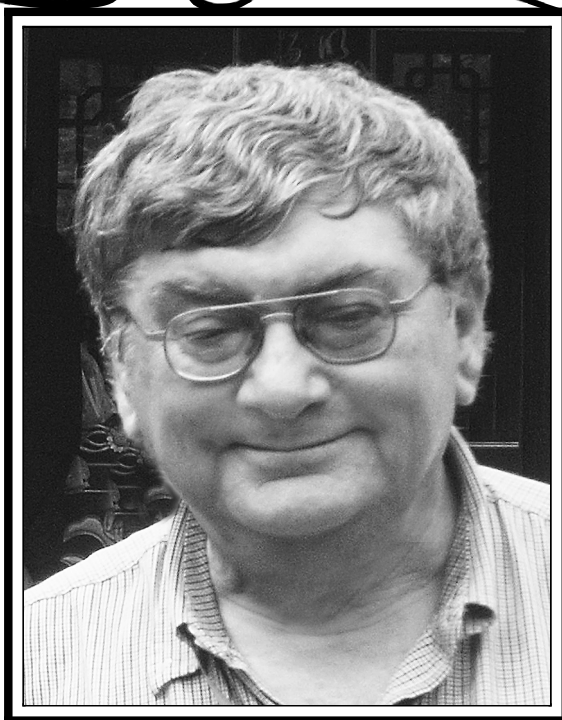


# Прикладная Деловая Динамика



4  
2025

*80 лет со дня рождения  
Валентина Сендеровича Афраймовича  
(2.04.1945 – 21.02.2018)*

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

*М. В. Сысоева*, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*С. Боккалетти*, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

*А. М. Быков*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*Н. С. Гинзбург*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*С. В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*О. И. Канаков*, д.ф.-м.н., ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*С. А. Кащенко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

*А. В. Красков*, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

*Н. В. Кузнецов*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

*Ж. ван Луйтелаар*, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

*А. Люттйоханн*, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*И. И. Мохов*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

*А. Б. Нейман*, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

*В. И. Некоркин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. Н. Писарчик*, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. В. Тучин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

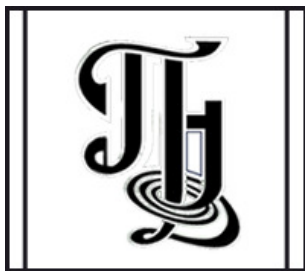
*Е. Я. Фрисман*, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)

*В. А. Царёв*, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)

*В. А. Черепенин*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

**Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
**Издатель** Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-77991 от 20 марта 2020 года

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписной индекс издания 73498. Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Свободная цена

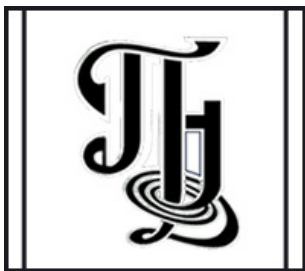
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией А. А. Грищенко  
Редакторы: А. Р. Нигметулина, А. В. Князева  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83. Тел.: +7 (927) 625-9020, e-mail: andjournal@sgu.ru, сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 9.07.2025  
Вышел в свет 31.07.2025  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 20,69 (22,25)  
Тираж 100 экз. Заказ № 73-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского университета. Адрес типографии: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy**  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The journal "Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics" is registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Registration ПИ No ФС77-77991 of 20 March 2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

The journal subscription index is 73498. A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru). Free price

The journal is Open Access

Head of Editorial office A. A. Grishchenko  
Editors: A. R. Nigmatulina, A. V. Knyazeva  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (927) 625-9020,  
e-mail: andjournal@sgu.ru,  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 9.07.2025. Published 31.07.2025  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 20,69 (22,25)  
Edition of 100 copies. Order No. 73-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### ОТ РЕДАКТОРА

*Лерман Л. М., Некоркин В. И.* В. С. Афраимович: к 80-летию со дня рождения..... 431

### БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

*Громов В. А., Томащук К. К., Бесчастнов Ю. Н., Сидоренко А. А., Какурин В. В.* Метод построения полной бифуркационной картины краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: применение теоремы Колмогорова–Арнольда.. 435

### ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Маслов А. А., Маслов Д. А.* Нелинейная динамика цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа при разном числе электростатических датчиков управления ..... 466

*Мирсаидов М. М., Сафаров И. И., Тешаев М. Х., Элибоев Н. Р.* Свободные линейные колебания вязкоупругой сферической оболочки с заполнителем ..... 485

*Спиридонов Д. М., Вадивасова Т. Е., Обухович Д. В.* Волоконно-оптический гироскоп с системой снижения шума в выходном сигнале: влияние параметров системы на шумоподавление ..... 497

*Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* Динамическая модель возникновения экономических циклов ..... 513

### НОВое В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

*Сенницкий В. Л.* О структуре течения вязкой жидкости при периодических воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве..... 531

### НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

*Степанян И. В., Леднев М. Ю.* Исследование волновых процессов и ритмической активности головного мозга человека с применением системы ортогональных функций Уолша ..... 545

*Власенко Д. В., Ушаков В. Г., Заикин А. А., Захаров Д. Г.* Сравнение ансамблевых и корреляционных графов в задаче классификации состояний мозга на основе фМРТ-данных ..... 557

*Капустников А. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В., Корнилов М. В.* Взаимодействие и синхронизация ритмов в модели лимбической системы мозга..... 567

*Семенова Н. И.* Рекуррентная нейронная сеть, состоящая из систем ФитцХью–Нагумо: необходимые для обучения характеристики ..... 590

## C O N T E N T S

### EDITORIAL

*Lerman L. M., Nekorkin V. I. V. S. Afraimovich: On the 80th anniversary of the birth ..... 431*

### BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS. QUANTUM CHAOS

*Gromov V. A., Tomashchuk K. K., Beschastnov Y. N., Sidorenko A. A., Kakurin V. V.*  
A method for constructing a complete bifurcation picture of a boundary value problem for  
nonlinear partial differential equations: application of the Kolmogorov–Arnold theorem ..... 435

### APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

*Maslov A. A., Maslov D. A.* Nonlinear dynamics for cylindrical resonator of wave solid-  
state gyroscope with different number of electrostatic control sensors..... 466

*Mirsaidov M. M., Safarov I. I., Teshaev M. Kh., Eliboyev N. R.* Free linear vibrations  
of a viscoelastic spherical shell with filler ..... 485

*Spiridonov D. M., Vadivasova T. E., Obukhovich D. V.* Fiber optic gyroscope with output  
signal noise reduction system: effect of system parameters on noise reduction..... 497

*Matrosov V. V., Shalfeev V. D.* Dynamic model of economic cycles origin..... 513

### INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

*Sennitskii V. L.* On the structure of a viscous liquid flow under periodic influences  
which have no predominant direction in space..... 531

### NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

*Stepanyan I. V., Lednev M. Y.* Investigation of wave processes and rhythmic activity  
of the human brain using the Walsh orthogonal function system ..... 545

*Vlasenko D. V., Ushakov V. G., Zaikin A. A., Zakharov D. G.* Comparison of ensemble and  
correlation graphs in the task of classifying brain states based on fMRI data ..... 557

*Kapustnikov A. A., Sysoeva M. V., Sysoev I. V., Kornilov M. V.* Interaction and synchroniza-  
tion of rhythms in a model of the brain limbic system..... 567

*Semenova N. I.* Recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems:  
characteristics required for training ..... 590



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003189  
EDN: DLWSDE

### В. С. Афраимович: к 80-летию со дня рождения

Л. М. Лерман<sup>1</sup>✉, В. И. Некоркин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

E-mail: ✉lermal@mm.unn.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 11.07.2025, опубликована 31.07.2025

*Для цитирования:* Лерман Л. М., Некоркин В. И. В. С. Афраимович: к 80-летию со дня рождения // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 431–434. DOI: 10.18500/0869-6632-003189. EDN: DLWSDE

*For citation:* Lerman LM, Nekorkin VI. V. S. Afraimovich: On the 80th anniversary of the birth. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4):431–434. DOI: 10.18500/0869-6632-003189

*Благодарности.* Л. М. Л. благодарит за поддержку программу фундаментальных исследований ВШЭ.

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

В этом году исполнилось 80 лет со дня рождения нашего близкого друга и замечательного ученого Валентина Сендеровича Афраимовича (2.04.1945–21.02.2018). В. С. Афраимович, или, как ласково звали его друзья, Валечка, родился в интеллигентной семье с корнями в городе Богородске Нижегородской (тогда — Горьковской) области. После окончания в 1963 году богородской школы № 3 Валя поступал на мехмат МГУ, но не прошел по конкурсу, так как на экзамене по физике ему занизили оценку, сказав, что он решает физические задачи формально математически. К счастью, в Горьковском университете в те годы была такая (весьма умная!) практика брать без экзаменов в университет абитуриентов из лучших московских вузов (МГУ, МФТИ и МИФИ), сдавших экзамены, но не прошедших по конкурсу. Так Валентин стал студентом Горьковского государственного университета (ГГУ) и окончил факультет вычислительной математики и кибернетики ГГУ в 1968 году.



Со второго курса он начал заниматься научной работой под руководством Леонида Павловича Шильникова и проявил большие способности. После окончания университета Валу и его друга и сокурсника Л. М. Лермана, тоже ученика Шильникова, взяли в НИИ прикладной математики и кибернетики Горьковского университета в отдел дифференциальных уравнений (зав. отделом проф. Е. А. Леонтович-Андропова) в лабораторию, возглавляемую Л. П. Шильниковым. Отдел был местом активной научной работы. Жизнь — научная и околонуучная — была ключом. Регулярно работал научный семинар, выступать на котором было большой честью и большим испытанием, так как к каждому выступающему относились «по гамбургскому счету». Валентин, продолжая сотрудничество, начатое в студенческие годы, стал активно работать с Л. П. Шильниковым, сначала под его руководством, а затем как равноправный соавтор, многие их работы получили широкую известность. Среди них — работы о периодическом возмущении автономных систем с предельным циклом и петлей сепаратрисы седла, бифуркации гомоклинических траекторий седло-узла и разрушение инвариантных торов (то есть явления перехода от двухчастотных режимов к режиму перемежаемости и хаосу). В этих давно ставших классическими работах были исследованы различные типы хаотического поведения и было обнаружено, что сложная динамика не описывается одними гиперболическими множествами: хаотические режимы очень часто соседствуют с устойчивыми. Позднее Афраймович и Шильников предложили концепцию «квазиаттрактора» — притягивающего множества, которое наряду с гиперболическими подмножествами может содержать и устойчивые периодические траектории больших периодов с малыми областями притяжения. Такая концепция оказалась адекватным математическим образом динамического хаоса, наблюдаемого во многих прикладных задачах.

Важным этапом в научной работе В. С. Афраймовича стало его участие вместе с В. В. Быковым под руководством Л. П. Шильникова в ныне знаменитых работах о рождении, бифуркациях и структуре странного аттрактора в системе Лоренца (1977–1983). В отличие от гиперболических аттракторов, теория которых к тому времени была уже достаточно хорошо развита, в аттракторе Лоренца происходили бифуркации при изменении параметров, то есть он не сохранял свою структуру при вариации параметров, хотя сохранялся как притягивающее множество со сложной структурой. Для исследования поведения траекторий на аттракторе авторы работы создали адекватную математическую модель в форме двумерного разрывного отображения (известную сейчас как геометрическая модель Афраймовича–Быкова–Шильникова), которую затем удалось детально исследовать. В этих работах ярко проявилось глубокое, тонкое понимание динамики, теории бифуркаций Леонидом Павловичем, неординарное мышление Валентина и виртуозное владение Быковым методами численного исследования. Авторы сумели сформулировать основные условия на отображение и его зависимость от параметров таким образом, что им удалось исследовать очень детально всю картину появления и исчезновения аттрактора и изменений его структуры при вариации параметров. По сей день теория Афраймовича–Быкова–Шильникова (АБШ) остается наиболее полной и удобной для практического анализа структуры и эволюции аттракторов лоренцевского типа в различных моделях. Позже в работах У. Такера и его группы из университета Уппсалы было показано с помощью методов интервальной арифметики и доказательных вычислений, что настоящая система Лоренца действительно ведет себя согласно модели АБШ.

Вскоре после работ по исследованию аттрактора Лоренца Валя начал активно сотрудничать с физиками, особенно — с М. И. Рабиновичем<sup>1</sup>. Тогда же, в конце 1980-х годов, В. С. Афраймович перешел на некоторое время на работу в ИПФ АН СССР, а затем — на радиофак ННГУ. В 1986 году В. С. Афраймович, Н. Н. Веричев и М. И. Рабинович обнаружили, описали и изучили эффект синхронизации неидентичных автоколебательных систем с хаотической динамикой.

<sup>1</sup> Михаил Израилевич Рабинович (20 апреля 1941 – 31 марта 2025), член-корреспондент РАН.

Этот пионерский результат впоследствии нашел применение при разработке новых принципов передачи информации.

В начале 1990-х он получил приглашение на работу в США в рамках научного проекта. После нескольких лет работы в США (Технологический институт штата Джорджия, Атланта, Северо-западный университет, штат Иллинойс) и на Тайване (технопарк Синджу) он получил позицию профессора-исследователя в университете Сан-Луис-Потоси в Мексике, где работал до последнего дня.

С 90-х годов прошлого века В. С. Афраймович стал заниматься (наряду с задачами предыдущей тематики) проблемами на стыке качественной теории динамических систем, эргодической теории и теории размерности. Здесь следует отметить, что В. С. Афраймович одним из первых развил и применил при исследовании динамических систем со сложной динамикой новый инвариант — топологическую энтропию динамической системы, введенную Р. Адлером, А. Конхеймом и М. МасЭндрю. При исследовании сложных динамических систем он фактически первым применил подход, основанный на использовании времён возвращения Пуанкаре для различных областей фазового пространства, как основу численного анализа статистического поведения траекторий. В этом направлении ему принадлежат фундаментальные результаты как с чисто математической точки зрения (в совместных работах с его мексиканскими учениками Е. Угальде, Х. Уриасом, а также с европейскими и американскими соавторами Й. Шмеллингом, Ж. Р. Шазоттом, Б. Сассолом и др.), так и в приложениях к различным проблемам гамильтоновой механики, теории связанных осцилляторов, в задачах синхронизации (совместные работы с Г. Заславским, М. Рабиновичем, А. Луо и др.). Дело в том, что спектральный анализ размерностных характеристик времён возвращения Пуанкаре позволил разобраться в структуре и статистике поведения траекторий в различных прикладных задачах, когда распределение вероятностей более сложное, чем гауссовское (имеет сингулярности). Другой подход к динамическим проблемам, инициированный Афраймовичем в те годы, был основан на введенной им энтропийной характеристике — так называемой энтропии по направлению. Этот инвариант, а также другая важная характеристика — динамическая сложность — оказались очень полезными при изучении систем со связями (в том числе, связанных осцилляторов и клеточных сетей). В этом направлении были получены (совместно с Я. Б. Песиним, Л. А. Бунимовичем, М. Курбажем, Ю. В. Глебским и др.) важные теоретические результаты и исследованы многочисленные приложения.

Результаты данных исследований легли в основу монографий В. С. Афраймовича (на английском языке): «Нелинейная динамика и сложность» (соавторы А. Луо и К. Фу), «Лекции по хаотической динамике» (соавтор З. Су), «Гамильтонов хаос за пределами КАМ-теории» (соавтор А. Луо), «Фрактальные размерности для времён возвращения Пуанкаре» (соавторы Э. Угальде, Х. Уриас — в 2011 году вышел русский перевод под редакцией М. И. Малкина).

Активно сотрудничал В. С. Афраймович с группой профессора В. И. Некоркина (ныне — чл.-корр. РАН). Эти исследования начались в конце 80-х годов. Они касались динамики пространственно-распределенных систем. Была опубликована серия работ по этой тематике, в которых исследовались системы, обладающие дискретными пространственными координатами. В частности, было введено строгое определение понятия хаоса волн и их устойчивости. Дальнейшие исследования в этом направлении были связаны с математическими аспектами нейродинамики. Был разработан (совместно с А. С. Дмитричевым и Д. В. Касаткиным, В. И. Некоркиным) подход, позволяющий анализировать динамику возбудимых нейронных сетей через динамику клеточных автоматов на графах синаптических связей. В последнее время Валентин Сендерович работал над обобщением теории сложности на случай динамических сетей. В этом направлении были получены и опубликованы первые результаты (совместно с А. С. Дмитричевым и Д. С. Шапиным, В. И. Некоркиным).

Другое направление исследований, которым Валентин Сендерович заинтересовался в начале нынешнего века — это проблемы работы мозга. Его привлекали динамические механизмы формирования автобиографической памяти, бифуркации, описывающие скачки внимания и, конечно, нелинейная динамика сознания в целом как иерархического когнитивного процесса. Умение широко мыслить, нестандартный взгляд на, казалось бы, тупиковые проблемы, и использование красоты создаваемой модели в качестве критерия ее перспективности помогли Афраймовичу вместе с соавторами построить основы динамической теории интеллектуальной активности человека на уровне математических теорем. Эти работы широко признаны и цитируются, например, на его статью (с соавторами) в одном из ведущих мировых журналов PLoS Computational Biology имеется более двухсот ссылок.

Валентин Сендерович был одарен редкостным талантом педагога и сыграл решающую роль в становлении многих молодых ученых. Эрудиция и творческое понимание предмета, нелюбовь к общим фразам и умение подчеркнуть главное делали его лекции привлекательными и незабываемыми для слушателей. Он работал во многих странах мира — России, США, Китае, Мексике, Франции и др., и везде у него остались ученики, последователи и соавторы.

Валентин Сендерович был талантливым учёным и обладал энциклопедическими знаниями в области теории динамических систем. Другое его уникальное качество состояло в поразительной способности очень чётко и доходчиво излагать даже очень сложные понятия и результаты. Валентин Сендерович был постоянным лектором нижегородских школ по нелинейным волнам, проводимых ИПФ РАН.

В. С. Афраймович опубликовал с соавторами более 100 научных работ и несколько монографий, из которых некоторые получили широкую известность, например, 5-й том известной серии ВИНТИ «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления».

Валентин Сендерович никогда не терял связи с российскими коллегами, особенно из Нижнего Новгорода: он каждый год (а иногда и чаще) приезжал в Нижний и регулярно принимал участие в работе научных конференций, проводимых в ННГУ, читал лекции на школе «Нелинейные волны», часто выступал на заседаниях Нижегородского математического общества, участвовал в совместных научных проектах.

Прошло больше семи лет, как Валентина Сендеровича нет с нами. С этого расстояния его вклад в нелинейную динамику, теорию бифуркаций, теорию синхронизации, математические проблемы нейродинамики и динамическую теорию интеллектуальной активности выглядит еще более выпукло, а его светлый образ по-прежнему ярок в памяти его коллег и друзей.





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003160  
EDN: NXMRAP

## Метод построения полной бифуркационной картины краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: применение теоремы Колмогорова–Арнольда

В. А. Громов, К. К. Томащук✉, Ю. Н. Бесчастнов, А. А. Сидоренко, В. В. Какурин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: stroller@rambler.ru, ✉korneytomashchuk@yandex.ru, y.beschastnov@mail.ru,

sidorenko.arto@gmail.com, vvkakurin@mail.ru

Поступила в редакцию 12.09.2024, принята к публикации 24.01.2025,

опубликована онлайн 29.01.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — разработка численного метода бифуркационного анализа для нелинейных уравнений в частных производных, основанного на методе сведения уравнений в частных производных к обыкновенным с использованием теоремы Колмогорова–Арнольда. **Методы.** В данной работе описывается метод сведения уравнений в частных производных к обыкновенным с использованием теоремы Колмогорова–Арнольда, а также метод бифуркационного анализа нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. **Результаты.** В работе представлен новый метод решения и бифуркационного анализа нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих вариационную постановку. Метод был применён к нелинейной двумерной задаче Брату с граничными условиями типа Дирихле. **Заключение.** Разработан новый метод бифуркационного анализа для нелинейных уравнений в частных производных, а именно был предложен метод сведения уравнений в частных производных к обыкновенным, который позволяет применять разработанный аппарат бифуркационного анализа для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод позволяет строить бифуркационные картины для нелинейных уравнений в частных производных произвольного вида.

**Ключевые слова:** бифуркационный анализ, нелинейные уравнения в частных производных, краевые задачи, теорема Колмогорова–Арнольда.

**Благодарности.** Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и стратегического проекта «Устойчивый мозг: нейрокогнитивные технологии адаптации, обучения, развития и реабилитации человека в изменяющейся среде» по программе развития НИУ ВШЭ в рамках участия в программе Минобрнауки России «Приоритет-2030». Программа «Приоритет-2030» реализуется в рамках национального проекта «Наука и университеты».

**Для цитирования:** Громов В. А., Томащук К. К., Бесчастнов Ю. Н., Сидоренко А. А., Какурин В. В. Метод построения полной бифуркационной картины краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: применение теоремы Колмогорова–Арнольда // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 435–465. DOI: 10.18500/0869-6632-003160. EDN: NXMRAP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## A method for constructing a complete bifurcation picture of a boundary value problem for nonlinear partial differential equations: application of the Kolmogorov–Arnold theorem

V. A. Gromov, K. K. Tomashchuk<sup>✉</sup>, Y. N. Beschastnov, A. A. Sidorenko, V. V. Kakurin

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia  
E-mail: stroller@rambler.ru, ✉korneytomashchuk@yandex.ru, y.beschastnov@mail.ru,  
sidorenko.arto@gmail.com, vvkakurin@mail.ru

Received 12.09.2024, accepted 24.01.2025, available online 29.01.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The purpose of this study is to develop a numerical method for bifurcation analysis of nonlinear partial differential equations, based on the reduction of partial differential equations to ordinary ones, using the Kolmogorov–Arnold theorem. **Methods.** This paper describes a method for reducing partial differential equations to ordinary ones using the Kolmogorov–Arnold theorem, as well as methods for the bifurcation analysis of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations. **Results.** The paper presents a new method for solving and bifurcation analysis of nonlinear boundary value problems for partial differential equations, which allow variational formulation. The method was applied to a nonlinear two-dimensional Bratu problem with Dirichlet-type boundary conditions. **Conclusion.** A new method of bifurcation analysis for nonlinear partial differential equations has been developed. Specifically, a method has been proposed for reducing partial differential equations to ordinary equations, which allows the use of the developed apparatus of bifurcation analysis for boundary value problems of ordinary differential equations. This method allows conducting bifurcation analysis for arbitrary nonlinear partial differential equations.

**Keywords:** bifurcation analysis, nonlinear partial differential equations, boundary value problems, Kolmogorov–Arnold theorem.

**Acknowledgements.** This work/article is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the HSE University and Strategic Project “Human Brain Resilience: Neurocognitive Technologies for Adaptation, Learning, Development and Rehabilitation in a Changing Environment”, which is part of Higher School of Economics’ development program under the “Priority 2030” academic leadership initiative. The “Priority 2030” initiative is run by Russia’s Ministry of Science and Higher Education as part of National Project “Science and Universities”.

**For citation:** Gromov VA, Tomashchuk KK, Beschastnov YN, Sidorenko AA, Kakurin VV. A method for constructing a complete bifurcation picture of a boundary value problem for nonlinear partial differential equations: application of the Kolmogorov–Arnold theorem. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):435–465. DOI: 10.18500/0869-6632-003160

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Решение значительного числа естественнонаучных задач делает необходимым построение, преимущественно в рамках численных методов, полной бифуркационной картины для краевых задач для систем нелинейных уравнений в частных производных (нелинейных краевых задач). При этом если для отыскания решений задач данного класса мы можем указать значительное число методов (метод конечных элементов, метод конечных разностей и др.), то задача создания метода построения полной бифуркационной картины (включающей ветви первичного, вторичного, третичного и т. д. ветвления) остаётся далекой от разрешения. Собственно говоря, здесь наблюдается определённый разрыв между глубокими теоретическими построениями теории бифуркаций (и теории катастроф) [1–3] и методами, позволяющими построить полную бифуркационную картину для нелинейных уравнений в частных производных, а также проанализировать её в рамках указанных теорий. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий строить полную бифуркационную картину в широком классе нелинейных краевых задач для уравнений в частных

производных, допускающих вариационную постановку; метод обобщает подход Н. И. Ободан и В. А. Громова [4–8] на общий случай представления неизвестных функций задачи в рамках теоремы Колмогорова–Арнольда.

Дальнейшее изложение структурировано следующим образом. В следующем разделе представлен обзор методов решения и бифуркационного анализа уравнений в частных производных, опирающихся на то или иное представление функции многих переменных как суперпозиции функций одной переменной. В разделе 2 представлена постановка задачи, а также уравнения модельной задачи (задача Брату); в разделе 3 изложен предложенный в настоящей статье метод решения нелинейных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Метод сведения уравнений в частных производных с помощью теоремы Колмогорова изложен в секциях 3.5–3.8. В разделе 4 описаны результаты численного эксперимента для задачи Брату. В последнем разделе представлены выводы.

## 1. Обзор литературы

**1.1. Представление функций многих переменных как суперпозиции функций одной переменной.** В рамках рассматриваемого метода предполагается сведение (в рамках итерационного процесса) краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных к последовательности краевых задач для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений; при этом и бифуркационный критерий для краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных представляет собой «комбинацию» бифуркационных критериев для соответствующих краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что для обыкновенных дифференциальных уравнений в [9] была предложена методология численного построения полной бифуркационной картины и её анализа в рамках теории катастроф, опирающаяся на теорему Келлера–Антмана [10].

Вышеуказанное обстоятельство обуславливает необходимость представления функции многих переменных как суперпозиции функций одной переменной. Классический метод Фурье предполагает представление неизвестной функции в виде

$$u(x_1, x_2) \approx \sum_i h_i^*(x_1)g_i^*(x_2). \quad (1)$$

Здесь и далее звёздочкой помечены заданные функции, без звёздочки фигурируют функции, подлежащие определению в рамках того или иного численного алгоритма. В работах Л. В. Канторовича [11] был предложен метод, в рамках которого неизвестные функции задачи представлялись в виде

$$u(x_1, x_2) \approx \sum_i h_i^*(x_1)g_i(x_2). \quad (2)$$

Подстановка представления (2) в вариационную постановку задачи с последующим варьированием по неизвестным функциям  $g(x_2)$  сводит задачу бифуркационного анализа краевых задач для системы нелинейных уравнений в частных производных к задаче бифуркационного анализа краевых задач систем обыкновенных дифференциальных уравнений<sup>1</sup>. В работах Н. И. Ободан и В. А. Громова [4–8, 13, 14] был предложен итерационный обобщённый метод Канторовича (ИОМК), основывающийся на представлении вида

$$u(x_1, x_2) \approx \sum_i h_i(x_1)g_i(x_2). \quad (3)$$

<sup>1</sup>В статье [12] предоставлен обзор существующих методов сведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (метод Фурье, метод Галёркина и др.).

Здесь определению (в рамках итерационного процесса) подлежат уже как функции  $h_i(x_1)$ , так и функции  $g_i(x_2)$ .

Представление (3) позволяет свести задачу бифуркационного анализа краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных к задаче бифуркационного анализа краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [5]. Полученные здесь результаты хорошо согласуются<sup>2</sup> с теоретическими результатами, полученными в рамках теории особенностей дифференцируемых отображений (теории катастроф) — порядок вырожденности особых точек, допустимые варианты изменения числа максимумов и минимумов потенциальной функции при пересечении бифуркационного множества в пространстве параметров и др. [3]. В частности, полная бифуркационная картина здесь была построена для уравнений Кармана (уравнений теории оболочек) [5]. Указанное представление оказалось эффективным в весьма широком круге задач. Как нам представляется, здесь можно указать две причины. С одной стороны, такого рода представления можно рассматривать как построение базиса, «оптимального» для данной задачи: здесь мы не «навязываем» задаче некий предзаданный базис (например, базис Фурье), но ищем базис, наилучший для данной задачи. Вследствие этого число слагаемых в представлении (3) обычно весьма мало по сравнению с методами, основанными на разложении в ряд Фурье, где предполагается, что функция раскладывается по базису, одинаковому для всех задач. Здесь обычно достаточно двух-трёх слагаемых. С другой стороны, в значительном числе задач решение имеет вид (3) или близкий к нему.

Вместе с тем представление (3), очевидно, не является наиболее общим представлением функции многих переменных, использующим функции одной переменной. Наиболее общее представление даётся теоремой Колмогорова–Арнольда [15]<sup>3</sup>. В формулировке Д. Шпрехера теорема Колмогорова–Арнольда принимает вид [17, 18]:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p + aq) \right), \quad (4)$$

где константы  $a, \alpha_p, p = 1, \dots, n$  и внутренняя функция  $\psi(x)$  одинаковы для всех непрерывных  $u(x_1, \dots, x_n)$ . Следует подчеркнуть, что представление (4), в отличие от представлений (1)–(3), представляет собой точное равенство; при этом число слагаемых здесь мало и определяется лишь числом аргументов функции  $u$ .

В формулировке Хедберга–Кахане теорема Колмогорова–Арнольда принимает вид [19]:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \chi \left( \sum_{p=1}^n \lambda_p \psi_q(x_p) \right). \quad (5)$$

В отличие от предыдущих формулировок, формулировка Хедберга верна для «почти всех» наборов функций  $(\psi_0(x), \dots, \psi_{2n}(x))$ , где  $\psi_i$  принадлежит к классу непрерывных неубывающих функций, удовлетворяющих условиям  $\psi_i(0) = 0, \psi_i(1) = 1$ , для которых существуют целочисленно независимые константы  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

Наконец, в формулировке Р. Досса [20] теорема Колмогорова–Арнольда принимает вид

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right). \quad (6)$$

<sup>2</sup>Что далеко не всегда так для методов, опирающихся на конечные разности, конечные элементы и др.

<sup>3</sup>Отметим также работу Майорова–Пинкуса [16], в которой даётся формула для наилучшего приближения (не точного представления!) функции многих переменных суперпозицией дифференцируемых функций одной переменной.

Данная формулировка также верна для «почти всех»  $n(2n + 1)$  наборов  $\varphi_{i,p} \in C(I)^{n(2n+1)}$ . Для удобства построения вычислительного процесса было использовано обобщение формулировки Досса (7):

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right). \quad (7)$$

Данная формулировка оказалась наиболее удобной с точки зрения построения вычислительного процесса.

Критика теоремы Колмогорова–Арнольда связана с тремя обстоятельствами. Во-первых, внутренние (формулировки Колмогорова–Арнольда и Шпрехера) или внешние (формулировки Хедберга, Досса и Шпрехера) функции являются всюду непрерывными, но нигде не дифференцируемыми («чёртова лестница»). В частности, для двумерной функции  $u(x_1, x_2) = \sin(\pi * x_1) \sin(\pi * x_2)$  внешняя функция  $\Phi(z)$  в представлении Шпрехера (35) имеет вид (рис. 1).

Во-вторых, в оригинальном доказательстве отсутствовал конструктивный алгоритм построения как внешних, так и внутренних функций. В-третьих, даже то незначительное число (внутренних и внешних) функций, которые фигурируют в представлении (6), в некоторых случаях представляется слишком большим и должно быть уменьшено.

Решение первой из указанных проблем в общем случае, вероятно, невозможно. Здесь можно сослаться на работы А. Г. Витушкина [21, 22], в которых показано, что на кубе  $I_3$  можно определить  $k$  раз непрерывно дифференцируемую функцию трёх переменных, не представимую на этом кубе в виде конечной суперпозиции  $\lceil \frac{2}{3}k \rceil$  раз дифференцируемых функций двух

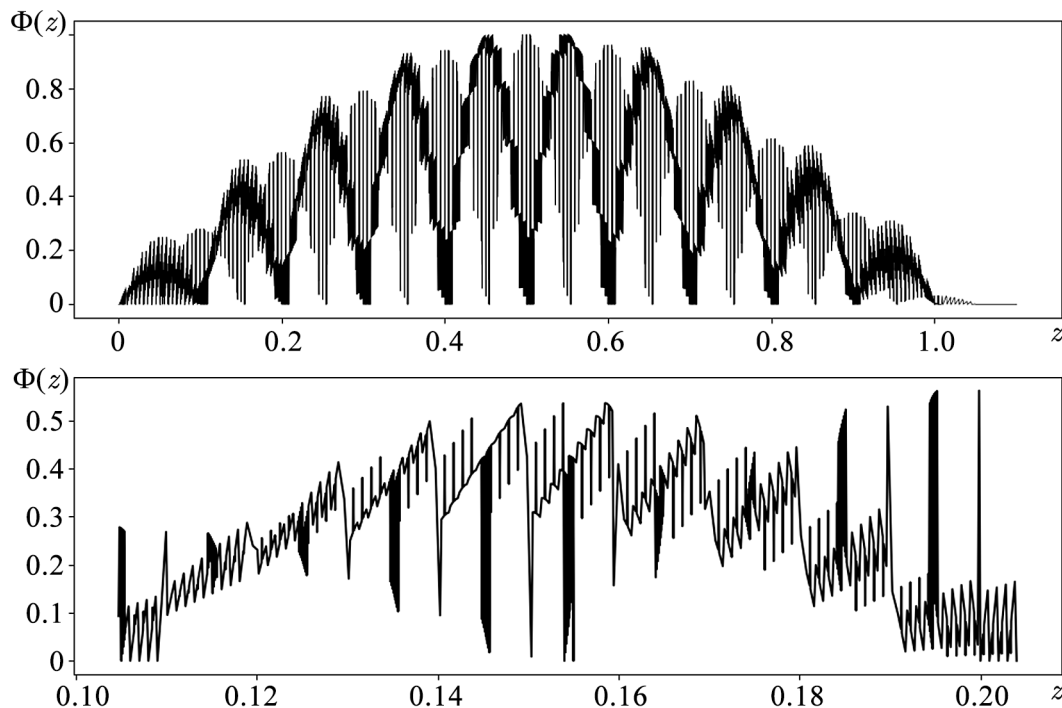


Рис. 1. График функции  $u(x_1, x_2) = \sin(\pi * x_1) \sin(\pi * x_2)$  в представлении Шпрехера (35)

Fig. 1. Graph of the function  $u(x_1, x_2) = \sin(\pi * x_1) \sin(\pi * x_2)$  in the Sprecher's representation (35)

переменных, с частными производными порядка  $\lceil \frac{2}{3}k \rceil$ , которые удовлетворяют условию Липшица, где  $k$  — произвольное целое положительное число. Вместе с тем следует подчеркнуть, что поскольку в отличие от общего случая, рассматриваемого в теореме Колмогорова–Арнольда, мы ищем решение уравнения в частных производных, то на искомом решении все необходимые производные внутренних и внешних функций существуют и дифференцируемы<sup>4</sup>. С другой стороны, алгоритмы построения внутренних функций, предложенные для различных форм теоремы Колмогорова–Арнольда, являются итерационными алгоритмами, вычисляющими значения указанных функций в конечном числе точек, тем большим, чем больше номер итерации. Это означает, что на каждой конкретной итерации мы имеем значение функции в конечном числе точек и, аппроксимируя эти значения тем или иным способом (например, сплайнами), можем считать их — для конечной итерации — принадлежащими любому необходимому классу гладкости<sup>5</sup>. Здесь мы «опасно» приближаемся к вопросу о природе математического моделирования и дифференциальных уравнений. Мы будем придерживаться той точки зрения — допуская, впрочем, существование прямо противоположной — что мы моделируем реальный процесс, а дифференциальные соотношения являются лишь удобным средством его описания. Следовательно, наши предположения о безграничной делимости и им подобные, лежащие в основе большинства дифференциальных уравнений, являются лишь допущениями, удобными при выводе дифференциальных соотношений — очевидно, что всего лишь стократное уменьшение масштаба в два раза приводит нас в «мир» дискретных атомов, разделённых гигантскими расстояниями, а дальнейшее уменьшение — в квантовый мир. А тогда мы должны предположить, что алгоритмы анализа дифференциальных уравнений, позволяющие описать поведение соответствующей системы для произвольного, но конечного уровня дискретизации, являются «легитимным» средством описания реальных процессов.

Решению второй из указанных проблем посвящено значительное число работ, которые можно условно разделить на два направления. В рамках первого направления осуществляются попытки получения конструктивных алгоритмов построения внутренних функций для формулировок с фиксированными внутренними функциями. Здесь нужно отметить, прежде всего, работы Д. Шпрехера [17, 18], в которых предлагается итерационный алгоритм построения внешних функций. М. Коппен [23] указал на ошибку в алгоритме Шпрехера построения внутренней функции, которая приводит к немонотонности этой функции — нарушению необходимого условия теоремы Колмогорова–Арнольда. Он также предложил корректный алгоритм построения внутренней функции. Дж. Актор [24] предлагает алгоритм построения непрерывных по Липшицу внутренних функций, чем решает серьёзную вычислительную проблему; кроме того, алгоритм позволяет контролировать наклон функций<sup>6</sup>. В рамках второго направления решения второй из указанных проблем осуществляется построение оптимальных аппроксимаций (для которых точное равенство в формулировках типа (4), (5), (6) заменяется приближённым), дифференцируемых необходимое число раз, функциями одной переменной. Так, в работах Майорова–Пинкуса [16] предлагается аппроксимация с использованием дифференцируемых сигмоидальных функций. К этому направлению примыкают работы Тегмарк [25], где теорема Колмогорова–Арнольда используется в архитектуре нейронных сетей. В данном подходе внутренние функции аппроксимируются В-сплайнами.

Среди работ, посвящённых решению третьей из указанных проблем (уменьшению числа функций), можно отметить статьи [17, 26]. Так, в статье [17] Д. Шпрехер даёт формулировку

<sup>4</sup>Что, разумеется, оказывается далеко не так, как только мы даже немного отступаем от решения.

<sup>5</sup>В пределе по числу итераций они сходятся, согласно теореме Колмогорова, к везде непрерывным, нигде не дифференцируемым функциям.

<sup>6</sup>В работе также дан обзор различных формулировок теоремы Колмогорова–Арнольда.



теоремы, где используется только одна внутренняя функция (он использует линейные сдвиги её аргумента), а также предлагает алгоритм построения этой функции. В работе Лоренца [26] и вовсе используются всего две функции — одна внутренняя и одна внешняя (он использует линейные сдвиги внутренней и внешней функций).

**1.2. Алгоритм построения полной бифуркационной картины.** Алгоритм построения полной бифуркационной картины для статических задач для уравнений в частных производных обычно включает в себя: алгоритм идентификации особых точек (бифуркационный критерий); алгоритм классификации особых точек с выделением предельных особых точек и точек бифуркации<sup>7</sup> и порядка их вырожденности; алгоритм продолжения по параметру и смены параметра продолжения для преодоления предельных особых точек (path-tracing); алгоритм построения постбифуркационных ветвей решения, исходящих из данной точки бифуркации. Здесь следует подчеркнуть, что результаты применения данного алгоритма должны согласовываться с известными теоретическими результатами теории бифуркаций и теории катастроф (например, о порядке вырожденности особых точек — однократная или двукратная) и не зависеть от числа узлов аппроксимации. Последнее требование практически исключает возможность применения сеточных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных, а также значительной части бессеточных (обзор последних можно найти в [27]). В рамках представления (3) для построения бифуркационной картины нелинейных уравнений в частных производных в работах [4, 5, 9, 13, 28] был предложен новый итеративный подход к решению уравнений в частных производных — итеративный обобщённый метод Канторовича (ИОМК).

В данном методе искомые функции многих переменных представляются в виде суммы произведений одномерных (3), что позволяет свести краевую задачу уравнений в частных производных к последовательности краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный подход также позволяет свести (в рамках представления (3)) бифуркационный анализ краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных к бифуркационному анализу краевых задач для нелинейных обыкновенных уравнений ОДУ. Существенным достоинством данного подхода является то, что результаты бифуркационного анализа не зависят от использованного способа дискретизации, а также от числа точек дискретизации, но определяются лишь порядком самого уравнения, что позволяет в полной мере применять теоремы теории бифуркаций к анализу уравнений в частных производных<sup>8</sup>. В работах [4, 5, 8, 9, 28, 30] данный метод и сопутствующие алгоритмы применяются к уравнениям Кармана теории тонкостенных оболочек для получения решений; здесь представлена полная бифуркационная картина соответствующей нелинейной краевой задачи<sup>9</sup>.

Представление (3) не является наиболее общим представлением функции многих переменных через суперпозицию функций одной переменной, что обуславливает необходимость использования различных формулировок теоремы Колмогорова для конструирования методов построения полной бифуркационной картины, построенных по модели ИОМК.

В настоящем исследовании предлагается метод численного построения полной бифуркационной картины для краевых задач нелинейных уравнений в частных производных, основанный на представлении теоремы Колмогорова в формах Шпрехера (4), Хедберга (5) и Досса (6).

<sup>7</sup>В некоторых случаях возможен комбинированный вариант (hill-top bifurcation).

<sup>8</sup>Классические подходы к решению краевых задач для уравнений в частных производных (метод конечных элементов, метод конечных разностей и др.) обычно позволяют решить исследуемое уравнение, но результаты бифуркационного анализа могут качественно отличаться в зависимости от порядка дискретизации [29].

<sup>9</sup>Отметим, что на основании предложенной методологии бифуркационного анализа (решение прямой задачи теории бифуркаций) в работах [5, 6, 31] рассматривается проблема прогнозирования бифуркации и определения состояния, предшествующего бифуркации (обратная задача теории бифуркаций).

## 2. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача для нелинейного уравнения в частных производных, данная своей вариационной постановкой:

$$\Xi(u) \longrightarrow \underset{u}{extr}, \quad (8)$$

где  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  — односвязная выпуклая область;  $u \in W_2^k(\Omega)$  — неизвестная функция;  $W_2^k(\Omega)$  — пространство Соболева, а  $F$  такое, что выполняется необходимое условие локального экстремума [32]:

$$\Xi = \int \int_{\Omega} \dots \int F\left(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^N u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (9)$$

В качестве ограничений выступают граничные условия вида

$$S(u) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10)$$

где  $\partial\Omega$  — граница односвязной выпуклой области  $\Omega$  конечномерного пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $S$  — линейный оператор, который переводит  $u$  в  $\{u : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ .

Необходимо предложить метод построения полной бифуркационной картины для нелинейной краевой задачи (8)–(10), позволяющий:

1. Строить решения нелинейной краевой задачи и ветви решения функции в зависимости от параметра.
2. Идентифицировать особые точки решения.
3. Определять их тип и порядок вырожденности<sup>10</sup>.
4. Строить постбифуркационные ветви решения.

В конечном итоге такой метод должен позволить строить полную бифуркационную картину для краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных, включающую ветви первичного, вторичного, третичного и т. д. ветвлений.

В качестве модельных рассматриваются уравнения Брату [33, 34]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \gamma e^{u(x_1, x_2)} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (11)$$

с граничными условиями вида Дирихле:

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \quad (12)$$

где  $\Omega = [0, 1]^2$ . Вариационная задача, эквивалентная дифференциальной, задаётся формулой (13):

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u}{\partial x_2} \right]^2 - 2\gamma e^{u(x_1, x_2)} \right] dx_1 dx_2 \longrightarrow \underset{u(x_1, x_2)}{extr}. \quad (13)$$

Существование решения задачи Брату доказывается, например, в работах [35, 36].

<sup>10</sup>Здесь предполагается, что указанные характеристики не будут зависеть от способа аппроксимации, но только от порядка самих уравнений, и будут согласовываться с теоретическими результатами теории бифуркаций.

### 3. Метод численного построения полной бифуркационной картины нелинейной краевой задачи

**3.1. Метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши, использующий итерационную формулу метода Ньютона** (в дальнейшем — для краткости — метод Ньютона). В конечном итоге любой из рассмотренных ниже методов решения нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных так или иначе сводится к последовательности решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений был выбран метод Ньютона. Существенным достоинством метода является то, что данный метод позволяет легко сформулировать бифуркационный критерий для такого рода задач (см. раздел 2.2). Подробное изложение метода можно найти в [5, 37].

Рассмотрим краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (14):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), \gamma), \\ h(x_0, x_1, y(x_0), y(x_1)) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y(x)$  — вектор-функция неизвестных задачи,  $f(x, y(x), \gamma)$  — вектор-функция правых частей,  $\gamma$  — вектор параметров,  $h(x_0, x_1, y(x_0), y(x_1), \gamma)$  — граничные условия.

Метод заключается в сведении рассматриваемой задачи к эквивалентной ей задаче Коши (16):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), \gamma), \\ y(x^*) = \xi, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\xi$  является вектором значений неизвестных функций задачи  $y(x)$  в произвольной, но фиксированной точке  $x^* \in [x_0, x_1]$ . Интегрирование любым известным методом численного интегрирования<sup>11</sup> из точки  $x^*$  к границам промежутка интегрирования позволяет вычислить невязки задачи как функции вектора (17):

$$\varphi(\xi, \gamma) = h(x_0, x_1, y(x_0, \xi), y(x_1, \xi), \gamma) = 0. \quad (17)$$

Здесь  $\varphi(\xi, \gamma)$  — вектор невязок, заданных в неявном виде через решение задачи Коши (16).

Тем самым задача (14)–(15) сводится к задаче нахождения вектора  $\xi$ , обращающего в ноль вектор невязок  $\varphi(\xi, \gamma)$ , то есть отыскания решения системы трансцендентных уравнений (17).

Для отыскания решения используется метод Ньютона, итерационная формула которого (18):

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} - \mathcal{F}^{-1} \varphi(\xi^{(k)}, \gamma), \quad (18)$$

где  $\mathcal{F}$  является численным аналогом матрицы производных Фреше:

$$\mathcal{F}_{i,j} \approx \frac{\varphi_i(\xi_0, \dots, \xi_j + \Delta, \dots, \xi_n, \gamma) - \varphi_i(\xi_0, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n, \gamma)}{\Delta}, \quad (19)$$

а  $\Delta$  — малое, но конечное приращение.

**3.2. Вариационная постановка задачи и связь с теорией катастроф.** Вариационная постановка краевой задачи (14)–(15) может быть записана в виде

$$J(y, y') \longrightarrow \min. \quad (20)$$

<sup>11</sup>Мы использовали метод Рунге–Кутты 4-го порядка.

Добавление к вариационной постановке в качестве ограничений всех или части условий стационарности функционала не меняет решения вариационной задачи [10, 38]. Соответственно, добавление к функционалу (20) условий (15) превращает его в функцию конечного числа переменных  $\xi$  и вектора параметров  $\gamma$ , то есть в математический объект, который можно исследовать в рамках теории катастроф:

$$H(y, y', \gamma; \xi) \longrightarrow \text{extr.} \quad (21)$$

Градиент функции (21) даёт множество невязок (17), а её гессиан — матрицу Фреше (19). Указанные обстоятельства означают, что задача (14)–(15) в случае наличия вариационной постановки (20) может быть исследована не только методами теории бифуркаций, но и методами теории катастроф [1, 3, 29].

Следует подчеркнуть, что порядок матрицы Фреше в данном подходе определяется не числом узлов аппроксимации, но исключительно порядком самой задачи (числом уравнений в системе). Это позволяет получать в численном расчёте результаты, хорошо согласующиеся с результатами теории катастроф и теории бифуркаций [3, 10, 39]: в частности, для большинства исследованных авторами систем порядок вырожденности матрицы был равен одному или двум, при этом наблюдающиеся поверхности решений соответствовали каспоидным и омбилическим катастрофам соответственно, как это и предполагает теория катастроф.

В рамках сформулированного выше подхода к решению нелинейных краевых задач критическая точка потенциальной функции (21) эквивалентна решению (14)–(15), а вырожденная критическая точка — особой точке решения данной задачи. Это позволило Келлеру и Антману [10] сформулировать критерий для идентификации и классификации особых точек решения (критических точек потенциальной функции (21)). Точка  $(\xi, \gamma)$  является особой точкой, если при данном значении вектора параметров матрица Фреше  $\mathcal{F}$  вырождена:

$$\det(\mathcal{F}) = 0. \quad (22)$$

На практике используется определитель приближения (19), вычисленный на последней итерации метода Ньютона.

Двумя важными характеристиками здесь является порядок вырожденности матрицы  $\mathcal{F}$  и её тип. Порядок вырожденности  $l$  (коранг) матрицы  $\mathcal{F}$  размерности  $n \times n$  определяется как  $l = n - r$ , где  $r$  является рангом данной матрицы. Так как матрица  $\mathcal{F}$  определяется через численное решение задачи сведения краевой задачи к эквивалентной задаче Коши, то и коранг матрицы может быть численно аппроксимирован. В рамках предложенного метода рассматривается численный коранг матрицы: для определения численного коранга матрицы  $\mathcal{F}$  вычисляются её сингулярные значения. Здесь удобно следить за сингулярными значениями матрицы  $\mathcal{F}$  как за функциями параметра продолжения на интервале, содержащем особую точку (см., например, рис. 2, рис. 3): некоторые сингулярные значения касаются точки ноль (обращаются в ноль), а некоторые — нет (хотя могут быть близки к нулю, но не касаются).

Первый случай соответствует однократному вырождению (каспоидные катастрофы), второй — двукратному (омбилические катастрофы)<sup>12</sup>. Здесь возможен и более тонкий анализ в рамках теории катастроф, позволяющий отнести наблюдаемое многообразие ветвей решения к типу одной из элементарных катастроф (см., например, [37]), а свойства элементарных катастроф хорошо известны [2, 3, 29].

Другая классификация особых точек решения делит их на предельные особые точки и точки бифуркации. Для определения типа особой точки строится расширенная матрица Фреше,

<sup>12</sup>На графике зависимости определителя матрицы  $\mathcal{F}$  от параметра эти случаи соответствуют пересечению графиком определителя оси абсцисс и его касанию этой оси.

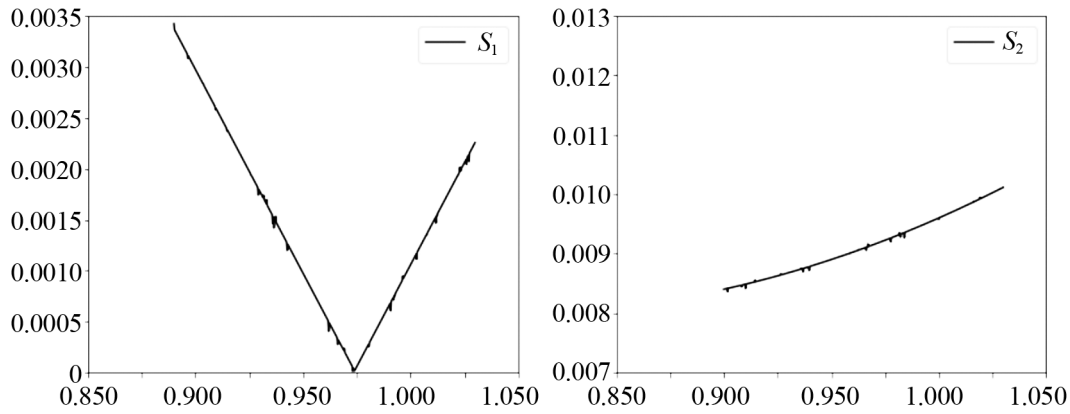


Рис. 2. Слева направо: графики поведения первого и второго сингулярного значения матрицы  $\mathcal{F}$  в случае однократной вырожденности

Fig. 2. From left to right: graphs of the behavior of the first and second singular values of the matrix  $\mathcal{F}$  in the case of single degeneracy

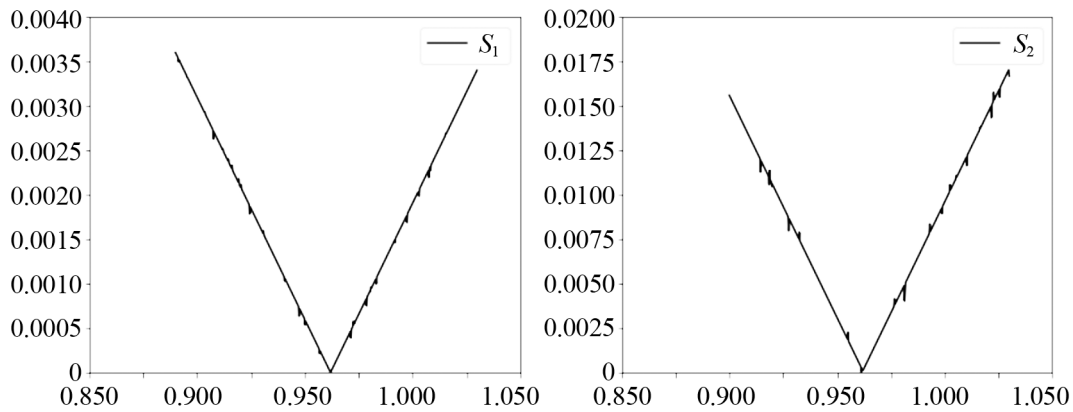


Рис. 3. Слева направо: графики поведения первого и второго сингулярного значения матрицы  $\mathcal{F}$  в случае двукратной вырожденности

Fig. 3. From left to right: graphs of the behavior of the first and second singular values of the matrix  $\mathcal{F}$  in the case of double degeneracy

которая получается из матрицы Фреше путём добавления столбца производных по параметру  $\gamma$ :

$$\mathcal{F}_{i,n+1}^* = \frac{\varphi_i(\xi, \gamma + \Delta) - \varphi_i(\xi, \gamma)}{\Delta}. \quad (23)$$

Пусть  $\mathcal{F}_k^*$  — матрица, получаемая из матрицы  $\mathcal{F}^*$  удалением  $k$ -ого столбца. Тогда тип особой точки определяется по следующим критериям:

$$\begin{aligned} \forall k = 1, \dots, n+1 : \det(\mathcal{F}_k^*) = 0, &\implies (\xi, \gamma) - \text{точка бифуркации,} \\ \exists k = 1, \dots, n+1 : \det(\mathcal{F}_k^*) \neq 0, \det(\mathcal{F}) = 0, &\implies (\xi, \gamma) - \text{предельная точка.} \end{aligned} \quad (24)$$

**3.3. Преодоление предельных особых точек и выход на постбифуркационные ветви решения в точках бифуркации.** Сходимость метода Ньютона во многом определяется «удачным» выбором начального приближения. Для получения как можно более хорошего начального приближения может быть использован метод продолжения по параметру [40], где начальное приближение для следующего значения параметра  $\gamma_{i+1}$  находится по решениям, отвечающим

предыдущим значениям параметра  $(\gamma_i, \gamma_{i-1}, \dots)$ , с использованием интерполяционных многочленов Ньютона. В частности, нами использовались полиномы 3 степени:

$$\begin{aligned}\xi(\gamma_{i+1}) &= \xi(\gamma_{i-2}) + [\gamma_{i+1} - \gamma_{i-2}]\xi(\gamma_{i-2}, \gamma_{i-1}) + [\gamma_{i+1} - \gamma_{i-2}][\gamma_{i+1} - \gamma_{i-1}]\xi(\gamma_{i-2}, \gamma_{i-1}, \gamma_i), \\ \xi(\gamma_l, \gamma_j) &= \frac{\xi(\gamma_j) - \xi(\gamma_l)}{\gamma_j - \gamma_l}, \\ \xi(\gamma_l, \gamma_j, \gamma_k) &= \frac{\xi(\gamma_j, \gamma_k) - \xi(\gamma_l, \gamma_j)}{\gamma_k - \gamma_l}.\end{aligned}\tag{25}$$

Здесь  $\xi(\gamma_j), j \leq i$  — значения функций-решений краевой задачи (14)–(15) в точке  $x^* \in [x_0, x_1]$ , отвечающие решению для значения параметра  $\gamma_j$ .

В случае невозможности дальнейшего движения по параметру (например, в случае несуществования решения при больших значениях параметра, как это имеет место для предельных особых точек — см. рис. 7) используется метод смены ведущего параметра: из вектора начального приближения  $\xi$  выводится самая быстрорастущая компонента ( $\xi_i : i = \operatorname{argmax}_i |\xi_i(\gamma_{j+1}) - \xi_i(\gamma_j)|$ ), и далее движение осуществляется по ней как по параметру. Старый параметр занимает место данной компоненты в векторе  $\xi$ . Итерационная формула (18) сохраняется, но матрица производных  $\mathcal{F}$  заменяется матрицей  $\mathcal{F}_\gamma$ , в которой столбец производных по выведенной компоненте заменяется столбцом производных по параметру  $\gamma$ . Данный подход помогает преодолевать предельные особые точки решения.

**3.4. Представление функции многих переменных в виде суперпозиции функции одной переменной с помощью представления Шпрехера.** Для представления неизвестной функции краевой задачи, данной своей вариационной формулировкой (8), (10), в виде суперпозиции функций одной переменной воспользуемся теоремой Колмогорова в формулировке Шпрехера (4) и тем фактом, что  $a$  является малым параметром<sup>13</sup>. Разложим представление (4) в ряд Тейлора по параметру  $a$ :

$$\sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=0}^n \alpha_p \psi(x_p + qa) \right) = \sum_{m=0}^M \frac{a^m}{m!} \frac{d^m}{da^m} \left( \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{i=p}^n \alpha_p \psi(x_p + aq) \right) \right) \Big|_{a=0}.\tag{26}$$

Для более компактной записи воспользуемся полиномами Белла и формулой Фаа-ди-Бруно.

Полином Белла задаётся формулой (27):

$$B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) = \sum \left( \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left( \frac{x_i}{i!} \right)^{j_i} \right),\tag{27}$$

где внешняя сумма берётся по всем неотрицательным  $j_1, j_2, \dots, j_{n-k+1}$ , которые удовлетворяют двум условиям (28), (29):

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} j_i = k,\tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i j_i = n.\tag{29}$$

<sup>13</sup>Так для  $\gamma = 10$ , что является рекомендованным значением параметра для случая  $n = 2$ , получаем  $a = 1/90$ . Так как единственное ограничение для параметра  $\gamma - \gamma \geq 2n + 2$ , то мы можем положить  $\gamma \rightarrow \infty$ , тогда получим  $a \rightarrow 0$ .



Формула Фаа-ди-Бруно (30) используется для представления производной сложной функции произвольного порядка:

$$\frac{d^m}{dx^m} f(g(x)) = \sum \left( \frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_m!} \cdot f^{(j_1 + \dots + j_m)}(g(x)) \prod_{i=1}^m \left( \frac{g^{(i)}(x)}{i!} \right)^{j_i} \right), \quad (30)$$

где внешняя сумма берётся по всем неотрицательным целым числам, которые удовлетворяют условию (29). С использованием полиномов Белла запишем формулу Фаа-ди-Бруно в следующем виде:

$$\frac{d^m}{dx^m} f(g(x)) = \sum_{k=0}^m f^{(k)}(g(x)) B_{m,k}(g'(x), g''(x), \dots, g^{(m-k+1)}(x)). \quad (31)$$

Тогда с помощью полиномов Белла получаем компактный вид разложения теоремы Колмогорова в ряд Тейлора, как показано в уравнении (32):

$$\left. \frac{d^m}{da^m} \left( \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p + aq) \right) \right) \right|_{a=0} = \sum_{k=0}^m \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q^{(k)} \left( \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p) \right) \times \\ \times q^m \tilde{B}_{m,k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (32)$$

где

$$B_{m,k} \left( q \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi'(x_p), q^2 \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi''(x_p), \dots, q^{(m-k+1)} \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi^{(m-k+1)}(x_p) \right) = \\ = q^m \tilde{B}_{m,k}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (33)$$

Тогда представление теоремы Колмогорова–Арнольда после разложения в ряд Тейлора в окрестности  $a = 0$  даётся формулой (34):

$$\sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=0}^n \alpha_p \psi(x_p + qa) \right) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^m \tilde{B}_{m,k}(x_1, \dots, x_n) \sum_{q=0}^{2n} \frac{a^m q^m}{m!} \Phi_q^{(k)} \left( \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p) \right). \quad (34)$$

Сделав замену  $z = \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p)$ , получим представление функции многих переменных  $u(x_1, \dots, x_n)$  в виде суммы функций одной переменной (35):

$$u(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^m \tilde{B}_{m,k}(x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{q=0}^{2n} \frac{a^m q^m}{m!} \Phi_q^{(k)}(z), \quad (35)$$

В итоге получаем представление неизвестной функции нелинейной краевой задачи для уравнения в частных производных в виде функции одной переменной.

**3.5. Метод сведения уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием представления Шпрехера [17].** Для того чтобы свести нелинейную краевую задачу для уравнений в частных производных к последовательности задач обыкновенных дифференциальных уравнений, воспользуемся разложением (35) для неизвестных функций многих переменных, входящих в функционал. Произведём замену переменных:

$$x_i = \bar{x}_i, i = \overline{2, n}, \\ x_1 = \psi^{-1} \left( \frac{z - \sum_{p=2}^n \alpha_p \psi(x_p)}{\alpha_1} \right), \quad (36)$$

тем самым обращая  $x_2, \dots, x_n$  в параметры (производные по ним более не входят в функционал). Тогда границы интегрирования меняются согласно формулам (37):

$$\begin{aligned} x_1^{\min} &\mapsto z^{\min} = \alpha_1 \psi(x_1^{\min}) + \alpha_2 \psi(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_n \psi(\bar{x}_n), \\ x_1^{\max} &\mapsto z^{\max} = \alpha_1 \psi(x_1^{\max}) + \alpha_2 \psi(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_n \psi(\bar{x}_n), \end{aligned} \quad (37)$$

а якобиан замены координат будет иметь вид (38):

$$|J| = \begin{vmatrix} \alpha_1 \psi'(x_1) & \alpha_2 \psi'(x_2) & \dots & \alpha_n \psi'(x_n) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1 \psi'(x_1). \quad (38)$$

Выразим частные производные функции  $u(x_1, \dots, x_n)$  через обыкновенные производные функций  $\Phi_i(z)$ , дифференцируя представление (35).

$$\frac{\partial^N u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}} = \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^m \left[ \sum_{j=0}^N \left[ \frac{\partial^N}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}} \left( \tilde{B}_{m,k}(x) \sum_{q=0}^{2n} \frac{a^m q^m}{m!} \Phi_q^{(k)}(z) \right) \right] \right]. \quad (39)$$

Заметим, что в результате любая частная производная функции  $u(x_1, \dots, x_n)$  выражается через обыкновенные производные функций одной переменной  $\Phi_q(z)$ . Таким образом, применив последовательно описанные выше действия к функционалу (9), получаем функционал относительно функций одной переменной:

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_S = \int_{z^{\min}}^{z^{\max}} L \left( z, \Phi_0(z), \dots, \Phi_{2n}(z), \frac{d\Phi_0(z)}{dz}, \dots, \right. \\ \left. \frac{d\Phi_{2n}(z)}{dz}, \dots, \frac{d^N \Phi_0(z)}{dz^N}, \dots, \frac{d^N \Phi_{2n}(z)}{dz^N} \Big|_{\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n} \right) dz. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда вариационная задача (8) сводится к параметризованной вариационной задаче для функций одной переменной (41), которая может быть решена методами вариационного исчисления.

$$\begin{aligned} \forall \{ \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \}, \bar{x}_2 \in [\bar{x}_2^{\min}, \bar{x}_2^{\max}], \dots, \bar{x}_n \in [\bar{x}_n^{\min}, \bar{x}_n^{\max}] : \\ \tilde{\Xi}_S \rightarrow \text{extr.}_{\Phi_q(z)} \end{aligned} \quad (41)$$

Приравнивая вариации функционала по неизвестным функциям к 0, получим краевую задачу обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения и бифуркационного анализа такого рода задач описаны выше в разделах 3.1, 3.2, 3.3.

**3.6. Метод сведения уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием представления Хедберга.** Напомним, что представление Хедберга (5) верно почти для всех внутренних функций  $\psi_q(x)$ . Аналогично предыдущему подходу, опирающемуся на представление Шпрехера, произведём замену переменных:

$$z = \sum_{l=1}^n \lambda_l \psi_0(x_l) \implies x_1 = \psi_0^{-1} \left( \frac{z - \sum_{l=2}^n \lambda_l \psi_0(x_l)}{\lambda_1} \right), \quad (42)$$

тем самым обращая  $x_2, \dots, x_n$  в параметры (производные по ним более не входят в функционал).

Тогда границы интегрирования меняются согласно формулам (43):

$$\begin{aligned} x_1^{\min} &\mapsto z^{\min} = \lambda_1 \psi_0(x_1^{\min}) + \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2) + \dots + \lambda_n \psi_0(\bar{x}_n), \\ x_1^{\max} &\mapsto z^{\max} = \lambda_1 \psi_0(x_1^{\max}) + \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2) + \dots + \lambda_n \psi_0(\bar{x}_n), \end{aligned} \quad (43)$$

а якобиан замены координат согласно (44):

$$|J| = \begin{vmatrix} \lambda_1 \psi'_0(x_1) & \lambda_2 \psi'_0(x_2) & \dots & \lambda_n \psi'_0(x_n) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \psi'_0(x_1). \quad (44)$$

Определим функции  $\theta_q(z)$  следующим образом:

$$\theta_q(z) = \lambda_1 \psi_q \left( \psi_0^{-1} \left( \frac{z - \sum_{l=2}^n \lambda_l \psi_0(x_l)}{\lambda_1} \right) \right) + \sum_{l=2}^n \lambda_l \psi_q(x_l). \quad (45)$$

Тогда формула (5) принимает вид

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \chi(\theta_q(z)), \quad (46)$$

а частные производные функции  $u(x_1, \dots, x_n)$  выразим через функции одной переменной, например<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{q=0}^{2n} \lambda_i \psi'_q(x_i) \chi'(\theta_q(z)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_{q=0}^{2n} \left[ [\lambda_i \psi'_q(x_i)]^2 \chi''(\theta_q(z)) + \lambda_i \psi''_q(x_i) \chi'(\theta_q(z)) \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

В представлении (47) фигурируют обыкновенные производные по разным аргументам. Для приведения производных к производным по одной переменной  $z$  воспользуемся формулой Фаа-ди-Бруно для дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} \chi_z^{(n)}(\theta_q(z)) &= \sum_{m=1}^n \chi^{(m)}(\theta_q(z)) B_{n,m}(\theta'_q(z), \dots, \theta_q^{(n-m+1)}(z)) \implies \\ \chi^n(\theta_q(z)) &= \frac{\chi_z^{(n)}(\theta_q(z)) - \sum_{m=1}^{n-1} \chi^{(m)}(\theta_q(z)) B_{n,m}(\theta'_q(z), \dots, \theta_q^{(n-m+1)}(z))}{B_{n,n}(\theta'_q(z), \dots, \theta_q^{(n-m+1)}(z))}. \end{aligned} \quad (48)$$

В итоге получаем функционал (9), зависящий от функции одной переменной:

$$\tilde{\Xi}_H = \int_{\bar{x}} \int_{z^{\min}}^{z^{\max}} L\left(z, \chi(\theta_q(z)), \frac{d\chi(\theta_q(z))}{dz}, \dots, \frac{d^N \chi(\theta_q(z))}{dz^N}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\right) dz d\bar{x}. \quad (49)$$

Тогда вариационная задача (8) сводится к набору вариационных задач в обыкновенных производных, которые решаются варьированием функционала по неизвестным функциям и приравниванием

<sup>14</sup>Здесь представлены частные производные первого и второго порядка. Очевидно, что представление позволяет получать выражения для производных произвольного порядка.

вариаций к 0. Методы решения и бифуркационного анализа таких задач описаны выше в разделах 3.1, 3.2, 3.3.

$$\forall \{\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}, \bar{x}_2 \in [\bar{x}_2^{\min}, \bar{x}_2^{\max}], \dots, \bar{x}_n \in [\bar{x}_n^{\min}, \bar{x}_n^{\max}] : \quad (50)$$

$$\tilde{\Xi}_H \rightarrow \underset{\chi(\theta_q(z))}{\text{extr}}.$$

**3.7. Метод сведения уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием представления Досса.** Воспользуемся представлением (6) за тем лишь исключением, что будем считать все функции известными (здесь и далее звёздочкой помечены заданные функции), кроме  $\varphi_i, \psi_{i,p}, p = \overline{1, n}$ :

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_i \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right) + \sum_{q=0, q \neq i}^{2n} \varphi_q^* \left( \prod_{p=1}^n \psi_{q,p}^*(x_p) \right) = \\ &= \varphi_i \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right) + \Phi_i^*(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (51)$$

Далее введём новую переменную  $z = \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p)$  и  $x_1$  выразим через  $z, x_2, \dots, x_n$ . Для существования обратной функции  $\psi_{i,1}(x_1)$  должна быть монотонна, что в большинстве случаев не так. Поэтому сначала  $\psi_{i,1}(x_1)$  разбивается на интервалы монотонности  $[x_1^{(k)}, x_1^{(k+1)}]$  и на каждом интервале осуществляется замена (52):

$$x_1 = \psi_{i,1,k}^{(-1)} \left( \frac{z}{\prod_{p=2}^n \psi_{i,p}(x_p)} \right) = \bar{x}_1. \quad (52)$$

Тогда меняются границы интегрирования (53)

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &\mapsto z^{(k)} = \psi_{i,1}(x_1^{(k)}) \psi_{i,2}(\bar{x}_2) \dots \psi_{i,n}(\bar{x}_n), \\ x_1^{(k+1)} &\mapsto z^{(k+1)} = \psi_{i,1}(x_1^{(k+1)}) \psi_{i,2}(\bar{x}_2) \dots \psi_{i,n}(\bar{x}_n) \end{aligned} \quad (53)$$

и Якобиан замены переменных (54)

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \psi'_{i,1}(x_1) \prod_{p=2}^n \psi_{i,p}(x_p) & \psi'_{i,2}(x_2) \prod_{p=1, p \neq 2}^n \psi_{i,p}(x_p) & \dots & \psi'_{i,n}(x_n) \prod_{p=1}^{n-1} \psi_{i,p}(x_p) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \psi'_{i,1}(x_1) \prod_{p=2}^n \psi_{i,p}(x_p). \end{aligned} \quad (54)$$

Используя новую переменную  $z$ , выразим функцию  $u(x_1, \dots, x_n)$  через функцию от  $z$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(z) + \Phi_i^*(z, \dots, x_n). \quad (55)$$

Далее получим два функционала: первый (56) путём подстановки представления (51) в функционал (9)

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \dots \int L_1 \left( x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_i \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right), \dots, \varphi_i^{(N)} \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right), \right. \\ \left. \psi_{i,1}(x_1), \dots, \psi_{i,1}^{(N_1)}(x_1), \dots, \psi_{i,n}(x_n), \dots, \psi_{i,n}^{(N_n)}(x_n) \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (56)$$

и второй (57) путём замены переменных (52) и смены порядка интегрирования в функционале (56).

$$\sum_k \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} \int_{x_n^{\min}(z)}^{x_n^{\max}(z)} \dots \int_{x_2^{\min}(z)}^{x_2^{\max}(z)} L_2 \left( z, x_2, \dots, x_n, \varphi_i(z), \dots, \varphi_i^{(N)}(z), \right. \\ \left. \psi_{i,1}(\bar{x}_1), \dots, \psi_{i,1}^{(N_1)}(\bar{x}_1), \dots, \psi_{i,n}(x_n), \dots, \psi_{i,n}^{(N_n)}(x_n) \right) dz dx_2 \dots dx_n. \quad (57)$$

Тогда, варьируя независимо по  $\psi_{i,p}(x_p)$  функционал (56), получим  $n$  обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, по одному для каждой  $\psi_{i,p}$ .

$$\psi_{i,p}^{(N_p)}(x_p) = F_{i,p} \left( x_p, \psi_{i,p}(x_p), \psi'_{i,p}(x_p), \dots, \psi_{i,p}^{(N_p-1)}(x_p) \right), \quad p = \overline{1, n}. \quad (58)$$

Варируя функционал (57) по  $\varphi_i(z)$ , получим обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение для внешней функции:

$$\varphi_i^{(N)}(z) = G_i \left( z, \varphi_i(z), \varphi'_i(z), \dots, \varphi_i^{(N_p-1)}(z) \right). \quad (59)$$

Тогда целиком метод отыскания решения выглядит следующим образом:

1. Инициализируем функции  $\varphi_i = 0$ ,  $\psi_{q,p} = 0$ ,  $q = \overline{1, 2n}$ ,  $p = \overline{1, n}$ . Положим  $i = 0$ .
2. Пока  $i \leq 2n$ :
  - 2.1. Положим внешнюю функцию тождественной:  $\varphi_i(z) = \varphi_i^{(0)}(z) = z$ ; а внутренние положим произвольными с тем лишь условием, чтобы они удовлетворяли граничным условиям:  $\psi_{i,p}(x_p) = \psi_{i,p}^{(0)}(x_p)$ .
  - 2.2. Пока  $\|\varphi_i^{(j+1)}(z) - \varphi_i^{(j)}(z)\| > \varepsilon_\varphi$ :
    - 2.2.1. Найдём внутренние функции с помощью итеративного алгоритма. Пока  $\|\prod_{p=1}^n \psi_{i,p}^{(k+1)}(x_p) - \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}^{(k)}(x_p)\| > \varepsilon_\psi$ :
      - 2.2.1.1. Для каждой функции  $\psi_{i,p}^{(k+1)}(x_p)$  решим уравнение (58), считая другие внутренние функции и внешнюю известными (берём с предыдущей итерации).
      - 2.2.2. Найдём внешнюю функцию  $\varphi_i^{(j+1)}(z)$  из (59), считая внутренние функции известными.
  - 2.3. Функции с  $i$ -ой итерации фиксируются  $\varphi_i(z) = \varphi_i^{(j)}(z)$ ,  $\psi_{i,p}(x_p) = \psi_{i,p}^{(k)}(x_p)$ ,  $p = \overline{1, n}$ .
  - 2.4.  $i = i + 1$ .

**3.8. Численная реализация теоремы Колмогорова.** В том случае, когда сведение краевой задачи уравнений в частных производных к обыкновенным опирается на суперпозиционную теорему Колмогорова в формулировке Шпрехера, внутренние функции одинаковы для всех непрерывных функций многих переменных и могут быть вычислены с помощью специальных алгоритмов. Согласно теореме, произвольная функция  $n$  переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$  представима в виде суммы суперпозиций функций одной переменной (4). Для вычисления функции  $\psi(x)$  мы использовали алгоритм М. Коппена [23]<sup>15</sup>.

Далее в настоящем разделе мы предоставим краткое описание алгоритма. Пусть  $\mathcal{D}_k = \{d_k\}$  есть множество сходящихся рациональных чисел, которые задаются формулой (60):

$$d_k = \sum_{j=1}^k \frac{i_j}{\gamma^k}, i_j = 0, \dots, \gamma - 1, \quad (60)$$

<sup>15</sup>Исходный алгоритм, предложенный Д. Шпрехером [17], содержал ошибку, из-за которой функция  $\psi(x)$  вычислялась неверно для некоторых комбинаций параметров алгоритма.

где  $k \in \mathbb{N}, \gamma \geq 2n + 2$  являются параметрами алгоритма. Далее определим константы  $a, \alpha_p$  согласно формулам (61):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)}, \\ \alpha_p &= \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{-(p-1)\frac{n^p-1}{n-1}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Тогда функция  $\psi(x)$  вычисляется рекуррентно по формуле (62)

$$\psi^k(d_k) = \begin{cases} d_k, & \text{for } k = 1, \\ \psi^{k-1}\left(d_k - \frac{i_k}{\gamma_k}\right) + \frac{i_k}{\gamma^{(n^k-1)/(n-1)}} & \text{for } k > 1, \quad i_k < \gamma - 1, \\ \frac{1}{2}\left(\psi_k\left(d_k - \frac{1}{\gamma^k}\right) + \psi_{k-1}\left(d_k + \frac{1}{\gamma^k}\right)\right) & \text{for } k > 1, \quad i_k = \gamma - 1, \end{cases} \quad (62)$$

где  $d_k = 0.i_1i_2, \dots, i_k$ . Для случая  $x > 1$  функция  $\psi(x)$  вычисляется по формуле (63)

$$\psi(x) = \psi(x - [x]) + [x], \quad (63)$$

где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ .

На рис. 4 представлены графики функции  $\psi(x)$  для значений параметров  $\gamma = 10$  и  $k = 2, 3, 4$  соответственно.

Для метода сведения уравнений в частных производных к обыкновенным необходимо уметь вычислять производные функции  $\psi(x)$ , которая является недифференцируемой. Однако для неё можно определить разностный аналог производной (64)

$$\psi'(x) \approx \frac{\psi(x + \Delta) - \psi(x)}{\Delta}, \quad (64)$$

где  $\Delta$  — приращение, которое зависит от параметров  $\gamma, k$ . Так как функция  $\psi(x)$  определена на конечном количестве точек  $\{d_k\}$ , тогда  $\Delta = \gamma^{-k}$  — величина шага между двумя соседними точками из множества  $\mathcal{D}_k$ . На рис. 5 изображены графики первой и второй производной функции  $\psi(x)$  для  $\gamma = 10, k = 4$ .

В случае, когда используется формулировка теоремы Колмогорова в представлении Хедберга, также необходимо определить константы  $\lambda_p$ . При этом, согласно теореме [19], внутренние функции  $\psi_q(x)$  могут быть выбраны почти произвольно с тем только условием, что они

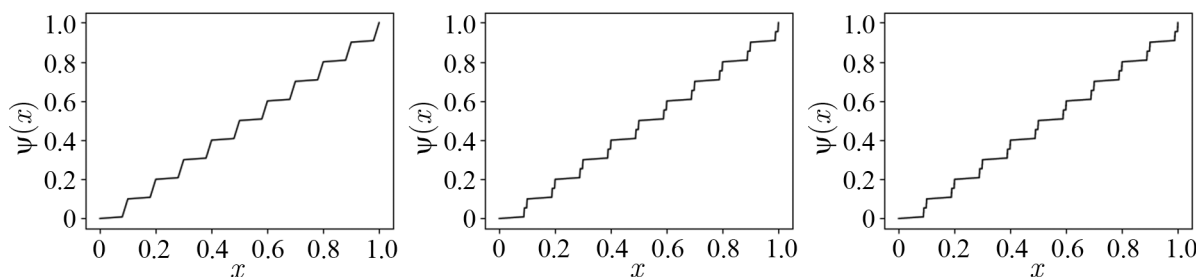


Рис. 4. Графики  $\psi(x)$  для значений параметров  $\gamma = 10$  и  $k = 2, 3, 4$  соответственно

Fig. 4. Plots of  $\psi(x)$  for  $\gamma = 10$  and  $k = 2, 3, 4$  respectively



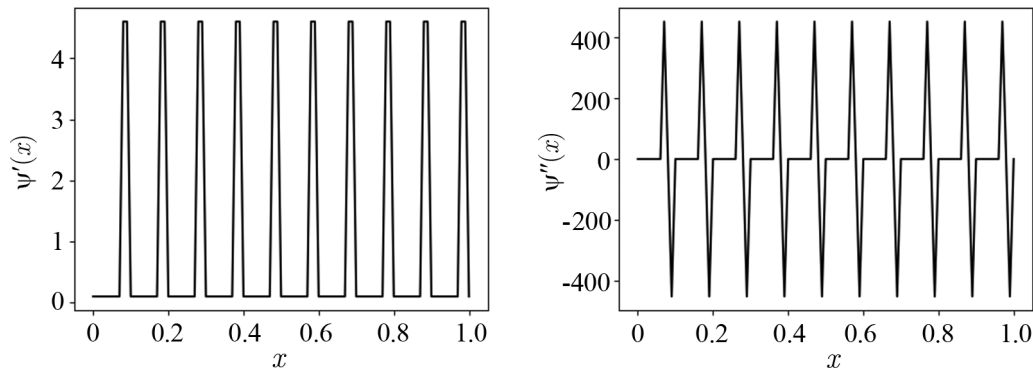


Рис. 5. Графики первой и второй производной функции  $\psi(x)$  для  $\gamma = 10$  и  $k = 2$

Fig. 5. Plots of first and second derivative of a function  $\psi(x)$  for  $\gamma = 10$  and  $k = 2$

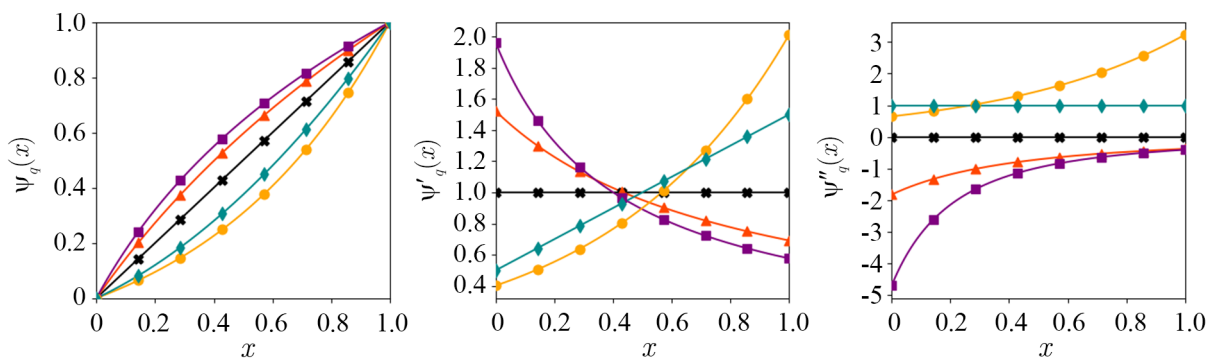


Рис. 6. Слева направо: графики функций  $\psi_q(x)$ ,  $\psi'_q(x)$ ,  $\psi''_q(x)$  для представления Хедберга, использованных в вычислительном эксперименте (цвет онлайн)

Fig. 6. From left to right: plots of functions  $\psi_q(x)$ ,  $\psi'_q(x)$ ,  $\psi''_q(x)$  for Hedberg formulation, used in a computational experiment (color online)

должны не убывать на промежутке  $[0; 1]$  и принимать на его концах значения 0 и 1 соответственно:  $\psi_q(0) = 0$ ,  $\psi_q(1) = 1$ . В вычислительном эксперименте мы использовали варианты, представленные на рис. 6. Константы же  $\lambda_p$  определяются в рамках задачи поиска экстремума функционала (65).

$$\int_{\bar{x}} \tilde{\Xi}_S d\bar{x} \rightarrow \text{extr.}_{\lambda_p} \quad (65)$$

## 4. Результаты

Предложенный метод был применён к двумерной задаче Брату. Данная задача представляет собой нелинейную краевую задачу для уравнений в частных производных. Для данной задачи бифуркационная картина хорошо изучена, что позволяет нам проверить эффективность нашего метода бифуркационного анализа.

**4.1. Вывод разрешающих соотношений для задачи Брату с использованием формулировки Шпрехера.** Представленный в предыдущем разделе алгоритм бифуркационного анализа был применён к решению задачи Брату в вариационной постановке (13). Для данной задачи  $n = 2$ .

Разложим представление функции  $u(x_1, x_2)$  в ряд Тейлора до нулевого слагаемого ( $M = 0$ ). Тогда получим представление (66):

$$u(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^4 \Phi_q(z) = \Phi(z), \quad (66)$$

где  $z = \alpha_1 \psi(x_1) + \alpha_2 \psi(x_2)$ . Выполним замену переменных

$$\begin{aligned} x_2 &= \bar{x}_2, \\ x_1 &= \psi^{-1}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(\bar{x}_2)}{\alpha_1}\right), \\ x_1 = 0 &\rightarrow z^{\min} = \alpha_2 \psi(\bar{x}_2), \\ x_1 = 1 &\rightarrow z^{\max} = \alpha_1 + \alpha_2 \psi(\bar{x}_2), \\ |J| &= \begin{vmatrix} \alpha_1 \psi'(x_1) & \alpha_2 \psi'(x_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1 \psi'(x_1) \implies dx_1 = \frac{dz}{\alpha_1 \psi'\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(\bar{x}_2)}{\alpha_1}\right)} \end{aligned} \quad (67)$$

и выразим частные производные, входящие в функционал задачи Брату, через обыкновенные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_i} &= \alpha_i \psi'(x_i) \sum_{q=0}^4 \Phi'_q(z), \\ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_i^2} &= \alpha_i \psi''(x_i) \sum_{q=0}^4 \Phi'_q(z) + \alpha_i^2 \psi'^2(x_i) \sum_{q=0}^4 \Phi''_q(z). \end{aligned} \quad (68)$$

Подставим вышеуказанные замены в функционал, проварьируем его по неизвестным функциям  $\Phi(z)$ . В итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение (69), которое было разрешено представленным в разделе 3.1 методом сведения УЧП к ОДУ.

$$\begin{aligned} \Phi''(z) &\left[ -\frac{2\alpha_2^2 \psi'(x_2)^2}{\alpha_1 \psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)} - 2\alpha_1 \psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right) \right] + \\ &+ \Phi'(z) \left[ \frac{2\alpha_2^2 \psi'(x_2)^2 \psi''\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)}{\alpha_1^2 \psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)^3} - \frac{2\psi''\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)}{\psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)} \right] - \\ &- \frac{2\gamma e^{\Phi(z)}}{\alpha_1 \psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)} = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

**4.2. Вывод разрешающих соотношений для задачи Брату с использованием формулировки Хедберга.** Также к задаче Брату был применён метод, использующий представление Хедберга. Для случая двух переменных получаем

$$u(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(z)), \quad (70)$$

где  $z = \lambda_1 \psi_0(x_1) + \lambda_2 \psi_1(x_2)$ ,  $\theta_q(z) = \lambda_1 \psi_q \left( \psi_0^{-1} \left( \frac{z - \lambda_2 \psi_0(x_2)}{\lambda_1} \right) \right) + \lambda_2 \psi_q(x_2)$ . Произведём замену переменных

$$\begin{aligned} x_2 &= \bar{x}_2, \\ x_1 &= \psi_0^{-1} \left( \frac{z - \lambda_2 \psi_0(x_2)}{\lambda_1} \right), \\ x_1 = 0 &\rightarrow z^{\min} = \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2), \\ x_1 = 1 &\rightarrow z^{\max} = \lambda_1 + \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2), \\ |J| &= \begin{vmatrix} \lambda_1 \psi'_0(x_1) & \lambda_2 \psi'_0(x_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \psi'_0(x_1) \implies dx_1 = \frac{dz}{\lambda_1 \psi'_0 \left( \frac{z - \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2)}{\lambda_1} \right)} \end{aligned} \quad (71)$$

и определим частные производные первого порядка через производные функции одной переменной  $\chi(\theta_q(z))$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{q=0}^4 \lambda_i \psi'_q(x_i) \chi'(\theta_q(z)) \quad (72)$$

Вариация функционала задачи по функции  $\chi(\theta_q(z))$  даёт  $\forall \bar{x}_2 \in [0, 1]$ , получим:

$$\sum_{j=0}^4 \int_{z^{\min}}^{z^{\max}} \left[ \sum_{q=0}^4 a_{q,j}(z, \bar{x}_2) \chi'(\theta_q(z)) \delta \chi'(\theta_j(z)) - \gamma b(z, \bar{x}_2) e^{\sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(z))} \delta \chi(\theta_j(z)) \right] dz = 0, \quad (73)$$

где

$$\begin{aligned} a_{q,j}(z, x_2) &= \frac{\lambda_1^2 \psi_q(\bar{x}_1) \psi_j(\bar{x}_1)}{\lambda_1 \psi'_0(\bar{x}_1)} + \frac{\lambda_2^2 \psi_q(\bar{x}_2) \psi_j(\bar{x}_2)}{\lambda_1 \psi'_0(\bar{x}_1)}, \\ b(z, \bar{x}_2) &= \frac{1}{\psi_0(\bar{x}_1)}. \end{aligned} \quad (74)$$

Для  $j$ -го элемента суммы заменим переменную интегрирования с  $z$  на  $\theta_j(z)$  (обозначив для краткости записи новую переменную интегрирования как  $z$ ); получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^4 \int_{\theta_j(z^{\min})}^{\theta_j(z^{\max})} \frac{1}{\theta'_j(\theta_j^{-1}(z))} \left[ \sum_{q=0}^4 a_{q,j}(\theta_j^{-1}(z), \bar{x}_2) \chi'(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) \delta \chi'(z) - \right. \\ \left. - \gamma b(\theta_j^{-1}(z), \bar{x}_2) e^{\sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(\theta_j^{-1}(z)))} \delta \chi(z) \right] dz = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Приведём все производные к производным по переменной  $z$ , используя формулу (48):

$$\chi'(\theta_q(\theta_j^{(-1)}(z))) = D_{1,q,j}(z) \chi'_z(\theta_q(\theta_j^{(-1)}(z))), \quad (76)$$

где

$$D_{q,j}(z) = \frac{\theta'_j(\theta_j^{(-1)}(z))}{\theta'_q(\theta_j^{(-1)}(z))}. \quad (77)$$

Тогда, проинтегрировав слагаемые с производными вариаций по частям, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^4 \int_{\theta_j(z^{\min})}^{\theta_j(z^{\max})} \left[ - \sum_{q=0}^4 \bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2) \chi_z''(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) - \sum_{q=0}^4 \frac{d\bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2)}{dz} \chi_z'(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) - \right. \\ \left. - \gamma \bar{b}_j(z, \bar{x}_2) e^{\sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(\theta_j^{-1}(z)))} \right] \delta \chi(z) dz + \\ + \left[ \sum_{q=0}^4 \bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2) \chi_z'(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) \right] \delta \chi'(z) \Big|_{\theta_j(z^{\min})}^{\theta_j(z^{\max})} = 0, \end{aligned} \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{q,j}(z, x_2) &= \frac{D_{q,j}(z) a_{q,j}(\theta_j^{-1}(z), x_2)}{\theta_j'(\theta_j^{-1}(z))}, \\ \bar{b}_j(z, x_2) &= \frac{b(\theta_j^{-1}(z), x_2)}{\theta_j'(\theta_j^{-1}(z))}, \end{aligned} \quad (79)$$

что даёт следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \forall x_2 \in [0, 1] : \\ \sum_{j=0}^4 \mathbf{I}(z \in [\theta_j(z^{\min}), \theta_j(z^{\max})]) \left[ \sum_{q=0}^4 \bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2) \chi_z''(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^4 \frac{d\bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2)}{dz} \chi_z'(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) + \gamma \bar{b}_j(z, \bar{x}_2) e^{\sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(\theta_j^{-1}(z)))} \right] = 0, \end{aligned} \quad (80)$$

где  $\mathbf{I}$  — индикаторная функция.

**4.3. Вывод разрешающих соотношений для задачи Брату с использованием формулировки Досса.** К задаче Брату был применён метод, использующий представление Досса. Для случая двух переменных получаем

$$u(x_1, x_2) = \varphi_i(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) + \Phi_i^*(x_1, x_2). \quad (81)$$

Выполним замену переменных

$$\begin{aligned} z &= \psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2), \\ x_1 &= \psi_{i,1,k}^{(-1)}\left(\frac{z}{\psi_{i,2}(x_2)}\right) = \bar{x}_{1,k}, \end{aligned} \quad (82)$$

где  $[x_k, x_{k+1}]$  — интервалы монотонности функции  $\psi_{i,1}(x_1)$ . Якобиан замены переменных задаётся формулой (83):

$$|J| = \psi_{i,1}'(x_1) \psi_{i,2}(x_2) \implies dx_1 = \frac{dz}{\psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k}) \psi_{i,2}(x_2)}. \quad (83)$$

После замены переменных получим

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2) &= \varphi_i(z) + \Phi_i^*(\bar{x}_{1,k}, x_2), \\
 \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial \bar{x}_{1,k}}(\bar{x}_{1,k}, x_2), \\
 \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi'_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_2}(\bar{x}_{1,k}, x_2).
 \end{aligned} \tag{84}$$

Подставим замены в функционал. До замены переменных получим (85):

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \psi'_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)\varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right]^2 + \\
 &+ \left[ \psi_{i,1}(x_1)\psi'_{i,2}(x_2)\varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right]^2 + \\
 &- 2\gamma e^{\varphi_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \Phi_i^*(x_1, x_2)} dx_1 dx_2.
 \end{aligned} \tag{85}$$

После замены переменных и смены порядка интегрирования получаем (86):

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_0^1 \left[ \left[ \psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial \bar{x}_{1,k}}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \right]^2 + \right. \\
 &+ \left[ \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi'_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_2}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \right]^2 + \\
 &\left. - 2\gamma e^{\varphi_i(z) + \Phi_i^*(\bar{x}_{1,k}, x_2)} \right] \frac{1}{\psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi_{i,2}(x_2)} dx_2 dz.
 \end{aligned} \tag{86}$$

Проварьируем функционал (85) по  $\psi_{i,1}(x_1)$  и по  $\psi_{i,2}(x_2)$  получим уравнения (87, 88) соответственно:

$$\begin{aligned}
 \psi''_{i,1}(x_1) &= - \frac{1}{\int_0^1 \psi_{i,2}(x_2)^2 \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2))^2 dx_2} \times \\
 &\times \int_0^1 \left[ \gamma \psi_{i,2}(x_2) \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) e^{\varphi_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \Phi(x_1, x_2)} - \right. \\
 &- \Phi^{(0,1)}(x_1, x_2) \psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2) \psi'_{i,2}(x_2) \varphi''_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \\
 &+ \Phi^{(2,0)}(x_1, x_2) \psi_{i,2}(x_2) \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) - \\
 &- \Phi^{(0,1)}(x_1, x_2) \psi'_{i,2}(x_2) \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \\
 &+ \psi_{i,2}(x_2)^3 \psi'_{i,1}(x_1)^2 \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) \varphi''_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) - \\
 &- \psi_{i,1}(x_1)^2 \psi_{i,2}(x_2) \psi'_{i,2}(x_2)^2 \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) \varphi''_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) - \\
 &\left. - \psi_{i,1}(x_1) \psi'_{i,2}(x_2)^2 \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2))^2 \right] dx_2,
 \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{i,2}''(x_2) = & - \frac{1}{\int_0^1 \psi_{i,1}(x_1)^2 \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2))^2 dx_1} \times \\
& \times \int_0^1 \left[ \gamma \psi_{i,1}(x_1) \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) e^{\varphi_i(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) + \Phi(x_1, x_2)} - \right. \\
& - \Phi^{(1,0)}(x_1, x_2) \psi_{i,2}(x_2) \psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,1}'(x_1) \varphi_i''(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) + \\
& + \Phi^{(0,2)}(x_1, x_2) \psi_{i,1}(x_1) \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) - \\
& - \Phi^{(1,0)}(x_1, x_2) \psi_{i,1}'(x_1) \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) + \\
& + \psi_{i,1}(x_1)^3 \psi_{i,2}'(x_2)^2 \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) \varphi_i''(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) - \\
& - \psi_{i,2}(x_2)^2 \psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,1}'(x_1)^2 \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) \varphi_i''(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) - \\
& \left. - \psi_{i,2}(x_2) \psi_{i,1}'(x_1)^2 \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2))^2 \right] dx_1.
\end{aligned} \tag{88}$$

В качестве граничных условий для первого и второго уравнений возьмём граничные условия Дирихле:

$$\begin{cases} \psi_{i,j}(0) = 0, \\ \psi_{i,j}(1) = 0. \end{cases} \tag{89}$$

Далее проварируем функционал (86) по функции  $\varphi_i(z)$ , получим

$$\begin{aligned}
\varphi_i''(z) = & \sum_k \int_0^1 -\gamma \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k}) e^{\Phi(\bar{x}_{1,k}, x_2) + \varphi_i(z)} + \\
& + \bar{x}_{1,k}' \Phi^{(0,1)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \psi_{i,2}'(x_2) \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \psi_{i,1}''(\bar{x}_{1,k}) - \\
& - \bar{x}_{1,k}' \Phi^{(0,1)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \psi_{i,2}'(x_2) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 - \\
& - \bar{x}_{1,k}' \psi_{i,2}(x_2) \Phi^{(2,0)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 - \\
& - \bar{x}_{1,k}' \Phi^{(1,1)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \psi_{i,2}'(x_2) \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k}) - \\
& - \bar{x}_{1,k}' \psi_{i,2}(x_2)^2 \varphi_i'(z) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 \psi_{i,1}''(\bar{x}_{1,k}) + \\
& + \bar{x}_{1,k}' \varphi_i'(z) \psi_{i,2}'(x_2)^2 \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})^2 \psi_{i,1}''(\bar{x}_{1,k}) - \\
& - 2\bar{x}_{1,k}' \varphi_i'(z) \psi_{i,2}'(x_2)^2 \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 dx_2 \Big|_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \times \\
& \times \left[ \sum_k \int_0^1 \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k}) (\psi_{i,2}(x_2)^2 \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 + \psi_{i,2}'(x_2)^2 \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})^2) dx_2 \Big|_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{90}$$

Изначальные условия Дирихле после нахождения функций  $\psi_{i,1}(x_1)$  и  $\psi_{i,2}(x_2)$  схлопываются в единое условие (91):

$$\varphi_i(0) = 0. \tag{91}$$

Так как уравнение второго порядка, необходимо также второе условие, в качестве которого возьмём естественное граничное условие, получаемое при варьировании функционала на другом конце отрезка интегрирования (92):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\psi_{i,2}(x_2)\psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k})} 2\psi'_{i,2}(x_2)\psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \left( \Phi^{(0,1)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) + \right. \\ & \left. + \psi'_{i,2}(x_2)\psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\varphi'_i(z) \right) + 2\psi_{i,2}(x_2)\psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \left( \Phi^{(1,0)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) + \right. \\ & \left. + \psi_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z)\psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \right) \Big|_{z=z_{\max}} = 0. \end{aligned} \quad (92)$$

Далее решать уравнения (87), (88), (90) будем с помощью итеративного подхода, описанного выше.

**4.4. Результаты вычислительного эксперимента.** Для подхода, использующего формулировку Шпрехера, используем значения параметров алгоритма  $\gamma = 10, k = 1$ , тогда  $a = 1/90, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.101000100000000001$ . На рис. 7, а представлен график определителя матрицы Фреше на последней итерации метода Ньютона для функции  $\Phi(z)$  в зависимости от значений параметра  $\gamma$ , а на рис. 7, b  $L_\infty$  — норма решения в зависимости от значений параметра.

В результате вычислительного эксперимента была найдена одна особая точка (предельная) при значениях параметра  $\gamma \approx 7.03$ , что хорошо согласуется с известным из литературы результатом [34] (см. Таблицу). Для формулировок

Таблица. Сравнение методов обнаружения бифуркационных точек для двумерной задачи Брату. Результаты для других методов взяты из статьи [34]

Table. Comparison of methods for detecting bifurcation points for a two-dimensional Bratu problem. The results for other methods are taken from the article [34]

Метод	$\gamma$
Метод конечных разностей	7.122
Метод коллокаций	6.808
Метод взвешенных остатков	6.780
Почти точное решение	7.028
Итерационный дифференциально-квадратурный метод	7.028
<b>Наш подход</b>	<b>7.031</b>

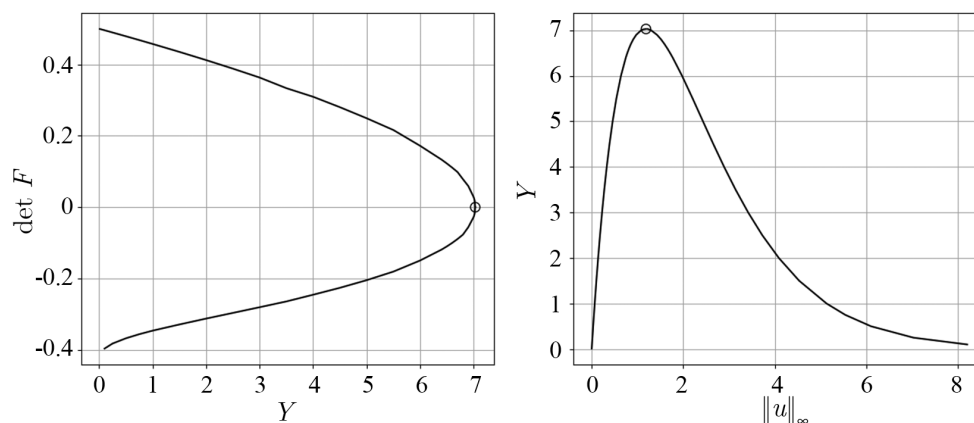


Рис. 7. а — График определителя матрицы Фреше на последней итерации метода Ньютона для разных значений параметра  $\gamma$ ; кружок обозначает критическую точку. б —  $L_\infty$  норма решения для различных значений параметра  $\gamma$ ; кружок обозначает критическую точку

Fig. 7. а — Graph of the determinant of the Fréchet matrix on the last iteration of the Newton method for different value of the parameter  $\gamma$ ; circle denotes critical point. б —  $L_\infty$  norm of the solution for different values of the parameter  $\gamma$ ; circle denotes critical point



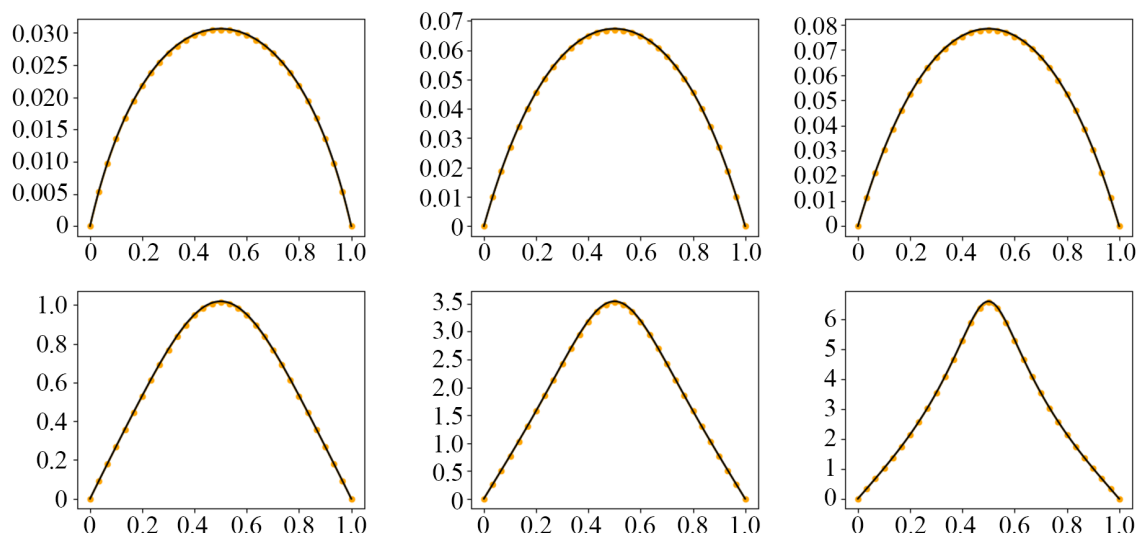


Рис. 8. Срезы решения задачи Брату по  $x_2$  для  $\gamma = 1$ . Решение, полученное с помощью теоремы Колмогорова–Арнольда (чёрная линия). Решение, полученное с помощью метода конечных разностей (оранжевые точки). Слева: срез  $x_1 = 0.1$ ; в центре: срез  $x_1 = 0.3$ , справа: срез  $x_1 = 0.5$ . Верхние графики — левая ветвь решений. Нижние графики — правая ветвь решений (цвет онлайн)

Fig. 8.  $x_2$  cross sections of the solution to the Bratu problem for  $\gamma = 1$ . The solution obtained using the Kolmogorov–Arnold theorem (black line). The solution obtained using the finite difference method (orange dots). Left: cross section  $x_1 = 0.1$ ; center: cross section  $x_1 = 0.3$ ; right: cross section  $x_1 = 0.5$ . The upper graphs are the left branch of the solutions. The lower graphs are the right branch of the solutions (color online)

Хедберга и Досса полученные результаты были неотличимы от результатов, полученных с помощью формулировки Шпрехера. На рис. 8 изображены решения задачи Брату, полученные с помощью предложенного в статье подхода (оранжевые), и решения, посчитанные методом конечных разностей (чёрные). Подчеркнём, что полученные функции решения являются весьма гладкими, несмотря на потенциальную негладкость, связанную со свойствами функций теоремы Колмогорова–Арнольда.

## Выводы

1. В работе представлен алгоритм построения полной бифуркационной картины (картины ветвления) для краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных, данных своими вариационными постановками, опирающийся на суперпозиционную теорему Колмогорова.
2. При этом суперпозиционная теорема Колмогорова в форме Шпрехера приводит к формулировке, где внутренние функции вычисляются с помощью специального алгоритма, в форме Хедберга, где внутренние функции задаются пользователем, в форме Досса, где внутренние функции отыскиваются с помощью итерационного алгоритма. Полученные функции решения являются весьма гладкими, несмотря на потенциальную негладкость, связанную со свойствами функций теоремы Колмогорова–Арнольда.
3. Все три варианта алгоритма были применены к уравнениям Брату и продемонстрировали хорошее согласование с известными из литературы решениями как по форме решений, так и по структуре бифуркационной картины.

## Список литературы

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений: Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984. 355 с.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: в 2 т. М.: Мир. Т. 1. 1984. 350 с. Т. 2. 1984. 286 с.
3. Gilmore R. Catastrophe theory // In: Trigg G. L. (ed) Encyclopedia of Applied Physics. Vol. 3. N.Y.: Wiley, 1992. P. 85–115.
4. Obodan N. I., Gromov V. A. Numerical analysis of the branching of solutions to nonlinear equations for cylindrical shells // Int. Appl. Mech. 2006. Vol. 42. P. 90–97. DOI: 10.1007/s10778-006-0062-7.
5. Obodan N. I., Lebedev O. G., Gromov V. A. Nonlinear Behaviour and Stability of Thin-Walled Shells. Berlin: Springer, 2013. 178 p. DOI: 10.1007/978-94-007-6365-4.
6. Obodan N. I., Adlucky V. J., Gromov V. A. Rapid identification of pre-buckling states: a case of cylindrical shell // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 124. P. 449–457. DOI: 10.1016/j.tws.2017.12.034.
7. Obodan N. I., Adlucky V. J., Gromov V. A. Prediction and control of buckling: the inverse bifurcation problems for von Karman equations // In: Dutta H., Peters J. (eds) Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications. Cham: Springer, 2020. P. 353–381. DOI: 10.1007/978-3-319-99918-0\_11.
8. Obodan N. I., Gromov V. A. The complete bifurcation structure of nonlinear boundary problem for cylindrical panel subjected to uniform external pressure // Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 107. P. 612–619. DOI: 10.1016/j.tws.2016.07.020.
9. Obodan N. I., Gromov V. A. Nonlinear behavior and buckling of cylindrical shells subjected to localized external pressure // Journal of Engineering Mathematics. 2013. Vol. 78. P. 239–248. DOI: 10.1007/s10665-012-9553-1.
10. Antman S. S. Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems. San Francisco: WA Benjamin, 1969. 434 p.
11. Kantorovich L. V. Approximate Methods of Higher Analysis. N.Y.: Interscience Publishers, 1958. 681 p.
12. Awrejcewicz J., Krysko-Jr. V. A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: From macro- to nano-structural dynamics // Arch. Computat. Methods Eng. 2021. Vol. 28. P. 4781–4813. DOI: 10.1007/s11831-021-09550-5.
13. Gromov V. A. On an approach to solve nonlinear elliptic equations of von Karman type // Вісник Дніпропетровського університету Серія Моделювання. 2017. Т. 25, № 8. С. 122–141. DOI: 10.15421/141707.
14. Gromov V. A. Postcritical Behaviour and Solution Branching for the Cylindrical Shell Theory Nonlinear Problems. PHD Thesis. Dnepropetrovsk: Dnepropetrovsk State University, 2006.
15. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. 1957. Т. 108. С. 179–182.
16. Maiorov V., Pinkus A. Lower bounds for approximation by MLP neural networks // Neurocomputing. 1999. Vol. 25, iss. 1–3. P. 81–91. DOI: 10.1016/S0925-2312(98)00111-8.
17. Sprecher D. A. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions // Neural Netw. 1996. Vol. 9, no. 5. P. 765–772. DOI: 10.1016/0893-6080(95)00081-x.
18. Sprecher D. A. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions II // Neural Netw. 1997. Vol. 10, no. 3. P. 447–457. DOI: 10.1016/s0893-6080(96)00073-1.
19. Shapiro H. S. Topics in Approximation Theory. Berlin: Springer, 1971. 278 p. DOI: 10.1007/BFb0058976.
20. Doss R. Representations of continuous functions of several variables // American Journal of Mathematics. 1976. Vol. 98, no. 2. P. 375–383. DOI: 10.2307/2373891.
21. Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955. 220 с.

22. *Bratu G.* Sur les équations intégrales non linéaires // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1914. Vol. 42. P. 113–142. DOI: 10.24033/bsmf.943.
23. *Köppen M.* On the training of a Kolmogorov network // In: Dorronsoro J. R. (ed) Artificial Neural Networks – ICANN 2002. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2415. Berlin: Springer, 2002. P. 474–479. DOI: 10.1007/3-540-46084-5\_77.
24. *Actor J.* Computation for the Kolmogorov Superposition Theorem. PhD Thesis. Houston: Rice University, 2018. 148 p.
25. *Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F., Halverson J., Soljačić M., Hou T. Y., Tegmark M.* KAN: Kolmogorov-Arnold networks // arXiv:2404.19756. ArXiv Preprint, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.19756.
26. *Lorentz G. G.* Approximation of Functions. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966. 188 p.
27. *Nguyen V. P., Rabczuk T., Bordas S., Duflo M.* Meshless methods: A review and computer implementation aspects // Mathematics and Computers in Simulation. 2008. Vol. 79, iss. 3. P. 763–813. DOI: 10.1016/j.matcom.2008.01.003.
28. *Железко И. П., Ободан Н. И.* Вторичные ветвления и закритическое поведение тонкостенных оболочек при неоднородной деформации // ПММ. 1997. Т. 61, № 2. С. 344–349.
29. *Poston T., Stewart I.* Catastrophe Theory and Its Applications. Gloucester: Courier Corporation, 2014. 512 p.
30. *Gromov V. A., Borisenko E. A.* Predictive clustering on non-successive observations for multi-step ahead chaotic time series prediction // Neural Comput. Applic. 2015. Vol. 26. P. 1827–1838. DOI: 10.1007/s00521-015-1845-8.
31. *Андреев Л. В., Ободан Н. И., Лебедев А. Г.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. М.: Наука, 1988. 208 с.
32. *Фомин С., Алексеев В., Тихомиров В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005. 385 с.
33. *Odejide S. A., Aregbesola Y. A. S.* A note on two dimensional Bratu problem // Kragujevac Journal of Mathematics. 2006. Vol. 29. P. 49–56.
34. *Temimi H., Ben-Romdhane M., Baccouch M., Musa M. O.* A two-branched numerical solution of the two-dimensional Bratu's problem // Applied Numerical Mathematics. 2020. Vol. 153. P. 202–216. DOI: 10.1016/j.apnum.2020.02.010.
35. *Boyd J. P.* An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation // J. Sci. Comput. 1986. Vol. 1. P. 183–206. DOI: 10.1007/BF01061392.
36. *Витушкин А. Г., Хенкин Г. М.* Линейные суперпозиции функций // УМН. 1967. Т. 22, № 1. С. 77–124.
37. *Gromov V. A.* Catastrophes of cylindrical shell // In: Dutta H. (ed) Mathematical Modelling: Principle and Theory. Providence: American Mathematical Society, 2023. P. 215–244. DOI: 10.1090/conm/786/15798.
38. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. N.Y.: Wiley, 2008. 575 p.
39. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
40. *Agapov M. S., Kuznetsov E. B., Shalashilin V. I.* Numerical modeling of the problem of strong nonlinear deformation in Eulerian coordinates // Math. Models Comput. Simul. 2009. Vol. 1. P. 263–273. DOI: 10.1134/S2070048209020094.

## References

1. Arnold VI, Varchenko AN, Huseyn-Zadeh SM. Features of Differentiable Maps: Monodromy and Asymptotics of Integrals. М.: Nauka; 1984. 355 p. (in Russian).
2. Gilmore R. Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. N.Y.: Wiley; 1981. 666 p.
3. Gilmore R. Catastrophe theory. In: Trigg G. L. (ed) Encyclopedia of Applied Physics. Vol. 3. N.Y.: Wiley; 1992. P. 85–115.

4. Obodan NI, Gromov VA. Numerical analysis of the branching of solutions to nonlinear equations for cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* 2006;42:90–97. DOI: 10.1007/s10778-006-0062-7.
5. Obodan NI, Lebedeyev OG, Gromov VA. *Nonlinear Behaviour and Stability of Thin-Walled Shells*. Berlin: Springer; 2013. 178 p. DOI: 10.1007/978-94-007-6365-4.
6. Obodan NI, Adlucky VJ, Gromov VA. Rapid identification of pre-buckling states: a case of cylindrical shell. *Thin-Walled Structures*. 2018;124:449–457. DOI: 10.1016/j.tws.2017.12.034.
7. Obodan NI, Adlucky VJ, Gromov VA. Prediction and control of buckling: the inverse bifurcation problems for von Karman equations. In: Dutta H, Peters J, editors. *Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications*. Cham: Springer; 2020. P. 353–381. DOI: 10.1007/978-3-319-99918-0\_11.
8. Obodan NI, Gromov VA. The complete bifurcation structure of nonlinear boundary problem for cylindrical panel subjected to uniform external pressure. *Thin-Walled Structures*. 2016;107: 612–619. DOI: 10.1016/j.tws.2016.07.020.
9. Obodan NI, Gromov VA. Nonlinear behavior and buckling of cylindrical shells subjected to localized external pressure. *Journal of Engineering Mathematics*. 2013;78:239–248. DOI: 10.1007/s10665-012-9553-1.
10. Antman SS. *Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems*. San Francisco: WA Benjamin, 1969. 434 p.
11. Kantorovich LV. *Approximate Methods of Higher Analysis*. N.Y.: Interscience Publishers; 1958. 681 p.
12. Awrejcewicz J, Krysko-Jr. VA, Kalutsky LA, Zhigalov MV, Krysko VA. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: From macro- to nano-structural dynamics. *Arch. Computat. Methods Eng.* 2021;28:4781–4813. DOI: 10.1007/s11831-021-09550-5.
13. Gromov VA. On an approach to solve the nonlinear elliptic equations of von Karman type. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*. 2017;25(8):122–141. DOI: 10.15421/141707.
14. Gromov VA. *Postcritical behaviour and solution branching for the cylindrical shell theory nonlinear problems*. PhD Thesis. Dnepropetrovsk: Dnepropetrovsk State University; 2006.
15. Kolmogorov AN. On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables. In: *Twelve Papers on Algebra and Real Functions*. American Mathematical Society; 1961. Vol. 17. P. 369–373.
16. Maiorov V, Pinkus A. Lower bounds for approximation by MLP neural networks. *Neurocomputing*. 1999;25(1–3):81–91. DOI: 10.1016/S0925-2312(98)00111-8.
17. Sprecher DA. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions. *Neural Netw.* 1996;9(5):765–772. DOI: 10.1016/0893-6080(95)00081-x.
18. Sprecher DA. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions II. *Neural Netw.* 1997;10(3):447–457. DOI: 10.1016/S0893-6080(96)00073-1.
19. Shapiro HS. *Topics in Approximation Theory*. Berlin: Springer; 1971. 278 p. DOI: 10.1007/BFb0058976.
20. Doss R. Representations of continuous functions of several variables. *American Journal of Mathematics*. 1976;98(2):375–383. DOI: 10.2307/2373891.
21. Vitushkin AG. *About Multidimensional Variations*. M.: Gostekhizdat; 1955. 220 p. (in Russian).
22. Vitushkin AG, Khenkin GM. Linear superpositions of functions. *Russian Math. Surveys*. 1967; 22(1):77–125. DOI: 10.1070/RM1967v022n01ABEH001204.
23. Köppen M. On the training of a Kolmogorov Network. In: Dorronsoro JR, editor. *Artificial Neural Networks – ICANN 2002: International Conference*. Berlin: Springer, 2002. P. 474–479. DOI: 10.1007/3-540-46084-5\_77.
24. Actor J. *Computation for the Kolmogorov Superposition Theorem*. PhD Thesis. Houston: Rice University; 2018. 148 p.
25. Liu Z, Wang Y, Vaidya S, Ruehle F, Halverson J, Soljačić M, Hou TY, Tegmark M. KAN:

- Kolmogorov–Arnold Networks. arXiv:2404.19756. ArXiv Preprint; 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.19756.
26. Lorentz GG. Approximation of Functions. New York: Holt, Rinehart and Winston; 1966. 188 p.
  27. Nguyen VP, Rabczuk T, Bordas S, Duflot M. Meshless methods: A review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2008;79(3):763–813. DOI: 10.1016/j.matcom.2008.01.003.
  28. Zhelezko IP, Obodan NI. Secondary branching and the post critical behaviour of thin-walled shells during non-uniform deformation. *J. Appl. Math. Mech.* 1997;61(2):333–337. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00042-7.
  29. Poston T, Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications. Gloucester: Courier Corporation; 2014. 512 p.
  30. Andreev LV, Obodan NI, Lebedev AG. Stability of Shells under Nonaxisymmetric Deformation. M.: Nauka; 1988. 208 p. (in Russian).
  31. Gromov VA, Borisenko EA. Predictive clustering on non-successive observations for multi-step ahead chaotic time series prediction. *Neural Comput. Applic.* 2015;26:1827–1838. DOI: 10.1007/s00521-015-1845-8.
  32. Fomin S, Alekseev V, Tikhomirov V. Optimal Equation. M.: Fizmatlit; 2005. 385 p.
  33. Odejide SA, Aregbesola YAS. A note on two dimensional Bratu problem. *Kragujevac Journal of Mathematics*. 2006;29:49–56.
  34. Temimi H, Ben-Romdhane M, Baccouch M, Musa MO. A two-branched numerical solution of the two-dimensional Bratu’s problem. *Applied Numerical Mathematics*. 2020;153:202–216. DOI: 10.1016/j.apnum.2020.02.010.
  35. Bratu G. Sur les équations intégrales non linéaires. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. 1914;42:113–142. (in French). DOI: 10.24033/bsmf.943.
  36. Boyd JP. An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation. *J. Sci. Comput.* 1986;1:183–206. DOI: 10.1007/BF01061392.
  37. Gromov VA. Catastrophes of cylindrical shell. In: Dutta H., editor. *Mathematical Modelling: Principle and Theory*. Providence: American Mathematical Society; 2023. P. 215–244. DOI: 10.1090/conm/786/15798.
  38. Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 1. N.Y.: Wiley; 2008. 575 p.
  39. Weinberg MM, Trenogin VA. *Theory of Branching Solutions of Nonlinear Equations*. M.: Nauka; 1969. 527 p. (in Russian).
  40. Agapov MS, Kuznetsov EB, Shalashilin VI. Numerical modeling of the problem of strong nonlinear deformation in Eulerian coordinates. *Math. Models Comput. Simul.* 2009;1:263–273. DOI: 10.1134/S2070048209020094.



*Громов Василий Александрович* — родился в Днепропетровске (1979). Доктор физико-математических наук (2017) по специальности «Математическое моделирование и численные методы», профессор (2018). С 2018 года — заместитель руководителя департамента, профессор департамента анализа данных и искусственного интеллекта факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ и старший научный сотрудник Международной лаборатории интеллектуальных систем и структурного анализа. Автор монографии (издательство Springer) и более 70 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах. Научные интересы — бифуркации в нелинейных краевых задачах для уравнений в частных производных (прямые и обратные задачи), численные методы решения нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных, прогнозирование хаотических временных рядов на много шагов вперёд, естественный язык как самоорганизованно-критичная система и нелинейная наука в целом.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: stroller@rambler.ru  
 ORCID: 0000-0001-5891-6597  
 ScopusID: 35228959300



*Томащук Корней Кириллович* — родился в Москве (2000). Окончил с отличием бакалавриат по программе «Прикладной анализ данных» (2022) и магистратуру по программе «Науки о данных» (2024) факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ. С 2020 года работает в международной лаборатории интеллектуальных систем и структурного анализа НИУ ВШЭ в должности стажёра-исследователя. С 2024 года аспирант школы по компьютерным наукам НИУ ВШЭ. Научные интересы — бифуркационный анализ уравнений в частных производных, прогнозирование хаотических временных рядов.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: korneytomashchuk@yandex.ru  
ORCID: 0000-0002-3288-2744



*Бесчастнов Юрий Николаевич* — родился в Москве (1998). Окончил магистратуру «Науки о данных» (2022) факультета компьютерных наук НИУ Высшая школа экономики. С 2021 года работает в международной лаборатории интеллектуальных систем и структурного анализа НИУ ВШЭ в должности стажёра-исследователя. С 2023 года обучается в аспирантуре Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Научные интересы — численные методы бифуркационного анализа уравнений в частных производных, прогнозирование хаотических временных рядов.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: y.beschastnov@mail.ru  
ORCID: 0000-0001-6511-5894



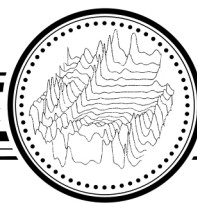
*Сидоренко Артем Александрович* — родился в Москве (2001). Окончил бакалавриат факультета общей и прикладной физики НИУ Московский физико-технический институт (2023). Студент магистратуры факультета математики НИУ ВШЭ. Научные интересы — численные методы бифуркационного анализа уравнений в частных производных.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: sidorenko.arto@gmail.com  
ORCID: 0009-0003-7950-5641



*Какурин Василий Владимирович* — родился в Великом Новгороде (2001). В 2024 окончил бакалавриат МИЭМ НИУ Высшая школа экономики по направлению «Прикладная математика». С 2024 года работает в департаменте прикладной математики НИУ ВШЭ в должности стажёра-исследователя. Научные интересы — численные методы решения нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: vvakurin@mail.ru  
ORCID: 0009-0004-3660-871X



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 531.383

DOI: 10.18500/0869-6632-003161  
EDN: NZBNWT

## Нелинейная динамика цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа при разном числе электростатических датчиков управления

А. А. Маслов, Д. А. Маслов✉

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

E-mail: Maslov954@yandex.ru, ✉MaslovDmA@mpei.ru

Поступила в редакцию 18.10.2024, принята к публикации 15.01.2025,

опубликована онлайн 29.01.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Цель данного исследования — выявить различие в нелинейностях математических моделей динамики и нелинейных эффектах динамики цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа при использовании разного количества электростатических датчиков управления. **Методы.** В данной работе рассматривается нелинейность колебаний резонатора как следствие действия электростатических сил датчиков управления при учёте конечного отношения малого прогиба резонатора к малому зазору электростатического датчика. Для построения приближённых математических моделей используется теорема Тихонова о предельном переходе, а также учитывается малый параметр, сингулярно входящий в систему дифференциальных уравнений. Уравнения динамики резонатора осредняются по методу Крылова–Боголюбова. **Результаты.** Определено отличие нелинейных слагаемых в уравнениях динамики резонатора при использовании восьми и шестнадцати датчиков управления. Установлено, что нелинейные эффекты проявляются сильнее в случае гироскопа с шестнадцатью датчиками управления: больше угловая скорость дрейфа и смещение резонансного пика амплитудно-частотной характеристики, чем в случае с восемью датчиками управления. Показано, что в случае схемы с восемью датчиками управления угловая скорость дрейфа имеет переменное значение, а также содержит малую некомпенсируемую составляющую. **Заключение.** Построены математические модели динамики цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, которые учитывают нелинейности, вызванные возбуждением колебаний восемью и шестнадцатью электростатическими датчиками управления. Показано отличие нелинейных эффектов динамики резонатора волнового твердотельного гироскопа при использовании разного числа датчиков управления: угловой скорости дрейфа и смещения резонансного пика амплитудно-частотной характеристики. Сделаны выводы о применении схемы с восемью датчиками управления.

**Ключевые слова:** волновой твердотельный гироскоп, математическая модель, электростатические датчики, цилиндрический резонатор, нелинейные колебания, угловая скорость дрейфа.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00546).

**Для цитирования:** Маслов А. А., Маслов Д. А. Нелинейная динамика цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа при разном числе электростатических датчиков управления // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 466–484. DOI: 10.18500/0869-6632-003161. EDN: NZBNWT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).



## Nonlinear dynamics for cylindrical resonator of wave solid-state gyroscope with different number of electrostatic control sensors

A. A. Maslov, D. A. Maslov✉

National Research University “MPEI”, Moscow, Russia  
E-mail: Maslov954@yandex.ru, ✉MaslovDmA@mpei.ru

Received 18.10.2024, accepted 15.01.2025, available online 29.01.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The purpose of this work is to determine differences in the nonlinearities of mathematical models of dynamics and nonlinear effects of dynamics for the cylindrical resonator of wave solid-state gyroscope using a different number of electrostatic control sensors. **Methods.** In this article resonator oscillations nonlinearity caused by finite ratio of the small deflection of the resonator to the small gap of the electrostatic sensor is considered. To construct approximate mathematical models Tikhonov's theorem on the passage to the limit is used and a small parameter singularly included in the system of differential equations is also taken into account. The equations of resonator dynamics are averaged by using the Krylov–Bogolyubov method. **Results.** The difference between the nonlinear terms in the equations of resonator dynamics with eight and sixteen control sensors is determined. It is found that nonlinear effects are more pronounced in the case of the gyroscope with sixteen control sensors. The angular drift velocity and the displacement of the resonant peak of the amplitude-frequency response are greater than in the case of eight control sensors. It is shown that in the case of eight control sensors, the angular drift velocity has a variable value and also contains a small uncompensated component. **Conclusion.** Mathematical models of the dynamics for the cylindrical resonator of wave solid-state gyroscope taking into account the nonlinearities caused by the excitation of oscillations by eight and sixteen electrostatic control sensors are deduced. The difference between the nonlinear effects of the resonator dynamics for wave solid-state gyroscope with different number of control sensors is shown. The angular drift velocity and the displacement of the resonant peak of the amplitude-frequency response are obtained. Conclusions about the applicability of gyroscope with eight control sensors are discussed.

**Keywords:** wave solid-state gyroscope, mathematical model, electrostatic sensors, cylindrical resonator, nonlinear oscillations, angular drift velocity.

**Acknowledgements.** This work was supported by the grant of Russian Science Foundation (project No. 23-21-00546).

**For citation:** Maslov AA, Maslov DA. Nonlinear dynamics for cylindrical resonator of wave solid-state gyroscope with different number of electrostatic control sensors. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):466–484. DOI: 10.18500/0869-6632-003161

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

В настоящее время актуальной задачей является повышение точности навигационных приборов, включая волновые твердотельные гироскопы (ВТГ), с помощью построения более точных математических моделей динамики их чувствительных элементов [1–4]. Учёт нелинейности колебаний в математических моделях динамики резонаторов ВТГ позволяет не только повысить точность прибора с помощью методов компенсации, но и исследовать ряд нелинейных эффектов, которые имеют место в динамике ВТГ и не могут быть исследованы в рамках линейных математических моделей.

Основы теории ВТГ заложены в работах Д. М. Климова и В. Ф. Журавлёва [5–10]. В [6, 9] показано, что погрешность, вызванная нелинейными свойствами колебательной системы, присуща всем ВТГ, а исследование динамики может проводиться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. При этом указано, что для исследования нелинейности требуется учёт специфики конкретной колебательной системы. В работах [11, 12] отмечено, что при экспериментальных исследованиях динамики вибрационных гироскопов с электростатическими датчиками управления были обнаружены явления, характерные для нелинейных

систем, например, срыв колебаний резонатора. Однако исследованию специфики нелинейности, вызванной электростатическими датчиками управления, уделяется мало внимания.

В данной статье исследуются нелинейные колебания, вызванные электростатическими датчиками управления, выводятся и сравниваются нелинейные математические модели с восьмью и шестнадцатью датчиками управления, обобщаются результаты предшествующих работ по исследованию нелинейных эффектов динамики ВТГ [13–15], в которых рассматривались ВТГ только с шестнадцатью датчиками управления.

В статье рассматривается ВТГ с цилиндрическим резонатором. Данный выбор объясняется тем, что в настоящее время интенсивно проводятся работы по улучшению качества изготовления и балансировки цилиндрических резонаторов из плавленого кварца [16–20], которые отличаются от полусферических простотой изготовления и достаточно высокой добротностью. Результаты, полученные для ВТГ с цилиндрическим резонатором, могут быть обобщены на ВТГ с другими типами резонаторов: кольцевым и полусферическим.

## 1. Математические модели с учётом нелинейности колебаний, вызванной датчиками управления

**1.1. Математические модели при произвольном числе датчиков управления.** Будем рассматривать волновой твердотельный гироскоп с цилиндрическим резонатором, один край которого свободен, а другой жёстко прикреплен к основанию прибора. Резонатор изготавливается из кварцевого стекла с нанесением на его поверхность металлического покрытия. Колебания цилиндрического резонатора возбуждаются системой электростатических датчиков управления, которые представляют собой конденсаторы, образованные металлизированной поверхностью резонатора и электродами управления, расположенными вблизи свободной кромки резонатора. Математическая модель динамики цилиндрического резонатора для данного типа волнового твердотельного гироскопа подробно выводится в работе [14]. В общем виде для произвольного числа датчиков управления математическая модель имеет вид

$$\ddot{f} + \omega^2 f = -\gamma \dot{f} + 2v\dot{g} + \frac{1}{2md^2C_0} \sum_{j=1}^n q_j^2 \cos 2\theta_j, \quad (1)$$

$$\ddot{g} + \omega^2 g = -\gamma \dot{g} - 2v\dot{f} + \frac{1}{2md^2C_0} \sum_{j=1}^n q_j^2 \sin 2\theta_j,$$

$$R_e C_0 \dot{q}_j + q_j (1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j) = U_j u_0 C_0, \quad j = 1 \dots n. \quad (2)$$

где, в соответствии с [14], обозначены:  $f(t)$ ,  $g(t)$  — обобщённые координаты второй формы колебаний цилиндрического резонатора, нормализованные зазором  $d$  между электродом управления и недеформированным резонатором;  $\omega$  — характерная частота собственных колебаний;  $\gamma$  характеризует демпфирование колебаний;  $v$  характеризует угловую скорость вращения гироскопа;  $m$  — приведённая масса цилиндрического резонатора;  $C_0$  — ёмкость конденсаторов при недеформированном резонаторе;  $q_j(t)$  — заряд  $j$ -го конденсатора, образованного резонатором и  $j$ -м электродом управления;  $\theta_j = 2\pi(j-1)/n$  — угол расположения  $j$ -го электрода,  $j = 1 \dots n$ ,  $n$  — число электродов управления;  $R_e$  — электрическое сопротивление цепи управления колебаниями;  $U_j(t)$  — напряжение на  $j$ -м электроде,  $j = 1 \dots n$ , которое нормализовано величиной постоянного опорного напряжения  $u_0$ . Точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ .

Перейдём в уравнениях (1), (2) к безразмерному времени  $\tau = \omega t$  и нормализованным величиной  $Q_0 = C_0 u_0$  зарядам  $Q_j = q_j / (C_0 u_0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f + \tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} - \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} - \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n Q_j^2 \cos 2\theta_j &= 0, \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g + \tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} + \tilde{v} \frac{df}{d\tau} - \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n Q_j^2 \sin 2\theta_j &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{dQ_j}{d\tau} + Q_j (1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j) = U_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (4)$$

где  $\eta = \frac{C_0^2 u_0^2}{2m d^2 \omega^2}$ ,  $\varepsilon = R_e C_0 \omega$  — безразмерные малые параметры, а также обозначены безразмерные малые величины  $\tilde{\gamma} = \gamma / \omega$ ,  $\tilde{v} = v / \omega$ . Заметим, что малый параметр  $\varepsilon = R_e C_0 \omega$  характеризует отношение активного и реактивного (емкостного) сопротивлений цепи управления колебаниями и для электростатических датчиков крайне мал, например,  $\varepsilon \approx 10^{-8}$  при  $R_e \approx 1$  Ом,  $C_0 \approx 10^{-12}$  Ф,  $\omega \approx 10^4$  с $^{-1}$ .

Присутствие малого параметра  $\varepsilon$  при производных указывает, что уравнения (4) являются сингулярно возмущёнными, а вся система уравнений (3), (4) относится к классу тихоновских систем дифференциальных уравнений. В [14] показано применение теоремы Тихонова о предельном переходе, которая гарантирует приближение решения уравнений (3) решением уравнений

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f = -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \cos 2\theta_j}{(1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j)^2}, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 g}{d\tau^2} + g = -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \sin 2\theta_j}{(1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j)^2}. \quad (6)$$

Однако можно построить уточнённое приближение к решению уравнений (1), которое учитывает малый параметр  $\varepsilon$ , характеризующий параметры электрической цепи управления. Аналогично [15] воспользуемся для переменных  $Q_j$ ,  $j = 1 \dots n$ , приближением первого порядка по  $\varepsilon$  и запишем математическую модель динамики резонатора, учитывающую параметры электрической цепи управления:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f = -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \frac{\eta}{8} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \cos 2\theta_j}{(1 - w_j)^2} - \right. \\ \left. - 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{U_j \cos 2\theta_j}{(1 - w_j)^3} \frac{dU_j}{d\tau} - 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \cos 2\theta_j}{(1 - w_j)^4} \left( \frac{df}{d\tau} \cos 2\theta_j + \frac{dg}{d\tau} \sin 2\theta_j \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g = -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \frac{\eta}{8} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \sin 2\theta_j}{(1 - w_j)^2} - \right. \\ \left. - 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{U_j \sin 2\theta_j}{(1 - w_j)^3} \frac{dU_j}{d\tau} - 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \sin 2\theta_j}{(1 - w_j)^4} \left( \frac{df}{d\tau} \cos 2\theta_j + \frac{dg}{d\tau} \sin 2\theta_j \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где для сокращения записи обозначен прогиб резонатора  $w_j = f \cos 2\theta_j + g \sin 2\theta_j$ .

Очевидно, что (5), (6) следуют из (7), (8) при  $\varepsilon = 0$ . Представленные математические модели будем использовать для исследования нелинейности колебаний резонатора, вызванной электростатическими датчиками управления при разном количестве датчиков управления.

**1.2. Нелинейная математическая модель динамики резонатора ВТГ при использовании восьми датчиков управления.** Рассмотрим часто встречающийся в конструкциях ВТГ случай, при котором напряжения  $U_j$  между  $j$ -м электродом датчика управления и резонатором,  $j = 1 \dots n$ , подаются на восемь,  $n = 8$ , датчиков управления, неизменно ориентированных относительно основания ВТГ,  $\theta_j = (j - 1)\pi/4$ :

$$\begin{aligned} U_1 = U_5 &= 1 + u_A = 1 - u_1 \sin \mu\tau + u_2 \cos \mu\tau, \\ U_3 = U_7 &= 1 - u_A = 1 + u_1 \sin \mu\tau - u_2 \cos \mu\tau, \\ U_2 = U_6 &= 1 + u_B = 1 - u_3 \sin \mu\tau + u_4 \cos \mu\tau, \\ U_4 = U_8 &= 1 - u_B = 1 + u_3 \sin \mu\tau - u_4 \cos \mu\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $u_1, u_2, u_3, u_4$  – нормализованные по отношению к опорному напряжению  $u_0$  амплитуды управляющих напряжений,  $|u_i| < 1, i = 1 \dots 4$ ;  $u_A(\tau), u_B(\tau)$  – нормализованные управляющие напряжения, подаваемые соответственно на группу электродов № 1, 3, 5, 7 и на смещённую относительно них на угол  $45^\circ$  группу электродов № 2, 4, 6, 8. Введена величина  $\mu = \omega_0/\omega = (\omega + \lambda)/\omega$ , где  $\omega_0$  – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора, близкая к  $\omega$ ,  $\lambda$  – частотная настройка,  $|\lambda| \ll \omega$ .

Сигналы управления (9) реализуют подачу разности потенциалов  $u_0(1 + u)$  и  $u_0(1 - u)$  на датчики, расположенные ортогонально, которая применяется для линеаризации силы электростатического датчика, пропорциональной квадрату напряжения на электроде:

$$u_0^2(1 + u)^2 - u_0^2(1 - u)^2 = 4u_0^2u. \quad (10)$$

Полученное выражение (10) линейно относительно нормализованного управляющего напряжения  $u$ . Таким образом реализуется широко применяемая в ВТГ «пуш-пульная» (“push–pull”) схема управления [6]. Поскольку электростатическая сила обратно пропорциональна квадрату величины зазора между электродом управления и металлизированной поверхностью резонатора, покажем, что при учёте конечного отношения прогиба резонатора к зазору электростатического датчика нарушается линеаризация “push–pull”. Несмотря на конечность отношения прогиба к зазору, величина прогиба является малой, что обосновывает одновременное использование при выводе уравнений динамики резонатора линейной теории оболочек и учёт нелинейности силового воздействия датчика управления. Силовое воздействие двух ортогонально расположенных датчиков управления пропорционально выражению, которое может быть разложено в ряд по нормализованному величиной зазора прогибу  $|w| < 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_0^2(1 + u)^2}{(1 - w)^2} - \frac{u_0^2(1 - u)^2}{(1 + w)^2} &= \\ &= u_0^2(1 + u)^2 (1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \dots) - u_0^2(1 - u)^2 (1 - 2w + 3w^2 - 4w^3 + \dots) = \\ &= 4u_0^2u (1 + 3w^2 + 5w^4 + \dots) + 4u_0^2 (1 + u^2) (w + 2w^3 + 3w^5 + \dots) = \\ &= 4u_0^2 (u + w + u^2w + 3uw^2 + 2w^3 + 2u^2w^3 + \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, при учёте прогиба  $w$  схема линеаризации “push–pull” нарушается. Пренебрегая прогибом в случае его малости, получим из (11) линейное выражение относительно управляющего напряжения, соответствующее линеаризации “push–pull” (10).

Для преобразования сумм в (7), (8) будем использовать также разложения в ряд

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\tilde{w})^2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \tilde{w}^k = 1 + 2\tilde{w} + 3\tilde{w}^2 + 4\tilde{w}^3 + \dots, \\ \frac{1}{(1-\tilde{w})^3} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) \tilde{w}^k = 1 + 3\tilde{w} + 6\tilde{w}^2 + 10\tilde{w}^3 + \dots, \\ \frac{1}{(1-\tilde{w})^4} &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)(k+1) \tilde{w}^k = 1 + 4\tilde{w} + 10\tilde{w}^2 + 20\tilde{w}^3 + \dots\end{aligned}\quad (12)$$

Используя в (7), (8) закон подачи напряжения (9), приближение (11), разложения в ряд (12) и пренебрегая нелинейными слагаемыми выше третьей степени, получаем при  $n = 8$  датчиках управления следующие уравнения динамики резонатора:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \eta \left( f + 2f^3 - \varepsilon (1 + 10f^2) \frac{df}{d\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + 3f^2 - 8\varepsilon f \frac{df}{d\tau} \right) u_A - \varepsilon (1 + 6f^2) u'_A \right), \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \eta \left( g + 2g^3 - \varepsilon (1 + 10g^2) \frac{dg}{d\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + 3g^2 - 8\varepsilon g \frac{dg}{d\tau} \right) u_B - \varepsilon (1 + 6g^2) u'_B \right).\end{aligned}\quad (13)$$

При выводе (13) и далее пренебрегаем в силу малости слагаемыми, содержащими  $u_A^2$  и  $u_B^2$ . Такие слагаемые характеризуют параметрическое возбуждение колебаний резонатора, сопутствующее вынужденным колебаниям [14]. Устойчивость колебаний при данном сопутствующем параметрическом возбуждении исследовалась в [21].

Для исследования нелинейных эффектов динамики понадобятся осреднённые уравнения динамики резонатора ВТГ. Сначала рассмотрим (13) в случае  $\varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \eta (f + 2f^3 + (1 + 3f^2) u_A), \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \eta (g + 2g^3 + (1 + 3g^2) u_B).\end{aligned}\quad (14)$$

И проведём осреднение системы уравнений (14) по методу Крылова–Боголюбова [22].

С помощью замены переменных

$$x_1 = f, \quad x_2 = \frac{df}{d\tau}, \quad x_3 = g, \quad x_4 = \frac{dg}{d\tau} \quad (15)$$

сведём (14) к нормальной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -x_1 - \tilde{\gamma}x_2 + \tilde{v}x_4 + \eta \left( x_1 + 2x_1^3 + (1 + 3x_1^2) u_A \right), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= -x_3 - \tilde{\gamma}x_4 - \tilde{v}x_2 + \eta \left( x_3 + 2x_3^3 + (1 + 3x_3^2) u_B \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 \sin \mu\tau + q_1 \cos \mu\tau, & x_2 &= \mu (p_1 \cos \mu\tau - q_1 \sin \mu\tau), \\ x_3 &= p_2 \sin \mu\tau + q_2 \cos \mu\tau, & x_4 &= \mu (p_2 \cos \mu\tau - q_2 \sin \mu\tau), \end{aligned} \quad (17)$$

выводим из (16) разрешённую относительно производных систему дифференциальных уравнений, которую сокращённо записываем в векторно-матричной форме

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, \tau), \quad (18)$$

где  $z(\tau) = (q_1(\tau), p_1(\tau), q_2(\tau), p_2(\tau))^T$ , функция  $F(z, \tau)$  периодична по  $\tau$  с периодом  $2\pi/\mu$ . Проводя осреднение (18) по явно входящему безразмерному времени  $\tau$ , придём к системе, решение которой даёт приближение к решению (18), обоснованное методом осреднения Крылова–Боголюбова [22]:

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{F}(\bar{z}). \quad (19)$$

Далее опустим обозначение осреднённого решения и запишем (19) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-2p_1\mu - q_1\tilde{\gamma} + q_2\tilde{v} + \eta (3k_1 + (1 + k_5) u_1 + 3k_9 u_2)], \\ \frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} [2q_1\mu - p_1\tilde{\gamma} + p_2\tilde{v} + \eta (3k_2 + (1 + k_6) u_2 + 3k_9 u_1)], \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-2p_2\mu - q_2\tilde{\gamma} - q_1\tilde{v} + \eta (3k_3 + (1 + k_7) u_3 + 3k_{10} u_4)], \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} [2q_2\mu - p_2\tilde{\gamma} - p_1\tilde{v} + \eta (3k_4 + (1 + k_8) u_4 + 3k_{10} u_3)], \end{aligned} \quad (20)$$

где введены обозначения нелинейных слагаемых:

$$\begin{aligned} k_1 &= -p_1 (q_1^2 + p_1^2) / 2, & k_2 &= q_1 (q_1^2 + p_1^2) / 2, \\ k_3 &= -p_2 (q_2^2 + p_2^2) / 2, & k_4 &= q_2 (q_2^2 + p_2^2) / 2, \end{aligned} \quad (21)$$

а также нелинейностей при управляющих напряжениях:

$$\begin{aligned} k_5 &= 3 (3p_1^2 + q_1^2) / 4, & k_6 &= 3 (p_1^2 + 3q_1^2) / 4, & k_7 &= 3 (3p_2^2 + q_2^2) / 4, \\ k_8 &= 3 (p_2^2 + 3q_2^2) / 4, & k_9 &= -q_1 p_1 / 2, & k_{10} &= -q_2 p_2 / 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Проводя осреднение уравнений (13) по методу Крылова–Боголюбова при  $\varepsilon \neq 0$  и отсутствии управляющих воздействий  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  аналогично описанному выше алгоритму (15)–(19), получим осреднённую систему

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-q_1\tilde{\gamma} + q_2\tilde{v} + \eta(3k_1 - 5\varepsilon k_2)], \\ \frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-p_1\tilde{\gamma} + p_2\tilde{v} + \eta(3k_2 + 5\varepsilon k_1)], \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-q_2\tilde{\gamma} - q_1\tilde{v} + \eta(3k_3 - 5\varepsilon k_4)], \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-p_2\tilde{\gamma} - p_1\tilde{v} + \eta(3k_4 + 5\varepsilon k_3)],\end{aligned}\tag{23}$$

которую будем далее использовать для исследования угловой скорости дрейфа ВТГ.

**1.3. Нелинейная математическая модель динамики резонатора ВТГ при использовании шестнадцати датчиков управления.** Рассмотрим случай, при котором напряжения  $U_j$  между  $j$ -м электродом датчика управления и резонатором,  $j = 1, \dots, n$ , подаются на шестнадцать,  $n = 16$ , датчиков управления, неизменно ориентированных относительно основания ВТГ,  $\theta_j = (j - 1)\pi/8$ :

$$\begin{aligned}U_1 = U_9 &= 1 + u_A = 1 - u_1 \sin \mu\tau + u_2 \cos \mu\tau, \\ U_5 = U_{13} &= 1 - u_A = 1 + u_1 \sin \mu\tau - u_2 \cos \mu\tau, \\ U_3 = U_{11} &= 1 + u_B = 1 - u_3 \sin \mu\tau + u_4 \cos \mu\tau, \\ U_7 = U_{15} &= 1 - u_B = 1 + u_3 \sin \mu\tau - u_4 \cos \mu\tau,\end{aligned}\tag{24}$$

где  $u_A(t)$ ,  $u_B(t)$  — нормализованные управляющие напряжения, подаваемые соответственно на группу электродов № 1, 5, 9, 13 и смещённую относительно них на угол  $45^\circ$  группу электродов № 3, 7, 11, 15. На промежуточных электродах (с чётными номерами) разность потенциалов задаётся равной опорному напряжению  $u_0$ . Остальные обозначения введены так же, как в (9).

Используя в (7), (8) закон подачи напряжения (24), приближение (11), разложения в ряд (12) и пренебрегая нелинейными слагаемыми выше третьей степени, получаем при  $n = 16$  датчиках управления следующие уравнения динамики резонатора [15]:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \eta \left( 2f + 3(f^2 + g^2)f + \left( 1 + 3f^2 - 8\varepsilon f \frac{df}{d\tau} \right) u_A \right) - \\ &\quad - \varepsilon \eta \left( 2 \frac{df}{d\tau} + 5(f^2 + g^2) \frac{df}{d\tau} + 10 \left( f \frac{df}{d\tau} + g \frac{dg}{d\tau} \right) f + (1 + 6f^2) u'_A \right), \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \eta \left( 2g + 3(f^2 + g^2)g + \left( 1 + 3g^2 - 8\varepsilon g \frac{dg}{d\tau} \right) u_B \right) - \\ &\quad - \varepsilon \eta \left( 2 \frac{dg}{d\tau} + 5(f^2 + g^2) \frac{dg}{d\tau} + 10 \left( f \frac{df}{d\tau} + g \frac{dg}{d\tau} \right) g + (1 + 6g^2) u'_B \right).\end{aligned}\tag{25}$$

Сначала рассмотрим (25) в случае  $\varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \eta (2f + 3(f^2 + g^2)f + (1 + 3f^2) u_A), \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \eta (2g + 3(f^2 + g^2)g + (1 + 3g^2) u_B),\end{aligned}\tag{26}$$



и выпишем соответствующие (26) осреднённые уравнения динамики резонатора ВТГ:

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -2p_1\mu - q_1\tilde{\gamma} + q_2\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_1 + (1 + k_5)u_1 + 3k_9u_2 \right) \right], \\ \frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ 2q_1\mu - p_1\tilde{\gamma} + p_2\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_2 + (1 + k_6)u_2 + 3k_9u_1 \right) \right], \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -2p_2\mu - q_2\tilde{\gamma} - q_1\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_3 + (1 + k_7)u_3 + 3k_{10}u_4 \right) \right], \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ 2q_2\mu - p_2\tilde{\gamma} - p_1\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_4 + (1 + k_8)u_4 + 3k_{10}u_3 \right) \right],\end{aligned}\quad (27)$$

где введены аналогично [14] обозначения нелинейных слагаемых:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= -p_1E - q_2X, \quad \tilde{k}_2 = q_1E - p_2X, \quad \tilde{k}_3 = -p_2E + q_1X, \quad \tilde{k}_4 = q_2E + p_1X, \\ E &= 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)/4, \quad X = (p_2q_1 - p_1q_2)/2,\end{aligned}\quad (28)$$

нелинейности при управляющих напряжениях имеют вид (22).

Более подробно случай  $n = 16$  электростатических датчиков управления при  $\varepsilon = 0$  исследовался в [14], а при  $\varepsilon \neq 0$  — в [15].

При  $\varepsilon \neq 0$  и отсутствии управляющих воздействий  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  можно получить осреднённую систему [15]:

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -q_1\tilde{\gamma} + q_2\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_1 - 5\varepsilon\tilde{k}_2 \right) \right], \\ \frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -p_1\tilde{\gamma} + p_2\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_2 + 5\varepsilon\tilde{k}_1 \right) \right], \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -q_2\tilde{\gamma} - q_1\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_3 - 5\varepsilon\tilde{k}_4 \right) \right], \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -p_2\tilde{\gamma} - p_1\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_4 + 5\varepsilon\tilde{k}_3 \right) \right],\end{aligned}\quad (29)$$

которую будем далее использовать для исследования угловой скорости дрейфа ВТГ.

Также заметим по уравнениям (20) и (25), что отличие наблюдается только для кубических нелинейностей, нелинейности при управляющих напряжениях одинаковы как при использовании восьми, так и шестнадцати электродов управления.

## 2. Исследование нелинейных эффектов динамики резонатора ВТГ

В данном разделе выведем нелинейные эффекты динамики цилиндрического резонатора с восьмью датчиками управления и полученные результаты сравним с результатами, полученными ранее в [14] и [15] для ВТГ с шестнадцатью электростатическими датчиками управления.

**2.1. Угловая скорость дрейфа.** Рассмотрим влияние нелинейности, вызванной подачей на датчики управления опорного напряжения, на угловую скорость дрейфа гироскопа. Пусть на электроды управления подаётся только постоянное опорное напряжение  $U_0 \neq 0$ , а управляющие напряжения  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ .

Исследование дрейфа ВТГ будем проводить с помощью переменных, называемых элементами орбиты [9]:  $r(\tau)$  и  $k(\tau)$  — амплитуды основной и квадратурной волн колебаний,  $\theta(\tau)$  — угол прецессии,  $\chi(\tau)$  — временная фаза,

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos(\tau + \chi) \cos 2\theta - k \sin(\tau + \chi) \sin 2\theta, \\ x_3 &= r \cos(\tau + \chi) \sin 2\theta + k \sin(\tau + \chi) \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (30)$$

Уравнения (23) получены в результате осреднения уравнений динамики резонатора ВТГ с  $n = 8$  датчиками управления (13) при  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ . Чтобы перейти от  $q_1(\tau)$ ,  $p_1(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$  к  $r(\tau)$ ,  $k(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$ ,  $\chi(\tau)$ , будем использовать замену переменных [23]:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \cos 2\theta \cos \chi - k \sin 2\theta \sin \chi, & p_1 &= -r \cos 2\theta \sin \chi - k \sin 2\theta \cos \chi, \\ q_2 &= r \sin 2\theta \cos \chi + k \cos 2\theta \sin \chi, & p_2 &= -r \sin 2\theta \sin \chi + k \cos 2\theta \cos \chi. \end{aligned} \quad (31)$$

В результате выполненных преобразований получаем систему

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}r - \varepsilon\eta \left(1 + \frac{5}{8}(k^2 + 3r^2)\right) r + \frac{1}{16}\eta (r^2 - k^2) (3k \sin 8\theta - 5\varepsilon r \cos 8\theta), \quad (32)$$

$$\frac{dk}{d\tau} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}k - \varepsilon\eta \left(1 + \frac{5}{8}(3k^2 + r^2)\right) k - \frac{1}{16}\eta (r^2 - k^2) (3r \sin 8\theta - 5\varepsilon k \cos 8\theta), \quad (33)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{4}\tilde{\nu} + \frac{3}{16}\eta kr (1 + \cos 8\theta) + \frac{5}{32}\varepsilon\eta (k^2 + r^2) \sin 8\theta, \quad (34)$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{3}{16}\eta (r^2 + k^2) (3 + \cos 8\theta) - 10\varepsilon\eta kr \sin 8\theta. \quad (35)$$

В уравнениях (32)–(35) все величины оказываются зависимыми от угла прецессии  $\theta$ , что является следствием использования восьми датчиков управления. Поэтому уравнения (32)–(35) не допускают столь простого анализа, как для случая  $n = 16$  электростатических датчиков управления [15].

Используя замену переменных (31), из (29) мы получаем систему уравнений в новых переменных для случая  $n = 16$  датчиков управления:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}r - \varepsilon\eta \left(1 + \frac{5}{8}(k^2 + 3r^2)\right) r, \quad (36)$$

$$\frac{dk}{d\tau} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}k - \varepsilon\eta \left(1 + \frac{5}{8}(3k^2 + r^2)\right) k, \quad (37)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{4}\tilde{\nu} + \frac{3}{8}\eta kr, \quad (38)$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{9}{8}\eta (r^2 + k^2). \quad (39)$$

Уравнения (36), (37) указывают на то, что амплитуда колебаний уменьшается в результате демпфирования. Уравнение (39) указывает на незначительное изменение частоты колебаний. Из (38) следует, что угловая скорость дрейфа ВТГ задаётся формулой

$$\dot{\theta}_* = \frac{3}{8}\eta kr. \quad (40)$$

Из (36)–(39) следует, что учёт параметров электрической цепи управления при нелинейных колебаниях резонатора в случае  $n = 16$  датчиков управления оказывает незначительное влияние на демпфирование колебаний и не вносит изменений в угловую скорость дрейфа гироскопа. Таким образом, в случае ВТГ с  $n = 16$  датчиками управления имеется формула (38), которая делает возможность определения и учёта угловой скорости дрейфа ВТГ, а также применения классической методики силовой компенсации, когда амплитуду колебаний  $r$  поддерживают постоянной, а  $k$  стремятся уменьшить до нуля [9].

Вернёмся к анализу случая  $n = 8$  датчиков управления. В уравнениях (32)–(35), несмотря на их нелинейность, можно аналогично заметить, что уравнения (32), (33) указывают на уменьшение амплитуды колебаний в результате демпфирования. Уравнение (35) указывает на незначительное изменение частоты колебаний. Наибольший интерес представляет уравнение (34), из которого следует оценка угловой скорости дрейфа ВТГ:

$$-\frac{5}{32}\varepsilon\eta(k^2 + r^2) \leq \frac{d\theta_*}{d\tau} \leq \frac{3}{8}\eta kr + \frac{5}{32}\varepsilon\eta(k^2 + r^2). \quad (41)$$

Согласно (41), угловая скорость дрейфа ВТГ оценивается двумя принципиально разными слагаемыми. Одно из них зависит прямо пропорционально от амплитуд основной и квадратурной волн колебаний  $r$ ,  $k$ . Соответственно, при силовой компенсации угловой скорости дрейфа, когда  $r$  поддерживают постоянной, а  $k$  стремятся уменьшить до нуля [9], данное слагаемое, содержащее произведение  $kr$ , сводится к нулю. Однако при таком стандартном способе компенсации не будет компенсироваться угловая скорость дрейфа, оцениваемая слагаемым в (41), содержащим  $k^2 + r^2$ .

Пусть квадратура  $k$  полностью скомпенсирована,  $k = 0$ . Тогда дадим оценку модуля угловой скорости дрейфа:

$$\left| \frac{d\theta_*}{d\tau} \right| \leq \frac{5}{32}\varepsilon\eta r^2. \quad (42)$$

Таким образом, формулы (41), (42) устанавливают наличие неустранимого дрейфа ВТГ при использовании схемы ВТГ с восьмью датчиками управления. При этом очевидно, что за счёт высокой степени малости  $\varepsilon$  неустраняемая угловая скорость дрейфа крайне мала.

Если пренебречь  $\varepsilon$  в оценке (41) и сравнить её с формулой (40), то получим, что угловая скорость дрейфа ВТГ с восьмью электродами управления оценивается угловой скоростью дрейфа ВТГ с шестнадцатью электродами управления.

Пример. Вычислим угловую скорость дрейфа ВТГ с цилиндрическим кварцевым резонатором, которая вызвана опорным напряжением при использовании  $n = 8$  и  $n = 16$  электростатических датчиков управления.

Резонатор имеет размеры  $R = 20$  мм,  $H = R$ ,  $h = 1$  мм, сделан из кварцевого стекла плотностью  $\rho = 2210$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 73.6$  ГПа. При данных параметрах характерная частота собственных колебаний  $\omega = 20890$  с<sup>-1</sup> [14]. При опорном напряжении  $u_0 = 100$  В и ёмкости  $C_0 = 1.05 \cdot 10^{-12}$  Ф имеем [14]  $\eta = 9 \cdot 10^{-6}$ , а также  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

Считаем, что квадратурная волна полностью скомпенсирована,  $k = 0$ , а амплитуду нормализованной основной волны примем  $r = 0.1$ . Тогда по формуле (42) для ВТГ с  $n = 8$  электростатическими датчиками управления получаем оценку некомпенсируемой угловой скорости дрейфа  $3 \cdot 10^{-12}$  с<sup>-1</sup>, что равняется  $1.2 \cdot 10^{-6}$  °/час. Столь малая оценка угловой скорости дрейфа не имеет значения даже в гироскопах высокой точности, поэтому ВТГ с восьмью электростатическими датчиками управления практически не уступает в точности ВТГ с шестнадцатью датчиками управления (справедливо только для электростатических датчиков управления с экстремально малым параметром  $\varepsilon$ ).

В остальном угловая скорость дрейфа компенсируется при стремлении  $k$  к нулю [9]. Покажем, что данная компенсация необходима: пусть относительные амплитуды нормализованной основной и квадратурной волн колебаний  $r = 0.1$  и  $k = 0.001$  (соответственно 10 мкм и 0.1 мкм), тогда абсолютная величина угловой скорости дрейфа, вычисляемая по формуле (40), равна 1.45 °/час. При использовании в ВТГ восьми датчиков управления, согласно (41), угловая скорость дрейфа имеет переменный характер и оценивается рассчитанным значением 1.45 °/час. Полученное значение является существенным для гироскопов, применяемых в навигационных

системах, что говорит о проявлении нелинейных свойств датчиков управления и необходимости компенсации угловой скорости дрейфа у волновых твердотельных гироскопов.

**2.2. Сдвиг резонансного пика амплитудно-частотной характеристики.** Для исследования амплитудно-частотных характеристик нелинейных колебаний мы рассмотрим следующий режим подачи управляющего напряжения:  $u_1 = u_3 = u_4 = 0$ ,  $u_2 = u$ . Поскольку значение параметра  $\varepsilon$  крайне мало, в данном подразделе мы не будем его учитывать и определим наиболее существенное отличие амплитудно-частотных характеристик колебаний резонатора при использовании  $n = 8$  и  $n = 16$  датчиков управления. Поскольку при  $n = 16$  датчиках управления данное исследование проводилось в [14], здесь будем рассматривать случай  $n = 8$  датчиков управления.

Сначала рассмотрим (14) только с кубической нелинейностью, без учёта нелинейности при управлении:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + 2\eta f^3 + \eta u \cos \mu\tau, \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + 2\eta g^3.\end{aligned}\quad (43)$$

Вынужденные колебания резонатора исследуем в медленных переменных  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$ , которые являются амплитудами и фазами колебаний:

$$f = A \sin(\mu\tau + \varphi), \quad g = B \sin(\mu\tau + \psi),$$

поэтому будем использовать замену переменных

$$q_1 = A \sin \varphi, \quad p_1 = A \cos \varphi, \quad q_2 = B \sin \psi, \quad p_2 = B \cos \psi \quad (44)$$

в осреднённой системе с медленными переменными  $q_1(\tau)$ ,  $p_1(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ . Соответствующая система осреднённых уравнений следует из (20) и с помощью замены переменных (44) преобразуется в

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-\tilde{\gamma}A + \tilde{v}B \cos(\varphi - \psi) + \eta u \cos \varphi], \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\frac{1}{2A} \left[ 2A\lambda_* + \frac{3}{2}\eta A^3 + \tilde{v}B \sin(\varphi - \psi) + \eta u \sin \varphi \right], \\ \frac{dB}{d\tau} &= -\frac{1}{2} [\tilde{\gamma}B + \tilde{v}A \cos(\varphi - \psi)], \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{1}{2B} \left[ 2B\lambda_* + \frac{3}{2}\eta B^3 + \tilde{v}A \sin(\varphi - \psi) \right],\end{aligned}\quad (45)$$

где частотная настройка  $\lambda_* = \lambda/\omega$ .

Одним из стационарных режимов колебаний является режим [23] с нулевой амплитудой  $B = 0$ . Тогда из (45) следуют уравнения для определения амплитуды  $A$  и фазы колебаний  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}-\tilde{\gamma}A + \eta u \cos \varphi &= 0, \\ A \left( 2\lambda_* + \frac{3}{2}\eta A^2 \right) + \eta u \sin \varphi &= 0.\end{aligned}\quad (46)$$

Избавляясь от тригонометрических функций в уравнениях (46), получим выражение

$$A^2 \tilde{\gamma}^2 + \left( 2\lambda_* A + \frac{3}{2}\eta A^3 \right)^2 = \eta^2 u^2. \quad (47)$$

Применяя к (47) формулу дифференцирования неявной функции, записываем условие экстремума  $A(\lambda_*)$ :

$$\frac{4A \left( 2\lambda_* A + \frac{3}{2}\eta A^3 \right)}{2A\tilde{\gamma}^2 + \left( 2\lambda_* A + \frac{3}{2}\eta A^3 \right) \left( 2\lambda_* + \frac{9}{2}\eta A^2 \right)} = 0,$$

из которого следует, что  $A(\lambda_*)$  имеет экстремум в точке

$$\lambda_* = -\frac{3}{4}\eta A^2. \quad (48)$$

Подставляя (48) в выражение (47), определяем максимальное значение амплитуды

$$A_{\max} = \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}}, \quad (49)$$

учитывая которое в (48), получаем значение частотной настройки:

$$\lambda_{* \max} = -\frac{3\eta}{4} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2. \quad (50)$$

Таким образом, при описании колебаний резонатора нелинейной математической моделью, учитывающей только кубическую нелинейность, максимальная амплитуда колебаний задаётся формулой (49) и наблюдается сдвиг резонансного пика колебаний влево, согласно формуле (50), что соответствует описанию колебаний с мягкой характеристикой.

Если сравнивать полученные результаты с аналогичным исследованием для случая  $n = 16$  датчиков управления [14], то максимальная амплитуда в обоих случаях равна величине (49), а сдвиг резонансного пика для ВТГ с шестнадцатью электродами управления [14] имеет большее в полтора раза значение

$$\lambda_{* \max} = -\frac{9\eta}{8} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2, \quad (51)$$

чем для ВТГ с восьмью электродами управления (50).

Рассмотрим теперь нелинейную математическую модель, учитывающую не только кубическую нелинейность, но и квадратичную нелинейность при управлении в случае  $n = 8$  датчиков управления. Аналогично описанному выше из (20) с заменой переменных (44) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -\tilde{\gamma}A + \tilde{v}B \cos(\varphi - \psi) + \eta u \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \cos \varphi \right], \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\frac{1}{2A} \left[ 2A\lambda_* + \frac{3}{2}\eta A^3 + \tilde{v}B \sin(\varphi - \psi) + \eta u \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \sin \varphi \right], \\ \frac{dB}{d\tau} &= -\frac{1}{2} [\tilde{\gamma}B + \tilde{v}A \cos(\varphi - \psi)], \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{1}{2B} \left[ 2B\lambda_* + \frac{3}{2}\eta B^3 + \tilde{v}A \sin(\varphi - \psi) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Рассматриваем стационарный режим колебаний с  $B = 0$  и получаем выражение для резонансной кривой:

$$\begin{aligned} \left( A\tilde{\gamma} \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \right)^2 + \left( A \left( 2\lambda_* A + \frac{3}{2}\eta A^3 \right) \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \right)^2 = \\ = \left( \eta u \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом, полученное аналитическое выражение (53) описывает амплитудно-частотные характеристики колебаний с учетом как кубической нелинейности, так и квадратичной нелинейности при управлении.

Применяя к (53) формулу дифференцирования неявной функции, получаем условие экстремума  $A(\lambda_*)$ , из которого следует, что  $A(\lambda_*)$  имеет экстремум в точке  $\lambda_* = -\frac{3}{4}\eta A^2$ . Подставляя полученное значение  $\lambda_*$  в (53), определяем максимальное значение амплитуды:

$$A_{\max} = \frac{2\tilde{\gamma}}{3\eta u} \left( 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2} \right). \quad (54)$$

Если в (54) использовать разложение в ряд Тейлора, принимая ограничение  $\frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} < 1$ , вызванное функционированием без пробоев электростатических датчиков (что справедливо согласно формуле (49)), то придём к уточнению значения максимальной амплитуды (49) за счёт учёта нелинейности при управлении:

$$\begin{aligned} A_{\max} &= \frac{2\tilde{\gamma}}{3\eta u} \left( 1 - \left( 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2 - \frac{9}{8} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^4 - \frac{27}{16} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^6 - \dots \right) \right) = \\ &= \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} + \frac{3}{4} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^3 + \frac{9}{16} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^5 + \dots \end{aligned} \quad (55)$$

Учитывая уточнённое значение максимальной амплитуды, рассчитываем уточнённое значение частотной настройки:

$$\lambda_{* \max} = \eta - \frac{2\tilde{\gamma}^2}{3u^2\eta} \left( 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2} \right). \quad (56)$$

Чтобы увидеть уточнение резонансной частоты, вызванное учётом квадратичной нелинейности при управлении, и сравнить с (50), разложим (56) в ряд

$$\begin{aligned} \lambda_{* \max} &= \eta - \frac{2\tilde{\gamma}^2}{3u^2\eta} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2 + \frac{9}{8} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^4 + \frac{27}{16} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^6 + \dots \right) = \\ &= -\frac{3}{4}\eta \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2 - \frac{9}{8}\eta \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^4 - \dots \end{aligned} \quad (57)$$

Из формул (49), (55) следует увеличение амплитуды колебаний в результате учёта квадратичной нелинейности при управлении, которое приводит, согласно формулам (50), (57), к большему сдвигу резонансного пика мягкой амплитудно-частотной характеристики.

Для ВТГ с шестнадцатью электродами управления в [14] было получено выражение для резонансной кривой

$$\begin{aligned} \left( A\tilde{\gamma} \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \right)^2 + \left( A \left( 2\lambda_* A + \frac{9}{4}\eta A^3 \right) \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \right)^2 = \\ = \left( \eta u \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (58)$$

и выведены соответствующие формулы:

$$A_{\max} = \frac{2\tilde{\gamma}}{3\eta u} \left( 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2} \right), \quad \lambda_{* \max} = \frac{3\eta}{2} - \frac{\tilde{\gamma}^2}{u^2\eta} \left( 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2} \right). \quad (59)$$

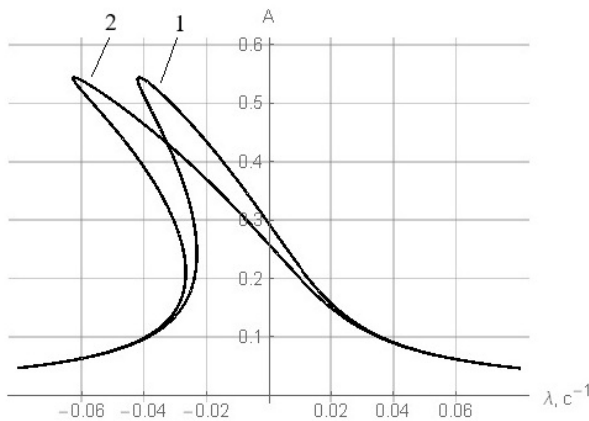


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики: 1 — для гироскопа с восемью датчиками управления, 2 — для гироскопа с шестнадцатью датчиками управления

Fig. 1. Amplitude-frequency response: 1— for gyroscope with eight control sensors, 2— for gyroscope with sixteen control sensors

Из (54), (56), (59) следует, что максимальная амплитуда  $A_{\max}$  одинакова как в случае использования восьми, так и шестнадцати электродов управления, а сдвиг резонансного пика для ВТГ с шестнадцатью электродами управления в полтора раза больше, чем для ВТГ с восемью электродами управления.

*Пример.* Построим амплитудно-частотные характеристики колебаний цилиндрического резонатора ВТГ с восемью и шестнадцатью электростатическими датчиками управления. Как и в предыдущем числовом примере, берём данные  $\omega = 20890 \text{ с}^{-1}$ ,  $\eta = 9 \cdot 10^{-6}$ ,  $u = 0.1$ , принимаем добротность  $Q = 5 \cdot 10^5$ . Расчёты проводим по формулам (53) и (58). На рис. 1 построены рассчитанные по (53) и (58) амплитудно-частотные характеристики, по вертикальной оси откладывается нормализованная амплитуда колебаний  $A$ , по горизонтальной оси — частотная настройка  $\lambda$ .

По формулам (54) и (56) получаем значения  $A_{\max} = 0.544$  и  $\lambda_{\max} = -0.0415 \text{ с}^{-1}$  для ВТГ с восемью электродами управления, и, соответственно, по формулам (59)  $A_{\max} = 0.544$  и  $\lambda_{\max} = -0.0623 \text{ с}^{-1}$  для ВТГ с шестнадцатью электродами управления.

**2.3. Обсуждение результатов.** В соответствии с утверждением о необходимости учёта специфики конкретной колебательной системы при исследовании нелинейности колебаний [9], показано, что нелинейность колебаний резонатора ВТГ, вызванная электростатическими датчиками управления, зависит от числа датчиков управления.

Ранее, в [14], исследовалась динамика резонатора ВТГ только с шестнадцатью датчиками управления, и в результате получалась кубическая нелинейность специального вида  $(f^2 + g^2)f$  и  $(f^2 + g^2)g$  в уравнениях (26), характерного для гироскопов класса обобщенного маятника Фуко [9] и выведенная также в [23] для ВТГ при предположении о том, что для материала резонатора справедлив нелинейный закон упругости. Данный вид нелинейности приводил к постоянной угловой скорости дрейфа (40). В [14] данный вид нелинейности, вызванный электростатическими датчиками управления, был назван нелинейным уточнением известного эффекта «отрицательной электростатической жёсткости», что легко может быть замечено по уравнениям (26): в первом уравнении можно сгруппировать слагаемые  $(1 - 2\eta - 3\eta(f^2 + g^2))f$ , а во втором — слагаемые  $(1 - 2\eta - 3\eta(f^2 + g^2))g$ .

В настоящей статье показано, что использование восьми датчиков управления приводит к совершенно иному виду кубической нелинейности  $f^3$  и  $g^3$  в уравнениях (14). Полученная кубическая нелинейность не может быть отнесена к эффекту «отрицательной электростатической жёсткости» и приводит к переменной угловой скорости дрейфа, которую можно только оценить (41). Данное обстоятельство значительно усложняет расчёты угловой скорости и исключает возможность аналитической компенсации угловой скорости дрейфа, но, с другой стороны, не влияет на силовую компенсацию угловой скорости дрейфа, основанную на подавлении квадратурной волны колебаний [9].

Также в данной работе рассмотрен учёт слагаемых, содержащих малый параметр  $\varepsilon$ , характеризующий электрическую цепь управления колебаниями. Показано, что для ВТГ с восемью



электростатическими датчиками управления возникает неустранимая угловая скорость дрейфа (42), которая пренебрежимо мала даже для гироскопов высокой точности. При этом в работе [15] было показано полное отсутствие неустранимой угловой скорости дрейфа для ВТГ с шестнадцатью датчиками управления.

В работе [24] показано, что электрическая балансировка резонатора ВТГ с использованием восьми электродов управления, в отличие от ВТГ с шестнадцатью датчиками управления, не позволяет полностью скомпенсировать разночастотность.

С другой стороны, в настоящем исследовании показано, что нелинейные эффекты динамики резонатора в схеме ВТГ с восемью датчиками управления проявляются слабее, чем в случае ВТГ с шестнадцатью датчиками управления: переменная угловая скорость дрейфа меньше, чем постоянная, возникающая при использовании шестнадцати датчиков управления, а сдвиг резонансного пика амплитудно-частотной характеристики колебаний — в полтора раза меньше. Важно учитывать и практический интерес использования восьми датчиков управления: уменьшение числа датчиков управления в два раза приводит к упрощению конструкции прибора и удешевлению его изготовления.

Таким образом, можно сделать вывод, что ВТГ с восемью электростатическими датчиками управления имеет преимущество в простоте изготовления и меньшем проявлении нелинейных эффектов динамики резонатора перед ВТГ с шестнадцатью датчиками управления. Однако при разработке ВТГ (в первую очередь высокой точности) необходимо учитывать риски использования схемы ВТГ с восемью датчиками управления: в данной схеме ВТГ неэффективна электрическая балансировка, представляет значительную сложность расчёт угловой скорости дрейфа из-за её переменного значения и имеется неустранимая угловая скорость дрейфа, которая зависит от малости параметра, характеризующего электрическую цепь управления колебаниями.

### Заключение

Построены нелинейные математические модели динамики цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, которые учитывают нелинейности, вызванные возбуждением колебаний электростатическими датчиками управления при восьми и шестнадцати датчиках управления. Для данных случаев показано отличие нелинейностей в дифференциальных уравнениях, а также различие в нелинейных эффектах динамики резонатора ВТГ: в угловой скорости дрейфа и в смещении резонансного пика амплитудно-частотной характеристики. Нелинейные эффекты проявляются сильнее в случае ВТГ с шестнадцатью датчиками управления, больше угловая скорость дрейфа и смещение резонансного пика амплитудно-частотной характеристики, чем для ВТГ с восемью датчиками управления. Однако в случае ВТГ с восемью датчиками управления угловая скорость дрейфа имеет переменное значение, а также содержит малую некомпенсируемую составляющую. Обнаруженные эффекты для схемы ВТГ с восемью электростатическими датчиками управления представляют теоретическое значение, но не влияют на практическое использование таких ВТГ в связи с одинаковой процедурой силовой компенсации как постоянной, так и переменной угловой скорости дрейфа и высоким порядком малости некомпенсируемой угловой скорости дрейфа.

### Список литературы

1. *Переляев С. Е.* Обзор и анализ направлений создания бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волновых твердотельных гироскопах // *Новости навигации.* 2018. № 2. С. 21–27.
2. *Переляев С. Е.* Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы

- развития в прикладной гироскопии // В сб.: XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 29–31 мая 2023 г., Санкт-Петербург, Россия. Санкт-Петербург: Электроприбор, 2023. С. 431–435.
3. *Пешихонов В. Г.* Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 2. С. 3–10. DOI: 10.17285/0869-7035.0028.
  4. *Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В., Ниналов И. Г.* Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31, № 1. С. 3–25.
  5. *Журавлёв В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
  6. *Климов Д. М., Журавлёв В. Ф., Жбанов Ю. К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во «Ким Л.А.», 2017. 194 с.
  7. *Журавлёв В. Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
  8. *Журавлёв В. Ф.* О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 5–11.
  9. *Журавлёв В. Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
  10. *Журавлёв В. Ф., Линч Д. Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24.
  11. *De S. K., Aluru N. R.* Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures // Journal of Microelectromechanical Systems. 2005. Vol. 15, no. 2. P. 355–369. DOI: 10.1109/JMEMS.2006.872227.
  12. *Rhoads J. F., Shaw S. W., Turner K. L., Moehlis J., DeMartini B. E., Zhang W.* Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 296, iss. 4–5. P. 797–829. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.03.009.
  13. *Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В.* Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // Гироскопия и навигация. 2015. № 1. С. 71–80. DOI: 10.18500/0869-6632-00316110.17285/0869-7035.2015.23.1.071-080.
  14. *Маслов Д. А., Меркурьев И. В.* Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 88–110. DOI: 10.31857/S0572329921050068.
  15. *Maslov D. A.* Nonlinear dynamics of a wave solid-state gyroscope taking into account the electrical resistance of an oscillation control circuit // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 409–435. DOI: 10.20537/nd230602.
  16. *Лунин Б. С., Басараб М. А., Юрин А. В., Чуманкин Е. А.* Цилиндрический резонатор из кварцевого стекла для недорогих вибрационных гироскопов // В сб.: Юбилейная XXV Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам. 28–30 мая 2018 г., Санкт-Петербург, Россия. Санкт-Петербург: Электроприбор, 2018. С. 204–207.
  17. *Лунин Б. С., Лопатин В. М.* Кварцевое стекло для механических резонаторов с высокой добротностью // Неорганические материалы. 2020. Т. 56, № 3. С. 305–310. DOI: 10.31857/S0002337X20030100.
  18. *Wu X., Xi X., Wu Y., Xiao D.* Cylindrical Vibratory Gyroscope. Singapore: Springer, 2021. 202 p. DOI: 10.1007/978-981-16-2726-2.
  19. *Zeng L., Luo Y., Pan Y., Jia Y., Liu J., Tan Z., Yang K., Luo H.* A 5.86 million quality factor cylindrical resonator with improved structural design based on thermoelastic dissipation analysis // Sensors. 2020. Vol. 20, no. 21. P. 6003. DOI: 10.3390/s20216003.

20. Tao Y., Pan Y., Liu J., Jia Y., Yang K., Luo H. A novel method for estimating and balancing the second harmonic error of cylindrical fused silica resonators // *Micromachines*. 2021. Vol. 12, no. 4. P. 380. DOI: 10.3390/mi12040380.
21. Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Исследование стационарных режимов колебаний резонатора гироскопа при наличии позиционного и сопутствующего ему параметрического возбуждения // *Гироскопия и навигация*. 2014. № 2. С. 61–69.
22. Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
23. Меркурьев И. В., Подалков В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 228 с.
24. Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Электрическая балансировка волнового твердотельного гироскопа с плоскими электродами // В сб.: XXXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 27–29 мая 2024 г., Санкт-Петербург, Россия. Санкт-Петербург: Электроприбор, 2024. С. 244–247.

## References

1. Perelyaev SE. Review and analysis of the lines of development of strapdown inertial navigation systems on the basis of hemispherical resonator gyroscopes. *Navigation News*. 2018;(2):21–27 (in Russian).
2. Perelyaev SE. Current State of Wave Solid-State Gyroscopes. Development Prospects in Applied Gyroscopy. In: *Proc. of 30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. 2023. 29–31 May 2023, Saint Petersburg, Russian Federation. P. 1–4. DOI: 10.23919/ICINS51816.2023.10168310.
3. Peshekhonov VG. The outlook for gyroscopy. *Gyroscopy Navig.* 2020;11(3):193–197. DOI: 10.1134/S2075108720030062.
4. Maslov AA, Maslov DA, Merkuriev IV. Nonlinear effects in the dynamics of HRG with flat electrodes. *Gyroscopy Navig.* 2023;14(4):320–327. DOI: 10.1134/S2075108724700044.
5. Zhuravlev VPh, Klimov DM. *Wave Solid-State Gyroscope*. M.: Nauka; 1985. 125 p. (in Russian).
6. Zhuravlev VPh, Klimov DM, Zbanov YuK. *Quartz Hemispherical Resonator (Wave Solid-State Gyroscope)*. M.: Kim L.A.; 2017. 194 p. (in Russian).
7. Zhuravlev VPh. Theoretical foundations of solid-state wave gyroscopes. *Mech. Solids*. 1993;28(3):3–15.
8. Zhuravlev VPh. Global evolution of state of the generalized Foucault pendulum. *Mech. Solids*. 1998;33(6):3–8.
9. Zhuravlev VPh. A controlled Foucault pendulum as a model of a class of free gyros. *Mech. Solids*. 1997;32(6):21–28.
10. Zhuravlev VPh, Lynch DD. Electric model of a hemispherical resonator gyro. *Mech. Solids*. 1995;30(5):10–21.
11. De SK, Aluru NR. Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2006;15(2):355–369. DOI: 10.1109/JMEMS.2006.872227.
12. Rhoads JF, Shaw SW, Turner KL, Moehlis J, DeMartini BE, Zhang W. Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators. *Journal of Sound and Vibration*. 2006;296(4-5):797–829. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.03.009.
13. Maslov AA, Maslov DA, Merkuriev IV. Nonlinear effects in dynamics of cylindrical resonator of wave solid-state gyro with electrostatic control system. *Gyroscopy Navig.* 2015;6:224–229. DOI: 10.1134/S2075108715030104.

14. Maslov DA, Merkuryev IV. Impact of nonlinear properties of electrostatic control sensors on the dynamics of a cylindrical resonator of a wave solid-state gyroscope. *Mech. Solids*. 2021;56(6): 960–979. DOI: 10.3103/S002565442106011X.
15. Maslov DA. Nonlinear dynamics of a wave solid-state gyroscope taking into account the electrical resistance of an oscillation control circuit. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023;19(3):409–435. DOI: 10.20537/nd230602.
16. Lunin BS, Basarab MA, Yurin AV, Chumankin EA. Fused quartz cylindrical resonators for lowcost vibration gyroscopes. In: *Proc. of 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS)*. 28–30 May 2018, St. Petersburg, Russia. P. 1–4. DOI: 10.23919/ICINS.2018.8405896.
17. Lunin BS, Lopatin VM. Silica glass for high-Q mechanical resonators. *Inorg. Mater.* 2020;56: 292–296. DOI: 10.1134/S0020168520030103.
18. Wu X, Xi X, Wu Y, Xiao D. *Cylindrical Vibratory Gyroscope*. Singapore: Springer; 2021. 202 p. DOI: 10.1007/978-981-16-2726-2.
19. Zeng L, Luo Y, Pan Y, Jia Y, Liu J, Tan Z, Yang K, Luo H. Million quality factor cylindrical resonator with improved structural design based on thermoelastic dissipation analysis. *Sensors*. 2020;20(21):6003. DOI: 10.3390/s20216003.
20. Tao Y, Pan Y, Liu J, Jia Y, Yang K, Luo H. A novel method for estimating and balancing the second harmonic error of cylindrical fused silica resonators. *Micromachines*. 2021;12(4):380. DOI: 10.3390/mi12040380.
21. Maslov AA, Maslov DA, Merkuryev IV. Studying stationary oscillation modes of the gyro resonator in the presence of positional and parametric excitations. *Gyroscopy Navig.* 2014;5: 224–228. DOI: 10.1134/S2075108714040099.
22. Zhuravlev VPh, Klimov DM. *Applied Methods in Vibration Theory*. M.: Nauka; 1988. 328 p. (in Russian).
23. Merkuryev IV, Podalkov VV. *Dynamics of Micromechanical and Wave Solid-State Gyroscopes*. M.: Fizmatlit; 2009. 228 p. (in Russian).
24. Maslov AA, Maslov DA, Merkuryev IV. Electrical Balancing of Wave Solid-State Gyroscope with Flat Electrodes. In: *Proc. of 31th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. 2024. P. 313–316.

*Маслов Александр Анатольевич* — окончил «МЭИ» (1977). Кандидат технических наук по специальности «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры» (1984). Доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ». Опубликовал более 30 научных работ. Сфера научных интересов: динамика волновых твердотельных гироскопов, нелинейные колебания, идентификация параметров, гироскопические инклинометры.

Россия, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, стр. 1

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: Maslov954@yandex.ru

AuthorID (eLibrary.Ru): 756992

*Маслов Дмитрий Александрович* — окончил с отличием НИУ «МЭИ» (2015, магистр прикладной математики и информатики). Кандидат технических наук по специальности «Теоретическая механика» (2019). Доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ». Опубликовал более 25 научных работ. Сфера научных интересов: математическое моделирование, асимптотические методы, аналитическая теория возмущений, нелинейные колебания, динамика волновых твердотельных гироскопов.

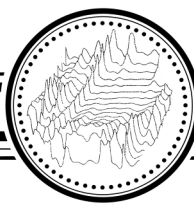
Россия, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, стр. 1

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: MaslovDmA@mpei.ru

ORCID: 0009-0001-6427-2270

AuthorID (eLibrary.Ru): 822799



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 534.121.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003162  
EDN: OXVENZ

### Свободные линейные колебания вязкоупругой сферической оболочки с наполнителем

М. М. Мирсаидов<sup>1</sup>, И. И. Сафаров<sup>2</sup>, М. Х. Тешаев<sup>3</sup>, Н. Р. Элибоев<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет  
«Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Узбекистан

<sup>2</sup>Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан

<sup>3</sup>Бухарский филиал Института математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан  
E-mail: mirsaidov1948@mail.ru, safarov54@mail.ru, muhsin\_5@mail.ru, ✉nurali\_e@mail.ru

Поступила в редакцию 21.11.2024, принята к публикации 19.01.2025,  
опубликована онлайн 29.01.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Цель. Тонкие многослойные оболочки широко применяются в авиастроении, судостроении и машиностроении. В последнее время возрос интерес к динамическому расчету оболочечных конструкций под воздействием различных нагрузок. В данной работе изучается действие движущегося нормального внутреннего давления на вязкоупругую цилиндрическую оболочку. Методы. Вязкоупругая среда, заполняющая сферическую оболочку, имеет значительно меньший мгновенный модуль упругости, чем оболочка. Решение представлено для свободных колебаний вязкоупругой системы «оболочка — наполнитель». Построено аналитическое частотное уравнение в виде трансцендентного уравнения, которое решается численно — методом Мюллера. Результаты. Обнаружено, что при некоторых значениях вязкоупругих и плотностных параметров возникают низкочастотные собственные колебания. Эти колебания представляют собой апериодическое движение, так как мнимая часть собственной частоты велика. Для вязкоупругих механических систем выявлена зависимость коэффициентов демпфирования от физико-механических параметров. Заключение. Построена теория и методы расчета комплексных собственных частот колебаний упругой сферической неоднородности в упругой среде. Проведена классификация таких колебаний на радиальные, крутильные и сфероидальные. Задача сводится к нахождению тех частот, при которых система уравнений движения имеет ненулевые решения в классе бесконечно дифференцируемых функций.

**Ключевые слова:** сферическая оболочка, наполнитель, колебания, частотное уравнение, коэффициент демпфирования.

**Для цитирования:** Мирсаидов М. М., Сафаров И. И., Тешаев М. Х., Элибоев Н. Р. Свободные линейные колебания вязкоупругой сферической оболочки с наполнителем // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 485–496. DOI: 10.18500/0869-6632-003162. EDN: OXVENZ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Free linear vibrations of a viscoelastic spherical shell with filler

M. M. Mirsaidov<sup>1</sup>, I. I. Safarov<sup>2</sup>, M. Kh. Teshaev<sup>3</sup>, N. R. Eliboyev<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup>The National Research University

«Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers», Uzbekistan

<sup>2</sup>Tashkent Chemical-Technological Institute, Uzbekistan

<sup>3</sup>Institute of Mathematics named after V. I. Romanovski AS RUz, Uzbekistan

E-mail: mirsaidov1948@mail.ru, safarov54@mail.ru, muhsin\_5@mail.ru, ✉nurali\_e@mail.ru

Received 21.11.2024, accepted 19.01.2025, available online 29.01.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** *Purpose.* Thin multilayered shells are widely used in aviation, shipbuilding, and mechanical engineering. Recently, interest in the dynamic analysis of shell structures under various load effects has increased. This study examines the effect of moving normal internal pressure on a viscoelastic cylindrical shell. *Methods.* The viscoelastic medium filling the spherical shell has a significantly lower instantaneous modulus of elasticity than the shell itself. The solution is presented for the free vibrations of the viscoelastic system “shell–filler”. An analytical frequency equation in the form of a transcendental equation is derived and solved numerically using the Müller method. *Results.* It has been found that, at certain values of viscoelastic and density parameters, low-frequency natural vibrations occur. These vibrations represent an aperiodic motion since the imaginary part of the natural frequency is large. For viscoelastic mechanical systems, the dependence of damping coefficients on physical and mechanical parameters has been identified. *Conclusion.* A theory and methods for calculating the complex natural frequencies of vibrations of an elastic spherical inhomogeneity in an elastic medium have been developed. A classification of such vibrations into radial, torsional, and spheroidal modes has been carried out. The problem is reduced to finding those frequencies at which the system of motion equations has nonzero solutions in the class of infinitely differentiable functions.

**Keywords:** spherical shell, filler, oscillations, frequency equation, damping coefficient.

**For citation:** Mirsaidov MM, Safarov II, Teshaev MKh, Eliboyev NR. Free linear vibrations of a viscoelastic spherical shell with filler. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):485–496. DOI: 10.18500/0869-6632-003162

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Введение

Тонкие слоистые оболочки широко применяются в авиастроении, судостроении, машиностроении и других областях. Поэтому в последнее время значительно возрос интерес к динамическому расчету оболочечных конструкций при воздействии различных нагрузок [1, 2]. Сферические оболочки с наполнителем применяются в промышленности для хранения различных нефтегазовых веществ [3, 4]. Также Земля может быть рассмотрена как сферическая оболочка с многослойным наполнителем [5].

В работах [6, 7] асимптотическими методами исследуются частоты и формы собственных колебаний сферической и цилиндрической оболочек, взаимодействующих с упругими и жидкими средами. В этих работах получены приближенные простые формулы для вычисления частоты. На основе этих формул получены формы собственных колебаний. В работе [8] рассматриваются собственные колебания тонкостенной сферической оболочки с сжимаемой жидкостью. В этой работе также исследовано влияние физических и геометрических параметров на зависимость собственных частот оболочки, проведен качественный анализ частоты в зависимости от параметров.

В работах [9, 10] исследованы резонансные частоты осесимметричных колебаний полого шара с наполнителем. Для описания уравнений колебаний шара и наполнителя использованы трёхмерные уравнения теории упругости. Задача решается в осесимметричном случае с использованием асимптотических выражений специальных функций Бесселя и Неймана.

В данной работе исследуется задача о собственных колебаниях слоистой сферической оболочки, содержащей вязкоупругую среду. Для сферических тел с наполнителем исследователи получили собственные частоты и соответствующие собственные формы численными методами.

Здесь строится точное аналитическое решение задачи. Получено трансцендентное частотное уравнение, представляющее зависимость комплексной частоты оболочки с заполнителем от различных геометрических и физико-механических параметров.

## 1. Методика

**1.1. Постановка задачи и методики решения.** Системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающие собственные колебания сферической оболочки, контактирующей со средой. Система уравнений сферической оболочки представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_0}{\partial \psi} - b^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla^2 + 2)w - (1 - \nu) \left( \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \phi} - u + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) - \\ - \int_0^t R_E(t - \tau) \bar{V}(\psi, \phi, \tau) d\tau = -\frac{1 - \nu^2}{h} R^2 \frac{X_1}{E_0}, \\ \frac{1}{\sin \phi} \left[ \frac{\partial \Delta_0}{\partial \phi} - b^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla^2 + 2)w \right] + (1 - \nu) \left[ \frac{\partial \Delta_1}{\partial \psi} + \vartheta - \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi} - \\ - \int_0^t R_E(t - \tau) \bar{W}(\psi, \phi, \tau) d\tau = -\frac{1 - \nu^2}{h} R^2 \frac{Y}{E_0}, \\ b^2 [\nabla^2 + 1 - \nu] [\Delta_0 - (\nabla^2 + 2)w] - (1 + \nu) \Delta_0 - \\ - \int_0^t R_E(t - \tau) \bar{U}(\psi, \phi, \tau) d\tau = -\frac{1 - \nu^2}{h} R^2 \frac{Z}{E_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0 = \frac{1}{\sin \psi} \left[ \frac{\partial}{\partial \psi} (u \sin \psi) + \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi} \right] + 2w, \Delta_1 = \frac{1}{2 \sin \psi} \left[ \frac{\partial}{\partial \psi} (\vartheta \sin \psi) - \frac{\partial u}{\partial \phi} \right], \\ \nabla^2 = \frac{1}{\sin \psi} \left[ \frac{\partial}{\partial \psi} (\sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi}) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \\ \bar{V}(\psi, \phi, \tau) = \frac{\partial \Delta_0}{\partial \psi} - b^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla^2 + 2)w - (1 - \nu) \left( \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \phi} - u + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right), \\ \bar{W}(\psi, \phi, \tau) = \frac{1}{\sin \phi} \left[ \frac{\partial \Delta_0}{\partial \phi} - b^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla^2 + 2)w \right] + (1 - \nu) \left[ \frac{\partial \Delta_1}{\partial \psi} + \vartheta - \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi}, \\ \bar{U}(\psi, \phi, \tau) = b^2 [\nabla^2 + 1 - \nu] [\Delta_0 - (\nabla^2 + 2)w] - (1 + \nu) \Delta_0. \end{aligned}$$

Здесь  $X, Y, Z$  — проекции сил инерции и поверхностного усилия на направления  $r, \phi, \psi$  сферической системы координат,  $E_0$  и  $\nu$  — мгновенный модуль упругости и коэффициент Пуассона,  $b^2 = \frac{h^2}{12R^2}$ ,  $R_E(t - \tau)$  — ядро релаксации.

Уравнение движения вязкоупругого заполнителя имеет вид [4, 11–13]:

$$(\lambda_{0c} + 2\mu_{0c}) \text{grad div } \vec{u}_c - \mu_{0c} \text{rot rot } \vec{u}_c - \int_0^t R_{Ec}(t - \tau) \vec{\Delta}_c(r, \theta, \beta, \tau) d\tau = \rho_c \frac{\partial^2 \vec{u}_c}{\partial t^2}, \quad (2)$$



где  $\rho_c$  — плотность заполнителя,  $R_{Ec}(t - \tau)$  — ядро релаксации заполнителя,  $\lambda_{0c}, \mu_{0c}$  — мгновенные модули упругости,  $\vec{u}_c(u_r, u_\phi, u_\psi)$  — вектор перемещений заполнителя,  $\vec{\Delta}_c(r, \phi, \psi, \tau) = (\lambda_0 + 2\mu_0) \text{grad div } \vec{u}_c - \mu_{0c} \text{rot rot } \vec{u}_c$ . В сферической системе координат  $\beta, \theta, r$  уравнения (2) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_c + 2\mu_c)r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial r} - 2\mu_c \left( \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \phi} (\omega_\phi \sin \psi) \right) - \\
 & \quad - E_{c0} \int_0^t R_{Ec}(t - \tau) \Delta_r(\vec{r}, \tau) d\tau - \rho_c r \sin \psi \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \\
 & (\lambda_c + 2\mu_c)r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial \phi} - 2\mu_c \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\phi) \right) - \\
 & \quad - E_{c0} \int_0^t R_{Ec}(t - \tau) \Delta_\phi(\vec{r}, \tau) d\tau - \rho_c r \sin \psi \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = 0, \\
 & (\lambda_c + 2\mu_c)r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} - 2\mu_c \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\phi \sin \psi) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} - \right. \\
 & \quad \left. - E_{c0} \int_0^t R_{Ec}(t - \tau) \Delta_\psi(\vec{r}, \tau) d\tau - \rho_c r \sin \psi \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \psi} \left( \frac{\partial}{\partial r} (u_\psi \sin \psi) + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right), \\
 \omega_\phi &= \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\psi) \right), \\
 \omega_r &= \frac{1}{2r \sin \psi} \left( \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} - \frac{\partial (u_\phi \sin \psi)}{\partial \phi} \right), \\
 \omega_\psi &= \frac{1}{2r \sin \psi} \left( \frac{\partial}{\partial r} (u_\phi \sin \psi) + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right).
 \end{aligned}$$

Уравнения движения оболочки (1) и заполнителя (3) дополняются контактными и граничными условиями. На стыке ( $r = R$ ) заполнителя и оболочки ставятся условия равенства компонент перемещений:

$$u_r = w, \quad u_\phi = \vartheta, \quad u_\psi = u \quad (4)$$

и равенства давлений

$$X = -\sigma_1 - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\sigma_2 - \rho h \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}, \quad Z = -\sigma_3 - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где  $X, Y, Z$  — давления со стороны оболочки на заполнитель.

Для решения интегро-дифференциальных уравнений применяется метод замораживания [14, 15]. Тогда из уравнений (1) и (3) получается система дифференциальных уравнений

с комплексными коэффициентами. Решение уравнений колебания вязкоупругой среды (дифференциальные уравнения в частных производных с комплексными коэффициентами) получается

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\mu_l} \left( \mu_l^2 r \chi + \frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r^2} \right), \\ u_\psi &= \frac{1}{\mu_e r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\mu_l r} \frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r \partial \psi}, \\ u_\phi &= \frac{1}{\mu_e r \sin \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\mu_l r \sin \psi} \frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r \partial \psi}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\varphi, \bar{\psi}, \chi$  — решения скалярных волновых уравнений [13].

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{2\Gamma_{ep}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \bar{\psi} - \frac{1}{2\Gamma_{es}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \chi - \frac{1}{2\Gamma_{es}} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$\nabla^2$  — оператор Лапласа в сферической системе координат,

$$\Gamma_{ep} = 1 - \Gamma_{ep}^c(\omega_R) - i\Gamma_{ep}^c(\omega_R), \quad \Gamma_{es} = 1 - \Gamma_{es}^c(\omega_R) - i\Gamma_{es}^c(\omega_R),$$

$\Gamma_{ep}^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau$ ,  $\Gamma_{es}^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$  — соответственно косинус и синус-образы Фурье ядра релаксации материала. Решение скалярного волнового уравнения (7) относительно потенциала  $\varphi$  ищется в виде

$$\varphi = \Gamma(r) \Upsilon(\psi, \phi) e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в первое волновое уравнение (7), получим следующие дифференциальные уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Gamma}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Gamma}{dr} + (\mu_e^2 - \frac{\lambda_l}{r^2}) \Gamma &= 0, \\ \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda_l Y &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mu_e = \omega/c_p$ ,  $\mu_l = \omega/c_s$ ,  $\lambda_l$  — константа разделения.

Второе дифференциальное уравнение (9) представляет уравнение Лежандра, его решение существует лишь при условии  $\lambda_l = n(n+1)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ). Частные решения образуются из функций типа присоединенных сферических функций 1-го рода:

$$\Upsilon_{kn}^c = P_n^k(\cos \psi) \cos(k\phi), \quad \Upsilon_{kn}^s = P_n^k(\cos \psi) \sin(k\phi),$$

где  $k$  — половина числа узловых меридианов или число узловых межрадиальных плоскостей.

Первое уравнение (9) представляет уравнение Бесселя комплексного аргумента, решение которого имеет следующей вид [3, 4, 16–18]:

$$\Gamma(r) = A_n j_n(\mu_e r) + B_n h_n(\mu_e r), \quad (10)$$

где  $j_n(\mu_e r)$  и  $h_n(\mu_e r)$  — сферические функции Бесселя и Неймана.

Из условия конечности силовых и кинематических параметров при  $r = 0$  функция Неймана превращается в нуль. Тогда решение (10) принимает вид  $\Gamma(r) = A_n j_n(\mu_e r)$ . Сферические функции Бесселя связаны с цилиндрическими функциями формулой

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z). \quad (11)$$

На основе выше приведённого решения остальные уравнения (7) принимают следующий вид:

$$\varphi = [A_n j_n(\mu_e r)] \Upsilon^c(\psi, \phi) e^{i\omega t}, \quad \bar{\psi} = [B_n j_n(\mu_l r)] \Upsilon^c(\psi, \phi) e^{i\omega t}, \quad \chi = [C_n j_n(\mu_l r)] \Upsilon^c(\psi, \phi) e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Учитывая (4) и (12), получим выражения для компонент вектора перемещений:

$$u_r = a_0 Y^c, \quad u_\psi = a_1 \frac{\partial}{\partial \psi} Y^c - a_2 \frac{k}{\sin \psi} Y^s, \quad u_\phi = a_2 \frac{\partial}{\partial \psi} Y^c - a_1 \frac{k}{\sin \psi} Y^s. \quad (13)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\bar{\mu}_e} \left[ A_n \frac{\partial}{\partial r} j_n(\mu_e r) \right] + \frac{N}{\bar{\mu}_l r} [C_n j_n(\mu_l r)], \\ a_1 &= \frac{1}{\bar{\mu}_e r} [A_n j_n(\mu_e r)] + \frac{1}{\bar{\mu}_l r} \left[ C_n \frac{\partial}{\partial r} [r j_n(\mu_l r)] \right], \\ a_2 &= [B_n j_n(\mu_l r)], \quad Y^s = \sin k\phi P_n^k(\cos \psi), \quad N = n(n+1). \end{aligned} \quad (14)$$

Для нахождения собственной частоты рассмотренной системы «оболочка — заполнитель» составим частотное уравнение. Для удовлетворения граничных условий (5) нам потребуются выражения на сферической поверхности. Согласно закону Гука,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= b_0 \Upsilon^c(z), \quad \sigma_{r\psi} = b_1 \frac{\partial}{\partial \psi} \Upsilon^c(z) - b_2 \frac{k}{\sin \psi} \Upsilon^s(z), \\ \sigma_{r\phi} &= -b_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \Upsilon^c(z) - b_1 \frac{k}{\sin \psi} \Upsilon^s(z), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= \lambda_{0c} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_0) - N \frac{a_1}{r} \right] + 2\mu_{0c} \frac{\partial a_0}{\partial r}, \\ b_1 &= \mu_{0c} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_1}{r} \right) + \frac{a_0}{r} \right], \\ b_2 &= \mu_{0c} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_1}{r} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, подставляем найденные перемещения и напряжения в граничные условия (4) и (5), тогда получим следующую систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (N-1+\nu-K(\omega_R)\omega^2)a_1(R) - [b^2(N-2)+\nu+1]a_0(R) + \frac{K(\omega_R)}{\rho h}b_1(R) &= 0, \\ \left[ \frac{1}{2}(N-2)(1-\nu) - K(\omega_R) \right] + \frac{K(\omega_R)}{\rho h}b_2(R) &= 0, \\ N[b^2(N-1+\nu)+1+\nu]a_1(R) - [b^2(N-1+\nu)N+2(1+\nu)-K(\omega_R)\omega^2] - \\ &\quad - \frac{K(\omega_R)}{\rho h}b_0(R) = 0, \\ b_1(R_0) &= 0, \\ b_2(R_0) &= 0, \\ b_0(R_0) + \rho_0 R_0 \omega^2 \Delta_n(R_0) a_0(R_0) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $K(\omega_R) = (1-\nu)\rho R/\bar{E}$ ,  $\Delta_n(R_0) = [n - \bar{\mu}_c R_0 j_{n+1}(\bar{\mu} R_0)/j_n(\bar{\mu} R_0)]$ .

Однородные алгебраические уравнения (16) позволяют определить комплексные собственные частоты сферической оболочки с заполнителем. Можно выделить два типа колебаний:  $(a_0, a_1, b_0, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$ . Первый из них характеризуется перемещениями без компонент вращения:  $A_1, A_2, C_1, C_{20} \neq 0, A_1, A_2, C_1, C_{20} \neq 0$ . Соответствующее частотное уравнение получается из 1-го, 3-го, 4-го и 6-го уравнения (16). Чисто радиальным колебаниям сферы соответствуют значения  $k = n = 0$ . При  $k = 0$  и  $n = 1$  происходит движение системы как жесткого тела. Случаю  $k = 0, n = 2$  соответствует изменение формы из вытянутого сфероида. Частотное уравнение свободных колебаний сферы с вязкоупругим заполнителем получается из (16):

$$\begin{aligned} & [(N - \rho_c^\bullet + \rho_c^{\bullet 2}) - \rho_c^\bullet \mu_l^\bullet \alpha - (1 + \rho_c^\bullet) \mu_e^\bullet \beta - \mu_e^\bullet \mu_l^\bullet \alpha \beta] \lambda^2 + \\ & + [NL_2 + \rho_c^\bullet (L_3(2N - 1) \bar{\chi} E_c^\bullet) - (r_1 + \bar{\chi} E_c^\bullet) \rho_c^\bullet \mu_l^\bullet \alpha + (-L_2 + \rho_c^\bullet (r_n - 2 \bar{\chi} E_c^\bullet)) \mu_e^\bullet \beta - L \mu_l^\bullet \alpha \beta] \lambda + \\ & + NL_1 - L_1 \mu_e^\bullet \beta - L_1 \mu_e^\bullet \mu_l^\bullet \alpha \beta = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{j'_n(\mu_l^\bullet)}{j_n(\mu_l^\bullet)}, \quad \beta = \frac{j'_n(\mu_e^\bullet)}{j_n(\mu_e^\bullet)}, \quad \mu_l^\bullet = \mu_l R, \quad \mu_e^\bullet = \mu_e R, \quad \lambda = k \omega^2, \\ \mu_l &= \frac{\omega}{c_l}, \quad \mu_e = \frac{\omega}{c_e}, \quad k = (1 - \nu^2) \rho R^2 / \bar{E}, \quad \bar{c}_l = \sqrt{\frac{E_{0c}}{2(1 + \nu_c) \rho_c}} \Gamma_k, \\ \bar{c}_l &= \sqrt{\frac{E_{0c}(1 - \nu_c)}{2(1 + \nu_c) \rho_c}} \Gamma_k, \quad E_c^\bullet = \frac{\bar{E}_c}{E h_\bullet}, \quad \rho_c^\bullet = \frac{\rho_c}{\rho h_\bullet}, \quad h_\bullet = \frac{h}{R}, \quad \bar{\chi} = \frac{1 - \nu^2}{1 + \nu^2}, \\ L_1 &= r_1 r_n - N r_2 r_n + \bar{\chi} \bar{E}_c^\bullet (-r_n - 2r_1 + N r_3 + N r_2) + \bar{\chi}^2 E_c^{\bullet 2} (-2 - N), \\ L_2 &= -r_n - r_1 + 3 \bar{\chi} E_c^\bullet, \quad L_3 = -r_1 - N r_2 - N r_3, \quad r_1 = N - 1 + \nu, \\ r_2 &= b^2 (N - 2) + 1 + \nu, \quad r_3 = b^2 r_1 + 1 + \nu, \quad r_n = b^2 N r_1 + 2(1 + \nu). \end{aligned}$$

$\rho$  — плотность оболочки,  $\rho_c$  — плотность заполнителя,  $h$  — толщина оболочки,  $\bar{E} = E_0 \Gamma_k$ ,  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона оболочки.

При отсутствии заполнителя уравнение (17) принимает следующий вид:

$$(N - \rho_c^\bullet + \rho_c^{\bullet 2}) \lambda_0^2 + (NL_2^0 - L_2^0) \lambda_0 + NL_1^0 = 0, \quad \lambda_0 = k \omega^2 \quad (18)$$

В уравнении (18) коэффициенты зависят от реальной части частоты. Поэтому алгебраическое уравнение (18) для вязкоупругих оболочек и заполнителя превращается в трансцендентное уравнение.

Уравнение (17) решается численно — методом Мюллера.

## 2. Результаты и анализ

Трансцендентное уравнение решается численно — методом Мюллера [15, 16], а также с использованием программного комплекса «MAPLE-18». Вязкоупругие свойства материала описываются с помощью трехпараметрического ядра релаксации [17]:

$$R_{\mu j}(t) = R_{\lambda j} = \frac{A_j e^{-\beta_j t}}{t^{1-\alpha_j}}, \quad j = 1, 2.$$

При конкретных расчетах приняты следующие параметры материала безграничной вязкоупругой среды [13, 14, 18]:  $n = 2, h = 10^4 \text{ m}, \nu_c = 0.40, A = 0.048; \beta = 0.05; \alpha = 0.10, h = 0.00165, \lambda_2 = 6, E_{0c} = 4, \rho = 7.8 \cdot 10^3, \rho = 3.2 \cdot 10^3, E_0 = 40, \nu = 0.25, R = 2 \cdot 10^{-4}$ . Корни частотного уравнения (18),

Таблица. Корни частотного уравнения при различных значениях  $v_c$

Table. Roots of the frequency equation at different values of  $v_c$

Номер корня	0	0.25	0.35	0.40
1	0.662	0.816	0.85	0.8733
2	1.8909	1.9285	1.9391	1.9479
3	2.9303	2.9539	2.9606	2.9656
4	3.0485	3.9658	3.9707	3.9744
5	4.959	4.9728	4.9607	4.9776
6	5.966	5.9774	5.0806	5.983

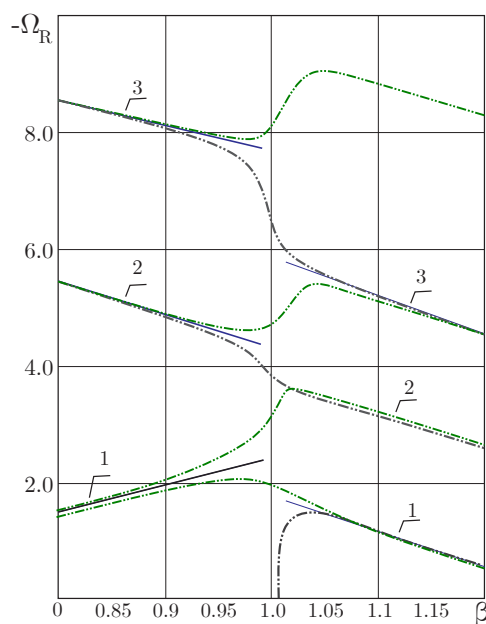


Рис. 1. Изменение собственной частоты крутильных колебаний от отношений скоростей поперечных волн  $\beta = \frac{c_{s2}}{c_{s1}}$  при: 1 –  $\rho^* = 0.8$ , 2 –  $\rho^* = 0.85$ , 3 –  $\rho^* = 0.98$

Fig. 1. Variation of the natural frequency of torsional oscillations from the ratio of transverse wave velocities  $\beta = \frac{c_{s2}}{c_{s1}}$  at: 1 –  $\rho^* = 0.8$ , 2 –  $\rho^* = 0.85$ , 3 –  $\rho^* = 0.98$

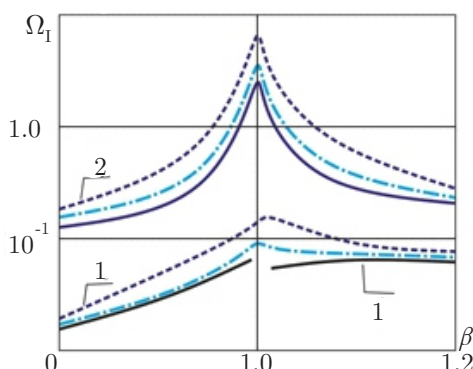


Рис. 2. Зависимость коэффициентов демпфирования от отношений скоростей поперечных волн  $\beta = c_{s2}/c_{s1}$

Fig. 2. Dependence of damping coefficients on transverse wave velocity ratios  $\beta = c_{s2}/c_{s1}$

описывающие колебания вязкоупругой сферической оболочки, приведены в Таблице. При определении реальных и мнимых частей частоты точность определения метода  $10^{-10}$ .

Также полученные числовые результаты показаны на рис. 1 и рис. 2. На рис. 1 приведено изменение собственной частоты крутильных колебаний от отношений скоростей поперечных волн  $\beta = c_{s2}/c_{s1}$  при: 1 –  $\rho^* = 0.8$ , 2 –  $\rho^* = 0.85$ , 3 –  $\rho^* = 0.98$ . Видно, что при  $\beta = c_{s2}/c_{s1} = 1$  происходит разрыв в собственных частотах. На рис. 2 приведена зависимость коэффициентов демпфирования от отношений скоростей поперечных волн  $\beta = c_{s2}/c_{s1}$ . Было обосновано, что управление резонансными явлениями в процессе вибрации может осуществляться за счет рассеивания энергии.

Было обнаружено, что диссипация энергии принципиально различна для диссипативно-однородных и неоднородных механических систем. При расчете напряжений и перемещений по формулам (13), (15) суммирование производилось до тех пор, пока отношение текущего члена к текущей частной сумме не станет меньше  $10^{-10}$ . Для обеспечения сходимости рядов (13) и (15) каждый раз проводился численный эксперимент.

Установлено, что для обеспечения точности расчета при вычислении перемещений и напряжений необходимо удерживать 11–16 членов ряда. В этом случае ошибка округления составляет до 1% : 1 –  $\rho_2/\rho_1 = 0.02$ ,  $\bar{C} = 0.5$ ,  $a = 1$ ; 2 –  $\rho_2/\rho_1 = 50$ ,  $\bar{C} = 0.5$ ,  $A1 = 0.01$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\alpha = 0.1$ .

Низкочастотные апериодические колебания быстро затухают со временем. Этот процесс требует глубокого анализа, так как при низкочастотных колебаниях (реальные и мнимые части собственной частоты отличаются от нуля)

могут возникать резонансные явления. Предполагается, что мнимые части собственных частот при апериодических колебаниях близки к нулю. В этом случае возникают очень большие амплитуды перемещений и напряжений. Если реальные части собственной частоты равны нулю, а мнимые части отличны от нуля и отрицательны, то колебания затухают по экспоненциальному закону. Найденные реальные части собственной частоты описывают резонансные частоты рассматриваемой механической системы, а мнимые части характеризуют затухание колебаний механической системы в целом. Обнаруженное явление имеет большое значение для исследования диссипации энергии в виброзащитных системах.

### Заключение

1. Построены теория и методы расчёта комплексных собственных частот колебаний упругих сферических неоднородностей в упругой среде. Проведена классификация таких колебаний на радиальные, крутильные и сфероидальные. Задача сводится к нахождению частот  $\Omega = \Omega_R + i\Omega_i$ , где  $\Omega_R$  — реальная, а  $\Omega_i$  — мнимая часть комплексных собственных частот, при которых системы уравнений движения имеют ненулевое решение в классе бесконечно дифференцируемых функций.
2. Обнаружено, что при некоторых значениях вязкоупругих плотностных параметров возникают низкочастотные собственные колебания. Эти колебания являются, по существу, некоторым апериодическим движением, поскольку мнимая часть собственной частоты значительна.

### Список литературы

1. Пожуев В. И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. № 1. С. 44–48.
2. Safarov I. I., Teshaev M. Kh. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems // Theor. Appl. Mech. 2024. Vol. 51, no. 1. P. 1–12. DOI: 10.2298/TAM220510007S.
3. Durdiev D. Q., Safarov I. I., Teshaev M. Kh. Propagation of waves in a fluid in a thin elastic cylindrical shell // WSEAS Transactions on Fluid Mechanics. 2024. Vol. 19. P. 113–119. DOI: 10.37394/232013.2024.19.11.
4. Сафаров И. И., Тешаев М. Х. Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2023. № 83. С. 166–179.
5. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочек и жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 103 с.
6. Украинец В. Н., Гирнис С. Р. Математическое моделирование динамики подкреплённых двухслойными оболочками тоннелей при действии транспортных нагрузок. Павлодар: Кереку, 2018. 116 с.
7. Alekseyeva L. A., Ukrainets V. N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // Int. Appl. Mech. 2009. Vol. 45. P. 981–990. DOI: 10.1007/s10778-010-0238-z.
8. Быков А. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н., Шестаков А. П. Ударно-волновой метод контроля процесса устранения трещин в железобетонных конструкциях // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 35–41.
9. Сафаров И. И., Тешаев М. Х. Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 63–73. DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
10. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.

11. *Fedorov A. Yu., Matveenkov V. P., Shardakov I. N.* Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials // International Journal of Civil Engineering and Technology. 2018. Vol. 9, no. 8. P. 1062–1075.
12. *Amabili M.* Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // J. Sound Vib. 1996. Vol. 191, no. 5. P. 757–780. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0154.
13. *Karimov K., Turakhodjaev N., Akhmedov A., Chorshanbiev Sh.* Mathematical model for producing machine parts // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 264, no. 7. P. 04078. DOI: 10.1051/e3sconf/202126404078.
14. *Mirsaidov M. M., Sultanov T. Z.* Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures // Soil Mech. Found. Eng. 2013. Vol. 49. P. 250–256. DOI: 10.1007/s11204-013-9198-8.
15. *Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
16. *Fedorov A. Yu., Matveenkov V. P., Shardakov I. N.* Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials // International Journal of Civil Engineering and Technology. 2018. Vol. 9, no. 8. P. 1062–1075.
17. *Быков А. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н., Шестаков А. П.* Ударно-волновой метод контроля процесса устранения трещин в железобетонных конструкциях // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 35–41.
18. *Karimov K., Akhmedov A., Karimova A.* Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2612. P. 030014. DOI: 10.1063/5.0116891.

## References

1. Pozhuev VI. Action of a mobile load on a cylindrical shell in an elastic medium. Construction Mechanics and Design of Structures. 1978;(1):44–48.
2. Safarov II, Teshayev MKh. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems. Theor. Appl. Mech. 2024;51(1):1–12. DOI: 10.2298/TAM220510007S.
3. Durdiyev DQ, Safarov II, Teshayev MKh. Propagation of waves in a fluid in a thin elastic cylindrical shell. WSEAS Transactions on Fluid Mechanics. 2024;19:113–119. DOI: 10.37394/232013.2024.19.11.
4. Safarov II, Teshayev MKh. Nonstationary motions of spherical shells in a viscoelastic medium. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2023;83:166–179.
5. Gontkevich VS. Natural Oscillations of Shells and Fluids. Kyiv: Naukova Dumka; 1964. 103 p.
6. Ukrainets VN, Girnis SN. Mathematical Modeling of the Dynamics of Tunnels Reinforced with Two-Layer Shells under the Action of Transport Loads. Pavlodar: Kereku; 2018. 116 p.
7. Alekseyeva LA, Ukrainets VN. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads. Int. Appl. Mech. 2009;45:981–990. DOI: 10.1007/s10778-010-0238-z.
8. Bykov AA, Matveenkov VP, Shardakov IN, Shestakov AP. Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures. Mech. Solids. 2017;52:378–383. DOI: 10.3103/S0025654417040033.
9. Safarov II, Teshayev MK. Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1):63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
10. Adamov AA, Matveenkov VP, Trufanov NA, Shardakov IN. Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: UB RAS; 2003. 411 p.



11. Fedorov AYu, Matveenkov VP, Shardakov IN. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials. *International Journal of Civil Engineering and Technology*. 2018;9(8):1062–1075.
12. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *J. Sound Vib.* 1996;191(5): 757–780. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0154.
13. Karimov K, Turakhodjaev N, Akhmedov A, Chorshanbiev Sh. Mathematical model for producing machine parts. *E3S Web of Conferences*. 2021;264(7):04078. DOI: 10.1051/e3sconf/202126404078.
14. Mirsaidov MM, Sultanov TZ. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures. *Soil Mech. Found. Eng.* 2013;49:250–256. DOI: 10.1007/s11204-013-9198-8.
15. Adamov AA, Matveenkov VP, Trufanov NA, Shardakov IN. *Methods of Applied Viscoelasticity*. Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; 2003. 411 p.
16. Fedorov AYu, Matveenkov VP, Shardakov IN. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials. *International Journal of Civil Engineering and Technology*. 2018;9(8):1062–1075.
17. Bykov AA, Matveenkov VP, Shardakov IN, Shestakov AP. Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures. *Mech. Solids*. 2017;52(4):378–383. DOI: 10.18500/0869-6632-00316210.3103/S0025654417040033.
18. Karimov K, Akhmedov A, Karimova A. Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms. *AIP Conference Proceedings*. 2023;2612:030014. DOI: 10.1063/5.0116891.



*Мирсаидов Мирзиёд Мирсаидович* — родился в Юкориичирчикском районе Ташкентской области Узбекской ССР (1948). Окончил Ташкентский политехнический институт по специальности «Инженер-механик» (1971) и Ташкентский государственный университет по специальности «Математик» (1986). Доктор технических наук (1987), профессор (1991), академик Академии наук Республики Узбекистан (2017). Заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Научный руководитель 30 кандидатских (PhD) и 6 докторских (DSc) диссертаций. Автор более 200 научных работ в отечественных и зарубежных научных журналах, более 250 — в сборниках материалов зарубежных и республиканских научных конференций, более 15 монографий, 9 учебников и 14 учебных пособий.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39  
 Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт  
 инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»  
 E-mail: mirsaidov1948@mail.ru  
 ORCID: 0000-0002-8907-7869  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 980333



*Сафаров Исмоил Иброхимович* — родился в Вабкентском районе Бухарской области Узбекистана (1954). Окончил Ташкентский государственный университет (1977). Доктор физико-математических (1991), профессор (1995). Заведующий кафедрой высшей математики Ташкентского химико-технологического института. Научный руководитель 25 кандидатских (PhD) и 4 докторских (DSc) диссертаций. Победитель республиканского конкурса «Лучший научный руководитель года» (2004). Научные интересы: теория вязкоупругости, теория распространения волн, теория колебаний, теория устойчивости. Автор более 150 научных работ в отечественных и зарубежных научных журналах, более 200 — в сборниках материалов зарубежных и республиканских научных конференций, 20 монографий, 3 учебников и 4 учебных пособий.

Узбекистан, Ташкент 100011, улица Навои, 32  
 Ташкентский химико-технологический институт  
 E-mail: safarov54@mail.ru  
 ORCID: 0000-0003-0983-8451  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 820536



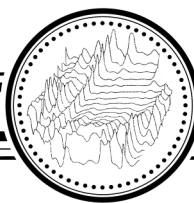
*Тешаев Мухсин Худойбердиевич* — родился в селе Гончи Каганского района Бухарской области Узбекистана (1961). Окончил Ташкентский государственный университет по специальности «Механика» (1983). Доктор физико-математических наук (2019). Работает в Бухарском отделении института Математики имени В. И. Романовского в должности главного научного сотрудника. Научный руководитель 7 кандидатских (PhD) диссертаций. Область научных интересов: теоретическая механика, а также механика деформируемого твердого тела. Автор более 120 научных работ в отечественных и зарубежных научных журналах, более 150 — в сборниках материалов зарубежных и республиканских научных конференций, 12 монографий, 1 учебника и 1 учебного пособия.

Узбекистан, Бухара 705018, улица М. Икбол, 11  
Бухарское отделение Института Математики имени В. И. Романовского АН Р Уз  
E-mail: muhsin\_5@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-1893-7902  
AuthorID (eLibrary.Ru): 587439



*Элибоев Нурали Ражабалиевич* — родился в Нуротинском районе Навоийской области Узбекистана (1990). Окончил факультет механики и математики Национального университета Узбекистана по направлению «Математика» (2016). С 2016 года работает на кафедре высшей математики Ташкентского химико-технологического института, с 2021 года — в должности старшего преподавателя. Научные интересы — механика деформируемых твёрдых тел. Автор научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, Ташкент 100011, улица Навои, 32  
Ташкентский химико-технологический институт  
E-mail: nurali\_e@mail.ru  
ORCID: 0009-0009-2429-9514



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003168  
EDN: RGVGLG

**Волоконно-оптический гироскоп  
с системой снижения шума в выходном сигнале:  
влияние параметров системы на шумоподавление**

*Д. М. Спиридонов<sup>1,2</sup>, Т. Е. Вадивасова<sup>1</sup>, Д. В. Обухович<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>2</sup>ООО НПК «Оптолинк», Саратов, Россия

E-mail: ✉ spiridonov\_d\_m@mail.ru, vadivasovate@yandex.ru, obuhovichdv@mail.ru

Поступила в редакцию 22.01.2025, принята к публикации 26.02.2025,  
опубликована онлайн 7.03.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Цель настоящей работы заключается в определении оптимальных параметров согласования сигналов измерительных каналов системы снижения шума выходного сигнала волоконно-оптического гироскопа. **Методы.** В работе анализируется схема волоконно-оптического гироскопа с системой снижения уровня шума выходного сигнала на основе вычитания сигнала опорного измерительного канала, содержащего шум интенсивности источника оптического излучения, из сигнала основного измерительного канала, содержащего полезный информационный сигнал и шумовую составляющую. Определено четыре условия согласования сигналов, невыполнение которых может привести к снижению эффективности шумоподавления или увеличению уровня шума. Для каждого из рассматриваемых условий определены параметры системы снижения шума и выведены математические зависимости их влияния на уровень спектральной плотности шума в выходном сигнале гироскопа, проведено математическое моделирование в широком диапазоне изменения рассматриваемых параметров. Для подтверждения полученных результатов проведена компьютерная симуляция работы цифрового волоконно-оптического гироскопа с замкнутым контуром обратной связи по измерению угловой скорости и системой снижения шума выходного сигнала в условиях варьирования параметров системы снижения уровня шума. **Результаты.** Для каждого рассматриваемого параметра получены форма и степень влияния на уровень шума, а также определено оптимальное значение каждого параметра, при котором наблюдается минимальное значение спектральной плотности шума в выходном сигнале. **Заключение.** Проведенное исследование подтверждает правильность вывода аналитических выражений, описывающих формирование шумовой составляющей выходного сигнала волоконно-оптического гироскопа с системой снижения уровня шума в условиях неполного согласования сигналов основного и опорного измерительных каналов. Получена количественная оценка требований к точности этого согласования по таким параметрам, как согласование во времени, согласование по интенсивности сигнала, по полосе пропускания и по состоянию поляризации оптического излучения.

**Ключевые слова:** волоконно-оптический гироскоп, шум выходного сигнала волоконно-оптического гироскопа, компенсация шума, шумоподавление, математическая модель, корреляция.

**Для цитирования:** Спиридонов Д. М., Вадивасова Т. Е., Обухович Д. В. Волоконно-оптический гироскоп с системой снижения шума в выходном сигнале: влияние параметров системы на шумоподавление // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 497–512. DOI: 10.18500/0869-6632-003168. EDN: RGVGLG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Fiber optic gyroscope with output signal noise reduction system: effect of system parameters on noise reduction

D. M. Spiridonov<sup>1,2</sup>✉, T. E. Vadivasova<sup>1</sup>, D. V. Obukhovich<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

<sup>2</sup>RPC "Optolink", Saratov, Russia

E-mail: ✉spiridonov\_d\_m@mail.ru, vadivasovate@yandex.ru, obukhovichdv@mail.ru

Received 22.01.2025, accepted 26.02.2025, available online 7.03.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The purpose of this work is to determine the optimal parameters for matching the signals of the measuring channels of a fiber-optic gyroscope with an output signal noise reduction system. *Methods.* The paper analyzes the circuit of a fiber-optic gyroscope with an output signal noise reduction system based on subtracting the signal of the reference measuring channel containing the intensity noise of the optical radiation source from the signal of the main measuring channel containing the useful information signal and the noise component. Four signal matching conditions are defined, failure to meet which can lead to a decrease in the noise suppression efficiency or an increase in the noise level. For each of the conditions under consideration, the parameters of the noise reduction system are determined and mathematical expressions are derived for the dependence of their influence on the level of spectral density of noise in the output signal of the gyroscope, mathematical modeling is carried out in a wide range of variation of the parameters under consideration. To confirm the obtained results, a computer simulation of the operation of a digital fiber-optic gyroscope with a closed feedback loop for measuring angular velocity and an output signal noise reduction system was carried out under conditions of varying the parameters of the noise reduction system. *Results.* For each parameter under consideration, the shape and degree of influence on the noise level were obtained, and the optimal value of each parameter was determined, at which the minimum value of the spectral density of noise in the output signal was observed. *Conclusion.* The conducted study confirms the correctness of the derivation of analytical expressions describing the formation of the noise component of the output signal of a fiber-optic gyroscope with a noise reduction system under conditions of incomplete matching of the signals of the main and reference measuring channels. A quantitative assessment of the requirements for the accuracy of this matching was obtained for such parameters as: time matching, matching by signal intensity, by bandwidth and by the state of polarization of optical radiation.

**Keywords:** fiber optic gyroscope, output noise of fiber optic gyroscope, noise compensation, noise suppression, mathematical model, correlation.

**For citation:** Spiridonov DM, Vadivasova TE, Obukhovich DV. Fiber optic gyroscope with output signal noise reduction system: effect of system parameters on noise reduction. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):497–512. DOI: 10.18500/0869-6632-003168

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Волоконно-оптический гироскоп (ВОГ) на современном уровне развития техники является одним из основных и наиболее перспективных с точки зрения дальнейшего улучшения точностных характеристик, видов датчиков угловой скорости, применяемых в системах ориентации, навигации и стабилизации подвижных объектов [1–3]. Задача уменьшения шумовой составляющей в выходном сигнале ВОГ является одной из приоритетных задач по повышению точностных характеристик изделий, в которых они применяются. Как известно, порог чувствительности ВОГ и долговременная стабильность нулевого сигнала ВОГ в значительной степени зависят от его конструктивных характеристик — длины и диаметра волоконного контура (ВК) интерферометра Саньяка, типа укладки волокна в контур и так далее, а также свойств оптических элементов схемы: ширины спектра источника излучения, отсутствия внутренних дефектов, низкого уровня  $h$  — параметра волокна [4] — и качества электронной элементной базы — собственных шумов операционных усилителей, аналого-цифровых преобразователей и так далее. Наиболее оптимальными по сочетанию этих параметров при современном уровне технологий являются ВОГ

Спиридонов Д. М., Вадивасова Т. Е., Обухович Д. В.  
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 4

с длиной контура 1000...2000 м при диаметре ВК 100...150 мм, намотанные квадрупольным способом из волокна, сохраняющего состояние поляризации, с широкополосным источником оптического излучения: суперлюминисцентным диодом или эрбиевым суперлюминисцентным волоконным источником большой выходной мощности. Анализ технической документации на серийно выпускаемые ВОГ показывает, что в зависимости от перечисленных выше параметров и особенностей, а также применения нестандартных конструктивных, схмотехнических или алгоритмических подходов конкретные значения таких параметров, как спектральная плотность шума (СПШ), случайная составляющая (долговременная стабильность) нулевого сигнала (НС) в среднем находятся в диапазонах значений: СПШ —  $0.1...0.03$  (°/ч)/√Гц, случайная составляющая НС в диапазоне рабочих температур (три среднеквадратических отклонения при времени осреднения 100 с) —  $0.06...0.15$  °/ч. В работах [4, 5] рассмотрены основные источники шума в ВОГ и определен источник, вносящий наибольший вклад в результирующий шум выходного сигнала ВОГ. Различные методы уменьшения влияния этого источника шума представлены в работах [6, 7]. В работах [8, 9] были показаны результаты математического моделирования, а также результаты натурных испытаний макета ВОГ с системой снижения уровня шума в выходном сигнале. Данная система основана на вычитании сигнала опорного измерительного канала, содержащего только шумовую составляющую из сигнала основного измерительного канала, содержащего как полезную информационную, так и шумовую составляющие. Было показано, что применение данного метода позволяет понизить уровень спектральной плотности шума выходного сигнала ВОГ приблизительно в два раза. В абсолютных величинах применение данной системы позволило достигнуть значений СПШ на уровне  $0.02$  (°/ч)/√Гц, а также улучшить показатель случайной составляющей НС при постоянной температуре [9]. В данной работе определены причины, приводящие к ухудшению работы системы снижения шума при изменении параметров. Получены математические выражения, описывающие зависимость СПШ выходного сигнала ВОГ от параметров сигналов измерительных каналов. Проведено математическое моделирование, позволившее получить количественные оценки влияния различных параметров на эффективность работы системы снижения шума.

### 1. Обобщенное аналитическое математическое выражение для спектральной плотности шумовой компоненты угловой скорости

К фундаментальным источникам шума, вносящим основной вклад в шумовую составляющую выходного сигнала волоконно-оптического гироскопа, относятся: 1 — дробовый шум фототока, 2 — дробовый шум темнового тока фотодиода, 3 — тепловой шум нагрузочного сопротивления фотодиода, 4 — шум интенсивности источника оптического излучения. Спектральные плотности шумового тока этих источников описываются выражениями (1)–(4) [4, 5, 10]:

$$i_{n1} = \sqrt{e\eta P_0}, \quad (1)$$

$$i_{n2} = \sqrt{e i_d}, \quad (2)$$

$$i_{n3} = \sqrt{\frac{4kT}{R}}, \quad (3)$$

$$i_{n4} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2K_f c \Delta \lambda} \eta P_0}, \quad (4)$$

где  $i_n$  — спектральная плотность шума, определяемая как корень из дисперсии в ограниченной полосе частот и приведенной к этой полосе частот [11, 12], А/√Гц;  $e$  — заряд электрона, Кл;

$\eta$  — эффективность (токовая чувствительность) фотодиода, (0.93 А/Вт);  $P_0$  — мощность оптического излучения, падающего на фотодиод при нулевой разности фаз встречных световых волн ( $88 \cdot 10^{-6}$  Вт);  $i_d$  — темновой ток фотодиода, ( $20 \cdot 10^{-9}$  А);  $k$  — постоянная Больцмана, Дж/К;  $T$  — температура окружающей среды, (293 К);  $R$  — сопротивление резистора преобразователя ток-напряжение, (5000 Ом);  $\lambda$  — средняя длина волны оптического излучения, ( $1565 \cdot 10^{-9}$  м);  $c$  — скорость света в вакууме, м/с;  $K_f$  — коэффициент формы спектра оптического излучения [13], (2);  $\Delta\lambda$  — ширина спектра излучения, ( $35 \cdot 10^{-9}$  м). Численные значения параметров, приведенные в скобках и использованные при дальнейших расчетах, соответствуют значениям параметров в работе [9].

Результирующее выражение шумовой составляющей выходного сигнала ВОГ, построенного по схеме так называемой «минимальной конфигурации» с учетом (1)–(4), имеет вид:

$$\delta\omega_n = M \frac{\sqrt{i_{n1}^2 \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) + i_{n2}^2 + i_{n3}^2 + i_{n4}^2 \frac{1}{4}(1 + \cos \varphi)^2}}{\eta \frac{1}{2} P_0 \sin \varphi}, \quad (5)$$

где  $\delta\omega_n$  — СПШ угловой скорости, (рад/с)/√Гц;  $M = \frac{\sqrt{2}\lambda c}{2\pi DL}$  — величина, обратная к оптическому масштабному коэффициенту эффекта Саньяка, рад/с;  $D$  — диаметр кольцевого многовиткового волоконного контура, (0.135 м);  $L$  — длина волоконного контура, (1070 м);  $\varphi$  — разность фаз встречных световых волн, рад.

Множитель в первом и четвертом слагаемых выражения (5) описывает зависимость мощности падающего на фотодиод излучения от разности фаз  $\varphi$  встречных световых волн в интерферометре Саньяка. Знаменатель выражения (5) — функция чувствительности выходного сигнала ВОГ от мощности оптического излучения  $P_0$  и разности фаз  $\varphi$  встречных световых волн. Напомним, что в современных ВОГ с вспомогательной фазовой модуляцией и замкнутым контуром обратной связи по измерению угловой скорости  $\varphi$  соответствует глубине вспомогательной фазовой модуляции и, как правило, равно  $\pi/2$ .

Численный анализ выражения (5) и отдельных его составляющих, проведенный в работе [10], показывает, что увеличение мощности оптического излучения  $P_0$  в диапазоне от 5 до 50 мкВт приводит к значительному снижению уровня шума выходного сигнала. В то же время дальнейшее уменьшение шума при росте мощности излучения практически отсутствует, так как ограничено вкладом шума интенсивности источника излучения, не зависящего от мощности  $P_0$ , в результирующий шум.

В работах [8,9] рассмотрен метод снижения уровня шума в выходном сигнале ВОГ, основанный на вычитании шума интенсивности источника оптического излучения из полезного сигнала. Для этого в схему ВОГ вводится дополнительный измерительный канал, предназначенный для измерения шума интенсивности источника оптического излучения. Сигнал, измеренный этим каналом, после определенной цифровой обработки вычитается из основного информационного сигнала ВОГ. На рис. 1 представлена функциональная блок-схема ВОГ со схемой снижения шума, включающая основной измерительный канал (main measuring channel, ИК1), выполненный по схеме интерферометра Саньяка, выходной сигнал которого включает как полезную составляющую, содержащую информацию об измеренной угловой скорости, так и шумовую составляющую, и дополнительный, опорный, измерительный канал (reference measuring channel, ИК2), выходной сигнал которого содержит только шумовую составляющую.

Как видно из рис. 1, оба измерительных канала имеют общий источник оптического излучения — суперлюминесцентный диод (СЛД), который, согласно [5, 10], вносит основной вклад в результирующий шум выходного сигнала ВОГ (шум источника излучения описывается выражением (4)). Также каждый измерительный канал содержит собственный фотоприемник,

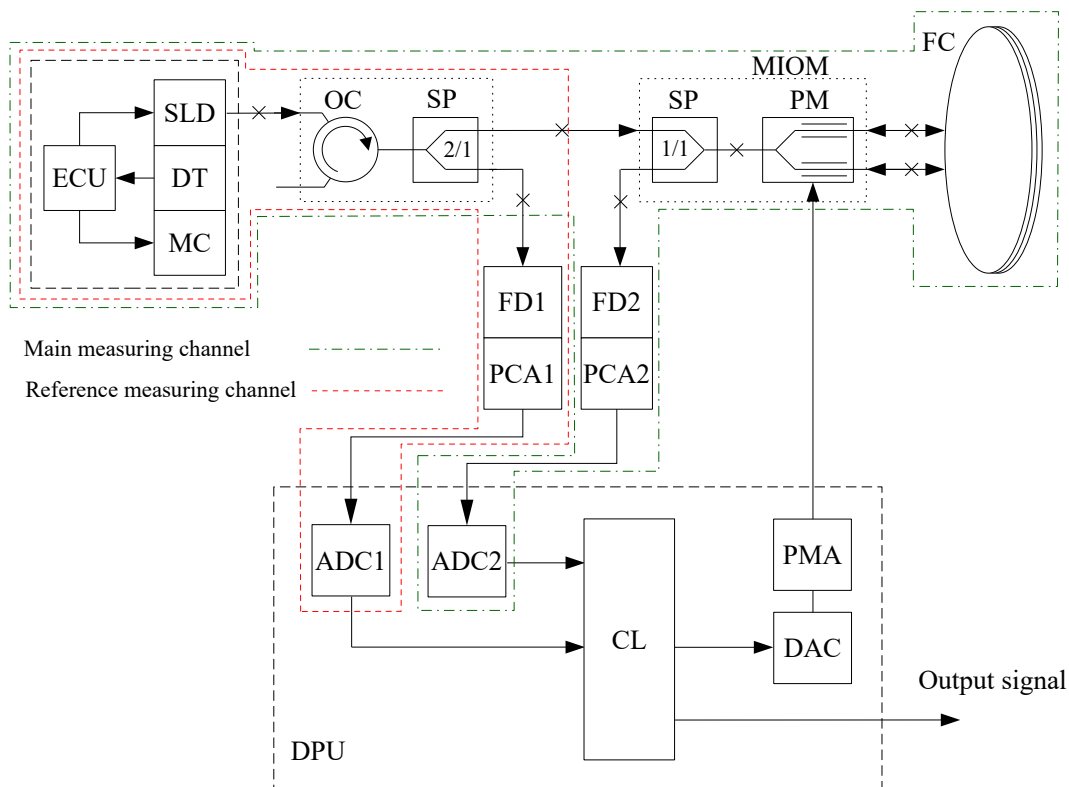


Рис. 1. Блок-схема ВОГ с системой снижения шума выходного сигнала, где ECU — блок управления излучателем (БУИ), SLD — суперлюминесцентный диод (СЛД), DT — датчик температуры (ДТ), MC — микроохладитель (МО), OC — оптический циркулятор (ОЦ), SP — разветвитель-поляризатор (РП), FD1,2 — фотодиоды (ФД), PCA1,2 — усилители фототока (УФТ), ADC1,2 — аналого-цифровые преобразователи (АЦП), CL — цифровая логика (СЛ), MIOM — multifunctional integrated optical module (МИОМ), PM — фазовый модулятор (ФМ), PMA — усилитель фазовой модуляции (УФМ), DAC — цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), DPU — блок цифровой обработки (БЦО), FC — волоконный контур (БК) (цвет онлайн)

Fig. 1. Block diagram of a FOG with output signal noise reduction system, where ECU is the emitter control unit, SLD is a superluminescent diode, DT is a temperature sensor, MC is a microcooler, OC is an optical circulator, SP is a splitter-polarizer, FD1,2 are photodiodes, PCA1,2 are photocurrent amplifiers, ADC1,2 are analog-to-digital converters, CL is digital logic, MIOM is a multifunctional integrated optical module, PM is a phase modulator, PMA is a phase modulation amplifier, DAC is a digital-to-analog converter, DPU is a digital processing unit, FC is a fiber optic circuit (color online)

состоящий из фотодиода (ФД) и усилителя фототока (УФТ), являющихся источниками статистически независимых шумов, описываемых выражениями (1)–(3).

Выражение для СПШ угловой скорости выходного сигнала ВОГ с шумоподавлением в общем виде записывается следующим образом:

$$\delta\omega_n = M \frac{\sqrt{i_{n1}^2 \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) + i_{n2}^2 + i_{n3}^2 + K^2(i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2) + \left(i_{n4}^2 \frac{1}{4}(1 + \cos \varphi)^2 + i_{n4}^2 K^2\right)(1 - K_s)}}{\eta \frac{1}{2} P_0 \sin \varphi}, \quad (6)$$

где  $K$  — коэффициент, учитывающий необходимость приведения средней мощности сигнала опорного измерительного канала к средней мощности основного измерительного канала;  $K_s$  — коэффициент подавления шума интенсивности.



Зафиксируем значение  $\varphi$  равным  $\pi/2$ , а коэффициент  $K$  примем равным 0.5, тогда выражение для СПШ выходного сигнала ВОГ с шумоподавлением примет более компактный, удобный для дальнейшего анализа вид:

$$\delta\omega_n = M \frac{\sqrt{\frac{1}{2}i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2 + \frac{1}{4}(i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2) + \frac{1}{2}i_{n4}^2(1 - K_s)}}{\eta \frac{1}{2}P_0}. \quad (7)$$

## 2. Условия согласованности сигналов измерительных каналов

Минимальный уровень шума выходного сигнала достигается при значении коэффициента  $K_s$ , равном единице, при выполнении условия полного совпадения («одинаковости») компоненты шума, описываемой выражением (4), в сигналах основного и опорного измерительных каналов. Определим смысл и критерии этой «одинаковости».

**2.1. Синхронизация во времени.** Сигналы измерительных каналов должны быть синхронизированы во времени и поступать в блок, реализующий операцию вычитания сигнала опорного измерительного канала ИК2 из сигнала основного измерительного канала ИК1 одновременно. Согласно схеме, изображенной на рис. 1, оптический сигнал разделяется разветвителем-поляризатором РП 1:2 на две составляющие, одна из которых подается непосредственно на фотодетектор ФД1 (опорный измерительный канал ИК2), другая составляющая проходит оптический путь через интерферометр Саньяка (основной измерительный канал ИК1). Расстояние, которое проходит оптический сигнал в измерительном канале ИК2, составляет порядка одного метра, при этом время распространения излучения в оптическом волноводе длиной 1 метр с показателем преломления  $n \approx 1.46$  составляет  $4.87 \cdot 10^{-9}$  секунд, в измерительном канале ИК1 оптическое излучение проходит волоконный контур, длина которого может составлять от сотен до тысяч метров, для определенности зададимся конкретной длиной ВК, равной 1070 метров (такая «неровная» длина объясняется конструктивными особенностями ВОГ с цифровой обработкой сигналов), при этом время распространения оптического излучения в ИК1 составляет  $5.21 \cdot 10^{-6}$  секунд. Таким образом, рассогласование сигналов по времени составляет  $\sim 5.21 \cdot 10^{-6}$  секунд.

Зависимость коэффициента снижения шума  $K_s$  от времени рассогласования сигналов  $\Delta t$  может быть выражена с помощью корреляционной функции этих сигналов. Конкретный вид функции определяется видом спектра шума и алгоритмом обработки сигнала в ВОГ, в результате которого исходный широкополосный сигнал подвергается частотному преобразованию, выражающемуся в децимации сигнала до частоты, равной удвоенной частоте ВФМ, и переносе центральной частоты спектра на нулевую частоту.

Исходя из формы спектра сигнала и алгоритма обработки сигнала, была выбрана корреляционная функция полосового шума —  $\cos(f_0\Delta t) \frac{\sin(\Delta f\Delta t/2)}{\Delta f\Delta t/2}$ , где  $f_0$  — центральная частота спектра,  $\Delta f$  — ширина спектра.

Учитывая, что остальные (кроме шума интенсивности источника излучения, описываемого выражением (4)) источники шума изначально некоррелированы и их временной сдвиг относительно друг друга не влияет на их степень корреляции и, соответственно, на их вклад в результирующий уровень шума, получим следующее выражение для зависимости СПШ выходного сигнала ВОГ от времени рассогласования сигналов измерительных каналов:

$$\delta\omega_n(\Delta t) = M \frac{\sqrt{\frac{1}{2}i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2 + \frac{1}{4}(i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2) + \frac{1}{2}i_{n4}^2 \left(1 - \cos(f_0\Delta t) \frac{\sin(\Delta f\Delta t/2)}{\Delta f\Delta t/2}\right)}}{\eta \frac{1}{2}P_0}, \quad (8)$$

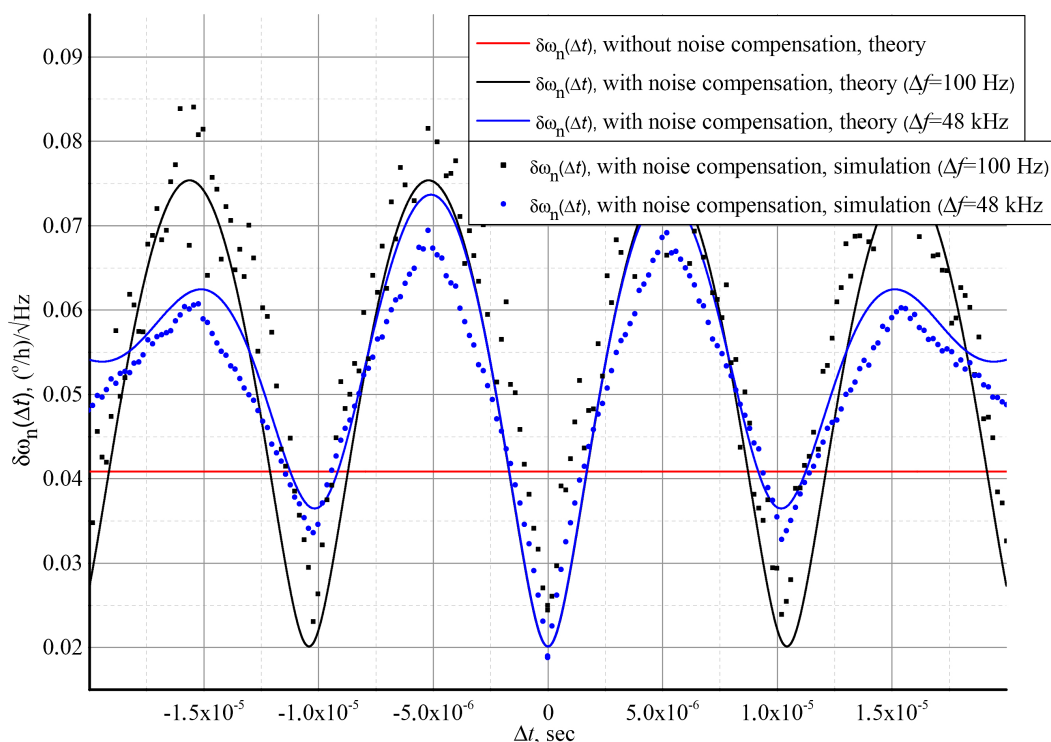


Рис. 2. Зависимость шума выходного сигнала ВОГ с компенсацией шума от времени рассогласования сигналов при различной  $\Delta f$  (черный и синий графики), уровень шума выходного сигнала ВОГ без компенсации при тех же параметрах (красный график) (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of the noise of the output signal of the FOG with noise compensation on the time of signal mismatch at different  $\Delta f$  (black and blue graphs), the noise level of the output signal of the FOG without compensation at the same parameters (red graph) (color online)

где  $f_0$  — частота вспомогательной модуляции, Гц;  $\Delta f$  — ширина спектра в рассматриваемой системе пропорциональна частоте дискретизации выходного сигнала.

На рис. 2 представлены зависимости СПШ от времени рассогласования (взаимного сдвига) сигналов измерительных каналов при различной частоте дискретизации выходного сигнала ВОГ со схемой снижения шума. Сплошными линиями обозначены результаты расчетов по аналитическому выражению (8), а точками — результаты компьютерного моделирования. Компьютерная модель, использованная для этого, подробно описана в работах [9, 10]. Коротко укажем, что данная модель представляет собой компьютерную симуляцию цифрового ВОГ компенсирующего типа с импульсной фазовой модуляцией, разработанную в среде «Octave». В целом из графиков рис. 2 видно, что минимальный уровень шума выходного сигнала достигается в очень узком диапазоне времени рассогласования сигналов измерительных каналов, при этом максимальный уровень шума наблюдается при времени рассогласования порядка 4.5...5.5 мкс (в зависимости от ширины спектра  $\Delta f$ ), что соответствует времени задержки распространения оптического излучения в волоконном контуре измерительного канала ИК1.

**2.2. Равенство интенсивности сигналов.** Рассмотрим схему измерительных каналов ИК1, ИК2, изображенную на рис. 1. Измерительный канал ИК1 содержит волоконный контур ВК, длина которого, как уже было сказано выше, может достигать нескольких тысяч метров. Потери мощности оптического излучения в волноводе в нормальных условиях составляют приблизительно 1.5...2.5 дБ/км. В зависимости от внешних воздействующих факторов (температура, давление и т. д.) потери мощности оптического излучения в оптическом тракте могут значительно меняться,

что приводит к изменению уровня мощности оптического излучения, поступающего на фотодиод ФД2 измерительного канала ИК1. В то же время длина оптической линии измерительного канала ИК2 не превышает одного метра, вследствие чего для нее можно пренебречь потерями мощности оптического излучения, вызываемыми перечисленными выше причинами. Для определения влияния различия мощности оптического излучения в измерительных каналах на эффективность шумоподавления модернизируем выражение (7), введя в него коэффициент  $K_{OP}$ , изменяя который будем менять значение мощности оптического излучения в основном измерительном канале.

$$\delta\omega_n(K_{OP}) = M \frac{\sqrt{K_{OP} \frac{1}{2} i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2 + \frac{1}{4} (i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2) + \frac{1}{4} i_{n4}^2 (1 - K_{OP})^2}}{K_{OP} \eta \frac{1}{2} P_0}. \quad (9)$$

На рис. 3 представлены графики спектральной плотности шума выходного сигнала ВОГ в зависимости от коэффициента мощности  $K_{OP}$  оптического сигнала в основном измерительном канале. Из графиков зависимости  $\delta\omega_n$  от  $K_{OP}$  видно, что при уровне мощности оптического излучения в ИК1 меньшем, чем в ИК2 (в диапазоне значений  $K_{OP}$  от 0 до 1), происходит резкое увеличение уровня шума выходного сигнала, вызванное двумя причинами: снижением соотношения сигнал/шум в ИК1 (это видно также из графика уровня шума для ВОГ без компенсации шума) и увеличением в выходном сигнале «веса» шума ИК2. При уровне мощности оптического излучения в ИК1 большем, чем в ИК2 (в диапазоне значений  $K_{OP}$  от 1 до 2), уровень шума

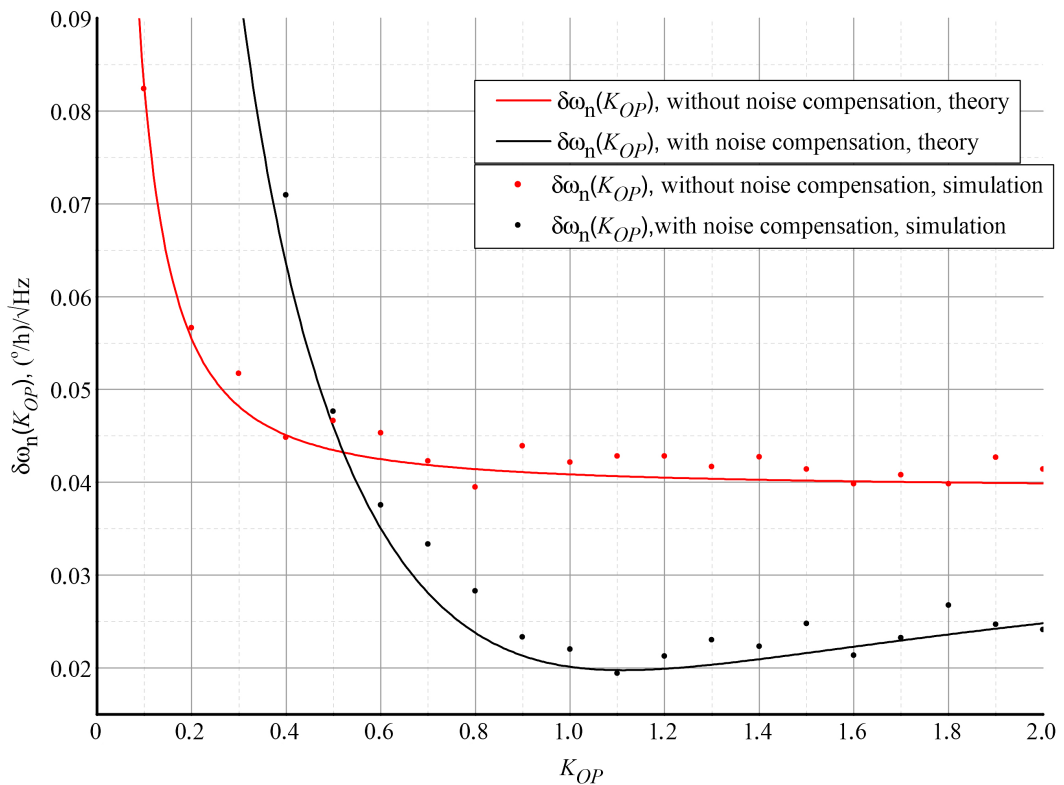


Рис. 3. Зависимость шума выходного сигнала ВОГ с компенсацией шума и ВОГ без компенсации шума от величины коэффициента  $K_{OP}$  мощности оптического излучения в главном измерительном канале (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependence of the output signal noise of the FOG with noise compensation and the FOG without noise compensation on the value of the coefficient  $K_{OP}$  of the optical emission power in main measuring channel (color online)

плавно увеличивается за счет снижения коэффициента шумоподавления, вызванного неполным вычитанием коррелированного шума (шума интенсивности источника излучения) измерительных каналов.

В каждом измерительном канале ИК1, ИК2 оптический сигнал поступает на соответствующий фотоприемник, где преобразуется в электрический сигнал, который затем поступает на аналого-цифровой преобразователь и в дальнейшем подвергается цифровой обработке по алгоритмам работы ВОГ. Электрический и цифровой тракт прохождения каждого сигнала характеризуется собственными коэффициентами преобразования / усиления /ослабления, комплексное влияние которых на уровень шумовой составляющей выходного сигнала выражается через соответствующие коэффициенты  $K_{u1}$ ,  $K_{u2}$  выражения (10):

$$\delta\omega_n(\Delta K_u) = M \frac{\sqrt{K_{u1}^2 \left( \frac{1}{2} i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2 \right) + \frac{1}{4} K_{u2}^2 (i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2) + \frac{1}{4} i_{n4}^2 \Delta K_u^2}}{K_{u1} \eta \frac{1}{2} P_0}, \quad (10)$$

где  $K_{u1}$ ,  $K_{u2}$  — нормированные коэффициенты (диапазон значений от 0 до 1) преобразования / усиления амплитуды сигналов в фотопреобразующих устройствах и трактах цифровой обработки сигналов,  $\Delta K_u = K_{u1} - K_{u2}$  — разность нормированных коэффициентов.

На рис. 4 представлены графики СПШ выходного сигнала ВОГ в зависимости от разности коэффициентов усиления сигналов измерительных каналов  $\Delta K_u$ . Из графиков зависимости  $\delta\omega_n$

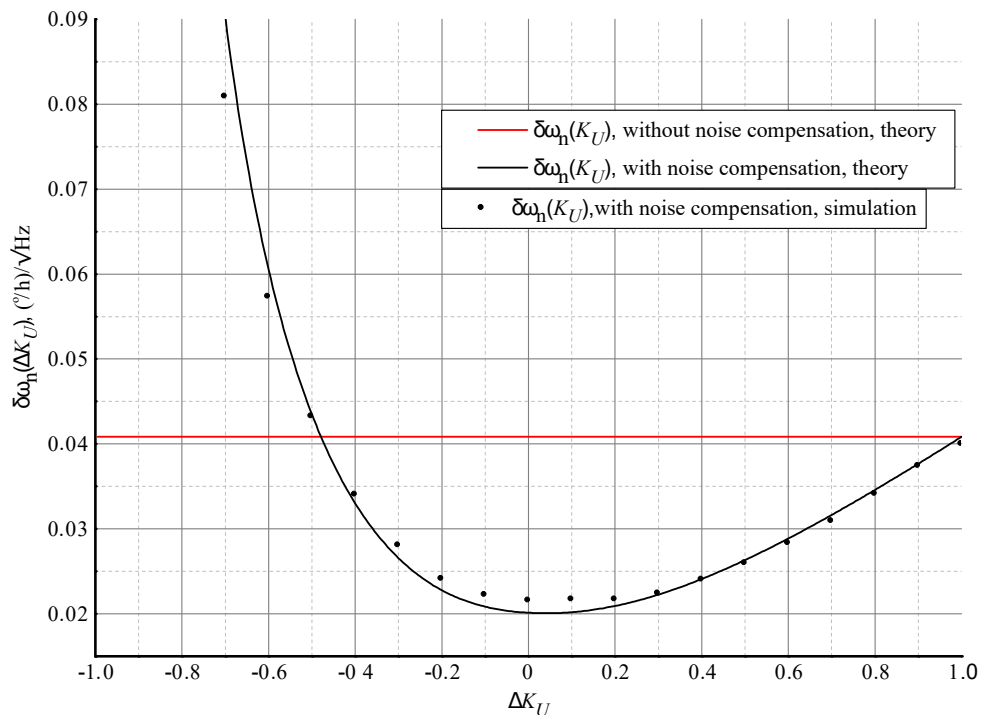


Рис. 4. Зависимость шума выходного сигнала ВОГ с компенсацией шума от  $\Delta K_u$  — соотношения коэффициентов усиления сигналов измерительных каналов (черный график), уровень шума выходного сигнала ВОГ без компенсации при тех же параметрах (красный график) (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the noise of the output signal of the FOG with noise compensation on  $\Delta K_u$  — the ratio of the gain factors of the signals of the measuring channels (black graph), the noise level of the output signal of the FOG without compensation with the same parameters (red graph) (color online)

от  $\Delta K_u$  видно, что при уменьшении амплитуды сигнала опорного измерительного канала ИК2 (уменьшение коэффициента  $K_{u2}$  в диапазоне значений  $\Delta K_u$  от 0 до 1) уровень шума увеличивается за счет снижения коэффициента шумоподавления, вызванного неполным вычитанием коррелированного шума измерительных каналов. При уменьшении амплитуды сигнала главного измерительного канала ИК1 (уменьшение коэффициента  $K_{u1}$  в диапазоне значений  $\Delta K_u$  от 0 до  $-1$ ) дополнительно ухудшается соотношение сигнал/шум, что вызвано относительным увеличением в результирующем сигнале шума сигнала ИК2.

**2.3. Полоса пропускания.** В работе [6] было указано, что для максимально эффективной работы схемы снижения шума должно выполняться условие равенства полосы пропускания фотоприемных устройств основного и опорного измерительных каналов. Рассмотрим, как именно будет выглядеть зависимость уровня шума в выходном сигнале ВОГ от соотношения полос пропускания фотоприемных устройств измерительных каналов. Отметим следующие факты:

- полоса пропускания фотоприемных устройств и частота дискретизации АЦП выбираются достаточно большими (порядка десятков мегагерц), чтобы без искажений воспроизводить исходный сигнал в цифровой форме для его дальнейшей обработки;
- алгоритм обработки сигнала в ВОГ включает в себя осреднение исходного широкополосного оцифрованного сигнала на интервалах времени, равных  $1/(2f_0)$ , где  $f_0$  — частота импульсной фазовой модуляции сигнала, что приближенно можно считать эквивалентным применению низкочастотного фильтра первого порядка с частотой среза  $2f_0$ . В зависимости от длины волоконного контура частота  $f_0$  лежит в диапазоне от десятков килогерц до единиц мегагерц.

Таким образом, высокочастотные компоненты спектра шумовой составляющей сигнала отфильтровываются в ходе цифровой обработки сигнала по алгоритмам ВОГ. Заметное влияние различной ширины полосы пропускания фотоприемных устройств будет наблюдаться только при сужении этой полосы до частот порядка  $f_0$ .

Учитывая равномерную спектральную плотность шума в диапазоне полосы пропускания фотоприемных устройств, можно задать нормализованную функцию, описывающую зависимость эффективной полосы пропускания измерительного канала от полосы пропускания фотоприемного устройства для каждого измерительного канала:  $\Delta F_1 = 1 - f_0/\Delta f_1$ ,  $\Delta F_2 = 1 - f_0/\Delta f_2$ , где  $\Delta f_1$ ,  $\Delta f_2$  — ширина полосы пропускания фотоприемных устройств измерительных каналов ИК1 и ИК2 соответственно.

Для определения количественного влияния разности ширины полосы пропускания фотоприемных устройств на уровень снижения шума в выходном сигнале ВОГ введем в выражение (7) определенные выше нормированные функции зависимости интенсивности шумовых составляющих сигнала от ширины полосы пропускания фотоприемных устройств:

$$\delta\omega_n(\Delta f_1, \Delta f_2) = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{f_0}{\Delta f_1}\right)\left(\frac{1}{2}i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{f_0}{\Delta f_2}\right)(i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2) + \frac{1}{4}i_{n4}^2 \left|\left(1 - \frac{f_0}{\Delta f_1}\right) - \left(1 - \frac{f_0}{\Delta f_2}\right)\right|}}{\eta \frac{1}{2}P_0}. \quad (11)$$

Зависимость спектральной плотности шума угловой скорости выходного сигнала ВОГ с системой подавления шума от разности нормированной полосы пропускания фотоприемных устройств измерительных каналов приведена на рис. 5.

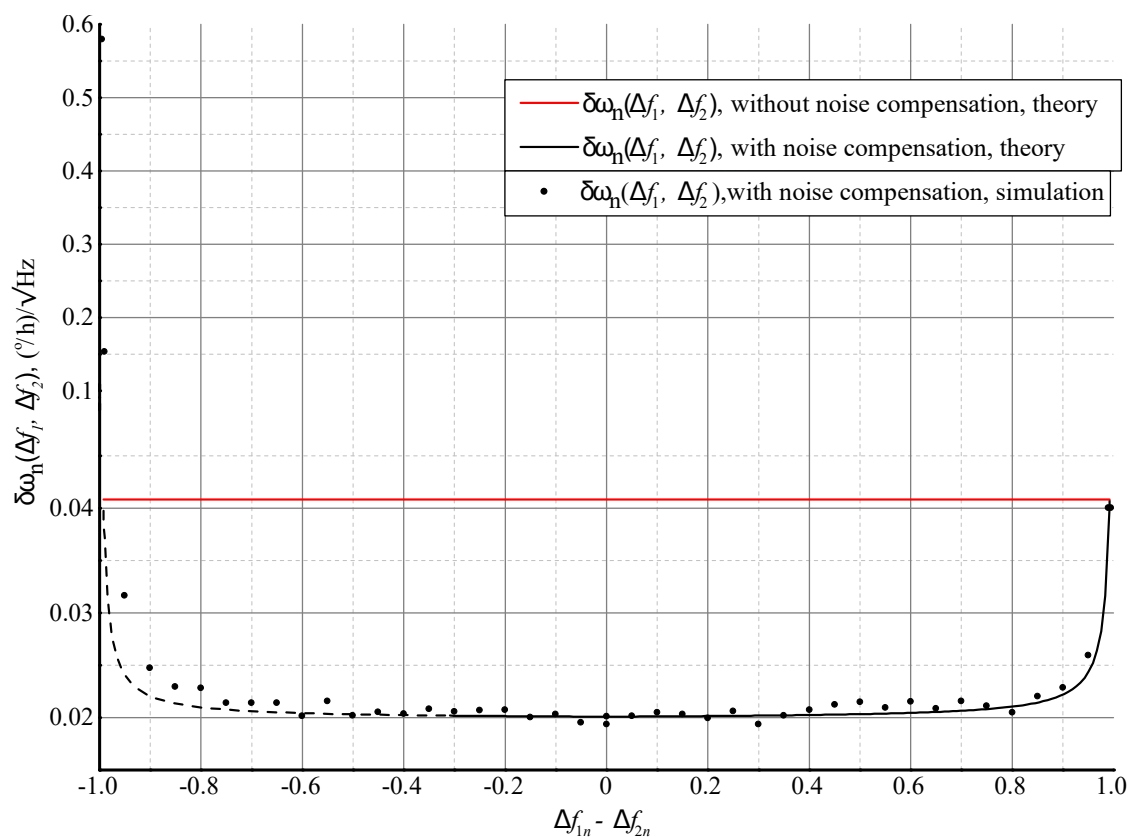


Рис. 5. Зависимость шума выходного сигнала ВОГ с компенсацией шума от соотношения нормированных полос пропускания фотоприемных устройств (черный график), уровень шума выходного сигнала ВОГ без компенсации при тех же параметрах (красный график) (цвет онлайн)

Fig. 5. Dependence of the noise of the output signal of the FOG with noise compensation on the ratio of the normalized bandwidth of the photodetectors (black graph), the noise level of the output signal of the FOG without compensation with the same parameters (red graph) (color online)

В целом, как видно из приведенного графика, уменьшение ширины полосы пропускания фотоприемного устройства ИК1 до 0.75 при сохранении максимальной ширины полосы пропускания ИК2 (в диапазоне от 0 до  $-0.25 (\Delta f_{1n} - \Delta f_{2n})$ ) и уменьшение ширины полосы пропускания фотоприемного устройства ИК2 до 0.5 при сохранении максимальной ширины полосы пропускания ИК1 (в диапазоне от 0 до  $0.5 (\Delta f_{1n} - \Delta f_{2n})$ ) не приводит к существенному увеличению уровня шума выходного сигнала.

Отклонение графика компьютерного моделирования от рассчитанного по теоретической формуле в области значений от  $-0.25$  до  $-1 (\Delta f_{1n} - \Delta f_{2n})$ , то есть при уменьшении полосы пропускания ИК1 в диапазоне от 0.75 до 0 связано с тем, что выражение (11) не учитывает процессы, связанные со снижением быстродействия контура компенсирующей обратной связи при сужении полосы пропускания фотоприемного устройства основного измерительного канала ИК1, приводящие к увеличению СПШ выходного сигнала ВОГ.

**2.4. Состояние поляризации.** В силу ряда объективных причин в настоящее время большинство ВОГ работают с использованием плоскополяризованного оптического излучения. В зависимости от конкретной реализации ВОГ, это достигается либо использованием источника оптического излучения, конструктивно объединенного с поляризатором, либо применением



отдельных поляризаторов или поляризаторов в составе интегрально-оптических схем (например, когда сигнал источника излучения нужно разделить на несколько измерительных каналов в многоканальном ВОГ, это проще сделать с помощью изотропных волоконных разветвителей, а затем поляризовать излучение в каждом измерительном канале).

В рассматриваемой схеме ВОГ применяется источник с линейно-поляризованным излучением с коэффициентом экстинкции не менее 20 дБ. Применение такого источника излучения заведомо обеспечивает практически полное отсутствие отличных от заданного состояний поляризации излучения. Наличие в оптической схеме последовательно установленных поляризаторов в составе разветвителей-поляризаторов (РП) и фазового модулятора (ФМ) с коэффициентом экстинкции каждого не менее 20 дБ, а также применение оптического волокна, сохраняющего состояние поляризации, при изготовлении волоконного контура интерферометра Саньяка обеспечивает сохранение состояния поляризации на всем протяжении оптического тракта ВОГ. В рамках данной работы важным является тот факт, что состояние поляризации излучения, падающего на фотодиоды опорного и основного измерительных каналов, является одинаковым, а значит, в нем не содержится некоррелированных составляющих шума интенсивности источника оптического излучения. В то же время нужно учесть, что в зависимости от точности юстировки плоскости поляризации всех поляризаторов в составе оптического тракта ВОГ (а также сохранения их юстировки во времени) и стабильности  $h$  — параметра волновода волоконного контура — зависит сохранение соотношения мощности оптического излучения, падающего на фотоприемники измерительных каналов. Это влияние может быть описано с помощью закона Малюса,  $I = I_0 \cos^2 \psi$ , выражающего зависимость интенсивности  $I$  линейно-поляризованного оптического излучения, прошедшего поляризатор, от интенсивности падающего на поляризатор излучения  $I_0$  и угла  $\psi$  между плоскостями поляризации падающего излучения и поляризатора. Введем в выражение (7) спектральной плотности шума угловой скорости выходного сигнала ВОГ со схемой снижения шума зависимость мощности оптического излучения, падающего на фотоприемник основного измерительного канала ИК1 от угла  $\psi$ , выражающую суммарную погрешность ориентации плоскости поляризации во всем оптическом тракте:

$$\delta\omega_n(\psi) = M \frac{\sqrt{\cos^2 \psi \left( \frac{1}{2} i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2 + \frac{1}{4} (i_{n1}^2 + i_{n2}^2 + i_{n3}^2) + \frac{1}{4} i_{n4}^2 (1 - (\cos^2 \psi))^2 \right)}}{\cos^2 \psi \eta \frac{1}{2} P_0}. \quad (12)$$

На рис. 6 представлены графики зависимости спектральной плотности шума выходного сигнала ВОГ со схемой снижения шума (черный график) и без схемы снижения шума (красный график) от изменения угла  $\psi$  на  $\pm 180^\circ$ .

Из приведенных графиков видно, что:

- изменение угла  $\psi$  приводит к изменению уровня шума выходного сигнала как в ВОГ со схемой снижения, так и без схемы снижения шума. Это объясняется теми же причинами, что и в случае уменьшения мощности оптического излучения, падающего на фотоприемник основного измерительного канала, рассмотренном в п. 2.2;
- изменение угла  $\psi$  в пределах  $\pm 10^\circ$  не приводит к заметному увеличению уровня шума выходного сигнала.

В реальных условиях угол  $\psi$ , как правило, не превышает единиц градусов. Это позволяет считать, что в ВОГ, использующем линейно-поляризованный источник оптического излучения и построенном по схеме, соответствующей рис. 1, не наблюдается заметного влияния состояния поляризации на уровень спектральной плотности шума, определяемый выражением (12).



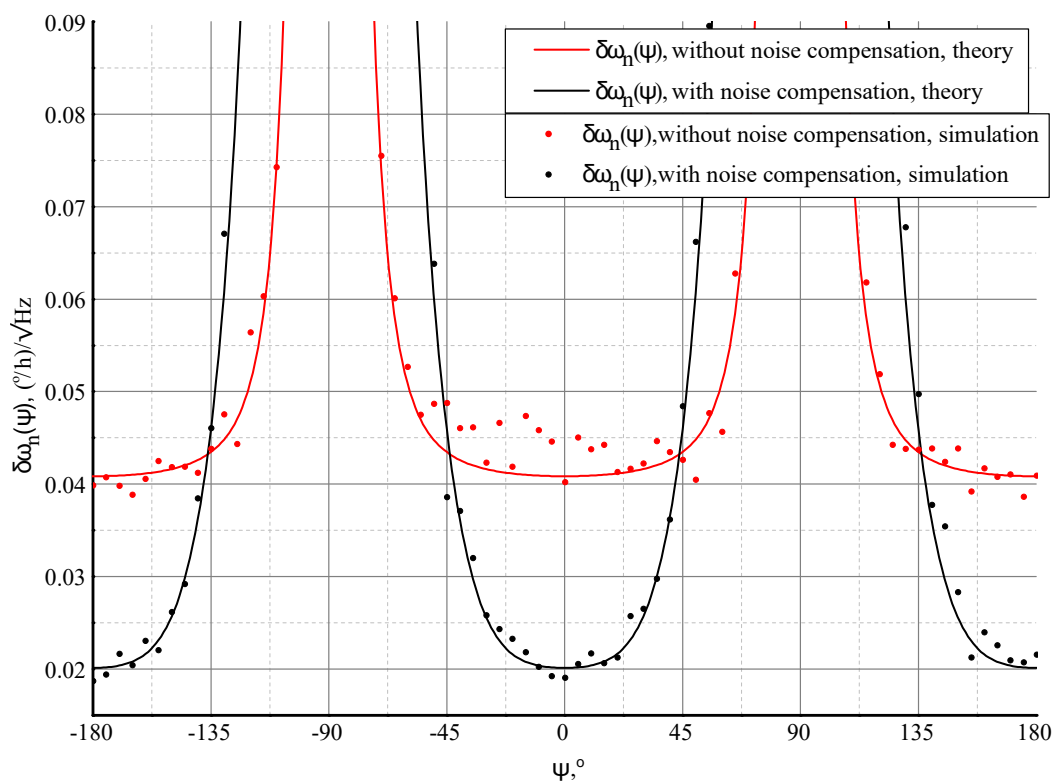


Рис. 6. Зависимость шума выходного сигнала ВОГ с компенсацией шума и ВОГ без компенсации шума от величины угла  $\psi$  отклонения плоскости поляризации в главном измерительном канале (цвет онлайн)

Fig. 6. Dependence of the output signal noise of the FOG with noise compensation and the FOG without noise compensation on the value of the angle  $\psi$  of deviation of the plane of polarization in the main measuring channel (color online)

### Заключение

В работе были рассмотрены четыре основных условия, выполнение которых приводит к подавлению шума интенсивности источника оптического излучения в выходном сигнале ВОГ, построенном по схеме, приведенной на рис. 1, и описываемом выражением (6) для определения спектральной плотности шума выходного сигнала ВОГ со схемой снижения шума. Анализ полученных зависимостей уровня СПШ выходного сигнала ВОГ со схемой снижения шума позволяет определить границы точности соблюдения этих условий без значительного ухудшения работы схемы снижения шума. Анализ полученных зависимостей показывает, что для выполнения условия сохранения уровня шума выходного сигнала ВОГ со схемой снижения шума должны выполняться следующие требования:

1. Условие синхронизации сигналов измерительных каналов во времени должно выполняться с точностью не хуже 5% от времени максимального рассогласования, в рассмотренном случае это соответствует примерно  $\pm 200$  нс.
2. Условие равенства интенсивностей сигналов измерительных каналов имеет несимметричный вид и, в зависимости от природы отклонения (изменение мощности оптического излучения или различный коэффициент усиления фотоприемных устройств), имеет разное оптимальное соотношение. Отношение средних мощностей оптических сигналов и отношение коэффициентов усиления электрических сигналов в измерительных каналах должно находиться в диапазоне 1...1.1.

3. Условие равенства полосы пропускания измерительных каналов не является критическим, оно должно выполняться с точностью не менее  $0.75\Delta f_{1n}$  от нормированной полосы пропускания ИК1 и не менее  $0.5\Delta f_{2n}$  от нормированной полосы пропускания ИК2.
4. Условие одинакового состояния поляризации формально выполняется за счет применения в рассматриваемой схеме источника оптического излучения с линейной поляризацией в заданной плоскости, требование к точности выставки и сохранению угла  $\psi$  суммарной погрешности ориентации плоскости поляризации должно выполняться с точностью не менее  $\pm 10^\circ$ .

### Список литературы

1. Бронников С. В., Караваев Д. Ю., Рожков А. С. Исследование технологии и средств привязки изображений Земли, полученных на пилотируемом космическом аппарате с помощью свободно перемещаемых камер // Космическая техника и технологии. 2016. № 2. С. 105–115.
2. Бельский Л. Н., Водичева Л. В., Парышева Ю. В. Бесплатформенная инерциальная навигационная система для средств выведения: точность начальной выставки и периодическая калибровка // В сб.: Юбилейная XXV Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. 28–30 мая 2018 года, Санкт-Петербург, Россия. Санкт-Петербург: «Концерн “Центральный научно-исследовательский институт “Электрон”»», 2018. С. 250–253.
3. Чернодаров А. В., Патрикеев А. П., Коврегин В. Н., Коврегина Г. М., Меркулова И. И. Летная отработка распределенной системы инерциально-спутниковой микронавигации для радиолокатора с синтезированной апертурой // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2017. Т. 20, № 1. С. 222–231.
4. Андропова И. А., Малыкин Г. Б. Физические проблемы волоконной гироскопии на эффекте Саньяка // Успехи физических наук. 2002. Т. 172, № 8. С. 849–873. DOI: 10.3367/UFNr.0172.200208a.0849.
5. Спиридонов Д. М., Игнатъев А. А., Обухович Д. В. Математическая модель шумов выходного сигнала волоконно-оптического гироскопа // В сб.: Проблемы оптической физики и биофотоники SFM-2021: Материалы 9-го Международного симпозиума и 25-ой Международной молодежной научной школы Saratov Fall Meeting 2021. 27 сентября – 01 октября 2021 года, Саратов, Россия. Саратов: Издательство «Саратовский источник», 2021. С. 72–77.
6. Алейник А. С., Дейнека И. Г., Смоловик М. А., Нефоросный С. Т., Рупасов А. В. Компенсация избыточного шума в волоконно-оптическом гироскопе // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24, № 2. С. 20–32. DOI: 10.17285/0869-7035.2016.24.2.020-032.
7. Guattari F., Chouvin S., Moliçon C., Lefèvre H. A simple optical technique to compensate for excess RIN in a fiber-optic gyroscope // In: Proceedings of Inertial Sensors and Systems Symposium (ISS). Karlsruhe, Germany. New York: IEEE, 2014. P. 1–14. DOI: 10.1109/InertialSensors.2014.7049411.
8. Спиридонов Д. М., Игнатъев А. А., Обухович Д. В. Синтез и анализ математической модели шумовой составляющей выходного сигнала волоконно-оптического гироскопа с системой компенсации шума // В сб.: Проблемы оптической физики и биофотоники. SFM-2022: Материалы 10-го Международного симпозиума и 26-ой Международной молодежной научной школы Saratov Fall Meeting 2022. 26–30 сентября 2022 года, Саратов, Россия. Саратов: Изд-во «Саратовский источник», 2022. С. 44–48.
9. Спиридонов Д. М., Обухович Д. В. Волоконно-оптический гироскоп с системой снижения уровня шума в выходном сигнале, математическое моделирование, эксперимент // Журнал радиоэлектроники. 2024. № 12. DOI: 10.30898/1684-1719.2024.12.13.

10. Спиридонов Д. М., Обухович Д. В. Аналитическая и компьютерная программная математические модели шума выходного сигнала волоконно-оптического гироскопа, анализ и верификация // Журнал радиоэлектроники. 2024. № 3. DOI: 10.30898/1684-1719.2024.3.7.
11. Ван дер Зил А. Шум: источники, описание, измерение. М.: Советское радио, 1973. 228 с.
12. Lefevre H. C. The Fiber-Optic Gyroscope. Boston: Artech House, 2022. 508 p.
13. Baney D. M., Sorin W. V. Broadband frequency characterization of optical receivers using intensity noise // Hewlett Packard Journal. 1995. Vol. 46, no. 1. P. 6–12.

## References

1. Bronnikov SV, Karavaev DYU, Rozhkov AS. Investigation of Geo-tagging technology and capabilities for earth images obtained on human space vehicle using freely movable cameras. Space Engineering And Technology. 2016;2:105–115.
2. Belsky LN, Vodicheva LV, Parysheva YV. A strapdown inertial navigation system for space launch vehicles: Initial alignment accuracy and periodic calibrations. In: 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). 28–30 May, 2018, St. Petersburg, Russia. IEEE; 2018. P. 1–4. DOI: 10.23919/ICINS.2018.8405909.
3. Chernodarov AV, Patrikeev AP, Kovregin VN, Kovregina GM, Merkulova II. Flight development of a distributed inertial satellite micromavigation system for synthetic-aperture radar. Civil Aviation High Technologies. 2017;20(1):222–231.
4. Andronova IA, Malykin GB. Physical problems of fiber gyroscopy based on the Sagnac effect. Phys.-Usp. 2002;45(8):793–817. DOI: 10.1070/PU2002v045n08ABEH001073.
5. Spiridonov DM, Ignat'ev AA, Obukhovich DV. Mathematical model of output signal noise of a fiber-optic gyroscope. In: Problems of Optical Physics and Biophotonics SFM-2021: Proceedings of the 9th International Symposium and the 25th International Youth Scientific School Saratov Fall Meeting 2021. 27 September – 01 October, 2021, Saratov, Russia. Saratov: Publishing House “Saratovsky istochnik”; 2021. P. 72–77.
6. Aleinik AS, Deineka IG, Smolovik MA, Neforosnyi ST, Rupasov AV. Compensation of excess RIN in fiber-optic gyro. Gyroscopy Navig. 2016;7(3):214–222. DOI: 10.1134/S2075108716030020.
7. Guattari F, Chouvin S, Moluçon C, Lefèvre H. A simple optical technique to compensate for excess RIN in a fiber-optic gyroscope. In: Proceedings of Inertial Sensors and Systems Symposium (ISS). Karlsruhe, Germany. New York: IEEE; 2014. P. 1–14. DOI: 10.1109/InertialSensors.2014.7049411.
8. Spiridonov DM, Ignat'ev AA, Obukhovich DV. Synthesis and analysis of the mathematical model of the noise component of the output signal of a fiber-optic gyroscope with a noise compensation system. In: Problems of Optical Physics and Biophotonics. SFM-2022: Proceedings of the 10th International Symposium and the 26th International Youth Scientific School Saratov Fall Meeting 2022. 26–30 September, 2022, Saratov, Russia. Saratov: Publishing House “Saratovsky istochnik”; 2022. P. 44–48.
9. Spiridonov DM, Obukhovich DV. Fiber-optic gyroscope with a noise reduction system in the output signal, mathematical modeling, experiment. Journal of Radio Electronics. 2024;(12) (in Russian). DOI: 10.30898/1684-1719.2024.12.13.
10. Spiridonov DM, Obukhovich DV. Analytical and computer software mathematical models of the noise of the output signal of a fiber-optic gyroscope, analysis and verification // Journal of Radio Electronics. 2024;(3) (in Russian). DOI: 10.30898/1684-1719.2024.3.7.
11. Van der Ziel A. Noise: Sources, Characterization, Measurement. Englewood Cliffs: Prentice-Hall; 1970. 184 p.
12. Lefevre HC. The Fiber-Optic Gyroscope. Boston: Artech House; 2022. 508 p.
13. Baney DM, Sorin WV. Broadband frequency characterization of optical receivers using intensity noise. Hewlett Packard Journal. 1995;46(1):6–12.



*Спиридонов Дмитрий Михайлович* — родился в Саратове (1988). Окончил бакалавриат (2016) и магистратуру (2018) физического факультета Саратовского государственного университета по направлению «Физика». Аспирант Института физики Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика». С 2012 работал в ОАО «Институт критических технологий» (Саратов). С 2017 года работает в Саратовском отделении ООО НПК «Оптолинк». Автор 17 научных статей. Научные интересы — математическое моделирование, волоконно-оптическая гироскопия.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: spiridonov\_d\_m@mail.ru  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1220688



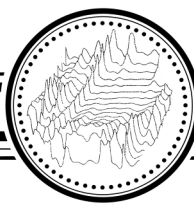
*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* — родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981). Доктор физико-математических наук. В настоящее время — профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: vadivasovate@yandex.ru  
ORCID: 0000-0002-8081-2820  
AuthorID (eLibrary.Ru): 34840



*Обухович Дмитрий Вячеславович* — родился в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского по специальности «Радиофизика и электроника» (2002). С 2002 года работал в ФГУП ПО «Корпус». С 2004 года и по настоящее время работает в отделении ВОГ ООО НПК «Оптолинк» (Саратов). Автор 13 научных статей. Научные интересы — волоконно-оптическая гироскопия.

Россия, 410033 Саратов, проспект имени 50 лет Октября, 101/1  
ООО НПК «Оптолинк»  
E-mail: obuhovichdv@mail.ru



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 338.12; 519.6; 530.182.2; 621.37

DOI: 10.18500/0869-6632-003167  
EDN: QXMAJO

### Динамическая модель возникновения экономических циклов

В. В. Матросов<sup>✉</sup>, В. Д. Шалфеев

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 10.12.2024, принята к публикации 22.02.2025,  
опубликована онлайн 7.03.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** *Цель работы.* Изучение возможности возникновения экономических колебаний на основе модели производственной сети с кооперативными и конкурентными типами связей. В качестве элемента сети рассматривается модель производства в виде типовой системы автоматического управления добавленной стоимостью — переменной, определяющей прибыльность производства. *Методы.* Качественно-численные методы теории нелинейных динамических систем. *Результаты.* Моделирование нелинейной динамики малых ансамблей связанных элементов-производств указывает на существенную роль связей. В частности, введение антагонистических (конкурентных) связей приводит к возникновению регулярных и нерегулярных экономических колебаний (циклов).

**Ключевые слова:** деловые циклы, нелинейная динамика сетей, конкурентные связи.

**Благодарности.** Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSWR-2023-0031). Авторы благодарят М. И. Рабиновича за полезные дискуссии и советы.

**Для цитирования:** Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Динамическая модель возникновения экономических циклов // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 513–530. DOI: 10.18500/0869-6632-003167. EDN: QXMAJO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Dynamic model of economic cycles origin

V. V. Matrosov✉, V. D. Shalfeev

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Received 10.12.2024, accepted 22.02.2025, available online 7.03.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** *Purpose* of the work is to research the phenomenon of the self-oscillation of the economic cycles for the model of the network with different types of element couplings (cooperative and competitive). As the element of the production network there are considered the typical system of automatic control of the added value, which determines the profitability of production. *Methods.* The research methods of the theory of nonlinear dynamic systems. *Results.* Modeling of nonlinear dynamics of small ensembles of connected production elements indicates the significant role of connections, in particular, the antagonistic (competitive) relationships lead to the emergence of regular and irregular economic fluctuations (cycles).

**Keywords:** business cycles, nonlinear dynamics of networks, competitive couplings.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FSWR-2023-0031). The authors are grateful M. I. Rabinovich for useful discussions and comment.

**For citation:** Matrosov VV, Shalfeev VD. Dynamic model of economic cycles origin. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4):513–530. DOI: 10.18500/0869-6632-003167

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Современная прикладная нелинейная динамика изучает процессы и системы, обладающие экстремальной сложностью. Эти задачи затрагивают не только технические, физические, химические, но также биологические и социэкономические приложения. Проблемы динамики экономических систем в значительной степени связаны с изучением экономических колебаний — циклов и в первую очередь с их происхождением [1–4]. В настоящей работе рассматривается модельная динамика производственной сети, состоящей из нелинейных элементов — производств, связанных как кооперативными, так и антагонистическими (конкурентными) связями. На примере малого ансамбля связанных элементов-производств изучается влияние характера связей на возможность возникновения колебаний суммарного выпуска продукции в сети, то есть на возникновение экономических колебаний.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 даны краткие сведения об экономических циклах. В разделе 2 предложена модель отдельного производства как элемента производственной сети. В разделах 3, 4 представлены результаты численных экспериментов для изучения динамики ансамблей из двух и трех связанных производств. В Заключение даны выводы.

### 1. Экономические циклы

Анализ развития экономики разных стран разными экономистами (Дж. Кейнс, П. Самуэльсон, М. Фридман и др.) позволил получить вывод о том, что для рыночной экономики характерны неустойчивость и наличие нерегулярных колебаний объемов производств, инфляции, занятости.

Установлено, что после экономического подъема всегда следует снижение экономической активности, что свидетельствует о цикличности рыночной экономики. Нерегулярные колебания — повторяющиеся подъемы и спады в экономике [5], осуществляющиеся около некоторого долгосрочного тренда, характеризуют базовое явление рыночной экономики — экономические циклы (деловые циклы, бизнес-циклы). Обычно различают четыре фазы (стадии) экономического цикла: подъем (расширение, expansion), пик (бум, peak), спад (сжатие, рецессия, кризис, contraction), дно (депрессия, застой, trough). Для определения этих фаз используются различные экономические показатели, такие как ВВП (валовый внутренний продукт), уровень занятости, объем прибыли предприятий и др., а также их совокупный (композитный) показатель — индекс бизнес-цикла [6].

На сегодняшний день известно множество теорий, изучающих причины возникновения экономических циклов. Эти теории опираются как на эндогенные (внутренние), так и на экзогенные (внешние) факторы, к которым можно отнести природные катастрофы, социальные потрясения, технологические инновации и др. Однако следует признать, что сколь-нибудь убедительной общей теории экономических циклов сегодня не существует, как нет и единой точки зрения на причины, порождающие эти циклы [7, 8]. Отметим, что объем фактического ВВП является наиболее важным экономическим показателем, определяющим экономический цикл, а некоторые авторы, в частности [9], допускают прямое отождествление колебаний уровня экономической активности с изменениями объема фактического ВВП [8]. Для подсчета ВВП используются несколько методов, в частности метод добавленной стоимости (производственный). Добавленная стоимость — это разница между стоимостью произведенного товара (услуги) и стоимостью материалов, затраченных на его (её) производство, то есть это часть стоимости продукции, добавленная непосредственно самим предприятием. Суммирование добавленных стоимостей по всем производствам на уровне страны позволяет получить величину ВВП за рассматриваемый интервал времени.

Таким образом, задачу изучения причин, порождающих экономические колебания (деловые циклы), в принципе, можно свести к изучению некой динамической модели производственной сети связанных между собой динамических элементов — производств, допускающей оценку суммарной добавленной стоимости по всей сети (то есть ВВП) и анализ динамики изменения ВВП от времени в зависимости от различных параметров сети и связей элементов в сети, что в итоге может позволить изучить на такой модели условия возникновения деловых циклов. Перейдем далее к построению такой модели.

## 2. Производственная модель

Будем рассматривать модель производственной сети как модель связанных между собой динамических элементов — производств. Для каждого производства, как элемента сети, будем рассматривать простую модель, характеризуемую только одной переменной, определяющей прибыльность производства, а именно добавленной стоимостью. В качестве базовой модели такого производства будем рассматривать типовую систему автоматического управления. Подход к описанию динамического поведения различных технических, биологических, социальных и других объектов как систем автоматического управления не является новым, и в литературе можно найти много примеров использования такого подхода, в частности [10, 11].

Модель производства, функционирующего как система автоматического управления, показана на рис. 1. Опишем динамику этой системы аналогично тому, как это сделано в [10]. Здесь  $E$  — объект управления, оценщик (Estimator), вырабатывающий на выходе оценку текущего значения величины добавленной стоимости  $V_C(t)$ . На вход системы поступает сигнал  $V_S(t)$  — установленное

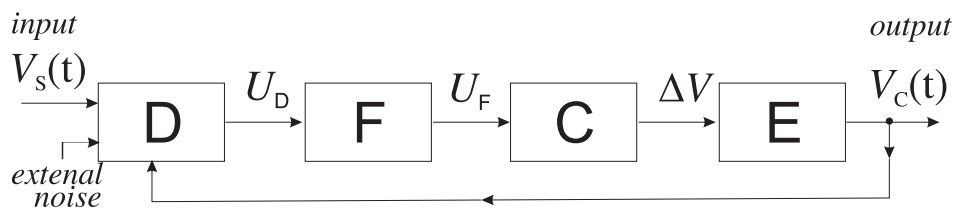


Рис. 1. Модель производства как система автоматического регулирования

Fig. 1. Production model as a system of automatic regulation

заранее плановое значение величины добавленной стоимости. Далее для упрощения будем считать  $V_S(t)$  постоянной величиной на рассматриваемых временных интервалах, а внешний шум отсутствующим. Дискриминатор  $D$  сравнивает сигналы  $V_C(t)$  и  $V_S(t)$ , сигнал  $U_D$  с выхода  $D$  проходит через фильтр  $F$ , который устраняет высокочастотные (мелкомасштабные) флуктуации. Сигнал  $U_F$  с выхода фильтра  $F$  поступает на управитель  $C$ , который воздействует на активный элемент  $E$ , изменяя оценочное значение  $V_C(t)$  в сторону сближения с  $V_S(t)$ .

Уравнение, описывающее динамику системы автоматического управления, можно получить, написав уравнения для каждого элемента системы. Сигнал на выходе оценщика можно записать в виде

$$V_C = V_C^0 + \Delta V, \quad (1)$$

где  $V_C^0$  — оценка величины добавленной стоимости в начальный момент времени при разомкнутой цепи управления,  $\Delta V$  — изменение величины оценки под действием управителя  $C$ .

В предположении линейности и безынерционности управителя его уравнение можно записать в виде

$$\Delta V = -S U_F, \quad (2)$$

где  $S$  — крутизна характеристики управителя, а знак «минус» означает, что текущее значение  $V_C$  смещается управителем в сторону сближения с  $V_S$ .

Уравнение для фильтра  $F$  записывается с использованием передаточной функции  $K(p)$ :

$$U_F = K(p) U_D. \quad (3)$$

Уравнение для дискриминатора  $D$  имеет вид

$$U_D = E \Phi(V_C - V_S), \quad (4)$$

где  $E$  — некоторая контрольная величина выходного сигнала дискриминатора,  $\Phi(V_C - V_S)$  — нелинейность дискриминатора.

Введем обозначения: текущая разница оценочного и планового значения добавленной стоимости  $V = V_C - V_S$ , параметр  $\sigma = SE$  — контрольная поправка выходного значения величины добавленной стоимости из-за действия цепи управления, безразмерная разница оценочного и планового значений добавленной стоимости  $x = V/\sigma$ , безразмерная начальная разница  $\gamma = (V_C^0 - V_S)/\sigma$ . С учетом введенных обозначений из (1)–(4) получаем динамическую модель производства в операторной форме

$$x + K(p)\Phi(x) = \gamma, \quad p \equiv d/dt. \quad (5)$$



Учтем инерционность цепи управления модели (5) в форме  $K(p) = (1 + ap)^{-1}$  и, введя безразмерное время  $\tau = t/a$ , получим из (5) в предположении постоянства  $\gamma$  уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + x + \Phi(x) = \gamma. \quad (6)$$

Нелинейность дискриминатора логично представить однопараметрической функцией с насыщением

$$\Phi(x) = bx/(1 + |bx|) \quad (7)$$

или со спадающим участком

$$\Phi(x) = 2bx/(1 + b^2x^2). \quad (8)$$

Наличие участка насыщения на характеристике дискриминатора представляется вполне естественным допущением. Что касается наличия спадающего участка характеристики дискриминатора, то такой участок можно интерпретировать некой нереалистичностью больших управляющих сигналов с выхода дискриминатора и связанным с этим недоверием к ним.

Далее в численных экспериментах будем принимать в (8) параметр  $b \leq 4$ . Динамика модели (6) при сделанных предположениях определяется [12] единственным устойчивым состоянием равновесия  $O(x^*)$ , координата которого  $x = x^*$  находится из уравнения

$$\Phi(x) = \gamma - x. \quad (9)$$

Заметим, что координата  $x = x^*$  в случае нелинейности (8) может располагаться как на восходящем участке нелинейности  $\Phi(x)$ , так и на спадающем, это не сказывается на устойчивости состояния равновесия. При  $x^* > 0$  производство считаем доходным, при  $x^* < 0$  считаем убыточным.

Здесь уместно следующее замечание. В операторной модели (5) введением различных  $K(p)$  можно учесть инерционности и запаздывания реального производства. В этом случае система дифференциальных уравнений, соответствующая модели (5), может иметь высокий порядок и допускать наличие автоколебательных режимов, в результате которых будут иметь место регулярные или хаотические колебания выходной переменной — добавленной стоимости  $x(\tau)$ . Инерционности и задержки при управлении производством могут быть вызваны, в частности, технологическими особенностями или дефектами управления на данном производстве. Изучение особенностей динамики производства, вызванных инерционностями цепей управления, лежит вне целей данной работы. Здесь предполагается сделать акцент на изучении влияния связей между производствами на динамику сети. С учетом этого обстоятельства далее будет рассматриваться динамика малых ансамблей из двух, трех связанных элементов-производств, где для описания отдельных производств будет использоваться модель (6) в форме дифференциального уравнения первого порядка, имеющая предельно простую динамику — единственное устойчивое состояние равновесия. Модели ансамблей из двух и трех связанных производств представляются нелинейными динамическими системами, определенными в двух и трехмерном фазовых пространствах. Изучение динамики этих моделей проведено путем анализа особых траекторий (состояний равновесия, сепаратрис, предельных циклов) и их бифуркаций с применением комплекса программ ДНС [13].

### 3. Ансамбль из двух связанных производств

Рассмотрим взаимодействие двух производств. Сфокусируем дальнейший анализ на изучении влияния связей на динамику взаимодействующих систем. Исходя из этого, сделаем упрощения: будем считать, что для обеих систем плановые значения  $V_{S1} = V_{S2} = V_S$  одинаковы, нелинейности

дискриминаторов идентичны, инерционности цепей управления  $K_1(p) = K_2(p) = K(p) = (1 + ap)^{-1}$  одинаковы, параметр  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . Тогда динамика двух связанных (путем обмена управляющими сигналами) систем будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 + \Phi(x_1) &= \gamma_1 + \delta_{21}\Phi(x_2), \\ \frac{dx_2}{d\tau} + x_2 + \Phi(x_2) &= \gamma_2 + \delta_{12}\Phi(x_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\delta_{21}$  — коэффициент связи от второй системы к первой,  $\delta_{12}$  коэффициент связи от первой системы ко второй. Будем далее рассматривать кооперативные и конкурентные (антагонистические) связи. Для примера возьмем два однонаправленно связанных производства П1 и П2, пусть П2 воздействует на П1. Считаем оба производства доходными, то есть значения  $x_1^* > 0$  и  $x_2^* > 0$ . Если действие доходного П2 на П1 ведет к увеличению доходности П1, то такую связь логично называть кооперативной. Если действие доходного П2 на П1 ведет к уменьшению доходности П1 или переходу его в убыточные, то такую связь называют конкурентной (антагонистической). Таким образом, в случае доходных производств при положительных знаках коэффициентов связей  $\delta_{12}, \delta_{21}$  взаимодействие между системами носит кооперативный характер, при отрицательных  $\delta_{12}, \delta_{21}$  взаимодействие носит антагонистический характер. Связь будем называть сильной, если модуль параметра связи больше единицы, слабой — в противном случае.

Координаты  $x_1^*$  и  $x_2^*$  устойчивого состояния равновесия определяют соответственно значения добавленной стоимости первого и второго производства, а сумма  $S = x_1^* + x_2^*$  отражает величину равновесного совокупного валового продукта двух связанных производств. В ансамбле связанных производств величины добавленных стоимостей и совокупного валового продукта обуславливаются как состояниями взаимодействующих производств, так и параметрами связей. Влияние соседней системы на значение добавленной стоимости  $x_1^*$  зависит от состояния  $x_2^*$  соседней системы. Если значение  $x_2^* > 0$ , то кооперативная связь улучшает достигаемое значение добавленной стоимости, если же  $x_2^* < 0$ , то ухудшает. В случае антагонистической связи ситуация меняется на противоположную. Здесь наблюдается положительный эффект при  $x_2^* < 0$  и отрицательный при  $x_2^* > 0$ . Рис. 2 иллюстрирует описанные выше ситуации: линии 1 соответствуют случаю, когда  $x_1^* > 0, x_2^* > 0$ , линии 2 —  $x_1^* > 0, x_2^* < 0$ .

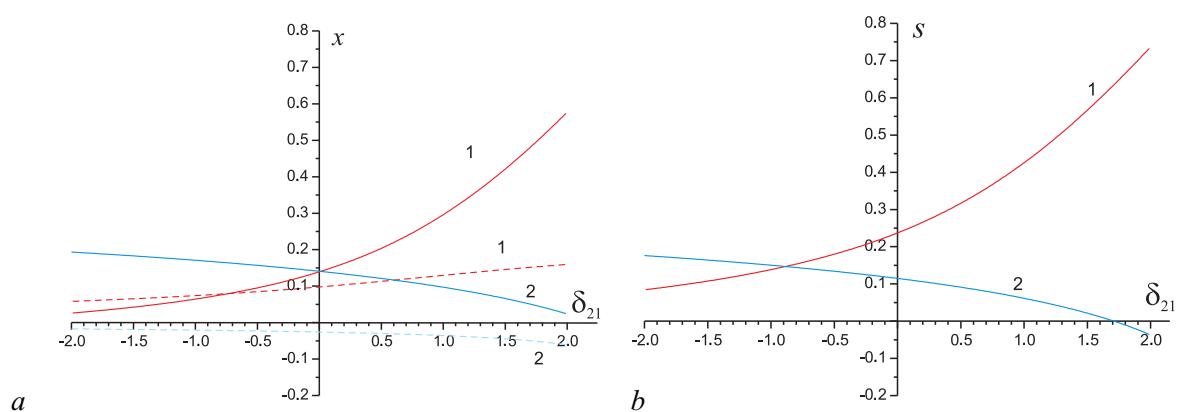


Рис. 2. Зависимости добавленных стоимостей  $x_1^*$  (сплошные линии),  $x_2^*$  (пунктирные линии) (а) и величины равновесного совокупного валового продукта  $S = x_1^* + x_2^*$  (б) от параметра связи  $\delta_{21}$  для нелинейности (7) при  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 0.2, \delta_{12} = 0.5$  — линии 1;  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = -0.3, \delta_{12} = 0.5$  — линии 2 (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependences of added values  $x_1^*$  (solid lines),  $x_2^*$  (dashed lines) (a) and the value of the equilibrium aggregate gross product  $S = x_1^* + x_2^*$  (b) on the link parameter  $k_{21}$  for nonlinearity (7) with  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 0.2, \delta_{12} = 0.5$  — lines 1;  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = -0.3, \delta_{12} = 0.5$  — lines 2 (color online)

Система (10) инвариантна относительно замен  $\Lambda_1 : (\gamma_1, \gamma_2, \delta_{21}, \delta_{12}, x_1, x_2) \Rightarrow (-\gamma_1, -\gamma_2, \delta_{21}, \delta_{12}, -x_1, -x_2)$ ,  $\Lambda_2 : (\gamma_1, \gamma_2, \delta_{21}, \delta_{12}, x_1, x_2) \Rightarrow (-\gamma_1, \gamma_2, -\delta_{21}, -\delta_{12}, -x_1, x_2)$ ,  $\Lambda_3 : (\gamma_1, \gamma_2, \delta_{21}, \delta_{12}, x_1, x_2) \Rightarrow (\gamma_1, -\gamma_2, -\delta_{21}, -\delta_{12}, x_1, -x_2)$ , поэтому достаточно рассмотреть динамику ансамбля, когда обе связи кооперативные и когда одна связь антагонистическая, другая кооперативная, например,  $\delta_{21} < 0, \delta_{12} > 0$ .

**3.1. Динамика модели двух производств с нелинейностью с насыщением.** Изучение равновесных состояний модели (10) можно провести путем анализа главных изоклин с последующим вычислением индекса Пуанкаре в точках их пересечения для определения типа особой точки. В результате установлено, что при сильных кооперативных связях при нулевых значениях  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$  и  $1 < b \leq 4$  модель (10) имеет три состояния равновесия, два из которых устойчивые, и одно седло. Представление о размерах и расположении областей существования трех состояний равновесия модели (10) в пространстве параметров дает рис. 3. На нем области существования трех состояний равновесия отмечены серым цветом разной интенсивности в зависимости от значений фиксированных параметров модели. Из представленных картин следует, что режим бистабильного поведения в модели (10) реализуется при кооперативных связях, когда хотя бы одна связь сильная. Область существования бистабильного режима размещается в области малых значений  $\gamma$ . В случае конкурентных связей  $\delta_{21} \cdot \delta_{12} < 0$  в фазовом пространстве модели (10) имеет место одно устойчивое состояние равновесия, в численных экспериментах режимы бистабильного поведения не выявлены.

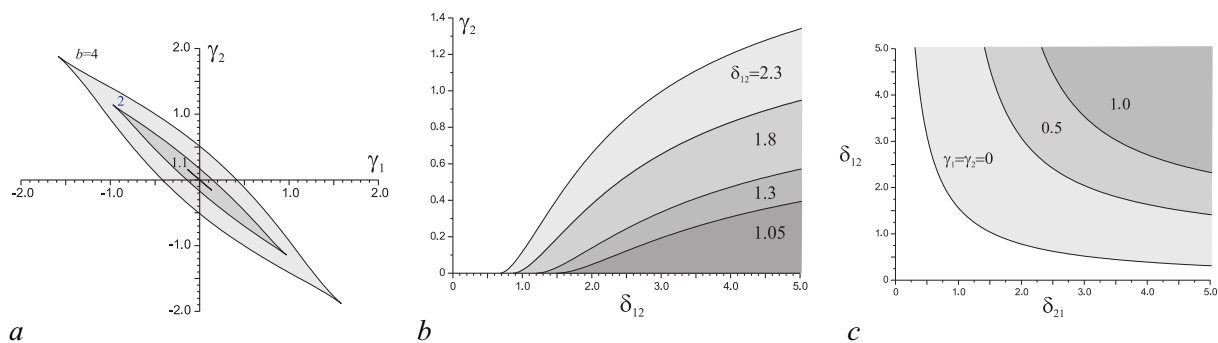


Рис. 3. Области существования трех состояний равновесия модели (10) с нелинейностью (7) при  $\delta_{21} = 1.7, \delta_{12} = 2.3, b = 4.0, 2.0, 1.1$  (a);  $\gamma_1 = 0, b = 4.0, \delta_{12} = 2.3, 1.8, 1.3, 1.05$  (b);  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, 0.5, 1.0, b = 4.0$  (c)

Fig. 3. Regions of existence of three equilibrium states of model (10) with nonlinearity (7) when  $\delta_{21} = 1.7, \delta_{12} = 2.3, b = 4.0, 2.0, 1.1$  (a);  $\gamma_1 = 0, b = 4.0, \delta_{12} = 2.3, 1.8, 1.3, 1.05$  (b);  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, 0.5, 1.0, b = 4.0$  (c)

### 3.2. Динамика модели двух производств с нелинейностью со спадающим участком.

Отличительной особенностью нелинейности (8) является наличие спадающего участка, что приводит к существованию у модели (5) при  $b > 4$  трех состояний равновесия.

Мы рассмотрели пограничное значение  $b = 4$ , когда в системе (5) существует лишь одно состояние равновесия. Несмотря на то, что исходная модель (5) с нелинейностью (8) содержит лишь одно устойчивое состояние равновесия, при объединении в ансамбль двух таких моделей рождается система с богатой динамикой. В частности, из анализа поведения главных изоклин следует, что модель (10) может иметь в фазовом пространстве до семи состояний равновесия. На рис. 4 приведены структуры плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (10) при кооперативных связях, когда обе связи сильные (рис. 4, a), одна связь сильная, другая слабая (рис. 4, b) и когда обе связи слабые (рис. 4, c). Здесь выделены области с различным количеством состояний

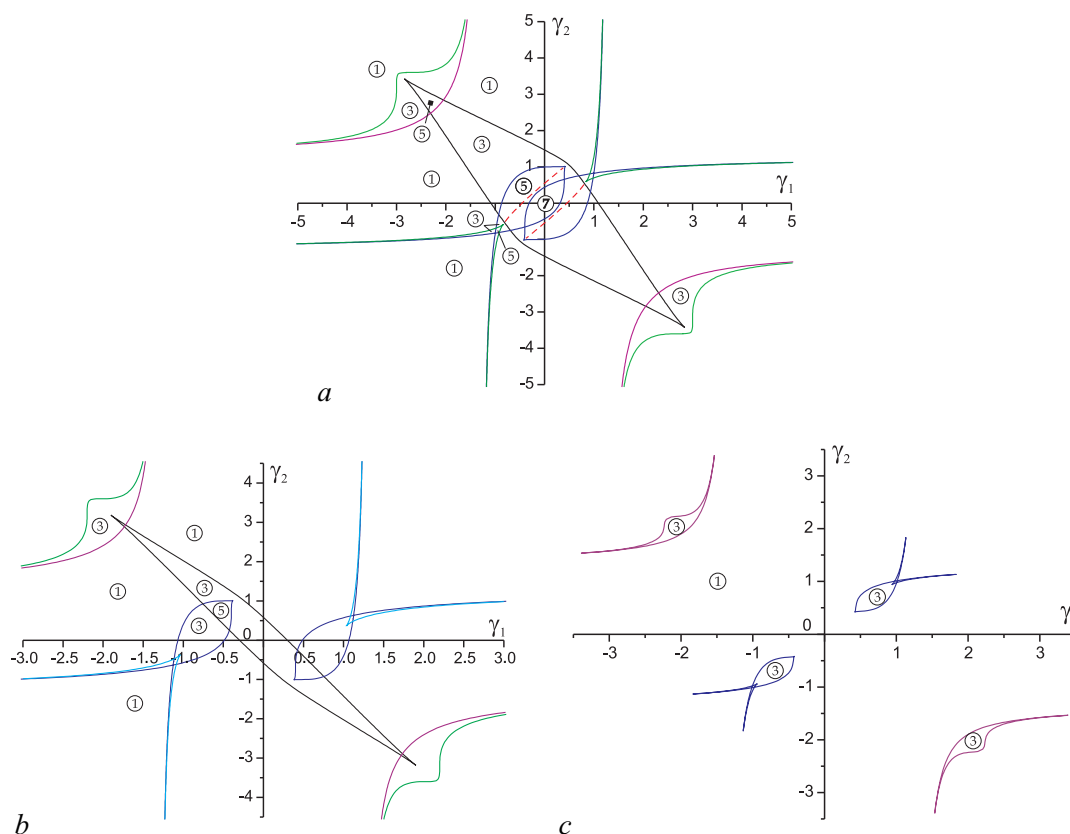


Рис. 4. Разбиение плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (10) с нелинейностью (8) на области с различным числом состояний равновесия при  $b = 4.0$ ,  $\delta_{21} = 1.7$ ,  $\delta_{12} = 2.3$  (a);  $\delta_{21} = 0.9$ ,  $\delta_{12} = 2.3$  (b);  $\delta_{21} = 0.9$ ,  $\delta_{12} = 0.9$  (c) (цвет онлайн)

Fig. 4. Partitioning the plane  $(\gamma_1, \gamma_2)$  of parameters of model (10) with nonlinearity (8) into regions with different numbers of equilibrium states when  $b = 4.0$ ,  $\delta_{21} = 1.7$ ,  $\delta_{12} = 2.3$  (a);  $\delta_{21} = 0.9$ ,  $\delta_{12} = 2.3$  (b);  $\delta_{21} = 0.9$ ,  $\delta_{12} = 0.9$  (c) (color online)

равновесия, общее число состояний равновесия характеризует цифра, заключенная в кружок. При этом число устойчивых состояний равновесия растет по мере увеличения общего количества состояний равновесия и равно 1, 2, 3 и 4 для областей с 1, 3, 5 и 7 состояниями равновесия соответственно. Из представленных диаграмм следует, что при сильных кооперативных связях ансамбль демонстрирует высокую мультистабильность в области малых начальных отклонений  $\gamma$  оценочных значений добавленной стоимости от плановых. Снижение силы связей уменьшает степень мультистабильности в области малых  $\gamma$ , вплоть до полного исчезновения. При этом при больших отклонениях  $\gamma$  зоны бистабильного поведения сохраняются.

Возможные фазовые портреты модели (10) с нелинейностью (8) приведены на рис. 5. Обратим внимание на рис. 5, b и рис. 5, c, где представлены фазовые портреты из области параметров с пятью состояниями равновесия и близкими значениями параметров. Здесь, несмотря на близость параметров, бассейны притяжения состояний равновесия 5 и 7 существенно различаются. На рис. 5, b стационарный режим, определяемый состоянием равновесия 5, не может реализовываться при начальных условиях из четвертого квадранта фазовой плоскости, а на рис. 5, c стационарный режим, определяемый состоянием равновесия 7, не может реализовываться при начальных условиях из второго квадранта. Перераспределение фазовых потоков к состояниям равновесия 5 и 7 происходит в результате совпадения выходящей сепаратрисы  $s$

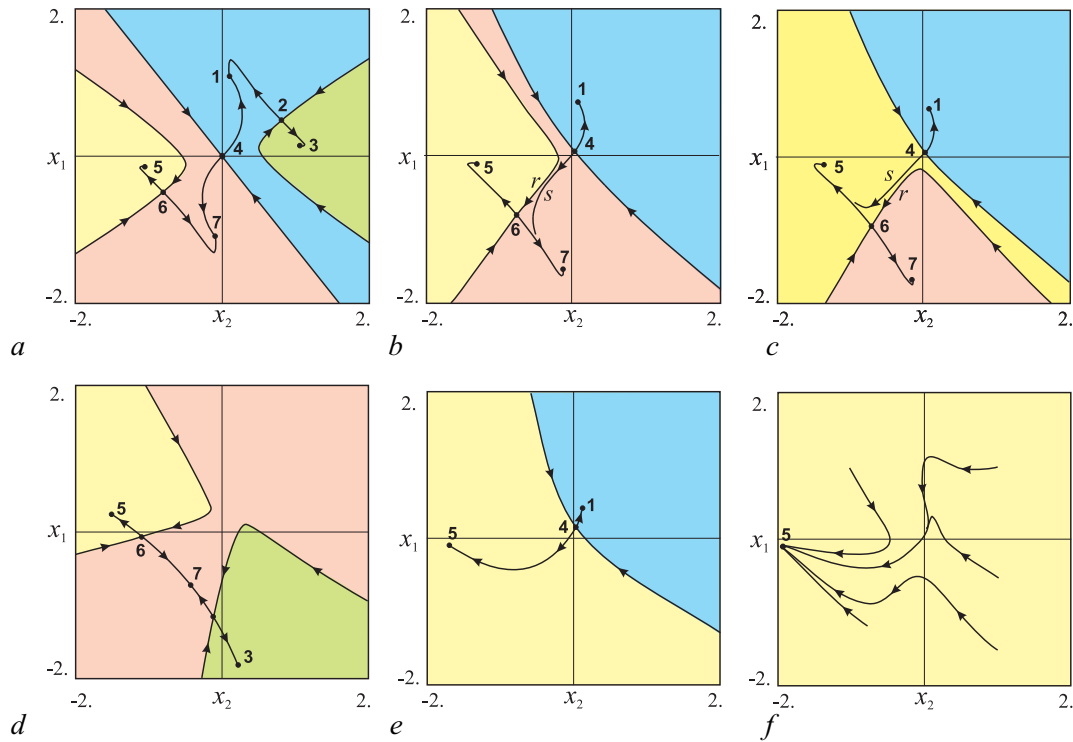


Рис. 5. Фазовые портреты модели (10) с нелинейностью (8) при  $\delta_{21}=1.7, \delta_{12}=2.3, b=4$   $\gamma_1=\gamma_2=0$  (a);  $\gamma_1=-0.4, \gamma_2=0$  (b);  $\gamma_1=-0.5, \gamma_2=0$  (c);  $\gamma_1=-0.9, \gamma_2=-0.7$  (d);  $\gamma_1=-0.95, \gamma_2=0$  (e);  $\gamma_1=-1.1, \gamma_2=0$  (f) (цвет онлайн)

Fig. 5. Phase portraits of the model (10) with nonlinearity (8) at  $\delta_{21}=1.7, \delta_{12}=2.3, b=4$   $\gamma_1=\gamma_2=0$  (a);  $\gamma_1=-0.4, \gamma_2=0$  (b);  $\gamma_1=-0.5, \gamma_2=0$  (c);  $\gamma_1=-0.9, \gamma_2=-0.7$  (d);  $\gamma_1=-0.95, \gamma_2=0$  (e);  $\gamma_1=-1.1, \gamma_2=0$  (f) (color online)

седла 4 и входящей сепаратрисы  $r$  седла 6. Бифуркационные кривые, отвечающие за образование гетероклинических траекторий, на рис. 4, а проведены пунктирными линиями.

Представление о структуре плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (10) с нелинейностью (8) при конкурентных связях дает рис. 6. На нем приведены картины, когда обе связи сильные (рис. 6, a), одна связь сильная, другая слабая (рис. 6, b) и когда обе связи слабые (рис. 6, c).

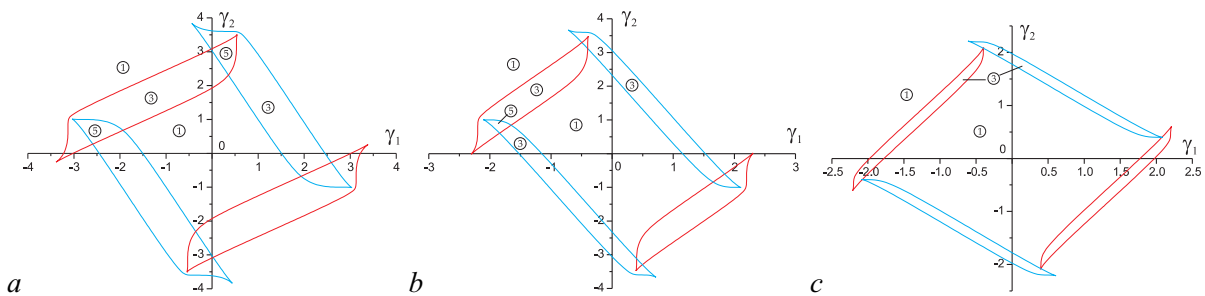


Рис. 6. Разбиение плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (10) с нелинейностью (8) на области с различным числом состояний равновесия при  $b = 4.0, \delta_{21} = -1.83, \delta_{12} = 2.3$  (a);  $\delta_{21} = -0.9, \delta_{12} = 2.3$  (b);  $\delta_{21} = -0.9, \delta_{12} = 0.9$  (c) (цвет онлайн)

Fig. 6. Partitioning the plane  $(\gamma_1, \gamma_2)$  of parameters of model (10) with nonlinearity (8) into regions with different numbers of equilibrium states when  $b = 4.0, \delta_{21} = -1.83, \delta_{12} = 2.3$  (a);  $\delta_{21} = -0.9, \delta_{12} = 2.3$  (b);  $\delta_{21} = -0.9, \delta_{12} = 0.9$  (c) (color online)

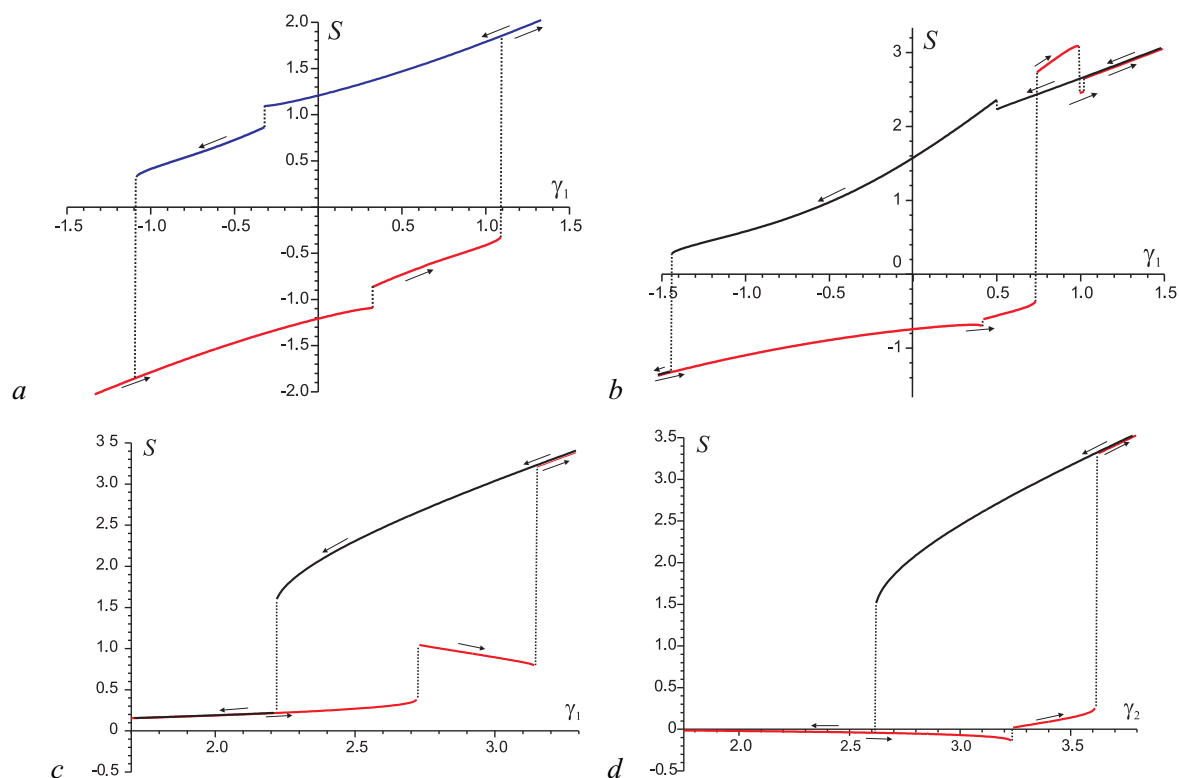


Рис. 7. Примеры зависимостей величины равновесного совокупного валового продукта  $S$ , рассчитанные по модели (10) с нелинейностью (8) при  $b = 4$ ,  $\delta_{21} = 1.7$ ,  $\delta_{12} = 2.3$ ,  $\gamma_2 = 0$  (a) и  $\gamma_2 = 0.7$  (b);  $\delta_{21} = -1.83$ ,  $\delta_{12} = 2.3$ ,  $\gamma_2 = -0.5$  (c) и  $\gamma_1 = 0.2$  (d) (цвет онлайн)

Fig. 7. Examples of dependencies of the value of the equilibrium aggregate gross product  $S$ , calculated using the model (10) with nonlinearity (8) at  $b = 4$ ,  $\delta_{21} = 1.7$ ,  $\delta_{12} = 2.3$ ,  $\gamma_2 = 0$  (a) and  $\gamma_2 = 0.7$  (b);  $\delta_{21} = -1.83$ ,  $\delta_{12} = 2.3$ ,  $\gamma_2 = -0.5$  (c) and  $\gamma_1 = 0.2$  (d) (color online)

Из приведенных картин следует, что области параметров с мультистабильным поведением ансамбля существуют при наличии хотя бы одной сильной связи, и располагаются они в области больших  $\gamma$ . В случае слабых связей ансамбль из двух связанных производств способен демонстрировать бистабильное поведение, которое также наблюдается при больших  $\gamma$ . Мультистабильное поведение системы (10) приводит гистерезисным явлениям. Примеры неоднозначного поведения модели двух связанных производств приведены на рис. 7. Здесь сплошные линии отражают изменение величины равновесного совокупного валового продукта  $S$ , штриховые линии воспроизводят скачкообразное изменение валового продукта, стрелочки указывают направление изменения параметра.

Что касается автоколебательных режимов в ансамбле двух связанных производств, то в процессе численных экспериментов с моделью (10) они не обнаружены.

#### 4. Ансамбль из трех связанных производств

Рассмотрим взаимодействие трех производств (рис. 8). Далее будем считать, что для всех систем плановые значения  $V_{S1} = V_{S2} = V_{S3} = V_S$  одинаковы, нелинейности дискриминаторов идентичны, инерционности цепей управления  $K_1(p) = K_2(p) = K(p) = (1 + ap)^{-1}$  одинаковы, параметр  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ .

Тогда динамика трех связанных систем будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 + \Phi(x_1) &= \gamma_1 + \delta_{21}\Phi(x_2) + \delta_{31}\Phi(x_3), \\ \frac{dx_2}{d\tau} + x_2 + \Phi(x_2) &= \gamma_2 + \delta_{12}\Phi(x_1) + \delta_{32}\Phi(x_3), \\ \frac{dx_3}{d\tau} + x_3 + \Phi(x_3) &= \gamma_3 + \delta_{13}\Phi(x_1) + \delta_{23}\Phi(x_2),\end{aligned}\quad (11)$$

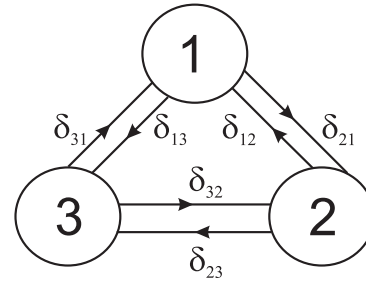


Рис. 8. Схема взаимодействия трех производств

где  $\delta_{ij}$  — коэффициенты связей от  $i$ -й системы к  $j$ -й. Fig. 8. Scheme of interaction of three productions

Ансамбль из трех элементов можно рассматривать как объединение трех пересекающихся пар:  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ . Каждая пара, в зависимости от параметров связей, имеет свое разбиение в плоскости параметров, соответствующих  $\gamma$ .

**4.1. Динамика модели трех производств с нелинейностью с насыщением.** Возьмем пару  $\{1, 2\}$  с нелинейностью (7) и параметрами  $b=3.7$ ,  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $\delta_{21}=4.6$ . В этом случае структуру фазового портрета модели (10) определяют три состояния равновесия:  $O_1(x_{11}^* = 3.72, x_{21}^* = 2.04)$ ,  $O_3(x_{13}^* = -2.14, x_{23}^* = -1.02)$  — устойчивые узлы и  $O_2(x_{12}^* = -0.12, x_{22}^* = -0.077)$  — седло. Свяжем пару  $\{1, 2\}$  однонаправленными связями с третьим элементом при  $\gamma_3 = 0.54$ , динамика которого определяется устойчивым состоянием равновесия с координатой  $x_3^* = 0.16$ . Сконструированный таким образом ансамбль наследует структуру фазового пространства модели пары  $\{1, 2\}$ . В случае кооперативных связей  $\delta_{13} = 0.75, \delta_{23} = 4.6$  структура фазового портрета модели (11) определяется устойчивыми состояниями равновесия  $O_1(x_{11}^*=3.72, x_{21}^*=2.04, x_{31}^*=2.71)$ ,  $O_3(x_{13}^*=-2.14, x_{23}^*=-1.02, x_{33}^*=-1.42)$  и седлом  $O_2(x_{12}^* = -0.12, x_{22}^* = -0.077, x_{32}^* = -0.08)$ . При антагонистических связях  $\delta_{13} = -0.75, \delta_{23} = -4.6$  модель (11) также имеет два устойчивых состояния равновесия  $O_1(x_{11}^* = 3.72, x_{21}^* = 2.04, x_{31}^* = -1.68)$ ,  $O_3(x_{13}^* = -2.14, x_{23}^* = -1.02, x_{33}^* = 2.44)$  и седло  $O_2(x_{12}^* = -0.12, x_{22}^* = -0.077, x_{32}^* = 0.66)$ .

Влияние обратных связей от третьего элемента к первым двум иллюстрирует рис. 9. Здесь линия  $l_1$  соответствует слиянию состояний равновесия  $O_3$  и  $O_2$ ; линия  $l_2$  — появлению двух новых

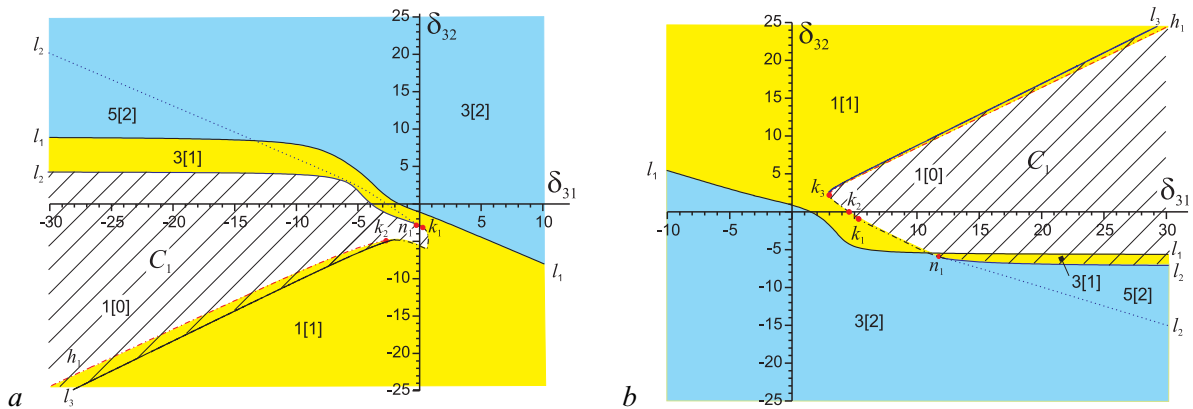


Рис. 9. Параметрический портрет модели (11) при  $b=3.7$ ,  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\gamma_3=0.54$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $\delta_{21}=4.6$  в случае  $\delta_{13} = 0.75, \delta_{23} = 2.7$  (a) и  $\delta_{13} = -0.75, \delta_{23} = -2.7$  (b) (цвет онлайн)

Fig. 9. Parametric portrait of the (11) when  $b=3.7$ ,  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\gamma_3=0.54$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $\delta_{21}=4.6$  at  $\delta_{13} = 0.75, \delta_{23} = 2.7$  (a) and  $\delta_{13} = -0.75, \delta_{23} = -2.7$  (b) (color online)



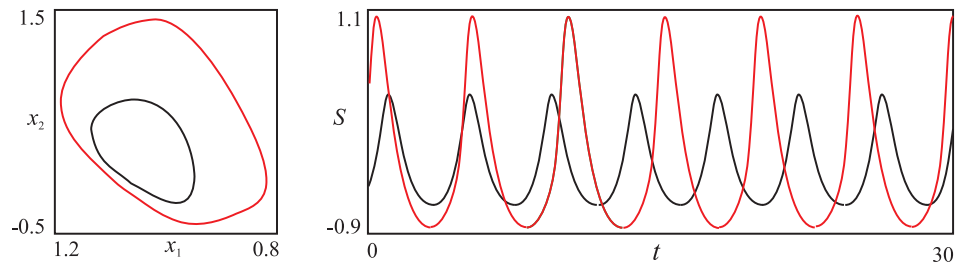


Рис. 10. Пример бистабильного автоколебательного поведения модели (11) и соответствующие ему зависимости  $S(t) = x_1 + x_2$  при  $b=3.7$ ,  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\gamma_3=0.54$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $\delta_{21}=4.6$ ,  $\delta_{13}=-0.75$ ,  $\delta_{23}=-2.7$ ,  $\delta_{31}=10$ ,  $\delta_{32}=-4.72183$  (цвет онлайн)

Fig. 10. Example of bistable self-oscillatory behavior of the model (11) and the corresponding dependence  $S(t) = x_1 + x_2$  at  $b=3.7$ ,  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\gamma_3=0.54$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $\delta_{21}=4.6$ ,  $\delta_{13}=-0.75$ ,  $\delta_{23}=-2.7$ ,  $\delta_{31}=10$ ,  $\delta_{32}=-4.72183$  (color online)

состояний равновесия  $O_4$  и  $O_5$ . Линия  $l_2$  содержит точку нейтральности  $n_1$ , которая делит эту линию на два участка. Участок кривой, отмеченный сплошной линией, соответствует слиянию устойчивого и седлового состояний равновесия, а участок кривой, отмеченный штриховой линией, отвечает слиянию неустойчивых состояний равновесия. Точка  $n_1$  является концевой для кривой  $h_1$  бифуркационной кривой Андронова–Хопфа (штрихпунктирная линия). В точках  $k_i$  на линии  $h_1$  первая ляпуновская величина обращается в ноль. Точки  $k_i$  разбивают линию  $h_1$  на участки мягкого и жесткого возбуждения колебаний. Участки кривой с жестким режимом возбуждения колебаний на рис. 9 отмечены красным цветом, с мягким — черным. Механизму жесткого возбуждения колебаний предшествует касательная бифуркация (на линии  $l_3$ ), в результате которой в фазовом пространстве модели (11) появляются устойчивый и неустойчивый предельные циклы.

Таким образом, линии  $l_1 - l_3$ ,  $h_1$  разбивают плоскость параметров  $(\delta_{31}, \delta_{32})$  на области с различным числом состояний равновесия и динамическим поведением. На рис. 9 выделенные области характеризуются парой чисел, где первое число отражает общее число состояний равновесия в данной области, а в квадратных скобках — число устойчивых состояний равновесия. Здесь также желтым цветом выделены области с одним устойчивым состоянием равновесия, голубым — с двумя устойчивыми состояниями равновесия, штриховкой отмечена область  $C_1$  существования автоколебательных режимов. Установлено, что в области  $C_1$  одновременно может существовать два автоколебательных режима. На рис. 10 приведены проекции одновременно существующих устойчивых предельных циклов. Область бистабильного автоколебательного режима мала, поэтому на рис. 9 она не отмечена.

#### 4.2. Динамика модели трех производств с нелинейностью со спадающим участком.

Возьмем пару  $\{1, 2\}$  с нелинейностью (8) и параметрами  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\delta_{21}=4.6$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $b=3.7$  и свяжем ее однонаправленной положительной связью с третьим элементом, где  $\delta_{13}=0.75$ ,  $\delta_{23}=2.7$ . При выбранных значениях параметров фазовый портрет определяют три устойчивых состояния равновесия:  $O_1(3.87, 0.12, 2.4258)$ ,  $O_3(-1.26, -0.07, -0.18)$  и  $O_5(-0.16, -1.45, -0.19)$ , а также седла  $O_2(-0.038, -0.027, -0.025)$ ,  $O_4(-0.53, -1.22, -0.23)$  с сепаратрисами. При нулевых связях  $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$  третий элемент ансамбля имеет одно устойчивое стационарное состояние равновесия в точке  $x_3^* = 0.68$ . Далее проанализируем влияние параметров обратных связей  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  от третьего элемента к первому и второму элементам ансамбля.

На рис. 11 приведена карта динамических режимов модели (11) на плоскости  $(\delta_{31}, \delta_{32})$ . Здесь области, где система (11) имеет разное число устойчивых состояний равновесия (стационарных режимов), окрашены различными цветами. Кроме того, каждому цвету области поставлена



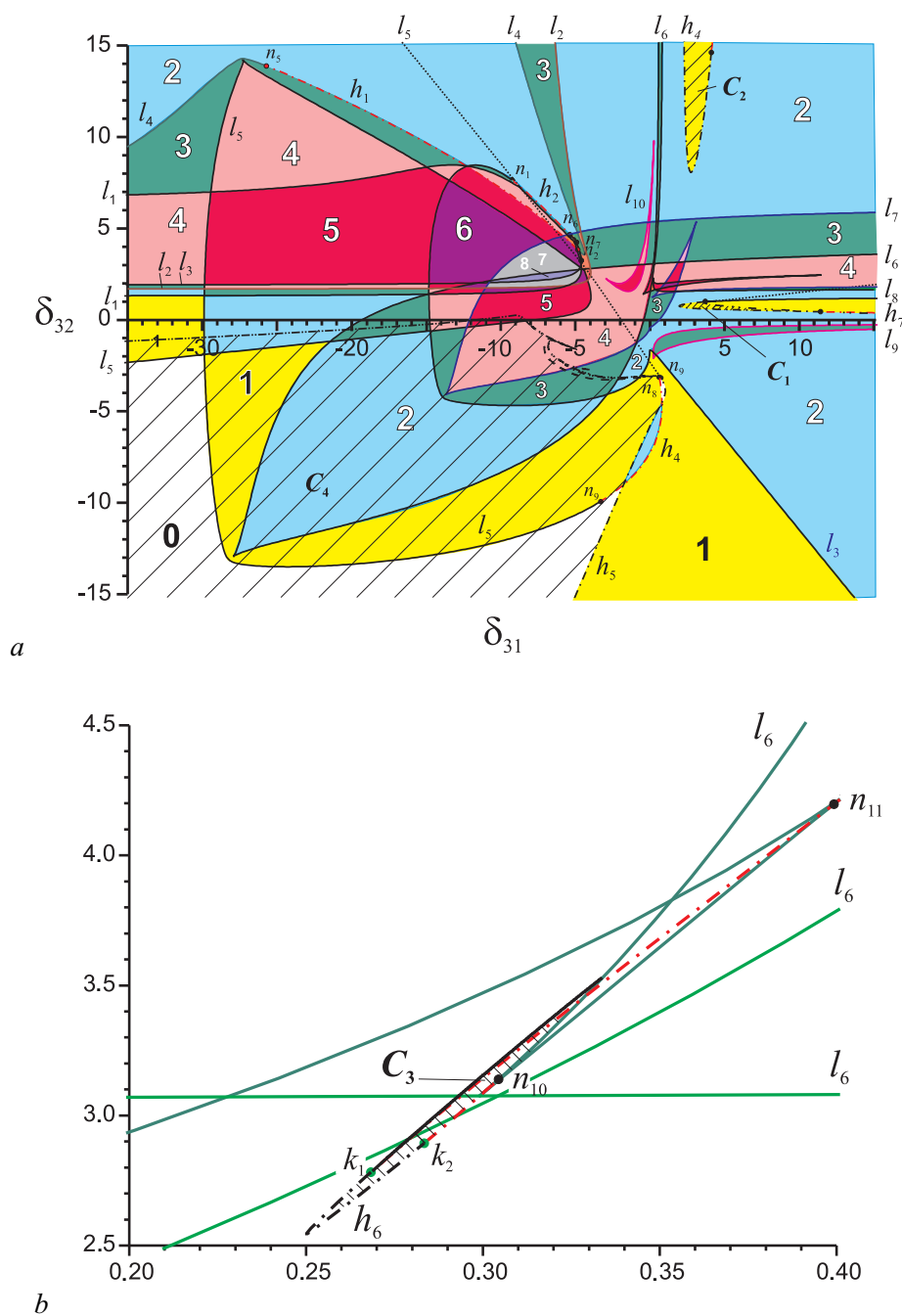


Рис. 11. Параметрический портрет модели (11) при  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = 2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ ,  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$  (a), увеличенный фрагмент параметрического портрета (b) (цвет онлайн)

Fig. 11. Parametric portrait of the (11) when  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = 2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ ,  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$  (a), enlarged fragment of parametric portrait (b) (color online)

в соответствие цифра, которая отражает число устойчивых состояний равновесия в этой области. Структуру разбиения определяют сплошные линии  $l_1 - l_{10}$ , соответствующие бифуркации двукратных состояний равновесия (седло-узловая бифуркация), а также штрихпунктирные линии  $h_1 - h_7$ , отражающие бифуркации Андронова–Хопфа. Бифуркационные кривые  $h_1 - h_7$  примыкают к кривым  $l_1 - l_9$  в точках нейтральности  $n_i$ . При этом линии, отмеченные черным

цветом, соответствуют мягкой смене устойчивости состояния равновесия и появлению в фазовом пространстве устойчивого предельного цикла. Красный цвет штрихпунктирной кривой характеризует жесткий механизм смены устойчивости, когда устойчивые предельные циклы не возникают. Точки, разделяющие участки разного цвета, соответствуют обращению в ноль первой ляпуновской величины. Штриховые линии  $l_5$  и  $l_8$  отражают слияние и исчезновение неустойчивых состояний равновесия. Эти бифуркации не оказывают существенного влияния на аттракторную динамику модели (11), линии  $l_5$  и  $l_8$  нанесены для более полного понимания бифуркационных переходов. Из анализа представленного разбиения плоскости  $(\delta_{31}, \delta_{32})$ , с учетом того, что остальные связи кооперативные<sup>1</sup>, следует:

- объединение трех элементов с одним стационарным состоянием кооперативными связями приводит к увеличению устойчивых стационарных режимов. В рассмотренном случае число одновременно существующих устойчивых состояний равновесия может достигать шести. Наиболее крупными областями мультистабильного поведения являются области с двумя, тремя и четырьмя устойчивыми состояниями равновесия;
- в ансамбле из трех элементов, связанных кооперативными связями, могут реализовываться регулярные автоколебательные режимы;
- в ансамбле из трех элементов, объединенных конкурентными связями, число одновременно существующих устойчивых стационарных режимов может достигать восьми. Также существуют такие значения параметров связей, когда в ансамбле устойчивые стационарные режимы отсутствуют, в этом случае реализуется автоколебательный режим.

На рис. 11 штриховкой отмечены области существования автоколебательных режимов  $C_1$ – $C_4$ . Область  $C_1$ , расположенная в первом квадранте параметрического портрета, ограничена кривыми: суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа (штрихпунктирная линия) и двукратного предельного цикла (нижняя границы области  $C_1$ ). Сверху область  $C_1$  ограничивают либо линии бифуркаций петли сепаратрис различной обходности, либо линии кризиса хаотического аттрактора. Хаотический аттрактор возникает в результате каскада бифуркаций удвоения периода при больших значениях  $\delta_{31}$ .

Область  $C_2$  размещается в первом квадранте, границами этой области служат бифуркационные кривые: Андронова–Хопфа (штрихпунктирная линия) и двукратного предельного цикла — сплошная линия, примыкающая к точке обращения в ноль первой ляпуновской величины. Автоколебательный режим, реализуемый при значениях параметров из области  $C_2$ , является регулярным, при вариациях параметров внутри области бифуркаций не испытывает.

Область  $C_3$ , в силу малых размеров, представлена на фрагменте 11, *b*. Границами этой области служат бифуркационные кривые Андронова–Хопфа, двукратного предельного цикла (касательная бифуркация) и петли сепаратрис седло-узла. На фрагменте в точках  $k_1$  и  $k_2$  первая ляпуновская величина обращается в ноль.

Область  $C_4$  — наиболее крупная область. Она размещается в третьем квадранте, то есть где параметры связей  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  являются антагонистическими. Отметим, что при больших значениях  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  автоколебательный режим становится глобально устойчивым, при уменьшении  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  глобальная устойчивость предельного цикла нарушается устойчивыми состояниями равновесия, а сам предельный цикл может терять устойчивость через бифуркации удвоения периода, превращаясь в хаотический аттрактор (рис. 12). На рис. 11 бифуркационная кривая, характеризующая первое удвоение периода, проведена пунктирной линией. Область существования хаотических

<sup>1</sup>Первый квадрант отражает случай, когда элементы ансамбля объединены только кооперативными связями — все связи положительны, в остальных квадрантах связи конкурентные.

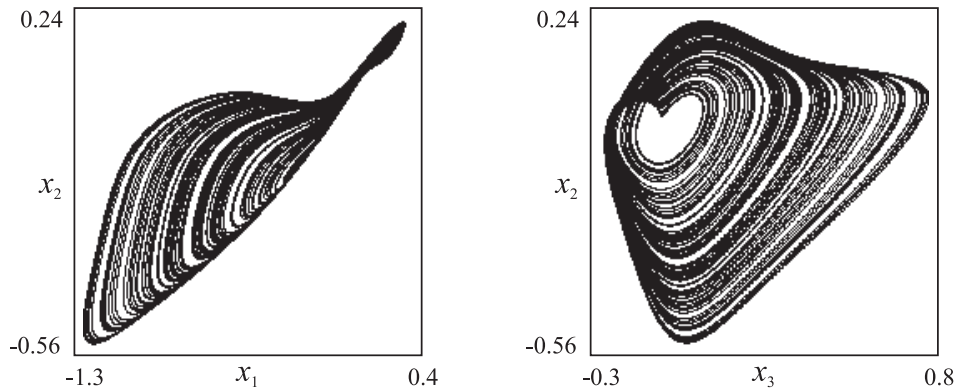


Рис. 12. Проекция хаотического аттрактора модели (11) при  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = 2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ ,  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$ ,  $\delta_{31} = -4.5$ ,  $\delta_{32} = -2.87$

Fig. 12. Projections of chaotic attractors of (11) when  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = 2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ ,  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$ ,  $\delta_{31} = -4.5$ ,  $\delta_{32} = -2.87$

колебаний в третьем квадранте несколько больше, чем в первом, но все равно невелика. Область  $C_4$ , где автоколебательный режим глобально устойчив, выделена темно-серым цветом.

Из анализа автоколебательных режимов следует:

- При кооперативных связях в пространстве параметров есть несколько областей, где реализуются автоколебательные режимы — области  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Области существования автоколебательных режимов имеют небольшие размеры, при этом сами автоколебательные режимы не являются глобально устойчивыми. В области  $C_2$  автоколебательный режим может быть как регулярным, так и хаотическим.
- В случае конкурентных связей область существования автоколебательного режима  $C_4$  существенно больше областей  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Автоколебательный режим может быть как регулярным, так и хаотическим, при этом регулярный автоколебательный режим может быть глобально устойчивым.

Теперь рассмотрим пару  $\{1, 2\}$  с нелинейностью (8) с конкурентными (антагонистическими) связями  $\delta_{21} = -4.6$ ,  $\delta_{12} = -2.6$ ,  $b = 3.7$  и свяжем ее однонаправленными отрицательными связями с третьим элементом, где  $\delta_{13} = -0.75$ ,  $\delta_{23} = -2.7$ . При  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$  фазовый портрет модели (11) определяют три устойчивых состояния равновесия:  $O_1(-0.1, 1.84, 0.028)$ ,  $O_3(1.63, -0.04, 0.18)$  и  $O_5(-3.0, 0.14, -1.07)$ , а также седла  $O_2(0.02, 0.01, 0.02)$ ,  $O_4(-1.35, 0.99, -0.18)$  с одномерными выходящими сепаратрисами. Влияние обратных связей от третьего элемента ансамбля к паре  $\{1, 2\}$  отражает рис. 13, который представляет разбиение плоскости параметров  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  на области с различным числом устойчивых состояний равновесия, которые помечены различным цветом, а также цифрой, отражающей число стационарных режимов. Границами выделенных областей служат кривые бифуркаций двукратного состояния равновесия — сплошные линии и Андронова–Хопфа — штрихпунктирные линии. Штриховкой отмечены области, при значениях параметров из которых существует регулярный автоколебательный режим. Эти области ограничены штрихпунктирной линией мягкой бифуркации Андронова–Хопфа, а также штрихпунктирной линией с двумя точками, которая включает в себя бифуркационные кривые петли сепаратрис, двукратного предельного цикла, а также бифуркации удвоения периода. Отметим, что при рассмотренных значениях параметра бифуркации удвоения периода является жесткой, которая не приводит к удвоению периодов автоколебательных режимов. Существование хаотических колебаний не установлено.

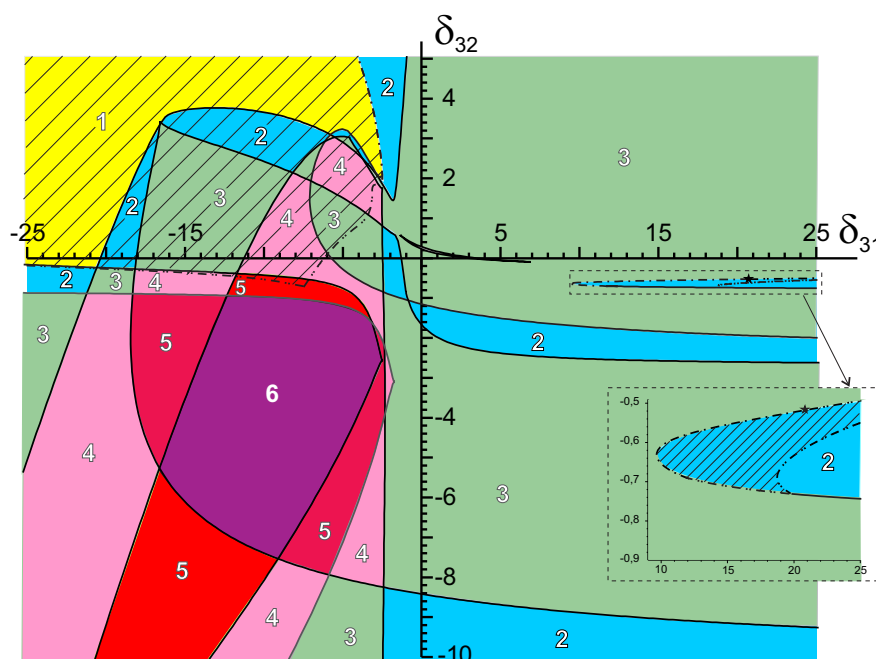


Рис. 13. Параметрический портрет модели (11) при  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = -2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = -2.7$ ,  $\delta_{13} = -0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$  (цвет онлайн)

Fig. 13. Parametric portrait of the (11) when  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = -2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = -2.7$ ,  $\delta_{13} = -0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$  (color online)

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать вывод о важности связей в ансамблях связанных элементов-производств. При этом коллективное поведение элементов в ансамбле определяется как количеством элементов в ансамбле, так и правилом оценки сравниваемых величин добавленной стоимости (видом нелинейности  $\Phi$  дискриминатора  $D$ ). Можно констатировать, что увеличение элементов ансамбля с изначально однозначным стационарным поведением приводит к возникновению в пространстве параметров моделей зон мультистабильного поведения, к появлению автоколебательных режимов, как регулярных, так и хаотических.

### Заключение

В работе рассмотрена динамика эндогенной модели производственной сети в зависимости от типа связей между элементами-производствами. Элементы сети моделировались как системы автоматического управления. В качестве управляемой переменной принят экономический показатель — добавленная стоимость, что позволяет изучать модельную динамику валовой добавленной стоимости по всей сети, а следовательно, динамику изменения объема ВВП. Проведенные численные эксперименты с малыми ансамблями элементов показали, что включение кооперативных и конкурентных связей между элементами сети ведет к появлению регулярных и хаотических колебаний в динамике изменения ВВП, то есть к возникновению экономических циклов. Естественно, что предложенная нами модель не может быть основой для прогнозирования конкретных данных реальных экономических циклов, однако позволяет сделать заключение о перспективности предложенной модели и подхода для дальнейших экспериментов по изучению качественных особенностей экономических колебаний, причин их возникновения и характера их зависимости от экономических связей между участниками рынка.

## Список литературы

1. Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 17. С. 50–61.
2. Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты (окончание) // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 18. С. 42–56.
3. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
4. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование процессов синхронизации бизнес-циклов в ансамбле связанных экономических осцилляторов // Изв. вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64, № 10. С. 833–843. DOI: 10.52452/00213462\_2021\_64\_10\_833.
5. Samuelson P., Nordhaus W. Economics. New York: McGraw Hill, 1992. 784 p.
6. Baxter M., King R. G. Measuring business cycles: approximate band-pass filter for economic time series // The Review of Economics and Statistics. 1999. Vol. 81, no. 4. P. 575–593. DOI: 10.1162/003465399558454
7. Hansen A. H. Business Cycles and National Income. New York: Norton, 1951. 639 p.
8. Лебедева А. С. Генезис теории экономического цикла // Международный научно-исследовательский журнал. 2013. № 8. Р. 31–34
9. Вечканов Г. С., Вечканова Г. Р. Макроэкономика. М.: Питер, 2008. 240 с.
10. McCullen N. J., Ivanchenko M. V., Shalfeev V. D., Gale W. F. A dynamical model of decision-making behaviour in network of consumers with application to energy choices // Int. J. Bifurc. Chaos. 2011. Vol. 21, no. 9. P. 2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
11. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: ННГУ, 2013. 366 с.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
13. Матросов В. В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 54 с.

## References

1. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results. Economic Analysis: Theory and Practice. 2011;10(17):50–61 (in Russian).
2. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results (end). Economic Analysis: Theory and Practice. 2011;10(18):42–56 (in Russian).
3. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4):515–537 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
4. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of the business-cycle synchronization processes in an ensemble of coupled economic oscillators. Radiophys. Quantum Electron. 2022;64(10): 750-759. DOI: 10.1007/s11141-022-10176-1.
5. Samuelson P., Nordhaus W. Economics. New York: McGraw Hill; 1992. 784 p.
6. Baxter M, King RG. Measuring business cycles: approximate band-pass filter for economic time series. The Review of Economics and Statistics. 1999;81(4):575–593. DOI: 10.1162/003465399558454.
7. Hansen AH. Business Cycles and National Income. New York: Norton, 1951. 639 p.

8. Lebedeva AS. The genesis of economic cycle theory. Int. Research Journal. 2013;(8):31–34.
9. Vechkanov GS, Vechkanova GR. Macroeconomics. M.: Piter; 2002. 240 p.
10. McCullen NJ, Ivanchenko MV, Shalfeev VD, Gale WF. A dynamical model of decision-making behaviour in network of consumers withb application to energy choices. Int. J. Bifurc. Chaos. 2011;21(9):2467–2480. DOI: 10.1142/S02.18127411030076.
11. Shalfeev V, Matrosov VV. Nonlinear Dynamics of Phase Synchronization Systems. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Publishing; 2013. 366 p. (in Russian).
12. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. Theory of Oscillators. New York: Dover Publ.; 1987. 815 p.
13. Matrosov VV. Dynamics of Nonlinear Systems: Software Complex for Studying Nonlinear Dynamical Systems with Continuous Time. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Publishing; 2002. 54 p. (in Russian).

*Матросов Валерий Владимирович* — родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «Прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н. И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Научный руководитель 5 кандидатских диссертаций. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак) и научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».

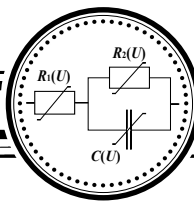


Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: matrosov@rf.unn.ru  
 ORCID: 0000-0003-3146-111X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 24397

*Шалфеев Владимир Дмитриевич* — родился в 1941 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1963). Доктор физико-математических наук (1991), профессор (1991). Заведующий лабораторией, заместитель директора по научной работе НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ (1963–1976). Декан факультета вычислительной математики и кибернетики ГГУ (1976–1981), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (1981–2012). Руководитель 12 кандидатских и 3 докторских диссертаций. Лауреат премии Ленинского комсомола (1974), премии РАН им. А. А. Андропова (2012). Действительный член Академии инженерных наук РФ (2000). Область научных интересов: динамика нелинейных систем синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Автор и соавтор более 200 публикаций, в том числе 8 книг.



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: shalfeev@rf.unn.ru  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 19690



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 530.182, 532.516, 532.517, 517.928

DOI: 10.18500/0869-6632-003163  
EDN: OZISPR

## О структуре течения вязкой жидкости при периодических воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве

*В. Л. Сенников*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия  
E-mail: [sennitskii@yandex.ru](mailto:sennitskii@yandex.ru)

Поступила в редакцию 27.09.2024, принята к публикации 30.01.2025,  
опубликована онлайн 3.02.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Целью работы является обнаружение и изучение особенностей динамики вязкой жидкости, испытывающей периодические по времени воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве, в возможно более простых гидромеханических условиях (способных обеспечить нетривиальное поведение жидкости). **Методы.** Используются аналитические методы исследования краевых задач для уравнений Навье–Стокса и неразрывности — метод возмущений, метод Фурье. **Результаты.** Поставлена и решена новая задача о течении вязкой жидкости. Гидромеханическая система состоит из несжимаемой вязкой жидкости и движущейся абсолютно твердой стенки, оказывающей на жидкость периодические воздействия. Обнаружена новая особенность динамики вязкой жидкости, состоящая в том, что в простейших гидромеханических условиях жидкость на фоне колебаний (в среднем по времени) совершает движение нового типа — стационарное, затухающее с расстоянием от стенки движение, характеризующееся наличием слоистой структуры. **Заключение.** Полученные результаты могут использоваться, в частности, в научном поиске подходов к управлению гидромеханическими системами, при разработке методов организации заданных течений жидких сред.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, периодические по времени воздействия, выделенное направление в пространстве, структура течения.

**Для цитирования:** Сенников В. Л. О структуре течения вязкой жидкости при периодических воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 531–544. DOI: 10.18500/0869-6632-003163. EDN: OZISPR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On the structure of a viscous liquid flow under periodic influences which have no predominant direction in space

V. L. Sennitskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: [✉sennitskii@yandex.ru](mailto:✉sennitskii@yandex.ru)

Received 27.09.2024, accepted 30.01.2025, available online 3.02.2025,

published 31.07.2025

**Abstract.** Purpose of the work is the revealing and the researching of peculiarities of the dynamics of a viscous liquid which is undergoing by periodic in time influences possessing no predominant direction in space under possible simplest hydro-mechanical conditions (which are able to provide non-trivial behavior of the liquid). *Methods.* The analytic investigational methods for boundary problems for Navier–Stokes and continuity equations are used that are the method of perturbations, the method of Fourier. *Results.* A new problem on the flow of a viscous liquid is formulated and solved. The hydro-mechanical system consists of an incompressible viscous liquid and a moving absolutely solid wall which creates periodic influences to the liquid. A new peculiarity of the viscous liquid dynamics is revealed consisting in that in simplest hydro-mechanical conditions the liquid in the background of oscillations (in average of time) performs a motion of a new type — a stationary fading with the distance from the wall motion which is characterized by the presence of a laminate structure. A physical interpretation of the formulation of the problem under consideration is given. *Conclusion.* The obtained results can be used in particular in a scientific search of ways to control hydro-mechanical systems, under a developing methods of a creation of prescribed flows of liquid media.

**Keywords:** viscous liquid, periodic in time influences, predominant direction in space, structure of flow.

**For citation:** Sennitskii V.L. On the structure of a viscous liquid flow under periodic influences which have no predominant direction in space. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4):531–544. DOI: 10.18500/0869-6632-003163

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Периодические по времени воздействия, процессы чрезвычайно широко и разнообразно представлены в природе и технике. Периодическим (колебательным, вибрационным) воздействиям могут подвергаться, в частности, гидромеханические системы. Изучению динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях посвящено значительное число работ (см., например, [1–30], а также [31–57]). К настоящему времени в данном научном направлении получен ряд содержательных результатов, выявлены новые гидромеханические эффекты, значительно повышен уровень понимания особенностей динамики гидромеханических систем. В частности, обнаружены эффекты парадоксального поведения твердого включения в вибрирующей жидкости [1, 2, 7, 21, 31–34, 42], «самопроизвольного» перехода твердого тела в колеблющейся вязкой жидкости в положение с заданной ориентацией в пространстве [19], преимущественно однонаправленного вращения твердого тела и вязкой жидкости [22]. Установлено наличие «разрешенных» и «запрещенных» состояний подвергающейся периодическим по времени воздействиям гидромеханической системы, для которых решение задачи о движении системы соответственно существует и не существует [15]. Обнаружен эффект «левитации» жидкости [29, 52]. Построена математическая модель гидромеханического аналога «маятника Капицы» [12, 58]. Введены основополагающие понятия однородных и неоднородных колебаний жидкости, определены количественные характеристики неоднородности колебаний жидкости [5, 7, 11, 21]. Доказано существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в вибрирующей жидкости [3, 4, 7, 21, 36, 44]. Результаты, получаемые в рассматриваемом



научном направлении, могут представлять, в частности, существенный прикладной интерес (см. в связи с этим, например, [35, 53–57]).

В настоящей работе поставлена и решена новая задача о движении вязкой жидкости, порождаемом оказываемыми на жидкость периодическими воздействиями, не имеющими выделенного направления в пространстве. Установлено, что периодические по времени воздействия на жидкость могут приводить к среднему по времени движению жидкости, которое характеризуется наличием пространственной структуры периодического типа.

## 1. Постановка задачи

Имеется гидромеханическая система, состоящая из вязкой несжимаемой жидкости и абсолютно твердого тела (стенки)  $\eta$  (рис. 1). Тело  $\eta$  ограничено плоскостью  $\Gamma_\eta$ , перпендикулярной к оси  $X$  инерциальной прямоугольной системы координат  $X, Y, Z$  и пересекающейся с осью  $X$  в точке  $X = A$ . Жидкость заполняет область  $\Omega$ :  $A < X < \infty$ ,  $-\infty < Y < \infty$ ,  $-\infty < Z < \infty$ . Стенка  $\eta$  совершает поступательное движение вдоль осей  $X, Y$ ; координата  $A$  и скорость  $U$  движения стенки  $\eta$  в направлении оси  $Y$  заданным образом периодически с периодом  $T$  изменяются со временем  $t$  ( $A = \hat{A} \sin 2\pi t/T$ ;  $U = \hat{U} \sin(2\pi t/T + \varphi)$ ;  $\hat{A} > 0$ ,  $\hat{U} > 0$  — постоянные;  $\varphi$  — параметр, который может иметь значения  $\pi/4$ ,  $-\pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $-3\pi/4$ ).

Требуется определить периодическое по времени движение жидкости.

Пусть  $\tau = t/T$ ;  $x = X/(\hat{U}T)$ ;  $y = Y/(\hat{U}T)$ ;  $\varepsilon = \hat{A}/(\hat{U}T)$ ;  $a = A/(\hat{U}T)$ ;  $u = U/\hat{U}$ ;  $\mathbf{V}$ ,  $\rho$  и  $\nu$  — соответственно скорость, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости;  $\mathbf{v} = \mathbf{V}/\hat{U} = v_x(x, \tau)\mathbf{e}_x + v_y(x, \tau)\mathbf{e}_y$  ( $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  — единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями осей соответственно  $X$  и  $Y$ );  $P$  — давление в жидкости;  $p = P/(\rho\hat{U}^2) = p(x, \tau)$ ;  $Re = \hat{U}^2 T/\nu$  — число Рейнольдса.

Задачу о движении жидкости составляют уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности и условия на границе  $\Gamma_\eta$  и на бесконечности

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \frac{da}{d\tau} \mathbf{e}_x + u \mathbf{e}_y \quad \text{на } \Gamma_\eta \quad (\text{при } x = a); \quad (3)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow \frac{da}{d\tau} \mathbf{e}_x \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (4)$$

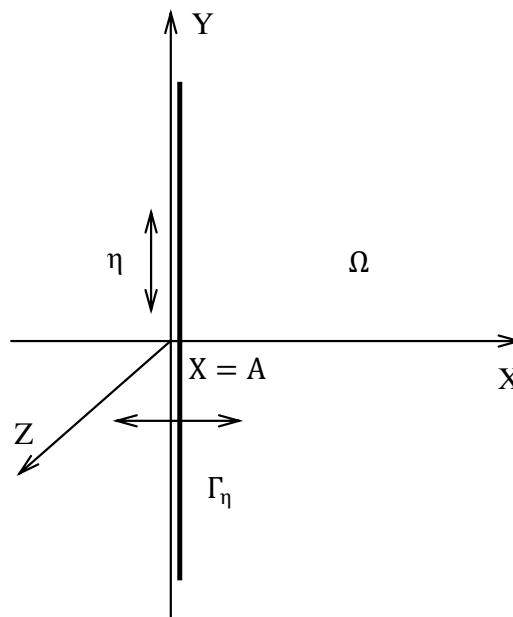


Рис. 1. Гидромеханическая система

Fig. 1. The hydro-mechanical system

## 2. Решение задачи

Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

Согласно (5) имеем

$$v_x = v_x(\tau). \quad (6)$$

Из (3), (4), (6) следует

$$v_x = 2\pi\varepsilon \cos 2\pi\tau. \quad (7)$$

Уравнение (1) эквивалентно уравнениям

$$\frac{dv_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}; \quad (9)$$

Из (7), (8) следует

$$p = 4\pi^2\varepsilon(\sin 2\pi\tau)x + c(\tau). \quad (10)$$

Отметим, что в задаче о движении жидкости (в задаче (1)–(4)) отсутствуют какие-либо граничные условия, которым должно удовлетворять (безразмерное) давление  $p$ .

Согласно (3), (4), (7), (9) имеем

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} + 2\pi\varepsilon(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad \text{в } \Omega; \quad (11)$$

$$v_y = u \quad \text{при } x = a; \quad (12)$$

$$v_y \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Будем рассматривать задачу (11)–(13) при малых по сравнению с единицей значениях  $\varepsilon$ . Применим метод разложения по степеням малого параметра [59, 60]. Предположим, что

$$v_y \sim v_0 + \varepsilon v_1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Используя (11)–(14), в  $\varepsilon^N$ -приближении ( $N = 0, 1$ ) получим

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_N}{\partial x^2} = -2N\pi(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x} \quad \text{в } \bar{\Omega}; \quad (15)$$

$$v_N = (1 - N)u - N(\sin 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x} \quad \text{при } x = 0; \quad (16)$$

$$v_N \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (17)$$

где  $\bar{\Omega}$  — область  $0 < X < \infty$ ,  $-\infty < Y < \infty$ ,  $-\infty < Z < \infty$ .

Пусть  $N = 0$ . Задача (15)–(17) имеет решение

$$v_0 = \text{Imag} (e^{i\varphi} e^{-qx} e^{2\pi i\tau}). \quad (18)$$

Здесь  $q = (1 + i)\sqrt{\pi Re}$ .

Пусть  $N = 1$ . Задача (15)–(17) имеет решение

$$v_1 = \bar{v} + \tilde{v}, \quad (19)$$

где

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \operatorname{Real} (e^{i\varphi} q e^{-qx}), \quad \tilde{v} = -\frac{1}{2} \operatorname{Real} (e^{i\varphi} q e^{-qx} e^{4\pi i \tau}).$$

Формулами

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + (v_0 + \varepsilon v_1) \mathbf{e}_y \quad (20)$$

и (7), (10), (18), (19) определяется приближенное решение задачи (1)–(4).

Обратимся к вопросу о среднем по времени движении жидкости. Используя (7), (18)–(20), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \varepsilon \bar{v} \mathbf{e}_y = \frac{\varepsilon \lambda}{\sqrt{2}} e^{-\lambda x} \cos(\lambda x - \varphi - \pi/4) \mathbf{e}_y \quad \text{в } \bar{\Omega}'. \quad (21)$$

Здесь

$$\langle \dots \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} \dots d\tau'$$

— оператор усреднения по (безразмерному) времени  $\tau$  (действие данного оператора на периодическую функцию времени  $\tau$  — безразмерную скорость  $\mathbf{v}$  — состоит в том, что он сохраняет среднее значение функции неизменным и «преобразует» в нуль все ее остальные «составные части»; результатом действия данного оператора на периодическую функцию  $\tau$  — скорость  $\mathbf{v}$  — является средняя по времени  $\tau$  безразмерная скорость жидкости);  $\lambda = \sqrt{\pi Re}$ ;  $\bar{\Omega}'$  — полупространство  $0 \leq X < \infty$ ,  $-\infty < Y < \infty$ ,  $-\infty < Z < \infty$ .

Формула (21), в частности, свидетельствует о наличии эффекта, состоящего в том, что в рассматриваемых гидромеханических условиях на фоне колебаний жидкость совершает стационарное движение.

Остановимся на описании свойств среднего по времени движения жидкости. Согласно (21) в полупространстве  $\bar{\Omega}'$  на фоне колебаний имеет место следующее.

1. Если  $\varphi = \pi/4$  (рис. 2, а), то на плоскостях  $P_k : x = x_k = k\pi/\lambda$ ,  $-\infty < Y < \infty$ ,  $-\infty < Z < \infty$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) скорость жидкости равна нулю; плоскостями  $P_l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) область, занимаемая жидкостью, разбивается на слои  $L_l : x_{l-1} < x < x_l$  ( $-\infty < Y < \infty$ ,  $-\infty < Z < \infty$ ); толщина каждого слоя  $L_l$  составляет  $x_l - x_{l-1} = \pi/\lambda$ ; направление скорости жидкости в каждом слое  $L_l$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{e}_y$  или противоположно направлению вектора  $\mathbf{e}_y$ ; в слое  $L_1$  жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением вектора  $\mathbf{e}_y$ ; направление скорости жидкости в каждом слое  $L_{l+1}$  противоположно направлению скорости жидкости в слое  $L_l$ ; в каждом слое  $L_l$  на плоскости  $P_l^* : x = x_l^* = (l - 3/4)\pi/\lambda$  модуль скорости  $|\langle \mathbf{v} \rangle|$  имеет максимум, составляющий  $(\varepsilon\lambda/2) \exp(-\lambda x_l^*)$ .

2. Если  $\varphi = -\pi/4$  (рис. 2, б), то на плоскостях  $P_l : x = x_l = (l - 1/2)\pi/\lambda$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) скорость жидкости равна нулю; плоскостями  $P_l$  область, занимаемая жидкостью, разбивается на слои  $L_l : x_{l-1} < x < x_l$  ( $x_0 = 0$ ); толщина слоя  $L_1 : 0 < x < x_1$  составляет  $x_1 = \pi/(2\lambda)$ ; толщина каждого слоя  $L_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) составляет  $x_m - x_{m-1} = \pi/\lambda$ ; направление скорости жидкости в каждом слое  $L_l$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{e}_y$  или противоположно направлению вектора  $\mathbf{e}_y$ ; в слое  $L_1$  жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением вектора  $\mathbf{e}_y$ ; направление скорости жидкости в каждом слое  $L_{l+1}$  противоположно направлению скорости жидкости в слое  $L_l$ ; в каждом слое  $L_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) на плоскости  $P_m^* : x = x_m^* = (m - 5/4)\pi/\lambda$  модуль скорости  $|\langle \mathbf{v} \rangle|$  имеет максимум, составляющий  $(\varepsilon\lambda/2) \exp(-\lambda x_m^*)$ ; в слое  $L_1$  максимум  $|\langle \mathbf{v} \rangle|$  отсутствует, наибольшее значение модуля скорости  $|\langle \mathbf{v} \rangle|$  достигается на плоскости  $P_0 : x = x_0 = 0$  и составляет  $\varepsilon\lambda/\sqrt{2}$ .

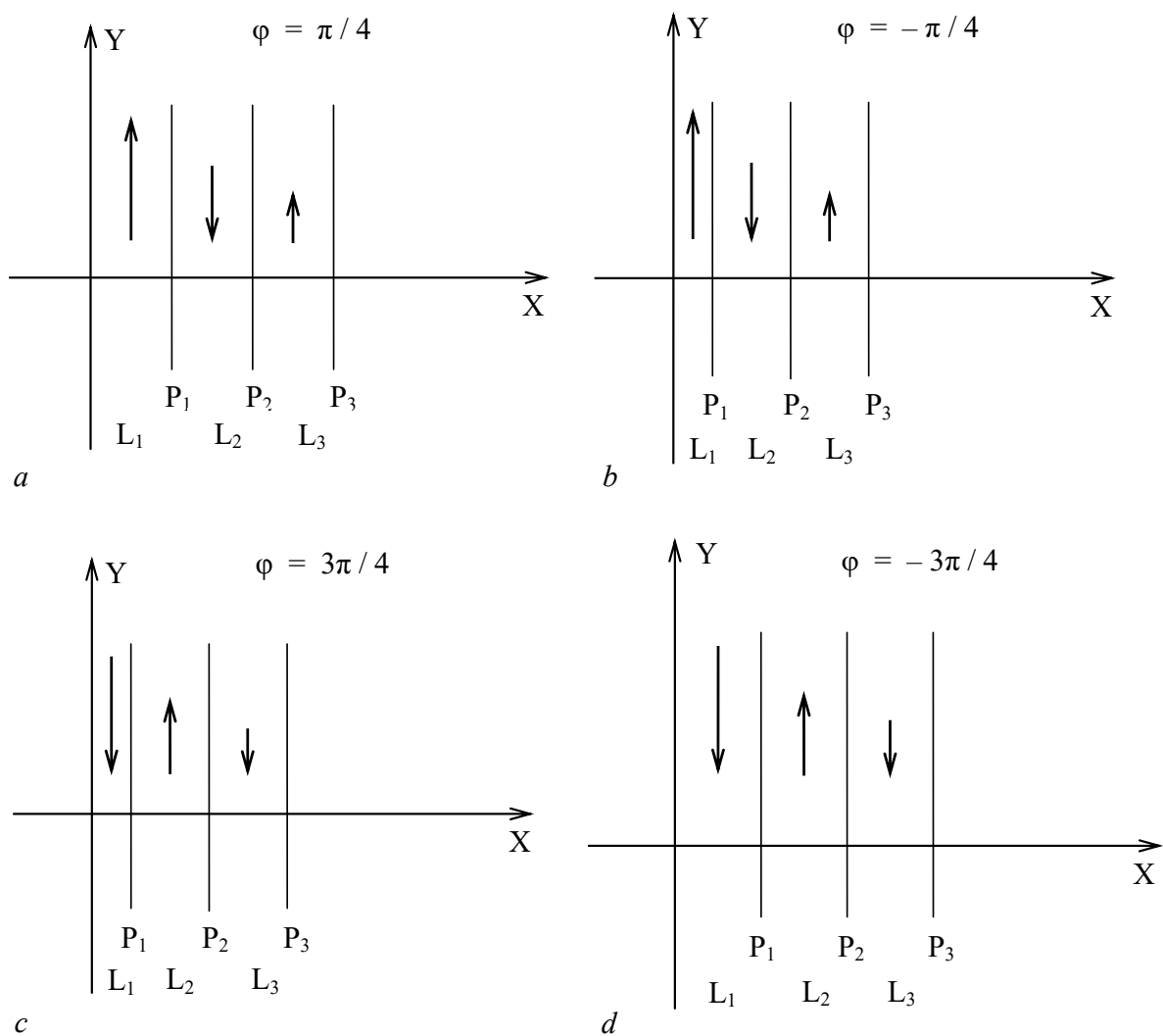


Рис. 2. Фрагменты качественной картины среднего по времени движения жидкости при различных значениях параметра  $\varphi$

Fig. 2. Fragments of the qualitative picture of the average in time liquid motion under various values of the parameter  $\varphi$

3. Если  $\varphi = 3\pi/4$  (рис. 2, c), то на плоскостях  $P_l : x = x_l = (l - 1/2)\pi/\lambda$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) скорость жидкости равна нулю; плоскостями  $P_l$  область, занимаемая жидкостью, разбивается на слои  $L_l : x_{l-1} < x < x_l$  ( $x_0 = 0$ ); толщина слоя  $L_1 : 0 < x < x_1$  составляет  $x_1 = \pi/(2\lambda)$ ; толщина каждого слоя  $L_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) составляет  $x_m - x_{m-1} = \pi/\lambda$ ; направление скорости жидкости в каждом слое  $L_l$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{e}_y$  или противоположно направлению вектора  $\mathbf{e}_y$ ; в слое  $L_1$  жидкость движется в направлении, противоположном направлению вектора  $\mathbf{e}_y$ ; направление скорости жидкости в каждом слое  $L_{l+1}$  противоположно направлению скорости жидкости в слое  $L_l$ ; в каждом слое  $L_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) на плоскости  $P_m^* : x = x_m^* = (m - 5/4)\pi/\lambda$  модуль скорости  $|\langle \mathbf{v} \rangle|$  имеет максимум, составляющий  $(\varepsilon\lambda/2) \exp(-\lambda x_m^*)$ ; в слое  $L_1$  максимум  $|\langle \mathbf{v} \rangle|$  отсутствует, наибольшее значение модуля скорости  $|\langle \mathbf{v} \rangle|$  достигается на плоскости  $P_0 : x = x_0 = 0$  и составляет  $\varepsilon\lambda/\sqrt{2}$ .

4. Если  $\varphi = -3\pi/4$  (рис. 2, d), то на плоскостях  $P_k : x = x_k = k\pi/\lambda$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) скорость жидкости равна нулю; плоскостями  $P_l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) область, занимаемая жидкостью,

разбивается на слои  $L_l : x_{l-1} < x < x_l$ ; толщина каждого слоя  $L_l$  составляет  $x_l - x_{l-1} = \pi/\lambda$ ; направление скорости жидкости в каждом слое  $L_l$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{e}_y$  или противоположно направлению вектора  $\mathbf{e}_y$ ; в слое  $L_1$  жидкость движется в направлении, противоположном направлению вектора  $\mathbf{e}_y$ ; направление скорости жидкости в каждом слое  $L_{l+1}$  противоположно направлению скорости жидкости в слое  $L_l$ ; в каждом слое  $L_l$  на плоскости  $P_l^* : x = x_l^* = (l - 3/4)\pi/\lambda$  модуль скорости  $|\langle \mathbf{v} \rangle|$  имеет максимум, составляющий  $(\varepsilon\lambda/2) \exp(-\lambda x_l^*)$ .

Формула (21) и все описанные в пунктах 1–4 свойства среднего по времени движения жидкости имеют место для любого значения числа Рейнольдса  $Re > 0$ .

Отметим, что несмотря на различия (толщина первого слоя, направление движения жидкости в слое), все рассмотренные течения жидкости (в каждый промежуток времени, вновь и вновь) порождаются и поддерживаются воздействиями, периодическими во времени, и при этом — вследствие этого — имеют стационарную структуру, стационарное «почти» периодическое строение в пространстве. Содержание данного положения (основанного на формуле (21)) может быть кратко выражено следующим образом: периодическая структура во времени способна порождать и сохранять (поддерживать) стационарную структуру в пространстве. Наряду с данным моментом существенный интерес представляет также то, что обнаруженная стационарная пространственная структура движения жидкости является «почти» периодической (периодической с точностью до наличия затухания движения жидкости с возрастанием расстояния от источника воздействий — движущейся стенки). Согласно (21) (и изложенному в пунктах 1–4) затухание движения жидкости с возрастанием расстояния от стенки тем слабее, и при этом толщины слоев однонаправленного среднего по времени движения жидкости тем больше, чем меньше значение числа Рейнольдса  $Re > 0$ .

### Заключение

В настоящей работе содержатся новые результаты в изучении динамики вязкой жидкости при периодических по времени воздействиях, характеризующихся отсутствием выделенного направления в пространстве. Рассмотрена задача о движении вязкой жидкости, граничащей с твердым телом, оказывающим на жидкость периодические воздействия. Выявлены новые особенности среднего движения жидкости.

Присутствующие в данной работе и в ряде других исследований (см., например, [25–27, 29, 30]) периодические по времени воздействия, характеризующиеся отсутствием выделенного направления в пространстве, представляют интерес, в частности, ввиду того, что при таких воздействиях на гидромеханические системы (в среднем по времени) каждое частичное периодическое воздействие (например, воздействие на жидкость, связанное с движением стенки  $\eta$  вдоль оси  $X$  (или вдоль оси  $Y$ ) в задаче (1)–(4)) является нулевым, «отсутствует»; в среднем по времени «ничего не происходит» (например, стенка  $\eta$  «стоит на месте»), но свободные части гидромеханических систем (части систем, движение которых не задано) совершают среднее движение. Причиной эффектов среднего движения свободных частей систем является согласованность (друг с другом) воздействий, оказываемых на системы, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения [7, 21, 25, 26, 30, 61].

Полученные результаты, в частности, могут использоваться в качестве теоретической основы при организации направленных экспериментальных исследований нетривиальной динамики жидкости при периодических воздействиях. Результаты работы указывают на наличие принципиальной возможности эффективного использования периодических воздействий, не имеющих выделенного направления в пространстве, для создания заданных течений жидкости и управления движением жидких сред.

## Список литературы

1. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Доклады АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. Сенницкий В. Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 1985. Т. 26, № 5. С. 19–23.
3. Сенницкий В. Л. О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 1988. Т. 29, № 6. С. 107–113.
4. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Доклады АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
5. Sennitskii V. L. On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // In: Proceedings of the International workshop on G-jitter. 13–19 June, 1993, Potsdam, USA. Potsdam: Clarkson University, 1993. P. 178–186.
6. Lyubimov D. V. New approach in the vibrational convection theory // In: Proc. 14 IMACs Congress on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, Georgia, USA. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 1994. P. 59–68.
7. Сенницкий В. Л. Движение включений в колеблющейся жидкости // Сибирский физический журнал. 1995. № 4. С. 18–26.
8. Иванова А. А., Козлов В. Г., Эвеск П. Динамика цилиндрического тела в заполненной жидкостью секторе цилиндрического слоя при вращательных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 29–39.
9. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
10. Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф. Вибрационная подъемная сила, действующая на тело в жидкости вблизи твердой поверхности // Доклады АН СССР. 2005. Т. 402, № 4. С. 488–491.
11. Сенницкий В. Л. О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2007. Т. 48, № 1. С. 79–85.
12. Сенницкий В. Л. О колебательном движении неоднородного твердого шара в вибрирующей жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2009. Т. 50, № 6. С. 27–35.
13. Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д. Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 6. С. 63–73.
14. Kozlov V. G., Ivanova A. A., Schipitsyn V. D., Stambouli M. Lift force on the cylinder in viscous liquid under vibration // Acta Astronaut. 2012. Vol. 79. P. 44–51. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.04.013.
15. Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л. Пример движения цилиндрического твердого тела в вязкой жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2013. Т. 54, № 2. С. 81–87.
16. Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л. О движении твердых частиц в колеблющейся жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2013. Т. 54, № 3. С. 74–78.
17. Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д. Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // Прикл. мех. техн. физ. 2014. Т. 55, № 5. С. 55–63.
18. Vlasova O. A., Kozlov V. G. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid // Microgravity Sci. Technol. 2015. Vol. 27. P. 297–303. DOI: 10.1007/s12217-015-9460-y.
19. Сенницкий В. Л. О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128. DOI: 10.17377/SIBJIM.2015.18.110.
20. Kozlov N. V., Vlasova O. A. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled

- cavity at modulated rotation // *Fluid Dyn. Res.* 2016. Vol. 48, no. 5. P. 055503. DOI: 10.1088/0169-5983/48/5/055503.
21. Сенницкий В. Л. Парадоксальное движение жидкости // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* 2017. № 8. С. 28–33. DOI: 10.17513/mjpf.11753.
  22. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97. DOI: 10.17377/sibjim.2017.20.210.
  23. Власова О. А., Козлов В. Г., Козлов Н. В. Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // *Прикл. мех. техн. физ.* 2018. Т. 59, № 2. С. 39–49. DOI: 10.15372/PMTF20180105.
  24. Коновалов В. В., Любимова Т. П. Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твердых частиц в жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2019. Т. 12, № 1. С. 48–56. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.5.
  25. Сенницкий В. Л. О движении вязкой жидкости в отсутствие выделенного направления в пространстве // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* 2021. № 2. С. 67–71. DOI: 10.17513/mjpf.13181.
  26. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2021. Т. 24, № 2. С. 126–133. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.210.
  27. Сенницкий В. Л. О течении вязкой жидкости в поле силы тяжести // *Теплофизика и аэромеханика.* 2021. Т. 28, № 3. С. 373–377.
  28. Коновалов В. В., Любимова Т. П. Влияние акустических вибраций на взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости // В сб.: *Пермские гидродинамические научные чтения: Сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова* / Отв. редактор Т. П. Любимова. Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2022. С. 254–261.
  29. Сенницкий В. Л. Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2022. Т. 19, № 1. С. 241–247. DOI: 10.33048/semi.2022.19.018.
  30. Сенницкий В. Л. Особенности динамики вязкой жидкости со свободной границей при периодических воздействиях // *Известия вузов. ПНД.* 2024. Т. 32, № 2. С. 197–208. DOI: 10.18500/0869-6632-003091.
  31. Сенницкий В. Л. Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // *Прикл. мех. техн. физ.* 1986. Т. 27, № 4. С. 31–36.
  32. Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // *Доклады АН СССР.* 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
  33. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // В кн.: *Конвективные течения.* Пермь: Издательство Пермского педагогического института, 1987. С. 61–71.
  34. Челомей В. Н. Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
  35. Сенницкий В. Л. О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // В кн.: *Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации 1988 г.* М: Наука, 1989. С. 267.
  36. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // *Прикл. мех. и техн. физ.* 1993. Т. 34, № 1. С. 100–101.
  37. Lyubimov D. V. Thermovibrational flows in nonuniform systems // *Microgravity Quarterly.* 1994. Vol. 4, no. 1. P. 221–225.
  38. Kozlov V. G. Solid body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration // *Europhysics Letters.* 1996. Vol. 36, iss. 9. P. 651–656. DOI: 10.1209/epl/i1996-00282-0.

39. Сенницкий В. Л. О поведении газового пузыря в вязкой колеблющейся жидкости в присутствии силы тяжести // Прикл. мех. техн. физ. 1997. Т. 38, № 5. С. 73–79.
40. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Meradji S., Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase // J. Crystal Growth. 1997. Vol. 180, iss. 3–4. P. 648–659. DOI: 10.1016/S0022-0248(97)00294-7.
41. Любимов Д. В., Перминов А. В., Черепанов А. А. Генерация осреднённых течений в вибрационном поле вблизи поверхности раздела сред // В кн.: Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: изд. Перм. гос. университета, 1998. С. 204–221.
42. Сенницкий В. Л. Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // Прикл. мех. техн. физ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
43. Lavrenteva O. M. On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Europ. J. Appl. Math. 1999. Vol. 10, no. 3. P. 251–263. DOI: 10.1017/S0956792599003745.
44. Сенницкий В. Л. Движение пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
45. Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л. Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикл. мех. техн. физ. 2004. Т. 45, № 4. С. 102–106.
46. Lyubimov D., Lyubimova T., Vorobev A., Moitabi A., Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part I: Non-uniform heating // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 564. P. 159–183. DOI: 10.1017/S0022112006001418.
47. Hassan S., Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container // J. Appl. Mech. 2006. Vol. 73, no. 1. P. 72–78. DOI: 10.1115/1.1992516.
48. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Shklyaev S. V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18. P. 012101. DOI: 10.1063/1.2137358.
49. Shevtsova V., Melnikov D., Legros J. C., Yan Y., Saghir Z., Lyubimova T., Sedelnikov G., Roux B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19. P. 017111. DOI: 10.1063/1.2409622.
50. Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф. Вибрационное взаимодействие сферического тела с границами полости // Известия РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 31–40.
51. Lyubimov D. V., Baydin A. Y., Lyubimova T. P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // Microgravity Sci. Technology. 2013. Vol. 25. P. 121–126. DOI: 10.1007/s12217-012-9336-3.
52. Сенницкий В. Л. О «левитации» жидкости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2021. № 6. С. 87–90. DOI: 10.17513/mjprfi.13236.
53. Сенницкий В. Л. Эффекты парадоксального движения вязкой жидкости в поле силы тяжести // В кн.: Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации - 2021: Материалы Всероссийской научно-технической конференции. 18–20 ноября 2021 года, Пермь, Россия. Пермь: ПНИПУ, 2021. Т. 1. С. 138–142.
54. Сенницкий В. Л. Движение включения в вибрирующей жидкости // В кн.: Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации - 2022: Материалы Всероссийской научно-технической конференции. 16–18 ноября 2022 года, Пермь, Россия. Пермь: ПНИПУ, 2022. С. 207–209.
55. Сенницкий В. Л. Вынужденные вращательные колебания гидромеханической системы // В кн.: Сборник статей Международной научно-технической конференции Минские научные чтения - 2022. 07–09 декабря 2022 года, Минск, Беларусь. Минск: БГТУ, 2022. Т. 3. С. 181–186.
56. Сенницкий В. Л. О диагностике гидромеханической системы // В кн.: Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации - 2023: Материалы Всероссийской научно-



технической конференции, 15–17 ноября 2023 года, Пермь, Россия. Пермь: ПНИПУ, 2023. С. 205–207.

57. Сенницкий В. Л. О движении включения в жидкой среде // В кн.: Гидропроцессы в катализе. V Научно-технологический симпозиум, 3–6 октября 2024 года, Сочи, Россия. Новосибирск: Институт катализа СО РАН, 2024. С. 180–182.
58. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44, № 1. С. 7–20. DOI: 10.3367/UFNr.0044.195105b.0007.
59. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 352 с.
60. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: ГИФ-МЛ, 1958. 408 с.
61. Сенницкий В. Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикл. мех. техн. физ. физика. 2000. Т. 41, № 1. С. 57–62.

## References

1. Chelomei VN. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. Sov. Phys. Doklady. 1983;270(1): 62–67 (in Russian).
2. Sennitskii VL. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1985;26(5):620–623. DOI: 10.1007/BF00915307.
3. Sennitskii VL. Motion of a gas bubble in a viscous vibrating liquid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1988;29(6):865–870. DOI: 10.1007/BF00858387.
4. Sennitskii VL. The predominantly unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid. Sov. Phys. Doklady. 1991;319(1):117–119 (in Russian).
5. Sennitskii VL. On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid. In: Proceedings of the International workshop on G-jitter. Potsdam (USA): Clarkson University; 1993. P. 178–186.
6. Lyubimov DV. New approach in the vibrational convection theory. In: Proc. 14 IMACs Congress on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, Georgia, USA. Atlanta: Georgia Institute of Technology; 1994. P. 59–68.
7. Sennitskii VL. The motion of inclusions in an oscillating liquid. Siberian Physical Journal. 1995;(4):18–26 (in Russian).
8. Ivanova AA, Kozlov VG, Evesque P. Dynamics of a cylindrical body in a liquid-filled sector of a cylindrical layer under rotational vibration. Fluid Dyn. 1998;33:488–496. DOI: 10.1007/BF02698213.
9. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Cherepanov AA. Dynamics of Interfaces in Vibrational Fields. M.: Fizmatlit; 2003. 216 p. (in Russian).
10. Ivanova AA, Kuzaev AF, Kozlov VG. Vibrational lift force acting on a body in a fluid near a solid surface. Doklady Physics. 2005;50(6):311–314. DOI: 10.1134/1.1958123.
11. Sennitskii VL. Motion of an inclusion in uniformly and nonuniformly vibrating liquids. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2007;48:65–70. DOI: 10.1007/s10808-007-0009-8.
12. Sennitskii VL. Pulsating motion of an inhomogeneous solid sphere in a vibrating liquid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2009;50:936–943. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0127-6>
13. Ivanova AA, Kozlov VG, Shchipitsyn VD. A light cylinder under horizontal vibration in a cavity filled with a fluid. Fluid Dyn. 2010;45(6):889–897. DOI: 10.1134/S0015462810060062.
14. Kozlov VG, Ivanova AA, Schipitsyn VD, Stambouli M. Lift force on the cylinder in viscous liquid under vibration. Acta Astronaut. 2012;79:44–51. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.04.013.

15. Pyatigorskaya OS, Sennitskii VL. Example of motion of a cylindrical solid in a viscous liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013;54(2):237–242. DOI: 10.1134/S0021894413020089.
16. Pyatigorskaya OS, Sennitskii VL. Motion of solid particles in an oscillating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013;54(3):404–407. DOI: 10.1134/S0021894413030085.
17. Ivanova AA, Kozlov VG, Shchipitsyn VD. Lift force acting on a cylindrical body in a fluid near the boundary of a cavity performing translational vibrations. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2014;55(5):773–780. DOI: 10.1134/S002189441405006X.
18. Vlasova OA, Kozlov VG. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid. *Microgravity Sci. Technol.* 2015;27:297–303. DOI: 10.1007/s12217-015-9460-y.
19. Sennitskii VL. On the prescribed orientation of a solid inclusion in a viscous liquid. *Siberian Journal of Industrial Mathematics.* 2015;18(1):123–128 (in Russian). DOI: 10.17377/SIBJIM.2015.18.110.
20. Kozlov NV, Vlasova OA. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation. *Fluid Dyn. Res.* 2016;48(5):055503. DOI: 10.1088/0169-5983/48/5/055503.
21. Sennitskii VL. Paradoxical motion of a liquid. *International Journal of Applied and Fundamental Research.* 2017;(8):28–33 (in Russian). DOI: 10.17513/mjpf.11753.
22. Sennitskii VL. Predominantly unidirectional rotation of a solid body and a viscous liquid. *J. Appl. Ind. Math.* 2017;11:284–288. DOI: 10.1134/S1990478917020144
23. Vlasova OA, Kozlov VG, Kozlov NV. Lift force acting on a heavy solid in a rotating liquid-filled cavity with a time-varying rotation rate. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2018;59:219–228. DOI: 10.1134/S0021894418020050.
24. Konovalov VV, Lyubimova TP. Numerical study of the influence of vibrations on the interaction in an ensemble of gas bubbles and solid particles in a liquid. *Fluid Dyn.* 2019;12(1):48–56 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.5.
25. Sennitskii VL. On the motion of a viscous liquid in the absence of a predominant direction in space. *International Journal of Applied and Fundamental Research.* 2021;(2):67–71 (in Russian). DOI: 10.17513/mjpf.13181.
26. Sennitskii VL. Predominantly unidirectional flow of a viscous fluid. *J. Appl. Ind. Math.* 2021;15:326–330. DOI: 10.1134/S1990478921020149.
27. Sennitskii VL. On the flow of a viscous liquid in a gravity field. *Thermophys. Aeromech.* 2021;28:347–351. DOI: 10.1134/S0869864321030057.
28. Konovalov VV, Lyubimova TP. Influence of acoustic vibrations on the interaction of a gas bubble and a solid particle in a liquid. In: Lyubimova TP, editor. *Perm hydrodynamical scientific readings. Digest of articles by the materials of VIII all-Russian conference dedicated for the memory of professors G. Z. Gershuny, E. M. Juhovitskii and D. V. Lyubimov.* Perm: Perm state national research university; 2022. P. 254–261 (in Russian).
29. Sennitskii VL. On peculiarities of a liquid flow in a gravity field // *Siberian Electronic Mathematical Reports.* 2022;19(1):241–247 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2022.19.018.
30. Sennitskii VL. Peculiarities of the dynamics of a viscous liquid with a free boundary under periodic influences. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(2):197–208 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003091.
31. Sennitskii VL. Motion of a sphere in fluid caused by vibrations of another sphere. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1986;27:501–505. DOI: 10.1007/BF00910190.
32. Lugovtsov BA, Sennitskii VL. Motion of a body in a vibrating liquid. *Sov. Phys. Doklady.* 1986;289(2):314–317 (in Russian).
33. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Cherepanov AA. On the motion of a solid body in a vibrating fluid. In: *Convective Flows.* Perm: Perm. Ped. Institute Publishing; 1987. P. 61–71 (in Russian).

34. Chelomei VN. Selected Works. M.: Mashinostroenie; 1989. 336 p. (in Russian).
35. Sennitskii VL. On the motion of a gas bubble in a viscous vibrating liquid. In: Gagarin's Scientific Readings on Cosmonautics and Aviation 1988. M.: Nauka; 1989. P. 267 (in Russian).
36. Sennitskii VL. Predominantly unidirectional motion of a compressible solid body in a vibrating liquid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1993;34:96–97. DOI: 10.1007/BF00851812.
37. Lyubimov DV. Thermovibrational flows in nonuniform systems. Microgravity Quarterly. 1994;4(1): 221–225.
38. Kozlov VG. Solid body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration. Europhysics Letters. 1996;36(9):651–656. DOI: 10.1209/epl/i1996-00282-0.
39. Sennitskii VL. Behavior of a gas bubble in a viscous oscillating liquid in the presence of gravity. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1997;38:718–723. DOI: 10.1007/BF02467883.
40. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Meradji S, Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase. J. Crystal Growth. 1997;180(3–4):648–659. DOI: 10.1016/S0022-0248(97)00294-7.
41. Lyubimov DV, Perminov AV, Cherepanov AA. Generation of averaged flows in a vibrational field close to the interface of mediums. In: Vibration Effects in Hydrodynamics. Perm: Perm University Publishing; 1998. P. 204–221 (in Russian).
42. Sennitskii VL. Motion of a sphere in a vibrating liquid in the presence of a wall. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1999;40:662–668. DOI: 10.1007/BF02468441.
43. Lavrenteva OM. On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid. Europ. J. Appl. Math. 1999;10(3):251–263. DOI: 10.1017/S0956792599003745.
44. Sennitskii VL. The motion of a pulsating rigid body in an oscillating viscous liquid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2001;42(1):72–76. DOI: 10.1023/A:1018808628235.
45. Pyatigorskaya OS, Sennitskii VL. Motion of a sphere in a liquid caused by vibrations of another sphere. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2004;45:542–545. DOI: 10.1023/B:JAMT.0000030331.35411.2e.
46. Lyubimov D, Lyubimova T, Vorobev A, Moitabi A, Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part I: Non-uniform heating. Journal of Fluid Mechanics. 2006;564:159–183. DOI: 10.1017/S0022112006001418.
47. Hassan S, Lyubimova TP, Lyubimov DV, Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container. J. Appl. Mech. 2006;73(1):72–78. DOI: 10.1115/1.1992516.
48. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Shklyaev SV. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. Physics of Fluids. 2006;18:012101. DOI: 10.1063/1.2137358.
49. Shevtsova V, Melnikov D, Legros JC, Yan Y, Saghir Z, Lyubimova T, Sedelnikov G, Roux B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions. Physics of Fluids. 2007;19:017111. DOI: 10.1063/1.2409622.
50. Ivanova AA, Kozlov VG, Kuzaev AF. Vibrational hydrodynamic interaction between a sphere and the boundaries of a cavity. Fluid Dyn. 2008;43:194–202. DOI: 10.1134/S001546280802004X.
51. Lyubimov DV, Baydin AY, Lyubimova TP. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // Microgravity Science Technology. 2013. Vol. 25. P. 121–126. DOI: 10.1007/s12217-012-9336-3.
52. Sennitskii VL. On the “levitation” of a liquid. International Journal of Applied and Fundamental Research. 2021;(6):87–90 (in Russian). DOI: 10.17513/mjpf.13236.
53. Sennitskii VL. Effects of a paradoxical motion of a viscous liquid in a gravity field. In: Aero-cosmic Technique, High Technologies and Innovations - 2021. Materials of All-Russian Scientific-Technical Conference, 18–20 November, 2021, Perm, Russia. Perm: PNIPU; 2021. Vol. 1. P. 138–142 (in Russian).
54. Sennitskii VL. The motion of an inclusion in a vibrating liquid. In: Aero-cosmic Technique, High Technologies and Innovations - 2022. Materials of All-Russian Scientific-Technical Conference, 16–18 November, 2022, Perm, Russia. Perm: PNIPU; 2022. P. 207–209 (in Russian).
55. Sennitskii VL. Forced rotatory oscillations of a hydro-mechanical system. In: The Collection

- of Articles of International Scientific-Technical Conference Minsk Scientific Readings - 2022 (Minsk, 07–09 December 2022). Minsk: BGTU; 2022. Vol. 3. P. 181–186 (in Russian).
56. Sennitskii VL. On the diagnostics of a hydro-mechanical system. In: Aero-Cosmic Technique, High Technologies and Innovations-2023. Materials of All-Russia Scientific-Technical Conference (Perm, 15–17 November, 2023). Perm: PNIPU; 2023. P. 205–207 (in Russian).
  57. Sennitskii VL. On the motion of an inclusion in a liquid medium. In: Hydro-Processes in Catalysis. V Scientific-Technology Symposium, 3–6 October 2024, Sochi, Russia. Novosibirsk: Institute of Catalysis SB RAS; 2024. P. 180–182 (in Russian).
  58. Kapitsa PL. Pendulum with a vibrating suspension. Sov. Phys. Usp. 1951;44(1):7–20 (in Russian). DOI: 10.3367/UfNr.0044.195105b.0007
  59. Krilov NM, Bogolyubov NN. Introduction in Non-Linear Mechanics. Moscow-Ijevsk: NITs RKhD; 2004. 352 p. (in Russian).
  60. Bogolyubov NN, Mitropolskii YuA. Asimptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. M.: GIF-ML; 1958. 408 p. (in Russian).
  61. Sennitskii VL. Force interaction of a sphere and a viscous liquid in the presence of a wall. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2000;41:50–54. DOI: 10.1007/BF02465236.



*Сенницкий Владимир Леонидович* — родился в 1950 году. Окончил физический факультет Новосибирского государственного университета (НГУ, 1972) и аспирантуру НГУ (1975). С 1975 года работает в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, в настоящее время — в должности старшего научного сотрудника. Доктор физико-математических наук (1995). Имеет ученые звания старшего научного сотрудника (механика жидкости, газа и плазмы, 1992) и доцента (общая физика, 1994). Награжден дипломом Министерства образования и науки Российской Федерации «За научное руководство студенческой работой, отмеченной медалью «За лучшую научную студенческую работу» по итогам открытого конкурса на лучшую работу студентов по естественным, техническим и гуманитарным наукам в вузах Российской Федерации» (2009). Область научных интересов: самодвижение тел в жидкости; нетривиальная динамика гидромеханических систем.

Россия, 630090 Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15  
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
E-mail: sennitskii@yandex.ru  
ORCID: 0009-0006-5131-2858  
AuthorID (eLibrary.Ru): 2024




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 004.92, 612.82, 517.518.36

DOI: 10.18500/0869-6632-003175  
EDN: UYYJRG

### Исследование волновых процессов и ритмической активности головного мозга человека с применением системы ортогональных функций Уолша

И. В. Степанян , М. Ю. Леднев

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

E-mail: neurocomp.pro@gmail.com, miklesus@mail.ru

Поступила в редакцию 8.10.2024, принята к публикации 24.02.2025,

опубликована онлайн 22.04.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — изучение волновых процессов и ритмической активности головного мозга на основе многомасштабных параметрических отображений электроэнцефалограмм, полученных в результате алгоритмического применения системы дискретных функций. **Методы.** Для визуализации был использован разработанный ранее разномасштабный метод построения параметрических отображений молекулярно-генетической информации, при котором набор четырёх нуклеотидов рассматривается как система ортогональных функций Уолша. **Результаты.** В статье предложен новый метод визуализации данных электроэнцефалографии для исследования ритмических и волновых процессов биоэлектрической активности головного мозга. Для анализа данных электроэнцефалографии предварительно был осуществлен этап перекодирования зарегистрированных амплитуд путём взаимно-однозначного преобразования ЭЭГ-сигнала в символьную последовательность, алфавит которой состоял из четырех символов. На основе этого метода было проведено сравнение сигналов ЭЭГ испытуемого в состоянии покоя и при умственной нагрузке. В исследовании проанализированы показания электродов, регистрирующих биопотенциалы лобных долей головного мозга. **Заключение.** Новые методы позволили выявить различные конфигурации кластеров в частотном пространстве визуализации, что можно использовать для сравнительного анализа энцефалограмм и выявления особенностей регистрируемых ЭЭГ-сигналов. Разработано специализированное программное обеспечение как инструмент изучения ритмической активности головного мозга путём построения параметрических отображений электроэнцефалограмм.

**Ключевые слова:** алгоритмы визуализации, ЭЭГ, биопотенциалы, система ортогональных функций, программное обеспечение, кластерный анализ.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания, шифр научной темы FFGU-2024-0019.

**Для цитирования:** Степанян И. В., Леднев М. Ю. Исследование волновых процессов и ритмической активности головного мозга человека с применением системы ортогональных функций Уолша // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 545–556. DOI: 10.18500/0869-6632-003175. EDN: UYYJRG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Investigation of wave processes and rhythmic activity of the human brain using the Walsh orthogonal function system

I. V. Stepanyan<sup>✉</sup>, M. Y. Lednev

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: <sup>✉</sup>neurocomp.pro@gmail.com, miklesus@mail.ru

Received 8.10.2024, accepted 24.02.2025, available online 22.04.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The purpose of this work is to study the wave processes and rhythmic activity of the brain based on multiscale parametric maps of electroencephalograms obtained as a result of algorithmic application of a system of discrete functions. **Methods.** For visualization, a previously developed multi-scale method for constructing parametric mappings of molecular genetic information was used, in which a set of four nucleotides is considered as a system of orthogonal Walsh functions. **Results.** The article proposes a new method of visualization of electroencephalography data for the study of rhythmic and wave processes of bioelectric activity of the brain. To analyze the electroencephalography data, the stage of transcoding the recorded amplitudes was previously carried out by one-to-one conversion of the EEG signal into a symbolic sequence, the alphabet of which consisted of four characters. Based on this method, the EEG signals of the subject were compared at rest and under mental stress. The study analyzed the readings of electrodes registering biopotentials of the frontal lobes of the brain. **Conclusion.** New methods have made it possible to identify various configurations of clusters in the frequency space of visualization, which can be used for comparative analysis of encephalograms and identification of features of recorded EEG signals. Specialized software has been developed as a tool for studying the rhythmic activity of the brain by constructing parametric displays of electroencephalograms.

**Keywords:** visualization algorithms, EEG, biopotentials, orthogonal function system, software, cluster analysis.

**Acknowledgements.** The work was performed within the framework of the State Assignment, code of scientific topic FFGU-2024-0019.

**For citation:** Stepanyan IV, Lednev MY. Investigation of wave processes and rhythmic activity of the human brain using the Walsh orthogonal function system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):545–556. DOI: 10.18500/0869-6632-003175

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Энцефалография — метод исследования функционального состояния коры головного мозга человека путём измерения его электрической активности [1]. Многоканальный энцефалограф регистрирует сигналы суммарной электрической активности групп нервных клеток, состоящих из миллионов нейронов и межнейронных синаптических соединений. Таким образом, энцефалография позволяет изучать волновые процессы, связанные с различными видами ритмической активности мозга. Электроэнцефалограмма (ЭЭГ) содержит шумовой сигнал с характерным спектром частот, зависящим от отведения энцефалографа и состояния испытуемого. Эти частоты рассчитываются с использованием преобразования Фурье. В последнее время растёт количество публикаций, изучающих применение преобразования Уолша-Адамара, методов вейвлет-анализа и машинного обучения для анализа данных ЭЭГ [2–9]. Также известны работы по разработке новых методов и инструментальных средств визуализации данных электроэнцефалографии [10–21]. Ранее нами были разработаны молекулярно-генетические алгоритмы на основе системы ортогональных функций Уолша для многомасштабной визуализации параметров ДНК с учетом физико-химической структуры нуклеотидов. В ходе наших исследований [22, 23] было установлено, что молекулярно-генетические алгоритмы могут быть применены для анализа длинных символьных или числовых последовательностей, приведённых к тетра-представлению,

то есть перекодированных таким образом, чтобы эти последовательности состояли из четвёрки символов по аналогии с четверкой нуклеотидов ДНК. Нами было обнаружено, что разработанные алгоритмы визуализации позволяют выявить скрытые циклы в длинных последовательностях. Это, в частности, было показано в нашей работе [22], где мы анализировали различные генераторы шума. Было показано, что генераторы псевдослучайного шума (то есть содержащие скрытую периодичность) при двумерной визуализации обладают выраженной симметрией. В то же время генераторы шума, не содержащие внутренних циклов, при применении новых алгоритмов визуализации давали хаотические двумерные отображения. Также скрытые циклы хорошо видны на одномерных отображениях. Целью настоящего исследования является апробация применения системы ортогональных функций Уолша (которые применялись ранее авторами в молекулярно-генетических алгоритмах) для визуализации и анализа биопотенциалов мозга человека, полученных в результате электроэнцефалографических исследований.

## 1. Методика

Все рассуждения производятся в соответствии с разработанными ранее методами, описанными в [22, 23]. Для анализа данных ЭЭГ информация о наборе амплитуд перекодировалась в четверичное представление, состоящее из символов А, G, Т и С. Напомним основные идеи базового алгоритма, который состоит из трёх шагов.

1. **Масштабирование.** Последовательность символьных элементов множества {А, G, С, Т}, кодирующих анализируемый сигнал, разделяется на фрагменты равной длины N с заданным шагом перекрытия. Шаг перекрытия и длина N являются свободными параметрами алгоритма и отвечают за четкость и масштаб отображений соответственно. Полученные фрагменты далее будем называть N-мерами.
2. **Параметризация.** С учетом системы функций Уолша, задающих генетические суб-алфавиты, согласно которым каждый нуклеотид имеет три бинарных представления (пурин/примидин, кето/амино, 2/3 водородные связи), последовательность азотистых оснований получает три бинарных представления. Вместе с наличием фосфатного остатка (который не является оппозиционным, так как присутствует у всех нуклеотидов) три бинарно-оппозиционных представления, которые учитываются на этапе параметризации, задают систему функций Уолша. Подробнее об этом в [1, 2].
3. **Отображение.** По трём полученным последовательностям N-меров строится итоговое отображение. Следует отметить возможность построения отображений в различных координатных системах, включая полярные, сферические, цилиндрические и другие, что требует дальнейших исследований с учетом эргономики восприятия и специфики анализируемых данных. По числу бинарных суб-алфавитов возможны одномерные, двумерные и трехмерные проекции. Для построения отображений разработаны следующие варианты:
  - (а) *пространства структурной визуализации* – отображают десятичные представления N-меров;
  - (б) *пространства частотной визуализации* – отображают относительные или абсолютные частоты N-меров;
  - (с) *пространства интегральной визуализации* – отображают количество определенных символов в каждом N-мере как численных показателей в двоичных суб-алфавитных представлениях N-меров.

Для применения алгоритмов визуализации применительно к задачам энцефалографии исходные данные для анализа были заимствованы из ресурса PhysioNet [20]. Согласно описанию эксперимента, приведенному в [21], среди прочих параметров указано: «частота дискретизации составляла 500 Гц на канал. Были использованы фильтр верхних частот с частотой среза 0.5 Гц,

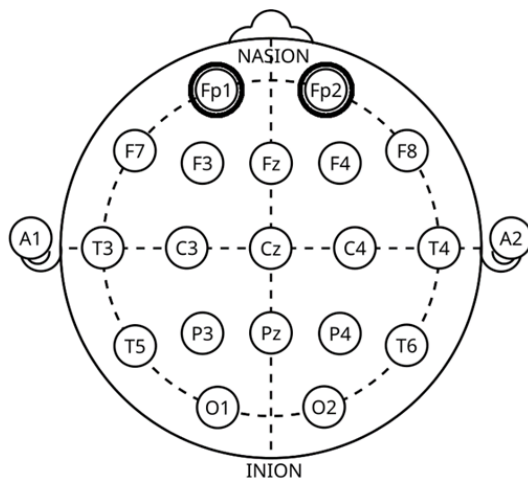


Рис. 1. Схематичное расположение электродов. Отмечены электроды, записи с которых были рассмотрены в данном исследовании

Fig. 1. Schematic arrangement of the electrodes. The electrodes are marked, the recordings from which were considered in this study

16 бит на отсчет. В данном случае потерь не возникает, так как в характеристиках обрабатываемого сигнала указано, что под вещественные значения также отведено 16 бит. Далее, каждый отсчет переводился в двоичную систему счисления и пары бит без перекрытия переводились в соответствующий символ по следующему правилу:

$$00_2 \rightarrow A, 01_2 \rightarrow C, 10_2 \rightarrow G, 11_2 \rightarrow T.$$

Например, для числа 26481 процесс кодирования выглядит следующим образом:

$$26481_{10} \rightarrow 0110011101110001_2 \rightarrow (01)(10)(01)(11)(01)(11)(00)(01) \rightarrow CGCTCTAC.$$

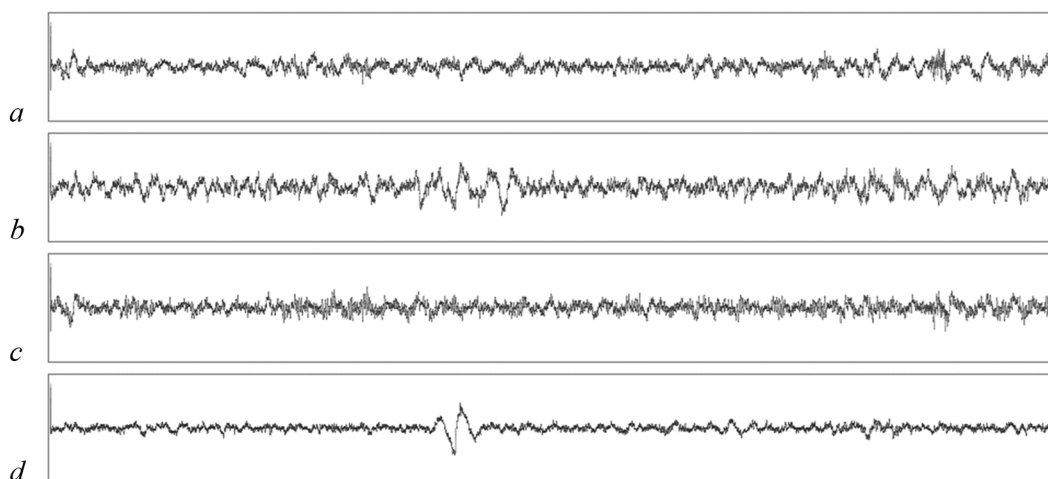


Рис. 2. Исходные сигналы ЭЭГ. *a* — электрод Fp1, состояние покоя; *b* — электрод Fp1, умственная нагрузка; *c* — электрод Fp2, состояние покоя; *d* — электрод Fp2, умственная нагрузка

Fig. 2. Initial EEG signals. *a* — Fp1 electrode, resting state; *b* — electrode Fp1, mental load; *c* — electrode Fp2, resting state; *d* — Fp2 electrode, mental load

фильтр нижних частот с частотой среза 45 Гц и полосовой фильтр (50 Гц)». Запись осуществлялась в двух состояниях испытуемого: состояние покоя и при умственной нагрузке в виде выполнения арифметических расчетов в уме. В исследовании учитывались показания с двух электродов: Fp1 и Fp2 (рис. 1, 2). Описание оборудования и метода записи ЭЭГ приведено в [21].

Гипотеза исследования состоит в том, что молекулярно-генетические алгоритмы на основе функций Уолша позволят отобразить пограничные состояния между строгими циклами и хаотической компонентной в ЭЭГ (то есть между абсолютно симметричными и хаотическими двумерными представлениями). Перекодирование отсчетов сигнала ЭЭГ производилось следующим образом. Исходные вещественные значения переводились в целочисленные в диапазон  $[0; 65535]$ , что составляет



Каждому отсчету после кодирования соответствует 8 символов. Поэтому масштаб визуализации также должен быть кратен 8. Для структурных отображений выбран масштаб, равный 16, для большего разнесения точек на плоскости (каждая такая точка кодирует пару отсчетов). При вычислении частотных характеристик каждого отдельно взятого отсчета и построении частотных визуализаций был выбран масштаб, равный 8. Для структурного и частотного отображений шаг равен масштабу в следствии того, что в ином случае будут получены значения, состоящие из частей символьного представления смежных отчетов. Для интегральных отображений был выбран шаг, равный единице, для большей плотности точек (при единичном шаге значения визуально связываются, образуя непрерывную кривую линию). Всё это позволило повысить информативность и наглядность полученных визуализаций.

## 2. Результаты

**Сравнительный анализ функциональных состояний человека по данным ЭЭГ-визуализации с применением системы функций Уолша.** В результате проведённого исследования были построены двоично-ортогональные отображения ЭЭГ-сигналов в различных пространствах визуализации (рис. 3, 4, 5). Хаотические и волновые процессы можно наблюдать на одномерных отображениях, приведенных на рис. 3, где ряды *a–d* имеют хаотический характер,

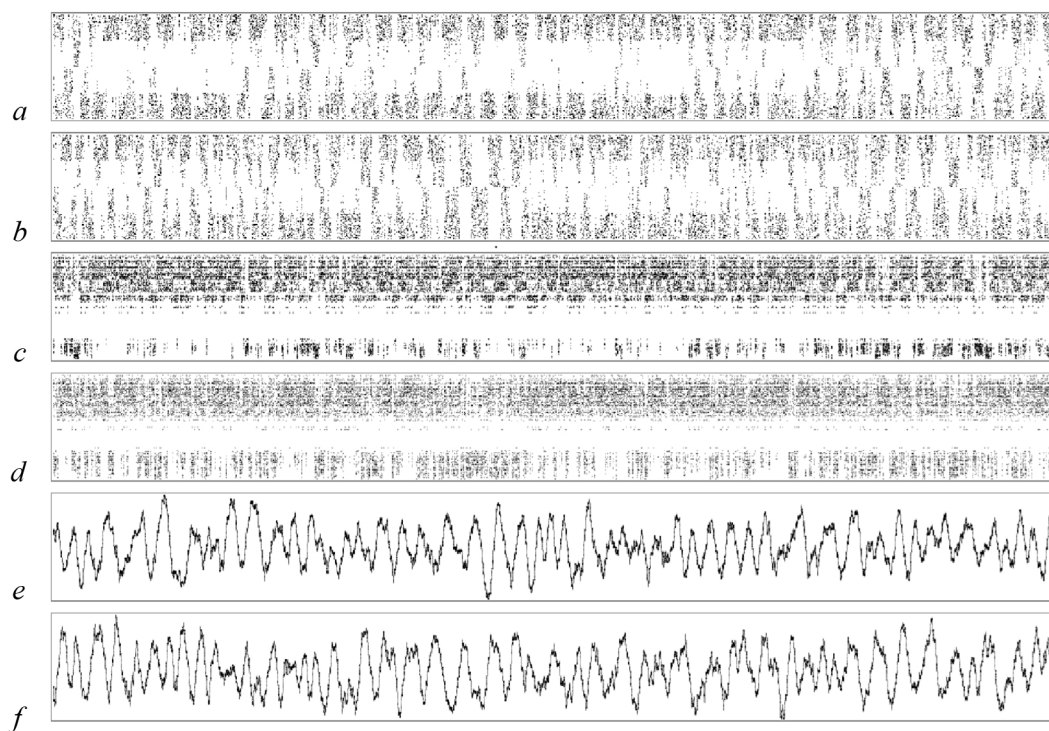


Рис. 3. Одномерные отображения по суб-алфавиту пурин-пиримидин записей с датчика Fp1. Состояние покоя представлено на рисунках *a, c, e*; тест по выполнению арифметических расчетов в уме приведен на рисунках *b, d, f*. *a, b* — структурные отображения при масштабе  $N = 16$  и шаге 16; *c, d* — частотные отображения при масштабе  $N = 8$  и шаге 8; *e, f* — интегральные отображения при масштабе  $N=1600$  и шаге 1

Fig. 3. One-dimensional mappings according to the purine-pyrimidine sub-alphabet of records from the Fp1 sensor. The resting state is shown in Figures *a, c, e*; the test for performing arithmetic calculations in mind is shown in Figures *b, d, f*. *a, b* — structural mappings at scale  $N = 16$  and step 16; *c, d* are frequency mappings at scale  $N = 8$  and step 8; *e, f* are integral mappings at scale  $N = 1600$  and step 1

а ряды  $e-f$  — волновой. Следует отметить, что интегральные отображения в целом удобны для анализа скрытых волновых процессов. Как видно из первого столбца на рис. 4, двумерные структурные отображения при наличии четкой структуризации имеют выраженную хаотическую компоненту, что подтверждает возможность визуализации комбинации упорядоченных и шумовых компонент ЭЭГ-сигналов в едином параметрическом отображении.

В то же время в третьем столбце рис. 4 на интегральных отображениях симметрии практически отсутствуют, что говорит о наличии значимой хаотической компоненты (точные симметрии в этих отображениях можно наблюдать у повторяющихся сигналов, например, в длинных псевдослучайных последовательностях). В ходе экспериментов с различными ЭЭГ-сигналами наблюдали,

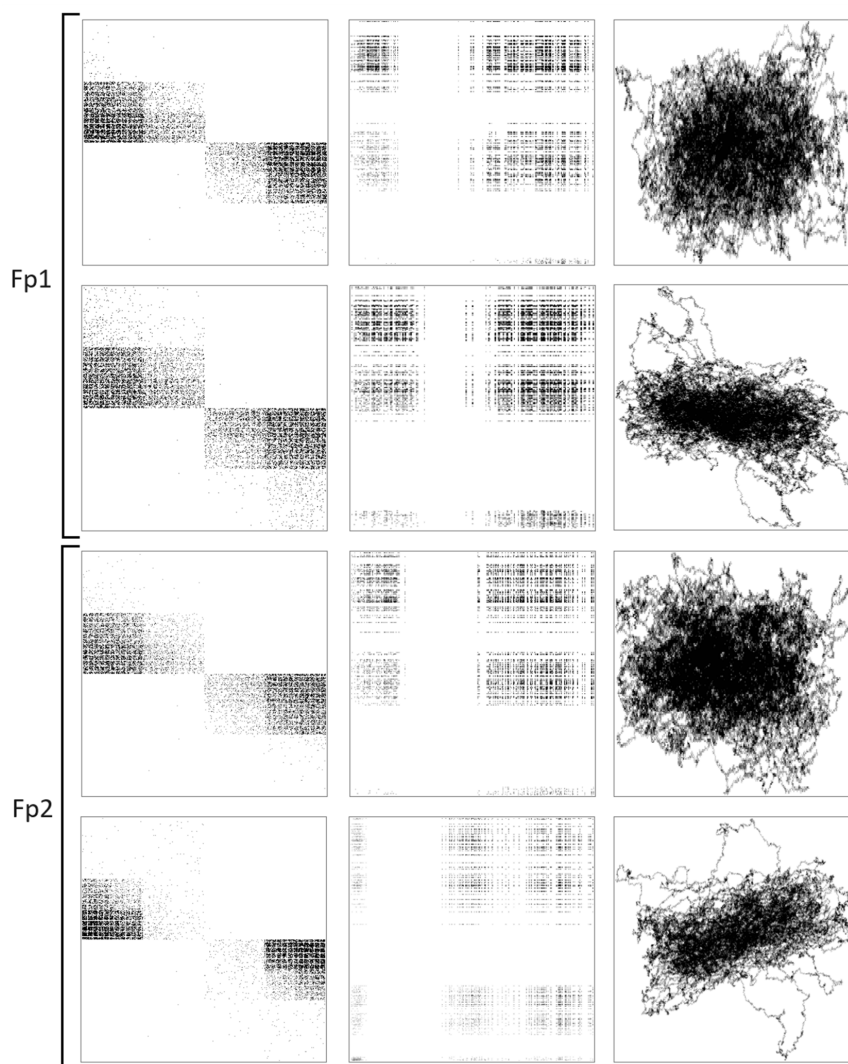


Рис. 4. Двумерные отображения по суб-алфавитам пурин-пиримидин (X) и кето-амино (Y). Первый столбец — структурные отображения при масштабе  $N = 16$  и шаге 16. Второй столбец — частотные отображения при масштабе  $N = 8$  и шаге 8. Третий столбец — интегральные отображения при масштабе  $N = 1600$  и шаге 1. Первая и третья строка — состояние покоя, вторая и четвертая строка — умственная нагрузка

Fig. 4. Two-dimensional maps by the purine-pyrimidine (X) and keto-amino (Y) sub-alphabets. The first column is the structural maps at scale  $N=16$  and step 16. The second column is the frequency mappings at scale  $N = 8$  and step 8. The third column is the integral mappings at scale  $N = 1600$  and step 1. The first and third rows are the state of rest, the second and fourth rows are the mental load

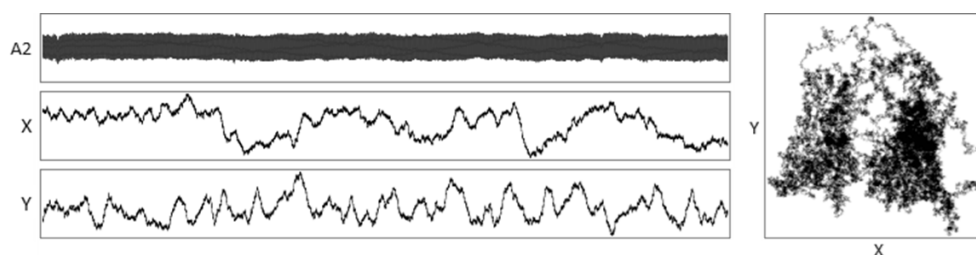


Рис. 5. Пример интегральных отображений ЭЭГ-сигнала при  $N = 1600$  и шаге перекрытия 1. В первом столбце представлены кривые исходного сигнала с обозначением электрода и одномерные отображения по суб-алфавитам: кето-амино (X); 2 или 3 водородные связи (Y). Во втором столбце представлено двумерное интегральное отображение по соответствующим суб-алфавитам

Fig. 5. Example of integral EEG signal mappings at  $N = 1600$  and overlap step 1. The first column shows the curves of the initial signal with the designation of the electrode and one-dimensional maps by sub-alphabets: keto-amino (X); 2 or 3 hydrogen bonds (Y). The second column shows a two-dimensional integral mapping according to the corresponding sub-alphabets

что характерные «клубочные» формы интегральных двумерных представлений сильно различались у различных ЭЭГ-сигналов и иногда приобретали вид сдвоенных образований (рис. 5).

Применение предлагаемого метода визуализации позволяет получить новые характеристики ЭЭГ-сигналов в виде структуры трёхмерных кластеров в частотном пространстве визуализации, а именно: взаимное расположение, форма и количество кластеров (на рис. 6 некоторые различающиеся кластеры выделены рамкой).

На рис. 6 хорошо видны отличия в структуре и количестве частотных кластеров энцефалографических сигналов, снятых из различных отведений энцефалограммы при наличии или отсутствии умственной нагрузки у испытуемого. Как видно из рисунка, кластерная структура

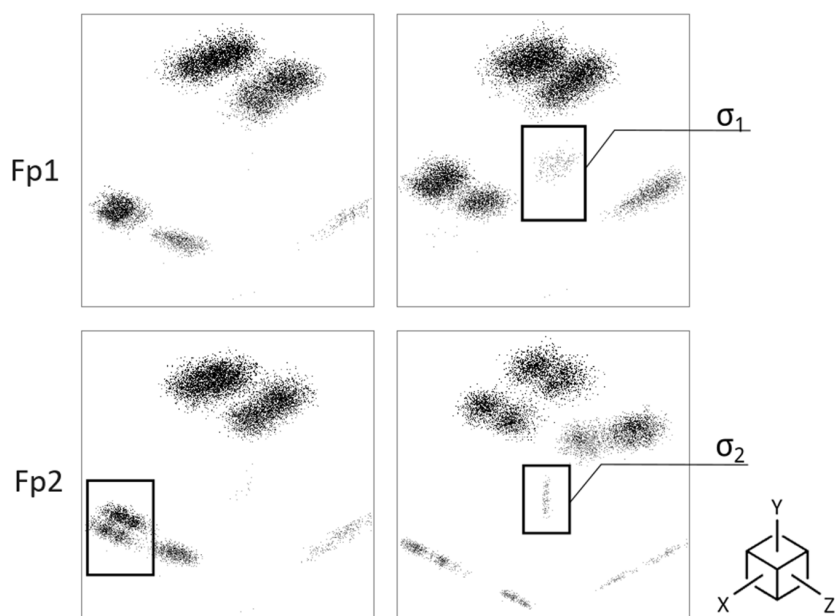


Рис. 6. Трёхмерные частотные отображения при масштабе  $N = 8$  и шаге 8 по суб-алфавитам пурин-пиримидин (X), 2 или 3 водородные связи (Y) и кето-амино (Z). Первый столбец — состояние покоя, второй столбец — умственная нагрузка

Fig. 6. Three-dimensional frequency maps at scale  $N = 8$  and step 8 for the purine-pyrimidine (X), 2 or 3 hydrogen bonds (Y) and keto-amino (Z) subalphabets. The first column is the resting state, the second column is the mental load

отображений значительно отличается при различных функциональных состояниях субъекта. В частности, видно, что при умственной нагрузке формируются дополнительные частотные кластеры. Эти кластеры обозначены на рисунке как  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и требуют дальнейшего исследования.

На рис. 7 приведены некоторые примеры двоично-ортогональных отображений ЭЭГ-сигналов в различных пространствах визуализации. Показана визуализация записи ЭЭГ в одномерных (верхний ряд), двумерных (средний ряд) и трехмерных (нижний ряд) представлениях. Для удобства над каждым видом отображения (структурный, частотный и интегральный) представлен исходный сигнал.

Логично предположить, что перевод в другие системы счисления (не только в четверичную, но и пятеричную, шестеричную и прочие) позволяет применить аналогичные методы. Существуют матрицы Адамара различного порядка, кодирующие различные системы ортогональных функций Уолша. Полезное свойство матриц, которые описывают кодирование нуклеотидов и которые были применены в данном исследовании, заключается в том, что они позволяют строить визуализации в трёхмерном пространстве, что наглядно и удобно для восприятия. Матрицы большего порядка дадут больше измерений, и можно рассматривать различные двумерные и трехмерные проекции многомерных пространств визуализации. Таким образом, предлагаемый математический аппарат предполагает дальнейшие исследования.

Следует отметить, что известны методы, которые позволяют провести визуализацию динамики по одномерному набору данных (в частности, это использование теоремы Такенса). Когда мы рассматриваем визуализацию в частотном трехмерном пространстве предлагаемым методом (при  $N = 8$ ), точки не связаны с их взаимным расположением в исходном сигнале. При этом

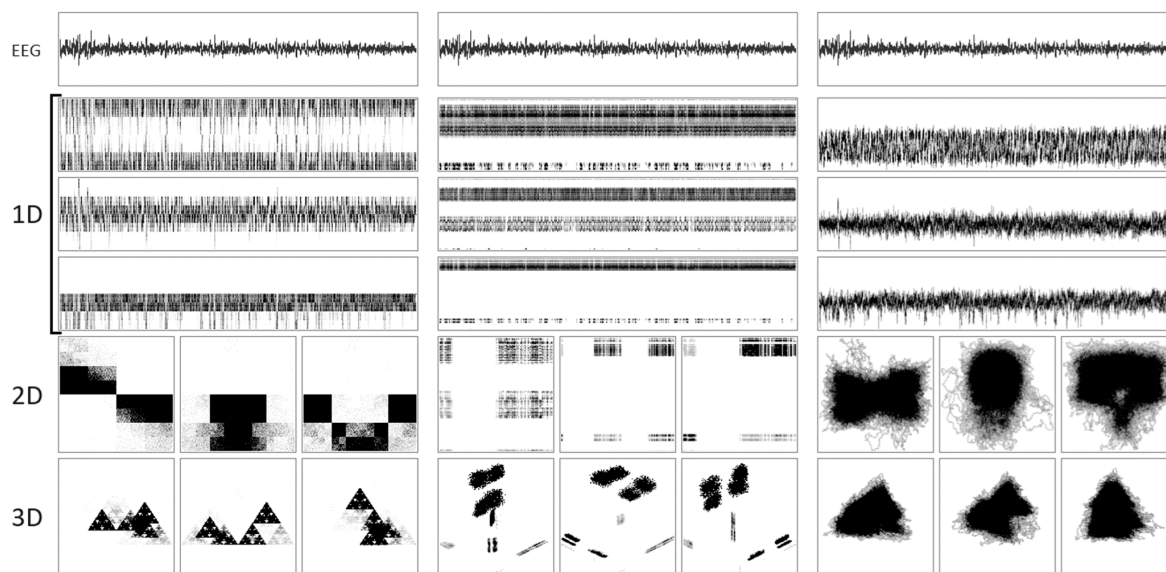


Рис. 7. Вывод программы анализа энцефалограмм. В первом столбце представлено структурное пространство визуализаций при масштабе  $N=16$  и шаге перекрытия 1. Во втором столбце представлено частотное пространство визуализаций при масштабе  $N = 8$  и шаге перекрытия 8. В третьем столбце представлено интегральное пространство визуализации при масштабе  $N = 1600$  и шаге перекрытия 1. Одномерные проекции отображены по суб-алфавитам (сверху вниз): пури-пиримидин (X), кето-амино (Y) и 2 или 3 водородные связи (Z). Двумерные проекции представлены в следующем порядке (слева направо): XY, YZ, XZ. Трехмерные проекции: XYZ, XZY, YXZ

Fig. 7. Output of the encephalogram analysis program. The first column shows the structural visualization space at scale  $N=16$  and overlap step 1. The second column shows the frequency space of visualizations at scale  $N = 8$  and overlap step 8. The third column shows the integral visualization space at scale  $N = 1600$  and overlap step 1. One-dimensional projections are displayed in sub-alphabets (from top to bottom): purine-pyrimidine (X), keto-amino (Y) and 2 or 3 hydrogen bonds (Z). Two-dimensional projections are presented in the following order (from left to right): XY, YZ, XZ. Three-dimensional projections: XYZ, XZY, YXZ



использование системы суб-алфавитов в матрице Адамара позволяет применить теорему Такенса для каждого из измерений в отдельности. Таким образом, предлагаемый метод дополняет методы нелинейной динамики.

### Заключение

Проведённые исследования подтвердили возможность визуализации и сравнения энцефалограмм, зарегистрированных в различных функциональных состояниях испытуемых на основе разработанных молекулярно-генетических алгоритмов. Предложенный метод позволяет отображать параметрические характеристики ЭЭГ-сигналов на различных масштабах и в различных пространствах визуализации с помощью специфического применения функций Уолша. Одним из наиболее значимых результатов исследования представляется трехмерная частотная кластеризация ЭЭГ-сигналов, которая позволила обнаружить в обеих лобных долях мозга частотный кластер, предположительно ответственный за умственную нагрузку на испытуемого.

Результаты проведённого исследования коррелируют с полученными ранее данными о применении системы функций Уолша при выявлении скрытых циклических структур в произвольных сигналах [22]. Ранее в [24] нами было показано, что применение теоретико-графового подхода позволяет рассчитать количественные характеристики циклических структур в ЭЭГ-сигналах на различных масштабах, а также вычислить такие показатели характеристического графа ЭЭГ, как число Эйлера, число простых циклов и число простых путей. Проведённое исследование подтверждает наличие скрытых структур и существование особого рода упорядоченности в регистрируемых биопотенциалах мозга человека.

Результаты исследования были получены в созданной нами программе анализа энцефалограмм на основе разработанных ранее молекулярно-генетических алгоритмов. Программа написана на языке C++ и позволяет обрабатывать ЭЭГ-сигналы в реальном времени.

### Список литературы

1. *Ke J., Du J., Luo X.* The effect of noise content and level on cognitive performance measured by electroencephalography (EEG) // *Automation in Construction*. 2021. Vol. 130. P. 103836. DOI: 10.1016/j.autcon.2021.103836.
2. *Prasanna J. P., Subathra M. S. P., Mohammed M. A., Maashi M. S., Garcia-Zapirain B., Sairamya N. J., George S. T.* Detection of focal and non-focal electroencephalogram signals using fast Walsh-Hadamard transform and artificial neural network // *Sensors*. 2020. Vol. 20, no. 17. P. 4952. DOI: 10.3390/s20174952.
3. *Göker H., Tosun M.* Fast Walsh–Hadamard transform and deep learning approach for diagnosing psychiatric diseases from electroencephalography (EEG) signals // *Neural Comput. Applic.* 2023. Vol. 35. P. 23617–23630. DOI: 10.1007/s00521-023-08971-6.
4. *Goshvarpour A., Goshvarpour A.* Analytic representation vs. angle modulation of Hilbert transform of fast Walsh-Hadamard coefficients (HTFWHC) in epileptic EEG classification // *Braz. J. Phys.* 2023. Vol. 53. P. 15. DOI: 10.1007/s13538-022-01231-3.
5. *Mohsen S., Ghoneim S. S. M., Alzaidi M. S., Alzahrani A., Ali Hassan A. M.* Classification of electroencephalogram signals using LSTM and SVM based on fast walsh-hadamard transform // *Comput. Mater. Contin.* 2023. Vol. 75, no. 3. P. 5271–5286. DOI: 10.32604/cmc.2023.038758.
6. *Shakya N., Dubey R., Shrivastava L.* Stress detection using EEG signal based on fast Walsh Hadamard transform and voting classifier // *Preprint Research Square*. 2021. DOI: 10.21203/rs.3.rs-782483/v1.
7. *Ergün E., Aydemir O.* A hybrid BCI using singular value decomposition values of the fast walsh-hadamard transform coefficients // *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*. 2020. Vol. 15, no. 2. P. 454–463. DOI: 10.1109/TCDS.2020.3028785.
8. *Yuan X., Cai Z.* A generalized Walsh system and its fast algorithm // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2021. Vol. 69. P. 5222–5233. DOI: 10.1109/TSP.2021.3099635.

9. *Widdess-Walsh P.* Resting but not idle: Insights into epilepsy network suppression from intracranial EEG // *Epilepsy Currents*. 2024. Vol. 24, no. 1. P. 25–27. DOI: 10.1177/15357597231213247.
10. *Vaithialingam B., Rudrappa S.* Intraoperative visualisation of 3 Hz spike-wave epileptic discharges in the electroencephalographic signal of bispectral index monitor in a patient with absence seizures // *Indian J. Anaesth.* 2024. Vol. 68, no. 2. P. 209–210. DOI: 10.4103/ija.ija\_710\_23.
11. *Salami A., Andreu-Perez J., Gillmeister H.* Finding neural correlates of depersonalisation/derealisation disorder via explainable CNN-based analysis guided by clinical assessment scores // *Artif. Intell. Med.* 2024. Vol. 149. P. 102755. DOI: 10.1016/j.artmed.2023.102755.
12. *Taylor J. A., Garrido M. I.* Porthole and Stormcloud: tools for visualisation of spatiotemporal M/EEG statistics // *Neuroinformatics*. 2020. Vol. 18, no. 3. P. 351–363. DOI: 10.1007/s12021-019-09447-6.
13. *QiHan P. W., Alipal J., Suberi A. A. M., Fuad N., Wahab M. H. A., Idrus S. Z. S.* A new perspective on visualising EEG signal of post-stroke patients // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020. Vol. 917, no. 1. P. 012047. DOI: 10.1088/1757-899X/917/1/012047.
14. *Gómez L. C., Hervás R., González I., Villarreal V.* Studying the generalisability of cognitive load measured with EEG // *Biomedical Signal Processing and Control*. 2021. Vol. 70. P. 103032. DOI: 10.1016/j.bspc.2021.103032.
15. *Caillet B., Devènes S., Maître G., Hight D., Mirra A., Levionnois O., Simalatsar A.* General Anaesthesia Matlab-based Graphical User Interface: A tool for EEG signal acquisition, processing and visualisation offline and in real-time. 2023. DOI: 10.13140/RG.2.2.33243.68647.
16. *Cao J., Zhao Y., Shan X., Wei H. L., Guo Y., Chen L., Erkoyuncu J. A., Sarrigiannis P. G.* Brain functional and effective connectivity based on electroencephalography recordings: A review // *Hum. Brain Mapp.* 2022. Vol. 43, no. 2. P. 860–879. DOI: 10.1002/hbm.25683.
17. *Cabañero L., Hervás R., González I., Fontecha J., Mondéjar T., Bravo J.* Characterisation of mobile-device tasks by their associated cognitive load through EEG data processing // *Future Generation Computer Systems*. 2020. Vol. 113. P. 380–390. DOI: 10.1016/j.future.2020.07.013.
18. *Costadopoulos N., Islam M. Z., Tien D.* A knowledge discovery and visualisation method for unearthing emotional states from physiological data // *Int. J. Mach. Learn. & Cyber.* 2021. Vol. 12, no. 3. P. 843–858. DOI: 10.1007/s13042-020-01205-4.
19. *Montazeri S., Pinchevsky E., Tse I., Marchi V., Kohonen J., Kauppila M., Airaksinen M., Tapani K., Nevalainen P., Hahn C., Tam E. W. Y., Stevenson N. J., Vanhatalo S.* Building an open source classifier for the neonatal EEG background: A systematic feature-based approach from expert scoring to clinical visualization // *Front. Hum. Neurosci.* 2021. Vol. 15. P. 675154. DOI: 10.3389/fnhum.2021.675154.
20. *Goldberger A. L., Amaral L. A., Glass L., Hausdorff J. M., Ivanov P. C., Mark R. G., Mietus J. E., Moody G. B., Peng C. K., Stanley H. E.* PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: components of a new research resource for complex physiologic signals // *Circulation*. 2000. Vol. 101, no. 23. P. E215–E220. DOI: 10.1161/01.cir.101.23.e215.
21. *Zym I., Tukaev S., Seleznev I., Kiyono K., Popov A., Chernykh M., Shpenkov O.* Electroencephalograms during Mental Arithmetic Task Performance // *Data*. 2019. Vol. 4, no. 1. P. 14. DOI: 10.3390/data4010014.
22. *Stepanyan I. V., Lednev M. Y.* Visualization of the Signals Entropy Structure Based on Walsh–Hadamard Functions // *Symmetry*. 2024. Vol. 16, no. 1. P. 59. DOI: 10.3390/sym16010059.
23. *Степанян И. В., Леднев М. Ю.* Алгоритмы визуализации молекулярно-генетических последовательностей в пространствах двоично-ортогональных функций Уолша. М.: «КДУ», «Добросвет», 2020. 193 с. DOI: 10.31453/kdu.ru.978-5-7913-1159-7-2020-193.
24. *Аристов В. В., Кубряк О. В., Степанян И. В.* Расчёт циклических характеристик электроэнцефалограммы для исследования электрической активности мозга // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 4. С. 469–483. DOI: 10.18500/0869-6632-003051.

## References

1. Ke J, Du J, Luo X. The effect of noise content and level on cognitive performance measured by electroencephalography (EEG). *Automation in Construction*. 2021;130:103836. DOI: 10.1016/j.autcon.2021.103836.
2. Prasanna JP, Subathra MSP, Mohammed MA, Maashi MS, Garcia-Zapirain B, Sairamya NJ, George ST. Detection of focal and non-focal electroencephalogram signals using fast Walsh-Hadamard transform and artificial neural network. *Sensors*. 2020;20(17):4952. DOI: 10.3390/s20174952.
3. Göker H, Tosun M. Fast Walsh–Hadamard transform and deep learning approach for diagnosing psychiatric diseases from electroencephalography (EEG) signals. *Neural Comput. and Applic.* 2023;35(32):23617–23630. DOI: 10.1007/s00521-023-08971-6.
4. Goshvarpour A, Goshvarpour A. Analytic representation vs. angle modulation of Hilbert transform of fast Walsh-Hadamard coefficients (HTFWHC) in epileptic EEG classification. *Braz. J. Phys.* 2023;53:15. DOI: 10.1007/s13538-022-01231-3.
5. Mohsen S, Ghoneim SSM, Alzaidi MS, Alzahrani A, Ali Hassan AM. Classification of electroencephalogram signals using LSTM and SVM based on fast walsh-hadamard transform. *Comput. Mater. Contin.* 2023;75(3):5271–5286. DOI: 10.32604/cmc.2023.038758.
6. Shakya N, Dubey R, Shrivastava L. Stress detection using EEG signal based on fast Walsh–Hadamard transform and voting classifier. *Research Square*. 2021. DOI: 10.21203/rs.3.rs-782483/v1.
7. Ergün E, Aydemir O. A hybrid BCI using singular value decomposition values of the fast Walsh–Hadamard transform coefficients. *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*. 2020;15(2):454–463. DOI: 10.1109/TCDS.2020.3028785.
8. Yuan X, Cai Z. A generalized Walsh system and its fast algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2021;69:5222–5233. DOI: 10.1109/TSP.2021.3099635.
9. Widdess-Walsh P. Resting But Not Idle: Insights Into Epilepsy Network Suppression From Intracranial EEG. *Epilepsy Currents*. 2024;24(1):25–27. DOI: 10.1177/15357597231213247.
10. Vaithialingam B, Rudrappa S. Intraoperative visualisation of 3 Hz spike-wave epileptic discharges in the electroencephalographic signal of bispectral index monitor in a patient with absence seizures. *Indian J. Anaesth.* 2024;68(2):209–210. DOI: 10.4103/ija.ija\_710\_23.
11. Salami A, Andreu-Perez J, Gillmeister H. Finding neural correlates of depersonalisation/ derealisation disorder via explainable CNN-based analysis guided by clinical assessment scores. *Artif. Intell. Med.* 2024;149:102755. DOI: 10.1016/j.artmed.2023.102755.
12. Taylor JA, Garrido MI. Porthole and Stormcloud: tools for visualisation of spatiotemporal M/EEG statistics. *Neuroinformatics*. 2020;18(3):351–363. DOI: 10.1007/s12021-019-09447-6.
13. QiHan PW, Alipal J, Suberi AAM, Fuad N, Wahab MHA, Idrus SZS. A new perspective on visualising EEG signal of post-stroke patients. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020;917(1):012047. DOI: 10.1088/1757-899X/917/1/012047.
14. Gómez LC, Hervás R, González I, Villarreal V. Studying the generalisability of cognitive load measured with EEG. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2021;70:103032. DOI: 10.1016/j.bspc.2021.103032.
15. Cailliet B, Devènes S, Maître G, Hight D, Mirra A, Levionnois O, Simalatsar A. General Anaesthesia Matlab-based Graphical User Interface: A tool for EEG signal acquisition, processing and visualisation offline and in real-time. 2023. DOI: 10.13140/RG.2.2.33243.68647.
16. Cao J, Zhao Y, Shan X, Wei HL, Guo Y, Chen L, Erkoyuncu JA, Sarrigiannis PG. Brain functional and effective connectivity based on electroencephalography recordings: A review. *Hum. Brain Mapp.* 2022;43(2):860–879. DOI: 10.1002/hbm.25683.
17. Cabañero L, Hervás R, González I, Fontecha J, Mondéjar T, Bravo J. Characterisation of mobile-device tasks by their associated cognitive load through EEG data processing. *Future Generation Computer Systems*. 2020;113:380–390. DOI: 10.1016/j.future.2020.07.013.

18. Costadopoulos N, Islam MZ, Tien D. A knowledge discovery and visualisation method for unearthing emotional states from physiological data. *Int. J. Mach. Learn. & Cyber.* 2021;12(3): 843–858. DOI: 10.1007/s13042-020-01205-4.
19. Montazeri S, Pinchevsky E, Tse I, Marchi V, Kohonen J, Kauppila M, Airaksinen M, Tapani K, Nevalainen P, Hahn C, Tam EWY, Stevenson NJ, Vanhatalo S. Building an open source classifier for the neonatal EEG background: a systematic feature-based approach from expert scoring to clinical visualization. *Front. Hum. Neurosci.* 2021;15:675154. DOI: 10.3389/fnhum.2021.675154.
20. Goldberger AL, Amaral LA, Glass L, Hausdorff JM, Ivanov PC, Mark RG, Mietus JE, Moody GB, Peng CK, Stanley HE. PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation.* 2000;101(23):E215-220. DOI: 10.1161/01.cir.101.23.e215.
21. Zym I, Tukaev S, Seleznev I, Kiyono K, Popov A, Chernykh M, Shpenkov O. Electroencephalograms during Mental Arithmetic Task Performance. *Data.* 2019;4(1):14. DOI: 10.3390/data4010014.
22. Stepanyan IV, Lednev MY. Visualization of the Signals Entropy Structure Based on Walsh–Hadamard Functions. *Symmetry.* 2024;16(1):59.
23. Stepanyan IV, Lednev MY. Algorithms for visualization of molecular genetic sequences in spaces of binary-orthogonal Walsh functions. M.: “KDU”, “Dobrosvet”; 2020. 193 p. (in Russian). DOI: 10.31453/kdu.ru.978-5-7913-1159-7-2020-193.
24. Aristov VV, Kubryak OV, Stepanyan IV. Calculation of cyclic characteristics of an electroencephalogram for the study of electrical activity of the brain. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(4):469–483 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003051.



*Степанян Иван Викторович* — доктор биологических наук, кандидат технических наук. Лауреат первой премии Министерства обороны РФ по итогам Всероссийского конкурса по поиску научных, инновационных, производственных групп или коллективов, способных к эффективной реализации перспективных проектов в интересах Вооруженных Сил Российской Федерации за научно-исследовательскую работу «Создание прототипа нейроподобной интеллектуальной системы для повышения качества управления в робототехнических комплексах». Автор более 150 научных работ, ряда монографий и патентов на изобретения, член редколлегии и постоянный автор журнала «Нейрокомпьютеры: разработка, применение». Ведущий научный сотрудник ИМАШ РАН им. А. А. Благонравова. Направления научной деятельности — биоматематика, биомеханика, психоакустика, медицина и психофизиология умственного труда, естественный и искусственный интеллект, научная визуализация, системы управления.

Россия, 119334, Москва, Ленинский проспект, 39  
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова  
Российской академии наук (ИМАШ РАН)  
E-mail: neurocomp.pro@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-3176-5279  
AuthorID (eLibrary.Ru): 443261



*Леднев Михаил Юрьевич* — окончил Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики по специальности «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (2013) и аспирантуру Института проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН по специальности «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей» (2016). Младший научный сотрудник ИМАШ РАН им. А. А. Благонравова. Автор более 20 научных работ. Область научных интересов — исследования в области нейронных сетей, адаптивного управления и искусственного интеллекта, научная визуализация, обработка сигналов.

Россия, 117624, Москва, ул. Старокрымская, 15к1  
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова  
Российской академии наук (ИМАШ РАН)  
E-mail: miklesus@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-5919-0190  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1090587





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003164  
EDN: PPZDBV

## Сравнение ансамблевых и корреляционных графов в задаче классификации состояний мозга на основе фМРТ-данных

Д. В. Власенко<sup>1</sup>✉, В. Г. Ушаков<sup>1</sup>, А. А. Заикин<sup>1,2</sup>, Д. Г. Захаров<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

<sup>2</sup>Университетский колледж Лондона, Великобритания

E-mail: ✉dvlasenko@hse.ru, uwadim@gmail.com, alexey.zaikin@ucl.ac.uk, dzakh76@gmail.com

Поступила в редакцию 12.10.2024, принята к публикации 25.01.2025,

опубликована онлайн 3.02.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Изучение функциональных сетей мозга, которые поддерживают когнитивные процессы, является одной из центральных задач современной нейронауки. Функциональная магнитно-резонансная томография (фМРТ) широко используется для получения данных об активности мозга. Однако высокая размерность и динамическая природа фМРТ-данных делает их обработку сложной задачей. Сетевые методы представления данных предлагают перспективный подход, позволяющий описывать мозг в виде сети, где узлы соответствуют областям мозга, а рёбра — функциональным связям между ними. Это позволяет глубже исследовать топологию мозговых сетей и их роль в когнитивных состояниях. *Цель данной работы* — сравнить ансамблевые и корреляционные графы в задаче классификации состояний мозга на основе данных функциональной магнитно-резонансной томографии. *Методы.* В данной работе представлен новый метод репрезентации фМРТ-данных в графовой форме, основанный на ансамблевом обучении. Для демонстрации эффективности метода представления данных мы сравнили его с корреляционными графами, применяя затем для классификации состояний мозга графовую нейронную сеть. *Результаты и Заключение.* Наши результаты показали, что ансамблевые графы приводят к существенно более точной и стабильной классификации. Лучшая эффективность классификации позволяет предположить, что с использованием этого метода мы более эффективно определяем функциональные связи между регионами мозга при выполнении когнитивных задач.

**Ключевые слова:** когнитивные процессы, функциональная магнитно-резонансная томография, ансамблевые графы, классификация, машинное обучение.

**Благодарности.** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант номер 24-68-00030) и частично за счет суперкомпьютерного комплекса Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

**Для цитирования:** Власенко Д. В., Ушаков В. Г., Заикин А. А., Захаров Д. Г. Сравнение ансамблевых и корреляционных графов в задаче классификации состояний мозга на основе фМРТ-данных // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 557–566. DOI: 10.18500/0869-6632-003164. EDN: PPZDBV

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Comparison of ensemble and correlation graphs in the task of classifying brain states based on fMRI data

D. V. Vlasenko<sup>1</sup>✉, V. G. Ushakov<sup>1</sup>, A. A. Zaikin<sup>1,2</sup>, D. G. Zakharov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

<sup>2</sup>University College London, UK

E-mail: ✉dvlasenko@hse.ru, uwadim@gmail.com, alexey.zaikin@ucl.ac.uk, dzakh76@gmail.com

Received 12.10.2024, accepted 25.01.2025, available online 3.02.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The study of functional brain networks that support cognitive processes is one of the central goals of modern neuroscience. Functional magnetic resonance imaging (fMRI) is widely used to obtain data on brain activity. However, the high dimensionality and dynamic nature of fMRI data makes their processing challenging. Network-based methods of data representation offer a promising approach to describe the brain as a network, where nodes correspond to brain regions and edges correspond to functional connections between them. This allows us to further explore the topology of brain networks and their role in cognitive states. The *purpose* of this paper is to compare ensemble and correlation graphs in a brain state classification task based on functional magnetic resonance imaging (fMRI) data. *Methods.* This paper presents a novel method for representing fMRI data in graph form based on ensemble learning. To demonstrate the effectiveness of the data representation method, we compared it with correlated graphs by applying a graph neural network to classify brain states. *Results and Conclusion.* Our results showed that ensemble graphs lead to significantly more accurate and stable classification. The better classification performance suggests that using this method we are more efficient in identifying functional connections between brain regions during cognitive tasks.

**Keywords:** cognitive processes, functional magnetic resonance imaging, ensemble graphs, classification, machine learning.

**Acknowledgements.** This research was supported by RSF (project No. 24-68-00030) and in part through computational resources of HPC facilities at HSE University.

**For citation:** Vlasenko DV, Ushakov VG, Zaikin AA, Zakharov DG. Comparison of ensemble and correlation graphs in the task of classifying brain states based on fMRI data. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):557–566. DOI: 10.18500/0869-6632-003164

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Введение

Одной из центральных задач современной междисциплинарной науки является изучение фундаментальных принципов функционирования мозга человека. К сожалению, в настоящее время не существует общей теории, которая описывала бы эти принципы, и основным подходом является изучение активности мозга посредством различных физических методов (электроэнцефалографии, магнитоэнцефалографии, функциональной магнитно-резонансной томографии и др.) и выявление на основе этих данных функциональных сетей мозга, отвечающих тем или иным когнитивным процессам. Понимание того, как различные области мозга взаимодействуют и координируют свою деятельность во время выполнения различных когнитивных задач, и способность точно классифицировать состояния мозга может дать важные сведения о природе когнитивных процессов и способствовать разработке методов диагностики и лечения нейродегенеративных заболеваний. В этом контексте функциональная магнитно-резонансная томография (фМРТ) [1, 2] стала важным инструментом для получения данных об активности мозга [3–6].

Анализ фМРТ-данных представляет собой сложную задачу из-за их высокоразмерной и динамичной природы. В последние годы все больше внимания уделяется применению сетевых методов представления данных для описания функциональных связей между различными областями мозга [7–9]. Эти методы позволяют строить модель мозга в виде сети, где узлы представляют

Власенко Д. В., Ушаков В. Г., Заикин А. А., Захаров Д. Г.  
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 4

собой регионы мозга, а рёбра — функциональные связи между ними. Такой подход позволяет глубже изучить природу когнитивных состояний, выявляя как локальные, так и глобальные связи в активности мозга. Использование сетевых методов анализа фМРТ-данных позволяет не только исследовать характеристики функциональных сетей мозга, но и их топологию с использованием методов машинного обучения [6, 10–12].

На данный момент в нейронауке существует несколько методов представления фМРТ-данных в сетевой форме. Самым простым и популярным методом является корреляционный граф [6, 10, 13]. В общем случае для вычисления функциональной связи между двумя регионами мозга вместо корреляции Пирсона может использоваться любая другая метрика, которая может быть инвариантна или не инвариантна относительно времени и пространственного расположения регионов мозга [14–16].

В этой работе мы предлагаем новый подход к построению графов связности, основанный на ансамблевом обучении [17–19], который ранее не использовался для репрезентации когнитивных данных. Он предназначен для задачи бинарной классификации состояний мозга и обладает рядом существенных преимуществ. Во-первых, ансамблевое обучение позволяет эффективно справляться с шумами, неизбежно присутствующими в данных и особенно свойственными данным нейровизуализации, а также с индивидуальной разницей в протекании когнитивных процессов у испытуемых. Во-вторых, предварительная обработка данных с использованием методов машинного обучения перед использованием сложной модели классификации приводит к повышению точности классификации. В-третьих, наш метод репрезентации фМРТ-данных позволяет использовать мультимодальные данные и отражать в графе полезную информацию, которую несут различные метрики связности и характеристики временных рядов регионов мозга. Другими словами, наш метод объединяет достоинства различных метрик, строя при этом один граф. Это приводит к уменьшению расхода компьютерной памяти, необходимой для хранения данных, и вычислительного времени, которое тратится на последующий сетевой анализ данных. Такие графы могут быть названы ансамблевыми или «синолитическими» графами от греческого слова «synolō», то есть ансамбль [20].

Для верификации выше описанных утверждений нами на основе данных HCP 1200 Subject Release [21, 22] были построены корреляционные графы (как относительно простой и наиболее популярный метод представления фМРТ-данных) и ансамблевые графы. Затем классификация состояний мозга проводилась с применением графовой нейронной сети (ГНС). Построенные корреляционные и ансамблевые графы, а также весь код доступны для ознакомления на Zotero и GitHub [23].

## 1. Метод

**1.1. Данные.** Для проверки предлагаемого метода были отобраны фМРТ-данные здоровых 100 человек из HCP 1200 Subject Release [21, 22]. Итоговая выборка состояла из 50 мужчин и 50 женщин возрастом от 22 до 35 лет. Мы использовали данные, которые были собраны при участии испытуемым в одном из шести различных экспериментов: рабочая память, азартные игры, движение конечностями, социальное восприятие, реляционное восприятие и эмоциональное восприятие [24]. Для задачи бинарной классификации в каждом эксперименте нами были выделены два состояния мозга (табл. 1). Каждому состоянию мозга соответствовала та или иная выполняемая испытуемым когнитивная задача. Таким образом, в каждом из семи экспериментов было по 200 размеченных данных.

Данные были собраны при 3 Тл с полем зрения  $208 \times 180$  мм, размером изотропного вокселя 2.0 мм, временем повторения (TR) 0.72 с, временем эха (TE) 33.1 мс и углом переворота 52 градуса. Предварительная обработка фМРТ была выполнена HCP, а именно была выполнена коррекция

Таблица 1. Два состояния мозга для каждой когнитивной задачи, между которыми производится классификация

Table 1. Two brain states for each cognitive task, between which classification is made

	состояние 1	состояние 2
Рабочая память	0-назад	2-назад
Азартные игры	победа	проигрыш
Движение конечностями	левая рука или нога	правая рука или нога
Социальное восприятие	случайное движение	ментальное взаимодействие
Реляционное восприятие	отношение	сходство
Эмоциональное восприятие	нейтрально	страх

движений головы, коррекция искажения от магнитного поля, пространственная нормализация и фильтрация пространственных и временных шумов. Более подробно с методами получения и обработки данных можно ознакомиться в [24,25]. Дополнительно нами был удален линейный тренд из данных, временные ряды вокселей были нормализованы и парцеллированы на 379 регионов с помощью атласа [26]. Временные ряды внутри каждого региона были пространственно усреднены таким образом, чтобы каждому региону мозга соответствовал один временной ряд.

**1.2. Репрезентация фМРТ-данных в графовой форме.** Введем необходимые обозначения. Граф  $g = (V, E, H, W)$  состоит из множества вершин  $V = \{i | i \in 1, \dots, n\}$ , множества неориентированных ребер  $E = \{ij | i \in V; j \in V; i \neq j\}$ , множества значений вершин  $H = \{h_i | i \in V\}$  и множества значений ребер  $W = \{w_{ij} | ij \in E\}$ . Каждая вершина графа ассоциирована с регионом мозга, полученным путем парцелляции фМРТ-данных. Временной ряд региона мозга  $i$  будем обозначать с помощью  $x_i$ .

Для сравнения с ансамблевыми графами мы использовали знаменитые в области нейровизуализации и простые в интерпретации корреляционные графы. В таких графах значение вершины  $i$  есть среднее значение региона  $h_i = \bar{x}_i$ , значение ребра  $ij$  есть корреляция Пирсона между временными рядами двух регионов  $w_{ij} = \rho(x_i, x_j)$ . При этом для каждого графа мы нормализовали вес его ребер.

В общем случае для ансамблевых графов значение ребра  $ij$  вычисляется как разница вероятностей двух состояний мозга при условии значений некоторого набора функций  $f_1, \dots, f_k$  от временных рядов регионов мозга  $i, j$ :

$$w_{ij} = P(2 | f_1(x_i, x_j), \dots, f_k(x_i, x_j)) - P(1 | f_1(x_i, x_j), \dots, f_k(x_i, x_j)). \quad (1)$$

В качестве функций  $f_1, \dots, f_k$  мы выбрали те же метрики, что были использованы и для корреляционных графов: среднее значение регионов  $i$  и  $j$  и корреляцию Пирсона между ними. Таким образом, для вычисления весов ребер для каждого ребра требовалось обучить индивидуальный классификатор. В частности, мы использовали метод опорных векторов [27] с радиально-базисным ядром и параметром регуляризации, равным единице. Из уравнения (1) следует, что вес ребра может принимать значения от  $-1$  до  $1$ . Соответственно, если вес ребра  $w_{ij}$  отрицательный, то ребро  $ij$  несет информацию о том, что состояние мозга 1 является наиболее вероятным состоянием. Если вес ребра  $w_{ij}$  положительный, то ребро  $ij$  несет информацию о том, что уже состояние мозга 2 является наиболее вероятным состоянием. Чем больше абсолютное значение веса ребра  $|w_{ij}|$ , тем больше информации для классификации несет ребро  $ij$ . Так как информация о средних значениях временных рядов регионов уже учтена в весах ребер, а для ГНС необходимы значения вершин, то значение каждой вершины  $i$  есть единица ( $h_i = 1$ ). Весь процесс построения ансамблевых графов и классификации отображен на рис. 1.

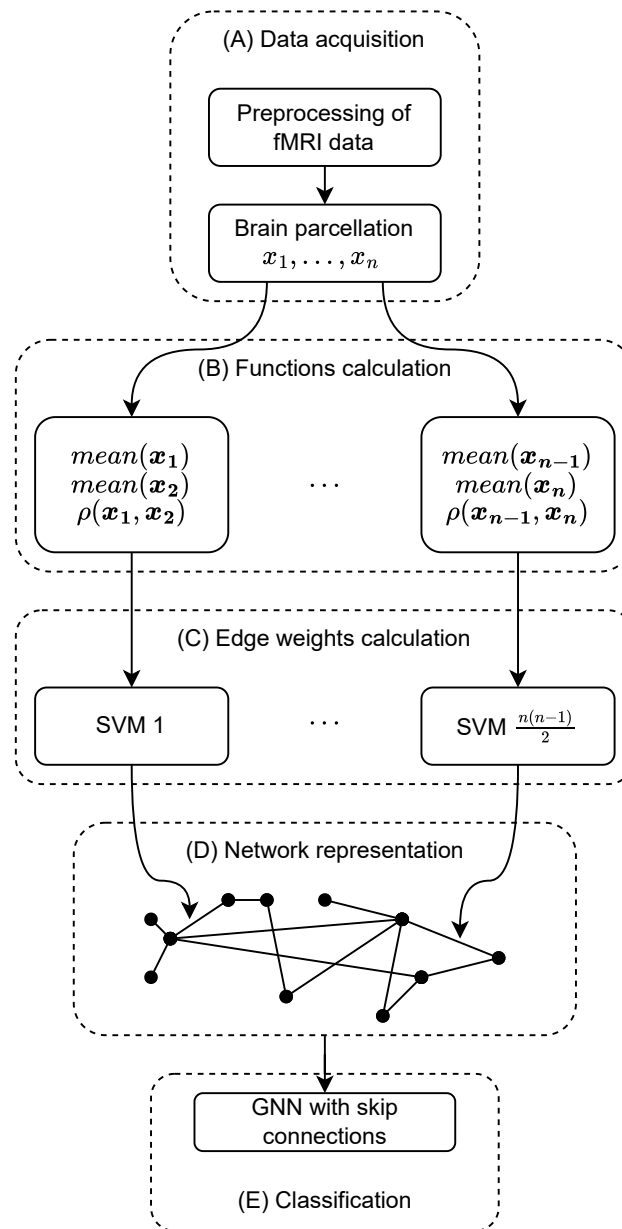


Рис. 1. Схема представления фМРТ-данных в форме ансамблевых графов для классификации состояний мозга. Сначала данные подвергаются необходимой предварительной обработке, из них извлекаются временные ряды (А). Затем на временных рядах вычисляются функции (В), значения которых подаются в классификаторы для вычисления весов ребер графа (С). После этого данные представляются в графовой форме (D) и подаются в метаклассификатор, например, графовую нейронную сеть, для окончательной классификации (Е)

Fig. 1. An overview of representing fMRI, EEG/MEG data in graph form for classification of brain states. Initially, the data is preprocessed in the required way and time series are extracted from the data (A). Then, functions are calculated on the time series (B), the values of which are then fed to classifiers to calculate the edge weights of the graph (C). After that, the data is presented in graph form (D) and fed to a meta-classifier, e.g. a graph neural network, for the final classification (E)

**1.3. Графовая нейронная сеть.** Для классификации графов, полученных на предыдущем этапе, использовалась простая графовая нейронная сеть со следующей архитектурой. Классифицируемый граф подавался на сверточный графовый слой [28], после чего применялась ReLU [29]. После нелинейности использовались слои Batch Normalization [30] и Dropout [31]

для предотвращения переобучения нейронной сети. Далее использовались так называемые «skip connections» [32], когда выход сверточного слоя после нелинейности соединяется с данными на входе слоя. Аналогично применялись еще два сверточных слоя. В результате получались эмбединги вершин, учитывающие влияние соседних вершин графа. Для перехода от эмбедингов вершин к эмбедингу всего графа использовался Global max Pooling [33]. Далее, после еще одного слоя Batch Normalization, данные подавались на полносвязный слой, после которого вычислялись оценки принадлежности объекта к классу с помощью сигмоиды. В качестве функции потерь использовалась кросс-энтропия.

**1.4. Схема обучения и валидации.** Для процедуры построения графов каждый датасет разбивался на обучающую и тестовую выборки по количеству испытуемых: 70 человек в обучающей выборке (140 наборов данных), 30 — в тестовой (60 наборов данных). На обучающей выборке происходила тренировка моделей для построения графов, которые затем применялись для построения графов на тестовой выборке.

Классификация графов проводилась с помощью ГНС с таким же разделением на обучающую и тестовую выборку, что и для задачи построения графов. Тестовая выборка дополнительно разбивалась на валидационную выборку из 20 испытуемых (40 размеченных графов), на которой производился поиск оптимальных гиперпараметров ГНС и, собственно, тестовую выборку из 10 испытуемых (20 наборов графов), на которой оценивались метрики классификации. После подбора гиперпараметров ГНС на валидационной выборке ГНС обучалась и тестировалась 50 раз с различными random seed, что позволило оценить среднее и стандартное отклонение метрик.

## Результаты и заключение

Результаты сравнения корреляционного и ансамблевого методов репрезентации на основе фМРТ-данных НСР представлены в табл. 2. В ней представлены средняя точность классификации и F1-метрика и их стандартные отклонения. Ансамблевый метод (в среднем) для каждого типа эксперимента приводит к более точной и стабильной классификации.

Мы предполагаем, что нашему методу удастся превзойти корреляционный метод из-за того, что корреляционные графы содержат в себе шум, порождаемый следующими причинами:

Таблица 2. Сравнение корреляционного и ансамблевого методов репрезентации на основе фМРТ-данных НСР. Представлена точность классификации и F1-метрика в формате среднее (стандартное отклонение)

Table 2. Comparison of correlation-based and ensemble-based representation methods on fMRI data of HCP. Classification accuracy and F1 metric in mean (standard deviation) format are presented

		Корреляционные графы	Ансамблевые графы
Рабочая память	Accuracy (%)	71.7 (7.11)	79.4 (3.56)
	F1 (%)	72.78 (7.86)	74.37 (5.23)
Азартные игры	Accuracy (%)	65.3 (6.12)	98.9 (2.07)
	F1 (%)	70.7 (5.82)	98.95 (1.97)
Движение конечностями	Accuracy (%)	62.3 (6.34)	68.0 (4.36)
	F1 (%)	42.66 (12.36)	67.75 (4.55)
Социальное восприятие	Accuracy (%)	80.6 (5.71)	98.2 (2.4)
	F1 (%)	82.57 (4.5)	98.11 (2.53)
Реляционное восприятие	Accuracy (%)	85.3 (5.69)	95.0 (0.0)
	F1 (%)	85.46 (5.8)	95.24 (0.0)
Эмоциональное восприятие	Accuracy (%)	54.2 (5.23)	73.8 (6.37)
	F1 (%)	55.64 (6.34)	73.7 (5.18)



нестабильностью корреляционных коэффициентов из-за коротких временных рядов. При расчете коэффициентов корреляции на основе коротких временных рядов, свойственных фМРТ-данным, возникает стандартная ошибка, что приводит к недостоверным оценкам корреляции. Чем короче временные ряды, тем выше ошибка и, следовательно, выше уровень шума. При этом стоит учитывать, что временные ряды из соседних областей могут влиять друг на друга из-за физической близости изменений в кровотоке. Это приводит к искажению измеряемых корреляций. Также глобальные изменения сигнала, например, из-за общего изменения уровня активности, могут накладываться на локальные сигналы, создавая ложные корреляции. Ввиду перечисленных выше проблем корреляционные графы, построенные на фМРТ-данных, нужно дополнительно обрабатывать для фильтрации шума. В свою очередь, ансамблевый метод, в силу природы его вычисления, как раз помечает незначимые для классификации ребра весом, близким по абсолютному значению к нулю. Это приводит к уменьшению влияния неважной для классификации информации в данных.

В качестве примера визуализации топологии графов, которые строятся с помощью ансамблевого метода, мы приводим усредненную по тестовой выборке матрицу весов ребер в эксперименте на рабочую память (рис. 2). Можно видеть, как некоторые ребра ярко подсвечены цветом, что свидетельствует об их значимости в классификации между двумя состояниями.

Обратим внимание, что в том формате, в котором мы строили ансамблевые графы, их можно также интерпретировать как преобразование над корреляционными графами с применением методов машинного обучения.

В заключение отметим, что в данной работе представлен метод репрезентации данных, основанный на ансамблевом обучении, который показал во всех задачах более высокие результаты по сравнению с наиболее распространенным методом, что позволяет его рекомендовать для проведения анализа фМРТ-данных. Лучшая эффективность классификации позволяет предположить, что с использованием этого метода мы более эффективно определяем функциональные связи между регионами мозга при выполнении когнитивных задач. Мы надеемся, что в будущем, при дальнейшем накоплении таких экспериментальных данных, наш метод даст возможность дальше продвинуться в понимании процессов, протекающих в мозге.

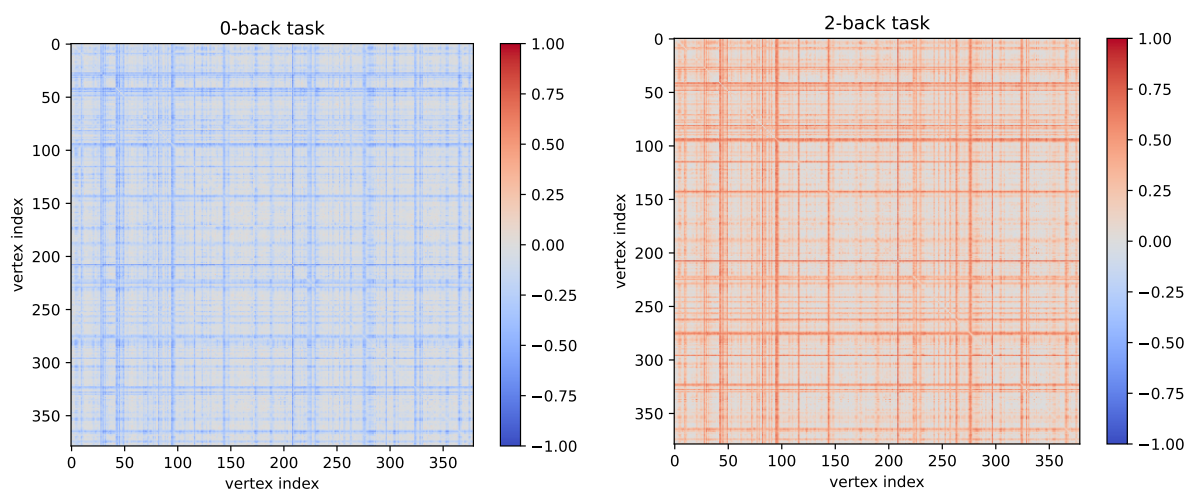


Рис. 2. Усредненные по тестовой выборке матрицы весов ребер для ансамблевых графов в эксперименте на рабочую память. По вертикали и горизонтали расположены индексы вершины, цвет отражает вес ребра (цвет онлайн)

Fig. 2. Test sample averaged matrices of edge weights for ensemble graphs in the working memory experiment. Vertically and horizontally there are vertex indices, the color reflects the edge weight (color online)

## References

1. Heeger DJ, Ress D. What does fMRI tell us about neuronal activity? *Nat. Rev. Neurosci.* 2002;3(2):142–151. DOI: 10.1038/nrn730.
2. Logothetis NK. What we can do, and what we cannot do with fMRI. *Nature.* 2008;453(7197):869–878. DOI: 10.1038/nature06976.
3. Ramzan F, Khan MUG, Rehmat A, Iqbal S, Saba T, Rehman A, Mehmood Z. A deep learning approach for automated diagnosis and multiclass classification of Alzheimer's disease stages using resting state fMRI and residual neural networks. *J. Med. Syst.* 2019;44(2):37. DOI: 10.1007/s10916-019-1475-2.
4. Arribas JI, Calhoun VD, Adali T. Automatic Bayesian classification of healthy controls, bipolar disorder, and schizophrenia using intrinsic connectivity maps from fMRI data. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* 2010;57(12):2850–2860. DOI: 10.1109/TBME.2010.2080679.
5. Luo Y, Alvarez TL, Halperin JM, Li X. Multimodal neuroimaging based prediction of adult outcomes in childhood-onset ADHD using ensemble learning techniques. *Neuroimage: Clin.* 2020;26:102238. DOI: 10.1016/j.nicl.2020.102238.
6. Li X, Zhou Y, Dvornek N, Zhang M, Gao S, Zhuang J, Scheinost D, Staib LH, Ventola P, and Duncan JS. BrainGNN: Interpretable brain graph neural network for fMRI analysis. *Med. Image Anal.* 2021;74:102233. DOI: 10.1016/j.media.2021.102233.
7. Wang J, Zuo X, He Y. Graph-based network analysis of resting-state functional MRI. *Front. Syst. Neurosci.* 2010;4:16. DOI: 10.3389/fnsys.2010.00016.
8. Richiardi J, Eryilmaz H, Schwartz S, Vuilleumier P, Van De Ville D. Decoding brain states from fMRI connectivity graphs. *Neuroimage.* 2011;56(2):616–626. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2010.05.081.
9. Takerkart S, Auzias G, Thirion B, Ralaivola L. Graph-based inter-subject pattern analysis of fMRI data. *PLoS ONE.* 2014;9(8):e104586. DOI: 10.1371/journal.pone.0104586.
10. Saeidi M, Karwowski W, Farahani FV, Fiok K, Hancock PA, Sawyer BD, Christov-Moore L, Douglas PK. Decoding task-based fMRI data with graph neural networks, considering individual differences. *Brain Sci.* 2022;12(8):1094. DOI: 10.3390/brainsci12081094.
11. Li X, Dvornek NC, Zhou Y, Zhuang J, Ventola P, Duncan JS. Graph neural network for interpreting task-fMRI biomarkers. In: Shen D, Liu T, Peters TM, Staib LH, Essert C, Zhou S, Yap P-T, Khan A, editors. *Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention – MICCAI 2019.* MICCAI 2019. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11768. Cham: Springer; 2019. P. 485–493. DOI: 10.1007/978-3-030-32254-0\_54.
12. Bessadok A, Mahjoub MA, Rekik I. Graph neural networks in network neuroscience. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2023;45(5):5833–5848. DOI: 10.1109/TPAMI.2022.3209686.
13. Gorban AN, Tyukina TA, Pokidysheva LI, Smirnova EV. Dynamic and thermodynamic models of adaptation. *Phys. Life Rev.* 2021;37:17–64. DOI: 10.1016/j.plrev.2021.03.001.
14. Ursino M, Ricci G, Magosso E. Transfer entropy as a measure of brain connectivity: A critical analysis with the help of neural mass models. *Front. Comput. Neurosci.* 2020;14:45. DOI: 10.3389/fncom.2020.00045.
15. Hlinka J, Paluš M, Vejmelka M, Mantini D, Corbetta M. Functional connectivity in resting-state fMRI: Is linear correlation sufficient? *Neuroimage.* 2011;54(3):2218–2225. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2010.08.042.
16. Roebroeck A, Formisano E, Goebel R. Mapping directed influence over the brain using Granger causality and fMRI. *Neuroimage.* 2005;25(1):230–242. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2004.11.017.
17. Ganaie MA, Hu M, Malik AK, Tanveer M, Suganthan PN. Ensemble deep learning: A review. *Engineering Applications of Artificial Intelligence.* 2022;115:105151. DOI: 10.1016/j.engappai.2022.105151.



18. Mohammed A, Kora R. A comprehensive review on ensemble deep learning: Opportunities and challenges. *Journal of King Saud University Computer and Information Sciences*. 2023;35(2): 757–774. DOI: 10.1016/j.jksuci.2023.01.014.
19. Galar M, Fernandez A, Barrenechea E, Bustince H, Herrera F. A review on ensembles for the class imbalance problem: Bagging-, boosting-, and hybrid-based approaches. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. C*. 2012;42(4):463–484. DOI: 10.1109/TSMCC.2011.2161285.
20. Nazarenko T, Whitwell HJ, Blyuss O, Zaikin A. Parenclitic and synolytic networks revisited. *Front. Genet*. 2021;12:733783. DOI: 10.3389/fgene.2021.733783.
21. Elam JS, Glasser MF, Harms MP, Sotiropoulos SN, Andersson JL, Burgess GC, Curtiss SW, Oostenveld R, Larson-Prior LJ, Schoffelen JM, Hodge MR, Cler EA, Marcus DM, Barch DM, Yacoub E, Smith SM, Ugurbil K, Van Essen DC. The Human Connectome Project: A retrospective. *Neuroimage*. 2021;244:118543. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2021.118543.
22. Van Essen DC, Smith SM, Barch DM, Behrens TEJ, Yacoub E, Ugurbil K; WU-Minn HCP Consortium. The WU-Minn Human Connectome Project: An overview. *Neuroimage*. 2013;80: 62–79. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2013.05.041.
23. Vlasenko D, Zaikin A, Zakharov D. Ensemble\_graphs\_fmri\_2024 [Data set]. Zenodo. 2024. DOI: 10.5281/zenodo.13764278.
24. Barch DM, Burgess GC, Harms MP, Petersen SE, Schlaggar BL, Corbetta M, Glasser MF, Curtiss S, Dixit S, Feldt C, Nolan D, Bryant E, Hartley T, Footer O, Bjork JM, Poldrack R, Smith S, Johansen-Berg H, Snyder AZ, Van Essen DC; WU-Minn HCP Consortium. Function in the human connectome: Task-fMRI and individual differences in behavior. *Neuroimage*. 2013;80:169–189. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2013.05.033.
25. Glasser MF, Sotiropoulos SN, Wilson JA, Coalson TS, Fischl B, Andersson JL, Xu J, Jbabdi S, Webster M, Polimeni JR, Van Essen DC, Jenkinson M; WU-Minn HCP Consortium. The minimal preprocessing pipelines for the Human Connectome Project. *Neuroimage*. 2013;80:105–124. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2013.04.127.
26. Glasser MF, Coalson TS, Robinson EC, Hacker CD, Harwell J, Yacoub E, Ugurbil K, Andersson J, Beckmann CF, Jenkinson M, Smith SM, Van Essen DC. A multi-modal parcellation of human cerebral cortex. *Nature*. 2016;536(7615):171–178. DOI: 10.1038/nature18933.
27. Platt JC. Probabilistic Outputs for Support Vector Machines and Comparisons to Regularized Likelihood Methods. *Advances in Large Margin Classifiers*. 1999;10(3):61–74.
28. Kipf TN, Welling M. Semi-supervised classification with graph convolutional networks. arXiv: 1609.02907. arXiv Preprint; 2016. DOI: 10.48550/arXiv.1609.02907
29. Fukushima K. Visual feature extraction by a multilayered network of analog threshold elements. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*. 1969;5(4):322–333. DOI: 10.1109/TSSC.1969.300225.
30. Ioffe S, Szegedy C. Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift. arXiv:1502.03167. arXiv Preprint; 2015. DOI: 10.48550/arXiv.1502.03167.
31. Srivastava N, Hinton G, Krizhevsky A, Sutskever I, Salakhutdinov R. Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting. *Journal of Machine Learning Research*. 2014;15(56): 1929–1958.
32. Xu K, Zhang M, Jegelka S, Kawaguchi K. Optimization of graph neural networks: Implicit acceleration by skip connections and more depth. arXiv:2105.04550. arXiv Preprint; 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2105.04550.
33. Grattarola D, Zambon D, Bianchi FM, Alippi C. Understanding pooling in graph neural networks. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst*. 2024;35(2):2708–2718. DOI: 10.1109/TNNLS.2022.3190922.



*Власенко Даниил Владимирович* — родился в Краснодаре (2001). Окончил бакалавриат математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (2023) по направлению «Прикладная математика и информатика» и магистратуру Института когнитивных нейронаук ВШЭ (2025). Работает в группе теоретической нейронауки Института когнитивных нейронаук НИУ ВШЭ в должности научного сотрудника. Научные интересы — анализ данных, статистика, наука о сетях, математическое моделирование, нейронауки.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20  
Институт когнитивных нейронаук НИУ «Высшая школа экономики»  
E-mail: [dvlasenko@hse.ru](mailto:dvlasenko@hse.ru)  
ORCID: 0009-0002-4867-2896  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1262749



*Ушаков Вадим Геннадьевич* — родился в Анапе (1977). С отличием окончил физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (2001). Работал научным сотрудником в ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского и в Центре анализа сложных систем Сеченовского университета. Научные интересы — анализ данных, графовые нейронные сети, статистика, математическое моделирование, стохастические процессы.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20  
Институт когнитивных нейронаук НИУ «Высшая школа экономики»  
E-mail: [uvadim@mail.ru](mailto:uvadim@mail.ru)  
ORCID: 0009-0004-1388-560X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 36629



*Заикин Алексей Анатольевич* — родился в Москве (1973). С отличием окончил физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (1995). В 1998 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по направлениям «Радиофизика» и «Акустика». В настоящее время является профессором системной медицины и прикладной математики Института женского здоровья и математического факультета Университетского колледжа Лондона, Великобритании. Область научных интересов: вычислительная и системная медицина, системная биология, теоретическая биофизика, прикладная математика, статистическая физика, нелинейная динамика и стохастическое моделирование в биологии. Является автором более 160 научных публикаций.

Gower Street London, WC1E 6BT, UK  
Institute for Women's Health and Dep. of Mathematics University College London  
E-mail: [alexey.zaikin@ucl.ac.uk](mailto:alexey.zaikin@ucl.ac.uk)  
ORCID: 0000-0001-7540-1130  
AuthorID (eLibrary.Ru): 29322



*Захаров Денис Геннадьевич* — родился в Нижнем Новгороде (1976), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1999). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по направлению «Радиофизика» (2005). Более 20 лет работал в Институте прикладной физики РАН. В настоящее время является ведущим научным сотрудником Института когнитивных нейронаук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Область научных интересов — теория нелинейных колебаний и волн, нелинейная динамика, моделирование активности спайковых нейронных сетей и когнитивных процессов. Является автором более 100 научных публикаций.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20  
Институт когнитивных нейронаук НИУ «Высшая школа экономики»  
E-mail: [dgzakharov@hse.ru](mailto:dgzakharov@hse.ru)  
ORCID: 0000-0003-4367-8965  
AuthorID (eLibrary.Ru): 42103



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003179  
EDN: WHUMCW

### Взаимодействие и синхронизация ритмов в модели лимбической системы мозга

А. А. Капустников<sup>1,2</sup>, М. В. Сысоева<sup>2</sup>✉, И. В. Сысоев<sup>1,2</sup>, М. В. Корнилов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия  
E-mail: anton.kapustnikov.02@mail.ru, ✉bobrichkek@mail.ru, ivssci@gmail.com,  
kornilovmv@gmail.com

Поступила в редакцию 1.02.2025, принята к публикации 10.03.2025,  
опубликована онлайн 19.06.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — построение сетевой математической модели взаимодействия ритмов лимбической системы мозга при распространении патологической эпилептиформной активности из её фокуса. **Методы.** На основе известных анатомических правил и биофизических законов строятся сети модельных нейронов гиппокампа, энторинальной и лобной коры обоих полушарий. Рассматривается процесс синхронизации хаотической динамики в относительно большой сети разнородных нейроосцилляторов сигналом кольцевого генератора регулярной активности (модели эпилептического фокуса). **Результаты.** Показано, что, несмотря на существенные различия между модельными уравнениями разных типов клеток и наличие собственных основных частот колебаний в бета- и гамма-диапазонах в модели лимбической системы в фоновом режиме, внешнее импульсное регулярное воздействие может приводить к синхронизации и частичному подавлению собственной активности, смещению пиков в спектре. Данный вывод оказывается справедлив не для одной модели, а для целого класса моделей, различающихся матрицами связей. **Заключение.** На биологически релевантной модели лимбической системы обоих полушарий мозга впервые показан механизм распространения патологического ритма активности, отвечающего за эпилептический приступ.

**Ключевые слова:** модель лимбической системы мозга, модель Ходжкина–Хаксли.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-22-00406, <https://rscf.ru/project/25-22-00406/>.

**Для цитирования:** Капустников А. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В., Корнилов М. В. Взаимодействие и синхронизация ритмов в модели лимбической системы мозга // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 567–589. DOI: 10.18500/0869-6632-003179. EDN: WHUMCW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Interaction and synchronization of rhythms in a model of the brain limbic system

A. A. Kapustnikov<sup>1,2</sup>, M. V. Sysoeva<sup>2</sup>✉, I. V. Sysoev<sup>1,2</sup>, M. V. Kornilov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

<sup>2</sup>Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, Russia

E-mail: anton.kapustnikov.02@mail.ru, ✉bobrichuk@mail.ru, ivssci@gmail.com, kornilovmv@gmail.com

Received 1.02.2025, accepted 10.03.2025, available online 19.06.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The purpose of this study is to build a mathematical network model for interaction of rhythms in the limbic system of the brain, when pathological epileptiform activity is spreading from the focus. *Methods.* Based on well-known anatomical rules and biophysical laws, networks of model neurons are constructed for the hippocampus, the entorhinal and frontal cortex of both hemispheres. The task of chaotic dynamics synchronization in a relatively large network of heterogeneous neurooscillators by the signal of a ring generator of regular activity (a model of epileptic focus) was considered. *Results.* The regular pulse activity was shown to be able partly synchronize or suppress own activity in the limbic system model despite significant differences between the model equations of different cell types and the presence of natural fundamental oscillation frequencies in the beta and gamma ranges, with some spectral peaks become shifted. This effect stays valid not for a single model, but for a class of models that differ by the connectivity matrices. *Conclusion.* The mechanism of pathological rhythmic activity propagation from the epileptic focus to the whole limbic system is modelled for the first time, with using biologically relevant models of the limbic system of both brain hemispheres.

**Keywords:** model of brain limbic system, Hodgkin–Huxley model.

**Acknowledgements.** This study was supported by Russian Science Foundation, grant No. 25-22-00406, <https://rscf.ru/en/project/25-22-00406/>.

**For citation:** Kapustnikov AA, Sysoeva MV, Sysoev IV, Kornilov MV. Interaction and synchronization of rhythms in a model of the brain limbic system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):567–589. DOI: 10.18500/0869-6632-003179

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Эпилептиформная активность представляет собою один из самых широко известных и удобных для изучения примеров ритмической активности в мозге. При математическом моделировании сигналов мозга при эпилепсии важно понимать, что различные формы эпилепсии имеют различный патогенез [1]. Это значит, что задействуются разные области мозга и реализуются различные сценарии генерализации патологической активности в мозге. Наибольшее число моделей известно для абсансной эпилепсии, поскольку это самая простая и хорошо изученная форма, в том числе потому что для неё имеются несколько генетических [2, 3] и фармакологических [4] животных-моделей. Модели можно условно разделить на макроскопические, когда каждая структура мозга или тип клеток описываются одним [5] или несколькими [6] уравнениями, и мезомасштабные, когда учитываются сетевые взаимодействия внутри структур и между различными типами клеток, но нет возможностей смоделировать каждую клетку в отдельности, поэтому в качестве узлов сети выступают большие группы клеток со сходными свойствами [7–9]. Как правило, математические и радиотехнические модели эпилепсии основаны на результатах анализа связей по сигналам мозга. Так как большинство форм эпилепсии возникает с активным участием глубоких структур мозга, это анализ сигналов локальных потенциалов у животных.

В данной работе рассматривается лимбическая (височная) эпилепсия, приступы которой сопровождаются судорогами. Эпилептогенез чаще всего связан с травмированием нервной ткани гиппокампа [10] или поражением гиппокампа, приводящего к атрофии, которая обычно вызывается, помимо потери нейронов, за счет глиоза в секторе Соммера [11]. Однако на данный

момент не ясен механизм и не локализована область, ответственная за генерацию и распространение припадков. Имеется несколько различных гипотез возникновения эпилептического разряда: существование отдельного ключевого патологического объекта, например, прорастание волокон мха и синаптическая реорганизация извилин [12–15] или бездействующие внутренние нейроны [16]; существование определенной области, например, СА3, зубчатая фасция, которая является основной причиной возникновения судорог [17], за счёт повышенной возбудимости нейронов поля СА3 [15]; возможное существование двух независимых источников эпилептиформной активности в энторинальной коре [15] и гиппокампе [17, 18]. Авторы данной работы придерживаются гипотезы о существовании небольшого первичного эпилептического фокуса в гиппокампе, который является генератором основного ритма и может включать в себя небольшое количество нейронов — в пределах нескольких десятков. В работах [19] и [20] были реализованы модели данного генератора с использованием простых нейроосцилляторов ФитцХью–Нагумо [21, 22], классической модели Ходжкина–Хаксли в оригинальном виде [23] и модифицированной модели Ходжкина–Хаксли для поля СА3 пирамидных нейронов [24] соответственно.

Процесс моделирования лимбической эпилепсии в предыдущих исследованиях [19, 20, 25] был разбит на части. Напротив, данная работа является более комплексной и обобщающей, поскольку здесь представлена схема связей лимбической системы, которая включает в себя три основных структуры мозга, задействованных в эпилептической активности: лобную кору (*FC*), энторинальную кору (*EC*) и гиппокамп (*HP*), а также эти области разделены на два полушария: левое *L* и правое *R*. На основе анатомических правил, представленных на схеме ниже (рис. 1), построена архитектура матрицы связности для лимбической эпилепсии, состоящая из 101 нейрона. Исходя из морфологии сети, модель имеет 6 различных видов нейронов: три типа возбуждающих клеток и три типа тормозных клеток соответственно. Для моделирования каждого типа нейронов использовались специализированные, модифицированные уравнения в формализме Ходжкина–Хаксли, а также использовались специальные уравнения для моделирования глутаматэргических (возбуждающих) и ГАМКэргических (тормозных) синапсов.

Основным результатом работы является демонстрация распространения основной частоты, генерируемой контуром в гиппокампе, в самом гиппокампе и во все вышестоящие области — то есть модель взаимодействия ритмов мозга: нормальных, порождаемых сетью гиппокампа в фоновом режиме, и патологического, приходящего из эпилептического фокуса. На основе этой модели показан возможный механизм вторичной генерализации эпилептического приступа, включая частичную синхронизацию активности нейронов в гиппокампе и связанных с ним областях коры во время приступа.

## 1. Архитектура лимбической системы

При моделировании лимбической эпилепсии в данной работе рассматриваются три основных структуры: лобная кора, энторинальная кора и гиппокамп. Каждая структура включает в себя только два основных типа нейронов: возбуждающие — пирамидные нейроны (*PY*); тормозные — интернейроны (*IN*). Все три области были разделены на два полушария. Общий принцип построения межполушарных связей заключается в том, что правая и левая стороны коры и гиппокампа связаны между собой через *PY*-нейроны и это основной путь коммуникации между полушариями.

Лобная кора и гиппокамп связаны друг с другом опосредованно, поскольку имеют прямые двунаправленные связи только с энторинальной корой, которая выполняет роль основного интерфейса между ними. В общем случае основная связь между структурами происходит за счет возбуждающих связей *PY*-нейронов, а *IN*-нейроны изолированы от воздействия со стороны

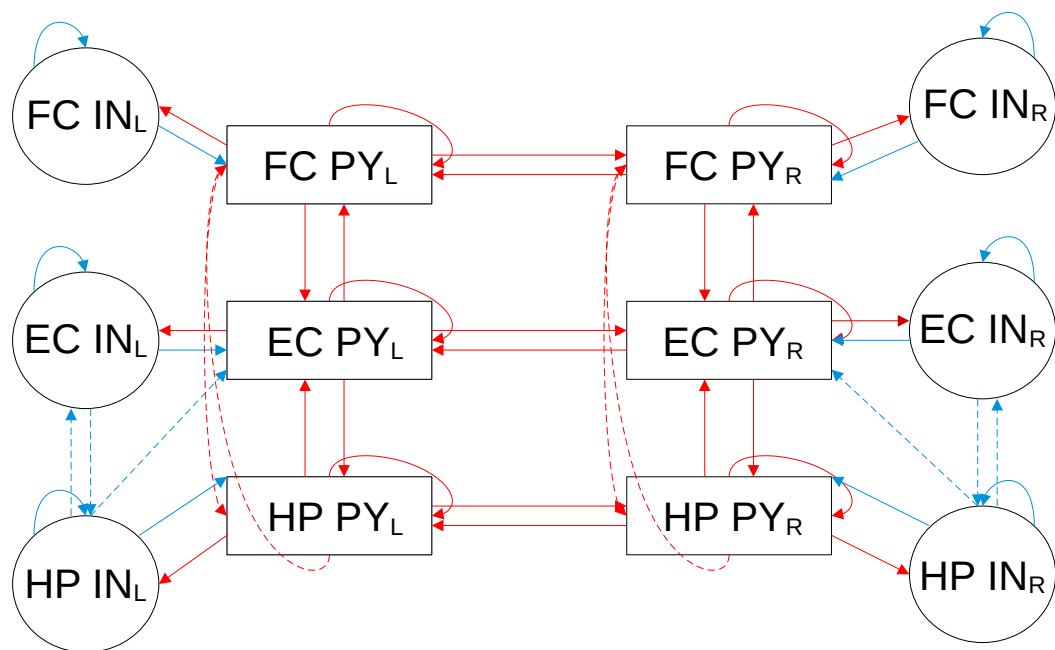


Рис. 1. Схема связей для моделируемых структур мозга: лобной (FC), энторинальной (EC) коры и гиппокампа (HP). Красным цветом обозначены возбуждающие связи, синим — тормозные. Сплошная линия — сильные связи, пунктирная линия — слабые связи. Пирамиды (PY) обозначены прямоугольниками, интернейроны (IN) — эллипсами (цвет онлайн)

Fig. 1. The scheme of couplings for the simulated brain structures: frontal (FC), entorhinal (EC) cortex and hippocampus (HP). Excitatory couplings are indicated in red, inhibitory couplings are indicated in blue. The solid line shows strong connections, the dotted line shows weak connections. Pyramids (PY) are indicated by rectangles, interneurons (IN) are indicated by ellipses (color online)

клеток, находящихся за пределами их области. Предполагаемая принципиальная схема связи между структурами представлена на рис. 1.

Однако существуют экзотические виды связей, которые несколько нарушают общие правила связи нейронов между структурами. Например, существует двунаправленная связь между PY-клетками лобной коры и PY-клетками гиппокампа, но данный вид связи является очень слабым или же в некоторых случаях может отсутствовать полностью. По этой причине более корректно говорить все же об опосредованной связи между ними. Также существуют связи интернейронов энторинальной коры и гиппокампа. На рис. 1 обозначена как прямая, так и обратная связь между IN-нейронами гиппокампа и энторинальной коры. Обе они довольно слабые и обозначены пунктиром (основные связи между этими двумя структурами все-таки возбуждающие). Ещё следует отметить, что также существует слабая связь от IN-клеток гиппокампа к PY-клеткам энторинальной коры, данная связь тоже довольно экзотическая и выделена пунктиром, но в некоторых случаях данную связь вообще исключают из рассмотрения.

Основываясь на анатомических положениях, во всей рассматриваемой системе присутствуют как сильные, так и слабые связи между структурами. Все виды связи были построены исходя из литературных данных, однако из-за отсутствия консенсуса по поводу наличия тех или иных связей данная схема является в некоторой степени условной.

На основе данной схемы была построена система из  $D = 101$  нейроосцилляторов, матрица связи изображена на рис. 2. Связи между отдельными элементами распределялись случайно, но в соответствии с анатомическими представлениями. В данной системе присутствует 6 типов клеток, а именно: пирамиды ( $PY_{FC}$ ) и интернейроны ( $IN_{FC}$ ) лобной коры; пирамиды ( $PY_{EC}$ ) и интернейроны ( $IN_{EC}$ ) энторинальной коры; пирамиды ( $PY_{HP}$ ) и интернейроны ( $IN_{HP}$ ) гиппокампа.

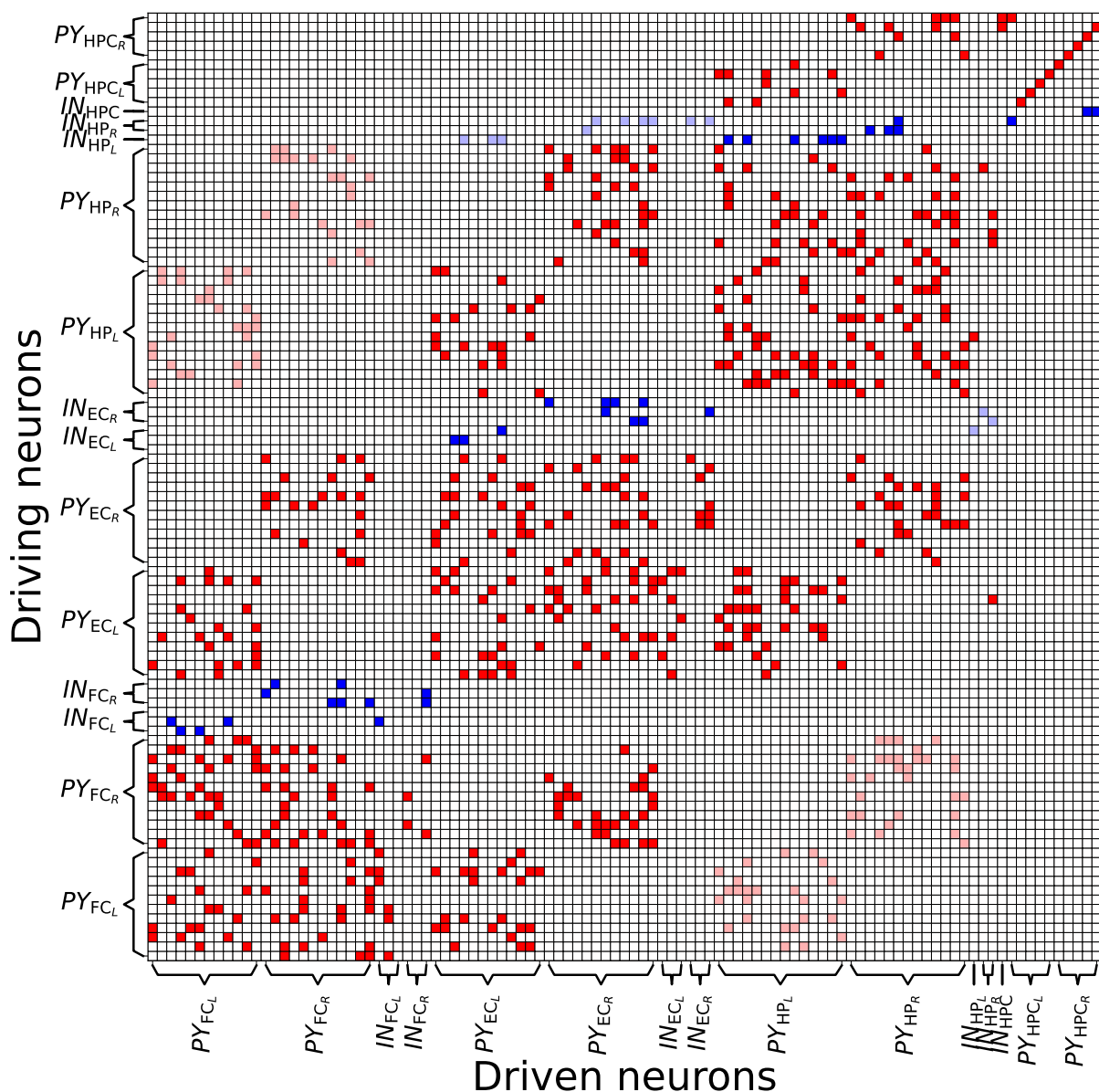


Рис. 2. Матрица связности всех клеток лобной, энторинальной коры и гиппокампа. По оси абсцисс — ведомые нейроны, по оси ординат — ведущие. Красным цветом обозначены положительные связи (возбуждающие, при  $k_{i,j} > 0$ ), синим цветом — отрицательные (тормозные, при  $k_{i,j} < 0$ ), белым — отсутствие связей ( $k_{i,j} = 0$ ). Более яркие связи — сильные, более бледные — слабые. *PY* — пирамидные нейроны, *IN* — интернейроны. *FC<sub>L</sub>* — клетки лобной коры левого полушария, *FC<sub>R</sub>* — клетки лобной коры правого полушария, *EC<sub>L</sub>* — клетки энторинальной коры левого полушария, *EC<sub>R</sub>* — клетки энторинальной коры правого полушария, *HP<sub>L</sub>* — клетки гиппокампа левого полушария, *HP<sub>R</sub>* — клетки гиппокампа правого полушария, *HPC<sub>L</sub>* — клетки эпифокуса гиппокампа левого полушария, *HPC<sub>R</sub>* — клетки эпифокуса гиппокампа правого полушария (цвет онлайн)

Fig. 2. Coupling matrix for all cells of the frontal, entorhinal cortex, and hippocampus. The driven neurons are located along the x-axis, and the driving neurons are located along the y-axis. Positive couplings are indicated in red (excitatory, at  $k_{i,j} > 0$ ), negative couplings (inhibitory, at  $k_{i,j} < 0$ ) are indicated in blue, and no couplings are indicated in white ( $k_{i,j} = 0$ ). Brighter couplings mean stronger connections, paler couplings mean weak connections. *PY* — pyramidal neurons, *IN* — interneurons. *FC<sub>L</sub>* — cells of the frontal cortex of the left hemisphere, *FC<sub>R</sub>* — cells of the frontal cortex of the right hemisphere, *EC<sub>L</sub>* — cells of the entorhinal cortex of the left hemisphere, *EC<sub>R</sub>* — cells of the entorhinal cortex of the right hemisphere, *HP<sub>L</sub>* — cells of the hippocampus of the left hemisphere, *HP<sub>R</sub>* — cells of the hippocampus of the right hemisphere, *HPC<sub>L</sub>* — left hemisphere hippocampal epiphocus cells, *HPC<sub>R</sub>* — right hemisphere hippocampal epiphocus cells (color online)



Для гиппокампа можно выделить две зоны: условный эпифокус ( $HPC$ ) — генератор основного ритма, и окружающая его область — остальной гиппокампа ( $HP$ ). Уравнения для нейронов этих двух областей не отличаются, отличаются немного значения параметров. Моделирование осуществлялось с использованием индивидуальных уравнений типа Ходжкина–Хаксли, нелинейные функции и параметры которых были отдельно выбраны из литературы для каждого из шести типов клеток.

Лобная кора включает в себя 30 модельных клеток, где количество нейронов разделяется следующим образом: 24  $PY_{FC}$ -клетки и 6  $IN_{FC}$ -клеток. Данные клетки поровну поделены между правым и левым полушариями (то есть в одном полушарии по 12  $PY_{FC}$ -клеток и по 3  $IN_{FC}$ -клетки). Таким образом, в лобной коре  $PY_{FC} : IN_{FC}$  относятся в соотношении 4:1. Для  $PY_{FC}$ -клеток и  $IN_{FC}$ -клеток использовались уравнения и параметры из [26, 27].

Энторинальная кора, по аналогии с вышестоящей структурой, также включает в себя 30 элементов, где количество нейронов разделяется следующим образом: 24  $PY_{EC}$ -клетки и 6  $IN_{EC}$ -клеток. Данные клетки поровну поделены между правым и левым полушариями (то есть в одном полушарии по 12  $PY_{EC}$ -клеток и по 3  $IN_{EC}$ -клетки). Таким образом, в энторинальной коре  $PY_{EC} : IN_{EC}$  также относятся в соотношении 4:1. Для  $PY_{EC}$ -клеток использовались уравнения и параметры из [28], а для  $IN_{EC}$ -клеток использовались уравнения и параметры из [29].

Гиппокам включает в себя 30 элементов, где количество  $PY_{HP}$ -клеток равняется 27, а  $IN_{HP}$ -клеток — 3, и данные клетки были разделены между полушариями следующим образом: левое полушарие включает 14  $PY_{HP}$ -клеток и 1  $IN_{HP}$ -клетку; правое полушарие включает 13  $PY_{HP}$ -клеток и 2  $IN_{HP}$ -клетки. Таким образом, в гиппокампе основные клетки  $PY_{HP} : IN_{HP}$  в среднем относятся в соотношении 9:1. Для  $PY_{HP}$ -клеток и  $IN_{HP}$ -клеток использовались уравнения и параметры из [24], как это было сделано в [20] при создании гиппокампальной кольцевой структуры — ритмоводителя.

В общем случае гиппокамп включает в себя колебательный контур, и он представляет собой генератор основной частоты при лимбической эпилепсии, работающий за счет коллективной динамики, которая формируется в кольце пирамидных нейронов (с присутствием некоторой задержки) [19, 20]. По сравнению с предыдущими работами, в данной работе представлена немного модифицированная модель контура, которая включает в себя не только  $PY$ -нейроны, но и  $IN$ -клетки, тем самым демонстрируется более общий случай возможной организации генератора с сохранением необходимых свойств. Также следует отметить, что нейроны кольца находятся в обоих полушариях и имеют исходящее воздействие на нейроны гиппокампа в двух полушариях, соответственно. Генерация эпилептических разрядов чаще происходит в одном из полушарий, поскольку считается, что причина развития лимбической эпилепсии связана с локальным повреждением нервной ткани, например, при черепно-мозговой травме. Однако со временем может происходить дополнительное разрушение ткани гиппокампа (двойной гиппокампальный склероз), и эти очаги разрушения могут становиться генераторами. В данном случае к основной системе из 90 нейронов добавляется кольцо (однонаправленное) из 10-ти пирамидных клеток ( $PY_{HPC}$ ) и одного интернейрона ( $IN_{HPC}$ ) гиппокампа, которое является генератором основной частоты (рис. 3).

Изначально генератор находится в неколебательном состоянии и запускает генерацию после одиночного импульса, пришедшего с интернейрона гиппокампа (для системы рис. 2, в роли данной клетки выступает  $IN_{HP_{R2}}$ ). После этого за счет инерционности каждой клетки данный колебательный контур переходит к генерированию колебаний на определенной частоте, одним из способов управления частотой в данном случае является использование нужного количества осцилляторов в кольце. Параметры нейронов данного генератора отличаются от параметров для остальных нейронов гиппокампа (табл. 1), несмотря на то, что генератор является его частью.



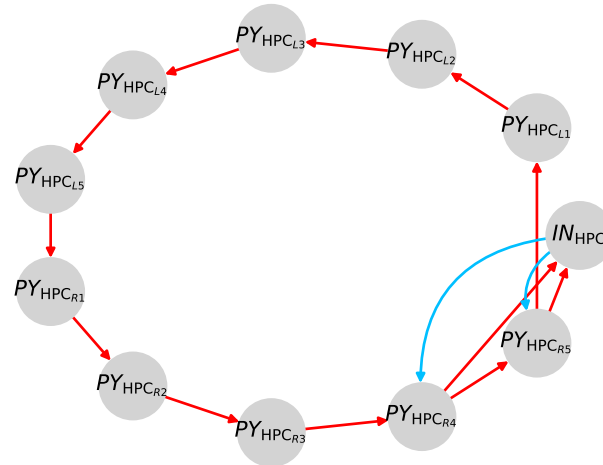


Рис. 3. Структура моделируемого эпилептического контура (фокуса) в гиппокампе. Красным цветом обозначены возбуждающие связи, синим — тормозные (цвет онлайн)

Fig. 3. The structure of the simulated epileptic contour (focus) in the hippocampus. Excitatory couplings are indicated in red, inhibitory couplings are indicated in blue (color online)

Таблица 1. Значения параметров для каждого типа нейронов

Table 1. Parameter values for each type of neurons

Parameter	$PY_{FC}$	$IN_{FC}$	$PY_{EC}$	$IN_{EC}$	$PY_{HP}$	$IN_{HP}$	$PY_{HPC}$	$IN_{HPC}$
$g_{Na}$ , mS/cm <sup>2</sup>	50	100	52	52	1	1.5	1	1.5
$g_{NaP}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	0.21	0.5	—	—	—	—
$g_M$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	2	—	—	—	—	—	—
$g_{Ca}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	—	—	0.13	—	0.13	—
$g_{Ca(low)}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	—	—	0.03	—	0.008	—
$g_h$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	—	1.45	—	—	—	—
$g_K$ , mS/cm <sup>2</sup>	5	80	11	11	—	—	—	—
$g_{KS}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	2	—	—	—	—	—
$g_{K(DR)}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	—	—	0.08	0.3	0.12	0.3
$g_{K(A)}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	—	—	0.17	—	0.17	—
$g_{K(AHP)}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	—	—	0.07	—	0.027	—
$g_{K(C)}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	—	—	0.366	—	0.33	—
$g_{af}$ , mS/cm <sup>2</sup>	—	—	—	—	0.005	—	0.01	—
$g_L$ , mS/cm <sup>2</sup>	0.1	0.1	0.1	0.5	0.0033	0.02	0.0033	0.02
$g_{AMPA}$ , mS/cm <sup>2</sup>	0.491	0.13	0.701	0.4	4.2303	0.3	3.53	3.53
$g_{GABA}$ , mS/cm <sup>2</sup>	-0.195	-0.195	-0.69	-0.69	-0.3	-0.48	-0.795	0
$V_{Na}$ , mV	100	50	55	55	50	50	50	50
$V_M$ , mV	—	-100	—	—	—	—	—	—
$V_{Ca}$ , mV	—	—	—	—	75	—	75	—
$V_h$ , mV	—	—	—	-20	—	—	—	—
$V_K$ , mV	-100	-100	-90	-90	-80	-80	-80	-80
$V_{syn(e)}$ , mV	—	—	—	—	-10	—	-10	—
$V_L$ , mV	-61	-61	-54	-65	-65	-65	-65	-65
$V_{AMPA}$ , mV	0	0	0	0	0	0	0	0
$V_{GABA}$ , mV	-80	-80	-80	-80	-80	-80	-80	-80
$C$ , $\mu$ F/cm <sup>2</sup>	1	1	1.5	1.5	0.1	0.1	0.1	0.1

## 2. Модели узлов для каждого типа нейронов

В этой статье нейроны каждого типа моделируются на основе модели Ходжкина–Хаксли [23]. Общее уравнение временной эволюции трансмембранного потенциала нейронов имеет вид (1):

$$C \frac{dV_i}{dt} = - \sum I_{\text{memb},i} - \sum_{j \neq i} I_{\text{syn},i,j}, \quad (1)$$

где  $V_i$  — потенциал на мембране  $i$ -го нейрона,  $t$  — размерное время,  $C$  — ёмкость мембраны,  $I_{\text{memb},i}$  — мембранные токи для  $i$ -го нейрона,  $I_{\text{syn},i,j}$  — синаптические токи ( $j$  — номер пресинаптического нейрона) для  $i$ -го нейрона,  $i, j = 1, \dots, D$  и  $D$  — общее количество нейронов в сети. В следующем подразделе будут приведены конкретные уравнения для каждого из шести типов нейронов. Значения всех параметров для нейронов и их синаптических связей были взяты из литературы.

Связь между клетками устанавливается посредством синаптических токов  $I_{\text{syn},i,j}$ . Здесь рассматриваются два тока: возбуждающий АМРА-ток ( $I_{\text{AMPA},j}$ ) и тормозной ГАМК-ток ( $I_{\text{GABA},j}$ ):

$$I_{\text{AMPA},j} = g_{\text{AMPA}} x_{\text{AMPA},j} (V_j - V_{\text{AMPA}}), \quad (2)$$

$$\frac{dx_{\text{AMPA},j}}{dt} = 5(1 + \tanh(V_j/4))(1 - x_{\text{AMPA},j}) - x_{\text{AMPA},j}/2,$$

$$I_{\text{GABA},j} = g_{\text{GABA}} x_{\text{GABA},j} (V_j - V_{\text{GABA}}), \quad (3)$$

$$\frac{dx_{\text{GABA},j}}{dt} = 2(1 + \tanh(V_j/4))(1 - x_{\text{GABA},j}) - x_{\text{GABA},j}/5.$$

Для всех типов клеток:

$$\sum_{j \neq i} I_{\text{syn},i,j} = \sum_{j \neq i} (I_{\text{AMPA},j} + I_{\text{GABA},j}). \quad (4)$$

**2.1. Лобная кора.** Для моделирования нейронов лобной коры брались уравнения для пирамид и интернейронов из работ [26, 27], где  $PY$ - и  $IN$ -клетки различались лишь наличием у последних  $I_M$  (медленного калиевого тока, который обеспечивает интернейронам адаптацию частоты спайков).

**2.1.1. Пирамидные нейроны лобной коры.** Потенциал покоя мембраны  $PY$ -клеток лобной коры равнялся  $-63.16$  мВ. Мембранный потенциал для каждой  $i$ -й пирамидной клетки задавался следующим образом:

$$C \frac{dV_i}{dt} = -I_{\text{Na},i} - I_{\text{K},i} - I_{\text{L},i} - \sum_{j \neq i} I_{\text{syn},i,j}, \quad (5)$$

Уравнения для *натриевого тока*:

$$I_{\text{Na},i} = g_{\text{Na}} m_i^3 h_i (V_i - V_{\text{Na}}),$$

$$\frac{dm_i}{dt} = \alpha_m(V_i)(1 - m_i) - \beta_m(V_i)m_i, \quad (6)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = \alpha_h(V_i)(1 - h_i) - \beta_h(V_i)h_i,$$

где  $g_{Na}$  — это максимальная ионная проводимость натриевого канала,  $V_{Na}$  — это равновесный потенциал натриевого канала (конкретные значения приведены в табл. 1).  $m, h$  — воротные переменные натриевого канала,  $\alpha$  и  $\beta$  — функции открытия и закрытия воротных переменных:

$$\alpha_m(V_i) = \frac{0.32(V_i + 54)}{1 - \exp(-(V_i + 54)/4)}, \quad \beta_m(V_i) = \frac{0.28(V_i + 27)}{\exp((V_i + 27)/5) - 1},$$

$$\alpha_h(V_i) = 0.128\exp(-(V_i + 50)/18), \quad \beta_h(V_i) = \frac{4}{1 + \exp(-(V_i + 27)/5)}.$$

Уравнения для калиевого тока:

$$I_{K,i} = g_K n_i^4 (V_i - V_K),$$

$$\frac{dn_i}{dt} = \alpha_n(V_i)(1 - n_i) - \beta_n(V_i)n_i, \quad (7)$$

где  $g_K$  — это максимальная ионная проводимость калиевого канала,  $V_K$  — это равновесный потенциал калиевого канала.  $n$  — воротная переменная калиевого канала,  $\alpha$  и  $\beta$  — функции открытия и закрытия воротной переменной:

$$\alpha_n(V_i) = \frac{0.032(V_i + 52)}{1 - \exp(-(V_i + 52)/5)}, \quad \beta_n(V_i) = \frac{0.5\exp(-(V_i + 57)/40)}{40}.$$

Уравнение для тока утечки:

$$I_{L,i} = g_L (V_i - V_L), \quad (8)$$

где  $g_L$  — это максимальная проводимость утечки.

**2.1.2. Интернейроны лобной коры.** Потенциал покоя мембраны  $IN$ -клеток лобной коры равнялся  $-68.963$  мВ. Мембранный потенциал для каждого  $i$ -го интернейрона задавался следующими уравнениями:

$$C \frac{dV_i}{dt} = -I_{Na,i} - I_{K,i} - I_{L,i} - I_{M,i} - \sum_{j \neq i} I_{syn,i,j}. \quad (9)$$

Уравнения для натриевого тока (6), калиевого тока (7) и тока утечки (8) такие же, как для пирамидных нейронов, и функции открытия и закрытия воротных переменных тоже совпадают, отличаются только значения максимальной ионной проводимости каналов и равновесного потенциала каналов. Также добавляется медленный калиевый ток.

Уравнения для калиевого тока  $M$ -типа:

$$I_{M,i} = g_M p_i (V_i - V_M),$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \alpha_p(V_i)(1 - p_i) - \beta_p(V_i)p_i, \quad (10)$$

где  $g_M$  — это максимальная ионная проводимость  $M$ -канала,  $V_M$  — это равновесный потенциал  $M$ -канала.  $p$  — воротная переменная  $M$ -канала,  $\alpha$  и  $\beta$  — функции открытия и закрытия воротной переменной:

$$\alpha_p(V_i) = \frac{0.00030209(V_i + 30)}{1 - \exp(-(V_i + 30)/9)}, \quad \beta_p(V_i) = -\frac{0.00030209(V_i + 30)}{1 - \exp((V_i + 30)/9)}.$$

## 2.2. Энторинальная кора.

**2.2.1. Пирамидные нейроны энторинальной коры.** В данном случае использовалась модель для пирамидных клеток слоя V энторинальной коры, которая была впервые опубликована в [30], затем модифицирована в [31] и окончательно представлена в [28].

Потенциал покоя мембраны PY-клеток энторинальной коры равнялся  $-33.9$  мВ. Мембранный потенциал для каждой  $i$ -ой пирамидной клетки задавался следующим образом:

$$C \frac{dV_i}{dt} = -I_{Na,i} - I_{NaP,i} - I_{K,i} - I_{KS,i} - I_{L,i} - \sum_{j \neq i} I_{syn,i,j}. \quad (11)$$

Уравнения для натриевого тока точно такие же, как в случае нейронов лобной коры (6), но отличаются функции открытия и закрытия воротных переменных:

$$\alpha_m(V_i) = \frac{-0.1(V_i + 23)}{\exp(-0.1(V_i + 23)) - 1}, \quad \beta_m(V_i) = 4\exp((V_i + 23)/18),$$
$$\alpha_h(V_i) = 0.07\exp(-(V_i + 37)/20), \quad \beta_h(V_i) = \frac{1}{1 + \exp(-0.1(V_i + 7))}.$$

Уравнения для *постоянного натриевого тока*:

$$I_{NaP,i} = g_{NaP}u_i(V_i - V_{Na}),$$
$$\frac{du_i}{dt} = \frac{(1/(1 + \exp(-(V_i + 38)/6.5))) - u_i}{0.15}. \quad (12)$$

Уравнения для калиевого тока точно такие же, как в случае нейронов лобной коры (7), но отличаются функции открытия и закрытия воротных переменных:

$$\alpha_n(V_i) = \frac{-0.01(V_i + 27)}{\exp(-0.1(V_i + 27)) - 1}, \quad \beta_n(V_i) = 0.125\exp(-(V_i + 37)/80).$$

Уравнения для *медленного калиевого тока*:

$$I_{KS,i} = g_{KS}l_i(V_i - V_K),$$
$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{(1/(1 + \exp(-(V_i + 23)/6.5))) - l_i}{90}. \quad (13)$$

Уравнение для тока утечки такое же, как для тока утечки нейронов лобной коры (8).

**2.2.2. Интернейроны энторинальной коры.** Энторинальная кора включает в себя два основных вида тормозных нейронов: корзинчатые интернейроны (basket cells), расположенные в слое II энторинальной коры, и бокаловидные интернейроны (goblet cells), расположенные в слое III энторинальной коры. В данной работе в роли интернейронов была выбрана модель для бокаловидных интернейронов из [29]. Во-первых, данный вид интернейронов не имеет NMDA-рецептора по сравнению с корзинчатыми интернейронами [32]. Это важное условие, поскольку в работе моделируются лишь AMPA- и GABA-рецепторы. Во-вторых, в предыдущих работах [20] и в данной при моделировании нейронов гиппокампа были выбраны пирамидные нейроны поля СА3 гиппокампа. Считается, что область СА3 предпочитает более медленные колебания частотой 30 Гц. Бокаловидные интернейроны способны к генерации колебаний на частоте приблизительно 30 Гц, отсюда следует, что колебания данных нейронов могут предпочтительно синхронизироваться с областью СА3 [32].

Потенциал покоя мембраны  $IN$ -клеток энторинальной коры равнялся  $-55.1$  мВ. Мембранный потенциал для каждого  $i$ -го интернейрона задавался следующим образом:

$$C \frac{dV_i}{dt} = -I_{Na,i} - I_{NaP,i} - I_{K,i} - I_{h,i} - I_{L,i} - \sum_{j \neq i} I_{syn,i,j}. \quad (14)$$

Уравнения для натриевого тока точно такие же, как в случае нейронов лобной коры (6), но отличаются функции открытия и закрытия воротных переменных:

$$\alpha_m(V_i) = \frac{-0.1(V_i + 23)}{\exp(-0.1(V_i + 23)) - 1}, \quad \beta_m(V_i) = 4\exp(-(V_i + 48)/18),$$

$$\alpha_h(V_i) = 0.07\exp(-(V_i + 37)/20), \quad \beta_h(V_i) = \frac{1}{1 + \exp(-0.1(V_i + 7))}.$$

Уравнения для постоянного натриевого тока точно такие же, как в случае нейронов энторинальной коры (12). Уравнения для калиевого тока точно такие же, как в случае нейронов лобной коры (7), но отличаются функции открытия и закрытия воротных переменных:

$$\alpha_n(V_i) = \frac{-0.01(V_i + 27)}{\exp(-0.1(V_i + 27)) - 1}, \quad \beta_n(V_i) = 0.125\exp(-(V_i + 37)/80).$$

Уравнения для *активированного гиперполяризацией  $h$ -тока*:

$$I_{h,i} = g_h(0.65f_i + 0.35g_i)(V_i - V_h),$$

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{(1/(1 + \exp((V_i + 79.2)/9.78))) - f_i}{(0.51/(\exp((V_i - 1.7)/10) + \exp(-(V_i + 340)/52))) + 1}, \quad (15)$$

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{(1/(1 + \exp((V_i + 71.3)/7.9))) - g_i}{(5.6/(\exp((V_i - 1.7)/14) + \exp(-(V_i + 260)/43))) + 1}.$$

Уравнение для тока утечки такое же, как для тока утечки нейронов лобной коры (8).

**2.3. Гиппокамп.** Уравнения для пирамидных нейронов и интернейронов гиппокампа брались из работы [24].

**2.3.1. Пирамидные нейроны гиппокампа.** Потенциал покоя мембраны  $PY$ -клеток гиппокампа равнялся  $-32.5$  мВ. Мембранный потенциал для каждой  $i$ -ой пирамидной клетки задавался следующим образом:

$$C \frac{dV_i}{dt} = -I_{Na,i} - I_{Ca,i} - I_{Ca(low),i} - I_{K(DR),i} - I_{K(A),i} -$$

$$- I_{K(AHP),i} - I_{K(Ca),i} - I_{L,i} - I_{af,i} - \sum_{j \neq i} I_{syn,i,j}. \quad (16)$$

Уравнения для *натриевого тока* отличаются от рассмотренных выше:

$$I_{Na,i} = g_{Na}m_i^2h_i(V_i - V_{Na}),$$

$$\frac{dm_i}{dt} = \alpha_m(V_i)(1 - m_i) - \beta_m(V_i)m_i, \quad (17)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = \alpha_h(V_i)(1 - h_i) - \beta_h(V_i)h_i,$$

где

$$\alpha_m(V_i) = \frac{-0.32(V_i + 51.9)}{\exp(-(V_i + 51.9)/4) - 1}, \quad \beta_m(V_i) = \frac{0.28(V_i + 24.9)}{\exp((V_i + 24.9)/5) - 1},$$

$$\alpha_h(V_i) = 0.128\exp(-(V_i + 48)/18), \quad \beta_h(V_i) = \frac{4}{1 + \exp(-(V_i + 25)/5)}.$$

Уравнения для кальциевого тока:

$$I_{Ca,i} = g_{Ca}s_i^2r_i(V_i - V_{Ca}),$$

$$\frac{ds_i}{dt} = \alpha_s(V_i)(1 - s_i) - \beta_s(V_i)s_i,$$

$$\frac{dr_i}{dt} = \alpha_r(V_i)(1 - r_i) - \beta_r(V_i)r_i,$$
(18)

где

$$\alpha_s(V_i) = \frac{0.2}{1 + \exp(-0.072V_i)}, \quad \beta_s(V_i) = \frac{0.0025(V_i + 13.9)}{\exp((V_i + 13.9)/5) - 1},$$

$$\alpha_r(V_i) = \begin{cases} \frac{\exp(-(V_i + 65)/20)}{1600}, & (V_i > -65), \\ 0.000625, & (V_i \leq -65), \end{cases}$$

$$\beta_r(V_i) = \begin{cases} \frac{0.005 - 8\alpha_r(V_i)}{8}, & (V_i > -65), \\ 0, & (V_i \leq -65). \end{cases}$$

Уравнения для низкопорогового кальциевого тока:

$$I_{Ca(low),i} = g_{Ca(low)}o_i^2e_i(V_i - V_{Ca}),$$

$$\frac{do_i}{dt} = \alpha_o(V_i)(1 - o_i) - \beta_o(V_i)o_i,$$

$$\frac{de_i}{dt} = \alpha_e(V_i)(1 - e_i) - \beta_e(V_i)e_i,$$
(19)

где

$$\alpha_o(V_i) = \frac{1.6}{1 + \exp(-0.072(V_i + 40))}, \quad \beta_o(V_i) = \frac{0.02(V_i + 53.9)}{\exp((V_i + 53.9)/5) - 1},$$

$$\alpha_e(V_i) = \begin{cases} \frac{\exp(-(V_i + 105)/20)}{200}, & (V_i > -105), \\ 0.005, & (V_i \leq -105), \end{cases}$$

$$\beta_e(V_i) = \begin{cases} 0.005 - \alpha_e(V_i), & (V_i > -105), \\ 0, & (V_i \leq -105). \end{cases}$$

Уравнения для калиевого тока задержанного выпрямления:

$$\begin{aligned} I_{K(DR),i} &= g_{K(DR)} w_i (V_i - V_K), \\ \frac{dw_i}{dt} &= \alpha_w(V_i)(1 - w_i) - \beta_w(V_i)w_i, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\alpha_w(V_i) = \frac{-0.016(V_i + 29.9)}{\exp(-(V_i + 29.9)/5) - 1}, \quad \beta_w(V_i) = 0.25 \exp(-(V_i + 45)/40).$$

Уравнения для калиевого тока А-типа:

$$\begin{aligned} I_{K(A),i} &= g_{K(A)} a_i b_i (V_i - V_K), \\ \frac{da_i}{dt} &= \alpha_a(V_i)(1 - a_i) - \beta_a(V_i)a_i, \\ \frac{db_i}{dt} &= \alpha_b(V_i)(1 - b_i) - \beta_b(V_i)b_i, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_a(V_i) &= \frac{-0.02(V_i + 51.9)}{\exp(-(V_i + 51.9)/10) - 1}, \quad \beta_a(V_i) = \frac{0.0175(V_i + 24.9)}{\exp((V_i + 24.9)/10) - 1}, \\ \alpha_b(V_i) &= 0.0016 \exp(-(V_i + 78)/18), \quad \beta_b(V_i) = \frac{0.05}{1 + \exp(-(V_i + 54.9)/5)}. \end{aligned}$$

Уравнения для калиевого тока после гиперполяризации (АНР):

$$\begin{aligned} I_{K(АНР),i} &= g_{K(АНР)} q_i (V_i - V_K), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \alpha_q(V_i)(1 - q_i) - \beta_q(V_i)q_i, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\alpha_q(V_i) = \begin{cases} 0, & ((\chi_i - 140) < 0), \\ 0.00002(\chi_i - 140), & (0 \leq (\chi_i - 140) < 500), \\ 0.01, & (500 \leq (\chi_i - 140)), \end{cases}$$

$$\beta_q(V_i) = 0.001.$$

Уравнения для кальций-зависимого калиевого тока:

$$\begin{aligned} I_{K(Ca),i} &= g_{K(Ca)} \min(1, \chi_i/250) c_i (V_i - V_K), \\ \frac{dc_i}{dt} &= \alpha_c(V_i)(1 - c_i) - \beta_c(V_i)c_i, \\ \frac{d\chi_i}{dt} &= -\phi I_{Ca,i} - \beta_\chi \chi_i, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_c(V_i) &= \begin{cases} \frac{\exp(((V_i + 55)/20) - ((V_i + 58.5)/27))}{18.975}, & (V_i \leq -15), \\ 2 \exp(-(V_i + 58.5)/27), & (V_i > -15), \end{cases} \\ \beta_c(V_i) &= \begin{cases} 2 \exp(-(V_i + 58.5)/27) - \alpha_c(V_i), & (V_i \leq -15), \\ 0, & (V_i > -15). \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнения для входного возбуждающего синаптического тока:

$$I_{af,i} = g_{af}(V_i - V_{syn(e)}). \quad (24)$$

Уравнение для тока утечки такое же, как для тока утечки нейронов лобной коры (8).

**2.4. Интернейроны гиппокампа.** Потенциал покоя мембраны  $IN$ -клеток гиппокампа равнялся  $-64.965$  мВ. Мембранный потенциал для каждого  $i$ -го интернейрона задавался следующими уравнениями:

$$C \frac{dV_i}{dt} = -I_{Na,i} - I_{K(DR),i} - I_{L,i} - \sum_{j \neq i} I_{syn,i,j}. \quad (25)$$

Уравнения для натриевого тока точно такие же, как в случае нейронов лобной коры (6), но отличаются функции открытия и закрытия воротных переменных:

$$\alpha_m(V_i) = \frac{-0.64(V_i + 51.9)}{\exp(-(V_i + 51.9)/4) - 1}, \quad \beta_m(V_i) = \frac{0.56(V_i + 24.9)}{\exp((V_i + 24.9)/5) - 1},$$

$$\alpha_h(V_i) = \frac{0.128 \exp(-(V_i + 48)/18)}{0.65}, \quad \beta_h(V_i) = \frac{4}{0.65(1 + \exp(-(V_i + 25)/5))}.$$

Уравнения для калиевого тока задержанного выпрямления отличаются от рассмотренного выше уравнения (20):

$$I_{K(DR),i} = g_{K(DR)} w_i^4 (V_i - V_K),$$

$$\frac{dw_i}{dt} = \alpha_w(V_i)(1 - w_i) - \beta_w(V_i)w_i, \quad (26)$$

где

$$\alpha_n(V_i) = \frac{-0.016(V_i + 48.9)}{0.65(\exp(-(V_i + 48.9)/5) - 1)}, \quad \beta_n(V_i) = \frac{0.25 \exp(-(V_i + 64)/40)}{0.65}.$$

Уравнение для тока утечки такое же, как для тока утечки нейронов лобной коры (8).

Параметры для гиппокампальных нейронов, образующих генератор основного ритма, и гиппокампальных нейронов окружающей области немного отличались (см. табл. 1).

### 3. Результаты

Моделировался сигнал длительностью 4.25 секунды, где первые 2.25 секунды — нормальная динамика, а последние 2 секунды — эпилептиформная активность, вызванная началом воздействия генератора основного ритма. На рис. 4 изображены временные ряды суммарной активности нейронов (multiunit neuronal activity, MUA) для каждой из 3-х областей обоих полушарий. Можно заметить, что динамика несколько отличается между двух полушарий. Так, например, в левом полушарии во всех областях наблюдается высокочастотная спайковая активность как до, так и после начала воздействия. В то же время в правом полушарии наблюдается перемежаемость (где спайковая активность сменяется сформированными бёрстами) во всех областях в период нормальной активности, во время патологической динамики бёрсты сохраняются лишь в энторинальной коре, а в остальных структурах наблюдается динамика, аналогичная наблюдаемой в левом полушарии.

Для начала следует рассмотреть спектры мощности при отсутствии воздействия с эпиконтура гиппокампа. Данные различия хорошо отображены на спектрах рис. 5, а. Отсюда видно,



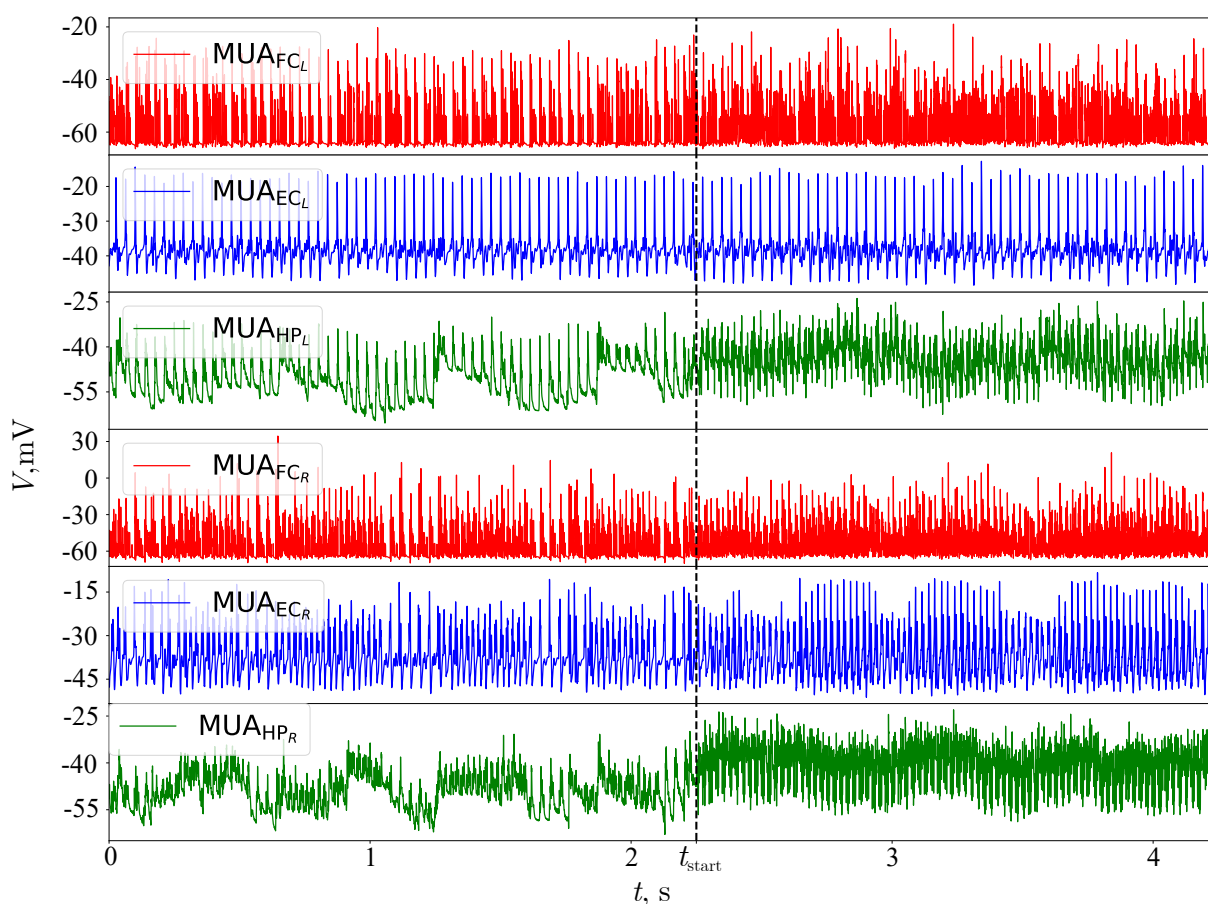


Рис. 4. Временные ряды суммарной активности нейронов (сумма потенциалов пирамид и интернейронов определенной структуры мозга): лобная кора — красный, энторинальная кора — синий и гиппокамп — зеленый. Временные ряды гиппокампа не включают сигнал от генератора основного ритма. Черные пунктирные линии указывают начальные моменты. Первые три ряда представляют левое полушарие, нижние три ряда — правое полушарие соответственно (цвет онлайн)

Fig. 4. Time series of multiunit neuronal activity (sum of potentials of pyramids and interneurons of a particular brain structure): the frontal cortex — red, the entorhinal cortex — blue and the hippocampus — green. Hippocampal time series don't include signal from main rhythm generator. Black dotted lines indicate the starting  $t_{\text{start}}$  time moments of the driving. First three rows represent left hemisphere, bottom three rows represent right hemisphere respectively (color online)

что коллективная динамика имеет несколько собственных высокочастотных гармоник, однако в разных полушариях частоты различаются. Так, в левом полушарии можно наблюдать хорошо выраженные пики в спектре на частотах 27 Гц и 54 Гц (бета- и гамма-диапазоны соответственно) и дельта-ритм в гиппокампе. В то же время в правом полушарии наблюдаются менее выраженные частотные пики в бета- и гамма-диапазонах на частотах 27 Гц и 45 Гц. В обоих полушариях присутствует гармоника на частоте 27 Гц, что может свидетельствовать о некой удачной связи энторинальной коры и гиппокампа, повлекшей реализацию сценария из [32]. Также стоит отметить, что данная гармоника в левом полушарии имеет более высокую мощность по сравнению с правым, то есть взаимодействие скорее всего является однонаправленным или преимущественно однонаправленным. Поскольку в данной работе не использовалась расстройка нейронов по параметрам и все клетки одного типа имели идентичные параметры, данные различия между динамикой обоих полушарий могут объясняться только архитектурой построенной сети.

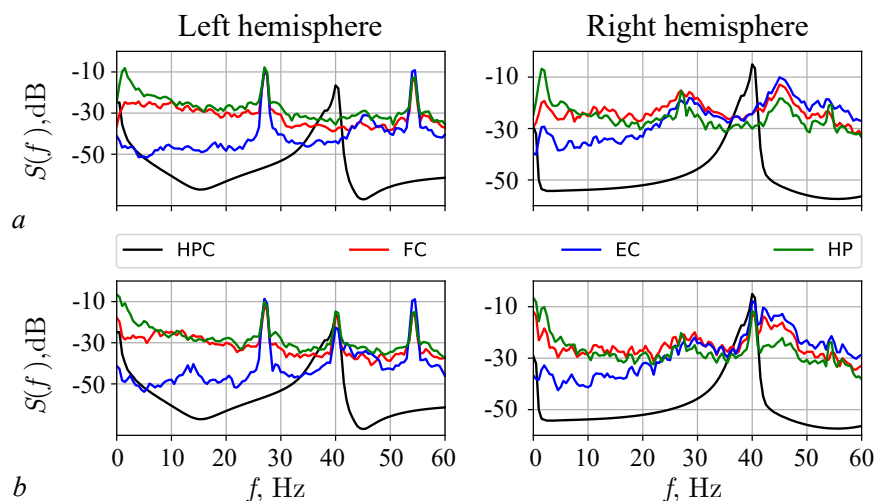


Рис. 5. Спектральная плотность мощности суммарной активности нейронов в лобной коре — красный, в энторинальной коре — синий; в гиппокампе — зеленый и в эпилептическом контуре гиппокампа — черный. Левый и правый столбцы представляют два полушария головного мозга. Часть *a* — система с отключенным входящим сигналом от эпилептического контура гиппокампа; часть *b* — система с включенным входящим сигналом от эпилептического контура гиппокампа (цвет онлайн)

Fig. 5. Power spectral density of multiunit activity: the frontal cortex — red, the entorhinal cortex — blue; the hippocampus — green and the epileptic hippocampal circuit — black. Left and right columns represent the two hemispheres of the brain. Part *a* — system with turned off incoming driving from hippocampal circuit; part *b* — system with turned on incoming driving from hippocampal circuit (color online)

Теперь перейдем к рассмотрению сценария, когда на лимбическую систему приходит воздействие с эпилептического контура рис. 5, *b*. Генератор основного ритма демонстрирует колебания на частоте 40 Гц. Отчетливо видно, что при отсутствии воздействия гармоники на частоте 40 Гц нет, а при наличии воздействия данная гармоника появляется во всех областях лимбической системы. Также следует отметить, что появление данной гармоники влечет за собой некоторые спектральные изменения в присутствовавших изначально высокочастотных гармониках. Например, наблюдается небольшое понижение мощности близлежащих гармоник: снижение мощности у гармоники на частоте 27 Гц во всех областях правого полушария; снижение мощности у гармоники на частоте 45 Гц в энторинальной коре в левом полушарии и в целом перестроение этой компоненты, её частичный захват. Таким образом, можно говорить о том, что генератор основной частоты лимбической эпилепсии способен распространять свою частоту по всем трем структурам: лобная кора, энторинальная кора и гиппокамп, и способен в некоторой степени подавлять или захватывать близлежащие частоты. При этом важным является тот факт, что использованные уравнения связи гораздо сложнее, чем обычно используемая в работах по синхронизации разностная связь.

Поскольку до настоящего момента рассмотрение было проведено на основе единственной матрицы связей, необходимо было рассмотреть, как изменится динамика системы (и изменится ли) при изменении связей в сети, хотя бы минимальном.

Авторы придерживаются идеи, что динамические свойства системы, полученные в основном за счёт архитектуры сети, можно сохранить и воспроизвести на других матрицах связности. Данного эффекта можно добиться, поскольку существуют связи (незначимые), добавление или удаление которых из сети не приводит к изменению режима ведомых узлов. В данной работе мы ограничились минимально возможными изменениями — меняли одну связь, на роль которой была выбрана исходящая связь от пирамид энторинальной коры. Были построены два класса матриц связей по 9 матриц в каждом из них, отличающиеся удаленной связью — одна и та же для всех

Таблица 2. Заменённые связи указаны в верхней строке. Заменявшие их связи указаны в следующих строках — по 9 вариантов для каждой заменённой

Table 2. The replaced couplings are shown in the top row. The couplings that replaced them are listed in the following lines — 9 options for each replaced one

$n_a$	$PY_{EC_{L10}} \rightarrow PY_{EC_{R2}}$	$PY_{EC_{R4}} \rightarrow PY_{EC_{L11}}$
1	$PY_{EC_{L2}} \rightarrow IN_{EC_{L2}}$	$PY_{EC_{L1}} \rightarrow PY_{FC_{L1}}$
2	$PY_{EC_{L4}} \rightarrow PY_{EC_{R3}}$	$PY_{EC_{L5}} \rightarrow PY_{FC_{L4}}$
3	$PY_{EC_{L6}} \rightarrow PY_{EC_{L8}}$	$PY_{EC_{L8}} \rightarrow PY_{FC_{L7}}$
4	$PY_{EC_{L7}} \rightarrow PY_{HP_{L12}}$	$PY_{EC_{L10}} \rightarrow PY_{EC_{L9}}$
5	$PY_{EC_{L9}} \rightarrow PY_{EC_{L10}}$	$PY_{EC_{R4}} \rightarrow PY_{EC_{L6}}$
6	$PY_{EC_{L10}} \rightarrow PY_{EC_{L12}}$	$PY_{EC_{R7}} \rightarrow PY_{EC_{L6}}$
7	$PY_{EC_{L12}} \rightarrow IN_{EC_{L1}}$	$PY_{EC_{R8}} \rightarrow PY_{EC_{L10}}$
8	$PY_{EC_{R2}} \rightarrow PY_{HP_{R11}}$	$PY_{EC_{R10}} \rightarrow PY_{EC_{L4}}$
9	$PY_{EC_{R4}} \rightarrow PY_{EC_{R5}}$	$PY_{EC_{R12}} \rightarrow PY_{EC_{R8}}$

матриц в классе, первая строка в табл. 2. Матрицы внутри класса отличались тем, какая связь была добавлена вместо удалённой, её номер обозначен как  $n_a$  в табл. 2.

Спектры колебаний из всех моделируемых областей для всех 9 вариантов, построенных на основе матриц второго из двух предложенных классов, представлены на рис. 6 (наложены друг на друга). Видно, что они качественно сходны друг с другом и слабо отличаются от спектра колебаний модели, использующей исходную матрицу, см. рис. 5.

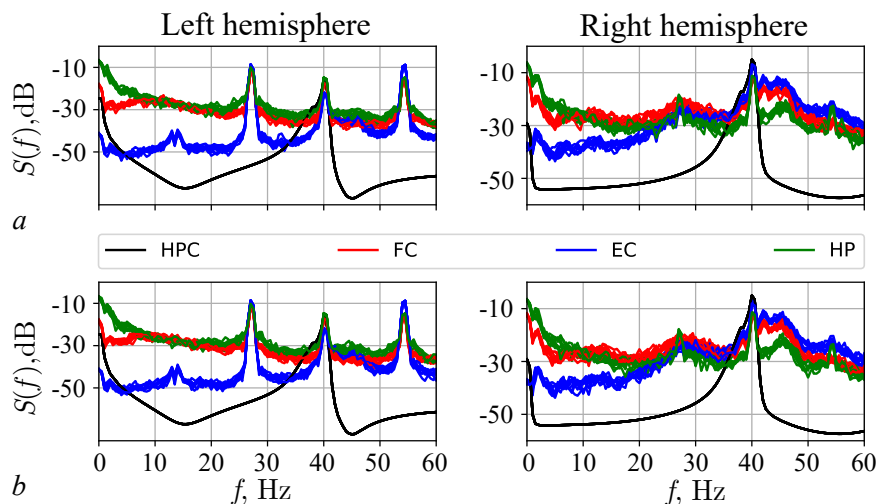


Рис. 6. Спектральная плотность мощности суммарной активности нейронов в лобной коре — красный, в энторинальной коре — синий; в гиппокампе — зеленый и в эпилептическом контуре гиппокампа — черный. Левый и правый столбцы представляют два полушария головного мозга. Часть *a* — спектральная плотность мощности суммарной активности нейронов для всех 9 матриц первого класса с заменой связи  $PY_{EC_{L10}} \rightarrow PY_{EC_{R2}}$ . Часть *b* — спектральная плотность мощности суммарной активности нейронов для всех 9 матриц второго класса с заменой связи  $PY_{EC_{R4}} \rightarrow PY_{EC_{L11}}$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Power spectral density of multiunit activity: the frontal cortex — red, the entorhinal cortex — blue; the hippocampus — green and the epileptic hippocampal circuit — black. Left and right columns represent the two hemispheres of the brain. Part *a* — Power spectral densities of multiunit activity for all 9 matrices of first class (replacement  $PY_{EC_{L10}} \rightarrow PY_{EC_{R2}}$ ). Part *b* — Power spectral densities of multiunit activity for all 9 matrices of second class (replacement  $PY_{EC_{R4}} \rightarrow PY_{EC_{L11}}$ ) (color online)

Таким образом, можно заключить, что представленная на рис. 2 структура связей лимбической сети не является единичным представителем, а может быть расширена до относительно большого класса матриц, часть которого была продемонстрирована выше, с помощью замены связей, не влияющих значимо на динамику.

### Заключение

В данной работе предпринята первая попытка построения сетевой модели лимбической системы (гиппокампа, энторинальной коры и связанных с нею областей лобной коры) обоих полушарий мозга. Все рассматриваемые три области представлены пирамидами и интернейронами, для которых записаны специфические уравнения для каждого типа клеток. В графе связей учтены как взаимодействия между клетками в пределах одной структуры, так и между структурами, как внутри полушария, так и между полушариями мозга. Нормальная динамика модели воспроизводит дельта-, бета- и гамма-ритмы, причём различно в двух полушариях, что является результатом отличий в архитектуре связей. Помимо неё рассмотрена патологическая динамика, вызванная синхронизацией активности основной части лимбической системы относительно малым по числу клеток генератором периодических импульсов, рассматриваемым как модель фокуса лимбической эпилепсии.

С точки зрения теории колебаний наблюдаемая нормальная активность в модели представляет собою динамический хаос, возникающий как дополнительный аттрактор к стационарному положению равновесия, которое система наследует от отдельных подсистем (нейронов). При этом вопрос о размере бассейна притяжения данного аттрактора и возможных сосуществующих других хаотических и периодических аттракторах остаётся открытым.

Интересно, что частичная синхронизация нормальной хаотической динамики внешним воздействием, в том числе захват частоты, наблюдаемый в модели правого полушария, имеет место, несмотря на то, что само по себе воздействие не является классическим разностным синхронизирующим воздействием, как это обычно рассматривается в теории синхронизации. Напротив, это импульсы, срезаемые фильтром, в качестве которого может быть рассмотрена используемая модель синапса, и получающие в результате его инерционности некоторое запаздывание. Каков механизм данной синхронизации и захвата частоты, ещё предстоит изучить.

Хорошая повторяемость результатов моделирования при вариации некоторых связей в модели (были рассмотрены ещё 18 моделей, отличавшихся от первоначальной заменой одной связи) показывает определённую структурную устойчивость изучаемого режима, хотя пределы этой устойчивости пока не до конца ясны.

### Список литературы

1. Scheffer I. E., Berkovic S., Capovilla G., Connolly M. B., French J., Guilhoto L., Hirsch E., Jain S., Mathern G. W., Moshé S. L., Nordli D. R., Perucca E., Tomson T., Wiebe S., Zhang Y.-H., Zuberi S. M. ILAE classification of the epilepsies: Position paper of the ILAE Commission for Classification and Terminology // *Epilepsia*. 2017. Vol. 58, iss. 4. P. 512–521. DOI: 10.1111/epi.13709.
2. Coenen A. M. L., van Luijtelaar E. L. J. M. Genetic animal models for absence epilepsy: A review of the WAG/Rij strain of rats // *Behav. Genet.* 2003. Vol. 33, iss. 6. P. 635–655. DOI: 10.1023/A:1026179013847.
3. Marescaux C., Vergnes M., Depaulis A. Genetic absence epilepsy in rats from Strasbourg – A review // In: Marescaux C., Vergnes M., Bernasconi R. (eds) *Generalized Non-Convulsive Epilepsy: Focus on GABA-B Receptors*. Journal of Neural Transmission. Vol 35. Vienna: Springer, 1992. P. 37–69. DOI: 10.1007/978-3-7091-9206-1\_4.

4. *Myslobodsky M., Rosen J.* Hemispheric asymmetry of pentamethylenetetrazol-induced wave-spike discharges and motor imbalance in rats // *Epilepsia*. 1979. Vol. 20, iss. 4. P. 377–386. DOI: 10.1111/j.1528-1157.1979.tb04817.x.
5. *Taylor P. N., Wang Y., Goodfellow M., Dauwels J., Moeller F., Stephani U., Baier G.* A Computational Study of Stimulus Driven Epileptic Seizure Abatement // *PLoS ONE*. 2014. Vol. 9, no. 12. P. e114316. DOI: 10.1371/journal.pone.0114316.
6. *Suffczynski P., Kalitzin S., Lopes Da Silva F. H.* Dynamics of non-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network // *Neuroscience*. 2004. Vol. 126, no. 2. P. 467–484. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2004.03.014.
7. *Medvedeva T. M., Sysoeva M. V., Lüttjohann A., van Luijckelaar G., Sysoev I. V.* Dynamical mesoscale model of absence seizures in genetic models // *PLoS ONE*. 2020. Vol. 15, no. 9. P. e239125. DOI: 10.1371/journal.pone.0239125.
8. *Gerster M., Berner R., Sawicki J., Zakharova A., Škoch A., Hlinka J., Lehnertz K., Schöll E.* FitzHugh–Nagumo oscillators on complex networks mimic epileptic-seizure-related synchronization phenomena // *Chaos*. 2020. Vol. 30, iss. 12. P. 123130. DOI: 10.1063/5.0021420.
9. *Капустников А. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Моделирование пик-волновых разрядов в мозге малыми сетями нейроосцилляторов // *Математическая биология и биоинформатика*. 2020. Т. 15, № 2. С. 138–147. DOI: 10.17537/2020.15.138.
10. *Alexander A., Maroso M., Soltesz I.* Chapter 5 - Organization and control of epileptic circuits in temporal lobe epilepsy // *Prog. Brain Res*. 2016. Vol. 226. P. 127–154. DOI: 10.1016/bs.pbr.2016.04.007.
11. *Curia G., Longo D., Biagini G., Jones R. S., Avoli M.* The pilocarpine model of temporal lobe epilepsy // *J. Neurosci. Methods*. 2008. Vol. 172, iss. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2008.04.019.
12. *Sutula T., Xiao-Xian H., Cavazos J., Scott G.* Synaptic reorganization in the hippocampus induced by abnormal functional activity // *Science*. 1988. Vol. 239, iss. 4844. P. 1147–1150. DOI: 10.1126/science.2449733.
13. *Babb T., Kupfer W., Pretorius J., Crandall P., Levesque M.* Synaptic reorganization by mossy fibers in human epileptic fascia dentata // *Neuroscience*. 1991. Vol. 42, iss. 2. P. 351–363. DOI: 10.1016/0306-4522(91)90380-7.
14. *Tauck D. L., Nadler J. V.* Evidence of functional mossy fiber sprouting in hippocampal formation of kainic acid-treated rats // *J. Neurosci*. 1985. Vol. 5, iss. 4. P. 1016–1022. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.05-04-01016.1985.
15. *Yu Y., Han F., Wang Q.* A hippocampal-entorhinal cortex neuronal network for dynamical mechanisms of epileptic seizure // *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* 2023. Vol. 31. P. 1986–1996. DOI: 10.1109/TNSRE.2023.3265581.
16. *Sloviter R. S.* Permanently altered hippocampal structure, excitability, and inhibition after experimental status epilepticus in the rat: The “dormant basket cell” hypothesis and its possible relevance to temporal lobe epilepsy // *Hippocampus*. 1991. Vol. 1, iss. 1. P. 41–66. DOI: 10.1002/hipo.450010106.
17. *Bertram E. H.* The functional anatomy of spontaneous seizures in a rat model of chronic limbic epilepsy // *Epilepsia*. 1997. Vol. 38, iss. 1. P. 95–105. DOI: 10.1111/j.1528-1157.1997.tb01083.x.
18. *Toyoda I., Bower M. R., Leyva F., Buckmaster P. S.* Early activation of ventral hippocampus and subiculum during spontaneous seizures in a rat model of temporal lobe epilepsy // *J. Neurosci*. 2013. Vol. 33, iss. 27. P. 11100–11115. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0472-13.2013.
19. *Kornilov M. V., Sysoev I. V.* Mathematical model of a main rhythm in limbic seizures // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, iss. 5. P. 1233. DOI: 10.3390/math11051233.
20. *Корнилов М. В., Капустников А. А., Созонов Е. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Режимы

- синхронизации в кольце нейронов гиппокампа грызунов при лимбической эпилепсии // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 357–375. DOI: 10.18500/0869-6632-003113.
21. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.* 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
  22. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the IRE.* 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
  23. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117, iss. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
  24. *Yoshida M., Hayashi H.* Emergence of sequence sensitivity in a hippocampal CA3–CA1 model // *Neural Netw.* 2007. Vol. 20, no. 6. P. 653–667. DOI: 10.1016/j.neunet.2007.05.003.
  25. *Егоров Н. М., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Кольцевой генератор нейроподобной активности с перестраиваемой частотой // *Известия вузов. ПНД.* 2023. Т. 31, № 1. С. 103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025.
  26. *McCarthy M. M., Brown E. N., Kopell N. J.* Potential network mechanisms mediating electroencephalographic beta rhythm changes during propofol-induced paradoxical excitation // *J. Neurosci.* 2008. Vol. 28, iss. 50. P. 13488–13504. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.3536-08.2008.
  27. *Ching S., Cimenser A., Purdon P. L., Brown E. N., Kopell N. J.* Thalamocortical model for a propofol-induced alpha-rhythm associated with loss of consciousness // *Proc. Natl Acad. Sci. USA.* 2010. Vol. 107, iss. 52. P. 22665–22670. DOI: 10.1073/pnas.1017069108.
  28. *V-Ghaffari B., Kouhnavard M., Elbasiouny S. M.* Mixed-mode oscillations in pyramidal neurons under antiepileptic drug conditions // *PLoS ONE.* 2017. Vol. 12, iss. 6. P. e0178244. DOI: 10.1371/journal.pone.0178244.
  29. *Middleton S., Jozsi J., Kispersky T., Lebeau F., Roopun A., Kopell N., Whittington M., Cunningham M.* NMDA receptor-dependent switching between different gamma rhythm generating microcircuits in entorhinal cortex // *Proc. Natl Acad. Sci. USA.* 2008. Vol. 105, iss. 47. P. 18572–18577. DOI: 10.1073/pnas.0809302105.
  30. *Acker C. D., Kopell N., White J. A.* Synchronization of strongly coupled excitatory neurons: Relating network behavior to biophysics // *J. Comput. Neurosci.* 2003. Vol. 15. P. 71–90. DOI: 10.1023/a:1024474819512.
  31. *Jalics J., Krupa M., Rotstein H. G.* Mixed-mode oscillations in a three time-scale system of ODEs motivated by a neuronal model // *Dynamical Systems.* 2010. Vol. 25, iss. 4. P. 445–482. DOI: 10.1080/14689360903535760.
  32. *Dupret D., Pleydell-Bouverie B., Csicsvari J.* Inhibitory interneurons and network oscillations // *Proc. Natl Acad. Sci. USA.* 2008. Vol. 105, iss. 47. P. 18079–18080. DOI: 10.1073/pnas.0810064105.

## References

1. Scheffer IE, Berkovic S, Capovilla G, Connolly MB, French J, Guilhoto L, Hirsch E, Jain S, Mathern GW, Moshé SL, Nordli DR, Perucca E, Tomson T, Wiebe S, Zhang Y-H, Zuberi SM. ILAE classification of the epilepsies: Position paper of the ILAE Commission for Classification and Terminology. *Epilepsia.* 2017;58(4):512–521. DOI: 10.1111/epi.13709.
2. Coenen AML, van Luijtelaar ELJM. Genetic animal models for absence epilepsy: A review of the WAG/Rij strain of rats. *Behav. Genet.* 2003;33(6):635–655. DOI: 10.1023/A:1026179013847.
3. Marescaux C, Vergnes M, Depaulis A. Genetic absence epilepsy in rats from Strasbourg – a review. In: Marescaux C., Vergnes M., Bernasconi R, editors. *Generalized Non-Convulsive Epilepsy: Focus on GABA-B Receptors.* Journal of Neural Transmission. Vol 35. Vienna: Springer; 1992. P. 37–69. DOI: 10.1007/978-3-7091-9206-1\_4.

4. Myslobodsky M, Rosen J. Hemispheric asymmetry of pentamethylenetetrazol-induced wave-spike discharges and motor imbalance in rats. *Epilepsia*. 1979;20(4):377–386. DOI: 10.1111/j.1528-1157.1979.tb04817.x.
5. Taylor PN, Wang Y, Goodfellow M, Dauwels J, Moeller F, Stephani U, Baier G. A Computational Study of Stimulus Driven Epileptic Seizure Abatement. *PLoS ONE*. 2014;9(12):e114316. DOI: 10.1371/journal.pone.0114316.
6. Suffczynski P, Kalitzin S, Lopes Da Silva FH. Dynamics of non-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network. *Neuroscience*. 2004;126(2):467–484. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2004.03.014.
7. Medvedeva TM, Sysoeva MV, Lüttjohann A, van Luijckelaar G, Sysoev IV. Dynamical mesoscale model of absence seizures in genetic models. *PLoS ONE*. 2020;15(9):e239125. DOI: 10.1371/journal.pone.0239125.
8. Gerster M, Berner R, Sawicki J, Zakharova A, Škoch A, Hlinka J, Lehnertz K, Schöll E. FitzHugh-Nagumo oscillators on complex networks mimic epileptic-seizure-related synchronization phenomena. *Chaos*. 2020;30(12):123130. DOI: 10.1063/5.0021420.
9. Kapustnikov AA, Sysoeva MV, Sysoev IV. The modeling of spike-wave discharges in brain with small oscillatory neural networks. *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2020;15(2):138–147 (in Russian). DOI: 10.17537/2020.15.138.
10. Alexander A, Maroso M, Soltesz I. Chapter 5 - Organization and control of epileptic circuits in temporal lobe epilepsy. *Prog. Brain Res*. 2016;226:127–154. DOI: 10.1016/bs.pbr.2016.04.007.
11. Curia G, Longo D, Biagini G, Jones RS, Avoli M. The pilocarpine model of temporal lobe epilepsy. *J. Neurosci. Methods*. 2008;172(2):143–157. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2008.04.019.
12. Sutula T, Xiao-Xian H, Cavazos J, Scott G. Synaptic Reorganization in the Hippocampus Induced by Abnormal Functional Activity. *Science*. 1988;239(4844):1147–1150. DOI: 10.1126/science.2449733.
13. Babb T, Kupfer W, Pretorius J, Crandall P, Levesque M. Synaptic reorganization by mossy fibers in human epileptic fascia dentata. *Neuroscience*. 1991;42(2):351–363. DOI: 10.1016/0306-4522(91)90380-7.
14. Tauck DL, Nadler JV. Evidence of functional mossy fiber sprouting in hippocampal formation of kainic acid-treated rats. *J. Neurosci*. 1985;5(4):1016–1022. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.05-04-01016.1985.
15. Yu Y, Han F, Wang Q. A hippocampal-entorhinal cortex neuronal network for dynamical mechanisms of epileptic seizure. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng*. 2023;31:1986–1996. DOI: 10.1109/TNSRE.2023.3265581.
16. Sloviter RS. Permanently altered hippocampal structure, excitability, and inhibition after experimental status epilepticus in the rat: The “dormant basket cell” hypothesis and its possible relevance to temporal lobe epilepsy. *Hippocampus*. 1991;1(1):41–66. DOI: 10.1002/hipo.450010106.
17. Bertram EH. The functional anatomy of spontaneous seizures in a rat model of chronic limbic epilepsy. *Epilepsia*. 1997;38(1):95–105. DOI: 10.1111/j.1528-1157.1997.tb01083.x.
18. Toyoda I, Bower MR, Leyva F, Buckmaster PS. Early activation of ventral hippocampus and subiculum during spontaneous seizures in a rat model of temporal lobe epilepsy. *J. Neurosci*. 2013;33(27):11100–11115. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0472-13.2013.
19. Kornilov MV, Sysoev IV. Mathematical model of a main rhythm in limbic seizures. *Mathematics*. 2023;11(5):1233. DOI: 10.3390/math11051233.
20. Kornilov MV, Kapustnikov AA, Sozonov EA, Sysoeva MV, Sysoev IV. Synchronization regimes in the ring of rodent hippocampal neurons at limbic epilepsy. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(3):357–375. DOI: 10.18500/0869-6632-003113.
21. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J*. 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.



22. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*. 1962;50(10):2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
23. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
24. Yoshida M, Hayashi H. Emergence of sequence sensitivity in a hippocampal CA3–CA1 model. *Neural Netw.* 2007;20(6):653–667. DOI: 10.1016/j.neunet.2007.05.003.
25. Egorov NM, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Kornilov MV, Sysoev IV. Ring generator of neuron-like activity with tunable frequency. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1): 103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025.
26. McCarthy MM, Brown EN, Kopell NJ. Potential network mechanisms mediating electroencephalographic beta rhythm changes during propofol-induced paradoxical excitation. *J. Neurosci.* 2008; 28(50):13488–13504. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.3536-08.2008.
27. Ching S, Cimenser A, Purdon PL, Brown EN, Kopell NJ. Thalamocortical model for a propofol-induced alpha-rhythm associated with loss of consciousness. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*. 2010; 107(52):22665–22670. DOI: 10.1073/pnas.1017069108.
28. V-Ghaffari B, Kouhnavard M, Elbasiouny SM. Mixed-mode oscillations in pyramidal neurons under antiepileptic drug conditions. *PLoS ONE*. 2017;12(6):e0178244. DOI: 10.1371/journal.pone.0178244.
29. Middleton S, Jozsi J, Kispersky T, Lebeau F, Roopun A, Kopell N, Whittington M, Cunningham M. NMDA receptor-dependent switching between different gamma rhythm generating microcircuits in entorhinal cortex. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*. 2008;105(47):18572–18577. DOI: 10.1073/pnas.0809302105.
30. Acker CD, Kopell N, White JA. Synchronization of Strongly Coupled Excitatory Neurons: Relating Network Behavior to Biophysics. *J. Comput. Neurosci.* 2003;15:71–90. DOI: 10.1023/a:1024474819512.
31. Jalic J, Krupa M, Rotstein HG. Mixed-mode oscillations in a three time-scale system of ODEs motivated by a neuronal model. *Dynamical Systems*. 2010;25(4):445–482. DOI: 10.1080/14689360903535760.
32. Dupret D, Pleydell-Bouverie B, Csicsvari J. Inhibitory interneurons and network oscillations. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*. 2008;105(47):18079–18080. DOI: 10.1073/pnas.0810064105.



*Капустников Антон Александрович* — родился в Саратове (2002). Окончил бакалавриат Института физики СГУ имени Н. Г. Чернышевского (2023) по направлению «Биотехнические системы и технологии». В настоящее время обучается в магистратуре факультета компьютерных наук и информационных технологий по направлению «Информатика и вычислительная техника». С 2020 года работает техником в СФ ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН; с 2023 года — ассистентом кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ имени Н. Г. Чернышевского; с 2025 года — в СПбПУ в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы — моделирование биологических процессов, анализ сигналов биологической природы, наука о сетях, нейронаука. Автор 7 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29  
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
 E-mail: anton.kapustnikov.02@mail.ru  
 ORCID: 0000-0002-9846-5556  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1088487



*Сысоева Марина Вячеславовна* — родилась в Саратове (1987). Окончила бакалавриат (2009) и магистратуру (2011) СГУ имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Биомедицинская инженерия». Защитила диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальностям «Биофизика» и «Радиофизика» (2015, СГУ) и на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальностям «Радиофизика» и «Биофизика» (2023, СГТУ). Доцент по специальности «Радиофизика» (2021, СГТУ). Профессор кафедры физики СПбПУ. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, радиотехническое моделирование. Автор 49 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
E-mail: bobrichkek@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-4228-9124  
AuthorID (eLibrary.Ru): 651344



*Сысоев Илья Вячеславович* — родился в Саратове (1983). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по специальности «Физика» (2004, СГУ). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007, СГУ) и доктора физико-математических наук (2019, ИРЭ) по специальности «Радиофизика». Доцент по специальности «Радиофизика» (2020, СГУ), профессор по специальности «Радиофизика» (2024, СГУ). Заведующий кафедрой высшей математики СПбПУ, профессор кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ, ведущий научный сотрудник ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН, ведущий научный сотрудник ИВНД и НФ РАН. Научные интересы — исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 100 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
E-mail: ivssci@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-9203-5504  
AuthorID (eLibrary.Ru): 128457



*Корнилов Максим Вячеславович* — родился в Саратове (1988). Окончил Лицей математики и информатики (2005), механико-математический факультет (2009, бакалавр математики) и факультет нано- и биомедицинских технологий (2011, магистр техники и технологии) Саратовского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2015, СГУ). Доцент кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ имени Н. Г. Чернышевского, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Фундаментальные когнитивные исследования» СПбПУ. Научные интересы — анализ временных рядов, математическое моделирование биологических процессов, автоматическое распознавание изображений, компьютерное зрение. Автор 14 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
E-mail: kornilovmv@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-1634-9007  
AuthorID (eLibrary.Ru): 681980



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 004.032.26, 530.152.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003166  
EDN: QXCLTF

## Рекуррентная нейронная сеть, состоящая из систем ФитцХью–Нагумо: необходимые для обучения характеристики

*Н. И. Семенова*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: ✉semenovani@sgu.ru

*Поступила в редакцию 25.10.2024, принята к публикации 19.02.2025,  
опубликована онлайн 7.03.2025, опубликована 31.07.2025*

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — установить возможность и особенности обучения рекуррентной нейронной сети, состоящей из систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью, для предсказания импульсного (спайкового) сигнала. **Методы.** Рассматриваемая сеть состояла из  $N = 60$  систем ФитцХью–Нагумо с разным временем запаздывания. В процессе обучения решалась задача, какой именно нейрон должен быть активирован и с какой силой запаздывающей обратной связи. Обучение сети проводилось при помощи градиентного спуска с разных начальных условий. В процессе исследований было обнаружено, что использование стандартных для обучения рекуррентных сетей характеристик, таких как среднеквадратическая ошибка или средняя абсолютная ошибка, не применимо в рамках данной задачи, поэтому был предложен альтернативный метод вычисления функции потерь. **Результаты.** Новая предложенная комбинированная функция потерь представляет собой сумму среднеквадратической ошибки и ошибки межспайкового интервала и поэтому обладает следующими преимуществами: 1 — учитывает периодичность спайков и межспайковые интервалы; 2 — адекватно реагирует на отсутствие выходного сигнала сети; 3 — наряду с импульсной динамикой учитывает и колебания небольшой амплитуды, что позволяет предсказывать сложные квазипериодические сигналы. Было показано, что градиентный спуск может быть использован для поставленной задачи, но из-за нелинейности функции потерь необходимо использовать несколько начальных условий. Чем больше начальных условий, тем точнее результат. **Заключение.** Была успешно решена задача предсказания импульсного (спайкового) сигнала при помощи самозамкнутой рекуррентной нейронной сети, состоящей из систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью. Наглядно было показано, какие особенности при этом должна учитывать функция потерь и каким образом должен быть реализован градиентный спуск.

**Ключевые слова:** нейронные сети, рекуррентные нейронные сети, система ФитцХью–Нагумо, запаздывающая обратная связь.

**Благодарности.** Работа была поддержана стипендией Президента РФ СП-749.2022.5.

**Для цитирования:** Семенова Н. И. Рекуррентная нейронная сеть, состоящая из систем ФитцХью–Нагумо: необходимые для обучения характеристики // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 590–604. DOI: 10.18500/0869-6632-003166. EDN: QXCLTF

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems: characteristics required for training

N. I. Semenova

Saratov State University, Russia  
E-mail: [semenovani@info.sgu.ru](mailto:semenovani@info.sgu.ru)

Received 25.10.2024, accepted 19.02.2025,  
available online 7.03.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The purpose of this study is to determine the feasibility and features of training a recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems with delayed feedback to predict an impulse (spike signal). *Methods.* The network under consideration consisted of  $N = 60$  FitzHugh–Nagumo systems with different lag times. During training, the problem of which neuron should be activated and with what strength of lagged feedback was solved. The network was trained using gradient descent from different initial conditions. In the process of research, it was found that the use of standard recurrent network training characteristics such as mean squared error or mean absolute error was not applicable to this task, so an alternative method for computing the loss function was proposed. *Results.* The proposed combined loss function is the sum of MSE error and interspike interval error, and therefore has the following advantages: 1 — includes the information about spike periodicity and interspike intervals, 2 — responds adequately to the absence of a network output signal, 3 — takes into account small amplitude fluctuations in addition to impulse dynamics, which allows predicting complex quasi-periodic signals. It has been shown that gradient descent can be used for the problem, but several initial conditions must be used because of the nonlinearity of the loss function. The more initial conditions, the more accurate the result. *Conclusion.* The problem of predicting a pulse (spike) signal using a self-closed recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems with delayed feedback has been successfully solved. It was clearly shown what features should be taken into account during loss function calculation and how the gradient descent should be realized.

**Keywords:** neural networks, recurrent neural networks, FitzHugh–Nagumo system, time-delayed feedback.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian President scholarship SP-749.2022.5.

**For citation:** Semenova NI. Recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems: characteristics required for training. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):590–604. DOI: 10.18500/0869-6632-003166

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Введение

За последние годы искусственные нейронные сети (ИНС) всё больше и больше внедряются как в нашу повседневную жизнь, так и в различные области науки, промышленности, медицины и т. д. Появление всё более сложных задач требует создания новых топологий сетей, оптимизации процесса обучения нейронных сетей, применения особых функций активации и внесения других изменений. Более глубокое понимание работы биологических нейронных сетей привело к появлению принципиально новых типов ИНС [1], а также к появлению различной сложности глубоких нейронных сетей (например, VGGNet, ResNet, GPipe, BERT, GPT-3).

В настоящее время обучение одной высокопроизводительной модели требует большого количества аппаратных и энергетических ресурсов, что приводит к увеличению углеродного следа [2]. В качестве отдельного направления исследований можно выделить направление аппаратных (аналоговых) нейронных сетей [3, 4]. В зарубежной литературе можно встретить названия “analog neural network” и “hardware neural network”. Это направление подразумевает создание нейронных сетей аппаратно, когда сами нейроны сети и связь между ними реализованы на физическом уровне, что позволяет получить существенный прирост в скорости и энергоэффективности [5, 6].

Наибольшую эффективность на данный момент показывают аппаратные ИНС, основанные на работе лазеров [7, 8], мемристоров [5, 9], спин-трансферных осцилляторов [10], фотоэлектронных чипов [6] и т. д.

Хотя структура ИНС изначально была построена на упрощенном понимании работы мозга, ИНС принципиально отличаются по структуре, нейронным вычислениям и правилам обучения по сравнению с биологической нейронной сетью. Это наблюдение привело к появлению спайковых нейронных сетей (СНС), которые часто называют третьим поколением нейронных сетей, обещающим стать прорывом в устранении узких мест обычных ИНС. Спайковые нейронные сети (СНС) представляют собой особый класс ИНС, где нейронные модели взаимодействуют посредством последовательностей спайков разной длительности и количества [11, 12]. С точки зрения энергопотребления использование СНС на нейроморфном оборудовании, таком как TrueNorth [13], Loihi [14], SpiNNaker [15], NeuroGrid [2] и т. д., является многообещающим подходом [1]. В то же время СНС могут кодировать временную информацию в своих сигналах и поэтому также нуждаются в других и биологически более правдоподобных правилах при обучении и использовании [12, 16].

Несмотря на значительные достижения, производительность СНС на эталонных наборах данных, таких как MNIST [17], CIFAR-10 [18] или Fashion-MNIST [19], часто ниже, чем у обычных ИНС [1, 20]. Однако этот разрыв в некоторых задачах компенсируется быстротой и энергоэффективностью [16, 20, 21]. Тем не менее СНС все еще довольно трудно обучать, в основном из-за их сложной спайковой динамики нейронов и недифференцируемости их функций активации. Частично это можно объяснить тем фактом, что изображения в этих наборах данных были получены с помощью традиционных датчиков, а не событийных камер. Однако у СНС есть и другие существенные недостатки [20]. На данный момент для реализации полного потенциала СНС необходимо решить несколько принципиально важных задач [1]:

- Обучение. Существует два основных подхода к обучению СНС: (i) обучение СНС непосредственно на основе градиентного спуска или неконтролируемое обучение с STDP (spike-timing-dependent plasticity); (ii) преобразование предварительно обученной ИНС в модель СНС. Первый подход имеет проблему при вычислении градиента из-за недифференцируемого спайкового сигнала. Кроме того, СНС, обученная градиентным спуском, ограничена мелкими архитектурами и обеспечивает низкую производительность на больших наборах данных, таких как ImageNet. Второй подход увеличивает вычислительную сложность из-за большого количества временных шагов, хотя эти СНС достигают сопоставимой с ИНС точности из-за сходства между СНС и рекуррентными нейронными сетями и обучаются при помощи обратного распространения ошибки во времени (BPTT) [1].
- Архитектура СНС. В то время как большинство существующих работ по СНС были сосредоточены на проблеме классификации изображений и использовали доступные архитектуры ИНС, такие как VGG или Resnet, разработка принципиально новой структуры специально для СНС является важной и одной из первостепенных задач [1].

Таким образом, часто в СНС в качестве основы используется архитектура глубоких сетей, которые уже показали свою пригодность для решения отдельно взятых задач классификации, а затем эта структура адаптируется под введение нейронов со спайковыми свойствами [16]. При этом важным аспектом СНС является временная динамика, которая больше характерна для рекуррентных нейронных сетей. Поэтому в настоящей работе предлагается принципиально другой подход, когда в качестве нейронов будут взяты модели биологических нейронов, и для такой сети будет показана возможность обучения и необходимые для этого характеристики.

В данной работе в качестве составляющих ИНС будут использоваться модели биологических нейронов на примере системы ФитцХью–Нагумо [22, 23]. Это покажет применимость

различных методов обучения ИНС, что позволит приблизить систему к реальной биологической системе, оценить особенности внедрения моделей биологических нейронов в искусственную сеть и в дальнейшем доработать алгоритмы обучения. В нашей предыдущей работе [24] мы показали, каким образом системы ФитцХью–Нагумо могут быть внедрены в глубокую сеть и использованы для распознавания базы данных рукописных цифр MNIST [25]. Однако в этой работе не учитывались особенности временной динамики. В данной статье рассматривается другая задача, когда сама задача обучения и ее решение основывается на особенностях спайковой динамики парциальных систем.

Для обучения будут использованы импульсные сигналы, состоящие из последовательности импульсов (спайков), сгенерированные одной системой ФитцХью–Нагумо при определенных параметрах. Нейронная сеть, состоящая из систем ФитцХью–Нагумо, будет обучаться для дальнейшего предсказания этого сигнала. Таким образом, решается одновременно задача обучения и рекуррентной сети, и спайковой нейронной сети, в которой присутствует память о предыдущих состояниях. Для систем ФитцХью–Нагумо в роли «памяти» будет выступать запаздывающая обратная связь. В сети будет использоваться несколько систем ФитцХью–Нагумо с разным временем запаздывания, а то, какой именно нейрон и с какой силой запаздывающей обратной связи необходимо активировать, будет решаться в процессе обучения сети.

Выбор систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью вызван тем, что при определенных параметрах связи она может демонстрировать периодическую, квазипериодическую и даже хаотическую динамику [26]. Таким образом, это позволяет расширить возможности генерации выходного сигнала сети. В данной работе для предсказания было использовано несколько типов периодического импульсного сигнала. В дальнейшем планируется расширить исследования и рассмотреть, как сеть справится с более сложными сигналами.

Процесс обучения рекуррентных нейронных сетей, как правило, заключается в подборе матриц связи между нейронами таким образом, чтобы уменьшить ошибку (функцию потерь) между предсказанным сигналом и заранее известным. В качестве такой ошибки часто используется среднеквадратическая ошибка (MSE) или средняя абсолютная ошибка (MAPE). Однако в данной работе было показано, что эти величины не подходят для поставленной задачи, так как не учитывают импульсный характер сигналов. Исходя из этого, была предложена комбинированная функция потерь, которая включает в себя MSE и ошибку межспайкового интервала.

Для обучения нейронной сети, основываясь на предложенной комбинированной функции потерь, был использован градиентный спуск. Было показано, что предложенный метод хорошо работает и позволяет предсказывать сложные квазипериодические сигналы.

## 1. Исследуемая система

Топология исследуемой системы схематично похожа на структуру рекуррентной сети с резервуаром (эхо-сети). Основным компонентом сети является так называемый резервуар, состоящий из моделей биологических нейронов, которые задаются при помощи моделей ФитцХью–Нагумо (ФХН) с запаздывающей обратной связью. Все параметры систем в резервуаре идентичные, за исключением времени запаздывания. Рассматриваемая система схематично приведена на рис. 1.

В данной работе сеть будет обучаться для решения задачи прогнозирования входного импульсного (спайкового) сигнала. Входной сигнал, подаваемый в сеть, в первую очередь используется для задания начального набора данных для запаздывающей обратной связи. После «запоминания» всех необходимых данных из входного сигнала сеть становится самозамкнутой,

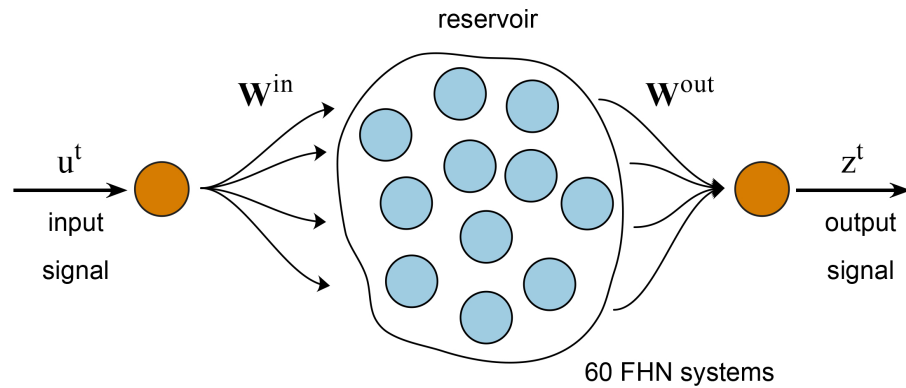


Рис. 1. Схематичное представление исследуемой системы (цвет онлайн)

Fig. 1. Schematic representation of considered system (color online)

и входной сигнал нужен только для сверки с выходным (предсказанным) сигналом сети в процессе обучения. В случае самозамкнутой системы в качестве входного сигнала  $u^t$  в момент времени  $t$  используется выходной сигнал этой же сети в предыдущий момент времени  $z^{t-1}$ .

**Нейроны в резервуаре.** Каждая модель ФХН в резервуаре задается при помощи следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - x^3/3 - y + \gamma(x_\tau - x), \\ \dot{y} &= x + a,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  — это быстро (activator) и медленно меняющиеся (inhibitor) переменные системы, задающие состояние системы в момент времени  $t$ , параметры  $\varepsilon$  и  $a$  — это параметры отдельно взятых систем ФХН, значения  $\varepsilon$  влияют на временной масштаб, а параметр  $a$  является управляющим параметром, при этом значения  $|a| < 1$  соответствуют колебательному режиму функционирования системы со спайковой динамикой, а значения  $|a| > 1$  соответствуют возбудимому режиму, при котором в системе имеется устойчивое состояние равновесия типа фокус, а спайковая динамика может возникнуть только вследствие внешнего воздействия, например, при когерентном резонансе [27]. В данной работе будет рассмотрен возбудимый режим, и значения параметров  $a = 1.01$  и  $\varepsilon = 0.05$  не будут меняться на протяжении всей статьи.

Основным принципиально важным компонентом системы (1) является запаздывающая обратная связь, реализованная за счет последнего слагаемого первого уравнения:  $\gamma(x_\tau - x)$ . Здесь  $\gamma$  — это сила обратной связи,  $x_\tau = x(t - \tau)$  определяет значение переменной  $x$  в момент времени  $(t - \tau)$ , а параметр  $\tau$  является временем запаздывания. Подобный метод задания запаздывающей обратной связи является довольно стандартным для рассматриваемой модели. Он был изначально предложен К. Пирагасом в 1992 году [28] и часто используется для моделирования сетей с запаздыванием [29–31].

В нашей предыдущей работе [26] была рассмотрена одна система ФХН (1) при различных параметрах положительной и отрицательной обратной связи. Было показано, что запаздывающая обратная связь в возбудимом режиме может приводить к появлению колебаний при определенных значениях силы обратной связи  $\gamma$  и времени запаздывания  $\tau$ . При определенных значениях параметров одна система ФХН с запаздывающей обратной связью может демонстрировать периодическую, квазипериодическую и даже хаотическую динамику. С точки зрения именно спайковой динамики временем межспайковых интервалов можно управлять при помощи времени



запаздывания и силы обратной связи. Исходя из результатов, полученных в работе [26], можно сделать вывод, что выбор времени запаздывания  $\tau \in (0, 6]$  и силы обратной связи  $\gamma \in [-0.1, 0.1]$  позволяет получить большое количество разнообразных режимов. По этой причине в настоящей работе внутри резервуара находится  $N = 60$  нейронов ФХН с разными временами запаздывания из диапазона  $\tau_j \in [0.1, 6]$  с шагом  $\Delta\tau = 0.1$ . Таким образом, в резервуаре все системы ФХН задаются при помощи одинаковых параметров, за исключением времени запаздывания  $\tau$ . Входной сигнал  $u^t$  используется для задания начальных последовательностей значений  $x_\tau$  для запаздывающей обратной связи.

**Обучение сети.** Основной целью обучения сети является установление того, нейроны с каким временем запаздывания важны для генерации выходного сигнала и какая сила обратной связи должна быть у них. Обе задачи можно решить при помощи матриц связи  $\mathbf{W}^{\text{in}}$  и  $\mathbf{W}^{\text{out}}$ , задающих связь между входным искусственным нейроном (входным сигналом) и выходным искусственным нейроном (выходным сигналом) в текущий момент времени  $t$ . Эти нейроны показаны оранжевым цветом на рис. 1. Так как нейронов в резервуаре  $N = 60$ , то и размер обеих матриц составляет  $(1 \times N)$ . С точки зрения обучения задание матриц можно производить двумя способами, и в случае самозамкнутой системы эти способы с математической точки зрения приводят к одному и тому же результату.

- Входная матрица задается так, чтобы все значения матрицы были равны единице  $W_i^{\text{in}} = 1$ , а значения матрицы  $\mathbf{W}^{\text{out}}$  задаются равными нулю для нейронов, которые не важны для формирования выходного сигнала, а иначе — равными  $\gamma$ , задавая при этом величину силы обратной связи для выходного сигнала сети, который в следующий момент времени используется как входной. Если в выходной матрице связи все элементы кроме  $j$ -го равны нулю, тогда можно понять, нейрон с каким временем запаздывания важен для генерации выходного сигнала.
- Входная матрица связи задается как  $\mathbf{W}^{\text{in}} = \gamma \cdot \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — матрица, заполненная единицами, а конкретные значения  $\gamma$  подбираются в процессе обучения, но одинаковы для всех  $W_i^{\text{in}}$ . Выходная матрица связи  $\mathbf{W}^{\text{out}}$  является бинарной матрицей, в которой влияние ненужных нейронов резервуара соответствует нулевым значениям, а те нейроны, которые важны для формирования выходного сигнала, соответствуют единичным значениям в выходной матрице. Таким образом, если в выходной матрице только один  $j$ -й элемент равен единице, то можно установить, нейрону с каким временем запаздывания он соответствует.

В данной работе мы будем использовать второй метод. Тогда выходной сигнал сети задается как

$$z^t = z(t) = \sum_{j=1}^N W_j^{\text{out}} x_j(t). \quad (2)$$

Таким образом, целью обучения является: а) подбор значения  $\gamma$ , отвечающего за формирование матрицы  $\mathbf{W}^{\text{in}}$ ; б) подбор матрицы  $\mathbf{W}^{\text{out}}$  таким образом, чтобы один ее элемент был равен 1, а остальные — нулю.

Как видно из рис. 1, в системе присутствует входной сигнал  $u^t$ . Этот сигнал используется сначала для задания начальных значений запаздывающего сигнала для всех систем ФХН, а затем для создания самозамкнутой сети. В первом случае входной сигнал используется для задания массива начальных значений  $x_\tau$ . Для каждой  $j$ -ой системы ФХН длина такого массива будет разной, так как у каждой системы свое время запаздывания  $\tau_j$ . После того, как все данные для запаздывающей связи получены, система становится самозамкнутой и отключается от обучающего входного сигнала. Далее в процессе обучения он будет использоваться только для сверки с выходным сигналом сети  $z^t$  и подбора матриц связи. В самозамкнутой системе входной сигнал

сети  $u^t$  продолжает заноситься в массивы запаздывающего сигнала, но это уже не обучающий сигнал, а выходной сигнал этой же сети в предыдущий момент времени  $z^{t-1}$ . В процессе обучения подбирается значение силы запаздывающей обратной связи  $\gamma$ , поэтому в самозамкнутой системе входной сигнал хоть и не входит в уравнение (1) в явном виде, но имеет место следующее равенство:

$$\gamma x_{\tau,j} = W_j^{\text{in}} \cdot u(t - \tau) = W_j^{\text{in}} \cdot u^{t-\tau}. \quad (3)$$

В данной работе нейроны внутри самого резервуара не влияют друг на друга, однако входной сигнал важен для каждого из нейронов. В дальнейших работах планируется добавить и связь внутри резервуара.

## 2. Функция потерь и необходимые характеристики

**2.1. Среднеквадратическая ошибка (MSE).** Наиболее часто используемая характеристика, необходимая для оценки расхождения предсказанного и целевого сигнала, — это среднеквадратическая ошибка (mean squared error, MSE), которая вычисляется следующим образом:

$$\text{MSE}(u, z) = \sum_{t=1}^T (z^t - u^{t+1})^2 / T, \quad (4)$$

где  $z^t$  — предсказанный сигнал в момент времени  $t$ , то есть выходной сигнал сети в момент времени  $t$ , а  $u^{t+1}$  — обучающий (целевой) сигнал сети в следующий момент времени.  $T$  — общее число точек в реализации. Из-за того, что сеть обучается для предсказания сигнала, необходимо сравнивать выходной сигнал сети  $z^t$  с входным (целевым)  $u^{t+1}$ . В процессе обучения для сравнения  $u$  используется целевой сигнал, а не выход самозамкнутой сети.

На рис. 2, а приведен пример входного сигнала сети, который задавался как реализация одной системы ФХН с параметрами  $\tau = 2$ ,  $\gamma = 0.03$ .

Для понимания расхождения с искомой реализацией при изменении времени запаздывания и силы обратной связи на рис. 2, б приведены значения MSE, полученные при сравнении целевого сигнала с известными параметрами и выходного сигнала сети в зависимости от того, нейрон с каким временем запаздывания выбирался для сравнения и какая сила обратной связи  $\gamma$  должна использоваться при задании входной матрицы  $\mathbf{W}^{\text{in}}$ . По горизонтальной оси рис. 2, б отложено время запаздывания  $\tau$ , однако ему в соответствие можно поставить номер нейрона из резервуара  $j = \tau / \Delta\tau$ . Таким образом, для идеального попадания в искомые параметры получается, что в выходной матрице  $\mathbf{W}^{\text{out}}$  нулю должны быть равны все элементы, кроме  $j = 2/0.1 = 20$ , который равен 1. Входная матрица  $\mathbf{W}^{\text{in}}$  должна быть заполнена значениями  $\gamma = 0.03$ .

На рис. 2, б зеленым кругом выделены правильные значения  $\tau$  и  $\gamma$ , которые использовались для получения целевого сигнала. Исходя из цветовой гаммы, видно, что MSE нелинейно изменяется при вариации параметров  $\gamma$  и  $\tau$ . Большая темно-фиолетовая область с довольно небольшой ошибкой соответствует отсутствию колебаний в выходном сигнале, а значение MSE, близкое к 0 (черный прямоугольник), можно получить, только если попасть в параметры, точно соответствующие входному сигналу. Спайковый выходной сигнал можно получить и в голубых областях MSE, однако из-за сбоя фазы характеристика MSE в этом случае не сработает корректно, даже если разница в периодах минимальна. Таким образом, использование характеристики MSE в чистом виде не применимо для имеющейся задачи, так как в общем случае для неизвестного сигнала нет никаких гарантий, что этот сигнал можно будет задать при помощи выбранного диапазона времени запаздывания в резервуаре, а поиск похожего сигнала при помощи выбранной характеристики невозможен. Еще одним недостатком этой величины является то, что при отсутствии

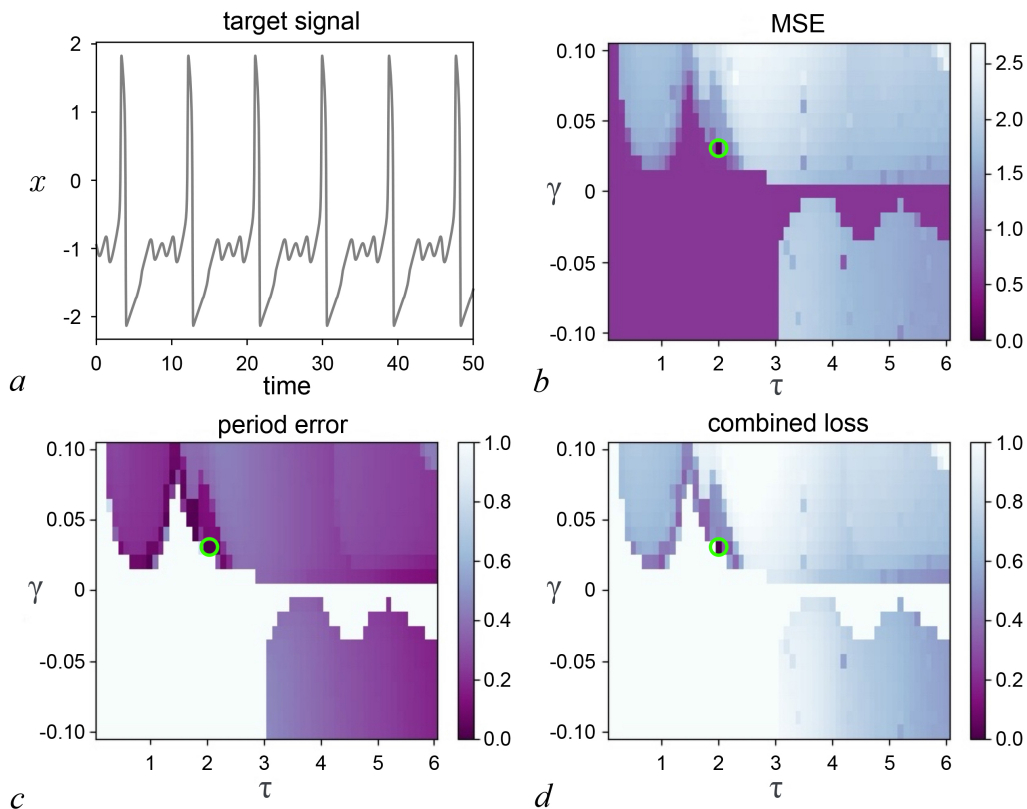


Рис. 2. Входной сигнал, который необходимо предсказать (a), полученный при параметрах  $\tau = 2$ ,  $\gamma = 0.03$ . Для этого сигнала были вычислены среднеквадратичная ошибка (b), ошибка периода (c) и комбинированная функция потерь (d) при вариации матриц связи, которые соответствуют предсказанным сигналам с некоторыми параметрами  $\tau$  и  $\gamma$ . Для удобства оценки и сравнения эти характеристики представлены на плоскостях этих параметров (цвет онлайн)

Fig. 2. The input signal to be predicted (a), obtained with parameters  $\tau = 2$ ,  $\gamma = 0.03$ . For this signal, the mean square error (b), period error (c), and combined loss function (d) were calculated with variation of the coupling matrices that correspond to the predicted signals with some parameters  $\tau$  and  $\gamma$ . For ease of evaluation and comparison, these characteristics are presented on the planes of these parameters (color online)

колебаний (нижний левый угол на рис. 2, b) эта характеристика не равна нулю. При использовании автоматических методик поиска минимальных значений в большинстве случаев минимум MSE при зафиксированном  $\tau$  будет приходиться именно на области с полным отсутствием колебаний.

**2.2. Оценка межспайковых интервалов.** На рис. 2, a приведен сигнал, в котором, кроме спайковой составляющей, присутствуют еще квазипериодические колебания около состояния равновесия. Однако иногда принципиально важна только спайковая составляющая в сигнале, особенно межспайковые интервалы. Как было показано в работе [26], межспайковым интервалом можно управлять при помощи времени запаздывания и силы запаздывающей связи.

Средний межспайковый интервал вычислялся следующим образом. Исходя из формы сигнала на рис. 2, индикатором совершения спайка можно считать момент, когда последовательность значений сигнала  $x$  перестает быть возрастающей и становится убывающей, при этом, чтобы не учитывать небольшие колебания около состояния равновесия, накладывается дополнительное условие, что эти значения должны быть строго положительными. Далее между такими событиями вычисляется среднее время, которое в дальнейшем будем называть средним межспайковым интервалом. Для реализации, приведенной на рис. 2, a, межспайковый интервал составил приблизительно 8.88.

На рис. 2, с приведена ошибка межспайковых интервалов для целевого сигнала  $u$  и выходного сигнала сети  $z$ , рассчитанная следующим образом:

$$\xi(u, z) = \frac{|P_z - P_u|}{P_z + P_u}, \quad (5)$$

где  $P_z$  — средний межспайковый интервал выходного сигнала сети,  $P_u$  — аналогичная величина для целевого сигнала. Межспайковые интервалы вычислялись, начиная с момента времени 100, чтобы исключить период установления колебаний для выходного сигнала сети. Расчет величины (5) аналогичен вычислению ошибки SMAPE. Выбор этой величины обусловлен тем, что сама эта величина изменяется в пределе от 0 до 1, а значению 1 будет соответствовать или полное отсутствие спайков в выходном сигнале сети, или если межспайковые интервалы во много раз отличаются. Значения, близкие к 0, будут отвечать наилучшему соответствию между  $P_u$  и  $P_z$ . Предполагается, что целевой сигнал  $u$  уже содержит некоторую спайковую динамику, поэтому  $P_u \neq 0$ . Однако существует некоторая область параметров  $\gamma$  и  $\tau$  (левая нижняя четверть на рис. 2, b), для которых наблюдается полное отсутствие колебаний. Если бы ошибка вычислялась стандартным методом с использованием только  $P_u$  в знаменателе, то ошибка была бы равна 1. Отличие значений  $P_u$  и  $P_z$  в несколько раз тоже бы выглядело нерепрезентативно, так как тогда ошибка не имеет верхнего и нижнего предела. Использование в знаменателе значения  $P_z$  решило бы последнюю проблему, но тогда отсутствие спайков в выходном сигнале привело бы к наличию 0 в знаменателе.

На рис. 2, с максимальной ошибке соответствует белый цвет. Из рисунка видно, что в рассматриваемом диапазоне значений параметров есть несколько значений параметров с минимальной ошибкой межспайкового интервала. Сравнивая рис. 2, b, c, видно, что эта характеристика лучше подходит для оценки поведения системы, хотя и учитывает только спайковые характеристики сигналов.

**2.3. Комбинированная функция потерь.** Обычно целью обучения нейронных сетей является подбор матриц связи для уменьшения разницы (функции ошибки) между целевым сигналом и выходным сигналом сети. Сам поиск оптимальных матриц связи, основываясь на имеющейся функции потерь, может быть реализован разными методами. Наиболее часто используемым является градиентный спуск.

В качестве функции ошибки в задачах предсказания часто используется среднеквадратичная ошибка или средняя абсолютная ошибка. Однако, как было показано выше, эта ошибка в чистом виде неприменима для имеющейся задачи. Поэтому для вычисления функции потерь будет использована следующая комбинированная величина, которая учитывает как межспайковые интервалы, так и общую ошибку:

$$L(u, z) = \frac{\text{MSE}(u, z)}{\max(u) - \min(u)} + \xi(u, z). \quad (6)$$

Наличие знаменателя в первом слагаемом обусловлено необходимостью нормировки значений MSE, которые не имеют верхнего предела. При вариации параметров  $\tau$  и  $\gamma$  для одной изолированной системы ФХН общий разброс значений  $x$  и  $y$  остается практически неизменным. Поэтому нормировки на разброс значений в целевом сигнале будет достаточно для сохранения первого слагаемого в пределах от 0 до 1. Если в сигнале сети отсутствуют колебания, тогда первое слагаемое будет равно 0, а второе слагаемое будет равно 1, поэтому комбинированная функция потерь будет равна 1. Если же целевой сигнал и сигнал сети максимально близки, тогда оба слагаемых, а значит, и функция потерь, будут стремиться к 0.

Комбинированная функция потерь приведена на рис. 2, *d*. Из графиков видно, что новая функция ошибок все еще не монотонная, но при этом появилось больше вариантов для поиска похожих режимов функционирования, что позволяет находить похожие режимы, даже если в резервуаре отсутствует необходимое время запаздывания.

### 3. Обучение сети при помощи градиентного спуска

Градиентный спуск — это самый распространенный метод обучения нейронных сетей. Его смысл заключается в автоматическом поиске минимального значения функции потерь и значений матриц связи, которые ему соответствуют [32]. Смысл обучения нейронной сети в данной работе заключается в предсказании входного спайкового сигнала и автоматическом поиске  $\tau$  и  $\gamma$ , которые ему могут соответствовать. Эта задача сопряжена с поиском минимального значения комбинированной функции потерь (6) и того, для каких именно нейронов из резервуара, при какой силе обратной связи  $\gamma$  этот минимум достигается.

Смысл градиентного спуска заключается в постепенном спуске к минимальному значению функции потерь путем изменения матриц связи с некоторым шагом. В зависимости от конкретного метода этот шаг может или быть постоянным, или изменяться в зависимости от величины производной функции потерь. Особенность градиентного спуска заключается в том, что в случае невыпуклой функции потерь конечный результат будет сильно зависеть от начальных условий, так как градиентный спуск может «попасть» в локальный минимум и так и не добраться до глобального минимума. По этой причине есть смысл запускать градиентный спуск с нескольких начальных условий.

В рамках решаемой задачи применение градиентного спуска заключалось в следующем. В матрице  $\mathbf{W}^{\text{out}}$  поочередно изменялось с 0 на 1 одно из значений. Далее для каждой такой конфигурации изменялись значения в матрице  $\mathbf{W}^{\text{in}}$ . Градиентный спуск применялся для комбинированной функции потерь, вычисленной между целевым сигналом и выходным сигналом сети. Начальные условия для матрицы задавались как  $\mathbf{W}^{\text{in}} = \gamma_0 \mathbf{I}$ , где  $\gamma_0$  — некоторая константа, некоторые значения которой будут рассмотрены позже. После выполнения градиентного спуска можно было определить, при каких значениях  $\mathbf{W}^{\text{in}}$  может быть достигнута минимальная комбинированная функция потерь. После этого в матрице  $\mathbf{W}^{\text{out}}$  выбирался другой нейрон, и процедура повторялась. После перебора всех  $N$  нейронов выбиралась та пара матриц  $\mathbf{W}^{\text{in}}$  и  $\mathbf{W}^{\text{out}}$ , которой соответствовало минимальное значение комбинированной функции потерь.

На рис. 3, *a* приведены графики для входного сигнала, использовавшегося в предыдущих разделах, полученного при параметрах  $\tau = 2$  и  $\gamma = 0.03$ . Для этого сигнала были получены значения комбинированной функции потерь в зависимости от матриц связи, которые соответствовали некоторым значениям  $\tau$  и  $\gamma$ . Для удобства значения функции потерь приведены в зависимости от подобранных значения  $\tau$  и  $\gamma$  на первом графике рис. 3, *a*. На этом графике оранжевыми точками показаны минимальные значения, найденные при помощи градиентного спуска, стартующего с четырех начальных условий  $\gamma_0 = \pm 0.1, \pm 1$  с постоянным шагом 0.01. Процедура градиентного спуска была проведена для каждого из  $N$  резервуарных нейронов, то есть для каждого  $j$ -го нейрона, который соответствует своему времени запаздывания  $\tau = j \cdot \Delta\tau$ . Поэтому на рис. 3, *a*  $N$  оранжевых точек. Далее из всех  $N$  найденных минимальных значений функции потерь можно найти самое минимальное, и это будет соответствовать наиболее похожему на входной сигнал выходному сигналу сети. Для  $\tau = 2$  и  $\gamma = 0.03$  при помощи градиентного спуска с четырех начальных условий удалось идеально попасть в искомые параметры. На втором графике рис. 3, *a* серым показан целевой сигнал, а оранжевым — предсказанный с указанием подобранных значений параметров  $\tau$  и  $\gamma$ , которые ему соответствуют.



Из-за нелинейности функции потерь и наличия областей с одинаковыми значениями комбинированной функции потерь в некоторых случаях необходимо увеличить количество начальных условий для градиентного спуска. Для этого были рассмотрены восемь начальных условий  $\gamma_0 = \pm 0.1, \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 1$ . Данные, полученные в этом случае, показаны в виде зеленых точек на левом графике рис. 3, а и зеленой прерывистой линии на правом графике рис. 3, а. Так как для выбранных параметров старта с четырех начальных условий уже было достаточно, то ожидаемо

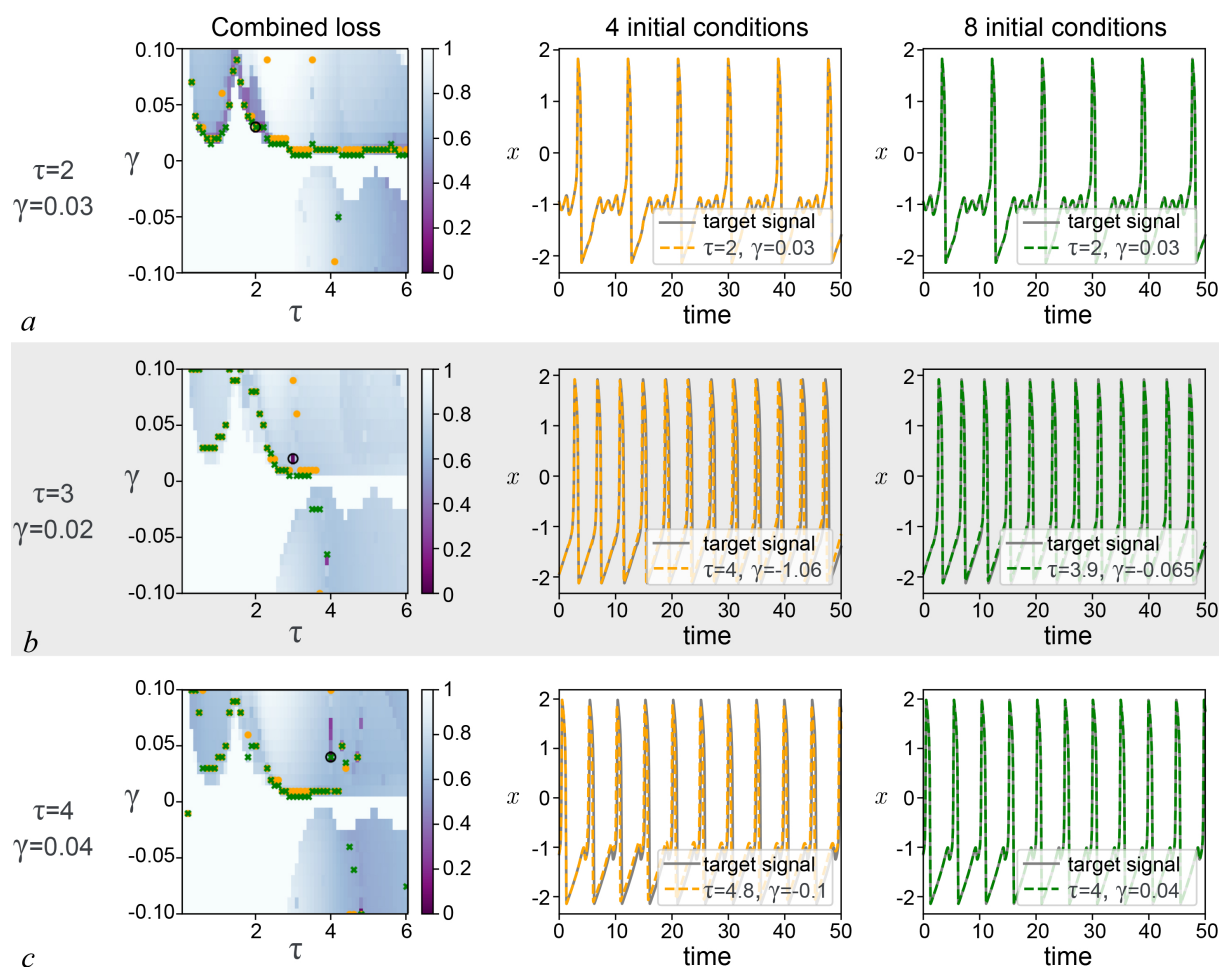


Рис. 3. Использование градиентного спуска для трех целевых сигналов, полученных при параметрах:  $a - \tau = 2, \gamma = 0.03$ ,  $b - \tau = 3, \gamma = 0.02$ ,  $c - \tau = 4, \gamma = 0.04$ . Графики слева демонстрируют значения комбинированной функции потерь на плоскости соответствующих параметров  $\tau$  и  $\gamma$ . Сами значения были получены перебором с шагом 0.01. На этом же рисунке оранжевыми и зелеными точками показаны результаты применения градиентного спуска с 4 и 8 начальными условиями соответственно. Средние графики показывают искомым сигнал (серая линия) и предсказанный сигнал (оранжевая пунктирная линия), полученный при помощи градиентного спуска с 4 начальными условиями, а в легендах указаны параметры  $\tau$  и  $\gamma$ , восстановленные из матриц связи обученной нейронной сети. Правые графики получены аналогичным образом, но при помощи градиентного спуска с 8 начальными условиями (цвет онлайн)

Fig. 3. The use of gradient descent for three input signals obtained with parameters:  $a - \tau = 2, \gamma = 0.03$ ,  $b - \tau = 3, \gamma = 0.02$ ,  $c - \tau = 4, \gamma = 0.04$ . The graphs on the left demonstrate the values of the combined loss function on the plane of the corresponding parameters  $\tau$  and  $\gamma$ . The values themselves were obtained by enumeration with a step of 0.01. In the same figure, the orange and green dots show the results of applying gradient descent with 4 and 8 initial conditions, respectively. The middle graphs show the target signal (gray line) and the predicted signal (orange dotted line) obtained using gradient descent with 4 initial conditions, and the legends indicate the parameters  $\tau$  and  $\gamma$ , reconstructed from the connection matrices of the trained neural network. The right graphs are obtained in a similar way, but using gradient descent from 8 initial conditions (color online)

для восьми начальных условий тоже удалось точно попасть в искомые параметры. Однако это работает не всегда. На других строках рис. 3, *b*, *c* приведены результаты для входного сигнала с другими параметрами. Из рисунка видно, что в некоторых случаях увеличение числа начальных условий приводит к значительному повышению точности. На левых графиках рис. 3 настоящее минимальное значение функции потерь отмечено черным кружком.

На рис. 3 были рассмотрены значения параметров, в которые теоретически можно попасть при помощи градиентного спуска с выбранным шагом. Для сохранения общности далее будут рассмотрены случаи  $\tau = 3.05$  и  $\tau = 4.05$ , то есть такие времена запаздывания, которых точно не может быть в резервуаре. На рис. 4 приведены результаты применения обоих градиентных спусков в этом случае. Графики были получены аналогичным образом, что и для рис. 3. Из графиков видно, что глобальный минимум комбинированной функции потерь, отмеченный черным кружком на левых графиках, так и не был достигнут. Однако, судя по временным реализациям, подобранных в процессе градиентного спуска матриц связи и соответствующих им значений  $\tau$  и  $\gamma$  было достаточно для задания похожих сигналов. Увеличение количества начальных условий приводит к значительному повышению точности в этом случае.

Одной из проблем применения градиентного спуска является наличие областей, где комбинированная функция потерь не меняется. При попадании в такую область алгоритм градиентного спуска останавливается, и дальнейший подбор значений становится невозможным без старта с других начальных условий. Поэтому здесь работает принцип: больше начальных условий — точнее результат. Еще одной проблемой является шаг градиентного спуска. В данном случае на рис. 3, 4 выбора шага 0.01 было достаточно для достижения необходимых минимумов, однако выбор слишком большого шага может привести к тому, что алгоритм так и не достигнет минимума, а слишком маленький шаг — к большому числу ненужных вычислений. В дальнейших работах планируется рассмотреть применимость других алгоритмов обучения, в частности, применение градиентного спуска с адаптивным шагом.

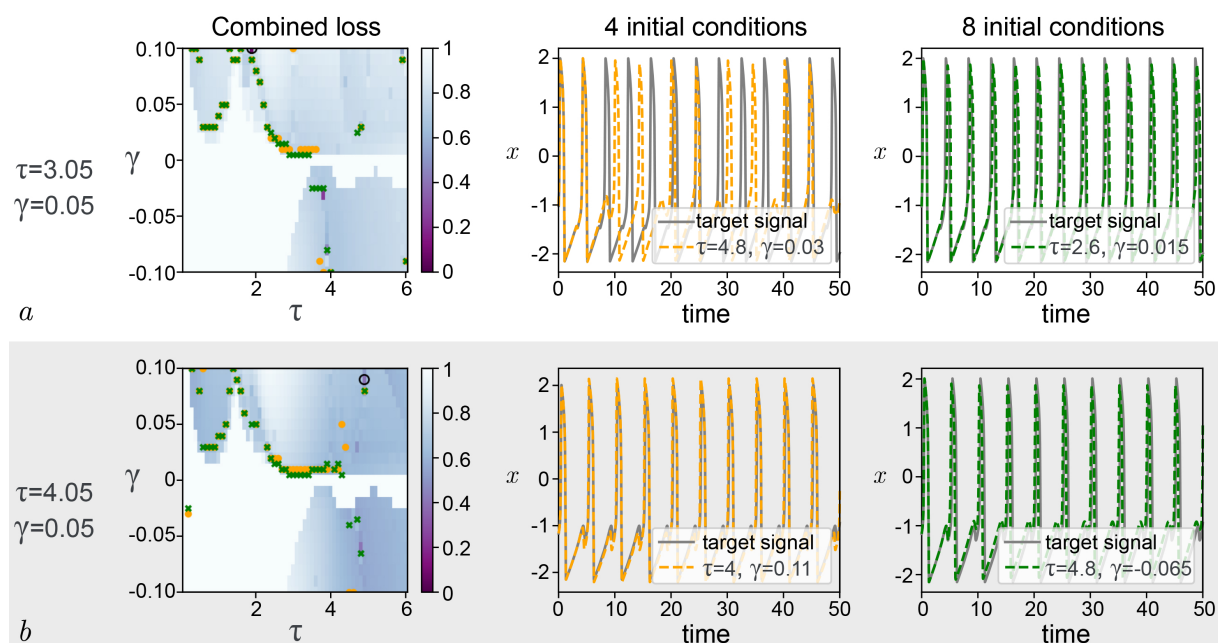


Рис. 4. Использование градиентного спуска для двух целевых сигналов, полученных при параметрах: *a* —  $\tau = 3.05$ ,  $\gamma = 0.05$ , *b* —  $\tau = 4.05$ ,  $\gamma = 0.05$ . Остальное построение и структура рисунка аналогично рис. 3 (цвет онлайн)

Fig. 4. The use of gradient descent for three input signals obtained with parameters: *a* —  $\tau = 3.05$ ,  $\gamma = 0.05$ , *b* —  $\tau = 4.05$ ,  $\gamma = 0.05$ . The rest of the construction and structure of the figure is similar to Fig. 3 (color online)



## Заключение

В данной работе решалась задача предсказания сложного квазипериодического спайкового сигнала при помощи рекуррентной нейронной сети с резервуаром с моделями биологических нейронов на примере систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью. Была предложена методика обучения, которая объединяет стандартные для обучения искусственных нейронных сетей методы и то, как это может быть адаптировано для систем ФитцХью–Нагумо. Общий смысл заключается в том, что в качестве нейронов резервуара использовались  $N = 60$  систем ФитцХью–Нагумо с разным временем запаздывания  $\tau_j$ . В процессе обучения подбирается то, какой из нейронов необходимо активировать и с какой силой обратной связи. В данной работе предлагается, каким образом эту информацию можно внедрить в стандартные для искусственных нейронных сетей матрицы связи  $\mathbf{W}^{\text{in}}$  и  $\mathbf{W}^{\text{out}}$ .

Для обучения сети использовалась комбинированная функция потерь, включающая в себя как ошибку межспайковых интервалов, так и общую ошибку MSE. Далее для полученной функции потерь был применен градиентный спуск, который позволил найти минимальные значения функции потерь, какие матрицы связи  $\mathbf{W}^{\text{in}}$  и  $\mathbf{W}^{\text{out}}$  им соответствуют, а из этого и оптимальное время запаздывания  $\tau$  и силу обратной связи  $\gamma$ .

Предложенные методы были использованы для нескольких типов сложных спайковых сигналов. Были рассмотрены входные сигналы с заведомо известными параметрами  $\tau$  и  $\gamma$  как для случаев, когда в резервуаре есть нейрон с идеально подходящим временем запаздывания (рис. 3), так и для случаев, когда подходящего времени запаздывания нет в резервуаре (рис. 4). В обоих случаях предложенная методика помогла найти наиболее похожие сигналы. В данной работе было показано, что градиентный спуск может быть успешно применен для поставленной задачи, однако из-за ощутимой нелинейности функции потерь необходимо использование нескольких начальных условий градиентного спуска. Чем больше начальных условий, тем выше точность. Улучшения методики обучения можно попытаться добиться при помощи использования стохастического градиентного спуска, градиентного спуска с адаптивным шагом или, возможно, при помощи других методик обучения сетей. Сравнение и применение этих методов будет целью исследования в следующих работах.

## References

1. Yamazaki K, Vo-Ho V-K, Bulsara D, Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sci.* 2022;12(7):863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
2. Benjamin BV, Gao P, McQuinn E, Choudhary S, Chandrasekaran AR, Bussat JM, Alvarez-Icaza R, Arthur JV, Merolla PA, Boahen K. Neurogrid: A Mixed-Analog-Digital Multichip System for Large-Scale Neural Simulations. *Proceedings of the IEEE.* 2014;102(5):699–716. DOI: 10.1109/JPROC.2014.2313565.
3. Schuman CD, Potok TE, Patton RM, Birdwell JD, Dean ME, Rose GS, Plank JS. A survey of neuromorphic computing and neural networks in hardware. *arXiv:1705.06963.* arXiv Preprint, 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1705.06963.
4. Ghimire D, Kil D, Kim S. A survey on efficient convolutional neural networks and hardware acceleration. *Electronics.* 2022;11(6):945. DOI: 10.3390/electronics11060945.
5. Aguirre F, Sebastian A, Le Gallo M, Song W, Wang T, Yang JJ, Lu W, Chang M-F, Ielmini D, Yang Y, Mehonic A, Kenyon A, Villena MA, Roldán JB, Wu Y, Hsu H-H, Raghavan N, Suñé J, Miranda E, Eltawil A, Setti G, Smagulova K, Salama KN, Krestinskaya O, Yan X, Ang K-W, Jain S, Li S, Alharbi O, Pazos S, Lanza M. Hardware implementation of memristor-based artificial neural networks. *Nat. Commun.* 2024;15(1):1974. DOI: 10.1038/s41467-024-45670-9.
6. Chen Y, Nazhamaiti M, Xu H, Meng Y, Zhou T, Li G, Fan J, Wei Q, Wu J, Qiao F, Fang L,

- Dai Q. All-analog photoelectronic chip for high-speed vision tasks. *Nature*. 2023;623(7985):48–57. DOI: 10.1038/s41586-023-06558-8.
7. Brunner D, Soriano MC, Mirasso CR, Fischer I. Parallel photonic information processing at gigabyte per second data rates using transient states. *Nat. Commun.* 2013;4:1364. DOI: 10.1038/ncomms2368.
8. McMahon PL. The physics of optical computing *Nat. Rev. Phys.* 2023;5(12):717–734. DOI: 10.1038/s42254-023-00645-5.
9. Tuma T, Pantazi A, Le Gallo M, Sebastian A, Eleftheriou E. Stochastic phase-change neurons. *Nature Nanotechnology*. 2016;11:693–699. DOI: 10.1038/nnano.2016.70.
10. Torrejon J, Riou M, Araujo FA, Tsunegi S, Khalsa G, Querlioz D, Bortolotti P, Cros V, Yakushiji K, Fukushima A, Kubota H, Yuasa S, Stiles MD, Grollier J. Neuromorphic computing with nanoscale spintronic oscillators. *Nature*. 2017;547(7664):428–431. DOI: 10.1038/nature23011.
11. Ponulak F, Kasinski A. Introduction to spiking neural networks: Information processing, learning and applications. *Acta Neurobiologiae Experimentalis*. 2011;71(4):409–433. DOI: 10.55782/ane-2011-1862.
12. Ghosh-Dastidar S, Adeli H. Spiking neural networks. *International Journal of Neural Systems*. 2009;19(4):295–308. DOI: 10.1142/S0129065709002002.
13. Merolla PA, Arthur JV, Alvarez-Icaza R, Cassidy AS, Sawada J, Akopyan F, Jackson BL, Imam N, Guo C, Nakamura Yu, Brezzo B, Vo I, Esser SK, Appuswamy R, Taba B, Amir A, Flickner MD, Risk WP, Manohar R, Modha DS. A million spiking-neuron integrated circuit with a scalable communication network and interface. *Science*. 2014;345(6197):668–673. DOI: 10.1126/science.1254642.
14. Davies M, Srinivasa N, Lin T-H, Chinya G, Cao Y, Choday SH, Dimou G, Joshi P, Imam J, Jain S, Liao Y, Lin C-K, Lines A, Liu R, Mathaikutty D, McCoy S, Paul A, Tse J, Venkataramanan G, Weng Y-H, Wild A, Yang Y, Wang H. Loihi: A Neuromorphic manycore processor with On-Chip Learning. *IEEE Micro*. 2018;38(1):82–99. DOI: 10.1109/MM.2018.112130359.
15. Furber SB, Galluppi F, Temple S, Plana LA. The SpiNNaker Project. *Proceedings of the IEEE*. 2014;102(5):652–665. DOI: 10.1109/JPROC.2014.2304638.
16. Tavanaei A, Ghodrati M, Kheradpisheh SR, Masquelier T, Maida A. Deep learning in spiking neural networks. *Neural Networks*. 2019;111:47–63. DOI: 10.1016/j.neunet.2018.12.002.
17. LeCun Y, Bottou L, Bengio Y, Haffner P. Gradient-based learning applied to document recognition. *Proceedings of the IEEE*. 1998;86(11):2278–2324. DOI: 10.1109/5.726791.
18. Krizhevsky A, Hinton G. Learning multiple layers of features from tiny images. Technical Report. Toronto: University of Toronto; 2009. Available from: <http://www.cs.utoronto.ca/~kriz/learning-features-2009-TR.pdf>.
19. Xiao H, Rasul K, Vollgraf R. Fashion-MNIST: A novel image Dataset for benchmarking machine learning algorithms. *arXiv:1708.07747*. arXiv Preprint, 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1708.07747.
20. Nunes JD, Carvalho M, Carneiro D, Cardoso JS. Spiking Neural Networks: A survey. *IEEE Access*. 2022;10:60738–60764. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3179968.
21. Han B, Roy K. Deep Spiking Neural Network: Energy Efficiency Through Time Based Coding. In: Vedaldi A, Bischof H, Brox T, Frahm JM, editors. *Computer Vision – ECCV 2020*. ECCV 2020. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12355. Cham: Springer; 2020. P. 388–404. DOI: 10.1007/978-3-030-58607-2\_23.
22. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.* 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
23. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*. 1962;50(10):2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
24. Bogatenko T, Sergeev K, Slepnev A, Kurths J, Semanova N. Symbiosis of an artificial neural

- network and models of biological neurons: Training and testing. *Chaos*. 2023;33(7):073122. DOI: 10.1063/5.0152703.
25. LeCun Y, Cortes C, Burges CJC. The MNIST database of handwritten digits [Electronic resource] Available from: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>.
  26. Semenov VV, Bukh AV, Semenova N. Delay-induced self-oscillation excitation in the Fitzhugh-Nagumo model: Regular and chaotic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023;172:113524. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113524.
  27. Pikovsky AS, Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78(5):775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
  28. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*. 1992; 170(6):421–428. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90745-8.
  29. Schöll E, Hiller G, Hövel P, Dahlem MA. Time-delayed feedback in neurosystems. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2009;367(1891):1079–1096. DOI: 10.1098/rsta.2008.0258.
  30. Just W, Pelster A, Schanz M, Schöll E. Delayed complex systems: an overview. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2010;368(1911):303–304. DOI: 10.1098/rsta.2009.0243.
  31. Masoliver M, Malik N, Schöll E, Zakharova A. Coherence resonance in a network of FitzHugh-Nagumo systems: Interplay of noise, time-delay, and topology. *Chaos*. 2017;27(10):101102. DOI: 10.1063/1.5003237.
  32. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms. *arXiv:1609.04747*. *arXiv Preprint*, 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1609.04747.



*Семенова Надежда Игоревна* — родилась в Саратове (1992). Окончила с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (2014). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2017, СГУ). Получила PhD степень по специальности «Оптика» в университете Бургундии Франш-Конте (Франция, 2021). С 2021 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского в должности доцента и старшего научного сотрудника. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, нейронные сети, машинное обучение, влияние шумов, пространственно-временные режимы в ансамблях и сетях, химерные состояния, уединенные состояния, запаздывающая обратная связь. Опубликовала свыше 40 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский  
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: [semenovani@sgu.ru](mailto:semenovani@sgu.ru)  
 ORCID: 0000-0002-9180-3030  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 850757

## EDITOR-IN-CHIEF

*Yu. V. Gulyaev*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

## DEPUTY EDITORS

*I. V. Sysoev*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

## MANAGING EDITOR

*M. V. Sysoeva*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*S. Boccaletti*, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

*A. M. Bykov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

*N. S. Ginzburg*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*O. I. Kanakov*, Ph.D., Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

*N. V. Kuznetsov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

*G. van Luijelaar*, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

*A. Lüttjohann*, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

*G. G. Malinetskii*, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*I. I. Mokhov*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

*A. B. Neiman*, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

*V. I. Nekorkin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

*V. V. Tuchin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*E. Ya. Frisman*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

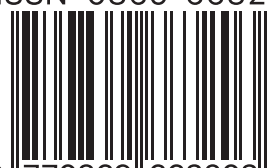
*V. A. Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

*V. A. Cherepenin*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >