохастических автоколебательных систем наблюдаются процессы самоорганизации, математическим образом которой является предельный цикл. Таким образом, несмотря на увеличение размерности связанной системы возможен переход к существенно более простым движениям, возникающим в результате взаимного стимулирования взаимносинхронизированных колебаний. Области самоорганизации по изменяемому параметру совпадают в колебательных процессах парциальных генераторов. При этом проявляется влияние направления изменения параметра.

Библиографический список

1. *Жаботинский А.М.* Концентрационные колебания. М: Наука, 1974.
2. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979.
4. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
5. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
6. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. М.: Мир, 1990.
7. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991.
8. *Рабинович М.М., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1984.
9. *Кальянов Э.В.* Самоорганизация в системе двух связанных автостохастических генераторов // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 2. С. 44.
10. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу: ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
11. *Кислов В.Я.* Теоретический анализ шумовых колебаний в электронно-волновых системах // РЭ. 1980. Т. 25, № 8. С. 1683.
12. *Кальянов Э.В., Старков С.О.* Воздействие внешнего шумового сигнала на автоколебательные системы с инерционностью и запаздыванием // РЭ. 1994. Т. 39, № 4. С. 642.
13. *Кальянов Э.В., Кислов А.В.* Бифуркации в генераторе с запаздыванием, стимулированные внешним воздействием // РЭ. 1993. Т. 38, № 9. С. 1619.
14. *Кальянов Э.В., Старков С.О.* О возможности управления колебательными режимами с помощью одиночных радиоимпульсов // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, № 23. С. 49.

*Институт радиотехники и
электроники РАН*

*Поступила в редакцию 4.10.94
после переработки 3.02.95*

SELFORGANISATION WITH INTERACTION OF THE COUPLING AUTOSTOCHASTIC AUTOOSCILLATION SYSTEMS

E.V. Kalyanov

Three models of coupled autostochastic autooscillation systems, described by the equations with delay, are studied by computer methods. At the definite value of connection between generators the possibility of the selforganization of oscillations is shown. The limited cycle is the mathematical image of selforganization. From the position of phenomenon of the mutual synchronization of generators the selforganization mechanism of the chaotic oscillations in connected autostochastic systems is considered.



Кальянов Эраст Васильевич родился в 1930 году Саратове, окончил Ленинградский государственный университет, физический факультет (1953). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЛГУ (1957) в области радиопизика и электроника. Работает в Институте радиотехники и электроники РАН. Соавтор монографии «Многочастотные режимы в приборах СВЧ». Опубликовал много статей по направлениям, указанным выше. Лауреат премии СМ СССР.



САМООРГАНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЕ ИЗ ОДНОРОДНЫХ НЕЙРОННЫХ МОДУЛЕЙ

Часть 2. Модель кольцевой системы из однородных модулей

В.В. Майоров

В работе моделируется формирование волновых пакетов в кольцевых структурах из однородных нейронных модулей, содержащих возбудительные и тормозные элементы. Во второй части показано, что внутри каждого модуля определенные группы возбудительных элементов синхронно генерируют импульсы, а остальные заторможены. Временные рассогласования между группировками импульсов соседних модулей определяются числом незаторможенных нейронов, а состав групп - начальными условиями.

Введение

В работе [1] предложено уравнение, описывающее эволюцию мембранного потенциала u нейрона,

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{Na}(u) + f_K(u(t-1))]u. \quad (1)$$

Здесь $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ - положительные функции, монотонно стремящиеся к нулю при $u \rightarrow \infty$ быстрее, чем $O(u^{-1})$; λ - положительный и большой параметр. Считается, что выполнено условие: $\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 > 0$.

Для уравнения (1) в [2] показано существование аттрактора, состоящего из решений, имеющих общую асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$ на любом конечном промежутке времени. Она повторяется через интервал времени, близкий к $T_2 = 2 + \alpha_1 + \alpha_2/\alpha$, где $\alpha_1 = f_K(0) - 1$, $\alpha_2 = f_{Na}(0) + 1$. Для решений характерно наличие высокоамплитудных импульсов (спайков). Начало спайка и его окончание условно свяжем с моментами времени, когда решение пересекает единичное значение соответственно с положительной и отрицательной производной. Продолжительность спайка при $\lambda \rightarrow \infty$ близка к $T_1 = 1 + \alpha_1$.

Спайк рождается в центральной части нейрона - в теле. Он распространяется по центробежному отростку - аксону и его разветвлениям. Окончания последних образуют синаптические контакты с другими нейронами. Под действием пришедшего импульса в синапсах вырабатываются химические посредники - медиаторы, оказывающие возбуждающее или тормозное влияние на

нейроны - приемники. Каждый нейрон-передатчик образует синапсы одного типа - возбуждающего или тормозного. По типу синапсов будем делить нейроны на возбуждающие и тормозные. Считаем, что медиатор присутствует только во время импульса, где его количество неизменно. В течение спайка и некоторое время после него нейрон невосприимчив к воздействию. Промежуток называется периодом рефрактерности и занимает две-три продолжительности спайка.

На основе уравнения (1) можно рассмотреть модель нейрона, находящегося под синаптическим влиянием m других нейронов

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{Na}(u) + f_K(u(t-1)) + \alpha H(u) \sum_{k=1}^m g_k V(t-t_k)]u, \quad (2)$$

где t_k ($k = 1, \dots, m$) - время начала выделения медиатора в k -ом синапсе; функция $V(t)$ указывает на его присутствие: $V(t) = 1$ при $t \in [0, T_1]$ и $V(t) = 0$ при $t \notin [0, T_1]$, где T_1 - асимптотическая продолжительность спайка; числа g_k - синаптические веса, если $g_k > 0$, то речь идет о возбуждающем синапсе, а если $g_k < 0$ - о тормозном; функционал $H(u)$ обеспечивает наличие периода рефрактерности.

$$H(u) = \theta(1 - u(t)) \theta(1 - u(t-1 - (1 - \varepsilon)T_1)) \theta(1 - u(t-1 - 2(1 - \varepsilon)T_1)), \quad (3)$$

здесь θ^* - функция Хевисайда, а $0 < \varepsilon < 1$. Функционал $H(u)$ обращается в нуль во время спайка и в течение времени $h = 2(1 - \varepsilon)T_1$ спустя него. Длительность рефрактерного периода $T_R = (3 - 2\varepsilon)T_1$. Считаем, что $T_R < T_2$.

Введем множество S_h , состоящее из непрерывных при $s \in [-h, 0]$ функций $\varphi(s)$, для которых $\varphi(0) = 1$ и $0 < \varphi(s) \leq \exp(\lambda \alpha s/2)$. Рассмотрим решение $u(t, \varphi)$ уравнения (2) с начальным условием $u(s, \varphi) \in S_h$.

Пусть все синапсы являются возбуждающими и веса одинаковы: $g_k = g$ ($k = 1, \dots, m$). Рассмотрим ситуацию, когда $T_R < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m < T_2$ и $t_m < t_1 + T_1$. Это означает, что на вышедший из рефрактерного состояния нейрон пришла группа (пачка) спайков. При этом последний спайк в пачке начался раньше, чем окончился первый. Такое воздействие назовем пачечным. Присутствие медиатора приблизит начало t^{sp} спайка нейрона ($t^{sp} < T_2$). Будем говорить, что нейрон непосредственно реагирует на пачку импульсов, если $t_m < t^{sp} < t_1 + T_1$, то есть его спайк начался раньше, чем закончился первый импульс. Введем величины $Q = t^{sp} - t_m$ и $\xi_k = t_k - t_{k-1}$ ($k = 2, \dots, m$).

Лемма 1. Пусть нейрон непосредственно реагирует на пачечное воздействие. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место приближение

$$Q = (T_2 - t_m - g \sum_{k=2}^m (k-1)\xi_k) / (1 + mg) + o(1),$$

при этом $u(t^{sp} + s, \varphi) \in S_h$.

По-другому влияет на нейрон пачка спайков, если он несет на себе возбуждающие и тормозные синапсы. Пусть m_1 и m_2 - соответственно их количество, и все синаптические веса равны по модулю ($|g_k| = g$). Введем P_γ - класс непрерывных при $s \in [-h, 0]$ функций $\psi(s)$, для которых $0 < \psi(s) < \exp(-\lambda \gamma)$. Фиксируем момент времени $T_* > t_m + T_1 + h$.

Лемма 2. Пусть $t_m + T_1 + h < t_* < T_*$, $\beta = gT_1(m_2 - m_1) - T_* > 0$ и для решения $u(t, \varphi)$ уравнения (2) начальное условие $u(s, \varphi) \in P_\gamma$, где $\gamma > \alpha(T_* + gm_1T_1)$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ выполнено неравенство $0 < u(t, \varphi) < 1$ для $t \in [0, t_*]$ и справедливо включение $u(t_* + s, \varphi) \in P_{\gamma_*} \subset P_\gamma$, где $\gamma_* = \gamma + \alpha\beta$.

Рассмотрим систему двух нейронов, на которые действует пачка из m спайков. При этом первый нейрон воздействует на второй. Все синапсы считаем

ОДИНАКОВЫМИ И ВОЗБУЖДАЮЩИМИ. Нейронное образование описывают уравнения

$$\dot{u}_1 = \lambda[-1 - f_{Na}(u_1) + f_K(u_1(t-1)) + \alpha g H(u_1)(\sum_{k=1}^m V(t-t_k))] u_1, \quad (4)$$

$$\dot{u}_2 = \lambda[-1 - f_{Na}(u_2) + f_K(u_2(t-1)) + \alpha g H(u_2)(\sum_{k=1}^m V(t-t_k) + \theta(u_1(t) - 1))] u_2. \quad (5)$$

Здесь u_1 и u_2 - мембранные потенциалы нейронов; $\theta(u_1(t) - 1)$ указывает на присутствие медиатора, выделяемого в результате спайка первого нейрона; $g > 0$ - синаптические веса.

Пусть спайк первого нейрона начался в нулевой момент времени, а второго - в момент $\xi \in [0, T_1]$, и $u_1(s)$, $u_2(\xi+s) \in S_h$. Обозначим через t^{sp_1} , t^{sp_2} моменты начала следующих спайков и положим $\xi' = t^{sp_2} - t^{sp_1}$.

Лемма 3. Пусть нейроны непосредственно реагируют на пачечное воздействие. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место приближение: $\xi' = \xi / (1 + g(m+1)) + o(1)$, при этом $u_1(t^{sp_1} + s) \in S_h$ и $u_2(t^{sp_2} + s) \in S_h$.

1. Архитектура и уравнения нейронной сети с модульной организацией

Нейронная сеть - это популяция сходных нейронов, связанных друг с другом. По мнению Ф. Блюма и др. [3], один из возможных способов организации нейронных сетей - иерархический. Нейронная популяция делится на уровни. Любой нейрон уровня (многие из них) воспринимает сигналы от нейронов предыдущего уровня. В свою очередь, нейроны уровня действуют на элементы следующего уровня. Точка зрения Ф. Блюма созвучна с идеями В. Маунткастла и Дж. Эделмена [4] о модульной организации мозга, когда нейроны распадаются на ансамбли. Дж. Экклс [5] придает большое значение тормозным нейронам, которые должны входить в состав любой нейронной ассоциации. Отметим, наконец, что в мозге давно обнаружены кольцевые нейронные образования.

Рассмотрим сеть, состоящую из N нейронных модулей (ассоциаций). Пусть каждый из модулей содержит n возбудительных и q тормозных нейронов. Считаем, что внутри каждого модуля любой возбудительный нейрон оказывает влияние на любой другой нейрон. Однако, каждый тормозный нейрон действует только на возбудительные элементы, не имея доступа к тормозным.

Предположим, что нейронные модули образуют ориентированную кольцевую структуру. Каждый возбудительный элемент i -ого модуля действует на любой возбудительный нейрон $i+1$ -ого модуля, но не имеет синапсов на тормозных нейронах $i+1$ -ого модуля. Ассоциации с номерами $i + kN$ ($k=0, \pm 1, \dots$) отождествляются. Параметры всех нейронов и абсолютные значения синаптических весов считаются одинаковыми.

Будем нумеровать возбудительные и тормозные элементы по отдельности парой индексов (i, j) , где i - номер модуля, а j - нейрона. Обозначим через $u_{i,j}$ и $v_{i,m}$ значения мембранных потенциалов (i, j) -ого и (i, m) -ого возбудительного и тормозного нейронов. Эти величины удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{u}_{i,j} = \lambda[-1 - f_{Na}(u_{i,j}) + f_K(u_{i,j}(t-1)) + \alpha g H(u_{i,j})[\sum_{r=1}^n (\theta(u_{i-1,r} - 1) + \theta(u_{i,r} - 1)) - \sum_{r=1}^q \theta(v_{i,r} - 1)]] u_{i,j}, \quad (6)$$

$$\dot{v}_{i,m} = \lambda[-1 - f_{Na}(v_{i,m}) + f_K(v_{i,m}(t-1)) + \alpha g H(v_{i,m}) \sum_{r=1}^n \theta(u_{i,r} - 1)] v_{i,m}, \quad (7)$$

где $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, n$; $m = 1, \dots, q$. Функционал $H(*)$ задается (3), g - общее по абсолютной величине значение синаптических весов. Функции $\theta(u-1)$ указывают на присутствие медиатора, выделившегося в результате спайка соответствующего нейрона.

Ниже речь идет о динамике системы (6), (7). Вопросу исследования

нелинейных цепочек, решеток, кольцевых систем, в том числе с задержкой, посвящена значительная литература [6-12]. Отличительной особенностью подхода, использованного в данной работе, является то, что для исследования системы уравнений (6), (7) применяется специальный асимптотический метод, базирующийся на работах [13, 14]. С его помощью удается доказать существование сложных (нелокальных) релаксационных колебаний.

2. Алгоритм интегрирования системы уравнений нейронной сети с кольцевой модульной организацией

Будем считать, что число нейронов тормозного типа в модулях удовлетворяет условию: $\beta_0 = gT_1(q - 2n) - T_2 > 0$, то есть достаточно велико. При асимптотическом интегрировании системы (6), (7) используется описанный в [15] прием задания начальных условий для уравнений в различные моменты времени. Отсчет модулей будем вести с некоторого произвольно фиксированного номера k . Зададим начальные условия для уравнений, описывающих возбуждающие нейроны. Внутри i -ого модуля ($i=k, \dots, k+N-1$) выберем $n_i \leq n$ первых возбуждающих нейронов. Обозначим через t_{ij} моменты начала их спайков. Пусть $t_{i,j+1} \geq t_{ij}$ ($i=k, \dots, k+N-1; j=1, \dots, n_i$), $t_{i+1,1} > t_{i,n_i}$ ($i=k, \dots, k+N-2$), то есть спайки начинаются в порядке возрастания номеров нейронов внутри модуля, и спайк первого возбуждающего нейрона модуля следует за спайком последнего из выбранных возбуждающих нейронов предыдущего модуля. Будем считать, что в модулях спайки образуют пачки: $t_{ij} \leq t_{i,1} + T_1$ ($i=k, \dots, k+N-1$). В качестве начальных функций для уравнений (6) возьмем: $u_{i,j}(t_{i,j}+s) = \varphi_{i,j}(s) \in S_h$ при $i=k, \dots, k+N-1; j=1, \dots, n_i$. Для остальных уравнений возбуждающих нейронов положим: $u_{i,j}(t_{i,1}+s) = \varphi_{i,j}(s) \in P^0$ при $i=k, \dots, k+N-1; j=n_i+1, \dots, n$. Здесь число $\gamma_0 = \alpha(T_2 + 2nT_1) > 0$.

Зададим начальные условия для уравнений тормозных нейронов. Обозначим моменты начала их спайков через τ_{ij} ($i=k, \dots, k+N-1; j=1, \dots, q$). Будем считать, что $\tau_{ij} > t_{i,n_i}$, но $\tau_{ij} < t_{i,1} + T_1$. Это означает, что в i -ом модуле тормозные нейроны непосредственно реагируют на пачку спайков первых n_i возбуждающих элементов. Пусть начальные функции для уравнений (7) удовлетворяют условиям: $v_{ij}(\tau_{ij}+s) = \psi_{ij}(s) \in S_h$ при ($i = k, \dots, k+N-1; j = 1, \dots, q$). Спайки тормозных элементов в i -ом модуле завершаются до того, как его первые n_i возбуждающие нейроны выйдут из рефрактерного состояния.

Структура взаимодействия нейронов такова, что каждое из уравнений (6), (7) для u_{ij} и v_{ij} может быть проинтегрировано независимо от других во время генерации спайка соответствующим нейроном и на интервале времени продолжительностью h , следующим за моментом окончания импульса. Одновременно, функции u_{ij} и v_{ij} , описывающие (i, j)-ые возбуждающие и тормозные нейроны, входят в уравнения других нейронов только на интервалах времени, где $u_{ij} \geq 1$ и $v_{ij} \geq 1$, то есть на промежутках генерации импульсов.

Доопределим непрерывно начальные функции для уравнений возбуждающих нейронов последнего $k+N-1$ -ого модуля на интервалах $t \in [t_{k,1}, t_{k+N-1,j}]$ ($j=1, \dots, n_{k+N-1}$), соблюдая условия $u_{k+N-1,j}(t) < 1$. В силу выбора моментов $\tau_{k,j}$ спайки тормозных элементов k -ого модуля не действуют на его первый возбуждающий нейрон. Уравнение для $u_{k,1}$ интегрируется на интервале $t \in [t_{k,1}, t_{k+N-1,1}]$ независимо от других. Для $t > t_{k+N-1,1}$ оно представляет собой задачу о внешнем воздействии на нейрон пачки импульсов n_{k+N-1} первых возбуждающих элементов $k+N-1$ -ого модуля. Пусть первый нейрон k -ого модуля непосредственно реагирует на пачечное воздействие. Лемма 1 позволяет найти момент $t_{k,1}'$ начала его нового спайка, при этом $u_{k,1}(t_{k,1}'+s) \in S_h$.

Спайки тормозных нейронов k -ого модуля не действуют также на второй сгч возбудительный элемент. Уравнение для второго возбудительного элемента k -ого модуля представляет собой задачу о внешнем воздействии пачки спаек возбудительных нейронов $k+N-1$ -ого модуля, к которой присоединяется спайк первого возбудительного нейрона. Если второй нейрон непосредственно реагирует на пачечное воздействие, то момент $t_{k,2}'$ начала его нового спайка определяется по лемме 3 и $u_{k,2}(t_{k,2}'+s) \in S_h$. Подчеркнем, что второй нейрон не действует на первый. Ситуация для уравнений, описывающих в k -ом модуле возбудительные нейроны с номерами $j = 3, \dots, n_k$ аналогична.

Для всех уравнений (7), описывающих тормозные нейроны k -ого модуля, имеет место задача о пачечном воздействии со стороны первых n_k возбудительных элементов данного модуля. Если все эти нейроны непосредственно реагируют на воздействие, то моменты начала спаек $\tau_{k,j}'$ ($j=1, \dots, q$) определяются по лемме 1, при этом $v_{k,2}(\tau_{k,j}'+s) \in S_h$.

В рамках принятых априорных предположений новые спайки первых n_k возбудительных элементов k -ого модуля образуют пачку. Спайки тормозных нейронов успевают завершиться до того, как данные возбудительные элементы выйдут из рефрактерного состояния.

Обратимся к уравнениям возбудительных нейронов k -ого модуля с номерами $j > n_k$. На промежутке времени $t \in [t_{k,1}, t_{k,1}']$ на данные нейроны действуют возбудительные нейроны k -ого и $n+N-1$ -ого модулей и тормозные нейроны k -ого модуля. Общее число действующих возбудительных элементов $n_k + n_{k+N-1} < 2n$. Напомним, что число $\beta_0 = gT_1(q - 2n) - T_2 > 0$. По лемме 2 возбудительные нейроны k -ого модуля с номерами $j > n_k$ не генерируют спаек и $u_{1,j}(t_{i,1}+s) \in P^{\gamma_0+\alpha\beta_0}$.

Далее, в системе (6), (7) рассматриваются уравнения для нейронов, принадлежащих модулям с номерами $i=k+1, \dots, k+N-1$. После анализа уравнений $k+N-1$ -ого модуля мы вернемся к первоначальной ситуации. Вначале вычисляемые функции не удовлетворяют системе уравнений (6), (7). Начиная с момента полного обхода кольцевой структуры, метод дает классическое решение системы.

Используя леммы 1 и 3, выпишем формулы для $t_{k,i}'$ ($i=1, \dots, n_k$) и $\tau_{k,j}'$ ($i=1, \dots, q$) - моментов начала спаек возбудительных и тормозных нейронов k -ого модуля

$$t_{k,1}' = t_{k-1,n_{k-1}} + [T_2 - (t_{k-1,n_{k-1}} - t_{k,1}) - g \sum_{r=2}^{n_{k-1}} (r-1)(t_{k-1,r} - t_{k-1,r-1})] / (1 + gn_{k-1}) + o(1), \quad (8)$$

$$t_{k,j}' = t_{k,j-1}' + [t_{k,j} - t_{k,j-1}] / (1 + g(n_{k-1} + j - 1)) + o(1) \quad (j=2, \dots, n_k), \quad (9)$$

$$\tau_{k,j}' = t_{k,n_k}' + [T_2 - (t_{k,n_k}' - \tau_{k,j}') - g \sum_{r=2}^{n_k} (r-1)(t_{k,r}' - t_{k,r-1}')] / (1 + gn_k) + o(1) \quad (j=1, \dots, q). \quad (10)$$

При переходе к $k+1$ -ому модулю в выражениях (8)-(10) следует положить $t_{k,j} = t_{k,j}'$ ($j = 1, \dots, n_k$), где $t_{k,j}'$ - найденные ранее моменты начала спаек нейронов k -ого модуля.

3. Динамика нейронной сети с кольцевой модульной организацией

Из алгоритма вытекает, что одним из способов организации колебаний в модульной структуре является циклическое распространение волны спаек. Выберем первый модуль за начальный. Процесс последовательной генерации спаек в модулях с первого по N -ый назовем тактом распространения волны. Пусть нулевой такт волны, открывающийся спайком первого возбудительного нейрона первого модуля, начался в момент времени $t_w = t_{1,1} = 0$. Составим векторы

$$\mathbf{t} = (t_{1,1}, \dots, t_{1,m}, \dots, t_{2,1}, \dots, t_{2,n_2}, \dots, t_{N,1}, \dots, t_{N,n_N}),$$

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_{1,1}, \dots, \tau_{1,q}, \dots, \tau_{2,1}, \dots, \tau_{N,1}, \dots, \tau_{N,q})$$

из моментов начала спайков на нулевом такте. Будем считать, что

$$t_{i,j} \leq t_{i,j+1} \leq t_{i,1} + T_1 \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n_i - 1), \quad (11)$$

$$t_{i,m} \leq t_{i+1,j} \leq t_{i,1} + T_1 \quad (i = 1, \dots, N-1; j = 1, \dots, n_{i+1}), \quad (12)$$

$$t_{1,m} + T_R < t_{N,1}, \quad t_{1,1} + T_2 > t_{N,n_N}, \quad (13)$$

$$t_{i,m} \leq \tau_{i,j} \leq t_{i,1} + T_1 \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, q). \quad (14)$$

На первоначальном такте спайки нейронов образуют пачки. Спайки нейронов N -ого модуля начинаются после того, как незаторможенные возбудительные нейроны первого модуля вышли из рефрактерного состояния, но раньше, чем успели спонтанно сгенерировать спайки.

Составим из начальных функций векторы: $\phi = (\phi_{1,1}, \dots, \phi_{1,n}, \dots, \phi_{N,1}, \dots, \phi_{N,n})$, $\psi = (\psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,q}, \dots, \psi_{N,1}, \dots, \psi_{N,q})$. Здесь $\phi_{i,j} \in S_h$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n_i$), $\phi_{i,j} \in P^v$, где $\gamma_0 = \alpha(T_2 + 2nT_1) > 0$, ($i = 1, \dots, N; j = n_i + 1, \dots, n$). Наконец, $\psi_{i,j} \in S_h$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, q$). Множество наборов векторов $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}, \phi, \psi)$ обозначим через W . Рассмотрим решения системы (6), (7) с начальными условиями из W , то есть решения, для которых $u_{i,j}(t_{i,j} + s) = \phi_{i,j}(s)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n_i$), $v_{i,j}(t_{i,j} + s) = \psi_{i,j}(s)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, q$).

По формуле (8) находится момент t_w' начала следующего такта прохождения волны. Он совпадает с началом нового спайка первого возбудительного нейрона первого модуля. Моменты начала спайков возбудительных и тормозных нейронов на новом такте будем отсчитывать от времени t_w' и обозначим через $t_{i,j}'$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n_i$) и $\tau_{i,j}'$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, q$). Используя (8)-(10) и леммы 1 и 3, получим:

$$t_w' = t_{N,n_N} + [T_2 - t_{N,n_N} - g \sum_{r=2}^{n_N} (r-1)(t_{N,r} - t_{N,r-1})] / (1 + gn_N) + o(1), \quad (15)$$

$$t_{1,1}' = 0, \quad (16)$$

$$t_{1,j}' = t_{1,j-1}' + (t_{1,j} - t_{1,j-1}) / (1 + g(n_N + j - 1)) + o(1) \quad (j = 2, \dots, n_1), \quad (17)$$

$$t_{i,1}' = t_{i-1,n_{i-1}}' + [T_2 - (t_w' + t_{i-1,n_{i-1}}' - t_{i,1}) - g \sum_{r=2}^{n_{i-1}} (r-1)(t_{i-1,r}' - t_{i-1,r-1}')] / (1 + gn_{i-1}) + o(1) \quad (i=2, \dots, N), \quad (18)$$

$$t_{i,j}' = t_{i,j-1}' + (t_{i,j} - t_{i,j-1}) / (1 + g(n_{i-1} + j - 1)) + o(1), \quad (i=2, \dots, N; j = 2, \dots, n_i), \quad (19)$$

$$\tau_{i,j}' = t_{i,n_i}' + [T_2 - (t_w' + t_{i,n_i}' - \tau_{i,j}) - g \sum_{r=2}^{n_i} (r-1)(t_{i,r}' - t_{i,r-1}')] / (1 + gn_i) + o(1) \quad (i=1, \dots, N; j=1, \dots, q), \quad (20)$$

$$u_{i,j}(t_{i,j}' + s) = \phi_{i,j}'(s) \in S_h \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n_i), \quad (21)$$

$$v_{i,j}(\tau_{i,j}' + s) = \psi_{i,j}'(s) \in S_h \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, q). \quad (22)$$

Формулы (8)-(10) применимы, когда нейроны непосредственно реагируют на пачечное воздействие. При этом пачки поступают после того, как нейроны вышли из рефрактерного состояния, но не успели спонтанно сгенерировать спайки. Возникают дополнительно к (11)-(14) косвенные ограничения на векторы \mathbf{t} и $\boldsymbol{\tau}$. Это неравенства (11)-(14), в которых t_{ij} и τ_{ij} меняются на t'_{ij} и τ'_{ij} соответственно:

$$t'_{ij} \leq t'_{ij+1} \leq t'_{i,1} + T_1 \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n_i - 1), \quad (23)$$

$$t'_{i,n_i} \leq t'_{i+1,j} \leq t'_{i,1} + T_1 \quad (i = 1, \dots, N-1; j = 1, \dots, n_{i+1}), \quad (24)$$

$$t'_{1,n_1} + T_R < t'_{N,1}, \quad t'_{1,1} + T_2 > t'_{N,n_N}, \quad (25)$$

$$t'_{i,n_i} \leq \tau'_{ij} \leq t'_{i,1} + T_1 \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, q). \quad (26)$$

Далее, необходимо требовать:

$$t'_{N,n_N} \leq t'_w + t'_{1,j} < t'_{N,1} + T_1 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (27)$$

$$t'_{i+1,n_{i+1}} + T_R < t'_w + t'_{i,1} \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad (28)$$

$$t'_{i+1,1} + T_2 > t'_w + t'_{i,n_i} \quad (i = 1, \dots, N-1). \quad (29)$$

Класс W сузим, чтобы выполнялись одновременно все перечисленные условия. Введем множество W_1 , состоящее из векторов $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau})$.

Формулы (15)-(22) задают оператор $\Pi: W \rightarrow W$, описывающий такты прохождения волны спайков по кольцевой системе. Выражения (15)-(20) определяют его конечномерную, а (21) и (22) - бесконечномерную составляющие. Главная часть конечномерной составляющей получается из (15)-(20), если подставить (15) в (16)-(20) и отбросить слагаемые $o(1)$. Она представляет собой отображение $\Pi_1: W_1 \rightarrow W_1$.

Ниже будут сформулированы условия, при которых отображение Π_1 имеет устойчивую неподвижную точку. Обозначим ее через $(\mathbf{t}_*, \boldsymbol{\tau}_*)$. Существование неподвижной точки означает, что в классе W присутствуют начальные условия решений системы (6), (7), образующих аттрактор. Для этих решений на каждом такте прохождения волны моменты начала спайков удовлетворяют соотношениям: $t_{ij} = t_{ij}^* + o(1)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n_i$), $\tau_{ij} = \tau_{ij}^* + o(1)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, q$).

Для доказательства существования неподвижной точки отображения Π_1 введем новые переменные. Для первоначального такта волны обозначим через $\xi_{i,1} = t_{i,1} - t_{i-1,n_{i-1}} > 0$ ($i = 2, \dots, N$) - запаздывание начала спайка первого возбудительного элемента i -ого модуля относительно начала спайка последнего n_{i-1} -ого незаторможенного возбудительного нейрона $i-1$ -ого модуля. Пусть $\xi_{i,j} = t_{i,j} - t_{i,j-1} > 0$ ($i = 1, \dots, N; j = 2, \dots, n_i$) - время между началами спайков $j-1$ -ого и j -ого возбудительных нейронов i -ого модуля, а $\eta_{i,j} = \tau_{i,j} - t_{i,n_i} > 0$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, q$) - рассогласование начала спайков n_i -ого возбудительного и j -ого тормозного нейронов. Обозначим через $\xi_{1,1}' = t'_w - t'_{N,n_N} > 0$ время между началом спайка последнего n_N незаторможенного возбудительного нейрона N -ого модуля и началом следующего такта. Пусть $\xi'_{i,j}$, $\eta'_{i,j}$ - значения описанных переменных на новом такте волны.

Введенные переменные позволяют записать отображение Π_1 в виде:

$$\xi_{1,1}' = [T_2 - \sum_{v=2}^{n_1} \xi_{1,v} - \sum_{\mu=2}^N \sum_{v=1}^{n_\mu} \xi_{\mu,v} - g \sum_{v=2}^{n_N} (v-1) \xi_{N,v}] / (1 + gn_N), \quad (30)$$

$$\xi'_{1,j} = \xi_{1,j} / (1 + g(n_N + j - 1)) \quad (j = 2, \dots, n_1), \quad (31)$$

$$\xi_{i,1}' = [T_2 - \sum_{v=2}^{n_i} \xi_{i,v} - \sum_{\mu=i+1}^N \sum_{v=1}^{n_\mu} \xi_{\mu,v} - \sum_{\mu=1}^{i-1} \sum_{v=1}^{n_\mu} \xi_{\mu,v}' - g \sum_{v=2}^{n_{i-1}} (v-1) \xi_{i-1,v}] / (1 + gn_{i-1}) \quad (i=2, \dots, N), \quad (32)$$

$$\xi_{i,j}' = \xi_{i,j} / (1 + g(n_{i-1} + j - 1)) \quad (i = 2, \dots, N; j = 2, \dots, n_i), \quad (33)$$

$$\eta_{i,j}' = [T_2 - (\sum_{\mu=i+1}^N \sum_{v=1}^{n_\mu} \xi_{\mu,v} - \eta_{i,j} + \sum_{\mu=1}^i \sum_{v=1}^{n_\mu} \xi_{\mu,v}') - g \sum_{v=2}^{n_i} (v-1) \xi_{i,v}'] / (1 + gn_i) \quad (i=1, \dots, N; j=1, \dots, q), \quad (34)$$

Для исследования сходимости итерационного процесса (30)-(34) достаточно рассмотреть процесс для переменных $\xi_{i,1}$ ($i = 1, \dots, N$), задаваемый формулами (30) и (32), полагая в них $\xi_{i,j} = \xi_{i,j}' = 0$ для $j = 2, \dots, n_i$. Возникающие итерационные формулы имеют вид

$$(1 + gn_N) \xi_{1,1}' + \sum_{j=2}^N \xi_{j,1} = T_2,$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \xi_{j,1}' + (1 + gn_{i-1}) \xi_{i,1}' + \sum_{j=i+1}^N \xi_{j,1} = T_2 \quad (i = 2, \dots, N-1),$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \xi_{j,1}' + (1 + gn_{N-1}) \xi_{N,1}' = T_2.$$

Данные соотношения - метод Зейделя решения линейной системы с положительно определенной симметрической матрицей, который сходится. Координаты предельной точки $(\xi_1^0, \dots, \xi_N^0)$ легко находятся:

$$\xi_i^0 = T_2 / [n_{i-1} (g + \sum_{j=1}^N n_j^{-1})] \quad (i = 1, \dots, N). \quad (35)$$

Возвращаясь к отображению Π_1 , заданному в форме (30)-(34), можно утверждать, что итерационный процесс, начинающийся из некоторой окрестности точки $\xi_{i,1} = \xi_i^0$ ($i=1, \dots, N$), $\xi_{i,j} = 0$ ($i=1, \dots, N; j=1, \dots, n_i$), $\eta_{i,j} = \xi_{i+1}^0$ ($i=1, \dots, N; j=1, \dots, q$), сходится к ней.

Полученная неподвижная точка отображения Π_1 в терминах исходных переменных (t, τ) должна принадлежать области его определения W_1 , то есть для нее должны быть выполнены неравенства (11)-(14) и (23)-(29). Эти условия в терминах переменных ξ_i^0 приобретают совершенно простой вид: $0 < \xi_i^0 < T_1$, $T_R < \sum_{j=1}^N \xi_j^0 - \xi_i^0 < T_2$ ($i = 1, \dots, N$). Используя явный вид величин ξ_i^0 , получим

$$0 < T_2 / [n_{i-1} (g + \sum_{j=1}^N n_j^{-1})] < T_1 \quad (i = 1, \dots, N), \quad (36)$$

$$T_R < (T_2 \sum_{k \neq i}^N n_k^{-1}) / (g + \sum_{j=1}^N n_j^{-1}) < T_2 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (37)$$

Проведенные построения гарантируют существование инвариантной области у оператора Π . Для системы уравнений (6), (7) это означает существование аттрактора, состоящего из специфических решений.

Утверждение. Выделим в каждом модуле по n_i возбудительных нейронов, соблюдая неравенства (36) и (37). Будем считать число q тормозных нейронов большим: $\beta_0 = gT_1(q - 2n) - T_2 > 0$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ система (6), (7) имеет аттрактор, состоящий из решений, обладающих следующими свойствами. Временные промежутки между началами спайков выбранных возбудительных нейронов внутри каждого модуля разнятся на величину $o(1)$. Интервалы между началами спайков

возбудительных нейронов $i-1$ -ого и i -ого модулей близки к числам ξ_i^0 , задаваемым формулой (35). Спайки тормозных нейронов i -ого модуля запаздывают относительно импульсов возбудительных элементов на величину, близкую к ξ_{i+1}^0 . Оставшиеся возбудительные элементы не генерируют спайков.

Описанные аттракторы состоят из решений, которые естественно назвать волнами возбуждения. Эти волны не исчерпывают всех аттракторов уравнений (6), (7). Например, возможны ситуации, когда по кольцевой системе распространяется друг за другом несколько волн.

В сформулированном утверждении предложено решение задачи о синтезе нейронной системы, по которой, в зависимости от начального состояния, распространяются волны наперед заданной структуры. Выбирая число незаторможенных возбудительных нейронов в модулях, можно регулировать промежутки между началами пачек импульсов соседних модулей. Может быть информативной пространственная структура незаторможенных возбудительных элементов внутри модулей. Для теории нейронных сетей данные задачи важны и связаны с вопросами моделирования кратковременной памяти. Согласно волновой гипотезе [16,17] о природе памяти, сведения записываются и хранятся в ней в виде устойчивых, незатухающих волн нейронной активности.

Таким образом, на модели продемонстрирована принципиальная возможность хранения информации в динамическом виде. Пространственное распределение спайков в модуле можно интерпретировать как образ. Кольцевая система из нейронных модулей может бесконечно долго хранить заданную последовательность образов.

Библиографический список

1. Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т.2, № 11. С. 64.
2. Кащенко С.А., Майоров В.В. Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона // Математическое моделирование. 1993. Т.5, № 112. С. 13.
3. Блум Ф., Лейзерсон А., Хофстефер Л. Мозг, разум и поведение. М.: Мир, 1988.
4. Эделмен Дж., Маунткастл В. Разумный мозг. М.: Мир, 1981.
5. Экклс Дж. Тормозные пути центральной нервной системы. М.: Мир, 1971.
6. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
7. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
8. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
9. Chua L.O., Yang L. Cellular neural networks: Theory // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1998. Vol. 35. P. 1257.
10. Chua L. O., Yang L. Cellular neural networks: Applications // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1998. Vol. 35. P. 1273.
11. Osipov G.V., Rabinovich M.I., Shalfeev V.D. Dynamics of nonlinear synchronization networks: International Seminar «Nonlinear circuits and systems». June 16-18, 1992, Moscow, Russia. Vol.2. P. 88.
12. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Докл. АН СССР. 1986. Т. 28, № 5. С. 1120.
13. Кащенко С.А. Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33, № 3. С. 308.

14. Кащенко С.А. Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Математическое моделирование. 1990. Т.2, № 9. С. 49.

15. Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Исследование колебаний в кольцевых нейронных системах // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 5. С. 594.

16. Лебедев А.Н. О физиологических основах восприятия и памяти // Психол. журн. 1992. Т.13, №2. С. 30.

17. Лебедев А.Н. Память человека, ее механизмы и границы // Исследование памяти. М.: Наука, 1990. С. 104.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.10.94
после переработки 24.01.95

SELFORGANIZATION OF OSCILLATIONS IN RING SYSTEM OF HOMOGENOUS NEURON MODULES

Part 2. Model of ring structure of homogenous modules

V.V.Mayorov

In this paper the appearance of wave batches in ring structures of homogenous neuron modules, which contain exciting and inhibiting elements, is modelled. In the second part it is shown that inside of each module the certain groups of exciting elements simultaneously generate impulses, others are inhibited. Time misconcordance between groups of impulses of neighbouring modules is defined by number of excited neurons, and group structure - by starting conditions.



Майоров Вячеслав Владимирович - родился в 1948 году в Ярославле, окончил Ярославский государственный педагогический институт (1971). После окончания ЯГПИ работает в Ярославском государственном университете. Кандидат физико-математических наук (1974), доцент (1985). Область интересов: теория нелинейных колебаний, нейронные системы. Опубликовал более 30 научных статей по указанной тематике.



Изв. вузов «ПНД», т.3, № 5, 1995

TOOLS FOR ANALYZING OBSERVED CHAOTIC DATA*

Henry D.I. Abarbanel

4. Model Making in Chaos

The last topic we take up in this article is that of making models in chaotic systems for prediction or control of the source of the observed chaotic signal. In a sense this is both the easiest and the hardest task we have discussed in this article. It is the easiest because it is quite simple to make models of the dynamics which very accurately allow one to predict forward in time from any new initial condition close to or on the attractor within the limits of the intrinsic instabilities embodied in the positive Lyapunov exponents. It is also the hardest because there is no guideline as to which of many functional forms to use for the models and what interpretation to place on the parameters in the models from a physical point of view. In this section we make models on the attractor and evaluate them by how well they do in prediction or possibly control. However, another route to model making which must be based in an understanding of the fundamental physics of the problem would be to develop equations of motion for the dynamical system and then compare the output of those equations of motion not by individual orbit $y(k)$ to the observed orbit, for these must disagree and be essentially uncorrelated from each other again due to the intrinsic instabilities in the dynamics. Instead the comparison is to be made in terms of the statistical quantities such as fractal dimensions and Lyapunov exponents as we have discussed.

As we noted in our introduction, we work here with data as observed on the attractor alone, thus we cannot hope as an algorithmic matter to make models which would have general validity throughout the system state space. For example, if there is a set of initial conditions in that original phase space which leads to other behaviour than what we have observed and analyzed, it is plausible that our models for the motion in that other basin of attraction could be different. It is also quite possible that we would have been lucky enough or insightful enough to have made a model which encompasses both features of the dynamics. When we make models we have to decide from the outset what kind of functional form we are going to use to express what is certainly fundamentally forms of Newton's laws. The impossibility of selecting in any *a priori* way the correct functional form is stressed by Rissanen [43] who also lays out a clear program for extracting from experimental data the most information available.

Our discussion here will limit itself to outlining how one can use the phase space structure we have built up in the $y(n)$ to provide effective models of the dynamics which

* Окончание. Начало см. Изв. вузов «ПНД», т.3, № 2, 3, 4, 1995

allow one to predict the evolution of any newpoint in the phase space within the basin of attraction which has been observed. The basic idea is that since we have seen how points in a neighbourhood evolve into points in the «next» neighbourhood we ought to be able to provide an appropriate interpolation scheme which would allow us to say that any new point would evolve more or less as its neighbourhood was seen to evolve. Now we'll put some flesh on these bones.

4.1. Local Models

The first kind of model we consider is that of local neighbourhood to neighbourhood maps. The idea follows our construction of local maps for purposes of extracting local Jacobian matrices to use in determining Lyapunov exponents. We imagine that we have a certain local functional form for the dynamics $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{x})$ in the neighbourhood of the observed point $\mathbf{y}(k)$:

$$\mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mathbf{c}(m,k) \phi_m(\mathbf{x}), \quad (55)$$

where the functions $\phi_m(\mathbf{x})$ are a basis set we choose from intuition or good guessing or convenience. These $\phi_m(\mathbf{x})$ could be polynomials or other functions with some appeal. The discussion of what functions to use and how many to use takes us into the difficult subject of multidimensional interpolation [44] which we will not pretend to present here. In an intuitive sense we can say that if we have enough data, then local polynomial approximations to the dynamics is sure to provide accurate local maps. When data becomes sparse or dimensions become high and the number of coefficients in the polynomials correspondingly large, other interpolation functions will probably be more efficient and accurate. I do not have a favorite all purpose basis set to offer or suggest.

Returning to the general problem, which we will then illustrate with polynomials. We go to a particular point $\mathbf{y}(k)$ in the embedding space of dimension d_E and using a device such as the principal component decomposition discussed in the context of local false nearest neighbors select out a d_L dimensional subspace in which to make a model. All distances are evaluated in the $d_E \geq d_L$ dimensional space, but all other computations are done on the d_L dimensional model which takes the selected d_L components of $\mathbf{y}(k)$ into the same components of $\mathbf{y}(k+1)$ via

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{y}(k)) = \sum_{m=1}^M \mathbf{c}(m,k) \phi_m(\mathbf{y}(k)). \quad (56)$$

To determine the coefficients in the model we select the N_B nearest neighbors of the phase space point $\mathbf{y}^{(r)}(k)$; $r=1,2,\dots,N_B$, and minimize

$$\sum_{r=1}^{N_B} |\mathbf{y}(r,k+1) - \sum_{m=1}^M \mathbf{c}(m,k) \phi_m(\mathbf{y}^{(r)}(k))|^2. \quad (57)$$

This is a linear problem once the basis functions $\phi_m(\mathbf{x})$ are fixed. Vary this expression with respect to $c_\beta(n,k)$; $\beta=1,2,d_L$ to find

$$\sum_{m=1}^M M(k)_{nm} c_\beta(m,k) = \sum_{r=1}^{N_B} y_\beta(r,k+1) \phi_n(\mathbf{y}^{(r)}(k)), \quad (58)$$

where

$$M(k)_{nm} = \sum_{r=1}^{N_B} \phi_n(\mathbf{y}^{(r)}(k)) \phi_m(\mathbf{y}^{(r)}(k)). \quad (59)$$

So the problem is an $M \times M$ matrix inversion problem, and this is well studied. The literature is rife with examples of good, stable, accurate algorithms for solving this kind of problem.

When we are done with this, we will have a local model associated with each observed point $\mathbf{y}(k)$ on the attractor. In practice what one would do for prediction is to store the points $\mathbf{y}(k)$, and, when handed a point $\mathbf{z}(0)$ from which one wants to predict the evo-

lution of the system, we would search the $y(k)$ to find the one nearest $z(0)$, then for this point, let's call it $y(J)$, we would construct the model local to its nearest neighbor among the observed points. This would give us a local model $F_J(x)$ which should be valid as an interpolating function in the neighbourhood of $y(J)$ which includes the point of interest $z(0)$. Now we evaluate $F_J(z(0))$ and this gives us the next point on the orbit which starts with $z(0)$ as initial condition: $z(1)=F_J(z(0))$. We call this an interpolating operation because the function $F_J(x)$ contains information in its coefficients $c(m,J)$ about all the neighbors in the neighbourhood of $y(J)$. Now we find the nearest neighbor of $z(1)$, call it $y(K)$, evaluate the required local map $F_K(x)$ and proceed to $z(2)=F_K(z(1))$. We iterate this procedure for as far into the future of $z(0)$ as we wish to predict. The bound on our accuracy in this is determined by the error we make in the actual value of $z(0)$ and the largest local Lyapunov exponent $\lambda_1(z(0),L)$ which tells us how that error grows.

The procedure we have just described is called iterative forecasting since we make a large number of unit time steps to reach L steps into the future of $z(0)$. The root mean square error in this forecast should scale approximately as [2,45] in going from $z(0)$ to $z(L)$ in L steps

$$N^{-(I+1)/d_L} e^{(I+1)L\lambda_1}, \quad (60)$$

if we use polynomial basis functions $\phi_n(x)$ where I is the maximum order of the polynomials used, and N is the number of data. If we attempt to build a model which goes from $z(0)$ to $z(L)$ in one direct step, then the scaling is less optimistic with the RMS error estimated to be

$$N^{-(I+1)/d_L} e^{(I+1)L\lambda_1}. \quad (61)$$

4.1.1. Lorenz Model. As ever we take an example from the Lorenz model to demonstrate how these methods work. In Figure 47 we have the RMS prediction error scaled to the size of the attractor R_A for local polynomial prediction functions. The results for local linear maps are shown with circles and local quadratic maps, with squares. The error grows approximately exponentially with the number of steps ahead of any given point. The computation was done by using 48,000 data points in a reconstructed phase space $d_E=3$ and local maps with $d_L=3$. 1000 different initial conditions were examined, and the average is what we have displayed.

4.1.2. Chaotic Circuits. In Figure 48 we perform the same forecasting task as just

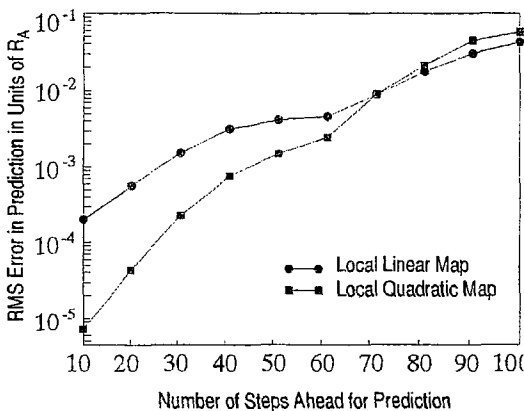


Figure 47. RMS prediction error for local linear and local quadratic map models for data from $x(n)$ from the Lorenz system. Models were built in $d_E=d_L=3$ using $T=10$ as determined from the methods described in this article. The error is in units of the size of the attractor R_A . The error grows approximately exponentially at a rate dictated by the largest Lyapunov exponent λ_1

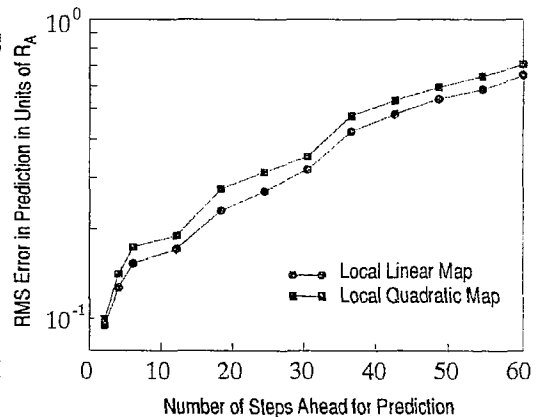


Figure 48. RMS prediction error for local linear and local quadratic map models for data from $V_B(n)$ from the hysteretic nonlinear circuit. Models were built in $d_E=d_L=3$ using $T=6$ as determined from the methods described in this article. The error is in units of the size of the attractor R_A . The error grows approximately exponentially at a rate dictated by the largest Lyapunov exponent λ_1

done for the Lorenz model but using data from the hysteretic circuit discussed several times in this article. The data was from the voltage V_B and again 48.000 data points in $d_E=3$ were used to make local linear and then local quadratic maps in $d_L=3$. The average RMS error relative to the size of the attractor is shown in the figure with an average having been taken over 1000 starting sites.

4.2. Global Models

The collection of local polynomial (or other basis function) maps form a model which is useful over the whole attractor though likely to be of less value off the attractor. The shortcomings of such a global model are its discontinuities from neighbourhood to neighbourhood and its extremely large number of adjustable parameters. For polynomial models of order M in d_L local dimensions we have approximately d_L^M parameters at each time step. This is clearly a penalty for high accuracy. At the same time, it would be nice to have relatively simple continuous model describing the whole collection of data. A number of solely global models have been discussed which present a closed functional representation of the dynamics in the whole phase space (or, at least, on and near the whole attractor). The smoothness or analytic behavior of such models as well as the ability to produce orbits over large regions of the phase space and study their behavior as model parameters are varied makes them quite attractive.

Each method for producing global models uses some expansion of the dynamical vector field $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ in a set of basis functions in R^d . In a sense this is precisely what we have described for local models, but we apply the idea over the whole attractor instead. The first such global method is to use polynomials again. Their advantage in local modeling where least square fitting works well, is now reduced by the extremely large number of data points and the necessity to use rather high-order polynomials.

There is an attractive alternative approach to finding a polynomial representation of a global map. This *measure-based functional reconstruction* [46,47] uses orthogonal polynomials whose weights are determined by the invariant density on the attractor. The method eliminates the problem of multiparameter optimization. Finding the coefficients of the polynomials and the coefficients of the function $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ requires only the evaluation of moments of data points in phase space.

The method works as follows. We introduce polynomials $\phi_a(\mathbf{x})$ on R^{d_E} which are orthogonal with respect to the natural invariant density on the attractor

$$\int d^{d_E}x \rho(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) = \delta_{mn}, \quad (62)$$

and the polynomials are determined by a conventional Gram-Schmidt procedure starting from

$$\phi_1(\mathbf{x}) = 1. \quad (63)$$

The vector field $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ which evolves data points $\mathbf{y}(k+1)=\mathbf{F}(\mathbf{y}(k))$ is approximated in M^{th} order as

$$\mathbf{F}_M(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mathbf{c}(m) \phi_m(\mathbf{x}). \quad (64)$$

This differs from the local expansion of the same form by having the coefficients independent of the phase space location where the approximation is being made; that is, it is a global fit. The coefficients $\mathbf{c}(m)$ are determined via

$$\mathbf{c}(m) = \int d^{d_E}x \mathbf{F}(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) = 1/N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{y}(k)) \phi_m(\mathbf{y}(k)) = 1/N \sum_{k=1}^N \mathbf{y}(k+1) \phi_m(\mathbf{y}(k)). \quad (65)$$

This demonstrates the power of the method directly. Once the orthogonal polynomials $\phi_a(\mathbf{x})$ are determined from the data, the evaluation of the vector field is reduced to sums over powers of the data with themselves since the $\phi_m(\mathbf{x})$ are polynomials.

Furthermore, the form of the sums involved allow one to establish the vector field from a given set of data and adaptively improve it as new data are measured. The best aspect of the method, however, may be the robustness against contamination of the data [47]. There is no least squares parameter search involved, so no distances in state space need be evaluated. The geometric nature of the method doesn't rely on accurately determining distances and is thus not so sensitive to «noise» which spoils such distance evaluations. Further, by using the whole data set instead of just data in a local neighbourhood a certain amount of averaging and thus «noise» filtering is done automatically.

As an example of this method we show the results of its use in taking data from a map of the plane to itself and using data from one of the variables creating a global model which is then itself used to generate global Lyapunov exponents [47]. The particular issue we shall address has to do with the robustness of the global map in its prediction of the Lyapunov exponents in the presence of contaminated data. The data from the map is contaminated by gaussian random numbers of zero mean and standard deviations of varying amounts.

The map, called the Ikeda map in the literature, comes from a study of a pumped and lossy ring laser system and gives a representation of the amplitude and phase of the laser beam as it passes a plane cutting across the ring at some location. The amplitude and phase are embodied in a complex variable $z(n)=x(n)+iy(n)$ where the index n identifies the first, second, ... passage across the plane [60,61] map of the plane to itself:

$$z(n+1) = p + Bz(n) \exp [ik - i\alpha/(1+|z(n)|^2)] \quad (66)$$

where $p=1.0$, $B=0.76$, $\kappa=0.4$, $\alpha=6.0$. The dimension of the attractor associated with this map is $d_A \approx 1.4$. The usual tests show that $x(n)$ data from this system can be embedded in $d_E=3$, and we use this information to make a global model utilizing ten orthogonal polynomials in accord to the description just provided. With this global model, the Jacobian matrix evaluated along the trajectory is used to yield Lyapunov exponents. One of the exponents is false and is identified by its behavior under time reversal. The other two exponents are approximately $\lambda_1 \approx 0.35$ and $\lambda_2 \approx -1.0$. In Figure 49 we display the two true Lyapunov exponents as a function of the amplitude of the Gaussian random number noise added to the output of the map. 1100 data points from the map are used to create the global polynomial map. The RMS level of the Ikeda map is about 0.7, so the largest contamination level which is a RMS level of 0.1 is about a 14% noise level in amplitude. In conventional signal to noise language this translates into a signal to noise ratio of 16.9 dB. The signal to noise ratio when the signal is cleanest (noise amplitude of 0.001) is 56.9 dB. The results of using the global map to evaluate the Lyapunov exponents is shown in solid symbols. Using the local polynomial method described above [38,39] gives the output shown in open symbols. It is clear that the global polynomial method, which requires substantially less computation, is much more robust against noise contamination.

The present direction of nonlinear modeling combines features of local and global models. Consider, for example, the method of *radial basis functions* [24,44] which, as Casdagli notes [48], «is a global interpolation technique with good local-

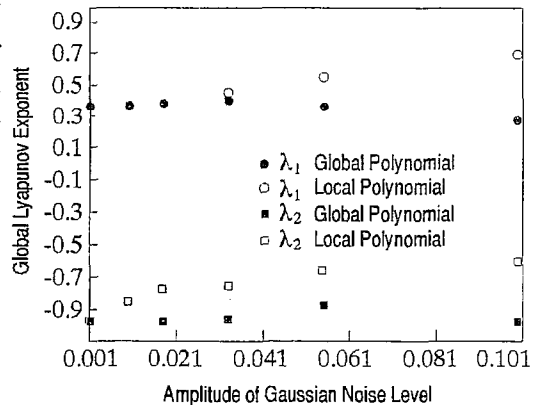


Figure 49. The global Lyapunov exponents for the Ikeda map of the plane to itself. The exponents are displayed as a function of the amplitude of Gaussian random noise added to the «observed» signal from the map. The RMS size of the signal is 0.7 in these units. The results in solid symbols comes from using a global orthogonal polynomial representation of the mapping $x \rightarrow F(x)$; the data in open circles comes from making local polynomial neighborhood to neighborhood maps as described in Section 3. The global polynomial method requires less computation and is more robust against contamination of the data

ization properties». In this method a local predictor $\mathbb{F}(\mathbf{y})$ is sought in the form

$$\mathbb{F}(\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{N_c} c(n)\Phi(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}(n)\|) \quad (67)$$

where $\Phi(\|\mathbf{x}\|)$ is some smooth function. The coefficients $c(n)$ are chosen to minimize the residuals in the usual least squares fit to the data. Depending on the number of points N_c used for reconstruction this method can be considered as local (small $N_c \ll N$) or global ($N_c \approx N$).

Various choices for $\Phi(\|\mathbf{x}\|)$ will do. $\Phi(r) = (r^2 + c^2)^{-\beta}$ works well for $\beta > -1$ and $\beta \neq 0$. If one adds a sum of polynomials to the sum of radial basis functions, then even increasing functions $\Phi(r)$ provide good localization properties. However, for a large number of points N_c this method is as computationally expensive as a usual least square fit. Numerical tests carried out in [48] show that for small number of data points radial basis predictors do a better job than polynomial models although for larger amount of data ($N \geq 10^4$) the local polynomial models seem to be superior.

An interesting variant of radial basis functions is kernel density estimation [49]. In this method one estimates a smooth probability distribution from discrete data points. Each point is associated with its *kernel* which is a smooth function $K(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}(i)\|)$ which typically decays with distance, but sometimes can even increase. Using a kernel chosen *a priori* a probability distribution

$$p(\mathbf{x}) = \sum_i K(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}(i)\|) \quad (68)$$

or a conditional probability distribution

$$p_c(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \sum_i K(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}(i+1)\|) K(\|\mathbf{z} - \mathbf{y}(i)\|) \quad (69)$$

is estimated. $p_c(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ can then be used for conditional forecasting by the rule for the estimated phase space point evolving from $\mathbf{y}(k)$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k+1) = \int d\mathbf{x} \mathbf{x} p_c(\mathbf{x}|\mathbf{y}(k)). \quad (70)$$

Kernel density estimation usually provides the same accuracy as the first-order local predictors.

Again, computing the conditional probability distribution, one can impose weights in order to attach more value to the points close to the starting point of prediction (both in time and in phase space). In fact, this leads to a class of models which are hybrids of local and global methods. Moreover, it allows one to construct a model which possesses not only good predicting properties but also preserves important invariants of the dynamics. The prediction model by Abarbanel, Brown and Kadtke [50] belongs to this class. That model chooses the global map as

$$\mathbb{F}(\mathbf{y}, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{y}(k+1) g(\mathbf{y}, \mathbf{y}(k); \mathbf{a}), \quad (71)$$

where $g(\mathbf{y}, \mathbf{y}(k); \mathbf{a})$ is the analog of the kernel function. It is near 1 for $\mathbf{y} = \mathbf{y}(k)$ and vanishes rapidly away from there. The \mathbf{a} are constants. To determine the \mathbf{a} and the \mathbf{X} minimize

$$\sum_{k=L}^{N-1} \|\mathbf{y}(k+1) - \sum_{n=1}^L X_n \mathbb{F}^n(\mathbf{y}(k-n+1), \mathbf{a})\|^2, \quad (72)$$

where X_n , $n=1, \dots, L$ is a set of weights attached to the sequence of points $\mathbf{y}(k-n+1)$ all of which are to be mapped into $\mathbf{y}(k+1)$ by maps $\mathbb{F}^n(\mathbf{y})$. It is clear that then $\mathbb{F}(\mathbf{y}(k), \mathbf{a})$ will be close to $\mathbf{y}(k+1)$ as it provides an excellent interpolation function in phase space and in time. The free parameters in the kernel function g and the specific choice of the cost function allow one to predict forward accurately in time *and* satisfy additional constraints imposed by the dynamics-significant Lyapunov exponents and moments of the invariant

density distribution as determined by the data will be reproduced in this model. The latter does not follow automatically from the former. Indeed, it is shown in [50] that models which predict enormously accurately can have all negative Lyapunov exponents even when the data are chaotic.

4.3. A Few Remarks about Model Making

Using phase space information to establish evolution rules on the attractor has proven to be both quite easy and quite successful. If one can determine how whole neighborhoods evolve into other neighborhoods in phase space, excellent interpolation functions using a wide variety of different basis functions have been made. Though we do not dwell on their failings were we to use global linear models to capture the evolution of these systems, we would easily find that the RMS prediction error would be the same size as the attractor. It is not surprising that such a direct application of tools developed for linear systems would not succeed in situations where multivariate signals are operating and global nonlinear properties, such as positive Lyapunov exponents, and the folding of the orbit back on itself due to the dissipative nature of the system are critical elements.

The really important departure in model making is to view the system in the appropriate space, as dictated by the data. Once one does that and uses the phase space information thus exposed, many routes to successful modeling of the system present themselves.

5. Summary and Conclusions

The trajectory through the analysis of observed time series we have followed in this article is mapped out in tabular form in Table 1. It is clear that the tasks facing the analyst of a signal are essentially the same regardless of the linear or nonlinear nature of the source. The methods one adopts for the analysis are substantially different. The phase space methods used in the analysis of signals from nonlinear sources are quite usable in the case where the equations of motion governing the source are linear, but we suspect that at the present stage of development these methods do not yet compete with the well studied and carefully constructed linear Fourier space techniques available in the vast literature on this subject.

In the approach outlined in this article we have emphasized that from scalar measurements $s(n)=s(t_0+n\tau_s)$ one can directly and efficiently go to the multivariate space of vectors $y(n)$ in which the system attractor is geometrically simple. Indeed, we have emphasized in an implicit way that in any smaller dimensional space, for example the one dimensional observation space of the $s(n)$ themselves, there is ambiguity associated with false neighbors which interferes with one's ability to make accurate models for prediction. The ambiguities are precisely due to orbit points which should dwell in distant reaches of phase space and thus not evolve from each other in only a few time steps finding themselves by projection nearby each other. Trying to model the evolution of these points into each other is basically an error when thought of from the point of view of the underlying multidimensional dynamics.

Once one accepts that the state space in which one must view chaotic systems is multidimensional and understands that one has to devise time domain methods for working in this space, then much of what we have presented is easier to grasp and build on. We have discussed essentially two kinds of dynamical invariants in this framework: fractal dimensions D_q and local and global Lyapunov exponents $\lambda_a(\mathbf{x},L)$; λ_a . These have a nice intuitive sense about them and have a convenient physical and geometrical interpretation. We suspect they do not provide a complete set of invariants in the sense that knowing all that one could deduce about them from the data allows one to identify the source of the signal without ambiguity. A complete set of such invariants is not known to me, but a promising route to finding such invariants has been pursued in the work of Gilmore and others [51,52,53,54,55,56,57,58] on the topology of unstable periodic orbits

Table 1

LINEAR SIGNAL PROCESSING**FINDING THE SPACE****FOURIER TRANSFORMS**

Use Fourier space methods to turn differential equations or recursion relations into algebraic forms.

$s(n)$ is observed;

Fourier transform to

$$S(f) = \sum s(n) \exp[i2\pi n f]$$

CLASSIFY THE SIGNAL

Sharp Spectral Peaks
Resonant Frequencies of the system
Unchanged under variation in forcing while system remains *linear*

Quantities independent of initial conditions

MAKE MODELS, PREDICT, CONTROL

$$s(n+1) = \sum c_j s(n-j)$$

Find parameters c_j by least squares method in scalar space. Make consistent with invariant classifiers (spectral peaks)

NONLINEAR SIGNAL PROCESSING**FINDING THE SPACE****PHASE SPACE RECONSTRUCTION**

Using time lagged variables, form coordinates for the phase space in d_E dimensions:

$$\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n+T), \dots, s(n+(d_E-1)T)]$$

Determine T and d_E from average mutual information and global false nearest neighbours

CLASSIFY THE SIGNAL

Invariants of orbits. Lyapunov Exponents; Fractal Dimensions D_q ; Moments of invariant distribution function in phase space

Quantities independent of initial conditions

MAKE MODELS, PREDICT, CONTROL

$\mathbf{y}(n) \rightarrow \mathbf{y}(n+1)$ as time evolution in d_L dimensional space determined by local false nearest neighbors

$$\mathbf{y}(n+1) = F[\mathbf{y}(n), a_1 a_2, \dots, a_p]$$

Find parameters a_j by least squares method in multidimensional space. Make consistent with invariant classifiers (Lyapunov exponents, fractal dimensions)

which lie within all strange attractors. That work is restricted to three dimensional phase space at this time, but seems to have great promise.

The role of unstable periodic orbits in the behavior and understanding of strange attractors is a rapidly developing area of study. There is a folklore, backed up by mathematical statements about systems which do not precisely correspond to those seen in physical settings, that within all strange attractors there lies a dense set of unstable periodic orbits. The number of these orbits increases exponentially rapidly with their period, but the lowest order orbits can be identified in a given chaotic data set with some ease. The most striking utilization of these unstable orbits is the work of Ott, Grebogi and Yorke [59] where it is shown how to change the dynamical system which produces the observed chaotic orbit into a «nearby» system with a time dependent parameter. This new, but nearby, system is designed to have a stable periodic orbit very close in phase space in to the previously unstable periodic orbit. This allows one by making small alterations in the parameter to drive the system to that now stabilized orbit. Adding dimensions to the state space to provide external guiding of an orbit is more or less a standard method in control theory, but the innovative twist here is to use the stable and unstable eigendirections of the local Jacobian matrices $\mathbf{DF}(\mathbf{x})$ to perform the guiding for you. Since the evolution along such directions is exponentially rapid in time, small alterations in parameters can cause large changes in the behavior of the «nearby» system. There is enormous engineering potential in this technique which has only begun to be realized.

This kind of control is just one of the many topics we have not explored during our discussion here. Indeed, the number of items we have not even touched in the area of nonlinear dynamics and chaos could and does now fill numerous monographs. Some of the important topics more or less directly related to the analysis of signals includes the whole issue of signal separation, or as it is often labeled «noise reduction» [2]. This topic and the study of the behavior of chaotic signals under linear filtering operations leads one to the interesting subject of communications using chaotic signals. Viewed as a class of signals intermediate between regular sinusoidal behavior and high dimensional «noise» which is truly stochastic, it is clear that new practical opportunities abound in this domain. In the study of chaos as another class of time series, rather than the approach we have taken here which is to view it as a window into interesting dynamics of systems, one can raise a gaggle of questions traditionally explored in time series analysis. These include the study of nonstationary time series, methods for dealing with data which is not uniformly sampled in time, and data in which there are substantial gaps in the time record. All of these questions acquire renewed interest in the context of chaos and it is my hope that the tools provided in this review will allow the thorough exploration of these and other issues - all done in the multidimensional phase space in which these questions are properly posed.

This review has focused on applications and illustrations of the methods and tools in areas with which the author is familiar. This includes nonlinear circuits where we barely touched the surface of the literature on the subject. The study of chaotic hydrology exemplified by the behavior of the Great Salt Lake has immense practical importance. The data sets available in this arena are numerous, often subject to the gross uncertainties associated with geophysical measurements, but of some real world importance. The records such as the one with which we illustrated our tools may also serve as the practical basis for evaluating the complex issue of global climate change. If one has accurate phase space models of systems which integrate in space and time such as the Great Salt Lake data, then changes in aspects of those models induced by human activity may allow definitive identification of climate evolution differing from the natural variations. In the study of chaos in laser systems we again utilized the data for illustration, but it should be clear that the practical applications of these studies are vast. We pointed to a fundamental question which absent these tools might never arise; namely, the role of spontaneous emission which acts as «intrinsic» quantum noise. With our tools we were able to distinguish between chaotic and low dimensional intensity fluctuations in these lasers and high dimensional «noise» dominated operation. The latter may arise from the spontaneous emission, but the matter is not yet settled. Finally the use of the methods to identify low dimensional aspects of high Reynolds number boundary layer flows may, coupled with control schemes of the kind alluded to just above, allow numerous practical applications to emerge from flow in pipes in power plants to flow around vehicles in all environments. In presenting these illustrations we actually had to pick and choose from an enormous set of equally interesting areas of study. The point has been to illustrate the wide applicability of the tools, and the opportunities which they provide.

The study of this kind of signal has moved from the mathematics seminar room to the workplace of the experimental scientist and the design engineer. The fruit they will bear there over the coming decades is certain to be as unexpected as it is valuable in distinct practical applications. An area where this review has not tread at all concerns the use of these methods in biological sciences, bioengineering, and medicine. I have no experience in this area, but a clear sense pervades the literature of this realm on application that there may be more here than even in the promising applications to physical and mechanical systems.

Acknowledgements

I thank the members of INLS for numerous discussions on this subject; the comments and assistance of E.Boerner, J.Goldberg, M.B.Kennel, C.Liu, M.M.Sushchik, J.J.

(«Sid») Sidorowich, and L.Sh. Tsimring were essential. I am indebted to T.Carrol, J.Cembrola, T.Galib, Z.Gills, U.Lall, L.Pecora, and R.Roy for providing me with the various data sets discussed in this review. This work was supported in part by the U.S.Department of Energy, Office of Basic Energy Sciences, Division of Engineering and Geosciences, under contract DE-FG03-90ER14138, and in part by the Army Research Office (Contract DAAL03-91-C-052), and by the Office of Naval Research (Contract N00014-91-C-012), under sub-contract to the Lockheed/Sanders Corporation.

References

- [2] Abarbanel, H.D.I., R.Brown, J.J.(«SID») Sidorowich, and L.Sh.Tsimring, «The Analysis of Observed Chaotic Data in Physical Systems», to appear in *Rev.Mod.Phys* October, 1993.
- [24] Parlitz, U., «Identification of True and Spurious Lyapunov Exponents from Time Series», *em Int. J.Bif.Chaos* 2,155-165(1992).
- [38] Brown,R., Bryant,P. and H.D.I. Abarbanel, «Computing the Lyapunov Spectrum of a Dynamical System from Observed Time Series» *Phys. Rev. A* **43**, 2787 (1991); *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1523 (1990).
- [39] Briggs,K., «An Improved Method for Estimating Liapunov Exponents of Chaotic Time Series», *Phys. Lett.*, **151A**, 27-32 (1990).
- [43] Rissanen, J., *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry* (World Scientific, Singapore), 1989.
- [44] Powell, M.J.D., *Approximation Theory and Methods* (Cambridge University Press, Cambridge), 1981; M.J.D.Powell, 1985 «Radial basis functions for multivariate interpolation: a review» Preprint, Univ. of Cambridge; M.J.D.Powell, 1987, «Radial basis function approximation to polynomials» Preprint, Univ. of Cambridge.
- [45] Farmer, J.D. and J.J. («Sid») Sidorowich in *Evolution, Learning and Codnition* ed. Y.-C.Lee (World Scientific, Singapore), pp 177-, 1988.
- [46] Giona,M.,F. Lentini, and V.Cimagalli, «Functional Reconstruction and Local Prediction of Chaotic Time Series», *Phys.Rev.A*,**44** 3496-3502 (1991).
- [47] Brown,R. «Orthogonal Polynomials as Prediction Functions in Arbitrary Phase Space Dimensions», *Phys. Rev. E*, **47** 3962-3969, (1993).
- [48] Casdagli, M., «Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series», *Physica D* **20** 335-356, (1989).
- [49] Silverman, B.W. *Density Estimation of Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, London), 1986.
- [50] Abarbanel, H.D.I,R. Brown, and J.B.Kadtke, «Prediction in Chaotic Nonlinear Systems: Methods for Time Series with Broadband Fourier Spectra», *Phys.Rev.A* **41**,1782-1807 (1990).
- [51] Mindlin, G.B.,H.G.Solari, M.A.Natiello, R.Gilmore, and X.-J.Hou, «Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinskii Reaction», *J.Nonlin.Sci.* **1**, 147-173 (1991)
- [52] Birman, J.S.and R.F.Williams, «Knotted Periodic Orbits in Dynamical Systems I: Lorenz`s Equations», *Topology* **22**, 47-82 (1983).
- [53] Birman, J.S. and R.F.Williams, «Knotted Periodic Orbits in Dynamical Systems II: Knot Holders for Fibered Knots», *Cont.Math.***20**,1-60 (1983).
- [54] Papoff, F.,A. Fioretti, E.Arimondo, G.B.Mindlin, H.Solari, and R.Gilmore, «Structure of Chaos in the Laser with Saturatable Absorber», *Phys.Rev.Lett.* **68**, 1128-1131 (1992).
- [55] Cvitanovic,P., «Invariant Measurement of Strange Sets in Terms of Cycles», *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2729-2732 (1988).
- [56] «Classification of Strange Attractors by Integers», Mindlin, G.B.,X-J Hou, H.G.Solari, R.Gilmore, and N.B.Tufillaro, *Phys.Rev.Lett.* **64**,2350-2353 (1990).
- [57] Flepp, L.,R.Holner, E.Brun, M.Finardi, and R.Badii, «Model Identification by Periodic-Orbit Analysis for NMR-Laser Chaos», *Phys.Rev.Lett.* **67**, 2244-2247 (1991).

[58] Tuffillaro, N.B., R.Holzner, L.Flepp, E.Brun, M.Finardi, and R.Randii. «Template Analysis for a Chaotic NMR Laser», Phys.Rev.A. **44** R4786-R4788 (1991).

[59] Ott, E., C.Grebogi, and J.A.Yorke, «Controlling Chaos», Phys.Rev.Lett. 1196-1199 (1990). See also their review article in Nature **363**, 411-417 (1993) where an extensive list of references to theoretical and experimental work is given.

[60] Ikeda, K., «Multiple-Valued Stationary State and Its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System», Opt.Commun. **30**, 257 (1979).

[61] Hammel, S.M., Jones, C.K.R.T. and Moloney, J.V., J.Opt.Soc.Am. **B 2**, 552 (1985).

Institute for Nonlinear Science

Поступила в редакцию 18.12.94



Генри Д.И. Абарбанель - профессор физики и физик-исследователь Института океанографии Скриппса в Калифорнийском университете, Сан-Диего, UCSD, США. Получил степень доктора в Принстонском университете и преподавал в Принстоне, Станфорде, Нортвестерне, Чикаго и Калифорнийском университете в Беркли, с 1983 года работает в Калифорнийском университете в Сан-Диего. Занимается анализом хаотических явлений в геофизических и лабораторных установках. Директор Института нелинейных наук при UCSD.

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал - макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам
осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж»
при Саратовском государственном университете.

Банковские реквизиты
- получатель ГосУНЦ «Колледж» ИНН 6452006136,
р/с № 000609446 в КБ «Экономбанк» г. Саратова, МФО 046311722,
корсчет банка 700161122, РКЦ-1 г. Саратова, МФО 046311001

Сдано в набор 20.09.96. Подписано к печати 21.10.96. Формат 70x108/16
Бумага финская. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 11,350 (8,125). Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 150 экз. Заказ 30

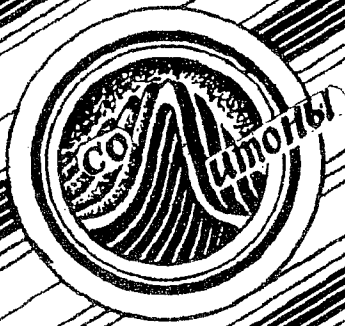
Издательство ГосУНЦ «Колледж»
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 514298
E-mail:and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

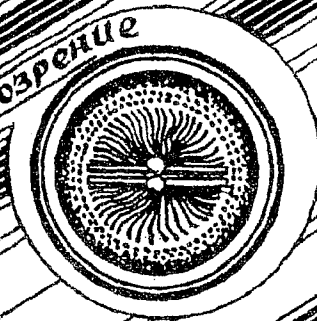
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1996



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

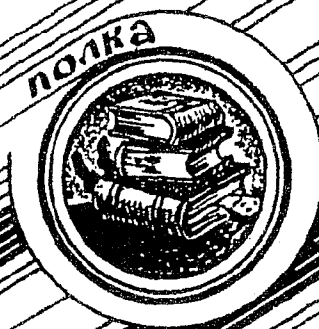


для студентов и преподавателей в журнале

методических заметок



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР материалов школы "ХАОС'94"

*составлен при рассмотрении картины
Богданова-Бельского "На пороге школы"
перед работающим телевизором*

Кол-во стр.	<u>7</u>
Число рис.	<u>1</u>
Кол-во исп. источников	<u>7</u>

С захолонувшим сердцем, с предощущением чудесного, светлого и радостного пастушонок Ванятка заглянул в приоткрытую дверь Школы (рис. 1)...

Что-то двухголовое, все сплетенное из разбухавших и скукоживающихся жил [1] трепыхалось, хряпало, жмыхало, урчало с подхлебыванием; бугорчатые наросты из ионизированных фононов вдруг с треском лопались, выплевывая холодные баллистические электроны [2], вместо ног вертелась втулка со спицами, заляпанными склизкими зеленоватыми сгустками [3], которые то вальяжно колыхались с негромким подвыванием, то срывались на писклявый визг, когда вдруг после бифуркации ПЦ в ФП разваливался на пару ПЦ, а МХМ ловким ударом сбивал с ног СА [4] и, спасаясь от патлатого белого Гаусса, перескакивал из ямы в яму, время от времени замирая в ее сокровенной глубине [5]. При появлении Ванятки бесформенные рожи вдруг стали смыкаться, дестохастизируясь в жуткие своей правильностью регулярные аттракторы [6], и вся эта масса завертелась вокруг него

с равномерно нарастающим засасывающим ревом: «Не в свои сани во двррьщщ-щ, чимы-улють, р-рыльмь удгоа труль-лю-лють!» [7]. Уже чуя мертвенный холод во всех членах, из последних сил Ванятка осенил себя крестным знамением... Все исчезло; зала засияла светлыми огнями и только на полу пузырилась мелкая лужица и пузырьки лопались мелодично выпевая: «Сик транзит, сик - транзит, неча саночки возить...» [7].

... Дед Силыч проснулся среди ночи от невнятной тревожности. Свесившись с печи, он увидел освещенные лучиной Ванятку и свои свежестиранные портки, по которым Ванятка печным угольком выводил буквы. Буквы дед не разбирал, а если и разбирал бы, то навряд ли бы понял что-нибудь: «Въ редакцию ПНД. Къ вопросу о самоорганизации автостохастических систем типа коро...»

Список использованных источников

1. Пономаренко В.Л., Заулин И.А. Изв. вузов. ПНД. 1995. Т.3, № 5. С. 26-34.
2. Санин А.Л., Ермолаев Ю.Л. Ibid. С. 55-63.
3. Архипов А.В. и др., в том числе и Соминский Г.Г. Ibid. С. 35-54.
4. Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г. Ibid. С. 88-99.
5. Анищенко В.С. и др. Ibid. С. 16-25.
6. Кальянов Э.В. Ibid. С. 100-108.
7. Андреев Ю.В. Ibid. С. 3-15.



Рис. 1