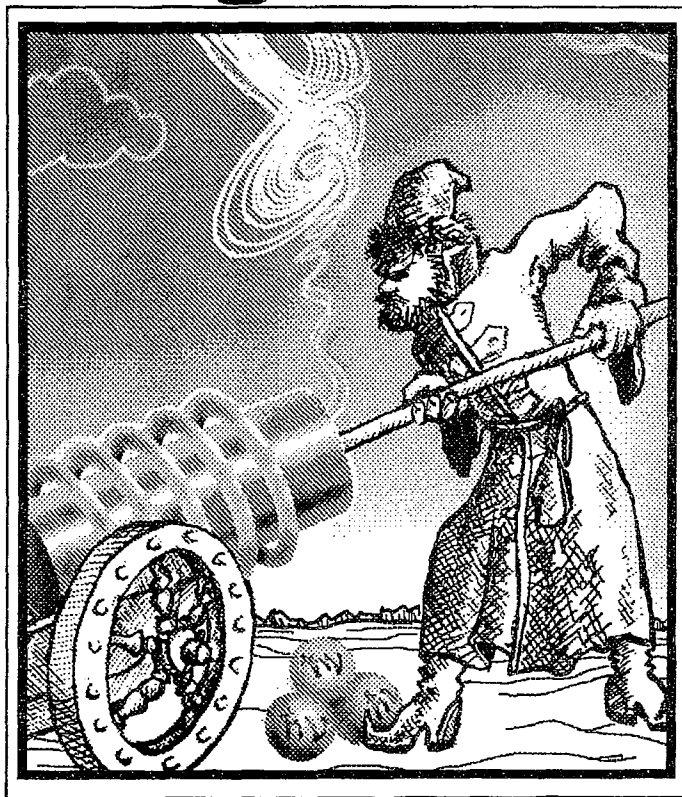


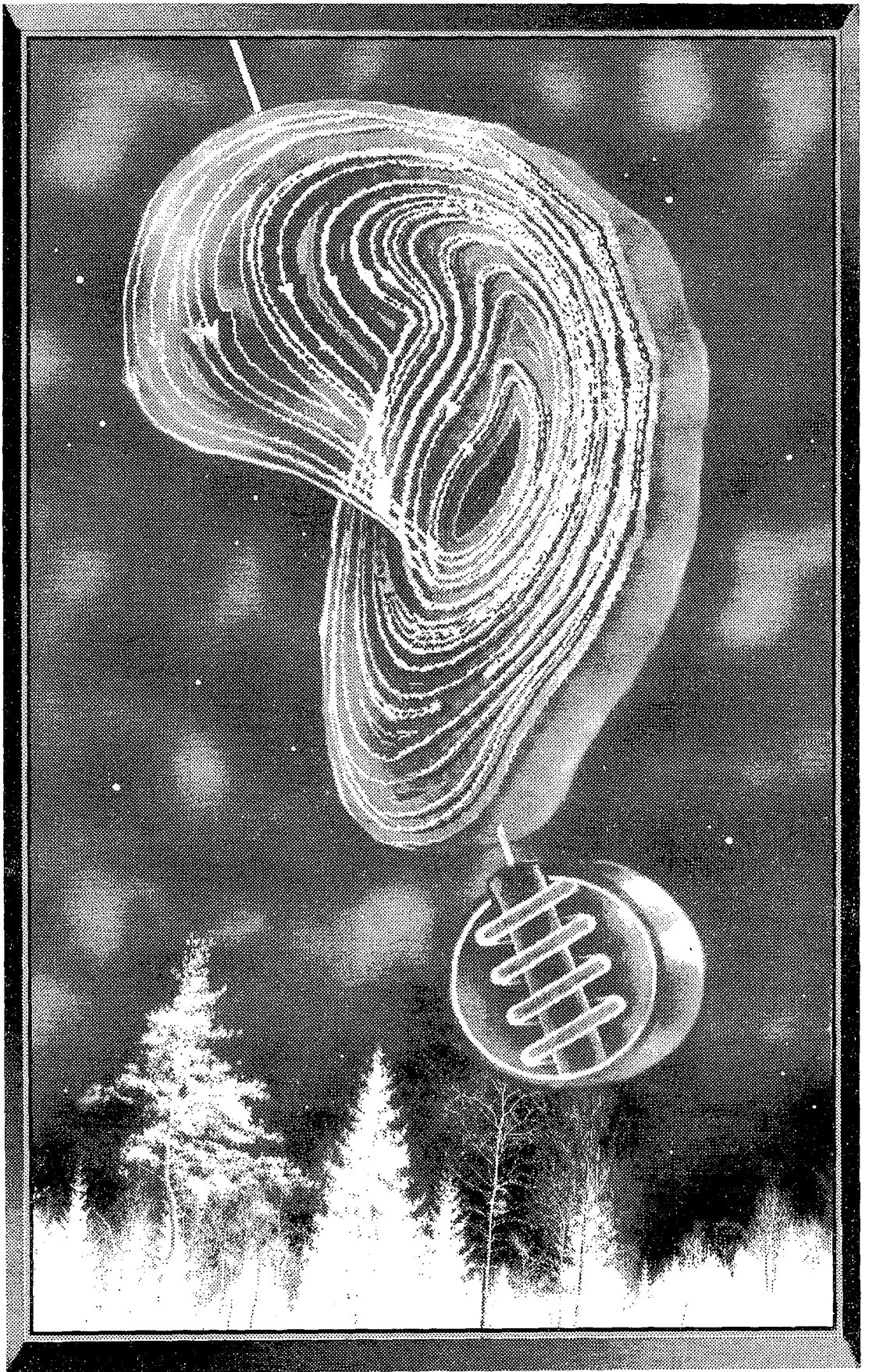
# Трикладная Нелинейная Динамика



*Нелинейная динамика лазеров и оптических систем*

6  
1995

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



**СОДЕРЖАНИЕ**

*Нелинейная динамика лазеров и оптических систем  
посвящается 90-летию со дня рождения Марка Львовича Каца*

Тучин В.В. От редактора . . . . .	3
<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
Поль Мандель. Лазер без инверсии: полезная концепция? . . . . .	7
<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b>	
Татаркова С.А., Тучин В.В. Механизмы бифуркаций, структура и свойства хаотических аттракторов в модели лазера с насыщающимся поглотителем . . . . .	24
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
Rabinovich E.M., Kowalski J.M., Littler C.L., Bystrik A.P., Prasad J., West B.J. Dynamical instabilities in a CO <sub>2</sub> laser with an externally modulated optical feedback . . . . .	37
Соколов А.А., Татарков Г.Н. Численное исследование динамики пассивной синхронизации мод в кольцевом однонаправленном лазере . . . . .	44
<b>ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС</b>	
Владимиров А.Г., Торонов В.Ю., Дербов В.Л. О комплексной модели Лоренца . . . . .	51
Капцов Л.Н., Ростовцев А.В. Частоты релаксационных колебаний системы связанных твердотельных лазеров с перекрещивающимися каналами генерации . . . . .	64
Мельников Л.А., Вешиева И.В., Конюхов А.И. Численное моделирование нелинейной динамики поперечной структуры поля в лазере . . . . .	73
Прокофьева К.В., Шмальгаузен В.И. Пространственные структуры в лазере с поворотом поля . . . . .	90
Аришинов А.И., Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н. Поперечная динамика лазерного пучка в нелинейной оптической системе с двумерной обратной связью: интерпретация результатов моделирования . . . . .	100
<b>НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ</b>	
Козлов В.В., Фрадкин Э.Е. Влияние далекой линии поглощения на условия распространения солитона самоиндуцированной прозрачности . . . . .	112
Рабинович М.И., Цимринг М.Ш. Стохастизация распространения монохроматических волн в оптическом одномодовом фибере . . . . .	120
<b>АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ</b>	
Зимняков Д.А., В.В. Тучин, А.А. Мишин, К.В. Ларин. Корреляционная размерность спекл-полей для рассеивающих структур с фрактальными свойствами . . . . .	126
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b>	
Тучин В.В. Марк Львович Кац. 50 лет оптической науки и образования в Саратовском университете . . . . .	135

CONTENTS

*Nonlinear dynamics of laser and optical systems*  
*Dedicated to Mark L. Katz memory*

Editorial. <i>V.V. Tuchin</i> . . . . .	3
REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS	
Lasing without inversion: a useful concept? <i>Paul Mandel</i> . . . . .	7
BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS	
Bifurcation mechanisms, properties and structure of the chaotic attractors in the laser model with saturable absorber. <i>S.A. Tatarkova, V.V. Tuchin</i> . . . . .	24
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
Dynamical instabilities in a CO <sub>2</sub> laser with an externally modulated optical feedback. <i>E.M. Rabinovich, J.M. Kowalski, C.L. Littler, A.P. Bystrik, J. Prasad, B.J. West</i> . . . . .	37
Numerical investigation of passive mode locking dynamics in unidirectional ring laser. <i>A.A. Sokolov, G.N. Tatarkov</i> . . . . .	44
DETERMINISTIC CHAOS	
On the complex Lorentz model. <i>A.G. Vladimirov, V.Yu. Toronov, V.L. Derbov</i> . . . . .	51
Relaxation frequencies in a solid-state laser system with crossing beams. <i>L.N. Kaptsov, A.V. Rostovtsev</i> . . . . .	64
The numerical simulation of transverse pattern dynamics in a laser. <i>L.A. Melnikov, I.V. Veshneva, A.I. Konukhov</i> . . . . .	73
Spatial structures in the laser with field rotation. <i>K.V. Prokofjeva, V.I. Shmalhausen</i> . . . . .	90
Transversal dynamics of laser beam in a nonlinear optical system with two-dimensional feedback: interpretation of simulation results. <i>A.I. Arshinov, R.R. Mudarisov, B.N. Poizner</i> . . . . .	100
NONLINEAR WAVES. SOLITONS	
Self-induced-transparency soliton propagation under the influence of far-resonant transition line. <i>V.V. Kozlov, E.E. Fradkin</i> . . . . .	112
Stochastization of monochromatic wave propagation in an optical single-mode fiber. <i>M.I. Rabinovich, M.Sh. Tsimring</i> . . . . .	120
AUTOWAVES. SELFORGANIZATION	
Speckle patterns correlation dimension for fractal-like scatterers. <i>D.A. Zimnyakov, V.V. Tuchin, A.A. Mishin, K.V. Larin</i> . . . . .	126
HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA	
Mark L. Katz. Fifty years of Optical Sciences and Education in Saratov State University. <i>V.V. Tuchin</i> . . . . .	135

## ОТ РЕДАКТОРА

Создание лазеров как действующих источников когерентного излучения в видимой и инфракрасной области спектра относится к самому началу 60-х годов нашего столетия. К 1968 году, когда уже были созданы многие типы из ныне существующих лазеров, разработаны теория и технология их изготовления, а также определены главные направления применений (оптическая связь, прецизионные измерения, технология, медицина и пр.), стало ясно, что в каждом типе лазеров переход от спонтанного излучения к генерации когерентного света показывает многие характерные черты фазовых переходов в равновесных системах, а вдали от теплового равновесия возникают новые макроскопические упорядоченные состояния [1]. Так лазеры сыграли пионерскую роль в рождении новой области знаний - синергетики.

Исключительно плодотворной для понимания и описания большинства динамических процессов в лазерах оказалась полуклассическая теория, в которой поле рассматривается как классическое, на основе уравнений Максвелла, а активная (усиливающая) среда - с квантовых позиций, на основе уравнения для квантовомеханической матрицы плотности [2]. При этом оказалось возможным описать и предсказать весьма тонкие эффекты, связанные с взаимодействием поля в резонаторе с нелинейной активной средой, возбуждением многих продольных и поперечных мод, поперечной и продольной неоднородностью поля и активной среды, неоднородностью уширения линии усиления и т.д. Сложность лазера как динамической системы определяется также «собственной» динамикой системы накачки, которая, например, для газоразрядных лазеров определяется всем многообразием нелинейно-колебательных и автостохастических явлений в низкотемпературной плазме газового разряда, возбуждаемой в узком протяженном капилляре [3,4]. «Собственная» динамика накачки характерна для газодинамических, инжекционных и жидкостных лазеров, лазеров на свободных электронах и др. Для высокоэффективных лазерных систем, таких как, например, CO<sub>2</sub>, СО лазеры, или полупроводниковые инжекционные лазеры, генерируемое оптическое излучение приводит не только к насыщению инверсии рабочих уровней энергии, но и к значительному изменению электрических характеристик накачки, это так называемый оптогальванический эффект [3]. Даже в маломощном He-Ne лазере оптогальванический эффект может повлиять на динамику лазера. Существуют и другие эффекты, например, оптико-акустический, которые связывают разные динамические системы лазера.

Еще более сложные взаимосвязи могут иметь место в оптических системах, построенных на основе лазеров и нелинейных оптических элементов с запаздывающей обратной связью, включая пространственно распределенную и управляемую связь, отвечающую за трехмерную волновую динамику [5].

Солитонный режим распространения лазерных импульсов в волоконных световодах, а также возникновение нелинейных пространственных структур, обуславливаются светоиндуцированной нелинейностью материала световода, накапливаемой при протяженном взаимодействии сильных и сверхсильных электрических полей с веществом [6].

Развитие лазерных технологий по обработке материалов и измерению параметров структуры и параметров движения шероховатых (оптически неоднородных) объектов вызвало необходимость учета нелинейных и статистических связей воздействующего или измерительного лазерного пучка с динамическими или структурными характеристиками объекта [7,8].

В настоящем специальном выпуске журнала представлена большая часть из указанных выше направлений нелинейной динамики лазерных и оптических систем. Хотя, конечно, круг вопросов нелинейной динамики лазеров гораздо шире и фактически совпадает с общим кругом задач нелинейной динамики [9-12]. Следует отметить, что зачастую лазер (или оптическая система на основе лазера) представляет собой удобную в экспериментальном плане и в теоретическом отношении нелинейную динамическую систему, позволяющую наглядно демонстрировать общие закономерности. По-видимому, по этой причине, как уже было упомянуто, именно лазер стоял у истоков синергетики как науки.

Выпуск открывается русским переводом обзорной статьи П.Манделя<sup>1</sup>, блестяще выполненным И.Р. Сатаевым. В обзоре прослежена история рождения современной концепции усиления и лазерной генерации без инверсии, дано её математическое обоснование и описаны эксперименты, подтверждающие существование эффектов.

В связи с существенной задержкой выпуска этого журнала обстоятельный и глубокий обзор А.Н. Ораевского «Динамика одномодовых лазеров и динамический хаос», предназначенный для нашего выпуска, был опубликован раньше<sup>2</sup> и уже знаком читателям журнала «ПНД». В нем наряду с историческими истоками проблемы последовательно и полно обсуждаются особенности возникновения и свойства фазовых траекторий типа странного аттрактора, характеризующих динамические режимы в автономных и неавтономных одномодовых лазерах с однородной и неоднородной линией усиления.

Рубрика журнала «Бифуркации в динамических системах различной природы» представлена статьей С.А. Татарковой и В.В. Тучина, в которой проведено численное моделирование и проанализированы бифуркационные механизмы, свойства и структура хаотического аттрактора в лазере с насыщающимся поглотителем. Этот материал дополняет обзор А.Н. Ораевского по одномодовым лазерам в части, относящейся к лазерам с нелинейно поглощающей средой.

В разделе «Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн» читатель найдет экспериментальную работу Э.М. Рабиновича с соавторами, посвященную изучению неустойчивостей динамического характера в  $\text{CO}_2$  лазере с внешней модулируемой оптической обратной связью. Помимо научной ценности эта статья имеет выраженный методический характер и может служить в качестве добротного описания к лабораторной работе студентов старших курсов и аспирантов. Из методических же соображений статья публикуется на языке оригинала. В этом же разделе представлена теоретическая работа А.А. Соколова и Г.Н. Татаркова, в которой проведено численное моделирование динамики кольцевых лазеров на твердом теле и на растворах красителей с пассивной синхронизацией мод.

Пять работ, охватывающих широкий спектр задач нелинейной динамики в лазерах и оптических системах, составляют раздел «Детерминированный хаос». В оригинальной работе А.Г. Владимирова, В.Ю. Торонова и В.Л. Дербова по комплексной модели Лоренца, которая является характерной для некоторых типов лазерных систем, получены результаты общего характера для нелинейных динамических систем разной природы. Поведение частоты релаксационных колебаний и сценарий перехода в динамический хаос для твердотельных лазеров с инерционной нелинейностью анализируются в работе Л.Н. Капцова и А.В. Ростовцева. Остальные три работы этого раздела посвящены исследованию проблем поперечной динамики лазерных и оптических систем. Это работа Л.А. Мельникова, И.В. Вешневой и А.И. Конюхова по численному моделированию поперечных динамических структур в однонаправленном кольцевом лазере с быстрорелаксирующей активной средой; работа К.В. Прокофьевой и

<sup>1</sup> Mandel P. Lasing without inversion: a useful concept? // Contemporary Physics. 1993. Vol. 34, № 5. P. 235.

<sup>2</sup> Ораевский А.Н. Динамика одномодовых лазеров и динамический хаос // Изв. вузов. «ПНД». 1996. Т.4, № 1. С 3.

В.И. Шмальгаузена по динамической теории лазера с поворотом поля и численному анализу пространственных структур, возникающих в таком лазере, и работа А.И. Аршинова, Р.Р. Мударисова и Б.Н. Пойзнера по численному моделированию поперечной пространственно-временной динамики, охваченной двумерной обратной связью, в оптической системе с керровской нелинейностью.

Раздел «Нелинейные волны. Солитоны» представлен двумя теоретическими работами, в одной из которых анализируется влияние далекой линии поглощения на условие распространения солитона самоиндуцированной прозрачности в условиях поперечного взаимодействия ультракороткого импульса света с двумя резонансными переходами (В.В. Козлов и Э.Е. Фрадкин); а в другой изучается эффект, при котором неоднородность волоконного световода приводит к стохастизации передаваемого сигнала (М.И. Рабинович, М.Ш. Цимринг).

Раздел «Автоволны. Самоорганизация» представлен работой Д.А. Зимнякова с соавторами, в которой обсуждаются теоретические и экспериментальные исследования корреляционной размерности оптических спекл-полей для рассеивающих структур с фрактальными свойствами.

В заключение краткого обзора содержания выпуска хотелось бы отметить два важных обстоятельства. Во-первых, весь этот выпуск журнала от доски до доски будет опубликован на английском языке в виде отдельного тома Международного общества по оптической технике (SPIE) в серии «Книги избранных статей СНГ»: «Nonlinear Dynamics of Laser and Optical Systems», CIS Book of Selected Papers, SPIE, Bellingham, USA, 1997. Будет восстановлена справедливость, и работы, по тем или иным причинам не вошедшие в специальный выпуск и опубликованные в других номерах журнала, войдут в этот сборник. Это упомянутая выше обзорная работа А.Н.Ораевского, обзоры Л.А.Мельникова с соавторами<sup>3</sup> и В.Ю. Торонова с соавторами<sup>4</sup>, а также оригинальная статья А.А. Беднова с соавторами<sup>5</sup>.

Во-вторых, основу данного специального выпуска и его расширенного английского варианта составили работы аспирантов и докторантов кафедры оптики СГУ: соросовских аспирантов И.В. Вешневой, А.И. Конюхова, К.В. Ларина, М.В. Рябининой, О.М. Приютовой; аспиранта А.А. Соколова; докторантов Д.А. Зимнякова, В.Ю. Торонова, которые работают под руководством известных у нас в стране и за рубежом ученых - профессора кафедры оптики Л.А. Мельникова, доцента В.Л. Дербова и редактора настоящего выпуска. Это особенно приятно отметить в год 50-летнего юбилея кафедры оптики и оптической науки в саратовском регионе, а также 90-летия нашего Учителя и первого заведующего кафедрой оптики СГУ профессора Марка Львовича Каца. Этим двум датам посвящается данный выпуск. В рубрике «Нелинейная динамика в лицах. История. Personalia» приведена краткая историческая справка о кафедре оптики и статья о М.Л. Каце.

В заключение редактор приносит свою глубокую благодарность всем авторам за участие в тематическом выпуске журнала, коллективу редакции за постоянную помощь и внимание.

## Библиографический список

1. Хакен Г., Лазерная светодинамика. М.: Мир, 1988.
2. Sargent M.III, Scully M.O., Lamb W.E.Jr. Laser Physics. Addison-Wesley. Reading, MA, 1974.

<sup>3</sup> Мельников Л.Ф., Конюхов А.И., Рябинина М.В. Динамика поперечной поляризационной структуры поля в лазерах // Изв. вузов. «ПНД». 1996. Т.4, № 5 (в печати).

<sup>4</sup> Торонов В.Ю., Дербов В.Л., Приютова О.М. Геометрические фазы в динамике нелинейных оптических систем // Изв. вузов. «ПНД». 1996. Т.4, № 5 (в печати).

<sup>5</sup> Беднов А.А., Ульянов С.С., Тучин В.В., Брилли Г.Е., Захарова Е.И. Исследование динамики лямбд-фотока методами спекл-интерферометрии // Изв. вузов. «ПНД». 1996. Т.4, № 3 (в печати).

3. Тучин В.В. Динамические процессы в газоразрядных лазерах. М.: Энергоатомиздат, 1990.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А.Ахманова, М.А.Воронцова. М.: Наука, 1990.
6. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
7. Ахманов С.А., Емельянов В.И., Коротеев И.И., Семиногов В.Н. // УФН. 1985. Т. 147. С. 675.
8. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. F.H.Freeman. San Francisco, 1983.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
10. Mel'nikov L.A. Nonlinear Dynamics of Lasers and Optical Systems // Proc. SPIE. Vol. 2099. 1994.
11. Abraham N.B., Khanin Ya.I. Nonlinear Dynamics in Lasers / Proc. SPIE. Vol. 2792, 1996.
12. Khanin Ya.I. Principles of Laser Dynamics. Amsterdam: North Holland. 1995.

Редактор выпуска, доктор  
физико-математических наук,  
профессор

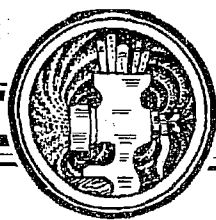
*В.В.Тучин*



*Валерий Викторович Тучин*, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой оптики СГУ (с 1983), декан физического факультета СГУ (1982-1989), зав. лабораторией лазерной диагностики технических и живых систем Института проблем точной механики и управления РАН (с 1989). Круг его научных и педагогических интересов лежит в области нелинейной динамики лазерных систем, физики лазерных и оптических измерений, биомедицинской оптики и лазерной биомедицины. Автор или редактор 16 книг и глав в книгах, 23 изобретений и более 200 научных статей. Читает курсы «Оптика», «Динамика газоразрядных лазеров», «Лазеры и волоконная оптика в биомедицине», «Оптика биотканей», «Введение в специальность - биофизика». Лектор кратких курсов по биомедицинской оптике для международных аудиторий научных работников, инженеров и медицинских работников. Действительный член Международной

Академии Информатизации, член-корреспондент Российской Академии Естественных Наук по специальности биофизика и медицинская физика, член совета Российского отделения SPIE, член SPIE/BiOS, а также IEEE/LEOS, стипендиат Государственной научной стипендии России (1994-1996).





Изв.вузов «ПНД», т.3, № 6, 1995

## ЛАЗЕР БЕЗ ИНВЕРСИИ: ПОЛЕЗНАЯ КОНЦЕПЦИЯ?

*Поль Мандель*

Современная концепция усиления и лазерной генерации когерентного света без инверсии рассматривается в контексте исторического развития, приведшего к появлению этих идей. Обсуждаются два основных механизма усиления без инверсии и их теоретическая формулировка. Приведено описание трёх экспериментов, подтверждающих существование этих эффектов.

### 1. Введение

**1.1. Ранняя история.** За последние несколько лет активное внимание исследователей привлекла к себе проблема лазерной генерации когерентного света без инверсии (проблема LWI - lasing without inversion) и/или усиления без инверсии (AWI - amplification without inversion), хотя большинство из тех, кто работает в данной области, расходятся во мнениях относительно точного определения того, что же они понимают под LWI или AWI. Поэтому я хотел бы попробовать сначала определить тему своего сообщения. Используя простой и несколько наивный подход, можно сказать, что лазер на основе двухуровневой среды начинает генерировать когерентное излучение при наличии достаточной инверсии заселенностей между двумя уровнями, так что усиление уравнивает потери в резонаторе. Пусть  $N_1$  и  $N_2$  - заселенности двух уровней, участвующих в генерации, и  $E_1 = \hbar\omega_1$  и  $E_2 = \hbar\omega_2$  - соответствующие энергии этих уровней. Порог генерации можно записать тогда как

$$N_2 - N_1 > N_{\text{пор}} > 0, \quad (1)$$

где  $N_{\text{пор}}$  - положительная константа, которая линейно зависит от потерь в резонаторе. Обстоятельство, которое следует подчеркнуть на этом этапе, состоит в том, что  $N_1$  и  $N_2$  - заселенности двух уровней в отсутствие взаимодействия с полем, но при учете воздействия всех некогерентных процессов накачки и конечного времени жизни атомов. Неравенство (1) отражает тот факт, что усиление требует инверсии заселенностей. Проблемы, связанные с этой схемой, состоят в том, что для генерации когерентного поля на частоте  $\omega_2 - \omega_1$  необходимо иметь некогерентную накачку на большей частоте, поскольку оба уровня  $E_1$  и  $E_2$  являются возбужденными. Другими словами, традиционный лазер преобразует некогерентную накачку в когерентное поле с меньшей частотой.

Более углубленная теория лазера подтверждает, что неравенство (1) действительно является необходимым условием возникновения генерации

когерентного поля, если мы рассматриваем только некогерентную оптическую накачку и однофотонные взаимодействия и хотим усиливать поле, попадающее в резонанс с разностью энергии двух уровней:  $\omega_{\text{поля}} = \omega_2 - \omega_1$ . Однако возможны более сложные схемы. Простейшая из них основана на явлении осцилляций Раби. Раби показал, что при взаимодействии двухуровневого атома с периодическим электрическим полем вероятность найти электрон на любом из двух уровней колеблется периодически между нулем и единицей. Частота этих колебаний есть частота Раби  $\Omega = \mathcal{P}\mathcal{E}/\hbar$ , которая пропорциональна амплитуде возбуждающего поля  $\mathcal{E}$  и матричному элементу  $\mathcal{P}$  дипольного момента между двумя состояниями. В оптической области поля, используемые в лабораториях, удовлетворяют неравенству  $\omega_2 - \omega_1 \gg \Omega$ . Нелинейное взаимодействие в полости резонатора между резонансным полем с атомной частотой  $\omega_2 - \omega_1$  и индуцированным полем осцилляциями заселенностей на частоте Раби приводит к появлению тонов биений  $\omega_2 - \omega_1 \pm \Omega$ , известных как боковые полосы Раби. Возможность усиления без инверсии заселенностей ( $N_1 > N_2$ ) на боковых полосах Раби в двухуровневой среде, возбуждаемой сильным резонансным электрическим полем, была предсказана Раутианом и Собельманом (1961) и подтверждена экспериментально (Wu et al. 1977, Grandclément et al. 1987, Ze'likovich et al. 1987, Khitrova et al. 1988, Lezama et al. 1990). Таким образом, вне атомного резонанса усиление возможно и в отсутствие инверсии. Это означает передачу когерентности от одного поля к другому. Однако эта передача осуществляется без извлечения энергии из среды. Теоретическая интерпретация этой схемы была дана Cohen-Tannoudji, Reynaud (1977), Knight и Milonni (1980) на языке многофотонных процессов и инверсии между одетыми состояниями (dressed states). Трудности, связанные с этой схемой, состоят в том, что реализуемое повышение частоты чувствительным образом зависит от амплитуды возбуждающего поля, которая подвержена присущим ей флуктуациям. Поэтому соответствующую частоту поля трудно будет стабилизировать. Более того, произвольные частоты полей требуют произвольной мощности лазеров, что практически невозможно. Понятно, что ситуация была бы намного лучше, если бы частота усиливаемого поля могла быть привязана к некоторому стабильному свойству, такому как энергетические уровни. Такой же критический комментарий справедлив и в отношении первых предложений по реализации AWI (Marcuse (1963), Holt (1976)) механизм которых основывался на явлении доплеровского расщепления спектров поглощения и излучения за счет эффекта отдачи.

**1.2. Атомная интерференция.** Хотя сегодня уже трудно проследить первое применение этой идеи в нелинейной оптике резонаторов, наиболее ранние работы, в которых явно упоминается интерференция как механизм управления скоростями атомных переходов, принадлежат Т.Я. Поповой с соавторами (Popova et al. 1970a,b). Классическим обзором по когерентному захвату является сообщение Ноо, Eberly (1985). Для того, чтобы понять принцип атомной интерференции, мы рассмотрим трехуровневую среду (рис. 1). Важно осознавать, что в природе не существует трехуровневой среды. На самом деле имеется в виду, что в этой схеме только три уровня взаимодействуют с когерентным полем, в добавление к (по меньшей мере) четвертому уровню, который служит в качестве резервуара для атомов. Наличие других уровней существенно для того, чтобы избежать

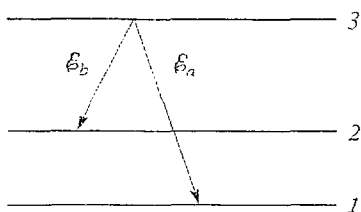


Рис. 1. Трехуровневая конфигурация и  $\Lambda$ -схема

противоречий, которые возникли бы в том случае, если бы действительно было всего три уровня. Эти противоречия относятся к правилам отбора, которые запрещают, например, возможность того, что все переходы разрешены в трехуровневой среде (хотя для достаточно асимметричных молекул это правило может нарушаться).

На рис. 1 изображена ситуация, в

которой два монохроматических поля связывают верхний уровень 3 с нижними уровнями 1 и 2. Полное электрическое поле записывается в виде

$$E(t) = \mathcal{E}_a \cos(\omega_a t) + \mathcal{E}_b \cos(\omega_b t), \quad (2)$$

а атомные волновые функции представлены набором  $\{\varphi_j, j=1,2,3\}$ . Предположим, что мы можем создать состояние, которое является суперпозицией двух нижних состояний

$$\varphi_s = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 = C_1 \varphi_1 \exp(-i\omega_1 t) + C_2 \varphi_2 \exp(-i\omega_2 t). \quad (3)$$

Тогда вероятность перехода между этим состоянием и верхним уровнем 3

$$W = |\langle \varphi_3 | -e r \epsilon E(t) | \varphi_s \rangle|^2, \quad (4)$$

где  $e r$  - электрический диполь, возбужденный электрическим полем с поляризацией  $\epsilon$ . Чтобы продолжать дальше, нам нужно оговорить правила отбора. Если каждое из монохроматических полей  $\mathcal{E}_a$  и  $\mathcal{E}_b$  может связывать верхнее состояние с любым из двух нижних уровней, то уравнение (4) можно переписать в виде

$$W_1 = 1/4 \mathcal{P}^2 \mathcal{E}^2 |C_1 [1 + \exp(-i\omega_{21} t)] + C_2 [1 + \exp(i\omega_{21} t)]|^2. \quad (5)$$

Для простоты мы предположили здесь, что все ненулевые матричные элементы равны  $\mathcal{P}\mathcal{E}$ ; изменением электрического поля на расстояниях порядка размера атома можно пренебречь; частоты полей удовлетворяют условию относительного резонанса

$$\omega_{31} - \omega_a = \omega_{32} - \omega_b, \quad (6)$$

где использовано обозначение  $\omega_{pq} \equiv \omega_p - \omega_q$ . Вероятность перехода  $W_1$  есть периодическая функция времени, которая осциллирует на низкой частоте, соответствующей расстоянию между двумя нижними уровнями. Более интересная, однако, ситуация возникает в том случае, если правила отбора таковы, что каждая составляющая поля связывает верхний уровень только с одним из нижних уровней. Тогда вероятность перехода (4) становится

$$W_1 = 1/4 \mathcal{P}^2 \mathcal{E}^2 |C_1 + C_2|^2. \quad (7)$$

Существует интересное состояние, соответствующее выбору  $C_1 = -C_2$ . Мы будем называть его *состоянием захвата (trap state)*. Оно характеризуется следующими свойствами:

$$\Psi_{\text{захв}} \propto \varphi_1 - \varphi_2, \quad |\langle \Psi_{\text{захв}} | -e r \epsilon E | \varphi_3 \rangle|^2 = 0. \quad (8)$$

Таким образом, любой атом, приготовленный в состоянии захвата, будет неспособен к взаимодействию с верхним состоянием. Из вышеизложенного очевидно, что этот эффект возникает вследствие *интерференции атомных волновых функций* между двумя механизмами возбуждения: связь уровней 3 и 1 через поле  $\mathcal{E}_a$  и конкурирующая с ней связь уровней 3 и 2 через поле  $\mathcal{E}_b$  взаимодействуют взаиморазрушительно. Описание этой интерференции требует квантового описания атомов, в то время как поле может рассматриваться классически. Это в точности совпадает с рамками полуклассической формулировки нелинейной оптики и физики лазеров, которой мы воспользуемся далее в этой статье.

Независимо от этих теретических изысканий, Alzetta et al. (1976) из Пизы сообщили о первом экспериментальном подтверждении атомной интерференции, которое согласуется с вышеприведенной простой моделью. Пизанский эксперимент основан на простом принципе. Цилиндрическая ячейка содержит пары натрия в подходящем буферном газе. Вдоль продольной оси приложено статическое магнитное поле, чтобы создать зеemanовское расщепление.

Магнитное поле возрастает линейно вдоль оси ячейки, поэтому зеемановское расщепление также является линейной функцией  $z$ . Луч многомодового лазера направляется вдоль оси  $z$  ячейки, а флуоресценция наблюдается в поперечном относительно оси  $z$  направлении. Существенным моментом в эксперименте является то обстоятельство, что лазер работает в режиме синхронизации мод: все моды являются взаимозависимыми, так что разности их частот синхронизированы, то есть остаются постоянными. В эксперименте обнаруживается, что спектр флуоресценции демонстрирует темные линии при некоторых значениях  $z$ . Темные линии означают, что никакие атомы не могут излучать из верхнего состояния, то есть нет переходов из верхнего состояния в более низкое. Тщательный анализ эксперимента показывает, что темные линии появляются при значениях  $z$  таких, что расщепление Зеемана равняется целому кратному частоты межмодового интервала лазера. Это в точности условие относительного резонанса (6), которое было использовано при анализе процесса интерференции. Очевидно, что концепция атомной интерференции представляет собой подход, в рамках которого Пизанский эксперимент находит естественное и простое объяснение, как было показано Agimondo, Orriols (1976). Независимо от группы в Пизе, Grey et al. (1978) также обнаружили темные линии, но уже в сверхтонкой структуре натрия, используя слегка отличную экспериментальную установку.

**1.3. Интерференция Фано.** Представления об интерференции в приложении к AWI получили дальнейшее развитие в работе Arkhipkin, Heller (1983). Они рассмотрели двухуровневую систему, в которой верхний уровень вложен в непрерывный энергетический спектр, в континуум (то есть верхний уровень лежит выше наименьшего порога ионизации). Ставка делается на то, что интерференция между резонансными и нерезонансными каналами переходов в континуум приведет к асимметрии между спектральными кривыми поглощения и излучения. Эти авторы показали, что указанная асимметрия может приводить к AWI. Теория переходов, включающая континуальную (непрерывную) часть энергетического спектра атомной системы, была создана Fano (1961), Fano, Cooper (1968) и недавно вновь рассмотрена Knight et al. (1990). Heller, Popov (1976) предложили способ возбуждать переходы любого диапазона в непрерывном спектре, а экспериментальное подтверждение (Heller et al. 1981) обеспечило некоторую поддержку их теории. В эксперименте эти переходы осуществляются с помощью лазера, который обеспечивает достаточную мощность, чтобы индуцировать многофотонные переходы. Трудно, однако, контролировать все параметры в этих экспериментах: выводы из них остаются до сих пор предметом обсуждения.

**1.4. Почему - усиление и генерация без инверсии?** Здесь, пожалуй, подходящий момент обсудить причины, которые побуждают физиков заниматься проблемами AWI и LWI. В ранних работах AWI и LWI появлялись скорее как побочный продукт теоретического анализа, чем как цель исследования. Такое положение вещей скоро изменилось. Однако зачем все же пытаться искать схемы, которые приводят к получению когерентного излучения без инверсии? Что не так в обычных схемах? Причина становится очевидной, если мы попробуем представить сценарий, который привел бы к созданию рентгеновского или даже гамма-лазера. Довольно затруднительно создать инверсию заселенностей, используя некогерентную накачку на этих или более высоких частотах. Таким образом, дорога к высокочастотным лазерам недоступна при использовании стандартной некогерентной накачки. Другая возможность состоит в использовании раман-эффекта. Рамановские лазеры часто используются в инфракрасной области. Они возникают при когерентной накачке среды другим лазером и при этом не требуется инверсии заселенностей. В основе лежит механизм, включающий двухфотонные переходы, причем каждый фотон индуцирует, в общем случае, нерезонансный переход. В зависимости от конфигурации уровней генерируемое поле будет иметь низкую или высокую частоту (стоксово или антистоксово рассеяние соответственно). Проблема с рамановскими лазерами состоит в том, что они не извлекают энергию из нелинейной среды; среда служит лишь основой для процесса рассеяния, который приводит к передаче

когерентности и энергии от одного поля к другому полю. Это особенно ясно следует из того, что раман-лазер может работать при полном отсутствии атомов в верхнем состоянии.\*

Имея в виду эти замечания, мы можем теперь определить AWI как механизм, который ведет к усилению слабого пробного поля путем передачи энергии от сильного и когерентного возбуждающего поля (если оно есть), осциллирующего с частотой более низкой, чем частота пробного поля, а также путем извлечения энергии из материальной среды без предварительного требования инверсии заселенностей между рабочими уровнями. Заселенности, упоминаемые здесь - это «начальные» атомные заселенности, то есть те, которые достигаются при отсутствии взаимодействия с когерентными полями, в то время как все некогерентные процессы затухания и накачки остаются задействованными.

Например, в случае трехуровневой среды (см. рис.1), мы ищем усиление при  $N_1 > N_3$  и  $N_2 > N_3$ , и вся хитрость состоит в том, что если есть атомы в состоянии захвата, то для получения усиления необходимо, чтобы число атомов на оставшихся двух нижних уровнях ( $N_1 + N_2 - N_{\text{захв}}$ ) было меньше, чем число атомов на верхнем уровне. Таким образом достигается эффективная инверсия заселенностей и энергия может быть извлечена из материальной среды обычным образом. Эта ситуация обычно именуется скрытой инверсией.

**1.5. Недавняя история.** Несмотря на появление некоторых работ, упомянутых в разделе 1.2, имеющая первостепенную важность концепция атомной интерференции прошла незамеченной для большинства физиков-лазерщиков, хотя и оставалась объектом активных исследований в области физики многофотонных переходов. Настоящим же началом для изысканий в сфере LWI и AWI послужили две работы, опубликованные независимо друг от друга.

О. Кочаровская и Я.И.Ханин (Kocharovskaya, Khanin, 1986) приступили к систематическому изучению взаимодействия трехуровневой среды с импульсным когерентным монохроматическим и постоянным немонахроматическим полями. Ранее они обнаружили, что атомы могут быть захвачены в суперпозиционном состоянии типа (8) при взаимодействии трехуровневой среды с последовательностью лазерных импульсов, если выполняются следующие условия: во-первых, длительность импульса должна быть намного меньше периода низкочастотных колебаний  $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$  и, во-вторых, частота повторений импульсов должна быть кратной частоте низкочастотных колебаний. Такой захват приводит к уменьшению коэффициента поглощения среды. Наконец, было осознано (Kocharovskaya, Khanin, 1988), что в этой схеме может быть достигнут порог усиления. При этом подразумевается возбуждение низкочастотной когерентности между уровнями 1 и 2 среды (см. рис.1) посредством некоторого внешнего поля. Это приводит к условию в виде неравенства, которому должны удовлетворять различные времена релаксации и атомные заселенности. Harris (1989), следуя совершенно иной линии размышлений, предложил схему AWI, которая может работать в стационарном режиме. В этой схеме два верхних состояния находятся выше порога ионизации и распадаются в один и тот же континуум. Такая релаксация к общему континууму является источником интерференции, которая в конечном счете приводит к AWI. Очень скоро (Scully et al. 1989) было выяснено, что интерференционная схема Харриса может быть получена без обращения к автоионизованным состояниям и к описывающей их сложной теории. В одной из самых элегантных работ в этой области они показали, что AWI может возникать при интерференции двух каналов возбуждения в  $\Lambda$ -схеме (см.рис.1), когда низкочастотный переход возбуждается СВЧ полем и два пробных поля имеют одинаковую частоту  $\omega_3 - (\omega_2 - \omega_1)/2$ . Более того, их квантовомеханический анализ  $\Lambda$ -схемы может быть «инвертирован» и применен к

\* Более точно, в случае рассеяния Стокса не требуется инверсии заселенностей. При антистоксовом рассеянии небольшое количество энергии снимается с нижних двух уровней (в трехуровневой схеме) и требуется инверсия заселенностей между двумя нижними уровнями.

V-схеме. В этом случае теория предсказывает, что интерференция может приводить к наличию инверсии заселенностей без генерации света!

После этих первых публикаций последовал взрывной рост теоретических исследований, что привело к появлению в 1993 году трех работ, в которых сообщалось о чистом экспериментальном подтверждении AWI, хотя и в импульсном или переходном режиме. Эти результаты будут описаны ниже.

## 2. Формулировка теоретического подхода

Одна из проблем, связанных с AWI и LWI, состоит в том, что существует большой разрыв между простым описанием, приведенным в разделе 1.2 (которое, в принципе, правильное, но слишком упрощенное), и более строгим анализом. Недооценка этого разрыва привела к некоторому недолониманию, противоречиям и многим неверным результатам. Поскольку мы имеем дело с неустойчивыми атомными уровнями, не существует, по крайней мере пока, способа вывести самосогласованную теорию из первых принципов: некоторая примесь феноменологии неизбежна. Поэтому давайте теперь займемся тщательной формулировкой такого подхода, в рамках которого мы сможем описать среду из многоуровневых атомов, взаимодействующих с многокомпонентным когерентным полем, и выделим те пункты, которые отличаются от теории двухуровневых систем.

**2.1. Необратимая динамика.** Мы рассмотрим совокупность неустойчивых атомов, взаимодействующих с когерентными источниками, которые влияют на заселенности всех уровней. Естественным способом описания квантовых объектов является волновая функция Шредингера. С каждым атомом мы связываем волновую функцию, которая разлагается по ортогональному базису  $\Psi_a(t) = \sum_n C_a(n,t) \phi_a(n)$ . Наблюдаемыми, однако, являются билинейные произведения коэффициентов  $C_a(n,t)$ : вероятности  $C_a(n,t)C_a^*(n,t)$  и когерентности  $C_a(n,t)C_a^*(n',t)$ . Поэтому мы вводим матрицу плотности  $\rho(n,n',t) = \langle C_a(n,t)C_a^*(n',t) \rangle$ , где угловые скобки означают усреднение по всем атомам системы. Уравнение Шредингера приводит к уравнению фон Неймана для матрицы плотности  $i\hbar \partial \rho / \partial t = H\rho - \rho H$ . Матричными элементами  $\rho$  являются  $\rho(n,n',t)$ . Причина, по которой используется формализм матрицы плотности, непосредственно связана с тем фактом, что мы описываем неустойчивые атомные состояния. Феноменологические константы, такие как скорости затухания и накачки, концептуально гораздо проще вводить для наблюдаемых вероятностей и когерентностей, чем для волновых функций.

Для устойчивых атомов при отсутствии взаимодействий мы имеем из уравнения Шредингера  $\partial \rho_{pq} / \partial t = i(\omega_p - \omega_q) \rho_{pq}$ : заселенности не меняются, а когерентности осциллируют. Если ввести время жизни атома, то недиагональные матричные элементы будут демонстрировать затухающие колебания

$$\partial \rho_{pq} / \partial t |_{\text{исобр}} = [-\gamma_{pq} + i(\omega_p - \omega_q)] \rho_{pq}, \quad p \neq q. \quad (9)$$

При анализе необратимой динамики атомных заселенностей мы следуем традиционному формализму (см. превосходное описание Haken, 1970):

$$\partial \rho_{pp'} / \partial t |_{\text{исобр}} = -\sum_p \rho_{pp} W(p \rightarrow q) + \sum_q \rho_{qq} W(q \rightarrow p), \quad (10)$$

где сумма берется по всем атомным уровням. Это уравнение выражает тот факт, что на заселенность уровня  $p$  влияют два процесса: уменьшение заселенности уровня  $p$  вследствие переходов с уровня  $p$  на уровень  $q$  и увеличение заселенности уровня  $p$  через переходы с уровня  $q$  на уровень  $p$ . Эти процессы характеризуются вероятностью перехода  $W(p \rightarrow q)$ . Вероятность перехода связана с двумя свойствами. Переход  $p \rightarrow q$  возможен только тогда, когда есть атомы в состоянии  $p$ .

Следовательно,  $W(p \rightarrow q)$  должна быть пропорциональна  $N_p$  - заселенности уровня  $p$ . Скорость, с которой эти переходы происходят в макроскопическом атомарном образце, характеризуется, по определению, временем релаксации заселенностей для этого перехода. Мы определим это время релаксации через соотношение

$$W(p \rightarrow q) \equiv N_q/T_1^{pq}. \quad (11)$$

Еще одно свойство, которое нам понадобится, но которое совсем не очевидно, состоит в том, что время релаксации заселенностей  $T_1^{pq}$  равно  $T_1^{qp}$ . Это следует из неравновесной статистической механики и соответствующий анализ мы здесь воспроизводить не будем. Используя эти результаты, мы можем записать

$$\partial \rho_{pp} / \partial t|_{\text{исобр}} = -\sum_q \rho_{pp} N_q / T_1^{pq} + \sum_q \rho_{qq} N_p / T_1^{qp} = -\sum_{q \neq p} (\rho_{pp} N_q - \rho_{qq} N_p) / T_1^{qp} \equiv R_p. \quad (12)$$

Ясно, что величины  $N_p$ , введенные в динамику заселенностей, являются теми переменными, в терминах которых мы хотим выразить условие усиления, поскольку в стационарном состоянии решением уравнения (12) является  $\rho_{pp} = N_p$ . Существенным результатом для обсуждения этих условий усиления является соотношение между временами релаксации заселенностей и поляризации. Скорость релаксации поляризации определяется через соотношение (Haken, 1970)

$$\gamma_{pq} \equiv 1/T_2^{pq} = 1/2 \sum_k [W(p \rightarrow k) + W(q \rightarrow k)]. \quad (13)$$

Сумма по всем состояниям не ограничена и  $W(p \rightarrow q)$  - действительные положительные коэффициенты, которые описывают процесс разрушения фазы вследствие виртуальных переходов. Эти переходы возникают как диагональные процессы более высокого порядка, такие как  $p \rightarrow q \rightarrow p$ ; они не влияют на заселенности, но меняют когерентности. Используя это определение, можно легко вывести фундаментальное неравенство, связывающее времена релаксации

$$2\gamma_{pq} = \sum_k [W(p \rightarrow k) + W(q \rightarrow k)] \geq \sum_{k \neq p} W(p \rightarrow k) + \sum_{k \neq q} W(q \rightarrow k), \quad (14)$$

что эквивалентно

$$2/T_2^{pq} \geq \sum_{k \neq p} N_k / T_1^{qk} + \sum_{k \neq q} N_k / T_1^{pk}. \quad (15)$$

Это неравенство устанавливает соотношение между временами релаксации и атомными заселенностями. Например, при увеличении заселенности верхнего уровня в трехуровневой среде увеличивается скорость релаксации между остальными двумя уровнями и поэтому соответствующая когерентность уменьшается. Если мы рассмотрим вырожденный случай, когда все времена релаксации заселенностей равны ( $T_1^{pk} \equiv T_1$ ) и равны все времена релаксации когерентности ( $T_2^{pk} \equiv T_2$ ), то из уравнения (15) непосредственно следует, что  $2/T_2 \geq (1+N_k)/T_1$ . Поэтому мы имеем ограничение  $3/T_2 \geq 2/T_1$  вместо  $2/T_2 \geq 1/T_1$  для двухуровневой среды.

**2.2. Полная динамика.** Обратимая часть динамики следует из уравнений Гамильтона, которые приводят к уравнению фон Неймана

$$i\hbar \partial \rho / \partial t|_{\text{оср}} = [H, \rho]. \quad (16)$$

Добавляя необратимую динамику к гамильтоновой динамике, мы получаем описание взаимодействия света с веществом. Поскольку решающим моментом, на который нацелено наше обсуждение, является возможность осуществления атомной интерференции, то будет достаточно полуклассической теории взаимодействия света с веществом, в которой вещество трактуется квантовомеханически, а поле классическое.

В этом обзоре мы рассмотрим только проблему AWI, поскольку есть лишь

несколько работ, касающихся LWI, и экспериментальные результаты пока сфокусированы на получении усиления в системах без инверсии.

### 3. Теоретические результаты.

**3.1. Простая  $\Lambda$ -схема.** Рассмотрим сначала  $\Lambda$ -схему на рис.1. Чтобы сформулировать задачу, мы рассмотрим среду, активным компонентом которой являются трехуровневые атомы. Они однородно распределены в образце и все атомы эквивалентны (приближение твердого тела Эйнштейна). В эту среду запускается поле, составленное из двух монохроматических волн,

$$E_a = \mathcal{E}_a \exp(-i\omega_a t + ik_a z) + \mathcal{E}_a^* \exp(i\omega_a t - ik_a z),$$

и

$$E_b = \mathcal{E}_b \exp(-i\omega_b t + ik_b z) + \mathcal{E}_b^* \exp(i\omega_b t - ik_b z).$$

Поле  $E_a$  имеет частоту  $\omega_a$  близкую к  $\omega_3 - \omega_1$ , а поле  $E_b$  имеет частоту  $\omega_b$  близкую к  $\omega_3 - \omega_2$ . Среда не ограничена в направлении распространения поля, поскольку все, что мы ищем - это условие усиления. Для работы лазера потребовалось бы дополнительное усложнение в виде резонатора с нелинейной обратной связью. Поскольку поле распространяется в среде, оно взаимодействует с атомами, причем это взаимодействие пропорционально матричному элементу электрического дипольного момента между состояниями 3 и 1 для поля  $E_a$  и между состояниями 3 и 2 для поля  $E_b$ . Эти переходы индуцируют когерентности, а также изменения заселенностей в соответствии с гамильтоновой частью оператора эволюции, описываемой уравнением (16). Необратимая составляющая просто добавляется к гамильтоновой эволюции. Поскольку  $\mathcal{E}$  - медленно меняющаяся амплитуда (изменения на масштабе оптической частоты и волнового вектора уже были вынесены в отдельный множитель), то мы будем иметь дело также и с медленно меняющейся огибающей для когерентностей:  $\sigma_{31} = \rho_{31} \exp(i\omega_a t)$ ,  $\sigma_{32} = \rho_{32} \exp(i\omega_b t)$  и  $\sigma_{21} = \rho_{21} \exp[i(\omega_a - \omega_b)t]$ . Для поля мы берем уравнения Максвелла и используем для их упрощения то обстоятельство, что амплитуды медленно изменяются во времени и пространстве. В конце концов, система описывается следующими уравнениями (Кочаровская, Мандель, 1990):

$$\partial\alpha/\partial t + 1/c_a \partial\alpha/\partial z + \kappa_a \alpha = (2\pi i N \omega_a |\mu_{31}|^2 \sigma_{31}) / c_a \hbar, \quad (17)$$

$$\partial\beta/\partial t + 1/c_b \partial\beta/\partial z + \kappa_b \beta = (2\pi i N \omega_b |\mu_{32}|^2 \sigma_{32}) / c_b \hbar, \quad (18)$$

$$\partial\sigma_{31}/\partial t = -\sigma_{31}[\gamma_{31} + i(\omega_3 - \omega_1 + \omega_a)] + i(\alpha n_{13} + \beta \sigma_{21}), \quad (19)$$

$$\partial\sigma_{32}/\partial t = -\sigma_{32}[\gamma_{32} + i(\omega_3 - \omega_2 + \omega_b)] + i(\alpha \sigma_{12} + \beta n_{23}), \quad (20)$$

$$\partial\sigma_{21}/\partial t = -\sigma_{21}[\gamma_{21} + i(\omega_2 - \omega_1 + \omega_a - \omega_b)] + i(\beta^* \sigma_{31} + \alpha \sigma_{23}), \quad (21)$$

$$\partial\rho_{11}/\partial t = R_1 + 2 \operatorname{Im}(\alpha \sigma_{13}), \quad \partial\rho_{22}/\partial t = R_2 - 2 \operatorname{Im}(\beta \sigma_{23}), \quad (22)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  пропорциональны полям  $\mathcal{E}_a$  и  $\mathcal{E}_b$  соответственно. Функции  $R_p$  определены уравнением (12), а  $n_{pq} \equiv \rho_{pp} - \rho_{qq}$ . Уравнения (17) и (18) описывают распространение двух полей в среде, в условиях, когда каждое поле возбуждает один атомный переход. Уравнения (19)-(21) описывают эволюцию атомной когерентности или поляризации под действием поля и некогерентных процессов. Наконец, уравнение (22) описывает динамику заселенностей ( $\operatorname{Tr}(\rho)=1$ ) под одновременным влиянием распространяющегося в среде поля и некогерентных процессов. Поскольку мы имеем дело с задачей о распространении, то естественным будет искать решения в виде нормальных волн, то есть  $\alpha, \beta \propto$



$\propto \exp(-i\omega t + ikz)$ . При таком предположении  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{32}$  также будут пропорциональны  $\exp(-i\omega t + ikz)$ . Тогда можно определить

$$\text{col}(\alpha, \beta, \sigma_{31}, \sigma_{32}) = \text{col}(a, b, s_{31}, s_{32}) \exp(-i\omega t + ikz), \quad (23)$$

где  $\text{col}(a, b, \dots)$  обозначает вектор-столбец, компонентами которого являются  $a, b, \dots$ . В уравнении (23)  $\omega$  - действительная величина, а  $k$  определится из дисперсионного соотношения  $k=k(\omega)$ , которое еще нужно вывести. Подставив выражение (23) в уравнения (17)-(22), мы получим систему уравнений для амплитуд. Они допускают стационарное решение. Решив алгебраические материальные уравнения для элементов матрицы плотности и подставив результат в оба уравнения для поля, получаем однородные уравнения для  $a$  и  $b$ :  $A_{11}a + A_{12}b = 0$ ,  $A_{21}a + A_{22}b = 0$ . Условие совместности  $A_{11}A_{22} = A_{12}A_{21}$  является дисперсионным соотношением  $k=k(\omega)$ . Если дисперсионное соотношение удовлетворяется, то его решение может быть записано в виде выражения для отношения двух усиленных полей. Дисперсионное соотношение является комплексным, так что волновое число  $k$  также комплексное. Если  $\text{Im}(k) > 0$  то решение (23) будет затухающим при возрастании  $z$ ; поле постепенно поглощается средой. Однако если  $\text{Im}(k) < 0$  то решение (23) возрастает экспоненциально с ростом  $z$  и поле усиливается. В центре линии  $\omega_3 - \omega_1 + \omega_a - \omega = \omega_3 - \omega_2 + \omega_b - \omega = 0$  и для пренебрежимых потерь  $\kappa_a = \kappa_b = 0$ , условие усиления принимает вид

$$|\sigma_{21}|^2 \equiv |\rho_{21}|^2 > (\rho_{11} - \rho_{33})(\rho_{22} - \rho_{33}). \quad (24)$$

Таким образом, в этой схеме ключевую роль играет низкочастотная когерентность  $\sigma_{21}$ . Очень просто убедиться, что на пороге, то есть при  $|\rho_{21}|^2 = (\rho_{11} - \rho_{33})(\rho_{22} - \rho_{33})$  мы имеем  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , и получаем следующие решения задачи на собственные значения  $\rho\Psi = \Lambda\Psi$ :

$$\Lambda_1 = \rho_{33}, \quad \Psi_1 = -(\rho_{22} - \rho_{33})^{1/2}\varphi_1 + (\rho_{11} - \rho_{33})^{1/2}\varphi_2 \propto \beta\varphi_2 + \alpha\varphi_1, \quad (25)$$

$$\Lambda_2 = 1 - 2\rho_{33}, \quad \Psi_2 = +(\rho_{22} - \rho_{33})^{1/2}\varphi_1 + (\rho_{11} - \rho_{33})^{1/2}\varphi_2 \propto \alpha\varphi_2 - \beta\varphi_1, \quad (26)$$

$$\Lambda_3 = \rho_{33}, \quad \Psi_3 = \varphi_3, \quad (27)$$

где  $\varphi_j = \text{col}(\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})$  - невозмущенные атомные состояния. Состояние  $\Psi_2$ , очевидно, является обобщением состояния захвата, введенного в разделе 1.2; действительно, отсутствуют переходы между этим состоянием и верхним уровнем  $\Psi_3$ . Состояние  $\Psi_1$  является дополнительным к состоянию захвата; атомы, приготовленные в  $\Psi_1$ , могут взаимодействовать с верхним состоянием. Собственные значения показывают, однако, что на пороге оба состояния заселены одинаково, что означает прозрачность по отношению к излучению!

Теперь, по порядку, два замечания. Первое: было показано (Kocharovskaya et al. 1991b), что условие (24) эквивалентно условию инверсии заселенности между состояниями  $\Psi_3$  и  $\Psi_1$ . Второе и наиболее важное: вышеприведенный анализ представляет собой подходящий случай для изучения опасностей, возникающих при исследовании устойчивости в линейном приближении. Присмотревшись внимательнее к полученным результатам, можно легко заметить, что если усиление достигается в такой  $\Lambda$ -схеме, то решена проблема *вечного двигателя*. Требуется нелинейный анализ для доказательства того, что порог (24) не может быть достигнут при конечной интенсивности пучка: он является асимптотической верхней границей и когерентный свет не может быть усилен, если в верхнем состоянии меньше атомов, чем в любом из нижних. Из этого анализа выделим два момента: во-первых, для получения AWI в такой схеме требуется дополнительный источник когерентности; во-вторых, хотя усиление не может быть получено в

этой схеме, нелинейный анализ показывает, что поглощение может быть радикально уменьшено. В некотором предельном случае было показано (Kocharovskaya, Mandel, 1990), что в стационарном режиме интенсивность поля удовлетворяет закону типа

$$dI/dz \propto -I[1 + I(3I_s + 1I_c)], \quad I_c/I_s = \gamma_{21}T_1^{32}, \quad (28)$$

где  $I_s$  - обычная интенсивность насыщения, а  $I_c$  - интенсивность когерентности. Вполне возможен случай, когда  $I_c/I_s \ll 1$  и  $I_0 \gg I_c$ , что приводит к когерентному просветлению (так называемая электромагнитно индуцированная прозрачность) при низкой интенсивности, в противоположность просветлению насыщения, которое потребовало бы довольно большой начальной мощности  $I_0 \gg I_s$ .

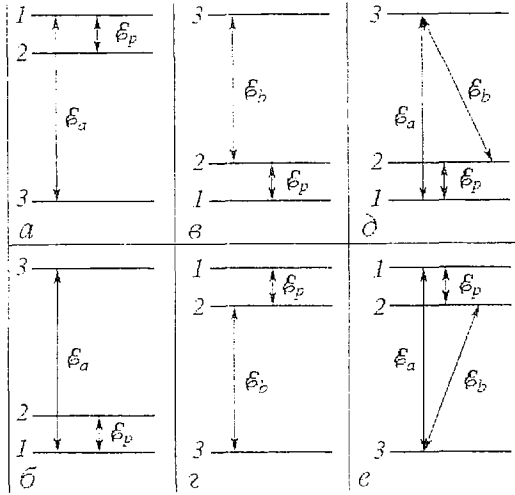


Рис. 2. Шесть возможных конфигураций трехуровневой среды, взаимодействующей с одним мощным полем накачки и одним или двумя слабыми пробными полями; все переходы являются резонансными

**3.2.  $\Lambda$ -схема под внешним воздействием.** В заключение предыдущего раздела было указано, что требуется дополнительный источник когерентности. Для трехуровневой системы может быть реализовано несколько различных схем. На рис. 2 показаны все возможные схемы с резонансными переходами, включающими сильное поле накачки и одно или два слабых пробных поля (probe fields). В качестве иллюстрации можно рассмотреть  $\Lambda$ -схему под внешним воздействием (рис. 2, д) которая включает в себя как частный случай  $h$ -схему (рис. 2, б). Уравнения поля (17) и (18) не изменяются. Материальные уравнения выглядят теперь следующим образом:

$$\partial \sigma_{31} / \partial t = -\sigma_{31} [\gamma_{31} + i(\omega_3 - \omega_1 + \omega_a)] + i(\alpha n_{13} + \beta \sigma_{21} - \gamma_p \sigma_{32}), \quad (29)$$

$$\partial \sigma_{32} / \partial t = -\sigma_{32} [\gamma_{32} + i(\omega_3 - \omega_2 + \omega_b)] + i(\alpha \sigma_{12} + \beta n_{23} - \gamma_p^* \sigma_{31}), \quad (30)$$

$$\partial \sigma_{21} / \partial t = -\sigma_{21} [\gamma_{21} + i(\omega_2 - \omega_1 + \omega_a - \omega_b)] + i(\beta^* \sigma_{31} + \alpha \sigma_{23} + \gamma_p n_{12}), \quad (31)$$

$$\partial \rho_{11} / \partial t = R_1 + 2 \operatorname{Im}(\alpha \sigma_{13} + \gamma_p \sigma_{12}), \quad \partial \rho_{22} / \partial t = R_2 - 2 \operatorname{Im}(\beta \sigma_{23} - \gamma_p \sigma_{12}), \quad (32)$$

где  $\gamma_p$  пропорциональна амплитуде поля накачки  $\mathcal{E}_p$ . В линейном режиме мощное поле накачки можно рассматривать как постоянное. В нелинейной теории оно также будет описываться уравнением распространения, аналогичным (17). Линейный анализ устойчивости проводится точно так же, как и для уравнений (17)-(23) и дает условие усиления, которое может быть проверено двумя способами.

**3.2.1. Первый механизм.** Если оба перехода  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 3$  дипольно разрешены, существуют два возможных механизма, посредством которых может быть осуществлено  $\Lambda$ WI. Первый приводит к условию (24) для низкочастотной когерентности. Разница, однако, состоит в том, что в этом случае все матричные элементы оператора плотности зависят от поля накачки, так что условие, согласно которому низкочастотная когерентность  $\sigma_{21}$  должна быть больше некоторой нижней границы, превращается в условие для амплитуды поля накачки. В явной форме нормированная амплитуда накачки  $x = |R \gamma_p / \gamma_{21}|$  должна удовлетворять неравенствам  $x_{-} < x < x_{+}$ , где  $x_{\pm}$  - действительные корни уравнения

$$x^2 + x(N_{13} + N_{23} - N_{12}^2\gamma_{21}/R) + N_{13}N_{23} = 0, \quad (33)$$

где  $N_{pq} = N_p - N_q$ , а  $R$  определяется из соотношения

$$R = 2(N_{13}T_1^{12}T_1^{23} + N_{23}T_1^{21}T_1^{13})/(N_1T_1^{23} + N_2T_1^{31} + N_3T_1^{21}). \quad (34)$$

Если предположить, что  $\gamma_{31} = \gamma_{32}$ , то можно показать, используя неравенство (15), что  $x < x_+$  и, следовательно, имеется область существования АWІ. Заметим, что если бы мы воспользовались только неравенством для двухуровневой среды  $2/T_2^{12} \geq 1/T_1^{12}$ , то обнаружили бы, что  $x > x_+$  и АWІ невозможно. Это показывает, насколько критично неравенство (15). Это указывает также на то, что область в пространстве параметров, в которой существует АWІ, довольно мала. Учитывая связь, установленную между условием усиления (24) и состояниями захвата и взаимодействия, легко понять, что в данной схеме поле накачки возбуждает в системе низкочастотную когерентность, необходимую для достижения порога, путем приготовления нужного количества атомов в состоянии захвата.

**3.2.2. Второй механизм.** Если один из переходов  $1 \leftrightarrow 3$  или  $2 \leftrightarrow 3$  запрещен, то возможен только второй механизм АWІ. Предположим, что разрешен переход  $1 \leftrightarrow 3$ . В этом случае второй механизм описывается следующей последовательностью элементарных процессов: низкочастотное поле, вследствие наличия связи с разностью заселенностей  $n_{12}$ , индуцирует низкочастотную когерентность  $\sigma_{12}$ ; низкочастотная когерентность в паре с оптическим полем  $\alpha$  индуцирует оптическую когерентность  $\sigma_{23}$  на запрещенном переходе; когерентность  $\sigma_{23}$  в паре с полем накачки  $\gamma_p$  индуцирует оптическую когерентность  $\sigma_{31}$ ; оптическая когерентность  $\sigma_{31}$  является источником поля  $\alpha$  в уравнении распространения.

Посредством этой последовательности процессов, которая объединяет антистоксово рассеяние и квантовую интерференцию, поле накачки устанавливает когерентность между состояниями 2 и 3, несмотря на отсутствие разрешенного перехода. Условие усиления для этого процесса

$$|\gamma_p|^2 > N_{13}\gamma_{12}\gamma_{23}/(N_{12} - R\gamma_{23}). \quad (35)$$

Необходимым условием для достижения усиления является  $N_{12} > R\gamma_{23}$ , которое включает начальные заселенности и четыре скорости релаксации. Было показано (Kocharovskaya, Mandel, 1991), что условие усиления (35) может выполняться без инверсии заселенностей. Основной вопрос, касающийся этой схемы, состоит в том, что условие (35) не соответствует инверсии заселенностей ни в базисе одетых (dressed) состояний, ни в каком-либо другом базисе, который может быть найден здесь. Вопрос об источнике усиления в этом случае остается открытым.

Из рис. 2 ясно, что может быть много других резонансных схем. Существуют также вырожденные схемы, нерезонансные схемы, а также схемы, включающие состояния из непрерывного спектра. Этот обзор не слишком подходящее место для исчерпывающего описания вариантов схем; не сможем мы также упомянуть всех ученых, внесших свой вклад в эту область исследований, даже путем простого перечисления и комментирования их работ (особенно если учесть, что еще идут споры и обмен выпадами по поводу того, кто что сделал и кто сделал это первым!). Поэтому мы приводим длинный список ссылок в конце обзора, который поможет заинтересованному читателю войти в курс исследований в этой области.

Следует отметить еще одно ограничение, касающееся этого обзора. Мы сконцентрировали наше внимание на АWІ, пренебрегая вопросами, связанными с LWІ. Произошло это потому, что только малая часть работ связана с теорией лазера без инверсии и до сих пор нет никаких экспериментальных подтверждений. Первой работой, в которой последовательным образом были получены нелинейные уравнения, предсказывающие стационарное LWІ, была статья Kocharovskaya et al. (1990a). Agarwal (1991a) вычислил ширину линии LWІ и показал, что она может быть уже, чем в обычном лазере. Наконец, в недавней работе (Che-

гi. Walls, 1992) было показано, что LWI может быть также источником субпуассоновской статистики и сжатого света.

#### 4. Экспериментальные результаты

Первое сообщение об экспериментальном наблюдении AWI было сделано Gao et al. (1992). В эксперименте были использованы атомы натрия, компоненты сверхтонкой структуры которого  $F=2$  и  $1$  основного состояния  $^3S_{1/2}$  были связаны с возбужденным состоянием  $^3P_{1/2}$  посредством интенсивного поля накачки с длиной волны  $589.6$  нм. Наличие усиления проверялось с помощью слабого перестраиваемого поля в частотной области, близкой к  $589$  нм. Статус этого эксперимента до сих пор расплывчат, поскольку сообщение о наличии усиления не сопровождалось ясным доказательством отсутствия инверсии. Однако он заслуживает упоминания, поскольку стимулировал дальнейшие исследования.

Первым несомненным свидетельством существования AWI стала работа Nottelmann et al. (1993). Эти авторы использовали схему, основанную на когерентности Зеемана, как показано на рис. 3. Это обобщение  $\Lambda$ -схемы с тремя нижними уровнями, которые связаны с одним верхним. Атомы находятся в постоянном магнитном поле. Энергия уровней в этом случае  $E_1 = \hbar(\omega_2 - \Omega)$ ,  $E_2 = \hbar\omega_2$ ,  $E_3 = \hbar(\omega_2 + \Omega)$  и  $E_4 = \hbar(\omega_2 + \omega_a)$ , откуда атомная частота определяется, как  $\omega_4 - \omega_2$ , а ларморовская частота равна  $\Omega = |\omega_1 - \omega_2| = g\mu_B B / \hbar$ . Суть эксперимента состоит в следующем. Низкочастотная когерентность  $\rho_{13}$  создается с помощью периодической последовательности пикосекундных импульсов с периодом повторения  $T_p$ , которая возбуждает только  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  переходы и обеспечивает, таким образом, источник интерференции. После каждого импульса низкочастотная когерентность  $\rho_{13}$  осциллирует с частотой  $2\Omega$ . С целью обеспечения хорошего контроля за экспериментальной ситуацией, магнитное поле выбиралось таким образом, чтобы  $\pi/\Omega = T_p/n$ ,  $n = 1, 2$  или  $4$ . Тестовый пикосекундный импульс, аналогичный импульсам последовательности, следовал за последним импульсом цуга с задержкой  $T_p/4$ . В зависимости от значения  $n$  возможны три ситуации.

(1) Если  $n=1$ , тестовый импульс приходит в тот момент, когда  $\text{Re}(\rho_{13})=0$ , и ослабляется, поскольку только  $\text{Re}(\rho_{13})$  вносит вклад в передачу энергии и нет инверсии заселенностей. На самом деле в этом эксперименте никогда не достигается инверсия, в том смысле, что всегда выполняется неравенство  $\rho_{kk} < \rho_{44}$ ,  $k=1, 2, 3$ .

(2) Если  $n=2$ ,  $\text{Re}(\rho_{13})$  положительна и максимальна, что приводит даже к более сильному ослаблению, чем в случае  $n=1$ .

(3) Если  $n=4$ ,  $\text{Re}(\rho_{13})$  отрицательна и минимальна, что приводит к максимуму усиления.

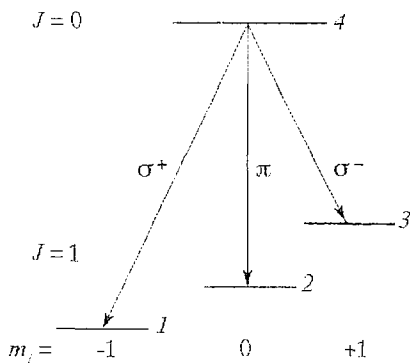


Рис.3. Уровни энергии атома самария и схема возбуждения (по работе Nottelmann et al. 1993)

Однако за время  $T_p/4$  оптические когерентности  $\rho_{14}$  и  $\rho_{34}$  релаксируют практически полностью и заселенность верхнего уровня  $4$  также частично релаксирует. Поскольку усиление пропорционально заселенности верхнего уровня, полезно компенсировать релаксацию верхнего уровня, но без создания инверсии. Восполняющий заселенность пикосекундный импульс посылается в систему прямо перед приходом тестового. Этот заселяющий импульс имеет поляризацию, ортогональную к поляризации других импульсов, так что он возбуждает только  $\pi$  переход, не

влияя на два  $\sigma$  перехода. Типичное значение времени в эксперименте  $T_p = 13.214$  нс, заселяющий импульс посылается за 175 пс до тестового. Инверсии удастся избежать с помощью тщательного контроля за площадью каждого импульса. Экспериментальные результаты приведены на рис. 4, который отображает интенсивность тестового импульса в зависимости от времени. На рис. 4 каждая кривая является средней по 16 одиночным кривым, а каждая одиночная кривая является средней по 5500 тестовым импульсам. Такая процедура использовалась для исключения флуктуаций.

Второй эксперимент, в котором было получено AWI, был выполнен Fry et al. (1993) с использованием  $D_1$  линии атомарного натрия. Структура очень сложная, как показывает рис. 5, а. Однако основную идею эксперимента легко понять с помощью обобщенной диаграммы на рис. 5, б. Здесь также используются два мощных поля для возбуждения переходов  $^3S_{1/2}(F=2) \rightarrow ^3P_{1/2}(F=2)$  и  $^3S_{1/2}(F=1) \rightarrow ^3P_{1/2}(F=2)$ . Сни являются источниками когерентности между двумя нижними уровнями  $b$  и  $b'$  и служат для перевода атомов в состояние захвата  $\Psi_{\text{захв}} \propto (\phi_b - \phi_{b'})$  (предполагается, что частоты Раби  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  равны). На данной экспериментальной установке это проверялось путем включения и выключения одного из полей. В результате выключения одного поля другое ослабляется, так как атомы в состоянии захвата снова могут

взаимодействовать с оставшимся полем и поглощать его, поскольку нет инверсии заселенностей. Этот переходный процесс длится до тех пор, пока не будет достигнуто новое стационарное состояние. Таким образом, процесс интерференции ловит атомы в состояние захвата только в присутствии обоих полей. Затем прикладывается слабое поле, влияющее на заселенность - для того чтобы перевести атомы в верхнее состояние  $a$  (см. рис. 5, б), но без создания инверсии. В результате наблюдается переходное AWI на частотах  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  до тех пор, пока перераспределение атомов по энергетическим уровням не приведет к уменьшению интенсивности вследствие обычного поглощения. Чтобы подтвердить роль интерференции, аналогичный эксперимент был проведен при выключенном поле  $\Omega_2$  во время действия заселяющего поля. Общим результатом явилось ослабление поля  $\Omega_1$ , что подтверждает существенную роль двух полей в индуцировании атомной интерференции посредством низкочастотной когерентности. Хотя простая модель на рис. 5, б является полезной, тщательный анализ и изучение эксперимента требует рассмотрения всей диаграммы, изображенной на рис. 5, а.

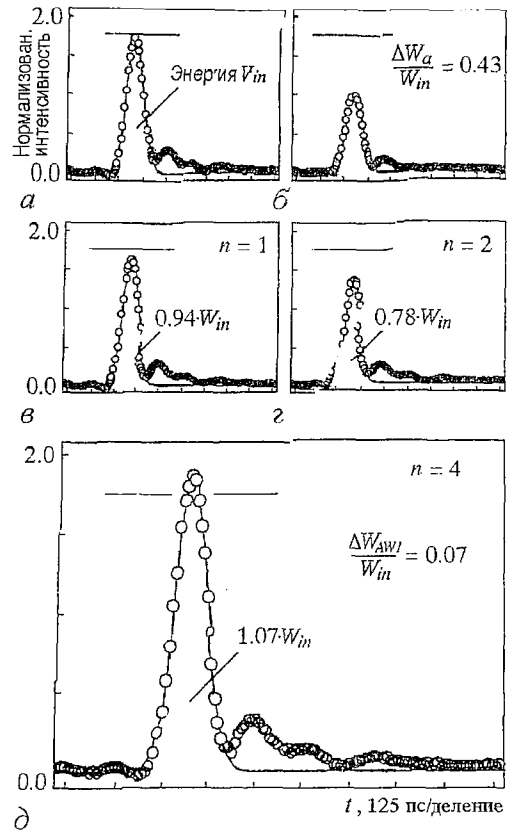


Рис. 4. Экспериментальные результаты, полученные на самарии: интенсивность тестового импульса в зависимости от времени (из Notelmann, A., Peters, C., Lang, W. 1993, Phys.Rev.Lett., 70, 1783, с разрешения авторов). а - магнитное поле выбрано таким образом, что наводится электромагнитная прозрачность; б - поглощение тестового импульса в отсутствие подготовительных импульсов; в - магнитное поле таково, что выполняется условие  $\pi/\Omega = T_p$  - слабое поглощение; г - магнитное поле таково, что  $\pi/\Omega = T_p/2$  - сильное поглощение; д - магнитное поле таково, что  $\pi/\Omega = T_p/4$  - AWI

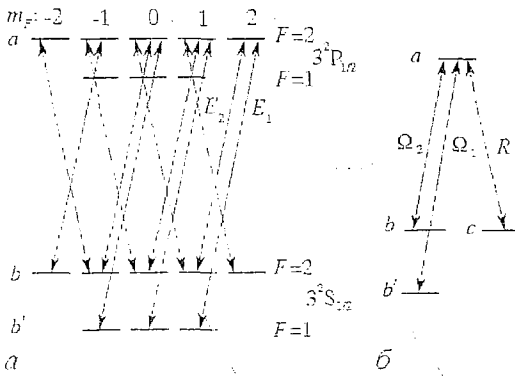


Рис. 5. Уровни энергии атома натрия и схемы возбуждения: *a* - полная схема; *б* - принцип эксперимента (по работе Fry et al. 1993])

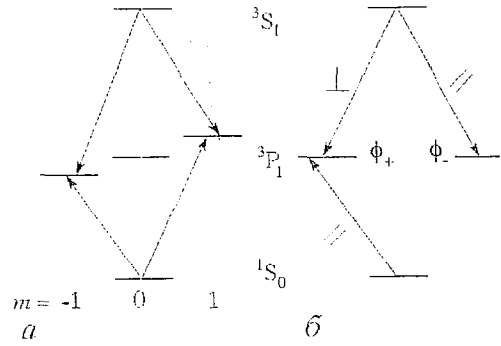


Рис. 6. Диаграмма энергетических уровней кадмия: *a* - энергетические уровни в отсутствие полей; *б* - энергетические уровни суперпозиционных состояний (по работе van der Veer et al. 1993)

Заметим, что здесь также заселяющее поле развязано относительно переходов, возбуждаемых сильными полями, за счет использования поляризации поля: сильные и слабое поля в этом эксперименте имеют противоположные поляризации.

Третье экспериментальное подтверждение AWI было предложено в работе van der Veer et al. (1993), где использовались пары кадмия в магнитном поле (рис. 6). Линейно поляризованный импульс  $P_1$  возбуждает основное состояние  $5s^2 \ ^1S_0$  в когерентную суперпозицию состояний  $5s5p \ ^3P_1$  с  $m=\pm 1$ , соответствующие энергии равны  $E_{+1}$  и  $E_{-1}$ , а волновые функции -  $\varphi_{m=\pm 1}$ . В этом эксперименте состояние  $P_1$  с  $m=0$  не играет никакой роли. Расщепление производится магнитным полем. Заметьте, что в данном случае мы имеем V-схему, а не обычную  $\Lambda$ -схему. Импульс  $P_1$  возбуждает два суперпозиционных состояния  $\varphi_{\pm} \propto \varphi_{m=1} \pm \varphi_{m=-1}$ . Взаимодействующим в этом случае будет состояние  $\varphi_+$ , а  $\varphi_-$  - невзаимодействующим. Два подуровня состояния  $P_1$  возбуждаются одним и тем же широкополосным импульсом. Идентичный результат может быть достигнут при использовании резонансного бихроматического поля. Следует отметить, что такой способ приготовления состояний реализует в точности те условия, которые приводят к вероятности перехода (5). Поэтому здесь имеют место осцилляции между двумя состояниями  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  с низкой частотой  $(E_{+1} - E_{-1})/\hbar$ . В тот момент, когда  $\varphi_+$  заселен, а  $\varphi_-$  - пуст, второй импульс света  $P_2$  с поляризацией, перпендикулярной поляризации импульса  $P_1$ , переводит часть атомов  $\varphi_+$  в верхнее состояние  $5s5p \ ^3S_1$  и слабое пробное поле связывает  $^3S_1$  и  $\varphi_-$  состояния. Сложность этого эксперимента состоит во временном контроле за последними двумя импульсами по отношению к первому. В частности, для доказательства существования AWI задержка и мощность второго импульса должны поддерживаться такими, чтобы не создавалась инверсия заселенностей между уровнями  $^3S_1$  и  $^3P_1$ , в то время как пробный импульс должен попасть в систему в тот момент, когда атомы находятся в  $\varphi_-$  состоянии.

## 5. Полезная идея?

Лазер без инверсии заселенностей, но с постоянной выходной интенсивностью (Kocharovskaya et al. 1990), остается до сих пор недостигнутой целью. Однако AWI и LWI принадлежат молодой области исследований, в которой когерентные поля служат для манипуляции атомами и для использования

интерференции атомных волновых функций. Возьмем, к примеру, ряд недавних сообщений о получении электромагнитно индуцированной прозрачности (Nakuta et al. 1991, Boller et al. 1991 и Field et al. 1991). В этих экспериментах не было получено усиление (и не ожидалось), однако достигнуто радикальное уменьшение поглощения вследствие происходящих когерентных процессов, как и было предсказано (Kocharovskaya, Khanin, 1986). Было показано (Harris 1993), что метод согласованных импульсов может привести к строго нулевому поглощению для среды, которая в обычном случае является оптически плотной. Был предсказан и другой эффект (Scully 1991): среда может быть приготовлена в таком состоянии, что частоты, на которых исчезает поглощение и показатель преломления достигает максимума, совпадают. Это может вести к экзотическим приложениям типа лазерного ускорителя или детектора сверхслабых магнитных полей.

В каждом из этих примеров используется внешний источник для возбуждения подходящей комбинации атомных состояний, в которой волновая природа материи может быть использована для создания состояний с неожиданными свойствами. Сюрприз состоит в том, что *классические* поля могут *спонтанно* создавать эти комбинированные состояния. Когерентная оптика постепенно прокладывает путь когерентной атомике.

*Я хочу выразить мою благодарность Ольге Кочаровской за ее помощь в подготовке некоторых частей этой рукописи, и П. Найту за мудрые советы. Эта работа была поддержана частично Национальным Фондом Научных Исследований (Fonds National de la Recherche Scientifique, Бельгия) и программой Межуниверситетский Полюс Притяжения (Interuniversity Attraction Pole) правительства Бельгии.*

*перевод И.Р. Сатаева*

## References

- Agarwal G.S. 1991a, Phys. Rev. Lett., **67**, 980.  
 Agarwal G.S. 1991b, Phys. Rev. A, **44**, R28.  
 Agarwal G.S., Ravi S., Cooper J. 1990a, Phys. Rev. A, **41**, 4721.  
 Agarwal G.S., Ravi S., Cooper J. 1990b, Phys. Rev. A, **41**, 4727.  
 Alzetta G., Gozzini A., Moi L., Orriols G. 1976, Nuovo Cim.B, **36**, 5.  
 Arimondo E., Orriols G. 1976, Nuovo Cim.Lett.**17**, 333.  
 Arkhipkin V.G., Heller Yu.I. 1983, Phys. Lett.A, **98**, 12.  
 Bachau H., Lyras A., Lambropoulos P. 1991, Optics Commun., **83**, 331.  
 Bhanu Prasad G., Agarwal G.S. 1991, Optics Commun., **86**, 409.  
 Boller K.-J., Imamoglu A., Harris S.E. 1991, Phys. Rev. Lett., **66**, 2593.  
 Basile S., Lambropoulos P. 1990, Optics Commun., **78**, 163.  
 Bergou J.A., Bogar P. 1991, Phys. Rev. A, **43**, 4889.  
 Block V.R., Krochic G.M. 1990, Phys. Rev. A, **41**, 1517.  
 Block V.R., Krochic G.M. 1991a, Phys. Rev. A, **44**, 2036.  
 Block V.R., Krochic G.M. 1991b, Optics Commun., **82**, 309.  
 Cohen-Tannoudji C., Reynaud S. 1977, J.Phys. B, **10**, 365.  
 Cohen-Tannoudji C., Zambon B., Arimondo E. 1993, J.Opt. Soc.Am.B, **10**, 2107.  
 Dimov S.S., Pavlov L.I., Stamenov K.V., Heller Yu.I., Popov A.K. 1983, Appl.Phys. B, **30**, 35.  
 Doss H.M., Narducci L.M., Scully M.O., Gao, J. 1993, Optics Commun., **95**, 57.  
 Dowling J.P., Bowden C.M. 1993, Phys. Rev. Lett., **70**, 1421.  
 Fano U. 1961, Phys. Rev. A, **16**, 1866.  
 Fano U., Cooper J.W. 1968, Rev. Mod. Phys., **40**, 441.  
 Fearn H., Keitel C., Scully M.O., Zhu S.-Y. 1992, Optics Commun., **87**, 323.  
 Field J.F., Hahn K.H., Harris S.E. 1991, Phys. Rev. Lett., **67**, 3062.  
 Fill E.E., Scully M.O., Zhu S.Y. 1990, Optics Commun., **77**, 36.  
 Fleischhauer M., Keitel C.H., Narducci L.M., Scully M.O., Zhu S.Y., Zubairy M.S. 1992, Optics Commun., **94**, 599.

- Fleischauer M., Keitel C.H., Scully M.O., Su C. 1992, *Optics Commun.*, **87**, 109.
- Fry E.S., Li X., Nikonov D., Padmabandu G.G., Scully M.O., Smith A.V., Tittel F.K., Wang C., Wilkinson S.R., Zhu S.Y. 1993, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 3235.
- Gao J.Y., Guo C., Guo X.Z., Jin G.X., Wang Q.W., Zhao J., Zhang H.Z., Jiand Y., Wang D.Z., Jiang D.M. 1992, *Optics Commun.*, **93**, 323.
- Gheri K.M., Walls D.F. 1992, *Phys. Rev. A*, **45**, 6675.
- Gray H.M., Whitley R.M., Stroud C.R. Jr. 1978, *Optics Lett.*, **3**, 218.
- Grandclement D., Grynberg G., Pinard M. 1987, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 40.
- Haken H. 1970, *Encyclopedia of Physics*, Vol.XXV/2c. Ed. Genzel. L. Berlin:Heidelberg: Springer-Verlag.
- Hakuta K., Marmet L., Stoicheff B.P. 1991, *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 595.
- Harris S.E. 1989, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 1033.
- Harris S.E. 1993, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 552.
- Harris S.E., Field J.E., Kasapi A. 1992, *Phys. Rev.*, A, **46**, R29.
- Harris S.E., Macklin J.J. 1989, *Phys. Rev. A*, **40**, 4135.
- Heller Yu.I., Popov A.K. 1976, *Optics Commun.*, **18**, 449.
- Heller Yu.I., Lukinykh V.F., Popov A.K., Slabko V.V. 1981, *Phys. Lett.A*, **82**, 4.
- Holt H. 1976, *Phys. Rev. A*, **16**, 1136.
- Hoo H.J., Eberly J.H. 1985, *Phys. Rep.*, **118**, 239.
- Imamoglu A. 1989, *Phys. Rev. A*, **40**, 2835.
- Imamoglu A., Field J.E., Harris S.E. 1991, *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 1154.
- Imamoglu A., Harris S.E. 1989, *Optics Lett.*, **24**, 1344.
- Jain M., Yin G.Y., Field J.E., Harris S.E. 1993, *Optics Lett.*, **18**, 998.
- Karawajczyk A., Zakrewski J., Gawlik W. 1992, *Phys. Rev. A*, **45**, 420.
- Khanin Ya.I., Kocharovskaya O. 1990, *J.opt.Soc.Am.B*, **7**, 2016.
- Khitrova G., Valley G.F., Gibbs H.M. 1988, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1126.
- Knight P.L., Lauder M.A., Dalton B.J. 1990, *Phys. Rep.***190**, 1.
- Knight P.L., Milonni P.W. 1980, *Phys. Rep.*, **66**, 1.
- Kocharovskaya O. 1992, *Phys. Rep.*, **219**, 175.
- Kocharovskaya O., Tsaregradsky V.B. 1984, *Izv. Vuz.Radiophys.*, **28**, 532.
- Kocharovskaya O., Khanin Ya.I. 1986, *Zh.eksp.teor.Fiz.*, **90**, 1610 (Engl.Transl., Soviet Phys. JETP, **63**, 945).
- Kocharovskaya O., Khanin Ya.I. 1988, *Pis'ma Zh.éksp.teor.Fiz.*, **48**, 581(Engl., Tranl.. JETP Lett., **48**, 630).
- Kocharovskaya O., Khanin Ya.I. 1989, *Nonlinear Waves 3*, Proceedings of Gorky School on Nonlinear Physics / Eds. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. and Engelbrecht J. (Berlin:Springer-Verlag). P.162.
- Kocharovskaya O., Mandel P. 1991a, *Optics Commun.*, **84**, 179.
- Kocharovskaya O., Li R.-D., Mandel P. 1990a, *Optics Commun.*, **77**, 215.
- Kocharovskaya O., Mandel P. 1990, *Phys. Rev. A*, **42**, 523.
- Kocharovskaya O., Mandel P., Khanin Ya.I., 1990b, *Izv. Akad. Nauk USSR*, **54**, 1979.
- Kocharovskaya O., Mandel P., Khanin Ya.I. 1992, *Transverse Patterns in Nonlinear Optics*. Proceedings of the SPIE. Vol.1840 (Bellingham, WA:SPIE). P.268.
- Kocharovskaya O., Mandel P., Radeonychev Y.V. 1992, *Phys.Rev. A*, **45**, 1997.
- Kocharovskaya O., Mauri F., Arimondo E. 1991b, *Optics Commun.*, **84**, 393.
- Lezama A., Zhu Y., Kanskar M., Mossberg T.W. 1990, *Phys. Rev. A*, **41**, 1576.
- Lu N. 1989, *Optics Commun.*, **73**, 479.
- Luo Z.F., Xu Z.Z. 1992a, *Phys. Rev. A*, **169**, 389.
- Luo Z.F., Xu Z.Z. 1992b, *Phys. Rev. A*, **45**, 8292.
- Lyras A., Tang X., Lambropoulos P., Zhang J., 1989, *Phys. Rev. A*, **40**, 4131.
- Manka A.S., Keitel C.H., Zhu S.Y., Fleischauer M., Narducci L.M., Scully M.O. 1992, *Optics Commun.*, **94**, 174.
- Mandel P. 1993, *Nonlinear Dynamics and Spatial Complexity in Optical Systems*. Proceedings of the 41st Scottish Universities Summer School in Physics / Ed. Harrison R.G.
- Mandel P., Kocharovskaya O. 1992a, *Nonlinear Dynamics and Quantum Phenomena in Optical Systems* / Eds. Vilaseca R. and Corbalan R., (Berlin:Springer-Verlag). P.109.



- Mandel P., Kocharovskaya O. 1992b, Phys. Rev. A, **46**, 2700.  
Mandel P., Kocharovskaya O. 1993, Phys. Rev. A, **47**, 5003.  
Marcuse D. 1963, Proc.Inst.elect.electron.Engrs, **51**, 849.  
Narducci L.M., Doss H.M., Ru P., Scully M.O., Keitel C. 1991a, Optics Commun., **81**, 379.  
Narducci L.M., Scully M.O., Keitel C.H., Zhu S.-Y., Doss H.M. 1991b, Optics Commun., **86**, 324.  
Nottelmann A., Peters C., Lange W. 1993, Phys. Rev. Lett., **70**, 1783.  
Orszag M., Zhu S.Y., Bergou J., Scully M.O. 1992, Phys. Rev. A, **45**, 4872.  
Popova T.Ya., Popov A.K., Rautian S.G., Sokolovskii R.I. 1970a. Zh.Éksp.teor.Fiz., **57**, 850(Engl.Transl., 1970, Soviet Physics JETP, **30**, 466).  
Popova T.Ya., Popov A.K. 1970b, Zh.prikl.Spektros., **12**, 989 (Engl.Trans., 1970, J.appl.Spectrosc.**12**, 734).  
Rautian S.G., Sobel'man I.I. 1961.Zh.Éksp.teor.Fiz., **41**, 328 (Engl.Trans., 1962, Soviet Phys. JETP, **14**, 328).  
Sargent M., III, Scully M.O., Lamb W.E., Jr. 1974, Laser Physics (Reading, M.A: Addison-Wesley).  
Scully M.O. 1991, Phys. Rev. Lett., **67**, 1855.  
Scully M.O. 1992, Phys. Rep., **219**, 191.  
Scully M.O., Zhu S.Y., Gavridiles A. 1989, Phys. Rev. Lett., **62**, 2813.  
Scully M.O., Zhu S.Y., Narducci L.M., Fearn H. 1992, Optics Commun., **88**, 240.  
Tan W., Lu W., Harrison R.G. 1992, Phys. Rev. A, **46**, R3613.  
van der Veer W.E., van Dienst R.J.J., Donzelmann A., van Linden van den Heuvel H.B. 1993, Phys. Rev. Lett., **70**, 3243.  
Wu F.Y., Ezekiel S., Ducloy M., Mollow B.R. 1977, Phys. Rev. Lett., **38**, 1077.  
Zambon B. 1993, Phys. Rev. A, **47**, R38.  
Ze'likovich I.S., Pulkin S.A., Gaida L.S. 1987, Opt.Spectrosk., **62**, 1401.  
Ze'likovich I.S., Pulkin S.A., Gaida L.S. 1988.Zh.Éksp.teor.Fiz., **94**, 86.  
Zhu S.-Y. 1991, Phys. Rev. A, **42**, 5537.  
Zhu S.-Y. 1992, Phys. Rev. A, **45**, R6149.  
Zhu S.-Y., Fill E.E. 1991, Phys. Rev. A, **42**, 5684.

*Universite Libre de Bruxelles,  
Brussel, Belgium*

*Поль Мандель* родился в 1942 году в Женеве (Швейцария). Получил степень магистра в Брюссельском университете (1965) и вскоре защитил докторскую диссертацию (1965) по статистической механике. С 1981 года занимается исследованиями в области квантовой оптики. Интересы разносторонние - от квантовой и нелинейной оптики до кулинарии и техники макрофотографии насекомых и цветов. Автор большого количества научных работ. Статьи последних лет:

- Amplification without inversion: the double L scheme. *O. Kocharovskaya, P. Mandel*. Phys. Rev. A **42** (1990). P. 523.  
Scaling laws for dynamical hysteresis. *P. Jung, G. Gray, R. Roy, P. Mandel*. Phys. Rev. Lett. **65** (1990). P. 1873.  
Transverse effects in coherently driven nonlinear cavities. *P. Mandel, M. Georgiou, T. Erneux*. Phys. Rev. A **47**(1993). P.4277.  
Two-mode laser power spectra. *P. Mandel, K. Otsuka, J.-Y. Wang, D. Pieroux*. Phys. Rev. Lett. **76**(1996). P. 2694.



## МЕХАНИЗМЫ БИФУРКАЦИЙ, СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В МОДЕЛИ ЛАЗЕРА С НАСЫЩАЮЩИМСЯ ПОГЛОТИТЕЛЕМ

*С.А. Татаркова, В.В. Тучин*

Исследуются механизмы формирования хаотических аттракторов в модели лазера с насыщающимся поглотителем. Показано влияние собственных значений ненулевых стационарных точек на специфическую динамику лазера в условиях мультистабильности, изучены некоторые асимптотические свойства периодических решений. Установлено, что хаотические режимы возникают как следствие каскада бифуркаций удвоения периода, перемежаемости, гетероклинической бифуркации к седло-фокусной стационарной точке.

### Введение

В последние годы появилось немало работ, посвященных особой роли, которую играют гомоклинические структуры в нелинейной динамике диссипативных систем. Являясь некоторым предельным решением нелинейных уравнений, гомоклиническая траектория существенно влияет на свойства и поведение динамической системы. Связь между гомоклиническими структурами и сложным хаотическим поведением модельной системы обнаружена и исследована в различных физических и химических моделях, в частности, в реакции Белоусова - Жаботинского [1], в модели Лоренца [2], в модели лазера с насыщающимся поглотителем (ЛНП) [3,4]. Эти и другие исследования доказывают, что существует определенная универсальность поведения большинства систем с различного рода гомоклиническими траекториями.

При гомоклинической бифуркации фазовая траектория при  $t \rightarrow \infty$  возвращается в окрестность некоторого седлового многообразия, которым может служить стационарная точка, предельный цикл или более сложное образование, например, тор. В случае, когда гомоклиническая бифуркация связана со стационарной точкой седло-фокусного типа, теорема Л.П.Шильникова устанавливает связь между собственными числами матрицы линеаризации седловой стационарной точки в окрестности гомоклинической петли и особой хаотической динамикой системы. Если собственные числа таковы, что  $\lambda > 0$  - действительное,  $(-p \pm i\omega)$  - комплексно-сопряженные и  $|p/\lambda| < 1$ , то существует гомоклиническая петля, вблизи которой возможен хаос. Таким образом, результаты теоремы могут быть применены к широкому классу диссипативных

нелинейных систем с тремя степенями свободы. Примером могут служить уже упомянутые исследования реакции Белоусова - Жаботинского, уравнений Лоренца и другие.

Если размерность динамической системы больше трех, необходимы дополнительные исследования собственных значений стационарных точек. В литературе имеются результаты исследования четырехмерной системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику ЛНП в условиях экстремально высоких внутренних потерь в резонаторе лазера [5]. Здесь высокий порядок хаотизации колебаний - гиперхаос (спектр ляпуновских характеристических показателей содержит два положительных показателя вместо одного) - был связан с собственными значениями ненулевых стационарных точек. В работе [3] упоминаются также результаты, которые связывают собственные значения седлового нулевого стационара с собственными значениями ненулевого стационара. Так или иначе, с увеличением размерности системы вычисление гомоклинических или гетероклинических траекторий становится численно сложной задачей.

Необходимо также упомянуть о некоторых результатах, полученных в модели ЛНП. Настоящая статья посвящена исследованию хаоса, вызванного гетероклинической бифуркацией к седло-фокусной стационарной точке в пятимерной модели полуклассических уравнений Максвелла - Блоха для ЛНП с учетом поляризации усиливающей и поглощающей сред.

Интерес к данной лазерной системе обусловлен накопившимися в последнее время более детальными экспериментальными исследованиями динамических режимов, особенно хаотических, с привлечением новых прогрессивных методов реконструкции аттракторов в фазовом пространстве на основе записи длинной временной реализации импульсов пассивной модуляции добротности (ПМД). Определенные свойства экспериментально наблюдаемых хаотических режимов генерации позволяют предположить их связь с особыми гомоклиническими траекториями в фазовом пространстве системы. В большинстве применяемых поглотителей наблюдаются импульсы со сложной структурой - за основным большим пиком следуют менее интенсивные пички, образующие «хвост» импульса, и эта структура меняется при изменении лазерных параметров (изменяется как число пичков, так и их интенсивность). Хаотические режимы при этом представляют собой обычно «смесь» из импульсов различной структуры. Особенно сложно анализировать хаотические режимы, которые представляют собой последовательность импульсов с большим числом пичков на «хвосте», где высокий уровень шума смазывает мелкие пички и делает их неразличимыми. Исследование теоретических моделей ЛНП дает возможность установить закономерности бифуркаций периодических импульсных режимов генерации и закономерности развития хаоса. В данной работе впервые в полуклассической модели исследована детально бифуркационная диаграмма, даны оценки размерам окон периодических решений на ней и их связь с собственными числами матрицы линеаризации седловых стационаров. Экспериментально наблюдаемая последовательная смена режимов ПМД - от моноимпульсных к многопичковым при изменении только расстройки между частотой генерации и частотой резонатора - в модели уравнений Максвелла - Блоха для двухуровневой схемы усиливающей и поглощающей сред реализуется при изменении скорости релаксации поляризации в поглощающей среде. Подобные исследования проводились ранее в модели скоростных уравнений для ЛНП [4], в которых особую роль, определяющую пульсации интенсивности на «хвосте» импульсов ПМД, играет дополнительный третий нижний быстрорелаксирующий лазерный уровень. Обнаруженная в [4] гомоклиническая бифуркация наблюдается при условии, что поглощающая среда становится безынерционной, то есть скорость релаксации населенностей в поглощающей среде значительно превышает все остальные характерные времена релаксации в лазерной модели. В этом случае система уравнений сводится к трехмерной, и становятся применимыми общие методы анализа таких систем. Предложенная модель позволяет объяснить

некоторые экспериментальные результаты [4], такие как последовательная смена периодических режимов при изменении расстройки с увеличивающимся числом пичков на «хвосте», существование хаотических режимов между окнами устойчивых периодических и т.д. В работе [3] исследуется модельное отображение, предложенное Л.П. Шильниковым, которое является стандартным отображением некоторой траектории в фазовом пространстве, обладающей свойствами притяжения к седловому множеству, в данном случае - предельному циклу. Данное отображение позволяет получить некоторые качественные оценки поведения системы вблизи гомоклинической бифуркации, в частности, определить характеристики периодических решений, их области устойчивости, типы бифуркаций, и связать их с параметрами системы и собственными значениями неустойчивого многообразия, в данном случае предельного цикла, к которому возникает данная сложная бифуркация. Отмечается общий характер поведения подобных траекторий вблизи гомоклинической бифуркации к седловому предельному циклу - мультистабильность периодических траекторий, то есть сосуществование различных регулярных режимов при одних и тех же параметрах лазера, бифуркации удвоения периода и хаотические режимы, представляющие собой смесь различных седловых предельных циклов, что достаточно хорошо согласуется с экспериментом [3,4].

### Математическая модель ЛНП

Исследуемая математическая модель для одномодового лазера с насыщающимся поглотителем в приближении нулевых расстроек между линиями и без учета пространственной структуры поля включает в себя пять уравнений - для амплитуды поля  $E$ , поляризаций усиливающей  $P$  и поглощающей  $\bar{P}$  сред, отношений разностей населенностей усиливающего и поглощающего переходов к их ненасыщенным значениям  $D$  и  $\bar{D}$  и имеет следующий вид [6]:

$$\begin{aligned}
 dE/dt &= A_1 P + A_2 \bar{P} - E, \\
 dP/dt &= d_1 (DP - E), \\
 d\bar{P}/dt &= d_2 (D\bar{P} - E), \\
 dD/dt &= b_1 (1 - D - PE), \\
 d\bar{D}/dt &= b_2 (1 - \bar{D} - a\bar{P}E),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $A_1$  - превышение усиления над линейными потерями,  $A_2$  - относительный параметр селективных потерь, характеризующий поглощение;  $d_{1,2} = \gamma_{1,2}^{\perp}/k$ , где  $\gamma_{1,2}^{\perp}$  - скорости установления поляризации усиливающей и поглощающей сред;  $b_{1,2} = \gamma_{1,2}^{\parallel}/k$ , где  $\gamma_{1,2}^{\parallel}$  - скорости релаксации инверсии (индекс 1) и разности населенностей поглощающего перехода (индекс 2);  $a$  - отношение параметров насыщения поглощающей и усиливающей сред для молекул одного сорта;  $I = E^2$  - безразмерная интенсивность. Производные в (1) взяты по безразмерному времени  $t = kt'$ , где  $k = 1 \cdot 10^7$  Гц - ширина полосы резонатора; все параметры в уравнениях (1) также безразмерные. Все данные о нормировке параметров даны в [6]. Численно анализировались стационарные решения системы (1), их устойчивость и типы бифуркации. В качестве управляющих параметров при исследовании системы мы использовали параметры  $d_2, A_2$ . Остальные параметры были фиксированы и равны  $A_1 = 3.725$ ,  $b_1 = 0.0024$ ,  $b_2 = 0.001$ ,  $d_1 = 4.0$ ,  $a = 0.5$ . Кроме стационарных, исследовались бифуркации периодических решений, анализировались такие характеристики, как период колебаний, мультипликаторы, максимальное значение амплитуды, размер цикла.

Система уравнений (1) численно интегрировалась методом Рунге - Кутты 4-го порядка. Вычисления проводились с двойной точностью, с применением методов интегрирования для жестких систем. Для упрощения вычислений левые части уравнений (1) умножались на некоторый масштабный множитель  $par=50.0$ .

### Бифуркации стационарных точек

Система (1) обладает тремя стационарными точками  $E_0=0$  и  $\pm E_{ст}$ , причем  $+E_{ст}$  и  $-E_{ст}$  совпадают и соответствуют стационарной генерации с интенсивностью  $I_{ст}=E_{ст}^2$  в силу симметрии системы относительно плоскости, в которой  $E=P=\bar{P}=0$ . Динамика системы определяется устойчивостью этих точек. Как уже указывалось ранее [7], классификация режимов ПМД проводится с точки зрения типа бифуркации Андронова - Хопфа, в результате которой образуются пульсации интенсивности. «Жесткость» или «мягкость» этой бифуркации обеспечивает образование двух принципиально различных решений. Показателем типа бифуркации является знак первой ляпуновской величины  $\lambda_0$  для стационарной точки. Если  $\lambda_0 < 0$ , то происходит «мягкая» или субкритическая бифуркация рождения предельного цикла и говорят о режиме «синусоидальной модуляции интенсивности», причем глубина модуляции увеличивается и переходит в пульсации по мере удаления от точки бифуркации. Особенность этой бифуркации в лазерных системах заключается в том, что при симметрии уравнений (1) образовавшееся решение несимметрично относительно плоскости, где  $E=0$ , и имеет «двойника» - точно такой же цикл, являющийся зеркальным отражением первого относительно  $E=0$ . Существование «двойника» никак не влияет на динамику системы, поскольку их бифуркации, например, бифуркации удвоения периода, в силу симметрии происходят синхронно, то есть при одном и том же значении параметра, за исключением бифуркации слияния квазиаттракторов удвоения [8], относящейся уже не к предельным циклам, а к существенно новому типу движения - хаосу. В результате этой бифуркации изображающая точка при движении по фазовой траектории хаотически перескакивает с одного квазиаттрактора на другой.

При  $\lambda_0 > 0$  наблюдается внезапный жесткий переход к предельному циклу (или суперкритическая бифуркация Андронова - Хопфа), который ограничивает в фазовом пространстве область притяжения стационарной точки. Этот предельный цикл имеет форму восьмерки, симметричной относительно  $E=0$ . Поскольку переход к периодическому движению осуществляется жестко, то вблизи стационара образуется тонкая область бистабильности двух режимов - стационарной и импульсной генерации.

Необходимость различать симметричный и несимметричный режимы возникает, когда оба решения сосуществуют при одних и тех же параметрах [9]. Заметим, простое сложение пространства фазовых переменных вдоль плоскости с  $E=0$  не приводит к совпадению режимов. Они различаются периодом колебаний, максимальной амплитудой импульсов, а также скважностью импульсов - промежутками времени между импульсами, когда амплитуда поля равна нулю. Наличие определенного «времени летаргии», которое характеризует замедление траектории вблизи нулевого стационара, как раз и определяет скважность импульсов для несимметричного решения.

Очевидно, что тип решения существенно зависит от собственных значений матрицы линеаризации стационарных точек, их степени притяжения. Рассмотрим периодические траектории, образующиеся в результате бифуркации Андронова - Хопфа из ненулевого стационара. В определенных условиях, и это зависит от собственных значений стационарных точек, движение изображающей точки по фазовой траектории замедляется в окрестности этих особых точек и даже, если притяжение стационарных точек достаточно велико, движение становится

спиралеобразным. Как результат этого, образуются импульсы ПМД с характерными осциллирующими хвостами, причем осцилляции могут возникать вследствие замедления движения по траектории вблизи как нулевой, так и ненулевой стационарной точки [9]. Осцилляции вблизи нулевого стационара наблюдались многими авторами, но до сих пор не удалось установить необходимые условия для собственных значений нулевого стационара, которые инициировали бы эти осцилляции. В предыдущей публикации [9] нами было установлено, что осцилляции в окрестности ненулевых стационаров определяют собственные значения этих стационаров, а именно, дополнительная пара комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательной действительной частью ( $-\rho \pm i\omega$ ). Более того, осцилляции на «хвосте» импульса имеют частоту, равную  $\omega$ . Так, в точке  $A_2 = -0.03$ ,  $d_2 = 0.0015$  собственные значения таковы:  $-250.36$ ,  $-0.0627 \pm i0.0694$ ,  $0.1196 \pm i5.079$ . Отметим, что максимальный отрицательный показатель (порядка  $-250$ ), можно не учитывать по аналогии с рассуждениями, приведенными в [4], так как он отражает сжатие фазового потока вдоль направления фазовой переменной  $P$  и означает быстрое реагирование поляризации на изменение поля в усиливающей среде лазера. Это означает, что собственный вектор, соответствующий поляризации  $P$  в усиливающей среде, коллинеарен с собственным вектором амплитуды поля  $E$ . В частности, после адиабатического исключения переменной  $P$  и при переходе к четырем уравнениям вместо пяти (1), этот ляпуновский показатель исчезает.

Мы не обнаружили какой бы то ни было связи особого поведения системы (1) с нулевым стационаром и его ляпуновскими показателями [9], на вероятность которой указано в [4]. Здесь, по-видимому, имеет место случай полной независимости стационарных точек друг от друга. Слабые изменения показателей нулевого стационара во всей исследуемой области характеризуют скорее его «нейтральность» по отношению к динамике. Поскольку в исследуемой области параметров существуют только симметричные решения типа «восьмерки», характерные тем, что они как бы «не замечают» присутствия нулевого седлового стационара, так как время пролета фазовой траектории области его притяжения мало, то ситуация, аналогичная [4], связанная с совместным действием всех неустойчивых стационаров на траекторию, здесь не реализуется. По-видимому, существенного влияния нулевого стационара и его собственных значений на нелинейную динамику лазера следует ожидать в случае несимметричных решений уравнений (1), образовавшихся в результате субкритической бифуркации Андронова - Хопфа.

Дальнейшие исследования показали, что одного присутствия дополнительной пары собственных значений с отрицательной действительной частью недостаточно для инициирования спиралеобразного движения изображающей точки по фазовой траектории в окрестности ненулевой стационарной точки. Приведем для сравнения результаты расчета для параметров  $A_1 = 3.725$ ,  $b_1 = 0.0024$ ,  $b_2 = 0.001$ ,  $d_1 = 4.0$ ,  $d_2 = 0.5$ . На плоскости активных параметров  $(a, A_2)$  существует некоторая клинообразная область (примерно в диапазоне параметров  $a = 5 \div 17$  и  $A_2 = -0.23 \div -2.6$ ), в пределах которой также существует дополнительная пара собственных значений, однако импульсы с осцилляциями там не наблюдаются. Например, в точке  $A_2 = -2$ ,  $a = 10$  собственные значения таковы:  $\lambda_1 = -252.8$ ,  $\rho_1 \pm i\omega_1 = 0.47 \pm i5.41$ ,  $-\rho_2 \pm i\omega_2 = -1.62 \pm i1.53$ . Если сравнить эти случаи, то мы увидим, что осцилляции появляются только при  $\rho_1 > \rho_2$ . Фактически, это то же условие теоремы Шильникова, которое устанавливает присутствие особой динамики, если отталкивание сильнее притяжения к стационарной точке.

Рассмотрим сечения по параметру  $d_2$  при  $A_2 = -0.03$  в области мультистабильности (рис.1, а). Отношение  $\rho_2/\rho_1$  показывает, что условие для гетероклинической петли удовлетворяется для значений  $d_2 < 0.004$ , при которых хаотические режимы могут быть связаны с гетероклинической бифуркацией седло-фокусной стационарной точки. Рост параметра  $d_2$  сопровождается незначительным увеличением частоты осцилляций  $\omega_2$  к середине области

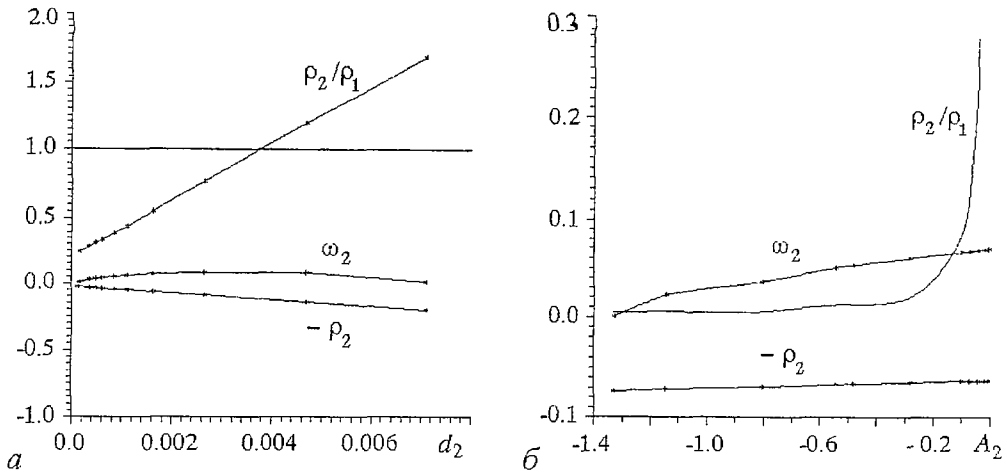


Рис. 1. Зависимость собственных значений стационарной точки от параметра: а -  $d_2$  при фиксированном  $A_2 = -0.03$ ; б -  $A_2$  при фиксированном  $d_2 = 0.015$

изменения параметра, затем происходит спад и обращение в ноль частоты на границе области существования данной пары собственных значений. Причем, если отношение  $\rho_2/\rho_1$  мало, то уменьшение  $\omega_2$  до нуля сопровождается подавлением осцилляций вокруг стационарной точки, но при этом расширение фазового потока вблизи стационара сохраняется. Если  $\rho_2/\rho_1 > 1$ , то поток сжимается в поперечном направлении и длительное спиралеобразное движение вокруг стационара становится невозможным - предельные циклы с большим числом пиков на «хвосте» исчезают. Как только исчезает пара комплексных собственных значений с отрицательной действительной частью (бифуркация кратных собственных значений для  $d_2 = 0.0071$ ), исчезают предельные циклы с дополнительными к основному пичками. Аналогичное сечение, только по параметру  $A_2$  при фиксированном  $d_2 = 0.0015$  (рис.1,б), демонстрирует увеличение отношения  $\rho_2/\rho_1$  и мнимой части комплексной пары, определяющей частоту осцилляций, вблизи бифуркации Андронова - Хопфа при почти неизменном значении  $\rho_2$ . И действительно, предельные циклы с максимальным числом пиков  $n$  и максимальной частотой осцилляций при данном  $d_2$  существуют вблизи бифуркации к устойчивой стационарной генерации с постоянной интенсивностью. При  $A_2 = -0.0161$  обе комплексные пары становятся отрицательными, и отношение  $\rho_2/\rho_1$  стремится к бесконечности вблизи этой точки. Условие Шильникова, а следовательно, и вероятность возникновения хаотических режимов, связанных с гетероклинической бифуркацией, тем не менее выполняется, и отношение  $\rho_2/\rho_1$  не превышает критического значения.

Таким образом, можно заключить, что комплексная пара собственных значений с отрицательной действительной частью влияет на стягивание фазовой траектории в окрестность ненулевого стационара и на спиралеобразное движение вокруг него, связанное с мнимой частью  $\omega_2$ , если при этом существует эффективный механизм выталкивания траектории из этой области, который осуществляется положительными собственными значениями.

### Асимптотические свойства периодических решений вблизи гетероклинической бифуркации

В ряде обзоров [10,11] подробно исследовано поведение различных физико-химических систем в окрестности гомоклинической бифуркации к различным неустойчивым многообразиям. Главная цель исследований гомоклинических

траекторий и их бифуркаций - связать между собой локальную неустойчивость этих многообразий с общим глобальным поведением динамической системы. Стандартный метод анализа поведения подобных систем, обладающих гомоклинической петлей, сводится к построению двумерного отображения в окрестности особого множества и исследованию неподвижных точек этого отображения в зависимости от параметров и ляпуновских показателей устойчивости седлового многообразия, в случае стационарной точки - ее собственных значений, в случае предельного цикла - его мультипликаторов. Такое отображение обладает теми же свойствами устойчивости и пространственной топологии, что и исходное, полученное из интегрирования исходных уравнений модели. Результаты анализа могут быть использованы для широкого класса систем. Рассмотрим здесь некоторые асимптотические свойства периодических решений при гетероклинической бифуркации к седло-фокусной стационарной точке.

Как следует из теоремы Шильникова, гомоклиническая петля называется опасной, если выполняется условие  $|\rho/\lambda| < 1$ , где  $\lambda > 0$ ,  $-\rho \pm i\omega$ , тогда вблизи этой петли рождается бесконечное число периодических траекторий и при некотором критическом значении управляющего параметра возможно сложное хаотическое поведение. Если  $|\rho/\lambda| > 1$ , то рождается один-единственный предельный цикл, период которого стремится к бесконечности вблизи гомоклинической петли.

Случай гомоклинической бифуркации к седловой стационарной точке, а именно к нулевому стационару, был исследован в [12] для параметров  $\text{CO}_2$  лазера с  $\text{CO}_2$  поглощающей ячейкой, и была построена петля сепаратрисы седла, вблизи которой период предельного цикла, кстати единственного, стремится к бесконечности. Петля сепаратрисы седла является границей, разделяющей области устойчивости предельного цикла и основного состояния равновесия.

В области мультистабильности в окрестности бифуркации Андронова-Хопфа выполняется условие  $\rho_2/\rho_1 < 1$ . В соответствии с теоремой Шильникова рождается счетное множество периодических траекторий, период которых при приближении к гетероклинической бифуркации седло-фокусной стационарной точки также стремится к бесконечности и подчиняется закону

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (T_{i+1} - T_i) = 2\pi/\omega_2, \quad (2)$$

где  $T_i$  - период предельного цикла с числом пиков, равным  $i$ ;  $\omega_2$  - мнимая часть комплексно-сопряженной пары собственных значений с отрицательной действительной частью. Значение  $\omega_2$  соответствует параметрам, при которых происходит гетероклиническая бифуркация.

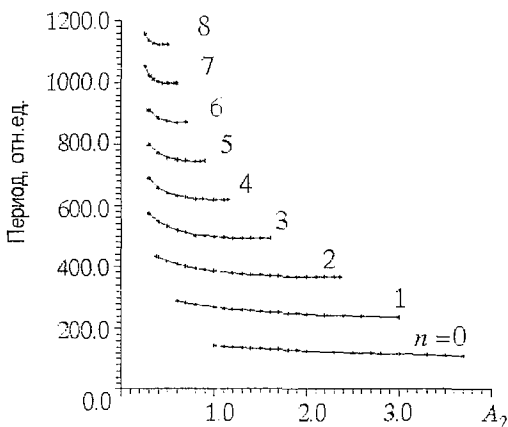


Рис. 2. Диаграмма бифуркаций периодических решений в зависимости от параметра  $A_2$  при  $d_2 = 0.0006$

гетероклиническая бифуркация.

На рис. 2 представлена диаграмма зависимости периода устойчивых предельных циклов от параметра  $A_2$  при фиксированном  $d_2 = 0.0006$ . Значение  $d_2$  выбиралось в области, где существуют предельные циклы с большим числом дополнительных пиков  $n$  и где выполняется условие  $\rho_2/\rho_1 < 1$ . На диаграмме показаны предельные циклы до  $n=8$ . Предельный цикл с  $n=0$  называется основным. Каждый предельный цикл обладает определенной зоной устойчивости, отмеченной на диаграмме почти горизонтальной линией, которая в условиях мультистабильности перекрывается с другими [9]. При увеличении числа пиков  $n$  на единицу происходит



дискретное увеличение периода предельного цикла на величину, примерно равную периоду основного цикла с  $n=0$ , которая определяется соотношением (2). Здесь возможна ситуация гетероклинической бифуркации к седловому предельному циклу, описанная в [3,11]. Для такого типа бифуркации характерны определенные асимптотические закономерности, в частности, период любого  $n$ -ого цикла равен периоду основного, умноженному на  $n$ . В нашем случае с некоторой точностью можно считать, что период  $n$ -ого цикла является кратным периоду основного. Однако основной предельный цикл в интересующей нас области параметров вблизи линии бифуркации Андронова - Хопфа не существует и говорить о бифуркации к этому циклу нельзя. Поскольку с ростом  $n$  области устойчивости предельных циклов сжимаются, мы ограничились анализом траекторий с  $n < 8$ , хотя при этих значениях параметров существуют циклы с  $n \approx 60$ . Следует отметить, что соотношение (2) получено в случае симметричной периодической орбиты, поэтому в (2) добавлен множитель 2.

Ширина крыльев или протяженность зоны устойчивости каждого предельного цикла также связана с собственными значениями ненулевых стационаров. Полученное в теории гомоклинических систем соотношение имеет вид [10]

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (A_2^{i+1}/A_2^i) = \exp(-\pi\rho_2/\omega_2), \quad (3)$$

где  $A_2^{i+1}$  - минимальное значение параметра, при котором предельный цикл с числом пиков  $i+1$  является устойчивым,  $A_2^i$  - максимальное значение параметра для  $i$ -ого предельного цикла,  $(-\rho_2 \pm i\omega_2)$  - собственные значения в точке аккумуляции предельных циклов. Выражение (2) получено для случая симметрично расположенных крыльев. В точке  $A_2 = -0.03$  величина под экспонентой примерно равна  $-2.9$ , но крылья кривой рис.2 уменьшаются в размере достаточно медленно. Объяснить такую разницу экспериментальных данных и теории можно, если учесть, что диаграмма на рис.2 несимметрична по параметру  $A_2$  и имеет очевидный наклон к  $A_2 = 0$ . Заметим, что граничные точки на правой стороне кривой спадают медленнее с ростом  $n$  и периода, чем на левой стороне. Примерная асимптотика, построенная к этим двум сторонам, показывает, что если справа период в зависимости от параметра  $A_2$  уменьшается, как  $\exp(-0.6)$ , то слева - как  $\exp(-2.6)$ , что близко к расчетному значению.

Удобнее рассматривать не отношение максимумов и минимумов диаграммы рис. 2, а отношение ширин зон устойчивости. Мы получили следующую зависимость ширины зоны устойчивости предельного цикла от числа пиков  $n$  (рис.3, кривая 1). Аппроксимация экспериментальных точек кривой 1 экспонентой дает

$$\Delta A_2^n = \Delta A_2^0 \exp(-0.326n), \quad (4)$$

где  $\Delta A_2^0 \approx 3$  - некоторая константа или ширина зоны устойчивости основного предельного цикла,  $\Delta A_2^n$  - ширина зоны  $n$ -ого цикла. Кривая 2 на рис. 3 показывает также степень перекрытия зон устойчивости соседних предельных циклов по параметру  $A_2$ . Как видно, асимптотика кривой 2 такая же, как и кривой 1. Протяженность зоны устойчивости  $n$ -ого предельного цикла и зоны бистабильности с  $n+1$  предельным циклом подчиняются примерно одному и тому же асимптотическому закону (4).

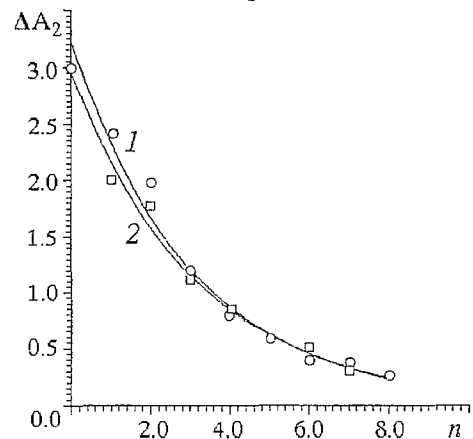


Рис. 3. Изменение ширины зоны стабильности (кривая 1) и степени перекрытия зон (кривая 2) для предельных циклов с  $n < 8$

Асимптотические закономерности (2), (3) получены для случая  $\rho_2/\rho_1 < 1$ . Мы проверили их для  $d_2=0.005$  ( $\rho_2/\rho_1 > 1$ ) и убедились, что соотношение (2) для периода нарушается, границы зон устойчивости спадают значительно быстрее: слева - как  $\exp(-100)$  и справа - как  $\exp(-4.75)$ . Изменяется также скорость, с которой уменьшается ширина зоны устойчивости - как  $\exp(-0.8)$ .

Остается вопрос о бифуркациях предельных циклов на краях зоны устойчивости. Как было показано в [11], результаты бифуркации для  $1/2 < \rho_2/\rho_1 < 1$  и  $\rho_2/\rho_1 < 1/2$  различны. Если  $\rho_2/\rho_1 < 1/2$ , то периодические траектории на границах зоны устойчивости претерпевают бифуркацию рождения тора - мультипликаторы предельного цикла пересекают единичную окружность в комплексной плоскости, однако рождающийся тор неустойчив. Если можно говорить о его относительной устойчивости, то тор «более устойчив справа» при бифуркации по параметру на кривой рис.2, чем слева. Это означает, что фазовая траектория проводит относительно больше времени в окрестности неустойчивого тора, если бифуркация происходит при большем значении параметра  $|A_2|$ , прежде чем соскочит на устойчивый предельный цикл. Объяснить это можно плотностью периодических траекторий, которая повышается с ростом параметра  $|A_2|$ .

Изменение соотношения  $1/2 < \rho_2/\rho_1 < 1$  приводит к изменению характера бифуркации периодических траекторий. При значениях параметра  $A_2 > 0.0012$  на левой границе зон стабильности наблюдается бифуркация потери симметрии для симметричного предельного цикла и последующие бифуркации удвоения периода [7]. Как мы увидим дальше, характер бифуркации связан с гетероклинической петлей к седло-фокусной стационарной точке и будет определять структуру хаотического аттрактора.

### **Гетероклиническая бифуркация и глобальное поведение физической системы**

В результате последовательных бифуркаций периодических орбит происходит переход к хаотическим режимам генерации лазера. Структура и свойства хаотического аттрактора могут быть определены с помощью различных сечений аттрактора плоскостью. В данном разделе мы покажем, как изменяется структура аттрактора в зависимости от соотношения  $\rho_2/\rho_1$  и от параметров системы (1).

Принципиальное значение при исследовании свойств потока имеет выбор секущей плоскости. В большинстве случаев в лазерных системах наблюдается сильное сжатие фазового потока в поперечном по отношению к направлению поля сечении. Если выбрать секущую плоскость перпендикулярно направлению, вдоль которого поток расширяется, получается сечение аттрактора, в котором точки располагаются фактически на одной прямой. На основе этого сечения строится отображение последования по переменной, в котором каждая последующая точка зависит от предыдущей. Методы исследования такого отображения хорошо известны [10]. Однако, как будет показано ниже, при приближении к гетероклинической бифуркации, при которой траектория совершает бесконечное число витков вокруг седлового стационара, поток расширяется и сечение аттрактора перестает быть одномерным. При этом дополнительная степень свободы несомненно связана с усилением связи аттрактора со стационарной точкой.

Рассмотрим хаотический аттрактор в точке  $A_2 = -0.017$  и  $d_2 = 0.005$ . Здесь отношение  $\rho_2/\rho_1 > 1$  и предельные циклы теряют устойчивость вследствие бифуркации потери симметрии. Для симметричной фазовой траектории бифуркация потери симметрии является первой бифуркацией, в результате которой образуются два асимметричных предельных цикла, которые затем при

изменении параметра удваивают период. Наличие других устойчивых предельных циклов приводит к сильному перемешиванию различных режимов. Временная реализация и фазовый портрет аттрактора не дает достаточной информации о его свойствах и структуре - необходимо анализировать достаточно длинные реализации, которые приводят к слиянию линий на фазовом портрете. Поэтому возникает проблема извлечения полезной информации, которая может быть решена с помощью эффективных сечений.

Для получения двумерного сечения аттрактора задавалась некоторая плоскость в пространстве фазовых переменных. Следуя методике, описанной в [3], данная плоскость должна быть расположена в области, связанной со специфической динамикой фазовой траектории. Логично считать, что такая область пространства находится вблизи ненулевого стационара, где траектория совершает спиралеобразное движение. Уравнение секущей плоскости было таким:

$$3.5\bar{P} + 0.3\bar{D} + 0.45\bar{D} = 1.$$

В данном сечении любой предельный цикл с числом пиков  $n$  отражается набором  $(n+1)$  точек. Отметим здесь, что данное уравнение секущей не является единственным, и выбранный нами критерий - число точек в сечении для  $n$ -ого цикла должно быть равно  $n+1$  - позволяет найти множество других комбинаций уравнения секущей плоскости. Такой подход при выборе секущей позволяет получить достаточную информацию о структуре и свойствах аттрактора, в то время как попытки исследовать поперечные сечения в случае, когда любой цикл пересекает секущую плоскость лишь однажды, не увенчались успехом, поскольку не учитывали динамику вблизи стационара. Равномерно распределенные точки такого сечения имеют структуру типа «облака», без каких-либо регулярных свойств.

В случае  $\rho_2/\rho_1 > 1$  сечение хаотического аттрактора представляет собой некоторое множество точек, вытянутое вдоль прямой линии (рис. 4, а). Такой вид сечения характерен для потоков с сильным поперечным сжатием [8], в особенности для лазерных систем [3]. Поперечное сжатие в  $(E, P)$ -плоскости связано с высокой скоростью релаксации поляризации усиливающей среды - «поляризация следит за полем». Одномерность сечения позволяет построить отображение последования по переменной и исследовать его структуру. На рис. 5, а представлено отображение последования по переменной  $E$ . Видно, что отображение обладает определенной ветвистой структурой с числом ветвей примерно до десяти. Хотя расположение ветвей на рис. 5, а сильно отличается от полученного ранее подобного отображения последования для двух-трехуровневой модели ЛНП в приближении бесконечно быстро релаксирующего поглотителя [4], интересно отметить, что также как в [3,4], ветви в отображении - параболического типа, их столько, сколько предельных циклов участвуют в

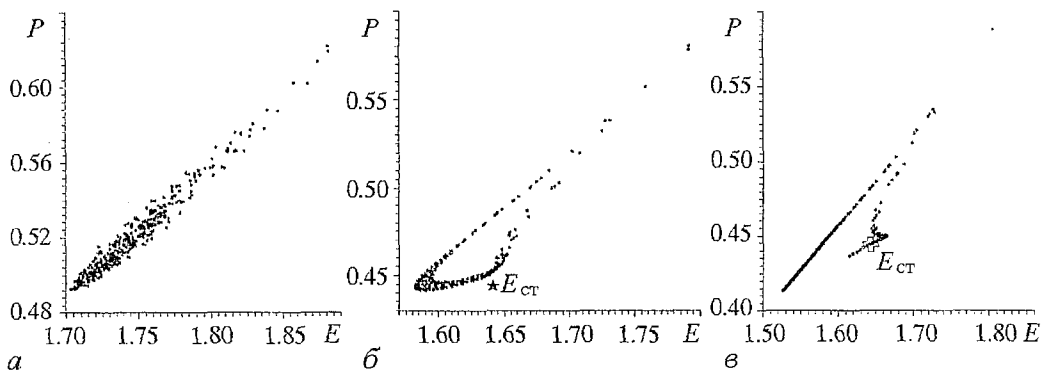


Рис. 4. Сечение хаотического аттрактора плоскостью для различных значений параметров: а -  $A_2 = -0.0169$ ,  $d_2 = 0.005$ ; б -  $A_2 = -0.017$ ,  $d_2 = 0.0015$ ; в -  $A_2 = -0.0166$ ,  $d_2 = 0.0006$

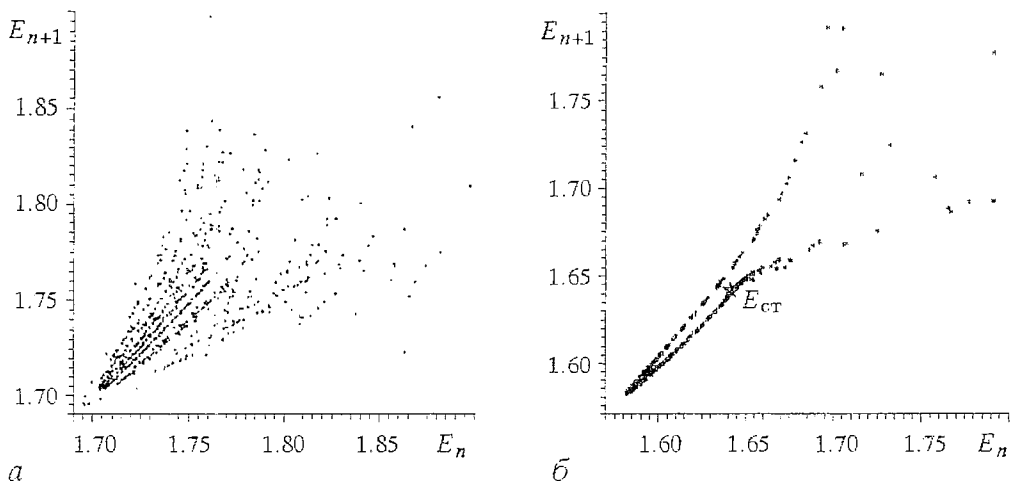


Рис. 5. Одномерное отображение последования по переменной  $E$  для параметров:  $a$  -  $A_2 = -0.0169$ ,  $d_2 = 0.005$ ;  $b$  -  $A_2 = -0.017$ ,  $d_2 = 0.0015$

образовании хаотического аттрактора при данных параметрах, и они асимптотически сближаются с ростом  $n$  со скоростью, равной 0.882 [4]. Гомоклинической бифуркации к седловому предельному циклу с бесконечным числом пичков соответствовало в [4] отображение последования с бесконечным числом ветвей.

Действительно, исследования показали, что в образовании хаотического аттрактора участвуют периодические траектории с числом пичков  $n \leq 9$  - устойчивых траекторий с большим  $n$  при данных  $(A_2, d_2)$ , по-видимому, не существует. Изменение параметра  $A_2$  от значения  $-0.027$  до  $-0.0166$  внутри хаотической области показывает, что чем ближе к точке бифуркации Андронова - Хопфа, тем больше ветвей в отображении последования, которые увеличиваются с  $k=4$  при  $A_2 = -0.027$  до  $k=10$  при  $A_2 = -0.0169$ . Переходы фазовой траектории внутри аттрактора происходят плавно от цикла с меньшим числом пичков  $n$  к циклу с большим  $n$ . После достижения максимально возможного  $n$  ( $n > 36$  при  $A_2 = -0.0166$ ) процесс идет в обратном порядке. Таким образом, предельные циклы с  $n=0$  и  $n=9$  являются границами аттрактора, обеспечивающими возврат траектории в ядро, возникшее при слиянии нескольких аттракторов, образованных каскадом бифуркаций удвоения периода.

Мы исследовали также асимптотическую скорость сближения ветвей в отображении последования (рис. 5,  $a$ ). Каждая следующая ветвь отображения получается поворотом предыдущей на некоторый угол, определяемый коэффициентом, равным 0.8833, что соответствует данным из [4]. По совпадению характерных признаков можно предположить гомоклиническую бифуркацию к седловому циклу с бесконечным числом пичков. Фазовый портрет хаотического аттрактора, кроме того, имеет в центре «дыру», как в [4], а стационар находится далеко за пределами данных рис. 5,  $a$  ( $E_{ст} \approx 1.6$ ). Однако нам не удалось выделить предельный цикл с  $n \rightarrow \infty$  и определить его мультипликаторы. Если предположить, что такой предельный цикл имеет число пичков  $n \approx 40$ , то учитывая определенную ранее как  $\exp(-32)$  скорость сжатия зон устойчивости с ростом  $n$ , представляется технически невозможным обнаружить цикл, который будет устойчивым в диапазоне параметра  $\Delta A_2 \approx 10^{-14}$ .

При соотношении  $\rho_2/\rho_1 < 1$  значительно изменяется вид поперечного сечения аттрактора (см. рис. 4,  $a$ ,  $b$ ). Появляется некоторая дополнительная степень свободы, несомненно, связанная с присутствием ненулевого стационара. Чем меньше  $\rho_2/\rho_1$ , тем ближе фазовая траектория подходит к ненулевому стационару. К этому нужно добавить, что  $\rho_2/\rho_1 \leq 1/2$  означает малую вероятность бифуркаций удвоения периода, а, следовательно, хаотический аттрактор не является

результатом слияния аттракторов удвоения предельных циклов, как на рис. 4, а. Как следствие, исчезают ветви в отображении последования по переменной (рис. 5, б).

Меняется также характер движения фазовой траектории при изменении  $d_2$  с 0.0015 до 0.0006 (отношение  $\rho_2/\rho_1$  меняется с 1/2 до 1/3). По рис. 4, б можно увидеть, что движение фазовой траектории вблизи стационара является равномерным, в то время как на рис. 4, в в сечении появляется разрыв, вызванный влипанием траектории в стационар, и почти полное подавление осцилляций (разрыв в сечении), когда траектория лишь слабо колеблется вблизи  $E_{ст}$ . Ламинарный участок в сечении (рис. 4, в) отражает постепенное нарастание колебаний и уход от стационарной точки. Отметим, что число осцилляций вокруг стационара достигает примерно трехсот.

### Заключение

Анализ динамики лазерной системы выявил характерные особенности поведения лазерной системы в случае гетероклинической бифуркации к седло-фокусной стационарной точке, оказывающей решающее воздействие на формирование хаотических аттракторов. Существенно, что представленные результаты получены в полуклассической модели лазера с насыщающимся поглотителем с учетом поляризаций обеих сред и вполне согласуются с результатами теории гомоклинических систем, полученными ранее. Как было показано, приближение к гетероклинической бифуркации существенно изменяет структуру хаотического аттрактора. Изменения собственных значений ненулевых стационаров приводят к коренной перестройке механизма хаотизации колебаний - от каскада удвоений периода, с характерной многоветвевой структурой одномерного отображения к гетероклинической бифуркации, при которой поведение системы целиком определяет то неустойчивое многообразие, к которому возникает бифуркация. Отметим, что несмотря на многомерность системы исследуемых уравнений, которая не позволяет непосредственно вычислить гетероклиническую траекторию, применение результатов теоретических исследований подобных траекторий дает достаточно информации о динамике многомерной системы, независимо от её порядка, и позволяет выявить ключевые механизмы и параметры, ответственные за сложную хаотическую динамику лазера.

*Работа выполнена при персональной финансовой поддержке одного из авторов (С.А.Татарковой) Оптическим Обществом Америки, грантом от Фонда Сороса.*

### Библиографический список

1. Argoul F., Arneodo A., Richetti P. Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov - Zhabotinskii reaction // Phys.Rev.A. 1987. Vol.120, № 6. P.269.
2. Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors // Appl.Math.Sci. No.41, New York, Springer-Verlag, 1982.
3. Papoff F., Fioretti A., Arimondo E. Return maps for intensity and time in a homoclinic chaos model applied to a laser with a saturable absorber // Phys.Rev.A. 1991. Vol.44. P.4639.
4. Lefranc M., Hennequin D., Dangoisse D. Homoclinic chaos in a laser containing a saturable absorber // J.Opt.Soc.Am.B. 1991.Vol.8. P.239.
5. Antoranz J.C., Rubio M.A. Hyperchaos in a simple model for a laser with a saturable absorber // J.Opt.Soc.Am.B. 1988. Vol.5. P.1070.
6. Lugiato L.A., Mandel P., Dembinski S.T and Kossakowski A. Semiclassical and

quantum theories of bistability in lasers containing saturable absorbers // Phys.Rev.A. 1978. Vol.18. P.238.

7. *Tatarkova S.A., Tuchin V.V.* Chaotic dynamics in a passive Q-switching laser // Proc.SPIE, Vol.2037, Chaos in Optics. 1993.

8. *Tatarkova S.A., Tuchin V.V.* One-dimensional mapping analysis of chaotic attractors, to be published.

9. *Tatarkova S.A., Tuchin V.V.* Multistability and chaos in laser with a saturable absorber // Laser Physics. 1992. Vol.2, №4. P. 482.

10. *Glendinning P., Sparrow C.* Local and Global Behavior near Homoclinic Orbits // J.Stat.Phys. 1984. Vol.35, № 5/6. P. 645.

11. *Gaspard P., Wang X.J.* Homoclinic Orbits and Mixed-Mode Oscillations in Far-from-Equilibrium Systems // J.Stat.Phys. 1987. Vol.48, № 1/2. P.151.

12. *Анищенко В.С., Сафонова М.А., Татаркова С.А., Тучин В.В.* Динамика CO<sub>2</sub>-лазера с нелинейным поглощением. Численное моделирование // Оптика и спектроскопия. 1991. Т.70, вып. 5. С. 1092.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 1.09.95  
после переработки 30.11.95*

## **BIFURCATION MECHANISMS, PROPERTIES AND STRUCTURE OF THE CHAOTIC ATTRACTORS IN THE LASER MODEL WITH SATURABLE ABSORBER**

*S.A. Tatarkova, V.V.Tuchin*

We studied the chaotic bifurcation mechanisms in the laser model with a saturable absorber. It has been shown that nonzero steady-states eigenvalues influence on the specific dynamics in the multistability conditions, we investigated the asymptotic properties of the periodic regimes. We found that the chaotic regimes arise as a sequence of the period-doubling bifurcations, intermittence and heteroclinic bifurcation to the saddle-focus steady-state.



*Татаркова Светлана Алексеевна* - кандидат физико-математических наук (1992), доцент кафедры оптики СГУ. Круг научных интересов включает лазерную физику, нелинейную и хаотическую динамику лазерных систем, влияние шумов. Автор 15 статей.



## DYNAMICAL INSTABILITIES IN A CO<sub>2</sub> LASER WITH AN EXTERNALLY MODULATED OPTICAL FEEDBACK

*E. M. Rabinovich, J. M. Kowalski, C. L. Littler,  
A.P. Bystrik, J. Prasad, B. J West*

CO<sub>2</sub> lasers are very sensitive to optical feedback and can be driven into a large variety of dynamical states by an external modulation of the feedback parameters. We report on the experimental results concerning instabilities of CO<sub>2</sub> lasers induced by either an additional passive resonator of periodically varying geometrical length or an refractive index modulation in the external cavity by an electro-optical modulator. Experimental results show the presence of stable periodic orbits of different periods, bistability of periodic orbits and chaotic attractors with complex transition scenarios.

### 1. Introduction and background

The transition from regular to irregular behavior in nonlinear dynamical systems has been a topic of both experimental and theoretical interest for over two decades. In the context of laser systems one is interested in the practical problem of the control of the onset of chaos and in decrease of dynamical noises in the laser output intensity. To study the chaos onset mechanisms a number of laser configurations in which chaos is induced in the output have been studied, e.g., a CO<sub>2</sub> laser with internal harmonic modulation of the loss parameter [1-6], CO<sub>2</sub> laser with harmonic modulation of the pumping current [7,8], a single CO<sub>2</sub> lasers with delayed opto-electronic feedback [9-11], and two or more optically coupled lasers [8,12,13].

High-power CO<sub>2</sub> lasers are very sensitive to radiation feedback. Unintentional reflections from the target could be particularly damaging and can destabilize the source, i.e., drive it into a chaotic regime of operation. Therefore it is important to understand how optical feedback induces «instabilities». In this work the extreme sensitivity of CO<sub>2</sub> lasers to optical feedback is employed to induce dynamical instabilities in a CO<sub>2</sub> laser. Modulation of the optical feedback is provided by either geometrical length modulation of an additional passive resonant cavity or by refractive index modulation (and, of course, by optical length modulation) provided by electro-optical modulator placed in an external cavity\*.

\* Впервые режим перехода от регулярных колебаний выходной мощности излучения CO<sub>2</sub> лазера к хаотическому через последовательность удвоения периода модуляции добротности в пассивной части трехзеркального резонатора в диапазоне частот релаксационных колебаний был исследован в работе Г.Г. Акчурина «Экспериментальное исследование перехода в хаос в CO<sub>2</sub> лазере при модуляции добротности и в He-Ne лазере (0.63, 1.15, 3.39 мкм) в автономном режиме». Тезисы докладов XII Международной конференции по когерентной и нелинейной оптике. Москва, 1985. С. 304-305 (примечание Редактора вступка).

Both of the above methods provide the opportunity to investigate the instabilities induced by external optical feedback and complete the picture of dynamical behavior of CO<sub>2</sub> lasers with modulating parameters.

## 2. Experimental procedure

The scheme of the experimental setup is shown in Fig.1. In this scheme an axial flowing gas CO<sub>2</sub> laser operating at a wavelength of  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$  was used. This laser has the resonant cavity 2.5 m long, the diameter of the discharge tube (2) is 6 mm, and the pressure of the conventional gas mixture varies from 15 to 20 mm Hg. An additional mirror (5) provides the radiation feedback into the active region, and together with the laser mirror (3) forms an external passive resonator. Mirror (5) is mounted on a piezoelectric ceramic drive (6) allowing static tuning and/or periodic modulation of the external resonator length.

The length of the external passive resonator does not exceed 30 cm. The laser intensity is measured by a HgCdTe detector (7) monitoring part of the radiation reflected from the diffraction grating (1). The intensity signal from the detector and its time-delayed copy are fed into an oscilloscope (10) operating in the  $x$ - $y$  mode. The delay line (8) has a constant delay of 2.5  $\mu\text{s}$ . This simple scheme allows real time observations of the two-dimensional projections of the system trajectories in the space of delayed signals. A spectrum analyzer (11) of bandwidth 20 Hz - 40 MHz simultaneously displays the power spectra. The electronics used allows one to «freeze» at any instant the phase portrait and power spectra, and digitize the signal using a digitizer (9) with variable sampling frequencies and store the data.

In the first series of experiments, discussed in Section 3.A, the system was modulated by placing an electro-optical modulator (EOM) with a quarter wave voltage of 2.2 kV in the external resonator. The EOM was a Cd-Te crystal having an active length of 48 mm, and an aperture diameter of 3 mm. The voltage applied to the EOM had a DC component of 1.5 kV and the amplitude and frequency of the modulated signal varied within 100-900 V and 50-85 kHz, respectively. In the second series of experiments, discussed in Section 3.B, the intensity and the phase of the feedback radiation were modulated by the induced oscillations of the feedback providing mirror (5) mounted on a piezoelectric drive. The driving frequencies varied from 30 kHz to 60 kHz. The frequency range of these drives is centered on the relaxation frequencies of the considered laser system. The largest amplitude of the external mirror oscillations was of the order of 1  $\mu\text{m}$  for the lowest driving frequencies and estimated as not exceeding 0.5  $\mu\text{m}$  for the highest driving fre-

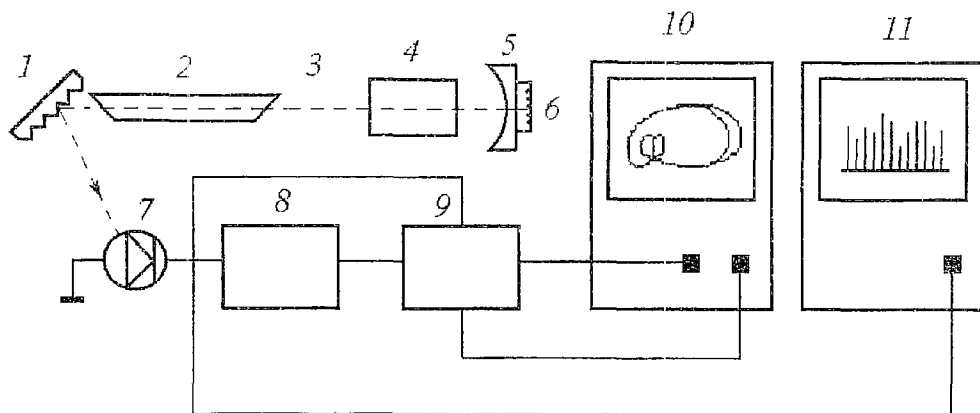


Fig. 1. Experimental setup for obtaining chaos in a CO<sub>2</sub> laser: 1 - diffraction grating; 2 - CO<sub>2</sub> laser tube; 3 - output mirror; 4 - electro-optical modulator (EOM); 5 - additional mirror; 6 - piezo-ceramic drive; 7 - liquid nitrogen cooled HgCdTe detector; 8 - delay line; 9 - digitizer; 10 - oscilloscope; 11 - spectrum analyzer



quencies used. In both series of experiments the external mirror (5) had a low reflectivity on the order of several percent. In both series of experiments the amount of optical feedback radiation was measured to be less than 10%.

### 3. Experimental results

A. *An EOM in the external cavity.* The results presented in Fig. 2 were obtained

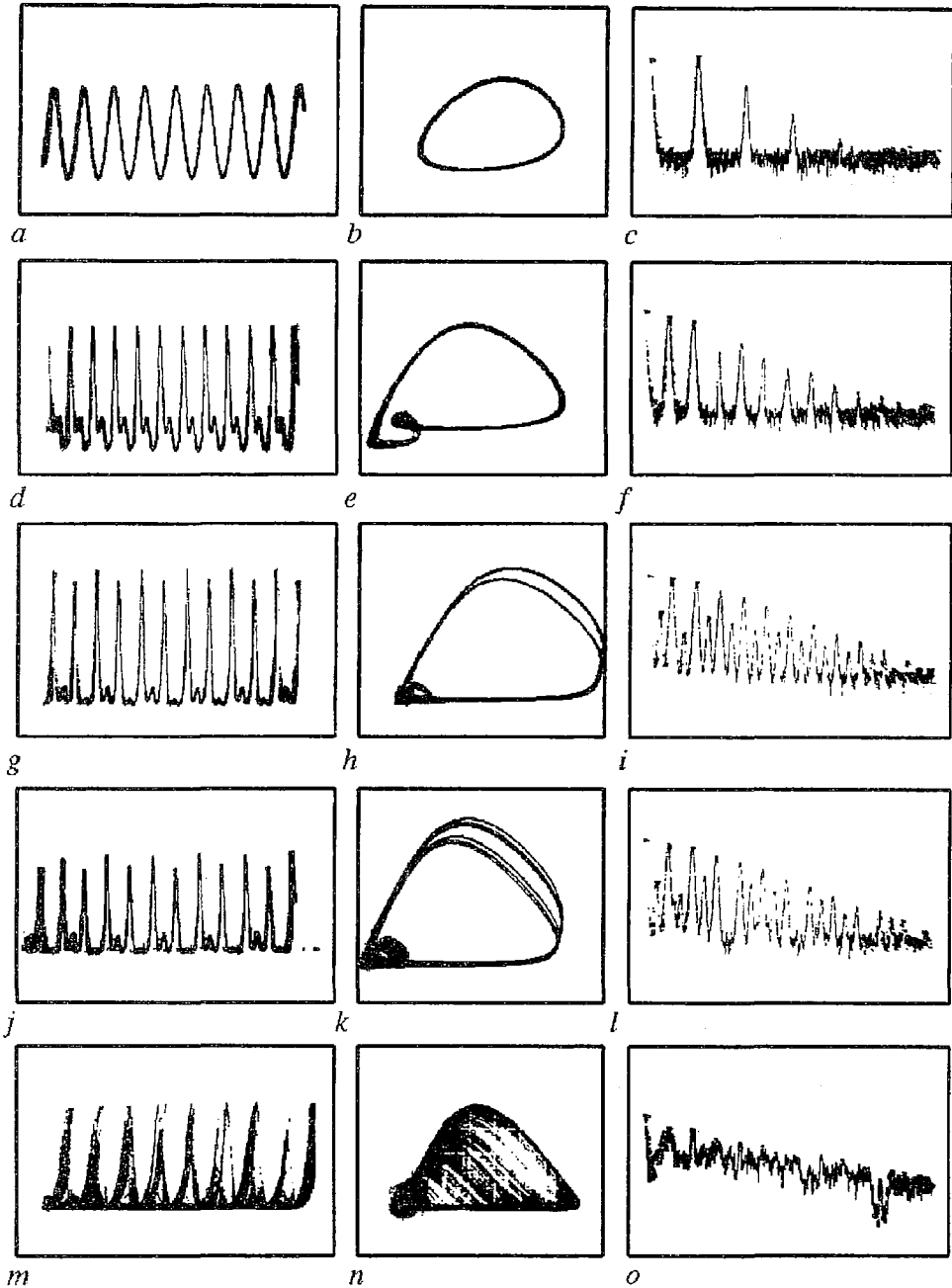


Fig. 2. A representative sequence of laser states for a CO<sub>2</sub> laser obtained by varying the static part of the loss coefficient while all other laser parameters were unchanged. Left column: time courses of the intensity signal; middle column: projection of the phase trajectories onto  $(I(t), I(t+\tau))$  plane in the space of delayed signals; right column: the frequency spectra

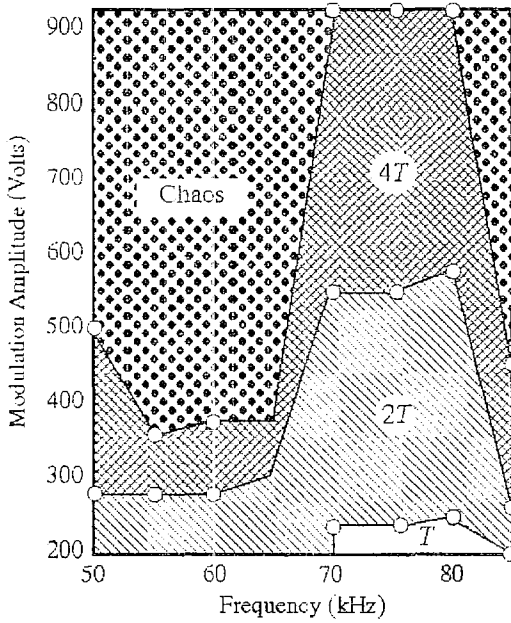


Fig. 3. An exemplary approximate state diagram in the (driving frequency, modulation amplitude) parameter space for a CO<sub>2</sub> laser with a driven electro-optical modulator placed in the external resonator and with a fixed static part of the intensity loss coefficient

by varying the static part of the loss coefficient while all other laser parameters remained unchanged. The static part of the loss coefficient was varied by changing the angle of the output coupler of the laser. In the right column of Fig. 2 the frequency spectra are displayed, the middle column shows the respective phase portraits (Intensity( $t$ ) vs Intensity( $t+\tau$ )) and finally the left column contains the corresponding time series. These spectra were recorded at a constant frequency of 83 kHz and a modulation amplitude of 150 V. For relatively low levels of losses the laser intensity follows the driving signal with a pronounced second and third harmonic present (Fig. 2, c). As the losses are increased, the laser output becomes more and more structured and period 2 oscillations are observed as shown in Figs 2, d, e, f. Subsequently, period 4 is obtained for increasing losses as shown in Figs 2, g, h, i. Similar results were obtained for period 8 Figs 2, j, k, l. Finally the frequency spectrum of the laser output changes into a broad spectrum with a rise in the floor level. This is a definitive indication that the system is driven into chaos, as shown in Figs 2, m, n, o. The chaotic attractor (Fig. 2, n) has a characteristic shape

typical for chaotic states obtained at other driving frequencies. The bifurcation diagram presented in Fig. 3 was obtained by varying the amplitude of ac voltage driving the EOM at a given frequency. The sequence of period doubling bifurcation obtained changing modulated losses by means of the EOM was identical to that obtained by varying the static part of the loss coefficient as described in the paragraph above. In this case modulation amplitude was varied while keeping all other parameters of the laser constant. The results obtained by this method are presented in Fig. 3 in the form of a complete bifurcation diagram. The bifurcation diagram clearly indicates that there is a broad range of frequencies in which the laser system could be driven into instabilities and chaos.

The coexistence of two stable periodic orbits is shown in Fig. 4. Transitions between two orbits of different periods are shown in Figs 4, a, b. The corresponding frequency spectrum (Fig. 4, b) contains fundamental frequencies of both orbits. Similar bi-

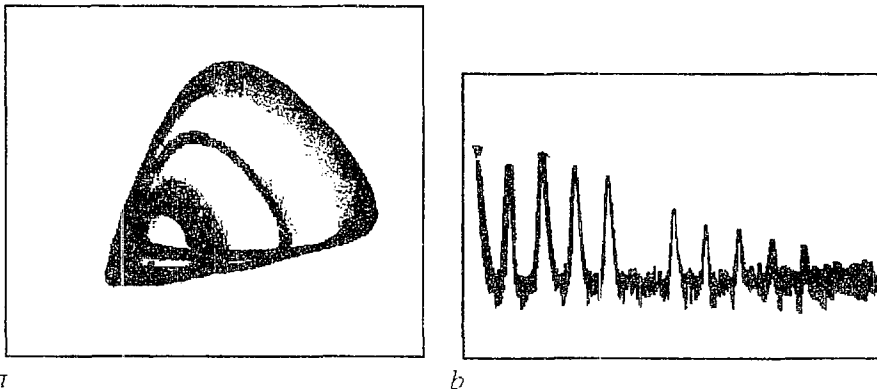


Fig. 4. Bistability in CO<sub>2</sub> laser with externally modulated optical feedback with the help of EOM in external cavity: a - phase portrait, b - spectrum, driving frequency  $f_d = 84$  kHz

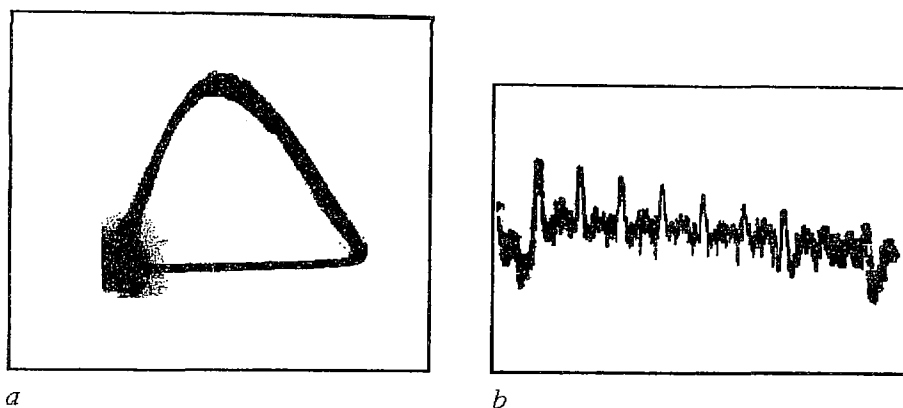


Fig. 5. «Hard transitions» to chaos. A direct transition to chaos without any bifurcation is observed

stabilities were reported previously [1,3] with transitions between orbits of period's 3 and 4.

«Hard transitions» to chaotic orbits also occur in our system (Fig. 5). In this case there is no period doubling cascade, and a direct transition from period 1 oscillations to chaos is observed.

**B. Vibrating mirror in the external cavity.** Instabilities and chaos induced by a vibrating mirror in the external cavity are presented in Fig. 6. The period doubling sequence, bifurcations, and attractor shapes obtained in this series of tests are very similar to those presented in Section 3 A for the EOM placed in the external cavity. Bistable periodic regime are also possible here. Fig.7 shows the coexistence of two period 1 orbits of different amplitudes and the same frequency. This is evidenced by the frequency spectrum shown in Fig. 7, *b* with fundamental frequency and higher harmonics.

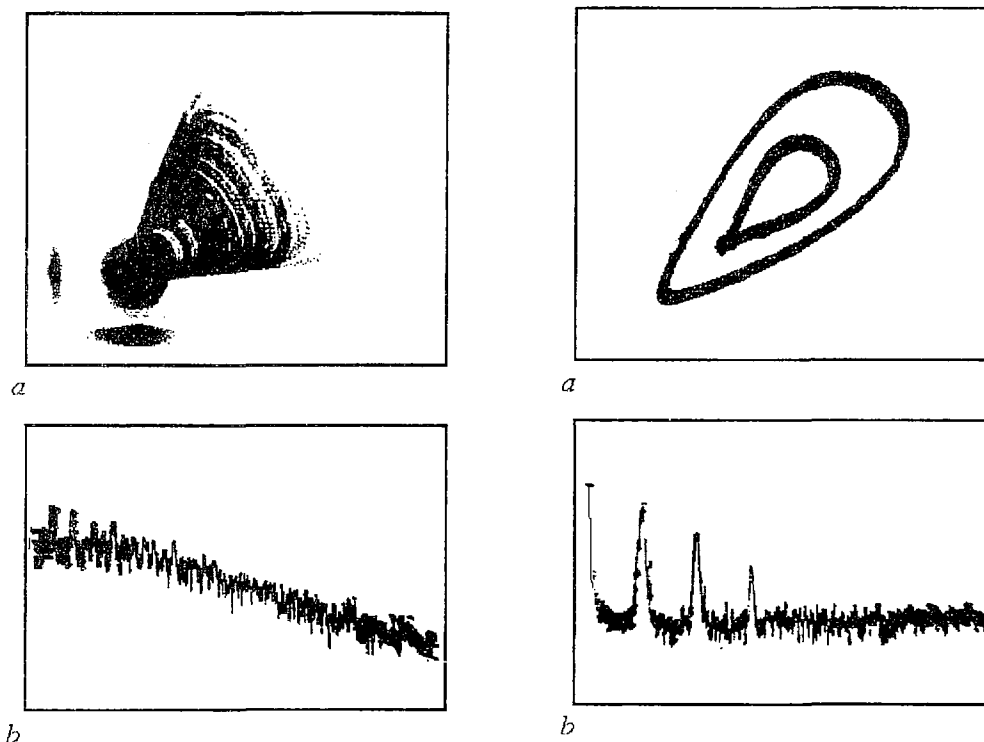


Fig. 6. Chaos induced by a vibrating mirror in the external cavity,  $f_d = 30$  kHz.

Fig. 7. Bistability in  $\text{CO}_2$  laser with vibrating mirror in external cavity: *a* - phase portrait, *b* - spectrum,  $f_d = 60$  kHz

## Summary and conclusions

We showed that a CO<sub>2</sub> laser can be driven into chaotic states by one more, technically very simple, method where one modulates externally the feedback of laser radiation.

Two approaches were used to drive the laser. In the first setup an EOM is placed in an external (passive) resonator, and the second one modulating the length of the passive external resonator. Both of these methods produced instabilities and chaos through period doubling cascades for a broad range of modulation frequencies. Under certain conditions the system also exhibits bistability and hard transitions to chaos.

The results of this work are very similar to those obtained of a CO<sub>2</sub> laser with modulated intercavity losses [1-6]. This is not coincidental, since in the framework of the simplest one-mode theory one can show the equivalence of these two system in the approximation replacing the external cavity with modulated feedback by an effective mirror with modulated transmission / reflection coefficient [14,15].

We would like to add that the simplicity of the external modulation scheme allows straight forward implementation [15] of the chaos control techniques [16,17].

**Acknowledgments.** This work was supported by the Office of Naval Research (SBIR) under Contract Number N00014-93-C-0051. We would like to thanks Dr. J. Perez for sufficient interest to this work. We also wish to acknowledge M. J. Steinshnid-er, R.E. Stallcup, and A. Aviles for technical assistance.

## Literature

1. *F.T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni, J. Tredicce* // Phys. Rev. Lett. **49**, 1217 (1982).
2. *D. Dangoisse, P. Glorieux, D. Hennequin* // Phys. Rev. Lett. **57**, 2657 (1986).
3. *J.R. Tredicce, F.T. Arecchi, G.P. Puccioni, A. Foggi, and W. Gadomski* // Phys. Rev. A **34**, 2073 (1986).
4. *D. Dangoisse, P. Glorieux, D. Hennequin* // Phys. Rev. A, **36**, 4775 (1987).
5. *G. Puccioni, A. Poggi, W. Gadomski, J. Tredicce, F.T. Arecchi* // Phys. Rev. Lett. **55**, 339 (1985).
6. *T. Midavaine, D. Dangoisse, P. Glorieux* // Phys. Rev. Lett. **55**, 1989 (1985).
7. *D. J. Biswas, V. Dev, U.K. Chatterjee* // Phys. Rev. A **35**, 456 (1987).
8. *A.V. Bondarenko, A.F. Glova, S.N. Kozlov, F.V. Levedev, V.V. Likhanskii, A.P. Napartovich, V.D. Pismennii, V.P. Yartsev* // in Laser Noise, Proc. SPIE, V.1376, 117 (1990).
9. *F.T. Arecchi, W. Gadomski, R. Meucci* // Phys. Rev. A **34**, 1617 (1986).
10. *F.T. Arecchi*, Chapt. 2 in Instabilities and Chaos in Quantum Optics / Eds F.T. Arecchi, R.G. Harrison. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1987.
11. *F.T. Arecchi, G. Giacomelli, A. Lapucci* // Phys. Rev. A **43**, 4997 (1991).
12. *A.V. Bondarenko, A.F. Glova, S.N. Kozlov, F.V. Levedev, V.V. Likhanskii, A.P. Napartovich, V.D. Pismennii, V.P. Yartsev* // Sov. Phys. JETP **68**, 461 (1989).
13. *V.V. Likhanskii, A.P. Napartovich* // Sov. Phys. Usp. **33**, 228 (1990).
14. *A.I. Ritus* // Sov. J. Quantum Electron. **23**, 169 (1993).
15. *E.M. Rabinovich, J.M. Kowalski, C.L. Littler*. Studying Chaos in Carbon - Dioxide Laser in a Graduate Level Optical Laboratory // Proc. SPIE. International Conference on Education in Optics, SPIE, 2525, 441(1995).
16. *E.R. Hunt* // Phys. Rev. Lett. **67**, 1953 (1991).
17. *R. Roy, T.W. Murphy, T.D. Maier, Z. Gills, E.R. Hunt* // Phys. Rev. Lett. **68**, 1259 (1992).

University of New Mexico  
University of North Texas  
Denton, Texas 76203, USA

Поступила в редакцию 7.04.95  
после переработки 22.11.95

## ДИНАМИЧЕСКИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ В $\text{CO}_2$ ЛАЗЕРЕ С ВНЕШНЕЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Э.М. Рабинович, Я.М. Ковальский, К.Л. Литтлер, А.П. Бистрик,  
Дж. Прэсед, Б.Дж. Уэст

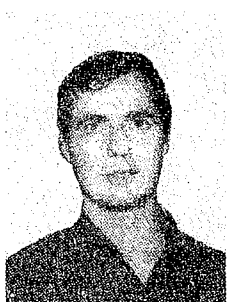
$\text{CO}_2$  лазеры очень чувствительны к оптической обратной связи и отличаются большим разнообразием динамических состояний в условиях внешней модуляции параметров обратной связи. Мы сообщаем о результатах экспериментов, касающихся неустойчивостей  $\text{CO}_2$  лазеров, вызванных либо периодическим изменением геометрической длины дополнительного внешнего пустого резонатора, либо модуляцией коэффициента преломления внешнего резонатора при помощи электрооптического модулятора. Результаты экспериментов демонстрируют наличие устойчивых периодических траекторий с различными периодами, бистабильности периодических траекторий и наличие хаотических аттракторов, характеризующихся сложными сценариями перехода к хаосу.



*Emmanuil M. Rabinovich* is a Research Assistant Professor of the Chemical and Nuclear Engineering Department and Center for High Technology Materials at the University of New Mexico. He received his MS degree in Radiophysics (1966) and his Ph.D. in Optics (1980) from Saratov University, Russia. He has an extensive background in the field of gas and semiconductor lasers, nonlinear dynamics, ultrafast optics, laser spectroscopy, fibers and fiber-optic sensors. Since 1993 he has resided in the United States. Currently at the University of New Mexico Dr. E. Rabinovich is working with different types of fiber-optic sensors for chemical and biological applications. The sensors are based upon surface plasmon resonance phenomena and fluorophore lifetime characteristics.

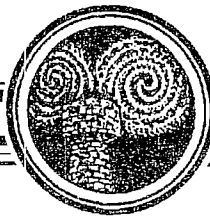


*Jacek M. Kowalski* is Associate Professor of Physics at the Department of Physics and the Center for Nonlinear Science at the University of North Texas. He received his M.S. degree in Theoretical Physics from the University of Wroclaw (Poland, 1963), and defended his doctoral thesis on «Thermodynamics of some class of Ising models» (1973) at the Technical University of Wroclaw. He worked at several international Centers including the Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research in Dubna and the Center for Solid State Physics in Liege (Belgium). Since 1983 he resides in the United States. His main interests include theory of disordered systems, nonlinear dynamics and biological neural networks.



*Chris L. Littler* has an extensive background in the electrical and optical properties of narrow gap semiconductors as well as expertise in device applications of these materials. During 1980-1984, Dr. Littler studied the electrical and optical properties of a number of semiconductors (GaAs, InSb, and CdTe), with an emphasis on two-photon and impurity magnetoabsorption effects in these materials. While at Texas Instruments (1984 to 1988) his research effort was focused on the design, fabrication, and operation of metal-insulator semiconductor detectors on HgCdTe for infrared imaging applications. Currently, at the University of North Texas, Dr. Littler is working on the characterization of artificially structured semiconductor materials using magneto-optics and quantum magnetotransport techniques.

*Bruce J. West* is Professor of Physics and Director of the Center for Nonlinear Science at the University of North Texas. He received his B.A. in Physics from the State University of New York at Buffalo (1965), and a Ph.D. in Physics from the University of Rochester (1969). He was elected a fellow of the American Physical Society (1992). His current research interests are in non-equilibrium statistical physics, quantum manifestations of chaos, and the applications of nonlinear dynamical systems theory to biomedical phenomena.



## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПАССИВНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ МОД В КОЛЬЦЕВОМ ОДНОНАПРАВЛЕННОМ ЛАЗЕРЕ

*А.А. Соколов, Г.Н. Татарков*

Численными методами исследована динамика пассивной синхронизации мод в однонаправленном кольцевом лазере для усиливающих сред типа АИГ-Nd и органических красителей. Существенные различия в их спектроскопических параметрах определяют характеристики соответствующих режимов генерации: при параметрах, соответствующих твердотельным лазерным средам имеет место генерация периодических цугов импульсов, при параметрах, характерных для органических красителей - режим стационарной пассивной синхронизации мод. Для усиливающей среды типа органический краситель получены данные об усложнении внутренней структуры импульса генерации при высоком коэффициенте усиления и стохастизации режима генерации при различных значениях ширины линии усиления и нелинейного поглощения.

### Введение

Задача получения ультракоротких импульсов света методами пассивной синхронизации лазерных мод (ПСМ) и связанные с этим проблемы исследуются уже достаточно долгое время как теоретически [1,2], так и экспериментально [3]. За этот период процессы, происходящие при ПСМ твердотельных и жидкостных (на растворах красителей) лазеров, поняты достаточно полно, и авторы данной статьи не претендуют на получение принципиально новых результатов. Тем не менее, как нам кажется, полученные данные представляют определенный интерес.

О получении при ПСМ пикосекундных и субпикосекундных импульсов в области ближнего ИК и видимого диапазонов сообщается во многочисленных работах [4-11]. Для получения ультракоротких импульсов в твердотельных лазерах принципиальным требованием является малый (порядка нескольких пикосекунд) период релаксации просветляющегося поглотителя, поскольку именно он определяет длительность импульса [12]. В [13] описаны пассивные затворы на основе растворов симметричных пирилоцианиновых красителей и их аналогов со временами релаксации, лежащими в пределах 0.14-40 пс; сечения поглощения этих сред на длине волны генерации АИГ - неодимового лазера 1.064 мкм составляют  $2-7 \cdot 10^{-18}$  см<sup>2</sup>. По данным [14], скорость релаксации просветленного состояния этих красителей можно изменять в 1.5-5 раз путем подбора для них различных растворителей. Использование подобных быстрорелаксирующих затворов удается значительно уменьшить длительность

генерируемых в режиме синхронизации мод импульсов [15,16]. Для неодимовых лазеров она составляет 16-35 пс, а с использованием специальной методики повышения плотности энергии излучения в поглотителе для его более полного просветления - 0.7 пс [16].

Для лазеров на красителях различных типов характерны импульсы субпикосекундной длительности [4-11], примерно 200 фс, и более, если не используется методика столкновения импульсов в среде. Здесь малая инерционность поглотителя не является принципиально необходимой, как в случае твердотельных лазеров, поскольку укорочение импульса обеспечивается высокой скоростью релаксации усиливающей среды.

Характерная особенность подобных сообщений - малая информация о динамике самого режима генерации; по-видимому, это объясняется тем, что возможности экспериментатора неизбежно ограничены возможностями регистрирующего оборудования. Так, в большинстве работ по неодимовым лазерам упоминается, что лазер генерирует цуги импульсов, но ничего не сказано, например, о числе импульсов в цугах и частоте следования цугов. Отсутствуют какие-либо данные о внутренней структуре импульсов. Мы попытались в какой-то мере восполнить этот пробел.

## 1. Математическая модель

В качестве наиболее простой выбрана модель кольцевого однонаправленного лазера, содержащего усиливающую среду и пассивный насыщающийся фильтр. (Впервые возможность жесткой синхронизации мод в подобном лазере с безынерционным поглотителем обсуждалась в [2]). Усиливающая и поглощающая среды считались двухуровневыми с однородным уширением. Накачка усиливающей среды - непрерывная.

Для численного исследования использовалась следующая система полуклассических уравнений, близкая по форме к [17]:

$$dE/dz + (1/c)dE/dt = (i\alpha/2)P, \quad (1)$$

$$dP/dt = -\gamma_1 P - iED, \quad (2)$$

$$dD/dt = \gamma_2(1-D) - \text{Im}(EP). \quad (3)$$

Здесь  $E$  и  $P$  - «медленные» (по сравнению с периодом оптических колебаний) комплексные амплитуды поля и поляризации,  $\alpha$  - ненасыщенный коэффициент усиления,  $D$  - нормированная на единицу разность населенностей уровней лазерного перехода,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  - скорости релаксации поляризации и инверсии, соответственно. Активную среду рассматриваем как совокупность тонких слоев с малым усилением на каждом из них. Перейдя в собственную систему координат движущегося импульса  $\tau = t - z/c$ , можем преобразовать (1) к дискретному виду

$$E_2(\tau) = E_1(\tau) + (i\alpha/2)P(\tau) + \eta(\tau), \quad (4)$$

где  $E_1$  - амплитуда поля на входе в активную среду,  $E_2$  - амплитуда на выходе, через  $\alpha$  переобозначили малую величину  $\alpha z$  - усиление слоя среды толщиной  $z$ . В (4) добавлен член  $\eta$  - шум, моделирующий квантовые флуктуации. Уравнения (1)-(4) получены в предположении, что резонатор по частоте настроен точно на центр линии усиления и линии поглощения, что позволяет перейти от комплексных величин к чисто действительным.

Взаимодействие поля излучения с поглотителем описывалось системой уравнений, отличающихся от (1)-(4) только тем, что коэффициенту  $\alpha$  присвоен отрицательный знак, чтобы «переделать» его в коэффициент поглощения  $\beta$ , а

амплитуда поля излучения домножена на параметр  $s^{1/2}$ , где  $s = \sigma_2 A_1 / \sigma_1 A_2$ ;  $\sigma_2$  и  $A_2$  - сечение индуцированного перехода поглотителя и площадь светового пучка в поглотителе,  $\sigma_1$  и  $A_1$  - соответствующие величины для усилителя.

Линейные потери для простоты предполагались сосредоточенными на зеркале с коэффициентом отражения (по амплитуде)  $R$ .

## 2. Система: усилитель - АИГ:Nd<sup>3+</sup>, поглотитель - пикосекундный краситель

Параметры АИГ: Nd<sup>3+</sup> приняты равными: ширина линии 10<sup>11</sup> Гц, скорость релаксации инверсии 2·10<sup>4</sup> Гц, сечение поглощения 9·10<sup>-19</sup> см<sup>2</sup>. Параметры поглотителя (быстрорелаксирующего пикосекундного красителя): ширина линии 10<sup>13</sup> Гц, период релаксации инверсии 1пс, сечение поглощения 3·10<sup>-18</sup> см<sup>2</sup>. Период обхода резонатора 5 нс, коэффициент отражения зеркал  $R=0.9$ . Генерируемое излучение, в общем, представляет собой периодическую последовательность цугов импульсов. При коэффициентах усиления  $\alpha=80\%$  и поглощения  $\beta=20\%$  цуги следуют через 220 обходов резонатора и содержат 14 импульсов, одиночных на аксиальном периоде; то есть один импульс успевает 14 раз обойти резонатор от момента своего формирования до затухания. (Число импульсов в цуге мы определяли, принимая в расчет лишь те из них, энергия которых отличается от максимальной энергии импульса в данном цуге не более, чем в 15 раз). В промежутках между цугами энергия излучения практически равна нулю. Новый цуг импульсов зарождается из квантового шума. Огибающая цуга импульсов имеет приблизительно симметричную форму. Длительность импульса в максимуме его энергии составляет 14.5 пс. Импульс симметричен, фронт и спад его имеют одинаковую длительность.

Очевидно, что такая динамика определяется медленной релаксацией усиливающей среды и сечением индуцированного перехода, на три порядка меньшим по сравнению с поглотителем.

После прохождения цуга импульсов инверсия усилителя составляет всего 0.09%, то есть снимается ими почти полностью. Это приводит к быстрому затуханию импульса. За время, равное 220 периодам обхода резонатора, инверсия усилителя успевает восстановиться до 2%, что обеспечивает формирование нового импульса селекцией наиболее интенсивной квантовой флуктуации. Существенное значение также имеет уровень спонтанных флуктуаций в активной среде; чем он выше, тем быстрее происходит процесс формирования из них импульса, тем выше частота следования цугов.

Максимум поляризации усиливающей среды оказывается несколько смещенным назад по отношению к центральной, наиболее интенсивной части импульса. Это объясняется достаточно высокой инерционностью поляризации (период ее релаксации 10 пс) и приводит к тому, что групповая скорость импульса меньше скорости света. В максимуме своей энергии импульс «запаздывает» на 0.5-0.6 пс за обход резонатора.

При увеличении коэффициента начального усиления активной среды от 80 до 240% максимальная энергия импульса и число импульсов в цуге существенно не менялись; зато период следования цугов уменьшался от 300-350 до 100-150 обходов резонатора. Напротив, при увеличении коэффициента начального поглощения фильтра от 120 до 210% максимальная энергия импульса в пичке повышалась примерно в 10 раз, тогда как период следования цугов практически не менялся.

Полученные нами численные результаты полностью подтверждают выводы [18] о зависимости характеристик импульса от таких параметров пассивного фильтра, как интенсивность просветления  $I_s$  и время релаксации просветленного состояния  $\tau_r$  ( $I_s \sim 1/(\sigma\tau_r)$ ),  $\sigma$  - сечение генерационного перехода): уменьшение интенсивности просветления  $I_s$  приводило к тому, что энергия импульса



увеличивалась, а фронт импульса становился более затянутым; увеличение времени релаксации  $\tau$ , приводило к тому, что спад импульса становился более затянутым.

### 3. Система: усилитель - наносекундный органический краситель, поглотитель - пикосекундный или наносекундный краситель

Приняты следующие параметры усилителя: коэффициент начального усиления  $\alpha$  от 50 до 250%, ширина линии усиления  $10^{13}$  Гц, скорость релаксации инверсии  $10^9$  Гц, сечение поглощения порядка  $10^{-15}$  см<sup>2</sup>. Пикосекундный поглотитель считается имеющим ту же ширину линии, сечение вынужденного перехода в 2-3 раза выше и коэффициент начального поглощения  $\beta=20\%$  при времени релаксации 1 пс. Период обхода резонатора и линейные потери - как в разделе 2.

Синхронизация мод имела стационарный устойчивый характер. На периоде обхода резонатора формировался одиночный импульс длительностью 2-5 пс. При увеличении коэффициента усиления активной среды от 50% до 250% линейно растут энергия импульса и его длительность (от 2-3 до 5-7 пс, в зависимости от значений прочих параметров лазера). Период релаксационных колебаний при этом уменьшается от 550-600 до 50-60 обходов резонатора. При усилении, не превышающем 100%, профиль импульса - колоколообразный и симметричный. При усилении примерно 150% и выше фронт импульса становится крутым, а спад - затянутым и промодулированным - на спаде появляются равноотстоящие друг от друга и все более резкие с ростом коэффициента усиления выбросы интенсивности поля (рис.1).

На рис.1 показано взаимодействие импульса с усиливающей средой в стационарном режиме ПСМ при большом коэффициенте усиления. Интенсивность поля излучения внутри импульса резко промодулирована (верхний график). Видно, что за счет резкого и практически полного просветления активной среды и медленного восстановления ее инверсии профиль поляризации представляет собой кратковременный пик, приходящийся на фронт импульса. Это, как нам кажется, уже позволяет объяснить специфическую структуру импульса. Именно, при прохождении импульсом активной среды наибольшее усиление приходится на его фронт, где поэтому образуется резкий максимум интенсивности поля излучения на каждом новом обходе резонатора. А поскольку максимумы интенсивности, аналогичным образом образовавшиеся на предыдущих обходах, уже практически не усиливаются, то за счет потерь на фильтре и зеркалах они должны постепенно сходить на нет, что и видно на рисунке. Таким образом, на фронте импульса постоянно рождаются новые пики интенсивности; потом они постепенно смещаются назад вдоль профиля импульса и затухают; за счет этого групповая скорость импульса больше скорости света (это приводит к уменьшению периода обхода резонатора на 1.4 пс).

Вообще же, при относительно малых скоростях релаксации усиления (до  $10^5$  Гц) и относительно малых

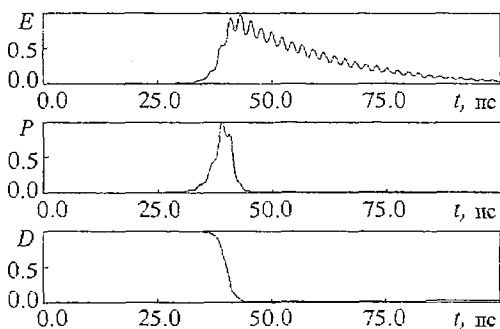


Рис. 1. Взаимодействие импульса с усиливающей средой в режиме ПСМ лазера на красителе наносекундного диапазона. Параметры усилителя:  $\alpha=300\%$  (двадцать «тонких» слоев по 15%),  $\gamma_1=10^{13}$  Гц,  $\gamma_2=10^8$  Гц; параметры поглотителя:  $\beta=20\%$  (два «тонких» слоя по 10%),  $\gamma_1=10^{13}$  Гц,  $\gamma_2=10^{12}$  Гц; параметр  $s=36.0$ ; период обхода резонатора  $T=5$  нс.  $E$  - амплитуда поля излучения (безразм. ед.),  $P$  - поляризации (безразм. ед.),  $D$  - разность населенности (нормированная на единицу),  $t$  - время (пс)

сечениях генерационного перехода (порядка  $10^{-19}$  см<sup>2</sup>) имеет место периодический режим генерации цугов импульсов; между цугами энергия импульса равна нулю. При скоростях релаксации порядка  $10^6$ - $10^{12}$  Гц и сечениях перехода порядка  $10^{-18}$  см<sup>2</sup> имеет место стационарный режим ПСМ.

Кроме того, мы исследовали случай, когда ширина линии поглощения в несколько раз меньше, чем ширина линии усиления, то есть поглощающий элемент осуществляет спектральную фильтрацию генерируемого излучения. Как оказалось, при этом огибающая профиля импульса становится знакопеременной (содержит 3-4 осцилляции относительно нуля), а характеристики излучения - нерегулярно промодулированными во времени. Модуляция энергии и длительности импульса определяется «перекачкой» энергии излучения из задних «горбов» профиля интенсивности импульса в передние; глубина модуляции длительности импульса оказывается примерно в три раза выше, чем глубина модуляции энергии (это естественно, поскольку при «перекачке» изменяется число «горбов»: задние затухают за счет зарождения передних, при этом очертания профиля импульса, а следовательно, и длительность, претерпевают существенные изменения). Длительность импульса в этом случае оказывается существенно меньшей, чем для равных значений ширины линий усиления и поглощения и составляет 0.2-0.3 пс (при  $\alpha=60\%$ ,  $\beta=15\%$ , ширине линии поглотителя  $3.5 \cdot 10^{12}$  Гц, времени релаксации поглотителя 1нс, прочие параметры - прежние).

По нашему мнению, стохастизация излучения связана с когерентными процессами в пассивной среде с относительно долгим временем дефазировки. Именно, каждая осцилляция огибающей импульса составляет во времени приблизительно 0.2 пс, что примерно равно времени фазовой памяти; сосредоточенная в данной осцилляции энергия излучения достаточна если не для инвертирования разности населенностей поглотителя, то хотя бы для изменения знака разности населенностей, что мы наблюдали в численном эксперименте. Естественно поэтому, что увеличение параметра  $s$ , равного отношению сечения перехода поглотителя к сечению перехода усилителя, вызывало увеличение глубины модуляции (при увеличении  $s$  от 1.2 до 16.0 глубина нерегулярной модуляции энергии импульса увеличивалась от 6 до 17%, длительности - от 20 до 40%).

Уменьшение времени релаксации поглотителя от 1 нс до 1 пс увеличивало глубину модуляции примерно в 3 раза. При увеличении коэффициента поглощения  $\beta$  от 15 до 25% глубина модуляции падала практически до нуля, хотя огибающая импульса сохраняла характерную осциллирующую форму. На рис. 2 показаны примеры взаимодействия импульса с поглощающей средой в режиме спектральной фильтрации для двух различных наборов параметров. На рис. 2, а видно, что при малом значении  $s=1.0$  энергии излучения, сосредоточенной в каждой из осцилляций огибающей импульса, ещё недостаточно для полного просветления

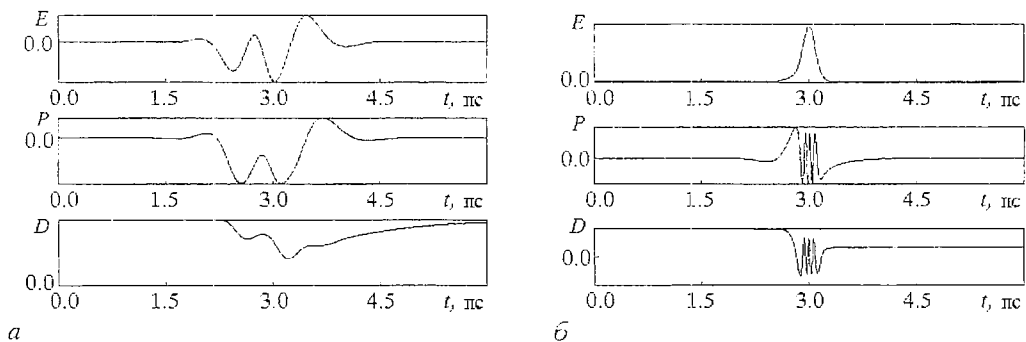


Рис. 2. Взаимодействие импульса с поглощающей средой в режиме ПСМ со спектральной фильтрацией. Параметры усилителя:  $\alpha=60\%$ ,  $\gamma_1=10^{13}$  Гц,  $\gamma_2=10^8$  Гц; параметры поглотителя:  $\beta=15\%$ ,  $\gamma_1=3.5 \cdot 10^{12}$  Гц,  $\gamma_2=10^{12}$  Гц (а),  $\gamma_2=10^{10}$  Гц (б); параметр  $s=1.0$  (а),  $s=42.0$  (б); период обхода резонатора  $T=5$  нс.  $E$  - амплитуда поля излучения (безразм. ед.),  $P$  - поляризация (безразм. ед.),  $D$  - разность населенностей (нормированная на единицу),  $t$  - время (пс)

поглотителя; тем не менее, режим генерации - нерегулярный с глубиной модуляции по энергии импульса 6%, по длительности импульса - 14%. На рис. 2, б при высоком значении  $s=42.0$  наблюдаются оптические нутации населенностей рабочих уровней поглощающей среды; глубина модуляции энергии импульса - 6%, длительности - 34%.

Как нам представляется, данный результат имеет некоторое сходство с полученным в [19], где при синхронной накачке кольцевого лазера на красителе и спектральной фильтрации излучения нелинейным интерферометром наблюдалась нерегулярная модуляция генерируемого импульса вблизи точки точного согласования периодов резонаторов.

## Библиографический список

1. Гуревич Г.Л., Отмахов Ю.А. Нестационарные процессы в ОКГ бегущей волны с просветляющимся фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12, № 2. С. 208.
2. Маторин И.И., Ханин Я.И. Теория лазера с жесткой синхронизацией мод // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1981. Т. 45, № 2. С. 415.
3. Хорман И., Вильгельми Б. Лазеры сверхкоротких световых импульсов. М.: Мир, 1986.
4. Бондарев Б.В., Зиннатов Ф.Ф., Кобцев С.М., Родионов Г.Д., Сорокин В.Б. Пикосекундный лазер с пассивной синхронизацией мод и средней мощностью 1,1 Вт // Квант. электрон. 1988. Т. 15, № 10. С. 1969.
5. Матвеев Ю.А., Семчишен В.А. Генерация субпикосекундных импульсов в лазере на красителе непрерывного действия с пассивной синхронизацией мод и их усиление // Квант. электрон. 1979. Т. 6, № 4. С. 848.
6. Xiang Wanghua et al. Femtosecond pulses generated from non-colliding pulse mode-locked ring dye lasers // Opt. Commun. 1991. Vol. 86, № 1. P. 70.
7. Michailov N. et al. Novel absorber for passive mode locking of rhodamine 6G dye laser // Opt. Commun. 1989. Vol. 70, № 2. P. 137.
8. French P.M.W. et al. Passively mode locked c.w. dye lasers operating from 490 nm to 800 nm // Rev. Phys. Appl. 1987. Vol. 22, № 12. P. 1651.
9. French P.M.W., Taylor J.R. Passive mode - locking of the continuous wave DCM dye laser // Appl. Phys. 1986. B41, № 1. P. 53.
10. Криндач Д.П., Михайлов В.А., Яковлев А.Г. Пассивная синхронизация мод в лазерах на красителях с различными схемами резонаторов // Квант. электрон. 1987, Т. 14, № 8. С. 1643.
11. Smith K. et al. Passive mode locking of a continuous-wave dye laser in the red - near-infrared spectral region // Opt. Lett. 1985. Vol. 10, № 11. P. 559.
12. Сверхкороткие световые импульсы / Под. ред. С.Шапиро. М.: Мир, 1981.
13. Бабенко В.А., Дядюша Г.Г., Кудинова М.А., Мальшиев В.И. и др. Новые соединения для пассивных затворов лазеров ближнего ИК диапазона // Квант. электрон. 1980. Т. 7, № 8. С. 1796.
14. Барейка Б.Ф., Данелюс Р.В., Дикчюс Г.А., Дядюша Г.Г. и др. Влияние растворителей на времена релаксации полиметиновых красителей в пикосекундном диапазоне // Квант. электрон. 1982. Т. 9, № 11. С. 2289.
15. Пискараскас А., Сируткайтис В. Современные твердотельные лазеры пико- и фемтосекундного диапазонов // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1990. Т. 54, № 12. С. 2299.
16. Барейка Б., Пискараскас А., Синкявичюс В., Сируткайтис В. Субпикосекундный лазер на неодимовом фосфатном стекле // Квант. электрон. 1984. Т. 11, № 3. С. 602.
17. Гуревич Г.Л., Пасхин В.М. Установившийся режим синхронизации мод в лазере с насыщаемым поглотителем // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. С. 221.
18. Демчук М.И., Михайлов В.П., Гилев А.К., Иценко А.А. и др.

Оптимизация режима пассивной синхронизации мод лазера на алюминате иттрия // ЖПС. 1985. Т. 42, вып.5. С. 718.

19. MacFarlane D.L., Casperson L.W., Tovar A.A. Spectral behavior and pulse train instabilities in a synchronously pumped mode-locked dye laser // J.Opt.Soc.Am. 1988. Vol. B5. № 5. P. 1144.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 01.09.95  
после переработки 20.12.95

## NUMERICAL INVESTIGATION OF PASSIVE MODE LOCKING DYNAMICS IN UNIDIRECTIONAL RING LASER

*A.A. Sokolov, G.N. Tatarkov*

The dynamics of passive mode locking is investigated numerically for unidirectional ring AIG-Nd laser and dye laser. Their spectroscopic parameters difference determine the difference of their generation regimes: periodic pulse trains for AIG-Nd laser and stationary pulse generation for dye laser. Data are obtained for dye laser on inner pulse structure for high gain factor and on generation regime stochastisation if gain and absorbing line widths are not equal.



*Сokolov Александр Алексеевич* родился в 1968 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1993). Предыдущие работы посвящены динамике поперечных лазерных мод. В настоящее время учится в аспирантуре СГУ.



*Татарков Гарри Николаевич* родился в 1963 году. Окончил Московский инженерно-физический институт (специальный факультет физики, 1986). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по теме «Нелинейная динамика активной синхронизации мод в лазерах» (1992). В настоящее время работает в Колледже прикладных наук при СГУ.



## О КОМПЛЕКСНОЙ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

*А.Г. Владимиров, В.Ю. Торонов, В.Л. Дербов.*

Изучаются геометрические свойства комплексной модели Лоренца, такие как топология фазового пространства и предельных множеств, ограниченность аттракторов. Показано, что для этой модели бифуркация, соответствующая рождению пары гомоклинических петель в модели Лоренца, имеет коразмерность два.

### Введение

Так называемые комплексные уравнения Лоренца, или комплексная модель Лоренца (КМЛ)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y), \\ \dot{y} &= -(1-ie)y+(r-z)x, \\ \dot{z} &= -bz+1/2(x^*y+xy^*), \end{aligned} \quad (1)$$

впервые были введены Гиббоном и Макгиннесом [1] в качестве обобщения известной модели Лоренца (МЛ) [2,3]. В отличие от МЛ, в КМЛ переменные  $x$  и  $y$  комплексны. Формально эта комплексность возникает благодаря наличию параметра  $e$  и комплексности параметра  $r = r_1 + ir_2$ . Однако, смысл, заложенный в обобщение МЛ Гиббоном и Макгиннесом, значительно глубже. В работе [1] с помощью метода многих масштабов показано, что модель (1) в определенном приближении является универсальной для целого класса систем.

Для большинства систем, рассмотренных в [1], переменные, входящие в (1), являются амплитудами некоторых возмущений относительно пространственно однородного решения исходных дифференциальных уравнений в частных производных и в большинстве случаев не имеют наглядной физической интерпретации. Однако, существуют системы, для которых переменные КМЛ являются наблюдаемыми величинами. Это лазеры и мазеры, для которых  $x$  и  $y$  - медленные комплексные амплитуды электрического поля и поляризации среды соответственно, а  $z$  - разность заселенностей уровней энергии рабочего перехода.

В действительности уравнения (1) появились в квантовой электронике задолго до «открытия» их Гиббоном и Макгиннесом (например, [4]). Возможность непосредственного наблюдения переменных делает лазеры наиболее удобным объектом для экспериментальной реализации динамики, ассоциирующейся с КМЛ. И действительно, результаты экспериментов с одномодовыми лазерами далекого

инфракрасного диапазона оказались в замечательном соответствии с результатами численного интегрирования КМЛ [5]. И хотя КМЛ наиболее реалистично описывает лишь этот тип лазеров, она является простейшей моделью, отражающей такие фундаментальнейшие свойства лазера, как пороговый характер генерации, затягивание частоты и способность генерировать сложные типы колебаний.

Однако, несмотря на многочисленные работы по исследованию этой модели [1,6-16], она и по сей день остается менее изученной, чем того заслуживает, будучи сравнимой по значимости с такими «знаменитыми» моделями нелинейной динамики, как МЛ, модель Ресслера и т.д. Исследование КМЛ затрагивало, в основном, анализ частных режимов, чаще всего численными методами. На наш взгляд, наиболее глубокие теоретические результаты были получены Нингом и Хакеном [9,10]. Они относятся к анализу устойчивости простейших периодических решений, отвечающих режиму стационарной генерации лазера.

Целью данной работы является изучение геометрической структуры и некоторых глобальных свойств решений КМЛ, связанных с особенностями этой структуры.

Важным геометрическим свойством КМЛ является ее инвариантность относительно преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} xe^{i\psi} \\ ye^{i\psi} \\ z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\psi$  - произвольная постоянная фаза. Это преобразование соответствует группе  $U(1)$ , которая действует в подпространстве  $C^2$  полного фазового пространства  $\mathcal{H}$ , относящемся к переменным  $x$  и  $y$ . Чтобы осознать роль  $U(1)$  - симметрии для структуры предельных множеств в фазовом пространстве КМЛ, достаточно рассмотреть случай  $e=r_2=0$ . Можно показать [16], что в этом случае любая траектория в  $\mathcal{H}$  притягивается к инвариантной трехмерной гиперповерхности

$$\operatorname{Re}(x)/\operatorname{Im}(x) = \operatorname{Re}(y)/\operatorname{Im}(y) = \operatorname{const}, \quad (3)$$

где постоянная в правой части зависит от начальных условий. На этой гиперповерхности вещественные и мнимые части  $x$  и  $y$  синхронно меняются во времени, удовлетворяя при этом уравнениям МЛ. Однако даже при этих условиях аттракторы МЛ и КМЛ нетождественны. Действительно, если данная траектория притягивается к данному предельному множеству, лежащему на гиперповерхности, определяемой уравнениями (3), то, согласно свойству симметрии (2), траектория, отличающаяся от данной некоторой общей фазой переменных  $x$  и  $y$ , притягивается к множеству, которое является образом данного множества при действии (2) с соответствующей фазой  $\psi$ . Поэтому аттрактор КМЛ в данном случае представляет собой прямую сумму бесконечного числа множеств, изоморфных аттрактору МЛ.

Приведенный пример наглядно демонстрирует более высокую степень сложности структуры фазового пространства КМЛ по сравнению с МЛ и ту роль, которую в этом усложнении играет симметрия. Однако, как будет показано, симметрия же является и нитью Ариадны, позволяющей «размотать» клубок траекторий КМЛ. Отметим здесь интересную аналогию между ролью симметрии для физических систем, описываемых КМЛ, и для квантовых систем, описываемых волновой функцией. Для обоих типов систем общая фаза вектора состояния (для КМЛ имеется в виду вектор с компонентами  $x$  и  $y$ ) не несет информации о физическом состоянии и характеризует лишь результат интерференции данного состояния с некоторым другим. В квантовой механике «лишняя» информация может быть отфильтрована с помощью использования формализма матрицы плотности. При этом, если данный вектор состояния в гильбертовом пространстве описывается  $N$  комплексными числами, то соответствующая матрица плотности характеризуется  $2N-1$  независимыми вещественными числами.

Указанная аналогия позволяет применить этот подход к КМЛ. В разделе 1 вводится особое проективное пространство, в котором состояния, различающиеся

общей фазой переменных  $x$  и  $y$ , рассматриваются как эквивалентные, и выводятся уравнения движения для КМЛ в этом пространстве. Там же показано, каким образом вся информация о физическом состоянии системы и эволюции фазы может быть воспроизведена с помощью этих уравнений. В разделе 2 эти уравнения используются для анализа свойств ограниченности предельных множеств КМЛ в проективном пространстве, и показано, как эти свойства связаны с особенностями фазовой динамики и гомоклинических бифуркаций.

## 1. Нормальная форма уравнений и проективное пространство

Наряду с переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$  для КМЛ в дальнейшем будет удобно использовать другую систему переменных. Пусть

$$\sigma(r_1 - 1) - e^2/4 \equiv \eta > 0, \quad b < 2\sigma.$$

Введем замену переменных в КМЛ

$$x' = \eta^{-3/4} ax, \quad y' = \eta^{-5/4} \sigma a [y - (1 + ie/2\sigma)x], \quad z' = \eta^{-1} \sigma (z - xx^*/2), \quad t' = t (\eta)^{1/2}, \quad (4)$$

где  $a = e^{-ie/2} [(2\sigma - b)/2]^{1/2}$ . После этой замены, которая подобна предложенной в [17] для МЛ, уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} dx'/dt' &= y', \\ dy'/dt' &= (1 + iv)x' - \mu y' - x'z' - \rho x' |x'|^2, \\ dz'/dt' &= -\beta z' + |x'|^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$v = [2r_2\sigma + e(\sigma - 1)]/2\eta, \quad \mu = (1 + \sigma)/\eta^{1/2}, \quad \rho = \eta^{1/2}/(2\sigma - b), \quad \beta = b/\eta^{1/2}. \quad (6)$$

Якобиан замены (4) равен  $|a|^4 \sigma^3 / \eta^5$ . Поэтому, для  $\eta > 0$  и  $b < 2\sigma$  замена переменных (4) задает взаимно однозначное и непрерывное отображение (диффеоморфизм) фазового пространства  $\mathcal{H}$  системы (1) на фазовое пространство  $\mathcal{H}'$  системы (5). Системы (1) и (5) топологически эквивалентны. Иначе говоря, при выполнении условий, наложенных на значения параметров, динамика (5) эквивалентна динамике КМЛ.

Если в (5) пренебречь членом  $-\rho x' |x'|^2$ , то получим комплексное обобщение уравнений Шимицу-Мариока [17], которые были детально исследованы в [18]. В [19,20] было показано, что в некотором приближении уравнения Шимицу-Мариока также являются нормальной формой уравнений, описывающих хаотическую динамику вблизи бифуркационной точки с трижды вырожденным собственным значением и геометрической кратностью, равной двум. Отметим, что в (5) все коэффициенты вещественны, когда  $v=0$ , то есть когда выполнено условие (29) (см. ниже).

Рассмотрим отображение  $\Pi: \mathcal{H}(x, y, z) \rightarrow \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P}$  - проективное пространство с декартовыми координатами  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $z$

$$u = (|x|^2 - |y|^2)/2, \quad v = \text{Re}(x^*y), \quad w = \text{Im}(x^*y). \quad (7)$$

Идея использовать данное отображение основана на аналогии КМЛ с двухуровневой квантово-механической системой. Если рассматривать переменные  $x$  и  $y$  как компоненты шредингеровского вектора состояния, то соответствующая матрица плотности может быть выражена через линейную комбинацию матриц Паули [21]; при этом  $u$ ,  $v$  и  $w$  будут коэффициентами этого разложения. Заметим, что

$$\text{где } |x|^2 = R + u, \quad |y|^2 = R - u, \quad x^*y = v + iw, \quad (8)$$

$$R = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} = (|x|^2 + |y|^2)/2. \quad (9)$$

Из (8) можно видеть, что переменные  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $z$  содержат всю информацию о состоянии системы в смысле, обсуждавшемся во введении. Всем точкам пространства  $\mathcal{H}$ , различающимся только общей фазой переменных  $x$  и  $y$ , отображение  $\Pi$  ставит в соответствие одну и ту же точку в  $\mathcal{P}$ , в то время как образы состояний, различающихся амплитудами и разностью фаз  $x$  и  $y$ , различны. Ниже мы будем использовать термин «луч», принятый в геометрии для обозначения множества точек в  $\mathcal{H}$ , которым соответствует одна и та же точка пространства  $\mathcal{P}$ .  $\mathcal{P}$  будем называть «пространством лучей».

Дифференцируя (7) по времени и используя уравнения (1), получим уравнения движения в пространстве лучей

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -(\sigma + 1)u + (\sigma - r_1 + z)v - r_2w - (\sigma - 1)R, \\ \dot{v} &= -(\sigma + 1)v - ew - (\sigma - r_1 + z)u + (\sigma + r_1 - z)R, \\ \dot{w} &= -(\sigma + 1)w + ev + r_2(R + u), \\ \dot{z} &= -bz + v. \end{aligned} \quad (10)$$

Соответственно, образом системы (5) при отображении  $\Pi: \mathcal{H}'(x', y', z') \rightarrow \mathcal{P}'$ , где  $\mathcal{P}'$  - проективное пространство, эквивалентное  $\mathcal{P}$ , является система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}' &= v' + \mu(R' - u') - vw' - v'[1 - z' - \rho(R' + u')], \\ \dot{v}' &= -\mu v' + R' - u' + (R' + u')[1 - z' - \rho(R' + u')], \\ \dot{w}' &= -\mu w' + v(R' + u'), \\ \dot{z}' &= -\beta z' + (R' + u'). \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что множества точек  $\mathcal{Z}$  и  $\mathcal{Z}'$ , лежащих на осях  $z$  и  $z'$  в фазовых пространствах  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}'$ , инвариантны относительно потоков, задаваемых системами уравнений (1) и (5), соответственно. То же относится и к соответствующим множествам точек в пространствах  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$ . Отсюда следует, что множества точек  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{H}'/\mathcal{Z}'$ ,  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$  и  $\mathcal{P}'/\mathcal{Z}'$  также инвариантны относительно потоков, задаваемых (1) и (5).

Прежде чем использовать уравнения (10) и (11) вместо (1) и (5), необходимо найти способ получать информацию о движении в  $\mathcal{H}$  из решений уравнений (10). Рассмотрим соотношение между характеристиками динамического состояния системы в  $\mathcal{H}$  и в  $\mathcal{P}$ , такими как ляпуновские характеристические показатели (ЛХП) и фрактальная размерность аттрактора. Для данной траектории  $X_0(t)$  динамической системы  $dX/dt = F(X)$  спектр ЛХП  $\Lambda_i$  определяется, как

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln [|e_i(t)| / |e_i(0)|], \quad (12)$$

где  $e_i(t)$  - фундаментальные решения линейной системы уравнений

$$dY/dt = (\partial F / \partial X)|_{X=X_0(t)} Y. \quad (13)$$

Введем локальные координаты  $\xi_i$  в окрестности некоторой  $X_0 \in \mathcal{H}/\mathcal{Z}$

$$\xi_1 = u(x, y), \quad \xi_2 = v(x, y), \quad \xi_3 = w(x, y), \quad \xi_4 = z, \quad \xi_5 = \text{Im}(\langle X_0, X \rangle) / \langle X_0, X \rangle. \quad (14)$$



Здесь и далее мы используем бра- и кет-символы для обозначения эрмитовского скалярного произведения, определенного на  $C^2$ .

Якобиан преобразования (14) в точке  $X = X_0$  равен  $|x_0|^2 + |y_0|^2 > 0$ , так что (14) есть диффеоморфизм в некоторой окрестности  $X_0$ .

Записывая уравнения (13) для системы (1) в локальных координатах  $\xi(\xi_1, \dots, \xi_5)$ , заданных согласно (14), получим

$$d\xi/dt = \begin{pmatrix} \left( \begin{matrix} \hat{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right) \\ 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix} \xi, \quad (15)$$

где  $A^\wedge$  - матрица Якоби для системы уравнений (10), вычисленная в точке  $\Pi(X_0(t))$ . Из уравнения (15) можно видеть, что матрица  $A^\wedge$  задает эволюцию возмущений, ортогональных к  $\xi_5$  в  $X_0(t)$ , тогда как возмущения вдоль  $\xi_5$  остаются нейтральными. Поскольку (14) - диффеоморфизм, из (12) и (15) следует, что спектр ЛХП для траектории в  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  отличается от спектра для ее проекции в  $\mathcal{P}$  только наличием одного дополнительного нулевого показателя. В частности, это означает, что если данное множество в  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  есть аттрактор с ляпуновской размерностью  $\mathcal{D}_L$ , то его образ в  $\mathcal{P}$  есть аттрактор с ляпуновской размерностью  $\mathcal{D}_L - 1$ . Это соотношение справедливо и для фрактальных размерностей предельного множества в  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  и его проекции в  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$ . Это следует из того факта, что каждое предельное множество в  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  может быть представлено локально (в окрестности данного луча) в виде прямого произведения множества в  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$  и луча, то есть множества  $\mathcal{R}^1$ .

Другая часть физической информации, ассоциирующаяся с траекторией в  $\mathcal{H}$  и, на первый взгляд, отсутствующая в уравнениях (10), это относительная фаза двух состояний. Правило сравнения фаз двух состояний физической системы, описываемой некоторым комплексным вектором состояния, было введено Панчаратнамом для состояний классического поляризованного света [22], а затем обобщено на случай квантовых систем в [23,24]. Для КМЛ оно может быть сформулировано так: два состояния  $X_1$  и  $X_2$  «синфазны», если норма  $\|X_1 + X_2\|$  максимальна по всем возможным значениям полных фаз  $X_1$  и  $X_2$ . Отметим, что это правило позволяет сравнивать фазы состояний, принадлежащих различным лучам. Для двух данных лучей значение нормы определяется фазой комплексного числа  $\langle X_1, X_2 \rangle$ . Эта фаза называется фазой Панчаратнама. Основываясь на аналогии между КМЛ и уравнением Шредингера, в [14] было показано, что фаза Панчаратнама естественным образом возникает в задаче о динамике лазера. Кратко обсудим этот вопрос с точки зрения геометрии КМЛ.

На языке дифференциальной геометрии, триплет  $(\mathcal{H}/\mathcal{Z}, \mathcal{P}/\mathcal{Z}, \Pi)$  образует расслоение [25,26], для которого  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  - пространство расслоения,  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$  - база, слоем является луч, а структурной группой является группа  $U(1)$ . Отметим, что это расслоение нетривиально, то есть  $\mathcal{H}/\mathcal{Z}$  не сводится к прямому произведению базы на луч.

Уравнение

$$\xi_5 = 0, \quad (16)$$

определяет связность на расслоении. Согласно терминологии, принятой в дифференциальной геометрии, кривая в  $\mathcal{H}$  называется горизонтальной (относительно данной связности), если ее вектор скорости в каждой точке направлен по касательной к поверхности  $\xi_5 = 0$ . Связность, определяемая уравнением (16), обеспечивает единственность горизонтальной кривой в  $\mathcal{H}$ , проектирующейся на данную кривую в  $\mathcal{P}$  и проходящей через заданную точку. В [23, 24] для данного типа расслоений и для случая эволюции вектора состояния вдоль горизонтальной траектории (относительно данного типа связности), показано, что

фаза Панчаратнама для двух состояний на данной траектории  $X(t)$  может быть выражена в виде

$$\gamma = -\oint_{\Gamma T} A_s ds, \quad (17)$$

где

$$A_s = \text{Im}(\langle X(s) | d/ds | X(s) \rangle / \langle X(s) | X(s) \rangle), \quad (18)$$

$\Gamma T$  - замкнутый контур в  $\mathcal{H}$ , образованный отрезком  $T$  траектории между двумя состояниями и кривой  $\Gamma$ , проекция которой является геодезической в  $\mathcal{P}$ . Интеграл в (12) имеет ненулевое значение, если при обходе по замкнутому контуру  $\Gamma T$  в  $\mathcal{P}$  вектор состояния системы в  $\mathcal{H}$  не возвращается в исходную точку. Возможность этого является проявлением нетривиальности расслоения [23,24].

Отметим, что преобразование вида (2), но с зависящим от времени  $\psi$

$$\psi(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau,$$

где  $h(t)$  - некоторая функция времени, переводит (1) в систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(\sigma + ih(t))x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -[1 + i(h(t) - e)]y + (r - z)x, \\ \dot{z} &= -bz + 1/2 (x^*y + xy^*), \end{aligned} \quad (19)$$

которая гомеоморфна (1), если  $h(t)$  непрерывно. (В лазерном эксперименте  $h(t)$  - отклонение фазы опорного сигнала, используемого в гетеродинных измерениях [5], от монохроматического сигнала с частотой моды пустого резонатора). Горизонтальная кривая, образом которой является данная траектория в  $\mathcal{P}$ , есть траектория динамической системы (19) с  $h(t) = -\text{Im}(\langle X, F(X) \rangle) / \langle X, X \rangle$ , где  $F(X)$  - вектор фазовой скорости системы уравнений (1) (см. определение (16)). Из того, что системы (1) и (19) связаны преобразованием (2) следует, что для произвольного  $h(t)$  полный набег общей фазы переменных  $x$  и  $y$  в (19) может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\gamma = \gamma_d + \gamma_g, \quad (20)$$

где

$$\gamma_d = \int_0^t [h(\tau) + \text{Im}(\langle X, F(X) \rangle) / \langle X, X \rangle] d\tau \quad (21)$$

динамическая фаза; а геометрическая фаза  $\gamma_g$  определяется формулой (17).

Покажем теперь, что когда  $h(t)$  - заданная функция времени или константа, набег фазы может быть получен из решения системы (10) без обращения к уравнениям (1). Действительно, динамическая фаза определяется интегралом по времени от функции

$$\text{Im}(\langle X, F(X) \rangle) / \langle X, X \rangle = [e(R - u) - (\sigma + r_1 - z)w] / R,$$

выражающейся через координаты точки в  $\mathcal{P}$ . Чтобы доказать это для геометрической части, введем в  $\mathcal{P}$  сферические координаты

$$u = \rho \cos\theta, \quad v = \rho \sin\theta \cos\phi, \quad w = \rho \sin\theta \sin\phi.$$

Отметим, что согласно (7),  $x = \rho^{1/2} \cos(\theta/2) \exp[i\Theta]$ ,  $y = \rho^{1/2} \sin(\theta/2) \exp[i(\Theta + \phi)]$ , где  $\Theta$  - общая фаза. Выражая  $A_s$  в (17) через сферические координаты, получим

$$\gamma_g = -\oint_{\Gamma} \sin^2(\theta/2) d\phi, \quad (22)$$

где интеграл берется в  $\mathcal{P}$  по контуру, образованному траекторией и геодезической. Можно видеть, что правая часть (22) есть не что иное, как половина величины телесного угла, стягиваемого контуром [25].

После этого обсуждения особенностей эволюции фазы становится ясно, что траектория системы в  $\mathcal{H}$ , являющаяся прообразом предельного цикла в  $\mathcal{P}$ , будет замкнутой только в случае специального выбора системы координат (несущего сигнала), определяемого функцией  $h(t)$ . Это согласуется с фактом, следующим из соотношений между размерностями предельных множеств в  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{P}$ , что периодическому аттрактору в  $\mathcal{P}$  должен соответствовать тор в  $\mathcal{H}$ . Проекция тора на предельный цикл - лишь один пример упрощения задачи исследования динамики системы, обеспечиваемого введением проективного пространства  $\mathcal{P}$ . В следующем разделе мы используем представление КМЛ в  $\mathcal{P}$  (10) и в  $\mathcal{P}'$  (11), чтобы выявить некоторые общие свойства ее решений.

## 2. Ограниченность предельных множеств и гомоклиническая бифуркация

Для МЛ известно [2], что все предельные множества траекторий в фазовом пространстве ограничены сферой

$$x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2 - K^2(\sigma + r)^2 = 0,$$

где  $K^2 \geq 1/4 + (b/4) \max(\sigma^{-1}, 1)$ .

Покажем, что это свойство сохраняется и для КМЛ, то есть что предельные множества в  $\mathcal{H}$  ограничены гиперсферой

$$|x|^2 + |y|^2 + (z - \sigma - r_1)^2 - K^2(\sigma + r_1)^2 = 0 \quad (23)$$

с тем же  $K$ , что и для МЛ. Рассмотрим семейство сфер

$$V_M \equiv |x|^2 + |y|^2 + (z - \sigma - r_1)^2 - M^2 = 0 \quad (24)$$

и производные по времени

$$\dot{V}_M = -2\sigma|x|^2 - 2|y|^2 - 2b[z - (\sigma + r_1)/2]^2 + b(\sigma + r_1)^2/2. \quad (25)$$

Поскольку

$$\dot{V}_M|_{V_M=0} = (F, \nabla V_M), \quad (26)$$

где  $F$  - вектор фазовой скорости, траектории на сфере  $V_M=0$  направлены «внутри» ее или «наружу» соответственно, если правая часть уравнения (25) принимает положительное или отрицательное значение на сфере. Из (25) можно видеть, что эта функция не зависит от параметров  $e$  и  $r_2$ . Поэтому можно использовать результат, полученный для МЛ [2] и состоящий в том, что рассматриваемая функция положительна на любой сфере  $V_M=0$  с радиусом, превосходящим радиус сферы (23).

Уравнение, задающее ограничивающую поверхность для предельных множеств в  $\mathcal{P}$ , соответствующую гиперсфере (23), можно получить, подставляя в (23)  $|x|^2 + |y|^2 = 2R$ , что дает уравнение сфероида

$$S: 2R + (z - \sigma - r_1)^2 - K^2(r_1 + \sigma)^2 = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим теперь гиперповерхность в  $\mathcal{P}$  пространстве, заданную уравнением

$$Q(u, v, w, z) \equiv \alpha u + \beta w + \alpha(e/|e|)R = 0, \quad (28)$$

где  $\alpha = -|e|/[(2\sigma)^2 + e^2]^{1/2}$ ,  $\beta = 2\sigma/[(2\sigma)^2 + e^2]^{1/2}$ . В трехмерном подпространстве  $R^3(u, v, w)$  пространства  $\mathcal{P}$  уравнение (28) задает двумерный полуконус с вершиной в начале координат, ось симметрии которого направлена вдоль вектора  $(\alpha, 0, \beta)$ . При этом косинус угла между осью и образующей конуса равен  $\pm\alpha$  в зависимости от знака  $e$ . Для  $e > 0$  полуконус находится в полупространстве положительных  $w$  и отрицательных  $u$ . Для  $e = 0$  конус вырождается в плоскость  $w = 0$ . При  $e < 0$  поверхность расположена в области отрицательных  $w$  и положительных  $u$ .

В пространстве  $\mathcal{P}'$  поверхности  $Q = 0$  соответствует гиперплоскость

$$w' = 0.$$

При этом  $Q > (<) 0$  соответствует  $w' > (<) 0$ . Из (11) видно, что при  $w' = 0$ ,  $\dot{w}' = v(R' + u') = v|\dot{\alpha}'|^2$ . Таким образом, значение  $\dot{w}'$  неотрицательно при  $v > 0$  и неположительно при отрицательном  $v$ . Поэтому, для  $v > (<) 0$  траектории на поверхности касательны к ней или направлены в сторону области  $\mathcal{P}$ , где  $Q > (<) 0$  ( $w' > (<) 0$  в  $\mathcal{P}'$ ).

Как следует из (11), поверхность (28) глобально устойчива и инвариантна относительно потока для  $v = 0$ . Это условие может быть переписано в виде

$$r_2 = r_{2c} = e(1 - \sigma)/2\sigma. \quad (29)$$

Покажем что для  $r_2 > (<) r_{2c}$  всякая траектория, начинающаяся в области  $Q < (>) 0$  ( $w' < (>) 0$ ), стремится к области, где  $Q \geq (\leq) 0$  ( $w' \geq (\leq) 0$ ). Пусть  $r_2 > r_{2c}$  ( $v > 0$ ). Рассмотрим семейство гиперплоскостей в  $\mathcal{P}'$ :  $w' = C < 0$ . Как видно из (11), при ( $v > 0$ ) на этих поверхностях  $\dot{w}' > 0$  (так как  $\mu$  всегда положительно). Поэтому всякая траектория, идущая из области  $w' < 0 \sim (Q < 0)$ , последовательно пересекает каждую из этих поверхностей и, в конце концов, оказывается на поверхности  $w' = 0$  ( $Q = 0$ ) или в области  $w' > 0$  ( $Q > 0$ ). Точнее, существует множество траекторий, имеющее меру ноль, которые стремятся к началу координат при  $t \rightarrow \infty$  (см. ниже). Все остальные траектории рано или поздно приходят в область  $w' > 0$  ( $Q > 0$ ).

Чтобы показать, что при  $r_2 < r_{2c}$  каждая траектория стремится к множеству точек в  $\mathcal{P}$ , для которых  $Q \leq 0$  ( $w' \leq 0$ ), следует рассмотреть семейство поверхностей  $w' = C > 0$ . Поскольку это легко сделать, следуя тем же путем, что и для  $r_2 > r_{2c}$ , мы опускаем это доказательство.

Рассмотрим теперь некоторые важные следствия существования ограничивающей поверхности  $Q = 0$ . Во-первых отметим, что для лазера ( $r_2 = 0$ ) все аттракторы расположены в той области  $\mathcal{P}$ , где  $Q \geq 0$  для  $e > 0$ , и в симметричной области для  $e < 0$  (рис.1,2). Если ограничиться подпространством  $R^3(u, v, w)$ , это область телесного угла  $\Omega$ , охватываемого полуконусом  $Q = 0$ . Поэтому для траектории, принадлежащей некоторому аттрактору, телесный угол, охваченный контуром ГТ (см. (17)), не превосходит  $\Omega$ . В пределе  $e \rightarrow \pm 0$  конус превращается в инвариантную относительно потока плоскость  $w = 0$ , которая при этом глобально устойчива, так что телесный угол, соответствующий ГТ, стремится к предельному значению  $\pm 2\pi$ . Это объясняет резонансный скачок среднего наклона фазы поля лазера на величину, равную характерной средней частоте пульсаций интенсивности  $2\pi/\tau$  ( $\tau$  - средний период пульсаций интенсивности, совпадающий со средним временем обхода изображающей точки вокруг начала координат на плоскости  $w = 0$ ). Интересно отметить, что этот скачок был впервые найден в численных

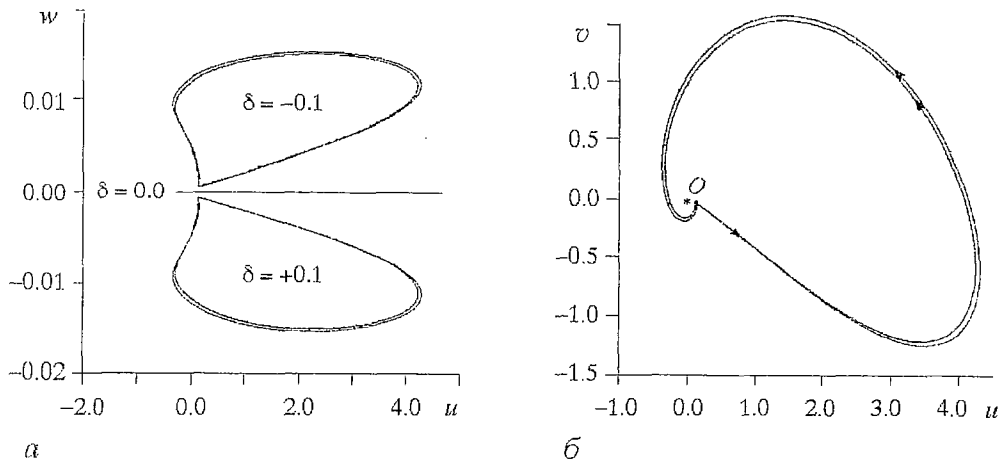


Рис. 1. Фазовые портреты циклических аттракторов при  $\sigma = 3, b = 0.1, r = 15$ : а - в плоскости  $(u, w)$  для  $\delta = \pm 0.1$  и  $\delta = 0$ ; б - в плоскости  $(u, v)$  для  $\delta = 0$ ;  $O$  - начало координат

расчетах [12] и интерпретирован, как проявление геометрической фазы в динамике лазера на основе численного анализа поведения траекторий в пространстве лучей [15].

Другим следствием существования ограничивающей поверхности  $Q=0$  ( $w'=0$ ) является дополнительное ограничение на значения параметров системы, соответствующие гомоклинической бифуркации. Известно, что в МЛ очень важной структурой, отвечающей за формирование хаотического множества траекторий, являются негрубые гомоклинические петли сепаратрис [3]. Поскольку КМЛ включает МЛ как частный случай при  $e=0$  и  $r_2=0$ , соответствующие гомоклиники также имеют место и в КМЛ. Необходимым условием их существования является пересечение устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седла, расположенного в начале координат [27].

Локальная структура инвариантных многообразий вблизи седла может быть получена из линейного анализа уравнений (1) или (5) в окрестности решения  $x=y=z=0$  ( $x'=y'=z'=0$ ).

«Тривиальное» решение уравнений (5)  $x'=y'=z'=0$  неустойчиво и является седлом, когда

$$r_1 > 1 + [e^2 - r_2\sigma + er_2(1-\sigma)]/(1+\sigma)^2.$$

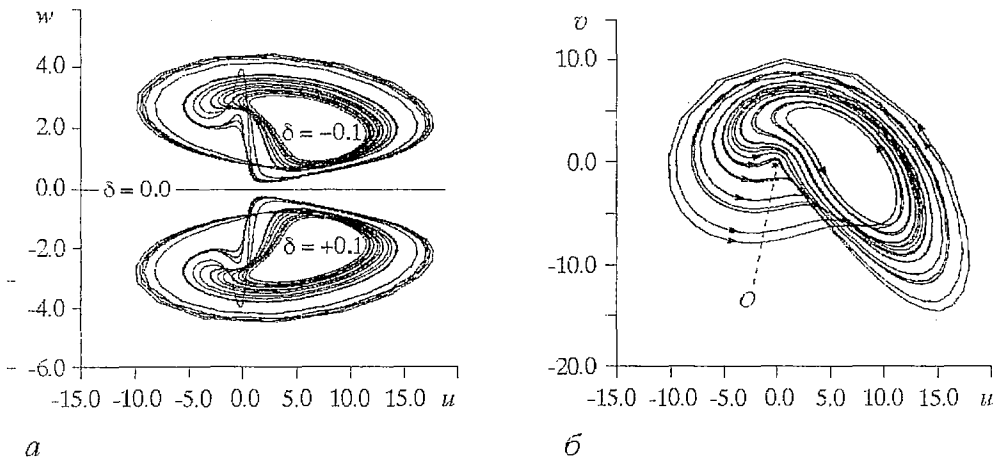


Рис. 2. Фазовые портреты хаотических аттракторов при  $\sigma = 3, b = 1, r = 30$ : а - в плоскости  $(u, w)$  для  $\delta = \pm 0.1$  и  $\delta = 0$ ; б - в плоскости  $(u, v)$  для  $\delta = 0$

Его собственные значения суть

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\mu/2 + (1 + \mu^2/4 + i\nu)^{1/2}, \\ \lambda_2 &= -\mu/2 - (1 + \mu^2/4 + i\nu)^{1/2}, \\ \lambda_3 &= -\beta.\end{aligned}\tag{30}$$

Им соответствуют собственные векторы

$$V_1 = N_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = N_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $N_{1,2} = 1 + |\lambda_{1,2}|$ . Как следует из (30), для достаточно малых  $\nu$  мы имеем  $\text{Re}\lambda_1 > 0$ ,  $\text{Re}\lambda_2 < 0$  и  $\lambda_3 < 0$ . Кроме того, для  $\nu > 0$

$$\text{Im}\lambda_1 = -\text{Im}\lambda_2 > 0.\tag{31}$$

Мы рассмотрим только случай, когда  $|\lambda_3| < |\text{Re}\lambda_2|$ , так как он соответствует возможности реализации аттрактора Лоренца.

Неустойчивое (устойчивое) линейное подпространство  $E^u$  ( $E^s$ ) определяется собственным вектором  $V_1$  (собственными векторами  $V_2$  и  $V_3$ ):

$$E^u: y' = x'\lambda_1, \quad z' = 0,$$

$$E^s: y' = x'\lambda_2.$$

Неустойчивое (устойчивое) многообразие  $W^u$  ( $W^s$ ) начала координат касательно к  $E^u$  ( $E^s$ ) в  $x'=y'=z'=0$ .

Поскольку ось  $z'$  инвариантна относительно потока и принадлежит  $W^s$ , точки этих многообразий, лежащие в шаре малого радиуса  $\varepsilon$ , удовлетворяют уравнениям

$$W_{loc}^u: y' = x'\{\lambda_1 + O(\varepsilon)\}, \quad z' = O(\varepsilon^2),\tag{32}$$

и

$$W_{loc}^s: y' = x'\{\lambda_2 + O(\varepsilon)\}.\tag{33}$$

Рассмотрим проекции инвариантных многообразий  $W^u$  и  $W^s$  на  $\mathcal{P}'$ . Будучи инвариантными относительно потока, они должны переходить в себя и под действием группы  $U(1)$ . Поэтому отображение  $\Pi$  отображает  $W^s$  и  $W^u$  соответственно на двумерное и одномерное многообразия в  $\mathcal{P}'$ . Из (7), (32) и (33) получим

$$w'|_{\Pi(W_{loc}^u)} = |x'|^2 \{\text{Im}\lambda_1 + O(\varepsilon)\},$$

$$w'|_{\Pi(W_{loc}^s)} = |x'|^2 \{\text{Im}\lambda_2 + O(\varepsilon)\}.$$

Учитывая (31), приходим к выводу, что для  $\nu > 0$  все точки  $\Pi(W_{loc}^u)$  лежат в полупространстве  $w' \geq 0$ . Далее, из формального решения третьего уравнения системы (11)

$$w'(t') = w'(0) + \nu e^{-\mu t'} \int_0^{t'} [R'(s) + w'(s)] ds\tag{34}$$

закключаем, что вообще все точки  $\Pi(W^u)$  лежат в этом полупространстве.

Действительно, так как в (34) под интегралом стоит неотрицательная величина,  $w'(t')$  всегда неотрицательно, если  $w'(0) > 0$ . Все же точки  $\Pi(W_{loc}^s)$ , за исключением точек оси  $z'$ , лежат в полупространстве  $w' < 0$ . Следовательно,  $\Pi(W^u)$  и  $\Pi(W_{loc}^s)$  могут пересекаться только на оси  $z'$ . Однако, это невозможно, так как эта ось не принадлежит  $W^u$ . Поэтому, для  $\nu > 0$  уравнения (1) и (5) не допускают траекторий, двоякоасимптотических к началу координат. Используя свойство инвариантности системы (11) относительно замены

$$\nu \rightarrow -\nu, \quad w' \rightarrow -w' \quad (35)$$

и следуя тем же путем, можно легко показать, что такие траектории не могут существовать и при  $\nu < 0$ . Итак,  $\nu = 0$  или

$$r_2 = \epsilon(1 - \sigma)/2\sigma$$

- необходимое условие существования «бабочки» Лоренца.

### Заключение

Подведем итоги. Мы показали, что все динамические свойства системы, включая особенности фазовой динамики, могут быть получены непосредственно из представления КМЛ в пространстве лучей. Отметим, что это представление не содержит сингулярностей для каких-либо значений параметров в отличие от аналогичного, использовавшегося в [9], и дает эффективный и простой метод изучения свойств КМЛ. Установлено соответствие между свойствами предельных множеств в исходном фазовом пространстве и в пространстве лучей, выявлены свойства ограниченности предельных множеств в этих пространствах. Показано, что эти свойства ответственны за сингулярное поведение кривой среднего наклона фазы поля лазера как функции отстройки, наблюдавшееся до этого в численном эксперименте [12]. Доказано, что гомоклиническая бифуркация сепаратрисы седла в КМЛ имеет коразмерность, равную двум.

В качестве непосредственного продолжения данной работы мы видим аналитическое построение одномерного отображения для КМЛ в окрестности гомоклинической бифуркации. Эту возможность обеспечивает представление КМЛ в пространстве лучей. В настоящее время это отображение построено, и ведется работа по его анализу.

*Работа была поддержана Международным Научным Фондом. В.Ю. Торонов и В.Л. Дербов поддержаны грантом Министерства высшей школы и технической политики РФ № 94-2.7-1097.*

### Библиографический список

1. Gibbon J.D., McGuinness M.J. *Physica D* 5, 108 (1982).
2. Lorenz E.N., *Atmos J. Sci.* 20, 130 (1963).
3. Sparrow C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors.* Springer Verlag, 1982.
4. Ораевский А.Н. *Радиотехн. и электр.* 4, 718 (1959).
5. Tang D.Y., Weiss C.O., *Phys. Rev. A* 49, 1296 (1994); Tang D.Y., Li M.Y., Weiss C.O., *Phys. Rev. A* 44, 7597 (1991); Weiss C.O., Abraham N.B., Hubner U., *Phys. Rev. Lett.* 61, 1587 (1988).
6. Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J., *Physica D* 4, 139 (1982).
7. Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J., *Physica D* 7, 126 (1983). Fowler A.C., McGuinness M.J., *SIAM J. Appl. Math.* 44, No.4, 681 (1984).
8. Mandel P., Zeghlache H., *Opt. Commun.* 47, 146 (1983); Zeghlache H., Mandel P., *JOSA B* 2, 18 (1985).

9. *Ning C., Haken H.*, Phys. Rev. A 41, 3826 (1990).
10. *Ning C., Haken H.*, Z.Phys. B, 81,457 (1990).
11. *Vilaseca R., de Valcarcel G.J., Roldan E.*, Phys. Rev. A 41,5269 (1990).
12. *Roldan E., de Valcarcel G.J., Vilaseca R., Mandel P.*, Phys. Rev. A 48, 591 (1993).
13. *Ning C.Z., Haken H.*, Phys. Rev. Lett. 68, 2109 (1992).
14. *Toronov V., Derbov V.*, Phys. Rev. A 49, 1392 (1994).
15. *Toronov V., Derbov V.*, Phys. Rev. A 50, 878(1994).
16. *Ораевский А.Н., Торонов В.Ю.*, Квантовая электроника, 16, 2063 (1989).
17. *Shimizu T., Morioka N.*, Phys. Lett. A 76 (1980) 201.
18. *Shil'nikov A.L.*, Selecta Math. Sovietica, 10:2 (1991) 105. (Originally published in Methods of Qualitative Theory of Differential Equations (Russian) (Gor'kov. Gos. Univ., Gor'ki. 1986) pp.180-193); Physica D 62 (1993).
19. *Vladimirov A.G., Volkov D.Yu.*, Opt. Commun. 100 (1993) 351.
20. *Rucklidge A.M.*, Physica D 62 (1993) 323.
21. *Дирак Л.*, Принципы квантовой механики, Наука, Москва, 1980.
22. *Pancharatnam S.*, Proc. Ind. Acad. Sci. Ser.A 44, 247 (1956).
23. *Samuel J., Bhandari R.*, Phys. Rev. Lett. 60, 2339 (1988).
24. *Anandan J., Aharonov Y.*, Phys. Rev. Lett. 65, 1697 (1990).
25. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко Л.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1984.
26. *Kobayashi S., Nomizu K.*, Foundations of differential geometry. Interscience, N.Y. 1969.
27. *Шильников Л.П.* Докл. Акад. Наук. СССР 160, 558 (1965); Мат. Сборник 77, 461 (1968) and 81, 92 (1970).

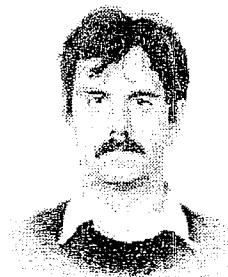
С. - Петербургский государственный  
университет, НИИ физики  
Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 5.04.95  
после переработки 21.11.95

## ON THE COMPLEX LORENZ MODEL

*A.G. Vladimirov, V.Yu. Toronov, V.L. Derbov*

The geometric properties of the complex Lorenz model such as the topology of the phase space and limit sets, and the boundedness of attractors are studied. It is shown that in the complex case the homoclinic bifurcation is the codimension-two one.



*Владимиров Андрей Георгиевич* родился в 1958 году в Ленинграде. Окончил Ленинградский госуниверситет (1984). Получил степень кандидата физико-математических наук в СПбГУ (1984). Диссертация посвящена дифракционным свойствам оптических резонаторов. Имеет более 30 публикаций. В настоящее время научные интересы - нелинейная оптика, динамика лазеров, бифуркации, хаос и нелинейные волны.





*Торонов Владислав Юрьевич* - 1963 года рождения, окончил Московский инженерно-физический институт (1986). Защитил кандидатскую диссертацию по исследованию конечномерных моделей динамики лазеров (1992). Доцент физического факультета Саратовского государственного университета. Круг интересов - самоорганизация, хаос, квантовая динамика, геометрические свойства динамических систем.



*Дербов Владимир Леонардович* - 1949 года рождения, окончил физический факультет СГУ (1972). После окончания аспирантуры работал в НИИ механики и физики при СГУ. Защитил кандидатскую диссертацию по теории взаимодействия интенсивных лазерных полей с многоуровневыми релаксирующими системами. С 1983 года - доцент кафедры теоретической физики, а с 1985 года по настоящее время - доцент кафедры оптики СГУ. Автор более 70 теоретических работ в области нелинейной лазерной спектроскопии молекул, нелинейной динамики распространения лазерных пучков и импульсов. В последние годы интенсивно исследует проблему геометрических фаз в лазерных и оптических динамических системах.

## ЧАСТОТЫ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ЛАЗЕРОВ С ПЕРЕКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ КАНАЛАМИ ГЕНЕРАЦИИ

*Л.Н. Капцов, А.В. Ростовец*

Рассчитываются частоты релаксационных колебаний системы из двух и более твердотельных лазеров с перекрещивающимися каналами генерации. Показано, что как и в многомодовом однопучковом лазере, появление связи между модами системы через пространственное выедание инверсии населенностей практически не меняет значения наивысшей частоты релаксационных колебаний невзаимодействующих изолированных лазеров. Вблизи частоты релаксационных колебаний наблюдаются минимумы порога возбуждения в системе динамического хаоса.

Лазеры с перекрещивающимися в едином активном элементе (АЭ) двумя и более каналами генерации могут найти применение в оптических линиях связи, измерениях, основанных на использовании опорного и пробного лучей, геодезических измерениях, спектороскопии и др. Многопучковая система позволяет наиболее полно использовать весь объем активной области кристалла и обеспечить максимальный коэффициент полезного действия лазера. Воздействие излучения по одному каналу генерации на излучение по остальным каналам позволяет предложить новые способы управления параметрами лазерного излучения. Перечисленное показывает достаточную актуальность разработки и изучения многопучковых лазерных систем. Исследованию такой системы на лазерах АИГ:  $Nd^{3+}$  посвящена настоящая работа.

Твердотельные лазеры на АИГ:  $Nd^{3+}$  являются автоколебательными системами (генераторами) с инерционной нелинейностью (АСИН) [1-3]. Как показано в этих и других работах, динамика процесса установления стационарного режима генерации, а также других переходных процессов в АСИН определяется в основном соотношением между значениями характерной частоты (или частот) релаксационных колебаний (ЧРК) и обратного времени затухания свободных колебаний в колебательной системе генератора. В отличие от радиотехнических АСИН [3], характеризующихся, как правило, одной ЧРК, твердотельные лазеры, как генераторы с инерционной нелинейностью, уже в одномодовом по поперечному индексу режиме генерации характеризуются числом ЧРК, равным числу генерируемых мод [4]. Это позволяет говорить о наборе или «спектре» ЧРК лазера. Подчеркнем, что набор ЧРК лазера во многом определяет динамику изменения мощности его излучения, то есть процессы, характерные времена которых на много порядков превышают период оптических колебаний.

Ограничиваясь рассмотрением только таких процессов, мы можем

применить для их анализа один из асимптотических методов, например, метод медленно меняющихся амплитуд (ММА), так как форма оптических колебаний остается весьма близкой к гармонической в течение интервалов времени, включающих огромное число периодов оптических колебаний. В лазерной физике приближение, при котором учитываются лишь достаточно медленные изменения мощности излучения, принято называть адиабатическим [5]. С точки зрения теории АСИН асимптотическое приближение допустимо при условии, что характерное время изменения инерционно-нелинейного параметра системы на несколько порядков превышает период автоколебаний. Такие АСИН можно назвать автоколебательными системами с идеальной инерционной нелинейностью в отличие от рассмотренных в монографии [1]. В АС с идеальной ИН динамические процессы сводятся к временному изменению огибающей амплитуды автоколебаний. По этой причине режим динамического хаоса в твердотельном лазере, который является АС с идеальной ИН, наблюдается только в колебаниях мощности излучения.

В настоящей публикации предполагается определить характерные ЧРК в системах двух и  $n$  связанных твердотельных лазеров, имеющих общий источник инверсии населенностей. Будет показано, что бифуркационный параметр перехода системы к режиму динамического хаоса имеет дополнительный минимум на частотах, близких к новым релаксационным частотам, появляющимся при взаимодействии лазеров. Переход к хаосу в системе связанных лазеров на АИГ:  $\text{Nd}^{3+}$ , как и в автономном одномодовом лазере, возможен лишь при внешнем воздействии на систему. Ниже будет рассмотрено поведение системы при внешнем воздействии в виде гармонической модуляции добротности одного из резонаторов системы.

Простейшая модель двух лазеров, содержащая механизм взаимодействия через общий источник инверсии населенности, схематически изображена на рис. 1. На рисунке  $M_{1Г}$  и  $M_{2Г}$  - глухие зеркала с коэффициентом пропускания  $\tau \sim 0.1\%$ ,  $M_{1В}$  и  $M_{2В}$  - выходные зеркала первого и второго резонаторов, соответственно, с  $\tau = 3\%$ , АЭ - общий для обоих резонаторов активный элемент. Внутри АЭ схематически обозначены каустики первого и второго резонаторов, пересекающиеся в заштрихованной области. М - электрооптический модулятор потерь, установленный в первом канале. Напряжение гармонической формы на модуляторе задавалось с генератора Г. Фотодиоды ФД-1 и ФД-2 позволяли наблюдать на экране двухлучевого осциллографа ОСЦ временные изменения мощности излучения. Анализатор спектра колебаний мощности излучения АС использовался при выключенном модуляторе М и позволял находить частоты, на которых наблюдались всплески мощности в спектре шумов. Эти всплески имеют место на ЧРК, что использовалось для измерения этих частот с относительной погрешностью порядка 5%.

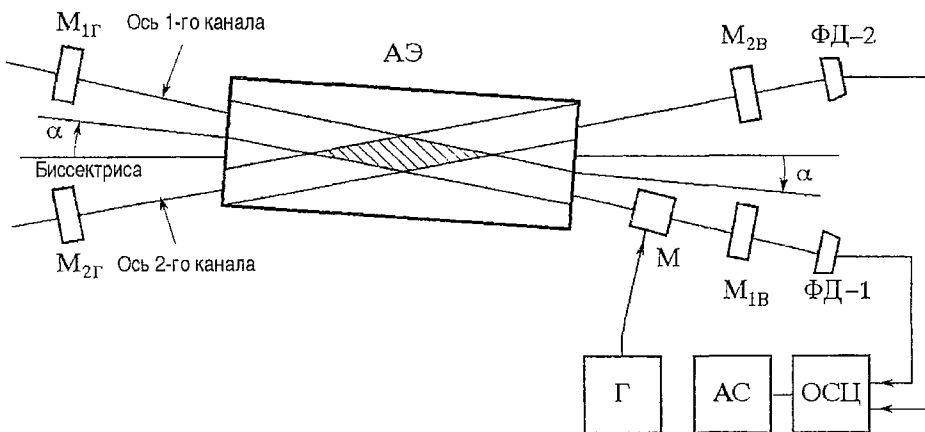


Рис. 1. Структура двух твердотельных лазеров с перекрещивающимися каналами генерации

Экспериментальная установка, подобная представленной на рис. 1, для аналогичных целей была использована в работе [6]. Однако результаты измерений ЧРК, приведенные в этой работе, а также результаты выполненного там теоретического расчета ЧРК в системе связанных лазеров противоречат результатам наших измерений и расчетов и не согласуются с особенностями «спектра» ЧРК, рассчитанного, например, в работе [4].

Ниже для системы  $n$  лазеров с перекрещивающимися пучками выводятся уточненные уравнения для расчета частот релаксационных колебаний; экспериментально подтверждается применимость полученных расчетных формул в пределах ошибки измерений; исследуется процесс перехода к динамическому хаосу в системе двух связанных лазеров при гармонической модуляции потерь в одном из каналов генерации.

### 1. Вывод системы уравнений для $n$ лазеров с перекрещивающимися пучками

Уравнения для лазеров с перекрещивающимися пучками мы получим, основываясь на двухуровневой модели резонансного взаимодействия электромагнитного поля в резонаторе с активным веществом, помещенным в этот же резонатор. Систему уравнений, описывающую это взаимодействие в приближении плоских волн и заданной формы колебаний векторов напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и поляризации вещества  $\mathbf{P}$ , можно найти в [7]. Она имеет следующий вид:

$$d^2\mathbf{E}/dt^2 + \gamma_c d\mathbf{E}/dt + \omega_q^2 \mathbf{E} = (-1/\epsilon\epsilon_0) d^2\mathbf{P}/dt^2, \quad (1)$$

$$d^2\mathbf{P}/dt^2 + \gamma_2 d\mathbf{P}/dt + \Omega^2 \mathbf{P} = -\alpha N \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$dN/dt = \gamma_1 (N^e - N) + \beta \mathbf{E} \mathbf{P}. \quad (3)$$

Здесь  $N = N_B - N_{II}$  - разность населенностей верхних и нижних рабочих уровней модели;  $N^e$  - инверсная населенность, создаваемая накачкой в отсутствие стимулированного излучения;  $\omega_q$  - частота рассматриваемой  $q$ -ой формы собственных колебаний резонатора;  $\gamma_c$  - обратное характерное время затухания собственных колебаний  $q$ -ой формы в резонаторе;  $\gamma_1 = 1/T_1$  - обратное характерное время релаксации инверсии населенностей  $N$  в отсутствие стимулированного излучения;  $\gamma_2 = 2/T_2$  - обратное характерное время релаксации поляризации при  $\mathbf{E}=0$ ;  $\Omega$  - циклическая частота рабочего перехода (в центре линии люминесценции);  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость вещества, не связанная с поляризацией рабочего перехода;  $\alpha$  и  $\beta$  - размерные положительные коэффициенты;  $\epsilon_0$  - диэлектрическая постоянная.

Введем комплексные медленно меняющиеся величины  $E$ ,  $P$  и их сопряженные значения  $E^*$  и  $P^*$ . Тогда, применяя метод ММА, получаем вместо уравнений (1) и (2) следующую систему укороченных уравнений:

$$dE/dt + \gamma_c E/2 = -i\omega P/2\epsilon\epsilon_0, \quad (4)$$

$$dE^*/dt + \gamma_c E^*/2 = -i\omega P^*/2\epsilon\epsilon_0, \quad (5)$$

$$dP/dt + \gamma_2 P = i\alpha N E, \quad (6)$$

$$dP^*/dt + \gamma_2 P^* = -i\alpha N E^*, \quad (7)$$

где  $A = \alpha/(2\omega_q)$ .

Заметим, что переменная  $N$  является медленной и поэтому уравнение (3) в укорочении не нуждается. Подставляя в (3) комплексные значения  $E$ ,  $E^*$ ,  $P$  и  $P^*$  и

исключая быстро осциллирующие (с частотой  $2\omega_q$ ) члены, получим вместо (3) следующее уравнение:

$$dN/dt = \gamma_1(N^e - N) + iB(E^*P - P^*E), \quad (8)$$

где  $B = \omega_q\beta/4$ . В системе уравнений (4)-(8) сохранены слагаемые, изменяющиеся с характерным временем  $T_2$ , которое для лазера на АИГ:  $\text{Nd}^{3+}$  составляет приблизительно  $10^{-12}$  с, тогда как характерное время изменения мощности излучения  $T_1 \sim 10^{-4}$  с. Очевидно, что различие между  $T_1$  и  $T_2$  в 8 порядков позволяет исключить время  $T_2$  при рассмотрении многих, достаточно медленных динамических процессов. Это соответствует тому, что поляризация  $P$  мгновенно следует за изменениями напряженности электрического поля  $E$ . Тогда в уравнениях (6) и (7)  $dP/dt$  и  $dP^*/dt = 0$  и мы можем исключить из уравнений (4), (5) и (8) переменные  $P$  и  $P^*$ . В этом состоит адиабатическое приближение. В данном приближении динамические процессы в излучении лазера описываются следующей системой уравнений:

$$dE/dt = -\gamma_c E/2 + (A\omega_q T_2/2\epsilon\epsilon_0)NE, \quad (9)$$

$$dE^*/dt = -\gamma_c E^*/2 + (A\omega_q T_2/2\epsilon\epsilon_0)NE^*, \quad (10)$$

$$dN/dt = \gamma_1(N^e - N) - 2ABT_2EE^*N. \quad (11)$$

Напомним, что система уравнений (9)-(11) написана для  $q$ -ой формы собственных колебаний резонатора, которой соответствует частота  $\omega_q$ . При описании мультичастотного режима необходимо число уравнений увеличивать в соответствии с увеличением числа собственных форм колебаний резонатора, по которым производится разложение  $E$  и  $P$ .

Дальнейшее упрощение системы уравнений (9)-(11) применительно к  $q$ -ой форме собственных колебаний резонатора можно осуществить, вводя понятие средней мощности излучения в единице объема резонатора  $U_q$  или среднего в единице объема числа фотонов  $M_q$ , связанных с данной формой собственных колебаний. Величины  $U_q$  и  $M_q$  пропорциональны произведениям средних значений  $E$  и  $E^*$ . Для введения, например,  $M_q$  в систему уравнений (9)-(11) достаточно умножить уравнения (9) и (10) на  $E^*$  и  $E$ , соответственно, и сложить. Тогда после несложных преобразований получим

$$dM_q/dt = -\gamma_{cq}M_q + DN_qM_q, \quad (12)$$

$$dN_q/dt = \gamma_1(N^e - N_q) - 2DN_qM_q, \quad (13)$$

где  $D$  - коэффициент Эйнштейна.

Уравнения (12) и (13) соответствуют числу фотонов в  $q$ -ой форме колебаний  $M_q$  и среднему значению инверсии населенности рабочих уровней  $N_q$ , связанной с этой формой колебаний. В этом смысле (12) и (13) соответствуют однолучевой и одночастотной системе. Данной форме колебаний удобно формально присвоить индекс  $q=1$ . Для перехода к двухлучевой системе, сохраняя условия одночастотности по каждому лучу и присваивая форме собственных колебаний второго резонатора индекс  $q=2$ , надо написать еще два уравнения с учетом взаимодействия между каналами генерации. Так как оптическую связь между пучками при выводе уравнений (12) и (13) мы не ввели, то среднее число фотонов в стационарном режиме генерации в каждом из каналов не меняется, и мы имеем вместо (12) два независимых уравнения

$$dM_1/dt = -\gamma_{c1}M_1 + DN_1M_1, \quad (14)$$

$$dM_2/dt = -\gamma_{c2}M_2 + DN_2M_2. \quad (15)$$

При этом, однако, надо иметь ввиду, что значения  $N_1$  и  $N_2$  не соответствуют таковым в отсутствие связи между пучками. Сохраняя понятия средних значений  $N_1$  и  $N_2$  для каналов генерации с учетом связи между ними, следует положить

$$dN_1/dt = \gamma_1(N^c - N_1) - 2DN_1M_1 + 2DN_1kM_1 - 2DN_1kM_2, \quad (16)$$

$$dN_2/dt = \gamma_1(N^c - N_1) - 2DN_2M_2 + 2DN_2kM_2 - 2DN_2kM_1. \quad (17)$$

Первые два слагаемых в правой части уравнения (16) учитывают, соответственно, прирост среднего значения инверсии населенностей в первом канале за счет накачки и снятие этой инверсии фотонами первого же канала. Слагаемое  $2DN_1kM_1$  учитывает то обстоятельство, что не все фотоны первого канала расходуются на сьем инверсии в первом канале, так как часть их, а именно  $kN_1$  ( $k < 1$ ), снижает инверсию не в первом, а во втором канале. Поэтому в уравнение для первого канала эти слагаемые входят со знаком плюс. Слагаемое  $2DN_1kM_2$  учитывает сьем инверсии в первом канале фотонами, принадлежащими второму каналу ( $kM_2$ ). Коэффициент  $k$  учитывает степень взаимодействия между каналами и в первом приближении равен отношению объема совместной для обоих каналов области, заштрихованной на рис. 1, к полному объему канала. Такой же смысл имеют слагаемые уравнения (17).

Рассуждая аналогичным образом, можно предложить следующую систему уравнений для лазеров с  $n$  перекрещивающимися каналами генерации:

$$dM_i/dt = -\gamma_{ci}M_i + DN_iM_i, \quad (18)$$

$$dN_i/dt = \gamma_1(N^c - N_i) - 2DN_iM_i(1 - \sum_{i \neq j} k_{ij}) - 2DN_i \sum_{i \neq j} M_j k_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Уравнения (16), (17), (18) и (19) позволяют стандартным методом малых возмущений получить формулы для расчета ЧРК многопучкового лазера.

## 2. Расчет частот релаксационных колебаний двухпучковой системы. Сопоставление с экспериментом

Для получения формулы, определяющей ЧРК двухпучковой системы, мы будем полагать, что каждый из перекрывающихся пучков соответствует одночастотному режиму работы лазеров в отсутствие связи между ними. При этом изолированные лазеры характеризуются каждый своей ЧРК  $f_1$  и  $f_2$ . Тогда при вычислении двух ЧРК системы связанных лазеров  $F_1$  и  $F_2$  мы получим следующую формулу:

$$F_{1,2} = \{(1-k)(f_1^2 + f_2^2)/2 \pm 1/2[k^2(f_1^2 + f_2^2)^2 + (1-2k)(f_1^2 - f_2^2)^2]^{1/2}\}^{1/2}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что при  $k \rightarrow 0$ , то есть при уменьшении коэффициента взаимодействия между лазерами,  $F_1 \rightarrow f_1$ , а  $F_2 \rightarrow f_2$ .

Для проверки работоспособности формулы (20) на экспериментальной установке (см. рис.1) был проведен эксперимент, результаты которого отображены на рис.2. В установке предусматривалась возможность поворота оси активного элемента на угол  $\pm\alpha$  относительно биссектрисы угла между осями каналов генерации. На рис.2 приводятся зависимости мощности излучения первого канала от угла  $W_1 = W_1(\alpha)$  при перекрытии второго канала и мощности излучения второго канала  $W_2 = W_2(\alpha)$  при перекрытии первого. Как видно из этих зависимостей, при повороте АЭ меняются эффективные потери в каналах. Соответственно меняются и ЧРК  $f_1(\alpha)$  и  $f_2(\alpha)$  невзаимодействующих каналов. При включении связи между каналами в соответствии с представленным выше расчетом в системе одновременно регистрируются два значения ЧРК -  $F_1$  и  $F_2$ .

При этом высшая частота  $F_1$  при изменении  $\alpha$  практически остается неизменной и с точностью проведенных измерений совпадает либо с  $f_1$  (при  $f_1 > f_2$ ), либо с  $f_2$  (при  $f_2 > f_1$ ). Более низкая частота ЧРК  $F_2$ , как показывают измерения, при всех значениях  $\alpha$  меньше частот релаксационных колебаний изолированных лазеров  $f_1$  и  $f_2$ . При этом кривая  $F_2 = F_2(\alpha)$  имеет максимум в точке  $A$ , соответствующей  $\alpha=0$  и  $f_1=f_2$ .

Для вычисления  $F_1$  и  $F_2$  по формуле (20) необходимо знать значение коэффициента связи  $k$ . Определим его на основании экспериментальных данных при  $\alpha=0$ , подбирая значение  $k$  таким образом, чтобы вычисленная по формуле (20) величина  $F_{2p}(\alpha=0)$  в точке  $A$  совпадала с измеренной величиной  $F_2(\alpha=0)$ . Для приведенного примера  $k$  оказалось равным 0,2, что согласуется с теоретическим значением  $k$ , вычисленным как отношение объемов общей части двух каналов к полному объему канала.

Для этого значения  $k$  и для измеренных величин частот  $f_1(\alpha)$  и  $f_2(\alpha)$  по формулам (20) рассчитывались значения  $F_{1p}(\alpha)$  и  $F_{2p}(\alpha)$ . На рис. 2 они представлены кружками. Из рисунка видно, что существенное отклонение расчетных значений  $F_{1p}(\alpha)$  и  $F_{2p}(\alpha)$  от экспериментальных  $F_1(\alpha)$  и  $F_2(\alpha)$  имеет место только в области значений  $\alpha > 2^\circ$ . Это можно объяснить тем, что в данной области резко снижается превышение над порогом генерации во втором канале и, соответственно, резко уменьшается ЧРК  $f_2$ . Очевидно, что вблизи порога самовозбуждения лазер особо чувствителен к внешнему воздействию, что соответствует, по-видимому, росту коэффициента связи между генераторами. Если предположить, что при  $\alpha > 2^\circ$  коэффициент связи  $k$  увеличивается до значения  $k=0,3$ , то соответствующее такому коэффициенту значение  $F_2$ , отмеченное на рис. 2 квадратиком, хорошо соответствует измеренному.

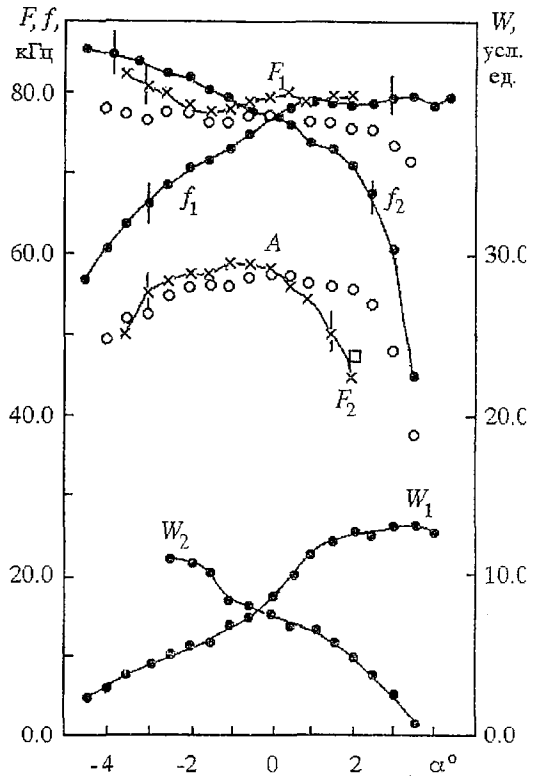


Рис. 2. Изменение мощностей излучения  $W_1, W_2$  и частот релаксационных колебаний невзаимодействующих лазеров  $f_1, f_2$  и взаимодействующих лазеров  $F_1, F_2$  при повороте активного элемента.  $\alpha$  - угол между осью активного элемента и биссектрисой угла, образованного осями каналов генерации

### 3. Расчет частот релаксационных колебаний $n$ -пучковой системы

Принципиально расчет ЧРК  $n$  лазеров со скрещивающимися каналами генерации не отличается от расчета для двухпучкового лазера, однако характеристическое уравнение, решение которого определяет собственные частоты системы, при  $n > 2$  сильно усложняется и не поддается аналитическому анализу. Для удобства численного решения характеристического уравнения его можно представить в следующем виде:

$$[1 + \sum_{i=1}^n 1/v_i] \times \prod_{i=1}^n v_i = 0, \quad (21)$$

где вспомогательная величина

$$v_i(F) = 1/k [1 - nk - F^2/f_i^2].$$

Здесь  $F$  - одно из значений ЧРК. Задавая  $i=1,2,\dots,n$ , мы получаем  $n$  значений  $F_1, F_2, \dots, F_n$  частот релаксационных колебаний системы связанных лазеров. При выводе уравнений (21),(22) все коэффициенты связи между лазерами  $k_{ij}$  считались одинаковыми и равными  $k$ .

Приведем пример расчета ЧРК пятиканальной системы лазеров ( $n=5$ ). Пусть в отсутствие связи между лазерами, то есть при условии, что четыре из пяти каналов генерации перекрыты, относительные значения ЧРК  $f_i/f_1$  имеют значения, представленные во втором столбце таблицы. Здесь  $f_1$  - наивысшая ЧРК при отсутствии связи между каналами. Как следует из данных третьего и четвертого столбцов таблицы, относительные ЧРК первого канала  $F_1/f_1$  с ростом коэффициента связи  $k$  незначительно уменьшаются. Такое же уменьшение ЧРК наблюдается и для других каналов  $F_i/f_1$  ( $i=2\div 5$ ), причем если при  $k=0$  частоты  $f_2$  и  $f_3$  были одинаковыми, то при введении связи происходит расщепление частот  $F_2/f_1 \neq F_3/f_1$ .

Выявленный характер изменения ЧРК при введении взаимодействия между модами в каналах через общий источник инверсии населенностей полностью согласуется с характером изменения ЧРК при взаимодействии продольных мод в однолучковом лазере, рассмотренном в работе [4]. Как в первом, так и во втором случае при взаимодействии лазеров или продольных мод одного лазера через общий источник инверсии населенностей ЧРК снижаются, причем уменьшение наивысшей (до включения взаимодействия) ЧРК незначительно.

Таблица

Расчетные значения частот релаксационных колебаний в системе пяти лазеров с перекрещивающимися пучками для двух значений коэффициента связи  $k$

Номер канала, $i$	$f_i/f_1$ $k=0$	$F_i/f_1$ $k=0.05$	$F_i/f_1$ $k=0.1$
1	1.00	0.90	0.88
2	0.88	0.80	0.67
3	0.88	0.74	0.63
4	0.70	0.62	0.52
5	0.55	0.50	0.42

#### 4. Сценарий перехода к динамическому хаосу при гармоническом воздействии на потери в резонаторе двухлучкового лазера

Как уже указывалось выше, переход к режиму динамического хаоса в системе связанных АИГ:  $\text{Nd}^{3+}$  лазеров имеет место при увеличении внешнего воздействия на добротность одного из резонаторов системы. Это воздействие осуществлялось электрооптическим модулятором (см. рис. 1). Бифуркационным параметром перехода в этом случае может служить напряжение  $V$ , поданное на электрооптический модулятор, при котором скачком в излучении возникает оптический хаос. На рис. 3 показаны снятые экспериментально зависимости  $V$  от частот модуляции добротности  $f$ . Согласно приведенной на рис. 3, а кривой,



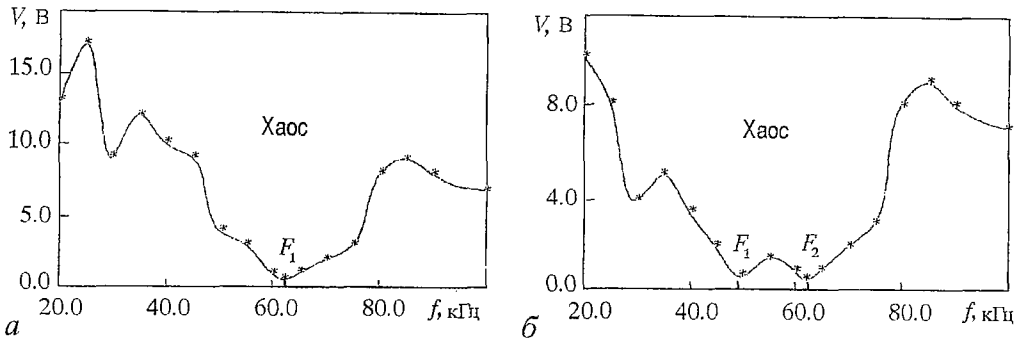


Рис. 3. Зависимость бифуркационного параметра  $V$  от частоты:  $a$  - в одноканальном,  $b$  - в двухканальном лазере

положение минимума  $V$  в однолучевой системе практически совпадает с частотой релаксационных колебаний  $F_1$ . В двухлучевой системе (рис. 3, б) к минимуму на частоте  $F_1$  добавляется второй минимум на релаксационной частоте  $F_2$ , возникающий в связанной системе. Таким образом в системе лазеров область регулярной гармонической модуляции интенсивности излучения вблизи частоты  $F_2$  сужается.

Характер перехода к динамическому хаосу при гармоническом воздействии на потери в одном из резонаторов двухлучевой системы иллюстрируется осциллограммами колебаний мощности излучения, показанными на рис. 4. При достаточно малой амплитуде внешнего воздействия колебания мощности излучения имеют почти гармоническую форму (рис.4, а). С ростом амплитуды возникают биения в колебаниях мощности (рис.4, б), то есть в фазовом пространстве рождается аттрактор в виде тора. В конце концов колебания огибающей мощности излучения приобретают вид хаотической последовательности импульсов (рис.4, в, г). Эти осциллограммы аналогичны полученным для одноканального лазера [8], что позволяет предположить, что при добавлении связи между лазерами сценарий перехода к динамическому хаосу не меняется.

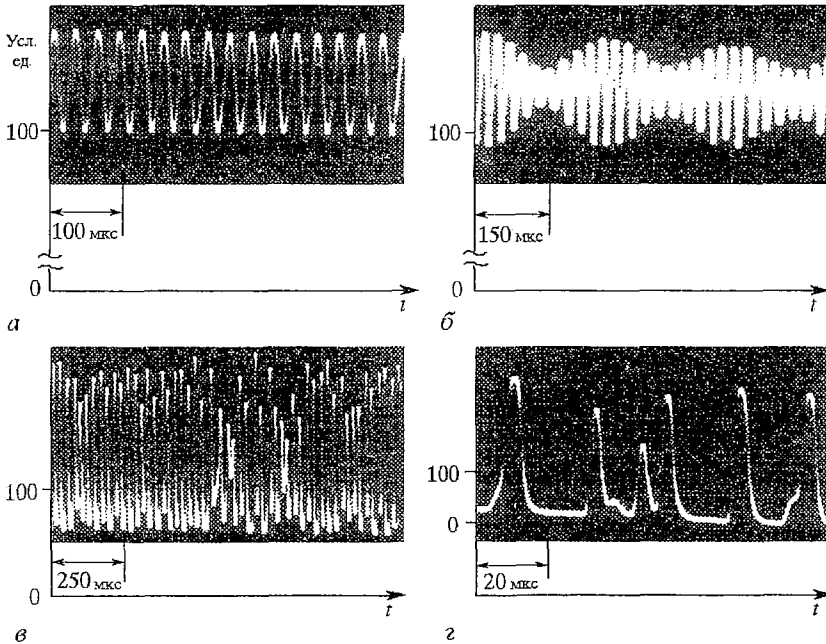


Рис. 4. Изменение временной зависимости мощности излучения системы двух связанных лазеров с ростом амплитуды модуляции потерь в резонансе одного из каналов

## Библиографический список

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
2. Ланда П.С. Колебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
3. Евдокимова О.Н., Капцов Л.Н. Амплитудный порог синхронизации и показатель Ляпунова стохастических колебаний генератора с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33, № 12. С. 2558.
4. Евдокимова О.Н., Капцов Л.Н. Спектр релаксационных частот многомодового твердотельного лазера // Квантовая электроника. 1989. Т. 16, № 8. С. 1557.
5. Khanin Ya. I. Mechanisms of nonstationary behavior of solid-state lasers. 1988. Vol. 5, № 5. P.889.
6. Зинченко С.А., Лешкевич С.В., Портнягин А.И., Пучек С.П., Филиппов А.Е. Временная структура излучения двухпучкового лазера на АИГ: Nd<sup>3+</sup> с непрерывной накачкой в режиме малых возмущений // Квантовая электроника. 1990. Т. 17, № 7. С. 841.
7. Пантел Р., Путхоф Г. Основы квантовой электроники. М: Мир, 1972.
8. Евдокимова О.Н., Капцов Л.Н. Квазипериодический переход к хаосу в многомодовом АИГ: Nd<sup>3+</sup> лазере при модуляции параметров // Квантовая электроника. 1990. Т. 17, № 7. С. 901.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию 29.03.95  
после переработки 23.06.95

## RELAXATION FREQUENCIES IN A SOLID-STATE LASER SYSTEM WITH CROSSING BEAMS

*L.N. Kaptsov, A.V. Rostovtsev*

Relaxation frequencies of several beams laser system are calculated. It is shown that the appearance of interaction between system modes by means of a common region of inversed population do not variate the highest relaxation frequency. Minimums of limit transition to a dynamic chaos are observed close to relaxation frequency.



*Капцов Леонид Николаевич* - родился в 1924 году в Москве, окончил физический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (1948). После окончания аспирантуры и защиты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1952) продолжил работу в качестве ассистента, а затем доцента физического факультета. Опубликовал более 100 научных работ по тематике физические основы действия полупроводниковых приборов и лазерная физика.



*Ростовцев Алексей Владимирович* - родился в 1973 году в Москве, студент 5-го курса кафедры общей физики и волновых процессов физического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПОПЕРЕЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ В ЛАЗЕРЕ

*Л.А. Мельников, И.В. Вешнева, А.И. Конюхов*

Представлены результаты расчетов динамики поперечной структуры поля в однонаправленном кольцевом лазере с быстросрелаксирующей активной средой произвольной оптической толщины. В расчетной модели учитывается конфигурация резонатора, содержащего сферические зеркала и диафрагмы; численные результаты даны для симметричного резонатора. Модовое разложение поля включало моды с радиальным и азимутальным индексом до 10 и 9 соответственно. Получены режимы стационарной генерации с деформированными модами, режимы квазипериодических осцилляций, а также режимы синхронизации, при которых изменение усиления и оптической силы зеркал не приводило к изменению частоты биений поперечных мод. Продемонстрированы фазовые сингулярности (оптические вихри) в поперечном профиле поля и их динамика.

### Введение

Формирование поперечных структур и соответствующая пространственно-временная динамика выходного излучения с момента создания лазеров являются предметом многочисленных публикаций. Особенности пространственно-временной динамики в основном исследовались в рамках теорий, оперирующих понятиями конкуренции, синхронизации и деформации поперечных мод [1], самофокусировки и самодиафрагмирования, вызванных поперечно-неоднородным насыщением усиления и дисперсии активной среды и волноводными эффектами [2-6].

В последнее время теоретические исследования поперечной динамики в лазерах проводятся на фоне развития концепций нелинейной динамики, турбулентности, нелинейных волн [7], а также под влиянием экспериментальных работ по использованию лазерных систем с большой апертурой (большими числами Френеля) для моделирования и исследования рождения и динамики сложных поперечных структур [8-22], аналогичных линейным вихрям и ячейкам Бенара в термоконвекции, гидродинамическим вихрям [10], а также кольцевым волнам [22].

Следует отметить, что численное моделирование в нелинейной динамике и, в частности, в нелинейной динамике лазеров является одной из составных частей исследований наряду с теорией и экспериментом. Адекватная модель позволяет провести детальную проверку предположений теории, промоделировать необходимые экспериментальные ситуации и, во многих случаях, построить качественную модель динамических явлений. Таким образом, разработка моделей сложных динамических режимов является важной задачей.

Большинство теоретических и численных результатов цитируемых работ были получены в рамках двух моделей. Первая модель (см., например [8]) основывается на пространственно-временном представлении скалярного светового поля в некоторой плоскости резонатора  $\psi(x,y,z)$ ,  $z=\text{const}$  и использует следующие предположения: 1) усиление  $G$  за проход мало ( $G \ll 1$ ); 2) коэффициент отражения зеркал достаточно высок ( $1-R \ll R$ , где  $R$  - эффективный коэффициент отражения); 3) изменение поля за проход за счет дифракции и фокусировки зеркалами мало ( $LF \ll 1$ , где  $L$  - периметр резонатора,  $F$  - эффективная оптическая сила). Тогда полное изменение поля за обход, деленное на время обхода  $T=L/c$ , может быть заменено на производную по времени  $\partial\psi/\partial t$ , что позволяет получить уравнение для поля.

Это уравнение совместно с уравнениями для элементов матрицы плотности, определяющими динамику заселенностей уровней и поляризации среды, описывает динамику лазера. Отметим, что условия 1 и 2 в модели лазера с плоскими волнами составляют так называемый mean-field-limit [23], при котором амплитуда поля в любой точке резонатора одинаково изменяется во времени. Таким образом, условия 1-3 являются обобщением этого предела на случай учета поперечной структуры поля и учета дифракции пучка в свободном пространстве и изменения его параметров за обход из-за отражений от сферических зеркал. Отметим, что условие 1 эквивалентно приближению оптически тонкой активной среды.

Вторая модель [12,14-16] основана на разложении поля по локальному набору поперечных мод Гаусса - Лагерра пустого резонатора в плоскости  $z=\text{const}$ . При условиях 1-3, можно получить уравнения для амплитуд мод и соответствующих амплитуд разложений заселенностей и поляризации, не содержащие интегрирование по  $z$ .

По-существу обе модели эквивалентны, но в работах [8,9] основное внимание уделено многомодовым режимам, в то время как в [12-18] более подробно рассматриваются маломодовые стационарные и динамические состояния. Очевидно, что условия 1-3 соответствуют резонатору с малым частотным расстоянием между поперечными модами (режим генерации одной продольной моды в резонаторе с вырождением - см., например, [19]), оптически тонкой активной среде и узкой линии усиления.

Исследование динамики поперечной структуры поля в лазерах с большим усилением и большой шириной линии (твердотельные лазеры и лазеры на красителях) требует развития моделей, не содержащих условий 1 и 2. Это означает переход к режимам генерации многих продольных мод, что приводит к режимам с заметным изменением поля на интервале, соответствующем времени обхода резонатора. В этих режимах возможна синхронизация мод с образованием коротких световых импульсов. Было показано, что перспективными для получения импульсов являются режимы быстрого изменения поперечного профиля пучка при его самовоздействии в нелинейной среде [24]. При этом оказывается удобным использование резонаторов, близких к неустойчивым, например, концентрического [25], а также упомянутых выше резонаторов с вырождением [19,26], в которых нарушается условие 3. В этом случае возникает задача о моделировании полной пространственно-временной структуры поля. С целью упрощения задачи можно воспользоваться некоторыми приближениями. Для активной среды с широкой линией усиления возможно адиабатическое исключение поляризации среды. Если дисперсия активной среды пренебрежимо мала по сравнению с дисперсией других элементов, то возможно с помощью простой модели исследовать динамику световых импульсов [27]. Для среды с быстрой релаксацией инверсии возможно дальнейшее упрощение исходных лазерных уравнений. Эти приближения эквивалентны описанию влияния активной среды с помощью нелинейной поперечно и продольно неоднородной восприимчивости, определяемой локальным полем. Такая модель применялась для исследования динамики штенсивности и параметров пучка в лазере с быстрорелаксирующей активной средой в рамках представления поля в виде разложения по «гибким» (адаптивным) модам Гаусса -

модам Гаусса - Лагерра, где параметры пучка, также как и амплитуды мод, являлись динамическими переменными [28,29].

В данной работе излагаются результаты численного моделирования динамики поперечной структуры поля в лазере с большим усилением и произвольным эффективным отражением зеркал при произвольном соотношении частотного расстояния между продольными и поперечными модами, когда влияние активной среды проявляется только через нелинейную восприимчивость. В отличие от [28,29], рассмотрены режимы общего вида в отсутствие аксиальной симметрии. Используемая схема позволила учесть существование более чем 200 поперечных мод с радиальным  $n$  и азимутальным  $m$  индексами  $0 \leq n \leq 10$ ,  $|m| \leq 9$ .

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 вводятся локальные моды и соответствующие выражения для полей незаполненного резонатора, записаны уравнения динамической модели лазера. Рассмотрены численные методы, использованные для моделирования динамики поперечной структуры поля. Раздел 2 посвящен динамике структуры поля в случае аксиально-симметричных полей и для протяженной активной среды. В разделе 3 изложены результаты исследования динамики лазера в отсутствие аксиальной симметрии, включая динамику фазовых сингулярностей (дефектов). В заключении суммированы результаты работы.

Задача ставится следующим образом. Рассмотрим схему однонаправленного кольцевого лазера, показанную на рис. 1. Тонкая линза  $L$  моделирует сферические зеркала, ограничение поля производится при помощи диафрагмы  $D$ . Двухуровневая с однородноуширенной линией усиления активная среда  $A$  с длиной  $l$  расположена симметрично относительно линзы и может, в принципе, заполнять весь резонатор ( $l \leq L$ ). Скорости релаксации разности заселенности  $\gamma$  и поляризации  $\Gamma$  будем считать большими по сравнению с частотой биений продольных мод:  $\Gamma T \gg 1$ ,  $\gamma T \gg 1$ . При этих условиях возможна генерация большого числа продольных мод, что приводит к существенным изменениям поля на интервале  $[0, T]$ . Предположим, что в резонаторе находятся дисперсионный элемент и модулятор потерь (не показанные на рисунке), осуществляющие синхронизацию мод. В этом случае будут существовать световые импульсы, форма и длительность которых определяются дисперсией групповой скорости и глубиной модуляции потерь, и слабо зависят от параметров активной среды и амплитуды поля. Таким образом, можно считать, что форма и длительность световых импульсов от прохода к проходу постоянны, в то время как амплитуда их в каждой точке поперечной плоскости изменяется. Динамику поперечной структуры поля будем изучать на интервалах времени, больших или равных  $T$ .

Так как детальная форма импульса в данной постановке задачи несущественна, то будем считать, что импульсы имеют прямоугольную форму с произвольной, но не изменяющейся от прохода к проходу длительностью.

Поле в резонаторе будем описывать как суперпозицию мод Гаусса - Лагерра с параметром пучка  $P$ , зависящим от продольной координаты  $z$ . Выбор зависимости  $P(z)$  определяется во многом соображениями удобства построения числовой схемы. При большом числе поперечных мод можно считать, что изменение  $P(z)$  соответствует дифракции пучка в свободном пространстве, включая и активную среду. При не слишком большом числе мод удобно выбирать  $P(z)$  так, чтобы минимизировалось число существенных для описания поля мод (метод «гибкого»

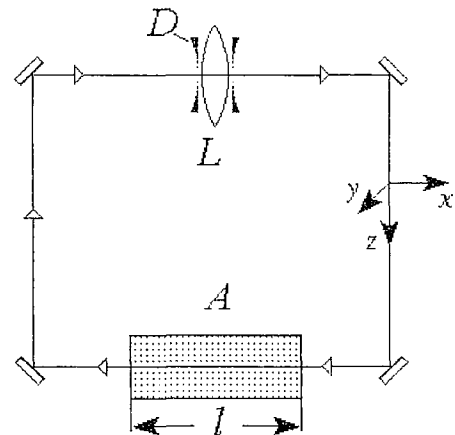


Рис. 1. Оптическая схема лазера.  $L$  - тонкая линза,  $D$  - диафрагма,  $A$  - активная среда

базиса или модифицированный обобщенный метод моментов [5,30,31]). В данной работе будем использовать оба варианта.

## 1. Динамическая модель

**1.1. Моды незаполненного резонатора.** Поле в резонаторе в некоторой плоскости  $z=\text{const}$  может быть представлено в виде разложения по собственным модам резонатора:

$$E(z, \mathbf{r}, t) = \sum_{m,n} A_n^m(z, t) \Psi_{m,n}(r, t), \quad (1a)$$

$$A_n^m = (1/2\pi) N_{m,n}^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr E(z, \mathbf{r}, t) \Psi_{m,n}^*(r, \varphi), \quad (1б)$$

где  $E(z, \mathbf{r}, t)$  - скалярная, медленно меняющаяся во времени и в пространстве амплитуда электрического поля;  $\mathbf{r}=(r, \varphi)$ ,  $r$ ,  $\varphi$  - поперечные координаты,  $z$  - аксиальная координата;  $A_n^m$  - амплитуды мод;  $m$  - азимутальный индекс;  $n$  - радиальный индекс.

Воспользуемся общепринятым набором мод Гаусса - Лагерра

$$\Psi_{m,n}(r, \varphi) = L_n^{|m|}(\eta(z)r^2)(\eta r^2)^{|m|/2} \exp(-P(z)r^2/2 + im\varphi), \quad (2)$$

$$\langle \Psi_{m,n} \Psi_{m',n'} \rangle = N_{m,n} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad N_{nm} = n!/(n+m)!, \quad \eta = \eta(z),$$

где  $L_n^m$  - полиномы Лагерра,  $P(z) = \eta(z) + i\xi(z)$  - обратный комплексный параметр пучка.

Мы используем нормированные координаты  $z/L$ ,  $r/(\lambda L/2\pi)^{1/2}$ . Преобразование поля в свободном пространстве от плоскости  $z=0$  до плоскости  $z$  задано выражениями [32]

$$A_n^m(z, t - z/c) = A_n^m(0, t) [1 + izP(0)]^{-1} \exp(i\varphi_{m,n}),$$

$$P(z) = P(0) [1 + izP(0)]^{-1}, \quad (3)$$

$$\varphi_{m,n} = (2n + |m| + 1) \arctan[\eta(0)z / (1 - \xi(0)z)],$$

где  $A_n^m(0, t)$  - амплитуды мод в точке  $z=0$ .

Преобразование поля на зеркале может быть записано как

$$P(2) = P(1) + iF, \quad A_n^m(2, t) = A_n^m(1, t) R^{1/2}, \quad (4)$$

где 1,2 - обозначают входные и выходные плоскости,  $F$  - оптическая сила зеркала,  $R$  - коэффициент отражения по мощности.

Влияние диафрагмы может быть представлено как

$$E(2, \mathbf{r}, t) = [T(\mathbf{r})]^{1/2} E(1, \mathbf{r}, t), \quad (5)$$

где  $T(\mathbf{r})$  - коэффициент передачи по мощности. Очевидно, что присутствие диафрагмы приводит к изменению параметра пучка  $P$  и к перемешиванию различных мод. Если мы предположим, что  $T(\mathbf{r}) = \exp(-\eta_d r^2)$ , где  $\eta_d = 1/w_d^2$ ,  $w_d$  - характерный радиус апертуры, то

$$P(2) = P(1) + \eta_d, \quad (6)$$

$$A_n^m(2, t) = \sum_{n'} A_n^m(1, t) T_{nn'} [\eta(1)/\eta(2)],$$

где матрица  $T_{nm'}$  определяется, как

$$T_{nm'}(x) = N_{nm'}^{-1} [(-1)^n (|m| + n')! / n! (n')!] (-n')_n (1-x)^{n-n'} x^{n-|m|-1}, \quad (7)$$

$$(-n')_n = (-n')(-n'+1) \dots (-n'+n-1), \quad (-n')_0 = 1.$$

Для астигматической диафрагмы или для оптической системы с вращением изображения преобразование мод включает моды с различными азимутальными индексами. Как хорошо известно [32], параметр пучка  $P$  в любой точке  $z$  является решением уравнения

$$P(z+1) = P(z), \quad P(z+1) = [A(z)P(z) + B(z)] / [C(z)P(z) + D(z)], \quad (8)$$

где  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  - матрица кругового обхода резонатора, вычисленная как произведение элементарных матриц распространения в свободном пространстве, матриц зеркала и апертуры, взятых в необходимом порядке. Определим мультипликатор  $\mu = dP(z+1)/dP(z) = -(CP(z)+D)^{-2}$ . Тогда период биений поперечных мод равен  $T_B = (T/2\pi) \arg(\mu)$ . Условие стабильности пустого резонатора запишется в виде  $|\mu| \leq 1$  ( $|\mu| < 1$  соответствует диссипативной устойчивости,  $|\mu| = 1$  - гамильтонову типу устойчивости).

**1.2. Динамическая модель лазера.** Распространение светового импульса в активной среде задано уравнениями Максвелла-Блоха [33]:

$$2i(\partial E/\partial z + (1/c)\partial E/\partial t) + \nabla_{\perp}^2 E = \mathcal{P}(z, \mathbf{r}, t)g, \quad (9)$$

$$\partial D/\partial t = -\gamma [D - 1 - 2i(E^* \mathcal{P} - E \mathcal{P}^*)], \quad (10)$$

$$\partial \mathcal{P}/\partial t = -(\Gamma + i\Delta)\mathcal{P} - (i/2)\Gamma D E, \quad (11)$$

где  $\nabla_{\perp}^2$  - поперечный лапласиан;  $g$  - усиление на единице длины;  $\gamma, \Gamma$  - скорости релаксации заселенности и поляризации;  $D(z, \mathbf{r}, t)$  - инверсия, нормализованная на ненасыщенную величину;  $\mathcal{P}$  - медленно меняющаяся амплитуда поляризации;  $\Delta$  - отстройка несущей частоты от центра линии.  $E$  и  $\mathcal{P}$  нормированы так, что  $|E|^2$  является безразмерной интенсивностью [33]. Решение этих уравнений при заданном поле  $E(1, \mathbf{r}, t)$  на входе в среду определяет выходное поле  $E(2, \mathbf{r}, t)$ .

Считая, что среда быстрорелаксирующая, мы можем использовать адиабатическое исключение и положить

$$\partial \mathcal{P}/\partial t = 0, \quad \partial D/\partial t = 0. \quad (12)$$

Введем соответствующие обозначения и перейдем в систему координат  $z, t - z/c$ . Получим

$$2i\partial E/\partial z + \nabla_{\perp}^2 E = [-g(\delta + i)E] / [1 + \delta^2 + |E|^2], \quad (13)$$

где  $\delta/\Gamma = \Delta$  - отстройка несущей частоты от центра линии усиления.

Так как  $t$  входит в (13) как параметр, то форма импульса в среде не изменяется, однако амплитуда импульса в каждой точке поперечной плоскости будет различна. Представим решение уравнения (13) в виде суперпозиции мод Гаусса - Лагерра

$$E(r, \varphi) = \sum_{nm} A_n^m(z) L_n^{|m|}(\eta(z)r^2)(\eta r^2)^{|m|/2} \exp(-P(z)r^2/2 + im\varphi). \quad (14)$$

В модели гибкого базиса [5,30,31] комплексный параметр пучка основной моды является динамической переменной, также как и амплитуды мод. Уравнения для неизвестных комплексных амплитуд  $A_n^m$  могут быть записаны в виде

$$2idA_n^m/dz + \sum_{lk} (L_{nl}^{mk} + \chi_{nl}^{mk})A_l^k = 0, \quad (15)$$

где

$$L_{nl}^{mk} = \langle mn | 2i\partial/\partial z + \nabla_{\perp}^2 | kl \rangle = \delta_{mk} [(|m|+n+1)V\delta_{l,n} + 1 + [-2P + (2iV'' - 4\eta)(|m|/2+n) + V(2n+|m|+1)]\delta_{m+n} V^* \delta_{l,n-1}], \quad (16)$$

$$\chi_{nl}^{mk} = g(\delta+i) \int_0^{2\pi} d\phi / 2\pi \int_0^{\infty} dx \{ \exp[-x - i(k-m)\phi] L_n^{|m|} L_l^{|k|} / [1 + \delta^2 + |E(x,\phi)|^2] \}, \quad (17)$$

$$V = (idP/dz - P^2)/[2\eta(z)], \quad V = V' + iV''. \quad (18)$$

Таким образом, распространение импульса в свободном пространстве описывается выражениями (3), преобразование поля на линзах и диафрагме выражениями (4), (5) и (6), преобразование поля в активной среде - (15)-(17). Следовательно, решение уравнений (16), включающих (17), (18), совместно с выражениями (3)-(6) дает преобразование поля в резонаторе за один проход. Пространственно-временная динамика поля в лазере определяется последовательностью этих преобразований.

Для численного решения уравнения (13) использовались следующие методы.

**А. Модовые уравнения.** Система уравнений (15) включает матричные элементы восприимчивости  $\chi_{nl}^{mk}$ , вычисление которых требует двукратного интегрирования. Аналитические выражения для  $\chi_{nl}^{mk}$  возможно получить лишь для режимов с малым числом генерируемых поперечных мод. Значительного уменьшения времени вычислений удастся достичь с помощью следующей процедуры, использующей особенности явного выражения для восприимчивости  $\chi = g(\delta+i)/(1+\delta^2+|E|^2)$  из (13).

Умножим обе части уравнения (13) на  $(1+\delta^2+|E|^2)$ , воспользуемся представлением для поля (14) и разложим обе части полученного уравнения по модам. Нетрудно получить

$$\begin{aligned} & 2iN_{kl}dA_k^l/dz + [2i\delta_{m+q,i+s}/(1+\delta^2)] \sum_{nmklpqrs} (dA_n^m/dz) A_p^q A_r^s J_{nkp}^{mlqs} = \\ & = -\delta_{ml} \sum_{nmr} A_n^m N_{mr} \{ [g(\delta-i) - 2P - |m|(2+n)(4\eta+2iV'') + V(2n+|m|+1)] \delta_{kn} - \\ & - nV^* \delta_{k,n-1} - (n+|m|+1)V\delta_{k,n+1} \} - \delta_{m+q,i+s} \sum_{nmklpqrs} A_n^m A_p^q A_r^s \{ [-2P - (|m|/2+n)(4\eta+2iV'' + \\ & + V(2n+|m|+1))] J_{nkp}^{mlqs} - (n+1)VJ_{n+1,kpr}^{mlqs} - (n+|m|)V^* J_{n-1,kpr}^{mlqs} \}, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$N_{mm} = (n+|m|)!/n!, \quad J_{nkp}^{mlqs} = \int_0^{\infty} dx L(x)_n^{|m|} L(x)_k^{|l|} L(x)_p^{|q|} L(x)_r^{|s|} x^{|m|+|q|+|s|} 2e^{-2x}.$$

Система (19) задает производные  $dA_n^m/dz$  неявно. Отметим, что все матричные элементы  $J_{nkp}^{mlqs}$ ,  $J_{n,k}^{m,l}$  выражаются в явном виде через интегралы от произведений двух или четырех полиномов Лагерра и вычисляются точно. Таким образом, для интегрирования системы следует вычислить соответствующие произведения амплитуд, решить линейную систему относительно производных, а затем воспользоваться, например, методом Рунге - Кутты для нахождения  $A_n^m$ .

**Б. Метод расщепления.** Следуя [34], разделим активную среду на «тонкие» слои, чередующиеся с участками свободного пространства. В активных слоях можно пренебречь дифракцией, в то время как в свободном пространстве  $g=0$ . В произвольной точке  $\mathbf{r}$  поперечной плоскости в активной среде изменение поля  $E(\mathbf{r},z)$  определяется решением уравнений

$$dE/dz = -[i(i+\delta)gE]/[2(1+\delta^2+y)], \quad (20)$$

$$dy/dz = -gy/(1+\delta^2+y).$$



Распространение на участке свободного пространства задано выражениями (3). Таким образом, попеременно используя разложение (14), обратное преобразование (16), (3) и (20), можно определить преобразование поля в активной среде произвольной оптической толщины.

При вычислениях использовались оба метода **A** и **B**; результаты практически совпали и поэтому в дальнейшем не указывается метод расчета.

## 2. Приближение аксиально-симметричных мод и оптически плотной активной среды

В случае аксиально-симметричных мод решение уравнения (13) запишем в виде

$$E(z,r) = \sum_n^N A_n L_n(\eta r^2) \exp(-P(z)r^2/2). \quad (21)$$

В данном случае правильный выбор зависимости  $P=P(z)$  обеспечивает сокращение требуемого числа мод  $N$ . В частности, если выбрать  $P(z)$  так, чтобы

$$V = [FA^*_0 - F^*A_2]/[|A_0|^2 - |A_2|^2] = (2idP/dz - P^2)/\eta, \quad (22)$$

где

$$F = -(\chi_{10}A_0 + \chi_{12}A_2/2),$$

то можно ограничиться всего тремя модами [31].

Из системы (18) в этом случае мы получаем систему уравнений для амплитуд трех мод.

$$\begin{aligned} 2idA_0/dz &= (L_{00} + \chi_{00})A_0 + (L_{01} + \chi_{01})A_1 + \chi_{02}A_2, \\ 2idA_1/dz &= (L_{10} + \chi_{10})A_0 + (L_{11} + \chi_{11})A_1 + (L_{12} + \chi_{12})A_2, \\ 2idA_2/dz &= \chi_{20}A_0 + (L_{21} + \chi_{21})A_1 + (L_{22} + \chi_{22})A_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Численное моделирование динамики лазера проводилось при следующих значениях параметров:  $\delta = 0$ ,  $\eta_d = 0.005$ ,  $F = 0 \dots 4$ ,  $G = gl = 0 \dots 4$ ,  $l = L = 1$ .

Было обнаружено, что установившееся распределение поля, мощность, размер пятна  $1/\eta$  и кривизна пучка  $\xi$  могут несколько отличаться при различных начальных условиях, в связи с чем использовались стандартные начальные условия:  $A_0=0.1$ ,  $A_1=0$  и  $A_2=0$ . На рис. 2, а показана карта динамических состояний на плоскости параметров  $G, F$ . Показаны стационарные состояния с нулевой  $St$  и ненулевой  $St$  интенсивностью, состояния с периодической и квазипериодической модуляцией интенсивности от прохода к проходу. Так как изучались достаточно короткие (до 1500 проходов) реализации, то характер квазипериодической модуляции не указывается. Линии бифуркаций строились как линии, на которых один из мультипликаторов становился равным 1 по модулю. В данном случае мы имеем 7 независимых действительных переменных после исключения фазы поля на оси пучка. Значения мультипликаторов вычислялись как собственные значения якобиана преобразования от «вектора»  $(A_1 \exp(-i\psi_n), A_2 \exp(-i\psi_n), A_3 \exp(-i\psi_n), P)$  на  $n$ -ом проходе к «вектору»  $(A_1 \exp(-i\psi_{n+1}), A_2 \exp(-i\psi_{n+1}), A_3 \exp(-i\psi_{n+1}), P)$  на следующем,  $(n+1)$ -ом проходе, где  $\psi_n = \arg(A_1 + A_2 + A_3)_n$ ,  $\psi_{n+1} = \arg(A_1 + A_2 + A_3)_{n+1}$ . При исследовании циклов  $2T, 3T, \dots$  вычислялись соответствующие мультипликаторы за два, три, ... прохода. Было обнаружено, также как и в [28,29], что существуют узкие области синхронизации вблизи тех значений  $F$ , при которых  $\arg(\mu) = 2\pi(p/q)$ , где  $p$  и  $q$  - целые. В частности, на рис. 2, б показана структура такой области синхронизации при  $p=1, q=2$  (цикл  $2T$ ). При больших значениях усиления наблюдалась бифуркация удвоения цикла 2, то есть цикл  $4T$ . Штриховой линией показана граница области синхронизации, полученная из анализа последовательности итераций, так как из-за близости нескольких мультипликаторов к (-1) используемый алгоритм давал неоднозначные

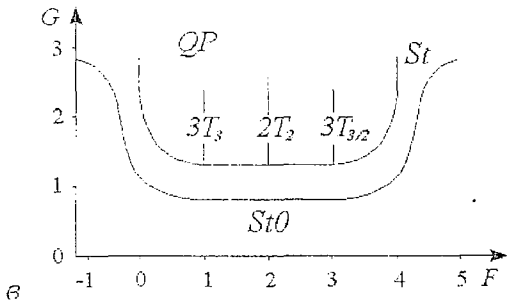
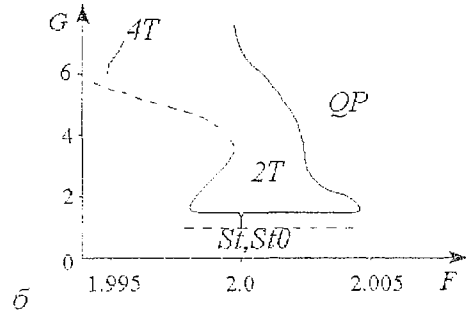
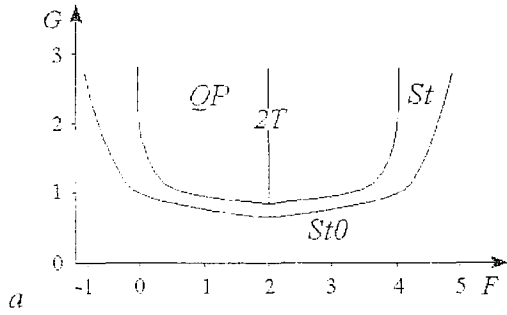


Рис. 2. Диаграмма оптических состояний на плоскости параметров усиления по мощности  $G$  и оптической силы линзы  $F$ :  $a$  - случай генерации трех аксиально-симметричных мод;  $b$  - область синхронизации вблизи цикла  $2T$  (отмеченного на рис. 2,  $a$  линией) в увеличенном масштабе. Линия, обозначенная итрихами, проведена с использованием результатов итераций отображения для амплитуд мод и параметров пучка, так как в этой области происходила потеря устойчивости при вычислении мультипликаторов;  $v$  - неаксиально-симметричный случай. Линиями  $2T$  и  $3T$  схематически показаны режимы периодических колебаний (циклы  $2T$  и  $3T$ )

результаты. Для исключения гистерезиса начальные значения параметров выбирались внутри зоны, а затем изменялось либо значение  $G$ , либо  $F$  до выхода из режима синхронизации.

Отметим, что при  $F=0$  и  $F=4$  (эти значения соответствуют резонатору с плоскими зеркалами и концентрическому резонатору) поперечное ограничение поля происходит только из-за диафрагмы. При этом резко увеличиваются потери п. соответственно, пороговое значение усиления. Отметим также, что хотя стационарная генерация возможна при  $F < 0$  и  $F > 4$ , режимов с модуляцией интенсивности не наблюдается. Также, как и в [28], стационарные режимы соответствуют генерации в той или иной степени деформированной основной моды, в то время как режимы с квазипериодической модуляцией характеризуются существенным присутствием высших мод.

Переход от режима стационарной генерации к режиму модуляции мощности можно интерпретировать как выход из-под порога высших мод и возникновение соответствующих интерференционных структур в поперечном профиле поля. Вследствие различных набегов фаз мод за обход возникает квазипериодическая модуляция мощности генерации. Так как  $\delta=0$ , то дополнительный набег фазы из-за линейной или нелинейной дисперсии отсутствует, что объясняет практически вертикальный ход линий резонансов  $nT$  и узость областей синхронизации.

### 3. Динамика поперечной структуры поля в отсутствие аксиальной симметрии

В общем случае в лазере могут существовать моды с  $m \neq 0$ , что существенно усложняет динамику и поперечную структуру поля. Для численного моделирования использовалась конфигурация лазера с тонкой активной средой ( $l \ll 1$ ) при условии  $G = gl \sim 1$  и с учетом мод  $n \leq 10$ ,  $m \leq 9$ . Динамика параметра пучка основной моды соответствовала поведению пучка в свободном пространстве, а значение  $P(z=0)$  равнялось параметру пучка основной моды незаполненного

резонатора ( $V=0$ ). Для исключения зависимости от начальных условий также использовались стандартные условия  $A_0^0=0.1$ ,  $A_n^0=0$ ,  $|m| > 0$ . Вычисления проводились при тех же значениях параметров, что и в разделе 2.

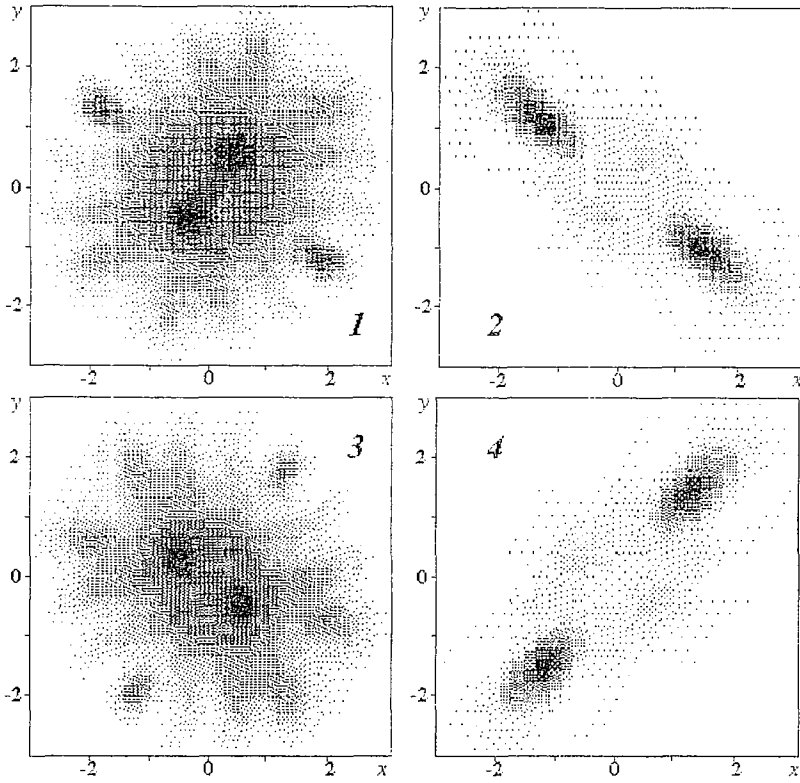
Следует отметить, что в данной системе существует по крайней мере два уровня нарушения симметрии. Первый связан с разрушением радиальной симметрии поля при возникновении мод с  $m \neq 0$ . При радиальной симметрии активной среды моды с индексами  $m = \pm 1, \pm 2$  равноправны, и нарушение радиальной симметрии тем не менее приводит к структурам, симметричным относительно оси  $\varphi=0$  [8,9]. Нарушение этой симметрии будет происходить на втором уровне. Установление определенных соотношений между амплитудами мод будет характеризовать другие уровни динамической симметрии, в то время как первые два уровня связаны с симметрией исходных модовых функций.

Диаграмма динамических состояний показана на рис. 2, в. Линиями  $3T$  и  $2T$  показаны зоны синхронизации соответствующих циклов, причем нижние индексы показывают значение числа вращений  $\nu = 2\pi / \arg(\mu) = T/T_B$ . Очевидно, что при выводе картины поля на каждом проходе цикл с числом вращений ( $3/2$ ) проявляется как цикл 3.

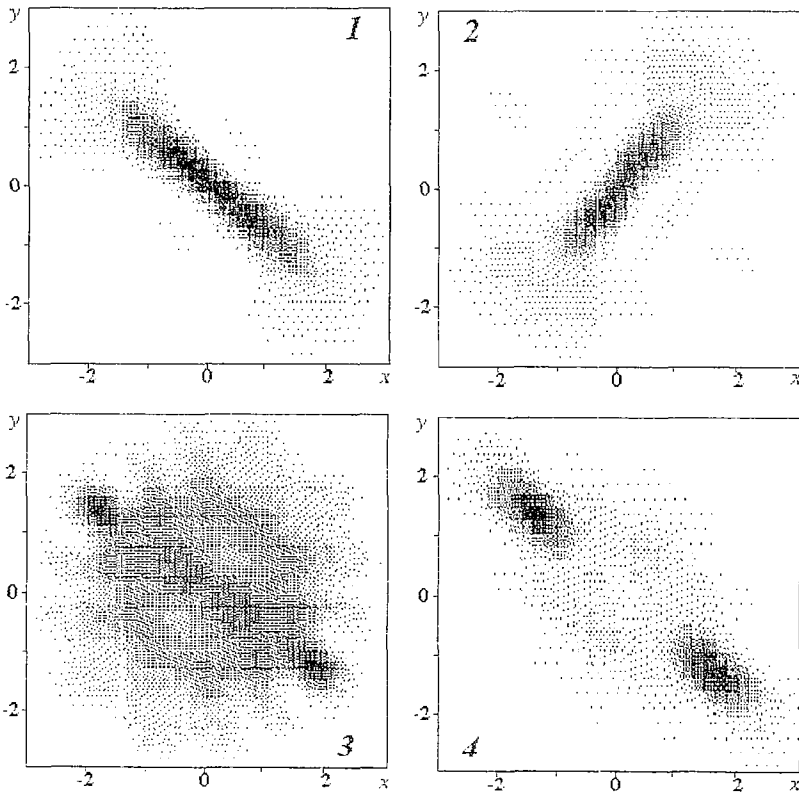
Видно, что диаграмма в целом подобна диаграмме на рис. 2, а за исключением некоторых количественных различий. В то же время есть и принципиальные отличия, в частности, области синхронизации оказались чрезвычайно узкими. Это, по-видимому, связано с данной конфигурацией резонатора, в которой набег фазы основной моды  $\varphi_0^0$  меняется от 0 до  $2\pi$  при изменении  $F$  от 0 до 4. Резонанс (и области синхронизации) следует ожидать здесь при  $F \rightarrow 4$ , так как набег фаз высших мод пропорциональны  $\varphi_0$ ,  $\varphi_n^m = (2n + |m| + 1)\varphi_0^0$ , и  $\varphi_n^m \rightarrow 2\pi k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) только при  $\varphi_0^0 \rightarrow 2\pi$ . В том месте, где был цикл  $2T$  при  $m=0$ ,  $\varphi_0^0 = \pi/2$ . Так как разность фаз соседних поперечных мод при  $m \neq 0$  составляет  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2, \dots$ , то должен существовать цикл  $4T$  в поперечном профиле. В то же время полная мощность поля определяется  $\sum_{n,m} |A_n^m|^2$ , и при соответствующем (противофазном) изменении амплитуд мод с индексом  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  может наблюдаться цикл  $2T$ , что и происходило в численном эксперименте. Результаты расчетов при  $\delta \neq 0$  показывают, что ширины областей синхронизации существенно увеличиваются.

На рис. 3, а, б показана эволюция структуры пучка от прохода к проходу при  $G=1.5$ ,  $F=2$  в режиме цикла  $4T$  (по мощности  $2T$ ) (а) и при  $G=1.6$ ,  $F=3$  (цикл  $6T$  по профилю и  $3T$  по мощности) (б). Показаны двумерные распределения интенсивности во входной плоскости линзы от прохода к проходу, пронумерованные в порядке возрастания. Более детальное рассмотрение динамики поля внутри резонатора показывает, что эволюция поля происходит сложным образом (рис. 3, в). При данной конфигурации резонатора и активной среды преобразование поля в резонаторе связано в основном с дифракцией в свободном пространстве. Очевидно, что вследствие дифракции пучок, вытянутый вдоль одной из осей, на определенном расстоянии вытягивается вдоль ортогонального направления, как это видно из рисунка. При  $\delta=0$  роль активной среды сводится к нелинейно пропускающему пространственному фильтру, меняющему только амплитуду волны в данной точке. Из рис. 3, а, б видно, что качественная картина эволюции пучков в режимах циклов  $2T(4T)$  и  $3T(6T)$  подобна.

Несколько иная картина наблюдается в режимах квазипериодических осцилляций мощности. На рис. 4, а, б показана эволюция структуры поля (а) и временные зависимости для интенсивности основной моды  $I_{00} = |A_0^0|^2$ , следующей моды с  $m=1$   $I_{01} = |A_0^1|^2$  и полной мощности  $W$  (б) при  $G=1.5$ ,  $F=2.5$ . Видно, что амплитуды мод приблизительно постоянны, в то время как полная мощность модулирована на частоте, соответствующей частоте биений поперечных мод. Видно также, что характер изменения структуры поля соответствует с хорошей точностью вращению картины как целого, с соответствующим незначительным



*a*



*b*

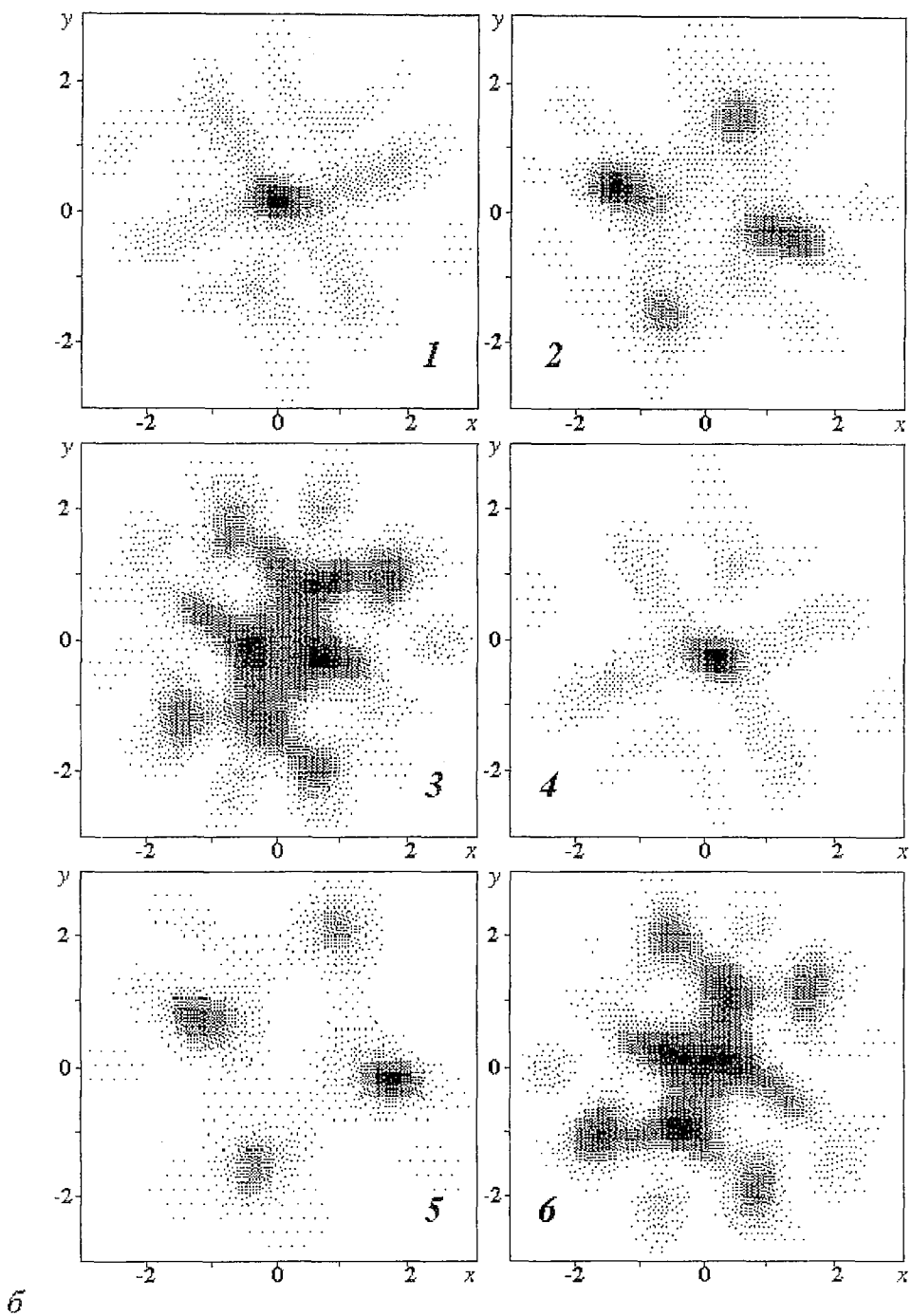


Рис. 3. Эволюция распределения мощности непосредственно перед линзой: *a* - за 4 прохода при  $F=2$ ,  $G=1.5$ ; *б* - за 6 проходов при  $F=3$ ,  $G=1.6$ , соответствующая режимам колебаний мощности  $2T$  (*a*) и  $3T$  (*б*); *в* - динамика структуры поля внутри резонатора, показывающая преобразование пучка от изображенного на картинке 1 рис. 3, *a* к картинке 2

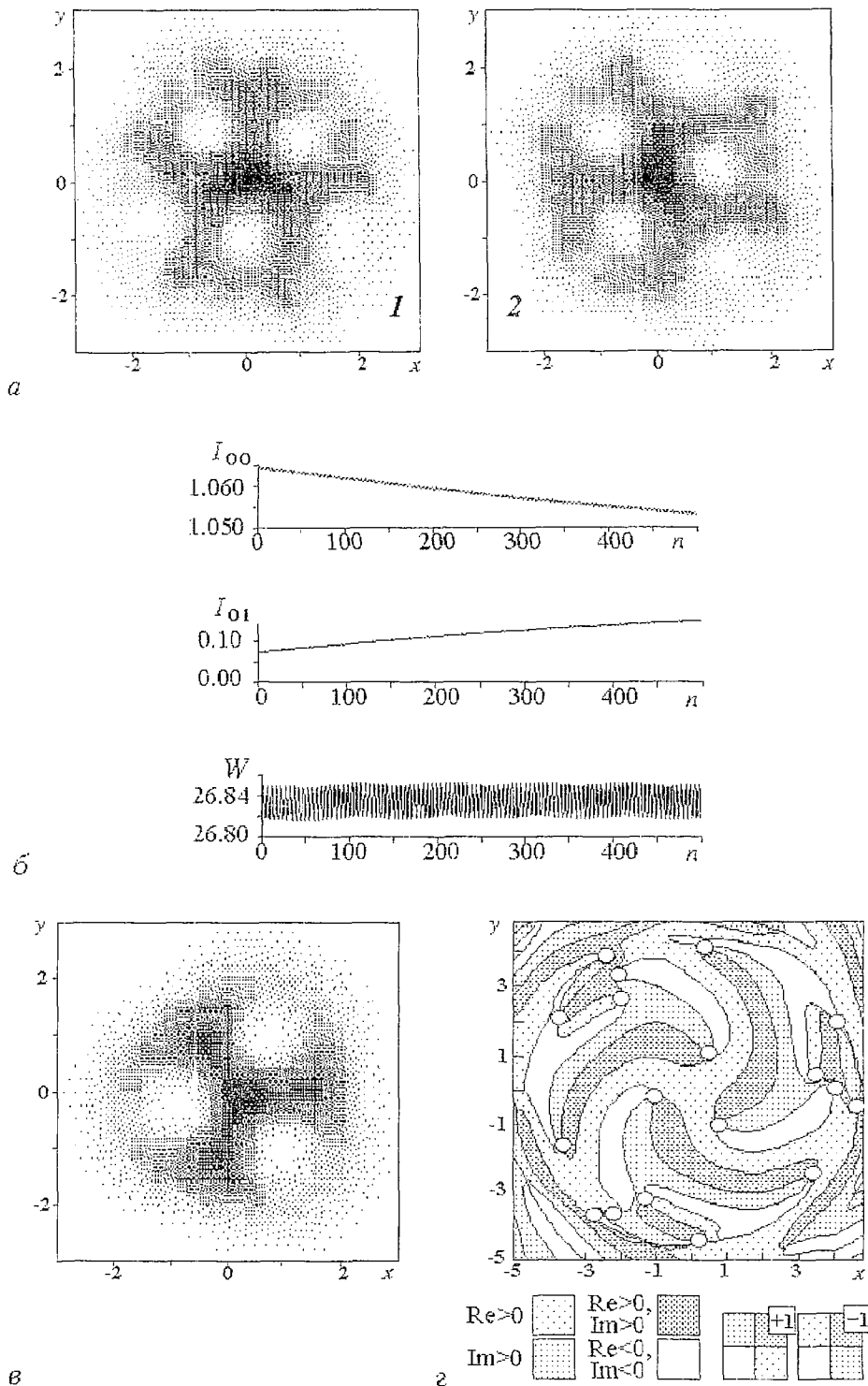
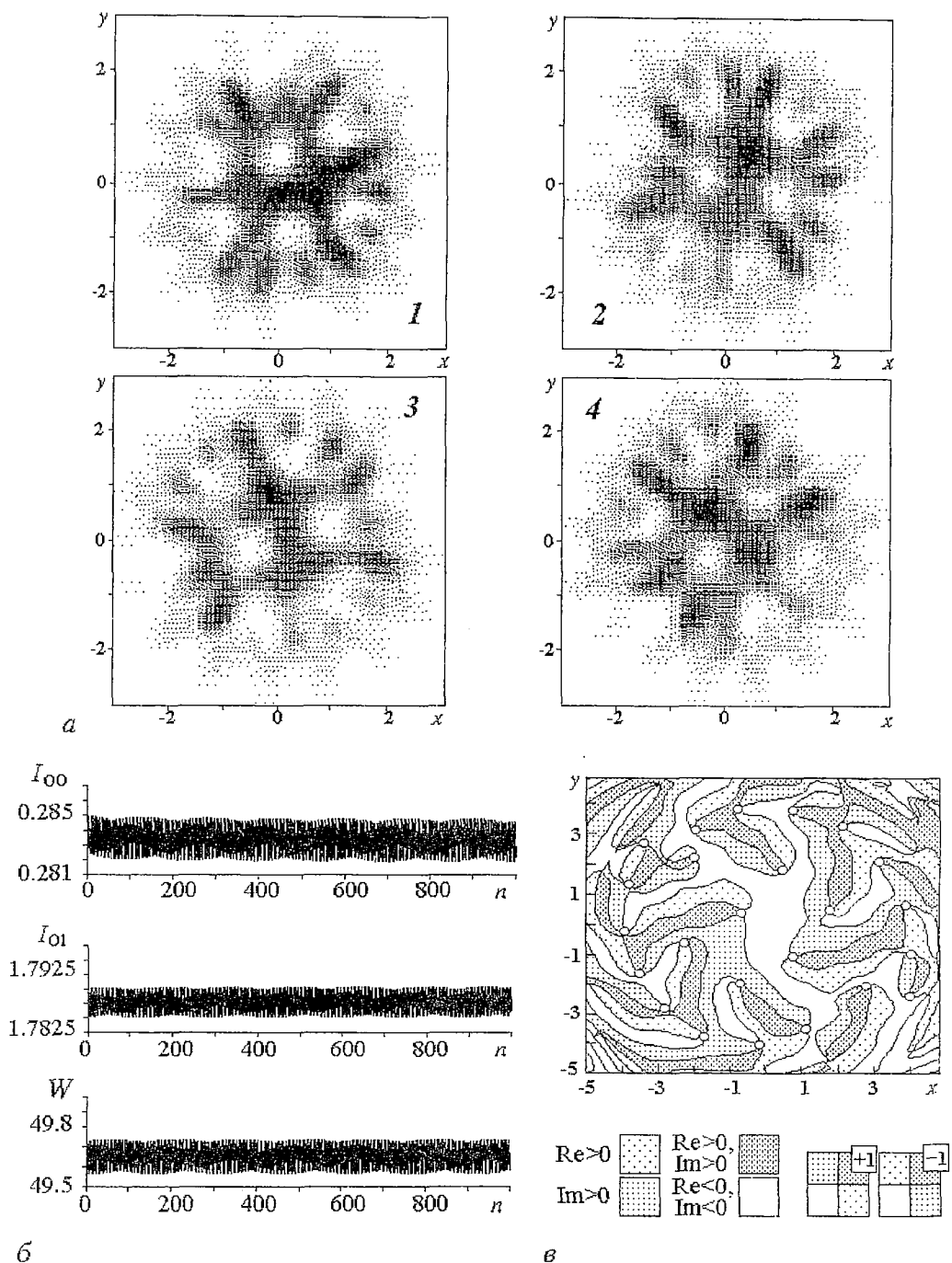


Рис. 4. Динамика в режиме квазипериодических колебаний  $F=2.5, G=1.5$ : а - эволюция распределения поля перед линзой за 2 прохода; б - эволюция полной мощности пучка  $W$  и интенсивности мод с  $m=0, n=0$  и  $m=1, n=0$  ( $I_{00}$  и  $I_{01}$  соответственно) от прохода к проходу; в - структура пучка и г - положение фазовых сингулярностей в режиме квазипериодической осцилляции  $F=2.5, G=1.3$



б

в

Рис. 5. Динамика в режиме квазипериодических колебаний  $F=2.5$ ,  $G=1.8$ : а - эволюция распределения поля перед линзой за 4 прохода; б - эволюция полной мощности пучка  $W$  и интенсивности мод с  $m=0$ ,  $n=0$  и  $m=1$ ,  $n=0$  ( $I_{00}$  и  $I_{01}$  соответственно) от прохода к проходу; в - положение дефектов

изменением ее яркости. Считая, что амплитуды мод постоянны, и учитывая набег фазы, можно определить угол поворота картины за обход  $\varphi_n^m = -(2n+|m|)\varphi_0^0/m$ ,  $m \neq 0$ , из чего следует, что при  $n=0$  угловая скорость вращения не зависит от  $m$ . Таким образом, суперпозиция мод  $\{0,0\}$  и  $\{m,0\}$  соответствует картине, вращающейся как целое с постоянной угловой скоростью. На рис. 4, в показано распределение

интенсивности при  $G=1.3$ ,  $F=2.5$ . Нетрудно показать, что подобные картины получаются при возмущении моды с  $m=3$ ,  $n=0$ :  $E(\mathbf{r})=A_0^3\Psi_0^3+A_0^0\Psi_0^0$ . Как известно [16], если поле в поперечной плоскости содержит изолированный нуль, то при обходе точки нуля по замкнутому контуру криволинейный интеграл от градиента фазы дает  $2\pi q$ , где  $q=\pm 1, \pm 2, \dots$  - «топологический заряд» фазовой сингулярности «дефекта» [8,9,16]. В данном случае мы имеем дефект с  $q=+3$  при  $A_0^0=0$  в точке  $\mathbf{r}=0$ , который распадается на три дефекта с зарядами  $+1$  при  $A_0^0 \neq 0$ .

Более подробная картина фазовых сингулярностей показана на рис. 4, 2, где кроме упомянутых выше трех дефектов в центре можно найти еще несколько на периферии пучка. Очевидно, что их местоположение определяется пересечением линий  $\text{Re}E=0$  и  $\text{Im}E=0$ , а заряд - чередованием областей  $\text{Re}E>0$ ,  $\text{Im}E>0$  («шаблон» для определения знака дефекта также показан на рисунке). Их существование определяется присутствием мод с  $m>3$ ,  $n=0$ . Из рисунка видно, что знаки периферийных дефектов определены однозначно знаками центральных, так как они находятся на одних и тех же кривых  $\text{Re}E=0$ ,  $\text{Im}E=0$ . Это свойство полей в линейном случае отмечалось в [35]. В лазере динамика дефектов определяется дифракцией и нелинейностью среды. При дифракции пучка амплитуды мод меняются одинаково, а фазовые набегги приводят к вращению картины.

В тонкой нелинейной среде положение дефекта практически не изменяется, так как при любом значении усиления нулевое значение поля остается нулевым (спонтанное излучение приводит лишь к небольшому сдвигу дефекта). Отметим, что начальные условия соответствовали заряду  $q=0$ , и полный заряд  $\Sigma q=0$ , по крайней мере в области, содержащей почти 100 % мощности пучка ( $r/w \leq 5$ ). Это может характеризовать возникновение дефектов через рождение пар с  $q \neq \pm 1$  и последующий распад образовавшейся пары, аналогично тому, как это наблюдалось в [16] при небольшом числе поперечных мод. С ростом усиления вследствие включения высших мод картина усложняется (рис. 5). Вращение картины (рис. 5, а) сопровождается более выраженными изменениями яркости и модуляцией амплитуд мод и мощности (рис. 5, б) с частотой биений, вследствие возбуждения мод с  $n>0$ . Соответствующая картина дефектов достаточно сложна и их положение становится частично неупорядоченным (рис. 5, в).

### Заключение

В статье представлена динамическая модель лазера, которая может быть применена для исследования динамики поперечной структуры поля. В отличие от большинства работ, в которых в той или иной степени использовалось приближение «mean-field-limit» или приближение небольшого числа поперечных мод, в данной работе использована модель без ограничения на число поперечных мод и параметры резонатора в приближении, когда активная среда задана через нелинейную восприимчивость, а ее дисперсией можно пренебречь. Модель легко обобщается на случай медленной релаксации инверсии [27].

Представленные результаты численного моделирования показывают, что в ряде случаев возможно существование режимов захвата, когда частота биений поперечных мод есть субгармоника частоты  $c/(2L)$ . В этом режиме небольшие изменения кривизны зеркал или их расположения не влияют на частоту биений поперечных мод. Для данной системы характерна также генерация деформированных стационарных мод (кооперативный захват [15]) и режимы с квазипериодической модуляцией мощности в пучке, сопровождающиеся вращением картины или более сложными явлениями. Динамика поперечной структуры поля при умеренных усилениях за проход  $G \leq 1.2$  в большой степени определяется интерференцией мод резонатора при медленно изменяющихся амплитудах мод. В этих режимах эволюция фазовых сингулярностей поля (дефектов) происходит практически как в линейном случае. Сравнение результатов данной работы с [8,9,16,18], а также с опубликованными в последнее



время результатами [36-39] показывает, что динамика установления инверсии и поляризации в активной среде не оказывает решающего влияния на динамику поперечной структуры поля в режимах, соответствующих устойчивой конфигурации резонатора, и результаты, полученные для лазеров с малым числом продольных мод, могут быть также применены к исследованию поперечной динамики в лазерах, генерирующих короткие или сверхкороткие импульсы.

*Выполнение работы поддерживалось грантами NS4000 Международного научного фонда и ESPRIT CONTRACT P9282-ACTCS, EC-RUSSIA COLLABORATION.*

## Библиографический список

1. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах / Ред. Ю.Л.Климонтович. М.: Наука, 1974.
2. *Firth W.E.* // Opt.Comm. 1977. Vol.22. P. 226.
3. *Yariv A., Yeh P.* // Opt.Comm. 1978. Vol. 27. P. 295.
4. *Акчурун Г.Г., Мельников Л.А., Рабинович Э.М., Тучин В.В.* // РЭ. 1981. Т.26. С. 1453.
5. *Мельников Л.А., Рабинович Э.М., Тучин В.В.* Газоразрядные лазеры с линзоподобными средами. Саратов: Изд-во СГУ, 1987.
6. *Khanin Ya.I., Kogan F.G., Novikov V.D. et al.* // Opt.Comm. 1980. Vol. 32. P.456.
7. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
8. *D'Angelo E.J., Green C., Tredicce J.R., Abraham N.B. et al.* // Physica D. 1992. Vol. 61. P. 6.
9. *Chen Z., Abraham N.B., Balle S., D'Angelo E., Tredicce J.R.* // Proc. SPIE. 1994. Vol. 2099. P. 2.
10. *Couillet P., Gil L., Rocca F.* // Opt. Commun. 1989. Vol. 73. P. 403.
11. *Tamm Chr., Weiss C.O.* // J.Opt.Soc.Amer. 1990. Vol. B7. P. 1034.
12. *Lugiato L.A., Oppo G.L., Tredicce J.R., Narducci L.M., Pernigo M.A.* // J.Opt. Soc. Amer. 1990. Vol. B7. P. 1019.
13. *Hollinger F., Jung Chr., Weber H.* // Opt. Commun. 1990. Vol. 75. P. 84.
14. *Brambilla M., Battipede F., Lugiato L.A., Penna V. et al.* // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 5090.
15. *Lugiato L.A., Oldano C., Narducci L.M.* // J.Opt.Soc.Amer. 1988. Vol. B5. P. 879.
16. *Lugiato L.A.* // Phys. Rep. 1992. Vol. 219. P. 293.
17. *Lugiato L.A., Prati F., Narducci L.M., Ru P. et al.* // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. P.3847.
18. *Weiss C.O.* // Phys. Rep. 1992. Vol. 219. P. 311.
19. *Dangoisse D., Hennequin D., Lepers C., Louvergneaux E., Gloriex P.* // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46. P. 5955.
20. *Petrossia F., Pinfrol M., Maitre, Courtois J.Y. et al.* // Europhys.Lett. 1992. Vol. 16. P. 689.
21. *Swartzlander G.A., Law G.T.* // Phys.Rev.Lett. 1992. Vol. 69. P. 2503.
22. *Tredicce J.R., Hayet G., Mindlin G.* // Eur.Quant.Electr.Conf., Firenze, Italy, 1993.
23. *Bonifacio R., Lugiato L.A.* // Lett.Nuovo Cimento. 1978. Vol. 21. P.505.
24. *Gabetta G., Huang D., Jacobson J., Ramaswamy N., Ippen E.G., Fujimoto J.G.* // Opt. Lett. 1991. Vol. 16. P. 1756.
25. *Piche M.* // Opt. Commun. 1991. Vol. 86. P. 156.
26. *Kafka J.D., Baer T.* // CLEO 1991, Tech. Digest Ser., (Opt. Soc. Amer., Washington DC) JMA2.
27. *Melnikov L.A., Veshneva I.V., Konukhov A.I.* // J. Chaos, Solitons, and Fractals. 1994. Vol. 4. P.1535.

28. Melnikov L.A., Tatarkova S.A., Tatarkov G.N. // J. Opt. Soc. Amer. 1990. Vol. B7. P. 1286.
29. Veshneva I.V., Melnikov L.A., Sokolov A.A., Tatarkov G.N. // Nonlinear Dynamics in Optical Systems. Tech. Digest (Opt. Soc. Amer., Washington DC). 1992. Vol. 16. P. 154.
30. Вешнева И.В., Мельников Л.А. // Опт. и спектр. 1991. Т. 71. С. 175.
31. Дербов В.Л., Мельников Л.А., Новиков А.Д. // Квант. электр. 1987. Т. 14. С. 2529.
32. Маркузе Д. Оптические волноводы и резонаторы. М.: Мир, 1974.
33. Scully M.O., Sargent M., Lamb W.E. // Laser Physics. 1974
34. Feit M.D., Fleck J.A // Appl. Opt. 1979. Vol. 17. P. 3390.
35. Shvartsman N., Freud I. // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 72. P. 1008.
36. Brambilla M., Cattaneo M., Lugiato L.A., Pirovano R. et al. // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. P. 1427.
37. Coates A.B., Weiss C.O., Green C., D'Angelo E.J. et al. // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. P. 1452.
38. Jacobsen P.K., Lega J., Feng Q., Staley M. et al. // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. P. 4085.
39. Lugiato L.A., Kaige W., Abraham N.B. // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. P. 2028.

НИИ механики и физики  
Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 29.05.95  
после переработки 30.11.95

## THE NUMERICAL SIMULATION OF TRANSVERSE PATTERN DYNAMICS IN A LASER

L.A. Melnikov, I.V. Vechneva, A.I. Konukhov

The results of numerical modelling of transverse pattern dynamics in a unidirectional ring laser with fast-relaxed active medium of arbitrary optical thickness are presented. The geometry of a cavity containing spherical mirrors and apertures is included in the numerical model. The results presented for the symmetric cavity. Modes with radial index up to 10 and azimuth ones up to 9 are included in the field decomposition. The stationary regimes with deformed modes, the regimes of quasiperiodic oscillations, and locking regimes were observed, in the last ones transverse-mode beat frequency is independent from the gain or mirror optical power variations. The phase singularities (optical vortices) in transverse field pattern and its dynamics are demonstrated.



Мельников Леонид Аркадьевич - родился в 1949 году, окончил физический факультет СГУ (1971). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики с 1992 года. Область научных интересов: физика лазеров, лазерная спектроскопия, лазерные и волоконно-оптические измерительные системы, оптическая гироскопия, нелинейная динамика лазеров и оптических систем, нелинейное распространение световых пучков и импульсов в волноведущих и резонансных средах, лазеры сверхкоротких импульсов, поперечная нелинейная оптика. Автор более чем 100 научных публикаций, член Оптического Общества Америки, Международного Общества по оптической технике.



*Вешнева Ирина Владимировна* - родилась в 1966 году, окончила физический факультет СГУ (1989). Аспирантка кафедры оптики СГУ. Стипендиат программы «Соросовские аспиранты» (1995). Подготовила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Область научных интересов: нелинейная динамика лазерных систем.



*Конюхов Андрей Иванович* - родился в 1972 году, окончил физический факультет СГУ. Аспирант кафедры оптики СГУ. Стипендиат программы «Соросовские аспиранты» (1995). Область научных интересов: нелинейная динамика лазерных систем.

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В ЛАЗЕРЕ С ПОВОРОТОМ ПОЛЯ

*К. В. Прокофьева, В. И. Шмальгаузен*

В работе исследуется пространственная динамика цилиндрически симметричного однонаправленного кольцевого лазера со сферическими зеркалами и элементом, осуществляющим поворот поля на некоторый угол  $\theta$ . В качестве такого элемента может использоваться призма. Угол поворота поля влияет на частоты мод пустого резонатора и позволяет формировать частотно-вырожденные семейства, которые не существуют в резонаторе без поворота, например, семейство, состоящее из бесконечного числа мод. Угол поворота позволяет воздействовать на формирование пространственных структур в лазере. Выполнено численное моделирование для двух моделей активной среды лазера: двухуровневой модели и модели, учитывающей вращательные подуровни молекулы  $\text{CO}_2$ . Последняя модель приводит к появлению дополнительного диссипативного слагаемого, которое в ряде случаев изменяет динамику системы. Число вращательных подуровней увеличивает скорость релаксации системы к стационарному состоянию.

### Введение

Анализ пространственных и пространственно-временных явлений в нелинейных системах с оптической обратной связью представляет значительный интерес как с практической, так и с теоретической точек зрения. Работы в этой области касаются пассивных систем без инверсии населенности, регенеративных усилителей, лазеров [1]. В течение последних 15 лет лазерные системы преимущественно исследовались с точки зрения временных явлений. Это связано прежде всего с простотой математических вычислений при использовании приближения плоских волн. В этом случае предполагается, что поле внутри резонатора является однородным в плоскости, ортогональной к направлению распространения пучка. Это приближение исключает возможность описания пространственных явлений. Последние работы в данной области касаются рассмотрения пространственных задач [2]. Авторы работы [2] описывают три режима работы лазера. В одномодовом режиме поперечный профиль выходного пучка формируется с помощью одной пространственной моды. Стандартный многомодовый режим определяется взаимодействием двух или более мод. В этом случае возможны осцилляции, которые могут быть периодическими, квазипериодическими или хаотическими. При режиме кооперативного захвата частоты моды, формирующие стационарную поперечную конфигурацию поля, имеют одинаковую частоту и фазу.

В работе [2] рассматривается кольцевой лазер со сферическими зеркалами и цилиндрической симметрией относительно лазерной оси. Модами такого резонатора являются моды Гаусса - Лагерра. Пространственные явления описываются в терминах взаимодействия мод пустого резонатора. В лазере могут формироваться различные структуры, которые сменяют друг друга при изменении контрольных параметров, таких, например, как параметр накачки или ширина накачиваемой области.

Мы исследуем пространственные и пространственно-временные явления в кольцевом однонаправленном лазере с поворотом поля. Также, как в [2], предполагается наличие цилиндрической симметрии резонатора. В некоторых типах лазеров на каждом проходе осуществляется поворот электрического поля на определенный угол, например, в лазерах с неплоскими резонаторами. Для упрощения теоретических вычислений мы будем рассматривать кольцевой лазер, в который дополнительно вставлена призма, осуществляющая поворот поля на угол  $\theta$ . В работе показано, что в таком лазере частоты мод зависят от  $\theta$ .

Зависимость частот мод от угла поворота поля предоставляет различные возможности. Прежде всего, состав частотно-вырожденного семейства зависит теперь от угла поворота поля. Это позволяет управлять модовым составом частотно-вырожденных семейств. Формирование пространственных структур также зависит от угла поворота поля. Существует некоторый угол, величина которого зависит от геометрии резонатора, при котором частотно-вырожденное семейство состоит из бесконечного числа мод. В этом случае частоты мод не зависят от углового индекса  $l$ . Семейство определяется только радиальным индексом  $p$ .

В работе [2] для описания активной среды используется двухуровневая модель. Экспериментальные исследования касаются прежде всего  $\text{CO}_2$  лазера. Более точная модель активной среды использована в [3] для описания динамики  $\text{CO}_2$  лазера в плосковолновом приближении. В этой модели учитываются вращательные подуровни молекулы  $\text{CO}_2$ . Мы будем использовать эту модель для описания пространственной динамики лазера за пределами плосковолнового приближения.

## 2. Моды резонатора с поворотом поля

Рассмотрим кольцевой однонаправленный лазер, состоящий из двух сферических и двух плоских зеркал, с цилиндрической симметрией вокруг оси лазера (рис. 1). В качестве элемента, осуществляющего поворот поля, используется призма. После прохождения через призму электрическое поле поворачивается на некоторый угол  $\theta$ . Величина этого угла изменяется при повороте призмы вокруг направления распространения поля.

Будем искать моды резонатора с поворотом поля с помощью волнового уравнения [4], записав его с учетом поворота поля

$$\gamma U(\rho, \varphi) = \exp(ik\Lambda) P^{\wedge} [U(\rho, \varphi - \theta)].$$

Здесь  $P^{\wedge}$  - интегральный оператор, который описывает преобразование поля при обходе резонатора.  $\Lambda$  - полная длина резонатора. Пусть  $A_0, B_0, C_0, D_0$  - элементы волновой матрицы резонатора. Тогда волновое уравнение резонатора с поворотом поля будет иметь вид

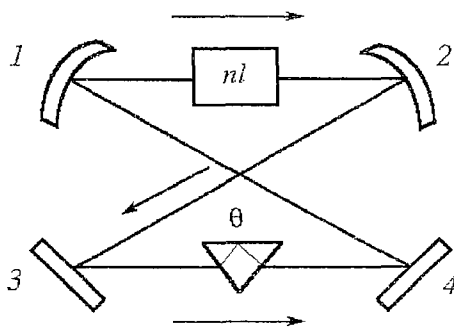


Рис. 1. Кольцевой резонатор с поворотом поля.  $\theta$ -угол поворота

$$\gamma U(\rho, \varphi) = [\exp(ik\Lambda)/iB_0\lambda] \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\{ik[D_0\rho^2 + A_0\rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1)]/2B_0\} U(\rho_1, \varphi_1 - \theta) \rho_1 d\rho_1 d\varphi_1. \quad (1)$$

Его решения могут быть найдены в виде  $U(\rho, \varphi) = A(\rho) = \exp(i\ell\varphi)$ . Заметим, что множитель  $\exp(i\ell\theta)$  не зависит от переменных интегрирования. Это дает нам возможность легко найти частоты мод

$$\omega_{p\ell} = c/\Lambda [l\theta + (2p + |\ell| + 1)\arccos(A_0) + 2\pi q], \quad (2)$$

где  $p = 0, 1, 2$  - радиальный индекс,  $l = 0, \pm 1, \pm 2$  - угловой индекс моды. Мы используем как положительные, так и отрицательные значения углового индекса, этим обусловлено появление модуля  $l$  в отдельных местах. Поперечный профиль моды не зависит от угла поворота поля

$$A_{p\ell}(\rho, \varphi) = (2/\pi)^{1/2} (2\rho^2)^{|\ell|/2} [p!/(p+l)!]^{1/2} L_p^{|\ell|}(2\rho^2) \exp(-\rho^2) \exp(i\ell\varphi). \quad (3)$$

Здесь  $L_p^{|\ell|}$  - ортогональные полиномы Лагерра.

## 2. Особенности лазера с поворотом поля

Основное отличие нашей системы от лазера без поворота поля состоит в том, что состав частотно-вырожденного семейства зависит от угла поворота поля. Поэтому пространственные структуры, возникающие здесь, могут отличаться от описанных в [2]. Предположим, что линия усиления такова, что могут возбуждаться две моды:  $A_{01}$  и  $A_{0-1}$ . В отсутствие поворота поля они имеют одинаковые частоты. В этом случае взаимодействие между ними приводит к появлению статической структуры, показанной на рис. 2, а. При наличии поворота поля частоты этих мод становятся различными и в поперечной плоскости может возникать вращающаяся структура. Действительно, электрическое поле имеет вид

$$E = A_{01}(\rho, \varphi) \exp(i\omega_{01}t) + A_{0-1}(\rho, \varphi) \exp(i\omega_{0-1}t).$$

Интенсивность  $I = EE^*$ . Тогда

$$I = |A_{01}(\rho, \varphi)|^2 + |A_{0-1}(\rho, \varphi)|^2 + 2(2/\pi)(2\rho) \exp(-2\rho^2) \cos[(\omega_{01} - \omega_{0-1})t + 2\varphi]. \quad (4)$$

Вращение пространственной структуры вызвано биениями между модами. Скорость вращения равна разности частот мод и зависит от угла поворота поля  $\Omega = \omega_{01} - \omega_{0-1} = 2c\theta/\Lambda$ . На рис. 2, б показана пространственная конфигурация поля в момент времени  $t = 2\pi/6\Omega$ . Таким образом, изменяя угол поворота поля, можно менять скорость вращения структуры.

Одним из наиболее интересных вопросов является вопрос о возбуждении частотно-вырожденного семейства, состоящего из бесконечного числа мод. При

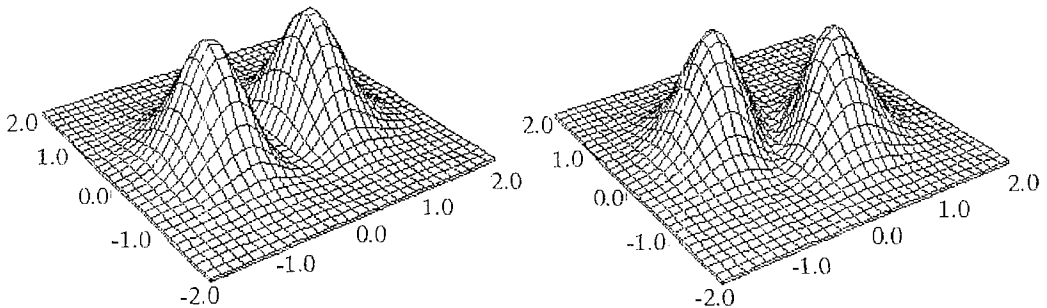


Рис 2. Пространственная структура, образованная модами  $A_{01}$ ,  $A_{0-1}$ : а -  $\theta=0$ ; б -  $\theta \neq 0$ , момент времени  $t = 2\pi/6\Omega$

угле поворота поля  $\theta = -\arccos(A_0)$  и  $l > 0$  из (2) следует, что частоты мод не зависят от индекса  $l$ . Таким образом, пространственная структура будет определяться взаимодействием большого числа мод. Конкретное число взаимодействующих мод зависит от параметра накачки. Здесь возможно возникновение различных неустойчивостей. Однако эта задача требует дальнейших исследований.

### 3. Поперечные структуры в лазере с поворотом поля. Двухуровневая модель

**3.1. Динамические уравнения.** Пусть активная среда представляет собой систему двухуровневых атомов. Тогда распространение поля описывается уравнениями Максвелла - Блоха [2]

$$\partial F/\partial z + (1/c) \partial F/\partial t + 1/(2ik) \Delta_{\perp} F = \alpha P. \quad (5)$$

$$\partial P/\partial t = \gamma_{\perp} [FD - (1 + i\Delta_{at})P]. \quad (6)$$

$$\partial D/\partial t = -\gamma_{\parallel} [\text{Re}(F^*P) + D - \chi(\rho)]. \quad (7)$$

Где  $\Delta_{\perp}$  - поперечный лапласиан;  $\alpha$  - коэффициент усиления на единицу длины;  $\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$  - скорости релаксации инверсии населенности и поляризации;  $\Delta_{at} = (\omega_{at} - \omega_{pl})/\gamma_{\perp}$  - отстройка от центра линии усиления. Представим амплитуду лазерного поля в виде разложения по модам пустого резонатора

$$F(\rho, \phi, z, t) = \sum_{p,l} f_{pl}(z, t) A_{pl}(\rho, \phi, z). \quad (8)$$

Граничные условия для лазера с поворотом поля имеют вид

$$F(z = 0, \rho, \phi, t) = RF(z = L, \rho, \phi - \theta, t). \quad (9)$$

Учтем, что моды  $A_{pl}$  являются ортонормированными решениями стационарного уравнения (5) в отсутствие нелинейной среды, а также модами резонатора с поворотом поля. Предположим также, что ширина активной среды настолько мала, что поперечный профиль поля не зависит от переменной  $z$ , изменяющейся вдоль направления распространения поля. В этом случае амплитуды мод также не зависят от переменной  $z$  и динамические уравнения имеют вид

$$df_{pl}/dt = -k[(1 + ia_{pl})f_{pl} - 2C \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A_{pl}^* P \rho d\rho d\phi]. \quad (10)$$

Здесь  $a_{pl} = (\omega_{pl} - \omega_{00})/k$ . Эти уравнения по виду совпадают с уравнениями для амплитуд мод в [2]. В случае лазера с поворотом поля, однако, частоты мод зависят от угла поворота поля.

Амплитуды мод в уравнении (10) могут быть комплексными величинами. Это означает, что может существовать некий дополнительный сдвиг частоты относительно  $\omega_{pl}$ , обусловленный нелинейной динамикой системы.

Предположим, что ширина линии такова, что могут возбуждаться только две моды. Пусть частоты этих мод различны. Тогда амплитуда поля  $F$  записывается в виде

$$F = |f_1|^2 \exp(-i\delta_1) A_1 + |f_2|^2 \exp(-i\delta_2) A_2, \quad (11)$$

где  $\delta_{1,2}$  - частотный сдвиг относительно  $\omega_{at}$ . В адиабатическом приближении из уравнений (6,7) найдем

$$P = FD(1 - i\Delta_{at})/(1 + \Delta_{at}^2), \quad D = \chi(1 + \Delta_{at}^2)/(1 + \Delta_{at}^2 + FF^*).$$

Рассмотрим случай, когда система находится вблизи порога генерации. Это означает, что нормированная амплитуда поля  $|F|^2 \ll 1 + \Delta_{ar}^2$ . Таким образом можно ввести приближение

$$1/(1 + \Delta_{ar}^2 + FF^*) \approx 1/(1 + \Delta_{ar}^2) - FF^*/(1 + \Delta_{ar}^2)^2.$$

Уравнения для  $f_{1,2}$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \partial|f_1|/\partial t + k|f_1| &= 2kC\{\alpha_1|f_1| - \beta_1|f_1|^3 - \vartheta|f_1||f_2|^2\}, \\ \partial|f_2|/\partial t + k|f_2| &= 2kC\{\alpha_2|f_2| - \beta_2|f_2|^3 - \vartheta|f_2||f_1|^2\}, \\ |f_1|(-\delta_1 + a_1) &= -2kC\Delta_{ar}\{\alpha_1|f_1| - \beta_1|f_1|^3 - \vartheta|f_1||f_2|^2\}, \\ |f_2|(-\delta_2 + a_2) &= -2kC\Delta_{ar}\{\alpha_2|f_2| - \beta_2|f_2|^3 - \vartheta|f_2||f_1|^2\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\vartheta$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 2\pi/(1 + \Delta_{ar}^2) \int_0^\infty |A_i|^2 \chi(\rho) \rho d\rho, \quad \beta_i = 2\pi/(1 + \Delta_{ar}^2)^2 \int_0^\infty |A_i|^4 \chi(\rho) \rho d\rho, \\ \vartheta &= 3\pi/(1 + \Delta_{ar}^2)^2 \int_0^\infty |A_1|^2 |A_2|^2 \chi(\rho) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (13)$$

Существует несколько возможных стационарных решений этой системы:  $(\alpha_1/\beta_1, 0)$ ;  $(\alpha_2/\beta_2, 0)$ ;  $(0, 0)$ ;  $(f_1, f_2)$ . Для формирования пространственных структур наибольший интерес представляет последнее двухмодовое решение. Стационарные значения амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned} |f_1|^2 &= [2C(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\vartheta) - \beta_2 + \vartheta]/[2C(\beta_1\beta_2 - \vartheta^2)], \\ |f_2|^2 &= [2C(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\vartheta) - \beta_1 + \vartheta]/[2C(\beta_2\beta_1 - \vartheta^2)], \\ \delta_{1,2} &= a_{1,2} + k\Delta_{ar}. \end{aligned} \quad (14)$$

Проведя анализ линейной устойчивости этого решения, получим

$$f_1^2 > 0, \quad (15)$$

$$f_2^2 > 0, \quad (16)$$

$$\beta_1\beta_2 > \vartheta^2. \quad (17)$$

Следует отметить, что условия линейной устойчивости двухмодового решения вблизи порога зависят только от поперечного профиля взаимодействующих мод и не зависят от угла поворота поля.

Мы исследовали на устойчивость двухмодовое решение, образованное модами  $A_{10}$ ,  $A_{01}$ . Оно является устойчивым вблизи порога, где справедливы формулы (15-17). При  $\theta = \arccos A_0$  частоты этих мод одинаковы и в поперечной плоскости образуется стационарная картина.

Рассмотрим взаимодействие между модами  $A_{01}$ ,  $A_{0-1}$ . Из (15-17) получим, что это двухмодовое решение всегда неустойчиво. Действительно, как видно из рис.2, структура, образованная этими модами, представляет собой не цилиндрически симметричную картину. Таким образом, она не может быть устойчивой в резонаторе, обладающем цилиндрической симметрией. В реальном лазере существуют различные пространственные неоднородности и картина может стать устойчивой.



#### 4. Пространственные структуры в CO<sub>2</sub> лазере. Уточненная модель среды

Уточнение модели среды сводится к переходу от двухуровневой к более точной модели, учитывающей реальную структуру энергетических уровней молекулы CO<sub>2</sub>. Известно, что CO<sub>2</sub> лазер относится к типу молекулярных лазеров и кроме колебательных уровней, имеет также систему вращательных подуровней. Соударения между молекулами приводят к быстрому установлению теплового равновесия в системе вращательных подуровней, принадлежащих одному колебательному уровню. Это позволяет использовать различные приближения для учета вращательных подуровней. Вся система вращательных подуровней может рассматриваться как некий энергетический резервуар. В работе [3] авторы используют модель, в которой вращательные уровни, относящиеся к одному колебательному уровню, объединены в одну группу. Каждая группа состоит из  $J$  вращательных подуровней. Генерация происходит на двух выделенных уровнях. Мы также используем эту модель (рис. 3), которая фактически может рассматриваться как четырехуровневая. Ясно, что увеличение числа рассматриваемых уровней приведет к повышению сложности системы. В работе [3] авторы показали, что в плосковолновом приближении описание среды с учетом вращательных уровней может быть выполнено в терминах модели всего с двумя степенями свободы.

Мы покажем, что уменьшение числа степеней свободы системы может быть выполнено также и за пределами плосковолнового приближения.

Пусть  $D$  - нормированная инверсия населенности между лазерными уровнями 1, 2;  $M$  - нормированная инверсия населенности между двумя группами вращательных подуровней;  $\gamma_R$  определяет скорость релаксации с каждого вращательного уровня на резонансный уровень;  $J\gamma_R$  представляет собой полную скорость релаксации с резонансного уровня на группу вращательных подуровней.

Динамические уравнения за пределами плосковолнового приближения имеют вид

$$df_{pl}/dt = -k[(1 + ia_{pl})f_{pl} - 2C \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A_{pl}^* \{FD(1 - i\Delta_{al})/(1 + \Delta_{al}^2)\} \rho d\rho d\varphi], \quad (18)$$

$$\partial D/\partial t = -(\gamma_{\perp} + J\gamma_R)D + \gamma_R M + \gamma_{\parallel} \chi - \gamma_{\parallel} [F|D|^2/(1 + \Delta_{al}^2)] \{1 + J\gamma_R/(\gamma_{\perp} + \gamma_R)\}, \quad (19)$$

$$\partial M/\partial t = -(\gamma_{\perp} + \gamma_R)M + J\gamma_R D + J\gamma_{\parallel} \chi. \quad (20)$$

Здесь учтено, что  $\gamma_{\perp} \gg \gamma_{\parallel}$ , и таким образом исключено уравнение для  $P$ . По сравнению с двухуровневой моделью среды, здесь появляется еще одно дополнительное уравнение, описывающее систему вращательных подуровней.

Учтя, что  $\gamma_R \gg \gamma_{\perp}$ , введем малый параметр  $\mu = (\gamma_{\parallel}/\gamma_R)^{1/2}$ , а также величины

$$\Gamma_R = (J + 1)\gamma_R, \quad Q = (M + D)/(J + 1),$$

$$R = (M - JD)/(J + 1), \quad x = R/\mu,$$

$$\tau = t\Gamma_R, \quad Q - (1 + \Delta_{al}^2)/2C = \mu W.$$

Здесь  $Q$  - средняя инверсия населенности.  $R$  описывает отклонения от среднего. Переписав уравнения в терминах переменных  $x$ ,  $f_{pl}$ , можно доказать, что скорости релаксаций  $f_{pl}$  и  $W$  гораздо меньше, чем скорость релаксации  $x$ . Таким образом оправдано адиабатическое приближение для переменной  $x$ . Тогда в старых переменных получим

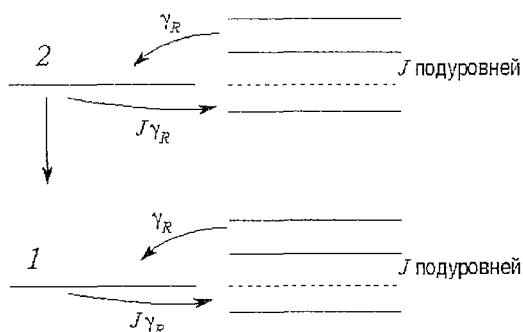


Рис. 3. Модель среды с учетом вращательных подуровней молекулы CO<sub>2</sub>

$$df_{pl}/dt = -k[(1 + ia_{pl})f_{pl} - 2C(1 - i\Delta_{ai})/(1 + \Delta_{ai}^2)[f_{pl}\hat{S}_{pl}^{pl}(Q - \mu^2 JyQ) - \sum_{r \neq p, s \neq l} f_{rs}\hat{S}_{rs}^{pl}(Q - \mu^2 JyQ)]], \quad (21)$$

$$dQ/dt = -\gamma_{ll}[Q - \chi + yQ]. \quad (22)$$

Здесь

$$y = |F|^2 / [(1 + \Delta_{ai}^2)(J + 1)][1 + J\gamma_R / (\gamma_{ll} + \gamma_R)] = \\ = |\sum_{p,l} f_{pl} A_{pl}|^2 / [(1 + \Delta_{ai}^2)(J + 1)][1 + J\gamma_R / (\gamma_{ll} + \gamma_R)], \quad (23)$$

$$\hat{S}_{rs}^{pl}(f) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A_{pl}^* A_{rs} f d\varphi d\rho, \quad (24)$$

$\hat{S}_{rs}^{pl}$  интегральный оператор, введенный для удобства записи ( $f$  - произвольная функция). Переход от уравнений (21), (22) к двухуровневой модели среды осуществляется при  $\mu = 0, J = 0$ .

Отметим, что число вращательных подуровней влияет на интенсивность насыщения

$$I_s = I_s^{oid}(1 + J\gamma_R / (\gamma + \gamma_R)). \quad (25)$$

Анализ линейной устойчивости вблизи порога генерации, аналогичный проведенному для случая двухуровневой среды, показал, что условия устойчивости сохраняются неизменными и описываются уравнениями (15)-(17). Действительно, вблизи порога генерации мы предполагаем выполнение условия  $|F|^2 \ll 1 + \Delta^2$ , а при этом уравнения (21), (22) близки к двухуровневой модели. Из (21) видно, что учет вращательных подуровней в рассматриваемой модели привел к появлению нового диссипативного слагаемого. Это слагаемое пропорционально  $\mu^2$ , следовательно, является малой величиной. Тем не менее, возможно, оно окажет влияние на динамику системы. Исследуем этот вопрос с помощью численного моделирования.

## 5. Численное моделирование

Мы исследуем динамику лазера с помощью численного моделирования уравнений (21), (22). Здесь мы не делаем никаких предположений относительно величины поля. Следует отметить, что  $Q$ , как и  $F$ , является функцией переменных  $\rho, \phi$ . Это существенно усложняет численное решение. В работе [5] авторы описывают разложение поля по модам пустого резонатора как метод, приводящий к упрощению вычислений. Представим  $Q$ , также как и  $F$ , в виде разложения по модам пустого резонатора

$$Q(\rho, \phi, t) = \sum_{qm} q_{qm}(t) A_{qm}(\rho, \phi). \quad (26)$$

Тогда динамические уравнения для  $q_{qm}$  будут иметь форму

$$dq_{qm}/dt = -\gamma_{ll}\{q_{qm} - \hat{S}^{qm}(\chi) + 1/[(J + 1)(1 + \Delta^2)][1 + J\gamma_R / (\gamma_{ll} + \gamma_R)] \times \\ \times \sum_{jn} \sum_{ij} \sum_{q'm'} \hat{f}_{jn}^* f_{ij} q_{q'm'} \hat{S}_{ij,q'm'}^{qm,fn}(1)\}. \quad (27)$$

Здесь  $\hat{S}_{ij,q'm'}^{qm,fn}(g) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A_{qm}^* A_{jn}^* A_{ij} A_{q'm'} g \rho d\rho d\phi$ .

Уравнение (21) также следует представить в терминах  $q_{qm}$ . Для численного

решения уравнений (21,27) использовался метод Рунге - Кутты четвертого порядка. Величины  $\hat{S}$  вычислялись заранее с помощью программы Mathematica 2.3 for Windows. Число слагаемых в разложении (26) ограничивалось величинами  $q=0, m \in (-4, 4)$ .

Мы численно исследовали динамику лазера для случая взаимодействия мод  $A_{01}, A_{0,-1}$ .

**5.1. Угол поворота поля равен нулю.** При этом частоты этих мод равны. Вблизи порога двухмодовое решение  $A_{01}, A_{0,-1}$  является неустойчивым. За пределами окологороговой области численное моделирование демонстрирует возможность существования сложной динамической картины.

На рис. 4 показана динамика двухмодового решения. Амплитуда  $f_{01}$  изображена пунктиром,  $f_{0,-1}$  - сплошной линией. На рис. 4, а, относящемся к двухуровневой среде ( $J=0$ ), в момент времени  $t=0$  значения  $f_{01}=f_{0,-1}=\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - малый начальный шум. Таким образом, показано зарождение генерации из шумов. В течение некоторого интервала времени модальные амплитуды  $f_{01}, f_{0,-1}$  сохраняют одинаковые значения. Происходит установление квазистационарного режима. При численном моделировании на каждом шаге вычислений присутствуют некоторые погрешности. Эти ошибки накапливаются. После некоторого промежутка времени, который зависит от точности вычислений, ошибки приводят к появлению существенной разницы между амплитудами мод. Так как эти моды неустойчивы, разница возрастает со временем. Одна из амплитуд мод уменьшается, в то время как другая возрастает. После некоторого промежутка времени происходит установление режима переключений между модами. Энергия периодически перекачивается от одной моды к другой.

Рассмотрим изменение динамики системы при переходе к уточненной модели среды. На рис. 4, б динамика системы рассчитана при  $J=2$ . Также, как при  $J=0$ , в течение некоторого времени амплитуды мод совпадают, затем происходит установление режима переключений. Скорость установления квазистационарного режима и режима переключений возросла по сравнению со случаем  $J=0$ . Таким образом, можно сказать, что число вращательных подуровней влияет на скорость переходных процессов.

Пусть теперь  $J=10$ . Это значение ближе к реальному числу вращательных подуровней молекулы  $\text{CO}_2$  [3]. На рис. 4, в видно, что скорость релаксации к квазистационарному состоянию возросла еще больше. Однако изменился также характер динамики. Режим переключений не возникает. Одна из мод затухает, а другая стремится к стационарному состоянию. Таким образом учет вращательных подуровней оказал влияние на динамику системы.

**5.2. Влияние угла поворота поля ( $\theta \neq 0$ ).** В этом случае частоты взаимодействующих мод различны. Анализ линейной устойчивости вблизи порога генерации показывает, что двухмодовое решение  $f_{01}$  и  $f_{0,-1}$  не является устойчивым ни при каких значениях угла поворота поля. Динамика двухмодового решения за пределами окологороговой области показана на рис.5.

На рис. 5, а приведены численные результаты для случая  $\theta=0.1$  и  $J=0$  (двухуровневая модель). При этом моды имеют различные отстройки от центра

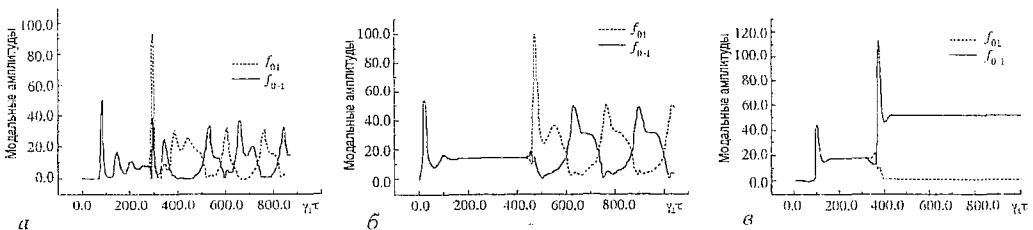


Рис. 4. Динамика модальных амплитуд  $f_{01}, f_{0,-1}$  при: а -  $\theta=0, J=0, C=1.5$ ; б -  $\theta=0, J=2, C=1.5$ ; в -  $\theta=0, J=10, C=1.5$

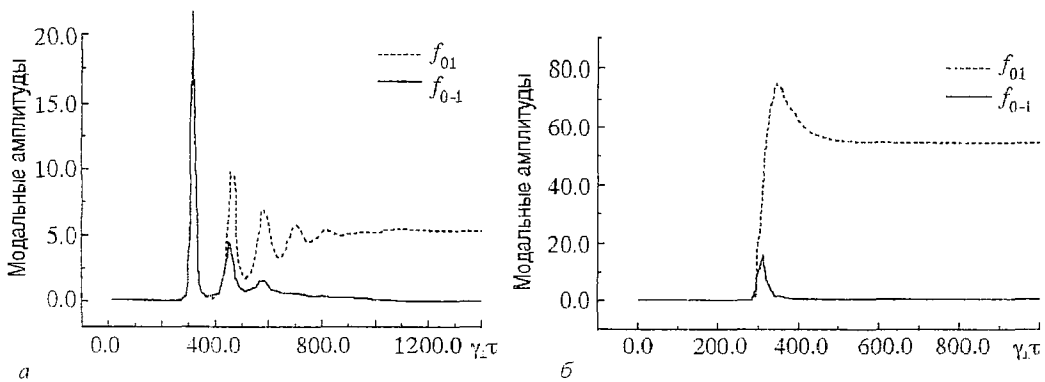


Рис. 5. Динамика модальных амплитуд  $f_{01}, f_{0-1}$  при: а -  $\theta=0.1, J=0, C=1.5$ ; б -  $\theta=0.1, J=20, C=1.5$

линии и, следовательно, различные условия для выживания. Частота моды  $f_{01}$  находится ближе к  $\omega_{a1}$ , поэтому эта мода выживает в конкурентной борьбе.

На рис. 5, б динамика мод  $f_{01}$  и  $f_{0-1}$  показана для случая  $\theta=0.1$  и  $J=20$ . Число вращательных подуровней оказало влияние на скорость релаксации системы. Характер переходного процесса перестал быть осцилляционным.

Моды  $A_{01}, A_{0-1}$  имеют различные частоты. Если они одновременно существуют в выходном поле лазера, то в поперечной плоскости может образоваться вращающаяся структура (4). Для этого обе моды должны иметь одинаковые условия для выживания. Это возможно, если они имеют равные отстройки от центра линии. При численном моделировании такое решение наблюдалось, однако вопрос его устойчивости требует дальнейших исследований.

### Заключение

Поворот поля в лазере предоставляет возможность изменять частоты резонаторных мод. Можно формировать частотно-вырожденные семейства, состав которых отличен от существующих в лазере без поворота поля. При определенном угле поворота поля может формироваться частотно-вырожденное семейство, состоящее из бесконечного числа мод. Более сложная модель среды, учитывающая вращательные подуровни молекулы  $\text{CO}_2$ , приводит к появлению в уравнениях для модальных амплитуд дополнительных диссипативных слагаемых, что изменяет динамику системы. Например, режим переключений между модами  $A_{01}, A_{0-1}$ , имеющий место при двухуровневой модели среды, исчезает при увеличении  $J$ .

*Работа была поддержана РФФИ по проекту 95-02-04345-а.*

### Библиографический список

1. Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А.Ахманова. М.:Наука, 1990.
2. *Brambilla M., Battipede F., Lugiato L.A., Penna V., Prati F., Tamm C., Weiss C.* Transverse laser patterns. 1. Phase singularity crystals. 2. Variational principle for pattern selection, spatial multistability and laser hydrodynamics // *Phys. Rev. A.* (1991) **43**, 9, 5090.
3. *Oppo G., Tredicce J., Narducci M.* Dynamics of vibro-rotational  $\text{CO}_2$  laser transitions in a two-dimensional phase space // *Opt.Comm.*(1989), **69**, 5, 393.

4. *Ананьев Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.:Наука,1990.  
5. *D'Alessandro G., Oppo G.* Gauss Laguerre modes: a «sensible» basis for laser dynamics // Opt. Comm. (1992) **88**, 130.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию 19.04.95  
после переработки 25.06.95

## SPATIAL STRUCTURES IN THE LASER WITH FIELD ROTATION

*K.V. Prokofjeva, V.I. Shmalhausen*

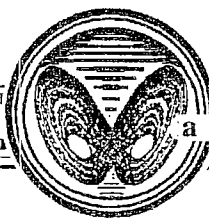
In this work a dynamics of a cylindrically symmetrical unidirectional ring laser with spherical mirrors was investigated. Prism inserted in the cavity is used to rotate electric field to some angle  $\theta$ . The value of this angle depends on prism orientation. Angle of rotation has influence on mode frequencies in the empty cavity. Frequency degenerated families in this cavity differ from commonly known ones. At a certain angle of rotation frequency degenerated family consists of infinite number of modes. Spatial structures in this laser will differ from patterns in the laser without field rotation mechanism. We investigate laser dynamics for two medium models: two-level model and model taking into account rotation sublevels of  $\text{CO}_2$  molecule. The last model leads to appearance in the equations for mode amplitudes an additional dissipative term. In some cases this term can change dynamics of the system. The number of rotational levels takes influence on the speed of relaxation to the steady state. Our results show that one can control a spatial structure formation by means of changing the angle of rotation. The number of rotational sublevels of  $\text{CO}_2$  molecule has influence on the system dynamics.



*Шмальгаузен Виктор Иванович* родился в 1934 году. Окончил физический факультет МГУ (1956). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики и волновых процессов. Область научных интересов: лазерная интерферометрия, адаптивная оптика, оптические системы с обратной связью.



*Прокофьева Ксения Владимировна* родилась в 1970 году. Окончила физический факультет МГУ (1994). В настоящее время является аспиранткой кафедры общей физики и волновых процессов. Область научных интересов: лазерная физика.



## ПОПЕРЕЧНАЯ ДИНАМИКА ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

*А. И. Аришинов, Р. Р. Мударисов, Б. Н. Пойзнер*

В рамках модели Ахманова - Воронцова численными методами исследуется поперечная пространственно-временная динамика набега фазы  $u(x,y,t)$  лазерного пучка в системе (с керровской нелинейностью), охваченной двумерной обратной связью. Обсуждаются принципы анализа поперечной динамики лазерного пучка, позволяющие объяснять и предсказывать вид  $u(x,y,t)$  в зависимости от параметров крупномасштабного преобразования поля лазерного пучка в цепи обратной связи, от параметра нелинейности, коэффициента диффузии и времени релаксации молекул жидкокристаллической нелинейной среды. Описаны режимы периодического изменения  $u(x,y,t)$ . Предложены способы количественной оценки процессов структурообразования.

### Введение

В работах [1-7] описана генерация оптических структур в ходе поперечной динамики лазерного пучка (ЛП), распространяющегося в кольцевом интерферометре, предложенном С.А. Ахмановым и М.А. Воронцовым с коллегами (система на рис. 6.2 в работе [1]) и содержащем: 1) керровскую нелинейность (которая вследствие дифракции либо диффузии приводит к локальной пространственной связи оптических полей), 2) линейный преобразователь поля в контуре двумерной обратной связи (который, изменяя положение вектора напряженности электрического поля в поперечном сечении  $(x,y)$  ЛП, производит крупномасштабное преобразование оптического поля). Для изучения поперечной динамики ЛП в последнее время используют не только компьютерное моделирование, но и строгие математические методы [7-10]. Они позволяют аналитическое описание конкретных сторон структурообразования применительно к тем или иным паттернам: спиральям [7], шестиугольникам [8], бегущим волнам [9,10] и др. Тем не менее, сейчас ощущается потребность в описании, исходящем из общности физических механизмов формообразования.

Цель работы - наметить единый феноменологический подход к описанию механизмов генерации простейших статических и динамических структур (что позволило бы в будущем перейти к анализу более сложных ситуаций), уделив внимание математическим способам представления результатов обработки компьютерных экспериментов.

## 1. Математическая модель

Нами используется уравнение (6.3.2) из [1], описывающее поперечную динамику ЛП в кольцевом интерферометре, в следующей форме:

$$\frac{du(x,y,t)}{\partial t} = D\Delta_{\perp}u(x,y,t) - u(x,y,t)/\tau + n_2k I(x,y,t)/\tau, \quad (1)$$

$$I(x,y,t) = (1-R)I_{\text{вх}}\{1 + \gamma\cos[u(x',y',t) + f_0]\}, \quad (2)$$

где  $\tau$  - время релаксации нелинейной части показателя преломления  $n(x,y,t)$  среды протяженностью  $L$ ;  $u(x,y,t) = kLn$  - фазовый набег;  $D$  - коэффициент диффузии;  $I(x,y,t)$  - интенсивность оптического поля, возникшего в результате интерференции волны, прошедшей через контур обратной связи, с волной, поступающей на вход нелинейной среды, причем интенсивность  $I_{\text{вх}}$  может соответствовать пучку с плоским волновым фронтом либо гауссову пучку;  $\gamma = 2\eta R \exp(-\chi L/2)$ ,  $\eta$  - коэффициент ослабления поля в контуре обратной связи,  $\chi$  - коэффициент поглощения слоя среды;  $f_0 = kLn_0$  - начальный фазовый набег,  $K = n_2kL(1-R)I_{\text{вх}}$  - параметр нелинейности среды. Координаты  $x, y$  нормированы к единичному радиусу входного лазерного пучка, коэффициент  $D$  - к квадрату радиуса. Связь между координатами  $x, y$  и  $x', y'$  определяется характером пространственного преобразования поля [11]

$$x' = \alpha[x\cos(\Delta) + y\sin(\Delta)] + \delta_x, \quad (3)$$

$$y' = \alpha[y\cos(\Delta) + x\sin(\Delta)] + \delta_y.$$

Диффузия частиц нелинейной среды (жидкого кристалла) учтена феноменологически - оператором Лапласа по поперечным координатам.

Модель (1)-(3) ограничена следующими предположениями:

- потери излучения в нелинейной среде велики настолько, что приемлемо однопроходное приближение для распространения немодулированного (во времени) ЛП через интерферометр;

- запаздывания поля в контуре обратной связи нет;

- распространение ЛП в интерферометре рассматривается в приближении геометрической оптики;

- ЛП не содержит некогерентной составляющей излучения.

При интегрировании (1), (2) применена абсолютно устойчивая неявная схема с постоянным шагом по  $t$ . Аппроксимация оператора Лапласа и граничных условий проведена на равномерной сетке со вторым порядком точности. Конечно-разностное уравнение, составленное для (1), (2), разбивалось в соответствии с методом чередующихся направлений на два, каждое из которых решалось методом прогонки [12,13]. Верификация моделирующей программы производилась путем сравнения конкретных ситуаций с данными натуральных экспериментов [1-6].

## 2. Формирование поперечного строения ЛП: принципы анализа

Опираясь на данные [1-7] и на результаты проведенных нами вычислительных экспериментов, можно предложить феноменологический подход, раскрывающий физический механизм поперечной динамики ЛП.

Чтобы раскрыть содержание подхода, зададимся произвольными крупномасштабными преобразованиями поля ЛП в цепи обратной связи и произвольным начальным распределением фазового набегу  $u(x,y,0)$ , предполагая, что масштаб его неоднородности больше длины диффузионного пробега молекул жидкого кристалла. Тогда для различных точек поперечного сечения ЛП знак

градиента фазового набега в их окрестности может быть различен. Следовательно, изменение фазового набега в этих точках, обусловленное диффузией, может приводить либо к увеличению, либо к уменьшению набега фазы  $u(x,y,t)$ . Из физических соображений ясно, что процессы релаксации уменьшают  $u(x,y,t)$ , в то время как нелинейный электрооптический эффект, наоборот, увеличивает его. Поэтому в каждый момент времени существуют три разновидности точек  $(x,y)$ , в которых:

- набег фазы увеличивается за счет дисбаланса влияния нелинейного электрооптического эффекта, диффузии и релаксации;
- указанные процессы сбалансированы;
- набег фазы уменьшается за счет дисбаланса влияния нелинейного электрооптического эффекта, диффузии и релаксации.

Ясно, что баланс влияния нелинейного электрооптического эффекта, диффузии и релаксации во всех точках  $(x,y)$  обеспечит неизменность набега фазы в поперечном сечении ЛП. В противном случае имеет место поперечная динамика ЛП. Ход изменений  $u(x,y,t)$  в каждой точке  $(x,y)$  задается величиной первоначального набега фазы  $u(x,y,0)$  и набором крупномасштабных преобразований в цепи обратной связи. Каждому из таких наборов соответствует определенное пространственное строение  $u(x,y,t)$ .

Опираясь на развиваемый подход или на результаты компьютерного моделирования, можно показать, что для определенных комбинаций параметров  $\Delta$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  отсутствует зависимость строения стационарной структуры от вида  $u(x,y,0)$ , что выходит за рамки данной работы.

Таким образом, поперечную динамику ЛП можно предсказать:

- учитывая две противоположных тенденции, задающих скорости изменения набега фазы: с одной стороны, нелинейного электрооптического эффекта, с другой - релаксации, диффузия же способна усиливать или ту, или другую тенденцию;
- выявляя зависимости преобладания той или иной тенденции от вида  $u(x,y,0)$ ;
- принимая во внимание конкретный набор крупномасштабных преобразований поля ЛП.

Возможность описания эволюции той или иной структуры в поперечном сечении ЛП имеет определенные рамки. Они заданы выбором некоторой комбинации параметров крупномасштабного преобразования поля. Если оно предусматривает только поворот поля в поперечной плоскости, то существует ограничение на число устойчивых состояний нелинейной оптической системы - не более двух. Если же производится сдвиг зеркала и/или изменение масштаба ЛП, то формулировка ограничений требует специального анализа. Так как соответствующие структуры (из-за их статичности) здесь не рассматриваются, то приводить этот анализ не имеет смысла. Однако общим остается ограничение на интервал значений параметров нелинейной жидкокристаллической среды, в пределах которого вклады нелинейного электрооптического эффекта, релаксации и диффузии в поперечную динамику ЛП соизмеримы. Сделанные нами оценки показали, что данное условие реализуется в следующих областях параметров уравнений (1), (2): 0.1-0.001 с для времени релаксации  $\tau$ ; 0.1-10.0 с<sup>-1</sup> для коэффициента диффузии  $D$ .

### 3. Структуры, формирующиеся при повороте поля в контуре обратной связи

Как было сказано выше, в данном случае число устойчивых стационарных состояний нелинейной оптической системы должно быть не более двух. Заданному числу устойчивых стационарных состояний соответствуют два интервала значений параметра нелинейности  $K$ , ширину которых определяет, в свою очередь, величина



$\gamma$ . В первом интервале существует лишь одно устойчивое стационарное состояние, во втором - два. Границей интервалов служит график, состоящий из точек, соответствующих значениям  $\gamma$  и  $K$ , обеспечивающим наступление бифуркации, который логично назвать бифуркационным портретом. Для первой и второй бифуркаций он изображен кривыми 1 и 2, соответственно, на рис. 1 при неизменных значениях  $\tau$  и  $D$  для  $\alpha=1$ ,  $\Delta=180$ ,  $\delta=0$ .

В случае, когда существует лишь одно устойчивое стационарное состояние, интенсивность в поперечном сечении ЛП оказывается одинаковой при любых начальных распределениях  $u(x,y,0)$  и любом угле поворота поля  $\Delta$ , то есть формируется структура типа моностабильность. Такой случай не отличается разнообразием вариантов поперечной динамики ЛП и в контексте данной работы мало интересен.

Обратимся к ситуации, когда существует два устойчивых стационарных состояния. Введем некоторые понятия. Пусть  $\Delta \neq 0$ , тогда в пренебрежении локальными поперечными взаимодействиями полей в системе может реализоваться поточечное преобразование поля. В результате чего поля в конечном числе точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$  поперечного сечения ЛП окажутся связанными. Причем, если координаты точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_{N+1}, y_{N+1})$  совпадают, то принято говорить о вырожденной двумерной обратной связи  $N$ -го порядка [1]. Следуя нашей терминологии [11], логично назвать эти точки транспозиционными, а число  $N$  - порядком транспозиционной точки. Поскольку предполагается, что имеет место диффузия (дифракция), снимающая вырождение, то в ходе изложения подхода без риска его искажения можно оперировать не с изолированной транспозиционной точкой, а с ее окрестностью конечного размера, зависящего от величины  $D$ .

Пользуясь введенными понятиями, можно утверждать, что при наличии двух устойчивых стационарных состояний справедливы следующие предсказания:

- а) если существует транспозиционная точка первого порядка, то формируется структура типа моностабильность;
- б) если существует транспозиционная точка второго порядка, то, в зависимости от начального распределения  $u(x,y,0)$ , возникает структура типа мультистабильность либо бистабильность;
- в) если существует транспозиционная точка порядка  $N > 2$ , то формируется многолепестковая структура, при определенных условиях способная вращаться в поперечной плоскости ЛП (рис. 2).

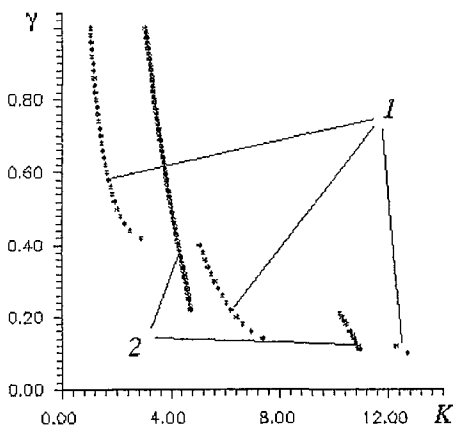


Рис. 1. Бифуркационный портрет нелинейной оптической системы: зависимость параметра  $\gamma$  от величины параметра  $K$ , при которой наступает первая (кривая «1») либо вторая (кривая «2») бифуркация стационарного решения уравнений (1), (2) при повороте поля ЛП в контуре обратной связи на угол  $\Delta=180^\circ$

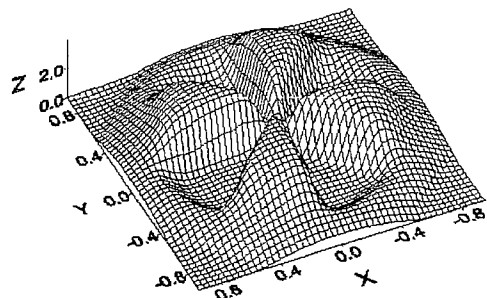


Рис. 2. Когда число транспозиционных точек четное ( $N=8$ ), то распределение фазового набега в поперечной плоскости ЛП - статическая многолепестковая структура

Так как в пп. а), б) упоминаются статичные структуры, то с учетом тематики статьи ограничимся доказательством п. в). Из результатов натуральных [1,2] и вычислительных [7] экспериментов известно, что при повороте поля в контуре обратной связи ( $\Delta \neq 0$ ) возникает многолепестковая структура. В зависимости от угла поворота  $\Delta$  после завершения формирования она будет либо вращаться вправо или влево, либо оставаться неподвижной. Предложенный феноменологический подход позволяет объяснить такое поведение структуры.

Из определения транспозиционной точки следует, что для ее существования угол поворота поля должен иметь определенную величину  $\Delta_T = 2\pi/N$ . Тогда возникает вопрос, к какому типу из наблюдавшихся в натурном эксперименте многолепестковых структур (вращающихся или статических) относится структура, возникающая при повороте поля в контуре обратной связи на  $\Delta_T$ ?

Выведем предположение о том, что, если  $N$  четное, то при угле поворота  $\Delta_T$  формируется статическая многолепестковая структура. Причем ее формирование проходит за минимальный промежуток времени, когда фазовые набег  $u(x,y,t)$  в транспозиционных точках  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_3, y_3)$ , ...,  $(x_{2m-1}, y_{2m-1})$ , ...,  $(x_{N-1}, y_{N-1})$  одинаковы и близки к нижнему/верхнему устойчивому состоянию на диаграмме стационарных состояний  $u(x,y)$  в зависимости от  $K$  (рис. 6.9, 6.22 в [1]), а фазовые набег в точках  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_4, y_4)$ , ...,  $(x_{2m}, y_{2m})$ , ...,  $(x_N, y_N)$  также одинаковы и близки к верхнему/нижнему устойчивому стационарному состоянию. Условимся называть первую совокупность транспозиционных точек  $(2m-1)$ -точками, а вторую -  $2m$ -точками.

Обоснуем выдвинутые предположения. Пусть фазовый набег в транспозиционных  $2m$ -точках близок к верхнему устойчивому стационарному состоянию, а фазовый набег в  $(2m-1)$ -точках - к нижнему. Тогда интенсивность интерференционных полей  $I(x,y,t)$  в  $2m$ -точках, определяемая величиной фазовых набегов в  $(2m-1)$ -точках, в силу поведения функции косинуса, входящей в (2), и вследствие поворота поля на угол  $\Delta$ , выше интенсивности интерференционных полей  $I(x,y,t)$  в  $(2m-1)$ -точках. Интерференционное поле создает распределение интенсивности в  $2m$ -точках, которому вследствие электрооптического эффекта соответствует большой набег фазы. Большой - в том смысле, что он или не успевает за время одного прохода излучения через систему заметно уменьшиться вследствие релаксации и, возможно, диффузии или - в зависимости от силы электрооптического эффекта и, возможно, диффузии - не изменяется вовсе.

Наоборот, в  $(2m-1)$ -точках вследствие поворота поля интенсивность интерференционного поля ниже, согласно (2). Соответственно мала и добавка к набегу фазы, обусловленная электрооптическим эффектом, вызванным воздействием малоинтенсивного интерференционного поля и, возможно, диффузией. Эта малая добавка или не успевает за время одного прохода заметно возрасти вследствие уменьшения ее за счет действия релаксации, или - в зависимости от силы электрооптического эффекта и, возможно, диффузии - не изменяется вообще.

Возможны два варианта эволюции, зависящие от четности  $N$ .

1. При четном числе  $N$  транспозиционных точек в секторах пучка, соответствующих  $2m$ -точкам и  $(2m-1)$ -точкам, динамика набегов фазы будет продолжаться до тех пор, пока в каждой из  $2m$ - и  $(2m-1)$ -точках не сравняются скорости противоположно направленных изменений фазы: за счет релаксации, диффузии и электрооптического эффекта. Такое выравнивание скоростей сопровождается разведением значений фазы в секторах, соответствующих  $2m$ -точкам и  $(2m-1)$ -точкам, то есть формируется статическая многолепестковая структура. Тем самым становится ясна физическая основа того, что в заданном интервале  $\gamma$  и  $K$  существуют лишь два устойчивых стационарных состояния. Из вышеизложенного следует заключение о том, что максимально быстро данная структура сформируется при значениях фазовых набегов в  $2m-1$ - и  $2m$ -точках, близких к верхнему и нижнему стационарным состояниям. Одинаковый уровень

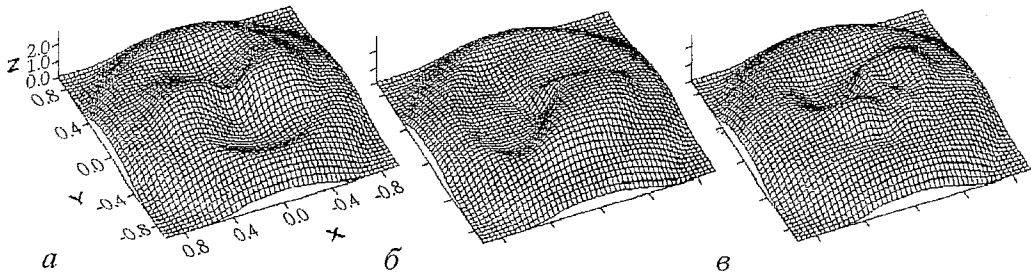


Рис. 3. Когда число транспозиционных точек нечетное ( $N=3$ ), то, в зависимости от начального распределения  $u(x,y,0)$ , формируется стационарно вращающаяся структура: двойная спираль (а), одиночная спираль (б), паттерн с текучими внутренними границами (в)

набегов фазы в  $(2m-1)$ - и  $2m$ -точках также позволяет структуре сформироваться как можно быстрее.

2. При нечетном числе  $N$  принципиальным оказывается тот факт, что соседние транспозиционные точки не могут принадлежать одному и тому же стационарному состоянию. Поэтому выравнивания скорости противоположно направленных изменений фазы не происходит, то есть структура обречена на динамику. Результат структурообразования существенно зависит от начального распределения  $u(x,y,0)$ . Например, при  $\Delta=120^\circ$ , то есть при  $N=3$ , если  $u(x,y,0) = 0.5 \text{sign}(x)\text{sign}(y)+1$ , то формируется стационарно вращающаяся структура в виде двух спиралей (рис. 3, а). А если начальный фазовый набег максимален в  $(2m-1)$ -точках и минимален в  $2m$ -точках, то формируется одна вращающаяся спираль (рис. 3, б). При случайном распределении  $u(x,y,0)$  можно наблюдать в поперечном сечении ЛП вращательные движения отдельных слабо оформленных областей с текучими очертаниями (рис. 3, в).

Пусть теперь угол поворота отличен от  $\Delta_T$ . Тогда, как показывают натурные эксперименты [2], в интерферометре формируется движущаяся многолепестковая структура, направление вращения которой зависит от угла поворота поля. Возникновение движущейся многолепестковой структуры можно объяснить, опираясь на наш подход.

Для простоты предположим, что исходное состояние сложилось, когда выполнялось условие  $\Delta=\Delta_T$  (то есть существует статическая многолепестковая структура), и будем отсчитывать углы против часовой стрелки от горизонтальной оси, на которой лежит граница между секторами. Сектор с большим набегом фазы лежит выше оси, сектор с малым - ниже оси. На рис. 4 в системе координат  $(x,y)$  рассматривается фазовый набег  $u(x,y,t)$ , а система координат  $(x',y')$  соответствует повороту оптического пучка, испытавшего преобразование в контуре обратной связи (3). Рассмотрим случай, когда угол поворота поля  $\Delta_T$  изменен на малый положительный угол  $\phi$ . Убедимся, что в таком случае в точках, принадлежащих секторам, образованным углами  $2n\Delta$ ,  $2n\Delta+\phi$ , где  $n$  - целое, фазовый набег имеет тенденцию к уменьшению, а в точках, принадлежащих секторам, образованным углами  $(2n-1)\Delta$ ,  $(2n-1)\Delta+\phi$ , фазовый набег имеет тенденцию к увеличению, приводя в итоге к вращению структуры.

Выберем, например, сектор (S2+), образованный углами  $2\Delta, 2\Delta+\phi$ , в точках которого - в силу названного выше исходного состояния и выбора системы

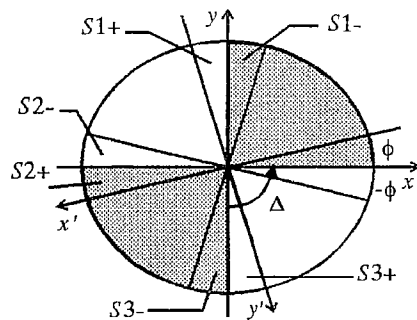


Рис. 4. Схема, поясняющая физический механизм, приводящий к вращению многолепестковых структур. Система штрихованных координат задается соотношениями (3),  $N=4$

координат - набег фазы велик (см. рис. 4). В этот сектор после прохода через контур обратной связи попадают лучи, пришедшие из сектора (S1-), образованного углами  $\Delta$ - $\phi$ ,  $\Delta$  и содержащего точки со столь же большими фазовыми набегам. Поскольку набег фазы в секторе (S1-) велик, то в силу (2) нелинейный электрооптический эффект в секторе (S2+) проявляется слабо. Поэтому основными механизмами, определяющими динамику  $u(x,y,t)$  в секторе (S2+), служат релаксация и диффузия [1], что приводит к уменьшению набег фазы в этом секторе. Подобные процессы протекают и в секторах, образованных углами  $2n\Delta, 2n\Delta+\phi$ .

Наоборот, в сектор (S3+), образованный углами  $3\Delta, 3\Delta+\phi$ , в точках которого - в силу названного выше исходного состояния и выбора системы координат - набег фазы мал (рис. 4), попадают - после прохода через контур обратной связи - лучи, пришедшие из сектора (S2-), образованного углами  $2\Delta$  -  $\phi, 2\Delta$  и содержащего точки со столь же малыми фазовыми набегам. Поскольку набег фазы в секторе (S2-) мал, то в силу (2) нелинейный электрооптический эффект в секторе (S3+) проявляется заметно, что приводит к росту набег фазы в секторе (S3+). Подобные процессы протекают и в секторах, образованных углами  $(2n+1)\Delta, (2n+1)\Delta+\phi$ .

Итак, в секторах, окаймляющих лепестки структуры, тенденции изменения  $u(x,y,t)$  противоположны. Поэтому границы  $n\Delta$  лепестков структуры поворачиваются против часовой стрелки.

Если же  $\phi$  - малый отрицательный угол, то, рассуждая аналогично, можно показать, что в точках, принадлежащих секторам, образованным углами  $2n\Delta, 2n\Delta+\phi$ ,  $u(x,y,t)$  имеет тенденцию к увеличению, а в точках, принадлежащих секторам, образованным углами  $(2n-1)\Delta, (2n-1)\Delta+\phi$ , - к уменьшению. В итоге это приведет к вращению структуры, но теперь уже по часовой стрелке.

При исследовании поперечной динамики ЛП встает задача ее наглядного представления с учетом его принципиально временного характера. Имеющийся у авторов опыт свидетельствует о целесообразности применения для этого компьютерного «нелинейного кино» [14] аналогично видеосъемке натурного эксперимента, осуществленной С. А. Ахмановым, С. А. Воронцовым, А. В. Ларичевым, А.Н. Рахмановым [5].

С этой целью функциональную зависимость  $u(x,y,t)$  от переменных  $x, y$  авторы передавали градацией интенсивности белого (либо другого) цвета в изображении. Каждое решение, соответствующее данному моменту времени (очередному шагу), подвергалось процедуре записи на жесткий диск. Последовательность таких решений (изображений) синтезировалась в «кино» с помощью известных анимационных сервисных программ. В роли последней авторы использовали autodesk animator v. 1.0.

#### 4. Количественный анализ поперечной динамики ЛП

Для количественного изучения поперечной динамики ЛП предлагается оперировать следующими характеристиками. Во-первых, динамическим пространственным фурье-спектром  $F(f_x, f_y, t)$  фазового набег  $u(x,y,t)$ , полученным в результате двумерного дискретного преобразования Фурье. Во-вторых, динамическими центральными моментами второго порядка  $I_{f_x}(t), I_{f_y}(t)$  типа

$$I_{f_x}(t) = (1/M) \iint F(f_x, f_y, t) (f_x - f_{x0})^2 df_x df_y, \quad (4)$$

$$I_{f_y}(t) = (1/M) \iint F(f_x, f_y, t) (f_y - f_{y0})^2 df_x df_y,$$

то есть с моментами инерции относительно осей пространственных частот  $f_x f_y$ , где

$$M(t) = \iint F(f_x f_y, t) df_x df_y \quad (5)$$

(интегрирование ведется по области определения функции  $F(f_x f_y, t)$ ),  $f_{x0}$ ,  $f_{y0}$  - координата эволюционирующего центра масс подвижной фигуры, ограниченной поверхностью  $F(f_x f_y, t)$ ,

$$f_{x0}(t) = (1/M) \iint f_x F(f_x f_y, t) df_x df_y, \quad (6)$$

$$f_{y0}(t) = (1/M) \iint f_y F(f_x f_y, t) df_x df_y,$$

либо с обобщенной характеристикой центральных моментов второго порядка - углом поворота (относительно оси  $f_x$ ) эллипса, полуоси которого определяются значениями  $I_{f_x}(t)$ ,  $I_{f_y}(t)$ ,

$$\beta(t) = 1/2 \arctg(2I_{f_x f_y} / (I_{f_x} - I_{f_y})), \quad (7)$$

где момент инерции относительно начала координат  $I_{f_x f_y}(t)$  задается выражением:

$$I_{f_x f_y}(t) = (1/M) \iint F(f_x f_y, t) (f_x - f_{x0})(f_y - f_{y0}) df_x df_y. \quad (8)$$

В-третьих, представлением динамических центральных моментов второго порядка по принципу фазового портрета, что можно было бы назвать «спектральным» фазовым портретом в пространстве центральных моментов:  $I_{f_x}(t)$  относительно  $I_{f_y}(t)$  либо  $I_{f_x f_y}(t)$  относительно  $I_{f_y}(t)$ .

Для проверки предложенных приемов количественного анализа поперечной динамики был выбран случай вращения четырехлепестковой структуры, когда входной ЛП имеет плоский профиль интенсивности. Визуальное наблюдение вращения структуры по часовой стрелке дает период ротации  $T_4 = 32 \pm 4\tau$ . Количественная зависимость момента  $I_{f_x}(t)$  (рис. 5, а) позволяет определить  $T_4 = 28 \pm 2\tau$  (с учетом того, что период графика соответствует четверти периода ротации). Авторы не ставили задачу оценки  $T_4$  с максимальной точностью, однако

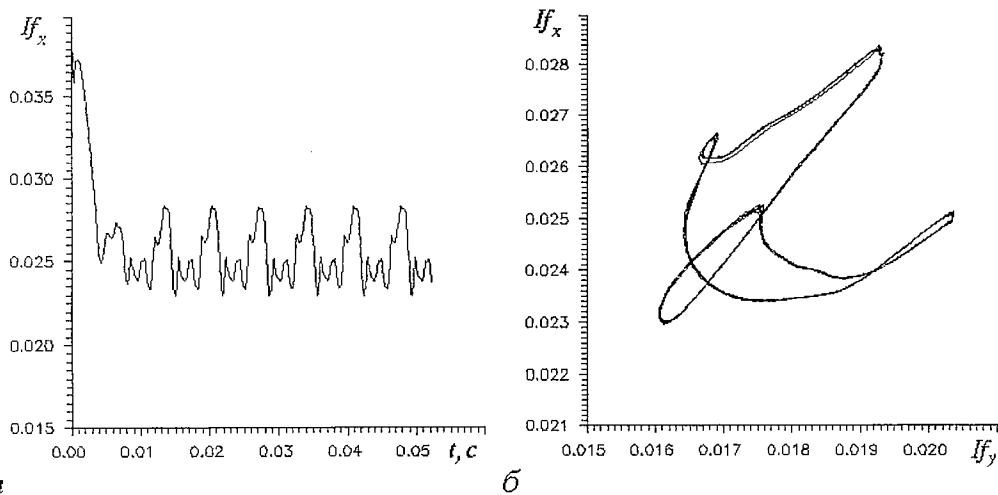


Рис. 5. Ротация четырехлепестковой структуры в поперечной плоскости ЛП:  $\alpha=1$ ,  $K\gamma=2.19$ ,  $\Delta=50^\circ$ ,  $D=10 \text{ с}^{-1}$ . а - изменение центрального момента второго порядка относительно оси пространственных частот отличается переходным процессом ( $t < 0.01 \text{ с}$ ), составляющим около трети периода ротации; б - «спектральный» фазовый портрет в плоскости моментов  $I_{f_x}(t)$ ,  $I_{f_y}(t)$

она достижима стандартными вычислительными приемами. Стационарному режиму ротации структуры соответствует «спектральный» фазовый портрет (рис. 5, б), имеющий вид относительно простого предельного цикла.

Интересным режимом поперечной динамики ЛП является периодическое повторение серий оптических структур, названное нами циклической самореорганизацией [14]. В отличие от обычной ротации этот режим, как правило, имеет место, когда  $\alpha < 1$ ,  $K\gamma \approx 4$ ,  $\Delta = 360^\circ/N$ , где  $N$  - целое нечетное число. При этом сложный процесс трансформации пространственных оптических структур может включать их ротацию с одновременным изменением строения, инверсию направления вращения, несовпадение скоростей процессов в центре и на периферии ЛП (наличие темпомиров, по терминологии Е. Н. Князевой и С. П. Курдюмова [15]). Сравнение циклической самореорганизации с режимом ротации структуры можно провести на основе рис. 5, б ( $\tau = 10^{-3}$  с в обоих случаях). Несмотря на вариацию форм оптических структур, четко проявляющуюся в эволюции  $I_f(t)$ , легко выделить период «возвращения» той структуры, с которой начинается цикл самореорганизации. Из рис. 6, а следует, что этот период равен  $T = 7 \pm 0.5\tau$ . Циклической самореорганизации оптических структур соответствует «спектральный» фазовый портрет (рис. 6, б). Его сложный вид обусловлен наличием не только ротации внутренней и периферийной областей структуры (идущей с различными скоростями), но и спиральных движений в ней, а также периодических «пульсаций» величины фазового набег в некоторых ее частях.

При увеличении произведения  $K\gamma$ , например, до значений порядка 10 (при тех же прочих условиях, что и в случае рис. 6) вместо вышеописанного регулярного поведения оптических структур возможно возникновение такого динамического режима, когда изменения размеров и форм структур в поперечном сечении ЛП носят непериодический характер. На рис. 7, а до некоторого момента времени имеет место переходный процесс, отличающийся высокой степенью «беспорядка» в изменении  $I_f(t)$ . После момента времени порядка  $800\tau$  процесс остается непериодическим, но со значительно меньшей дисперсией. Обращает на себя внимание изломанность линий «спектрального» фазового портрета (рис. 7, б) по контрасту с их конфигурацией в случае циклической самореорганизации (см. рис. 6, б).

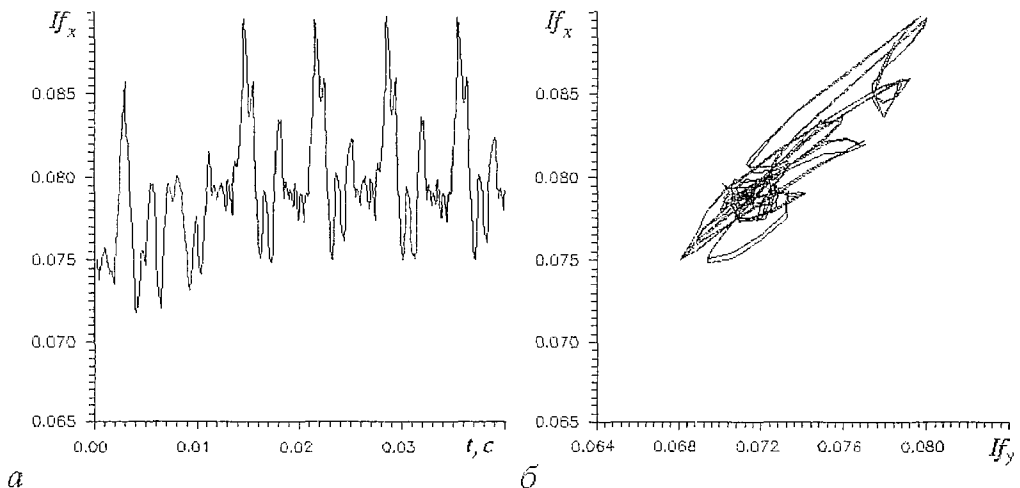


Рис. 6. Циклическая самореорганизация структур при увеличении размера ЛП в контуре обратной связи:  $\alpha = 0.8$ ;  $K\gamma = 4.08$ ;  $\Delta = 40^\circ$ ;  $D = 2 \text{ с}^{-1}$ . После завершения переходного процесса ( $t > 0.011$  с), в 1.5 раза более длительного, чем период циклической самореорганизации, поперечная динамика носит сложный характер, которая выражается обилием экстремумов функции  $I_f(t)$  (а). В строении «спектрального» фазового портрета легко выделяется часть, соответствующая периодической динамике (б)

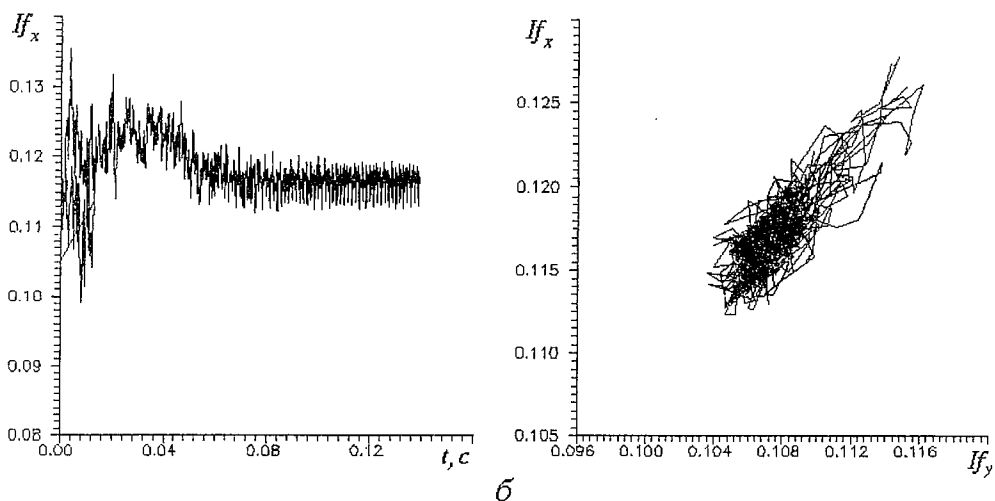


Рис. 7. Непериодическая самореорганизация структур при относительно высокой степени нелинейности:  $K\gamma=9.42$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 6. Установившийся процесс ( $t > 0.08$  с), не будучи вполне стационарным, обладает большей упорядоченностью, чем длительный переходный (а), придающий «спектральному» фазовому портрету ломаные очертания (б)

### Заключение

В рамках действия модели (1),(2) предложен подход к объяснению механизмов поперечной динамики ЛП в нелинейной оптической системе с двумерной обратной связью, основой которого является учет неравенства вкладов нелинейного электрооптического эффекта, релаксации и диффузии в скорость изменения набега фазы  $u(x,y,t)$ . Подход ограничен рассмотрением значений параметра нелинейности  $K$ , при которых система имеет не более двух стационарных состояний.

В случае вырожденной обратной связи введено понятие транспозиционных точек  $N$ -го порядка. Данный подход позволяет предсказать выравнивание либо дифференциацию набега фазы в этих точках - в зависимости от характера преобразования светового поля в контуре обратной связи (значений параметров  $\alpha$ ,  $\Delta$ ,  $\delta$ ) и от начальных условий  $u(x,y,0)$ . Указанное поведение набега фазы приводит к формированию структур типа моностабильность ( $N=1$ ), бистабильность ( $N=2$ ) либо мультистабильность (в зависимости от начальных условий) и многолепестковых структур ( $N>2$ ).

Для изучения закономерностей поперечной динамики ЛП удобно строить фигуру, названную бифуркационным портретом системы (1), (2).

Количественный анализ процессов установления структур в поперечном сечении ЛП удобно выполнять, оперируя зависимостями от времени величин (5)-(7), а также центральных моментов второго порядка (4), (8), и в их пространстве строить «спектральный» фазовый портрет. Эти временные функции целесообразно использовать при решении задач оптической обработки информации.

*Работа выполнена при поддержке Института «Открытое общество» гранты а 96-2796 и а 96-2797.*

### Библиографический список

1. Новые физические принципы оптической обработки информации/ Под ред. С.А. Ахманова и М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990.

2. Ахманов С. А., Воронцов М. А. Неустойчивости и структуры в когерентных нелинейно-оптических системах, охваченных двумерной обратной связью // *Нелинейные волны. Динамика и эволюция*. М., 1989. С. 228.
3. Воронцов М. А., Иванов В. Ю., Ларичев А. В. Ротационная неустойчивость поперечной структуры световых полей в нелинейных системах с оптической обратной связью // *Изв. АН СССР. Физика*. 1991. Т. 55, № 2. С. 316.
4. Воронцов М. А., Железных Н. И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с двумерной обратной связью // *Математическое моделирование*. 1990. Т. 2, № 2. С. 31.
5. Воронцов М. А. Нелинейная волновая пространственная динамика световых полей // *Изв. АН СССР. Физика*. 1992. Т. 56, № 4. С. 7.
6. Железных Н. И., Ларичев А. В. Простейшие типы автоволновых процессов в нелинейной оптической системе на основе ЖК ПВМС // *Изв. АН СССР. Физика*. 1992. Т. 56, № 8. С. 142.
7. Adachihara H., Faid H. Two-dimensional nonlinear interferometer pattern analysis and decay of spirals // *J. Opt. Soc. Am. B*. 1993. Vol. 10, № 7. P. 1242.
8. Vorontsov M. A., Firth W. J. Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback // *Phys. Rev. A*. 1994. V. 49, № 4. P. 2891.
9. Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. Quasi-normal forms for nonlinear optical system with delayed feedback // *Criteria of selforganization in physical, chemical and biological systems: Abstracts of International conference (Moscow - Suzdal, June 12-18 1995)*. Suzdal. 1995. P. 126.
10. Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Нормальные и квазинормальные формы для полуклассических лазерных уравнений с дифракцией // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, № 1. С. 59.
11. Аршинов А. И., Мударисов Р. Р., Поизнер Б. Н. Механизм формирования простейших оптических структур в нелинейном интерферометре Физо // *Изв. вузов. Физика*. 1995. № 6. С. 77.
12. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1979.
13. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИИЛ, 1963.
14. Аршинов А. И., Мударисов Р. Р., Поизнер Б. Н., Хоптяр С. А. Самореорганизация оптических структур // *Преподавание физики в высшей школе: Сб. науч. тр. М.*, 1995. № 3. С. 93.
15. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М.: Наука, 1994.

Томский государственный  
университет

Поступила в редакцию 03.03.1995  
после переработки 15.04.1996

## TRANSVERSAL DYNAMICS OF LASER BEAM IN A NONLINEAR OPTICAL SYSTEM WITH TWO-DIMENSIONAL FEEDBACK: INTERPRETATION OF SIMULATION RESULTS

*A. I. Arshinov, R. R. Mudarisov, B. N. Poizner*

Transversal spatial-temporary dynamics of phase changes  $u(x,y,t)$  of a laser beam, i. e. optical structures, in a system with Kerr nonlinearity, with two-dimensional feedback is investigated by numerical methods within the framework of Akhmanov - Vorontsov model. Principles of the analysis of laser beam phase changes transversal dynamics, enabling to explain and to predict a  $u(x,y,t)$  kind depending on parameters large-scale transformation of laser beam field in feedback, nonlinearity parameter, diffusion coefficient and relaxation time of molecules of nonlinear liquid crystal media are dis-



cussed. Regimes of the  $u(x,y,t)$  periodic change are described. Ways of quantitative valuation of structurization processes are offered. The description methods of nonlinear optical systems behavior are suggested.



*Аришинов Алексей Иванович* - родился в 1967 году в Томске. Аспирант радиофизического факультета Томского университета. Области научных интересов: нелинейная динамика пространственно разделенных систем, моделирование процессов оптической морфогенетики.



*Мударисов Ренат Рамильевич* - родился в 1967 году в Томске. Аспирант радиофизического факультета Томского университета. Области научных интересов: оптическая синергетика, нелинейная динамика лазерных систем.



*Пойзнер Борис Николаевич* - родился в 1941 году в Томске, окончил Томский университет в 1963 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТГУ (1970) в области теории колебаний и волн. Доцент ТГУ. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Соавтор учебных пособий «Лабораторный практикум по физике лазеров», «Импульсные лазеры на плотных газах» и др. Опубликовал статьи по указанной тематике и по ряду гуманитарных проблем. Инициатор издания и редактор библиографических указателей, посвященных научному творчеству, применению компьютера в образовании, литературе и философии русской эмиграции, университетскому образованию, синергетике и сопредельным наукам. Член комиссии по творческому наследию Густава Шпета. Председатель Вольного Гуманитарного Семинара Томска.



## ВЛИЯНИЕ ДАЛЕКОЙ ЛИНИИ ПОГЛОЩЕНИЯ НА УСЛОВИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СОЛИТОНА САМОИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ

*В.В. Козлов, Э.Е. Фрадкин*

Представлено теоретическое исследование эффекта распространения ультракороткого импульса света в условиях когерентного взаимодействия одновременно с двумя резонансными переходами. Один из переходов настроен в точный резонанс с несущей частотой импульса; другой находится на расстоянии, много превышающем ширину спектра импульса, то есть для него выполняются условия адиабатического следования. Взаимодействие импульса с далеким резонансным переходом описывается волновым уравнением с нелинейным показателем преломления в виде лоренцевой функции амплитуды поля. Это волновое уравнение решается совместно с системой уравнений Блоха для чисто резонансного перехода. Получены решения в виде фазово-модулированных стационарных импульсов, причем  $2\pi$ -импульс самоиндуцированной прозрачности является частным случаем этого решения. Полученное решение имеет площадь под огибающей импульса меньше  $2\pi$ , и чем больше коэффициент поглощения далекого резонансного перехода, тем меньше площадь импульса. Этот эффект может использоваться для понижения порога пропускания резонансной среды ниже  $\pi$ .

### Введение

Эффект самоиндуцированной прозрачности (СИП), впервые описанный в работе Мак-Кола и Хана в 1967 году [1], привлекает внимание ученых, как математиков, так и физиков. С математической точки зрения задача СИП интересна тем, что имеет солитонные решения и может рассматриваться с помощью метода обратной задачи рассеяния [2,3,4]. Интерес физиков обусловлен наблюдающимися значительными отступлениями от классического закона затухания энергии поля - закона Бугера - при когерентном взаимодействии оптического импульса с двухуровневой средой. Импульсы с площадью (интеграл по времени в бесконечных пределах от огибающей импульса), меньшей  $\pi$ , рассеиваются в поглощающей среде, а с площадью, большей  $\pi$ , теряют небольшую часть энергии в ходе переходного процесса и затем, приняв форму солитона СИП, распространяются с сохранением формы и без потери энергии. Яркую иллюстрацию этого порогового эффекта дает теорема площадей [5], предсказывающая характер эволюции площади импульса произвольной начальной формы при его распространении в неоднородно уширенной двухуровневой среде.

Цель настоящей работы - обсудить возможность управления порогом

пропускания импульсов. Аналогичная проблема поднималась в работе [6], где в рамках двухуровневого приближения указывалось на возможность понижения порога ниже  $\pi$  для фазово-модулированных импульсов. Но в [3] показано, что и в присутствии фазовой модуляции порог не может быть понижен и остается равным  $\pi$ . Мы приходим к выводу, что управление порогом пропускания возможно лишь при выходе за рамки классического двухуровневого приближения. В частности, богатая динамика наблюдается при взаимодействии импульса с трехуровневой средой, при этом, например, возможно существование двухчастотных солитонов СИП, названных симултонами [7].

В настоящей работе мы рассмотрим случай взаимодействия импульса с двумя резонансными переходами, один из которых настроен в точный резонанс с несущей частотой импульса, а другой расположен на расстоянии, много превышающем ширину спектра импульса. При этих условиях взаимодействие с первой средой должно описываться полной системой уравнений Блоха, а влияние второй можно описать, вводя зависимость показателя преломления от амплитуды поля. Возможность получения аналитических решений в виде импульсов стационарной формы для системы уравнений Максвелла - Блоха с нелинейным показателем преломления впервые была отмечена в работе [8]. Ниже мы находим аналитическое решение поставленной задачи в виде уединенных волн, причем полученные импульсы оказываются фазово-модулированными. Кроме нахождения амплитуды и фазы поля в явном виде, мы анализируем зависимость длительности импульса от коэффициента поглощения далекого резонансного перехода.

В качестве основных выводов работы можно выделить два:

- доказательство возможности стационарного распространения импульсов в рамках рассматриваемой модели;
- доказательство возможности управления площадью импульса с помощью изменения величины коэффициента поглощения далекого резонансного перехода.

## 1. Уравнения модели

В настоящей работе рассматривается модель, описывающая взаимодействие короткого светового импульса с двумя резонансными переходами. Последовательный подход требует совместного решения волнового уравнения для поля и двух систем уравнений Блоха для обоих резонансно поглощающих переходов (в рамках двухуровневого приближения). В комплексной форме система уравнений имеет вид

$$\partial \mathcal{E} / \partial v - \sigma \partial \mathcal{E} / \partial u = (i/\vartheta) (\mathcal{P}_{res} + \mathcal{P}_{nr} L_{res} / L_{nr}), \quad (1)$$

$$\partial \mathcal{P}_{res} / \partial u = -i\vartheta \mathcal{E} N_{res}, \quad (2)$$

$$\partial N_{res} / \partial u = (i/2) \vartheta (\mathcal{E} \mathcal{P}_{res}^* - \mathcal{E}^* \mathcal{P}_{res}), \quad (3)$$

$$\partial \mathcal{P}_{nr} / \partial u = i\Delta \mathcal{P}_{nr} - i\vartheta \mu \mathcal{E} N_{nr}, \quad (4)$$

$$\partial N_{nr} / \partial u = i/2 \vartheta \mu (\mathcal{E} \mathcal{P}_{nr}^* - \mathcal{E}^* \mathcal{P}_{nr}). \quad (5)$$

Переменные, снабженные индексом  $nr$ , описывают далекий резонансный переход. Соответственно, компоненты вектора Блоха, помеченные индексом  $res$ , относятся к поглощающей среде, с которой импульс настроен в точный резонанс. При записи уравнений введены следующие обозначения:  $u = (t - z/V)/\tau$  - волновая координата;  $v = z/L_{res}$  - продольная координата;  $V$  и  $\tau$  - скорость и длительность импульса;  $\sigma = L_{res}(V-1-c^{-1})/\tau$ ;  $L_{res} = [2\pi\omega_{res}d_{res}^2n_{res}/(c\hbar\eta)\tau]^{-1}$  - длина поглощения резонансной среды на частоте перехода  $\omega_{res}$ ;  $L_{nr} = [2\pi\omega_{nr}d_{nr}^2n_{nr}/(c\hbar\eta)\tau]^{-1}$  - длина поглощения

далекой линии на частоте перехода  $\omega_{nr}$ ;  $\mu = d_{nr}/d_{res}$ ;  $\vartheta = A_0\tau$ ;  $A_0$  - амплитуда импульса;  $d_{nr}$  и  $d_{res}$  - дипольные моменты рассматриваемых переходов. Параметр  $\vartheta$  определяет соотношение между длительностью импульса и его амплитудой, и мы будем называть его в дальнейшем площадью импульса. Уравнения (1) - (3) записаны для медленных огибающих поля и поляризации

$$\tilde{\mathcal{E}}(z,t) = A_0\hbar/d_{res}\mathcal{E}(u,v)\exp[-i(\omega_0t - kz)], \quad (6)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{res}(z,t) = n_{res}d_{res}\mathcal{P}_{res}(u,v)\exp[-i(\omega_0t - kz)], \quad (7)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{nr}(z,t) = n_{nr}d_{nr}\mathcal{P}_{nr}(u,v)\exp[-i(\omega_0t - kz)], \quad (8)$$

где  $\omega_0$  - несущая частота импульса.

В уравнение (4) входит слагаемое, содержащее расстройку несущей частоты импульса от частоты далекого резонансного перехода  $\Delta = (\omega_{nr} - \omega_0)\tau$ . Аналогичное слагаемое не входит в уравнение для поляризации (2), так как мы предполагаем совпадение частоты резонансного перехода  $\omega_{res}$  с  $\omega_0$ .

Рассматриваемая нами физическая модель предполагает слабое перекрывание спектра импульса и спектра далекой линии поглощения. При этом условия уравнения Блоха (4) - (5) допускают значительные упрощения.

## 2. Режим адиабатического следования

Взаимодействие импульса с далекой линией поглощения получило название режима адиабатического следования. Соответствующая процедура редукции уравнений Блоха (4), (5) изложена в работе [9]. Мы кратко представим этот вывод, последовательно учитывая фазу поля.

Разложим поляризацию  $\mathcal{P}_{nr}$  на комплексную амплитуду и фазу

$$\mathcal{P}_{nr}(u,v) = P_{nr}(u,v)\exp[-i(\varphi(u,v) - \delta kz)]. \quad (9)$$

Также разложим комплексную огибающую поля на вещественные амплитуду и фазу

$$\mathcal{E}(u,v) = E(u,v)\exp[-i(\varphi(u,v) - \delta kz)]. \quad (10)$$

Здесь мы ввели добавку к постоянной распространения  $\delta k$ , определяемую через дисперсионное соотношение. Это слагаемое удобно не включать в выражение для фазы  $\varphi(u,v)$ , так как в этом случае при поиске стационарного решения можно считать  $\varphi(u,v)$  зависящей только от волновой координаты  $u$ .

Получим решение для поляризации  $\mathcal{P}_{nr}$ , совместно решив уравнения (4),(5),

$$P_{nr}(u,v)\exp[-i\varphi(u,v)] = -i\vartheta\mu\int_{-\infty}^u E(\tilde{u},v)N_{nr}(\tilde{u},v)\exp[-i\varphi(\tilde{u},v)]\exp[i\Delta(u-\tilde{u})]d\tilde{u}. \quad (11)$$

Введем новую переменную интегрирования  $s = u - \tilde{u}$  и перепишем уравнение (11)

$$P_{nr}(u,v)\exp[-i\varphi(u,v)] = -i\vartheta\mu\int_0^{\infty} E(u-s,v)N_{nr}(u-s,v)\exp[-i\varphi(u-s,v)]\exp[i\Delta s]ds. \quad (12)$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд в окрестности точки  $s=0$ , формальным условием для этого является выполнение неравенства  $|\Delta| \gg 1$ ,

$$\begin{aligned}
& E(u-s, v) N_{nr}(u-s, v) \exp[-i\phi(u-s, v)] = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n s^n / n!] d^n / du^n \{E(u, v) N_{nr}(u, v) \exp[-i\phi(u, v)]\}.
\end{aligned} \quad (13)$$

Вычислим интеграл (12) в явном виде

$$\begin{aligned}
& P_{nr}(u, v) \exp[-i\phi(u, v)] = \\
& = (i\partial\mu/\Delta) \sum_{n=0}^{\infty} [1/(i\Delta)^n] d^n / du^n \{E(u, v) N_{nr}(u, v) \exp[-i\phi(u, v)]\}.
\end{aligned} \quad (14)$$

Ограничимся рассмотрением двух первых членов ряда (14)

$$P_{nr} = (i\partial\mu/\Delta) \{EN_{nr} + 1/(i\Delta)(N_{nr}dE/du + EdN_{nr}/du - iEN_{nr}d\phi/du)\}. \quad (15)$$

Используя уравнение для инверсии, можно получить

$$EdN_{nr}/du = \partial\mu E^2 \text{Im}(P_{nr}). \quad (16)$$

Соответственно, имеем выражение для поляризации в виде

$$P_{nr} = (\partial\mu/\Delta^2) (\Delta - d\phi/du) EN_{nr} - i[N_{nr}/(\Delta^2 + (\partial\mu E)^2)] dE/du. \quad (17)$$

До сих пор сохранение  $d\phi/du$  обосновывалось необходимостью уточнения пределов применимости развиваемой теории возмущений для случая фазово-модулированного импульса. Вид выражения (17) показывает, что пренебрежение величиной  $d\phi/du$  по сравнению с  $\Delta$  корректно и находится в полном соответствии с концепцией адиабатического следования. После этого упрощения закон сохранения длины вектора Блоха запишется в виде

$$[\text{Re}(P_{nr})]^2 + N_{nr}^2 \approx 1, \quad (18)$$

где мы пренебрегли квадратом квадратурной части поляризации по сравнению с квадратом синфазной

$$[\text{Re}(P_{nr})]^2 \gg [\text{Im}(P_{nr})]^2.$$

В итоге всех проведенных преобразований получим окончательные выражения для обоих компонентов вектора Блоха:

$$N_{nr} = -|\Delta|/[\Delta^2 + (\partial\mu E)^2]^{1/2}, \quad (19)$$

$$P_{nr} = (|\Delta|/\Delta) \partial\mu E/[\Delta^2 + (\partial\mu E)^2]^{1/2} + i|\Delta|/[\Delta^2 + (\partial\mu E)^2]^{3/2} dE/du. \quad (20)$$

### 3. Решение в виде уединенных волн

После проведенных упрощений система уравнений будет состоять из уравнений (2) и (3), описывающих резонансную среду, и волнового уравнения в виде

$$\partial\mathcal{E}/\partial v - \sigma\partial\mathcal{E}/\partial u = (i/\vartheta)\mathcal{P}_{res} + iv\mathcal{E}/(1+\vartheta^2\chi^2|\mathcal{E}|^2)^{1/2}. \quad (21)$$

Здесь

$$v = (\mu/\Delta)L_{res}/L_{nr}, \quad \chi^2 = \mu^2/\Delta^2. \quad (22)$$

Для краткости изложения и в соответствии с физическим смыслом параметра  $v$  будем называть его параметром нелинейности. Наличие законов сохранения для системы уравнений (2), (3), (21) значительно облегчает решение поставленной задачи. В отсутствие релаксации элементов матрицы плотности сохраняется длина вектора Блоха

$$N_{res}^2 + |\mathcal{P}_{res}|^2 = 1. \quad (23)$$

Обмен энергией между полем и средой происходит в соответствии с другим законом сохранения,

$$\partial/\partial u [(\partial^2/2) \sigma |E|^2 - N_{res}] = (\partial^2/2) \partial |E|^2 / \partial v. \quad (24)$$

Поле и поляризация связываются третьим законом сохранения:

$$\begin{aligned} \partial/\partial u \{i(\mathcal{P}_{res} E^* + \mathcal{E} \mathcal{P}_{res}^*) + \partial[-2iv/(\partial^2 \chi^2)((1+\partial^2 \chi^2 |E|^2)^{1/2} + 1) - 1/2(\mathcal{E}^* \partial E / \partial v - \mathcal{E} \partial \mathcal{E}^* / \partial v)]\} = \\ = (\partial/2) \partial / \partial v (\mathcal{E} \partial \mathcal{E}^* / \partial u - \mathcal{E}^* \partial \mathcal{E} / \partial u). \end{aligned} \quad (25)$$

Разделим поле на вещественные амплитуду и фазу в соответствии с формулой (10), а поляризацию - на синфазную и квадратурную части и фазу в соответствии с формулой

$$\mathcal{P}_{res} = (p + iq) \exp\{-i[\varphi - \delta kz]\}. \quad (26)$$

Мы ограничимся поиском автоволновых решений уравнений (2), (3), (21). Из них мы выбираем лишь те, которые удовлетворяют нулевым условиям на бесконечности  $\varepsilon \xrightarrow{u \rightarrow \pm\infty} 0$ . Используя законы сохранения (23), (24), (25), можно получить выражение для фазы в виде функции поля

$$\dot{\varphi} = -(v/\sigma) \{1/(\partial^2 \chi^2 E^2) [1 - 1/(1+\partial^2 \chi^2 E^2)^{1/2}] - 1/2\}. \quad (27)$$

При выводе (27) мы использовали граничные условия:

$$N \xrightarrow{u \rightarrow \infty} -1, \quad \mathcal{P}_{res} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0.$$

Добавка к волновому числу  $\delta k$  оказывается равной нулю, как и в «чистом» эффекте СИП при настройке несущей частоты импульса в точный резонанс с двухуровневым переходом.

Используя законы сохранения и уравнение для фазы (27), получим дифференциальное уравнение для нахождения огибающей поля

$$(dE/du)^2 = [\sigma^{-1} - 1/4(v/\sigma)^2] E^2 - \partial^2 E^4 / 4 + (v/\sigma)^2 (1 + \partial^2 \chi^2 E^2)^{1/2} / [(1 + \partial^2 \chi^2 E^2)^{1/2} + 1]^2. \quad (28)$$

Уравнение (28) допускает аналитическое решение для амплитуды поля в виде неявной функции  $u(\bar{E})$ . На рис. 1 приведена форма огибающей  $\bar{E}(u)$ , являющейся решением уравнения (28) при  $\chi^2=1$  и для значения параметра нелинейности  $v=10$ . Для сравнения указана форма  $2\pi$ -импульса в «чистом» эффекте СИП. Видно, что решения похожи друг на друга: оба они имеют по одному максимуму и экспоненциально спадающие крылья.

Для нахождения основных характеристик импульса уравнение (28) оказывается более информативным и прозрачным, чем его громоздкое аналитическое решение. Длительность и скорость импульса связаны между собой и определяются скоростью нарастания его переднего фронта. Раскладывая правую часть уравнения (28) в ряд по степеням поля, сохраняем только низшие члены разложения  $\propto E^2$ , что обосновывается малостью амплитуды поля на переднем фронте. В соответствии со смыслом волновой переменной и коэффициент при  $E^2$  должен быть равен 1, и мы получаем выражение для скорости

$$V^{-1} = c^{-1} + \tau/L_{res} \quad \text{или} \quad \sigma^{-1} = 1, \quad (29)$$

которое совпадает со скоростью солитона в «чистом» эффекте СИП [1,5,10].

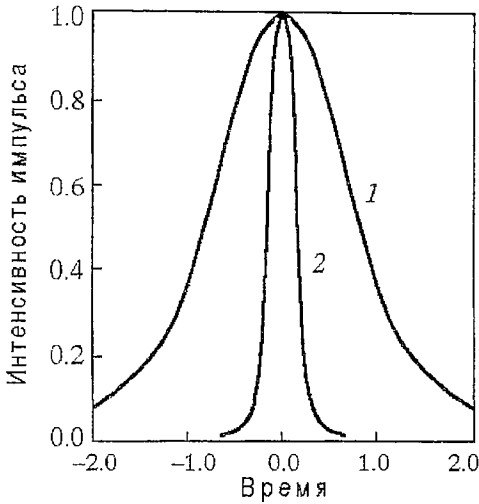


Рис. 1. Форма огибающей импульса  $E(u)$ : кривая 1 - «чистый» эффект СИП,  $E(u)=\text{sech}(u)$ ,  $\nu=0$ ; кривая 2 - эффект СИП в среде с нелинейным показателем преломления,  $E(u)$  определяется из уравнения (28),  $\nu=10$ ,  $\chi^2=1$

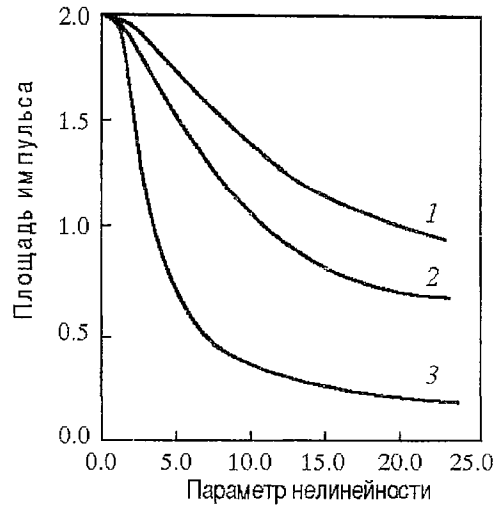


Рис. 2. Зависимость площади импульса  $\vartheta$  от параметра нелинейности при трех значениях  $\chi^2$ : 1 -  $\chi^2=1/2$ ; 2 -  $\chi^2=1$ ; 3 -  $\chi^2=10$ . Несущая частота импульса совпадает с частотой перехода резонансной среды

Выделив в выражении для поля огибающую и быструю фазу, мы также выделили отдельным множителем амплитуду импульса, так что имеет место условие нормировки:  $\max E(u)=1$ . Так как форма огибающей представляет собой гладкую кривую с одним максимумом (см. рис. 1), то можно получить соотношение между амплитудой импульса и его длительностью, приравняв правую часть в (28) нулю и подставив  $E(u)=1$

$$1 - 1/4(\nu/\sigma)^2 - \vartheta^2/4 + (\nu/\sigma)^2(1+\vartheta^2\chi^2)^{1/2}/[(1+\vartheta^2\chi^2)^{1/2}+1]^2 = 0. \quad (30)$$

В случае «чистой» СИП уравнение (30) определяет классическое выражение для площади  $2\pi$ -импульса:  $\vartheta=2$ . Присутствие дополнительной нелинейности изменяет его и делает зависимым от параметров второй резонансной среды. На рис.2 показаны характерные кривые зависимостей площади импульса от параметра нелинейности при разных значениях  $\chi^2$ .

### Обсуждение результатов

Выше мы получили решение в виде стационарного импульса при его одновременном взаимодействии с двумя резонансными переходами. Форма импульса отличается от формы классического  $2\pi$ -импульса в виде  $\text{sech}$  (см. рис.1), но закон затухания «хвостов» поля на бесконечности остается экспоненциальным. Однако, наиболее радикальные отличия связаны с уменьшением площади импульса при увеличении параметра нелинейности  $\nu$  (см. рис. 2). Практическое использование этого эффекта позволяет получить импульсы меньшей длительности по сравнению с «чистым» эффектом СИП при одной и той же мощности импульса. Обнаруженный эффект уменьшения площади импульса позволяет управлять порогом пропускания резонансной среды, который можно сделать значительно меньше классического значения, равного  $\pi$ . Изменение знака параметра нелинейности приводит к обращению знака фазовой модуляции, но не сказывается на других параметрах импульса, и эффект уменьшения площади остается в силе.

Настоящая работа не ставит целью предложить конкретную схему

эксперимента для реализации предложенной идеи, тем не менее, интересно отметить некоторые практически важные моменты. Во-первых, коэффициент поглощения далекого резонансного перехода следует выбирать значительно большим коэффициента поглощения резонансной среды  $L_m \gg L_{res}$ . Во-вторых, для достижения значительных изменений площади импульса следует подбирать далекий резонансный переход с большой силой осциллятора  $d_m \gg d_{res}$ . В целом, конкретный выбор сред диктуется шириной спектра используемых импульсов, от этого зависят величина параметра нелинейности и выполнимость условий адиабатического следования.

*Данная работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 95-02-05576а.*

*Работа Козлова В.В. стала возможной также благодаря стипендии Шведской Королевской Академии Наук и выполнена в рамках исследовательской программы Международного Центра Фундаментальной Физики в Москве. Козлов В.В. также благодарит Международный Научный Фонд (подпрограмма «Соросовские аспиранты»), мэрию Санкт-Петербурга и Фонд Президента РФ за финансовую поддержку.*

### Библиографический список

1. McCall S.L., Hahn E.L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys.Rev.Lett. 1967. Vol. 18. P. 908.
2. Lamb G.L. Jr. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium // Rev.Mod.Phys. 1971. Vol. 43. P. 99.
3. Kaup D.J. Coherent pulse propagation: a comparison of the complete solution with the McCall-Hahn theory and others//Phys.Rev.A. 1977. Vol. 16. P. 704.
4. Тахтаджян Л.А. Точная теория распространения ультракоротких оптических импульсов в двухуровневых средах // ЖЭТФ.1974. Т. 66. С. 476.
5. McCall S.L., Hahn E.L. Self-Induced Transparency // Phys.Rev. 1969. Vol. 183. P. 457.
6. Diels J.C., Hahn E.L. Carrier-frequency distance dependence of a pulse propagating in a two-level system // Phys.Rev.A. 1973. Vol. 8. P. 1084.
7. Большой Л.А., Лиханский В.В. Когерентное взаимодействие импульсов излучения с резонансными многоуровневыми средами [обзор] // Квант. электрон. 1985. Т. 12. С. 1339.
8. Barone S.R., Chi S. Distortionless propagation of ultra-short optical pulses in the presence of non-resonant non-linearities // Bull.Opt.Soc.Am. 1971. Vol. 16. P. 71.
9. Crisp M.D. Adiabatic-following approximation // Phys.Rev.A. 1973. Vol. 8. P. 2128.
10. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978.

НИИФ Санкт-Петербургский  
университет

Поступила в редакцию 21.04.95  
после переработки 31.07.95

## SELF-INDUCED - TRANSPARENCY SOLITON PROPAGATION UNDER THE INFLUENCE OF FAR-RESONANT TRANSITION LINE

V. V. Kozlov, E. E. Fradkin

Theoretical research of propagation effect of ultrashort optical pulse under conditions of coherent interaction with two resonant transitions simultaneously is presented.



One of the transitions is tuned in exact resonance with pulse carrier frequency; the other is distanced much more than spectral pulse width, thus the adiabatic following approximation may be applied. Interaction between the pulse and far-resonant transition is described by wave equation with nonlinear index of refraction in the form of Lorentz function for field amplitude. This wave equation is solved together with Bloch equations for the exact resonant transition. The solution in the form of stationary phase-modulated pulse is obtained, and  $2\pi$ -pulse of self-induced - transparency is the special case of this solution. The obtained solution has a square under pulse envelope less than  $2\pi$ , and with increasing of far-resonant transition absorption coefficient the pulse square decreases. The effect can be used for reducing of the transparency threshold of the resonant medium below  $\pi$ .



*Козлов Виктор Викторович* - родился в 1968 году в Ленинграде, окончил физический факультет Санкт-Петербургского государственного университета (1992). После окончания СПбУ, поступил в аспирантуру по специальности лазерная физика, где обучается и в настоящее время. Область научных интересов: нелинейная оптика ультракоротких импульсов света, сверхбыстрая оптоэлектроника, фемтосекундные лазерные системы. Имеет 14 публикаций в отечественных и иностранных изданиях.



*Фрадкин Эвальд Евсеевич* - родился в 1927 году в Ташкенте. Окончил Ленинградский государственный университет. Защитил кандидатскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1957) и доктора физико-математических наук (1975). Область научных интересов: теория кольцевых газовых лазеров, параметрические взаимодействия волн в нелинейных средах, нелинейная динамика оптических систем. Соавтор монографий «Волновые и флуктуационные процессы в лазерах» и «Самоорганизация физических систем». Опубликовал более 100 научных статей по направлениям, указанным выше.



## СТОХАСТИЗАЦИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ОПТИЧЕСКОМ ОДНОМОДОВОМ ФИБЕРЕ

*М.И. Рабинович, М.Ш. Цимринг*

В данной работе в канонической постановке изучается эффект стохастизации передаваемого сигнала из-за неоднородности волоконно-оптической линии связи. Рассматривается нелинейная стадия модуляционной неустойчивости волны накачки в трехволновом приближении. В результате анализа полученных в работе уравнений для амплитуд волн в гамильтоновой форме можно показать, что даже при достаточно слабой неоднородности световода в фазовом пространстве изучаемой динамической системы образуется «стохастический слой», то есть область, в которой поведение фазовых траекторий носит хаотический характер. Приведенные оценки позволяют сделать вывод, что рассматриваемое явление может реализовываться в реальном эксперименте.

### Введение

Рождение пространственного хаоса при распространении связанных волн в нелинейной оптической среде, в частности, в среде с периодической неоднородностью, хорошо изучено в литературе [1-4]. Физика этого эффекта связана с энергообменом между различными модами, который происходит вдоль пространственной координаты при наличии неоднородности, вызываемой, например, сильным магнитным полем. Существует аналогия между такого рода пространственным хаосом и детерминированным временным хаосом в неинтегрируемых гамильтоновых системах, возникающим вследствие расщепления петли сепаратрисы. Последнее приводит к образованию стохастического слоя, ширина которого увеличивается с ростом исходного возмущения системы (в данном случае, амплитуды периодической неоднородности). В настоящей работе показывается, что такой механизм может привести к зарождению пространственного хаоса в одномодовом оптическом световоде при условии, что выполнены условия модуляционной неустойчивости. Мы решаем эту задачу в приближении трехволнового взаимодействия, предполагая, что сателлиты, возникающие из-за модуляционной неустойчивости, имеют фиксированные фазы и тождественны друг другу. Стохастизация распространения волн вдоль световода объясняется нерегулярным энергообменом между интенсивной волной накачки и ее сателлитами в слабонеоднородном световоде. Этот процесс удается описать с помощью гамильтоновой динамической системы второго порядка, причем меру расщепления сепаратрисы оказывается возможным определить аналитически в

квадратурах методом Мельникова [5]. Следует отметить, что результаты по пространственному хаосу в неоднородных средах ранее были получены лишь для сред с квадратичной нелинейностью и, так называемым, распадным взаимодействием волн. Наш анализ показывает, что пространственный хаос может развиваться и в случае нераспадной дисперсии.

1. Будем рассматривать стационарный режим распространения монохроматических волн в световоде. В работе [1] при анализе нелинейной динамики четырехволновых процессов в однородном световоде была численно продемонстрирована возможность хаотизации волн при распространении вдоль оси световода. Следуя этой работе, предположим, что две волны накачки с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  генерируют два сателлита первого порядка с частотами  $\omega_3=2\omega_1-\omega_2$  и  $\omega_4=2\omega_2-\omega_1$ , и два сателлита второго порядка с частотами  $\omega_5=2\omega_3-\omega_1$  и  $\omega_6=2\omega_4-\omega_2$ . Учитывая все возможные варианты взаимодействия волн и самовоздействия в среде с кубичной нелинейностью, получим следующую систему уравнений для 6 нормированных амплитуд полей [1]:

$$dU_1/dz = i\gamma P_1[|U_1|^2 + 2\sum_{j(\neq 1)}|U_j|^2]U_1 + 2U_3U_2U_1^*e^{i\Delta kz} + 2U_3U_4U_2^*e^{2i\Delta kz} + 2U_5U_6U_2^*e^{6i\Delta kz} + U_2^2U_4^*e^{-i\Delta kz} + U_3^2U_5^*e^{-i\Delta kz}], \quad (1)$$

$$dU_2/dz = i\gamma P_1[|U_2|^2 + 2\sum_{j(\neq 2)}|U_j|^2]U_2 + 2U_4U_1U_2^*e^{i\Delta kz} + 2U_3U_4U_1^*e^{2i\Delta kz} + 2U_5U_6U_1^*e^{6i\Delta kz} + U_1^2U_3^*e^{-i\Delta kz} + U_4^2U_6^*e^{-i\Delta kz}], \quad (2)$$

$$dU_3/dz = i\gamma P_1[|U_3|^2 + 2\sum_{j(\neq 3)}|U_j|^2]U_3 + 2U_1U_2U_4^*e^{-2i\Delta kz} + 2U_5U_1U_3^*e^{i\Delta kz} + 2U_5U_6U_4^*e^{4i\Delta kz} + U_1^2U_2^*e^{-i\Delta kz}], \quad (3)$$

$$dU_4/dz = i\gamma P_1[|U_4|^2 + 2\sum_{j(\neq 4)}|U_j|^2]U_4 + 2U_6U_2U_4^*e^{i\Delta kz} + 2U_1U_2U_3^*e^{-2i\Delta kz} + 2U_5U_6U_3^*e^{4i\Delta kz} + U_2^2U_1^*e^{-i\Delta kz}], \quad (4)$$

$$dU_5/dz = i\gamma P_1[|U_5|^2 + 2\sum_{j(\neq 5)}|U_j|^2]U_5 + 2U_1U_2U_6^*e^{-6i\Delta kz} + 2U_3U_4U_6^*e^{-4i\Delta kz} + U_3^2U_1^*e^{-i\Delta kz}], \quad (5)$$

$$dU_6/dz = i\gamma P_1[|U_6|^2 + 2\sum_{j(\neq 6)}|U_j|^2]U_6 + 2U_1U_2U_5^*e^{-6i\Delta kz} + 2U_3U_4U_5^*e^{-4i\Delta kz} + U_4^2U_2^*e^{-i\Delta kz}], \quad (6)$$

где  $U_1, \dots, U_6$  - комплексные амплитуды волн накачки и сателлитов первого и второго порядка;  $\gamma$  - коэффициент нелинейности;  $P_1$  - мощность импульса на частоте  $\omega_1$ ;  $\Delta k = \Omega_{12}^2\beta^{(2)}$  - член, определяющий фазовую расстройку,  $\Omega_{12} = |\omega_1 - \omega_2|$ ;  $\beta^{(2)}$  - коэффициент дисперсии второго порядка<sup>1</sup>.

Система уравнений (1)-(6) весьма сложна для аналитического исследования. Авторы [1] выполнили ее численный анализ и открыли ряд интересных черт ее динамического поведения при выборе различных параметров и начальных условий. Так, для достаточно высоких мощностей волны накачки  $P_1$  была

<sup>1</sup> Предполагается дисперсия проекции волнового вектора вдоль оси световода в окрестности частоты волны накачки  $\omega_1$  в виде  $\beta(\omega) = \beta^{(0)} + (\omega - \omega_1)\beta^{(1)} + 1/2(\omega - \omega_1)^2\beta^{(2)} + O((\omega - \omega_1)^3)$ , где  $\beta^{(n)} = d^n/d\omega^n|_{\omega=\omega_1}$ .

продемонстрирована хаотизация распространения волн вдоль световода. Ниже мы попытаемся аналитически ответить на вопрос о существовании хаотического режима в модели (1)-(6). Рассмотрим уравнения (1)-(6) в более простой постановке, когда существует одна волна накачки  $\omega_1$  и учитывается лишь нелинейный процесс распада  $\omega_3=2\omega_1-\omega_2$ , в то время как нелинейные процессы второго порядка пренебрегаются. Положим

$$U_j = A_j \exp i\phi_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1)-(6) и полагая тождественность сателлитов  $A_2=A_3$ , получим систему уравнений для действительных амплитуд и фаз взаимодействующих волн

$$dA_1/dz = -2\gamma P_1 A_1 A_2^2 \sin(\Phi + \Delta kz), \quad (8)$$

$$dA_2/dz = \gamma P_1 A_1^2 A_2 \sin(\Phi + \Delta kz), \quad (9)$$

$$d\Phi/dz = 2\gamma P_1 \{(A_1^2 - A_2^2) + (A_1^2 - 2A_2^2) \cos(\Phi + \Delta kz)\}, \quad (10)$$

где  $\Phi=2(\phi_1-\phi_2)$ . Система (8)-(10) может быть приведена к гамильтоновой форме заменой  $p=A_1^{1/2}\sin(\Phi/2 + \Delta kz)$ ,  $q=A_1^{1/2}\cos(\Phi/2 + \Delta kz)$

$$dp/dz = 1/2 \gamma P_1 q(q^2 - 3p^2 - E) - 1/2 \Delta kq, \quad (11)$$

$$dq/dz = 1/2 \gamma P_1 p(7p^2 + 3q^2 - 3E) + 1/2 \Delta kp, \quad (12)$$

где  $E=A_1^2+2A_2^2$  - первый интеграл системы (8)-(10). Гамильтониан системы (11)-(12) имеет вид

$$\mathcal{H}(p,q,z) = 1/8 \gamma P_1 [p^2(7p^2 + 6q^2) - q^4 + 2E(q^2 - 3p^2)] + 1/4 (q^2 + p^2)\Delta k. \quad (13)$$

В однородной среде  $\Delta k = \text{const}$ . В этом случае система имеет 3 особых решения, соответствующие гетероклиническим траекториям, то есть сепаратрисам, соединяющим седловые состояния равновесия<sup>2</sup>. В неоднородной среде сепаратрисы расщепляются из-за периодического сбоя фаз фазовых траекторий, образуя стохастический слой (рис.1). Подобный эффект был обнаружен в [6] при анализе двухволнового взаимодействия в среде с квадратичной нелинейностью. Мерой хаотичности фазовых траекторий в стохастическом слое может служить величина расщепления сепаратрис, определяемая методом Мельникова [5]

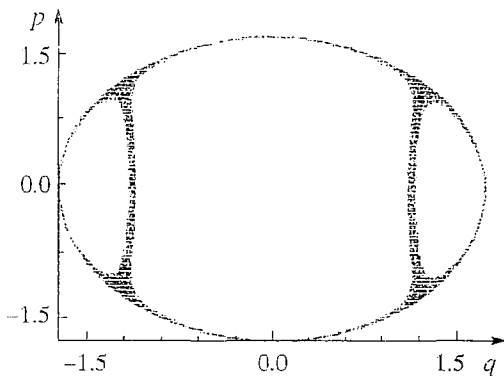


Рис. 1. Фазовый портрет системы в неоднородной среде.  $E=3$ ;  $\gamma P_1=1$ ;  $\Delta k=-6+0.15\sin z$ ; начальные условия:  $p|_{z=0}=q|_{z=0}=1.22$

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] dz, \quad (14)$$

где  $\mathcal{H}_0$  - невозмущенный гамильтониан в однородной среде,  $\mathcal{H}|_{\Delta k=0}$ ,  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ , [...] - скобки Пуассона. Подставляя (13) в (14), получим

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta k| \gamma P_1 p_0 q_0 (p_0^2 + q_0^2 - E) dz, \quad (15)$$

где  $p_0(z)$  и  $q_0(z)$  соответствуют одному из «особых» решений невозмущенной системы (11),(12) для седловых сепаратрис. Очевидно, произведение  $p_0(z)q_0(z)$ - нечетная функция, следова-

<sup>2</sup> Для  $\Delta k < 0$ .  $\gamma P_1 E < |\Delta k| < 4\gamma P_1 E$ .

тельно  $\Delta=0$  при  $\Delta k=\text{const}$ . Следовательно, условием хаотизации решения является нечетность функции  $\Delta k$ . Величина  $\Delta$  определяет толщину стохастического слоя такой гомоклинической структуры. Таким образом, выбирая начальные условия, например,

$$p|_{z=0} = \bar{p} + \Delta/n, \quad q|_{z=0} = \bar{q} + \Delta/n, \quad (16)$$

можно получить хаотический режим распространения волн в неоднородной среде. Здесь  $\bar{p}, \bar{q}$  - координаты в окрестности седловой сепаратрисы  $p_0(z), q_0(z)$ ,  $n$  - целое число, больше единицы. В частности, можно выбрать координаты состояния равновесия системы для однородного световода:  $\bar{p} = |\Delta k| / (4\gamma P_1)$ ,  $\bar{q} = E - |\Delta k| / (4\gamma P_1)$ .

Факт стохастизации «особых» решений системы (11)-(12) при учете периодической неоднородности среды подтверждается прямым вычислением корреляционной размерности их временных серий для различных начальных условий. Так, полагая функцию  $\Delta k(z)$  в виде  $\Delta k(z) = e \sin pz$ , корреляционную размерность системы с параметрами  $\gamma = 1.76 \times 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{Вт}^{-1}$ ,  $P_1 = 50 \text{ Вт}$ ,  $E = 3$ ,  $\Delta k = -6$  и начальными условиями  $p|_{z=0} = q|_{z=0} = 1.22$  получаем равной  $d_c = 1.82$ . Вычисления были выполнены по  $4 \times 10^4$  точкам с шагом  $\Delta z = 0.1$ . На рис. 2, а показаны зависимости корреляционных интегралов от масштаба для различных размерностей пространства вложения, на рис. 2, в представлены соответствующие кривые локального наклона корреляционных интегралов. Численные эксперименты по определению корреляционной размерности, выполненные для других начальных условий, попадающих в область притяжения стохастического слоя, дают значения  $d_c$  в диапазоне 1.7 - 1.85. На рис. 2, б, г для сравнения показаны кривые корреляционных интегралов и их локального наклона для тех же значений параметров при других начальных условиях.

Таким образом, характер поведения фазовых траекторий в стохастическом слое типичен, хотя и зависит от выбора начальных условий, как и должно быть для случая гамильтоновых систем. Обратимся теперь к исходной системе уравнений

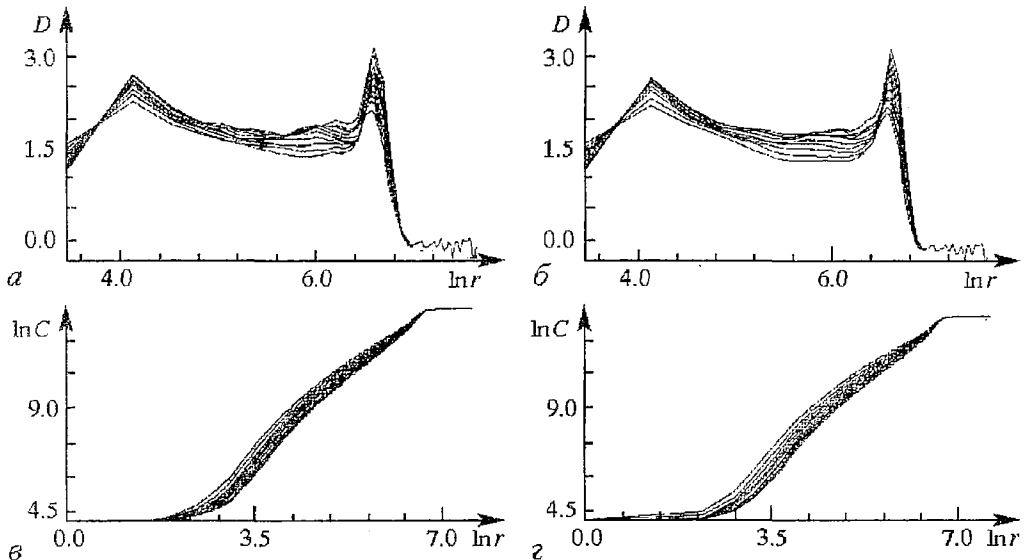


Рис. 2. а, б - Зависимость корреляционных интегралов от масштаба для различных размерностей пространства вложения (от 5 до 15) при  $E=3$ ,  $\gamma P_1=1$ ,  $\Delta k=-6+0.15 \sin z$  и начальных условий:  $p|_{z=0}=q|_{z=0}=1.22$ (а);  $p|_{z=0}=1.14$ ,  $q|_{z=0}=0.09$ (б). в, г - Соответствующие зависимости локальных наклонов корреляционных интегралов от масштаба для различных размерностей пространства вложения (от 5 до 15) и тех же значений параметров и начальных условий:  $p|_{z=0}=q|_{z=0}=1.22$  (в);  $p|_{z=0}=1.14$ ,  $q|_{z=0}=0.09$ (г)

(1)-(6). Как мы видим, учет комбинационных процессов второго порядка приводит к появлению нелинейных факторов с другими фазовыми множителями. Эти факторы, следовательно, могут приводить к рассинхронизму (или периодическому сбою фаз) в распадных процессах первого порядка, то есть играть роль, аналогичную неоднородности среды в рассмотренной нами системе. Таким образом, становится качественно ясной природа хаотичности распространения волн, отмеченной в [1].

2. Для оценки возможности экспериментальной проверки хаотизации волн при распространении в неоднородном световоде возьмем ключевые примеры из реального эксперимента работы [1]. Длина волны накачки  $\lambda_0=630$  нм, коэффициент нелинейности  $\gamma=1.76 \times 10^{-2} \text{ м}^{-1} \text{ Вт}^{-1}$ , коэффициент дисперсии второго порядка  $\beta^{(2)}=70 \text{ ps}^2/\text{км}$ , расстройка между частотами волны накачки и одного из ее спутников  $\Omega_{12}=20 \text{ см}^{-1}$ , длина световода  $L=100$  м, глубина модуляции неоднородности световода 3%. Для указанных параметров хаотический режим распространения волн будет происходить при попадании мощности волны накачки в диапазон  $10 \text{ Вт} < P_1 < 40 \text{ Вт}$ . Начальные условия для амплитуды волны накачки  $A_1$  и ее спутника  $A_2$  могут быть выбраны, например, в виде  $A_2/A_1|_{z=0}=10^{-3}$  и разность фаз  $\Delta\phi=(\phi_1 - \phi_2)|_{z=0}=0.76$ .

### Заключение

В настоящей работе рассмотрено влияние неоднородности волоконно-оптического световода, приводящее к хаотизации передаваемого сигнала. Аналитически определена степень хаотизации сигнала в стационарном режиме в зависимости от ключевых параметров, а также вычислен спектр корреляционных размерностей пространственного распределения амплитуды сигнала в зоне хаотичности для различных начальных условий. Приведенные оценки указывают на возможность экспериментальной проверки рассматриваемого эффекта.

*Авторы признательны профессорам Раджарини Рою (Georgia Technical University, США) и Я.И.Ханину (ИПФ РАН, Россия) за интерес к работе и полезные дискуссии.*

*Выполнение настоящей работы стало возможным, в частности, благодаря поддержке Международного Научного Фонда (грант NP 2000).*

### Библиографический список

1. Thompson I.R., Roy R. // Phys.Rev.A. 1991. Vol. 43. P. 4987.
2. Wabnitz S. // Phys.Rev.Lett. 1987. Vol. 58. P. 1415.
3. David D., Holm D.D., and Tratnik M.V. // Phys.Rep. 1990. Vol. 187. P. 281.
4. Rabinovich M.I., Fabricant A.L. // Sov. Phys. JETP. 1979. Vol. 30. P. 311.
5. Mel'nikov V.I. // Trans. Moscow Math. Soc. 1963. Vol. 12. P. 1.
6. Pikovskiy A.S. // Phys.Lett. A. 1980. Vol. 80. P. 367.

*Институт прикладной физики РАН,  
Научно-исследовательский радио-  
физический институт, Нижний Новгород*

*Поступила в редакцию 24.03.95*

### STOCHASTIZATION OF MONOCHROMATIC WAVE PROPAGATION IN AN OPTICAL SINGLE-MODE FIBER

*M.I. Rabinovich, M.Sh. Tsimring*

The effect of the optical fiber inhomogeneities, giving rise to stochastization of the transmitted signal, is investigated in the canonical formulation. The nonlinear stage of the

modulation instability of the pump wave in the three-wave approximation is considered. The analytical analysis of the equations for the wave amplitudes in the Hamiltonian form shows that a «stochastic layer», i.e. the region in which the phase trajectories behave chaotically, is formed in the phase space of a dynamic system even at rather weak inhomogeneity of the fiber. The estimates indicate that the phenomenon under study is very likely to be observed in experiments.



*Рабинович Михаил Израилевич* - родился в 1941 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1962). Работает в Институте прикладной физики РАН и Нижегородском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967) и доктора физико-математических наук (1973) в области теории колебаний и волн. Автор монографий «Введение в теорию колебаний и волн», «Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems», «Nonlinearities in Action: Oscillations, Chaos, Order, Fractals», «Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists», более двухсот статей и обзоров в областях динамической теории турбулентности в жидкости, хаотической динамики радиофизических систем, пространственно-временного хаоса и порядка, нелинейных волн в неравновесных средах и др.

Член редколлегии журналов «International Journal of Bifurcation and Chaos», «International Journal of Nonlinear Science Today», «International Journal of Nonlinear Science», «International Journal of Statistical Physics», «Радиофизика». Член Американского физического общества.



*Цимринг Михаил Шулимович* - родился в 1963 году в Саратове, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1984). Работает в Научно-исследовательском радиофизическом институте (НИРФИ) и Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НИРФИ (1992) в области теории неустойчивостей ионосферной плазмы. Опубликовал около двадцати научных работ по вопросам физики ионосферной плазмы и нелинейной динамики.



## КОРРЕЛЯЦИОННАЯ РАЗМЕРНОСТЬ СПЕКЛ-ПОЛЕЙ ДЛЯ РАССЕИВАЮЩИХ СТРУКТУР С ФРАКТАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

*Д.А.Зимняков, В.В.Тучин, А.А.Мишин, К.В.Ларин*

Рассмотрены различные методы определения параметров структурных функций распределений фазы граничного поля для рассеивающих объектов с фрактальными свойствами с использованием когерентных освещающих пучков:

1) путем анализа угловой зависимости среднего значения первой производной интенсивности рассеянного поля по углу рассеяния;

2) путем оценки параметров структурной функции флуктуационного компонента интенсивности рассеянного поля в дальней зоне.

Для второго случая показано, что при нормальном распределении фазы граничного поля рассеивателей имеет место равенство значений корреляционных экспонентов флуктуаций фазы граничного поля и интенсивности спекл-поля в дальней зоне при освещении объекта коллимированным пучком и выполнении критерия большого числа статистически независимых элементарных рассеивателей в пределах освещаемого участка.

Эксперименты по рассеянию гауссовых пучков на движущихся крупношероховатых стеклянных пластинах показали соответствие между значениями корреляционных экспонентов флуктуаций фазы граничного поля (по результатам микроинтерферометрических измерений) и интенсивности спекл-поля в дальней зоне.

Исследование процессов возникновения и развития хаоса в оптических полях, формируемых при рассеянии некогерентных и когерентных зондирующих пучков оптически неоднородными объектами является в настоящее время одним из быстро развивающихся и перспективных направлений статистической и корреляционной оптики. Наиболее характерным и общеизвестным проявлением когерентности освещающего пучка при рассеянии является спекл-модуляция рассеянного поля в дальней зоне дифракции; в связи с этим при его описании целесообразно отдельно рассматривать мелкомасштабный («флуктуационный») компонент интенсивности поля, обусловленный наличием спеклов, и огибающую, характеризуемую гораздо более низкими пространственными частотами; с зависимостью последней от угла рассеяния тесно связано понятие индикатрисы рассеяния.

Проявления хаоса в динамических спекл-полях, образующихся при дифракции когерентного излучения на нестационарных случайных фазовых объектах, могут быть вызваны наличием у рассеивателей фрактальных свойств, выражающихся прежде всего в асимптотическом поведении структурной функции флуктуаций фазы граничного поля [1]

$$D_{\phi}(\mathbf{r}) = \langle (\phi(\mathbf{r}) - \phi(0))^2 \rangle, \quad (1)$$



где  $\langle \rangle$  означает усреднение по всем возможным реализациям фазы,  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор точки наблюдения в плоскости непосредственно за рассеивателем. При подобном подходе предполагается использование модели случайного фазового экрана (СФЭ), в рамках которой может быть дана только интегральная оценка эффектов объемного рассеяния. Тем не менее, данная модель оказывается весьма полезной при решении ряда прямых и обратных задач статистической оптики.

Фрактальные свойства рассеивателей проявляются прежде всего в скейлинге  $D_\phi(\mathbf{r})$  в области малых  $|\mathbf{r}|$  [2]

$$D_\phi(\mathbf{r}) \cong k^2 |\mathbf{r}|^\nu L^{2-\nu}, \quad \nu \neq 2, \quad (2)$$

(где  $k$  - волновое число освещающего пучка,  $L$  - параметр, называемый топотезой), обусловленном недифференцируемостью двумерного распределения фазы граничного поля. Для «гладких», дифференцируемых распределений  $\nu=2$ . Показатель  $\nu$ , иначе называемый корреляционным экспонентом [3], связан с фрактальной размерностью  $D$  одномерной реализации распределения фазы  $\phi(x,y)|_{y=\text{const}}$  следующим образом [2]:

$$\nu = 2(2 - D).$$

Одним из традиционных и наиболее широко используемых способов анализа проявления фрактальных свойств оптически неоднородных объектов в рассеянном поле является исследование угловых зависимостей огибающей интенсивности рассеянного поля в дальней зоне. В соответствии с [4], выражение для математического ожидания интенсивности рассеянного поля в зависимости от угла рассеяния для диффузно отражающей поверхности, моделируемой одномерным СФЭ со структурной функцией фазы  $D_\phi(x)$ , имеет вид

$$1/(I_0 R) \langle dI/d\theta_s \rangle \cong P \otimes \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\alpha x) \exp[-1/2 \beta^2 D_\phi(x)] dx, \quad (3)$$

где  $I_0$  - интегральная интенсивность зондирующего пучка,  $R$  - интегральный коэффициент отражения поверхности,  $P$  - апертурная функция оптической системы, обусловленная конечными размерами угловой апертуры освещающего пучка,  $\otimes$  - символ свертки. Величины  $\alpha$  и  $\beta$  определяются следующим образом:

$$\alpha = \sin\theta_i - \sin\theta_s; \quad \beta = \cos\theta_s - \cos\theta_i,$$

где  $\theta_i$  и  $\theta_s$  - соответственно углы падения и рассеяния освещающего пучка по отношению к нормали. При нормальном падении  $\alpha = \sin\theta_s$ ,  $\beta = \cos\theta_s - 1$ .

Переход от случая рассеяния на одномерном объекте (3) к двумерному статистически однородному и изотропному рассеивателю может быть легко осуществлен с использованием известной взаимосвязи между корреляционными и спектральными характеристиками одномерных и двумерных реализаций изотропных случайных поверхностей [4].

Подстановка (2) в (3) требует в общем случае численного интегрирования данного выражения, однако в частном случае малых значений параметра  $R_\phi(0)\beta^2$  ( $R_\phi(x)$  - автокорреляционная функция флуктуаций фазы) возможно представление  $\langle dI/d\theta_s \rangle$  в приближенной аналитической форме как для «гладких» дифференцируемых, так и для фрактальных распределений фазы [4]

$$1/(I_0 R) \langle dI/d\theta_s \rangle \cong P \otimes [\delta(\alpha/2\pi) + (\beta^2/2) S(\alpha/2\pi)], \quad (4)$$

где  $S(\alpha/2\pi)$  - спектральная плотность флуктуаций фазы граничного поля; первое слагаемое описывает зеркальный, а второе - диффузный компоненты рассеянного поля. Для фрактальных распределений фазы выражение (4) принимает вид

$$1/(I_0 R) \langle dI/d\theta_s \rangle \cong P \otimes [\delta(\alpha/2\pi) + (\beta^2/2) K_n(\alpha/2\pi)^n], \quad (5)$$

где коэффициент  $K_n$  связан с параметрами структурной функции  $D_\phi(x)$  следующим образом:

$$K_n = -2k^2 L^3 \Gamma(n) \cos(n\pi/2) / (2\pi)^n,$$

$n = \nu + 1$ ,  $\Gamma(n)$  - гамма-функция.

Для освещающих пучков с узким, « $\delta$ -подобным» угловым распределением при нормальном падении на рассеивающую поверхность значение  $\nu$  может быть оценено по наклону зависимости  $\langle dI/d\theta_s \rangle$  от угла рассеяния в логарифмических координатах. Учитывая взаимосвязь между асимптотиками структурной функции для малых значений аргумента и спектральной плотности в высокочастотной области [4]. диапазону пространственных масштабов, в котором  $D_\phi(x)$  демонстрирует скейлинг вида (2), можно поставить в соответствие область углов рассеяния  $\theta_s$ , в которой величина корреляционного экспонента может быть определена по значению показателя  $n$ . В частности, диапазону 1.0-10.0 мкм будет соответствовать область углов рассеяния от 0.1 до 1.0 рад (при нормальном падении освещающего пучка с  $\lambda=0.63$  мкм). Для крупношероховатых рассеивающих объектов, характеризующих дисперсией фазы граничного поля  $\sigma_\phi^2 = R_\phi(0) \geq 1$ , условие малости  $R_\phi(0)\beta^2$  в данной области может нарушаться. Кроме того, существование спекл-модуляции рассеянного поля при анализе угловых зависимостей  $\langle dI/d\theta_s \rangle$  требует усредняющей обработки экспериментальных данных с использованием выборок большого объема, поскольку для развитых спекл-полей дисперсия интенсивности сравнима с квадратом ее среднего значения [5]. Подобные обстоятельства могут существенно осложнить анализ структурных свойств оптически неоднородных объектов в области высоких пространственных частот путем интерпретации угловых зависимостей огибающих интенсивности рассеянного поля, полученных в условиях когерентного освещения в проходящем и отраженном свете.

Альтернативным методом исследования скейлинговых свойств  $D_\phi(\mathbf{r})$  может служить корреляционный анализ флуктуационного компонента рассеянного поля при освещении рассеивателя широким когерентным пучком. В [3] предложен метод оценки параметра (корреляционного экспонента) структурной функции флуктуаций интенсивности спекл-полей, основанный на использовании поляризационного интерферометра. Можно показать, что для развитых нестационарных спекл-полей, образующихся в дальней зоне при дифракции широких коллимированных когерентных пучков на движущихся безграничных СФЭ, корреляционный экспонент  $\nu_\phi$  и топология  $L_\phi$  флуктуаций фазы граничного поля связаны с соответствующими значениями структурной функции флуктуаций интенсивности весьма простыми аналитическими соотношениями (при условиях нормировки флуктуационного компонента интенсивности на его среднее значение и нормального закона распределения фазы граничного поля).

В соответствии с [1], поперечная функция когерентности граничного поля для СФЭ с гауссовой статистикой фазы при освещении его плоской когерентной волной с однородным распределением амплитуды равна

$$\Gamma_\nu(\mathbf{r}) = \exp[-1/2 D_\phi(\mathbf{r})]. \quad (6)$$

С другой стороны, автокорреляционная функция флуктуаций интенсивности спекл-поля в дальней зоне может быть выражена через поперечную функцию когерентности  $\Gamma_\nu(\mathbf{r})$  следующим образом:

$$\Psi_I(\mathbf{r}) = |\Gamma_\nu(\mathbf{r})|^2 = |\nu_0|^{-4}, \quad (7)$$

где  $v_0$  - средняя амплитуда граничного поля. Выражая структурную функцию двумерного случайного процесса через его автокорреляционную функцию и рассматривая асимптотические значения  $D_1(\mathbf{r})$  и  $D_\phi(\mathbf{r})$  в области малых значений  $|\mathbf{r}|$ , получим равенство значений корреляционных экспонентов флуктуаций фазы граничного поля и интенсивности рассеянного поля в дальней зоне дифракции  $v_\phi = v_I = v_0$ . Значения топотез  $L_\phi$  и  $L_I$  связаны между собой следующим выражением :

$$L_I = (2k^2/T_1)^{1/(2-\nu)} L_\phi, \quad (8)$$

где  $T_1$  - нормированный коэффициент, входящий в выражение для структурной функции флуктуаций интенсивности:

$$D_I(\mathbf{r}) = T_1 |\mathbf{r}|^m L_I^{2-\nu}.$$

В работе экспериментально исследовалась взаимосвязь между значениями корреляционных экспонентов флуктуаций фазы граничного поля  $v_\phi$  и интенсивности спекл-поля в дальней зоне  $v_I$  для крупношероховатых стеклянных пластин, представляющих собой образцы участков внутренней поверхности колб телевизионных кинескопов, покрываемой при изготовлении последним слоем люминофора. Характерный рельеф исследуемых образцов сформирован в результате специальной технологической обработки (штамповки). Среднеквадратичные значения высоты микронеровностей  $\sigma_h$  и длины корреляции  $l_h$  рассеивающих поверхностей, оцененные в результате контактных профилометрических измерений, находились в пределах от 0.05 до 10.0 мкм и от 15.0 до 60.0 мкм, соответственно. На рис. 1 приведены примеры одномерных реализаций распределений фазы граничного поля  $\phi(x)$ , полученные в результате предварительных исследований рассеивающих образцов с помощью лабораторного образца дифференциального сканирующего микроинтерферометра в проходящем свете. Оптическая схема используемого для анализа структуры рассеивателей микроинтерферометра аналогична описанному в [6]. Пространственное разделение зондирующих пучков в фокальной плоскости фокусирующего объектива обеспечивалось за счет формирования в исходном пучке динамической интерференционной структуры с помощью перестраиваемого интерферометрического блока, выполненного по схеме интерферометра Майкельсона. Модуляция положения одного из зеркал интерферометрического блока с помощью электро-механического модулятора с частотой 200 Гц в сочетании с синхронным детектированием и последующей компьютерной обработкой измерительного сигнала позволяли измерять текущую разность фаз между зондирующими пучками со среднеквадратичной погрешностью не хуже 0.035 рад. В процессе сканирования исследуемых образцов анализировались зависимости дисперсии разности фаз зондирующих пучков от расстояния между ними в фокальной плоскости фокусирующего объектива. Расстояние между пучками связано с периодом интерференционной картины  $\Lambda$ , модулирующей исходный пучок, и фокусным расстоянием объектива

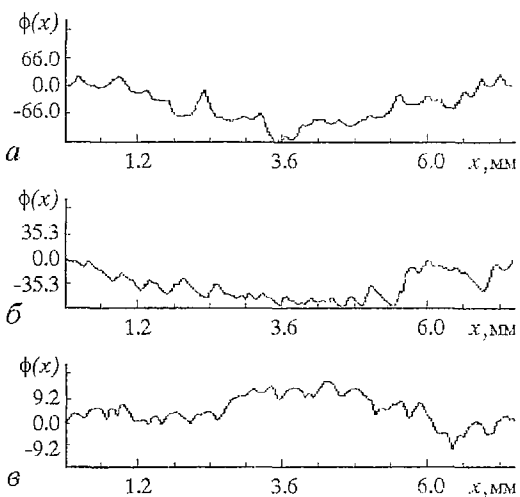


Рис. 1. Фрагменты одномерных реализаций  $\phi(x)$ , полученные в результате исследования образцов с помощью дифференциального микроинтерферометра: а - образец 1, б - образец 2. в - образец б

следующим простым соотношением:  $|\Delta r| \equiv \lambda f / \Lambda$ . Значение  $\Lambda$  может изменяться путем настройки интерферометрического блока. По зависимостям дисперсии разности фаз от  $|\Delta r|$  восстанавливались эмпирические структурные функции  $D_\phi(\Delta r)$  для каждого исследуемого образца. На рис. 2 представлены полученные подобным образом зависимости  $D_\phi(\Delta r)$  для области изменения  $|\Delta r|$  от 0.5 до 10 мкм.

В соответствии с рис. 2, исследованные в работе образцы можно условно разделить на две группы, используя в качестве критерия классификации особенности поведения эмпирических структурных функций флуктуаций фазы. К первой группе можно отнести рассеиватели 1-3, демонстрирующие при контактных профилометрических измерениях относительно высокие значения  $\sigma_h$  и  $l_h$  (1-5 мкм и 30-60 мкм). Для образцов второй группы (4-6) свойственны существенно меньшие значения данных параметров (0.05-0.3 мкм и 15-25 мкм). Наличие корреляционной связи между значениями  $\sigma_h$  и  $l_h$ , на наш взгляд, связано с особенностями технологического процесса получения образцов.

В таблице представлены значения  $\nu_\phi$ , топотезы  $L_\phi$  и фрактальной размерности  $D$ , вычисленные для представленных на рис.2 структурных функций. Как правило, для образцов первой группы характерны более высокие значения  $\nu_\phi$  (1.32-1.43). Исключение составляет образец № 4, который по положению структурной функции может быть отнесен ко второй группе и в то же время демонстрирует аномально высокое (1.48) по сравнению с образцами 5 и 6 (1.18 и 1.16) значение  $\nu_\phi$ . Для данного образца характерно очень малое значение топотезы  $L_\phi$ . Для других рассеивателей значения  $L_\phi$  сопоставимы и не могут быть использованы в качестве критерия принадлежности образца к той или иной группе. Вычисленные по значениям  $\nu_\phi$  фрактальные размерности  $D$  одномерных реализаций  $\phi(x)$  находятся в интервале от 1.30 до 1.42; образцы второй группы (за исключением № 4) с более высокими значениями  $D$  близки к так называемым броуновским фрактальным поверхностям, порождаемым процессом Орнштейна - Уленбека с экспоненциальной автокорреляционной функцией [7].

Установка для анализа корреляционных свойств флуктуационного компонента интенсивности спекл-полей, образующихся в результате дифракции когерентных пучков на исследуемых рассеивателях, оптическая схема которой приведена на рис.3, аналогична описанной в [8]. Нестационарное спекл-поле формировалось в результате освещения исследуемого рассеивателя 4, равномерно

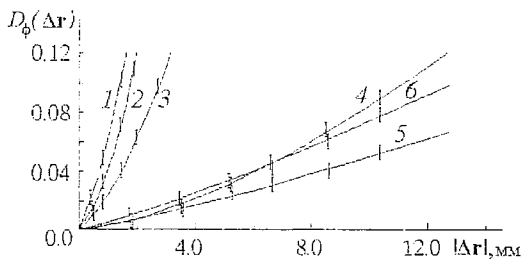


Рис. 2. Эмпирические структурные функции флуктуаций фазы граничного поля для исследованных в работе образцов (по результатам микроинтерферометрических измерений)

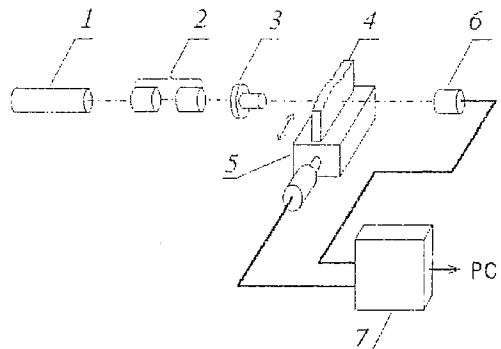


Рис. 3. Оптическая схема установки для исследования корреляционных свойств динамических спекл-полей: 1 - лазер (ЛГН-207), 2 - телескопическая система ( $8\times$ ), 3 - фокусирующий объектив (М-42), 4 - исследуемый образец, 5 - сканирующее устройство, 6 - ФЭУ, 7 - блок аналого-цифрового преобразователя. РС - персональный компьютер

движущегося в направлении, перпендикулярном оптической оси системы, расходящимся гауссовым пучком. Перемещение рассеивателя осуществлялось с помощью сканирующего устройства с шаговым приводом 5, управляемого от компьютера. В процессе сканирования производилась регистрация текущих значений интенсивности спекл-поля в параксиальной области дальней зоны дифракции с помощью фотоэлектронного умножителя (ФЭУ) 6 и блока аналого-цифровой обработки 7. Размер диафрагмы ФЭУ (200 мкм) был существенно меньше среднего размера спеклов в зоне регистрации. Используемые в эксперименте значения скорости сканирования рассеивателя и частоты опроса аналого-цифрового преобразователя (АЦП) 1 обеспечивали величину шага дискретизации значений интенсивности 0.25 мкм. Размеры освещаемого участка рассеивателей ( $W \cong 0.3 + 0.4$  мм) при используемом в эксперименте расстоянии от объекта до плоскости регистрации ( $z \cong 1200$  мм) соответствовали критерию дальней зоны дифракции ( $\lambda z/W^2 \gg 1$ ). Одновременно выполнялось условие большого числа статистически независимых элементарных рассеивателей в пределах освещаемого участка [9] для всех исследованных в работе образцов. Освещающий пучок формировался оптическим блоком, состоящим из одномодового He-Ne лазера 1, телескопической системы - расширителя освещающего пучка 2 и фокусирующего объектива 3. Необходимо отметить, что используемые в эксперименте условия освещения рассеивателей (гауссов пучок с конечным радиусом кривизны волнового фронта) отличаются от рассмотренных при выводе соотношений между корреляционными экспонентами  $v_1$  и  $v_\phi$  (широкий коллимированный пучок с равномерным распределением амплитуды по сечению). Однако для используемой геометрии эксперимента пространственный спектр апертурной функции освещающего пучка является существенно более узкополосным, чем спектр флуктуаций фазы граничного поля, и его влиянием на флуктуационный компонент интенсивности в рассматриваемом при анализе  $D_1(\mathbf{r})$  диапазоне пространственных масштабов можно пренебречь.

По полученным при сканировании исследуемых образцов реализациям интенсивности (длина трассы сканирования составляла 20 мм) вычислялись значения структурной функции интенсивности  $D_1(\mathbf{r})$  в диапазоне изменения  $|\mathbf{r}|$  от 0.25 до 5 мкм, по которым затем с использованием метода наименьших квадратов оценивались значения  $v_1$ . Для малых амплитуд флуктуаций интенсивности значительную погрешность в оценку  $v_1$  могут вносить высокочастотные составляющие шумов измерительной аппаратуры, и прежде всего - близкий к  $\delta$ -коррелированному шум АЦП (в особенности при использовании в области малых  $|\mathbf{r}|$  небольшого числа отсчетов структурной функции интенсивности - порядка двух-трех отсчетов). В связи с этим значения корреляционного экспонента оценивались по двадцати отсчетам эмпирических структурных функций в области  $0.25 \text{ мкм} \leq |\mathbf{r}| \leq 5 \text{ мкм}$ .

В таблице приведены полученные подобным образом оценки величин  $v_1$  для всех исследованных образцов. Несмотря на довольно значительный разброс значений  $v_1$  относительно  $v_\phi$ , существует сильная корреляционная связь между этими величинами (выборочное значение коэффициента корреляции равно 0.73). Взаимный разброс величин  $v_1$  и  $v_\phi$  может быть обусловлен не только погрешностями определения этих величин в эксперименте, но также и отклонениями формы распределений значений фазы для рассеивателей от нормального закона, для которого  $v_1 = v_\phi$ .

Тем не менее, наблюдаемая в эксперименте корреляционная связь между этими величинами позволяет предложить данный подход в качестве основы методов экспресс-анализа структурных свойств оптически неоднородных объектов в области высоких пространственных частот (в частности, для описания топологий структуры фазовых объектов) путем оценки значений размерностей различных порядков [10] для реализаций интенсивности динамических спекл-полей при планировании исследуемого образца. Одним из наиболее перспективных направлений использования подобных методов исследования нам представляется лазерный мониторинг клеточных и внутриклеточных структур и биотканей [8].

Таблица

Значения корреляционных экспонентов  $\nu_\phi$ ,  $\nu_1$ , топотезы  $L_\phi$  и фрактальной размерности  $D$  для исследованных в работе образцов.

№ образца	$L_\phi^*$ , мкм	$D^{***}$	$\nu_\phi^*$	$\nu_1^{**}$
1	$5.1 \cdot 10^{-5}$	1.305	1.39	1.58
2	$1.33 \cdot 10^{-5}$	1.285	1.43	1.38
3	$4.04 \cdot 10^{-5}$	1.340	1.32	1.50
4	$2.53 \cdot 10^{-8}$	1.260	1.48	1.42
5	$1.91 \cdot 10^{-5}$	1.410	1.18	1.25
6	$4.16 \cdot 10^{-5}$	1.420	1.16	1.13

Примечания: \* - по результатам микроинтерферометрических измерений;  
 \*\* - из анализа структурной функции флуктуаций интенсивности спекл-поля;  
 \*\*\* - значения  $D$ , приведенные в таблице, определены по соответствующим величинам  $\nu_\phi$ .

Таким образом, в результате проведенного анализа взаимосвязи асимптотических характеристик структурных функций флуктуаций фазы граничного поля и интенсивности в дальней зоне дифракции для рассеивателей с гауссовой статистикой фазы установлено равенство значений их корреляционных экспонентов. Это позволяет предложить методику оценки фрактальной размерности структуры рассеивающих объектов путем определения аналогичной величины для флуктуационного компонента интенсивности рассеянного поля в дальней зоне при освещении рассеивателя широким когерентным пучком. В работе проведена апробация предложенной методики на образцах крупношероховатых стеклянных пластин, обладающих поверхностями с фрактальными свойствами.

*Работа выполнена в рамках гранта ГР-71 «Разработка физических основ лазерных измерительных систем с пространственно-модулированными пучками для анализа оптически неоднородных объектов» (программа «Физические основы измерительных систем»).*

### Библиографический список

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
2. Джейкмен Е. Рассеяние на фракталах. В кн.: Фракталы в физике. Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике. М.: Мир, 1988. С.82.
3. Ангельский О.В., Магун И.И., Максимьяк П.П. и др. О возможностях оптической диагностики крупношероховатых поверхностей // Оптика и спектроскопия. 1991. Т.71, № 6. С.1021.
4. Church E.L. Fractal surface finish // Appl.Opt. 1988. Vol.27, № 8. P.1518.
5. Dainty J.C. Laser speckle and related phenomena // Topics in applied physics. Berlin, Springer, 1975. Vol.9.
6. See C.W., Appel R.K., Somekh M.G. Scanning differential optical profilometer for simultaneous measurement of amplitude and phase variation // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol.53, № 1. P.10.

7. Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрен Т. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

8. Зимняков Д.А., Тучин В.В., Утц С.Р. Исследование статистических свойств частично развитых спекл-полей применительно к диагностике структурных изменений кожи человека. Оптика и спектроскопия // 1994. Т.76, № 5. С. 838.

9. Kadono H., Asakura T., Takai N. Roughness and correlation length measurements of rough surface objects using the speckle contrast in the diffraction field // Optik. 1988. Vol.80, № 3. P.115.

10. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.

Саратовский государственный  
университет  
Институт проблем точной  
механики и управления РАН

Поступила в редакцию 5.04.95  
после переработки 31.07.95

## SPECKLE PATTERNS CORRELATION DIMENSION FOR FRACTAL-LIKE SCATTERERS

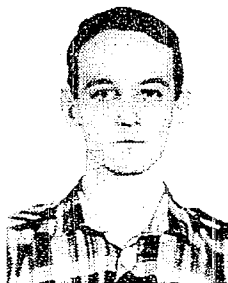
*D.A.Zimnyakov, V.V.Tuchin, A.A.Mishin, K.V.Larin*

Two methods of the phase structure function parameters estimation for fractal-like scattering objects using coherent probing beam are discussed. One of them is based on the analysis of the angular dependences of the scattered field intensity and its derivative mean values. Another technique requires the evaluation of the structure function parameters for the far-zone speckles intensity fluctuations. The equality of the correlation dimensions of boundary field phase and fully developed speckles intensity fluctuations has been shown for the case of Gaussian phase random scatterers.

Experimental study of the Gaussian light beam scattering by the moving rough glass plates has shown the correlation between parameters of the boundary field phase and fully developed speckles intensity structure functions. This allows to propose this approach for the evaluation of the correlation and fractal dimensions of random phase scatterers.



*Зимняков Дмитрий Александрович* - родился в 1956 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1978). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в Московском институте приборостроения (1989) в области разработки методов и средств контроля материалов, веществ и изделий. Докторант кафедры оптики СГУ. Опубликовал более 30 научных статей. Область научных интересов - статистическая и корреляционная оптика и ее метрологические приложения.

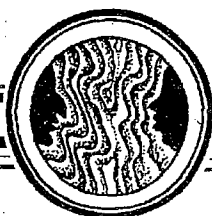


*Мишин Алексей Александрович* - родился в 1970 году в Саратове, окончил физический факультет СГУ (1992). Младший научный сотрудник Института проблем точной механики и управления РАН. Им в соавторстве опубликовано 4 статьи по вопросам статистического анализа спекл-полей и биомедицинской оптики.

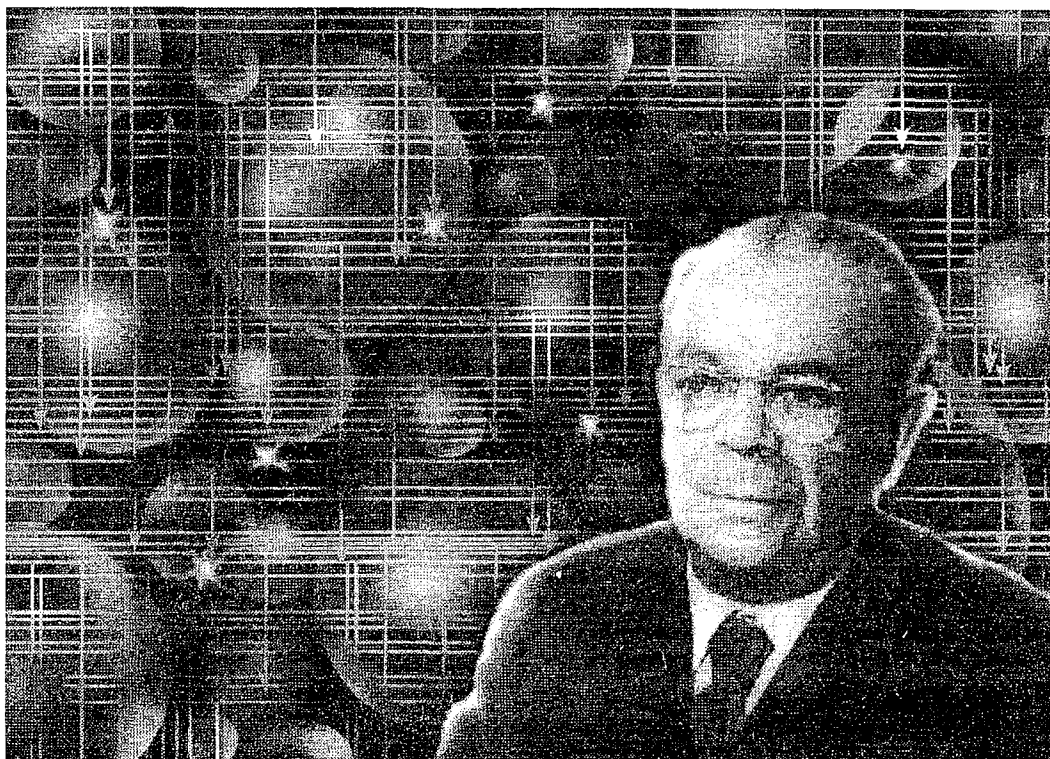


*Ларин Кирилл Владимирович* - родился в 1973 году в Вольске Саратовской области. В настоящее время является аспирантом кафедры оптики СГУ. В соавторстве опубликовал 3 статьи в области оптики спеклов, одна из которых в академическом журнале «Письма в ЖТФ».





Изв. вузов «ПНД», т.3, № 6, 1995



### МАРК ЛЬВОВИЧ КАЦ

*В.В. Тучин*

В 1996 году Марку Львовичу Кацу, ученому с мировым именем, специалисту в области люминесценции, спектроскопии и лазерной физики, профессору Саратовского государственного университета, исполнилось бы 90...

Свою трудовую биографию Марк Львович Кац начинал как простой учитель в сельской школе, затем учился в Одесском университете. Уже в то время определилась область научных интересов: первая научная работа была посвящена люминесценции. Марк Львович предложил новый метод изучения электронных процессов в ионных кристаллах - метод температурного высвечивания, который стал классическим в изучении локальных уровней твердого тела. Его исследования были поддержаны выдающимся российским оптиком - академиком С.И. Вавиловым.

В 1946 году в СГУ создается кафедра оптики. Основателем ее и первым заведующим по рекомендации С.И.Вавилова становится Марк Львович Кац. С этого времени весь свой талант организатора, ученого и преподавателя он посвятил становлению оптической науки и образования в Саратовском университете и саратовском регионе в целом.

В начале шестидесятых годов Марк Львович был среди первых ученых России, кто по достоинству оценил изобретение лазера и понял перспективность новых направлений в науке - лазерной физики и нелинейной оптики. В 1964 году была опубликована первая в России и одна из первых в мире монография по лазерам\*. Редактор и один из авторов - М.Л. Кац. Он сделал очень много для развития научных и образовательных программ по лазерной физике и нелинейной оптике в СГУ. Всего в списке научных публикаций профессора 256 работ, включая 2 монографии. Наиболее значительные результаты его фундаментальных исследований можно найти в выпусках Академии Наук СССР «Советская наука и техника за 50 лет. Развитие физики в СССР»(1967) и «Развитие физики в России» (1970).

Марк Львович был деканом физического факультета девять лет, два года - проректором СГУ. В течение ряда лет он заведовал двумя кафедрами - кафедрой оптики СГУ и кафедрой физики Саратовского медицинского института. Был блестящим лектором и всегда пользовался успехом у студентов. Он подготовил 38 кандидатов наук и двух докторов наук по оптике. Многие из его студентов стали известными учеными, преподавателями и организаторами производства.

В дни юбилея Марка Львовича Каца мы с любовью и благодарностью вспоминаем нашего дорогого Учителя.

## **50 ЛЕТ ОПТИЧЕСКОЙ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ В САРАТОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

В 1996 году исполнится 50 лет как на физическом факультете Саратовского университета была открыта кафедра оптики, сыгравшая заметную роль в деле подготовки специалистов-оптиков для нашей страны. За время своего существования кафедра окончила свыше тысячи человек, многие из которых участвовали в становлении и развитии оптической науки, техники и производства в саратовском регионе. Основателем кафедры и первым заведующим был профессор М.Л. Кац, который заведовал кафедрой 34 года с 1946 по 1979 год. Под его руководством сразу же после открытия лазеров на кафедре были развернуты интенсивные исследования по физике лазеров и квантовой электронике. Именно в Саратове была опубликована первая в Советском Союзе и одна из первых в мире монография по лазерам. Известный специалист в области спектроскопии и нелинейной оптики профессор Н.К.Сидоров заведовал кафедрой в период с 1979 по 1983 год.

М.Л. Кац (1906 - 1990), 90-летие со дня рождения которого отмечается в 1996 году в Саратовском университете, был высококвалифицированным признанным специалистом в области люминесценции кристаллофосфоров. Под его руководством в течение многих лет основным научным направлением кафедры было исследование люминесценции и электронно-дырочных процессов в фотохимически окрашенных щелочно-галогидных кристаллах. Становление этого направления связано, главным образом, с предложенным в 1941 году М.Л. Кацем эффективным методом исследования энергетической структуры твердых тел - методом термического высвечивания. Этот метод открыл существенно новые перспективы исследования спектра локальных электронных уровней в полных

\* М.Л. Кац, М.А. Ковнер, Н.К. Сидоров. Оптические квантовые генераторы. Саратов: изд-во СГУ, 1964

люминесцирующих кристаллах. В дальнейшем круг исследований по люминесценции был значительно расширен. Были предприняты исследования спектров поглощения, возбуждения и люминесценции окрашенных щелочно-галогидных кристаллов в связи с решением ряда фундаментальных вопросов физики люминесценции и изучением природы и структуры центров свечения.

Помимо исследований по люминесценции кристаллов велись исследования по молекулярной люминесценции, которые положили начало развитию широкого фронта работ по молекулярной спектроскопии на кафедре. Проводились систематические исследования абсолютных интенсивностей полос в инфракрасных спектрах поглощения углеводородов и гетероциклических соединений, проводились теоретические расчеты колебательных спектров в связи с электронной структурой молекул. Большой цикл работ составили исследования спектров комбинационного рассеяния в жидкостях и растворах с целью изучения молекулярной динамики и межмолекулярного взаимодействия в конденсированных средах (профессор Н.К.Сидоров и др.). Были проведены всесторонние исследования жидкокристаллических веществ: изучены ИК-спектры жидких кристаллов, развиты эффективные методы решения задач статики и динамики деформации ЖК-слоя в электрических полях, разработаны методы расчета спектральных зависимостей поляризационно-оптических характеристик ЖК-структур, создан и внедрен уникальный комплекс компьютерных программ для моделирования характеристик устройств отображения информации на ЖК (доц. В.И.Цой, доц. А.Г.Финкель, с.н.с. Г.В.Симоненко и др.).

С конца 80-х годов на кафедре успешно развивается новое направление - нелинейная динамика оптических систем, в частности, лазеров и волоконных световодов (проф. Л.А.Мельников, проф. В.В.Тучин). Результатом работы в этой области явилась динамическая теория синхронизации мод в газовых и твердотельных лазерах, включая лазеры с насыщающимся поглощением. Ведутся активные исследования динамики поперечной структуры поля в лазерах без ограничения на число поперечных мод и поляризационной динамики, исследуется динамика оптических солитонов в световодах с периодической по длине модуляцией геометрических параметров и сверхкоротких импульсов в волоконных лазерах. В рамках данного направления выполнялись гранты Международного научного фонда, существует тесное международное сотрудничество.

В эти же годы на кафедре зарождается новое направление, связанное с исследованием самовоздействия лазерных пучков и импульсов при их распространении в резонансных средах (доц. В.Л.Дербов, проф. Л.А.Мельников). Новым в этих исследованиях является то, что основное внимание уделяется частотным характеристикам. Результаты этих работ нашли применение при совершенствовании оптических стандартов частоты, в которых эффекты наведенной неоднородности среды играют существенную роль в оценке сдвигов частоты и стабильности.

С 1981 года сотрудники кафедры оптики СГУ ведут интенсивные исследования в области биомедицинской оптики и лазерной медицины (проф. В.В.Тучин, доц. Ю.П.Синичкин, доц. А.Б.Правдин и др.). Были разработаны оптические модели тканей глаза и разнообразные методики лазерной диагностики в офтальмологии. По результатам этих работ в сотрудничестве с Московским университетом была опубликована монография «Лазерная диагностика в биологии и медицине», М.: Наука, 1989 (А.В.Приезжев, В.В.Тучин, Л.П.Шубочкин). В последние годы на кафедре разрабатываются физические основы оптической диффузионной томографии биологических тканей, ведется интенсивный поиск новых эффективных средств флуоресцентной диагностики патологических тканей, а также развиваются когерентно-оптические методы визуализации и анализа клеточных структур. Эта тематика лежит в основе широкого международного сотрудничества по научным и образовательным программам. В настоящее время работы поддерживаются двумя международными программами CRDF совместно с Пенсильванским университетом и Европейским грантом Коперникус (Германия, Венгрия, Греция).

С 1989 года на кафедре развивается новое научное направление (проф. В. П. Рябухо, доц. Д. А. Зимняков, доц. С. С. Ульянов, доц. Ю. А. Аветисян), связанное с разработкой физических основ лазерных и оптических измерений, оптикой спеклов, голографической и спекл-интерферометрией, дифракционными и поляризационными методами анализа и контроля объектов сложной структуры, включая биологические объекты. Проведены исследования интерференции спекл-модулированных волн, дифракции интерференционного поля на случайных фазовых экранах, установлены особенности дифракции сфокусированных гауссовых пучков на стационарных и динамических рассеивающих объектах, определены условия проявления фрактальных свойств рассеянных лазерных пучков.

В начале 90-х годов внимание группы сотрудников кафедры (доценты В. Л. Дербов, В. Ю. Горонов и др.) привлекла существенно новая тема - проявление в оптике так называемой геометрической фазы (ГФ). В соавторстве с группой теоретиков из ОИЯИ (Дубна) в журнале «Успехи физических наук» был опубликован первый в отечественной литературе обзор по ГФ в оптике и квантовой механике. В дальнейшем от демонстрации проявления ГФ в отдельных оптических системах сотрудники кафедры перешли к разработке общих геометрических подходов для анализа сложной динамики лазеров.

В самое последнее время группа сотрудников кафедры (Л. А. Мельников, В. Л. Дербов) активно участвует в исследовании лазерного воздействия на совершенно новые объекты - экзотические атомы с участием античастиц. Эти исследования ведутся в рамках Международного проекта ИНТАС-РФФИ совместно с группой экспериментаторов из ЦЕРН (Швейцария) и теоретиков из ОИЯИ (Дубна).

Активная научно-исследовательская работа, проводимая на кафедре, способствовала повышению квалификации и научному росту ее сотрудников: за время существования кафедры защищено 5 докторских и свыше 60 кандидатских диссертаций. Сотрудниками кафедры за последние 10 лет опубликовано более 15 монографий и сборников статей, имеется много международных публикаций, опубликовано и подготовлено к печати более 10 томов трудов и избранных работ Международного оптического общества SPIE, включая «Когерентные методы в биомедицинской оптике» под редакцией В. В. Тучина. Этот том посвящен 50-летнему юбилею кафедры и 90-й годовщине со дня рождения ее основателя М. Л. Каца.

Кафедра обеспечивает чтение общих курсов по оптике и атомной физике на физическом факультете, а также проведение по ним семинарских и лабораторных занятий. Кроме того, в рамках специализации читается более 30 спецкурсов по современным проблемам оптики и спектроскопии, лазерной физики и биомедицинской оптики, а также проводятся углубленные занятия в трех спецпрактикумах. Дипломные работы выполняются как на кафедре, так и в институтах РАН, в отраслевых НИИ и ОКБ промышленных предприятий, что обеспечивает как фундаментальную подготовку, так и решение студентами актуальных научно-технических задач. Все это в совокупности обеспечивает подготовку специалистов-оптиков широкого профиля. Результатом серьезной научно-методической работы, проводимой на кафедре, явилось издание целого ряда учебных пособий по лабораторным работам в общем и спец-практикумах, а также по читаемым на кафедре спецкурсам.

Для подготовки специалистов в области биомедицинских приложений оптической науки в 1994 году на кафедре открыта подготовка по специальности «биофизика» со специализацией «биомедицинская оптика и лазерная биофизика». В 1990 году на базе Института точной механики и управления РАН и Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН созданы филиалы кафедры оптики, во многом способствующие привлечению студентов и аспирантов кафедры к активной научной работе. На филиалах кафедры в настоящее время специализируются пять саратовских аспирантов и два саратовских студента. На

кафедре и ее филиалах работают два соросовских доцента (В.П. Рябухо, Ю.П. Сяничкин).

При кафедре работает аспирантура и докторантура по трем специальностям: оптика, лазерная физика и биофизика. В настоящее время на кафедре имеется 6 докторантов и более 20 аспирантов.

Кафедра имеет давние связи с ведущими центрами оптической науки России, стран СНГ, многих Европейских стран, США и Японии и внесена в международный реестр высших учебных заведений, ведущих подготовку специалистов-оптиков. Кафедра является коллективным членом международного лазерного центра при МГУ, лазерного центра России, международного общества по оптической технике SPIE. Многие ее сотрудники являются индивидуальными членами Российского оптического общества, SPIE/RUS, членами Международного общества по биомедицинской оптике, BiOS, Оптического общества Америки, OSA и др. Коллектив кафедры успешно организовал четыре международных семинара по основным научным направлениям кафедры в 1992 и 1993 годах, а также является одним из организаторов Международной конференции по нелинейной динамике и хаосу в 1996 году, включая семинар SPIE «Нелинейная динамика и структуры в биологии и медицине: оптические и лазерные технологии».

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 12.12.95*

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*  
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина*  
Технический редактор *М.В. Попова*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал - макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам  
осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж»  
при Саратовском государственном университете.  
Индекс по каталогу «Газеты и журналы» - 73498

Банковские реквизиты  
- получатель ГосУНЦ «Колледж» ИНН 6452006136,  
р/с № 000609446 в КБ «Экономбанк» г. Саратова, МФО 046311722,  
корсчет банка 700161122

Сдано в набор 20.10.96. Подписано к печати 21.11.96. Формат 70x108/16  
Бумага финская. Гарнитура Латинская  
Усл. печ.л. 12,250 (8,75). Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 200 экз. Заказ 33

Издательство ГосУНЦ «Колледж»  
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.  
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 514298  
E-mail:and@ccollege.saratov.su

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

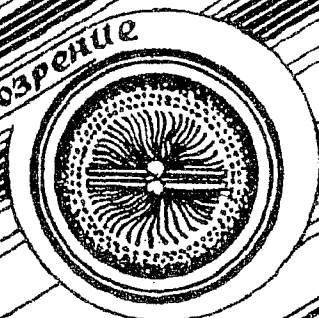
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1996



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

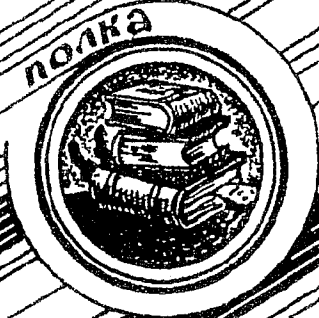
*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



Методические заметки



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики

*Конец тысячелетия, разброд и смута, дикая помесь всех общественно – исторических формаций, пространственно – временная диффузия и вообще, черт те что... Естественно, что журнал 95 года выныривает в конце 96, полдекабря льют дожди, а в редакционной корзине невеста откуда образовалась вдруг печатные обрывки на скверной бумаге, со скверно отпечатанной картинкой, но зато на почти чистом английском языке. Достоверность бумажек не вызывает сомнений – видать, наша корзинка вследствие стохастической временной турбулентности на минутку просочилась в какую – то мусорку близлежащей Параллельной Вселенной...*

*Оказалось, что содержание найденного некоторым образом коррелирует с лазерной тематикой данного выпуска журнала, поэтому ниже приведен перевод того, что поддавалось переводу. Лакуны отмечены многоточиями[...].*

Journal of Laser Ideology, 2017, July, N7

## СОЦИАЛИСТИЧЕСКИЕ ШТАТЫ АМЕРИКИ НА СТОДНЕВНОЙ ТРУДОВОЙ ВАХТЕ, ПОСВЯЩЕННОЙ СТОЛЕТИЮ [...]

Века и столетия разобщенные массы [...] спонтанно-хаотические выступления не могли [...]. Маркс предсказал неминуемость гибели капитализма и научно разработал трехуровневую схему этого процесса, позднее получившего название лазерного [...], доведенные до высочайшего уровня нищеты и отчаяния, попадают отсюда в ряды и уровни организованного пролетариата [...]. Скогеррированная энергия их единых действий способна разрушить [...] после чего переходят в состояние полного покоя и довольствия [...].

Коммунизм долго оставался неосуществимой мечтой, пока два величайших гения человечества - эмигрант из далекого города Ujapovsk В.И. Ленин и коренной американец из штата Georgia И.В. Сталин не разработали Величайшее Учение о роли Накачки в LASER'ном процессе, который с тех пор стал навеки связан с их бессмертными именами (**Lenin Amplifier of Stalin Excelente Revolution**). Они исследовали различные виды Накачек, выковали грязное оружие пролетариата - **Нелинейно-Колебательную Волновую Динамику**, создали Активную среду - **Партию большой накачки**, которая внедряет и использует [...] **Государственный Универсальный ЛАЗерный Генератор** [...] возбужденное состояние [...] освоение целинных земель Большого Каньона и пустынь Невады [...]. Руководствуясь марксистско-лазерной теорией, великие пролетарские физики [...] сверхмощную Лазерную Пушку [...] полную и окончательную победу Американского Коммунизма [...].

### Лазерный зал Авроры

Виссарион Иосифович Ленин и  
Илья Владимирович Сталин  
возглавляют  
Великую ноябрьскую революцию  
New York  
1917

