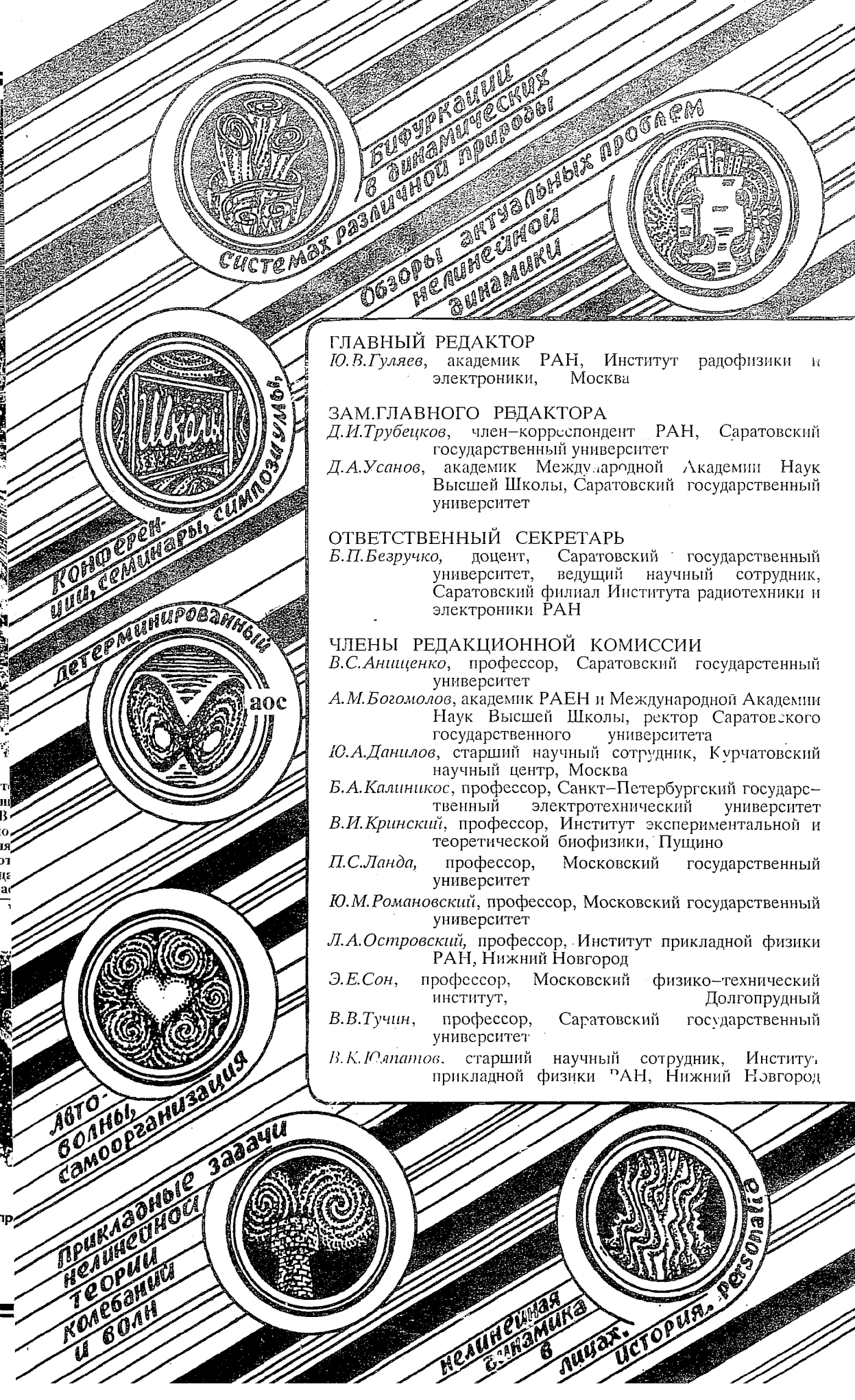
ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Прикладная Нелинейная Динамика

3-4
1993

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В.Гуляев, академик РАН, Институт радиофизики и электроники, Москва

ЗАМ.ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И.Трубецков, член–корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А.Усанов, академик Международной Академии Наук Высшей Школы, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П.Безручко, доцент, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОМИССИИ

В.С.Анищенко, профессор, Саратовский государстенный университет

А.М.Богомолов, академик РАЕН и Международной Академии Наук Высшей Школы, ректор Саратовского государственного университета

Ю.А.Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А.Калиникос, профессор, Санкт–Петербургский государственный электротехнический университет

В.И.Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

П.С.Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М.Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А.Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е.Сон, профессор, Московский физико–технический институт, Долгопрудный

В.В.Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.К.Юлпатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

Выходит 6 раз в год Том 1, № 3, № 4, 1993, Саратов

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ
Леон О. Чуа. Генезис схемы Чуа 4

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ
Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу 17

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН
Климов В.И., Ланда П.С. Простейшая динамическая модель экономического развития общества 36
Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Синхронизация хаотических колебаний и электрическая активность человеческого мозга 45
Анищенко В.С., Сапарин П.И. Нормированная энтропия как диагностический признак реакции сердечно–сосудистой системы человека на внешнее воздействие 54
Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Модель Лоренца для описания конвекции в магнитной жидкости 65

СОЛИТОНЫ
Елеонский В.М., Королев В.Г., Кулагин Н.Е. О динамической системе,порожденной уравнением Уизема с осциллирующим ядром . . . 72

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ
Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Формирование диссипативных структур в акустическом поле 87

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA
Пойзнер Б.Н. Хаос, порядок , время в древних картинах мира 97

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ
Пригожин И. Новое открытие времени 110

ДЕБЮТЫ
Мчедлова Е.С. Аналитическое исследование сложной динамики параметрического осциллятора 125

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ
Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Ответ на задачу 129

КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА 131

HIGH EDUCATION STATE COMMITTEE OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Published 6 times a year Vol.1, № 3, № 4 1993, Saratov

CONTENTS

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

The genesis of Chua's Circuit. *Leon O. Chua* 4

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Critical dynamics for one–dimensional maps. Part 2. Two–parametre transition to chaos. *A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov and I.R. Sataev* 17

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

The simplest dynamical model of social progress. *I.V. Klimov and P.S. Landa* . . 36

Chaotic synchronisation and electrical activity of human brain *V.S. Anishchenko and D.E.Postnov* 45

Diagnostics of human being physical and mental condition on the basis of electro–cardiogram analysis by methods of chaotic dynamics. *V.S. Anishchenko and P.I. Saparin* 54

«Lorentz Model» for description of the convection in magnetic fluid. *N.M.Ryskin and D.I.Trubetskov* 65

SOLITONS

On the dynamic system generated by Whitham's equation with oscillating kernel. *V.M.Eleonsky, V.G. Korolev and N.E. Kulagin* 72

AUTOWAVES. SELF–ORGANIZATION

The formation of dissipative structures in the acoustic field. *I.P. Zavershinski, E.Ya. Kogan and N.E. Molevich* 87

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

Chaos, order, time in ancient pictures of the world. *A.N. Poizner* 97

BOOKS REVIEW

The rediscovery of time. *I. Prigogine* 110

DEBUTS

Analytical approach to complicated dynamics of parametric oscillator. *E.S. Mched–lova* 125

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

Solution of the problem. *A.P. Kuznetsov and S.P. Kuznetsov* 129

STUDENT'S BOOKSHELF 131

Happy New Year!
С новым годом!
Утро Рождества Съ картины Е. Моха грав. Гейзеръ и Крепсъ
Счастливаго Рождества!
Merry Christmas!

Статья профессора Леона О.Чуа открывает в нашем журнале серию публикаций работ зарубежных коллег. То, что эту серию открывает профессор Чуа, в известной степени закономерно. Профессор Чуа неоднократно посещал нашу страну, участвуя в научных конференциях. У себя на родине он был гостеприимным хозяином для многих ученых из России и Украины. Наши специалисты в области нелинейной динамики публикуют свои работы в издаваемом им журнале.

Редакционная коллегия надеется, что статья профессора Чуа – первая ласточка, и его примеру последуют другие зарубежные коллеги.

Редакционная коллегия

PREFACE: CHUA'S CIRCUIT: TEN YEARS LATER

It is with great pleasure and humility that I accept this journal's invitation to comment on the simple chaotic circuit I designed in 1983, as an exercise for Professor Matsumoto from Waseda University to grapple with, having been frustrated in two years of futile attempt to build a chaotic circuit. Thanks to the creativity of many brilliant researchers from Russia and Ukraine, an explosive amount of new knowledge on Chua's Circuit has been reaped over the past two years, as evidenced by the content of two recent Special Issues of the Journal of Circuits, Systems, and Computers (March and June, 1993) entitled « CHUA's CIRCUIT: A PARADIGM FOR CHAOS» (see also the expanded version in a book edited by Dr. N. Madan and published by World Scientific Publishers in 1993). Their contributions during the past two years have already eclipsed the many years of dedicated but bruteforce hardworks led by Matsumoto, who had been groping in the dark, unaware of the many powerful analytical and conceptual tools of nonlinear dynamics that had been developed in the former Soviet Union. While the current state of the art on the nonlinear dynamics of Chua's Circuit is quite advanced and comprehensive, much research remains to be done on the control, synchronization, and harnessing of chaos, as well as on the spatio–temporal structures, patterns, and waves of arrays of Chua's circuits – which can now be built as a monolithic VLSI silicon chip. It is with this vision of future challenge and breakthroughs that I salute the editorial board of this well–conceived journal for their scientific dedication to the advancements of research on nonlinear dynamics. In spite of the difficult economic times, I have no doubt that creative ideas will triumph, and that years from now, scholars will look back and concur that the1993 launching of this new journal is both timely and visionary.

Leon O. Chua

СХЕМА ЧУА. ДЕСЯТЬ ЛЕТ СПУСТЯ

С большим удовольствием и смущением я принял приглашение журнала прокомментировать простую хаотическую схему, придуманную мной в 1983 году в качестве предмета исследования для профессора Т.Матсумото из университета Васеда, после его двухлетних бесплодных попыток создать схему, которая демонстрировала бы хаотическое поведение.

Благодаря творческим усилиям многих известных ученых из России и Украины было собрано огромное количество новых сведений о схеме Чуа. Об этом свидетельствует содержание двух специальных номеров журнала "Цепи, системы и компьютеры" (март, июнь 1993 г.), озаглавленных "Схема Чуа: парадигма хаоса" (расширенную верию можно найти в книге под редакцией доктора Р.Н.Мадан, опубликованной издательством "Мир науки" в 1993 году). Вклад российских и украинских ученых за последние два года был столь значителен, что почти затмил многолетнюю самоотверженную работу профессора Т.Матсумото, который использовал достаточно грубые методы и продвигался в своих поисках как бы наощупь, не подозревая о многих мощных аналитических и концептуальных подходах, развитых в бывшем СССР.

Исследования нелинейной динамики в схеме Чуа носят всеобъемлющий характер и в них достигнут значительный прогресс, тем не менее остается еще большее поле для разработок в области управления, синхронизации и использования хаоса, а также пространственно–временных структур и волн в решетках из схем Чуа, которые теперь могут быть изготовлены в виде одного кристалла СБИС. Именно в связи с новыми сложными проблемами и грядущими прорывами я приветствую редакционную коллегию замечательно задуманного журнала за научную убежденность в перспективности исследований в области нелинейной динамики. Я не сомневаюсь, что, несмотря на трудные для России времена, научное творчество восторжествует, а годы спустя ученые оглянутся назад и согласятся – издание в 1993 году нового журнала было и своевременным, и прозорливым.

Леон О.Чуа

Перевод И.Р. Сатаева

Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 53.072:681.31

ГЕНЕЗИС СХЕМЫ ЧУА

Леон О. Чуа

Статья представляет собой систематическое изложение последовательности технических этапов, пройденных автором при разработке схемы, генерирующей хаос. Процедура разработки, хотя и ясная по своей природе, не могла быть изобретена без использования некоторых важных свойств нелинейных схем и их физических реализаций.

1. Воспоминания: экскурс в историю

Событие, которое привело к открытию схемы Чуа, произошло в лаборатории профессора Т.Матсумото в университете Васеда поздним октябрьским днем 1983 года, на следующий день после моего приезда в Токио по приглашению JSPS (Японское общество содействия науке). Здесь, в хорошо оснащенном и заставленном приборами углу в лаборатории Матсумото, я должен был стать свидетелем живой демонстрации предположительно первой в мире удачной электротехнической реализации уравнений Лоренца, над которой исследовательская группа профессора Матсумото трудилась больше года. Это был действительно замечательный образец электронной схемотехники. Он был тщательно, почти идеально смакетирован, включал более чем дюжину интегральных схем и был украшен приблизительно таким же количеством потенциометров и других подстроечных элементов для тонкой перестройки и точной настройки. Не было бы необходимости придумывать более ясную хаотическую схему, если бы схема Лоренца–Матсумото работала. Но она не работала. Виной тому был не недостаток мастерства экспериментатора у Матсумото, а скорее нехватка интегральных компонентов с хорошими характеристиками и достаточно большим динамическим диапазоном, а именно – интегральных умножителей. К несчастью, именно этот компонент был ключевым при построении автономной электронной хаотической схемы в 1983 году. В то время общепризнанными были только две автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, демонстрирующие хаос. Это были уравнения Лоренца

$$\dot{x} = -\alpha(x - y),$$
$$\dot{y} = \beta x - y - xz,$$
$$\dot{z} = xy - yz,$$

и уравнения Ресслера

$$\dot{x} = -y - z,$$

$$\dot{y} = x + \alpha y,$$

$$\dot{z} = \beta + z(x - \gamma),$$

где α, β и γ – параметры. Заметим, что нелинейность в обеих системах является функцией двух переменных, точнее, произведением этих переменных.

К 1983 году, бросающееся в глаза отсутствие воспроизводимости в работе хаотических схем или систем вело, казалось, к предположению, что хаос является патологическим явлением, которое может существовать лишь в математических абстракциях и в компьютерных экспериментах с придуманными уравнениями. Поэтому радиоэлектронщики вообще и теоретики, занимающиеся нелинейными цепями, в частности, уделяли мало внимания феноменам, которые многими рассматривались как мистическая диковина. Таким было состояние умов в среде теоретиков нелинейной схемотехники в 1983 году. Схема Лоренца – Матсумото должна была изменить это состояние равнодушия, царившее среди теоретиков.

Увиденное в такой исторической перспективе, полное разочарование, постигшее нас в тот октябрьский день, выглядит совершенно понятным. Неудача была настолько велика, что это отвратительное ощущение сохранялось в моем подсознании до самого вечера, когда я уже собирался лечь спать. Внезапно до меня дошло, что, поскольку основным механизмом, приводящим к появлению хаоса и в уравнениях Лоренца и в уравнениях Ресслера, является наличие в них как минимум двух *неустойчивых* положений равновесия (трех для Лоренца и двух для Ресслера) то разумно придумать более простую и ясную схему, которая обладала бы этими свойствами.

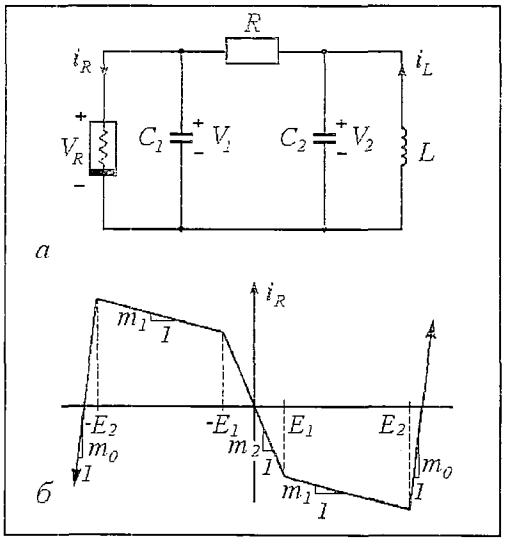


Рис. 1. Схема Чуа (*а*) и пятисегментная вольтамперная характеристика $v_R - i_R$ (*б*) для нелинейного резистора *r*. При компьютерном моделировании хаос может наблюдаться и при наличии только трех внутренних сегментов с отрицательной крутизной. Эквивалентная схема в приближении малого параметра в точке равновесия, лежащей на любом из этих трех сегментов, представляет собой отрицательное сопротивление

После того как этот альтернативный подход и стратегия были осознаны, систематический перебор *всех* подобных возможных схем был уже простым упражнением в элементарной теории нелинейных цепей [2]. Из выявленных восьми типов затем были исключены схемы, которые по той или иной причине не могли быть хаотическими. Это простое упражнение быстро привело к двум подходящим вариантам, из которых я, после применения некоторой интуиции, выработанной за два десятилетия ежедневного общения с нелинейными явлениями в электрических цепях, остановился в конце концов на схеме, приведенной на рис. 1. Весь процесс перечисления и исключения занял меньше часа и заключался в серии почти неразборчивых схемных диаграмм, которые я царапал на салфетках и чистых сторонах использованных конвертов. Я был вынужден прибегнуть к подручным материалам, поскольку не мог в столь поздний час найти другой бумаги в общежитии, где поселился днем раньше.

На следующее утро я показал предполагаемую схему Матсумото, указав, что значение *R* нужно выбирать

таким образом, чтобы его нагрузочная прямая пересекала внутренние три сегмента, имеющие *отрицательную крутизну* нарис. 1, *б*.

Матсумото немедленно запрограммировал уравнения цепи на своем компьютере. Вскоре он прибежал ко мне, сильно возбужденный, и ликующе объявил, что обнаружил странный аттрактор. Его чрезвычайное волнение в это мгновение не отличалось от волнения ребенка, впервые прыгнувшего в бассейн, поскольку он никогда не сталкивался ни с кусочно–линейными цепями, ни с нелинейными колебаниями, не говоря уж о странных аттракторах.

В течение нескольких месяцев после этого эпизода Матсумото продолжал вычислительные эксперименты с моей схемой в широком диапазоне параметров, подвергая двойной проверке свои компьютерные данные. Он хотел убедиться, что наблюдаемый им странный аттрактор не является в действительности артефактом, порожденным его достаточно незамысловатой программой, написанной на Бэйсике. Несмотря на мои многочисленные подталкивания, он воздерживался от макетирования моей схемы, поскольку его исследовательская группа никогда ранее не занималась синтезом заданных немонотонных вольтамперных характеристик. Поэтому я написал Зонгу Гуо Кину (Zhong Guo Qin) и Фархаду Айрому (Farhad Ayrom), которые были членами моей Лаборатории Нелинейной Электроники в Беркли, и предложил им применить разработанную нами ранее процедуру синтеза для реализации этой схемы. Их макет работал практически без точной подстройки. Итак, Зонг и Айром стали первыми исследователями, которые документально зафиксировали экспериментально наблюдаемый хаос в системе Чуа [17].

Следующий раздел посвящен технической версии эпизода разработки схемы, упоминаемого в предшествующем повествовании.

2. Теория нелинейных цепей, стоящая за схемой Чуа

2.1 Требования к схеме. Поскольку наша цель состоит в создании автономной электронной схемы, которая демонстрировала бы естественное, с точки зрения электроники, хаотическое поведение, мы можем сформулировать следующие требования к схеме:

схема должна быть физически реализуема, автономна и иметь только два или три неустойчивых положения равновесия;

схема должна содержать наименьшее возможное число двухполюсных линейных сопротивлений, индуктивностей и емкостей, а также только одно двухполюсное нелинейное сопротивление, которое обладало бы *кусочно–линейной, пассивной при больших значениях переменных* (*eventually passive*), *управляемой напряжением вольтамперной характеристикой* (ВАХ).

Ясно, что нелинейное сопротивление должно быть *активным* для того, чтобы схема стала хаотической. Другими словами, вольтамперная характеристика должна проходить через второй и/или четвертый квадранты. Однако, для того, чтобы быть физически реализуемой, она должна быть *пассивной при больших значениях переменных*, то есть вне некоторого круга произвольно большого, но конечного радиуса, она должна располагаться полностью в первом и третьем квадрантах.

Заметим: мы потребовали, чтобы вольтамперная характеристика была *кусочно–линейной*, по двум стратегическим причинам. Во–первых, мы имели большой опыт по синтезированию кусочно–линейных характеристик(см., например, наши работы по этому вопросу [3] и [4]). Во–вторых, мы имели немалый опыт по анализу динамики кусочно–линейных схем, сводя его к изучению нескольких линейных , точнее, аффинных систем (см. [2, 8, 9]).

Мы также потребовали, чтобы нелинейный резистор был *управляемым по напряжению*, так как такие элементы легче синтезировать, используя в качестве строительных блоков операционные усилители и диоды на *pn*–переходах [5, 10].

2.2. Процедура разработки. Как и при разработке любой схемы, которая должна удовлетворять заданному набору требований, при создании схемы Чуа была использована систематическая процедура синтеза, состоящая из нескольких последовательно проходимых шагов.

Определение минимального числа элементов схемы. Автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с числом переменных состояния меньше трех не может быть хаотической [13]. Поэтому выберем для нашей схемы три пассивных линейных, накапливающих энергию (energy storage), элемента. Поскольку мы потребовали, чтобы схема включала только одно нелинейное двухполюсное сопротивление, остальные элементы должны быть линейными пассивными сопротивлениями. Нам не нужны другие независимые источники, поскольку нелинейный резистор в активном состоянии уже имеет внутренний источник мощности. Число линейных резисторов может быть минимизировано применением стандартного метода эквивалентных цепей к окончательной схемной топологии, которую мы выведем ниже.

Определение топологии схемы. Вычленим три линейных запасающих энергию элемента и двухполюсный нелинейный резистор r, и соединим их через выводы многополюсника N_R, составленного из линейных пассивных сопротивлений. В зависимости от выбора энергозапасающих элементов существуют 4 различные конфигурации цепей, как показано на рис. 2. Мы можем сразу исключить RC (рис. 2, *а*) и RL (рис. 2, *б*) конфигурации, так как двухэлементные цепочки такого типа не способны осциллировать, не говоря уже о том, чтобы становиться хаотическими [6]. Две оставшиеся конфигурации на рис.2, *в*, *г* дуальны друг другу и поэтому являются равноправными кандидатами. Отдадим предпочтение последней схеме на рис. 2, *г*, поскольку точные перестраиваемые индуктивности высокого качества намного дороже, чем конденсаторы.

В выбранной схеме нелинейный резистор r управляется напряжением согласно предъявленным требованиям к схеме. В соответствии со стандартной методикой моделирования схем [7], мы получаем схему, в которой один из конденсаторов замкнут через r, (за исключением негибкого варианта с двумя конденсаторами, образующими контур с r). Итак, схема может быть упрощена до конфигурации, изображенной на рис. 3, *а*, где N_R состоит исключительно из двухполюсных линейных пассивных сопротивлений.

В стационарном состоянии емкость может быть заменена разрывом цепи, а индуктивность – закороченной цепью, как показано на рис. 3, *б*. Поскольку получившийся двухполюсник N_0 содержит только двухполюсные линейные пассивные сопротивления, он может быть заменен эквивалентным сопротивлением Тевенина (Thevenin) $R_0 > 0$, как показано на рис. 3, *в*. Каждое пересечение нагрузочной прямой $v_R=-R_0 i_R$ с вольтамперной характеристикой $v_R - i_R$ элемента r (которую еще нужно определить) дает состояние равновесия цепи. Поскольку требуется, чтобы использовалось минимальное количество линейных сопротивлений,сделаем предположение, что N_R содержит только одно линейное сопротивление $R > 0$. При таком упрощающем предположении для конфигурации схемы на рис. 3, *а*, можно предложить только 8 различных топологий, как показано на рис. 4. Наша следующая задача состоит в выборе наиболее перспективного варианта.

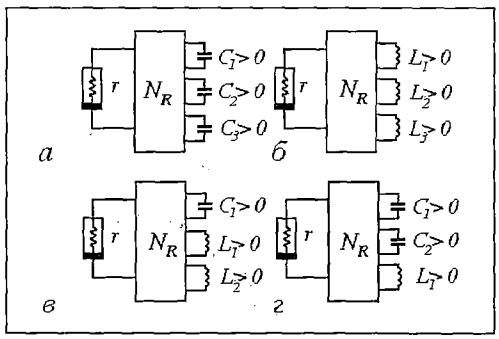


Рис. 2. Четыре различные конфигурации, включающие три реактивных элемента. Элемент N_R с четырьмя входами состоит из двухполюсных линейных пассивных сопротивлений

Схемы, соответствующие стационарным состояниям для цепей, изображенных на рис. 4, приведены на рис. 5. Изучение этих конфигураций показывает, что схемы на рис. 5, *а* и *б* могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения, поскольку эквивалентное линейное сопротивление R_0 в этих случаях закорочено. Схемы на рис. 5, *в* и *г* также могут быть исключены, так как R_0 в этих случаях представляет собой разомкнутую цепь. Из оставшихся четырех схем можно исключить также изображенную на рис. 5, *д* топологию, поскольку сопротивление R включено параллельно r и может быть им «поглощено», давая таким образом разомкнутую цепь вместо R_0. Аналогичным образом можно исключить схему на рис. 5, *е* вследствие того, что две параллельные емкости можно заменить эквивалентной емкостью, а это дает в результате схему второго порядка, которая не может быть хаотической. В конце концов у нас осталось только два кандидата, каждый из которых имеет $R_0 = R > 0$.

Нет никакой явной причины предпочесть одного кандидата другому. Однако наличие резонансной цепочки L_1C_2 в правой части схемы, приведенной на рис.4, *з* на самом деле является преимуществом, поскольку осцилляторный механизм является часто предвестником хаоса. Поэтому давайте выберем эту схему в качестве наиболее вероятного кандидата для получения хаоса.

Определение вольтамперной характеристики $v_R - i_R$. Наконец нам осталось найти подходящую нелинейность для r, чтобы удовлетворить требование, которое гласит, что схема должна иметь только два или три *неустойчивых положения равновесия.*

Поскольку, за исключением нелинейного сопротивления r, все элементы схемы являются пассивными, отсюда следует, что для удовлетворения условия неустойчивости каждая точка равновесия должна лежать на участке кусочно-линейной вольтамперной характеристики $v_R - i_R$ с отрицательной крутизной. Это

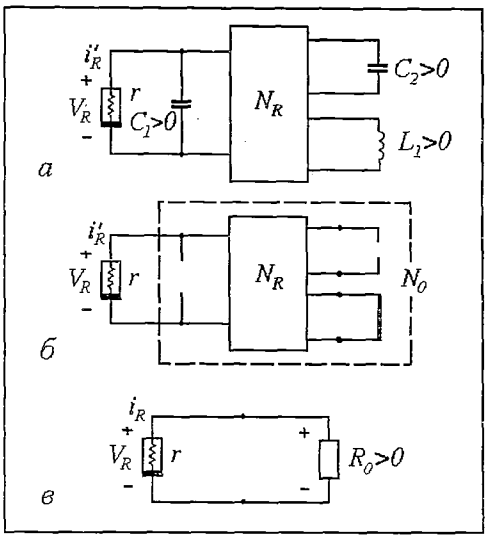


Рис. 3. *а* – конфигурация, которая задает схему, содержащую две линейных емкости, одну линейную индуктивность, двухполюсное немонотонное управляемое напряжением сопротивление и линейные пассивные сопротивления ; *б* – эквивалентная схема для стационарного состояния, соответствующая схеме, приведенной на рис. 3, *а;*
в – элемент N_0 с одним входом (см. рис. 3, *б*), эквивалентный одному линейному пассивному сопротивлению R_0. Поскольку $R_0 > 0$, нагрузочная прямая имеет отрицательный наклон на $v_R - i_R$ плоскости

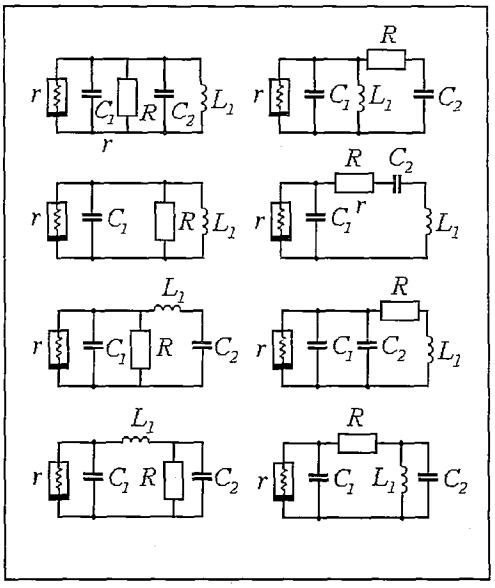


Рис. 4. Восемь различных топологий схем, существующих в предположении, что элемент с тремя входами N_R (см. рис. 3, *а*) состоит из одного линейного положительного сопротивления

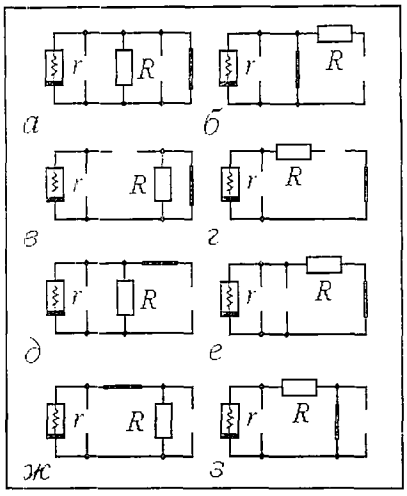


Рис. 5. Эквивалентные схемы для стационарного состояния, соответствующие «кандидатам» на хаотическую схему с рис. 4.

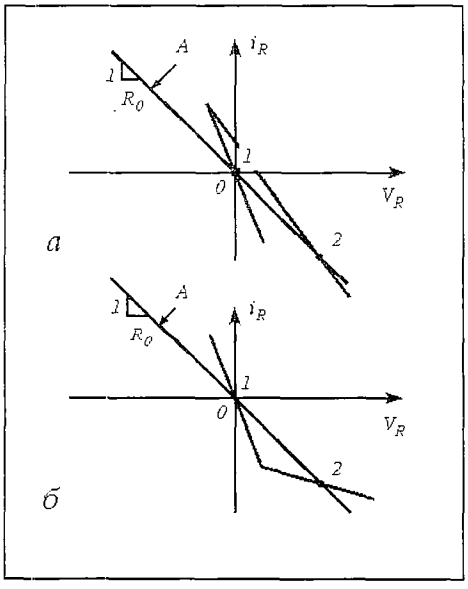


Рис. 6. Две (из четырех возможных) кусочно–линейные кривые, состоящие из двух сегментов с отрицительной крутизной и пересекающиеся в двух точках с нагрузочной прямой, имеющей также отрицательный наклон. Характеристика (*а*) является двузначной функцией и v_R и i_R. Характеристика (*б*) – однозначная функция, но ее нижний сегмент, если его продолжить до бесконечности, останется в пределах четвертого квадранта, и, следовательно, она физически нереализуема. Здесь и далее A – нагрузочная характеристика

условие отрицательной крутизны равносильно тому, что эквивалентная цепочка при малом уровне возмущений вблизи каждого положения равновесия является отрицательным сопротивлением, а это существенно для наличия нестабильности [11].

Поскольку $R_0 > 0$, нагрузочная прямая проходит через начало координат и имеет отрицательную крутизну $G = -1/R_0 < 0$. Для того, чтобы получалось два неустойчивых положения равновесия, существуют только 4 различных типа непрерывных двухсегментных кусочно–линейных характеристик, которые имеют отрицательную крутизну на обоих участках, и которые пересекаются с нагрузочной прямой в двух точках, включая начало координат, как показано на рис. 6 и рис.7. Характеристики, представленные на рис. 6, *а* и рис. 7, *а* могут быть исключены, поскольку не соответствуют требованию управляемости напряжением. Две оставшиеся характеристики на рис. 6, *б* и рис. 7, *б*, дуальные друг другу, являются жизнеспособными кандидатами. К сожалению, они не пассивные при больших значениях переменных.

Простейшие характеристики, которые удовлетворяют всем требованиям и содержат характеристики, приведенные на рис. 6, *б* и рис. 7, *б*, в качестве подмножества, показаны на рис. 8, *а* и рис. 8, *б* соответственно. Поскольку они дуальны друг другу, можно выбрать любую из них. Каждая такая схема имеет только две неустойчивых точки равновесия, и мы можем ожидать, что любой странный аттрактор в этой системе будет иметь структуру, напоминающую аттрактор Ресслера [1].

Для того чтобы получить три неустойчивых положения равновесия, как это имеет место в уравнениях Лоренца, существуют только два различных типа непрерывных, трехсегментных, кусочно–линейных характеристик, обладающих отрицательной крутизной на каждом сегменте для удовлетворения требования неустойчивости, как это показано на рис. 9, *а* и рис. 9, *б* соответственно. Первая характеристика может быть исключена, так как она не соответствует требованию управляемости напряжением.

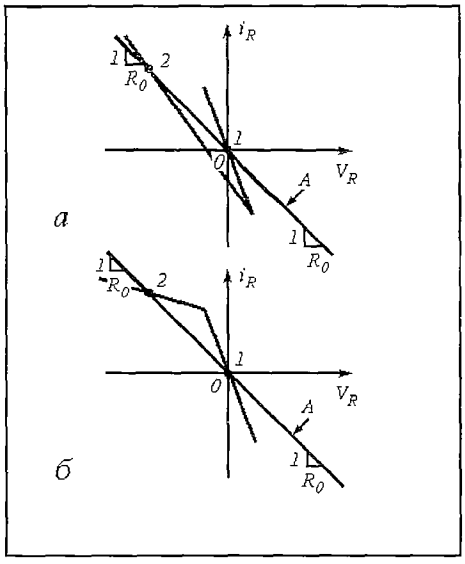


Рис. 7. Следующие две (из четырех возможных), кусочно–линейные характеристики, дуальные к приведенным на рис. 6.
Характеристика (а) также является двузначной функцией v_R и i_R. Характеристика (б) – однозначная функция; ее верхний сегмент, если его продолжить до бесконечности, останется в пределах второго квадранта, и, следовательно, она физически также нереализуема

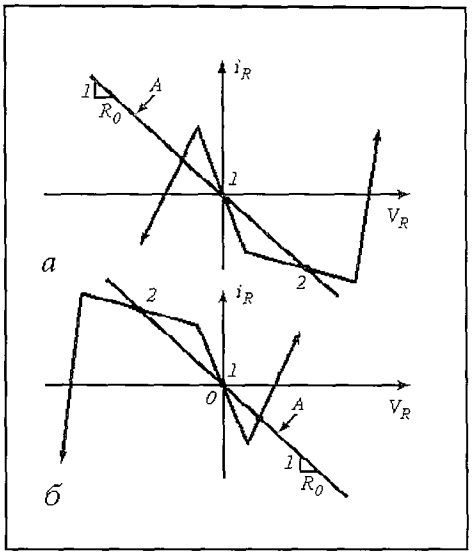


Рис. 8. Две дуальные четырехсегментные характеристики (*а*) и (*б*). При больших значениях переменных. они являются простейшими пассивными и, следовательно, физически реализуемыми, вольтамперными характеристиками, включающими характеристики, приведенные на рис. 6, *б* и рис. 7, *б* в качестве подмножества

В то же время вторая – полностью подходит, пока речь идет о требованиях неустойчивости и управляемости напряжением. Однако она не является пассивной при больших значениях переменных. Простейшая характеристика, которая удовлетворяет и этому требованию и включает рис. 9, *б* в качестве подмножества, является пятисегментной и изображена на рис. 10.

Вольтамперные характеристики, представленные на рис. 8 и рис. 10, *а* удовлетворяют требованиям неустойчивости и пассивности при больших значениях, сформулированным в наших технических условиях. Тем не менее, выберем для рассмотрения характеристику, приведенную на рис. 10, *а*, по трем причинам.

1. Эта характеристика включает обе характеристики, представленные на рис. 8, *в*, в качестве подмножеств, и, следовательно, если схема, соответствующая либо рис. 8, *а*, либо рис.8, *б* обладает странным аттрактором, то и выбранная нами характеристика также будет обеспечивать существование такого аттрактора. Более того, наличие третьей неустойчивой точки равновесия на рис.10, *а* обеспечивает большую вероятность существования других типов странных аттракторов, что делает, таким образом, эту схему более богатой в отношении хаотической динамики.

2. Вольтамперную характеристику (см. рис. 10, *а*) легче реализовать, поскольку она четная: существуют простые методы синтеза четных вольт–амперных характеристик [2]. Кроме того, так как соответствующие уравнения состояния будут также обладать четностью, анализ такой схемы не будет более сложным, чем анализ схемы, соответствующей рис. 8.

3. Хотя кусочно–линейная характеристика на рис. 8 имеет два неустойчивых положения равновесия, нечаянно мы получили еще одну, на этот раз устойчивую, точку равновесия, которая попадает на сегмент, добавленный для того, чтобы добиться пассивности при больших значениях переменных.

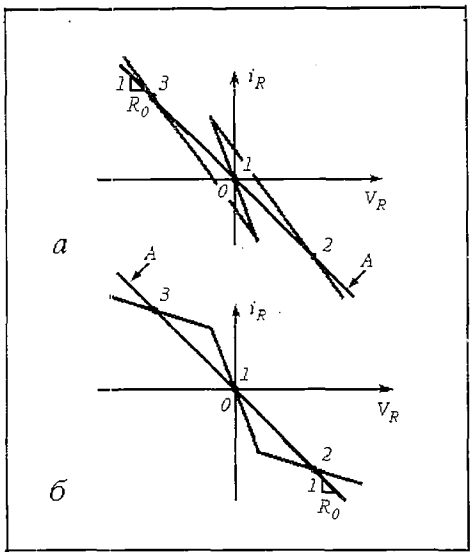


Рис. 9. Две единственные различные кусочно–линейные кривые, состоящие из трех сегментов с отрицательной крутизной и пересекающиеся с нагрузочной прямой, имеющей также отрицательный наклон, только в трех точках. Характеристика (*а*) является двузначной функцией v_R и i_R. Характеристика (*б*) – однозначная функция, но ее внешние сегменты, если их продолжить до бесконечности, останутся в пределах второго и четвертого квадрантов соответственно, и, следовательно, *она физически нереализуема*

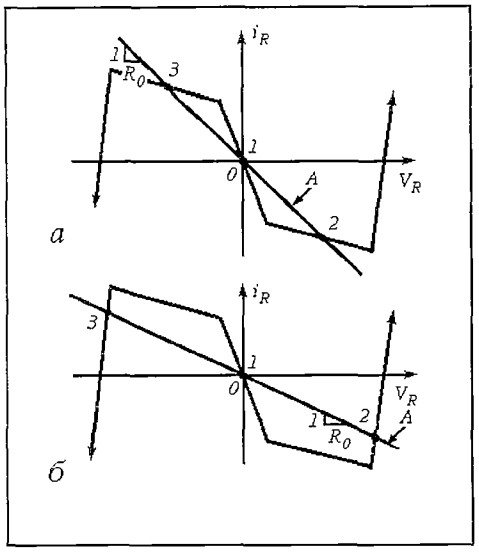


Рис. 10. Простейшая пятисегментная характеристика, являющаяся пассивной при больших значениях переменных и, следовательно, физически реализуемой. Она включает трехсегментную характеристику, приведенную на рис. 9, *б* в качестве подмножества.
а – нагрузочная прямая пересекает характеристику в трех точках на участках с отрицательным наклоном, как это и требуется согласно спецификации ;
б – для очень больших значений R_0 две внешние точки равновесия попадают на сегменты с положительным наклоном и становятся устойчивыми, что нарушает спецификацию

Теоретически возможно отодвинуть точку излома этого сегмента так далеко вправо, насколько это необходимо для того, чтобы она не влияла на первоначально задуманную динамику. Однако на практике это может оказаться затруднительным вследствие ограниченности открывающего напряжения (cut–in voltage) диодного *pn*–перехода и напряжения насыщения операционного усилителя.

Итак, приходим к выводу, что нам следует выбрать четную, пятисегментную, кусочно–линейную функцию на рис. 10, *а* в качестве вольтамперной характеристики для нелинейного резистора *r*. Заметим, что два сегмента, добавленные нами для достижения пассивности при больших значениях переменных, не приведут к появлению новых точек равновесия, при условии, что величина сопротивления *R* не очень велика, так что нагрузочная прямая не заходит за крайние точки излома, как показано на рис. 10, *б*. Сделав этот выбор, мы получаем схему Чуа на рис. 1.

Заключение

Хаотическая схема на рис. 1 впервые была опубликована в [15], где Матсумото назвал ее Схемой Чуа. Однако, поскольку эта основополагающая статья по Схеме Чуа содержала лишь результаты компьютерного моделирования, при котором несущественны внешние два сегмента,

необходимые для физической реализации, то Матсумото использовал только три сегмента с отрицательной крутизной (см.рис. 9, *б*) и называл эту характеристику в своей статье "упрощенной версией" моей исходной схемы. Это утверждение Матсумото вводило в заблуждение, так как схема оставалась прежней: только вольтамперная $v_R - i_R$ характеристика была обрезана таким образом, что состояла лишь из сегментов с отрицательной крутизной, – это очевидно, если исходить из вышеприведенной процедуры синтеза. Однако, для более практически ориентированных читателей необходимо подчеркнуть, что любая электронно–схемная реализация этой трехсегментной характеристики – а таких реализаций много – с необходимостью будет иметь плавно или резко *заворачивающую* (*rolling off*) характеристику, так что при больших значениях переменных она, в конечном счете, будет лежать в первом и третьем квадрантах. В простейших случаях, каждый из внешних участков вольтамперной характеристики будет приближаться к прямой линии с *положительным* наклоном. И действительно, характеристики, измеренные для всех электронно–схемных реализаций [14, 15, 17] трехсегментной вольтамперной характеристики на рис. 9, *б*, практически идентичны пятисегментной характеристике, изображенной на рис. 1, *б*.

В качестве последнего замечания мы хотели бы указать, что схема, приведенная на рис. 4, отвергнутая в пользу схемы Чуа, по–своему интересна.

В частности, если мы добавим линейное пассивное сопротивление последовательно с индуктивностью L на рис. 4, *ж*, то получим каноническую реализацию [12] семейства Схем Чуа 16]. Более 30 различных странных аттракторов было открыто на сегодняшний день в этой канонической схеме!

Перевод И.Р.Сатаева

Хронологическая библиография по схеме Чуа

Matsumoto T. A chaotic attractor from Chua's circuit // IEEE Trans. 1984. Vol. CAS–31, № 12. P. 1055.

Zhong G.Q., Ayrom F. Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit // Int.J. Circuit Theory Appl. 1985. Vol. 13, №.11. P. 93.

Zhong G.Q., Ayrom F. Periodicity and chaos in Chua's circuit // IEEE Trans. 1985.Vol. CAS–32, № 5. P. 501.

Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M. The Double Scroll // IEEE Trans. 1985. Vol. CAS–32, №. 8. P. 797.

Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M. The Double Scroll bifurcations // Int. J. Circuit Theory Appl. 1986. Vol. 14, № 1. P. 117.

Matsumoto T., Chua L.O., Tokumasu K. Double Scroll via a two–transistor circuit // IEEE Trans.1986. Vol. CAS–33, № 8. P. 828.

Ayrom F., Zhong G.Q. Chaos in Chua's circuit // IEEE Proceeding. 1986.Vol. 33, № 6. P. 307.

Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll family, part I and II // IEEE Trans. 1986. Vol CAS–33, № 11. P. 1073.

Kahlert C., Chua L.O. Transfer maps and return maps for piecewise–linear and three–region dynamical systems // Int. J. Circuit Theory Appl. 1987. Vol 15, № 1. P. 23.

Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M. Birth and death of the Double Scroll // Physica 1987. Vol 24D. P. 97.

Ogorzalek M.J. Chaotic regions from Double Scroll // IEEE Trans. 1987. Vol CAS–34, № 2. P. 201.

Broucke M.E. One–parameter bifurcation diagram for Chua's circuit // IEEE Trans. 1987.Vol CAS–34, № 3. P. 208.

Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R. Chaos via torus breakdown // IEEE Trans. 1987.Vol CAS–34, № 3. P. 240.

Wu S. Chua's circuit family. Proceedings IEEE. 1987. Vol 75, №.8 . P. 1022.

Parker T.S., Chua L.O. The dual Double Scroll equation // IEEE Trans. 1987. Vol CAS–34, № 9. P. 1059.

Mees A.I., Chapman P.B. Homoclinic and heteroclinic orbits in the Double Scroll attractor // IEEE Trans. 1987. Vol CAS–34, № 9. P. 1115.

Kahlert C. The range of transfer and return maps in tree–region piecewise–linear dynamical systems // Int. J. Circuit Theory Appl. 1988. Vol 16, № 1. P. 11.

Kahlert C. Dynamics of the inclusions appearing in the return maps of Chua's circuit–1. The creation mechanism // Int. J. Circuit Theory Appl. 1988. Vol 16, № 1. P. 29.

Komuro M. Normal forms of continuous piecewise–linear vector field and chaotic attractors: Part I // Japan. J. Appl. 1988.Vol. 5, № 2. P. 257.

Komuro M. Normal forms of continuous piecewise–linear vector field and chaotic attractors: Part II // Japan. J. Appl. 1988. Vol. 5, № 3. P. 503.

Kahlert C. The chaos producing mechanism in Chua's circuit // Int. J. Circuit Theory Appl.1988. Vol 16, № 2. P. 227.

Matsumoto T., Chua L.O., Ayaki K. Reality of chaos in the Double Scroll circuit: A computer–assisted proof // IEEE Trans.1988. Vol. CAS–35, № 7. P. 909.

Silva C.P., Chua L.O. The overdamped Double Scroll family // Int. J. Circuit Theory Appl. 1988. Vol 16, № 3. P. 233.

Bartissol P., Chua L.O. The Double Hook. // IEEE Trans. 1988. Vol CAS–35, № 12. P. 1512.

Huang A. A study of the chaotic phenomena in Chua's circuit. In: Proceedings of the ISCAS. Helsinki, 1988. P. 273.

Tokunaga R., Matsumoto T., Komuro M., Chua L.O., Miya K. Homoclinic linkage: A new bifurcation mechanism // Proceedings ISCAS. Seattle, 1989. P. 826.

Tokunaga R., Matsumoto T., Ida T., Miya K. Homoclinic linkage in the Double Scroll circuit and the cusp–constrained circuit. The study of Dynamical Systems / Ed. N. Aoki. Singapore: World Scientific, 1989, P. 192.

Chua L.O., Lin G.N. Intermittency in a piecewise–linear circuit // IEEE Trans.1990. Vol. CAS–38, № 5. P. 510.

Blazquez C.M., Tuma E. Dynamics of the Double Scroll circuit. IEEE Trans. Vol CAS–37, № 5. P. 589.

Chua L.O., Lin G.N. Canonical realization of Chua's circuit family // IEEE Trans.1990. Vol CAS–37, № 7. P. 885.

Spany V., Pivka L. Boundary surfaces in sequential circuits // Int. J. Circuit Theory Appl.1990. Vol. 18, № 4. P. 349.

Komuro M. Bifurcation equations of 3–dimensional piecewise– linear vector fields. Bifurcation Phenomena in Nonlinear Systems and Theory of Dynamical Systems / Ed.H.Kawakami. Singapore: World Scientific, 1990. P. 113.

Lozi R., Ushiki S. Confinors and bounded–time patterns in Chua's circuit and the Double Scroll family // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991.Vol. 1, № 1. P. 119.

Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Hotta A. Global bifurcation analysis of the Double Scroll circuit // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. Vol 1, № 1. P. 139.

Murali K., Lakshmanan M. Bifurcation and chaos of the sinusoidally–driven Chua's circuit. //Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991.Vol 1, № 2. P. 369.

Lozi R., Ushiki S. Co–existing chaotic attractors in Chua's circuit. Int. J. Bifurcation and Chaos.1991. Vol 1, № 4. P. 923.

Kahlert C. Heteroclinic orbits and scaled similar structures in the parameter space of the Chua's oscillator // Chaotic Hierarchy / Eds. G.Baier and M.Klein. Singapore: World Scientific, 1991. P. 209.

Dabby D.S. The buffalo horn and strange behavior in third order autonomous circuits. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Electrical Engineering and Computer Science.

Cruz J., Chua L.O. A CMOS IC nonlinear resistor for Chua's circuit. Memorandum, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley. Memo № M92/16, February 1992.

Genesio R., Tesi A. Harmonic balance approach for chaos prediction: the Chua's circuit // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992 .Vol. 2, № 1.

Kennedy M.P. Robust OP Amp realization of Chua's Circuit. Frequenz // 1992. Vol. 46, № 3–4. P. 66.

Madan R. (Guest editor): Special issue on Chua's circuit: A paradigm for chaos. Part I // J. Circuit, Systems, and Computers. 1993. Vol 2, № 1.

Madan R. (Guest editor): Special issue on Chua's circuit: A paradigm for chaos. Part II // J. Circuit, Systems, and Computers. 1993. Vol.2, № 2.

Библиографический список

1. *Abraham R.H., Show, C.D.* Dynamics – The geometry of behavior. Santa Cruz: Aerial Press, 1981.

2. *Chua L.O.* Introduction to nonlinear circuit theory. New York: McGraw–Hill, 1969.

3. *Chua L.O.* Analysis and synthesis of multivalued memoryless nonlinear networks // IEEE Trans. 1967. Vol. CT–15. P.192.

4. *Chua L.O.* Synthesis of new nonlinear network elements// Proc. IEEE. 1968. Vol.56.P. 1325.

5. *Chua L.O., Wong S.* Synthesis of piecewise–linear networks// Electronic Circuits and Systems. 1978. Vol. 2. P. 102.

6. *Chua L.O.* Dynamic nonlinear networks: state–of–the–art// IEEE Trans. 1980. Vol. CAS–27. P. 1059.

7. *Chua L.O.* Device modeling via basic nonlinear circuit elements//IEEE Trans. 1980. Vol. CAS–27. P.1014.

8. *Chua L.O., Ying R.* Finding all solutions of piecewise– linear circuits//Int. J. Circuit Theory and Appl. 1982. Vol. 10. P. 201.

9. *Chua L.O., Hasler M., Neirynck J., Verburgh P.* Dynamics of a piecewise–linear resonant circuit // IEEE Trans. 1982. Vol. CAS–29. P. 535.

10. *Chua L.O., Ayrom F.* Designing nonlinear single op–amp circuits: a cookbook approach // Int. J. Circuit Theory and Appl. 1985. Vol.13, P. 235.

11. *Chua L.O., Desoer C.A., Kuh E.S.* Linear and nonlinear circuits. New York: McGraw–Hill, 1985.

12. *Chua L.O., Lin G.N.* Canonical realization of Chua's circuit family // IEEE Trans. 1990.Vol CAS–37. P. 885.

13. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New–York: Springer Verlag, 1983.

14. *Kennedy P.* Experimental chaos via Chua's circuit / Eds. S.Vohra, M.Spano, M.Shlesinger, L.Pecora, W. Ditto // Proc. of the 1st Experimental Chaos Conference. World Scientific, 1992. P. 340.

15. *Matsumoto T.* A chaotic attractor from Chua's circuit//IEEE Trans. 1984. Vol. CAS–31. P. 1055.

16. *Wu S.* Chua's circuit family // Proc. IEEE. 1987. Vol 75. P. 1022.

17. *Zhong G.Q., Ayrom F.* Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit//Int. J. Circuit Theory and Appl. 1985.Vol.13. P. 93.

Беркли, Калифорнийский университет,
факультет радиоэлектроники
и компьютерных исследований

Поступила в редакцию 5.04.93 *г.*

Леон О. Чуа получил степень магистра в Массачусетском Технологическом институте в 1961 г. и степень доктора философии в Иллинойском университете, Урбана, в 1964 г. Федеральной Политехнической Школой Лозанны (Швйцария) 1983 г. ему было присвоено звание Доктор Honoris Causa, а в 1984 г. Университетом Токушима (Япония) – звание Почетного Доктора. В настоящее время он является профессором кафедры электротехники и компьютерных наук в Калифорнийском университете в Беркли. Научные интересы Чуа – общая теория нелинейных сетей и систем. Он является консультантом различных электронных фирм по вопросам анализа нелинейных сетей, моделирования и компьютерного дизайна. Профессор Чуа автор книги «Introduction to Nonlinaer Network theory» (New York: McGraw Hill, 1969), и соавтор книг: «Computer–Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Tecthiques « (Englewood Cliffs, NI: Prentice–Hall, 1975), «Linear and Nonlinear Circuits», (New York: McGraw Hill, 1987), и «Practical Nuterical Algorihms for Chaotics Systems» (New York: Springer Verlag, 1989). Им опубликовано много исследовательских работ по нелинейным сетям и системам.

В 1974 г. профессор Чуа избран членом общества IEEE. С 1973 по 1975 г. он выполняет обязанности редактора журнала «IEEE Transactions Circuits and Systems», а с 1976 г. – обязанности президента одноименного общества. В настоящее время он редактор международного журнала «Bifurcation and Chaos» и заместитель редактора международного журнала «Circuit Theory and Applications».

Профессор Чуа автор пяти патентов США. Ему присуждены награды и премии, в частности: премии IEEE имени Томсона (1967) и Бейкера (1973), награда Термана (1974), почетные звания (Миллеровским институтом в 1976 г. и Кэмбриджским университетом в 1982 г.), премия Гумбольта для американских ученых (Техническим университетом Мюнхена за 1982/83 гг.), премия университета Васеда в Токио от Японского общества Содействия науки (за 1983/84 гг.), юбилейная медаль IEEE (1985), премия Рида за лучшую публикацию (1985), премии IEEE Джиллимина–Кауэра (1985,1989).

Осенью 1986 г. в Парижском университете профессор Чуа был удостоен международной премии французского Министерства образования.

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 517.9

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЧАСТЬ II. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД К ХАОСУ

А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, И.Р.Сатаев

Обсуждаются особенности сложной динамики отображений, характеризующихся двумя параметрами. Дан обзор известных результатов. Основное внимание уделено трикритической динамике, для анализа которой привлекается методология Фейгенбаума и его последователей. Приводится приближенный и строгий ренормгрупповой анализ. Даны иллюстрации скейлинга и рассмотрены физические примеры. Введены основные понятия теории мультипараметрической критичности, использующей классификацию «сценариев» перехода к хаосу в духе движения по коразмерности.

1. Бимодальные отображения

В первой части статьи мы обсудили закономерности, наблюдаемые при переходе к хаосу через удвоения периода в системах, описываемых одномерными отображениями с одним квадратичным экстремумом. Естественное направление развития теории состоит в том, чтобы обратиться к рассмотрению перехода к хаосу в бимодальных отображениях, имеющих два экстремума. Такие отображения стали предметом интенсивных исследований начиная с середины 80–х годов. Предполагается, что результаты анализа будут полезны для понимания поведения многих реальных нелинейных систем. Например, кубическое отображение (cubic map)

$$x_{n+1} = a - b\,x_n + x_n^3, \tag{1}$$

может моделировать феномены нелинейного резонанса в возбуждаемом нелинейном осцилляторе (Holmes, 1979 [1]). Существование множества экстремумов характерно для отображения окружности, описывающего синхронизацию автоколебаний внешним сигналом

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + \frac{K}{2\pi}\sin 2\pi x_n, \ (mod\ 1). \tag{2}$$

Здесь K – нормированная амплитуда воздействия, Ω – параметр, определяемый соотношением собственной частоты и частоты внешнего воздействия. Ясно, что можно реализовать такой режим колебаний, когда изображающая точка будет посещать окрестности двух соседних экстремумов (Glass и Peres, 1982 [2]; Schell, Fraser и Kapral, 1983 [3]). Далее мы укажем и другие примеры.

Существование двух экстремумов – «грубое» свойство отображений, которое легко диагностируется исследователем–эмпириком по виду «портрета» аттрактора в сечении Пуанкаре на экране осциллографа или дисплея. Поэтому важно установить, какие особенности сложной динамики связаны с такой топологией отображения. При исследовании бимодальных отображений естественно прибегнуть к двухпараметрическому анализу. Всю качественную информацию о свойствах движения тогда несет карта динамических режимов – плоскость параметров, на которой отмечены возможные бифуркации и типы динамики.

В первых же работах, посвященных бимодальным отображениям, авторы отмечали наличие жестких переходов между различными динамическими режимами [2–5]. В этом случае карту динамических режимов полезно представлять состоящей из частично перекрывающихся листов (рис. 1). Для того, чтобы сделать эту особенность топографии карты более наглядной, рис. 1 придана некоторая воображаемая перспектива в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Область перекрытия листов – это область бистабильности. На краях листов происходят жесткие переходы, сопровождающиеся гистерезисом. Такая топология карты связана с существованием катастрофы сборки – бифуркации, типичной на плоскости параметров. Катастрофа сборки обнаруживается, например, при исследовании резонанса в нелинейном осцилляторе.

Анализ сложной динамики различных двухпараметрических систем привел исследователей к выводу о том, что полезно не просто искать возможные типичные бифуркации, а выделять некоторые области пространства параметров, где располагаются определенным образом друг относительно друга бифуркации разной коразмерности. На рис. 2 показана одна из самых простых композиций такого рода, которую Carcases и др. [6] назвали crossroad area – «перепутье». В этой ситуации область устойчивости некоторого цикла располагается на двух частично перекрывающихся листах, с чем и связан выбор термина. На плоскости параметров имеется точка сборки с отходящими от нее двумя линиями складок, две линии удвоений, уходящие по берегам линий складок, и линия «предыдущего» удвоения. Выделение подобных «композиций»

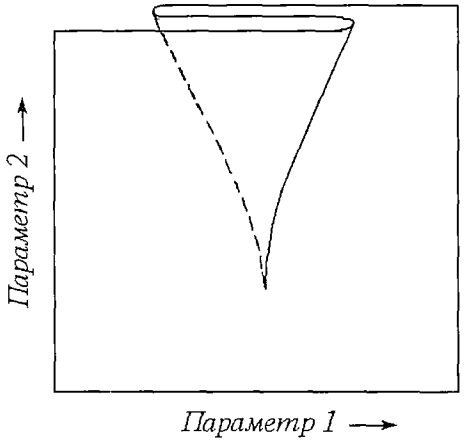


Рис. 1. Катастрофа сборки на плоскости параметров нелинейной системы. Рисунку придана некоторая воображаемая перспектива, что делает наглядным существование трех листов в некоторой области плоскости параметров. Конфигурация плоскости параметров напоминает сборку на ткани

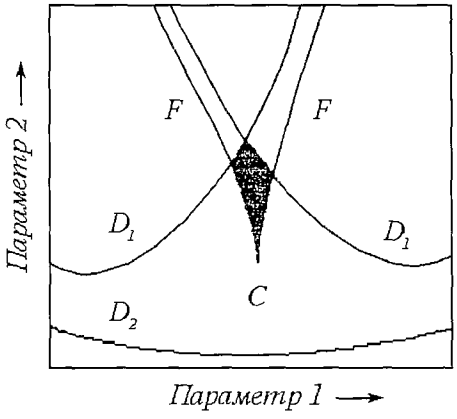


Рис. 2. Простейшая «композиция» локальных бифуркаций – ситуация crossroad area. C – точка сборки, D_1 – линии удвоений периода, D_2 – линия «предыдущего» удвоения, F – линии складок (линии жестких переходов). Штриховкой показана область бистабильности, в которой сосуществуют два различных устойчивых цикла

не соответствует принципам традиционной теории буфуркаций, которая основывается на локальном анализе в пространстве параметров. Поэтому с формальной точки зрения локальной теории бифуркаций ситуации типа crossroad area (и другие подобные ситуации: spring area [6], saddle area [7]), не подлежат классификации. Они, однако, наблюдаются во множестве реальных нелинейных систем и играют важную роль в двухпараметрическом сценарии перехода к хаосу. По–видимому, необходима некая нелокальная теория, объясняющая природу типичности таких композиций.

Изучая бимодальные отображения, исследователи столкнулись с необычайным богатством динамических режимов. В области существования долгопериодических циклов обнаруживаются все новые и новые сборки. Таким образом, при все более детальном исследовании конкретной нелинейной системы, карта динамических режимов представляется все более «гофрированной» (рис. 3). При этом число листов карты стремительно растет, растет и компьютерное время, которое необходимо затратить на создание полного топографического «портрета» сложной динамики.

Тем не менее, карту динамических режимов можно мыслить как некий единый объект. Путешествуя по такой многолистной поверхности по различным сложным маршрутам, можно получить представление о взаимосвязи различных динамических режимов.

На плоскости параметров бимодальных отображений обнаруживаются определенные закономерности накопления мультистабильных состояний. Исследуя двухпараметрическое «квартичное» отображение (quartic map)

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4, \tag{3}$$

Chang, Wortis и Wright [9] обнаружили *иерархии ситуаций типа crossroad area* на базе циклов удваивающихся периодов, накапливающиеся к некоторым

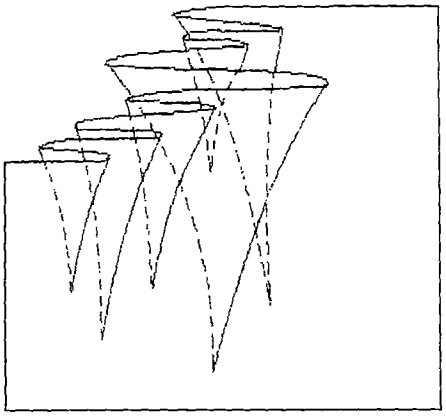


Рис. 3. Многолистная структура карты динамических режимов некоторой гипотетической динамической системы в области долго периодических циклов. На каждом листе карты реализуется своя структура областей

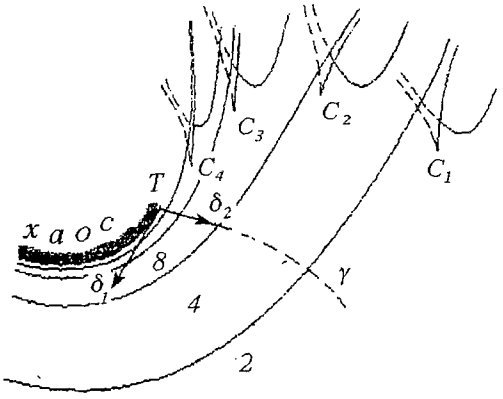


Рис. 4. Качественная картина мелкомасштабной структуры плоскости параметров в окрестности трикритической точки *T*. Штриховкой показана фейгенбаумовская критическая линия, являющаяся границей хаоса, C_n – последовательность точек сборки, накапливающихся к трикритической точке, γ – линия, вдоль которой наблюдается нефейгенбаумовский каскад удвоений. Стрелками показаны два собственных направления скейлинга

характерным точкам на плоскости параметров a, b (рис.4). Такие точки представляют собой концы гладких фейгенбаумовских линий. Они получили название *трикритических*. (Термин заимствован из теории фазовых переходов. Трикритической называют точку, в которой сходятся линии фазовых переходов первого и второго рода, ассоциирующихся соответственно с мягким рождением хаоса по сценарию Фейгенбаума и с жесткими скачками [10].)

В пределах одного листа карты динамических режимов существуют линии γ, двигаясь вдоль которых по направлению к трикритической точке можно наблюдать *нефейгенбаумовский каскад удвоений периода*. Закон накопления точек бифукации вдоль линии γ такой же, как в отображении $x_{n+1} = 1-\lambda x_n^4$, и характеризуется скейлинговой константой $\delta_1 = 7{,}284686217$. Chang с соавторами провели довольно подробное исследование трикритических точек квартичного отображения, включая ренормгрупповой анализ. Была исследована мелкомасштабная структура плоскости параметров в окрестности трикритических точек. Эта структура обладает свойством *универсальности*, т.е. одинакова с точностью до линейной замены параметров для всех трикритических точек.

Представления о трикритичности приводят к новой концепции универсальности. Эта концепция относится к двухпараметрическим феноменам на пороге хаоса и может рассматриваться как развитие методологии Фейгенбаума. Разумно предположить, что возможны и более сложные типы критических явлений.

Существование множества классов универсальности динамических систем позволяет ввести представление об их *типичности*, понимаемой в том же смысле, как в теории бифуркаций и теории катастроф. Можно сказать, что на проведенной в пространстве параметров некоторого отображения линии «скорее всего» существуют точки, в окрестности которых реализуется фейгенбаумовский сценарий. В свою очередь, на рассекающей пространство параметров этого отображения поверхности должны существовать точки, в окрестности которых имеется характерная универсальная мелкомасштабная структура областей, соответствующая трикритичности. Используя терминологию теории бифуркаций, можно сказать, что для одномерных отображений коразмерность фейгенбаумовского сценария равна единице, а трикритичности – два. Коразмерность каждого критического состояния может быть определена строго – по числу существенных скейлинговых констант, которые находятся из решения ренормгрупповых уравнений. (Для «сценария Фейгенбаума» такая константа всего одна: $\delta_F = 4{,}6692$.)

Математическое определение типичности, однако, отнюдь не гарантирует, что в реальных системах можно без проблем наблюдать ту или иную разновидность критического поведения. Типичность для физика хотя и менее строгое, но, пожалуй, более емкое понятие. В физике «типичность» связана и с уровнем развития техники эксперимента, и с мощностью компьютеров, и с тем, какие конкретные физические системы интересны для исследователей в данное время. Такие моменты, когда обрушивается лавина физических иллюстраций (предельные циклы в нелинейной теории колебаний в 50–ые годы, странные аттракторы в 70–е), определяются и общим уровнем развития науки. По–видимому, современные методы компьютерной обработки (Komuro и др., 1991 [11]; Markus, 1990 [12]) позволяющие строить эффектные цветные карты динамических режимов, для получения любого «среза» пространства параметров, подготовили почву для более широкого внедрения в арсенал исследователей некоторых результатов теории критических явлений.

2. Квартичное отображение. Иллюстрации скейлинга и трикритический аттрактор

В классификационной схеме критических явлений в одномерных отображениях трикритичность занимает «вторую строчку» после сценария Фейгенбаума. «Эталонной» моделью для анализа трикритичности может служить квартичное отображение (3). Обсудим его свойства подробнее.

Квартичное отображение имеет простейшую трикритическую точку T_1: $a_c = 0$, $b_c = 1{,}5949013562288$. Линия γ , вдоль которой наблюдается нефейгенбаумов–ский каскад удвоений, накапливающихся к этой точке – это просто ось b. Вдоль этой оси функция $f(x)$ имеет экстремум четвертого порядка.

Другие трикритические точки квартичного отображения порождаются ситуацией отображения экстремум в экстремум. Например, условие $b = -a^2/4$ задает на плоскости параметров кривую γ, на которой экстремум $x_1 = \sqrt{-a/2b}$ отображается в экстремум $x_2 = 0$. На этой кривой расположена трикритическая точка T_2 : $a_c = 3.18980271246$, $b_c = -2.5437103361$.

Ситуация отображения экстремума в экстремум является удобным эмпирическим признаком принадлежности отображения к классу универсаль–ности, ассоциирующемуся с трикритичностью. Действительно, пусть функция $f(x)$ имеет два квадратичных экстремума

$$f(x) = f(x_1) + c_1(x - x_1)^2 + \ldots, \qquad f(x) = f(x_2) + c_2(x - x_2)^2 + \ldots$$

Наложим условие отображения экстремума в экстремум:

$$x_2 = f(x_1). \tag{5}$$

Выполним отображение в окрестности точки x_1 два раза:

$$f(f(x)) = f(f(x_1) + c_1(x - x_1)^2) = f(f(x_1)) + c_2 c_1^2 (x - x_1)^4 + \ldots$$

Итак, двукратно выполненое отображение на линии γ (5) имеет экстремум четвертой степени. Это делает понятным фундаментальную роль квартичного отображения для понимания двухпараметрической критичности на пороге хаоса.

Дадим теперь иллюстрации скейлинга в квартичном отображении. Первое собственное направление скейлинга в трикритической точке идет по касательной к линии γ, а второе – по касательной к фейгенбаумовской критической линии [9]. В окрестности трикритической точки T_2 скейлинговые координаты (ξ, η) определяются с помощью соотношений

$$a = a_c + 0.950\xi + 0.627\eta, \quad b = b_c - \xi - \eta.$$

На рис. 5 приведена карта динамических режимов отображения (3) в скейлинговых координатах. Трикритическая точка T находится точно в центре графика. Различной штриховкой обозначены области существования притягивающих циклов различного периода. Внутренность маленького прямоугольника воспроизведена в увеличенном виде на картинке внизу, причем факторы пересчета масштабов по горизонтальной и вертикальной осям равны $\delta_1 = 7{,}284686217$ и $\delta_2 = 2{,}8571241351$, соответственно. Видно, что исходная и увеличенная картинки хорошо согласуются.

На рис.6 показано бифуркационное дерево квартичного отображения, дающее зависимость значений переменной x в установившемся режиме от управляющего параметра b вблизи трикритической точки $a_c = 0$, $b_c = 1{,}5949013562288$ вдоль направления, отвечающего максимальному

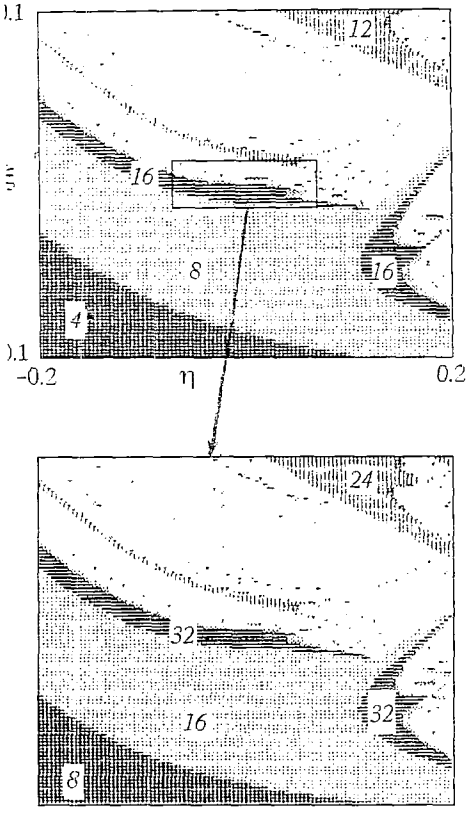


Рис. 5. Скейлинг в квартичном отображении. Маленький фрагмент плоскости параметров превращается сам в себя при соответствующем увеличении

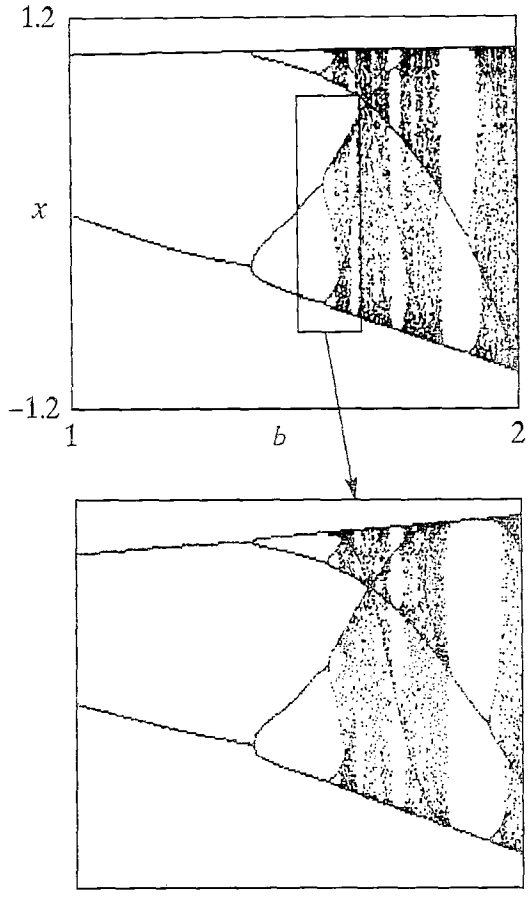


Рис. 6. Бифуркационное «трикритическое» дерево. Маленький фрагмент дерева при соответсвующем увеличении превращается сам в себя – еще одна иллюстрация скейлинга

собственному числу. Характерной особенностью этого графика по сравнению с фейгенбаумовской ситуацией является наличие существенно более широких окон устойчивости. Это прямое следствие того, что экстремум отображения четвертой степени более «плоский», чем у квадратичного отображения. Рисунок (см. рис. 6) иллюстрирует скейлинг на бифуркационном дереве. Растяжение фрагмента картинки осуществляется с константами δ_1 по оси b относительно точки $b_c = 1{,}594901$ и $a_T = 1{,}6903029714$ по оси x относительно точки $x = 0$. Константа a_T – масштабный фактор, характеризующий трикритичность.

На рис. 7 приведен график зависимости от параметра b ляпуновского показателя вдоль собственного направления, отвечающего максимальному собственному числу. Этот график тоже обладает свойством самоподобия. В частности, огибающая зависимости ляпуновского показателя от параметра подчиняется скейлинговому закону

$$\Lambda \cong (b - b_c)^{\chi}, \qquad (6)$$

где b_c – критическое значение параметра, а $\chi = \ln 2/\ln\delta_1 = 0{,}3491$ – новый универсальный критический индекс.

На рис. 8 показан спектр колебаний в трикритической точке. Как и фейгенбаумовский спектр, он также имеет иерархическую организацию по уровням амплитуд субгармоник, которая описывается приближенным соотношением

$$\frac{1 + a_T^6 \pm 2a_T^3\cos(\pi\omega/2)}{4a_T^8} S_n(\omega) \to \begin{cases} S_{n+1}(\omega/2), \text{ знак "+"}, \\ S_{n+1}(1-\omega/2), \text{ знак "−"}. \end{cases} \quad (7)$$

Это соотношение позволяет определить новый критический индекс $\gamma = 10\lg(1/4a_T^8 + 1/4a_T^2) = 10{,}40$ дБ, характеризующий средний перепад между соседними уровнями субгармоник, и коэффициент $æ = |2a_T^3/(1 + a_T^6)| = 0{,}40$, характеризующий степень неравномерности распределения амплитуд субгармоник внутри определенного уровня.

На рис. 9 показан трикритический аттрактор квартичного отображения в ситуации, когда реализуется отображение «экстремум в экстремум». Трикритический аттрактор имеет фрактальную организацию и характеризуется величиной хаусдорфовой размерности $D_T = 0{,}64258$. Этот аттрактор может быть описан с помощью скейлинг–спектра, σ–функции и спектра обобщенных размерностей.

На рис. 10 приведен график σ–функции. Она определена известным соотношением Фейгенбаума [13]

$$\sigma(m/2^{n+1}) = \frac{x'_m - x'_{m+2^n}}{x_m - x_{m+2^{n-1}}},$$

но в качестве величин x_m фигурируют элементы 2^n циклов отображения (3) в трикритической точке. Для «трикритической» σ–функции справедливы предельные соотношения, аналогичные [13]:

$$\sigma(+0) \to 1/a_T^4, \quad \sigma(1/2-0) \to 1/|a_T|. \quad (8)$$

Эти две величины задают максимальный и минимальный масштабы расщепления на бифуркационном дереве. На рис. 11 показан скейлинг–спектр. По его максимуму можно определить величину хаусдорфовой размерности трикритического аттрактора $D_T = 0{,}642575$. График обобщенной размерности $D(q)$ приведен на рис. 12.

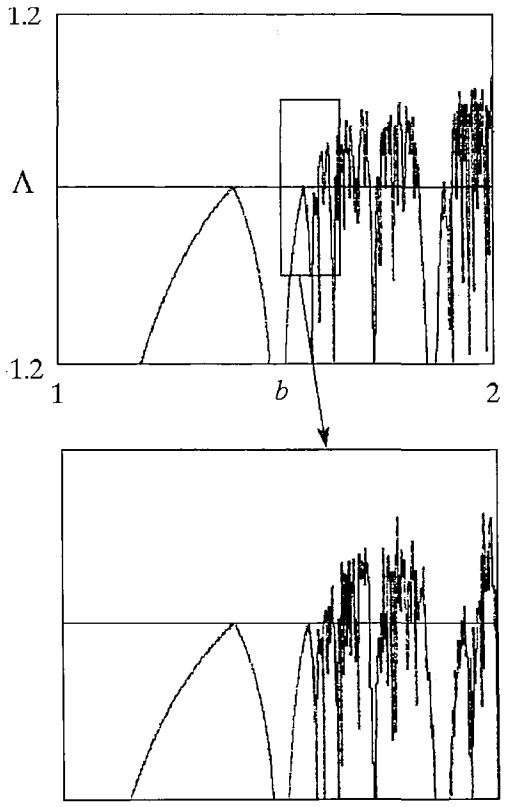


Рис. 7. График зависимости ляпуновского показателя от параметра b для отображения $x_{n+1} = 1-bx_n^4$. Огибающая графика определяет критический индекс χ

Итак, мы привели основные критические индексы и описали совокупность основных иллюстраций критичности – составили своего рода «визитную карточку» трикритической динамики. Такую работу надо было проделать всего один раз. Благодаря универсальности любое отображение, демонстрирующее трикритичность, «предъявит» именно эту «визитную карточку».

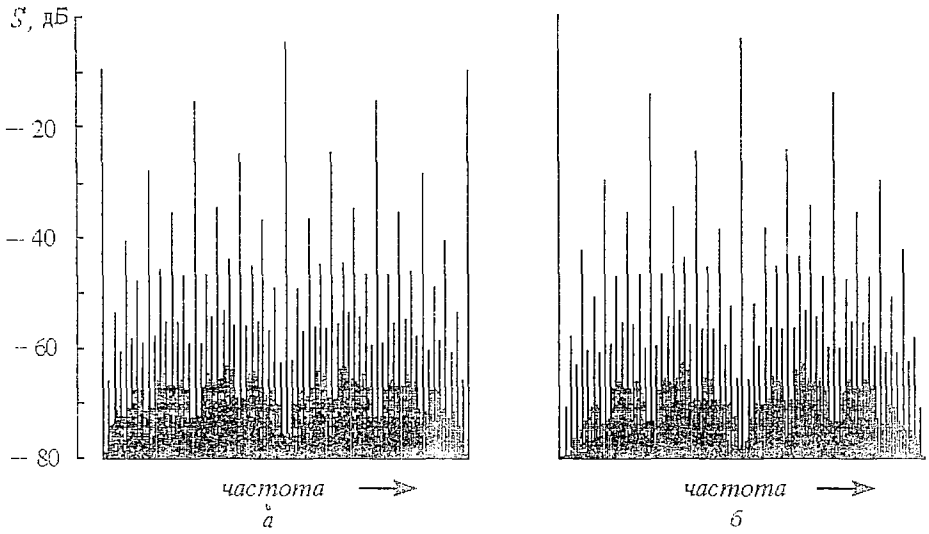


Рис. 8. Спектры колебаний в трикритических точках для квартичного отображения (а) и для системы Chua (б). Они похожи на спектр логистического отображения в фейгенбаумовской критической точке, но количественные характеристики спектра другие. Например, перепад между субгармониками соседних уровней 10,4 дБ, а не 13,3 дБ

3. Приближенный ренормгрупповой анализ трикритической динамики

Перейдем к обоснованию универсальности трикритической динамики, для чего обратимся к ренормгрупповому (РГ) анализу. Как показывает исследование фейгенбаумовской ситуации, приближенный РГ анализ дает ценную информацию о свойствах критичности [14–16]. Проведем поэтому сначала приближенный РГ анализ трикритического поведения.

Следуя общей идее РГ анализа, выполним отображение (3) дважды. Отбросим далее в полученном выражении члены порядка x^6 и выше:

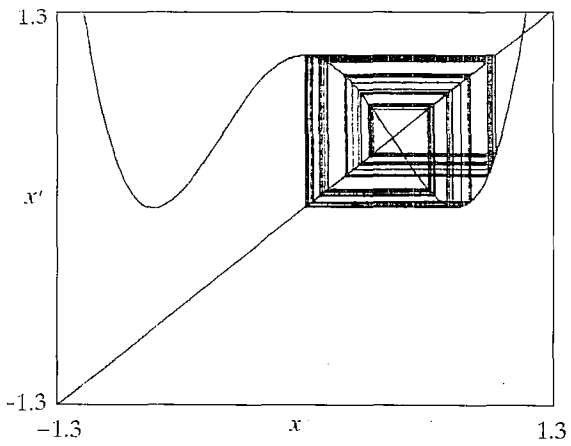


Рис. 9. Трикритический аттрактор в квартичном отображении на диаграмме Ламерея. Аттрактор опирается одновременно на два квадратичных экстремума функции $f(x)$

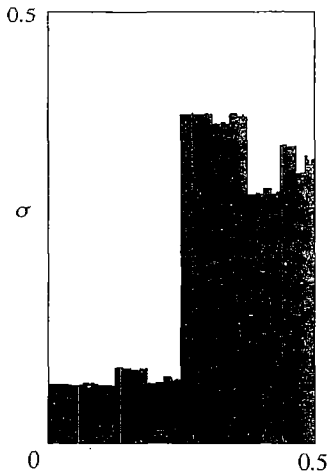


Рис. 10. График трикритической σ-функции

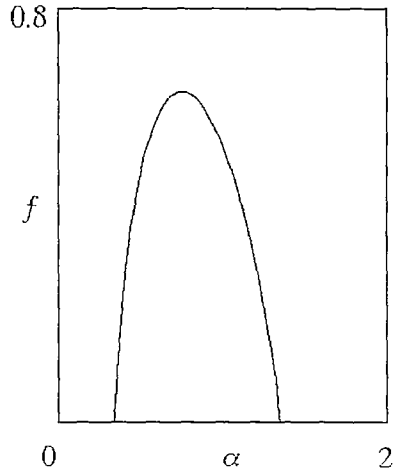


Рис. 11. Скейлинг–спектр для трикритичности

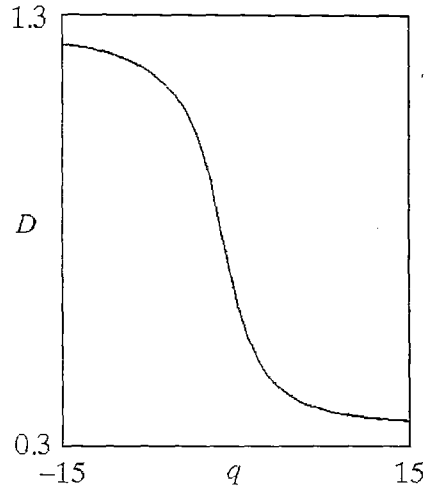


Рис. 12. График обобщенной размерности для трикритичности

$$x_{n+2} = 1-a-b+2a(a+2b)x_n^2+(2ab-a^3-6a^2b+4b^2)x_n^4+\ldots \qquad (9)$$

Выполним теперь замену переменной $x \to X(1-a-b)$ и параметров

$$a' = 2a(a+b-1)(a+2b),$$
$$b' = (a+b-1)^3(2ab-a^3-6a^2b+4b^2). \qquad (10)$$

Подобная замена приводит к следующему отображению

$$X = 1-a'X_n^2-b'X_n^4. \qquad (11)$$

Итак, оператор эволюции системы (3) на удвоенном временном интервале приводится приближенной перенормировкой к исходному виду. Поскольку описаннную процедуру можно повторить многократно, строя оператор эволюции на увеличивающихся по закону 2^n временных интервалах, мы имеем рецепт описания динамики на любых, сколь угодно больших промежутках времени.

Будем рассматривать рекуррентное соотношение (10) как уравнение *ренормдинамики*, связывающее значения переменных a и b в предыдущий и последующий моменты «*ренормвремени*». Параметры a и b мы можем интерпретировать тогда как *ренормпеременные*. Обсудим свойства фазового пространства, в котором протекает ренормдинамика отображения (10). На плоскости a, b отображение (10) имеет две существенные неподвижные точки. Первая – это фейгенбаумовская точка с координатами (1,522242, – 0,127613), характеризующаяся собственными числами $\delta_{F1} = 4{,}48958$ и $\delta_{F2} = -0{,}130948$. Первое собственное число представляет собой приближенное значение константы Фейгенбаума $\delta_F = 4{,}6692$. Поскольку $\delta_{F1} > 1$, а $|\delta_{F2}| < 1$, то фейгенбаумовская неподвижная точка является *седловой*. Вторая неподвижная точка имеет координаты (0, 1,544933) и характеризуется собственными числами $\delta_{T1} = 10{,}50523$ и $\delta_{T2} = 3{,}36754$. Ее естественно ассоциировать с трикритической точкой. Поскольку оба собственных числа, связанных с трикритической точкой, больше единицы, то она является *неустойчивым узлом*. Полный «фазовый портрет» отображения (10) на плоскости a, b представлен на рис. 13.

На этом рисунке показаны фейгенбаумовская F и трикритическая T неподвижные точки.

Обсудим теперь, как происходит ренормдинамика на плоскости a,b. Фактически, для этого достаточно иметь построенный нами фазовый портрет. Как было отмечено в Части I данной работы [16], удвоениям временных интервалов соответствуют итерации РГ уравнения в обратном «ренормвремени». Такие итерации в конечном итоге приводят в критическое состояние. Как видно из рис.14, по мере эволюции в обратном ренормвремени, центр маленького отрезка линии удвоения периода приближается к фейгенбаумовской неподвижной точке, а сам отрезок растягивается вдоль устойчивого многообразия этой точки. Таким образом, устойчивое многообразие фейгенбаумовской точки дает приближенное положение критической фейгенбаумовской линии на плоскости a,b. Фейгенбаумовская универсальность обусловлена тем, что исходный отрезок бесконечно мал и лежит фактически на неустойчивом многообразии, вдоль которого ренормдинамика описывается одномерным отображением и которому отвечает собственное число δ_F.

Эта картина нарушается вблизи трикритической точки. В качестве «стартовой» ситуации для построения мелкомасштабной структуры плоскости параметров в ее окрестности возьмем фрагмент плоскости, содержащий ситуацию типа crossroad area. Итерации с помощью отображения (10) фрагмента crossroad area порождают характерную иерархию точек сборки циклов возрастающих периодов, накапливающихся к трикритической точке (см.рис.4). При этом точки сборки быстро приближаются ко второму собственному направлению трикритической точки, а затем более медленно перемещаются вдоль него, поскольку $\delta_{T1} >> \delta_{T2}$. В результате линия накопления точек сборки оказывается естественным продолжением фейгенбаумовской критической линии. При этом возникает и типичное для бимодальных отображений расположение линий удвоения – вдали от трикритической точки они сходятся к фейгенбаумовской критической линии, а в ее окрестности веерообразно расходятся.

Оценим теперь с помощью приближенного ренормгруппового анализа

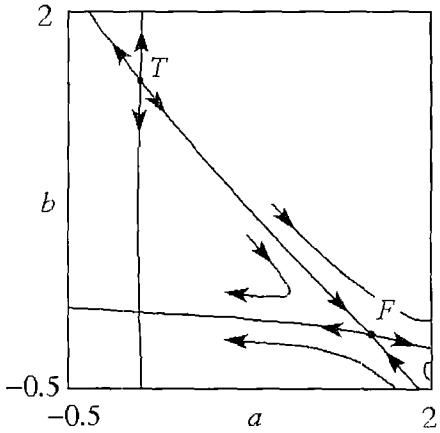


Рис. 13. «Фазовый портрет» уравнения ренормдинамики. Он демонстрирует сосуществование двух неподвижных точек РГ уравнений – фейгенбаумовской F и трикритической T. Показанные на рисунке устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек определяют законы скейлинга

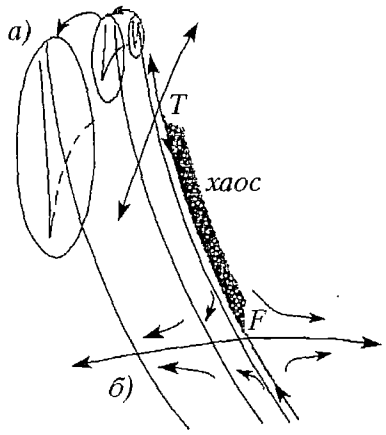


Рис. 14. «Фазовый портрет» уравнения ренормдинамики и характерные элементы структуры плоскости параметров: (*а*) иерархия ситуаций типа crossroad area, накапливающихся к трикритической точке, (*б*) линии удвоения периода, накапливающиеся к критической линии – устойчивому многообразию фейгенбаумовской неподвижной точки РГ уравнения

остальные универсальные константы. Из правила перенормировки динамической переменной x (10) получаем масштабный фактор $a_T \cong 1/(1-b_c) = -1{,}83509$, где $b_c = 1{,}544933$. Решая уравнение $x_0 = 1-b_c x_0^4$, находим неподвижную точку $x_0 = 0{,}67647$ в критической ситуации и, соответственно,. универсальное значение мультипликатора $\mu_c = -4b_c x_0^3 = -1{,}91303$. В таблице приведены точные и приближенные значения критических параметров.

Мы обсудили двумерную ренормдинамику, соответствующую трикритичности. Но достаточно ли именно двух параметров для описания трикритичности в произвольных нелинейных системах?

Для ответа на этот вопрос введем в квартичное отображение простейшую нечетную добавку – линейный член:

$$x_{n+1} = 1-ax_n^2-bx_n^4-cx_n. \qquad (12)$$

Таблица

Критические параметры	Приближенно	Точно
a_c	0	0
b_c	1,5449	1,5949
δ_1	10,5052	7,2847
δ_2	3,3675	2,8571
a_T	1,8351	–1,6903
μ_c	–1,9130	–2,0509

Ясно, что возмущенное отображение не приводится заменой переменной типа сдвига и изменения масштаба к исходному квартичному отображению (в теории Фейгенбаума нечетное возмущение, отвечающее собственному числу $\delta = a_F$, устраняется только благодаря возможности замены типа сдвига [13]). Применим процедуру приближенного РГ анализа к отображению (12). Выполним это отображение дважды, считая возмущенние малым и пренебрегая членами порядка cx^3 и c^2x:

$$x_{n+2} = 1-a-b-c + a[2(a+2b)+c]\,x_n^2 + (2ab-a^3-6a^2b+4b^2+cb)x_n^4 + (2a+4b)cx_n + \ldots \qquad (13)$$

С помощью перенормировки пременной $x \to X(1-a-b-c)$ и параметров

$$a' = a(a+b+c-1)(2a+4b+c),$$
$$b' = (a+b+c-1)^3(2ab-a^3-6a^2b+4b^2+cb), \qquad (14)$$
$$c' = -(2a+4b)\,c,$$

мы приходим к отображению (12):

$$X_{n+2} = 1-a'X_n^2-b'X_n^4-c'X_n. \qquad (15)$$

«Фазовое пространство» РГ уравнения (14) трехмерно. В плоскости $c = 0$ в этом пространстве расположена невозмущенная неподвижная трикритическая точка $a_c = 0$, $b_c = 1{,}544933$. Два неустойчивых собственных направления этой точки лежат в плоскости $c = 0$, и им соответствуют найденные выше собственные числа $\delta_{T1} = 3{,}36754$ и $\delta_{T2} = 10{,}50523$. Третий собственный вектор направлен трансверсально к плоскости a, b и характеризуется новым собственным числом $\delta_{T3} = -4b_c = aT^3$. Поскольку $|\delta_{T3}| > 1$, то это неустойчивое направление должно быть существенным.

Для квартичного отображения собственное число δ_{T3} заведомо не играет роли, поскольку это отображение содержит лишь четные степени x. Однако

другие бимодальные отображения (кубическое, отображение окружности и др.) содержат нечетную компоненту. Более того, если нелинейная система описывается многомерным отображением или дифференциальным уравнением, то более естественно ожидать динамики, характерной скорее для произвольной функции $f(x)$, нежели для функции, содержащей в своем разложении лишь четные члены. Поэтому вопрос о числе существенных скейлинговых констант, т.е. вопрос о коразмерности трикритической динамики оказывается нетривиальным.

Чтобы более глубоко и корректно разобраться в возникшей парадоксальной ситуации, обратимся к строгому РГ анализу, а затем к примерам физических систем, демонстрирующих трикритичность.

4. Строгий ренормгрупповой анализ трикритической динамики

Точное РГ уравнение для анализа трикритичности совпадает с уравнением Фейгенбаума:

$$G(x) = aG(G(x/a)). \tag{16}$$

При этом решение уравнения (16) следует искать в виде полинома, содержащего только степени x^4 [9]. Численно можно получить следующую аппроксимацию функции $G(x)$:

$$\begin{aligned} G(x) = 1 &- 1.83410790700x^{4} + 0.01296222601x^{8} + 0.31190173945x^{12} - \\ &- 0.06201465160x^{16} - 0.03753928670x^{20} + 0.01764731251x^{24} + \\ &+ 0.00193826520x^{28} - 0.00282047096x^{32} + 0.00011545666x^{36} + \\ &+ 0.00039947082x^{40} - 0.00002479251x^{44} - 0.00012164143x^{48} + \\ &+ 0.00007043385x^{52} - 0.00001797963x^{56} + 0.00000190870x^{60}. \end{aligned} \tag{17}$$

Из соотношения (17) находим значение масштабной константы, отвечающей за пересчет динамической переменной x: $a_T = (G(1))^{-1} = -1{,}6903029714$.

Точно в трикритической точке динамика описывается универсальным отображением $x_{n+1} = G(x_n)$. Это отображение имеет неподвижную точку $x_0 = 0{,}6581992533$ и всевозможные 2^n –циклы с ближайшими к экстремуму элементами x_0/a_T, x_0/a_T^2, ... Мультипликатор неподвижной точки равен $\mu_c = -2{,}0509404903$ и представляет собой универсальный мультипликатор всех 2^n – циклов, реализующихся в трикритическом состоянии.

По аналогии с анализом Фейгенбаума запишем уравнение для возмущений, выводящих систему из критической точки:

$$\delta H(x) = a_T\,(G'(G(x/a_T))H(x/a_T) + H\,(G(x/a_T)). \tag{18}$$

Используя в качестве функции $G(x)$ представление (17), из (18) получаем три существенных решения. Собственным функциям

$$H_1(x) = 1 - 0.15923939932\,x^4 - 0.54051878383\,x^8 + \ldots,$$

$$H_2(x) = 1 + 5.70497840590\,x^2 - 1.69077845264\,x^4 + \ldots$$

отвечают значения констант δ_1 и δ_2, приведенные выше. Третья собственная функция

$$H_3(x) = 1 + 9.281558421x + \ldots$$

содержит в своем разложении нечетные степени x и характеризуется собственным числом $\delta_3 = a_T^3 = -4{,}82938$. Итак, и строгий РГ анализ обнаруживает третье собственное число, превышающее по модулю единицу.

Тем не менее одномерные отображения будут демонстрировать двухпараметрический скейлинг. Это связано с существованием для одномерных отображений ситуации, когда один квадратичный экстремум отображается непосредственно в другой квадратичный экстремум. Покажем, что в этом случае третье собственное направление скейлинга «не включено».

Пусть функция $f(x)$ имеет два квадратичных экстремума в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$:

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 0, \tag{20}$$

причем $f(0) = 1$. Пусть имеется малое возмущение этой функции

$$F(x) = f(x) + \varepsilon h(x). \tag{21}$$

Тогда двукратно выполненное отображение имеет структуру $F(F(x)) = f(f(x)) + \varepsilon H(x)$, где

$$H(x) = f'(f(x))\, h(x) + h(f(x)). \tag{22}$$

В силу соотношений (20), разложение в ряд и первого, и второго членов в формуле (22) начинается с x^2. Члены первой степени x отсутствуют. Следовательно, собственная функция $H_3(x)$, содержащая линейные по x члены, не вносит вклада в эволюцию малого возмущения. Можно сказать, что одномерные отображения в ситуации «отображения экстремум в экстремум» характеризуются *скрытой симметрией*.

Но если мы имеем произвольную нелинейную систему, описываемую хотя бы двумерным отображением или дифференциальным уравнением, то для существования такой скрытой симметрии нет оснований. Действительно, для нелинейных систем общего вида невозможно точно определить экстремум в сечении Пуанкаре – соответствующее одномерное отображение работает всегда лишь приближенно. Поэтому можно утверждать следующее.

1. Трикритическое поведение является типичным в одномерных отображениях при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу.

2. Для нелинейных систем общего вида трикритическая динамика имеет коразмерность три.

Мы в первый раз сталкиваемся с ситуацией, когда для разных классов нелинейных систем одно и тоже критическое состояние имеет разную коразмерность. В случае фейгенбаумовского критического поведения это не так – коразмерность всегда равна единице. Фейгенбаумовская универсальность является *асимптотически точной*, даже если портрет нелинейной системы в сечении Пуанкаре описывается одномерной функцией приближенно. Мы привыкли к этому факту и считаем его очевидной аксиомой, забывая, что применимость одномерного РГ уравнения Фейгенбаума к многомерным нелинейным системам и системам с непрерывным временем, требует специального обоснования (теорема, доказанная Collet, Eckmann, Koch в 1981 г. [17]). Как нетрудно понять, для трикритичности коразмерности два аналогичная теорема невозможна.

5. Примеры нелинейных систем, демонстрирующих трикритическую динамику

Обратимся теперь к примерам. Сначала рассмотрим **отображение окружности** (2), моделирующее синхронизацию автоколебаний при внешнем воздействии. На рис. 15 показана плоскость параметров Ω, K этого отображения. Можно видеть характерные языки синхронизации, соответствующие движениям с рациональным числом вращения $\omega = \lim (\varphi / n) = p/q$,

где p и q целые числа. На рис. 15, *а* показаны пять самых широких языков, которым отвечают числа вращения $\omega = 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1$, на рис. 15, *б* – в увеличенном виде язык синхронизации, отвечающий $\omega = 0$, а на рис. 15 , *в* $\omega = 3/5$. На самом деле число языков бесконечно – из каждой рациональной точки оси Ω выходит соответствующий язык. Между языками реализуются режимы с иррациональными числами вращения. Внутри языков, как известно, наблюдается каскад удвоений периода [2]. Двухпараметри–ческий анализ вскрывает более тонкую картину внутреннего устройства каждого языка (Schell, Fraser и Kapral, 1983 [3]) . Характерны ситуации типа crossroad, можно выделить иерархию точек сборки, а фейгенбаумовские линии могут обрываться в трикритических точках. Трикритические точки, показанные на рисунке, имеют координаты T_1: $\Omega = 0{,}0681926$, $K = 3{,}07470161$ и T_2: $\Omega = 0{,}5924511, K = 1{,}2412698$.

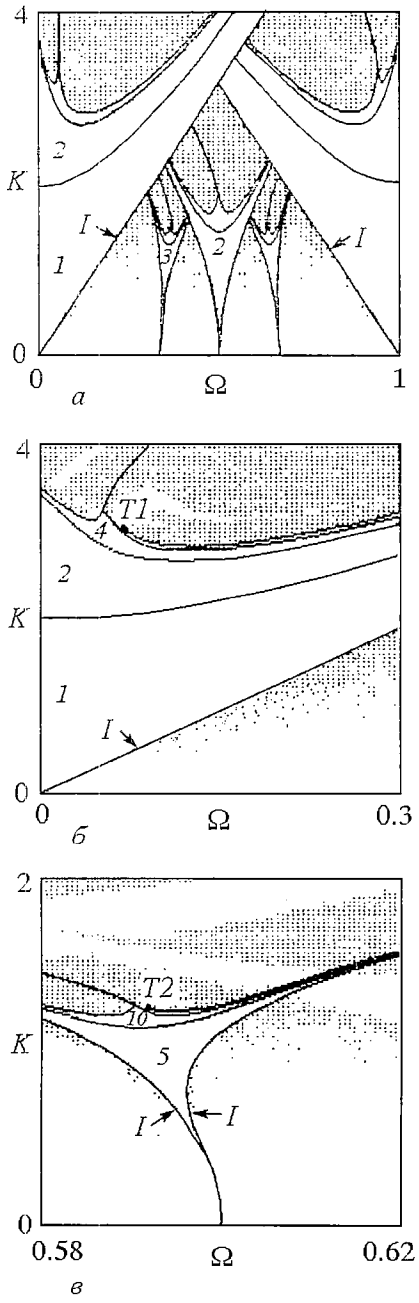


Рис. 15. (*а*) плоскость амлитуда воздействия K, частота воздействия Ω для отображения окружности, (*б*) и (*в*) – фрагменты плоскости параметров, T – трикритические точки, I – края языков синхронизации

Еще один пример – **система Chua** («double scroll» system). Это простое электронное устройство, содержащее линейные элементы: один резистор, одну индуктивность и две емкости, а также нелинейный элемент с кусочно–линейной вольтамперной характеристикой. Нелинейный элемент может быть сконструирован несколькими способами, например, из двух транзисторов и двух диодов. Система Chua хорошо изучена, для нее имеется как строгое математическое доказательство существования хаоса, так и экспериментальные и компьютерные результаты [11,18]. Она описывается системой трех дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \alpha(y-h(x)), \; \dot{y} = x-y+z, \; \dot{z} = -\beta y. \quad (23)$$

Здесь α, β – параметры, $h(x)$ – кусочно–линейная функция следующего вида:

$$h(x) = \begin{cases} (2x-3)/7, & x \geq 1, \\ x/7, & |x| \leq 1, \\ (2x+3)/7, & x \leq -1. \end{cases} \quad (24)$$

При некоторых предположениях система (24) приводит в сечении Пуанкаре приближенно, но с высокой точностью, к одномерному отображению (Chua map) [18]. Это одномерное

отображение получается лишь в неявной форме, но принципиальную роль играет сам факт его существования.

Варьируя параметры α, β, можно добиться реализации условия отображения экстремума в экстремум. Двигаясь вдоль соответствующих линий, мы приходим в трикритические точки. Укажем одну из них: α = 3,42646401, β = 4,11924613. Трикритический аттрактор системы Chua на диаграмме Ламерея показан на рис.16. Спектр колебаний в трикритической точке для системы Chua представлен на рис. 8, справа. Вид спектра квартичного отображения и системы Chua качественно совпадает, что свидетельствует в пользу гипотезы универсальности.

Еще один пример системы, демонстрирующей трикритическую динамику это **логистическое отображение под периодическим воздействием**. В случае периода два имеем

$$x_{n+1} = 1-\lambda x_n^2, \qquad x_{n+2} = 1-\mu x_{n+1}^2. \tag{25}$$

Выполним отображение (25) дважды:

$$x_{n+2} = 1-\mu + 2\lambda\mu x_n^2 - \lambda^2 \mu x_n^4. \tag{26}$$

Заменой переменной $X \to x(1-\mu)$ и параметров

$$a = -2(1-\mu)\lambda\mu, \quad b = \lambda^2\mu(1-\mu)^3, \tag{27}$$

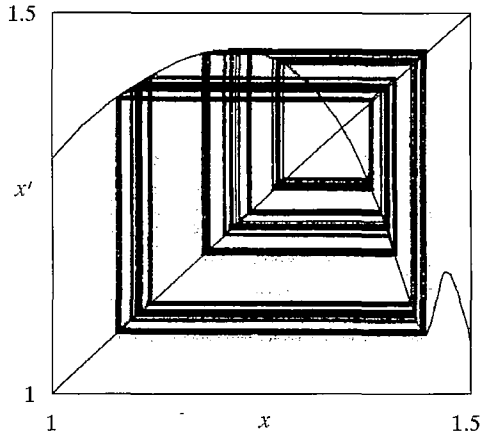


Рис. 16. Трикритический аттрактор системы Chua на диаграмме Ламерея

соотношение (27) приводится к квартичному отображению. Поэтому трикритические точки можно найти с помощью простого пересчета. Например, трикритическая точка с координатами (–2,81403, 1,40701) на плоскости a,b располагается на плоскости λ, μ в точке (5,79372, 0,58455). В случае воздействий с другими периодами такая замена переменной и параметров, разумеется, не работает. Однако, трикритические точки по–прежнему существуют [19,20].

Поскольку логистическое отображение является эталонной моделью при описании перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения, то разумно ожидать, что трикритическая динамика может наблюдаться в любой нелинейной системе, демонстрирующей такой переход приналичии внешнего воздействия. Необходимо лишь, чтобы нелинейная система достаточно хорошо описывалась одномерным отображением. В качестве возможного варианта укажем систему **двух односторонне связанных возбуждаемых контуров с нелинейными диодами**. В каждом отдельном контуре наблюдается фейгенбаумовский каскад удвоений, причем в качестве параметра нелинейности выступает амплитуда возбуждения. Когда в первом контуре реализуется периодический режим, то на плоскости величина связи – параметр нелинейности второго контура Безручко и Пудовочкин [21] экспериментально обнаружили характерный «обрыв» фейгенбаумовской линии, являющейся границей хаоса. Отмечено, что окрестность точки «обрыва» характеризуется наличием жестких переходов.

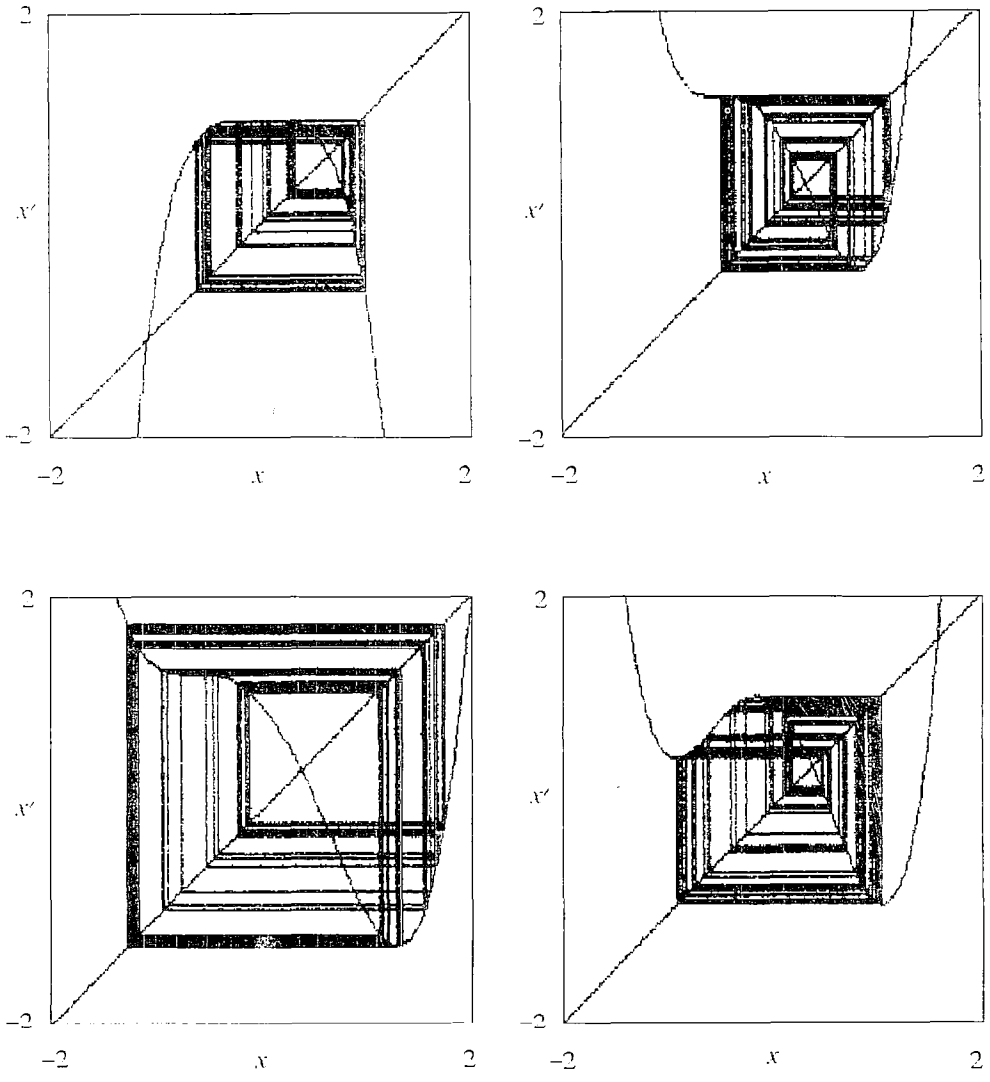


Рис. 17. Критические аттракторы, отвечающие четырем возможным критическим ситуациям коразмерности три, на диаграмме Ламерея

6. Заключение

Восходящая к А. Пуанкаре исследовательская программа теории бифурка-- ций и теории катастроф базируется на идее последовательного рассмотрения феноменов сначала низкой, а затем все более высокой коразмерности, и включает их классификацию и установление правил соподчинения – как вложены бифуркации (катастрофы) низшей коразмерности в пространство параметров бифуркации (катастрофы) более высокой коразмерности. Можно развить аналогичный подход к проблеме перехода к хаосу в одномерных отображениях. Поскольку о динамике на пороге хаоса часто говорят как о критическом поведении нелинейных систем, данное направление исследований можно назвать *теорией многопараметрической критичности*. Феноменом

самой низкой коразмерности один является сценарий Фейгенбаума. Феноменом коразмерности два – трикритичность, которую открыли Chang, Wortis, Wright. Для трикритичности может быть построена вся «инфраструктура» иллюстраций, выработанная за 80–е годы применительно к фейгенбаумовскому сценарию.

Можно продолжить эту классификационную схему и ввести в рассмотрение ситуации критичности коразмерности три [22]. Мы не будем сейчас подробно излагать соответствующие результаты, но наметим принцип, по которому выделяются новые критические ситуации.

В пространстве трех параметров можно построить линии, на которых выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ имеет экстремум четвертого порядка;

2) функция $f(x)$ имеет квадратичный экстремум и точку перегиба, в которой равны нулю и первая, и вторая производные, а экстремум отображается в точку перегиба;

3) ситуация, аналогичная случаю 3, но точка перегиба отображается в экстремум;

4) функция $f(x)$ имеет три квадратичных экстремума, причем первый экстремум отображается точно во второй, а второй в третий.

На рис. 17 показаны критические аттракторы на диаграмме Ламерея, отвечающие четырем описанным конфигурациям $f(x)$. Структура пространства параметров в окрестности новых критических точек очень сложна и ее полное исследование – дело будущего.

Интересно, что классификация «сценариев перехода к хаосу» по возрастающей коразмерности оказалась не тождественной для одномерных отображений с одной строны, и для многомерных отображений и систем с непрерывным временем с другой. Только фейгенбаумовская ситуация является полностью общей. При многопараметрическом анализе для одномерных отображений характерна скрытая симметрия, из–за которой не все направления скейлинга «включены». Введение второго измерения в фазовом пространстве снимает вырождение. Простейшим примером может служить многопараметрическое отображение Хенона

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4 - cy_n, \qquad y_{n+1} = x_n. \tag{28}$$

При $b = 0$ оно превращается в стандартное отображение Хенона.

Каждая трикритическая точка этого отображения в пространстве параметров имеет еще и третье собственное направление, трансверсальное к плоскости a, b [23]. Таким образом, для многомерных отображений трикритичность – феномен коразмерности три. Проблема соотношения результатов, получаемых для одномерных отображений и реальных нелинейных систем нетривиальна и также еще ждет своего полного решения.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований России. Грант ФФИ 93–02–161169.

Библиографический список

1. *Holmes P.J. A* Nonlinear oscillator with a strange attractor // Philos. Trans. R. Soc. London, 1979. Vol.A292. P. 419.

2. *Glass L., Peres R.* Fine structure of phase locking. Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1772.

3. *Schell M., Fraser S., Kapral R.* Subharmonic bifurcations in the sine mape: an infinite of bifurcationsт // Phys.Rev. 1983. Vol. A28, №1. P. 373.

4. *Fraser S., Kapral R.* Analysis of flow hysteresis by a one–dimensional map // Phys. Rev. 1982. Vol. A25. P. 3223–3233.

5. *Mackay R.S., Tresser C.* Some flesh on the bifurcation structure of bimodel maps // Physica.1987. Vol. 27D. P. 412.

6. *Carcasses J&, Mira C. Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* Crossroad area – spring area transition .1. Parameter plane representatio // Int. J. Bifurc. & Chaos. 1991. Vol.1. P. 183.

7. *Mira C., Carcasses J.* On the crossroad area – saddle area and spring area transition // Int. J. Bifurc. & Chaos. 1991. Vol. 1, № 3. P. 641.

8. *Шарковский А.М.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую // Укр. мат. журнал. 1964. Т. 26, № 1. С. 61.

9. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one–dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior. // Phys. Rev. 1981. Vol. A24, № 5. P. 2669.

10. *Стенли Х., Конильо А., Клейн У. и др.* Критические явления: прошлое, настоящее и будущее // Синергетика / Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Мир, 1984. С.41.

11. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L. O., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // Int. J. Bifurc. & Chaos. 1991. № 1. P.139.

12. *Markus M.* Chaos in maps with contiuous and discontinuous maxima // Computers in Physics. 1990. September/ October. P. 481.

13. *Feigenbaum M.J.* The transition to aperiodic behaviour in turbulent systems. Comm. Math. Phys. 1980. Vol . 77. P. 65.

14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 173.

15. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. С. 312.

16. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть I. Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1., № 1. С. 15.

17. *Collet P., Eckmann J. P. , Koch H.* Period doubling bifurcations for families of maps on R_n. // J. Stat. Phys. 1981. Vol. 25. P. 1.

18. *Chua L., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family, Parts I and II. // IEEE Trans.1986. Vol.CAS–33, № 11. P. 1073.

19. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критические явления в однонаправленно связанных системах Фейгенбаума // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1991. Т.34, № 4. С.357.

20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Bicritical dynamics of period–doubling systems with unidirectional coupling // Int.J. of Bifurcation & Chaos. 1991. Vol.1. № 4. P. 839.

21. *Безручко Б.П., Пудовочкин О. Б.* Колебания у порога хаоса в системе однонаправленно связанных нелинейных радиотехнических осцилляторов // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1992. Т. 35, № 1. С. 39.

22. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.*Мультипараметрическая критичность нелинейных систем. IX зимняя школа–семинар. Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. Саратов: Государственный учебно–научный центр «Колледж», 1992. С. 241.

23. *Kuznetsov S.P.* Tricriticality in two–dimensional maps // Phys.Lett. 1992. Vol. A169, № 6. P. 438.

Саратовский филиал ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 12.04.93 г.

CRITICAL DYNAMICS FOR ONE-DIMENSIONAL MAPS. PART II. TWO-PARAMETRE TRANSITION TO CHAOS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, I.R. Sataev

Generalization of Feigenbaum's method is considered with respect to the two-parametre transition to chaos in one- dimensional maps. The approximate and exact renormalization group analyses are developed. Illustrations of scaling are presented and physical examples are discussed.

Александр Петрович Кузнецов. Родился в 1957 году. Окончил Саратовский государственный университет в 1980 году, затем работал на кафедре электроники. В 1986 году закончил аспирантуру на той же кафедре. В 1986 году защитил диссертацию и получил степень кандидата физико-математических наук. С 1988 года старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал около 45 работ. В настоящее время занимается проблемой сценариев перехода к хаосу во многопараметрических нелинейных системах. С 1992 года преподает в Колледже прикладных наук Саратовского госуниверситета, с 1993 года – заместитель научного руководителя Колледжа по научно-методической работе.

Сергей Петрович Кузнецов. Родился в 1951 году. Окончил Саратовский государственный университет в 1973 году и затем работал в Научно-исследовательском институте механики и физики до 1988 года. В 1977 году закончил аспирантуру и получил степень кандидата физико-математических наук. В 1987 году получил степень доктора физико-математических наук. С 1988 года ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Занимался микроволновой электроникой. С 1977 года основные исследования сосредоточены в области теории динамического хаоса. Первые публикации посвящены решеточным моделям распределенных сред, для которых удалось развить ренормгрупповой анализ, включающий и пространственную переменную. Автор свыше 100 публикаций. Один из соавторов монографии «Theory and Applications of Coupled Map Latches», изданной под редакцией проф. Канеко. В 1993 работал в Калифорнийском университете в Электронной инженерной лаборатории у профессора Леона Чуа. С 1992 года – профессор Саратовского госуниверситета. В настоящее время развивает ренормгрупповой подход, включая анализ ситуаций сложной ренормдинамики, применительно к фундаментальным проблемам динамического хаоса.

Игорь Рустамович Сатаев – родился в 1959 году. Окончил в 1982 году Московский физико-технический институт. Занимался проблемами лазерной физики. С 1988 года работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН, научный сотрудник. Основные интересы – методы решения ренормгрупповых уравнений, компьютерное моделирование скейлинга на пороге хаоса. Имеет 15 публикаций.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов "ПНД", т.1, № 3, 4, 1993 УДК 534.1

ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ОБЩЕСТВА

В.И.Климов, П.С.Ланда

Рассмотрена простейшая динамическая модель развития человеческого общества, описывающая поведение трех компонент: производителей, управленцев и накопленного продукта. Модель позволяет качественно объяснить как смену различных формаций, так и кризисные явления, наблюдавшиеся в обществе. Показано, что основным параметром, определяющим характер экономического развития, является конкуренция между управленцами. При малой конкуренции путь развития общества является тупиковым, а при достаточно большой – прогрессивным.

В последние годы появилось множество динамических моделей экономических явлений [1–4]. Большинство из них касается конкретных экономических процессов, например, инновационных. В 1990 г. Ю.И.Неймарком была предложена простейшая общая математическая модель, позволяющая объяснить принципиальные закономерности экономического развития человеческого общества [5,6]. Эта модель является агрегированной и имеет тот же тип, что и различные модели «хищник–жертва», широко используемые в биологии и экологии. Она упрощенно описывает взаимодействие двух категорий людей, участвующих в производстве, – производителей (при определенном выборе переменных данная величина задается функцией $x(t)$) и управленцев (функцией $-y(t)$) с производимым ими продуктом (функцией $z(t)$). Уравнения модели можно записать в виде

$$\dot{x} = (1 - x - y + z)x, \qquad \dot{y} = \alpha(-b - cy + z)y, \tag{1}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} F & \text{при } z > 0 \text{ и при } z = 0,\ F > 0, \\ 0 & \text{при } z = 0,\ F < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $F = g\dfrac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}\dfrac{x}{1+\beta z} - ex - fy.$

Параметр g в правой части уравнения (2) характеризует уровень технологии общества, а функция $f(y) = (1 + \varepsilon_1 y)/(1 + \varepsilon_2 y)$, изменяющаяся в пределах от 1 до $\varepsilon_1/\varepsilon_2$, учитывает зависимость производства продукта от количества управленцев (при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ функция $F(y)$ возрастает с ростом y). Параметр β характеризует тот

факт, что производство продукта затрудняется при увеличении количества самого продукта, в частности, из–за ограниченности сырья. Члены $-ex$ и $-fy$ в уравнении (2) описывают потребление продукта производителями и управленцами. В уравнениях (1) член $(1+z)x$ характеризует рост количества производителей x за счет пополнения из числа других категорий населения, причем учитывается, что скорость роста возрастает при увеличении количества продукта z. Члены $-x^2$ и $-yx$ характеризуют уменьшение количества производителей за счет конкуренции между ними и влияния управленцев соответственно. Член $\alpha(z-b)y$ во втором уравнении описывает изменение числа управленцев y в зависимости от количества продукта: если продукта много, число управленцев растет, если мало – уменьшается. Член $-\alpha cy^2$ характеризует уменьшение числа управленцев за счет конкуренции между ними.

Нам представляется, что модель (1), (2) обладает следующими недостатками. Во–первых, во втором уравнении (1) не учтен член, характеризующий переход производителей в управленцы за счет, например, обучения. Этот член можно записать в виде αdxy. Во–вторых, в третьем уравнении члены, описывающие потребление продукта, не зависят от количества продукта z, тогда как очевидно, что такая зависимость существует. В простейшем виде, с учетом насыщения потребления, эту зависимость можно характеризовать функцией, аналогичной $f(y)$. Наконец, в уравнении (2) не учтено потребление продукта другими категориями населения. Принимая все это во внимание, можно записать следующие модифицированные уравнения модели:

$$\dot{x} = (1 - x - y + z)x, \qquad \dot{y} = \alpha(-b + dx - cy + z)y,$$

$$\dot{z} = \begin{cases} F & \text{при } z > 0 \text{ и при } z = 0,\ F > 0 \\ 0 & \text{при } z = 0,\ F < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $$F = g\frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}\,\frac{x}{1+\beta z} - (ex + fy + \gamma)\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z}.$$

Очевидно, что потребление продукта должно расти с ростом количества продукта. Это будет происходить, если $\delta_1 > \delta_2$.

В зависимости от параметров уравнения (3) имеют разное число особых точек, характеризующих стационарное состояние общества. Первая особая точка расположена в начале координат и всегда неустойчива. Вторая особая точка, имеющая координаты $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, существует только при низком уровне технологии, когда $g \le g^* = e + \gamma$, и устойчива, если $b \ge d$. В данном случае управленцы и накопленный продукт отсутствуют – все, что производится, потребляется. Кроме этой особой точки могут существовать и другие особые точки. Точки одной группы имеют координаты $x = 1 + z$, $y = 0$, где z – неотрицательные корни уравнения

$$\beta e\delta_1 z^3 + \{\beta[e + \delta_1(\gamma + e)] + e\delta_1 - g\delta_2\}z^2 + [(\beta + \delta_1)(\gamma + e) + e - g(\delta_2 + 1)]z + \\ + g^* - g = 0. \tag{4}$$

Условия устойчивости этих особых точек имеют вид

$$z \le \frac{b-d}{1+d},$$

$$g \le \frac{(1+\beta z)^2}{1-\beta}\left(e\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z} + (e+\gamma+ez)\,\frac{\delta_1-\delta_2}{(1+\delta_2 z)^2}\right). \qquad (5)$$

Данным условиям может удовлетворять лишь один из корней уравнения (4). Заметим, что неустойчивость особых точек этой группы является апериодической.

Устойчивая особая точка рассматриваемой группы соответствует второму этапу развития человеческого общества, когда накопленный продукт имеется, но его недостаточно, чтобы "прокормить" управленцев.

Наконец, при достаточно больших значениях g возможна еще одна группа особых точек, определяемых уравнениями

$$x = \frac{(c-1)y+b+1}{1+d}, \quad z = \frac{(c+d)y+b-d}{1+d}, \qquad (6)$$

$$g = \frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}\,\frac{x}{1+\beta z} = (ex+fy+\gamma)\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z}. \qquad (7)$$

Отметим, что в одном из решений уравнений (6) и (7) величина y переходит через нуль при $g = g_{cr}$, где

$$g_{cr} = \frac{[\gamma(1+d)+e(b+1)][1+d+\delta_1(b-d)][1+d+\beta(b-d)]}{(1+d)(b+1)\,[1+d+\delta_2(b-d)]}. \qquad (8)$$

Этому значению g соответствует граница устойчивости решения уравнения (4), т.е. $z = (b-d)/(1+d)$.

В отличие от других особые точки этой группы могут быть неустойчивы как апериодически, так и колебательно. Согласно критерию Рауса – Гурвица условие апериодической неустойчивости имеет вид

$$a_3 = \alpha xy\,[(c-1)b_1 + (d+1)b_2 + (c+d)b_3] < 0, \qquad (9)$$

где

$$b_1 = e\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z} - \frac{g}{1+\beta z}\,\frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y},$$

$$b_2 = f\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z} - \frac{g\,(\varepsilon_1-\varepsilon_2)x}{(1+\beta z)(1+\varepsilon_2 y)^2},$$

$$b_3 = \frac{\beta g x}{(1+\beta z)^2}\,\frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y} + \frac{\delta_1-\delta_2}{(1+\delta_2 z)^2}\,(ex+fy+\gamma),$$

а условие колебательной неустойчивости следующее:

$$a_1 a_2 - a_3 < 0, \qquad (10)$$

где $a_1 = x + \alpha cy + b_3$, $a_2 = \alpha cxy + (x+\alpha cy)b_3 + xb_1 + \alpha dxy + \alpha yb_2$.

Это условие удобно записать в виде неравенства

$$\alpha < \alpha_{cr}. \tag{11}$$

Особые точки последней группы соответствуют развитому обществу со сравнительно высоким уровнем технологии. Возникновение колебательной неустойчивости означает возможность рождения вокруг соответствующей особой точки устойчивого предельного цикла, что может имитировать кризисные явления в обществе, т.е. периодически повторяющиеся подъемы и спады экономического развития. Отметим, что область колебательной неустойчивости существенно зависит от параметра c, характеризующего конкуренцию управленцев: она тем меньше, чем больше c.

Рассмотрим, как ведут себя координаты рассмотренных особых точек при стремлении уровня технологии g к бесконечности. Нетрудно показать, что характер их поведения существенно зависит от параметра c. Если $c < 1$, т.е. конкуренция управленцев мала, то при $g \Rightarrow \infty$ количество продукта и число управленцев стремятся к конечным значениям ($z \Rightarrow \dfrac{b+c}{1-c}$, $y \Rightarrow \dfrac{b+1}{1-c}$), а количество производителей x стремится к нулю (при очень высоком уровне технологии для производства конечного количества продукта требуется очень мало производителей). Такой путь развития общества, безусловно, является тупиковым. Если же $c > 1$, то при увеличении уровня технологии g количество продукта (как и числа производителей и управленцев) неограниченно увеличивается тем быстрее, чем больше отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ и меньше – δ_1/δ_2. При этом из формул (6), (7) следует, что

$$x = \frac{c-1}{1+d}y, \qquad z = \frac{c+d}{1+d}y, \qquad y = \frac{\varepsilon_1\delta_2}{\beta\varepsilon_2\delta_1}\,\frac{(c-1)(1+d)g}{(c+d)(e(c-1)+f(1+d))}.$$

Очевидно, что такой путь развития общества является прогрессивным.

В качестве иллюстрации на рис. 1 показаны зависимости координат особых точек от уровня технологии g для параметров $b = 2$, $d = e = f = \gamma = 1$, $\beta = 0.1$, $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 1$, $\delta_1 = 10$, $\delta_2 = 1$, $c = 0.5$ и $c = 2$. При этих значениях параметров $g^* = 2$, $g_{cr} = 7$. В области $g^* < g_1 < g < g_{cr}$, где g_1 – некоторое значение g, слабо зависящее от параметра c, исходные уравнения имеют три состояния равновесия, одно из которых (с $y = 0$) всегда устойчиво, второе – неустойчиво, а третье, в зависимости от параметра α, может быть как устойчивым, так и неустойчивым, причем неустойчивость является колебательной.

Условие неустойчивости имеет вид (11), где α_{cr} зависит от параметров c и g (при фиксированных значениях остальных параметров). Зависимости α_{cr} от g для $c = 0.5$ и $c = 2$ показаны на рис. 2. Видно, что величина α_{cr} для $c = 0{,}5$ существенно больше, чем для $c = 2$. С увеличением уровня технологии g значение α_{cr} при $c = 0.5$ стремится к конечному значению, тогда как при $c = 2$ оно уменьшается до нуля. Это значит, что во втором случае развитие общества стабилизируется, начиная с некоторого значения g. Для достаточно малых значений параметра g вблизи границы устойчивости (при $\alpha < \alpha_{cr}$) колебания x, y, z по форме близки к гармоническим. С удалением от границы форма колебаний сильно искажается: они

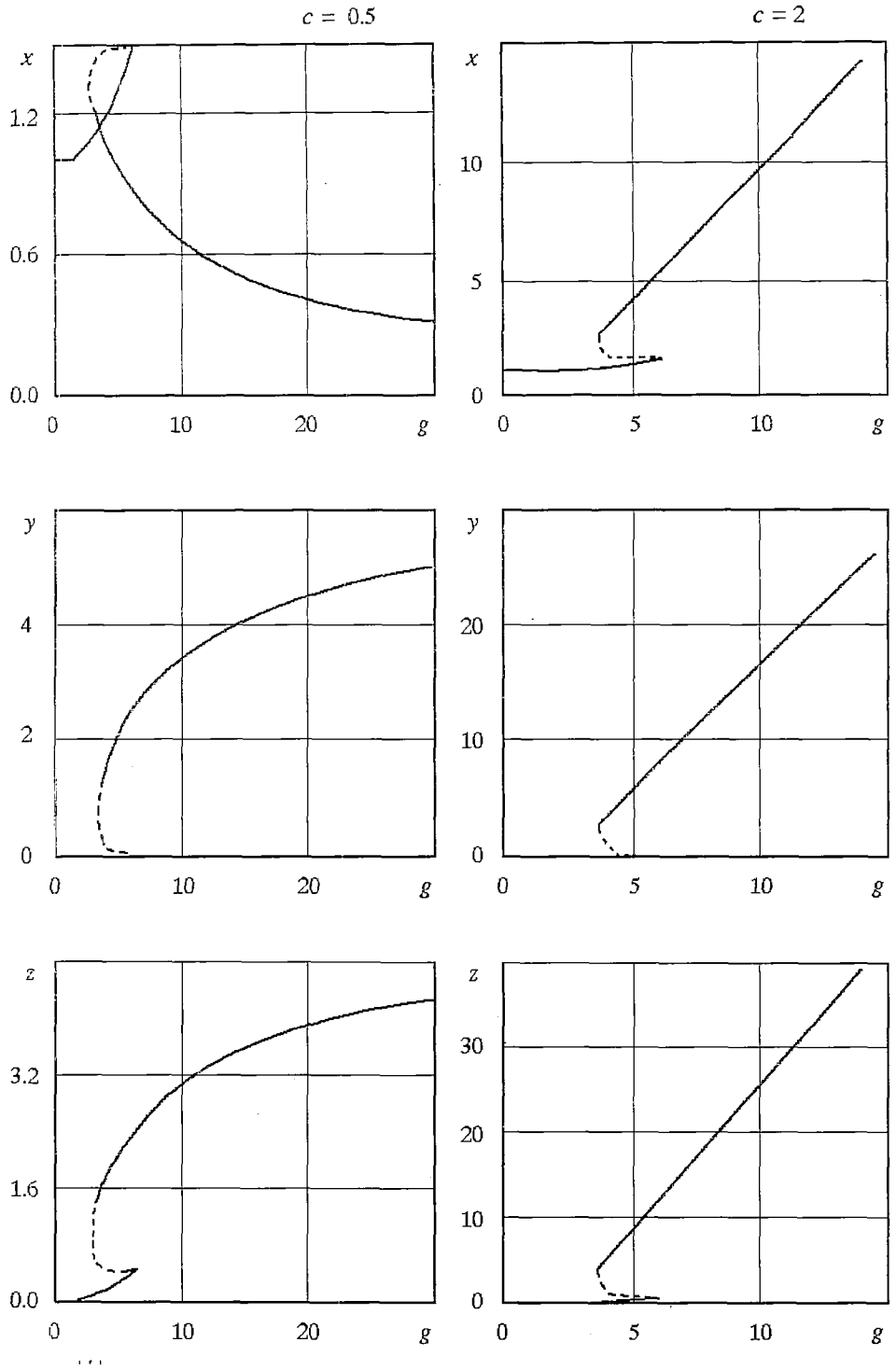


Рис. 1. Зависимости координат особых точек x, y и z соответственно от уровня технологии g

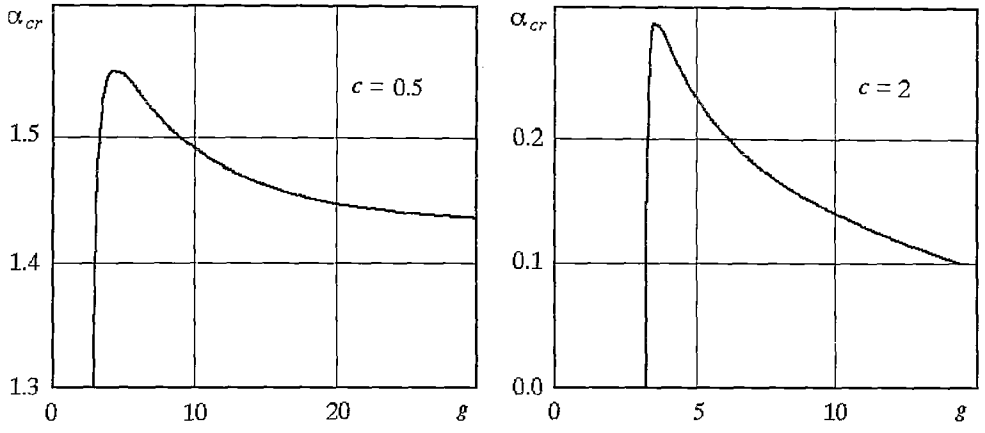


Рис. 2. Зависимости α_{cr} от уровня технологии g

приобретают импульсный характер. В данном случае период колебаний существенно увеличивается. Изменение формы колебаний при уменьшении α и фиксированном значении g продемонстрировано на рис. 3 для $c = 2$. При увеличении g и фиксированном значении α колебания приобретают вид все более острых импульсов (рис. 4, *а*, *б*). Это связано с тем, что при переходе через границу устойчивости $\alpha_{cr}(g)$ возбуждение колебаний является жестким. Действительно, для параметров $\alpha = 0.1$, $g = 15$, $c = 2$ состояние равновесия является устойчивым (см.рис.2).В то же время устойчивым является предельный цикл, соответствующий импульсной форме колебаний.

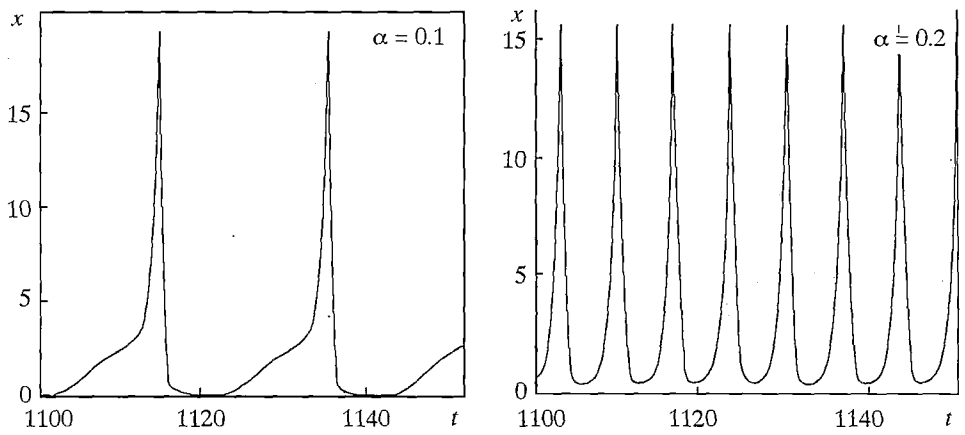
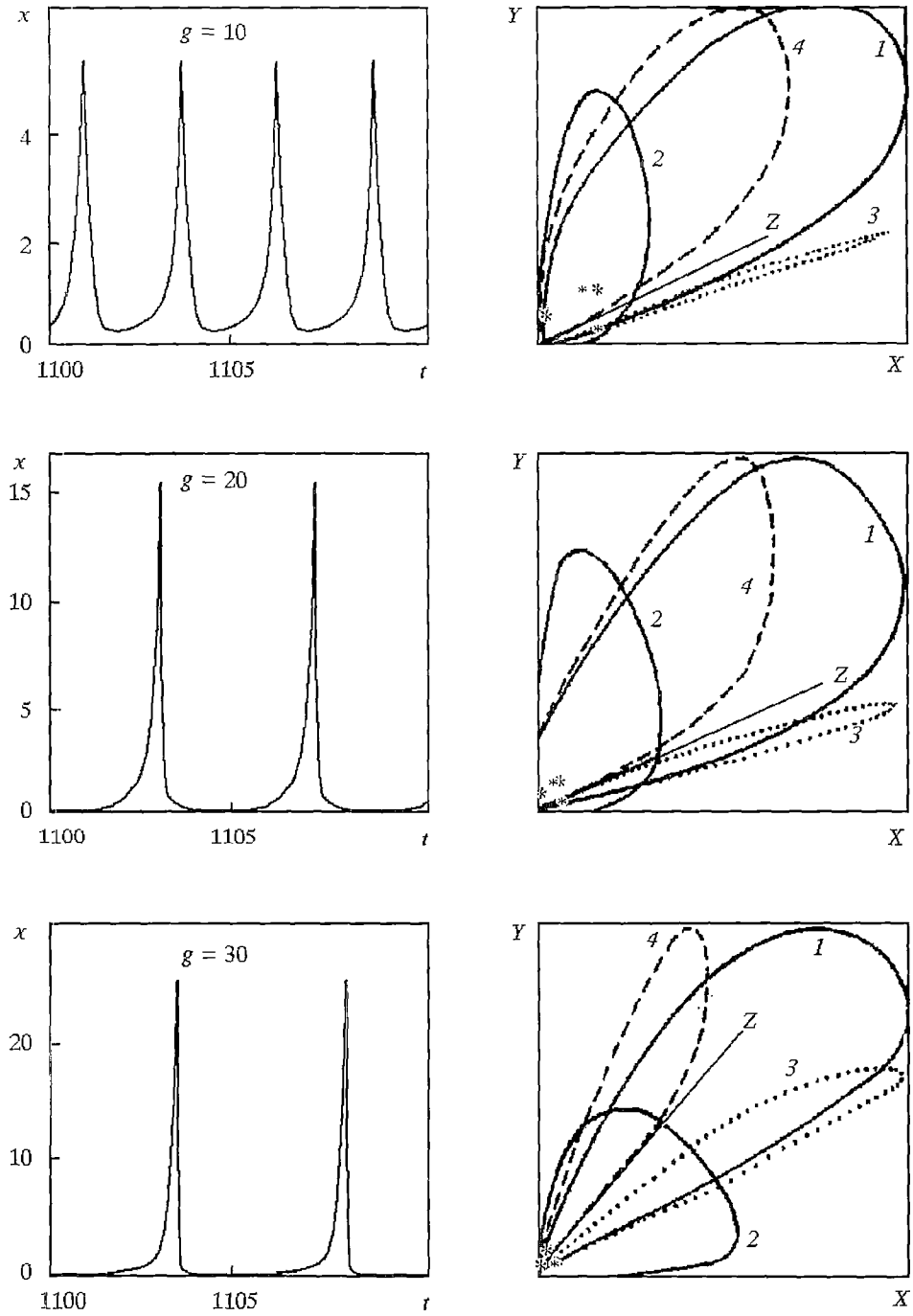


Рис. 3. Форма колебаний координаты $x(t)$ при $g = 5$ и $c = 2$


x
g = 10
4
2
0
1100
1105
t
Y
4
1
2
Z
3
X
x
g = 20
15
10
5
0
1100
1105
t
Y
1
4
2
Z
3
X
x
g = 30
20
10
0
1100
1105
t
Y
4
1
Z
3
2
X

a

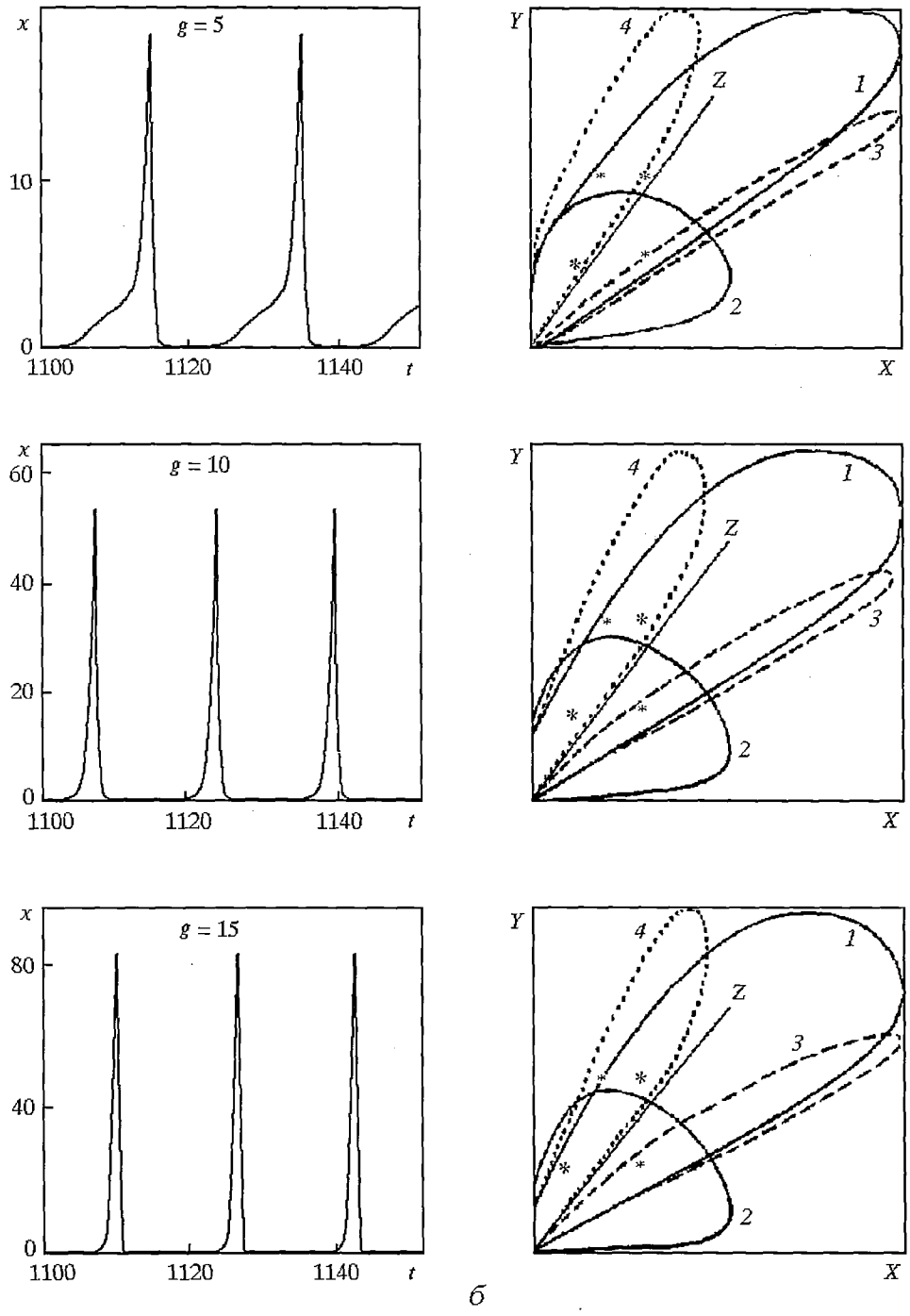


Рис. 4. Зависимости формы колебаний и предельных циклов от параметра g при фиксированных c и α : $a - c = 0.5$, $\alpha = 1.4$; $b - c = 2$, $\alpha = 0.1$; *1* – аксонометрическая проекция предельного цикла, *2*,*3*, *4* – проекции на плоскость xy, xz, yz соответственно. Звездочки означают расположение особых точек в соответствующих плоскостях

Библиографический список

1. *Lorenz H.W.* // Lecture Notes in Economics and Mathem. Systems. Springer–Verlag, 1989. № 334.
2. *McMahon F.* Chaos models in economics: review, theory and evidence. Preprint of Department of Economics. McGill University. Montreal, 1990.
3. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. Springier–Verlag, 1990.
4. *Wei–Bin Zhang.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. Springier–Verlag, 1991.
5. *Неймарк Ю.И.* Математическая модель производители–продукт управленцы // Динамика систем: Динамика, стохастичность, бифуркации. 1990. С.84.
6. *Неймарк Ю.И.* Простые математические модели // Природа. 1990. Т.11.С.9.

Институт общей физики РАН
Московский государственный университет

Поступила в редакцию 16.11.92
после переработки 20.02.93

THE SIMPLEST DYNAMICAL MODEL OF SOCIAL ECONOMIC PROGRESS

I.V. Klimov, P.S. Landa

The simplest model of social economic progress is considered. This model describes interaction between two people categories, participating in production, and product produced and accumulated by them. These people categories are producers and managers. The model permits to explain qualitatively both the replacement of social structures and economic crisis phenomena. It is shown that the mutual competition between the managers is the main parametre determining the character of social economic progress. If the competition is small the way of economic progress will lead to a deadlock. Otherwise, the way of economic development is progressive, i.e. more preferable.

Климов Владимир Иванович – родился в 1955 г. в Златоусте Челябинской области, окончил физический факультет МГУ в 1979 г. С 1979 по 1987 работал в Физико–энергетическом институте в Обнинске, с 1987 в Институте общей физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в ЛГУ (1985) в области нерелятивистской квантовой механики двух– и трехчастичных резонансов. Научный сотрудник ИОФ РАН. Область научных интересов – нерелятивистская квантовая теория двух– и трехчастичных резонансов, теория пучковой и лазерной плазмы, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор более сорока научных статей по указанным выше направлениям.

Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 г. в Киеве, окончила фзический факультет МГУ в 1953 г. С 1956 г. работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в МГУ (1959) и доктора физико–математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор четырех монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания». Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Прикладная нелинейная динамика».

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 577.3:517

СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО МОЗГА

В.С.Анищенко, Д.Э.Постнов

Предложен новый метод численной обработки сигналов электроэнцефалограммы, основанный на явлении хаотической синхронизации. Введена количественная мера синхронизации хаотических сигналов, рассчитываемая из степени неравномерности двумерного распределения взаимного фазового сдвига. Показано, что предлагаемый метод применим как для анализа режима функционирования мозга, так и в целях диагностики патологий. Установлено различие в реакции правого и левого полушарий на заданную ментальную нагрузку.

Введение

По мере развития как синергетики в целом, так и знаний о динамическом хаосе в частности, исследователи стали активнее использовать методы нелинейной динамики в изучении сложных автоколебательных процессов в реальных системах и объектах окружающего нас мира. Одним, может быть, из самых загадочных таких объектов является человеческий мозг. Взгляду экспериментатора он представляется в виде распределенной автоволновой среды, генерирующей хаотические во времени потенциалы по всей своей поверхности. Попытаться найти некоторые закономерности или, возможно, элементы самоорганизации в работе мозга – интереснейшая задача.

Среди работ, посвященных исследованию электроэнцефалограмм (ЭЭГ) с позиций нелинейной динамики, можно выделить, например, широко известные работы A.Babloyantz с соавторами [1–3], где анализируется размерность колебаний ЭЭГ в различных состояниях мозга человека (сон, приступ эпилепсии и т.д.). Другое направление – пространственно–временной анализ α–ритма ЭЭГ – в основном представлено работами H. Haken, R. Friedich, A. Fuch [4,5].

В данной статье мы пытаемся проанализировать работу человеческого мозга с позиций синхронизации хаотических колебаний. Ниже мы обоснуем применение для исследований количественной меры синхронизации хаоса, построим на ее базе так называемый профиль правого и левого полушария и проиллюстрируем некоторые экспериментальные факты.

1. Метод

Неоднозначность в понимании термина «синхронизация хаоса» (СХ) сложилась исторически. Различные подходы к проблеме порождали и различные определения [6–13]. В качестве явления СХ разумно понимать сложный и многоэтапный процесс эволюции режимов колебаний, когда при изменении управляющего параметра количественная мера степени различия двух хаотических

сигналов уменьшается. В предельном случае идеальной СХ наблюдается эффект полной идентичности двух хаотических сигналов. В [14] нами был предложен, а в [12,13] применен к несложным радиофизическим моделям способ изучения синхронизации хаотических колебаний, основанный на статистическом анализе плотности распределения разности фазовых спектров двух хаотических сигналов (ПРФС). Результатом вычислений являются диаграммы ПРФС [14]. По структуре ПРФС можно судить о степени и характере взаимосвязи двух хаотических процессов. На рис. 1 приведен типичный вид диаграмм ПРФС для случая невзаимосвязанных (*а*) и существенно синхронизованных (*б*) хаотических сигналов двух связанных генераторов с инерционной нелинейностью. Очевидно, переход от (*а*) к (*б*) можно рассматривать как некий процесс самоорганизации, что наводит на мысль о введении количественного параметра, характеризующего степень сложности структур на диаграмме. С другой стороны, задачи обработки сигналов ЭЭГ настоятельно требуют возможности количественной оценки и сравнения степени хаотической синхронизации.

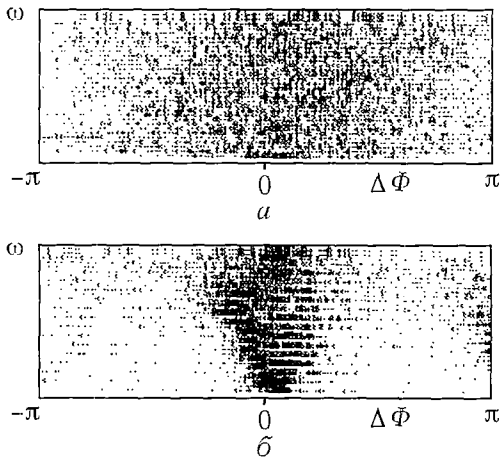


Рис. 1. Типичная форма диаграммы ПРФС для случая невзаимосвязанных (*а*) и существенно синхронизированных (*б*) хаотических сигналов

В качестве количественной меры синхронизации хаоса мы предлагаем величину, определяемую энтропией ПРФС. На горизонтальной оси диаграммы ПРФС откладываются значения взаимного сдвига фаз колебаний, вертикальная ось соответствует отсчетам частоты фазового спектра. В процессе измерения обрабатывается N_{sp} последовательно отсчитанных отрезков пары временных реализаций. Для каждого отрезка рассчитывается разность фазовых спектров. Таким образом определяется величина $F(\Delta\Phi,\omega)$, соответствующая вероятности обнаружения сдвига фаз $\Delta\Phi$ на частоте ω. Яркость (сгущение точек) на диаграмме прямо пропорциональна величине вероятности $P(\Delta\Phi,\omega)$. По каждой из частот спектра диаграммы ПРФС имеется одномерное распределе–ние плотности вероятности фазового сдвига,неравномерность которого прямо связана с характером структуры на диаграмме. Эту неравномерность в целом по диаграмме можно охарактеризовать следующим образом.

Пусть в дискретном варианте диаграмма содержит N ячеек по горизонтали (сдвиг фаз) и M ячеек по вертикали (количество отсчетов спектра). Распределение $P(\Delta\Phi,\omega)$ при этом переходит в двумерную гистограмму $P(i,j)$. Тогда вероятность попадания в ячейку (i,j) есть

$$p(i,j) = \frac{P(i,j)}{M\,N_{sp}}\ , \qquad (1)$$

где $i = 1...N$, $j = 1...M$, а N_{sp} – число рассчитанных Фурье–спектров (число точек в одном сечении по j).

В данном случае энтропия дискретного источника

$$S = -\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} p(i,j)\ \ln\ p(i,j). \qquad (2)$$

S может быть использована как количественная характеристика степени неравномерности (случайности) диаграммы ПРФС. Однако с ее помощью затруднительно в целом по диаграмме и по ее части сравнить степень синхронности, которая определяется нормировкой $p(i,j)$. Чтобы избежать этого, разнормируем величину под логарифмом:

$$S_M = -\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} p(i,j)\ \ln\{Mp(i,j)\}. \qquad (3)$$

Величина S_M имеет теперь смысл усредненной по частотам энтропии. Действительно, энтропия одномерного распределения сдвига фаз при $j = j_0$:

$$S_{j_0} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{P(i,j_0)}{N_{sp}}\ln\left(\frac{P(i,j_0)}{N_{sp}}\right) = -\sum_{i=1}^{N} Mp(i,j_0)\ln\{Mp(i,j_0)\}. \qquad (4)$$

Усредняя (4) по M частотам и внося множитель под знак суммы, получим (3).

Как показали результаты расчета величины значения S_M, ее применение не всегда удобно для обработки имеющихся экспериментальных данных. Причина тому – сильно нелинейный характер зависимости S_M от степени проявления эффекта синхронизации хаоса. В тестовом эксперименте (см.ниже) степень СХ оценивалась как доля синхронной компоненты в двух хаотических сигналах.

Для проведения измерений оказалось удобным сконструировать на базе S_M

$$S_2 = \{1 - (S_M / S_{M\max})^4\}100$$

Величина S_2 характеризуется близкой к линейной зависимостью от степени СХ в экспериментах. Значение $S_2 = 100$ ($S_M = 0$) соответствует полной синхронизации хаоса, а при $S_2 = 0$ ($S_M = S_{M\max}$) отвечает случаю, когда хаотическая синхронизация не имеет места.

Следует отметить, что если введение величины S_M отражает некий принципиальный подход к исследованию синхронизации хаотических колебаний, то S_2 носит смысл вспомогательного параметра, удобного при данных конкретных исследованиях. В дальнейшем авторы оставляют за собой право совершенствовать способ количественной оценки степени синхронизации хаоса, сохраняя идеологию описанного выше подхода.

Первоначально метод ПРФС был применен к исследованию динамики радиотехнической системы (двух связанных генераторов с инерционной нелинейностью). Полученные результаты не только показали правомерность использования метода, но также позволили вскрыть ряд закономерностей синхронизации хаотических колебаний для систем небольшой размерности. Приведенные на рис. 1 диаграммы ПРФС отражают случай как невзаимсвязанных, так и синхронизованных хаотических колебаний двух генераторов с инерционной нелинейностью. Основные результаты проведенных исследований опубликованы в [12,13].

Так как сама методика получения диаграмм ПРФС, так и метод количественной оценки степени синхронизации хаоса не связаны с происхождением и природой исследуемых сигналов, представляется вполне разумным использовать данный подход для исследования произвольных сигналов. В противовес описанному выше примеру взаимодействия колебаний динамического происхождения, рассмотрим пример, когда определенная степень взаимосвязи имеется между двумя «истинно» хаотическими сигналами. На рис. 2 приведены результаты тестового эксперимента, где в качестве двух хаотических сигналов использовался один и тот же хаотический процесс с добавлением

определенной части некореллированной компоненты в каждый канал. Рассматривались случаи аддитивного (кривая *1*) и мультипликативного (кривая *2*) введения несинхронной компоненты. Из рисунка видно, что предло–женные характеристики имеют близкую к линейной зависимость от доли несинхронной компоненты в сравниваемых сигналах и определен–ный порог чувствитель–ности (60–70% несинхронной компоненты).

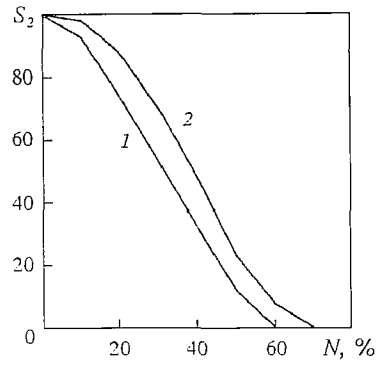


Рис. 2. Результаты тестового эксперимента, где n – доля несинхронной компоненты в каждом из хаотических сигналов

2. СХ–профиль ЭЭГ полушарий

Предметом обсуждения этого раздела будут следующие вопросы.

1. Имеются ли значимые (т.е. уверенно измеряемые в эксперименте) СХ–связи между различными областями полушарий мозга?

2. Если да, носят ли они межполушарный или внутриполушарный характер?

3. Возможно ли выделение типичного образца распределения свойств хаотической синхронизации по поверхности мозга?

Сделаем важное замечание: в силу недостаточного количества проведенных диагностических экспериментов не все представленные в этом и последующих разделах уверенно фиксируемые результаты являются установленными медицинскими фактами.Они призваны лишь проиллюстрировать возможности предлагаемой методики и очертить перспективные направления дальнейших исследований.

Не вызывает сомнений, что каждая измеряемая в эксперименте величина связана с особенностями режима функционирования организма. Иной вопрос, на каком уровне мы в состоянии контролировать режим работы мозга. Именно этот факт определяет границу достоверности экспериментов. В соответствии с этим нашей целью является поиск таких характеристик, которые были бы устойчивы во времени при неизменном, с нашей точки зрения, состоянии организма. В то же время, эти характеристики должны достоверно отличаться количественно, если речь идет о сравнении двух различных режимов функционирования организма.

На рис. 3 приведены временные зависимости параметра S_2 для группы испытуемых. Сигналы ЭЭГ снимались с симметрично расположенных точек на правом и левом полушариях. Хотя условия эксперимента оставались неизменными (свет выключен, глаза испытуемого закрыты), для всей группы испытуемых параметр S_2 не оставался сколько – нибудь постоянен. По–видимому, здесь находят свое отражение сложные процессы вовлечения различных областей мозга в мыслительный процесс. Иначе вели себя в этом случае статистические характеристики, например, нормированная разность энтропий по распределению (или по спектру) сигнала ЭЭГ. Указанная разность во всех случаях составляла 2–4% от среднего значения, являя собой пример малочувствительной к изменению состояния мозга характеристики.

Анализ более 160 парных ЭЭГ (с симметричных точек левого и правого

полушария) не позволил выделить признаки, однозначно реагирующие на состояние либо на режим функционирования головного мозга.

Качественно иные результаты дает подход, при котором поиск взаимосвязей ведется в пределах каждого полушария по отдельности. Обратимся к рис. 4, где приведен вариант стандартного расположения электродов на голове (по 8 на каждое полушарие). Сделаем одновременную запись сигналов ЭЭГ со всех точек одного полушария. Это позволит задать симметричную матрицу, содержащую все

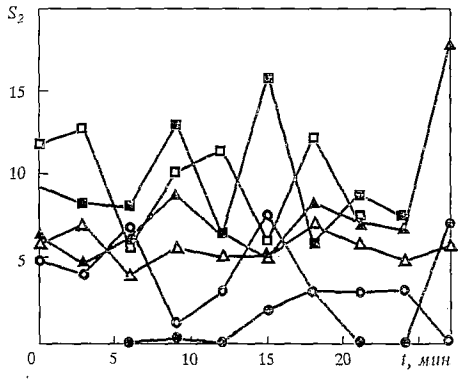


Рис. 3. Поведение во времени параметра S_2 для группы из 6 испытуемых

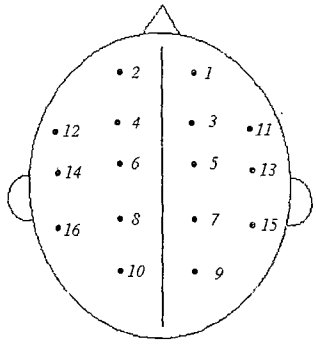


Рис. 4. Вариант стандартного расположения электродов ЭЭГ

возможные параметры взаимосвязи S_2 (i,j), где i и j – номера точек наложения электродов. Анализируя значения S_2 (i,j) для различных условий эксперимента, можно выделить наиболее существенные из них с целью использования для построения пространственных графиков–профилей.

Как показали результаты исследований, наиболее информативным оказался профиль, содержащий элементы S_2 $(i,i+2)$, где i =1,3,5,7 для правого полушария и i = 2,4,6,8 для левого. Это соответствует набору параметров S_2 , рассчитанных между соседними точками вдоль линии точек 1–9 (или 2–10). Выяснилось, что такая кривая, несмотря на индивидуальные различия, имеет некоторые общие для всех испытуемых черты. В частности, характерным является спад степени взаимосинхронности в области лба, а также заметно большая степень синхронности колебаний правого полушария. Кривую, отражающую типичное пространственное распределение свойств синхронности ЭЭГ, назовем профилем полушария с позиций синхронизации хаоса, или СХ–профилем. Усредненный (по всем испытуемым) вид кривых для правого и левого полушарий приведен на рис 5.

3. СХ–профиль и режим функционирования мозга

Индивидуальный вид СХ–профиля в отсутствие внешних воздействий на испытуемого и при расслабленном его состоянии достаточно устойчив во времени, что видно на рис. 6, где приведены результаты измерений, сделанные в начальный момент времени и через 5 минут.

Этот факт позволяет провести эксперимент по изучению влияния режима работы мозга на вид кривой СХ–профиля. В процессе эксперимента испытуемому предлагалось непрерывно, в течение 6–7 мин. решать арифметические задачи. Дважды в исходном состоянии, а также через 2,5–3 мин. после начала выполнения задания производилась еще одна запись сигналов ЭЭГ. В результате

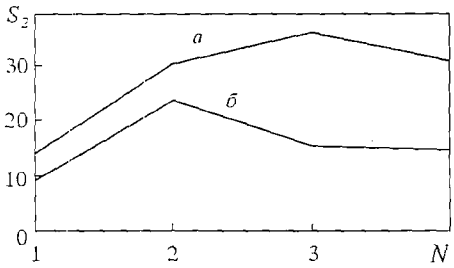


Рис. 5. Усредненная форма СХ–профиля для правого (*а*) и левого (*б*) полушарий, *N* – номер пары точек

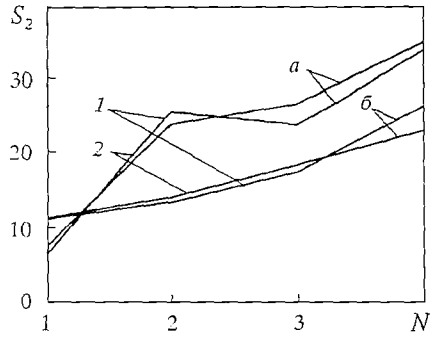


Рис. 6. Результаты измерений СХ – профиля в начальный момент времени (*1*) и через 5 минут (2) для правого (а) и левого (б) полушарий, *N* – номер пары точек

анализа полученных кривых по левому полушарию была выделена пара точек, где наблюдалась наиболее четкая реакция (точки наложения электродов 6 и 8). По данным, полученным в этой паре точек, строились временные зависимости S_2 (t) для всех испытуемых (рис. 7). Наиболее удобным оказалось строить график в координатах времени и величины сдвига ΔS_2, которая вычислялась для каждого испытуемого как разность S_2 в спокойном и возмущенном состояниях, нормированная на величину S_2, измеренную в спокойном состоянии (рис. 7). График, усредненный по всем испытуемым, приведен на рис. 8. Поведение кривых, соответствующих правому и левому полушариям, позволяет сделать вывод о принципиальном наличии реакции на предъявленное воздействие и о достоверно фиксируемых различиях в реакции левого и правого полушарий.

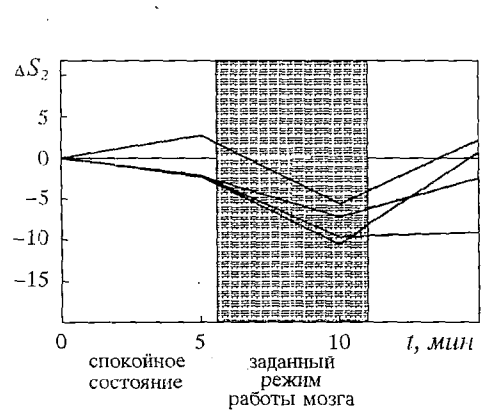


Рис. 7. Изменения параметра S_2, вызванные заданием специфического режима деятельности мозга: ΔS_2 – величина изменения S_2 в сравнении с невозмущенным состоянием для каждого испытуемого

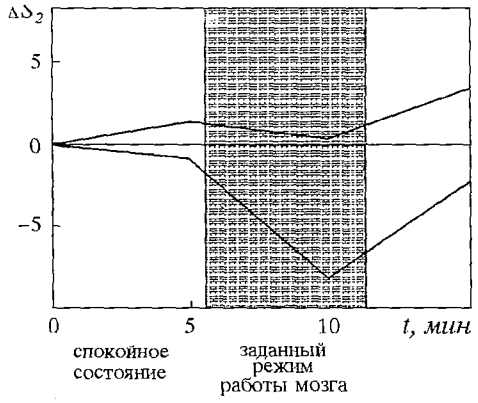


Рис. 8. Усредненная по группе испытуемых величина реакции ΔS_2 для правого (*а*) и левого (*б*) полушарий мозга

4. Диагностика: первые шаги

Одной из самых важных отдаленных целей описываемых экспериментов является возможность уверенной диагностики заболеваний мозга. В свете описанных выше результатов была предпринята попытка сравнить характеристики ЭЭГ здоровых людей с записями ЭЭГ, соответствующими установленной патологии (опухоли) в работе мозга. СХ–профиль для этих целей строился из величин S_2 (1,i), где i = 3, 5, 7, 9 для правого полушария и S_2 (2,i), i = 4,6,8,10 для левого.Таким образом, оценивалась степень распространения свойств синхронности по мере удаления от некоторой опорной точки.

Полученныерезультаты приведены на рис. 9, где нанесены кривые, соответствующие как правому, так и левому полушариям нескольких здоровых людей (они мало различаются), а также две кривые, соответствующие случаю патологии (кривые *а* и *б*). Бросается в глаза резкое отличие в значениях S_2 для измеряемого промежутка лоб–темя (точки с абсциссой 3.0 графика).

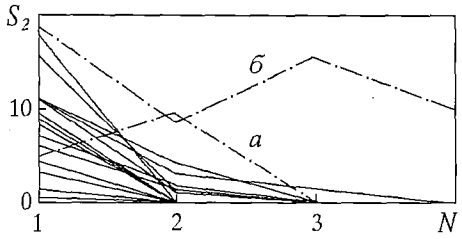


Рис. 9. Вид СХ – профиля, используемого в целях диагностики: —— здорового человека, ——— больного с установленной патологией: *а* – левое, *б* – правое полушария, *N* – номер пары точек

Несомненно, представленные здесь результаты пока не могут претендовать на роль диагностического параметра, однако указывают на многообещающее направление дальнейших исследований. Выявление однозначной связи значения показателя степени синхронизации хаоса с наличием патологических отклонений являлось бы важным результатом исследований в свете практического приложения.

Выводы

В работе мы ввели количественную меру степени синхронизации хаотических колебаний двух сигналов, определяемую из неравномерности (наличия структур) диаграммы ПРФС через усреднение энтропии, вычисляемой по каждому сечению диаграммы. Нами показано, что такой параметр уверенно отражает наличие синхронной составляющей (по всем частотам одновременно) вплоть до уровня несинхронной компоненты в 60–70% . Исследование многоканальной записи ЭЭГ человеческого мозга позволило выбрать информативный и обладающий общими свойствами СХ–профиль полушарий, отражающий свойства взаимосинхронизованности сигналов ЭЭГ в различных участках мозга.

Экспериментально обнаружена реакция уровня синхронизации ЭЭГ на изменение режима мозговой деятельности.

Сравнительное исследование серии ЭЭГ здоровых испытуемых и ЭЭГ, соответствующих патологическому нарушению работы мозга, выявило существенные различия в СХ–профиле, что говорит о перспективности развития этого направления в целях диагностики.

Мы выражаем глубокую благодарность зав.кафедрой нейрохирургии Саратовского медицинского института профессору Е.И. Бабиченко за проявленный интерес к исследованиям и предоставленную возможность работы в клинике института. Кроме того, мы хотели бы поблагодарить принимавших участие в работе А.В. Климшина и П.И. Сапарина, а также всех добровольных участников экспериментов.

Библиографический список

1. *Babloyantz A.* Strange Attractors in the Dynamics of Brain Activity // Complex Systems – Operational Approaches/ Ed.by H.Haken. Springer, Berlin, 1985.

2. *Babloyantz A., Nicolis C. and Salazar M.* Evidence of chaotic sof brain activity during the sleep cycle// Phys.Let A III. 1985. P.152.

3. *Babloyantz A., Destexhe A.* Low Dimensional chaos in an instanse of epilepsy// Proc.Nalt.Acad.Sci.USA. 1986. Vol.83. P.3513.

4. *Fuchs A., Friedrich R., Haken H. and D.Lehmann:* Spatio–Temporal Analysis of Multichannel α – EEG Map Series // Computional Systems Natural and Artifical/ Ed. by H.Haken. Springer. Berlin, 1987.

5. *A.Fuchs, R.Friedrich, and H.Haken:* Synergetic Analysis of Spatio–Temporal EEG Patterns // Proceedings of the workshop Nonlinear phenomena in Excitable Media. Leeds. 1989.

6. *Дудник Е.Н.,Кузнецов Ю.И., Минакова И.И., Романовский Ю.М.* Синхронизация в системах со странным аттрактором // Вестник Моск.ун–та.Сер.3.1983. Т. 24, № 4. С. 84.

7. *Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф., Перминов С.М.* Порог синхронизации как характеристика фазового перехода хаос– порядок./ МГУ. М, 1984. Препринт № 9.

8. *Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф.* Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т.281, № 2. С.1164.

9. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Эффекты синхронизации и бифуркации синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 9. С.1112.

10. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.

11. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв.вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С.1050.

12. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 2. С. 338.

13. *Anishchenko W.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonowa M.A.* Synchronization of chaos // Bifurcation and Chaos.1992. Vol.2, № 3. P. 633.

14. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Самоорганизация в хаосе Новый метод экспериментальной диагностики // Письма в ЖТФ. 1990. Вып.16. № 5. С.85.

Саратовский государственный университет

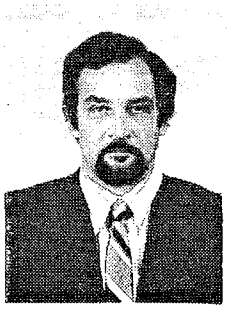
Поступила в редакцию 26.11.92
после переработки 2.08.93

CHAOTIC SYNCHRONIZATION AND ELECTRICAL ACTIVITY OF HUMAN BRAIN

V.S.Anishchenko, D.E. Postnov

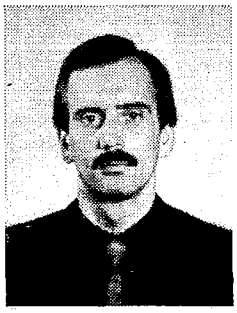
The new method of numerical processing of analogous EEG signals based on

chaotic synchronization phenomena is suggested. A quantitative measure of synchronization is proposed. It characterized the unevenness degree of two–dimensional probability density distribution of mutual phase shift. It is shown that this method can be used both for analyses of functioning regimes and for diagnostics of human brain pathology. The difference between the reaction of left and right cerebral hemispheres on the specified mental work was established.



Анищенко Вадим Семенович в 1970 г. защитил диссертацию на степень кандидата физико–математических наук. С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. В 1986 г. защитил докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы». В 1987 г. в качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдском университете (Берлин). С 1988 г. – заведующий кафедрой радиофизики Саратовского университета.

В.С. Анищенко автор более чем 150 научных работ, среди которых 5 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Две монографии по проблемам динамического хаоса переведены на английский и изданы в Лейпциге в 1987 и 1989 г. В 1990 г. издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых системах», хорошо известная среди специалистов.



Постнов Дмитрий Энгелевич в 1983 г. окончил физический факультет Саратовского университета по специальности «радиофизика и электроника». До 1987 г. – инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 г. окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 г. работает старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета. Автор 14 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 577.3 + 517

НОРМИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ КАК ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК РЕАКЦИИ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА НА ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

В.С.Анищенко, П.И. Сапарин

Проанализировано поведение совокупности статистических и динамических характеристик, используемых в хаотической динамике, применительно к электрокардиограммам человека при различных стрессах.

Введена новая количественная характеристика электрокардиограммы в виде энтропии распределения, нормированной на энергию сигнала. На ряде тестовых экспериментов обоснована перспективность использования ее как диагностического признака, обладающего большей чувствительнотью и устойчивостью в сравнении с традиционными медико-биологическими параметрами. Подтверждена применимость предложенного метода при изменении уровней стрессорного воздействия в широком диапазоне. Доказана устойчивость метода к выбору параметров численной обработки сигнала.

На основании предложенного метода может быть создан прибор для анализа или контроля состояния живого организма, не требующий для измерений сложной аппаратуры или предварительных хирургических операций.

Введение

Данная работа посвящена проблемам диагностики состояний человека по электрокардиограммам ЭКГ с помощью методов нелинейной динамики. Наличие динамического хаоса в деятельности сердца человека и животных факт, подтвержденный многочисленными экспериментами [1,2,5,9]. Однако вопрос, что происходит с режимами хаотических колебаний при малых внешних возмущениях медико--биологической системы – стрессах – остается открытым.

Для решения этой проблемы необходимо выявить диагностическую характеристику, значение которой позволяло бы количественно описать состояние (режим функционирования) сердечно–сосудистой системы. Причем данная характеристика должна иметь следующие свойства:

1) способность реагировать на слабые внешние воздействия. При этом необходимо, чтобы чувствительность характеристики была бы значительно выше, чем у применяемых в настоящее время медико–биологических показателей: артериального давления (АД), частоты сердечных сокращений (ЧСС), показателей, предложенных Р.М. Баевским [4];

2) достоверность реакции на широкий спектр возможных воздействий: от слабых до достаточно сильных;

3) однозначность получаемых результатов: одному конкретному состоянию конкретного человéка должно соответствовать одно значение диагностической характеристики, это значение должно быть устойчиво к выбору параметров схемы численой обработки ЭКГ.

Такой диагностический признак мы и попытались найти в настоящей работе.

1. Методы решения задачи и аппаратно–программный комплекс

Все используемые характеристики вычислялись по наблюдаемой, в качестве которой рассматривалась запись сигнала ЭКГ. В данном исследовании из них для подробного анализа отобраны следующие: время корреляции t_{cor}, энтропия распределения, энтропия спектра E_s, интенсивность основной гармоники частоты сердечных сокращений A, интегральный спектр мощности S_{int} (интеграл по частоте от спектральной плотности мощности $S(\omega)$).

Живой организм является открытой системой и его энергия может значительно изменяться. Поэтому нами использована идея Ю.Л.Климонтовича о критерии упорядоченности в данных системах [3]. Таким критерием может служить энтропия, перенормированная к определенному значению энергии системы. Используем простой способ нормировки: поделим энтропию E на значение интегрального спектра мощности S_{int} (т.е. на величину, пропорциональную энергии системы H; время анализа во всех экспериментах одинаково). Обозначим данный параметр как E/H и назовем эту величину нормированной энтропией. Аналогичным образом введем и нормированную энтропию спектра E_s/H.

Кроме вышеперечисленных величин в настоящей работе исследовалось поведение при внешнем воздействии таких характеристик аттракторов автоколебательной системы, как фазовый портрет, спектр мощности, автокорреляционная функция (АКФ) и функция распределения.

В качестве основного инструмента для решения поставленных задач использовался измерительно – вычислительный комплекс ИВК, описанный в [2]. Кратко структуру этого комплекса можно охарактеризовать следующим образом: электрокардиограф снимает со стандартно расположенных на теле человека электродов кардиосигнал, который усиливается линейным широкополосным усилителем и с помощью 10–разрядного АЦП вводится в ЭВМ типа IBM PC/AT. Полученная реализация обрабатывается программным комплексом "OBSERV", предназначенном для расчета широкого спектра характеристик исследуемых систем по наблюдаемой (реализации).

Как было установлено ранее, безразлично, какие из первых шести стандартных отведений (I, II, III, aVR, aVL, aVF) использовать в качестве наблюдаемой при расчете совокупности статистических и динамических характеристик режима сердечной деятельности. Нами выбрано стандартное отведение I (левая рука–правая рука, нулевой электрод на левой ноге).

При выборе параметров обработки наблюдаемой кардиосигнала важно время анализа ЭКГ. Использование методов теории сигнала основано на предположении о стационарности и эргодичности процесса сердечной деятельности. Однако в ритме сердца содержатся компоненты (волны) с периодами от долей секунды до суток. Делая предположение о стационарности и эргодичности процесса на конкретном временном интервале (времени анализа), мы тем самым вводим некий максимальный период анализируемых колебаний. Колебания с большим периодом будут накладываться на наблюдаемую как тренды, проявятся на спектре мощности в виде "бугров" вблизи нулевой нулевой частоты и при необходимости могут быть отфильтрованы. Другой причиной, приводящей к нестационарности исследуемого сигнала, является стрессорное воздействие. Влияния этого вида нестационарности можно избежать, выбирая время анализа много меньше характерных времен переходных процессов в организме, вызванных стрессом. В строгом смысле вопрос о стационарности случайно выбранной реализации ЭКГ нуждается в специальных исследованиях (методы оценки см. [4]). Однако экспериментатор может определить присутствие в реализации многих типов нестационарности по виду проекции фазового портрета. Мы будем анализировать наблюдаемые длиной 60–80 кардиоинтервалов, что согласуется с выводами [4] и собственными экспериментами. Такой выбор времени анализа позволит

исследовать процессы, соответствующие ритму сердца и волнам дыхания порядка 1 и 2 (по терминологии, принятой в [4]).

Таким образом, ввод сигнала в ЭВМ производился со следующими параметрами: частота дискретизации – 200 Гц; длина (количество отсчетов) – 10240; время анализа – 51.2 с; число анализируемых кардиоинтервалов – 60–80.

2. ЭКГ человека в спокойном состоянии без воздействия

Целью этих экспериментов явилось определение изменения во времени каждой из рассчитываемых статистических и динамических характеристик и выявление степени разброса характеристик ЭКГ человека, находящегося в спокойном (исходном) состоянии. Последовательность кардиограмм снималась на протяжении 25 минут, интервалы времени между записями были минимальны (2–3 с), воздействие отсутствовало. В этих экспериментах обследовались 5 испытуемых и , кроме того, была подтверждена повторяемость результатов эксперимента во времени для каждого из испытуемых.

Результаты анализа полученных ЭКГ приведены в таблице, содержащей диапазоны изменения во времени каждой из рассчитываемых показателей в среднем по испытуемым. Для сравнения в последней строке таблицы помещен типичный медицинский параметр ЧСС, АД на протяжении эксперимента оставалось неизменным. Из таблицы видно, что диапазон изменения большинства физических параметров очень широкий (и это – при отсутствии воздействия!). Причины этого мы обсудим ниже, а сейчас выделим следующие факты.

Во–первых, энтропия распределения, энтропия спектра, а также соответствующие нормированные величины изменяются относительно мало. Это позволяет использовать данные показатели для диагностики состояния человека. Во–вторых, происходит значительное (на 20%) изменение величины интегрального спектра мощности. Поскольку эта величина пропорциональна энергии колебаний, то и энергия сигнала ЭКГ человека при отсутствии внешнего воздействия сильно изменяется. Значит, особую важность приобретают значения обеих энтропий, нормированных на S_{int} [3,8].

Вид спектра мощности ЭКГ во времени заметно меняется, что, вероятно, связано с происходящими во времени изменениями в хаотическом режиме функционирования сердечной системы. Поведение S_{int}, A, t_{cor}, АКФ и спектра мощности во всех последующих экспериментах подтверждают эту гипотезу. Однако вопрос об изменениях хаотических режимов функционирования сердечно–сосудистой системы во времени при отсутствии внешних возмущений требует дополнительных исследований.

Таблица

Диапазон изменений рассчитываемых параметров во времени

Параметр	Диапазон изменения, %
t_{cor}	$-36 \div +57$
A	$-26 \div +255$
E	$-4 \div +5$
E_s	$-6 \div +6$
S_{int}	$-12 \div +11$
E/H	$-4 \div +4$
E_s/H	$-7 \div +6$
ЧСС	$-7 \div +4$

На этом фоне интересно поведение E_s – энтропии, рассчитываемой по спектру. В то время как вид спектра претерпевает значительные изменения, энтропия по спектру меняется лишь на 6% (см. табл.), что свидетельствует о ее низкой чувствительности к изменению формы спектра в данных конкретных экспериментах.

У индекса напряжения (ИН), еще одной медицинской характеристики, предложенной в [4], абсолютное значение определяется крайне неоднозначно, и даже при увеличении длины ЭКГ, ИН на протяжении 5 мин. может меняться на 160%. Таким образом, применение показателей Баевского для исследований малых стрессорных воздействий является проблематичным.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) В целом диапазон изменений значений статистических и динамических характеристик более широкий, чем у медицинских.

2) Анализ комплекса характеристик позволяет предположить, что имеет место изменение хаотических режимов функционирования сердца во времени.

3) Такие величины, как АКФ, t_{cor}, A, S_{int} и спектр мощности в силу своей высокой чувствительности откликаются именно на эту перестройку режимов сердечной деятельности.

4) Поведение таких величин, как E, E/H, E_s/H не исключает возможности их использования для диагностики состояния человеческого организма. Предыдущие исследования, отраженные в [2,8], подтверждают этот вывод.

3. Реакция организма на различные виды внешних воздействий

В данном разделе описываются тестовые эксперименты, проведенные с различными видами стрессов. Их цель – проверка поведения ранее выбранных характеристик при различных возмущениях живой системы, выбор наиболее подходящих для описания реакций организма на стресс и сравнение диапазона изменения этих величин и медико–биологических показателей. Во всех экспериментах измерения артериального давления производились сразу после окончания ввода в ЭВМ соответствующей реализации (электрокардиограммы). В качестве физической нагрузки использовались приседания. Испытуемый совершал 30 приседаний в течение одной минуты. Записи ЭКГ производились следующим образом: исходное состояние (до воздействия), через 45 с после нагрузки и 4 последовательных записи с интервалом между ними 3 мин. Эти измерения нумеровались с нулевого по пятое. Результаты обработки ЭКГ по всем выбранным диагностическим признакам для мужчин и отдельно для женщин показаны на рис. 1. Поскольку после физической нагрузки происходила быстрая релаксация организма, отрезок ЭКГ выбранной ранее длины был бы явно не стационарным. Поэтому время анализа в этом виде экспериментов было сокращено до 15 с при длине реализации в 3000 точек (отсчетов).

Для описания отклика организма на физическую нагрузку оптимальными являются время корреляции t_{cor} и нормированная энтропия E/H. Их изменения при таком стрессе у мужчины и женщины приведены на рис. 1. Видно, что диапазон изменения t_{cor} и E/H более чем в 2 раза превосходит соответствующие изменения АД и ЧСС. Анализ результатов, полученных при обработке ЭКГ мужчины и женщины, говорит об уменьшении степени хаотичности состояния сердечной деятельности обоих испытуемых.

Следующим видом воздействия была слабая ментальная (умственна нагрузка. Испытуемые в течение двух минут читали по специальной литера туре незнакомый текст с целью его пересказа. Записи ЭКГ производились: в исходном состоянии, затем во время чтения – через 30 с после его начала. Потом измерения проводились через каждые 2 мин, считая от момента окончания чтения. Исходная запись обозначалась нулевой, последующим присваивались соответствующие порядковые номера. В данных экспериментах параметры ввода ЭКГ были стандартными (см. разд. 1).

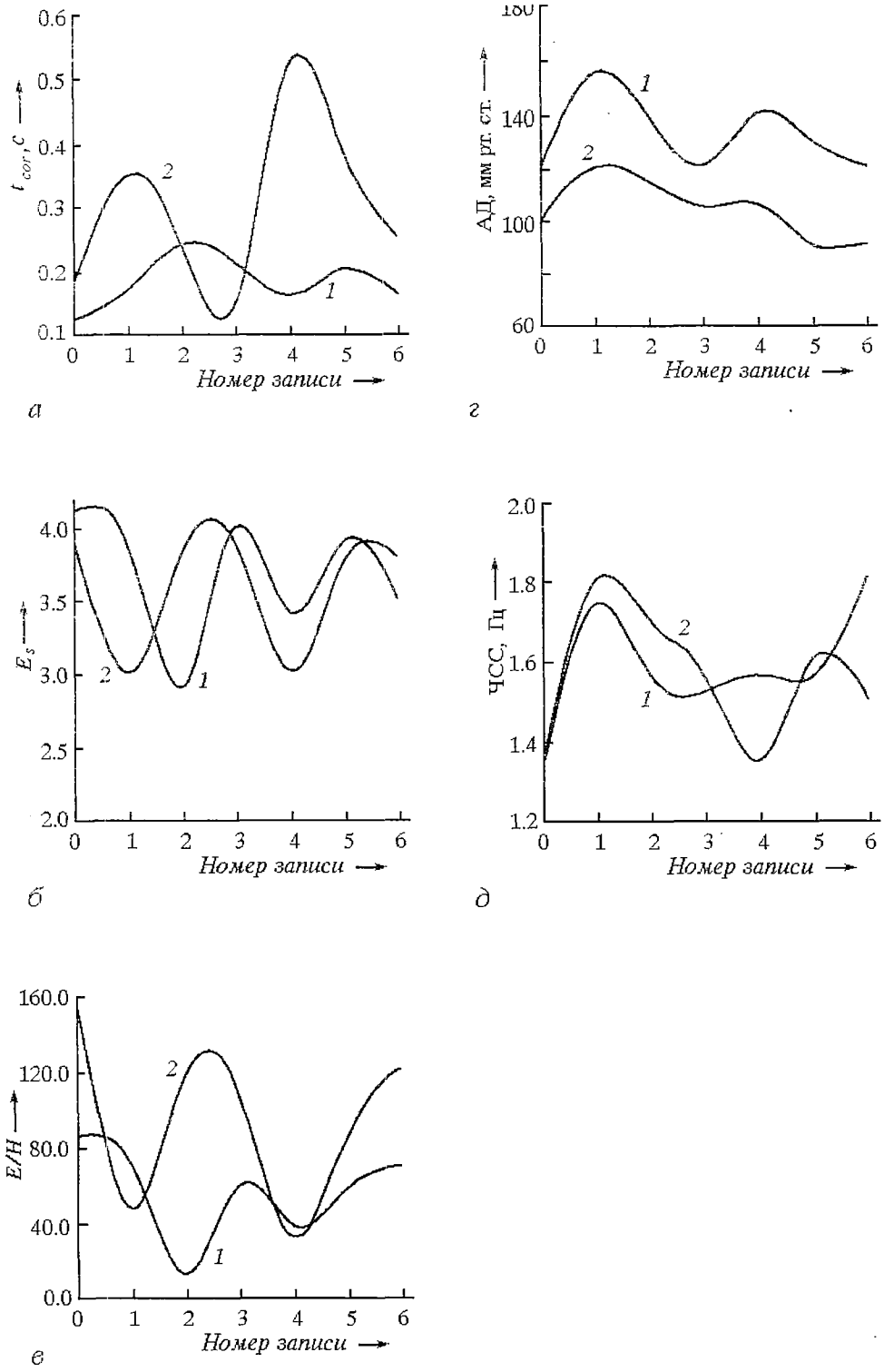


Рис. 1. Изменения статистических, динамических и медико–биологических показателей человеческого организма при физической нагрузке: *1* – реакция мужчины; *2* – реакция женщины

Из всех выбранных нами статистических и динамических характеристик для описания реакции на ментальный стресс подходит только нормированная энтропия (рис.2). Другие характеристики или имеют слишком малый (недостоверный) диапазон изменения E_s, или же изменения не коррелируют с оказываемым воздействием (E, t_{cor}, S_{int}, E_s/H). Такое слабое воздействие плохо фиксируется и по медицинским показателям: АД остается постоянным, ЧСС изменяется слабо, в среднем на 9%. Однако нормированная энтропия позволяет надежно диагностировать реакцию организма: диапазон изменения этой характеристики примерно 40%. Интересно, что изменения E/H имеют противоположные знаки у двух представителей одного пола.

Третьим рассмотренным видом воздействия является шумовое возмущение. На испытуемого надевались наушники, затем на 4 мин. включался громкий шум. Запись реализаций происходила следующим образом: исходное состояние, через 1,3 и 6 мин. после окончания шумового воздействия. Параметры оцифровки ЭКГ были стандартными.

Результаты обработки последовательностей ЭКГ, полученных при шумовом стрессе у молодых мужчины и женщины приведены на рис. 3. Как и в

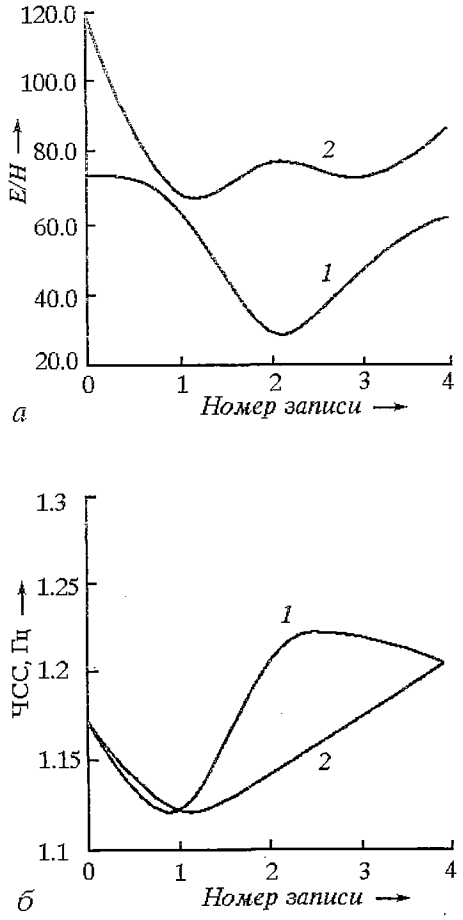


Рис. 2. Изменения динамического и медико-биологического показателя при слабом ментальном стрессе: кривые *1* и *2* – соответствуют реакциям двух молодых мужчин

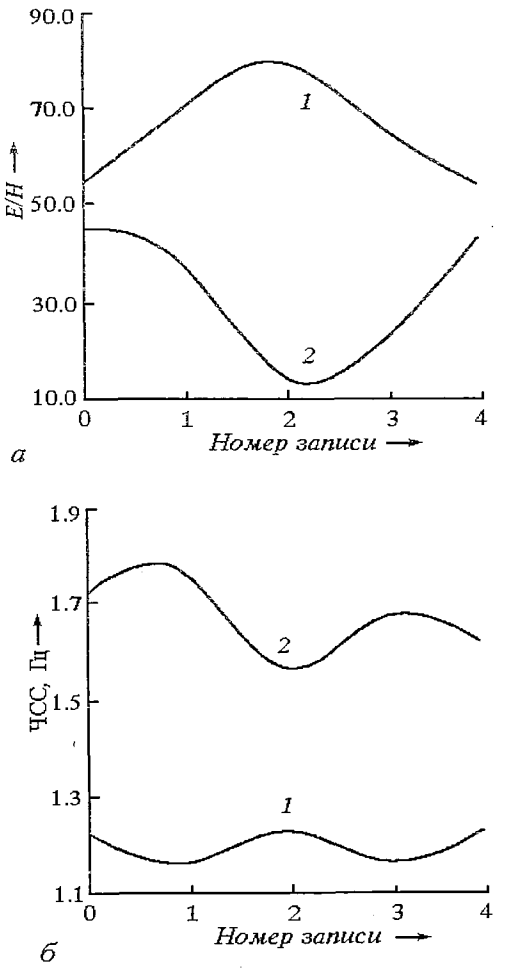


Рис. 3. Изменения динамического и медико-биологического показателей при шумовом стрессе: *1* – реакция мужчины; *2* – реакция женщины

случае ментальной нагрузки, из всех характеристик только нормированная энтропия позволяет нам описать реакцию сердечно–сосудистой системы на шумовое воздействие: диапазон изменения E/H – 43%, тогда как АД изменяется на 10, а ЧСС лишь на 8%.

Из проведенных экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. Наиболее подходящей диагностической характеристикой является E/H. Поведение t_{cor}, S_{int},E, E_s, E_s/H способно сильно различаться и не всегда соответствует медицинским аспектам эксперимента. Заметим, что при нормировании энтропии вместо S_{int} можно использовать $\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$. Это перспективно при создании быстродействующей аппаратуры для диагностики состояния человека или животного.

2. Чувствительность нормированной энтропии превосходит таковую медицинских показателей в 2–4 раза, что позволит использовать эту величину для описания таких реакций организма на воздействие, которые плохо (ментальный стресс) или не очень надежно (шумовой стресс) диагностируются по медицинским показателям.

3. На реакцию E/H не влияет время анализа (15 с при физической нагрузке, 51.2 с при других видах стресса), ни сила воздействия на организм (очень слабая ментальная нагрузка и мощная физическая) – в любом случае имеется доверительный интервал изменения порядка 40–70%.

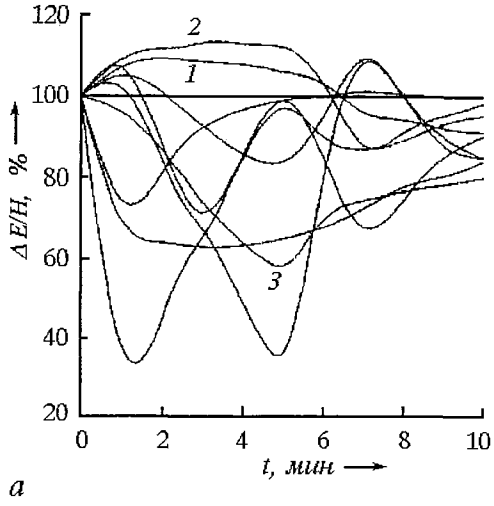
4. Существуют классы экспериментов, таких, как физическая нагрузка, где в качестве диагностических признаков можно использовать время корреляции t_{cor} и энтропию по спектру E_s (рис.1, *а, б*). Это объясняется интенсивностью реакции организма на возмущение. Мощная реакция как бы "замазывает" те изменения режимов во времени, которые происходят в сердечно–сосудистой системе человека. Нейтрализовать эти процессы позволяет также и малая длина отрезков ЭКГ в данных экспериментах.

Кроме того, по поведению нормированной энтропии можно проследить интересные биологические явления, например, вторичную реакцию на физическую нагрузку (рис. 1, *б*, *в*). Этот известный по тонким биологическим экспериментам факт четко просматривается на обеих зависимостях E/H, тогда как по медицинским показателям его можно заметить лишь у одного испытуемого.

4. Реакция организма на шумовое воздействие

Для дальнейшего изучения влияния возмущений на анализируемые характеристики требуется провести комплекс исследований с подтверждением статистической довтоверности результатов. Из трех перспективным для дальнейших исследований является шумовое воздействие. Физическая нагрузка вызывает мощные переходные быстротечные, принципиально нестационарные процессы, сильно зависящие от тренированности испытуемого, что вызывает затруднения при измерениях АД и ЧСС. Ментальная нагрузка также очень субъективна, велико влияние посторонних внешних раздражителей и настроя испытуемого, с другой стороны, при ней не происходит изменения медико биологических показателей. Шумовое воздействие, напротив, имеет оптимальную интенсивность, минимально подтверждено влиянию субъективных и внешних факторов, хоть и слабо, но диагностируется по медицинским показателям.

Протокол экспериментов описан в предыдущем разделе. Исследования проводились для проверки на статистически достоверных результатах справедливости выбора диагностического признака из всей совокупности анализируемых характеристик хаотических сигналов и для определения половых различий в реакции на стресс мужчины и женщины (см., например,[6,7]). Для обеспечения статистической достоверности результатов группа испытуемых состояла из 14 женщин и 16 мужчин. Возраст испытуемых находился в пределах



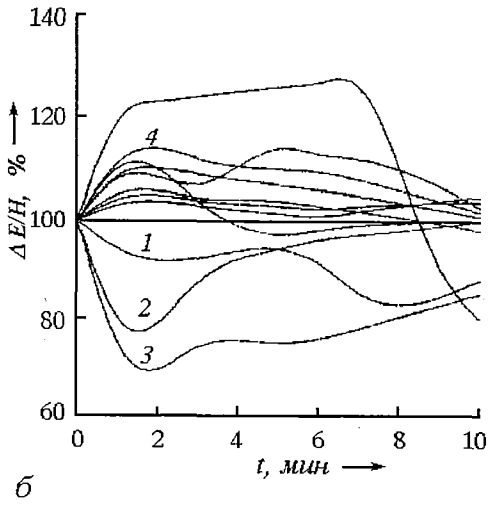
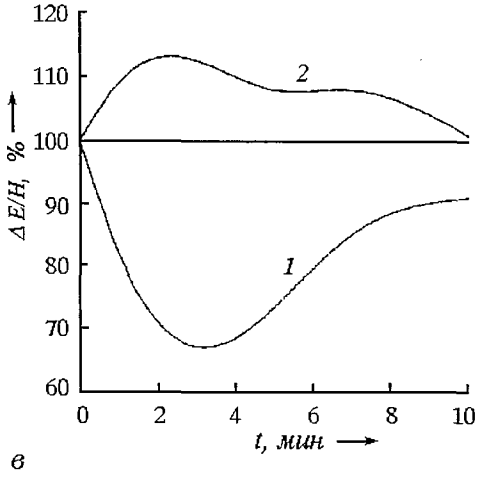


Рис. 4. Изменения нормированной энтропии *E/H* (в % к начальному значению) при шумовом стрессе: *а* – реакция мужчин; *б* – реакция женщин; *в* – усредненные результаты без учета андрогинных реакций: *1*– реакция мужчин; *2* – реакция женщин



20–37 лет. Полученные для каждого испытуемого результаты обладали хорошей воспроизводимостью при повторных экспериментах.

Временные зависимости анализируемых величин нормировались на начальные значения. Таким образом рассматривались не абсолютные значения величин, а их процентные изменения относительно начальных значений. Полученные результаты, сгруппированные по половому признаку, приведены на рис. 4. На нем изображено несколько типичных зависимостей реакции мужчин и женщин на данный вид воздействия. При усреднении всех имеющихся результатов, но без учета особых видов реакции на возмущение (кривые *1*, *2* на рис. 4, *а* и кривые *1*– *3* на рис. 4, *б*), получаются очень красивые зависимости, представленные на рис.4,*в*). Медицинские показатели изменялись менее регулярно в небольшом диапазоне: 12% (АД) и 10% (ЧСС), что позволяет фиксировать по ним наличие лишь каких–то чрезвычайно слабых откликов на воздействие. Диапазон изменения нормированной энтропии, напротив, дает достоверные изменения: около – 30% у мужчин и + 10% у женщин. Это не только качественно диагностирует реакцию на возмущение, но и позволяет дать количественную оценку степени отклика организма на него.

Видны четкие половые различия в реакции на малое шумовое воздействие. Достоверность различий в изменении *E/H* у мужчин и женщин проверялась с помощью непараметрического критерия Манна–Уитни (парное сравнение двух групп). Расчеты показали, что различия достоверны с вероятностью погрешности 0.003 во время воздействия, 0.02 через 1 мин. и 0.03 через 3 мин. после его окончания. Недостоверными различиями становятся к 6–ой минуте после прекращения воздействия.

На шумовое воздействие мужчины реагируют значительным снижением

нормированной энтропии, что говорит о некотором уменьшении степени хаотичности реконструированного аттрактора ЭКГ. Женщины, напротив, реагируют меньшим по амплитуде и противоположным по знаку изменением данного показателя, это соответствует небольшому увеличению хаотичности аттрактора ЭКГ. Различия обнаруживаются и во времени релаксации – промежутке времени, требуемого для возвращения системы к невозмущенному состоянию. Время релаксации у мужчин больше, чем у женщин (см. рис 4). Более того, при анализе всей совокупности полученных зависимостей *E/H* выявляются испытуемые, обладающие реакцией на воздействие, свойственной противоположному полу. В медицине это называется андрогинным типом реакции. Три этих факта: интенсивность реакции и ее знак, различные времена релаксации и наличие андрогинных типов реакции полностью соответствуют современным биологическим и медицинским представлениям о реакции организма на стресс [6, 7].

Поскольку круг лиц, участвовавших в экспериментах, оставался постоянным, стал известен тип реакции каждого из испытуемых. Под типом реакции мы понимаем особенности изменения *E/H* при стрессе: быстроту реагирования, интенсивность, направление (знак) реакции. При различных стрессах этот индивидуальный тип реакции сохраняется.

Рассмотрим, например, реакцию двух мужчин на ментальную нагрузку (рис. 2, *а*, кривые *1* и *2*). Видно, что реакции противоположны. Это объясняется тем, что один из них имеет андрогинную реакцию (кривая 2), другой – обычную реакцию по мужскому типу (кривая *1*). При шумовом стрессе этим же испытуемым соответствуют кривые *2* и *3* на рис. 4, *а*. Аналогично об ясняется поведение кривых *E/H* на рис. 3: В этом случае андрогинный тип реакции у женщины.

Обратимся теперь к рис. 1, *в*. На нем приведены кривые *1* и *2*, соответствующие реакции на физическую нагрузку мужчины с мужским типом реакции и женщины с андрогинным (этот вывод сделан на основании экспериментов с шумовым стрессом, где реакция мужчин – кривая *3* на рис. 4, *а*, женщин кривая *2* на рис. 4, *б*). Поэтому поведение *E/H* у испытуемых качественно совпадает.

Все вышесказанное позволяет сделать важный принципиальный вывод для описания реакции организма на стрессорное воздействие можно использовать величину *E/H* – энтропию, нормированную на величину интегрального спектра. Изменения этого параметра достоверны при воздействиях различных по интенсивности, включая те виды воздействия, которые невозможно зафиксировать по классическим медико–биологическим показателям. Чувствительность этой характеристики превосходит таковую у применяемых в настоящее время медицинских характеристик.

Заключение

В результате проведенных исследований получены следующие основные результаты.

1. Определен надежный количественный и качественный диагностический признак, представляющий собой энтропию сигнала, нормированную на его энергию. Предложен метод, однозначно характеризующий реакцию сердечно–сосудистой системы человека или животного на внешнее воздействие, что открывает возможности его использования в области диагностики стрессов различной интенсивности.

2. На основе сравнения изменения этой характеристики в условиях различного рода воздействий с традиционными медико – биологическими характеристиками доказана большая (в 2 — 4 раза) чувствительность ее к внешним возмущающим воздействиям – стрессам.

3. Проведен ряд тестовых экспериментов, подтверждающих два предыдущих пункта и доказывающих применимость предложенного метода при изменении уровней стрессорного воздействия в широком диапазоне. Доказана

устойчивость метода к выбору параметров численной обработки сигнала.

4. На основании предложенного метода может быть создан прибор для анализа или контроля состояния живого организма. Причем для измерений не требуется сложной аппаратуры или предварительных хирургических операций.

Авторы выражают благодарность Т.Г.Анищенко, Н.Б.Игошевой за помощь в проведении экспериментов и обсуждении полученных результатов.

Библиографический список

1. *Babloyantz A, Deslexhe A.* Is the Normal Heart a Periodic Oscillator // Biol. Cybern. 1988. Vol. 58. P. 203.

2. *Анищенко В.С., Сапарин П.И., Сафонова М.А.* Измерительно–вычислительный комплекс для диагностики сложных режимов автоколебаний // Радиотехника и электроника. 1992. Т.37, N3. С. 467.

3. *Климонтович Ю.Л.* Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессе самоорганизации// УФН. 1983. Т.158, N 1. С. 59.

4. *Баевский Р.М., Кириллов О.И., Клецкин С.Э.* Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе. М.: Наука, 1984.

5. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.

6. *Франкенхаузер М., Едман М.* Мужчина, женщина и стресс// Наука и жизнь. 1991. N 5. С. 56.

7. *Анищенко Т.Г.* Половые аспекты проблемы стресса и адаптации // Успехи современной биологии. 1991. Т. 111, N 3. С. 460.

8. *Сапарин П.И., Мурашев А.Н.* Оценка влияния фармакологических препаратов с помощью статистических и динамических характеристик режимов колебаний// Тез. докл. на IX Всесоюз. конф."Химическая информатика". Черноголовка, 11—15 янв. 1992. С. 130.

9. *Anishchenko V., Safonova M., Saparin P.* Computer Analysis and Synthesis of System from Experimental Data // 35 Internationalises Wissenschaftliches Colloquium, 22.–25.10.1990, TH, Immenau, 1990. Heft 1. P. 73.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 26.11.92.
после переработки 2.08.93.

NORMALIZED ENTROPY AS A DIAGNOSTIC CRITERION OF HUMAN CARDIO–VASCULAR SYSTEM REACTION ON THE EXTERNAL INFLUENCE

V.S. Anishchenko, P.I. Saparin

The behaviour of a set of statistical and dynamical characteristics, used in chaotic dynamics, is analysed as it applies to the electrocardiograms of human under the influence of different types of stress.

A new quantitative electrocardiogram characteristic is introduced as a distribution entropy, normalized by the signal variance. A perspective of this parametre application as a diagnostic criterion is proved by series of test experiments. By comparison with traditional medico–biological characteristics the higher sensitivity and stability of this criterion is proved. A number of test experiments has been conducted that confirm the validity of the above two conclusions and prove the applicability of the proposed method under the conditions of stress influence varied over a wide range. The stability of the proposed method in respect is proved.

On the basis of this method, a special diagnostic instrument for analysis and mon–

initoring of the being of a living organism can be developed. To measure the above parametres no sophisticated instrumentation, nor preliminary surgical intervention is required.

Сапарин Петр Игоревич в 1987 окончил физический факультет Саратовского университета по специальности «радиофизика и электроника». С 1987 по 1990 г. работал инженером кафедры радиофизики СГУ. С 1990 г. по настоящее время — аспирант той же кафедры. Автор 15 научных работ, опубликованных в российской и зарубежной печати.

В издательстве Саратовского университета вышли в свет в 1993 году

Пособия для студентов химических и приборостроительных специальностей вузов

Н.Г. Кузьмин, В.П. Севостьянов

ЗНАКОСИНТЕЗИРУЮЩАЯ ЭЛЕКТРОНИКА:
Материалы, технология, экология
Часть 1. Жидкокристаллические индикаторы на твист–эффекте

В.П. Севостьянов, А.В. Аношкин, Б.К. Решетников, Е.В. Плешканёва

ЗНАКОСИНТЕЗИРУЮЩАЯ ЭЛЕКТРОНИКА:
Методы получения тонких пленок

В.П. Севостьянов, Б.К. Решетников, И. В. Мраморнов, М.Л. Каширский

ЗНАКОСИНТЕЗИРУЮЩАЯ ЭЛЕКТРОНИКА:
Фотолитография

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД»,т.1, № 3,4, 1993 УДК 535.59

"МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА" ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОНВЕКЦИИ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Н.М.Рыскин, Д.И. Трубецков

Рассматривается конвекция Рэлея – Бенара в плоском слое магнитной жидкости в однородном постоянном магнитном поле, направленном перпендикулярно поверхности. Для этой модели получена система уравнений, аналогичная системе Лоренца для конвекции в обычной жидкости. Показана возможность управления режимами конвекции с помощью изменения напряженности магнитного поля, что может быть важным при экспериментальном исследовании.

Известно, какое значение имеет изучение нелинейных явлений при тепловой конвекции в жидкости. Именно для этой задачи была впервые выведена система уравнений Лоренца [1], которая на сегодняшний день является одной из эталонных моделей нелинейной физики. Однако вопрос, настолько адекватно данная упрощенная система описывает явления, происходящие в реальной жидкости, до сих пор остается открытым. В основном это связано с незначительным количеством экспериментальных данных.

В последнее время все большее внимание привлекают магнитные жидкости – коллоидные растворы мелких (диаметр порядка 10 нм) ферромагнитных частиц в жидкости–носителе [2]. Представляет интерес построение для магнитных жидкостей системы, аналогичной системе Лоренца, так как можно ожидать, что сочетание свойств, присущих обычным жидкостям, со способностью эффективно взаимодействовать с магнитным полем дает богатые возможности для экспериментальных исследований.

Рассмотрим плоский слой магнитной жидкости толщиной l, помещенный в постоянное однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно поверхности. На верхней границе слоя поддерживается постоянная температура T_1, на нижней границе – T_2, ($T_2 = T_1 + \Delta T$). Установившееся в жидкости неоднородное распределение температуры по вертикальной координате вызовет неоднородное распределение намагниченности и поля. Более холодная жидкость будет намагничиваться сильнее и стремиться в область более сильного поля, вытесняя более теплую жикость [2].

В качестве исходных примем следующие уравнения:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\ \nabla)\mathbf{v}\ \right] = \eta\nabla^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g} + \mu_0 M\nabla H - \nabla p, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\,\nabla T\right) + \mathbf{v}\,T\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \mathbf{g} + \mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \nabla H\right] = \chi^2 \nabla T, \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{M} + \mathbf{H}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0. \qquad (4)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\mathbf{v}$ – скорость, η и χ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, соответственно, $\mathbf{M}$ – намагниченность, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, C_p – теплоемкость, T – температура.

(1) представляет собой уравнение движения для магнитной жидкости; при его выводе предполагалось, что вектор намагниченности параллелен полю [3]; (2) – уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости; (3) – уравнение теплопроводности, причем слагаемые в квадратных скобках отвечают за охлаждение, соответственно, из–за сжимаемости и магнетокалоритического эффекта; (4) – два уравнения Максвелла в предположении отсутствия токов.

Будем считать, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ параллельны оси z и их градиенты вызваны исключительно градиентом температуры. Тогда, если $\Delta T << T_1$, можно линеаризовать уравнение состояния $M = M\,(H,T)$:

$$M = M_0 + \chi_m(H - H_0) - K(T - T_2), \qquad (5)$$

где $M_0 = M(H_0,T_2)$, $\chi_m = (\partial M/\partial H)_{H_0,T_2}$ – дифференциальная магнитная восприимчивость, $K = (-\,\partial M/\partial T)_{H_0,T_2}$ – пиромагнитный коэффициент.

В отсутствии конвекции, когда теплоотвод осуществляется только за счет теплопроводности, $\mathbf{v}=0$. Тогда, считая, что равновесные распределения намагниченности, температуры и магнитного поля зависят только от вертикальной координаты z, получаем:

$$T = T_1 + \Delta T - \Delta T\, z/l, \qquad M = M_0 + \frac{K\Delta T}{1+\chi_m}\,\frac{z}{l}, \qquad H = H_0 - \frac{K\Delta T}{1+\chi_m}\,\frac{z}{l}. \qquad (6)$$

Введем функцию тока ψ, определяемую соотношениями $v_x = -\,\partial\psi/\partial z$, $v_z = \partial\psi/\partial x$, а также переменные θ, m и h – отклонения, соответственно, температуры, намагниченности и напряженности поля от равновесных значений. Будем считать задачу двумерной. Это означает, что все переменные зависят от горизонтальной координаты x и вертикальной – z. Из уравнения (4) получим (по–прежнему считаем, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ имеют только z компоненты):

$$\frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \qquad (7)$$

а из уравнения состояния (5) будем иметь

$$m = \chi_m h - K\theta.$$

Из последнего соотношения, учитывая (7), находим:

$$\frac{\partial m}{\partial z} = \frac{K}{1+\chi_m}\,\frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad \frac{\partial m}{\partial x} = -K\,\frac{\partial \theta}{\partial x}. \qquad (8)$$

Используем приближение Буссинеска, т.е. всюду, где ρ не стоит под знаком дифференциала, будем считать $\rho = \rho_0 = \text{const}$. При дифференцировании полагаем

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)],$$

где α – коэффициент объемного расширения, $T_0 = (T_1 + T_2)/2$.

Заменим в уравнении (3) в члене, отвечающем за сжимаемость и магнетокалоритический эффект, T на T_0. Тогда из уравнений (1)–(3) с учетом (6)–(8) можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,z)} = \nu\nabla^4\psi + \frac{D}{\rho_0}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\mu_0}{\rho_0}\cdot\frac{K^2}{1+\chi_m}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)} = \frac{\Delta T}{l}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{T_0}{\rho_0 C_p}\left[D\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\mu_0 K^2}{1+\chi_m}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] + \chi_m\nabla, \tag{9}$$

где $\nu = \eta/\rho_0$–кинематическая вязкость, $\chi = æ / \rho_0 C_p$ – температуропроводность,

$$D = \alpha\,\rho_0 g + \frac{\mu_0 K^2 \Delta T}{l\,(1+\chi_m)}, \qquad \frac{\partial(a,в)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial в}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial в}{\partial z}$$

Выразим t в единицах l^2/χ, x и z – в единицах l, ψ – в единицах χ, а θ – в единицах θ_0:

$$\theta_0 = \Delta T - T_0 D l / \rho_0 C_p.$$

Тогда система (9) примет вид

$$\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,z)} = \Pr\left(\nabla^4\psi + \mathrm{Ra}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \varepsilon_1\frac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \nabla^2\theta + \varepsilon_2\frac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{10}$$

где $\Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля, $\mathrm{Ra} = D\theta_0 l^3/\rho_0\nu\chi$ – число Рэлея,

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu_0 K^2}{1+\chi_m}\cdot\frac{T_0}{\rho_0\nu\chi}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\mu_0 K^2}{1+\chi_m}\cdot\frac{T_0}{\rho_0 C_p}.$$

Заметим, что число Рэлея имеет практически тот же вид, что и в работе [3], с одной лишь разницей – в последней градиенты температуры и поля задавались независимо. Следуя [1], будем искать решение в виде трех низших мод задачи со свободными границами, а именно:

$$\psi = \psi_{11}(t)\sin(\pi a x)\sin(\pi z),$$
$$\theta = \theta_{11}(t)\cos(\pi a x)\sin(\pi z) - \theta_{02}(t)\sin(2\pi z), \tag{11}$$

где α – отношение продольного и поперечного масштабов. Подставляя (11) в систему (10) и вводя новые безмерные переменные

$$\tau = \pi^2 (a^2 + 1)\, t, \quad X = \frac{a}{a^2 + 1} \psi_{11}/\sqrt{2}, \quad Y = \frac{\pi \mathrm{Ra}}{\mathrm{Ra}_c} \theta_{11}/\sqrt{2}, \quad Z = \frac{\pi \mathrm{Ra}}{\mathrm{Ra}_c} \theta_{02},$$

где

$$\mathrm{Ra}_c = \frac{\pi^4 (a^2 + 1)^3}{a^2},$$

получаем систему, отличающуюся от системы Лоренца членами, пропорциональными ε_1, ε_2 :

$$\dot{X} = \mathrm{Pr}\,(-X + Y - \varepsilon_1 YZ/\mathrm{Ra}^2, \qquad \dot{Y} = -Y + rX - (1 - \varepsilon_2)XZ,$$
$$\dot{Z} = -bZ + (1 - \varepsilon_2/2)XY, \tag{12}$$

где $r = \mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_c$, $b = 4/(a^2 + 1)$, а точка обозначает производную по τ.

Данные, приведенные в книгах В.Е. Фертмана [4, 5], позволяют заключить, что предельные значения пиромагнитного коэффициента K имеют порядок 10^2 А/мК. Тогда, считая, что $T_0 \cong 300$ К и используя типичные характеристики магнитных жидкостей, приведенные в [2, 4], получим, что $\varepsilon_2 << 1$. Полагая, что разность температур ΔT должна быть порядка нескольких градусов, получаем, что $\theta_0 \cong \Delta T$ и, следовательно,

$$\mathrm{Ra} = \frac{D \Delta T l^3}{\rho_0 \nu \chi}.$$

С учетом последнего соотношения получим, что

$$\frac{\varepsilon_1}{\mathrm{Ra}^2} = \frac{1}{\mathrm{Ra}} \left[\frac{\mu_0 K^2}{(1 + \chi_m)} \cdot \frac{\Delta T}{l} / \left(\alpha \rho_0 g + \frac{\mu_0 K^2}{(1 + \chi_m)} \cdot \frac{\Delta T}{l} \right) \right].$$

Очевидно, что второй сомножитель не может быть больше единицы, следовательно, $\varepsilon_1/\mathrm{Ra}^2 << 1$. Таким образом, если пренебречь членами, пропорциональными ε_1 и ε_2 в системе (12) в силу их малости, то эта система совпадает с уравнениями Лоренца. Будем считать, что это можно сделать *.

Число Рэлея в данной задаче зависит от магнитного поля. Следовательно, изменяя H, можно изменять число Рэлея, т.е. управлять ходом конвекции. Это может быть полезно при экспериментальном наблюдении последовательности бифуркаций.

Зависимость $M(H,T)$ определяется следующей формулой [2]:

$$M = \varphi M_d L(\xi). \tag{13}$$

Здесь φ – объемная доля твердой фазы, M_d – намагниченность насыщения

---

*Строго говоря, необходимо исследовать систему уравнений (12) и лишь после этого отбрасывать (или не отбрасывать) члены, пропорциональные ε_1 и ε_2 . Однако это является отдельной задачей.

ферромагнетика, $L(\xi)$ – функция Ланжевена:

$$L = \operatorname{cth}\xi - \frac{1}{\xi}, \qquad \xi = \frac{mH}{kT},$$

где m – магнитный момент одной частицы, k – постоянная Больцмана.

Дифференцируя (13) по T, находим K:

$$K = \frac{M_s}{T_0} F(\xi), \qquad F = \alpha T_0 \left(\operatorname{cth}\xi - \frac{1}{\xi} \right) + \frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{\operatorname{sh}^2\xi}, \tag{14}$$

где $M_s = \varphi M_d$ – намагниченность насыщения жидкости. При выводе соотношения (14) учитывалось, что φ пропорциональна ρ, и, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \cong \frac{\varphi}{\rho}.$$

Представим число Рэлея в виде $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_T(1+\delta)$, где $\mathrm{Ra}_T = \dfrac{\alpha g \Delta T l^3}{\nu\chi}$ – число Рэлея в отсутствии магнитного поля,

$$\delta = \frac{\mu_0 K^2}{1+\chi_m} \cdot \frac{\Delta T}{\alpha \rho_0 g l}.$$

С учетом соотношений (14) можно записать:

$$\delta = \frac{\mu_0 M_s^2}{1+\chi_m} \cdot \frac{\Delta T}{\alpha \rho_0 g T_0 l} F^2(\xi). \tag{15}$$

Дифференцируя (13) по H, находим χ_m:

$$\chi_m = \frac{M_s m}{k T_0} \left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2\xi} \right).$$

Таким образом, соотношение (15) принимает вид

$$\delta = \frac{C_1 F^2(\xi)}{1 + C_2(\xi^{-2} - \operatorname{sh}^{-2}\xi)}, \tag{16}$$

где $C_1 = \dfrac{\mu_0 M_s^2 \Delta T}{\alpha \rho_0 g T_0 l}$, $\quad C_2 = \dfrac{M_s m}{k T_0}$.

Для эффективного воздействия на конвекцию с помощью магнитного поля диапазон изменения числа Рэлея должен быть порядка 20–30 Ra_c, т.е. при $\mathrm{Ra}_T = \mathrm{Ra}_c$ необходимо, чтобы максимальное значение δ достигало 20–30. Расчеты по формуле (16) (рисунок) показывают, что для этого коэффициент C_1 должен иметь

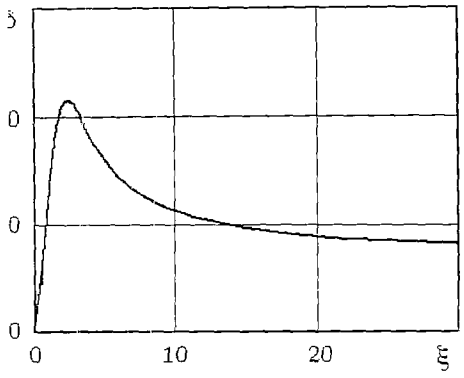


Рис. Зависимость $\delta(\xi)$ согласно формуле(16) при $C_1 = 10^2, C_2 = 1$

порядок 10^2. Коэффициент C_2 обычно порядка 1, поскольку начальная восприимчивость типичных магнитных жидкостей $\chi_i = C_2/3$ относительно невелика [2]. Таким образом, оказывается возможным пронаблюдать последовательность бифуркаций при тепловой конвекции в магнитной жидкости с соответствующими параметрами, изменяя лишь напряженность постоянного магнитного поля.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований России. Грант ФФИ 93–02–161171.

Библиографический список

1. *Lorenz E.* Deterministic Nonperiodic Flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P.130.
2. *Розенцвейг З.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989.
3. *Шлиомис М.И.* Конвективная неустойчивость феррожидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 130.
4. *Фертман В.Е.* Магнитные жидкости. Минск: Вышэйшая школа, 1988.
5. *Фертман В.Е.* Магнитные жидкости – естественная конвекция и теплообмен. Минск: Наука и техника, 1978.

Научно–исследовательский институт механики и физики Саратовского государственного университета

Поступила в редакцию 10.10.1992г.

«LORENZ MODEL» FOR DESCRIPTION OF THE CONVECTION IN MAGNETIC FLUID

N.M. Ryskin, D.I. Trubetskov

Rayleigh – Benard convection in the horizontal layer of the magnetic fluid in the vertical homogeneous dc magnetic field is studied. For this model a system of differential equations is derived, that is analogous to Lorenz system for the convection in the ordinary fluid. The possibility of controlling the convection regimes by changing the magnetic field strength is demonstrated.

Трубецков Дмитрий Иванович родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета в 1960 г. и с этого времени работает на кафедре электроники и волновых процессов СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в СГУ (1965) и доктора физико–математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор. В 1991 году избран членом–корреспондентом Российской Академии наук. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана с взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями и теорией сверхвысокочастотных электронных приборов; теория колебаний и волн; применение методов нелинейной динамики в различных областях науки; история науки.

Автор и соавтор одиннадцати монографий и учебных пособий по сверхвысокочастотной электронике, теории колебаний и волн и истории электронных ламп сверхвысоких частот, в том числе монографии «Аналитические методы расчета в электронике СВЧ» (М.: Сов. радио, 1970; совместно с В.Н. Шевчиком), коллективной монографии «Электроника ламп с обратной волной» (Изд. Сарат. универс., 1975), учебного пособия «Введение в теорию колебаний и волн» (первое издание, М.: Наука 1984; второе – М.: Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем), книги «Формирование радиотехники» (М.: Наука, 1988, раздел «История электронных ламп сверхвысоких частот»). В 1989 году книга «Введение в теорию колебаний и волн» в Нидерландах переведена на английский язык и вышла под названием «Oscillations and waves in linear and nonlinear systems» (The Netherlands : Kluver Academic Publishers,1989).

Опубликовал четыре книги лекций по электронике СВЧ и истории электронных ламп и много научных статей по указанным выше направлениям. Зам. главного редактора журнала «Прикладная нелинейная динамика».

Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета в 1991 году. Работает в НИИ механики и физики СГУ. Область научных интересов – нелинейные явления в распределенных системах различной природы.

Изв.вузов «ПНД», т.1, №3, 4, 1993 УДК 53:51

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, ПОРОЖДЕННОЙ УРАВНЕНИЕМ УИЗЕМА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ЯДРОМ

В.М.Елеонский, В.Г.Королев, Н.Е.Кулагин

Исследуется уравнение Уизема с осциллирующим быстроубывающим ядром. Показано, что с помощью преобразований Лапласа это уравнение можно свести либо к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка, либо к неинтегрируемой динамической системе с двумя степенями свободы, которая допускает существование особой точки типа седло–фокус. Численно найдены серии гомоклинических петель этой точки, являющихся образами самолокализованных решений уравнений Уизема с осциллирующими асимптотиками. На плоскости параметров системы изображены кривые, в точках которых система допускает существование решений с обострениями. Характер обострений исследуется аналитически.

Исследования волновых явлений в нелинейных средах при учете нелокального характера взаимодействий или сложной пространственной дисперсии приводят к необходимости анализа солитонных решений для нелинейных интегро–дифференциальных уравнений. Классическим примером такого уравнения является уравнение Уизема [1]

$$\varphi_t + 2\varphi\varphi_x + \partial_x \int_{+\infty}^{-\infty} dx' g(\rho)\, \varphi(x', t) = 0 , \tag{1}$$

с ядром $g(\rho) \equiv g(|x'-x|)$, явный вид которого в теории Уизема определяется дисперсией волн в линейном приближении. Уравнение (1) можно рассматривать как одно из возможных обобщений уравнения Кортевега – де Вриза на случай сложной пространственной дисперсии волн. Наиболее распространенный подход к исследованию уравнений такого рода в случае быстро убывающих при $\rho \to \infty$ ядер $g(\rho)$ связан с использованием метода моментов. Действительно, уравнение(1) формально эквивалентно следующему дифференциальному уравнению бесконечно высокого порядка:

$$\varphi_t + 2\varphi\varphi_x + \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n} \frac{\partial^{2n+1}\varphi}{\partial x^{2n+1}} = 0, \tag{1'}$$

$$M_{2n} = \frac{2}{(2n)!} \int_0^{\infty} d\rho\, g(\rho)\, \rho^{2n}$$

При сохранении в (1′) лишь конечного числа моментов приходим к дифференциальным уравнениям конечного порядка, бывшим предметом исследования в [3, 4]. В этих работах было обнаружено, что соответствующие уравнения допускают существование решений солитонного типа с осциллирующим фронтом и сложной внутренней структурой. Однако в ряде случаев использование метода моментов может привести к потере некоторых характерных свойств решений исходного интегро–дифференциального уравнения (1). В частности, в приближении ($M_{2n} \equiv 0$ для $n > 2$) соответствующее уравнение допускает существование лишь гладких решений солитонного типа, тогда как решения солитонного типа исходного уравнения (1), как правило, с ростом скорости стационарной волны (или ее амплитуды) теряют гладкость. Для анализа этого явления в настоящей работе используется подход, предложенный в [2].

Следуя [2], представим (1) в виде системы локально взаимодействующих полей. Определим прямое и обратное преобразования Лапласа ядра нелокального взаимодействия $g(\rho)$,

$$g(\rho) \Rightarrow \tilde{g}(p) = \int_0^\infty d\rho e^{-p\rho} g(\rho),$$

$$\tilde{g}(p) \Rightarrow g(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp\, e^{+p\rho} \tilde{g}(p), \tag{2}$$

используя которые, находим, что уравнение (1) может быть записано в виде следующей системы уравнений:

$$\varphi_t + 2\varphi\varphi_x + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp \tilde{g}(p) q_x(x, t; p) = 0,$$

$$q_{xx} - p^2 q = 2p\, \varphi(x, t), \tag{3}$$

где $q(x, t; p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{px} \varphi(x', t) dx'$.

Система уравнений (3) определяет эволюцию нелинейного поля $\varphi(x,t)$, локально взаимодействующего с континуумом линейных полей $q(x, t; p)$, источником которых является исходное поле φ. При этом $\tilde{g}(p)$ характеризует плотность состояний континуума введенных вспомогательных полей.

Для решений типа стационарных волн $\varphi(x, t) = \varphi(x - ct)$ система уравнений (3) обладает парой первых интегралов

$$-c\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp \tilde{g}(p)\, q(\xi; p) = h, \tag{4}$$

$$-\frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{2}{3}\varphi^3 + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp' \frac{1}{4} \tilde{g}(p) \left[\frac{q_\xi^2}{p} - pq^2\right] = H,$$

где $\xi = (x - ct)$, h и H – постоянные первых интегралов.

1. Поясним ситуацию на примере, исследованном ранее Уизэмом в [1] в связи с задачей об уединенных волнах на поверхности жидкости, а именно: на примере задачи о стационарных волнах для уравнения (1) и ядра вида

$$g(\rho) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\rho/\lambda}, \qquad \tilde{g}(p) = \frac{1}{2\lambda}\left[p + \frac{1}{\lambda}\right]^{-1}, \qquad \operatorname{Re} p > -\frac{1}{\lambda}. \tag{5}$$

В этом случае плотность состояний $\tilde{g}(p)$ в комплексной плоскости параметра p обладает единственной особенностью – полюсом первого порядка $p = -(1/\lambda)$, расположенном на вещественной оси. При этом контурные интегралы в соотношениях (3), (4) определяются вычетами соответствующих подынтегральных выражений в полюсе, а сами соотношения (3), (4) принимают вид

$$\varphi_t + 2\varphi\varphi_x = -\frac{1}{2\lambda} q_x, \qquad q_{xx} - \frac{1}{\lambda^2} q = -\frac{2}{\lambda}\varphi(x, t); \tag{3'}$$

$$\begin{gathered} -c\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2\lambda} q = h, \\ -\frac{c}{2}\varphi^2 + \frac{2}{3}\varphi^3 + \frac{1}{8}\left(-q_\xi^2 + \frac{1}{\lambda^2} q^2\right) = H. \end{gathered} \tag{4'}$$

Согласно соотношениям (4′) стационарные волны в пространстве состояний $\Gamma(\varphi;\ q_\xi;\ q)$ представлены траекториями – кривыми пересечения двумерных поверхностей $h = h(\varphi, q)$, $H = H(\varphi;\ q_\xi;\ q)$ первых интегралов. Очевидно, что ситуация является полностью интегрируемой. Действительно, исключая из соотношений (4′) переменные q_ξ и q, находим, что

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\lambda^2 (c - 2\varphi)^2 \varphi_\xi^2 = \frac{1}{2}\varphi^4 + \left(\frac{2}{3} - c\right)\varphi^3 + \frac{1}{2}(c^2 - 2h - c)\varphi^2 + \\ + hc\varphi + \frac{1}{2}h^2 - H. \end{gathered} \tag{5'}$$

В частности, при нулевых постоянных первых интегралов $h = H = 0$:

$$\lambda^2 (c - 2\varphi)^2 \varphi_\xi^2 = \varphi^2\left\{\varphi^2 + 2\left(\frac{2}{3} - c\right)\varphi + c^2 - c\right\}. \tag{6}$$

Полином в правой части соотношения (6) обладает в этом случае кратным нулевым корнем и парой вещественных корней при $c \le 4/3$:

$$\varphi_\pm(c) = c - \frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3}{4}c\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Таким образом, область существования уединенных волн определена неравенством

$$1 < c \le 4/3. \tag{8}$$

Здесь $\max\varphi \le 4/3$, а при $c \to 4/3$ в решении возникает особенность. Действительно, при $c = 4/3$ решение уравнения (6) имеет вид

$$\varphi(\xi) = \frac{4}{3} \exp\left(-\frac{|\xi|}{2\lambda}\right), \tag{9}$$

из которого видно, что решение испытывает «обострение» при $\xi = 0$. Отметим, что этот результат есть следствие рассмотрения пространственной дисперсии волн или, другими словами, нелокальных взаимодействий.

2. Рассмотрим уравнение (1) в случае осциллирующего ядра вида

$$g(\rho) = G(\lambda, \nu)\, e^{-\rho/\lambda} \cos(\nu\rho), \tag{10}$$

где $G(\lambda, \nu) \equiv \dfrac{1+(\lambda\nu)^2}{2\lambda}$ определяется из следующего условия нормировки ядра:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(\rho) = 1. \tag{11}$$

Линейной перенормировкой переменных и функций в уравнении (1) с ядром, определяемым формулой (10), можно свести задачу к однопараметрической с параметром $\sigma \equiv 1/(\lambda\nu)$. Для этого ядра функция $\tilde{g}(p)$ в комплексной плоскости параметра p обладает парой сопряженных полюсов вида $p = p_{\pm} \equiv -\sigma \pm i$. В этом случае система уравнений (3) принимает вид

$$\begin{gathered} \varphi_t + 2\varphi\varphi_x + \frac{1}{2} G(\sigma)(q + q^*)_x = 0, \\ q_{xx} - p^2 q = 2p\varphi, \\ q^*_{xx} - (p^*)^2 q^* = 2p^*\varphi. \end{gathered} \tag{12}$$

Система уравнений (12) определяет эволюцию нелинейного поля $\varphi(x,t)$, локально взаимодействующего с линейным комплексным полем $q(x,t;p)$.

В случае стационарных волн $\varphi(x, t) = \varphi(x - ct)$ система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{gathered} (-c\varphi + \varphi^2)_x + \frac{1}{2} G(\sigma)(q + q^*)_x = 0, \\ q_{xx} - p^2 q = 2p\varphi, \\ q^*_{xx} - (p^*)^2 q^* = 2p^*\varphi \end{gathered} \tag{13}$$

и приводит к следующим двум первым интегралам:

$$-c\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2} G(\sigma)(q + q^*) = h, \tag{14}$$

$$-\frac{1}{2} c\varphi^2 + \frac{2}{3}\varphi^3 - \frac{1}{8} G(\sigma)\left\{ \frac{q_x^2}{p} - pq^2 + \frac{(q_x^*)^2}{p^*} - p^*(q^*)^2 \right\} = H. \tag{15}$$

Первый интеграл (14) устанавливает алгебраическую связь между обобщенными координатами (φ, q, q^*) динамической системы (13) и порождает неинтегрируемую, в отличие от примера Уизема, динамическую систему с двумя степенями свободы,

$$q_{xx} - p^2 q = 2p\varphi(q + q^*),$$
$$q^*_{xx} - (p^*)^2 q^* = 2p^*\varphi(q + q^*), \quad p = \sigma + i, \tag{16}$$

и с первым интегралом (15), в котором φ есть функция обобщенных координат q и q^*, $G(\sigma)$ и h. Переходя к вещественным обобщенным координатам X и Y $(q = X+iY,\ q^* = X - iY)$, запишем (16) в виде

$$X_{xx} - (\sigma^2-1)X - 2\sigma Y = -2\sigma\varphi(\sigma, X), \tag{17}$$
$$Y_{xx} - (\sigma^2-1)Y + 2\sigma X = 2\varphi(\sigma, X),$$

где φ определяется из алгебраического соотношения

$$\varphi^2 - c\varphi + G(\sigma)X = h, \tag{18}$$

а интеграл (15) принимает вид

$$H = -\frac{1}{2}c\varphi^2 + \frac{2}{3}\varphi^3 + \frac{1}{8}G(\sigma)\{\frac{1}{\sigma^2+1}(-2\sigma(X_\xi^2 - Y_\xi^2) +$$
$$+ 4X_\xi Y_\xi) + 2\sigma(X^2 - Y^2) + 4XY\}. \tag{19}$$

Замечание 1. Легко показать, что динамическая система (17) является гамильтоновой с функцией Гамильтона:

$$H = -\frac{1}{2}\sigma P_x^2 + P_x P_y + \frac{1}{2}\sigma P_y^2 + \frac{1}{2}\sigma X^2 + XY - \frac{1}{2}\sigma Y^2 - 2\int_0^x \varphi(x')\,dx', \tag{20}$$

где обобщенные импульсы введены с помощью соотношения

$$\frac{dX}{d\xi} = -\sigma P_x + P_y, \qquad \frac{dY}{d\xi} = \sigma P_y + P_x, \tag{21}$$

(ξ – независимая переменная), а интеграл в (18) выражается непосредственно через функцию φ:

$$\int_0^x \varphi(x')dx' = \frac{1}{G(\sigma)}(\frac{1}{2}c\varphi^2 - \frac{2}{3}\varphi^3). \tag{22}$$

Замечание 2. Наряду с динамической системой (17), определенной в фазовом пространстве $\Gamma(q_x, q, q^*_x, q^*)$ или $\Gamma(P_x, P_y, X, Y)$, можно ввести соответствующую ей динамическую систему в пространстве $\Gamma(\varphi_{xxx}, \varphi_{xx}, \varphi_x, \varphi)$. Действительно, применив к интегралу (14) оператор вида $(\partial_x^2 - p^2)(\partial_x^2 - (p^*)^2)$ и исключив с помощью уравнений (13) переменные q, q^*, получим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$\varphi^2 + (1-c)\varphi - h + \{-\frac{1}{2G\sigma} - (2\varphi - c)\frac{1-\sigma^2}{2G^2}\}\varphi_{xx} - \frac{1-\sigma^2}{G^2}\varphi_x^{\,2} +$$

$$+ \frac{1}{4G^2\sigma^2}\{(2\varphi - c)\varphi_{xxxx} + 8\varphi_x\varphi_{xxx} + 6\varphi_x^{\,2}\} = 0 \qquad (23)$$

с соответствующим первым интегралом $\tilde{H} = \tilde{H}(\varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}, \varphi_{xxx})$.

Показательно сравнение с уравнением (23) уравнения Кавахары [3,4], получаемого разложением уравнения (1) по моментам ядра с последующим удержанием трех первых членов в предположении $\lambda << 1$ $(\sigma >> 1)$, которое имеет вид

$$\varphi^2 + (1-c)\varphi - h + \frac{\sigma^2 - 3}{[\sigma^2+1]^2}\varphi_{xx} + \frac{\sigma^4 - 10\sigma^2 + 5}{[\sigma^2+1]^4}\varphi_{xxxx} = 0. \qquad (24)$$

Отметим, что в приближенном уравнении (24) в отличие от уравнения (23), которое в случае ядра (10) эквивалентно исходному интегро–дифференциальному уравнению (1), структура нелинейности существенно иная. В частности, в нем отсутствуют члены, содержащие нечетные производные функции φ, входящие в (23) в комбинациях вида $\varphi_x^{\,2}$ и $\varphi_x\varphi_{xxx}$.

3. Образами решений солитонного типа уравнения (1) с ядром вида (10) в гамильтоновой динамической системе с двумя степенями свободы (17) являются траектории, гомоклинические к нулевой особой точке $(0 \equiv (X = Y = dX/d\xi = dY/d\xi = \varphi = 0))$. Характеристические показатели этой особой точки λ определяются из уравнения

$$Z_\lambda^{\,2} + 2\frac{\sigma G}{c}Z_\lambda + 4\sigma^2(1 - \frac{G}{\sigma c}) = 0, \qquad (25)$$

где $Z_\lambda \equiv \lambda^2 - (\sigma^2 - 1)$. Откуда

$$\lambda_\pm^{\,2} = (\sigma^2 - 1) - \frac{\sigma G}{c} \pm \{(\frac{\sigma G}{c})^2 - 4\sigma^2(1 - \frac{G}{\sigma c})\}^{1/2}. \qquad (26)$$

Заметим,что наличие осциллирующего ядра приводит к существованию в системе особой точки типа седло–фокус, петли которой являются образами решений солитонного типа с осциллирующими асимтотиками при $\xi \to \pm\infty$. Условия существования нулевой особой точки типа седло–фокус имеют вид

$$(\frac{\sigma^2 + 1}{2c} + 2)^2 < 4(1 + \sigma^2) \qquad (27)$$

Численные исследования позволили обнаружить существование различных гомоклинических петель нулевой особой точки и проследить их трансформации и бифуркации при изменении параметров системы c и σ. В ходе исследований мы интересовались, в основном, той областью, в которой особая точка имеет тип седло–фокус, поскольку эта ситуация специфична для задачи с осциллирующим ядром. Нами обнаружено, в частности, что существуют области значений параметров, пересекающиеся с областью существования седло–фокуса, в которых имеются различные периодические движения седлового типа, лежащие в уровне седло–фокуса и проецирующиеся на конфигурационное пространство $\{(X,Y)\}$ в отрезки кривых (рис. 1). Эти периодические орбиты в совокупности с особой

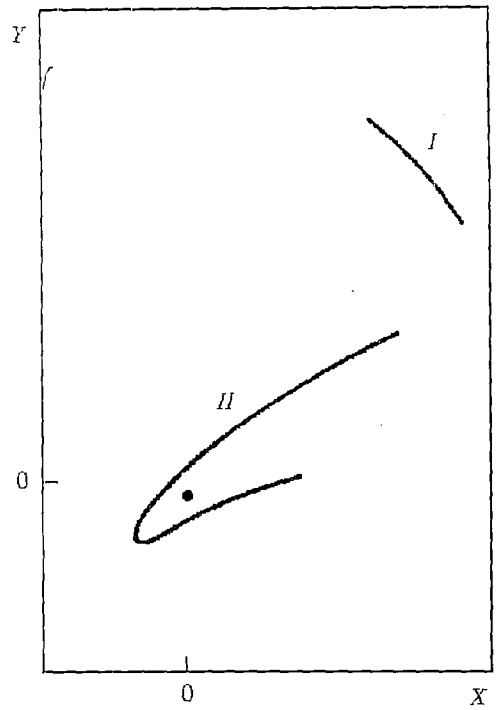


Рис. 1. Проекция на плоскость $\{(X,Y)\}$ седловых периодических орбит, с которыми связаны серии петель, изображенных на рис. 2 и 3, соответственно

точкой и парой траекторий, двоякоасимптотических к этим объектам, образуют гомоклинические контуры, с которыми может быть связано существование счетных семейств сложных гомоклинических петель, допускающих нумерацию по числу обходов ими седловой орбиты [5]. Проекции нескольких простейших петель из двух семейств такого типа приведены на рис.2,3.

Области существования как периодических орбит, так и соответствующих семейств петель, изображены на рис.4. Видно, что область существования каждого из перечисленных объектов ограничена по переменной c как снизу (бифуркационными линиями смены типа особой точки), так и сверху. Как показали исследования, причина ограниченности областей существования сверху нетривиальна. Остановимся подробнее на этом вопросе.

4. Отметим, что соотношение (18) не позволяет однозначно выражать $\varphi(X)$ в правых частях (17) и тем самым приводит к динамической системе, определенной в выбранном фазовом пространстве на двух листах, склеенных вдоль прямой A (рис.5):

$$X_{cr} = \frac{c^2 + 4h}{4G(\sigma)}. \tag{28}$$

Однако использование первого интеграла (19) дает возможность выразить φ однозначно, а именно: если мы обозначим третье слагаемое в (19) как L, то для φ получим выражение

$$\varphi = \frac{6(H-L) + cG(\sigma)X + hc}{4(h-G(\sigma)X) + c^2}. \tag{29}$$

Полученное выражение содержит сингулярность в точках прямой A. Следствием этого является потеря траекториями, проходящими через точки этой прямой, гладкости, что приводит к обострению решения исходной задачи – "излому" вершины солитонного решения.

Исследуем поведение траекторий, проходящих через точки, лежащие на прямой A, более подробно. Будем интересоваться траекториями, лежащими на уровне нулевой особой точки $0 \equiv (X = Y = dX/d\xi = dY/d\xi = \varphi = 0)$, имея в виду дальнейший поиск среди гомоклинических петель особой точки негладких траекторий, являющихся образами солитонов с обострениями.

Разложим решение вблизи точки потери гладкости, лежащей на прямой $X = c^2/4G$, в ряд по отклонению независимой переменной ξ от ее значения в точке обострения ξ_0:

$$X(\xi) = \frac{c^2}{4G} + \alpha_x(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2}\beta_x(\xi - \xi_0)^2 + O((\xi - \xi_0)^3), \tag{30}$$

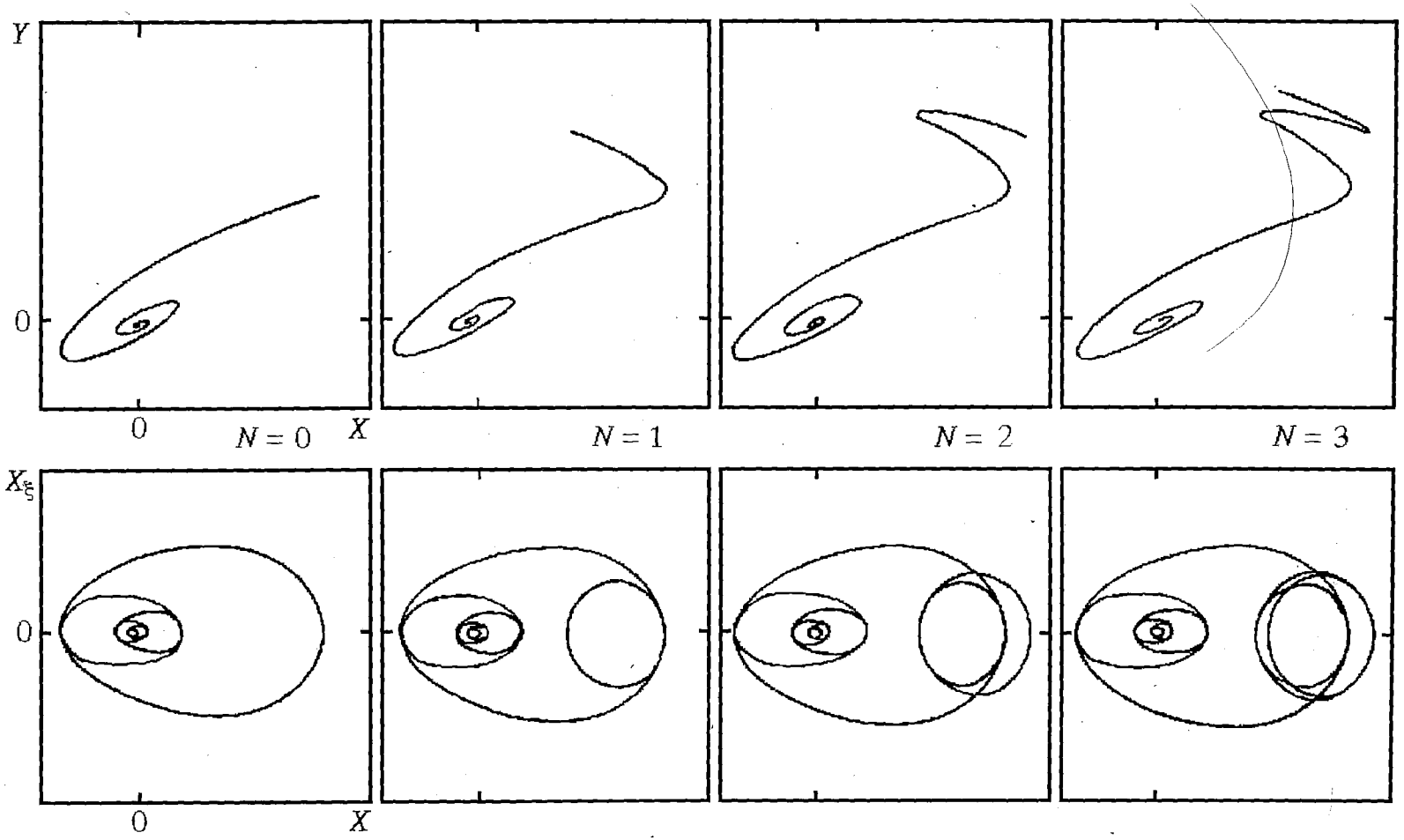


Рис. 2. Первые 4 представителя серии петель, связанной с существованием гомоклинического контура, включающего периодическую орбиту I (рис.1) при фиксированных значениях параметров σ и c

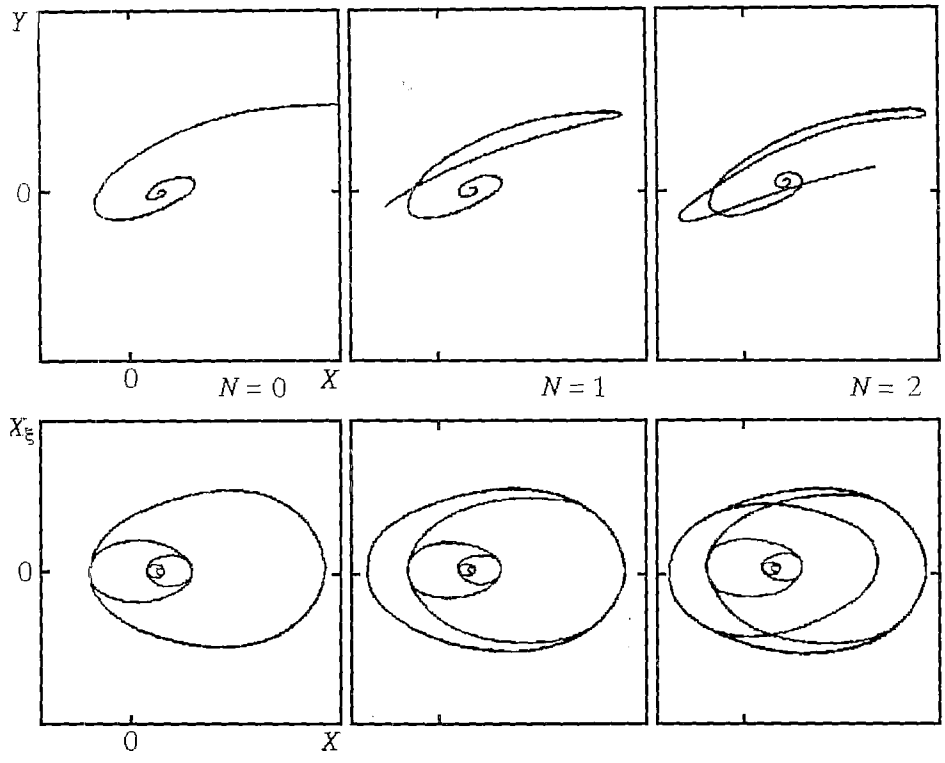


Рис. 3. Первые 3 представителя серии петель, связанной с существованием гомоклинического контура, включающего периодическую орбиту II (рис. 1) при фиксированных значениях параметров σ и c

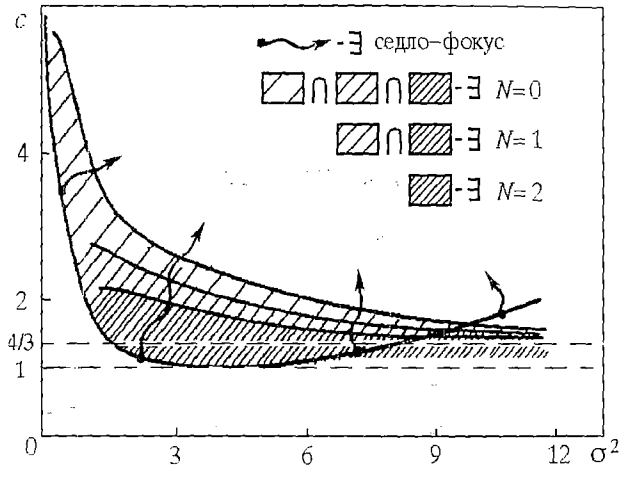


Рис. 4. Области существования петель семейства, изображенного на рис. 2, для N = 0, 1, 2 (петля с N = 0 существует в областях с редкой, средней и частой штриховкой, петля с N= 1 – в областях со средней и частой шриховкой, петля с N= 2 – в области с частой штриховкой)

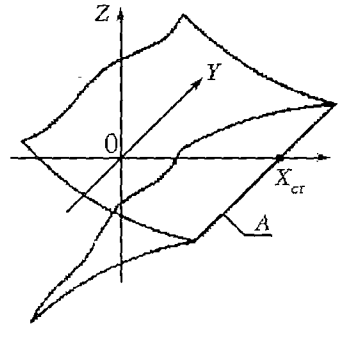


Рис. 5. Двулистная область определения динамической системы (17), (18)

$$Y(\xi) = Y(\xi_0) + \alpha_y(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2}\beta_y(\xi - \xi_0)^2 + O((\xi - \xi_0)^3), \tag{31}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{c}{2} + \alpha_\varphi(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2}\beta_\varphi(\xi - \xi_0)^2 + O((\xi - \xi_0)^3). \tag{32}$$

Подставляя эти разложения в уравнения движения (17), получаем следующие выражения для коэффициентов β_x и β_y:

$$\beta_x = (\sigma^2 - 1)\frac{c^2}{4G} - 2\sigma Y_0 - \sigma c, \tag{33}$$

$$\beta_y = (\sigma^2 - 1)Y_0 - \sigma\frac{c^2}{2G} + c, \tag{34}$$

где величина $Y_0 \equiv Y(\xi_0)$ является параметром точки на прямой $X = c^2/4G$. Из соотношения (18) получаем:

$$\alpha_x = 0, \qquad \alpha_\varphi^2 = -\frac{1}{2}\beta_x G(\sigma). \tag{35}$$

Отсюда следуют три вывода. Во–первых, линия $X = c^2/4G(\sigma)$ является линией точек поворота – она разбивает конфигурационное пространство $\{(X,Y)\}$ на две полуплоскости, причем оба листа фазового пространства проецируются на левую полуплоскость. Во–вторых, в точках этой прямой величины X и φ имеют максимальное значение при данных значениях параметров σ и c, а именно:

$$X_{\max} = \frac{c^2}{4G}, \qquad \varphi_{\max} = \frac{c}{2}.$$

В–третьих, производная решения исходной задачи испытывает в точке поворота разрыв

$$\left.\frac{d\varphi}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = \alpha_\varphi + O(\xi - \xi_0), \qquad \alpha_\varphi^2 = -\frac{1}{2}\beta_x G(\sigma), \tag{36}$$

который является следствием излома решения в точке $\xi = \xi_0$ (рис.6).

Наконец, используя формулу (19) для первого интеграла, получаем выражение для коэффициента α_y

$$\alpha_y^2 = 2G\sigma Y_0^2 - c^2 Y_0 + \left(\frac{c^3}{3} - \frac{\sigma^2 c^4}{4(\sigma^2+1)}\right), \tag{37}$$

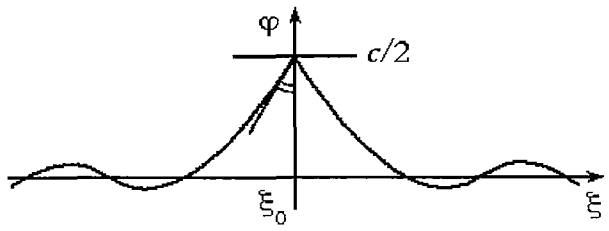


Рис. 6. Самолокализованное решение с обострением и осциллирующей асимптотикой на бесконечности

а также выражение для β_φ

$$\beta_\varphi = \frac{\sigma G}{3}\left(1 + \frac{\alpha_y}{\alpha_\varphi}\right). \tag{38}$$

Среди множества траекторий, чьи проекции на плоскость $\{(X,Y)\}$ касаются прямой A $(X_\xi(\xi_0) = 0,\ Y_\xi(\xi_0) \neq 0)$, существуют, как следует из (37), траектории, меняющие в точке поворота направление скорости на обратное $(X_\xi(\xi_0) = 0,\ Y_\xi(\xi_0) = 0)$ (рис.7). Проекции этих траекторий подходят к прямой A под ненулевым углом и локально, в окрестности прямой, описываются уравнением $X_\xi(\xi - \xi_0) = KY_\xi(\xi - \xi_0)$,

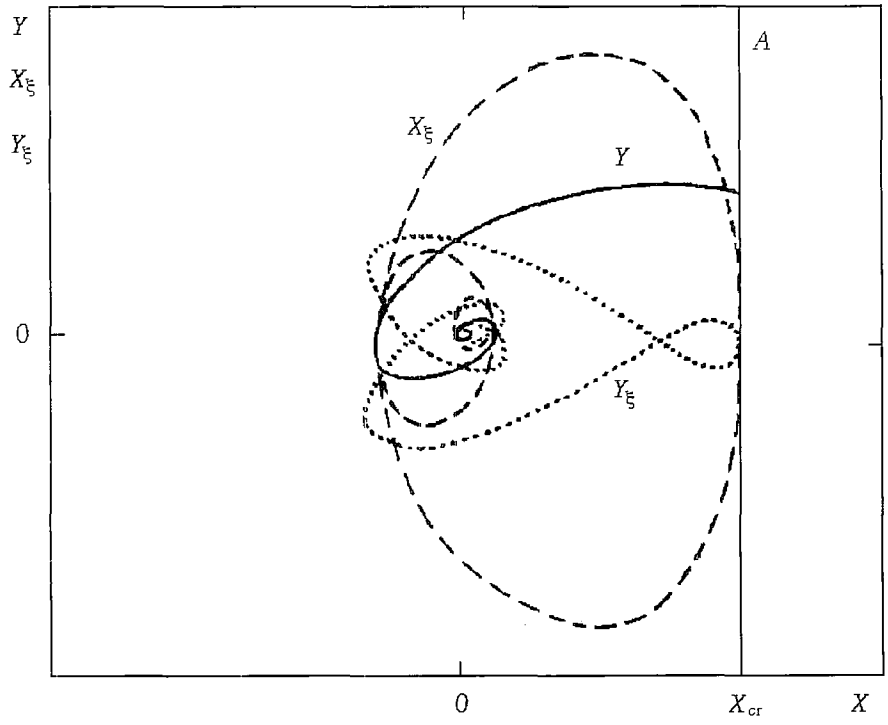


Рис. 7. Проекции петли «с обострением» (рис. 2 при N=0) на плоскости $\{(X,Y)\}$,$\{(X,X_\xi)\}$, $\{(X,Y_\xi)\}$

$K = \text{const} > 0$. Значения $Y(\xi_0)$, при которых такие траектории подходят к прямой A, определяются из уравнения (37) при условии $\alpha_y = 0$:

$$Y(\xi_0) = \frac{c^2}{4\sigma G}\left\{1 \pm [1+\sigma^2]^{1/2}\left(1 - \frac{4}{3c}\right)^{1/2}\right\}. \tag{39}$$

При этом выражение для величины разрыва $\varphi_\xi(\xi_0) \equiv \alpha_\varphi$ имеет вид

$$\alpha_\varphi^{\,2} = \sigma G(\sigma)\left\{\frac{c}{2}\left(1 - \frac{c}{2}\right) + \frac{c^2}{2(\sigma^2+1)^{1/2}}\left(1 - \frac{4}{3c}\right)^{1/2}\right\}. \tag{40}$$

Из последнего соотношения следует, что на плоскости параметров задачи $\{(\sigma,\ c)\}$область существования решений с обострением данного частного вида ограничена областью (рис. 8).

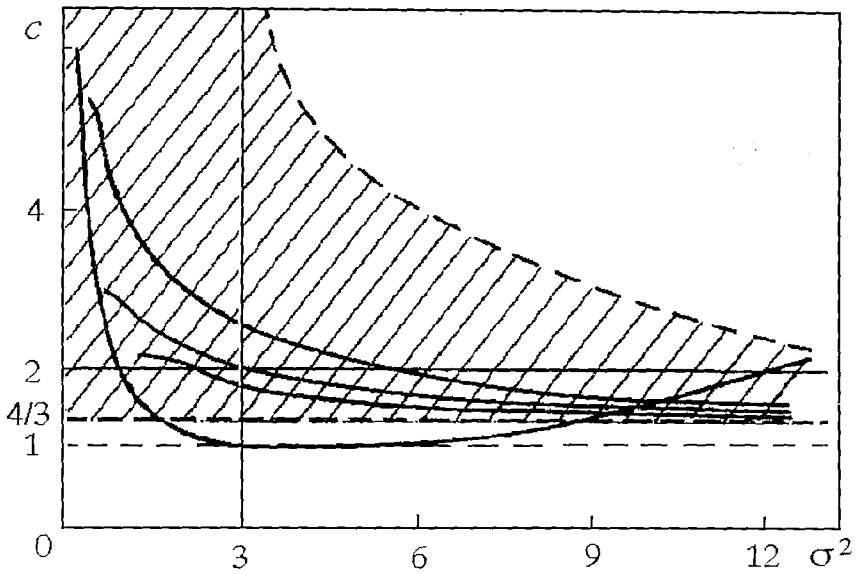


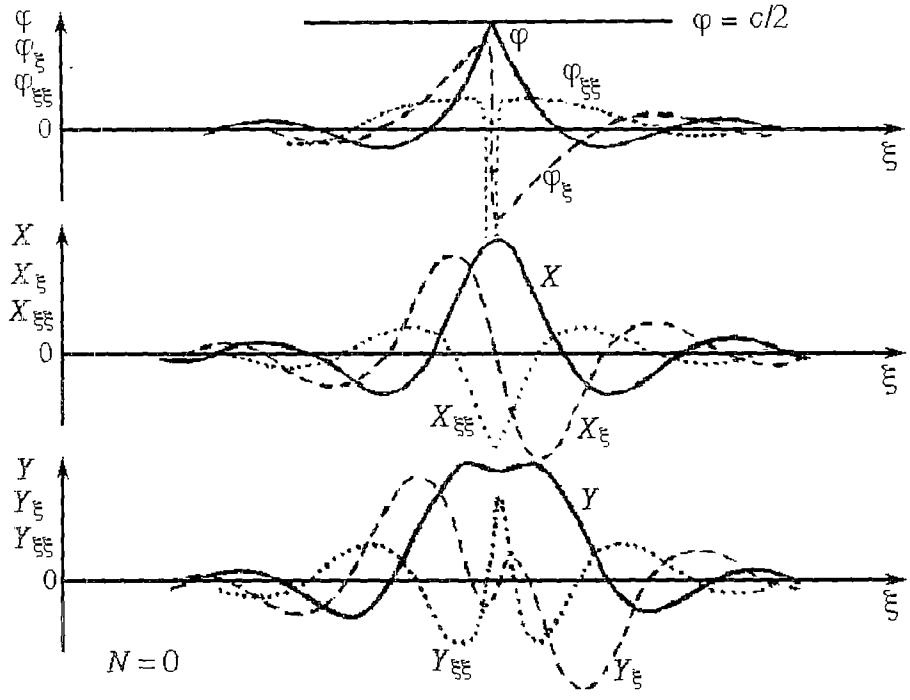
Рис. 8. Область существования в динамической системе (17), (18) решений с обострением (выделена штриховкой)

$$c \geq \frac{4}{3}, \qquad \sigma^2 \leq \frac{3\,c^2/4 - c/3 - 1}{(c/2-1)^2}. \tag{41}$$

Как показали исследования, линии на плоскости параметров, ограничивающие сверху область существования сложных гомоклинических петель и периодических орбит, являются линиями, на которых соответствующие решения испытывают потерю гладкости. После пересечения этих прямых, например, в сторону роста параметра c, траектории становятся непродолжаемыми. Отметим, что все линии точек обострения решений действительно лежат в области параметров, определяемых соотношениями (41).

Отметим, что в случае семейства траекторий, изображенных на рис. 2, петли с четными порядковыми номерами представляют примеры частных случаев траекторий с обострением, для которых справедливы результаты (39), (40), тогда как петли с нечетными номерами суть траектории общего положения. При проведенном численном анализе выражения, описывающие поведение траекторий в окрестности прямой A, с хорошей точностью подтверждались. Так на рис. 7 приведены проекции фазовой траектории, отвечающей первой петле семейства, изображенного на рис. 2, на плоскости $\{(X_\xi, X)\},\{(Y_\xi, X)\},\{(Y, X)\}$, а на рис. 9– графики зависимости величин φ, φ_ξ, $\varphi_{\xi\xi}$, X, X_ξ, $X_{\xi\xi}$, Y, Y_ξ, $Y_{\xi\xi}$ от независимой переменной ξ для двух первых петель этого семейства при значениях параметров, отвечающих точкам, лежащим на кривых обострения решений.

Замечание 3. Отметим, что периодическая орбита, отвечающая периодической волне исходной задачи, представляет собой аналог периодической волны Стокса в бесконечно глубокой жидкости [6–8]. В частности, на линии обострения она является аналогом стоксовой предельной волны с обострением, для которой Стоксом была найдена величина угла обострения, равная $2\pi/3$. В задаче с пространственной дисперсией, как было показано выше, величина угла



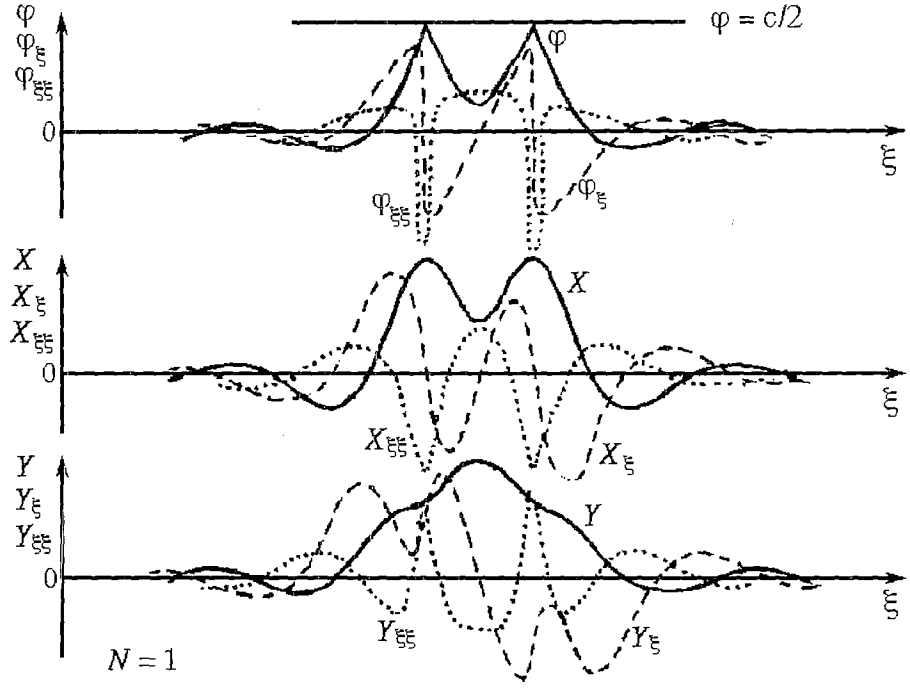


Рис. 9. Зависимости динамических переменных от ξ для двух первых петель семейства, изображенного на рис. 2, при значениях параметров σ и c, отвечающих режиму обострения

бострения при вершине гребня есть функция параметров задачи – характерного масштаба дисперсии σ и скорости волны c (35), (40). Величина амплитуды предельной волны φ_{max} равна $c/2$, что отличается от результата Уизема [1] для экспоненциального ядра (см.(9)). Однако существование солитонных решений, обладающих обострением, есть явление, которое возможно описать лишь при последовательном учете пространственной дисперсии (нелокальных взаимодействий). Можно предположить, что, по–видимому, конкретный вид ядра не влияет на возможность потери гладкости солитонными решениями.

Происхождение рассмотренной выше модели нелокальных взаимодействий с осциллирующим ядром может быть связано с рядом физических моделей, приводящих к осциллирующим потенциалам взаимодействия солитонов в приближении слабой связи (см., например, [9]). Отметим также возможность ее реализации в нелинейной линии передачи с пространственной дисперсией [10].

Благодарим Л.П.Шильникова, обратившего наше внимание на эту задачу и стимулировавшего исследования петель с обострениями в задачах с особыми точкама типа седло–фокус.

Библиографический список

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

2. *Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Kulagin N.E.* Dynamical systems in the theory of solitons in the presence of nonlocal interactions // Chaos. 1992. Vol.2, № 4.

3. *Kawahara T.* // J.Phys. Soc.Japan. 1972. Vol.33. P.260.

4. *Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A., Papko V.V., and Pikovsky A.S.* On existance of stationary multisolitons // Phys.Rev.Lett.1979.Vol.74A, № 3, 4. P.177.

5. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* О гамильтоновых системах с гомоклиническими петлями седла // Докл.АН СССР. 1989. Т.304, № 4. С.811.

6. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Math. and Phys. Papers. 1, Cambrige, 1880. P.197.

7. *Некрасов А.И.* Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Изд–во АН СССР, 1951.

8. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.

9. *Горшков К.А., Миронов В.А., Сергеев А.М.* Связанные стационарные солитонные образования // Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С.112.

10. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

Научно–исследовательский институт физических проблем Зеленоград

Поступила в редакцию 3. 08. 1992
после переработки 18.12.1992

ON THE DYNAMIC SYSTEM GENERATED BY WHITHAM'S EQUATION WITH OSCILLATING KERNEL

V.M. Eleonsky, V.G. Korolev, N.E. Kulagin

The Whitham's equation possessing the fast–vanishing oscillating kernel is investigated. A possibility of the reducing of this equation is shown either to the differential equation of the fourth rate or to the nonintegrable dynamic system with two degrees of freedom, which permits an existence of singular point of «saddle–focus» type. The series of homoclinic loops of that point are found numerically. These loops are images of self–localized oscillating solutions of the Whitham's equation. The curves of points on the parametre plane are found, where the system permits an existence of «sharpened» solutions. These solutions are investigated analytically.

Елеонский Владимир Маркович – родился в Ржеве. В 1955 году закончил физико – технический факультет Уральского политехнического института. В 1979 году защитил докторскую диссертацию по специальности «теоретическая и математическая физика». Возглавляет группу теоретических фундаментальных исследований в Государственном научно–исследовательском институте физических проблем им. Ф.В. Лукина. Научные интересы – качественная теория динамических систем и ее применение в нелинейных задачах математической физики.

Королев Вадим Германович – родился в 1966 году в Москве. В 1989 году закончил Физический факультет Московского государственного университета. Аспирант. Работает под руководством В.М.Елеонского в группе теоретических фундаментальных исследований в Государственном научно–исследовательском институте физических проблем им. Ф.В. Лукина. Научные интересы – качественная теория динамических систем и ее применение в нелинейных задачах математической физики.

Кулагин Николай Евгеньевич – родился в 1946 году в Кисловодске. В 1969 году закончил механико–математический факультет Московского государственного университета. В 1989 году защитил докторскую диссертацию по специальности «теоретическая и математическая физика». Работает в теоретическом отделе Государственного научно–исследовательского института физических проблем им. Ф.В. Лукина. Научные интересы – качественная теория динамических систем и ее применение в нелинейных задачах математической физики.

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 533.951

ФОРМИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

И.П. Завершинский, Е.Я. Коган, Н.Е. Молевич

Рассмотрены неравновесные газовые и плазменные среды с отрицательной вязкостью. Такие релаксационные среды являются акустически неустойчивыми. Особенностью их нелинейной динамики является взрывной характер неустойчивости. Стабилизация этой неустойчивости описывается эволюционными уравнениями, полученными с точностью до величины третьего порядка малости по параметру диссипации. Исследованы стационарные структуры в колебательно–возбужденном газе и в токовой слабоионизованной плазме.

В термодинамически неравновесных средах в зависимости от типа и уровня неравновесности может выполняться релеевский критерий неустойчивости звука [1] – определенные фазовые соотношения между возмущением плотности газа и источника энергии, в качестве которого выступают релаксирующие в поле волны неравновесно–возбужденные степени свободы среды. Установление этих соотношений (положительной обратной связи) означает обращение (смену знака) коэффициента релаксационной вязкости [2–4].

Релаксационная вязкость ζ характеризует диссипативные процессы, связанные с конечным временем установления параметров среды при сжатии или разрежении в звуковой волне. В общем случае для изотропной среды с линейной дисперсией вклад в релаксационную вязкость дают как пространственно–локальные процессы с конечным временем релаксации (вторая вязкость, излучательная теплопроводность [5]), так и нелокальные процессы (например, диффузия [6]).

Особенность нелинейных структур в активных средах с отрицательной релаксационной вязкостью состоит в том, что обычно их неустойчивость носит взрывной характер [2,7] и ее нельзя исследовать в режимах уравнений, полученных во втором порядке амплитудной теории возмущения, т.е. уравнений типа Бюргерса или Кортевега – де Вриза – Бюргерса.

В [4, 8–10] показано, что в случае одного релаксационного процесса с характерным временем τ нелинейную динамику малых, но конечных газодинамических возмущений, можно описать с точностью до величин третьего порядка малости с помощью базовых уравнений, сохраняющих с точностью до обозначений свою форму независимо от типа неравновесности среды.

При $\tau/\tilde{T}\sim\theta << 1$ или $\tau/\tilde{T}\sim \theta^{-1} >> 1$ ($\tilde{T}^{-1}\sim \partial\ln\rho/\partial t$ – характерный период возмущения) эти уравнения соответственно имеют вид:

$$\rho_y = \beta_0\, \rho_{\zeta\zeta\zeta} + \mu\rho_{\zeta\zeta} + k_1\rho\rho_{\zeta\zeta} + k_2\rho_{\zeta\zeta}^{\,2} - \Psi_0\, \rho\rho_\zeta + k_3\rho_\zeta^{\,3}, \qquad (1)$$

$$\rho_y = \beta_\infty \int \rho d\zeta + \mu_\infty \rho_{\zeta\zeta} + k_{1\infty}\rho\rho_{\zeta\zeta} + k_{2\infty}\rho_{\zeta\zeta}^2 - \Psi_\infty \rho\rho_\zeta + k_{3\infty}\rho_\zeta^3 -$$
$$- \Psi_\infty \alpha_\infty \rho_\zeta \int \rho d\zeta - \alpha_\infty U_\infty \rho - \nu\rho^2, \qquad (2)$$

где ρ, ρ_0 – возмущение плотности газа и ее стационарное значение ($\rho/\rho_0 \sim \theta$); $y = \theta t$; $\zeta = x - U_s t$; U_s – скорость звука, причем в (1) $U_s = U_0$, в (2) $U_s = U_\infty$; $U_0 = (T_0 C_{p0}/C_{V0}M)^{1/2}$ – скорость низкочастотного звука; $U_\infty = (T_0 C_{p\infty}/C_{V\infty}M)^{1/2}$ – скорость высокочастотного звука; T_0 – температура газа; M – молекулярная масса; C_{p0}, $C_{p\infty}$ и C_{V0}, $C_{V\infty}$ – теплоемкости при постоянном давлении и объеме в низкочастотном и высокочастотном пределе.

Для колебательно – возбужденного газа со степенью неравновесности S имеем

$$C_{p0} = C_{p\infty} + C_k + S/(\hat{\tau}_0 - \check{\tau}_0),\ C_{V0} = C_{V\infty} + C_k + S\,\hat{\tau}_0.$$

Для среды с источником тепловыделения, мощность которого $Q(T,\rho)$ [3]

$$C_{p0} = \check{Q} - \hat{Q}, \qquad C_{V0} = -\hat{Q},$$

где $A = \partial \ln \hat{A}/\partial \ln T_0$, $\check{A} = \partial \ln A/\partial \ln \rho_0$ для любой величины A здесь и далее; C_k – колебательная теплоемкость; β_0, β_∞ – коэффициенты низкочастотной и высокочастотной дисперсии.

Коэффициенты вязкости в уравнениях (1) и (2) имеют стандартный вид:

$$\mu = [4\eta/3 + æ(1/C_{V0} - 1/C_{p0}) + \zeta_0]/2\rho_0,$$

$$\mu_\infty = [\,4\eta/3 + æ(1/C_{V\infty} - 1/C_{p\infty})\,]/2\rho_0,$$

где η,æ – коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности.

Коэффициенты высокочастотной квадратичной и кубичной нелинейности имеют вид

$$\Psi_\infty = U_\infty(\gamma_\infty + 1)/2\rho_0,\ k_{3\infty} = \Psi_\infty(1 - 0{,}5\Psi_\infty \rho_0/U_\infty)/3\rho_0,$$

где $\gamma_\infty = C_{p\infty}/C_{V\infty}$. Коэффициент диссипации (поглощения при $\zeta_0 > 0$, усиления при $\zeta_0 < 0$) в высокочастотном пределе запишем как

$$\alpha_\infty = \zeta_0 C_{V0}^2/2C_{V\infty}^2\tau^2 U_\infty^3 \rho_0,$$

где $\zeta_0 = \rho_0\tau(U_\infty^2 - U_0^2)C_{V\infty}/C_{V0}$ – низкочастотный коэффициент второй вязкости.

Коэффициенты $k_1, k_2 \sim \mu$; $k_{1\infty}, k_{2\infty} \sim \mu_\infty$; $\nu \sim \zeta_0/\tau_0^2$ – соответствуют нелинейной вязкости; коэффициенты Ψ_0, k_3 зависят от степени неравновесности среды (в отличие от высокочастотных коэффициентов Ψ_∞, $k_{3\infty}$).

Уравнение (1), записанное для стационарных волн в автомодельной переменной ($z = \zeta - Wy$, где W – скорость волны), имеет достаточно простой вид [8]:

$$\rho_{zz} + (\mu/\beta + K_1\rho)\rho_z + W\rho/\beta + K_2\rho^2 + K_3\rho^3 = 0, \qquad (3)$$

где $K_1 = 2k_1/\beta$; $K_2 = -\Psi_0/2\beta - k_1W/2\beta\mu \approx -\Psi_0/2\beta$; $K_3 = (k_3 + \Psi_0 k_1/3\mu)/\beta$.Оно аналогично уравнению движения частицы в потенциальном поле $\Pi = W\rho^2/2\beta + K_2\rho^3/3 + K_3\rho^4/4$ при наличии нелинейного трения $f = (\mu/\beta + K_1\rho)$. Вид потенциала Π и коэффициента нелинейного трения f зависит от характера и степени неравновесности. Например, в условиях, рассмотренных в работе [8], в смеси атмосферного давления $CO_2 : N_2 : He = 1 : 2 : 3$, при $E = 0.01$ Дж/см^3 (S~0.1), где E – удельный энерговклад в колебательные степени свободы, $\mu < 0$, $\beta < 0$, $\Psi_0 > 0$, $K_1 < 0$, $K_2 > 0$, $K_3 > 0$. Коэффициент нелинейного трения при этом знакопеременен, а зависимость потенциала от нормированного возмущения плотности газа приведена на рис. 1.

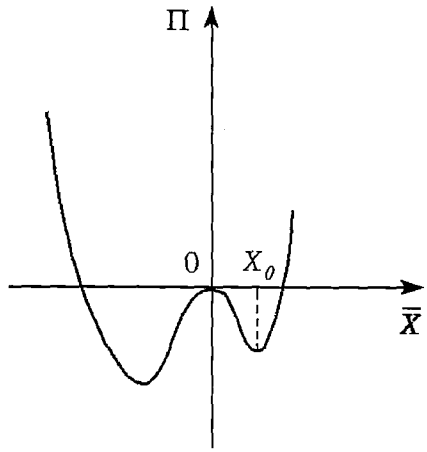


Рис. 1

Исследуем решение (3) на фазовой плоскости ($\bar{X}_z = \rho_0^{-1}d\rho/dz$, $\bar{X} = \rho/\rho_0$),ограничиваясь возмущениями сжатия ($\rho > 0$). Вклад в потенциал слагаемого с коэффициентом $K_3 > 0$ несуществен и минимуму потенциала соответствует $\bar{X} = X_0 \approx W/\rho_0|\beta|K_2$.

Если $X_0 < X_{кр} - X^*$, где $X_{кр} = -\mu/\beta K_1\rho_0$, $X^* = 2(W|\beta|)^{1/2}/K_1\beta\rho_0$, трение положительно в пределах потенциальной ямы и «частица» падает на дно ямы ($\bar{X}=X_0$). График стационарного решения, соответствующего такому движению «частицы», приведен на рис. 2, *а* (кривая *1*). Оно аналогично неустойчивому стационарному решению, полученному для уравнения Бюргерса с $\mu < 0$ [7]. Если $X_{кр} - X^* < X_0 < X_{кр}$, то падение частицы на дно ямы сопровождается осцилляциями (рис.2, *а*, кривая *2*). Стационарное решение тоже неустойчиво. Для скоростей волны W таких, что $X_0 > X_{кр}$, трение f становится знакопеременным. Это сопровождается появлением на фазовой плоскости предельного цикла и соответствующего ему автоколебательного режима.

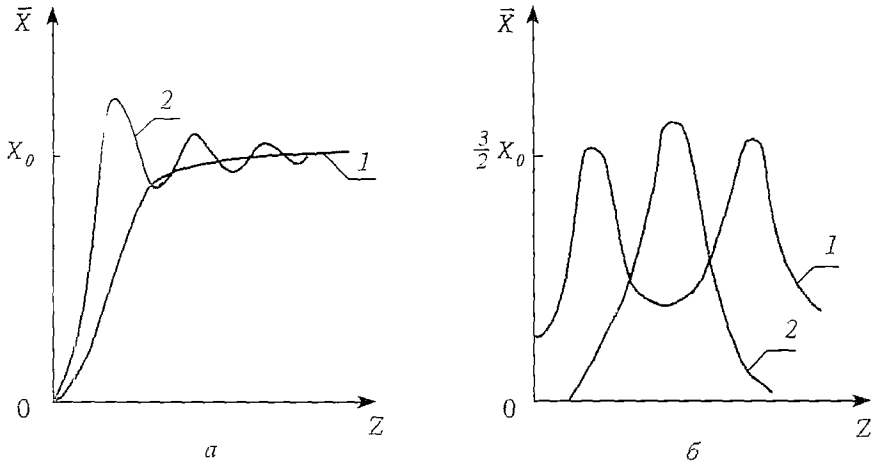
С ростом W цикл приближается к сепаратрисе, а вид стационарных волн – к кноидальным волнам (рис. 2, *б*, кривая *1*). При некотором значении $W=W_c$ (аналитически W_c определить не удается) рождается сепаратриса и возможно существование уединенной несимметричной волны с амплитудой $\bar{X} \approx 1.5X_0$ (рис. 2, *б*, кривая *2*).

Асимметрия уединенной волны следует из асимптотик уравнения (3) ($\rho(z \to \infty) \sim \exp \lambda_1 z$, $\rho(z \to -\infty) \sim \exp \lambda_2 z$):

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4\beta^2} + \frac{W}{|\beta|}}. \qquad (4)$$

Так как $\lambda_2 < |\lambda_1|$, то передний фронт волны будет более крутым.

При дальнейшем увеличении W происходит разрушение сепаратрисы и появление фазовой траектории, соответствующей ударной волне с амплитудой X_0 и осцилляциями на фронте (рис. 2, *в*, кривая *1*). Наконец, при еще больших скоростях, когда $X_0 > X_{кр} + X^*$ (в указанной смеси при $W > 0.6$), фронт ударной



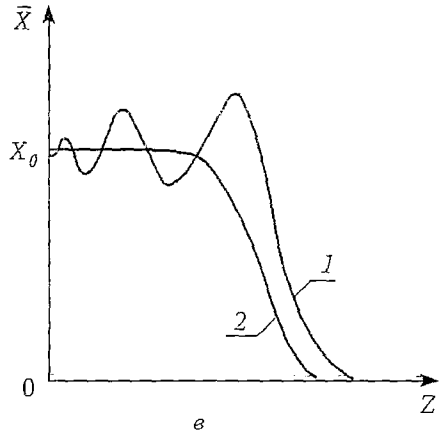


Рис. 2

волны становится монотонным (рис. 2, *в*, кривая *2*) как в равновесной среде с положительной вязкостью. Это следствие того факта, что для ударных волн большой амплитуды, когда температура на фронте примерно равна колеба–тельной температуре молекул ($T \sim T_V$), не выполняются условия отрицательной вязкости ($S > S_{пор}$, где $S_{пор}$ – пороговое значение степени неравновесности в среде).

Уравнение (2), описывающее эволюцию высокочастотных волн, исследовалось в [9, 10] в предпо–ложении, что $\eta \sim \theta^2$, $\tau/\tilde{T} \sim \theta^{-2}$ (параметры возмущения с резкими фронтами). В этом случае интегральными слагае–мыми, содержащими нелинейную вязкость и диссипацию, с точностью до величин третьего порядка малости можно пренебречь. Стационарные высокочастотные волны при $\zeta_0 < 0$ описываются уравнением типа Ван–дер–Поля:

$$\mu_\infty \rho_{zz} + (W + K_{2\infty}\rho + K_{3\infty}\rho^2)\rho_z + |\alpha_\infty| U_\infty \rho = 0 \qquad (5)$$

где $K_{2\infty} = \Psi_\infty(1-1.5W/U_\infty) \approx \Psi_\infty$; $K_{3\infty} = K_3(S=0, C_k=0) = -U_\infty(\gamma_\infty^2 - 1)/4\rho_0^2$.

Заметим, что коэффициент $K_{3\infty}$ не зависит от μ_∞. Однако для получения однозначного вида кубичной нелинейности формально необходимо удерживать даже малые слагаемые с нелинейной вязкостью [11].

До сих пор исследовались среды с одним релаксационным процессом. Можно ли уравнения (1), (2) применять при исследовании нелинейной динамики такой многопараметрической среды, какой является плазма?

В [12] подробно исследована акустическая неустойчивость частично ионизованной атомарной плазмы, найдена вторая вязкость и условия ее обращения в различных режимах. Опираясь на эти результаты, рассмотрим механизмы формирования плазменно – акустических структур.

Будем описывать динамику атомарного частично ионизованного газа в постоянном электрическом поле в следующей модели:

$$\partial n_e/\partial t + \mathrm{div}(n_e \boldsymbol{V}_e) = K_i n_e N - K_r n_e^2 , \tag{6}$$

$$1.5\partial(n_e T_e)/\partial t + 1.5 \boldsymbol{V}_e \nabla(n_e T_e) + 2.5\, n_e T_e \mathrm{div}\, \boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{j}_e \boldsymbol{E} - 1.5\, n_e \delta \nu_e T_e + æ_e \Delta T_e, \tag{7}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{j} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{9}$$

$$\rho \partial \boldsymbol{V}/\partial t + (\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{V} = -\nabla P - \nabla(n_e T_e) + \eta \Delta \boldsymbol{V} + \eta \nabla \mathrm{div} \boldsymbol{V}/3, \tag{10}$$

$$C_{V\infty} \rho dT/dt - T d\rho/dt = 1.5 n_e \delta^y \nu_e T_e M - I + M æ\, \Delta T + \eta M\, \partial V^i/\partial x_k [\partial V^i/\partial x_k +$$

$$+ \partial V^k/\partial x_i \quad (2/3)\delta_{ik} \partial V^i/\partial x_i], \tag{11}$$

$$P = \rho T/M, \tag{12}$$

где n_e – плотность электронов; $\boldsymbol{V}_{e,i}$ – скорости электронов и ионов; K_i, K_r – константы скорости рекомбинации и ионизации; T_e – температура электронов; $\boldsymbol{j}_e = -e n_e \boldsymbol{V}_e$ – электронная компонента тока; $\boldsymbol{E}$ – напряженность электрического поля; δ – коэффициент передачи электронной энергии; ν_e – частота электрон–нейтральных соударений; $æ_e$ – коэффициент электронной теплопроводности; $\boldsymbol{j} = -e n_e \boldsymbol{V}_e + e n_e \boldsymbol{V}^i$ – плотность тока; $\boldsymbol{V}$ – скорость нейтральной компоненты; V^i, V^k – компоненты вектора $\boldsymbol{V}$; x_i, x_k – компоненты радиус–вектора $\boldsymbol{R}$; δ_{ik} – символ Кронекера; $\delta^y = 2m/M$ (m – масса электрона); I –мощность теплоотвода (для простоты полагалось, что I не зависит от ρ, T).

Введем параметр $\eta_e = n_e M/\rho$ – степень ионизации плазмы и далее используем условия $S_e = T_e/T_0 >> 1$, $S_e \eta_e << 1$, характерные для слабоионизованной плазмы тлеющего разряда.

Приведенная модель использовалась при изучении акустической устойчивости плазмы в [12]. Согласно этой модели в атомарной плазме можно выделить следующие степени свободы, время релаксации которых τ_i имеет масштаб примерно равный ω^{-1} (ω – частота акустических волн): трансляционную энергию электронов, степень ионизации η_e и джоулевый нагрев газа. Релаксация этих параметров формирует эффективные релаксационные вязкость, дисперсию, нелинейность, а также характерные соответствующие им релаксационные времена: $\tau_T = (\delta \nu_e)^{-1}$ – время передачи энергии электронов при соударениях, $\tau_r = (K_r n_e)^{-1}$ – время диссоциативной рекомбинации как масштаб времени релаксации степени ионизации, $\tau_н = \delta^y S_e \eta_e / \delta \tau_T$ – время нагрева газа.

Ограничимся случаем, когда нет процесов с $\tau/\tilde{T} \sim 1$, т.е. $\tau_i/\tilde{T} \sim (\tau_j/\tilde{T})^{-1} \sim \theta << 1$, где i – нумерует низкочастотные процессы, j – высокочастотные. В этих условиях можно ввести низкочастотный α_0 и высокочастотный α_∞ коэффициенты диссипации [12], представляющие собой сумму коэффициентов, каждый из которых обусловлен релаксационной вязкостью, задаваемой конкретным механизмом. Среды с многопараметрической релаксацией при $\tau/\tilde{T} \sim 1$ рассмотрены в [4], где показано, что коэффициенты диссипации и релаксационной вязкости теряют свойство аддитивности.

Представим возмущения параметров плазмы и газа в акустической волне в таком виде:

$$\rho = \theta\rho^{(1)} + \theta^2\rho^{(2)}, \qquad n_e = \theta n_e^{(1)} + \theta^2 n_e^{(2)}, \tag{13}$$

аналогично – для возмущений всех других параметров газа и плазмы.

Связи между величинами первого порядка следуют из линеаризованной модели (6)–(12):

$$\nabla^{(1)}/U_\infty = \rho^{(1)}/\rho_0; \; P^{(1)}/P_0 = \gamma_\infty \rho^{(1)}/\rho_0;$$

$$\frac{T_e^{(1)}}{T_{e0}} = \begin{cases} 0 & \tau_T/\tilde{T} >> 1 \\ -\,2\rho^{(1)}/\rho_0 B, & \tau_T/\tilde{T} << 1,\ \tau_r/\tilde{T} >> 1 \\ -\,2\rho^{(1)}/\,(B + 2\bar{K}_i \cos^2\varphi)\rho_0; & \tau_T/\tilde{T} << 1,\ \tau_r/\tilde{T} << 1 \end{cases}$$

$$\frac{n_e^{(1)}}{n_{e0}} = \begin{cases} \rho^{(1)}/\rho_0, & \tau_T/\tilde{T} >> 1 \\ \rho^{(1)}/\rho_0, & \tau_T/\tilde{T} << 1,\ \tau_r/\tilde{T} >> 1 \\ \dfrac{\rho^{(1)}[B + 2\bar{K}_i(\cos^2\varphi - 1)]}{\rho_0(B + 2\bar{K}_i\cos^2\varphi)}, & \tau_T/\tilde{T} << 1,\ \tau_r/\tilde{T} << 1 \end{cases}$$

где $B = 1 + \overline{\delta v}_e + (1 - 2\cos^2\varphi)\bar{v}_e$, φ – угол между направлением распространения возмущения и скорости электронного дрейфа V_{e0}; для любого A обозначено $\bar{A} = \partial \ln A/\partial \ln T_{e0}$. Ниже будем рассматривать возмущения распространяющиеся только вдоль электронного дрейфа ($\varphi = 0$), тогда систему уравнений (6) – (12) можно переписать в одномерном виде для пространственной переменной x.

Подставляя (13) в эту одномерную систему и используя связи между величинами первого порядка, получим с помощью метода медленно изменяющегося профиля (метод Хохлова) в системе координат $y = \theta t$, $\zeta = x - U_s t$ уравнение с точностью до величин $\sim\theta^2$

$$\rho_y = \mu\rho_{\zeta\zeta} - \Psi_\infty \rho\rho_\zeta - \alpha_\infty U_\infty \rho. \tag{14}$$

Здесь Ψ_∞ совпадает с коэффициентом в формуле (2), в величину μ дают вклад все релаксационные процессы с $\tau_i/\tilde{T} \sim \theta$,

$$\mu = [4\eta/3 + æ(1/C_{V\infty} - 1/C_{p\infty})]/2\rho_0 + \sum_i \mu^i_{lk},$$

а в α_∞ – все релаксационные процессы с характерными временами $\tau_j/\tilde{T} \sim \theta^{-1}$,

$$\alpha_\infty = \sum_j \alpha^{\infty j}_{ln},$$

где $\mu^i_{lk} = \dfrac{\tau_i C_{Vl}}{2C_{Vk}}(U_{sl}^2 - U_{sk}^2)$, $\alpha^{\infty j}_{ln} = \dfrac{\mu^j_{ln} C_{Vn}^2}{\tau_j^2 U_{sl}^3 C_{Vl}^2}$, $U_{sl} = (C_{pl}T_0/C_{Vl}M)^{1/2}$.

Значения этих коэффициентов в различных режимах существования слабоионизованной плазмы получены в [12].

Знаки коэффициентов μ и α_∞ зависят от параметров плазмы и спектра газодинамического возмущения, обусловливая различные возможные решения уравнения (14).

При $\alpha_\infty = 0$ уравнение (14) суть уравнения Бюргерса. Оно описывает затухание газодинамического возмущения конечной площади при $M > 0$ и его коллапс при $\mu < 0$ [2, 7].

При $\alpha_\infty \neq 0$ уравнение (14) является уравнением Бюргерса с источником. Если $\mu > 0$, $\alpha_\infty > 0$, газодинамическое возмущение затухает, при $\mu < 0$, $\alpha_\infty < 0$ – неограниченно нарастает.

Широко исследовался случай, когда $\mu > 0$, $\alpha_\infty < 0$. Согласно [13] при таких

знаках коэффициентов диссипации уравнение (14) является эталонным в теории активных сред. Оно было получено, например, в химически активной среде [14], колебательно–возбужденном газе [8], в средах с произвольным источником тепловыделения, мощность которого зависит от плотности [10].

В [13] показано, что ограниченные стационарные решения уравнения (14) при $\mu > 0$, $\alpha_\infty < 0$ обязательно периодические. Нестационарные периодические волны в такой среде затухают при $\tilde{T}^{-1} > (\alpha_\infty U_\infty^3/\mu)^{1/2}$ и нарастают до конечной амплитуды при $\tilde{T}^{-1} < (\alpha_\infty U_\infty^3/\mu)^{1/2}$. При $\tilde{T}^{-1} << (\alpha_\infty U_\infty^3/\mu)^{1/2}$ это нарастание, связанное с инкрементом α_∞, приводит к сильному искажению профиля волны, вплоть до образования крутых фронтов, где уже существенна диссипация, определяемая коэффициентом μ. В результате диссипации энергии на фронте происходит стабилизация профиля – установление стационарной нелинейной пилообразной волны с безразмерной амплитудой $X_0 \sim \pi\alpha_\infty U_\infty \tilde{T}$ и шириной фронта, пропорциональной $\mu/X_0 U_s$. В пределах применимости уравнения (14) стационарная волна распространяется только со скоростью звука (W=0), причем эта волна оказывается неустойчивой по отношению к длинноволновым возмущениям, приводящим к установлению волны с максимально возможным периодом. Согласно [13] в реальной ситуации этот период может определяться как начальными, так и граничными условиями. Заметим, что для таких длинноволновых возмущений ($\tau_j/\tilde{T} \le 1$) отрицательная релаксационная вязкость будет давать вклад уже не в α_∞, а в μ и при $\mu<0$ устойчивых стационарных волн вообще не будет. Насыщение неустойчивости при $\mu<0$ возможно в следующем приближении теории возмущения, учитывающем нелинейность вязкости и кубичную нелинейность. Этот учет приводит к уравнению типа (1), подробно рассмотренному выше.

При $W \neq 0$, $\mu > 0$, $\alpha < 0$ возмущения, описываемые уравнением (14), будут неограниченно возрастать и необходимо учитывать величины более высокого порядка малости.

Согласно [12] основной вклад в акустический коэффициент усиления в слабоионизованной плазме вносит джоулевый нагрев с характерным временем τ_H. Для простоты изложения будем полагать: $(\tau_r/\tilde{T})^{-1} \sim \theta^2$; $\eta, æ \sim \theta^2$; $\tau_T/\tilde{T} \sim \theta^2$; $(\tau_H/\tilde{T})^{-1} \sim \theta$; $\rho/\rho_0 \sim \theta$.

В этом случае с точностью до величин $\sim \theta^3$ диссипация, связанная с релаксацией степени ионизации, электронной температуры, сдвиговой вязкостью и теплопроводностью, будет по–прежнему линейной, а диссипация, связанная с релаксацией источника (джоулевый нагрев), – нелинейной.

Подставим в уравнения (6) – (12) возмущения в виде

$$\rho = \theta\rho^{(1)} + \theta^2\rho^{(2)} + \theta^3\rho^{(3)}, \tag{15}$$

$$n_e = \theta n_e^{(1)} + \theta^2 n_e^{(2)} + \theta^3 n_e^{(3)} \text{ и т.д.}$$

Связи между величинами второго порядка малости в координатах $y = \theta t$, $\zeta = x - U_\infty t$, следующие из исходной системы уравнений, имеют в указанных пределах вид

$$\frac{V^{(2)}}{U_\infty} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho_0} + \frac{\alpha_\infty}{\rho_0}\int\rho^{(1)}d\zeta - \frac{(1-\Psi_\infty\rho_0/2U_\infty)\rho^{(1)2}}{\rho_0^2},$$

$$\frac{P^{(2)}}{P_0} = \frac{U_\infty^2\rho^{(2)}}{P_0} + \frac{2\alpha_\infty U_\infty^2}{P_0}\int\rho^{(1)}d\zeta - \left(1-\frac{\Psi_\infty\rho_\infty}{U_\infty}\right)\frac{U_\infty^2}{P_0\rho_0}\rho^{(1)2}, \tag{16}$$

$$\frac{n_e^{(2)}}{n_{e0}} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho_0}, \qquad \frac{T_e^{(2)}}{T_{e0}} = -\frac{2\rho^{(2)}}{B\,\rho_0} + [4\frac{(\bar{\bar{\nu}}_e - \bar{\delta\nu}_e - \bar{\bar{\delta\nu}}_e)}{B^3} - \frac{1}{B} + \frac{4(1+\bar{\delta\nu}_e)}{B}]\frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0^{\,2}}.$$

После подстановки этих соотношений в исходную систему уравнений с помощью стандартных преобразований получим с точностью до величин $\sim\theta^3$ следующее уравнение, описывающее эволюцию волн плотности

$$\rho_y = \beta_\infty \int\rho d\zeta + \mu\rho_{\zeta\zeta} - \Psi_\infty\rho\rho_\zeta + k_{3\infty}\rho_\zeta^{\,3} - \Psi_\infty\alpha_\infty\rho_\zeta\int\rho d\zeta - \alpha_\infty U_\infty\rho - \nu\rho^2, \qquad (17)$$

где $\beta_\infty = 1.5\alpha_\infty^{\,2}U_\infty$, $\mu = (4\eta/3 + æ/C_{V\infty}C_{p\infty})/2\rho_0 + \mu^T_{2r}$.

В обычных экспериментальных условиях слабоионизованной плазмы $\mu > 0$; $\alpha_\infty = \alpha^{\infty r}_{r0} + \alpha^{\infty н}_{r1}$ (значения коэффициентов, условия их обращения найдены в [12]),

$$\nu = (-5\Psi_\infty/4 + 2U_\infty/\rho_0)\alpha^{\infty н}_{r1} - \{(1+\bar{\nu}_e)[-3/B + 4(\bar{\bar{\nu}}_e - \bar{\bar{\delta\nu}}_e - \bar{\delta\nu}_e)/B^3 + 4/B^2 + 4\bar{\delta\nu}_e/B^2] + \\ + 4(\bar{\bar{\nu}}_e + \bar{\nu}_e)/B^2\}/2\tau_н C_{p\infty}\rho_0;$$

$\bar{\bar{A}} = T_e^{\,2}(\partial^2 A/\partial T_e^{\,2})/2A$ для любой величины A. Остальные коэффициенты совпадают при $S_e\eta_e << 1$ с соответствующими коэффициентами в уравнении (2).

Уравнение (17) значительно упрощается при $B = 2(1 + \bar{\nu}_e) \pm \theta$. Тогда $\alpha_\infty \sim \theta^2$ и интегральными слагаемыми можно пренебречь.Стационарная форма этого уравнения такова:

$$\mu\rho_{zz} + (W - \Psi_\infty\rho + 3K_{3\infty}\rho^2)\rho_z - \alpha_\infty U_\infty\rho - \nu\rho^2 = 0, \qquad (18)$$

где $z = x - Wy$, $K_{3\infty} \approx -U_\infty(\gamma_\infty^{\,2} - 1)/4\rho_0^{\,2}$ как и в (5) (при нахождении $K_{3\infty}$ учтено замечание, сделанное после уравнения (5)).

В акустически неустойчивой по линейному приближению среде $\alpha_\infty < 0$, а коэффициент нелинейной диссипации может быть как отрицательным (нелинейное усиление), так и положительным (нелинейное поглощение).

При $\alpha_\infty < 0$, $\nu < 0$ уравнение (18) является уравнением Ван–дер–Поля с кубическим потенциалом и при $W > 0$ возможно существование предельного цикла и соответствующего ему автоколебательного режима.

При $\alpha_\infty < 0$, $\nu > 0$ уравнение (18) на фазовой плоскости ($\bar{X}_z$, $\bar{X} = \rho/\rho_0$) имеет две особые точки: (0,0) и (0, $|\alpha_\infty|U_\infty/\nu\,\rho_0$). Вторая точка всегда седло, а тип первой определяется величиной параметра W (скоростью стационарной волны). При $W = 0$ это – центр и стационарные волны аналогичны получаемым на основе уравнения (14) волнам, распространяющимся со скоростью звука. Наличие нелинейного поглощения с коэффициентом ν приводит к появлению стационарных структур иного вида. При $0 < W < 2\sqrt{\mu|\alpha_\infty|U_\infty}$ особая точка (0,0) является устойчивым фокусом, а при $W > 2\sqrt{\mu|\alpha_\infty|U_\infty}$ – устойчивым узлом. Соответствующие структуры имеют вид ударных волн с осцилляциями на фронте в первом случае и монотонным фронтом – во втором. Амплитуда ρ ударной волны в плазме равна $|\alpha_\infty|U_\infty/\nu$ в отличие от амплитуды слабой ударной волны в газе, пропорциональной $2W/\Psi_\infty$.

Акустическая устойчивость плазмы относительно волн бесконечно малой амплитуды не означает того же для волн конечной амплитуды. Затухание звука в линейном приближении ($\alpha_\infty > 0$) и неустойчивость в нелинейном ($\nu < 0$) возможны, так как с ростом глубины модуляции плотности нейтральной компоненты плазмы растет степень сфазированности возмущений T_e и ρ, т.е. уменьшается отрицательная обратная связь между ними. Это, в свою очередь, объясняется тем,

что с ростом глубины модуляции (амплитуды волны) существенными становятся эффекты расширения локально нагретых областей плазмы в минимумах плотности газа. Эти эффекты расширяют область акустической неустойчивости плазмы.

При $\alpha_\infty>0, \nu<0$ решением уравнения (18) являются в области $\rho>0$ структуры, аналогичные структурам исследуемого уравнения (3), поскольку слагаемые с коэффициентом $K_{3\infty}<0$ не играют в уравнениях (3) и (18) определяющей роли. Поправки, связанные с ними, легко учесть. Если ими пренебречь, можно воспользоваться результатами уже проведенного анализа (см. рис.2), имея ввиду теперь, что $X_0 \cong |\alpha_\infty| U_\infty / \rho_0 \nu$, $X_{кр} \cong W/\Psi_\infty \rho_0$, $X^* \cong 2\sqrt{\alpha_\infty U_\infty \mu}/\Psi_\infty \rho_0$.

Несмотря на структурное сходство уравнений (3) и (18), динамика волн, ими определяемая, совершенно различна. Обратим внимание на два важных отличия. Во–первых, при условиях, сформулированных для уравнения (3), существование ударной волны возможно лишь при достаточно больших ее скоростях, что объясняется нелинейным «насыщением» отрицательной второй вязкости. Согласно уравнению (18) при $\alpha_\infty > 0$, $\nu < 0$ ударная волна возможна, наоборот, лишь при достаточно малых скоростях, когда еще не существенно нелинейное усиление. Во–вторых, амплитуда ударной волны и солитона в условиях уравнения (3) пропорциональна, как и в равновесном газе, скорости волны. При условиях, сформулированных для уравнения (18), плазменно–акустическая волна имеет амплитуду $\sim U_\infty \alpha_\infty / |\nu|$, не зависящую от W. Скорость ее выступает только как бифуркационный параметр.

В заключение еще раз подчеркнем, что введение в явном виде релаксационной вязкости позволит осуществить единый подход к широкому классу неравновесных сред, включая плазму, лазерные и химически активные смеси и т.д. Этот прием удобен как для описания неустойчивости подобных сред, так и для исследования нелинейной эволюции волн на основе единого вида уравнений с сохранением прозрачной физической трактовки решений.

Библиографический список

1. *Стрепт Дж.В. (лорд Релей)*. Теория звука. М.: ГИТЛ, 1955. Т.2.
2. *Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газе //ЖТФ. 1986. Т.56, № 5. С. 941.
3. *Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* Вторая вязкость в термодинамически неравновесных средах // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 3. С. 128.
4. *Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* Препринт ФИАН СССР №106. 1990.
5. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
6. *Завершинский И.П.,Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* О механизме усиления звука в слабоионизированном газе // ЖЭТФ. 1991. Т. 100, № 2(8). С. 422.
7. *Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е.* Взрывная неустойчивость нелинейных волн в средах с отрицательной вязкостью // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38, № 6. С. 991.
8. *Коган Е.Я., Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* Структура нелинейных акустических волн в неравновесном колебательно–возбужденном газе //Письма ЖТФ. 1987. Т. 13, № 14. С. 836.
9. *Молевич Н.Е.* //Сибирский физико–технический журнал. 1991. № 1. С. 133.
10. *Молевич Н.Е.* Волны в средах с отрицательной второй вязкостью. Дис. … канд. физ.–мат. наук / ФИАН СССР. М., 1987.
11. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики, М.: Наука, 1975.
12. *Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* Акустические волны в частично ионизованном газе //Акустический журнал. 1992. Т. 38, № 4. С. 702.
13. *Рабинович М.И., Фабрикант А.Л.* // Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1976. Т. 19. С. 721.

14. *Борисов А.А.* // Теплофизические исследования. М.: ИТФ СО АН СССР, 1977. С. 52.

Самарский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 29.03.92
после переработки 25.03.93

THE FORMATION OF DISSIPATIVE STRUCTURES IN THE ACOUSTIC FIELD

I.P. Zavershinski, E.Ya. Kogan, N.E. Molevich

A theory describing the formation of plasma–acoustic structures in a non–equilibrium plasma has been built. The community of the evolutionary equations in relaxing gas media and in plasma has been shown. The investigation of non–linear dyna mics of non–equilibrium gas and plasma media is made on the ground of these basic equations.

Завершинский Игорь Петрович – родился в 1963 году, окончил Куйбышевский государственный университет (1985). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по физике волновых процессов в плазме (1990). В настоящее время работает старшим преподавателем на кафедре общей физики в Самарском педагогическом институте. Область научных интересов – нелинейная акустика, физика низкотемпературной плазмы. Автор более 10 статей по направлениям, указанным выше.

Коган Ефим Яковлевич – родился в 1940 году. В 1963 году окончил Полтавский строительный институт. В 1970 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в Харьковском университете по физике плазмы. В 1985 году в Институте высоких температур Академии наук защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико–математических наук. В настоящее время заведует кафедрой физики в Самарском педагогическом институте, профессор. Область научных интересов нелинейная физика стохастических явлений в динамических системах. Имеет свыше ста работ по взаимодействию частиц с поверхностью, циклы работ по элементарным процессам в турбулентной плазме и по нелинейной акустике сильно неравновесных сред.

Молевич Нонна Евгеньевна – родилась в 1959 году, окончила в 1982 году Московский инженерно–физический институт. В 1989 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в Физическом институте Академии наук. В настоящее время работает старшим преподавателем в Самарском педагогическом институте. Область научных интересов акустика неравновесных, химически активных сред, физика плазменных сред. Опубликовала более 60 статей и докладов, в том числе и на международных конференциях.

Предлагаемая читателям статья Б.Н.Пойзнера необычна для научного журнала и наверняка будет встречена и оценена по-разному. Свидетельством тому служат предварительные рецензии: историк удивился эрудиции автора-физика, специалист по математической и теоретической физике статью одобрил и рекомендовал не вносить в нее изменения, сохранив авторский стиль; философ, напротив, сделал ряд обоснованных замечаний и посчитал нецелесообразным публиковать статью в представленном виде.

Редакционная коллегия, публикуя статью, рассматривает её как своеобразный Vademecum по мифологическим, художественным и философским произведениям, в которых присутствуют образы хаоса, порядка и времени. Работа может быть использована как хороший библиографический указатель, отреферированный автором. В первую очередь она заинтересует преподавателей, читающих лекции по вопросам теории хаоса и структур.

Редакционная коллегия

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 530.1

ХАОС, ПОРЯДОК, ВРЕМЯ В ДРЕВНИХ КАРТИНАХ МИРА

Б.Н.Пойзнер

Древние картины мира оперируют мифологемами хаоса и космоса, связанного с течением времени. Сопоставление образов хаоса в мифах разных народов (от эпохи раннего Египта до средневековья) позволяет увидеть их общие черты и отличия, обусловленные культурными и историческими факторами. В ряде моделей космоса и исторического времени предусмотрена возможность (или даже неизбежность) возвращения первобытного хаоса. Предлагается говорить о времени хаоса: во-первых, как о его стадиях («статический» и «динамический»); во-вторых, как об эре конкурентного сосуществования воцарившегося порядка и затаившегося хаоса. В современном самосознании культуры эту эру отражают три типа творческих индивидуальностей: «стражи времени», «хранители порядка», «блюстители хаоса». Выявление произведений отечественной словесности, принадлежащих авторам третьего типа, обозначит «Русский Хаос», то есть мир художественных воплощений философемы хаоса.

> ... хаос поет в наших русских печках,стучит нашими вьюшками и заслонками.
>
> *Осип Мандельштам*
>
> ... хаос есть отсутствие всякого порядка, значит и того, который исключает возможность жизни.
>
> *Лев Шестов*

Если хаосу читатель инстинктивно противостоит, опасаясь быть сбитым с ног, а порядку привычно сопротивляется, боясь оказаться со связанными руками, можно думать, что в читателе продуктивно интерферируют архетип и свежая

память об осуществленных утопиях. Автор предполагает, что такого человека занимают вопросы: когда появились образы хаоса и порядка? насколько они отличаются в разных культурах? в каких ритуалах и традициях отразились ранние представления о хаосе и порядке? Данная статья есть попытка помочь искушенному в синергетике специалисту удовлетворить свой интерес и снабдить его списком основных изданий последних лет. А заодно – побудить к рефлексии, уточняющей его мировоззренческие предпочтения.

Категория хаоса и порядка – древнейшие спутники человеческой мысли. Но появились они не раньше, чем ее стала занимать загадка происхождения и причин сущего. Показательно, например, что концепция хаоса наиболее эффективно развивалась в древнегреческой культуре при зарождении науки о *природе*. Древние картины мира мифологичны, поэтому обращение к ним требует учитывать специфику миропоэтического мышления. В этом помогают яркие сочинения А.Ф.Лосева [1], О.М.Фрейденберг [2], Я.Э.Голосовкера [3], М.Элиаде [4], К.Леви-Строса [5], Ф.Б.Я.Кёйпера [6], С.Г.Хука [7], Е.М.Мелетинского [8], М.И.Стеблин-Каменского [9], В.Н.Топорова [10], В.Б.Иорданского [11], И.М.Дьяконова [12] и справочная литература [13–16].

Образы хаоса в мифах разных народов

Самая ранняя из известных концепций хаоса принадлежит древнеегипетским жрецам (ок. 2500 г. до н.э.) [17, 18]. Гелиопольская космогоническая версия словно бы предвосхищает парадигму синергетики, описывая божественную мастурбацию Ра [19]:

Ты поднялся ввысь под своим именем Холм[1] –
Тот, который высок.
Ты возник под своим именем Хепри –
Тот, кто возникает.
Атум – Тот, кто сам себя породил,
извергнув семя в Иуну[2].
Он взял свой член в руку свою,
вызвав извержение семени...

Согласно «Текстам пирамид», откуда взята цитата, Ра–А́тум–Хе́при создал себя (самоорганизация) из хаоса, называемого Нуном [12]. Первоокеан Нун, т.е. необозримое предвечное водное пространство, из недр которого появился Ра, является антиподом его деятельного и животворящего начала [18].

Мемфисская модель творения оперирует с понятием, напоминающим Логос у иудейско–эллинского философа Филона из Александрии [15] и евангелиста Иоанна («В начале было Слово, и Слово было у Бога ...»). Еще ближе к концепции самоорганизации материи космогония жрецов Гермополя. Согласно ей мир не создан, а порожден из хаоса сам собой, без вмешательства демиурга. Книга мертвых предусматривает возможность перехода порядок–хаос. Недовольный поведением богов Ра угрожает: «Я разрушу все, что я создал. Мир снова превратится в хаос и бесконечность, как вначале»[13]. Такая эсхатология не противоречит принципам современной науки о хаосе и структурах.

В противоположность египтянину, уверенному в незыблемости природных ритмов, для жителей Месопотамии в 26 в. до н.э. мировой порядок казался не столько стабильно существующим, сколько, выражаясь словами И.Р.Пригожина, возникающим «за счет непрерывного объединения множества воль всех людей, животных и вещей». В месопотамской культуре вселенная понималась как государство [20–22]. В шумерской космологии в ряде мифов хаос представлен Намму (Первоокеаном), «матерью, породившей всех богов». Другая группа мифов

[1] В некоторых мифах это не земляной холм, а иной фаллический образ – огненный столп [18].

[2] Иуну – древнейшее название Гелиополя, означающее Город Столбов, т.е. символов первозданного холма [19].

ассоциирует хаос с неразрывной слитностью бога Ана (небо) и его жены, которую нарушает их сын Энлиль (владыка – ветер), внося в мир движение [4]. Однако Энлиль, оберегающий порядок от хаоса, непредсказуем, буен, грозен, способен к разрушению жизни.

Соседями шумеров были восточные семиты – аккадцы. У вавилонян – народа, говорившего по–аккадски и сформировавшегося после слияния шумеров и аккадцев, происхождение мира объяснялось в грандиозном сочинении «Энума элиш»[21]:

Когда вверху не названо небо,
А суша внизу была безымянна,
Апсу первородный, всесотворитель,
Праматерь Тиамат, что все породила,
Воды свои воедино мешали.

По шумерским представлениям, неназванное не существует. Именем Апсу (бездна) назван подземный пресноводный океан, на котором покоится земля [14]. Мардук, сын Энки, рожденного Первоокеаном Намму и убившего Апсу, победил его супругу Тиамат и, разрубив ее на две части, из нижней сделал землю, из верхней – небо. Считается, что Тиамат (море) изображалась в виде чудовищного дракона или семиголовой гидры. По мнению М.Элиаде, дракон собирает все черты первобытного хаоса: Первоокеан, женский дракон, андрогинное существо, чудовище–поглотитель, эмбрион [4].

Аналогичный змееборческий сюжет присутствовал в мифологии хеттов (ок. 17 в. до н.э.). Победа бога грозы над змеем Иллуянкой воспроизводилась в новогоднем (весеннем) ритуале и символизировала триумф жизни над смертью [7, 24 – 26].

Ханаанейская языческая религия, чьим продолжателем и оппонентом стала иудео–христианская традиция, реконструируется на основе мифологических табличек из Угарита – города–государства в Северной Сирии (14–13 вв. до н.э.). В западносемитской мифологии воплощением хаоса был бог смерти Муту, разрушительные силы водного хаоса символизировал семиголовый Дракон, в некоторых угаритских текстах называвшийся Левиафаном, как и в Ветхом завете (Иов, 41, 2–26, Псалом 73, ст.13, 14), а также в Откровении св. Иоанна Богослова (12, 3) [13]. Властелин водной стихии бог Иамму (море) олицетворял зло, претендующее на власть над миром [14]. В описании исходного состояния мира упоминались два Океана. Их соотносят с библейским преданием: « И создал Бог твердь; и отделил воду, которая под твердью, от воды, которая над твердью» (Бытие, 1, 7) [12, 26–28].

Древнееврейский образ хаоса запечатлен в Книге Бытия: «Земля же была безвидна и пуста, и тьма над бездною». Дж.Уилсон, указывая на параллель с гермопольской версией неуловимого и непостигаемого хаоса, отмечает и отличие: египетский миф акцентировал самозарождение Бога–творца, а в древнееврейской космогонии он – вне хаоса [20]. И.М.Дьяконов допускает, что древнееврейское слово *боху* (хаос) связано с аккадским корнем bšy –*совокупляться*, *зачинать*, *быть способным что–либо сделать* [12]. Считается, что древнееврейское слово *техом* (мировая бездна) родственно аккадскому имени Тиамат [7]. Но бездна хаоса создана творцом и ограничена в своих возможностях: Господь, отвечая Иову из бури, говорил, что Он утвердил бездне моря Свое «определение, и поставил запоры и ворота, И сказал: "Доселе дойдешь, и не перейдешь, и здесь предел надменным волнам твоим"» (Иов, 38, 10, 11). Как и Ра в гермопольском мифе, Бог Библии грозил возвратом к хаосу; более того, исполнил свою угрозу, попустительствуя потопу (Бытие, 7, 11), тем самым создав прецедент управляемого хаоса. В остаток водного хаоса на земле, т.е. в морские бездны, помещены, согласно Библии, все, кто противятся мировому порядку: Левиафан и другие чудовища – Нахаш, Раав, Таннин (Исайя, 27, 1 и 51, 9–10). «Дракон хаоса мелькает в эсхатологических картинках, рисуемых ветхозаветными пророками

после Изгнания», – отмечает С.Г.Хук [7]. По мнению В.Н.Топорова, библейская традиция (как и угаритская) выражает идею богоборческого хаоса. Наоборот, в финикийской космогонии темный хаос изначален, вечен и беспределен [13].

Пример апофатического (или *нулевого*) описания хаоса, при котором он определяется через отсутствие у него известных свойств, дала ведийская мифология [13]. Ригведа (гимно–знание), датируемая рубежом второго и первого тысячелетий до н.э., представляет собою сборник текстов на санскрите, исполнявшихся в ходе жертвоприношений богам ариев. Гимн о сотворении мира (X, 129) начинался так [29]:

Не было не–сущего, и не было сущего тогда.
Не было ни воздушного пространства, ни неба над ним.
Что двигалось туда и сюда? Где? Под чьей защитой?
Что за вода была – глубокая бездна?
Не было ни смерти, ни бессмертия тогда.
Не было ни признака дня (или) ночи.
Дышало, не колебля воздуха, по своему закону Нечто Одно,
И не было ничего другого, кроме него.
Мрак был сокрыт мраком вначале.
Неразличимая пучина – все это.

В комментариях к космогоническому гимну У.Н.Браун разъясняет, что, хотя в древнем хаосе присутствовали силы раскрепощения, направленные к упорядочению мироздания и приведению в движение его частей, их активности не хватало. Когда же небо и земля породили некую силу (желание), она разъединила их, заполнив собой пространство между ними. Преодолев инерцию, сила опорожнила хранилища, заключавшие воды и солнце. Все части мира были приведены к порядку и пущены в движение. Но и впоследствии тенденция к хаосу не была искоренена: сопротивление инерции требует преодоления всегда [30]. Ф.Б.Я.Кёйпер [6], а затем В.Н.Топоров [10] обращают внимание на фундаментальное понятие *рита* (мировой порядок), космический закон. Знакомые нам слова *ритуал* (лат. ритус) и *ровный* восходит к *рите*. А наше родное слово *обряд* (славянское обозначение ритуала) семантически и фонетически связано со словом *порядок*.

Центральный миф Ригведы повествовал о том, как бог грома и молнии Ѝндра (сила) «убил перворожденного из драконов.... Вритру́, самого страшного врага, бесплечего... Выход вод, который был заткнут, он открыл, когда убил Вритру» (I, 32; 4, 5, 11). В Ригведе дракон изображен как бесформенность с использованием прилагательных неразделенный, непробудившийся, спящий, погруженный в глубочайший сон, распростёртый. Поэтому М.Элиаде интерпретирует Вритру как хаос до сотворения, мешающий миру осуществиться или длиться [4]. В других версиях космогонии первая стадия творения трактовалась в Ригведе (X, 121) как возникновение из вод хаоса мирового яйца – «золотого зародыша. Родившись, он стал единственным господином творения» [29]. Уместно вспомнить, что по гермопольской версии созидательные потенции олицетворяли четыре бога – мужчины. Их женскими параллелями были четыре богини. Плававшие в водном хаосе (Нуне) восемь богов создали изначальное яйцо, которое разделяло и одновременно соединяло землю и небо. Яйцо было невидимым, поскольку возникло до сотворения мира, во тьме, но содержало дыхание, воздух. Из яйца в образе птицы вышло солнечное божество и, согласно Книге мертвых, сказало: «Я – душа, возникшая из хаоса, мое гнездо невидимо, мое яйцо не разбито» [19].

В древнегреческой традиции идея космоса парадигмальна. Термин *космос* имел несколько фундаментальных смыслов: порядок, строение, правовое (государственное) устройство, мироздание, наряд, краса, украшение. И.Д.Рожанский пишет [31], что Гомер (8 в. до н.э.) существительное *космос* употреблял лишь в первом и последнем смыслах, для вселенной он еще не имел обозначений. Картина мира в его представлениях была статична, пространственно конечна и структурирована в вертикальном направлении: небо олимпийских богов – земля людей – подземное царство мертвых Аид – подземная бездна Тартар, куда

Зевс свергал своих противников – богов. Напротив, Гесиод в поэме «Теогония» (ок. 700 г. до н.э.), рассказывая о происхождении богов, описал динамику космогенеза [31]:

И вот раньше всех возник Хаос, а затем
Гея широкогрудая, вечно незыблемое основание для всех
Бессмертных, которые населяют вершины снежного Олимпа,
И сумрачный Тартар в недрах широкой земли,
И еще Эрос, прекраснейший из всех богов ...

Греческое слово хаос означает зев, зияние, разверстое пространство, пустое протяжение (от глаг. зевать, разверзаться). А.Ф.Лосев и Ф.Х.Кессиди подчеркивают, что у Гесиода Хаос являлся одновременно и мифологическим существом (первопотенцией наряду с Эросом и др., родителем двух космических существ Ночи и Эреба, персонификации мрака), и физическим явлением (бесконечным, пустым и темным пространством), и продуктом художественной фантазии, и категорией первобытного наукообразного мышления. Но гесиодовский Хаос не существовал вечно, не был источником окружающего нас мира, он возник из ничего во времени так же, как и Земля и другие мифологические существа. Гесиодовский космос имел, как и гомеровский, несколько ярусов. В космогонии комедиографа Аристофана (ок. 445 – ок. 386 гг. до н.э.) Хаос, Эреб, Ночь и Тартар выступали как первопотенции. От Эреба и Ночи родилось мировое яйцо, из которого появился Эрос, породивший из семени своего Землю, небо, море, богов, людей. От Хаоса Эрос произвел в Тартаре птиц [13]. А.Ф. Лосев не исключает, что космогония Аристофана – пародия на космогонию орфиков, составлявщих течение, отколовшееся в 6 в. до н.э. от дионисийских мистерий [15]. Ферекид из Сироса (6 в. до н.э.), по преданию – учитель Пифагора [32], считал водный Хаос началом бытия. Анаксагор (ок. 500 – 428 гг. до н.э.), как разъясняет И.Д.Рожанский, учил, что первоначальное состояние Вселенной было подобно Хаосу у Гесиода и апейрону (первоматерии) в философии Анаксимандра (ок. 611 – 546 гг. до н.э.). Физический аспект Хаоса углубленно рассматривался Платоном (427 – 347 гг. до н.э.) и Аристотелем (384 – 322 гг. до н.э.). Платон понимал Хаос как принцип становления чистой, т.е. лишенной всяких физических качеств, материи [31]. Сегодня в близком направлении работает научная школа И.Р.Пригожина. В сочинении «Против ученых» врача и философа конца 2 в. Секста Эмпирика имелось такое рассуждение: « ... Хаос есть место, вмещающее в себя целое. Именно, если бы он не лежал в основании, то ни земля, ни вода, ни прочие элементы, ни весь космос не могли бы и возникнуть. Даже если мы по примышлению устраним все, то не устраняется место, в котором все было» [13].

А.А.Тахо–Годи обращает внимание на особенность римского восприятия хаоса [33]. В «Метаморфозах» Овидия (43 г. до н.э. – 18 г. н.э.) хаос таков [34]:

...Нечлененной и грубой громадой,
Бременем косным он был, – и только, – где собраны были
Связанных слабо вещей семена разносущные вкупе.

В ученой поэме «Фасты» Овидий в соответствии с традицией посвятил день 1 января описанию римского бога входов и выходов «Януса двуглавого», который признается: « Хаосом звали меня в старину (я древнего рода)» [35]. Янус–Хаос, бывший некогда «безликою громадой», разъясняет, что после разделения стихий и образования космоса

... Земля, небеса, и моря, и туманы –
Власти моей подлежат, крепко я это держу.
Все это я сторожу один на пространстве вселенной,
Круговращеньем всего мира заведую я ...
Даже владыке богов вход я и выход даю.

Сходное понимание времени и у Марка Аврелия (2 в. н.э.), римского императора

стоика по убеждениям. В трактате «Размышления» он сетовал: «...как быстро забывается все, как зияет вечность, бесконечная в обе стороны...» [36]. Среди стоиков бытовала и акватическая концепция хаоса, и трактовка хаоса как принципа разделения. Например, Манилий, автор дидактической поэмы «Астрономия» (нач. 1 в.) утверждал: «Хаос некогда расчленил смешанные первоначала вещей при их возникновении» [13].

Возвращаясь в начало 3 в. до н.э. в Китай, космогонический миф можно найти в VII главе даосского произведения «Чжуан–цзы». Профессор Юань Кэ излагает его так [37]. Владыку Южного моря звали Шу (Быстрый), владыку Северного звали Ху (Внезапный), а владыку Середины – Хунь–дунь (Хаос). Шу и Ху часто навещали Хунь–дуня, который встречал их необычайно приветливо. Как отплатить ему за его доброту? Каждый человек, – сказали Шу и Ху, – имеет глаза, уши, рот, ноздри – семь отверстий в голове, чтобы видеть, слышать, есть и обонять. Но Хаос не имел ни одного из них, и жизнь его не была по–настоящему прекрасной. Самое лучшее, – решили они, – просверлить ему эти отверстия. Каждый день они сверлили по дыре. На седьмой день Хаос, которого его лучшие друзья так издырявили, умер. Но в результате возникли вселенная и земля.

Термин *хунь–дунь* употреблялся и в даосской книге «Хуайнань–цзы» (2 в. до н.э.) для обозначения недифференцированного хаоса, когда небо и земля слиты воедино, как куриное яйцо. Постепенно в этом мраке появились духи Инь и Ян, которые начали упорядочивать мир [38]. Дерк Бодде констатирует возрождение этого термина в современном обиходе: так называют пельмени в супе [39]. Более того, исследователи ассоциируют *хунь–дунь* с теми объектами живой природы и предметами материальной культуры, которые сферичны: тыквой – горлянкой, шариком, клецкой. Слово–полуповтор *хунь–дунь* по своему фонетическому рисунку и семантике аналогично словечкам типа *трали–вали*. Как образ бескачественности, а вместе с тем круглости и целостности, Хунь–дунь подобен Хампти–Дампти (Шалтаю–Болтаю из старинной детской песенки, ставшему героем «Алисы в Зазеркалье», причем по замечанию М.Гарднера, в мире Шалтая–Болтая его имя имеет «универсальное значение» [40]) и даже ... Колобку из русской сказки [41].

В японских мифах раннего средневековья мы встречаем знакомый сюжет: вначале был хаос, похожий на океан масла или на яйцо, которое уже содержало в себе зародыш [42].

В более поздних мифологических концепциях часто звучит тема змееборчества. К.Г.Юнг относил дракона к системе архетипов человечества, т.е. наследственно передающихся эмоционально окрашенных схем. По мнению Я.В.Чеснова, дракону отведена образно–понятийная роль посредника между землей и небом (таков, в частности, *зеленый змий* у славян [43]). В.Л.Рабинович, интерпретируя идущий от александрийцев алхимический символ Уробороса, дракона, пожирающего собственный хвост, называет халдейско–вавилонскую традицию, соприкоснувшуюся с египетским магико–герметическим искусством [44].

Чудо Георгия о змие за 700 лет послужило основой многочисленных произведений русского искусства. Оригинальным вариантом драконоборческого сюжета стали русские духовные стихи о Егории Храбром, сыне царствующей «на Святой Руси» Софии Премудрой, заточенном в подземелье на 33 года гонителем христиан «Демьянищем», т.е. императором Диоклетианом. Чудесно освободившись, Егорий приступает к труду просветления мира. Внимательному читателю ясно: Егорий всему дает *закон*, во всем открывает дремлющий *софийный* смысл, выводит каждое существо на предназначенную ему орбиту, и змеящийся тесный хаос раздвигается в просторный и светлый космос [45].

Модели мира и времени

У древнегреческих философов, начиная с Гераклита (ок. 554 – 483 гг. до н.э.), словом *космос* обозначались и вселенная, и более локальная действительность, окружающая человека, и эстетически отмеченный пространственный порядок. У римлян в первых двух случаях использовалось слово *мундус*, а в последнем – *классис*. Когда–то *классис* обозначало флот, т.е. строй судов, позднее – порядок вообще. Отсюда – классификация (упорядочение), классический (первоклассный, образцовый). По наблюдению В.Н.Топорова, немецкое слово *вельт* и английское *уорлд*, обозначающее мир, объединяют корни *вер* (человек) и *альтар* (возраст, поколение). Аналогичную интерпретацию допускает славянское слово *век* [13].

Впервые представление о космосе как временном потоке, уносящем события и человека в историю и далее в вечность, отменявшее понятие цикла – наиболее ранней модели космической динамики [1, 31] (симптом ее появления в сознании – ритмический орнамент на изделиях новокаменного века [1, 38, 41, 46]) – выдвинули древнееврейские пророки. Центральное понятие библейского мистического историзма – *олам* (буквально – сокрытое, завешанное, т.е. не только пра–время, но и будущность). С.С.Аверинцев дает такое толкование: олам – и вечность, и *мировое время* (в переводе М.Бубера и И.Розенцвейга), которое движется и может кончиться и смениться другим оламом, другим состоянием времени и вещей. Талмуд упоминал олам в составе эсхатологического понятия, переводимого с равным правом и как *будущий век*, и как *будущий мир* [47]. Подобный подход к необратимым процессам, какими являются все исторические, не противоречит и концептуальным работам Г.Хакена. Подводя итог исследованиям по синергетике, он выразился лаконично: «Мир – не лазер» [48]. Тем не менее в оламе можно видеть категорию, обобщающую неравновесный фазовый переход.

М.Элиаде развивает мысль о том, что новогодние ритуалы и праздники у древних египтян, вавилонян, аккадцев, хеттов, иранцев, индийцев, семитов, персов, греко–римлян, германцев, славян, японцев воспроизводили космогонический акт. А это требовало возродить и реактуализировать первоначальный хаос, предшествовавший творению, «когда возможное неотличимо от действительного». Последнее предполагало, во–первых, аннулирование закона времени: почти повсеместно в древнем мире распространено поверье, что умершие возвращаются к своим семьям в дни, близкие к Новому году, поскольку возродился первоначальный хаос, мировой порядок уничтожается и воссоздается заново. Во–вторых, отмену социальной иерархии и норм поведения, выражающуюся, например, в том, что господа ухаживали за своими слугами, допускались все виды распущенности, особенно половой: тем самым достигался регресс социальных структур к бесформенному единству, оргиастическому хаосу. Тенденция периодического возрождения космоса и времени, основанная на наблюдениях за биокосмическими ритмами, упраздняет *историю*.

А ветхозаветные пророки хотя и интерпретировали исторические события как вмешательство бога Яхве, но, отрицая возможность вечного повторения посылаемых им страданий, учили, что когда явится Мессия, мир будет спасен раз и навсегда. Тем самым идея цикла преодолевалась, история приобретала ценность диалога с грозным Яхве и неповторимой цепи событий: победа над хаосом (вместо новогоднего ее празднования) переносилась в будущее [4]. Можно добавить, что согласно Каббале (возникшей значительно позже, между 3 и 8 вв.) цифра 8 выражает идею вечности, а 10–я буква древнееврейского алфавита «Иод» – идею Порядка. В ее части, называемой Книгой Творения (Сефер Иецира) объявлено, что бог Эль Шаддай (Яхве) создал мир свой счислениями. О десяти абстрактных числах (Сефиротах) установлено: «первое – дух Бога живого ..., второе – дуновение от духа ..., третье – вода от эфира. Он начертал и выбил из нее хаос («Тоху и Боху»), влагу и глину... Четвертое – огонь от воды...» [49].

Хаос и порядок составляют бинарную оппозицию, посредством которой

строились древние картины мира. Смысл этой оппозиции обычно видят в том, что космос вторичен по отношению к хаосу: и во времени, и по составу элементов. Порядок образуется из хаоса путем трансформации *свойств* последнего: тьма преобразуется в свет, пустота – в заполненность, аморфность в структурность, непрерывность в дискретность, бескачественность – в разнообразие качеств и т.д.

Почти во всех мифах последним этапом перехода хаоса в космос оказывается человек [50]. И Бог, и человек часто выступают как образы мирового порядка, но и космос может служить моделью Бога и человека. По мере идущего процесса самоорганизации космоса хаос оттесняется на его периферию (вовне или вниз). Но полностью хаос не преодолевается: он затаивается [10, 13]. Согласно М.Элиаде издревле считалось, что Хаос и Космос соприкасались в священном центре: храме, городе, воздвигнутом, как например, Вавилон, Ларса, Иерусалим, над пунктом, где находилось устье подземных вод Хаоса.

В жизни человека доминирует порядок, логос. Деятельность человека (по крайней мере, мирная деятельность, если не принимать во внимание ее последствий, губительных для биосферы) направлена на *космизацию*, на превращение Натуры в Культуру. Известно, что ритуалы, предшествующие использованию новой территории, строительству храма и т.п., символически повторяли акт творения, превращая жизненное пространство из *хаоса* в *космос* [4]. Противопоставляя хаосу мировой порядок, В.Н.Топоров подчеркивает временной характер последнего: во–первых, он возник, во–вторых, он может (а по некоторым учениям – должен) погибнуть из–за вселенского катаклизма либо из–за постепенного снашивания космического начала в хаосе [13]. Например, катастрофа, при которой «основания земли потрясутся», описана в пророчестве Исайи (Ис., 24, 20): « Шатается земля, как пьяный, и качается, как колыбель, и беззаконие ее тяготеет над ней; она упадет и уже не станет.» Апокалиптические перспективы изображены христианским богословом рубежа 3–4 вв. Лактанцием [15]. «Прорицание вёльвы» – первая песня «Старшей Эдды», возникшая в Исландии в 10 в., – содержало картины *нулевого* хаоса, золотого века, гибели богов и повторного рождения мира [51, 52].

Время хаоса

Следует отличать два типа (или две стадии) хаоса – *статический* и *динамический*. Первый, согласно Ф.Б.Я. Кёйперу, есть неделимое единство, предшествующее сотворению *космоса–истории* [6], т.е. вполне равновесное состояние праокеана. Второй тип – пришедший в движение хаос, испытывающий спонтанное изменение благодаря наличию неравновесности. Если использовать мысль Г.А.Ткаченко [41], *динамический* хаос осуществляет материнскую потенцию материи, о которой в древнекитайской книге «Лао–цзы» напоминает образ «темной самки», а в «Паломничестве Чайльд–Гарольда» (IV, 71)– байроновская строка: «... и хаос бьётся в муках родовых».

Каково же происхождение самого хаоса, равно как и Демиурга (Преобразователя хаоса в космос)? Здесь возможны различные начальные и граничные условия. Эволюционистские мифы задают эти условия в *минус–бесконечности*. Согласно им первозданный хаос безначален и беспределен. Момент времени, принятый за нуль, – это момент, когда началась деятельность Демиурга, направленная на первоматерию либо на самого себя. Креационистские мифы, наоборот, исходят из положения, что до момента времени, принятого за *нуль*, не было абсолютно ничего. Благодаря воле Креатора бытие возникло в *нулевой* момент времени из абсолютного ничто в акте творения. В китайской натурфилософии, например, небытие и бытие в своей совокупности противопоставлены предшествующему им Хаосу как первонеразделенности. Хаос же противопоставлен абсолютному ничто, фундаментальному по отношению к этой иерархии уровней бытия и предшествующему им всем [41].

Универсальная и древняя концепция идеального первосостояния

человечества (золотого века) и отпадения человека от него породила гипотезу о том, что до начала миротворения произошла некая метакатастрофа. Её рудиментом был первозданный Хаос. Поэтому всякая демиургия, всякая творческая деятельность, противостоящие ему, выступают как «ликвидация недостачи» (выражение В.Я.Проппа), причем она неисконна, вторична. Опираясь на космогонически–эмбриогонические параллели в мифах и ритуалах, т.е. на связь *верха* и *низа*, того, что вовне, и того, что внутри, В.Н.Топоров приводит в качестве аналога идеальное первосостояние (абсолютный *уют* и *защищенность)* плода в материнском чреве. После рождения возникает принципиально иное состояние, в котором основная проблема – сохранить только что возникший микрокосм – решается путем «ликвидации недостачи», т.е. деятельности, самоорганизации [10]. Иную гипотезу выдвигает поэт русской эмиграции Юрий Иваск (1978 г.):

Дала ли Тьма (хаос, ничего) согласие
на то, чтобы из нее творили мир?
– Нет.
Отсюда зло: месть тьмы.
Тьма сама по себе не зло.
Она – вольная воля.

Перекличка Ю.Иваска с Л.Шестовым (см. эпиграф) очевидна. А вот Я.Голосовкер, стремясь понять, что же хотел сказать Эсхил своим Прометеем, задается вопросами: «Не получил ли Зевс свое провидение от стихийной мудрости Хаоса?... Не велик ли Прометей, потомок Хаоса, создатель культуры и человеческого устроения, величием мироустроителя – Зевса?» По предположению Я.Голосовкера, слиянием страстного разума Прометея с бесстрастным разумом Зевса в эпилоге трагедии Эсхил дает понять, что состоялось примирение хаоса и гармонии, спасшее зевсов миропорядок [3].

Неистребимость отстатков хаоса всегда фиксируется сознанием человека, формируя мировосприятие, тонко переданное Ф.Тютчевым:

И бездна нам обнажена
Своими страхами и мглами,
И нет преград меж ней и нами –
Вот отчего нам ночь страшна.

Частые социальные катастрофы, определившие лик столетия, обострили в культурном самосознании ощущение всеприсутствия хаоса и его потаённости. В России это чувство разделяли едва ли не все мыслители и литераторы «серебряного века». Так, в «Шуме времени» (1923 г.) Осип Мандельштам, вспоминая свои детские переживания в конце глухих 1890–х годов писал об угрозе разрушения, с которой ассоциировался хаос у его старших современников: «Весь стройный мираж Петербурга был только сон, блистательный покров, накинутый над бездной...» Что же было в действительности? «не родина, не дом, не очаг, а именно хаос, незнакомый утробный мир, откуда я вышел...» А, например, у американца Генри Миллера, жившего в Париже, писателя с совсем иным историческим опытом, отношение к хаосу лишено эсхатологического оттенка и даже конструктивно. В романе «Тропик Рака» (1934 г.) он мимоходом дает определение, вполне уместное в монографии по нелинейной физике: «Хаос – это партитура действительности».

Итак, о времени хаоса можно говорить в двух смыслах. Узко – как о его стадиях (или типах): *статический* [6] и *динамический* хаос. Предельно широко – как об эре конкурентного сосуществования установленного демиургом космического порядка и затаившегося хаоса. Наша современность в силу своей перманентной катастрофичности претендует быть последней эпохой этой эры.

Если опираться на концепцию архетипа, разработанную К.Г.Юнгом [53], следует думать, что в нашем бессознательном присутствуют психические структуры, передающие мифологемы древнейших картин мира, обсуждавшихся выше. По тому, какая мифологема преобладает, должны выделяться

особенностями своего творчества (яснее всего – художественного) те или иные натуры. Тогда естественно ожидать, что существуют три *чистых* разновидности творческих фигур. Назовем их условно так: *страж времени*, *хранитель порядка* (*housekeeper*), *блюститель хаоса*. В качестве примеров, иллюстрирующих (довольно субъективно) предложенную классификацию, можно привести имена виртуозно владевших логосом Велимира Хлебникова, Даниила Андреева, Андрея Белого. Аналогичные триады нетрудно найти в мировой живописи, музыке и т.д.

Выявление произведений отечественной словесности, принадлежащих третьей разновидности авторов, должно обозначить «Русский Хаос», т.е. мир художественных воплощений философемы хаоса, а вместе с тем составить одноименную книгу (подобную сборнику В.П.Шестакова и А.Н.Богословского [54]), объединяющую наблюдения и раздумья блюстителя хаоса в России. По-видимому, среди вытекающих из них заключений будет и вывод о том, что неизбежное присутствие хаоса в более или менее упорядоченном мире формирует специфического человека, способного к эвристическому проектированию вероятностной модели своего поведения. Прецедент можно найти, если обратиться к фольклорно–мифологическому образу трикстера, суть поведения которого в том, что оно всегда нарушение норм, сложившихся в его сообществе. Характеризуя его парадоксальную одаренность, В.Н.Топоров пишет: «Готовность и умение усвоить себе особый тип поведения с особой логикой (точнее, анти–логикой) определяет *активный* полюс деятельности трикстера; отдача же себя ситуации рокового выбора, напротив, отсылает к *пассивному* полюсу, где сам трикстер оказывается игрушкой в руках Судьбы, если только на следующем этапе он не переигрывает ее за счет особой, даже Судьбе не известной стратегии поведения».

* * *

Читателю предоставляется повод задуматься, не прижился ли в нем человек трикстерной породы, например, динамически ориентированный фаталист? Его главная примета, по словам В.Н.Топорова [10], состоит в том, что он «всегда ищет в *хаосе* возможностей свой *единственный* шанс на необщих путях, а ими обычно оказываются такие пути, которые расцениваются коллективным сознанием... как неправильные, неэффективные, ошибочные, заведомо плохие. Собственно говоря, так оно и есть, особенно если учесть, что главная цель коллектива – установка не на максимум, а на гарантию сохранности, часто предполагающей именно стабильность, неизменность, верность апробированным образцам... В формуле «пан или пропал» для коллектива самое важное – *не пропасть*. Но существует класс экстремальных ситуаций, когда единственный шанс *спасения* – в отдаче себя выбору между «пан» или «пропал», полным успехом или тотальным поражением (гибелью), во вступлении на путь риска, где неудача окончательна, необратима и навсегда закрывает ситуацию».

Читателей, не равнодушных к теме данной статьи, автор приглашает углубиться в книгу «Дао и Логос» (издана в конце 1992 г.), увлекательно написанную культурологом–востоковедом Т.П.Григорьевой, показавшей, какое место занимала тема Хаоса у ряда русских философов начала 20 в.

Библиографический список

1. *Лосев А.Ф.* Диалектика мифа // Лосев А.Ф. Философия. Мифология. Культура. М., 1991. С.21.

2. *Фрейденберг О.М.* Миф и литература древности. М.:, Наука, 1978.

3. *Голосовкер Я.Э.* Логика мифа . М.: Наука, 1987.

4. *Элиаде М.* Космос и история. М.: Прогресс, 1987.

5. *Леви–Строс К.* Структурная антропология. М.: Наука, 1983.

6. *Кёйпер Ф.Б.Я.* Труды по ведийской мифологии. М.: Наука, 1986.

7. *Хук С.Г.* Мифология Ближнего Востока. М.: Наука, 1991.

8. *Мелетинский Е.М.* Поэтика мифа. М.: Наука, 1976.

9. *Стеблин–Каменский М.И.* Миф. Л.: Наука, 1976.

10. *Топоров В.Н.* О ритуале. Введение в проблематику //Архаический ритуал и фольклор в раннелитературных памятниках. М., 1988. С.7.

11. *Иорданский В.Б.* Хаос и гармония. М.: Наука, 1982.

12. *Дьяконов И.М.* Архаические мифы Востока и Запада. М.: Наука, 1990.

13. Мифы народов мира. Энциклопедия: в 2–х томах /Под ред. С.А.Токарева. М.: Сов. энциклопедия, 1980. Т.1.; 1982. Т.2.

14. Мифологический словарь /Под ред. Е.М.Мелетинского. М.: Сов. энциклопедия, 1990.

15. Словарь античности /Пер. с нем. М.: Прогресс, 1989.

16. *Брей У., Трамп Д.* Археологический словарь. М.: Прогресс, 1990.

17. *Антес Р.* Мифология в древнем Египте // Мифология древнего мира. М., 1977. С. 55.

18. *Редер Д.Г.* Мифологическое мышление и зачатки научного мировоззрения в древнем Египте //Культура древнего Египта. М., 1975. С. 223.

19. *Липинская Я., Марциняк М.* Мифология древнего Египта. М.: Искусство, 1983.

20. *Франкфорт Г., Франкфорт Г.А., Уилсон Дж., Якобсен Т.* В преддверии философии. М.: Наука, 1984.

21. Я открою тебе сокровенное слово: Литература Вавилонии и Ассирии / Сост. В.К.Афанасьевой и И.М.Дьяконова. М.: Худож. лит., 1981.

22. *Оппенхейм Л.* Древняя Месопотамия. М.: Наука, 1990.

23. *Крамер С.Н.* Мифология Шумера и Аккада //Мифология древнего мира. М., 1977. С.122.; *Он же*. История начинается в Шумере. М.: Наука, 1991.

24. *Гютербок Г.Г.* Хеттская мифология //Мифология древнего мира. М., 1977. С. 161.

25. *Ардзинба В.Г.* Ритуалы и мифы древней Анатолии. М.: Наука, 1982. С.7.

26. Луна, упавшая с неба. Древняя литература Малой Азии //Пер. Вяч. Вс. Иванова. М.: Худож. лит., 1977. С. 52.

27. *Гордон С.* Ханаанейская мифология //Мифологии древнего мира. М., 1977. С. 199.

28. *Шифман И.Ш.* Культура древнего Угарита (XIУ–XШ вв. до н.э.). М.: Наука, 1987. С. 56.

29. Ригведа: Избранные гимны /Пер. Т.Я. Елизаренковой. М.: Наука, 1972. С. 259.

30. *Браун У.Н.* Индийская мифология //Мифологии древнего мира. М., 1977. С. 283.

31. *Рожанский И.Д.* Развитие естествознания в эпоху античности. М.: Наука, 1979. С. 65.

32. *Жмудь Л.Я.* Пифагор и его школа. Л.: Наука, 1990. С. 11.

33. *Тахо–Годи А.А.* Греческая мифология. М.: Искусство, 1989. С. 7.

34. *Публий Овидий Назон.* Метаморфозы /Пер. С.В.Шервинского. М.: Худож. лит., 1977. С. 31.
35. *Публий Овидий Назон.* Элегии и малые поэмы /Пер. с лат. М.: Худож. лит., 1973. С. 236.
36. *Аврелий Марк Антонин.* Размышления. Л.: Наука, 1985. С. 16.
37. *Юань Кэ.* Мифы древнего Китая. М.: Наука, 1987. С. 10.
38. *Евсюков В.В.* Мифология китайского неолита. Новосибирск. Наука, 1988. С. 34.
39. *Бодде Д.* Мифы древнего Китая // Мифологии древнего мира., 1977. С. 366.
40. *Кэролл Л.* Алиса в стране чудес. Алиса в Зазеркалье. М.: Наука, 1978. С. 171.
41. *Ткаченко Г.А.* Космос, музыка, ритуал: Мифы и эстетика в «Люйши чунцю». М.: Наука, 1990. С. 16.
42. *Сондерс Э. Д.* Японская мифология // Мифологии древнего мира. М., 1977. С. 405.
43. *Чеснов Я.В.* Дракон: метафора внешнего мира // Мифы, культура, обряды народов Зарубежной Азии. М., 1986. С. 59.
44. *Рабинович В.Л.* Алхимия как феномен средневековой культуры. М.: Наука, 1979. С. 70.
45. *Мяло К.Г.* Космогонические образы мира: между Западом и Востоком // Культура, человек и картины мира. М., 1987. С. 227.
46. *Дьяконов И.М.* Введение // Мифологии древнего мира. М., 1977. С.5.
47. *Аверинцев С.С.* Поэтика ранневизантийской литературы. М.: Наука, 1977. С. 84.
48. *Данилов Ю.А., Кадомцев Б.Б.* Что такое синергетика? //Нелинейные волны. Самоорганизация. М., 1983. С. 5.
49. *Папюс.* Каббала, или Наука о Боге, Вселенной и Человеке /Пер. с фр. А.В.Трояновского; Под ред. Н.А.Переферковича. СПб.: Изд. В.Л.Богушевского. 1910. С. 261.
50. *Евсюков В.В.* Мифы о вселенной. Новосибирск, 1988. С. 6.
51. Старшая Эдда // Беовульф. Старшая Эдда. Песнь о Нибелунгах. М., 1975. С. 183.
52. *Щербаков В.И.* Где жили герои эддических мифов? М.: Знание, 1989.
53. *Юнг К.Г.* Психология и поэтическое творчество // Самосознание европейской культуры XX века. М., 1991. С. 103.
54. Русский Эрос, или философия любви в России /Сост. В.П.Шестаков; Коммент. А.Н. Богословского. М.: Прогресс. 1991.

Томский университет *Поступила в редакцию 28.02.92 г.*

CHAOS, ORDER, TIME IN ANCIENT PICTURES OF THE WORLD

B.N. Poizner

The national images of chaos, order and time in myths (26 age B.C. – 13 age A.D.) are described. Their important interpretations are systematized, their relation with rituals and modern culture self–consciousness is discussed. The author advances the conception such as « time of chaos» and «Russian Chaos» (i.e. a sphere of artistic realizations of philosophical category of chaos).

Пойзнер Борис Николаевич – родился в 1941 году в Томске, окончил Томский университет в 1963 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в ТГУ (1970) в области теории колебаний и волн. Доцент ТГУ. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Соавтор учебных пособий «Лабораторный практикум по физике лазеров», «Импульсные лазеры на плотных газах» и др. Опубликовал статьи по указанной тематике и по ряду гуманитарных проблем. Инициатор издания и редактор библиографических указателей, посвященных научному творчеству, применению компьютера в образовании, литературе и философии русской эмиграции, университетскому образованию, синергетике и сопредельным наукам. Член комиссии по творческому наследию Густава Шпета. Председатель Вольного Гуманитарного Семинара г. Томска

В издательстве Саратовского университета вышли в свет в 1993 году

Учебное пособие для студентов физического факультета
по курсам «Физика полупроводниковых приборов», «Оптоэлектроника»

Б.И. Горфинкель

ЗНАКОСИНТЕЗИРУЮЩАЯ ЭЛЕКТРОНИКА:
Низковольтная катодолюминесценция

Учебное пособие для студентов физического факультета
по курсу «Организация, планирование и управление предприятиями
электронной промышленности»

Б.И. Горфинкель

ЗНАКОСИНТЕЗИРУЮЩАЯ ЭЛЕКТРОНИКА:
Управление разработками и производством изделий электронной техники.
Организационные структуры

анонсанонс анонс анонс анонсанонс анонс анонс анонсанонс
онс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс
с анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс

Изд.вузов «ПНД», т.1, № 3, 4, 1993 УДК 53.1; 53:001.8

НОВОЕ ОТКРЫТИЕ ВРЕМЕНИ

И.Пригожин
(Бельгия)

Введение

Я хотел бы посвятить это сообщение памяти моего друга Бориса Григорьевича Кузнецова. Его книга «Разум и бытие» недавно вышла в английском переводе [1]; еще раз я был поражен сходством подхода, который был разработан Кузнецовым, и тем, который я намереваюсь сейчас изложить. Основная проблема, на которой сосредотачивает внимание Кузнецов, состоит в анализе той роли, которую играют вероятность и необратимость в нашей концепциии Вселенной. Следующие три отрывка могут служить примерами различных подходов к этой проблеме.

Так, у Лукреция мы читаем:

> «Я бы желал, чтобы ты был осведомлен здесь точно так же,
> Что, уносясь в пустоте, в направлении книзу отвесном,
> Собственным весом тела изначальные в некое время,
> В месте неведомом нам начинают слегка отклоняться,
> Так что едва и назвать отклонением это возможно» [2].

У Эйнштейна мы находим следующую мысль:

«Слабость теории заключается, с одной стороны, в том, что она не проводит нас к более тесному объединению с волновой теорией, и, с другой стороны, в том, что время и направление элементарного процесса предоставляется «случаю»; впрочем, я полностью уверен в надежности выбранного метода»[3, с. 406].

Б.Г.Кузнецов полагает, что «..мировая линия без определенных эквивалентов эпикурейских clinamen*, без ультрамикроскопического содержания – это не реальное бытие, а вполне детерминированное ничто»[1, ч.1, гл.3].

Эти высказывания требуют некоторых пояснений. Прежде всего отметим аналогию между Эйнштейном и Лукрецием. Оба подчеркивают, что точное время протекания элементарных процессов определяется случаем. Оба утверждают, что без определенного элемента стохастичности мы получили бы то, что Кузнецов в своей книге называет «самое большее пустотой», а отнюдь не мир, каким мы его знаем. Иными словами, основная проблема заключается в конфликтной ситуации

Доклад на VII Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки (Москва, 17–22 августа 1987 г.)

* Clinamen (лат) – уклонение, отклонение. Имеются в виду отклонения атомов от закономерных траекторий, носящие по Эпикуру случайный характер и делающие возможными столкновения атомов – *Прим. ред.*

статическим описанием в рамках классической физики, основанной на детерминистических и обратимых во времени законах, и миром, каким мы его знаем, заведомо содержащим в качестве основных элементов вероятность и необратимость.

Ясно, что классическая точка зрения обладает дуалистической структурой: феноменологический уровень соответствует необратимым и стохастическим законам, тогда как на фундаментальном уровне, классическом или квантовом, мы имеем дело с обратимыми во времени детерминистическими законами. В случае квантовой механики я имею ввиду, конечно, описание в терминах гильбертова пространства. Можем ли мы преодолеть этот дуализм и прийти к более целостному взгляду на физику? Думаю, что теперь это возможно. Конечно, новые результаты, о которых пойдет речь в моем докладе, отвечают не на все вопросы, поставленные Кузнецовым, но они представляют обнадеживающий шаг в намеченном им направлении.

Проблема, с которой нам приходится сталкиваться, очень сложна и влечет за собой глубокие концептуальные изменения, которые продолжаются и поныне. Я начну с феноменологического – термодинамического уровня; затем я рассмотрю те изменения, которые нам необходимо принять, имея в виду язык классической и квантовой механики, и в заключение приведу некоторые соображения относительно недавней эволюции космологических идей. Ясно, что диапазон этих проблем необъятен, и поэтому я вынужден принести извинения за несколько поверхностный харатер дальнейшего изложения (дальнейшие подробности см. в оригинальных работах [11 и 14]).

Как уже было сказано, мне отнюдь не случайно придется рассмотреть широкий диапазон физических явлений; я хотел бы передать свое ощущение: создание более единой физики, основанной на таких понятиях, как стохастичность и необратимость, ныне вполне в наших возможностях. Тем не менее многое из того, о чем пойдет речь ниже, еще придется дополнять или менять.

1. Феноменологическое описание

Пожалуй, начать уместно со второго начала термодинамики. Эволюцию энтропии в открытой системе можно разделить на обмен с окружающей систему средой (поток энтропии d_eS, который может быть положительным, отрицательным или равным нулю) и внутреннее производство энтропии d_iS (соответствующее необратимым процессам и всегда положительное или равное нулю)(рис. 1).

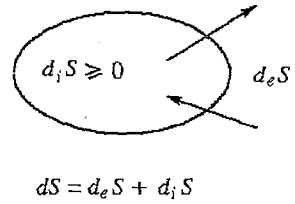


Рис. 1. Термодинамические соотношения для открытых систем включают в себя внутреннее производство энтропии (d_iS) и обмен энтропии с окружающей средой (d_eS)

Подчеркнем важность необратимых процессов [4, 5]. Действительно, и в химии, и в биологии подавляющее большинство процессов необратимы. Кроме того, я хотел бы подчеркнуть, что, как теперь известно, необратимость связана не только с разрушением структур, с беспорядком: производство энтропии сопряжено и с порядком, и с беспорядком. Приведу лишь один-единственный пример. Рассмотрим хорошо известный физический эффект: термодиффузию. Возьмем замкнутую систему, состоящую из двух компонентов – водорода и азота. При однородном распределении температуры распределение водорода и азота также равномерно. Но стоит нарушить однородность теплового распределения, введя градиент температуры, как возникнет градиент концентрации. Мы видим, таким образом, что производство

энтропии оказывает двойной эффект: оно связано с потоком тепла, порождающим беспорядок, но оно же связано и с антидиффузией, а антидиффузия означает порядок, поскольку приводит к частичному разделению водорода и азота. Этот двойной эффект можно наблюдать во многих ситуациях (рис. 2).

Здесь мы в действительности оказываемся перед новой парадигмой. Традиция сопоставляла порядок с равновесием, а беспорядок с нарушением

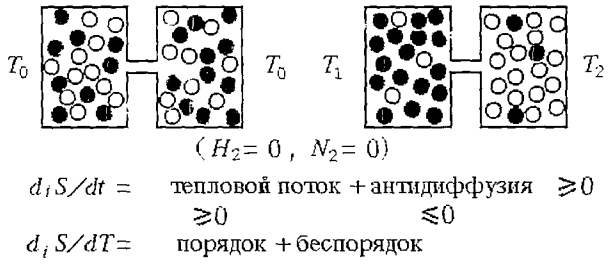


Рис. 2. Конструктивная роль необратимых процессов при термодиффузии

равновесия; примером первого служил кристалл, примером второго – турбулентность. Мы же теперь пришли к противоположной точке зрения, согласно которой возникновение порядка связывается с неравновесностью, а беспорядок может быть соотнесен с равновесными структурами, даже с кристаллами, если в описании нормальных мод мы включим тепловой шум. Возникновение таких неравновесных структур хорошо известно здесь, в Москве, поскольку советская школа сыграла важную роль в их исследовании во многих ситуациях, таких, как химические колебания или гидродинамические неустойчивости.

Рассмотрим неустойчивость Рэлея–Бенара. Я выбрал этот пример потому, что именно он проложил путь к некоторым современным численным экспериментам. Я имею ввиду работу М. Марешаля и Е. Кестемона [6, 7] по молекулярной динамике неравновесных систем. Обычно молекулярная динамика имеет дело лишь с равновесными системами, но в последние годы, благодаря неизмеримо возросшим вычислительным возможностям, связанным с появлением «суперкомпьютеров», началось численное моделирование неравновесных жидкостей.

Работа Марешаля и Кестемона посвящена исследованию неустойчивости Рэлея–Бенара, о которой мы только что упоминали. Рассмотренная ими модельная система состоит из 5400 твердых дисков, заключенных в прямоугольник; его вертикальные стороны являются отражающими границами, а горизонтальные – тепловыми резервуарами. Внешняя сила (аналогичная гравитации) действует на частицы жидкости по вертикали сверху вниз, температура нижнего резервуара выше, чем температура верхнего. Поведение этой модели жидкости проинтегрировано по времени на компьютере. На рис. 3, *б* и 3 ,*в* показана одна и та же система после 10^6 столкновений. Отличаются только градиенты температуры: на рис. 3,*в* градиент больше, чем на рис. 3, *б*. Внешние условия на рис. 3, *б* выбраны ниже порога гидродинамической макроскопической неустойчивости. Однако на нем уже можно заметить когерентные структуры, хотя они подвержены сильным флуктуациям во времени (рис. 3).

Примечательно, что относительно малые системы демонстрируют поведение, которое может быть объяснено в терминах макроскопической гидродинамики. Однако результаты численного моделирования выходят за пределы чистой гидродинамики, так как показывают, каким образом флуктуации приводят к возникновению макроскопической неустойчивости. Недавно в еще не

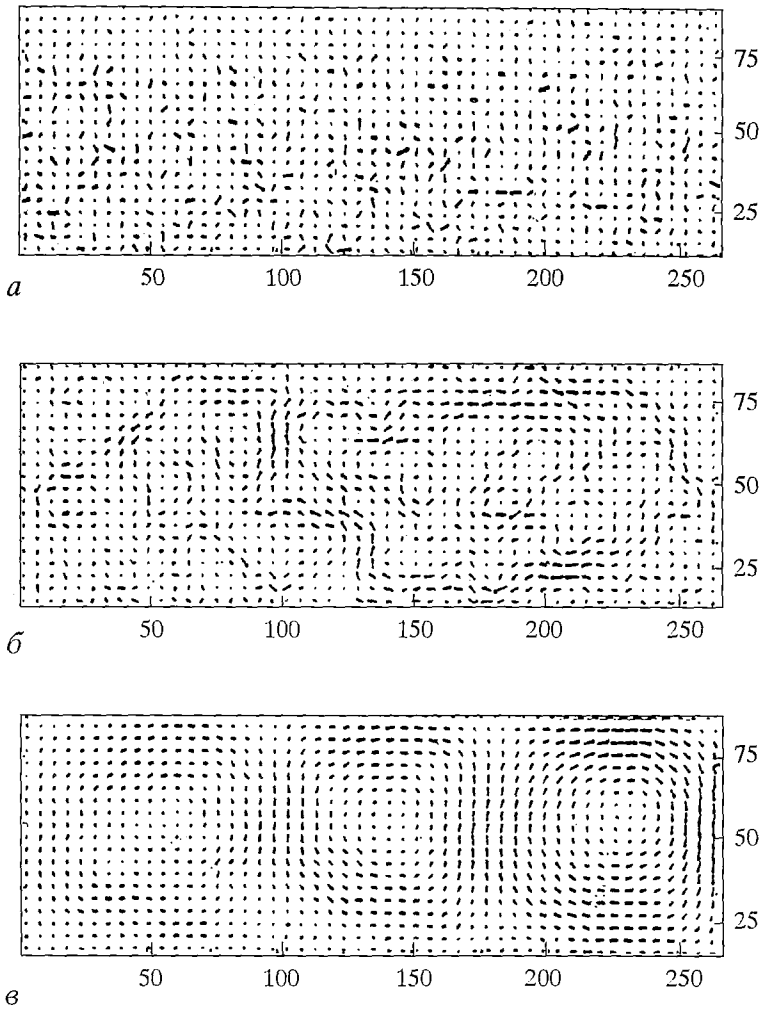


Рис. 3. Молекулярная динамика: конечная двумерная система из 5400 твердых дисков под действием градиента температуры и внешней силы (гравитации). На рисунках показаны характерные распределения скоростей: каждая стрелка соответствует средней скорости частиц, находящихся в одной ячейке (обычно в ячейке находится 5 частиц). На рис. 3, *а* представлено начальное (случайное) распределение средних скоростей. На рис. 3, *в* то же распределение показано после нескольких тысяч столкновений; видны вихри, соответствующие регулярным потокам частиц. На рис. 3, *б* показано то же распределение при неколько иных внешних ограничениях; хотя отчетливо видны вихри, никаких устойчивых упорядоченных структур в действительности здесь нет

опубликованной работе М. Марешаля и А.Амеллаля – было продемонстрировано, какую роль играют дальние корреляции в химических системах. Такие флуктуации приводят к поразительным эффектам; например, флуктуации области, малой по сравнению с длиной корреляции, подчиняются другим законам, чем флуктуации больших областей. Этот пример показывает, как неравномерность может создавать дальние корреляции. То, что неравномерность может играть конструктивную роль, в настоящее время установлено вне всяких сколько–нибудь разумных сомнений. Теперь я перейду к микроскопическому описанию необратимых процессов в рамках концептуальных основ классической и квантовой механики.

2. Концептуальные изменения на микроскопическом уровне

В этой области ситуация резко изменилась за последние три десятилетия. В книге, написанной мной совместно с Изабель Стенгерс [5], я подчеркивал, что необратимость возникает вследствие динамической неустойчивости. Ныне эта идея стала общепринятой. В качестве примера приведу цитату из недавней статьи Дж. Лайтхилла: «Я должен говорить от имени широкого глобального сообщества ученых, занимающихся механикой. Мы хотели бы коллективно принести свои извинения за то, что вводили в заблуждение образованную публику, распространяя идеи относительно детерминизма систем, удовлетворяющих законам движения Ньютона, ибо после 1960 г. было показано, что это не так» [8, с. 35]. Весьма необычно видеть, как научное сообщество приносит извинения за ошибку, длившуюся более трех столетий.

Предельными случаями динамической неустойчивости являются потоки Колмогорова; степень их неустойчивости мы можем измерять «показателями Ляпунова», характеризующими экспоненциальный рост расстояния между двумя траекториями; показатель Ляпунова определяет «временной горизонт» системы. Это означает, что динамика имеет теперь дело с системами, обладающими внутренней стохастичностью (рис. 4).

Теорема о возвращаемости Пуанкаре

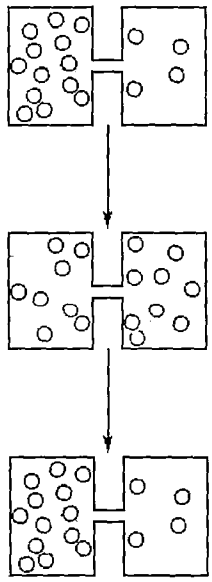


Рис. 5

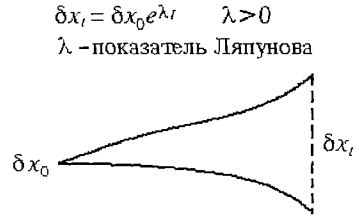


Рис. 4

Рис. 4 Положительные показатели Ляпунова служат мерой расходимости траекторий, удовлетворяющих почти тождественным начальным условиям

Рис. 5. Теорема Пуанкаре о возвращаемости утверждает, что необратимость только «кажущаяся»: любая интегрируемая система по истечении достаточно большого интервала времени возвращается в состояние, сколь угодно близкое к исходному

Я хотел бы также кратко упомянуть о том, что кинетическое описание, восходящее к Л. Больцману, очень тесно связано с динамической устойчивостью. Мы не можем входить здесь в детали, но я хотел бы отметить важную роль резонанса; именно резонанс, как мы знаем из теоремы, доказанной Пуанкаре в 1892 г., препятсвует интегрируемости динамической системы. Именно из–за резонанса, проявляющегося в так называемой проблеме малых знаменателей, некоторые классические системы оказываются неинтегрируемыми. Всем известно, что именно в этом состоит исходный пункт теории Колмогорова – Арнольда – Мозера. Фундаментальным понятием кинетической теории является оператор

столкновений, и этот оператор непосредственно связан с резонансами. Этот вопрос мы недавно рассмотрели вместе с моим коллегой Т. Петроски [12, 13]. Таким образом, кинетическая теория очень близка к потокам Колмогорова, и в отношении ее мы можем сформулировать те же замечания о существовании «временного горизонта».

Попытаемся выяснить теперь, почему классические утверждения об иллюзорном характере необратимого описания более не верны. Одним из главных аргументов была, конечно, теорема Пуанкаре о возвращаемости (рис. 5).

Согласно этой точке зрения, каждая динамическая система должна быть периодической, если достаточно долго наблюдать за ее поведением; в этой связи уместно напомнить одно из высказываний М. Смолуховского, приведенное у Г. Вейля: «Если бы мы продолжали наше наблюдение бесконечно долго, то все процессы стали бы обратимыми» [9]. При наблюдении в течение достаточно большого времени каждая система была бы квазипериодической. Как сказано у Чандрасекхара, «мы можем заключить вместе со Смолуховским, что процесс кажется необратимым (или обратимым) в зависимости от того, характеризуется ли начальное состояние большим (или малым) средним временем возвращения по сравнению с временем, в течение которого система находится под наблюдением» [10]. Иначе говоря, в природе нет ничего похожего на истинную необратимость. Но теперь мы понимаем, как избежать такого вывода. Так как «время возвращения» Пуанкаре, вообще говоря, необычайно велико по сравнению с «временным горизонтом» Ляпунова, теорема Пуанкаре о возвращаемости неприменима к сильно неустойчивым системам. Дело в том, что за пределами временного горизонта Ляпунова понятие траектории утрачивает смысл, и нам необходимо использовать другое описание.

Рассмотрим более подробно механизм столкновений в системе твердых дисков. В такой системе мы можем провести различие между «предстолкновительными» и «постстолкновительными» корреляциями. Несколько лет назад А. Бельманс и Ж. Орбан [11] опубликовали результаты численных расчетов на основе молекулярной динамики, обуславливающей эволюции Н–функции Больцмана. Они начали с некоррелированной системы твердых дисков и показали – в соответствии с прежними расчетами, что Н–функция монотонно убывает со временем (рис. 6).

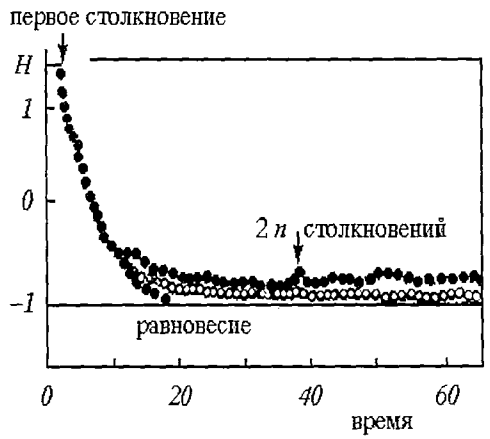


Рис. 6. Зависимость Н–функции от времени для системы из 100 твердых дисков. Скорости заменяются на обратные после 50 столкновений (белые кружки) и после 100 столкновений (черные кружки)

Затем после заранее заданного числа столкновений Бельманс и Орбан обращали скорости. В соответствии с парадоксом Лошмидта Н–функция сначала в течение какого–то времени возрастает, достигая примерно начальной величины, после чего снова начинает убывать. Как это понять? В ходе «прямой» эволюции столкновения приводят к рандомизации скоростей и создают постстолкновительные корреляции, которые разрушаются последующими столкновениями. В ходе «обратной» эволюции, после обращения скоростей, мы имеем предстолкновительные корреляции, приводящие к уменьшению разброса скоростей. Однако такая ситуация носит лишь переходный характер. Через достаточно большое время мы снова возвращаемся к механизму, увеличивающему разброс скоростей. Каков же в таком случае статус парадокса Лошмидта? Если бы мы могли обращать скорости в произвольные моменты времени, то никакого

предпочтительного направления времени не могло бы быть. Но именно это не позволяет нам делать существование временного горизонта Ляпунова. Мы можем обращать скорости только на временах, не превосходящих время Ляпунова. Результаты численного моделирования, полученные Беллемансом и Орбаном, показывают, что утверждения Чандрасекхара и Смолуховского, которые процитированы выше, неверны. Какова бы ни была продолжительность наблюдения, существует направление времени, ведущее к равновесию в нашем будущем.

Из новых численных экспериментов Кестемона и Марешаля [6, 7] следует, что стрела времени существует даже в состоянии равновесия. Они показали, что, хотя до столкновений молекулы некоррелированы, столкновения порождают корреляции. Столкновения создают корреляции, которые потом вымирают. Это не так удивительно. Действительно, механизм один и тот же как для равновесных, так и для неравновесных систем. В конце концов сталкивающиеся молекулы не знают, к какой системе они принадлежат – равновесной или неравновесной.

Итак, мы видим, что стрела времени существует даже в равновесной системе. Такой вывод, конечно, совершенно неожидан, так как из него следует, что микрообратимость в какой–то мере нарушается. В результате возникает выделенное направление времени, соответствующее последовательности [столкновения → корреляции], а не последовательности [корреляции → столкновения]. Это не так тривиально, как, например, для системы двух тел в ящике конечных размеров; там все было бы существенно проще.

Итак, мы имеем стрелу времени, которая в состоянии равновесия никак не проявляется макроскопически. «Нарушения» остаются на микроскопическом уровне именно потому, что система поддерживается в состоянии равновесия. Однако если мы снимем некоторые ограничения и позволим системе достичь неравновесного состояния, то стрела времени проявится и на макроскопическом уровне. Таким образом, мы приходим к выводу, который прямо противоположен выводу классической теории.

3. Новые перспективы квантовой теории

Теперь я хотел бы привести некоторые симптомы возникновения некоторых новых направлений в исследованиях по квантовой теории с точки зрения необратимых процессов [12]. В своем современном состоянии квантовая теория представляет довольно причудливую дуалистическую структуру. С одной стороны, волновая функция эволюционирует в гильбертовом пространстве вполне детерминистическим образом; эта эволюция обратима во времени:

$$id\,\Psi/dt = H_{\text{op}}\Psi. \tag{1}$$

С другой стороны, процесс измерения вносит необратимость и стохастичность, что приводит к переходу от амплитуд вероятности в гильбертовом пространстве к собственно вероятности:

$$\Psi = c_1 u_1 + c_2 u_2 \ \ (\text{измерение} \rightarrow |c_1|^2 \ \text{и} \ |c_2|^2\ ) \tag{2}$$

Квантовая механика приводит к парадоксальному выводу о том, что необратимость имеет смысл только в том случае, если мы производим наблюдение,– ситуация, напоминающая статус необратимости в классической механике до открытия сильно неустойчивых динамических систем. Дуалистическая интерпретация квантовой механики имеет смысл, когда процесс, описываемый уравнением Шредингера, обратим «сам по себе». Например, если мы рассмотрим идеализированную систему типа гармонического осциллятора (не взаимодействующую ни с каким полем), то ввести в такую систему необратимость

мы могли бы только с помощью измерения. Единственна ли такая возможность? Если ответ на наш вопрос был бы утвердительным, то это означало бы, что в природе не существует необратимых процессов, не зависящих от нашего измерения. Как избежать этого парадокса, четко сформулировал А. Ре: «Проблема измерения ... возникает из представления о том, что квантовая система обладает свойствами, только когда они измерены, хотя вне квантовой физики, по–видимому, нет ничего, что позволило бы произвести измерение»[22]. Необратимость «входит» через измерение. Но как быть с ситуациями, которые внутренне необратимы, таким как радиоактивность, квантовые скачки или смерть кошки Шредингера?

Интересно отметить, что в старой теории Бора – Зоммерфельда – Эйнштейна всегда было место для «внутренней необратимости». Действительно, в старой теории, с одной стороны, у нас были условия Бора–Зоммерфельда для энергетических уровней, задаваемых в характерных для теории интегрируемых систем переменных действия J:

$$J = \oint p dq \tag{3}$$

и, с другой стороны, переходы между уровнями, описываемыми Эйнштейном в терминах спонтанного и индуцированного излучения; Эйнштейн отчетливо понимал, что таким способом он вводит идею стохастичности и необратимости на уровне системы как целого – атома вместе с излучением. Эта точка зрения в его высказывании, приведенном в начале моего доклада. Можно ли ввести внутреннюю необратимость в квантовую теорию? Ясно, что для этого потребовались бы глубокие изменения [12–14]. В известном смысле это было предсказано еще Эддингтоном, когда он утверждал: «Вся интерпретация весьма смутная, но, по–видимому, она зависит от того, рассматриваете ли вы вероятность после того, как вам известно, что произошло, или вероятность с целью предсказания. Величина $\Psi\Psi^{\text{комп.сопр.}}$ получается при введении двух симметричных систем волн, бегущих в противоположных направлениях во времени» [15].

Описание в терминах гильбертова пространства, безусловно, тесно связано с проблемой обратимости во времени, и, если мы хотим ввести внутреннюю необратимость, то для этого необходимо в какой–то мере поступиться таким описанием. Эти вопросы недавно были рассмотрены в статьях, написанных мною совместно с моим коллегой Томио Петроски, и я могу привести здесь лишь некоторые общие результаты. Проще всего начать с соотношения неопределенностей в квантовой механике. Все знают обычные квантово–механические соотношения неопределенностей, выражающих то обстоятельство, что импульс и координату невозможно измерить одновременно со сколь угодно высокой точностью. Как вы знаете, это обусловлено тем, что импульс и координата связаны с некоммутирующими операторами. Обычное соотношение неопределенностей гласит:

$$\Delta p \Delta q > \hbar. \tag{4}$$

Интерпретация его стандартна: оно означает, что операторы, соответствующие импульсу p и координате q, не коммутируют. Рассмотрим теперь соотношение неопределенности:

$$\Delta E \, \Delta\tau \gtrsim \hbar. \tag{5}$$

Его интерпретация более тонка, так как нет оператора, который бы соответствовал времени. Тем не менее во многих ситуациях придать смысл этому соотношению в действительности не трудно. Например, если взять волновой пакет, то время его жизни связано с его спектральным представлением соотношением неопределенности (5). Мы можем далее рассмотреть нестабильное состояние, характеризуемое временем жизни τ. Как известно в этом случае

$$\Delta E \geq \hbar/2\tau. \tag{6}$$

Однако это соотношение неопределенности имеет совершенно другой смысл. Действительно, время жизни имеет вполне определенное значение для данного квантового состояния и данного экспериментального устройства. Следовательно, это соотношение неопределенности устанавливает границы измерения одной квантовой переменной, в данном случае – энергии нестабильного квантового состояния. Мы можем записать это соотношение в виде

$$\overline{E^2} - (\overline{E})^2 \geq (\hbar/2\tau)^2 . \qquad (7)$$

Оно выражает дисперсию значения энергии. Существование конечного времени жизни приводит к утрате контроля над точным значением энергии нестабильного квантового состояния, что проявляется в естественной ширине спектральной линии.

Мы считаем этот факт фундаментальным, так как он свидетельствует о необходимости новой формы квантовой теории. Требуются операторы не только некоммутативные, но и недистрибутивные. Действительно, если наблюдаемую энергию представить каким–то оператором Λ, действующим на гамильтониан H: ΛH, то (в соответствии с соотношениями неопределенности)

$$\Lambda H^2 \neq (\Lambda H)^2. \qquad (8)$$

Следовательно, для того, чтобы учесть конечные времена жизни, нам необходимо обобщить квантовую механику. Времена жизни тесно связаны с резонансами (наглядный пример тому – квантовые скачки). Таким образом, нам необходима классификация квантовых систем, аналогичная той, которую для классических систем дает теорема Пуанкаре. В пределе больших квантовых систем мы можем придать смысл матрице плотности в квантовой теории в терминах подходящего аналитического продолжения, включающего направление времени [17–19]. Однако в этом пределе понятие волновой функции утрачивает смысл ($\rho \neq \Psi\Psi^*$). Вследствие этого всякий раз, когда возникают диссипативные процессы, уравнение Шредингера, сторого говоря, утрачивает смысл. Это относится к «внутренне необратимым процессам», включая все процессы измерения. Дуализм квантовой теории, о которой мы упоминали выше, уходит корнями в классификацию квантовомеханических, динамических систем. В настоящее время мы изучаем вопрос о том, к каким наблюдаемым приводит такая теория.

Основным параметром нашей теории служит отношение ρ между некоторым обратимым временем (типа величины, обратной частоте обращения электрона вокруг ядра) и необратимым временем (типа времени жизни электрона в возбужденном состоянии). Как показывают предварительные расчеты, отклонений от обычной квантовой электродинамики следует ожидать в том случае, если мы удерживаем члены порядка ρ^2. В квантовой электродинамике этот параметр очень мал; сейчас мы заняты поиском экспериментальных установок, которые позволили бы сделать предсказываемый эффект достаточно большим, чтобы его можно было измерить. В заключение я хотел бы отметить, что полностью согласен со следующим утверждением К. Поппера: «...Возможно, удастся ...дать недетерминистическую реинтерпретацию детерминистической программы Эйнштейна и в то же время объективистскую и реалистическую реинтерпретацию квантовой теории... Вполне возможно, что мир оказался бы таким недетерминистическим, каким он есть, если бы не было наблюдающего субъекта, который бы экспериментировал с ним и вмешивался в него» [16, с. 160].

4. Энтропия в контексте космологии

Вряд ли найдется еще одна область науки, в которой эволюция идей была бы более «турбулентной», более неожиданной, чем современная космология. Как вы знаете, в 1917 г. Эйнштейн предложил первую космологическую модель, связанную с общей теорией относительности. Это было грандиозное достижение,

но его модель описывала лишь геометрическую, статичную Вселенную. Вскоре А. Фридман и Ж. Леметр установили, что решение, найденное Эйнштейном для его уравнения, неустойчиво, и что наша Вселенная могла возникнуть в результате «Большого Взрыва», а не быть статичной. Позднее было измерено красное смещение, которое подтвердило представление о расширяющейся Вселенной. И совсем недавно, в 1965 г., открытие реликтового излучения явилось своего рода вещественным свидетельством – «ископаемым», – подтверждающим, что наша Вселенная эволюционирует во времени.

Так, за сравнительно короткий промежуток времени мы совершили переход от статичной Вселенной к эволюционирующей Вселенной. Сегодня существует общепринятая теория космологии – «стандартная модель», описанная во многих книгах, которая, по–видимому, дает разумные ответы на большинство вопросов. Однако стандартная модель не описывает самые первые моменты в истории нашей Вселенной – так называемую «квантовую эру» (рис. 7).

Согласно стандартной модели, энтропия Вселенной остается постоянной, в то время как ее температура убывает при адиабатическом расширении Вселенной. Для «сотворения» мира отведена особая точка – так называемый «Большой Взрыв». Но коль скоро мы намереваемся исследовать интересующие нас вопросы, нам необходимо задать себе вопрос: а что, собственно, означает Большой Взрыв? Откуда вообще берется эта начальная особенность? Как вообще понимать начальные условия, из которых эволюционировала наша Вселенная? Насколько можно судить, эти вопросы несколько выходят за рамки традиционной общей теории относительности. Сейчас очень популярна так называемая теория «расширяющейся Вселенной». Этой теории удалось ответить на некоторые вопросы, остававшиеся нерешенными в рамках стандартной модели. Однако она не приводит к лучшему пониманию Большого Взрыва, равно как не способствует и более глубокому пониманию второго начала термодинамики, а именно эти вопросы представляют для нас особый интерес.

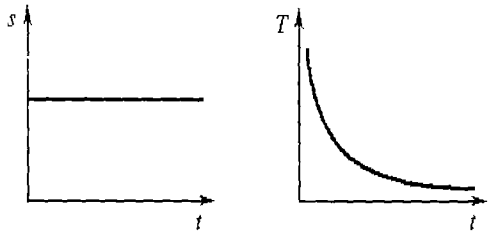


Рис. 7. Стандартная космологическая модель: температура со временем убывает, энтропия постоянна

Я хотел бы кратко изложить основные идеи сценария, предложенного недавно Е. Гунцигом, Ж. Гехеньо, П. Нардоне и мной [18–21] и основанного на предшествующих работах многих других авторов, среди которых я выделил бы Р. Браута и Ф. Энглерта [17]. Разумеется, в настоящее время существует много сценариев, и список их увеличивается с каждым месяцем. Причина, по которой мной выбран тот конкретный сценарий, который я намерен предложить вашему вниманию, состоит в том, что он приводит к интересным предсказаниям, поскольку позволяет вычислить величину так называемой «удельной энтропии» – отношения числа фотонов к числу барионов. Действительно, исследование реликтового излучения показывает, что на один барион приходится 10^9 фотонов. Иначе говоря, число барионов чрезвычайно мало по сравнению с числом фотонов. Это термодинамический результат поистине поразителен, ибо показывает, что преобладающая часть энтропии Вселенной сосредоточена в фотонах. Это в свою очередь свидетельствует о том, что рождение Вселенной могло сопровождаться чудовищной «энтропийной вспышкой».

Такой вывод в корне противоречит традиционным космологическим следствиям из второго начала термодинамики, согласно которым Вселенная постепенно эволюционирует к состоянию с максимумом энтропии («тепловой смерти»), начиная с некоторого низкого уровня энтропии. Ныне тепловая смерть как бы оказывается позади нас, тесно связанная с рождением нашей Вселенной, в то время как различные явления, связанные с энтропией и продолжающиеся

поныне, будь то существование живых организмов или термоядерные реакции в недрах звезд, чрезвычайно слабы по сравнению с начальным производством энтропии во Вселенной.

Рассмотрим кратко те явления, которые так или иначе связаны с высказанными выше точками зрения. Начнем с так называемого «квантового вакуума»; такой вакуум представляет собой не нечто статичное, а полон флуктуаций, таких событий, как рождение и аннигиляция частиц. Замечательное предсказание Браута, Энглерта, Гунцига и Нардоне состоит в том, что если масса частиц, рожденных флуктуациями квантового вакуума превосходит некоторый порог – «критическую массу» порядка 50 масс Планка (масса Планка соответствует 10^{-5} г, т.е. необычайно велика по сравнению с массой элементарных частиц), то такая масса может быть только черной дырой, так как соответствующая ей длина волны де Бройля примерно в 50 раз меньше ее радиуса Шварцшильда.

Модель Браута и других названных мной авторов является теоретико–полевой и включает как гравитацию, так и материю. Общеизвестно, что пока у нас нет надежной квантовой теории гравитации. Поэтому, чтобы избежать трудностей, вызванных отсутствием последовательной теории, мы избрали другой подход. Первое, что нам потребовалось, – это видоизменить уравнения Эйнштейна для поля, чтобы учесть возможность рождения материи на макроскопическом уровне (через тензор энергии – импульса).

Развитые нами соображения привели к обобщению термодинамики применительно к космологии. Традиционно помимо геометрического состояния Вселенной вводятся две физические переменные, описывающие космологическую жидкость, – плотность энергии ρ и давление p. Затем решают уравнения Эйнштейна в предположении, что существует уравнение состояния $\rho = \rho\ (p)$. Однако в нашем случае в описание естественно входит дополнительная переменная – плотность частиц m. Отсюда следует важный вывод о том, что рождение материи может происходить только как необратимый процесс, соответствующий переносу энергии из гравитационного поля; точнее говоря, переход от традиционной космологии (охватывающей только адиабатические преобразования замкнутых систем) к адиабатическим преобразованиям открытых систем приводит к изменению записи закона сохранения энергии. В нее теперь входит дополнительное давление p_c , связанное с рождением частиц. В соответствии с вторым началом термодинамики это давление всегда отрицательно и равно нулю.

Кроме того, показано, что входящая в традиционную космологию особенность связанная с Большим Взрывом, структурно неустойчива относительно необратимого рождения материи. В нашей космологии эволюция Вселенной начинается с вакуума Минковского, а не с особенности. Космологическая история делится на три стадии: период рождения, когда космологическая система эволюционирует от начальной флуктуации вакуума до пространства де Ситтера (кратко говоря, эта стадия соответствует экспоненциальному расширению); существование пространства де Ситтера (определяемое временами жизни образующих его элементов); фазовый переход, в процессе которого пространство де Ситтера превращается в адиабатически расширяющуюся Вселенную (эта стадия продолжается поныне). Первостепенную важность имеет то обстоятельство, что Вселенная де Ситтера служит своего рода аттрактором, свойства которого не зависят от начальной флуктуации.

Наша модель с самого начала учитывает второе начало термодинамики. Действительно, перенос энергии из искривленного пространства–времени к материи трактуется нами как необратимый процесс, приводящий к связанной с рождением материи вспышке энтропии. При таком подходе различие между пространством–временем и материей сводится только к производству энтропии; последнее же происходит только на первых двух стадиях космологической эволюции.

В концепции Ньютона пространство–время играет роль «вместилища», совершенно не зависящего от содержащейся в нем материи. В общей теории

относительности Эйнштейна материя и пространство–время взаимодействуют между собой через уравнения Эйнштейна для поля, связывающие геометрическое состояние Вселенной с распределением в ней материи. Такая точка зрения позволяет достичь поразительной унификации нашего описания природы. Но, как нам кажется, помимо программы построения единой теории, мы нуждаемся и в эволюционном механизме для существования стрелы времени, с которой мы сталкиваемся на всех уровнях физического описания. В изложенном мной подходе основной механизм необратимости следует из отношения между материей и пространством–временем. Последнее может порождать материю в ходе необратимого процесса, и обратный процесс невозможен.

Было бы интересно высказать несколько замечаний относительно микроскопических механизмов такой необратимости, которая соответствует своего рода разделению материи от гравитации. Как хорошо известно, квантовый вакуум полон флуктуаций: пары частиц могут рождаться из вакуума и аннигилировать. В таком процессе, как следует из соотношения неопределенности (5), энергия не сохраняется.

Я хотел бы высказать несколько замечаний по поводу черных дыр. Традиционным механизмом образования черных дыр является гравитационный коллапс. Черные дыры служат своего рода мембранами, которые «удерживают» материю с помощью самогравитации. Но, как показал Хокинг, черные дыры не так уж «черны»: они испаряются и имеют конечное время жизни. Испарение обусловлено взаимодействием черных дыр с квантовым вакуумом. Черные дыры притягивают в основном виртуальные частицы с отрицательной энергией и отталкивают на бесконечность частицы с положительной энергией (рис. 8).

Таким образом, мы получаем простой сценарий необратимого образования материи из пространства–времени с формированием на промежуточном этапе

Рис. 8, *а*

Рис. 8, *а*. Эволюция энтропии для рассматриваемой модели

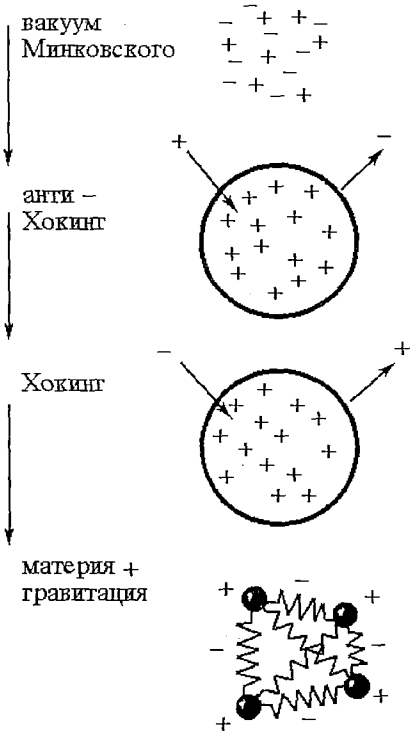


Рис. 8, *б*. Переход от вакуума Минковского к черной дыре, вырождающейся в обычную материю

Рис. 8, *б*

черных минидыр. В вакууме у нас, как обычно, существуют виртуальные частицы с положительной и отрицательной энергией. Если вследствие какой–нибудь флуктуации в одной и той же области окажется много частиц с положительной энергией, то ситуацию стабилизирует образование черной дыры, которая затем вырождается в обычную материю. Этот процесс, как нетрудно видеть, соответствует фазовому переходу между материей и гравитацией. Лукреций утверждал, что мир состоит из «атомов и пустоты»; мы же теперь могли бы сказать: «из атомов и полей». Этот дуализм является результатом необратимого процесса, в описание которого квантовая теория входит вместе с общей теорией относительности.

Я убежден, что модель, которую мы только что рассмотрели, далеко не окончательна. Но так или иначе, необратимость играет фундаментальную роль в описании природы, начиная с самых ранних стадий существования нашей Вселенной.

Выводы

Позвольте подвести итоги сказанному. Я уверен, что мы все дальше отходим от классической картины физического мира в том самом направлении, на которое, как надеялся Б.Г. Кузнецов, мы должны были выйти, – в направлении отхода от идеи «определенного ничего», упоминавшейся в начале моего доклада. Повсюду мы наблюдаем спонтанную активность, необратимость, нелинейность, стохастичность, флуктуации, неустойчивости. Мы становимся теперь свидетелями своего рода конвергенции мира, с которым мы экспериментируем внутри себя, и миром, который мы видим вне нас. Это позволяет нам выйти за рамки классического дуализма, сформулированного в работах Р. Декарта и И. Канта, и достичь физики такого типа, для которой, по словам К. Поппера, «целью является картина мира, в которой есть место и биологическим феноменам, и человеческой свободе, и разуму» [16, с. 177].

В современном развитии идей нельзя не отметить любопытное совпадение. В конце нашего столетия мы приходим к необходимости переоценки человеческого фактора. Поразительно, что мы приходим также к необходимости переоценки некоторых основополагающих предпосылок физики. Чтобы справиться с новой ситуацией, необходимо новое мышление, новые наблюдения и взаимная терпимость.

Библиографический список

1. *Кузнецов Б.Г.* Разум и бытие. М., 1972. Англ. пер.: *Kuznetzov B.* Reason and Being. Reidel, Dordrecht, 1987.

2.*Titus Lucretius Carus.* De rerum natura. Libri sex. Lipsiae, 1959.Рус. пер.: *Тит Лукреций Кар.* О природе вещей. М., 1983. Кн. 11, с. 216.

3. *Einstein A.* Mitt. Phys. Ges.(Zurich), 1916, Nr. 18, 47–62; Phys. Zeitschr., 1917, 18, 121. Рус. пер.: *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 3, № 44. М., 1966. С .393.

4. *Prigogine I.* From Being to Becoming. San Francisco, 1980. Рус. пер.: *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М., 1985.

5. *Prigogine I, Stengers I.* Order out of Chaos. L.,1983. Рус. пер.: *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. М., 1986.

6. *Mareschal M., Kestemont E.*J. Stat. Phys. 1987. Vol. 48. P. 1187.

7. *Mareschal M., Kestemont E.//* Nature. 1987. Vol. 329, 6138. P. 427.

8. *Lighthill J.* The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics // Predictability in Science and Society/ Mason J. et al., a special issue of the Proceedings of the Royal Society. 1986.Vol. 407.P. 35.

9. *Weyl H.* Philosophy of Mathematics and Natural Sciences. N.Y., 1949. Частичный рус. пер.: *Вейль Г.* О философии математики. М.–Л., 1934.

10. *Chandrasekhar S.* Stochastic problems in physics and astronomy // Rev. Mod. Phys. 1943. Vol 15. P. 3. Рус. пер.: *Чандрасекхар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947.

11. *Orban J., Bellemans A.* // Phys. Lett. 1967. Vol 24 A. P. 620.

12. *Prigogine I., Petrosky T.* An Alternative to Quantum Theory // Physica, 1988. Vol. 147A. P. 461.

13. *Prigogine I., Petrosky T.* Point care's Theorem and Unitary Transformations for Classical and Quantum Theory // Physica. 1988. Vol.147A. P. 439.

14. *Prigogine I., Petrosky T.* Intrinsic Irreversibility in Quantum Theory. Festschrift P. Mazur // Physica. 1988. Vol. 147A. P. 337.

15. *Eddington A.* Cifford Lectures. Cambridge, 1928. P. 216 sq.

16. *Popper K.* Quantum Theory and the Schism of Physics. Postcript to the Logic of Scientific Discovery. New Jersey, 1982.

17. *Brout R., Englert F., Gunzig E.*// Ann. Phys. 1978. Vol.115. P. 78.

18. *Gunzig E., Nardone P.* Fundamentals of Cosmic Physics. 1987. Vol. 2. P. 311.

19. *Géhéniau J., Prigogine I.* // Found. Phys. 1986. Vol. 16. P. 437.

20. *Prigogine I., Géhéniau J.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1986. Vol. 83. P. 6245.

21. *Gunzig E., Gehéniau J., Prigogine I.* // Nature. 1987. Vol. 330. P. 621.

22. *Rae A.* Quantum Physics: Illusion or Reality? // Cambridge, 1986. P. IX sq.

Перевод с английского Н.В. Вдовиченко и И.И.Неретина

Под редакцией Ю.А.Данилова

© Вопр. ист. естествозн. и техн. 1989. № 1. С.3.

THE REDISCOVERY OF TIME

I.Prigogine

The report delivered at the VIII–th International congress of logic, methodology and philosophy of science in August 1987 is devoted to the modern conception of time, which was proposed by the collaborators of his school. The new approach to the problem, connected with the consideration of non–linear systems far from equilibrium, of so called dissipative structures, permits to overcome the barrier due to duality of the world description: deterministic and reversible in time laws at microlevel and statistical and obligatory non–reversible laws at macrolevel. The report bears review character.

Бельгийский химик Илья Пригожин родился в Москве 25 января 1917 г. в канун русской революции. У его родителей – инженера–химика Романа Пригожина и музыканта Юлии (Вишман) Пригожиной – был еще один сын. Благодаря стараниям матери Илья с детства играл на пианино. Ноты, как она позднее вспоминала, мальчик научился читать раньше, чем слова. В 1921 г. семья Пригожиных эмигрировала из России. Сначала они жили в Литве и Германии, а с 1929 г. поселились в Бельгии. Годы переездов, по словам Пригожиных, породили у него «острую восприимчивость к переменам»: « Начав изучать физику и химию, я был поражен тем, что исчез фактор времени». Пригожин интересовался историей и философией. Будущее же свое он связывал с профессией концертирующего пианиста.

Начальное и среднее образование Пригожин получил в школах

Берлина и Брюсселя, а затем изучал химию в Свободном университете в Брюсселе, где его особенно привлекала термодинамика – наука, связанная с тепловой и другими формами энергии. Став здесь же в 1943 г. бакалавром естественных наук, Пригожин написал диссертацию о значении времени и превращения в термодинамических системах, за которую два года спустя был удостоен докторской степени. В 1947 г. он был назначен профессором физической химии в Свободном университете, а в 1962 стал директором Солвеевского международного института физики и химии в Брюсселе.

В 1967 г. Пригожин был назначен директором Центра статистической механики и термодинамики Ильи Пригожина, который он основал при Техасском университете в Остине. С тех пор он работает одновременно и в Брюсселе и в Остине.

В 1977 г. Пригожину была присуждена Нобелевская премия по химии «за работы по термодинамике необратимых процессов, особенно за теорию диссипативных структур». «Исследования Пригожина в области термодинамики необратимых процессов коренным образом преобразовали и оживили эту науку», – сказал Стиг Классон в своей вступительной речи от имени Шведской королевской академии наук. Эта работа открыла для термодинамики «новые связи и создала теории, устраняющие разрывы между химическим, биологическим и социальным полями научных исследований... Исследования Пригожина отличают также элегантность и прозрачность, поэтому ученого заслуженно называют «поэтом термодинамики»».

В 1961 г. Пригожин женился на Марине Прокопович. У супругов два сына. Пригожин известен в среде своих коллег как обходительный человек и незаурядный ученый, диапазон интересов которого чрезвычайно широк. Он увлечен литературой и археологией, по сей день играет на пианино, очень любит слушать музыку.

Помимо Нобелевской премии, Пригожин награжден золотой медалью Сванте Аррениуса Шведской королевской академии наук (1969), медалью Баурка Британского химического общества (1972), медалью Котениуса Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1975) и медалью Румфорда Лондонского королевского общества (1976). Ученый – член Бельгийской королевской академики наук, Королевского научного общества в Упсале и Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина». Он является иностранным членом Американской академии наук и искусств, Польского и Американского химических обществ и других организаций. Пригожину присвоены почетные степени университетов Ньюкасл, Пуатье, Чикаго, Бордо, Упсалы,Льежа, Джорджтауна, Кракова и Рио–де–Жанейро.

© Лауреаты Нобелевской премии: Энциклопедия /Пер. с англ. М.: Прогресс, 1992

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 53.01.072:517.9

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Е.С.Мчедлова

Проведено аналитическое исследование поведения нелинейного параметрического осциллятора с использованием метода Мельникова. Получена функциональная связь между управляющими параметрами, определяющая те значения последних, при которых может наблюдаться сложная, хаотическая динамика.

При изучении динамической системы наибольший интерес представляет зависимость ее поведения от соотношений между параметрами, определяющими внешнее воздействие, и собственными характеристиками системы. Настоящая работа посвящена нахождению подобной зависимости методом, использующим функцию Мельникова [1].

Известно, что одним из факторов, обусловливающих сложность динамики системы, является присутствие гомоклинических траекторий в сечении Пуанкаре. Метод Мельникова, по–существу, представляет собой критерий существования такой гомоклинической структуры. Наличие гомоклиники хорошо известно для нелинейных параметрических систем и исследовалось многими авторами. Например, в работах [2,3] содержится оценка толщины стохастического слоя для систем данного класса.

В качестве исследуемой модели был выбран нелинейный параметрический осциллятор с диссипацией, который может быть описан уравнением

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (\lambda_0 + \lambda_1 \cos \Omega t)\sin x = 0 \qquad (1)$$

Для дальнейшего анализа уравнение (1) удобно переписать в виде

$$\dot{x} = v,$$

$$v = -\lambda_0 \sin x + \varepsilon(-av - \lambda_1 \cos \Omega t \sin x),$$

где ε – малый параметр.

Невозмущенная система (при $\varepsilon = 0$) интегрируема и имеет гиперболические особые точки, например $x = \pm\pi$, $v = 0$. Сепаратрисе, проходящей через них, соответствует постоянное значение гамильтониана $H_0 = \lambda_0$. Это эквивалентно тому, что

$$\frac{v^2}{2} - \lambda_0 \cos x = \lambda_0$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2\lambda_0(1+\cos x)}.$$

Отсюда находим решение на сепаратрисе в гамильтоновой системе. Оно выражается формулами

$$x_0 = 2\arcsin(\mathrm{th}\sqrt{\lambda_0}\,t), \qquad v_0 = 2\sqrt{\lambda_0}/\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_0}\,t.$$

В основе метода лежит вычисление функции Мельникова $D\ (t_0)$ [4, 5, 6], которая представляет собой меру расстояния между устойчивым и неустойчивым многообразиями в сечении Пуанкаре возмущенной системы в некоторый момент времени t_0 и определяется как проекция вектора (характеризующего это расстояние) на нормаль к сепаратрисе в системе без возмущения:

$$D(t_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} v_0(-av_0 - \lambda_1 \sin x_0 \cos\Omega\, t)dt. \tag{2}$$

Подставляя решение невозмущенной системы в формулу (2), приходим к выражению

$$D(t_0) = 4a\lambda_0\int_{\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{\lambda_0}(t-t_0))} + 2\lambda_1\sqrt{\lambda_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin[2\arcsin(\mathrm{th}(\sqrt{\lambda_0}(t-t_0)))]}{\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda_0}(t-t_0))}\cos\Omega\, tdt. \tag{3}$$

Первый интеграл в формуле (3) берется элементарно и равен 2, а второй вычисляется по методу контурных интегралов через вычеты в точках $\tau = \pi i(2n+1)/2$, которые служат для подынтегральной функции полюсами второго порядка, где $\tau = \sqrt{\lambda_0}(t-t_0)$.

Окончательно имеем:

$$D(t_0) = 8a\sqrt{\lambda_0} - \pi\frac{e^4-1}{e^2}\frac{\Omega}{\sqrt{\lambda_0}}\lambda_1\frac{\sin\Omega\, t_0}{\mathrm{ch}(\pi\Omega/2\sqrt{\lambda_0})}.$$

Движение вблизи сепаратрисы становится непредсказуемым, когда устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются, то есть образуется гомоклиническая траектория. Это имеет место, когда $D\ (t_0)$ меняет знак, что равносильно неравенству

$$\lambda_1 \geq \frac{8e^2}{\pi(e^4-1)}\frac{a\lambda_0}{\Omega}\mathrm{ch}\frac{\pi\Omega}{2\sqrt{\lambda_0}}, \tag{4}$$

где множители ε опущены.

Неравенство (4) определяет область в пространстве параметров λ_1, λ_0, Ω и a, в которой может наблюдаться сложная, хаотическая динамика.

Графическая интерпретация условия (4) представлена на рисунке в виде проекций четырехмерного пространства параметров уравнения (1) на плоскость. Кривые соответствуют предельному случаю – равенству в выражении (4), и являются границами, разделяющими области регулярной и сложной динамики. Значения параметров, лежащие ниже границ по оси ординат, соответствуют периодическим движениям в системе.

Использованный в работе метод дает необходимое, но недостаточное условие хаоса. Однако его можно считать критерием предсказуемости поведения динамической системы.

В заключение хотелось бы отметить, что рассмотренная математическая модель обладает высокой степенью всеобщности, и поэтому полученный результат

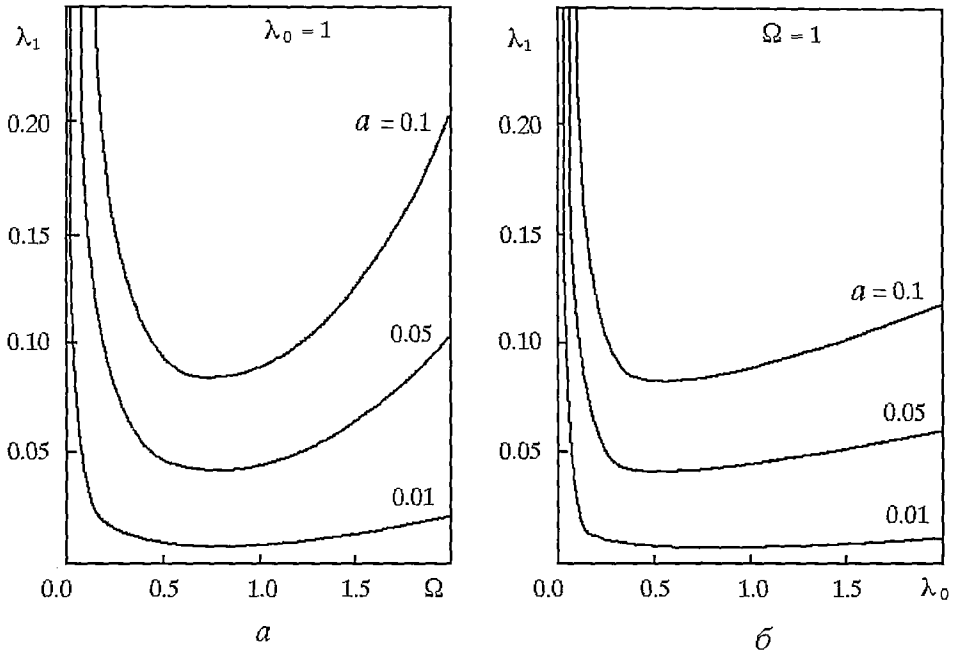


Рис. Границы, разделяющие области регулярной и сложной динамики, представленные для различных значений a в пространстве параметров λ_1,Ω – (*а*); λ_1, λ_0 (*б*): a – величина, характеризующая диссипацию в системе, λ_0 – квадрат собственной частоты, λ_1 и Ω – амплитуда и частота внешнего параметрического воздействия

может быть обобщен на широкий класс физических систем, описываемых уравнениями типа (1).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Трубецкову Дмитрию Ивановичу, которому обязан выбором интересной темы исследования, за полезные замечания, сделанные в процессе выполнения работы и по ее завершении. Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность рецензенту за ценные замечания, которые способствовали существенному улучшению статьи.

Библиографический список

1. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. об–ва. 1963. Т.12. С.3–52.

2. *Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И.* Нелинейная физика,стохастичность и структуры. Препринт ИПФ АН СССР, 1983, № 87.

3. *Афраймович В.С., Рабинович М.И., Угодников А.Д.* // Радиофизика. 1984.Т.27, № 10.С.1346.

4. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. С. 248, 400–403.

5. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. С. 457–463.

6. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. С. 183–186, 275.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 1.10.92, после переработки 10.04.93.

ANALYTICAL APPROACH TO COMPLICATED DYNAMICS OF PARAMETRIC OSCILLATOR

E.S. Mchedlova

Behaviour of the nonlinear parametric oscillator is investigated analytically by Melnikov's method. Presented in the paper, the functional dependence gives the boundary of region in parametre space of system, where a complicated dynamics is possible.

Мчедлова Елена Сумбатовна – родилась в 1971 году в Саратове. Студентка 5–ого курса физического факультета Саратовского университета. Область научных интересов – нелинейная динамика, моделирование явлений в электронных потоках.

В разделе “Методические заметки” мы предлагаем Вашему вниманию решение задачи, опубликованной в прошлом номере.

Задача. Маятник в виде жесткого невесомого стержня длиной l, на конце которого укреплен массивный шарик, отклонили на малый угол α от неустойчивого положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Используя малость α, определите, через какое время маятник пройдет нижнее положение равновесия.

Решение. Построим приближенное решение этой задачи, используя малость начального угла отклонения маятника α . Мы можем описать две стадии движения маятника. Во–первых, непосредственно вблизи верхней точки, когда угловое смещение маятника еще мало. Во–вторых, вдали от верхней точки, когда можно “забыть” о маленьком начальном смещении маятника. Если говорить о фазовом портрете, то первое решение будет описывать динамику маятника в окрестности седловой неподвижной точки, а второе решение – вблизи сепаратрисы.

Итак, строгое уравнение движения маятника имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + (g/l)\sin\varphi = 0. \qquad (1)$$

Здесь φ – текущая угловая координата маятника, причем верхней точке равновесия соответствует $\varphi = -\pi$, а нижней – $\varphi = 0$; g – ускорение свободного падения; l –длина маятника.

Линеаризуем уравнение движения (1) вблизи верхней точки.
Считая, что $\varphi = -\pi + \xi$, получаем

$$\ddot{\xi} - (g/l)\,\xi = 0. \qquad (2)$$

Если начальное смещение равно α, а начальная скорость равна нулю, то уравнение (4) имеет простое решение:

$$\xi = \alpha\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{g/l}\,t). \qquad (3)$$

Теперь найдем решение, отвечающее движению по сепаратрисе. Запишем закон сохранения энергии

$$\dot{\varphi}^2/2 - (g/l)\cos\varphi = g/l\,. \qquad (4)$$

Здесь мы пренебрегаем начальной потенциальной энергией маятника. Из соотношения (4) находим выражение для угловой скорости

$$\dot{\varphi} = 2\sqrt{g/l}\cos(\varphi/2). \qquad (5)$$

Уравнение (5) может быть непосредственно проинтегрировано

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} [C \exp(\sqrt{g/l}\, t)] - \pi, \tag{6}$$

где C – константа интегрирования. Формула (6) описывает такое движение маятника, когда за "бесконечное" время маятник совершает полный оборот и "замирает" в верхней точке. Константа C связана с произволом в начале отсчета времени.

Оказывается, что для решений (3) и (6) имеется область, в которой их асимптотики перекрываются. Действительно, при больших t решение (3) имеет асимптотику

$$\xi = (\alpha/2) \exp(\sqrt{g/l}\, t). \tag{7}$$

В свою очередь, из соотношения (6) при $t \to -\infty$, получаем:

$$\xi = 4C \exp(\sqrt{g/l}\, t). \tag{8}$$

Теперь "сошьем" решения (7) и (8). Для этого необходимо положить

$$C = \alpha/8 \tag{9}$$

Окончательно получаем:

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} [(\alpha/8)\exp(\sqrt{gt/l})] - \pi. \tag{10}$$

Время T, за которое маятник достигнет нижней точки, находим из условия $\varphi = 0$. Тогда из (10) следует, что

$$T = \sqrt{l/g} \ln (8/\alpha). \tag{11}$$

Как и должно быть, время движения T стремится к бесконечности, если начальный угол α стремится к нулю. Наше приближенное решение работает тем лучше, чем меньше α.

А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 534.1(075.8)

РАБИНОВИЧ М. И., ТРУБЕЦКОВ Д. И. Введение в теорию колебаний и волн: Учеб. руководство: Для вузов. 2–е изд., перераб. и доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.–мат. лит.; 1992. 456 с. ISBN 5–02–014179–8

Основой для книги послужили лекции, читаемые авторами на протяжении двадцати пяти лет на физических факультетах Нижегородского и Саратовского государственных университетов.

Современная теория колебаний и волн представлена в книге не формально–методической стороной, а своими явлениями и эффектами, встречающимися в медицине, биофизике, гидродинамике, радиоэлектронике, физике плазмы и других областях науки и техники. В новом издании (1–е изд. – 1984 г.) отражены результаты последних лет. Заново написана глава 12, в которую включено подробное изложение приближения геометрической оптики, введены параграфы о распространении волн в плоскослоистой среде и линейном взаимодействии волн в неоднородных средах. Значительно обновлен список рекомендуемой литературы.

Многолетний опыт общения со студентами определил в значительной степени соотношение между подробными выводами, расчетами и ссылками типа «нетрудно видеть», «ученые доказали», которыми авторы пользуются лишь в тех местах, где громоздкость аппарата грозит заслонить идею. Книга будет полезна не только студентам и аспирантам, но и опытным исследователям, которые по роду своей деятельности сталкиваются с анализом колебательных и волновых явлений самой различной природы.

Ил. 259. Табл. 3. Библиогр. 474 назв.

RABINOVICH V.I.,TRUBETSKOV D.I. Introduction in Theory of Oscillations and Waves

This volume presents a comprehensive review of the current state of the theory of oscillations and waves in a wide range of linear and nonlinear systems.

The book is structured so that fundamental oscillation–wave phenomena and effects are brought together in order to demonstrate the underlying unity of physics and mathematics. The first part of the book deals with linear systems and media, and the second part – with nonlinear ones. In addition to considering traditionally treated topics, much new material is included. For example, stochasticity in simple systems, hydrodynamics turbulence and stochastic self–excited oscillations (and strange attractors), and the main ideas and phenomena of self–organization.

Although the breadth of covered subjects recommends this volume more as a comprehensive, well–written reference work, it can be used as a supplementary textbook on many graduate courses in mathematics and physics.

DynAnalyzer
анализатор сложных и хаотических колебаний

Один из способов диагностики состояния сложных систем – анализ их поведения во времени. Традиционные методы анализа временных реализаций – по форме колебаний (кардиограф, осциллограф) или в частотной области (спектральный анализ), эффективны лишь для периодических колебаний. Классические статистические методы хорошо приспособлены для случайных процессов. Объекты реальной природы как правило, демонстрируют хаотические колебания не являющиеся ни периодическими ни случайными. Для установления количественных и качественных характеристик подобных колебаний в настоящее время используются методы новой бурно развивающейся отрасли науки – нелинейной динамики. Эти методы, в основном, оперируют с фазовыми портретами, полученными из временных реализаций.

Представляемая программная среда ***DynAnalyzer*** является инструментальным средством для анализа поведения сложных систем по фазовым портретам, восстановленным из измеряемых временных реализаций.

Основные возможности, предоставляемые программой ***DynAnalyzer***:

• ввод временной реализации (одной или нескольких) из файла или аналого-цифрового преобразователя (АЦП);

• просмотр и сравнение временных реализаций на экране и сохранение их в файлах;

• восстановление, просмотр и сравнение фазовых портретов;

• расчет корреляционной размерности (меры сложности) анализируемых колебаний;

• протоколирование результатов работы и получение твердой копии.

Кроме того, программа позволяет производить

• спектральный анализ колебаний;

• статистический анализ колебаний.

Технические характеристики программы ***DynAnalyzer***:

• динамический диапазон – определяется разрядностью используемого АЦП (12 разрядов – 72 дБ);

• частотный диапазон – определяется временем преобразования АЦП и быстродействием компьютера (при t преобразования 7 мкс полоса входного сигнала 70 кГц);

• максимальная длина временной реализации – определяется объемом памяти компьютера (при объёме памяти 1Мб – 150 тыс. отсчетов);

• диапазон измерения корреляционной размерности: масштаб наблюдения – 70÷0 дБ, величина оцениваемой размерности < 5.

Основные области применения: медицина (кардиография, энцефалография), машиностроение (анализ вибраций), электрорадиотехника и т.д.

Минимальная конфигурация аппаратуры:

компьютер AT 286/287, 1 Мб ОЗУ, VGA;

размер свободного дискового пространства – 1Мб;

операционная система – MS DOS v3.3.

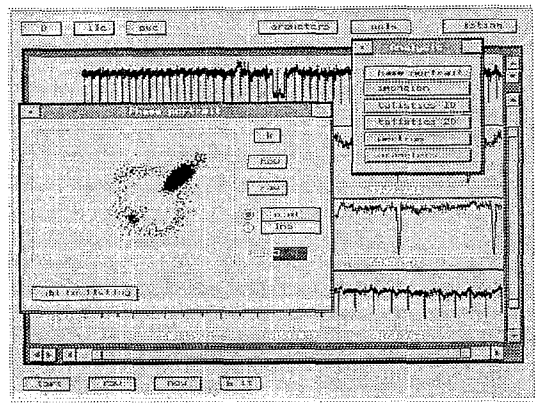
Рекомендуемая конфигурация аппаратуры:

компьютер AT 386/387, 4 Мб ОЗУ, VGA;

размер свободного дискового пространства – 10 Мб;

операционная система – MS DOS v5.0.

По желанию Заказчика программа ***DynAnalyzer*** может комплектоваться дополнительными драйверами для любой аппаратуры АЦП и дополнительным математическим обеспечением для обработки сигналов (фильтрация, математические функции).



Государственный учебно-научный центр «Колледж»
Россия 410071 Саратов, Астраханская, 83
Тел.: (845-2) 919328; 919319 Факс: (845-2) 240446
E-mail: postmaster@scnit.saratov.su

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Правила оформления рукописей

1. Статьи объемом не более 16 страниц должны быть напечатаны на белой бумаге через два интервала и представлены в двух экземплярах. При компьютерном наборе размер шрифта – не меньше стандартного машинописного.

2. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, *краткий реферат* статьи. К статье прилагаются:

а) на английском языке – название статьи, инициалы и фамилии авторов, название организации, в которой работают авторы, краткий реферат;

б) краткие сведения об авторах с фотографиями.

Приложения даются в двух экземплярах.

3. Рисунки выполняются тушью на белой бумаге отдельно в двух экземплярах, тоновые фотографии также представляются в двух экземплярах. Рисунки, полученные машинной графикой, должны быть достаточно четкими и яркими. На обороте указываются: порядковый номер рисунка, фамилии авторов, название статьи. Подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

4. Все формулы должны быть вписаны черными чернилами четко и ясно. Формулы должны быть размечены во всех случаях, когда строчные и прописные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своими размерами (C и c, V и v, U и u, W и w, S и s, P и p, K и k, X и x, Y и y, Z и z, Q и q, J и j). Необходимо прописные буквы подчеркивать простым карандашом двумя черточками снизу ($\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{V}}$), а строчные – двумя черточками сверху ($\overline{\overline{c}}$ и $\overline{\overline{v}}$). При написании необходимо также делать ясное различие между буквами J и I и пояснять их на полях. Буква O подчеркивается двумя черточками снизу, цифра 0 не подчеркивается. Особенно четко следует вписывать схожие по написанию l и e (l подчеркивается зеленым карандашом), к (русское) и k (латинское),h и n, q и g, «,» (запятую), «′»(штрих), «1» (единицу), «2» (двойку), r и z. Особое внимание должно быть обращено на аккуратное написание индексов и показателей степеней. Надстрочные знаки нужно отчеркивать дугой – $\cup$, подстрочные дугой – $\cap$. Индексы, являющиеся сокращениями слов, должны быть пояснены отдельно. В вещественных числах ставится десятичная точка.

5. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, прописные указываются особо. Для обозначения вектора используются стрелки над буквой, для усреднения величины – черта сверху.

6. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке должны быть указаны:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны.

7. Статьи, направляемые авторам на переработку, должны быть возвращены в редакцию не позднее двух месяцев после получения. При нарушении этого условия статья рассматривается как вновь поступившая.

Статьи, присланные без соблюдения перечисленных выше правил, к рассмотрению редакцией не принимаются.

Рекомендации по составлению «краткого реферата» и «сведений об авторах»

1. Публикация реферата преследует две основные цели:

а) помочь ученым, работающим над теми же вопросами, по которым написана статья, уточнить, имеет ли смысл читать статью полностью;

б) упростить и ускорить работу реферативных журналов, которые получат возможность немедленно перепечатывать авторские рефераты;

Реферат должен представлять собой самостоятельное законченное сообщение объемом не более 200–250 слов. В нем должны быть обозначены основные идеи и результаты, содержащиеся в статье. Авторы должны иметь ввиду, что рефераты могут оказаться единственными материалами, которые будут прочитаны.

2. Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:

Иванов Петр Сидорович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико–технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН. Защитил докторскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в МГУ (1964) и доктора физико–математических наук (1977) в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и соавтор учебника «Волны в экологии». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

Статьи также принимаются и на дискетах для компьютера IBM PC, формат MS DOS – 5,25" или 3,5". Текстовые файлы представляются в ASC II–кодировке. Иллюстрации – в виде файлов в формате PCX, TIFF или GIF (возврат дискет гарантируется). Представление текста на дискете не исключает необходимость представления статьи в машинописном варианте, с которым работает рецензент и с которого вносятся формулы в макет статьи. Возврат дискет гарантируется.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт радиотехники и электроники
Научный совет по проблеме «Физическая электроника»

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РФ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
Саратовский государственный университет
Учебно–научный центр «Колледж»

Саратовский Дом науки и техники союза НИО
Областное правление НТО РЭС им.А.С.Попова

IV Международная школа
«Стохастические колебания
в радиофизике и электронике»

Научный Совет по проблеме «Физическая электроника», Институт радиотехники и электроники РАН совместно с Саратовским государственным университетом им. Н.Г.Чернышевского, Государственным учебно–научным центром «Колледж» и Домом науки и техники союза НИО проводят со 2 по 8 октября 1994 года IV школу **«Стохастические колебания в радиофизике и электронике»**.

Цель школы – познакомить молодых исследователей с современным состоянием одной из актуальных областей нелинейной физики, связанной с изучением хаоса и структур в нелинейных системах радиофизики и электроники. Помимо лекций, предлагается заслушать и обсудить оригинальные доклады участников школы. Будут проведены общие дискуссии по фундаментальным вопросам исследований динамического хаоса и образования структур.

Научная программа школы

Курсы лекций будут заказаны Программным комитетом ведущим специалистам в области нелинейной динамики. Основные разделы:

1. Модельные уравнения и системы, методы теоретического анализа хаотической динамики (с акцентом на изучение электронных и радиофизических систем).

2. Экспериментальные исследования хаоса в электронике и радиофизике.

3. Диагностика хаоса: методы обработки сигналов, генерируемых автостохастическими системами и определение их количественных характеристик.

4. Приложения хаоса: использование на практике и в научных исследованиях автостохастических систем, хаотических сигналов, методического инструментария нелинейной динамики.

5. Хаос и компьютер: методы и результаты компьютерного моделирования электронных и радиофизических систем, программное обеспечение.

6. Самоорганизация и хаос в распределенных средах и системах с запаздыванием (применительно к радиофизике и электронике).

7. Прохождение хаотических сигналов через нелинейные инерционные цепи и среды.

8. Нелинейная динамика и современное образование.

Тезисы предлагаемых докладов объемом не менее 1 машинописной страницы представляются в адрес Оргкомитета с сопроводительным письмом от организации и 1 экземпляром документов, необходимых для опубликования в открытой печати – *до 1 марта 1994 года.* Материалы, получившие положительную оценку при обсуждении на школе, предполагается опубликовать в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». Основные материалы прошлой III школы опубликованы в номере 1–2 этого журнала за 1993 год.

Участие в работе школы

Организации, желающие командировать своих представителей для участия в работе школы, должны до 1 марта 1994 года направить заявку в Оргкомитет. Участниками школы считаются лица, заявленные организациями и получившие приглашение Оргкомитета.

Адрес для переписки: 410071, г.Саратов, Астраханская, 83, ГосУНЦ «Колледж», Оргкомитет IV Международной школы «Стохастические колебания в радиофизике и электронике».

Телефон для справок: в г.Саратове (8452) 919328, 919319.

Зав. редакцией Н.Н. Лёвина
Редакторы И.Ю. Бучко, М.В. Попова
Художник Д.В. Соколов
Оригинал – макет подготовлен Г.А. Суминой с использованием программы Design Studio на компьютерной системе Apple Macintosh
МГП «Типография №1», 410040, Саратов, Вишнёвая, 10.

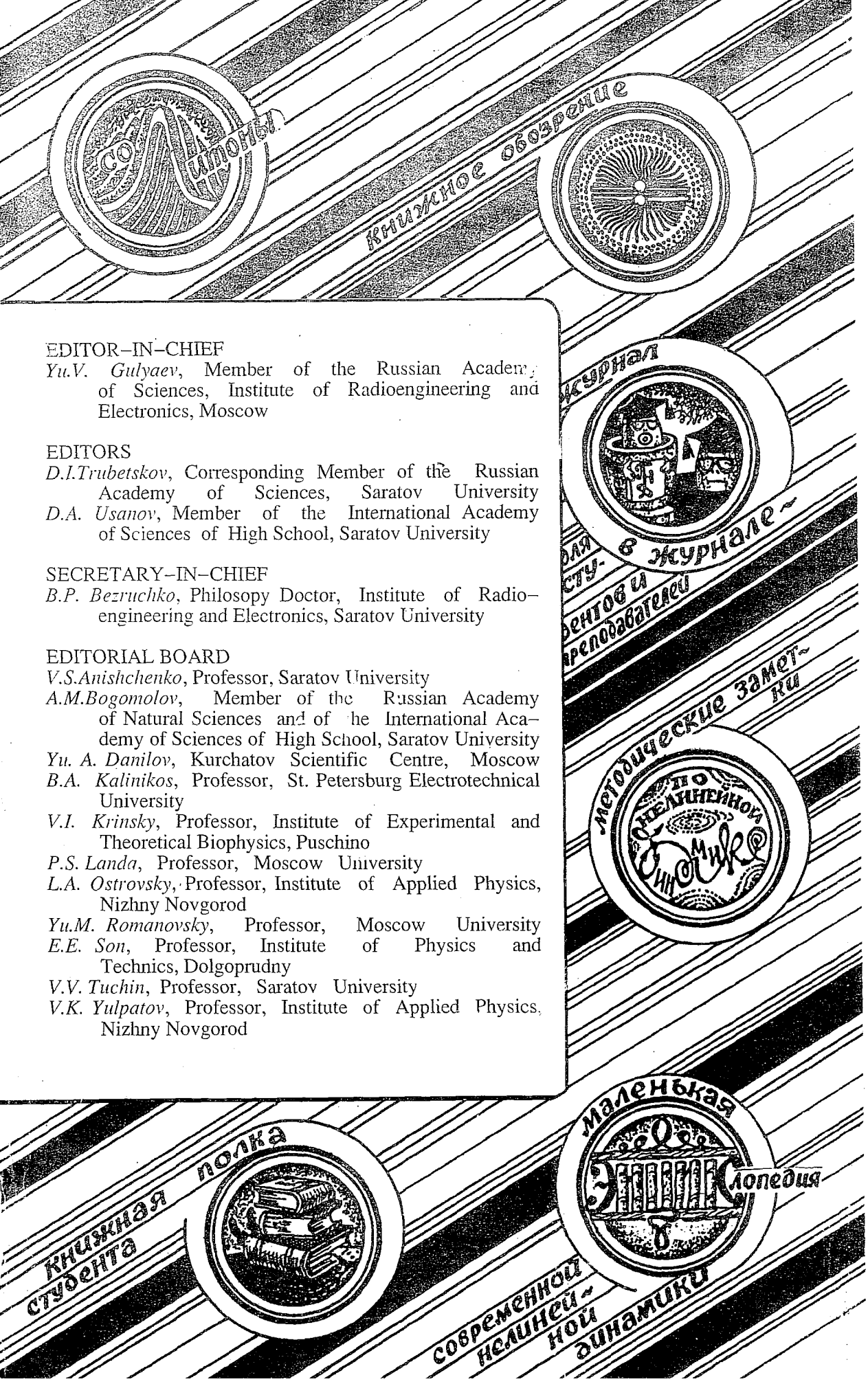
Сдано в набор 29.09.93. Подписано к печати 12.01.94. Формат70x108/16. Бумага типографская №1. Печать офсетная. Гарнитура Латинская Усл. печ.л. 11,90 (8,5). Уч.–изд. л. 10,9. Тираж 200 экз. Заказ 183

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно–научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете.

Периодичность журнала – 6 номеров в год..
Подписная цена без стоимости почтовых расходов на 1994 г. 3000 руб.

Реквизиты ГосУНЦ «Колледж»
банковский – р/с № 000609446 в КБ «Экономбанк» г. Саратова
МФО 251279, корсчет банка 700161122, РКЦ, МФО 251008;
почтовый – 410071, Саратов, ул. Астраханская, 83, ГосУНЦ «Колледж»
тел. (845–2) 919–319, факс (845–2) 240446

© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



EDITOR–IN–CHIEF
Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS
D.I.Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University
D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY–IN–CHIEF
B.P. Bezruchko, Philosopy Doctor, Institute of Radio–engineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD
V.S.Anishchenko, Professor, Saratov University
A.M.Bogomolov, Member of the Russian Academy of Natural Sciences and of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University
Yu. A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow
B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University
V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino
P.S. Landa, Professor, Moscow University
L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod
Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University
E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny
V.V. Tuchin, Professor, Saratov University
V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

"...В тот день поразит Господь мечом Своим тяжелым, и большим, и крепким Левиафана, змея прямобегущего, и Левиафана, змея изгибающегося, и убьет чудовище морское..." (Ветх.Завет, Исайя, гл. XXVII, ст.1).

В Библии Левиафан (рыба?, змей?, дракон? – Густав Доре, чей рисунок здесь приведен, явно склоняется к последнему), так вот, Левиафан, равно как и Океан, порождением которого он является, отождествляются с первобытным Хаосом*, грядущая победа над которым предваряет и открывает путь к царству Божьему на Земле. Но пытливые ученые не хотят и не могут ждать. Бесстрашным скальпелем анализа снимая покровы с непознанного, они хотят уже сейчас заставить Хаос работать на удовлетворение насущных потребностей человечества.

* См. об этом статью Б.Пойзнера на стр.97.

Впрочем, об удовлетворении этих потребностей провидчески писал Генрих Гейне более 150 лет назад:

А у Бога рыба есть –
Слышал о Левиафане?
Каждый день по часу с ней
Бог играет в Океане.

Ну а мясо у нее–
Это просто объеденье!
В день восстания из мертвых
Бог отправит приглашенье.

Всем, кто шел его стезею,
С ним совместно отобедать
И его любимой рыбы,
Рыбы Господа, отведать.